



Université des
Sciences et Tech-
nologies de Lille



Laboratoire
Paul Painlevé

Laboratoire Paul
Painlevé

École Doctorale Sciences pour l'ingénieur de Lille

THÈSE DE DOCTORAT
Discipline : Mathématiques

Numéro d'ordre : 41406

présentée et soutenue publiquement le 12 Juin 2014 par

Hubert Klaja

**Autour des projections orthogonales :
image numérique, principe d'incertitude
et problème du sous-espace invariant**

dirigée par Catalin BADEA et Sophie GRIVAUX

M. Catalin BADEA	Université Lille 1	Directeur
M ^{me} Isabelle CHALENDAR	Université Lyon 1	Rapportrice
M. Jean ESTERLE	Université Bordeaux 1	Président
M. Emmanuel FRICAIN	Université Lille 1	Examineur
M. Gilles GODEFROY	Université Paris 6	Examineur
M ^{me} Sophie GRIVAUX	Université Lille 1	Directrice
M. Christian LE MERDY	Université de Franche-Comté	Rapporteur

Laboratoire Paul Painlevé
Cité Scientifique
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex

Résumé

Résumé (français)

Dans cette thèse en théorie des opérateurs, on s'intéresse aux projections orthogonales, à l'image numérique d'un opérateur agissant sur un espace de Hilbert, au principe d'incertitude, au problème du sous-espace invariant et aux perturbations d'opérateurs diagonaux.

Après un premier chapitre introductif, on s'intéresse à l'image numérique d'un produit de projections orthogonales et aux applications possibles. On donne une formule explicite de l'image numérique d'un produit de projections orthogonales en fonction de son spectre. On montre comment reconstruire une partie du spectre d'un produit de projections à partir de son image numérique. Comme conséquence, on donne de nouvelles caractérisations de vitesse de convergence dans la méthode des projections alternées (Théorème de von Neumann - Halperin), ainsi qu'une nouvelle caractérisation de paires annihilantes (qui est une formulation du principe d'incertitude).

Dans le chapitre suivant, on s'intéresse aux différences de projections orthogonales. On discute de la caractérisation des opérateurs qui peuvent s'écrire comme différence de projections orthogonales. On applique ces résultats en écrivant certains opérateurs unitaires (dont l'opérateur de décalage bilatéral) comme combinaisons linéaires de projections orthogonales. Puis on applique encore ces résultats en établissant de nouveaux principes d'incertitudes pour des polynômes orthogonaux, ce qui améliore un résultat récent de W. Erb.

Dans la dernière partie de cette thèse, on démontre l'existence des sous-espaces hyperinvariants pour certaines perturbations compactes d'opérateurs de multiplication. Ceci représente une généralisation des résultats antérieurs de Fang-Xia et de Foias-Jung-Ko-Pearcy. Enfin on construit des perturbations de rang un d'opérateurs diagonaux sans valeur propre, ce qui constitue une réponse à un problème ouvert dû à E. Ionascu.

Around orthogonal projections: numerical range, uncertainty principle and the invariant subspace problem

Abstract

In this PhD thesis in Operator Theory, we are interested in orthogonal projections, numerical ranges of operators acting on a Hilbert space, uncertainty principles, the invariant subspace problem and perturbations of diagonal operators.

After an introductory chapter, we investigate the numerical range of a product of two orthogonal projections and possible applications. We give an explicit formula of the numerical range for a product of orthogonal projections depending on its spectrum. We show how to reconstruct some parts of the spectrum of the product of orthogonal projections from its numerical range. As a consequence, we give new characterizations of the speed of convergence in the method of alternating projections (von Neumann-Halperin like Theorems), and a new characterization of annihilating pairs (which is a formulation of the uncertainty principle).

In the next chapter, we study differences of orthogonal projections. We give a characterisation of operators that can be expressed as a difference of orthogonal projections. We apply these results to some unitary operators (including the bilateral shift) by writing them as linear combinations of orthogonal projections. Then we apply again these results by establishing a new uncertainty principle for orthogonal polynomials, improving recent results of W. Erb.

In the last part of this thesis, we prove the existence of hyperinvariant subspaces for some compact perturbations of multiplication operators. This generalize former results of Fang-Xia and Foias-Jung-Ko-Pearcy. Finally, we show the existence of rank-one perturbations of diagonal operators without eigenvalues, solving in this way an open problem of E. Ionascu.

Table des matières

Remerciements	9
Introduction	11
1 Préliminaires	19
1.1 Le théorème d’Halmos	19
1.2 Cosinus de l’angle de Friedrichs entre deux sous-espaces	22
1.3 L’image numérique	27
1.4 Le rayon numérique	29
1.5 Enveloppe convexe	30
1.6 Fonctions supports d’un ensemble convexe	32
1.7 Méthode des projections alternées et méthode des projections aléatoires	33
1.8 Vitesse de convergence	36
1.9 Cosinus du paramètre de Friedrichs entre plusieurs sous-espaces et vitesse de convergence dans la méthode des projections cycliques . . .	38
1.10 Principe d’incertitude et paires annihilantes	41
1.11 Le théorème d’énergie de Slepian et Pollak	44
1.12 A propos de $W(P + iQ)$	45
1.13 Polynômes orthogonaux et principe d’incertitude de Erb	48
1.14 Problème du sous-espace invariant	52
1.15 Le calcul fonctionnel de Riesz-Dunford	54
1.16 Une reformulation du problème du sous-espace invariant	55
1.17 Le théorème de Weyl	55
2 Image numérique d’un produit de projections orthogonales	57
2.1 Introduction	57
2.2 Description de l’image numérique en fonction du spectre	58
2.2.1 L’adhérence de l’image numérique comme enveloppe convexe d’ellipses	58
2.2.2 $W(P_2P_1)$ quand $P_1P_2P_1$ est diagonalisable	64
2.2.3 Localisation de $W(P_2P_1)$	69
2.2.4 Quelques exemples	72
2.3 Le spectre de P_2P_1 en fonction de l’image numérique	74
2.3.1 La relation entre le rayon spectral et le rayon numérique . . .	74

2.3.2	Retrouver $\sigma(P_2P_1)$ à partir de $\overline{W(P_2P_1)}$ (et $\overline{W(P_2(I - P_1))}$)	75
2.4	Applications à la vitesse de convergence dans le Théorème de von Neumann-Halperin et au principe d'incertitude	80
2.4.1	Applications à la méthode des projections alternés	80
2.4.2	Applications aux paires annihilantes	81
3	Différences de projections orthogonales	83
3.1	A propos d'un analogue du résultat de Crimmins pour les différences de projections orthogonales	83
3.2	Différences de projections orthogonales en dimension 2	85
3.3	Position générique et bissectrice entre sous-espaces	89
3.4	Quelques caractérisations des opérateurs qui s'écrivent comme différence de projections orthogonales en position générique	92
3.5	Le shift bilatéral comme combinaison linéaire de 4 projections orthogonales	100
3.6	Certains opérateurs unitaires vus comme combinaisons linéaires de 4 projections orthogonales	102
3.7	Une amélioration du principe d'incertitude de Erb	103
4	Algèbres de von Neumann et méthode des projections aléatoires	109
4.1	Résultats préliminaires	110
4.2	Réponse à la Question 4.0.7	111
5	Sous-espaces Hyperinvariants pour des perturbations compactes d'opérateurs de multiplication	115
5.1	Introduction	115
5.1.1	Notations	116
5.1.2	Résultats principaux	117
5.1.3	Résultats préliminaires	118
5.2	Preuve du Théorème 5.1.3	119
5.3	Corollaires dans un espace de Hilbert	124
5.4	Conséquences pour des perturbations compactes d'opérateurs diagonaux agissant sur des espaces de Hilbert : preuve du Théorème 5.1.4	127
6	Perturbations de rang un d'opérateurs diagonaux	133
6.1	Introduction	133
6.2	Quelques résultats existants sur les perturbations d'opérateurs diagonaux	134
6.3	Résultats préliminaires	138
6.4	Un vecteur qui n'est pas dans $\text{Im}(D - z)$	140
6.5	Une fonction analytique qui ne s'annule pas en dehors d'un ensemble parfait	149
6.6	Preuve du théorème principal	152
6.7	Le cas non borné	153

Bibliographie

157

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier mes directeurs de thèse Catalin Badea et Sophie Grivaux. Catalin m'a encadré pendant mes mémoires de Master 1 et 2, puis a accepté de m'encadrer en thèse. Il a toujours cru en moi et m'a laissé une certaine liberté tout en restant disponible quand j'en avais besoin. J'ai été marqué par sa grande culture mathématique. Sophie a gentiment accepté de m'encadrer pendant la thèse. Elle m'a proposé des sujets très intéressants, et m'a suivi avec beaucoup d'attention. Sa compréhension rapide, et sa rigueur m'ont profondément impressionné. Je tiens à leur exprimer ma profonde gratitude pour le temps et les mathématiques qu'ils ont partagés avec moi.

Je remercie aussi Isabelle Chalendar et Christian Le Merdy pour la relecture attentive de cette thèse et pour les suggestions. Je voudrais aussi remercier Jean Esterle, Emmanuel Fricain et Gilles Godefroy d'avoir accepté d'être membres du Jury.

Je tiens à remercier Tom Ransford pour la confiance qu'il m'a accordée en me donnant une position post doctorale au sein de son équipe. Je remercie aussi Javad Mashreghi pour les quelques discussions que nous avons pu avoir. Je leur dit à bientôt à Québec.

Je tiens à remercier les membres du laboratoire Painlevé à Lille, et les participants du groupe de travail/séminaire d'Analyse Fonctionnelle de Lens-Lille-Mons. Plus particulièrement, je tiens à remercier William Alexandre, Étienne Matheron et Mostafa Mbekta. Je tiens aussi à remercier tous ceux qui ont contribué au démarrage de cette thèse.

Je souhaite aussi remercier Gustavo Corach pour quelques discussions stimulantes.

Je remercie aussi Frédéric Bayart et le GDR Analyse Fonctionnelle, Harmonique et Probabilités (anciennement Analyse Fonctionnelle et Harmonique et Applications) qui m'a permis de me rendre à de nombreuses conférences.

Je souhaite remercier tous ceux que j'ai côtoyé en Master 1, enseignants et étudiants, et plus particulièrement Guillaume, Laurent, Jérôme et Pierre-Louis. Cette année m'a particulièrement marqué, tant humainement que mathématiquement. Je suis content que la plupart des étudiants aient pu continuer en thèse de mathématiques, ce qui nous permet de discuter de maths autour d'une bière.

Je souhaite aussi remercier tous les doctorants avec qui j'ai passé plusieurs années superbes à Lille. Je tiens à remercier tous les participants du séminaire des docto-

Remerciements

rants et post-doctorants de Lille, ainsi que ses organisateurs et les organisateurs de YMC avec qui j'ai passé beaucoup de bons moments. Je tiens aussi à remercier les doctorants et post-doctorants du Groupe de travail/Séminaire d'Analyse Fonctionnelle Lens-Lille-Mons. Je souhaite remercier les doctorants du L2EP qui ont partagé avec moi de bons moments.

Je tiens à remercier mes amis de longue date Alexandre et Bertrand. Je tiens à remercier mes parents et ma famille qui m'ont soutenu pendant mes études. Enfin, merci Valentina pour cette rencontre inattendue...

Introduction

Dans le premier Chapitre on décrit le contexte et on rappelle quelques résultats existants. Le deuxième Chapitre porte sur l'image numérique d'un produit de projections orthogonales et sur certaines applications. Le troisième Chapitre traite des différences de projections orthogonales et de certaines conséquences. Le quatrième Chapitre discute de l'impossibilité d'utiliser quelques outils d'algèbres de von Neumann pour caractériser la convergence forte dans la méthode des projections aléatoires. Dans le cinquième Chapitre, on construit des sous-espaces invariants pour certaines perturbations compactes d'opérateurs de multiplication. Dans le sixième Chapitre, on établit l'existence de perturbations de rang un d'opérateurs diagonaux sans valeurs propre. En rappelant que le problème du sous espace invariant peut être reformulé en tant qu'un problème d'existence de sous espace invariant commun à P et Q , où P est une projection orthogonale et Q un idempotent, on peut dire que cette thèse porte sur divers aspects des projections orthogonales.

Dans le premier Chapitre, on commence par rappeler le théorème des deux sous-espaces d'Halmos. C'est un ingrédient essentiel dans les preuves des Chapitres 2 et 3. Ensuite on introduit la notion de cosinus de l'angle de Friedrichs. C'est une notion importante, qui apparait à la fois dans la méthode des projections alternés et aussi pour quantifier certains principes d'incertitudes. On donne quelques propriétés classiques sur ce dernier et on donne une nouvelle preuve d'une interprétation spectrale du cosinus de l'angle Friedrichs (Lemme 1.2.11). Ensuite on introduit l'image numérique et le rayon numérique d'un opérateur agissant sur un espace de Hilbert. On continue en introduisant les notions d'enveloppe convexe et de fonction support d'un ensemble convexe. Ces notions sont très utiles pour étudier l'image numérique d'un opérateur puisque l'image numérique est toujours convexe.

Ensuite on explique la méthode des projections alternés et la méthode des projections aléatoires. On discute de leur vitesse de convergences et on rappelle les résultats récents de Catalin Badea, Sophie Grivaux et Vladimir Müller à propos de la vitesse de convergence dans la méthode des projections alternés [BGM]. De nouvelles caractérisations de la vitesses de convergence dans la méthode des projections alternés seront discutées à la fin du Chapitre 2. De plus, on discutera de convergence forte de la méthode des projections aléatoires dans le Chapitre 4.

On continue par des rappels sur le principe d'incertitude. On définit la notion de paires (fortement) annihilantes et on discute de quelques propriétés classiques. De nouvelles caractérisations des paires (fortement) annihilantes seront données à

la fin du chapitre 2. Nous rappelons ensuite les résultats de Lenard [Len72] sur l'image numérique de $P + iQ$. On y explique le lien entre ses résultats et les paires (fortement) annihilantes. Puis on présente des résultats récents de W.Erb [Erb13] sur un principe d'incertitude pour certains polynômes orthogonaux. Ces résultats seront améliorés à la fin du Chapitre 3.

On finit le Chapitre 1 en rappelant le problème du sous-espace invariant, et quelques résultats classiques.

Le Chapitre 2 porte sur l'étude de l'image numérique d'un produit de projections orthogonales. Le premier résultat est une formule exacte pour la fermeture de l'image numérique $\overline{W(P_{M_2}P_{M_1})}$, exprimée comme l'enveloppe convexe de certaines ellipses $\mathcal{E}(\lambda)$, paramétrées par des points du spectre ($\lambda \in \sigma(P_{M_2}P_{M_1})$). On commence par définir ces ellipses.

Définition 0.0.1 (Définition 2.2.3). Soit $\lambda \in [0, 1]$. On note $\mathcal{E}(\lambda)$ l'ensemble du plan complexe délimité par l'ellipse de foyers 0 et λ , et de longueur d'axe mineur $\sqrt{\lambda(1-\lambda)}$.

Théorème 0.0.2 (Théorème 2.2.7). Soient M_1 et M_2 deux sous-espaces fermés de H tels que $M_1 \neq H$ ou $M_2 \neq H$. Alors l'adhérence de l'image numérique de $P_{M_2}P_{M_1}$ est la fermeture de l'enveloppe convexe des ellipses $\mathcal{E}(\lambda)$ pour $\lambda \in \sigma(P_{M_2}P_{M_1})$, c'est à dire :

$$\overline{W(P_{M_2}P_{M_1})} = \overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(P_{M_2}P_{M_1})} \mathcal{E}(\lambda)\}}.$$

La preuve utilise de manière essentielle le théorème des deux sous-espaces d'Halmos (Théorème 1.1.3). Nous allons utiliser une approche complètement différente pour décrire l'image numérique (sans la fermeture) de $T = P_{M_2}P_{M_1}$ en faisant l'hypothèse supplémentaire que l'opérateur autoadjoint $T^*T = P_{M_1}P_{M_2}P_{M_1}$ est diagonalisable (voir la Définition 2.2.9). Dans ce cas, l'image numérique $W(T)$ est l'enveloppe convexe des mêmes ellipses cette fois paramétrées par le spectre ponctuel $\sigma_p(T)$ de $T = P_{M_2}P_{M_1}$.

Théorème 0.0.3 (Théorème 2.2.24). Soit H un espace de Hilbert séparable. Soient M_1 et M_2 deux sous-espaces fermés de l'espace de Hilbert H tels que $M_1 \neq H$ ou $M_2 \neq H$. Si $P_{M_1}P_{M_2}P_{M_1}$ est diagonalisable, alors l'image numérique $W(P_{M_2}P_{M_1})$ est l'enveloppe convexe des ellipses $\mathcal{E}(\lambda)$, avec les λ parcourant les valeurs propres de $P_{M_2}P_{M_1}$, c'est à dire :

$$W(P_{M_2}P_{M_1}) = \text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma_p(P_{M_2}P_{M_1})} \mathcal{E}(\lambda)\}.$$

Concernant la relation entre le rayon numérique et le rayon spectral d'un produit de deux projections orthogonales, on montre le résultat suivant.

Proposition 0.0.4 (Proposition 2.3.1). Soient M_1, M_2 deux sous-espaces fermés de H . Le rayon numérique et le rayon spectral de $P_{M_2}P_{M_1}$ sont reliés par la formule suivante

$$\omega(P_{M_2}P_{M_1}) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{r(P_{M_2}P_{M_1})} + r(P_{M_2}P_{M_1}) \right).$$

La preuve est une application du Théorème 2.2.7. La formule ainsi obtenue est meilleure que l'inégalité de Kittaneh (Théorème 1.4.5) quand l'angle de Friedrichs (Definition 1.2.2) entre M_1 et M_2 est strictement positif.

Les Théorèmes 2.2.7 et 2.2.24 peuvent servir à localiser $W(P_{M_2}P_{M_1})$ même si on ne connaît pas le spectre de $P_{M_2}P_{M_1}$. On donne ici une conséquence importante de ces résultats à propos de l'inclusion de $W(P_{M_2}P_{M_1})$ dans un secteur de sommet 1 dont l'ouverture est exprimée en fonction du cosinus de l'angle Friedrichs $\cos(M_1, M_2)$ entre les sous-espaces M_1 et M_2 . C'est un raffinement du résultat de Michel Crouzeix [Cro08] pour un produit de deux projections orthogonales.

Proposition 0.0.5 (Proposition 2.2.31). *Soient M_1 et M_2 deux sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert H . On a l'inclusion suivante :*

$$W(P_{M_2}P_{M_1}) \subset \left\{ z \in \mathbb{C}, |\arg(1 - z)| \leq \arctan\left(\sqrt{\frac{\cos^2(M_1, M_2)}{4 - \cos^2(M_1, M_2)}}\right) \right\}.$$

On considère ensuite des problèmes spectraux inverses et on construit des exemples de projections orthogonales tels que leur spectre est un ensemble compact dans $[0, 1]$. Ces exemples généralisent en dimension infinie les résultats que Nelson et Neumann [NN87] ont obtenus en dimension finie. On va aussi donner deux exemples qui vont répondre à deux questions ouvertes énoncées dans un article de Nees [Nee99].

Le résultat suivant permet de reconstruire $\sigma(P_{M_2}P_{M_1}) \cap [\frac{1}{4}, 1]$, les points du spectre qui sont plus grands que $\frac{1}{4}$, quand l'adhérence de l'image numérique de $P_{M_2}P_{M_1}$ est connue.

Théorème 0.0.6 (Théorème 2.3.8). *Soit $\alpha \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\frac{1}{2(1-\cos(\alpha))} \in \sigma(P_{M_2}P_{M_1})$;
2. $\sup\{\operatorname{Re}(z \exp(-i\alpha)), z \in W(P_{M_2}P_{M_1})\} = \frac{1}{4(1-\cos(\alpha))}$.

En fait, il est possible de reconstruire le spectre $\sigma(P_{M_2}P_{M_1})$ en entier à partir de $\overline{W(P_{M_2}P_{M_1})}$ et $\overline{W(P_{M_2}(I - P_{M_1}))}$.

Finalement, on va expliquer pourquoi le fait que $1 \in W(P_{M_2}P_{M_1})$ est relié à la vitesse de convergence arbitrairement lente dans le Théorème de von Neumann-Halperin et on va donner de nouvelles caractérisations des paires annihilantes et fortement annihilantes en fonction de $W(P_S P_\Sigma)$.

Le Chapitre 3 discute de différences de projections orthogonales. Un résultat de Crimmins (voir [CM11] ou [RW69]) dit que T est un produit de projections orthogonales si et seulement si $T^2 = TT^*T$. Gustavo Corach a demandé si il existe un analogue de ce résultat pour des différences de projections orthogonales. On commence ce chapitre on va répondre par la négative à cette question. On commence par prouver que pour tout polynôme non commutatif à deux variable $p \in \mathbb{C}[x, y]$, si $p(T, T^*) = 0$ pour toutes les différences de projections orthogonales, alors $p(T, T^*) =$

0 pour tous les opérateur T autoadjoints. On montre finalement qu'il n'existe pas de polynôme non commutatif $p(x, y)$ tel que $p(T, T^*)$ s'annule si et seulement si T est une différence de projections orthogonales.

Dans la suite de ce chapitre on présente une caractérisation des opérateurs qui peuvent s'écrire comme différence de deux projections orthogonales. Notre caractérisation, semblable à la caractérisation de Davis (voir [Dav58]), utilise le théorème des deux sous espaces d'Halmos. Elle permet, via l'interprétation géométrique de la construction, de reconstruire explicitement les deux projections P et Q qui réalisent la décomposition $T = P - Q$.

On illustre ensuite ce résultat en montrant que certains opérateurs unitaires (dont le shift bilatéral, voir aussi le Corollaire 3.5.1) peuvent s'écrire sous la forme $\sum_{k=0}^3 (\mathbf{i})^k P_k$.

Proposition 0.0.7 (Corollaire 3.6.3). *Soit μ une mesure borélienne sur \mathbb{T} telle que pour tout borélien $A \subset \mathbb{T}$ on ait que $\mu(A) = \mu(-A)$. Soit $U : L^2(\mathbb{T}, \mu) \rightarrow L^2(\mathbb{T}, \mu)$ l'opérateur défini pour tout $f \in L^2(\mathbb{T}, \mu)$ par $Uf(e^{i\theta}) = e^{i\theta} f(e^{i\theta})$. Alors, il existe 4 projections orthogonales P_{Re}, Q_{Re}, P_{Im} et Q_{Im} telles que $U = P_{Re} - Q_{Re} + \mathbf{i}P_{Im} - \mathbf{i}Q_{Im}$.*

On finit ce chapitre en généralisant le principe d'incertitude de Erb.

Théorème 0.0.8 (Théorème 3.7.5). *Soit Π une projection orthogonale sur un sous-espace engendré par un nombre fini de polynômes. Si $\text{supp}(w) = [-1, 1]$, alors il existe une constante $c = c(w, \Pi) > 0$ telle que pour tout $f \in L^2([-1, 1], w)$ on ait que*

$$\|f\|^2 \leq c \left((\|f\|^2 - \epsilon(f)) + \|(I - \Pi)f\|^2 \right),$$

autrement dit

$$\|f\|^2 \leq c \left(\langle (I - M_x)f, f \rangle + \|(I - \Pi)f\|^2 \right).$$

Un des ingrédients essentiel de la preuve est d'écrire l'opérateur de multiplication M_x comme différence de projections orthogonales.

Dans le Chapitre 4, on discute de méthode des projections aléatoires et d'algèbres de von Neumann. Davis [Dav55] a construit 3 projections orthogonales qui engendrent $\mathcal{B}(H)$ comme algèbre de von Neumann. Il a aussi montré qu'il faut au moins 3 projections orthogonales pour engendrer $\mathcal{B}(H)$ comme algèbre de von Neumann. Plus tard, Sunder [Sun88] a montré que l'on pouvait prendre n projections orthogonales ($n \geq 3$) telles que ces n projections engendrent $\mathcal{B}(H)$ comme algèbre de von Neumann, mais n'importe quel sous ensemble strict de ces projections n'engendrent pas $\mathcal{B}(H)$ comme algèbre de von Neumann.

Récemment Paszkiewicz [Pas12a] a construit deux autres exemples pour la conjecture d'Amemiyia-Ando. Dans [Pas12a], il a construit trois projections orthogonales pour lesquelles la méthode des projections aléatoires ne converge pas toujours en topologie forte. Cependant, Kopecká et Müller ont annoncé dans [KM] qu'il semblerait que la preuve de Paszkiewicz ne soit pas correcte, et ont proposé une autre preuve. Avant de montrer ce résultat, Paszkiewicz [Pas12b] a donné un contre

exemple avec cinq projections orthogonales. Il est clair d'après la construction qu'il a faite, que si on choisit quatre projections parmi ces cinq projections, ces projections vont toujours converger en topologie forte dans la méthode des projections aléatoire.

A partir de ces deux remarques, il est naturel de se demander si il existe un lien entre la convergence en topologie forte dans la méthode des projections aléatoire des projections orthogonales P_1, \dots, P_r et le fait que $\mathcal{B}(H)$ soit engendré comme algèbre de von Neumann par ces projections. Le résultat principal de ce chapitre est une réponse négative à cette question.

Théorème 0.0.9 (Corollaire 4.2.5). *Il existe trois projections orthogonales $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{B}(H)$ telles que $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \{0\}$ et la méthode des projections aléatoire sur les sous-espaces M_1, M_2 et M_3 converge toujours en topologie forte. C'est à dire, pour toute sélection aléatoire $s : \mathbb{N} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ et pour tout vecteur $h \in H$ on a que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{s(n)} \dots P_{s(1)} h\| = 0.$$

De plus on a que

$$W^*(P_1, P_2, P_3) = \mathcal{B}(H).$$

Le chapitre 5 porte sur l'existence d'un sous-espace hyperinvariant pour certaines perturbations compactes d'opérateurs de multiplication. En 2007 Foias, Jung, Ko et Percy [FJKP07] ont montré le résultat suivant.

Théorème 0.0.10 ([FJKP07]). *Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée d'un espace de Hilbert complexe et séparable H . Soit $D = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n e_n \otimes e_n$ un opérateur diagonal borné agissant sur H . Soient $u, v \in H$ deux vecteurs tels que :*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle u, e_n \rangle|^{\frac{2}{3}} < \infty, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle v, e_n \rangle|^{\frac{2}{3}} < \infty.$$

Alors la perturbation de rang un $D + u \otimes v$ de l'opérateur diagonal D possède un sous-espace hyper-invariant non trivial.

En 2012, Fang et Xia [FX12] ont amélioré ce résultat. Leur approche permet de considérer des perturbations de rang fini d'opérateurs diagonaux. Ils ont aussi amélioré la condition de sommabilité de Foias, Jung, Ko et Percy. Voici leur résultat.

Théorème 0.0.11 ([FX12]). *Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée d'un espace de Hilbert complexe et séparable H . Soit $D = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n e_n \otimes e_n$ un opérateur diagonal borné agissant sur H . Soient $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_r \in H$ des vecteurs tels que*

$$\sum_{k=1}^r \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle u_k, e_n \rangle| < \infty, \quad \sum_{k=1}^r \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle v_k, e_n \rangle| < \infty.$$

Alors la perturbation de rang fini $D + \sum_{i=1}^r u_i \otimes v_i$ de l'opérateur diagonal D possède un sous-espace hyper-invariant non trivial.

Dans ce chapitre on généralise l'approche de Fang et Xia. Cette généralisation nous permet de considérer certaines perturbations compactes d'opérateurs de multiplication sur des espaces L^p .

Théorème 0.0.12 (Théorème 5.1.3). *Soit (Ω, μ) un espace mesuré, où μ est une mesure borélienne σ -finie. Soit $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ une fonction à valeurs complexes essentiellement bornée. On suppose que $K \in \mathcal{K}(H)$ est un opérateur compact tel qu'il existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L^p(\Omega, \mu)$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L^q(\Omega, \mu)$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs tels que pour tout $x \in L^q(\Omega, \mu)$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_\Omega x(\xi) \overline{v_n(\xi)} d\mu(\xi) \right) u_n$ converge et $K = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n$. Supposons qu'il existe une courbe de Jordan Γ dans \mathbb{C} telle que*

1. *Il existe $a, b \in \sigma_e(M_f)$ tels que a soit dans l'intérieur de la courbe de Jordan Γ et b soit dans l'extérieur de la courbe de Jordan Γ ,*
2. *$\mu(f^{-1}(\Gamma)) = 0$,*
3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $z \in \Gamma$, on a que $u_n \in \text{Im}(M_f - z)$ et $v_n \in \text{Im}(M_f - z)^*$,*
4. *Pour tout $z \in \Gamma$, on note $A(z)$ l'opérateur défini par la formule suivante : $A(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n ((M_f - z)^{-1} u_n) \otimes ((M_{\bar{f}} - \bar{z})^{-1} v_n)$. On suppose que pour tout $z \in \Gamma$, on ait que $A(z)$ est un opérateur compact, et que l'application $A : \Gamma \rightarrow \mathcal{K}(X)$ est continue.*

Alors l'opérateur borné $M_f + K$ agissant sur $L^p(\Omega, \mu)$ possède un sous-espace hyperinvariant non trivial.

On présente ensuite quelques exemples d'applications possible de ce résultat. Ce résultat permet de généraliser aussi le résultat de Fang et Xia de la manière suivante.

Théorème 0.0.13 (Théorème 5.1.4). *Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée d'un espace de Hilbert complexe et séparable H . Soit $D = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n e_n \otimes e_n$ un opérateur diagonal borné agissant sur H . Soit $K \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur compact. On note la décomposition en valeurs singulières de K comme ceci : $K = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n$. Si il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels positifs telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait que $a_n b_n = s_n$ et*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_n \langle u_n, e_k \rangle| < \infty \tag{1}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |b_n \langle e_j, v_n \rangle| < \infty. \tag{2}$$

Si $D + K \neq \lambda I$, alors $D + K$ possède un sous-espace hyperinvariant non trivial.

Dans le Chapitre 6, on s'intéresse aux perturbations de rang un d'opérateurs diagonaux. On va chercher des perturbations de rang un d'opérateurs diagonaux qui n'ont pas de valeur propre. Dans son article [Ion01], Ionascu a posé la question suivante.

Question 0.0.14 (Ionascu [Ion01]). *Soit D un opérateur diagonal. Est-ce qu'il existe une perturbation de rang un de cet opérateur, sans valeur propre, qui conserve le spectre ? Autrement dit, est-ce qu'il existe $u, v \in H$ tels que*

1. $\sigma(D + u \otimes v) = \sigma(D)$,
2. $\sigma_p(D + u \otimes v) = \emptyset$.

Ionascu à montré dans [Ion01] que si le spectre de D possède un point isolé, ou bien si au moins une valeur propre de D est de multiplicité supérieure ou égale à 2, alors la réponse est non. On mentionne aussi que Stampfli [Sta84] a construit un opérateur diagonal D et un opérateur de rang un $u \otimes v$ tel que $\sigma_p(D + u \otimes v) = \emptyset$. Dans une direction opposée, Sophie Grivaux a construit dans [Gri12] une perturbation de rang un d'un opérateur diagonal unitaire qui possède une infinité non dénombrable de valeurs propres de module 1.

Le but de ce chapitre est de montrer que si le spectre de D n'a pas de points isolés et si toutes les valeurs propres de D sont de multiplicité 1 alors la réponse à la question de Ionascu est positive.

Théorème 0.0.15 (Théorème 6.2.7). *Soit $D = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i e_i \otimes e_i$ un opérateur diagonal borné. On suppose que D possède un vecteur cyclique. De plus on suppose que $\sigma(D)$ est un ensemble parfait. Alors, il existe $u, v \in H$ tels que*

1. $\sigma(D + u \otimes v) = \sigma(D)$,
2. $\sigma_p(D + u \otimes v) = \emptyset$.

De plus on peut choisir $u, v \in H$ de sorte que $\|u \otimes v\|$ soit arbitrairement petite.

A la fin de ce Chapitre on généralise ce résultat aux opérateurs diagonaux non bornés.

Théorème 0.0.16 (Théorème 6.7.1). *Soit $D = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i e_i \otimes e_i$ un opérateur diagonal (éventuellement non borné). On suppose que pour tout $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$. De plus on suppose que $\sigma(D) = \overline{\{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}}$ est un ensemble parfait. Alors, il existe $u, v \in H$ tels que $\sigma_p(D + u \otimes v) = \emptyset$.*

De plus on peut choisir $u, v \in H$ de sorte que $\|u \otimes v\|$ soit arbitrairement petite.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Le théorème d’Halmos

Dans cette section nous rappelons le théorème de Halmos concernant les paires de projections orthogonales. Soient M et N des sous-espaces fermés d’un espace de Hilbert. Dans ce chapitre, on désignera par $P = P_M$ la projection orthogonale sur le sous-espace fermé M de H et par $Q = P_N$ la projection orthogonale sur le sous-espace fermé N de H . On commence par une définition.

Définition 1.1.1 ([Hal69]). Soit P la projection orthogonale sur le sous-espace fermé M de H et Q la projection orthogonale sur le sous-espace fermé N de H . On dit que (P, Q) (respectivement (M, N)) sont deux projections orthogonales en *position générique* (respectivement deux sous-espaces en *position générique*) si on a que

$$(M \cap N) = (M \cap N^\perp) = (M^\perp \cap N) = (M^\perp \cap N^\perp) = \{0\}.$$

Si on se donne deux projections orthogonales $P = P_M$ et $Q = P_N$, on peut décomposer H en cinq sous-espaces comme ceci :

$$H = (M \cap N) \oplus (M \cap N^\perp) \oplus (M^\perp \cap N) \oplus (M^\perp \cap N^\perp) \oplus \tilde{H}, \quad (1.1)$$

où \tilde{H} est l’orthogonal du sous-espace engendré par les quatre premiers sous-espaces. Il n’est pas exclu que certains de ces sous-espaces soient réduits à $\{0\}$. Dans ce découpage de H en cinq sous-espaces, on peut décomposer P et Q comme sommes directes d’opérateurs de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P &= I \oplus I \oplus 0 \oplus 0 \oplus \tilde{P}, \\ Q &= I \oplus 0 \oplus I \oplus 0 \oplus \tilde{Q}, \end{aligned}$$

où \tilde{P} et \tilde{Q} sont les restrictions de P et Q au sous-espace \tilde{H} . On remarque que (\tilde{P}, \tilde{Q}) sont des projections orthogonales de \tilde{H} en position générique. On appelle \tilde{H} la partie

en position générique de (P, Q) . On peut regarder ce que vaut PQ et $P - Q$ dans cette configuration et on obtient que

$$\begin{aligned} PQ &= I \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \tilde{P}\tilde{Q}, \\ P - Q &= 0 \oplus I \oplus -I \oplus 0 \oplus \tilde{P} - \tilde{Q}. \end{aligned}$$

On voit qu'en dehors de la partie en position générique \tilde{H} de (P, Q) , on comprend assez facilement ce qui se passe pour PQ et $P - Q$. Le théorème des deux sous-espaces d'Halmos va nous permettre de comprendre ce qui se passe sur la partie en position générique de P et Q en nous donnant une description de \tilde{P} et \tilde{Q} .

Théorème 1.1.2 ([Hal69]). *Soient $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ les projections orthogonales sur les sous-espaces fermés M, N de H . Supposons que (P, Q) soient en position générique. Alors il existe une isométrie surjective $V : M \rightarrow M^\perp$, et il existe deux opérateurs bornés $C, S \in \mathcal{B}(M)$ tels que $0 \leq C \leq I$, $0 \leq S \leq I$, $C^2 + S^2 = I$, $\text{Ker}(C) = \text{Ker}(S) = \{0\}$ et dans $H = M \oplus M^\perp$ on peut écrire P et Q comme matrice d'opérateurs de la façon suivante :*

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} C^2 & CSV^* \\ VSC & VS^2V^* \end{pmatrix}.$$

On note H_1, H_2 deux espaces de Hilbert. Soient $T_1 \in \mathcal{B}(H_1)$ et $T_2 \in \mathcal{B}(H_2)$. On dit que T_1 est unitairement équivalent à T_2 (on le note $T_1 \sim T_2$), si il existe une isométrie surjective $W : H_1 \rightarrow H_2$ telle que

$$WT_1 = T_2W.$$

On peut aussi énoncer le théorème d'Halmos de la manière suivante :

Théorème 1.1.3 ([Hal69]). *Soient $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ deux projections orthogonales de H . Supposons que (P, Q) soient en position générique. Alors il existe un espace de Hilbert K tel que H et $K \oplus K$ soient isométriques, et il existe deux opérateurs bornés $C, S \in \mathcal{B}(K)$ tels que $0 \leq C \leq I$, $0 \leq S \leq I$, $C^2 + S^2 = I$, $\text{Ker}(C) = \text{Ker}(S) = \{0\}$ et dans $H \sim K \oplus K$ on peut écrire P et Q comme matrice d'opérateurs de la façon suivante :*

$$P \sim \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q \sim \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ SC & S^2 \end{pmatrix}.$$

Il y a une petite différence entre les Théorèmes 1.1.2 et 1.1.3. Le Théorème 1.1.2 nous donne une formule dans H des parties de P et Q en position générique, tandis que le Théorème 1.1.3 nous donne une représentation des parties en position générique de P et Q dans une *image isométrique* de H . Suivant ce que l'on veut faire avec ce résultat, il est parfois plus judicieux d'utiliser une formulation plutôt que l'autre. Par exemple, si on cherche à étudier l'image numérique du produit de projections PQ , il est plus judicieux d'utiliser le Théorème 1.1.3, car l'image numérique est invariante par conjugaison par un opérateur unitaire, i.e. si U est

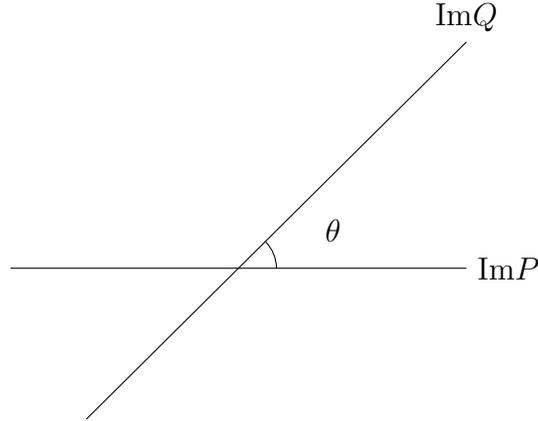


FIGURE 1.1

un opérateur unitaire, on a que $W(UPQU^*) = W(PQ)$. Cette formulation nous permet de s'affranchir de l'isométrie $V : M \rightarrow M^\perp$ lorsque l'on manipule \tilde{P} et \tilde{Q} . Par contre, si on sait qu'un opérateur s'écrit comme une différence de projections orthogonales, et que l'on cherche une expression pour P et Q , il est plus judicieux d'utiliser le Théorème 1.1.2, car l'isométrie V va jouer un rôle important.

On se place pour le moment en dimension 2. Soit H l'espace de Hilbert engendré par deux vecteurs orthonormaux e_1 et e_2 . On note P la projection orthogonale sur la droite engendré par le vecteur e_1 , et on pose Q la projection sur la droite engendrée par le vecteur $\cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$. Les matrices de P et Q dans la base (e_1, e_2) sont

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin(\theta)^2 \end{pmatrix}.$$

Dans le Théorème 1.1.3, si on pense à l'interprétation $C = \cos$ et $S = \sin$, on peut dire en quelque sorte que le théorème des deux sous-espaces d'Halmos nous dit qu'en position générique, P et Q se comportent comme en dimension 2.

Dans [Len72], on peut aussi trouver ce corollaire du Théorème 1.1.3.

Corollaire 1.1.4 ([Len72]). *Soient $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ deux projections orthogonales de H . Supposons que (P, Q) sont en position générique. Alors il existe un espace de Hilbert K tel que H et $K \oplus K$ soient isométriques, et il existe un opérateur borné $\Theta \in \mathcal{B}(K)$ tels que $0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}I$, $\text{Ker}(\Theta) = \text{Ker}(I - \Theta) = \{0\}$ et dans $H \sim K \oplus K$ on peut écrire P et Q comme matrice d'opérateurs de la façon suivante :*

$$P \sim \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q \sim \begin{pmatrix} \cos(\Theta)^2 & \cos(\Theta)\sin(\Theta) \\ \sin(\Theta)\cos(\Theta) & \sin(\Theta)^2 \end{pmatrix}.$$

Dans ce Corollaire, la ressemblance avec la dimension 2 est encore plus frappante. On peut aussi écrire le corollaire de cette manière.

Corollaire 1.1.5. *Soient $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ deux projections orthogonales de H . Supposons que (P, Q) sont en position générique. Alors il existe une isométrie surjective $V : M \rightarrow M^\perp$, et il existe un opérateur borné $\Theta \in \mathcal{B}(M)$ tels que $0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}I$, $\text{Ker}(\Theta) = \text{Ker}(I - \Theta) = \{0\}$ et dans $H = M \oplus M^\perp$ on peut écrire P et Q comme matrice d'opérateurs de la façon suivante :*

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} \cos(\Theta)^2 & \cos(\Theta) \sin(\Theta) V^* \\ V \sin(\Theta) \cos(\Theta) & V \sin(\Theta)^2 V^* \end{pmatrix}.$$

Le lecteur intéressé par le théorème d'Halmos et ses conséquences peut consulter par exemple [BS10], [Gal08] et [Gal04].

1.2 Cosinus de l'angle de Friedrichs entre deux sous-espaces

Dans cette section nous allons définir le cosinus de l'angle de Friedrichs entre deux sous-espaces fermés de H . En dimension deux, il est assez facile et naturel de définir un angle entre deux droites. D'ailleurs, il est aussi très facile de définir le cosinus entre deux vecteurs x et y ; il suffit de poser

$$\cos(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

A partir de la dimension trois, il y a plusieurs définitions possible pour les angles entres les sous-espaces. L'exemple suivant illustre ce propos en dimension trois.

Exemple 1.2.1. Soit H un espace de Hilbert de dimension 3. On prend $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base orthonormée de H . On pose $M_1 = \text{vect}\{e_1, e_2\}$ le plan engendré par les vecteurs e_1 et e_2 , et $M_2 = \text{vect}\{e_1, w\}$ le plan engendré par les vecteurs e_1 et $w = \cos(\theta)e_2 + \sin(\theta)e_3$. On note $M = M_1 \cap M_2$. La situation est illustré dans la Figure 1.2. On remarque que si on effectue une rotation d'angle θ du plan M_1 autour de la droite engendrée par e_1 , on obtient le plan M_2 .

Il est naturel de se dire que l'angle entre deux sous-espaces est le plus petit angle possible entre un vecteur de M_1 et un vecteur de M_2 (c'est ce que l'on appelle l'angle de Dixmier (on pourra par exemple consulter [Deu01] pour avoir plus d'informations sur l'angle de Dixmier)). Ici, comme e_1 appartient à la fois à M_1 et à M_2 , le plus petit angle possible est 0.

Cependant dans cet exemple on a aussi envie de dire que les sous-espaces forment un angle θ entre eux. Dans cet exemple, θ est le plus petit angle possible entre deux vecteurs de ces sous-espaces qui sont en même temps orthogonaux à l'intersection de ces derniers (cf Définition 1.2.2). C'est ce que l'on appelle le cosinus de l'angle de Friedrichs.

Évidemment, il va falloir choisir la définition la plus adaptée à nos problèmes. Dans cette thèse la définition la plus adaptée est celle du cosinus de l'angle de Friedrichs.

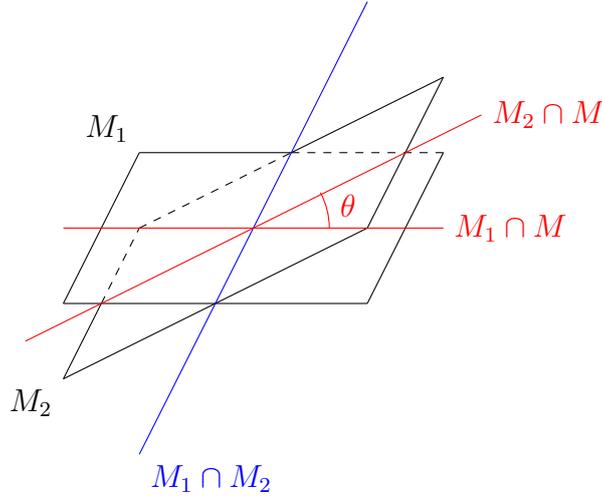


FIGURE 1.2 – Illustration de l'exemple 1.2.1

Définition 1.2.2. Soient M_1 et M_2 deux sous-espaces fermés de H . On définit le cosinus de l'angle entre M_1 et M_2 par :

$$\cos(M_1, M_2) = \sup\{|\langle x, y \rangle|, x \in M_1 \cap (M_1 \cap M_2)^\perp, \|x\| \leq 1, y \in M_2 \cap (M_1 \cap M_2)^\perp, \|y\| \leq 1\}.$$

Remarque 1.2.3. Dans la définition du cosinus, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $0 \leq \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\| \leq 1$. Donc $0 \leq \cos(M_1, M_2) \leq 1$. De plus, comme $|\langle x, y \rangle| = |\langle y, x \rangle|$, on a $\cos(M_1, M_2) = \cos(M_2, M_1)$.

La proposition suivante va nous permettre, dans certaines situations, de se ramener à étudier le cas où $M_1 \cap M_2 = \{0\}$.

Proposition 1.2.4. Soient M_1, M_2 deux sous-espaces fermés de H . On note $M = M_1 \cap M_2$, et $N_1 = M_1 \cap M^\perp, N_2 = M_2 \cap M^\perp$. Alors on a $N_1 \cap N_2 = \{0\}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(P_{N_2} P_{N_1})^n = (P_{M_2} P_{M_1})^n - P_M.$$

Démonstration. Tout d'abord $N_1 \cap N_2 = (M_1 \cap M_2) \cap M^\perp = M \cap M^\perp = \{0\}$. On a que $P_M = P_{M_2} P_M = (P_{M_2} P_{M_1}) P_M$. En utilisant n fois cette identité, on a que $P_M = (P_{M_2} P_{M_1})^n P_M$. Donc

$$\begin{aligned} (P_{M_2} P_{M_1})^n - P_M &= (P_{M_2} P_{M_1})^n - (P_{M_2} P_{M_1})^n P_M \\ &= (P_{M_2} P_{M_1})^n (I - P_M) \\ &= (P_{M_2} P_{M_1})^n P_{M^\perp}. \end{aligned}$$

Comme P_{M^\perp} est idempotent, on a que $P_{M^\perp} = (P_{M^\perp})^{2n}$. De plus on sait que P_{M^\perp}

commute avec P_{M_1} et P_{M_2} . Donc

$$\begin{aligned}
 (P_{M_2}P_{M_1})^n - P_M &= (P_{M_2}P_{M_1})^n P_{M^\perp} \\
 &= (P_{M_2}P_{M_1})^n (P_{M^\perp})^{2n} \\
 &= (P_{M_2}P_{M^\perp}P_{M_1}P_{M^\perp})^n \\
 &= (P_{M_2 \cap M^\perp}P_{M_1 \cap M^\perp})^n \\
 &= (P_{N_2}P_{N_1})^n.
 \end{aligned}$$

□

Lemme 1.2.5. Soient M_1 et M_2 deux sous-espaces fermés de H . On note $M = M_1 \cap M_2$, $N_1 = M_1 \cap M^\perp$ et $N_2 = M_2 \cap M^\perp$. Alors on a

$$\cos(M_1, M_2) = \cos(N_1, N_2).$$

Démonstration. Rappelons que $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ et donc $(N_1 \cap N_2)^\perp = H$. Donc on a $N_1 = N_1 \cap (N_1 \cap N_2)^\perp$ et $N_2 = N_2 \cap (N_1 \cap N_2)^\perp$. Alors on a

$$\begin{aligned}
 \cos(M_1, M_2) &= \sup\{|\langle x, y \rangle|, x \in M_1 \cap M^\perp, \|x\| \leq 1, y \in M_2 \cap M^\perp, \|y\| \leq 1\} \\
 &= \sup\{|\langle x, y \rangle|, x \in N_1, \|x\| \leq 1, y \in N_2, \|y\| \leq 1\} \\
 &= \sup\{|\langle x, y \rangle|, x \in N_1 \cap (N_1 \cap N_2)^\perp, \|x\| \leq 1, \\
 &\quad y \in N_2 \cap (N_1 \cap N_2)^\perp, \|y\| \leq 1\} \\
 &= \cos(N_1, N_2).
 \end{aligned}$$

□

Remarque 1.2.6. Ce lemme nous dit en quelque sorte que se ramener au cas où $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ ne change pas la géométrie du problème. On a aussi que pour tout $x \in N_1, y \in N_2$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \cos(N_1, N_2) \|x\| \|y\|.$$

Cette inégalité peut être vue comme une amélioration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Le lemme suivant nous permet d'interpréter le cosinus de l'angle Friedrichs comme la norme d'un opérateur.

Lemme 1.2.7. Soient M_1 et M_2 deux sous-espaces fermés de H . On note $M = M_1 \cap M_2$, $N_1 = M_1 \cap M^\perp$ et $N_2 = M_2 \cap M^\perp$. Alors on a

$$\begin{aligned}
 \cos(M_1, M_2) &= \|P_{N_2}P_{N_1}\| \\
 &= \|P_{M_2}P_{M_1} - P_M\|.
 \end{aligned}$$

Démonstration. La dernière égalité est une conséquence de la proposition (1.2.4). Pour la première égalité on a que

$$\begin{aligned}\cos(M_1, M_2) &= \sup\{|\langle x, y \rangle|, x \in N_1, \|x\| \leq 1, y \in N_2, \|y\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle P_{N_1}x, P_{N_2}y \rangle|, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle P_{N_2}P_{N_1}x, y \rangle|, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\langle P_{N_2}P_{N_1}x, y \rangle| \leq \|P_{N_2}P_{N_1}x\| \|y\| \leq \|P_{N_2}P_{N_1}x\|.$$

Donc

$$\begin{aligned}\cos(M_1, M_2) &\leq \sup\{\|P_{N_2}P_{N_1}x\|, \|x\| \leq 1\} \\ &= \|P_{N_2}P_{N_1}\|.\end{aligned}$$

En prenant $y = \frac{P_{N_2}P_{N_1}x}{\|P_{N_2}P_{N_1}x\|}$, on a $\|y\| = 1$. Donc

$$\begin{aligned}\|P_{N_2}P_{N_1}x\| &= \left\langle P_{N_2}P_{N_1}x, \frac{P_{N_2}P_{N_1}x}{\|P_{N_2}P_{N_1}x\|} \right\rangle \\ &\leq \sup\{|\langle P_{N_2}P_{N_1}x, y \rangle|, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} \\ &= \cos(M_1, M_2).\end{aligned}$$

En passant au sup sur $\|x\| \leq 1$, on obtient que $\|P_{N_2}P_{N_1}\| \leq \cos(M_1, M_2)$. \square

Corollaire 1.2.8. Soient M_1 et M_2 deux sous-espaces fermés de H . On a que $\cos(M_1, M_2) = 0$ si et seulement si P_{M_1} et P_{M_2} commutent.

Démonstration. C'est une conséquence du fait que P_{M_1} et P_{M_2} commutent si et seulement si $P_{M_2}P_{M_1} = P_{M_1 \cap M_2}$, combinée avec le Lemme 1.2.7 qui nous dit que $\cos(M_1, M_2) = \|P_{M_2}P_{M_1} - P_{M_1 \cap M_2}\|$. \square

Voici un exemple très facile où l'on calcule explicitement le cosinus de l'angle Friedrichs entre deux sous-espaces.

Exemple 1.2.9. On se place dans $H = \mathbb{C}^2$ muni de la norme euclidienne. On pose $N_1 = \{(z_1, 0), z_1 \in \mathbb{C}\}$, $N_2 = \{(z_2, z_2), z_2 \in \mathbb{C}\}$. On a que $N_1 \cap N_2 = \{0\}$. Soient $x = (z_1, 0) \in N_1$ et $y = (z_2, z_2) \in N_2$ tels que $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$. Alors on a $|z_1| \leq 1$ et $|z_2| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}|\langle x, y \rangle| &= |z_1 \bar{z}_2 + 0 \bar{z}_2| \\ &= |z_1 \bar{z}_2| \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

On a égalité en prenant $z_1 = 1$ et $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\cos(N_1, N_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc il y a un angle de $\frac{\pi}{4}$ entre N_1 et N_2 .

L'exemple suivant montre qu'il existe des sous-espaces qui ont une intersection nulle, et qui ont un angle nul.

Exemple 1.2.10. Soit $H = l^2(\mathbb{N})$. On note $e_k = (0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, avec le 1 en k -ème position. Ce sont les vecteurs d'une base orthonormée de $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. On note $x_n = e_{2n}$, $y_n = e_{2n+1}$ et $z_n = \cos(\frac{1}{n})x_n + \sin(\frac{1}{n})y_n$. On pose $N_1 = \overline{\text{vect}}\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $N_2 = \overline{\text{vect}}\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$.

On a que $N_1 \cap N_2 = \{0\}$. En effet soit $a \in N_1 \cap N_2$. Alors il existe $\lambda, \mu \in l^2$ tel que $a = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i x_i$ et $a = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i z_i = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i \cos(\frac{1}{i})x_i + \mu_i \sin(\frac{1}{i})y_i$. Donc on a pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mu_i \sin(\frac{1}{i}) = 0$. Comme $\sin(\frac{1}{i})$ est non nul, on a $\mu_i = 0$. Donc $a = 0$.

Maintenant on va montrer que $\cos(N_1, N_2) = 1$. On a

$$\begin{aligned} \langle x_n, z_n \rangle &= \left\langle x_n, \cos\left(\frac{1}{n}\right)x_n + \sin\left(\frac{1}{n}\right)y_n \right\rangle \\ &= \cos\left(\frac{1}{n}\right) \langle x_n, x_n \rangle \\ &= \cos\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

Donc $\cos(N_1, N_2) \geq 1$. D'après la remarque (1.2.3), on a $\cos(N_1, N_2) \leq 1$. Donc $\cos(N_1, N_2) = 1$.

On va donner maintenant une interprétation "spectrale" du cosinus de l'angle de Friedrichs.

Lemme 1.2.11. Soient M_1 et M_2 deux sous-espaces fermés de H . Alors

$$\cos(M_1, M_2) = \sup\{\sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma(P_{M_2}P_{M_1}) \setminus \{1\}\}.$$

Ce résultat peut être vu comme une conséquence du théorème d'Halmos (voir [BS10]). Nous allons donner une nouvelle preuve ici.

Démonstration. On remarque que $\sigma(P_{M_2}P_{M_1})$ est un sous ensemble compact de $[0, 1]$. De plus, on a que $\sigma(P_{M_1}P_{M_2}P_{M_1}) \setminus \{0\} = \sigma((P_{M_2}P_{M_1})P_{M_1}) \setminus \{0\} = \sigma(P_{M_2}P_{M_1}) \setminus \{0\}$. On sait que $P_{M_1}P_{M_2}P_{M_1}$ est un opérateur autoadjoint qui est positif, de norme inférieure ou égale à 1. En utilisant la décomposition $H = (M_1 \cap M_2) \oplus (M_1 \cap M_2)^\perp$, on peut écrire que $P_{M_1}P_{M_2}P_{M_1} = P_{M_1 \cap M_2} \oplus (P_{M_1}P_{M_2}P_{M_1} - P_{M_1 \cap M_2})$, et donc on a que

$$\sigma(P_{M_1}P_{M_2}P_{M_1}) = \sigma(P_{M_1 \cap M_2}) \cup \sigma(P_{M_1}P_{M_2}P_{M_1} - P_{M_1 \cap M_2}).$$

Comme

$$\cos^2(M_1, M_2) = \|P_{M_1}P_{M_2}P_{M_1} - P_{M_1 \cap M_2}\| = \sup \sigma(P_{M_1}P_{M_2}P_{M_1} - P_{M_1 \cap M_2}),$$

on obtient que

$$\cos^2(M_1, M_2) = \sup \sigma(P_{M_1}P_{M_2}P_{M_1}) \setminus \{1\} = \sup \sigma(P_{M_2}P_{M_1}) \setminus \{1\}.$$

□

1.3 L'image numérique

Dans cette section, nous allons introduire l'image numérique d'un opérateur linéaire et borné agissant sur un espace de Hilbert complexe. Nous allons donner une définition, et ensuite nous allons énumérer une liste de propriétés importantes sur l'image numérique. On invite le lecteur à lire [GR97] pour plus d'informations sur l'image numérique d'un opérateur.

Définition 1.3.1. Soit H un espace de Hilbert complexe. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur linéaire borné. L'image numérique de T (que l'on note $W(T)$) est l'ensemble défini comme ceci :

$$W(T) = \{\langle Tx, x \rangle, \quad x \in H \quad \|x\| = 1\}.$$

La propriété la plus importante sur l'image numérique est fournie par le théorème de Toeplitz-Hausdorff.

Théorème 1.3.2 (Toeplitz-Hausdorff). *L'image numérique d'un opérateur linéaire borné est un ensemble convexe borné.*

Nous discuterons dans les prochaines sections des fonctions support d'ensemble convexe. Cet outil nous permettra de déterminer l'image numérique de certains opérateurs. Pour l'instant on va énumérer quelques propriétés basiques de l'image numérique.

Lemme 1.3.3. *Soient $T, S \in \mathcal{B}(H)$ deux opérateurs linéaires bornés, et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes. Soit $U \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur unitaire (i.e. $U^*U = UU^* = I$). Alors on a que*

1. $W(\alpha T + \beta I) = \alpha W(T) + \beta$,
2. $W(T^*) = \{\bar{\lambda}, \lambda \in W(T)\}$,
3. $W(UTU^*) = W(T)$,
4. $W(T + S) \subset W(T) + W(S)$.

D'après le (3) du lemme précédent, l'image numérique est invariante par conjugaison unitaire. Cette propriété va nous permettre, plus tard, d'utiliser le théorème d'Halmos sous la forme du Théorème 1.1.3. Nous allons ensuite présenter le lemme de l'ellipse. Non seulement ce lemme donne explicitement l'image numérique d'une matrice 2×2 , mais il peut aussi servir à démontrer le théorème de Toeplitz-Hausdorff.

Lemme 1.3.4 (Lemme de l'ellipse). *Soient $\lambda_1, \lambda_2, a \in \mathbb{C}$ des nombres complexes. Soit T la matrice 2×2 suivante*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Alors l'image numérique de T est une ellipse (éventuellement dégénérée) de foyers λ_1, λ_2 et de longueur d'axe mineure $|a|$ (voir la Figure 1.3).

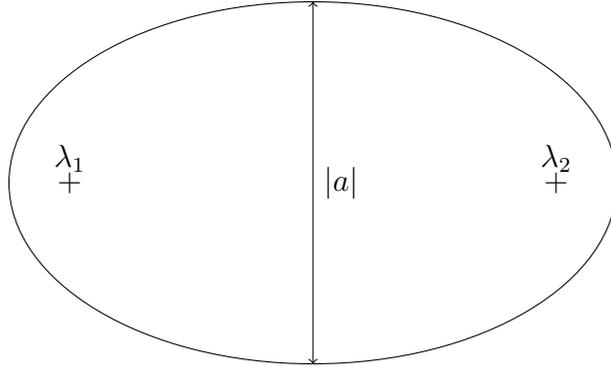


FIGURE 1.3 – Image numérique d'une matrice 2×2

Quitte à faire un changement de base unitaire, toute matrice 2×2 peut s'écrire comme dans le lemme ci dessus. Une autre manière d'énoncer ce lemme est de dire que l'image numérique d'une matrice 2×2 est toujours une ellipse. Une autre propriété intéressante de l'image numérique est qu'elle permet de "localiser" le spectre $\sigma(T)$ d'un opérateur T . Dans la suite on notera $\sigma_p(T)$ le spectre ponctuel de T .

Proposition 1.3.5. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur linéaire borné. Alors on a que*

1. $\sigma_p(T) \subset W(T)$,
2. $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$.

Si T est un opérateur autoadjoint, alors $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Par contre la réciproque est fautive en général. L'image numérique permet de caractériser les opérateurs autoadjoints.

Proposition 1.3.6. *Un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est autoadjoint si et seulement si $W(T) \subset \mathbb{R}$.*

Avant de finir cette section nous allons énoncer un théorème de Michel Crouzeix [Cro07].

Théorème 1.3.7 ([Cro07]). *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur linéaire borné, et soit $p \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme à coefficients complexes. Alors on a que*

$$\|p(T)\| \leq 12 \sup\{|p(z)|, z \in \overline{W(T)}\}.$$

Ce résultat permet d'avoir un contrôle sur la norme opérateur de $p(T)$, si on connaît l'image numérique de T . C'est une amélioration d'un résultat de Delyon et Delyon [DD99]. Ce résultat permet aussi de construire un calcul fonctionnel holomorphe sur l'image numérique.

Corollaire 1.3.8. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur linéaire borné, et soit f une fonction holomorphe sur $\overline{W(T)}$. Alors on a que*

$$\|f(T)\| \leq 12 \sup\{|f(z)|, z \in \overline{W(T)}\}.$$

1.4 Le rayon numérique

Dans cette section nous allons discuter du rayon numérique d'un opérateur. On peut dire en quelque sorte que le rayon numérique est l'analogie du rayon spectral, mais pour l'image numérique.

Définition 1.4.1. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur linéaire borné. Le rayon numérique de T (que l'on note $\omega(T)$) est donné par la formule suivante :

$$\omega(T) = \sup\{|z|, z \in W(T)\}.$$

On va commencer par énoncer quelques propriétés simples du rayon numérique. Le lemme suivant est une conséquence directe du Lemme 1.3.3.

Lemme 1.4.2. Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(H)$ deux opérateurs linéaires bornés, et soit $\alpha \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. On a que :

1. $\omega(\alpha T_1) = |\alpha| \omega(T_1)$,
2. $\omega(T_1 + T_2) \leq \omega(T_1) + \omega(T_2)$.

Proposition 1.4.3. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur linéaire borné. On a que

$$r(T) \leq \omega(T) \leq \|T\| \leq 2\omega(T).$$

La première inégalité est une conséquence de la Proposition 1.3.5, la deuxième est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la troisième de la formule de polarisation. Cette proposition combinée avec le lemme 1.4.2 nous permet de montrer que le rayon numérique est une norme équivalente à la norme opérateur sur $\mathcal{B}(H)$. C'est tout à fait remarquable puisque le rayon spectral n'est pas une norme (en effet il existe des opérateurs non nuls dont le rayon spectral est nul).

Théorème 1.4.4. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur linéaire borné agissant sur un espace de Hilbert H . On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que

$$\omega(T^n) \leq \omega(T)^n.$$

Ce résultat est aussi remarquable puisque en général, pour deux opérateurs $A, B \in \mathcal{B}(H)$, on n'a pas $\omega(AB) \leq \omega(A)\omega(B)$. Le théorème suivant est dû à Kittaneh.

Théorème 1.4.5 (Kittaneh [Kit03]). Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur linéaire borné. On a que

$$\omega(T) \leq \frac{1}{2} \left(\|T\| + \|T^2\|^{1/2} \right).$$

Cette inégalité nous permet d'estimer le rayon numérique d'un opérateur T si on connaît sa norme et celle de T^2 . On verra plus tard que cette inégalité peut être stricte pour certains produits de projections orthogonales. On peut aussi choisir certains produits de projections orthogonales tels que cette inégalité soit en fait une égalité.

Le dernier résultat de cette section est une caractérisation des projections qui sont orthogonales. Cette caractérisation, qui utilise le rayon numérique, est due à Furuata et Nakamoto.

Théorème 1.4.6 (Furuta-Nakamoto [FN71]). *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur linéaire borné tel que $T^2 = T$. On a que $\omega(T) \leq 1$ si et seulement si T est une projection orthogonale.*

1.5 Enveloppe convexe

Dans cette section nous allons discuter d'enveloppe convexe ainsi que de quelques applications à l'image numérique. Nous allons commencer par donner une définition de l'enveloppe convexe d'un ensemble, puis nous allons discuter de l'image numérique d'opérateurs de la forme $A \oplus B$ ainsi que des opérateurs normaux.

Définition 1.5.1. Soit E un sous ensemble convexe borné du plan complexe \mathbb{C} . On note par $\text{conv}\{E\}$ l'enveloppe convexe de E , qui est le plus petit ensemble convexe qui contient E .

Nous allons aussi noter $\overline{\text{conv}\{E\}}$ la fermeture de l'enveloppe convexe de E . L'enveloppe convexe d'un ensemble convexe borné peut aussi être défini de manière équivalente de la manière suivante.

Théorème 1.5.2 ([TUZ03]). *Soit E un sous ensemble convexe borné du plan complexe \mathbb{C} . Alors $\text{conv}\{E\}$ est l'ensemble des combinaisons σ -convexes des points dans E , i.e.*

$$\text{conv}\{E\} = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \varepsilon_n, \varepsilon_n \in E, x_n \in [0, 1], \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = 1 \right\}.$$

On renvoie le lecteur vers [TUZ03] pour plus de détails. Maintenant que nous avons une définition de l'enveloppe convexe on peut énoncer un résultat sur l'image numérique de sommes directes d'opérateurs.

Lemme 1.5.3. *Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B}(H)$ une suite d'opérateurs bornés. On note $\oplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ la somme directe des A_n agissant sur $l^2(H)$. On a que*

$$W(\oplus_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \text{conv}\{\cup_{n \in \mathbb{N}} W(A_n)\}.$$

Démonstration. Soit $z \in W(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n)$. D'après la définition de l'image numérique il existe $x = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} x_n \in H$ tel que $\|x\| = 1$ et $z = \langle (\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n)x, x \rangle$. On a que

$$\begin{aligned} 1 &= \|x\|^2 \\ &= \langle x, x \rangle \\ &= \langle \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} x_n, \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} x_k \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle x_n, x_k \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x_n, x_n \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|^2, \end{aligned}$$

car si $n \neq k$, x_n est orthogonal à x_k . On a aussi que

$$\begin{aligned} \langle (\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n)x, x \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle A_n x, x \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle A_n x_n, x_n \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|^2 \frac{\langle A_n x_n, x_n \rangle}{\|x_n\|^2}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{\langle A_n x_n, x_n \rangle}{\|x_n\|^2} \in W(A_n)$ on a bien que $W(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n) \subset \text{conv}\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} W(A_n)\}$.

Soit $z \in \text{conv}\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} W(A_n)\}$. Alors il existe $x_n \in H$ et $a_n \in [0, 1]$ tels que $\|x_n\| = 1$, $\langle x_n, x_k \rangle = \delta_{n,k}$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = 1$ et $z = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \langle A_n x_n, x_n \rangle$. Si on pose $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{a_n} x_n$ alors

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{a_n} x_n, \sum_{k \in \mathbb{N}} \sqrt{a_k} x_k \right\rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle \sqrt{a_n} x_n, \sqrt{a_k} x_k \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \sqrt{a_n} \sqrt{a_k} \langle x_n, x_k \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_n \\ &= 1. \end{aligned}$$

De plus on a que

$$\begin{aligned} \langle (\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n)x, x \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle A_n x, x \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle A_n \sqrt{a_n} x_n, \sqrt{a_n} x_n \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \langle A_n x_n, x_n \rangle \\ &= z. \end{aligned}$$

Donc on a bien que $\text{conv}\{\cup_{n \in \mathbb{N}} W(A_n)\} \subset W(\oplus_{n \in \mathbb{N}} A_n)$. \square

Il n'est pas toujours facile de déterminer l'image numérique d'un opérateur. Par contre pour les opérateurs normaux c'est facile.

Théorème 1.5.4. *Soit $N \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal. On a que*

$$\overline{W(N)} = \overline{\text{conv}\{\sigma(N)\}}.$$

Ce résultat permet de répondre facilement à la question suivante : est-ce que tous les ensembles convexes bornés fermés du plan complexe \mathbb{C} peuvent être réalisés comme l'adhérence de l'image numérique d'un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert séparable? La réponse est oui. Si on se donne un ensemble convexe \mathcal{S} fermé et borné dans le plan complexe, et si on prend une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dense dans \mathcal{S} , on peut prendre l'opérateur diagonal (donc normal) suivant :

$$D = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n e_n \otimes e_n,$$

où $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de H . Ainsi on a que

$$\begin{aligned} \overline{W(D)} &= \overline{\sigma(D)} \\ &= \overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}} \\ &= \mathcal{S}. \end{aligned}$$

En revanche la question suivante est encore ouverte : quels ensembles convexes bornés du plan complexe \mathbb{C} peuvent être réalisés comme l'image numérique d'un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert séparable? On sait qu'il existe des ensembles convexe bornés qui ne peuvent pas être réalisés comme l'image numérique d'un opérateur linéaire borné. Ce résultat est dû à Agler.

Proposition 1.5.5 (Agler [Agl82]). *L'ensemble $\{z, |z| < 1\} \cup \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ ne peut pas être réalisé comme l'image numérique d'un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert séparable.*

1.6 Fonctions supports d'un ensemble convexe

Dans cette section nous discuterons de fonctions supports d'un ensemble convexe. C'est une notion classique d'analyse convexe qui va nous permettre de calculer explicitement certaines images numériques.

Définition 1.6.1. Soit \mathcal{S} un sous ensemble convexe borné du plan complexe \mathbb{C} . La fonction support de \mathcal{S} à l'angle α est définie par la formule suivante :

$$\rho_{\mathcal{S}}(\alpha) = \sup\{\text{Re}(z \exp(-i\alpha)), z \in \mathcal{S}\}.$$

La proposition suivante montre que la fonction support d'un ensemble convexe caractérise sa fermeture.

Proposition 1.6.2. *On note $\overline{\mathcal{S}}$ l'adhérence de \mathcal{S} . On a que :*

$$\overline{\mathcal{S}} = \{z \in \mathbb{C}, \forall \alpha, \operatorname{Re}(z \exp(-i\alpha)) \leq \rho_{\mathcal{S}}(\alpha)\}.$$

Plus tard nous allons avoir besoin de ce lemme sur les fonction support d'enveloppes convexe d'ensembles convexes.

Lemme 1.6.3. *Soient $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ deux ensembles convexes bornés du plan complexe, et on note leur fonctions supports respectivement $\rho_{\mathcal{S}_1}(\alpha)$ et $\rho_{\mathcal{S}_2}(\alpha)$. Soit \mathcal{S} tel que $\rho_{\mathcal{S}}(\alpha) = \max_{i=1,2} \rho_{\mathcal{S}_i}(\alpha)$. Alors on a que $\overline{\mathcal{S}} = \overline{\operatorname{conv}\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\}}$.*

Dans cette thèse, nous n'aurons pas besoin d'en savoir plus sur les fonctions supports. Cependant nous invitons le lecteur intéressé par les fonctions supports à lire [Roc70].

1.7 Méthode des projections alternées et méthode des projections aléatoires

Dans cette section nous allons présenter la méthode des projections alternées et la méthode des projections aléatoire. Nous allons ensuite discuter de la conjecture d'Amemylia-Ando et du contre exemple récent de Paskiewicz à cette conjecture. Commençons en dimension 2. On se donne deux droites dans le plan et on se donne un point dans le plan. Ensuite on va projeter ce point sur la première droite pour obtenir un nouveau point. On projette ce dernier sur la deuxième droite, puis sur la première, etc ... Il suffit de faire un dessin pour se convaincre que la suite de points ainsi obtenue va converger vers l'intersection des deux droites. En faisant un deuxième dessin on peut aussi se convaincre que l'on va converger de moins en moins vite au fur et à mesure que l'angle entre les deux droites diminue (voir Figure 1.4). En dimension infinie ce résultat se généralise de la manière suivante : si on se donne deux sous-espaces M_1 et M_2 , et $x \in H$ un vecteur, et que l'on projette successivement ce vecteur sur le premier sous-espace, puis le second, puis le premier, etc ... on obtient une suite de vecteurs qui va converger fortement vers le projeté de x sur l'intersection des deux sous-espaces. Le théorème suivant, dû à J. von Neumann, est une reformulation de ce que l'on vient de dire.

Théorème 1.7.1 (Von Neumann). *Soient M_1 et M_2 deux sous-espaces fermés de H . Alors pour tout $x \in H$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(P_{M_2} P_{M_1})^n(x) - P_{M_1 \cap M_2}(x)\| = 0.$$

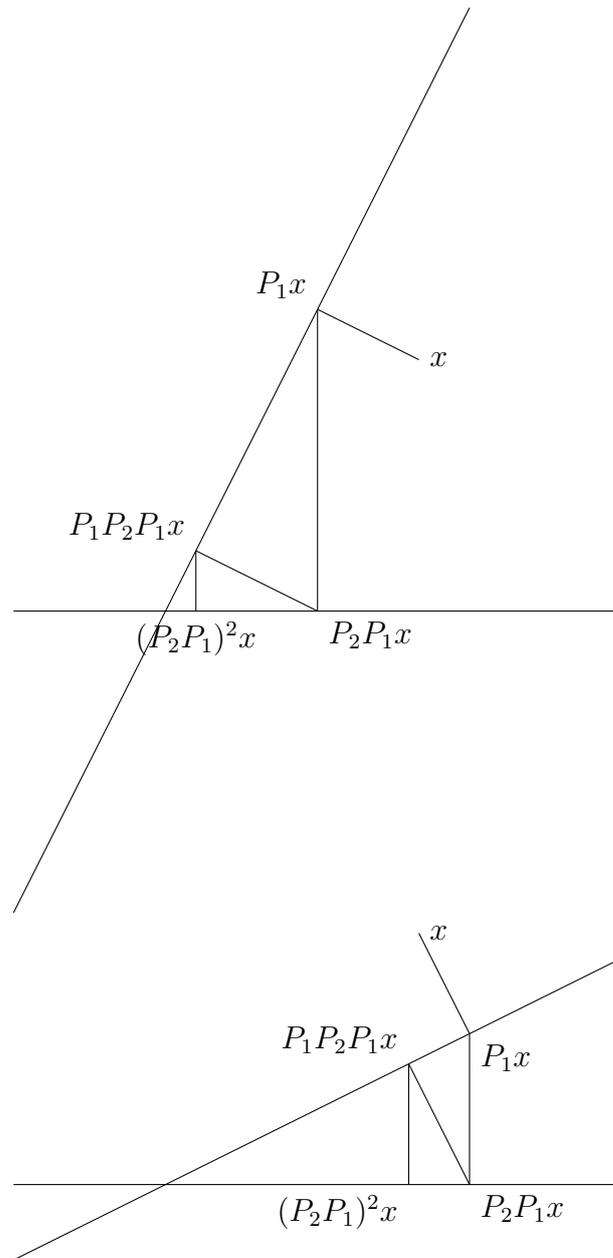


FIGURE 1.4

On peut aussi dire que $(P_{M_2}P_{M_1})^n$ converge en topologie forte vers $P_{M_1 \cap M_2}$. On va voir dans la prochaine section que la vitesse de convergence dépend de l'angle de Friedrichs entre M_1 et M_2 . Notons aussi qu'il existe des caractérisations différentes de la convergence arbitrairement lente obtenue lorsque $\cos(M_1, M_2) = 1$, et aussi on connaît la meilleure borne dans le cas de la convergence géométrique (voir [KW88, BDH09]).

Ce résultat peut se généraliser de deux manières à un nombre fini de projections orthogonales. Dans un premier temps on se donne un nombre fini de sous-espaces fermés M_1, \dots, M_r , et un vecteur $x \in H$. Dans le même esprit que précédemment, on va projeter successivement sur le premier sous-espace, puis le deuxième, etc, puis le dernier, puis le premier, etc... Comme précédemment on va obtenir une suite de vecteurs qui converge fortement vers le projeté de x sur l'intersection de tous les sous-espaces. Ce résultat est connu sous le nom de méthode des projections cycliques ou théorème de Von Neumann-Halperin.

Théorème 1.7.2 (Von Neumann-Halperin [Hal62]). *Soient M_1, \dots, M_r des sous-espaces fermés de H . On note $M = \bigcap_{i=1}^r M_i$. Alors pour tout $x \in H$ on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| (P_{M_r} P_{M_{r-1}} \dots P_{M_2} P_{M_1})^n x - P_M x \right\| = 0.$$

Pour un nombre fini de sous-espaces fermés, Catalin Badea, Sophie Grivaux et Vladimir Müller ont généralisé dans [BGM, BGM10] la notion du cosinus de l'angle de Friedrichs. On peut aussi regarder [BL10] pour une généralisation du Théorème de von Neumann-Halperin dans des espaces de Banach. Comme précédemment, la vitesse de convergence va dépendre de cet angle. Nous donnerons plus de détails ultérieurement.

Enfin la dernière généralisation consiste à projeter non plus de manière cyclique, mais de manière aléatoire. On se donne un nombre fini de sous-espaces fermés M_1, \dots, M_r , et un vecteur $x \in H$. Cette fois on va projeter de manière aléatoire ce vecteur sur les sous-espaces, par exemple on projette x sur le deuxième sous-espace, puis sur le dernier, puis sur le deuxième, puis sur le premier, puis le deuxième, etc... Cette fois la suite de vecteurs obtenue va converger en topologie faible. C'est le Théorème d'Amemiya-Ando, ou bien la méthode des projections aléatoires. Avant d'écrire proprement ce résultat, on a besoin de définir les sélections aléatoires.

Définition 1.7.3. On dit que $s : \mathbb{N} \rightarrow \{1, \dots, r\}$ est une sélection aléatoire si

1. pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, il existe une infinité de $k \in \mathbb{N}$ tel que $s(k) = i$,
2. pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $s(k) \neq s(k+1)$.

La première condition sur la sélection aléatoire nous permet de donner la limite exacte. La deuxième condition va nous empêcher de projeter deux fois de suite sur le même sous-espace. En effet il n'est pas intéressant de projeter deux fois de suite au même endroit puisque pour toute projection orthogonale P , on a que $P(Px) = Px$. Maintenant on peut énoncer le résultat d'Amemiya-Ando.

Théorème 1.7.4 (Amemiya-Ando [AA65]). *Soient M_1, \dots, M_r des sous-espaces fermés de H . On note $M = \bigcap_{i=1}^r M_i$. Soit $x \in H$. Soit $s : \mathbb{N} \rightarrow \{1, \dots, r\}$ une sélection aléatoire. Alors on a*

$$P_{M_{s(n)}} P_{M_{s(n-1)}} \dots P_{M_{s(2)}} P_{M_{s(1)}} x - P_M x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

c'est à dire $P_{M_{s(n)}} P_{M_{s(n-1)}} \dots P_{M_{s(2)}} P_{M_{s(1)}} x$ converge faiblement vers $P_M x$.

Pendant longtemps, on s'est demandé si dans le Théorème d'Amemiya-Ando on pouvait changer convergence faible par convergence forte. Tous les résultats partiels laissaient penser que c'était possible. Cependant en 2012, Paszkiewicz a montré le contraire.

Théorème 1.7.5 (Paszkiewicz [Pas12a]). *Il existe trois projections orthogonales $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{B}(H)$ sur les sous-espaces M_1, M_2 et M_3 , une sélection aléatoire $s : \mathbb{N} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ et un vecteur $x \in H$ tels que la suite $P_{s(n)} \dots P_{s(1)} x$ ne converge pas fortement vers $P_{M_1 \cap M_2 \cap M_3} x$.*

1.8 Vitesse de convergence

Dans cette section nous allons définir quelques vitesses de convergences. Ensuite nous allons donner quelques résultats généraux sur les vitesses de convergences de suites d'opérateurs. Puis dans la prochaine section, nous donnerons des résultats sur la vitesse de convergence dans la méthode des projections aléatoires. La situation est la suivante : on se donne une suite d'opérateurs linéaires bornés $L_n \in \mathcal{B}(H)$ qui converge vers L (dans un sens à préciser qui dépendra de la situation), et on veut décrire la vitesse de convergence de L_n vers L . Bien sur, on veut aussi savoir dans quels genre de situation ces vitesses de convergences apparaissent. On va commencer par quelques définitions.

Définition 1.8.1. On dit que L_n converge *géométriquement* vers L , si il existe deux constantes $\alpha \in [0, 1[$ et $C > 0$ telles que $\|L_n - L\| \leq C\alpha^n$.

Notons que la convergence géométrique implique la convergence en norme opérateur. C'est une convergence très rapide. Dans la suite nous allons avoir besoin de l'ensemble des suites qui tendent vers 0, que l'on notera par

$$c_0 = \{\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(n) = 0\}.$$

Maintenant on va définir des vitesses de convergences plus lentes.

Définition 1.8.2 ([DH10a]). On dit que L_n converge *presque arbitrairement lentement* vers L , si

1. Pour tout $x \in H$, on a que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n x - Lx\| = 0$,

2. Pour tout $\phi \in c_0$, il existe $x \in H$ et il existe $(p_k)_k$ une suite croissante d'indices tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|L_{p_n}x - Lx\| \geq \phi(p_n)$.

Définition 1.8.3 ([DH10a]). On dit que L_n converge *arbitrairement lentement* vers L , si

1. Pour tout $x \in H$, on a que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n x - Lx\| = 0$,
2. Pour tout $\phi \in c_0$, il existe $x \in H$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|L_n x - Lx\| \geq \phi(n)$.

Comme la terminologie l'indique, la convergence arbitrairement lente est une convergence lente dans le sens suivant : si L_n converge arbitrairement lentement vers L , alors pour tout $x \in H$, la suite $\|L_n x - Lx\|$ est une suite qui tend vers 0 (autrement dit on a que $(\|L_n x - Lx\|)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$). D'après la définition, on peut donc trouver $h \in H$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|L_n h - Lh\| \geq \|L_n x - Lx\|$. Autrement dit, si on se donne un vecteur $x \in H$, on a que $L_n x$ va converger en topologie forte vers Lx à une certaine vitesse, de plus on peut trouver un autre vecteur $h \in H$ tel que $L_n h$ va converger (en topologie forte) plus lentement vers Lh .

Moralement, la convergence presque arbitrairement lente est l'analogie "quitte à extraire une sous suite" de la convergence arbitrairement lente.

La convergence arbitrairement lente implique clairement la convergence presque arbitrairement lente. Mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Prenons L_n un suite qui converge arbitrairement lentement vers 0. Posons la suite A_n telle que

1. $A_{2k} = L_k$
2. $A_{2k+1} = 0$

Alors A_n converge presque arbitrairement lentement vers 0. En effet, pour tout $x \in H$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| = 0$. De plus, par convergence arbitrairement lente de L_n , on a que pour tout $\phi \in c_0$, il existe $x \in H$ tel que $\|A_{2k} x\| = \|L_k x\| \leq \phi(2k)$. Par contre A_n ne converge pas arbitrairement lentement vers 0. En effet, prenons $\phi(n) = \frac{1}{n}$. Alors pour tout $x \in H$, on a que $\|A_{2k+1} x\| = 0 < \frac{1}{2k+1}$.

Dans la définition de convergence arbitrairement lente, on a choisit des suites $\phi \in c_0$ qui tendent vers zéro. Maintenant on va voir que l'on peut obtenir une définition équivalente de la vitesse de convergence arbitrairement lente en prenant ϕ dans un sous ensemble de c_0 . On note \tilde{c}_0 l'ensemble des suites positives, décroissantes, qui tendent vers 0, c'est à dire

$$\tilde{c}_0 = \{\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(n) = 0, \phi(n) \geq \phi(n+1) \geq 0\}.$$

On va donner une définition équivalente de la convergence arbitrairement lente.

Proposition 1.8.4 ([DH10a]). *On a que L_n converge arbitrairement lentement vers L si et seulement si*

1. Pour tout $x \in H$, on a que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n x - Lx\| = 0$,
2. Pour tout $\phi \in \tilde{c}_0$, il existe $x \in H$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|L_n x - Lx\| \geq \phi(n)$.

Proposition 1.8.5 ([DH10a]). *On a que L_n converge presque arbitrairement lentement vers L si et seulement si*

1. Pour tout $x \in H$, on a que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n x - Lx\| = 0$,
2. Pour tout $\phi \in \tilde{c}_0$, il existe $x \in H$ et il existe $(p_k)_k$ une suite croissante d'indices tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|L_{p_n} x - Lx\| \geq \phi(p_n)$.

Maintenant on va énoncer le Théorème de léthargie de Deustsch et Hundal qui caractérise les suites L_n qui convergent presque arbitrairement lentement vers L .

Théorème 1.8.6 (Théorème de Léthargie, Deustsch-Hundal [DH10a]). *Soient $L_n \in \mathcal{B}(H)$ et $L \in \mathcal{B}(H)$ des opérateurs linéaires bornés. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. L_n converge presque arbitrairement lentement vers L ,
2. L_n converge en topologie forte vers L , mais pas en norme opérateur.

On peut grâce a ce théorème (et beaucoup de travail), obtenir des informations plus précises sur les vitesses de convergences des itérés d'opérateurs qui tendent vers 0. Nous allons maintenant énoncer le Théorème de Dichotomie de Deustsch et Hundal qui caractérise les vitesses de convergence des suites d'opérateurs de la forme $L_n = T^n$.

Théorème 1.8.7 (Théorème de Dichotomie, Deustsch-Hundal [DH10b]). *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur linéaire borné tel que T^n converge vers 0 en topologie forte. On a la dichotomie suivante :*

1. ou bien il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\|T^{n_1}\| < 1$, et alors T^n converge géométriquement vers 0,
2. ou bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|T^n\| \geq 1$, et alors T^n converge arbitrairement lentement vers 0.

1.9 Cosinus du paramètre de Friedrichs entre plusieurs sous-espaces et vitesse de convergence dans la méthode des projections cycliques

Précédemment, on a défini le cosinus de l'angle de Friedrichs pour deux sous-espaces fermés. Dans cette section nous allons généraliser le paramètre de Friedrichs entre

1.9. Cosinus du paramètre de Friedrichs entre plusieurs sous-espaces et vitesse de convergence dans la méthode des projections cycliques

plusieurs sous-espaces, et quelques quantités associées. Puis nous allons donner plusieurs caractérisations de la vitesse de convergence dans la méthode des projections cycliques. Tout d'abord on commence par définir le cosinus de l'angle Friedrichs entre plusieurs sous-espaces.

Définition 1.9.1 ([BGM]). Soit $N \geq 2$, soient M_1, \dots, M_N N sous-espaces fermés de H . On note $M = M_1 \cap \dots \cap M_N$ l'intersection entre tous les sous-espaces M_i . Le cosinus de l'angle de Friedrichs associé aux sous-espaces (M_1, \dots, M_N) est défini par la formule

$$\begin{aligned} c(M_1, \dots, M_N) &= \sup \left\{ \frac{2}{N-1} \frac{\sum_{j < k} \operatorname{Re}(\langle m_j, m_k \rangle)}{\sum_{j=1}^N \|m_j\|^2} : m_j \in M_j \cap M^\perp, \sum_{j=1}^N \|m_j\|^2 \neq 0 \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{1}{N-1} \frac{\sum_{j \neq k} \langle m_j, m_k \rangle}{\sum_{j=1}^N \|m_j\|^2} : m_j \in M_j \cap M^\perp, \sum_{j=1}^N \|m_j\|^2 \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Si $N = 2$, on récupère la définition classique du cosinus de l'angle de Friedrichs.

Définition 1.9.2 ([BGM]). Soit $N \geq 2$, soient M_1, \dots, M_N N sous-espaces fermés de H . On note $M = M_1 \cap \dots \cap M_N$ l'intersection entre tous les sous-espaces M_i . La constante de configuration associée aux sous-espaces (M_1, \dots, M_N) est définie par la formule

$$\pi(M_1, \dots, M_N) = \sup \left\{ \frac{1}{N} \frac{\left\| \sum_{j=1}^N m_j \right\|^2}{\sum_{j=1}^N \|m_j\|^2} : m_j \in M_j \cap M^\perp, \sum_{j=1}^N \|m_j\|^2 \neq 0 \right\}.$$

Définition 1.9.3 ([BGM]). Soit $N \geq 2$, soient M_1, \dots, M_N N sous-espaces fermés de H . On note $M = M_1 \cap \dots \cap M_N$ l'intersection entre tous les sous-espaces M_i . L'inclinaison des sous-espaces (M_1, \dots, M_N) est définie par la formule

$$l(M_1, \dots, M_N) = \inf_{x \notin M} \frac{\max_{1 \leq j \leq N} \operatorname{dist}(x, M_j)}{\operatorname{dist}(x, M)}.$$

Maintenant nous allons énoncer un résultat de Catalin Badea, Sophie Grivaux et Vladimir Muller qui caractérise de plusieurs façons la convergence arbitrairement lente dans la méthode des projections cycliques.

Théorème 1.9.4 (Badea-Grivaux-Muller [BGM]). Soit $N \geq 2$, soient M_1, \dots, M_N , N sous-espaces fermés de H . On note $M = M_1 \cap \dots \cap M_N$ l'intersection entre tous les sous-espaces M_i . On note P_i la projection orthogonale sur M_i et on note $T = P_N \dots P_1$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\operatorname{Im}(T - I)$ n'est pas fermé ;
- (1') pour tout $k \geq N$ et pour tout k -uplet d'indices i_1, \dots, i_k tels que $\{i_1, \dots, i_k\} = \{1, \dots, N\}$, on a que $\operatorname{Im}(P_{i_k} \dots P_{i_1} - I)$ n'est pas fermé ;

- (2) T^n converge arbitrairement lentement vers P_M ;
- (3) $c(M_1, \dots, M_N) = 1$;
- (4) pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-espace fermé $K \subset M^\perp$ de codimension finie dans M^\perp , il existe $x \in K$ tel que $\|x\| = 1$ et $\max\{\text{dist}(x, M_j) : j = 1, \dots, N\}$;
- (5) $1 \in \sigma(T - P_M)$;
- (5') pour tout $k \geq N$ et pour tout k -uplet d'indices i_1, \dots, i_k tels que $\{i_1, \dots, i_k\} = \{1, \dots, N\}$, on a que $1 \in \sigma(P_{i_k} \dots P_{i_1} - P_M)$;
- (6) $\|T - P_M\| = 1$;
- (6') pour tout $k \geq N$ et pour tout k -uplet d'indices i_1, \dots, i_k tels que $\{i_1, \dots, i_k\} = \{1, \dots, N\}$, on a que $\|P_{i_k} \dots P_{i_1} - P_M\| = 1$;
- (7) $\|T - P_M\|_e = 1$;
- (7') pour tout $k \geq N$ et pour tout k -uplet d'indices i_1, \dots, i_k tels que $\{i_1, \dots, i_k\} = \{1, \dots, N\}$, on a que $\|P_{i_k} \dots P_{i_1} - P_M\|_e = 1$;
- (8) $1 \in \sigma_e(T - P_M)$;
- (8') pour tout $k \geq N$ et pour tout k -uplet d'indices i_1, \dots, i_k tels que $\{i_1, \dots, i_k\} = \{1, \dots, N\}$, on a que $1 \in \sigma_e(P_{i_k} \dots P_{i_1} - P_M)$;
- (9) pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-espace fermé $K \subset M^\perp$ de codimension finie dans M^\perp , il existe $x \in K$ tel que $\|Tx - x\| \leq \varepsilon$;
- (9') pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout sous-espace fermé $K \subset M^\perp$ de codimension finie dans M^\perp , pour tout $k \geq N$ et pour tout k -uplet d'indices i_1, \dots, i_k tels que $\{i_1, \dots, i_k\} = \{1, \dots, N\}$, il existe $x \in K$ tel que $\|P_{i_k} \dots P_{i_1} x - x\| \leq \varepsilon$;
- (10) la somme de $M_1 \oplus \dots \oplus M_1 \subset H^{N-1}$ et de $M_2 \oplus \dots \oplus M_N \subset H^{N-1}$ n'est pas fermée dans H^{N-1} ;
- (11) $M_1^\perp + \dots + M_n^\perp$ n'est pas fermé dans H ;
- (12) $\pi(M_1, \dots, M_N) = 1$;
- (13) $l(M_1, \dots, M_N) = 1$.

Les conditions 1, 2, 5, 6, 7, 8 et 9 sont de nature spectrale, de plus elles ne dépendent pas de l'ordre dans lequel on projette sur tous les sous-espaces. Les conditions 3, 4, 10, 11, 12 et 13 portent sur la géométrie des sous-espaces M_j . Nous obtiendrons plus tard dans cette thèse des résultats qui font intervenir l'image numérique de produit de projections orthogonales.

1.10 Principe d'incertitude et paires annihilantes

Dans cette section nous allons parler de principe d'incertitude. Le principe d'incertitude c'est l'idée qu'une fonction et sa transformée de Fourier ne peuvent être simultanément petites. Il existe plusieurs manières de quantifier mathématiquement cette vague affirmation. Ici nous allons discuter de paires annihilantes. L'idée des paires annihilantes est de dire que si le support d'une fonction est petit (dans un certain sens), alors le support de sa transformée de Fourier doit être grand. On invite le lecteur à regarder le livre [HJ94] de Havin et Jöricke pour plus d'informations sur les paires annihilantes. Tout d'abord on commence par définir la Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$.

Définition 1.10.1. On note \mathcal{F} la transformée de Fourier, qui est l'opérateur linéaire $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ tel que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on ait

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-2i\pi\xi x) dx.$$

Si on a une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $f \mathbb{1}_{[-n,n]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. De plus, la suite $f \mathbb{1}_{[-n,n]}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ quand n tend vers ∞ et on a

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f \mathbb{1}_{[-n,n]}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[-n,n]} f(x) \exp(-2i\pi\xi x) dx.$$

La transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ est une isométrie surjective (i.e. $\mathcal{F}^* \mathcal{F} = \mathcal{F} \mathcal{F}^* = I$). En particulier la Transformation Inverse de Fourier est \mathcal{F}^* . On notera parfois \hat{f} au lieu de $\mathcal{F}(f)$ pour la transformée de f . Nous allons maintenant définir le support d'une fonction.

Définition 1.10.2. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Le support essentiel de f , noté $\text{supp}(f)$, est le sous ensemble de \mathbb{R} tel que

1. $m\{x \in \text{supp}(f), f(x) = 0\} = 0$,
2. $m\{x \in \mathbb{R} \setminus \text{supp}(f), f(x) \neq 0\} = 0$.

Le support est un ensemble qui est défini modulo un ensemble de mesure nulle. Maintenant nous allons définir le concept de paires annihilantes.

Définition 1.10.3. Soient $S, \Sigma \subset \mathbb{R}$ deux sous ensembles de la droite réelle. On dit que (S, Σ) est une *paire annihilante*, si pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a que

$$\text{supp}(f) \subset S, \text{supp} \hat{f} \subset \Sigma \Rightarrow f = 0.$$

Si (S, Σ) est une paire annihilante, et que le support de $f \in L^2(\mathbb{R})$ (avec $f \neq 0$) est inclus dans S , alors le support de \hat{f} doit forcément sortir de Σ . Nous allons définir le concept de paires fortement annihilantes.

Définition 1.10.4. Soient $S, \Sigma \subset \mathbb{R}$ deux sous ensembles de la droite réelle. On dit que (S, Σ) est une *paire fortement annihilante*, si il existe une constante $c > 0$ (qui dépend de (S, Σ)) telle que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \leq c \left(\int_{\mathbb{R} \setminus S} |f(t)|^2 dt + \int_{\mathbb{R} \setminus \Sigma} |\widehat{f}(t)|^2 dt \right).$$

Si une paire (S, Σ) est fortement annihilante, alors elle est annihilante. En effet si $\text{supp} f \subset S$, alors on a que

$$\int_{\mathbb{R} \setminus S} |f(t)|^2 dt = 0.$$

De même, si $\text{supp} \widehat{f} \subset \Sigma$, alors

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \Sigma} |\widehat{f}(t)|^2 dt = 0,$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = 0,$$

ce qui revient à dire que $f = 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

On peut reformuler ces définitions en utilisant des projections orthogonales. On va définir deux projections orthogonales. Tout d'abord on pose

$$\begin{aligned} P_S : L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \mathbb{1}_S f. \end{aligned}$$

Ici P_S est la multiplication par la fonction indicatrice de S . Cet opérateur est une projection orthogonale sur le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$ suivant

$$\text{Im} P_S = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp}(f) \subset S\}.$$

On pose aussi

$$\begin{aligned} P_\Sigma : L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \mathcal{F}^*(\mathbb{1}_\Sigma \mathcal{F}(f)). \end{aligned}$$

Cet opérateur peut être vu comme $P_\Sigma = \mathcal{F}^* M_{\mathbb{1}_\Sigma} \mathcal{F}$, où $M_{\mathbb{1}_\Sigma}$ est l'opérateur de multiplication par la fonction indicatrice de Σ . Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{P_\Sigma} & L^2(\mathbb{R}) \\ \mathcal{F} \downarrow & & \downarrow \mathcal{F} \\ L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{M_{\mathbb{1}_\Sigma}} & L^2(\mathbb{R}). \end{array}$$

L'opérateur P_Σ est une projection orthogonale sur le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$ suivant

$$\text{Im}P_\Sigma = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp}(\widehat{f}) \subset \Sigma\}.$$

L'idée de la projection orthogonale P_S est que l'on prend une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on met à zéro tout ce qui est en dehors de S . La fonction que l'on obtient est la restriction de f sur S . L'idée de la projection P_Σ est que l'on prend une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on applique la transformée de Fourier, on met à zéro tout ce qui se trouve en dehors de Σ , puis on applique la transformation Inverse de Fourier. Autrement dit, la fonction obtenue est la fonction dont la transformé de Fourier est la restriction de \widehat{f} sur Σ .

Grâce aux projections P_S et P_Σ , on peut reformuler le fait que (S, Σ) soit une paire annihilante.

Lemme 1.10.5. *Soient $S, \Sigma \subset \mathbb{R}$ deux sous ensembles de la droite réelle. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. (S, Σ) est une paire annihilante,
2. $\text{Im}P_S \cap \text{Im}P_\Sigma = \{0\}$,
3. pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $P_S f = P_\Sigma f = f \Rightarrow f = 0$.

Lemme 1.10.6. *Soient $S, \Sigma \subset \mathbb{R}$ deux sous ensembles de la droite réelle. On a que (S, Σ) est une paire fortement annihilante, si et seulement si il existe une constante $c > 0$ (qui dépend de (S, Σ)) telle que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a*

$$\|f\|^2 \leq c \left(\|(I - P_S)f\|^2 + \|(I - P_\Sigma)f\|^2 \right).$$

Nous allons maintenant introduire la notion de paires compactes.

Définition 1.10.7. Soient $S, \Sigma \subset \mathbb{R}$ deux sous ensembles de la droite réelle. On dit que (S, Σ) est une *paire compacte*, si $P_S P_\Sigma$ est un opérateur compact.

La proposition suivante explique pourquoi cette notion de paire compacte est intéressante.

Proposition 1.10.8. *Soient $S, \Sigma \subset \mathbb{R}$ deux sous ensembles de la droite réelle. Si (S, Σ) est une paire compacte et annihilante, alors (S, Σ) est une paire fortement annihilante.*

Théorème 1.10.9. *Soient $S, \Sigma \subset \mathbb{R}$ deux sous ensembles de la droite réelle. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. (S, Σ) est une paire fortement annihilante,
2. $1 \notin \sigma(P_S P_\Sigma)$,
3. $\|P_S P_\Sigma\| < 1$,

4. $\text{Im}P_S \cap \text{Im}P_\Sigma = \{0\}$ et $\cos(\text{Im}P_S, \text{Im}P_\Sigma) < 1$,
5. il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $f \in \text{Im}P_\Sigma$, $c\|f\| \leq \|(I - P_S)f\|$,
6. il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $f \in \text{Im}P_S$, $c\|f\| \leq \|(I - P_\Sigma)f\|$,
7. $\text{Im}P_S \cap \text{Im}P_\Sigma = \{0\}$ et $\text{Im}P_S + \text{Im}P_\Sigma$ est un sous-espace fermé,
8. $\text{Im}P_S \cap \text{Im}P_\Sigma = \{0\}$ et $\text{Im}P_S^\perp + \text{Im}P_\Sigma^\perp$ est un sous-espace fermé.

Le théorème suivant est dû à Amrein et Berthier. Il nous donne une condition suffisante pour que (S, Σ) soit une paire fortement annihilante.

Théorème 1.10.10 (Amrein-Bertier [AB77]). *Soient $S, \Sigma \subset \mathbb{R}$ deux sous ensembles de la droite réelle. Si on a que*

$$m(S) + m(\Sigma) < \infty,$$

alors (S, Σ) est une paire compacte annihilante, en particulier c'est une paire fortement annihilante.

1.11 Le théorème d'énergie de Slepian et Pollak

Dans cette section nous allons énoncer le théorème d'énergie de Slepian et Pollak tel qu'il est donné dans [HJ94]. De manière abstraite on se pose la question suivante : si P, Q sont deux projections orthogonales, et si on se donne $h \in H$ tel que $\|h\| = 1$ et si on connaît $\|Ph\| \in [0, 1]$, quelles sont les valeurs possibles pour $\|Qh\|$?

Définition 1.11.1. On dit que la paire ordonné (P, Q) de projections orthogonales est *flexible*, si il existe une famille $(U(\tau))_{\tau \in T}$ d'opérateurs unitaires agissant sur H et qui commutent avec P tels que

1. pour tout $h \in H$ le vecteur $U(\tau)h$ dépend continument du paramètre τ qui vit dans un espace topologique connexe,
2. un des opérateurs $U(\tau)$ est l'identité,
3. pour tout $h \in H$, $\inf\{\|QU(\tau)h\| : \tau \in T\} = 0$.

Dans cette section on veut étudier l'ensemble

$$\mathcal{W}_{P,Q} = \{(\|Ph\|, \|Qh\|) : \|h\| = 1\}.$$

Soit $\alpha \in [0, 1]$. On note

$$(\mathcal{W}_{P,Q})_\alpha = \{\beta : (\alpha, \beta) \in \mathcal{W}_{P,Q}\}.$$

Comme $\|P\| \leq 1$ et $\|Q\| \leq 1$, on a que $\mathcal{W}_{P,Q} \subset [0, 1] \times [0, 1]$.

Théorème 1.11.2. *Soient P, Q des projections orthogonales. Supposons que*

1. (P, Q) est une paire compacte,
2. (P, Q) est une paire flexible,
3. (Q, P) est une paire flexible,
4. $\text{Im}(P) \cap \text{Ker}(Q) = \{0\}$,
5. $\text{Ker}(P) \cap \text{Im}(Q) = \{0\}$,
6. $\dim(\text{Im}(P)) = \dim(\text{Im}(Q)) = \infty$.

On note $c = \sqrt{\|PQP\|}$. On a que

$$(\mathcal{W}_{P,Q})_\alpha = \begin{cases} [0, 1] & \text{si } 0 < \alpha < c \\ [0, \cos(\arccos(c) - \arccos(\alpha))] & \text{si } c \leq \alpha < 1 \end{cases}$$

et on a que

$$\begin{aligned}]0, 1[&\subset (\mathcal{W}_{P,Q})_0 \subset [0, 1], \\]0, c] &\subset (\mathcal{W}_{P,Q})_1 \subset [0, c]. \end{aligned}$$

On remarque que si (P, Q) est une paire annihilante, alors $\|PQP\| < 1$ et donc $(1, 1) \notin \overline{\mathcal{W}_{P,Q}}$. Maintenant on peut énoncer le théorème d'énergie de Slepian et Pollak tel qu'il est donné dans [HJ94].

Théorème 1.11.3. *Soient $S, \Sigma \subset \mathbb{R}$ deux sous ensembles de la droite réelle tels que $0 < m(S) < \infty$ et $0 < m(\Sigma) < \infty$. Alors on a que les projections P_S et P_Σ vérifient les hypothèses (et les conclusions) du Théorème 1.11.2.*

1.12 A propos de $W(P + iQ)$

Dans cette section nous allons nous intéresser au résultat de Lenard à propos de l'image numérique de $P + iQ$. Nous allons ensuite faire le lien entre ces résultats et la section précédente. Dans cette section on notera P la projection orthogonale sur le sous-espace fermé M ($P = P_M$), et Q la projection orthogonale sur le sous-espace fermé N ($Q = P_N$). En découpant H comme dans le théorème d'Halmos, (voir l'Equation 1.1 en Section 1.1), on obtient que dans

$$H = (M \cap N) \oplus (M \cap N^\perp) \oplus (M^\perp \cap N) \oplus (M^\perp \cap N^\perp) \oplus \tilde{H},$$

on peut écrire que

$$P + iQ = I + iI \oplus I \oplus iI \oplus 0 \oplus \tilde{P} + i\tilde{Q}.$$

On rappelle que $W(\lambda I) = \{\lambda\}$. On pose les ensembles suivants

$$\begin{aligned} W(P + iQ)_{M \cap N} &= \begin{cases} \emptyset & \text{si } M \cap N = \{0\} \\ 1 + i & \text{sinon} \end{cases}, \\ W(P + iQ)_{M \cap N^\perp} &= \begin{cases} \emptyset & \text{si } M \cap N^\perp = \{0\} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}, \\ W(P + iQ)_{M^\perp \cap N} &= \begin{cases} \emptyset & \text{si } M^\perp \cap N = \{0\} \\ i & \text{sinon} \end{cases}, \\ W(P + iQ)_{M^\perp \cap N^\perp} &= \begin{cases} \emptyset & \text{si } M^\perp \cap N^\perp = \{0\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.5.3, on a que l'image numérique $W(P + iQ)$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble

$$W(P+iQ)_{M \cap N} \cup W(P+iQ)_{M \cap N^\perp} \cup W(P+iQ)_{M^\perp \cap N} \cup W(P+iQ)_{M^\perp \cap N^\perp} \cup W(P+iQ)_{\tilde{H}}.$$

La partie la plus délicate concerne $W(P + iQ)_{\tilde{H}}$ puisque sur la partie en position générique de (P, Q) , $\tilde{P} + i\tilde{Q}$ n'est pas un multiple de l'identité. Le théorème de Lenard va nous donner explicitement cette image numérique. Avant d'énoncer ce théorème, on va avoir besoin de certaines ellipses.

Définition 1.12.1. On note $\mathcal{F}(\theta)$ l'ellipse dont le bord est donné par l'équation paramétrique suivante

$$x_\theta(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(t + \theta), \quad y_\theta(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\theta - t).$$

Maintenant on peut énoncer le résultat de Lenard.

Théorème 1.12.2 ([Len72]). *Soient $\tilde{P}, \tilde{Q} \in \mathcal{B}(H)$ deux projections orthogonales en position générique. Alors*

$$W(\tilde{P} + i\tilde{Q}) = \text{conv}\{\mathcal{F}(\arccos(t)) : t = \langle \tilde{Q}h, h \rangle, h \in \text{Im}\tilde{P}, \|h\| = 1\}.$$

Voici un cas particulier de ce théorème.

Corollaire 1.12.3. *Soient $\tilde{P}, \tilde{Q} \in \mathcal{B}(H)$ deux projections orthogonales en position générique. On pose $\theta_1 = \arccos(\cos(\text{Im}(\tilde{P}), \text{Im}(\tilde{Q})))$, et $\theta_2 = \arccos(\cos(\text{Im}(\tilde{P}), \text{Ker}(\tilde{Q})))$. Alors*

$$\overline{W(\tilde{P} + i\tilde{Q})} = \text{conv}\{\mathcal{F}(\theta_1) \cup \mathcal{F}(\theta_2)\}.$$

En résumé, l'image numérique de $P + iQ$ dépend de $\cos(M, N)$, $\cos(M, N^\perp)$ et du fait que les sous-espaces $M \cap N$, $M \cap N^\perp$, $M^\perp \cap N$ et $M^\perp \cap N^\perp$ soient réduits à $\{0\}$ ou pas.

Maintenant on va faire le lien avec la section précédente. Dans cette dernière nous avons étudié l'ensemble $\mathcal{W}_{P,Q}$ qui est l'ensemble des couples

$$(\|Ph\|, \|Qh\|),$$

pour tous les $h \in H$ tels que $\|h\| = 1$. Déterminer $\mathcal{W}_{P,Q}$ est la même chose que trouver tous les couples de la forme

$$(\|Ph\|^2, \|Qh\|^2).$$

En identifiant \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} , on peut dire que l'on est en fait en train de chercher tous les points du plan complexe de la forme

$$\|Ph\|^2 + i\|Qh\|^2.$$

Avec ce petit calcul, on trouve que

$$\begin{aligned} \|Ph\|^2 + i\|Qh\|^2 &= \langle Ph, Ph \rangle + i\langle Qh, Qh \rangle \\ &= \langle P^*Ph, h \rangle + i\langle Q^*Qh, h \rangle \\ &= \langle P^2h, h \rangle + i\langle Q^2h, h \rangle \\ &= \langle Ph, h \rangle + i\langle Qh, h \rangle \\ &= \langle (P + iQ)h, h \rangle. \end{aligned}$$

En résumé, déterminer $W(P+iQ)$ et déterminer $\mathcal{W}_{P,Q}$ sont des problèmes équivalents. Le résultat de Lenard est plus fort que le Théorème 1.11.2. En effet le résultat suivant est un (autre) corollaire du résultat de Lenard.

Corollaire 1.12.4. *Soient $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ des projections orthogonales. Supposons que*

1. (P, Q) est une paire compacte,
2. $M^\perp \cap N^\perp \neq \{0\}$
3. $M \cap N^\perp = \{0\}$,
4. $M^\perp \cap N = \{0\}$,
5. $\dim(M) = \dim(N) = \infty$.

On pose $c = \sqrt{\|PQP\|}$. Alors

$$(\mathcal{W}_{P,Q})_\alpha = \begin{cases} [0, 1] & \text{si } 0 < \alpha < c \\ [0, \cos(\arccos(c) - \arccos(\alpha))] & \text{si } c \leq \alpha < 1 \end{cases}$$

et on a que

$$(\mathcal{W}_{P,Q})_0 = [0, 1[, \quad (\mathcal{W}_{P,Q})_1 =]0, c].$$

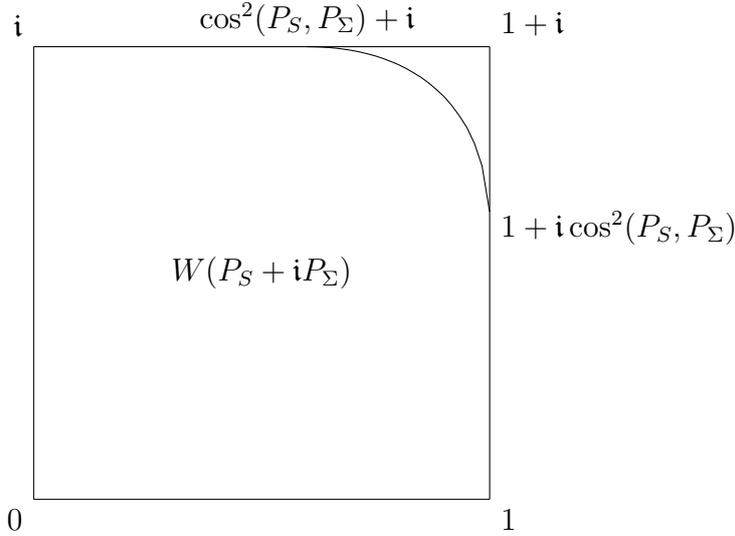


FIGURE 1.5

Ici, contrairement au Théorème 1.11.2, on peut s'affranchir de la flexibilité (il faut quand même supposer que $M^\perp \cap N^\perp \neq \{0\}$).

On peut aussi donner une autre caractérisation des paires (fortement) annihilantes en fonction de l'image numérique de $P_S + iP_\Sigma$.

Théorème 1.12.5. *Soient $S, \Sigma \subset \mathbb{R}$ deux sous ensembles de la droite réelle. On a que (S, Σ) est une paire annihilante si et seulement si $1+i \notin W(P_S + iP_\Sigma)$.*

Théorème 1.12.6. *Soient $S, \Sigma \subset \mathbb{R}$ deux sous ensembles de la droite réelle. On a que (S, Σ) est une paire fortement annihilante si et seulement si $1+i \notin \overline{W(P_S + iP_\Sigma)}$.*

1.13 Polynômes orthogonaux et principe d'incertitude de Erb

Le but de cette section est de rappeler quelques faits sur les polynômes orthogonaux et d'expliquer le principe d'incertitude de Erb. Dans cette section, on se place dans l'espace de Hilbert $H = L^2([-1, 1], w)$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{[-1,1]} f(x)\overline{g(x)}w(x)dx,$$

avec $w(x)$ un poids positif tel que $\text{supp}(w) = [-1, 1]$, et tel que les moments de $w dx$ sont finis, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{[-1,1]} x^n w(x)dx < \infty.$$

Notons que cette condition est équivalente à

$$\int_{[-1,1]} w(x)dx < \infty.$$

On note $\{p_l\}_{l=0}^\infty$ la famille de polynôme orthogonaux dans H tels que les p_l soient de degré l et que les p_l soient normalisés de telle sorte que le coefficient de plus haut degré soit positif. Ces polynômes p_l satisfont une relation de récurrence à trois termes :

$$b_{l+1}p_{l+1}(x) = (x - a_l)p_l(x) - b_l p_{l-1}(x),$$

avec

$$b_l = l \frac{p_{l-1}^{(l-1)}(0)}{p_l^{(l)}(0)}, \quad a_l = \langle xp_l, p_l \rangle.$$

On va définir maintenant la classe et la sous classe de Nevai.

Définition 1.13.1. On dit que $w(x)$ est dans la *classe de Nevai* (on le note $w(x) \in \mathcal{M}(0, 1)$) si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}$.

Définition 1.13.2. On dit que $w(x)$ est dans la *sous classe de Nevai* (on le note $w(x) \in \mathcal{M}^*(0, 1)$) si

1. $w(x) \in \mathcal{M}(0, 1)$,
2. $\text{supp}(w) = [-1, 1]$,
3. $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| + \left| b_n - \frac{1}{2} \right| < \infty$.

Pour tout $f \in L^2([-1, 1], w)$, on note

$$\epsilon(f) = \langle M_x f, f \rangle = \int_{[-1,1]} x |f(x)|^2 w(x)dx.$$

Si $\|f\| = 1$, on peut interpréter $\epsilon(f)$ comme l'endroit où est localisée la masse L^2 de f . On note Π_n^m la projection orthogonale sur le sous-espace $\overline{\text{vect}}\{p_l : m \leq l \leq n\}$. Dans [Erb13], Erb s'est intéressé à déterminer l'ensemble suivant :

$$\mathcal{W}_{\epsilon, \Pi_n^m} = \{(\epsilon(f), \|\Pi_n^m f\|^2) : f \in L^2([-1, 1], w), \|f\| = 1\}.$$

Après avoir identifié \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} , on peut refaire le même petit calcul que dans la section précédente

$$\begin{aligned} \epsilon(f) + \mathbf{i} \|\Pi_n^m f\|^2 &= \langle M_x f, f \rangle + \mathbf{i} \langle \Pi_n^m f, \Pi_n^m f \rangle \\ &= \langle M_x f, f \rangle + \mathbf{i} \langle (\Pi_n^m)^* \Pi_n^m f, f \rangle \\ &= \langle M_x f, f \rangle + \mathbf{i} \langle (\Pi_n^m)^2 f, f \rangle \\ &= \langle M_x f, f \rangle + \mathbf{i} \langle \Pi_n^m f, f \rangle \\ &= \langle (M_x + \mathbf{i} \Pi_n^m) f, f \rangle. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble de Erb est l'image numérique de $M_x + i\Pi_n^m$. On pose

$$\begin{aligned} x_{n,max}^m &= \sup \sigma(\Pi_n^m M_x \Pi_n^m) \setminus \{0\}, \\ x_{n,min}^m &= \inf \sigma(\Pi_n^m M_x \Pi_n^m) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [x_{n,max}^m, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(x x_{n,max}^m + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} (1 - (x_{n,max}^m)^2)^{\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_2 : [-1, x_{n,min}^m] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(x x_{n,min}^m + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} (1 - (x_{n,min}^m)^2)^{\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

On pose les sous ensemble de $[-1, 1] \times [0, 1]$ suivants

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1] : y < \frac{1-x}{1-x_{n,max}^m}, y < \frac{1+x}{1+x_{n,min}^m} \right\}, \\ C_1 &= \{(x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1] : x \in]x_{n,max}^m, 1[, y > \gamma_1(x)\}, \\ C_2 &= \{(x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1] : x \in]-1, x_{n,min}^m[, y > \gamma_2(x)\}. \end{aligned}$$

On peut maintenant énoncer le résultat de Erb sur l'image numérique de $\mathcal{W}_{\epsilon, \Pi_n^m}$.

Théorème 1.13.3 ([Erb13]). *Si $w(x) \in \mathcal{M}^*(0, 1)$, alors on a que*

$$A \subset \mathcal{W}_{\epsilon, \Pi_n^m} \subset [-1, 1] \times [0, 1] \setminus (C_1 \cup C_2).$$

On peut reformuler ce théorème d'une manière qui ressemble plus à la définition paires annihilantes.

Corollaire 1.13.4. *Si $w(x) \in \mathcal{M}^*(0, 1)$, alors il existe une constante $c = c(w, \Pi_n^m) > 0$ telle que pour tout $f \in L^2([-1, 1], w)$ on ait que*

$$\|f\|^2 \leq c \left((\|f\|^2 - \epsilon(f)) + \|(I - \Pi_n^m)f\|^2 \right),$$

autrement dit

$$\|f\|^2 \leq c \left(\langle (I - M_x)f, f \rangle + \|(I - \Pi_n^m)f\|^2 \right).$$

Ce principe d'incertitude nous dit que si une fonction est localisé (au sens de $\epsilon(f)$) autour de 1, alors elle ne peut pas être bien approchée par des polynômes. Ce que montre aussi le Théorème 1.13.3 (mais pas le Corollaire 1.13.4), c'est que le même phénomène apparait en -1.

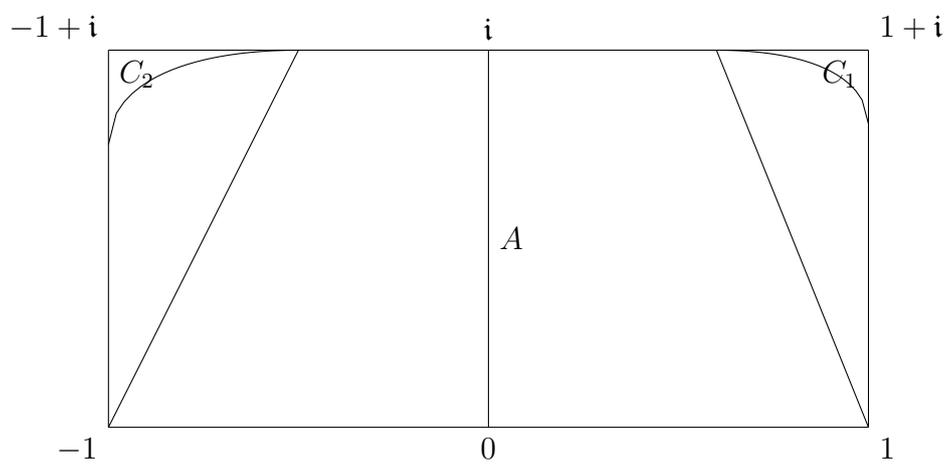


FIGURE 1.6

1.14 Problème du sous-espace invariant

Dans cette section nous allons présenter le problème du sous-espace invariant, et le problème du sous-espace hyperinvariant.

Question 1.14.1 (Problème du sous-espace invariant). *Soit X un espace de Banach. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur linéaire borné. Est-ce que T possède un sous-espace invariant non trivial ? C'est à dire est ce qu'il existe un sous-espace M fermé dans X tel que $M \neq \{0\}$, $M \neq X$ et $T(M) \subset M$?*

Question 1.14.2 (Problème du sous-espace hyper invariant). *Soit X un espace de Banach. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur linéaire borné tel que $T \neq \lambda I$. Est-ce que T possède un sous-espace hyper invariant non trivial ? C'est à dire est ce qu'il existe un sous-espace M fermé dans X tel que $M \neq \{0\}$, $M \neq X$ et pour tout $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $TS = ST$, on ait que $S(M) \subset M$?*

Clairement, une réponse positive au problème du sous-espace hyper invariant implique une réponse positive au problème du sous-espace invariant. De même, une réponse négative au problème du sous-espace invariant implique une réponse négative au problème du sous-espace hyper invariant.

Si X est un espace de Banach non séparable, alors la réponse au problème du sous-espace invariant est oui. En effet soit $T \in \mathcal{B}(X)$ et $x \in X$ tel que $x \neq 0$. Alors

$$M = \overline{\text{vect}}\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$$

est un sous-espace fermé, séparable (en particulier $M \neq X$), non nul (car $x \in M$) qui est invariant pour T (car $T(T^n x) = T^{n+1}x \in M$). Si X est un espace séparable, nous ne sommes plus en mesure de déterminer facilement si $M \neq X$ puisque M et X sont séparable. Si on passe à l'autre extrême, et que l'on suppose que $\dim(X) = 1$, alors la réponse au problème du sous-espace invariant est non. En effet les seuls sous-espaces de X sont X et $\{0\}$. A partir de maintenant on suppose que $\dim(X) \geq 2$. Avec quelques hypothèses sur l'opérateur T , on peut parfois s'en sortir. L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire porte sur l'existence d'une valeur propre.

Lemme 1.14.3. *Soit X un espace de Banach. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ tel que $T \neq \lambda I$. Si $\sigma_p(T) \neq \emptyset$, alors T possède un sous-espace hyper invariant non trivial.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \sigma_p(T)$. On pose $M = \text{Ker}(T - \lambda)$. On a que $M \neq \{0\}$ (car $\lambda \in \sigma_p(T)$), $M \neq X$ (car $T \neq \lambda I$) et M est fermé. Soit $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $TS = ST$. Soit $x \in M$. On a que

$$\lambda Sx = S(\lambda x) = STx = TSx.$$

Donc $Sx \in M$, et M est un sous-espace hyper invariant pour T . □

Si X est un espace de Banach complexe de dimension finie (avec $\dim(X) \geq 2$), alors pour tout $T \in \mathcal{B}(X)$ on a par le théorème fondamental de l'algèbre que $\sigma_p(T) \neq$

\emptyset . Ainsi tout $T \in \mathcal{B}(X)$ tel que $T \neq \lambda I$ possède un sous-espace hyper invariant non trivial.

Par contre, dans les espace de Banach réels de dimension finie, il existe des contres exemples. Si $X = \mathbb{R}^2$ on pose

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les seuls sous-espaces non triviaux de X sont ceux de dimension 1. Or si un sous-espace de dimension 1 est invariant pour T , ça veut dire que T possède un vecteur propre, et donc une valeur propre. Le polynôme caractéristique de T ici est $p_T(x) = x^2 + 1$, qui ne possède pas de racines réelles. Donc T n'a pas de sous-espace invariant non trivial.

Maintenant on va parler un peu des espaces de Banach séparables de dimension infinie. En général, la réponse au problème du sous-espace invariant est fausse. Enflo a construit un espace de Banach sur lequel il existe un opérateur qui ne possède pas de sous-espace invariant non trivial.

Théorème 1.14.4 ([Enf87]). *Il existe un espace de Banach séparable X tel qu'il existe un opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{B}(X)$ qui ne possède pas de sous-espace invariant non trivial.*

On mentionne aussi que Read a construit un contre exemple au problème du sous-espace invariant sur un espace de Banach "classique".

Théorème 1.14.5 ([Rea86]). *Soit $X = l^1$. Il existe un opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{B}(l^1)$ qui ne possède pas de sous-espace invariant non trivial.*

Dans les résultats de Enflo et Read, les espaces de Banach sur lesquels ils ont réussi à construire des contres exemples ne sont pas réflexifs. En fait les problèmes du sous-espaces invariant et hyper invariant sont encore ouverts sur les espaces de Banach séparables et réflexifs. En particulier, ces problèmes sont encore ouverts sur l'espace de Hilbert séparable.

On va terminer cette section sur une note positive. On va commencer par rappeler le théorème de Lomonosov.

Théorème 1.14.6 (Lomonosov [Lom73]). *Soit X un espace de Banach complexe. Si $T \in \mathcal{K}(X)$ est un opérateur compact tel que $T \neq \lambda I$, alors T possède un sous-espace hyper invariant non trivial.*

Récemment Argyros et Haydon ont construit un espace de Banach avec une propriété spéciale.

Théorème 1.14.7 ([AH11]). *Il existe un espace de Banach X tel que pour tout opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{B}(X)$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et un opérateur compact $K \in \mathcal{K}(X)$ tel que $T = \lambda I + K$.*

En particulier, sur cet espace de Banach, tout opérateur linéaire borné possède un sous-espace hyper invariant non trivial par le théorème de Lomonosov. Bien que dans cette thèse nous allons nous concentrer sur les opérateurs agissant sur des espace de Hilbert (ou Banach) complexe, il existe des travaux sur le problème du sous espace invariant pour des espaces de Hilbert (Banach) réels (on peut par exemple aller voir [AGK04]).

1.15 Le calcul fonctionnel de Riesz-Dunford

Dans cette section on fait quelques rappels sur le calcul fonctionnel de Riesz-Dunford. On montrera comment on peut se servir de ce calcul fonctionnel pour trouver des sous-espaces hyper invariants non triviaux. On commence par définir le calcul fonctionnel de Riesz-Dunford.

Définition 1.15.1. Soit X un espace de Banach. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur linéaire borné. Soit Ω un domaine de \mathbb{C} qui contient $\sigma(T)$. Soit f un fonction holomorphe sur Ω . Soit Γ une collection de courbes de Jordan dans Ω telles que $\sigma(T)$ soit dans les composantes connexes bornées par Γ . On définit $f(T) \in \mathcal{B}(X)$ par la formule suivante

$$f(T) = \int_{\Gamma} f(z)(zI - T)^{-1}dz.$$

Ce lemme nous dit que le calcul fonctionnel de Riesz-Dunford coïncide avec le calcul fonctionnel polynomial.

Lemme 1.15.2. Soit X un espace de Banach. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur linéaire borné. Soit Γ une collection de courbes de Jordan telles que $\sigma(T)$ soit dans les composantes connexes bornées par Γ . Alors on pour tout $n \in \mathbb{N}$ que

$$T^n = \int_{\Gamma} z^n(zI - T)^{-1}dz.$$

Le calcul fonctionnel de Riesz-Dunford possède de nombreuses bonnes propriétés, en voici quelques unes.

Théorème 1.15.3. Soit X un espace de Banach. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur linéaire borné. Soit Ω un domaine de \mathbb{C} qui contient $\sigma(T)$. Soit f un fonction holomorphe sur Ω . Si $S \in \mathcal{B}(X)$ commute avec T , alors S commute avec $f(T)$.

Ce théorème nous permet de garantir l'existence de sous-espaces hyperinvariants pour des opérateurs qui ont un spectre "coupé en deux".

Corollaire 1.15.4. Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur linéaire borné tel que $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, où σ_1, σ_2 sont fermés et $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$. Alors T possède un sous-espace hyper invariant non trivial.

Démonstration. Soient $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ deux ouverts de \mathbb{C} tels que $\sigma_i \subset \mathcal{U}_i$ et $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$. On pose

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \mathcal{U}_1 \\ 0 & \text{si } z \in \mathcal{U}_2 \end{cases}.$$

Alors $f(T)$ est un idempotent qui commute avec tous les opérateurs qui commutent avec T . En particulier $\text{Im}(f(T))$ est un sous-espace hyper invariant pour T . \square

1.16 Une reformulation du problème du sous-espace invariant

Dans cette section on va donner une reformulation du problème du sous-espace invariant en terme d'idempotents. Ce résultat est dû à Nordgren, Radjavi et Rosenthal [NRR76].

Théorème 1.16.1 ([NRR76]). *Soit H un espace de Hilbert. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Tout opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ possède un sous-espace invariant non trivial,*
2. *Toute paire d'idempotents $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ possède un sous-espace invariant commun.*
3. *Toute paire d'idempotents $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ telle que P soit une projection orthogonale, possède un sous-espace invariant commun.*

La démonstration de ce théorème est basée sur le fait que si $A \in \mathcal{B}(H)$ est un opérateur borné, alors

$$Q = \begin{pmatrix} A & A \\ I - A & I - A \end{pmatrix}$$

est un idempotent.

1.17 Le théorème de Weyl

Dans cette section nous allons rappeler un théorème qui va nous être très utile quand nous allons étudier les perturbations compactes d'opérateurs.

Théorème 1.17.1 (Théorème de Weyl). *Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur linéaire bornée sur un espace de Banach X . Soit $K \in \mathcal{K}(X)$ un opérateur compact. Alors on a que*

$$\sigma(T + K) \subset \sigma(T) \cup \sigma_p(T + K).$$

Ce résultat nous dit en particulier que tout la partie du spectre de $T + K$ qui "déborde" du spectre T (c'est à dire $\sigma(T + K) \setminus \sigma(T)$) doit obligatoirement être valeur propre de $T + K$. Autrement dit, si $\sigma(T + K) \setminus \sigma(T) \neq \emptyset$, alors $\sigma_p(T + K) \neq \emptyset$. Dans ce cas $T + K$ possède un sous-espace invariant non trivial.

Chapitre 2

Image numérique d'un produit de projections orthogonales

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier l'image numérique et le rayon numérique d'un produit de deux projections orthogonales $T = P_{M_2}P_{M_1}$. Dans ce Chapitre, on note P_M la projection orthogonale sur M (un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H). On va montrer que la fermeture de $W(P_{M_2}P_{M_1})$ peut être décrite comme l'enveloppe convexe de certaines ellipses explicites paramétrés par les points dans $\sigma(P_{M_2}P_{M_1})$. On va discuter d'applications possibles de ce résultat. On va aussi étudier la relation entre l'image numérique (respectivement le rayon numérique) d'un produit de deux projections orthogonales et de son spectre (respectivement son rayon spectral).

Les projections orthogonales dans les espaces de Hilbert sont des objets basiques en théorie des opérateurs. Les produits et les sommes de projections orthogonales, dans des espaces de Hilbert de dimension finie ou infinie, apparaissent dans divers problèmes et domaines des mathématiques. Par exemple, le fait que l'image numérique d'un produit de projections orthogonales est inclus dans un secteur du plan complexe de sommet 1 est un ingrédient essentiel de la preuve de Delyon et Delyon [DD99] de la conjecture de Burkholder, qui dit que les itérés d'un produit d'espérances conditionnelles sont presque sûrement convergentes vers une certaine espérance conditionnelle dans un espace L^2 . Plus tard, Cohen [Coh07] a généralisé ce résultat en donnant une preuve de la convergence presque sûre des itérés d'un produit d'espérances conditionnelles sur L^p . Pour un produit de deux projections, on sait que son image numérique est incluse dans un secteur de sommet 1 et d'angle $\frac{\pi}{6}$ (Crouzeix [Cro08]).

Le spectre d'un produit de projections orthogonales apparait naturellement dans l'étude de la vitesse de convergence de $(P_{M_2}P_{M_1})^n$ vers $P_{M_1 \cap M_2}$ (cf Chapitre 1). En effet on a la dichotomie suivante (voir Théorème 1.9.4) : soit $1 \notin \sigma(P_{M_2}P_{M_1} - P_{M_1 \cap M_2})$ et $(P_{M_2}P_{M_1})^n$ converge en topologie opérateur avec une vitesse géométrique vers $P_{M_1 \cap M_2}$; soit $1 \in \sigma(P_{M_2}P_{M_1} - P_{M_1 \cap M_2})$ et $(P_{M_2}P_{M_1})^n$ converge en topologie forte

avec une vitesse arbitrairement lente vers $P_{M_1 \cap M_2}$.

L'image numérique de sommes de projections orthogonales apparait aussi dans certains problèmes d'Analyse Harmonique. Le principe d'incertitude est l'idée qu'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ et sa transformée de Fourier $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ ne peuvent être simultanément petites. Les paires annihilantes et fortement annihilantes sont un moyen de formuler cette idée (cf Chapitre 1). D'après un résultat de Lenard (voir Théorèmes 1.12.5 et 1.12.6), on sait que (S, Σ) est une paire annihilante (respectivement fortement annihilante) si et seulement si $1 + i \in W(P_S + iP_\Sigma)$ (respectivement $1 + i \in \overline{W(P_S + iP_\Sigma)}$).

Les résultats de ce Chapitre ont fait l'objet de l'article [Kla14b].

2.2 Description de l'image numérique en fonction du spectre

2.2.1 L'adhérence de l'image numérique comme enveloppe convexe d'ellipses

Le but de cette section est de prouver le Théorème 2.2.7 en utilisant une interprétation des fonctions support de $\overline{W(P_2 P_1)}$, qui est un sous ensemble convexe de \mathbb{C} . Cette idée apparait dans l'article de Lenard [Len72] dans un contexte différent. Nous allons d'abord supposer que nous sommes en position générique; le cas général se déduira facilement par la suite.

Lemme 2.2.1. *Supposons que N_1 et N_2 soient en position générique. On note $P_i = P_{N_i}$, $i = 1, 2$, la projection orthogonale sur N_i . Alors, la fonction support de l'image numérique de $P_2 P_1$ à l'angle $\alpha \in [0, 2\pi]$ est donné par la formule suivante :*

$$\rho_{W(P_2 P_1)}(\alpha) = \sup_{\lambda \in \sigma(P_2 P_1)} \frac{1}{2} (\cos(\alpha)\lambda + \sqrt{\lambda(1 - \sin(\alpha)^2 \lambda)}).$$

Démonstration. Soit $\alpha \in [0, 2\pi]$. On a que

$$\begin{aligned} \rho_{W(P_2 P_1)}(\alpha) &= \sup \{ \operatorname{Re}(\langle P_2 P_1 h, h \rangle \exp(-i\alpha)), h \in H, \|h\| = 1 \} \\ &= \sup \{ \operatorname{Re}(\langle \exp(-i\alpha) P_2 P_1 h, h \rangle), h \in H, \|h\| = 1 \} \\ &= \sup \{ \langle \operatorname{Re}(\exp(-i\alpha) P_2 P_1) h, h \rangle, h \in H, \|h\| = 1 \}. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème des deux sous-espaces de Halmos (Corollaire 1.1.4), il existe un opérateur autoadjoint T tel que

$$P_2 P_1 \sim \begin{pmatrix} \cos(T)^2 & 0 \\ \cos(T) \sin(T) & 0 \end{pmatrix}, P_1 P_2 \sim \begin{pmatrix} \cos(T)^2 & \cos(T) \sin(T) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc on a que

$$\operatorname{Re}(\exp(-i\alpha) P_2 P_1) \sim \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cos(T)^2 & \frac{\exp(i\alpha)}{2} \cos(T) \sin(T) \\ \frac{\exp(-i\alpha)}{2} \cos(T) \sin(T) & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$M(t, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cos(t)^2 & \frac{\exp(i\alpha)}{2} \cos(t) \sin(t) \\ \frac{\exp(-i\alpha)}{2} \cos(t) \sin(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors on a que $\operatorname{Re}(\exp(-i\alpha)P_2P_1) \sim M(T, \alpha)$. Après quelques calculs on obtient que $M(t, \alpha) = U^*(t, \alpha)D(t, \alpha)U(t, \alpha)$ avec

$$D(t, \alpha) = \begin{pmatrix} v_1(t, \alpha) & 0 \\ 0 & v_2(t, \alpha) \end{pmatrix},$$

$$U(t, \alpha) = \begin{pmatrix} \frac{2v_1(t, \alpha)}{u_1(t, \alpha)} & \frac{2v_2(t, \alpha)}{u_2(t, \alpha)} \\ \frac{\exp(i\alpha) \cos(t) \sin(t)}{u_1(t, \alpha)} & \frac{\exp(i\alpha) \cos(t) \sin(t)}{u_2(t, \alpha)} \end{pmatrix},$$

avec

$$v_1(t, \alpha) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha) \cos(t)^2 + \cos(t) \sqrt{1 - \sin(\alpha)^2 \cos(t)^2})$$

$$v_2(t, \alpha) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha) \cos(t)^2 - \cos(t) \sqrt{1 - \sin(\alpha)^2 \cos(t)^2})$$

$$u_i(t, \alpha) = \sqrt{4(v_i(t, \alpha))^2 + \cos(t)^2 \sin(t)^2}.$$

En passant à la limite quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$, on peut vérifier que :

$$U\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\exp(i\alpha)}{\sqrt{2}} & \frac{\exp(i\alpha)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

On a aussi que $U(t, \alpha)U^*(t, \alpha) = U^*(t, \alpha)U(t, \alpha) = I$. Comme toutes les éléments de $U(t, \alpha)$ sont des fonctions boréliennes et que T est un opérateur autoadjoint, on peut définir $\frac{2v_1(T, \alpha)}{u_1(T, \alpha)}$, $\frac{2v_2(T, \alpha)}{u_2(T, \alpha)}$, $\frac{\exp(i\alpha) \cos(T) \sin(T)}{u_1(T, \alpha)}$ et $\frac{\exp(i\alpha) \cos(T) \sin(T)}{u_2(T, \alpha)}$. Donc on peut définir $D(T, \alpha)$ et $U(T, \alpha)$, et on obtient que $M(T, \alpha) = U^*(T, \alpha)D(T, \alpha)U(T, \alpha)$ et $U(T, \alpha)U^*(T, \alpha) = U^*(T, \alpha)U(T, \alpha) = I$. Donc $M(T, \alpha) \sim D(T, \alpha) = v_1(T, \alpha) \oplus v_2(T, \alpha)$. Remarquons aussi que $v_1(t, \alpha) \geq 0$ et $v_2(t, \alpha) \leq 0$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\alpha \in [0, 2\pi]$. Comme $\sigma(T) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$, on obtient la relation d'ordre suivante $v_2(T, \alpha) \leq 0 \leq v_1(T, \alpha)$. Remarquons que les opérateurs $v_i(T, \alpha)$ sont autoadjoints. Ainsi on a que

$$\begin{aligned} \rho_{W(P_2P_1)}(\alpha) &= \sup_{\|h\|=1} \langle \operatorname{Re}(\exp(-i\alpha)P_2P_1)h, h \rangle \\ &= \sup_{\|x\|=1} \langle v_1(T, \alpha)x, x \rangle \\ &= \|v_1(T, \alpha)\| \\ &= \sup_{t_0 \in \sigma(T)} v_1(t_0, \alpha). \end{aligned}$$

Le théorème d'Halmos implique que

$$P_1P_2P_1 \sim \begin{pmatrix} \cos(T)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a que $\sigma(P_2P_1) \setminus \{0\} = \sigma((P_2P_1)P_1) \setminus \{0\} = \sigma(P_1P_2P_1) \setminus \{0\}$, et $\cos^2(\sigma(T)) \cup \{0\} = \sigma(P_1P_2P_1)$. En notant $\lambda = \cos(t)^2$ et $\tilde{v}_i(\lambda, \alpha) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha)\lambda \pm \sqrt{\lambda(1 - \sin(\alpha)^2\lambda)})$, on obtient que $\rho_{W(P_2P_1)}(\alpha) = \sup_{\lambda \in \sigma(P_2P_1)} \tilde{v}_1(\lambda, \alpha)$. \square

Remarque 2.2.2. En utilisant une formule dûe à Lumer [Lum61, Lemma 12], on obtient que

$$\begin{aligned} \rho_{W(P_2P_1)}(\alpha) &= \sup \operatorname{Re}(W(\exp(-i\alpha)P_2P_1)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|I - t \operatorname{Re}(\exp(-i\alpha)P_2P_1)\| - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|I - t \exp(-i\alpha)P_2P_1\| - 1}{t}. \end{aligned}$$

Pour rendre la formule de $\overline{W(P_2P_1)}$ plus explicite, nous allons la décrire comme l'enveloppe convexe des ellipses $\mathcal{E}(\lambda)$. Plusieurs de ces ellipses sont représentées dans la Figure 2.1.

Définition 2.2.3. Soit $\lambda \in [0, 1]$. On note $\mathcal{E}(\lambda)$ l'ensemble du plan complexe d elimit e par l'ellipse de foyers 0 et λ , et de longueur d'axe mineur $\sqrt{\lambda(1 - \lambda)}$.

Remarque 2.2.4. On peut décrire les ellipses $\mathcal{E}(\lambda)$ différemment. L'équation cartésienne de la frontière de $\mathcal{E}(\lambda)$ est donnée par :

$$\frac{(x_\lambda - \frac{\lambda}{2})^2}{\frac{\lambda}{4}} + \frac{y_\lambda^2}{\frac{\lambda(1-\lambda)}{4}} = 1,$$

tandis que l'équation paramétrique de la frontière de $\mathcal{E}(\lambda)$ est donnée par :

$$x_\lambda(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \cos(t) + \frac{\lambda}{2}, \quad y_\lambda(t) = \frac{\sqrt{\lambda(1 - \lambda)}}{2} \sin(t).$$

Lemme 2.2.5. Soit $\lambda \in [0, 1]$. La fonction support de l'ellipse $\mathcal{E}(\lambda)$ est donnée par la formule suivante :

$$\rho_{\mathcal{E}(\lambda)}(\alpha) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha)\lambda + \sqrt{\lambda(1 - \sin(\alpha)^2\lambda)}).$$

Démonstration. Soit $\lambda \in [0, 1]$. La fonction support de $\mathcal{E}(\lambda)$ relativement au point 0 est donnée par

$$\rho_{\mathcal{E}(\lambda)}(\alpha) = \sup_{t \in \mathbb{R}} x_\lambda(t) \cos(\alpha) + y_\lambda(t) \sin(\alpha),$$

où $x_\lambda(t)$ et $y_\lambda(t)$ sont les paramétrisations de la frontière des ellipses $\mathcal{E}(\lambda)$. Soit $g = g_{\lambda, \alpha}$ la fonction définie par la formule suivante :

$$\begin{aligned} g_{\lambda, \alpha}(t) &= x_\lambda(t) \cos(\alpha) + y_\lambda(t) \sin(\alpha) \\ &= \frac{\lambda}{2} \cos(\alpha) + \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \cos(\alpha) \cos(t) + \frac{\sqrt{\lambda(1 - \lambda)}}{2} \sin(\alpha) \sin(t). \end{aligned}$$

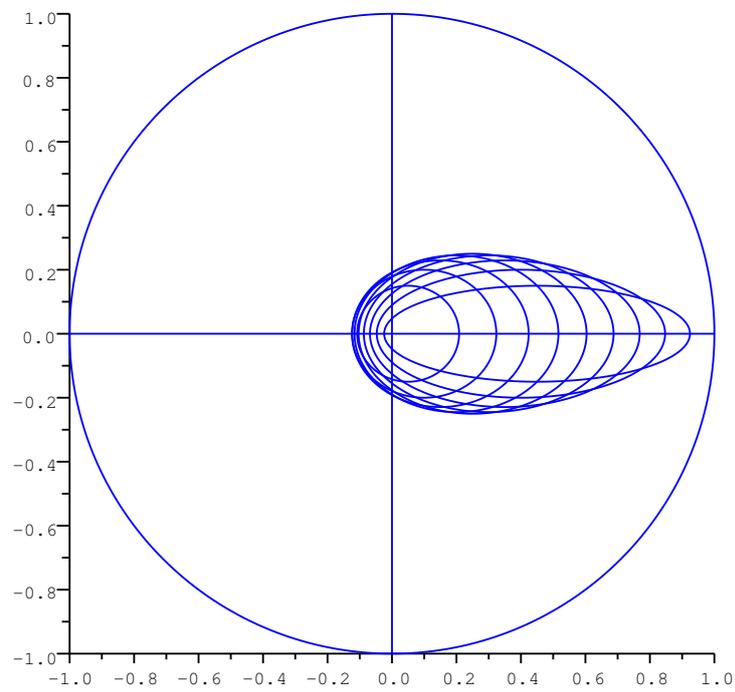


FIGURE 2.1 – Ellipse $\mathcal{E}(\lambda)$ pour $\lambda = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$

Pour calculer explicitement $\rho_{\mathcal{E}(\lambda)}(\alpha)$, nous devons simplement étudier cette fonction pour tout $\alpha \in [0, \pi]$ car les ellipses $\mathcal{E}(\lambda)$ ont $y = 0$ pour axe de symétrie.

Supposons que $\cos(\alpha) \neq 0$. On a que $g'_{\lambda, \alpha}(t_0) = 0$ si et seulement si $\tan(t_0) = \sqrt{1 - \lambda} \tan(\alpha)$. Les points critiques de $g_{\lambda, \alpha}$ sont donc $t_0 = \arctan(\sqrt{1 - \lambda} \tan(\alpha))$ et $t_1 = \arctan(\sqrt{1 - \lambda} \tan(\alpha)) + \pi$. On pose $\epsilon_0 = 1, \epsilon_1 = -1$. En utilisant les inégalités trigonométriques standards, on obtient que

$$\begin{aligned}\cos(t_i) &= \epsilon_i \frac{1}{\sqrt{1 + (1 - \lambda) \tan(\alpha)^2}}, \\ \sin(t_i) &= \epsilon_i \frac{\sqrt{1 - \lambda} \tan(\alpha)}{\sqrt{1 + (1 - \lambda) \tan(\alpha)^2}}.\end{aligned}$$

On pose $\epsilon_\alpha = \frac{\cos(\alpha)}{|\cos(\alpha)|}$. En utilisant encore une fois la trigonométrie, on obtient que :

$$\begin{aligned}2g_{\lambda, \alpha}(t_i) &= \lambda \cos(\alpha) + \epsilon_i \sqrt{\lambda} \cos(\alpha) \frac{1}{\sqrt{1 + (1 - \lambda) \tan(\alpha)^2}} \\ &\quad + \epsilon_i \sqrt{\lambda(1 - \lambda)} \sin(\alpha) \frac{\sqrt{1 - \lambda} \tan(\alpha)}{\sqrt{1 + (1 - \lambda) \tan(\alpha)^2}} \\ &= \lambda \cos(\alpha) + \epsilon_0 \sqrt{\lambda} \cos(\alpha) \frac{\epsilon_\alpha \cos(\alpha)}{\sqrt{\cos(\alpha)^2 + (1 - \lambda) \sin(\alpha)^2}} \\ &\quad + \epsilon_0 \sqrt{\lambda(1 - \lambda)} \sin(\alpha) \frac{\epsilon_\alpha \sqrt{1 - \lambda} \sin(\alpha)}{\sqrt{\cos(\alpha)^2 + (1 - \lambda) \sin(\alpha)^2}} \\ &= \lambda \cos(\alpha) + \frac{\epsilon_0 \epsilon_\alpha \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\cos(\alpha)^2 + (1 - \lambda) \sin(\alpha)^2}} (\cos(\alpha)^2 + (1 - \lambda) \sin(\alpha)^2) \\ &= \lambda \cos(\alpha) + \epsilon_0 \epsilon_\alpha \sqrt{\lambda} \sqrt{\cos(\alpha)^2 + (1 - \lambda) \sin(\alpha)^2} \\ &= \lambda \cos(\alpha) + \epsilon_i \epsilon_\alpha \sqrt{\lambda} \sqrt{1 - \lambda \sin(\alpha)^2}.\end{aligned}$$

Finalement, on a que

$$\rho_{\mathcal{E}(\lambda)}(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\lambda \cos(\alpha) + \sqrt{\lambda} \sqrt{1 - \lambda \sin(\alpha)^2} \right).$$

Supposons maintenant que $\cos(\alpha) = 0$. Alors $g_{\lambda, \alpha}(t) = \frac{\sqrt{\lambda(1 - \lambda)}}{2} \sin(t)$. Dans tous les cas, on a que

$$\rho_{\mathcal{E}(\lambda)}(\alpha) = \frac{\sqrt{\lambda(1 - \lambda)}}{2}.$$

Ainsi

$$\rho_{\mathcal{E}(\lambda)}(\alpha) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha) \lambda + \sqrt{\lambda(1 - \sin(\alpha)^2 \lambda)})$$

pour tout α . □

Maintenant on peut prouver facilement la version en position générique du Théorème 2.2.7.

Théorème 2.2.6. *Soient N_1 et N_2 deux sous-espaces en position générique, alors :*

$$\overline{W(P_2P_1)} = \overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(P_2P_1)} \mathcal{E}(\lambda)\}}.$$

Démonstration. D'abord on note que

$$\rho_{W(P_2P_1)}(\alpha) = \sup_{\lambda \in \sigma(P_2P_1)} \frac{1}{2}(\cos(\alpha)\lambda \pm \sqrt{\lambda(1 - \sin(\alpha)^2\lambda)}) = \sup_{\lambda \in \sigma(P_2P_1)} \rho_{\mathcal{E}(\lambda)}(\alpha).$$

Comme les fonctions supports caractérisent la fermeture d'un ensemble convexe fermé, on se sert simplement du Lemme 1.6.3 pour conclure. \square

Théorème 2.2.7. *Soient M_1 et M_2 deux sous-espaces fermés de H tels que $M_1 \neq H$ ou $M_2 \neq H$. Alors l'adhérence de l'image numérique de $P_{M_2}P_{M_1}$ est la fermeture de l'enveloppe convexe des ellipses $\mathcal{E}(\lambda)$ pour $\lambda \in \sigma(P_{M_2}P_{M_1})$, c'est à dire :*

$$\overline{W(P_{M_2}P_{M_1})} = \overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(P_{M_2}P_{M_1})} \mathcal{E}(\lambda)\}}.$$

Ce Théorème est juste la version dans le cas général du Théorème 2.2.6. Pour faire la preuve, il s'agit juste de vérifier que la formule est juste quand on "recolle tous les morceaux de la décomposition (1.1).

Preuve du Théorème 2.2.7. D'après les hypothèses du théorème, on a que $M_1 \neq H$ ou $M_2 \neq H$. On utilise les notations de la décomposition orthogonale (1.1) de H . Supposons que $\tilde{H} = \{0\}$. Alors $P_{M_2}P_{M_1}$ est la somme directe de 0 et I (ou bien c'est l'opérateur nul si $M_1 \cap M_2 = \{0\}$). On constate facilement que $\mathcal{E}(0) = \{0\}$ et $\mathcal{E}(1) = [0, 1]$. Ainsi on a $W(P_{M_2}P_{M_1}) = [0, 1] = \text{conv}\{\mathcal{E}(0) \cup \mathcal{E}(1)\}$. Quand $M_1 \cap M_2 = \{0\}$, on a que $W(P_{M_2}P_{M_1}) = \{0\} = \mathcal{E}(0)$.

Supposons que $\tilde{H} \neq \{0\}$, et $M_1^\perp \cap M_2^\perp \neq \{0\}$ (les cas $M_1^\perp \cap M_2 \neq \{0\}$ et $M_1 \cap M_2^\perp \neq \{0\}$ se traitent de manière similaire). Sur le sous-espace $M_1^\perp \cap M_2^\perp$, on a que $P_{M_2}P_{M_1} = 0$. L'image numérique de $P_{M_2}P_{M_1}$ sur $(M_1^\perp \cap M_2^\perp) \oplus \tilde{H}$ est $\text{conv}\{\{0\} \cup \text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(P_2P_1)} \mathcal{E}(\lambda)\}\}$. Comme $\mathcal{E}(0) = \{0\} \subset \mathcal{E}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$, l'image numérique de $P_{M_2}P_{M_1}$ sur $(M_1^\perp \cap M_2^\perp) \oplus \tilde{H}$ est donné par $\overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(P_2P_1)} \mathcal{E}(\lambda)\}}$.

Supposons que $M_1 \cap M_2 \neq \{0\}$. Comme $P_{M_2}P_{M_1} = I$ sur l'intersection $M_1 \cap M_2$, l'image numérique de $P_{M_2}P_{M_1}$ sur $(M_1 \cap M_2) \oplus \tilde{H}$ est $\text{conv}\{\{1\} \cup \text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(P_2P_1)} \mathcal{E}(\lambda)\}\}$. Pour tout $\lambda \in [0, 1]$ on a que $0 \in \mathcal{E}(\lambda)$. Comme $\tilde{H} \neq \{0\}$, l'image numérique de $P_{M_2}P_{M_1}$ sur $(M_1 \cap M_2) \oplus \tilde{H}$ est $\text{conv}\{[0, 1] \cup \text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(P_2P_1)} \mathcal{E}(\lambda)\}\}$. Mais on a que $\mathcal{E}(1) = [0, 1]$. Finalement, l'image numérique de $P_{M_2}P_{M_1}$ on $(M_1 \cap M_2) \oplus \tilde{H}$ est $\text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(P_{M_2}P_{M_1})} \mathcal{E}(\lambda)\}$. Ceci prouve le Théorème. \square

Dans le cas où $P_{M_1} = I$ et $P_{M_2} = I$, on a bien évidemment que $W(P_{M_2}P_{M_1}) = \{1\}$.

Remarque 2.2.8. Dans [CM11], Corach et Maestriperi ont montré que la pseudo-inverse de Moore-Penrose d'un produit de deux projections orthogonales est un idempotent (éventuellement non borné). Dans l'autre sens, la pseudo-inverse de Moore-Penrose d'un idempotent est un produit de deux projections orthogonales. Il est bien connu que l'image numérique d'un idempotent est une ellipse (par exemple voir [SS10] ou bien [TW99]). En utilisant le théorème des deux sous-espaces d'Halmos d'une manière similaire, on peut montrer que l'adhérence de l'image numérique d'un idempotent E est l'enveloppe convexe des ellipses $\mathcal{E}^+(\lambda)$ de foyer 0, 1 et de longueur d'axe mineure $\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$, pour λ parcourant le spectre $\sigma(E^+)$ de la pseudo-inverse de Moore-Penrose E^+ de E , i.e. :

$$\overline{W(E)} = \text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(E^+)} \mathcal{E}^+(\lambda)\}.$$

Comme $\mathcal{E}^+(\lambda_1) \subset \mathcal{E}^+(\lambda_2)$, si $\lambda_1 \leq \lambda_2$, l'enveloppe convexe de ces ellipses sera juste la plus grosse de toutes ces ellipses, et on retrouve une nouvelle preuve (plus compliqué que les preuves connues) que $W(E)$ est une ellipse.

2.2.2 $W(P_2P_1)$ quand $P_1P_2P_1$ est diagonalisable

Soient N_1 et N_2 deux sous-espaces fermés dans H . On note $P_i = P_{N_i}$. Supposons que N_1 et N_2 soient en position générique. Comme on l'a vu dans la preuve du Théorème 2.2.7, si on trouve $W(P_2P_1)$ quand (N_1, N_2) est en position générique, on peut retrouver après $W(P_2P_1)$ dans le cas général.

Dans cette section, nous supposons que H est séparable, et on fait l'hypothèse que $P_1P_2P_1$ est diagonalisable, dans le sens suivant.

Définition 2.2.9. On dit que $P_1P_2P_1$ est *diagonalisable* si il existe une base orthonormée $(\tilde{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H et une suite de nombre réels positifs $(\tilde{\lambda}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que :

$$P_1P_2P_1x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\lambda}_n \langle x, \tilde{h}_n \rangle \tilde{h}_n \quad (x \in H).$$

Cette définition est vérifié quand, par exemple, P_2P_1 est un opérateur compact. En utilisant cette hypothèse de diagonalisabilité, il sera possible de décomposer P_2P_1 comme somme directe de matrices 2×2 . Comme l'image numérique d'une telle matrice est une ellipse, ceci nous permettra d'en déduire l'image numérique de P_2P_1 . On commence par remarquer que $0 \leq P_1P_2P_1 \leq I$. Ainsi on a $0 \leq \tilde{\lambda}_n \leq 1$. Le lemme suivant caractérise quand $\tilde{h}_n \in N_1$.

Lemme 2.2.10. *Supposons que N_1 et N_2 soient en position générique. On a que*

1. $\tilde{h}_n \in N_1 \Leftrightarrow \tilde{\lambda}_n \neq 0$
2. $\tilde{h}_n \in N_1^\perp \Leftrightarrow \tilde{\lambda}_n = 0$.

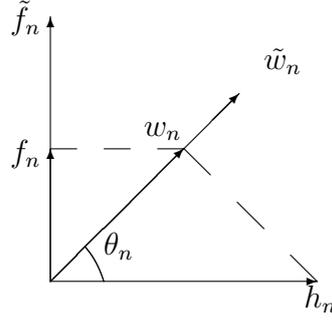


FIGURE 2.2

Démonstration. On sait que $P_1P_2P_1\tilde{h}_n = \tilde{\lambda}_n\tilde{h}_n$. Si $\tilde{\lambda}_n \neq 0$, alors $\tilde{h}_n = \frac{1}{\tilde{\lambda}_n}P_1P_2P_1\tilde{h}_n \in N_1$. Si $\tilde{\lambda}_n = 0$, alors $P_1P_2P_1\tilde{h}_n = 0$. Donc $P_2P_1\tilde{h}_n \in N_1^\perp \cap N_2 = \{0\}$, car nous sommes en position générique. Donc $P_2P_1\tilde{h}_n = 0$. On obtient $P_1\tilde{h}_n \in N_2^\perp \cap N_1 = \{0\}$, $P_1\tilde{h}_n = 0$ et ainsi $\tilde{h}_n \in N_1^\perp$. \square

A partir de maintenant, nous allons juste avoir besoin des vecteurs \tilde{h}_n qui sont dans N_1 . Pour simplifier les notations, on notera ces vecteurs par $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, chacun d'entre eux correspond à un λ_n non nul. Par conséquent on a $P_1P_2P_1h_n = \lambda_nh_n$. Comme on a $h_n \in N_1$, on obtient que $P_1h_n = h_n$. On note (voir Figure 2.2)

$$w_n = P_2h_n, \quad \tilde{w}_n = \frac{w_n}{\|w_n\|}, \quad f_n = (I - P_1)P_2h_n, \quad \tilde{f}_n = \frac{f_n}{\|f_n\|}.$$

Lemme 2.2.11. *On a que $\langle w_n, w_k \rangle = \delta_{n,k}\lambda_n$ et $\langle w_n, h_k \rangle = \delta_{n,k}\lambda_n$, où $\delta_{n,k}$ est le symbole de Kronecker, qui prend comme valeur 1 si $n = k$, et 0 sinon.*

Démonstration. Pour la première égalité, on a que,

$$\langle w_n, w_k \rangle = \langle P_2P_1h_n, P_2P_1h_k \rangle = \langle P_1P_2P_1h_n, h_k \rangle = \lambda_n \langle h_n, h_k \rangle = \delta_{n,k}\lambda_n.$$

Pour l'autre, on a

$$\langle w_n, h_k \rangle = \langle P_2P_1h_n, P_1h_k \rangle = \langle P_1P_2P_1h_n, h_k \rangle = \lambda_n \langle h_n, h_k \rangle = \delta_{n,k}\lambda_n.$$

\square

Corollaire 2.2.12. *Soit $\text{vect}\{h, w\}$ le sous-espace fermé de H engendré par h et w . Si $n \neq k$, alors $\text{vect}\{h_n, w_n\}$ est orthogonal à $\text{vect}\{h_k, w_k\}$.*

Proposition 2.2.13. *L'image de $\text{vect}\{h_n, w_n\}$ par l'application P_2P_1 satisfait*

$$P_2P_1(\text{vect}\{h_n, w_n\}) = \text{vect}\{w_n\} \subset \text{vect}\{h_n, w_n\}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $P_2P_1(h_n)$ et $P_2P_1(w_n)$ sont colinéaires avec w_n . On a que $P_2P_1(h_n) = w_n$. Comme h_n est un vecteur propre de $P_1P_2P_1$, on obtient que $P_2P_1(w_n) = P_2P_1P_2P_1(h_n) = P_2(\lambda_nh_n) = \lambda_nw_n$. \square

Lemme 2.2.14. *On a que $\text{vect}\{h_n, w_n\} = \text{vect}\{h_n, f_n\}$.*

Démonstration. Comme ces deux sous-espaces sont de dimension 2, il suffit juste de montrer que $\text{vect}\{h_n, w_n\} \subset \text{vect}\{h_n, f_n\}$. Comme $h_n \in \text{vect}\{h_n, f_n\}$, nous devons juste montrer que $w_n \in \text{vect}\{h_n, f_n\}$. On a que $w_n = P_2P_1h_n = P_1P_2P_1h_n + (I - P_1)P_2P_1h_n = \lambda_n h_n + f_n$. Donc $w_n \in \text{vect}\{h_n, f_n\}$. \square

Corollaire 2.2.15. *Si $n \neq k$, alors $\text{vect}\{h_n, f_n\}$ est orthogonal à $\text{vect}\{h_k, f_k\}$. De plus,*

$$P_2P_1(\text{vect}\{h_n, f_n\}) = \text{vect}\{w_n\} \subset \text{vect}\{h_n, f_n\}.$$

Proposition 2.2.16. *On a que $\overline{P_2(N_1)} = N_2$.*

Démonstration. L'inclusion $\overline{P_2(N_1)} \subset N_2$ est évidente. Pour montrer que $\overline{P_2(N_1)} \supset N_2$, il suffit de montrer que $P_2(N_1)^\perp \subset N_2^\perp$. Soit $y \in P_2(N_1)^\perp$. Alors pour tout $x \in N_1$, on a $0 = \langle y, P_2(x) \rangle = \langle P_2(y), x \rangle$. Donc $P_2(y) \in N_1^\perp$. Comme $P_2(y) \in N_2$ et $N_1^\perp \cap N_2 = \{0\}$, on obtient que $P_2(y) = 0$. Donc $y \in N_2^\perp$. Ceci montre que $P_2(N_1)^\perp \subset N_2^\perp$. \square

Corollaire 2.2.17. *Les vecteurs $(\tilde{w}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une base orthonormée de N_2 .*

Démonstration. D'après le Lemme 2.2.11, on sait que $(\tilde{w}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système orthonormé dans N_2 . Il reste à montrer que c'est un système générateur. On note qu'en utilisant que $\overline{P_2(N_1)} = N_2$ et $\overline{\text{vect}\{w_n, n \in \mathbb{N}\}} = \overline{\text{vect}\{\tilde{w}_n, n \in \mathbb{N}\}} \subset N_2$, l'inclusion $P_2(N_1) \subset \overline{\text{vect}\{w_n, n \in \mathbb{N}\}}$ implique que

$$N_2 = \overline{P_2(N_1)} \subset \overline{\text{vect}\{\tilde{w}_n, n \in \mathbb{N}\}} \subset N_2,$$

et donc $N_2 = \overline{\text{vect}\{\tilde{w}_n, n \in \mathbb{N}\}}$. Montrons $P_2(N_1) \subset \overline{\text{vect}\{w_n, n \in \mathbb{N}\}}$. Pour tout $x \in N_1$, il existe une suite (ν_n) telle que $x = \sum_n \nu_n h_n$. Ainsi $P_2(x) = P_2(\sum_n \nu_n h_n) = \sum_n \nu_n P_2(h_n) = \sum_n \nu_n w_n$. Finalement on a que $P_2(x) \in \overline{\text{vect}\{w_n, n \in \mathbb{N}\}}$. \square

De manière similaire on peut montrer la proposition suivante.

Proposition 2.2.18. *On a que $\overline{(I - P_1)(N_2)} = N_1^\perp$. De plus, $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de N_1^\perp .*

Corollaire 2.2.19. *L'opérateur P_2P_1 peut être écrit comme somme directe de matrices 2×2 , c'est à dire :*

$$P_2P_1 = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} P_2P_1 \big|_{\text{vect}\{h_n, \tilde{f}_n\}}.$$

Démonstration. Comme $\tilde{f}_n = \frac{f_n}{\|f_n\|}$, on a que $\text{vect}\{h_n, f_n\} = \text{vect}\{h_n, \tilde{f}_n\}$, et

$$P_2P_1(\text{vect}\{h_n, \tilde{f}_n\}) \subset \text{vect}\{h_n, \tilde{f}_n\}.$$

On a aussi que $\text{vect}\{h_n, \tilde{f}_n\}$ est orthogonal à $\text{vect}\{h_k, \tilde{f}_k\}$ quand $n \neq k$. De plus, $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de N_1^\perp . On peut écrire H comme

$$\begin{aligned} H &= N_1 \oplus N_1^\perp \\ &= \overline{\text{vect}\{h_n, n \in \mathbb{N}\}} \oplus \overline{\text{vect}\{\tilde{f}_n, n \in \mathbb{N}\}} \\ &= \bigoplus_n \overline{\text{vect}\{h_n, \tilde{f}_n\}} \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat. \square

Lemme 2.2.20. *Dans la base orthonormée (h_n, \tilde{f}_n) , la restriction de P_2P_1 sur son sous-espace invariant $\text{vect}\{h_n, \tilde{f}_n\}$ est donné par :*

$$P_2P_1 \big|_{\text{vect}\{h_n, \tilde{f}_n\}} = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ \sqrt{\lambda_n(1-\lambda_n)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Comme $\tilde{f}_n \in N_1^\perp$, on a que $P_1\tilde{f}_n = 0$, donc $P_2P_1\tilde{f}_n = 0$. On peut représenter $P_2P_1h_n$ comme : $P_2P_1h_n = P_1P_2P_1h_n + (I - P_1)P_2P_1h_n = \lambda_n h_n + f_n = \lambda_n h_n + \|f_n\| \tilde{f}_n$.

Pour finir la preuve, il faut montrer que $\|f_n\| = \sqrt{\lambda_n(1-\lambda_n)}$. On a $\|f_n\|^2 = \|(I - P_1)P_2P_1h_n\|^2 = \|P_2P_1h_n\|^2 - \|P_1P_2P_1h_n\|^2 = \langle P_1P_2P_1h_n, h_n \rangle - \|\lambda_n h_n\|^2 = \lambda_n - \lambda_n^2$. \square

Remarque 2.2.21. Comme $0 \leq P_1P_2P_1 \leq I$, on a que $0 \leq \lambda_n \leq 1$ pour tout n . Il existe θ_n tel que $0 \leq \theta_n \leq \frac{\pi}{2}$ et $\cos(\theta_n)^2 = \lambda_n$. Maintenant on peut réécrire $P_2P_1 \big|_{\overline{\text{vect}\{h_n, \tilde{f}_n\}}$ comme :

$$P_2P_1 \big|_{\text{vect}\{h_n, \tilde{f}_n\}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_n)^2 & 0 \\ \cos(\theta_n) \sin(\theta_n) & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice correspond à la composition de deux projections orthogonales dans le plan, qui projettent sur 2 droites d'angle θ_n .

Corollaire 2.2.22. *L'image numérique $W(P_2P_1 \big|_{\text{vect}\{h_n, \tilde{f}_n\}})$ est l'ellipse $\mathcal{E}(\lambda_n)$.*

Démonstration. C'est une conséquence de lemme de l'ellipse pour l'image numérique d'une matrice 2×2 . \square

Le corollaire suivant est une version "en position générique" du Théorème 2.2.24.

Corollaire 2.2.23. *Soient (N_1, N_2) deux sous-espaces en position générique tels que $P_1P_2P_1$ soit diagonalisable, alors l'image numérique $W(P_2P_1)$ est l'enveloppe convexe des ellipses $\mathcal{E}(\lambda)$ pour tous les λ qui sont des valeurs propre non nulles P_2P_1 , c'est à dire :*

$$W(P_2P_1) = \text{conv}\{\bigcup_{\lambda \in \sigma_p(P_2P_1) \setminus \{0\}} \mathcal{E}(\lambda)\}.$$

Démonstration. D'après le Corollaire 2.2.19, on a que $H = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \text{vect}\{h_n, \tilde{f}_n\}$. Soit $x = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} x_n$ un vecteur de H tel que $x_n \in \text{vect}\{h_n, \tilde{f}_n\}$ et $\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|^2 = 1$. Alors $\langle P_2 P_1 x, x \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle P_2 P_1 x_n, x_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|^2 \frac{\langle P_2 P_1 x_n, x_n \rangle}{\|x_n\|^2}$. D'après le Corollaire 2.2.22, on a que $\frac{\langle P_2 P_1 x_n, x_n \rangle}{\|x_n\|^2} \in \mathcal{E}(\lambda_n)$. Donc $W(P_2 P_1) \subset \text{conv}\{\bigcup_{\lambda \in \sigma_p(P_2 P_1) \setminus \{0\}} \mathcal{E}(\lambda)\}$.

Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\alpha_n \in [0, 1]$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = 1$. Soit $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\epsilon_n \in \mathcal{E}(\lambda_n)$. D'après le Corollaire 2.2.22, il existe des $x_n \in \text{vect}\{h_n, \tilde{f}_n\}$ tels que $\|x_n\| = 1$ et $\epsilon_n = \langle P_2 P_1 x_n, x_n \rangle$. Soit $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n$, alors $\langle P_2 P_1 x, x \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \epsilon_n$. Donc $\text{conv}\{\bigcup_{\lambda \in \sigma_p(P_2 P_1) \setminus \{0\}} \mathcal{E}(\lambda)\} \subset W(P_2 P_1)$. \square

Théorème 2.2.24. *Soit H un espace de Hilbert séparable. Soient M_1 et M_2 deux sous-espaces fermés de l'espace de Hilbert H tels que $M_1 \neq H$ ou $M_2 \neq H$. Si $P_{M_1} P_{M_2} P_{M_1}$ est diagonalisable, alors l'image numérique $W(P_{M_2} P_{M_1})$ est l'enveloppe convexe des ellipses $\mathcal{E}(\lambda)$, avec les λ parcourant les valeurs propres de $P_{M_2} P_{M_1}$, c'est à dire :*

$$W(P_{M_2} P_{M_1}) = \text{conv}\{\bigcup_{\lambda \in \sigma_p(P_{M_2} P_{M_1})} \mathcal{E}(\lambda)\}.$$

En utilisant la même preuve que dans le Théorème 2.2.7, on peut déduire le Théorème 2.2.24 à partir du Corollaire 2.2.23.

Grâce au Corollaire 2.2.23, on peut voir qu'en général l'image numérique d'un produit de projection n'est pas fermé.

Exemple 2.2.25. Soient (N_1, N_2) deux sous-espaces en position générique, et on note $P_{N_i} = P_i$. Supposons que $P_1 P_2 P_1$ est diagonalisable. De plus, supposons qu'il existe une base orthonormale $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de N_1 telle que pour tout $x \in H$ on ait

$$P_1 P_2 P_1 x = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \langle x, h_n \rangle h_n.$$

Alors on a que $\sigma_p(P_2 P_1) = \{1 - \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ et $\sigma(P_2 P_1) = \sigma_p(P_2 P_1) \cup \{1\}$. Ainsi par le Corollaire 2.2.23 et le Théorème 2.2.7, on a que $W(P_2 P_1) = \text{conv}\{\bigcup_{\lambda \in \sigma_p(P_2 P_1) \setminus \{0\}} \mathcal{E}(\lambda)\}$ et $\overline{W(P_2 P_1)} = \text{conv}\{\bigcup_{\lambda \in \sigma(P_2 P_1)} \mathcal{E}(\lambda)\}$.

On a que $1 \in \overline{W(P_2 P_1)}$ mais $1 \notin W(P_2 P_1)$. Remarquons que $1 \in \mathcal{E}(\lambda)$ si et seulement si $\lambda = 1$. On a que (voir la remarque 2.2.4)

$$x_{1 - \frac{1}{n+1}}(0) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n+1}} + 1 - \frac{1}{n+1} \right) \in \mathcal{E}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \subset W(P_2 P_1).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{1 - \frac{1}{n+1}}(0) = 1$ On a que $1 \in \overline{W(P_2 P_1)}$.

Supposons que $1 \in W(P_2 P_1)$. Alors il existe $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$ et $\langle P_2 P_1 x, x \rangle = 1$. Comme $1 = |\langle P_2 P_1 x, x \rangle| \leq \|P_2 P_1 x\| \|x\| \leq 1$, on a que $|\langle P_2 P_1 x, x \rangle| = \|P_2 P_1 x\| \|x\|$, donc il existe λ tel que $P_2 P_1 x = \lambda x$. On a que $1 = \langle P_2 P_1 x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda$. Donc $\lambda = 1 \in \sigma_p(P_2 P_1)$. Ceci contredit l'hypothèse que $1 \notin \sigma_p(P_2 P_1)$, donc $1 \notin W(P_2 P_1)$.

Exemple 2.2.26. Il existe des exemples non triviaux où $P_1 P_2 P_1$ n'admet que 0 comme valeur propre (et donc $P_1 P_2 P_1$ n'est pas diagonalisable). Soit $T \in \mathcal{B}(L^2([0, 1]))$

l'opérateur défini par $Tf(x) = xf(x)$. On peut facilement montrer que T est une contraction autoadjointe et positive sans valeur propre, avec $\text{Ker}(I - T) = \{0\}$ et $\sigma(T) = [0, 1]$. Si on pose $C = T^{1/2}$ et $S = (I - T)^{1/2}$, on peut voir facilement que C et S sont des contractions injectives et positives sans valeur propre telles que $C^2 + S^2 = I$. De plus C et S commutent. On pose $H = L^2([0, 1]) \oplus L^2([0, 1])$ et

$$P_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix}.$$

Alors P_1 et P_2 sont des projections orthogonales sur des sous-espaces qui sont en position générique, et

$$P_1 P_2 P_1 = \begin{pmatrix} C^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Supposons qu'il existe $f \oplus g \in H$ et $\lambda \in \sigma(P_2 P_1)$ tels que $P_1 P_2 P_1(f \oplus g) = \lambda(f \oplus g)$. Alors $xf(x) = \lambda f(x)$ presque partout, et $0 = \lambda g(x)$. Ceci implique que $\lambda = 0$ et $f = 0$. Donc 0 est la seule valeur propre de $P_1 P_2 P_1$. Cependant on a que $\sigma(P_1 P_2 P_1) = \sigma(T) \cup \{0\} = [0, 1]$.

Remarque 2.2.27. A la fin de [Nee99], l'auteur demande si $\|P_2 P_1\|^2$ est un point d'accumulation de valeurs propres et si le spectre $P_2 P_1$ sans zéro consiste seulement de valeurs propres. L'exemple précédent répond négativement à ces deux questions.

2.2.3 Localisation de $W(P_2 P_1)$

Dans cette section, nous allons donner des moyens pour localiser $W(P_2 P_1)$ si on ne connaît pas le spectre de $P_2 P_1$. On commence par cette simple conséquence du Théorème 2.2.7.

Corollaire 2.2.28. *Soient P_1, P_2 deux projections orthogonales. On a que :*

$$\overline{W(P_2 P_1)} \subset \overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in [0,1]} \mathcal{E}(\lambda)\}}.$$

Démonstration. Si $P_1 = P_2 = I$, c'est clair puisque $W(I) = \{1\}$. Maintenant supposons que $P_1 \neq I$ ou $P_2 \neq I$. En utilisant le Théorème 2.2.7 et le fait que $\sigma(P_2 P_1) \subset [0, 1]$, on a l'inclusion $\text{conv}\{\cup_{\lambda \in \sigma(P_2 P_1)} \mathcal{E}(\lambda)\} \subset \text{conv}\{\cup_{\lambda \in [0,1]} \mathcal{E}(\lambda)\}$. \square

Ce corollaire nous dit que si on peut inclure $\overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in [0,1]} \mathcal{E}(\lambda)\}}$ (voir Figure 2.3) dans un sous ensemble de \mathbb{C} , alors pour n'importe quel paire de projections orthogonale P_1, P_2 on peut inclure $W(P_2 P_1)$ dans le même sous ensemble. Le lemme suivant est un exemple de localisation de l'image numérique qui utilise le Corollaire 2.2.28.

Lemme 2.2.29. *Soient P_1 et P_2 deux projections orthogonales. Alors $\overline{W(P_2 P_1)}$ est un sous ensemble du rectangle dont les cotés sont $x = -\frac{1}{8}$, $x = 1$, $y = \frac{1}{4}$ et $y = -\frac{1}{4}$.*

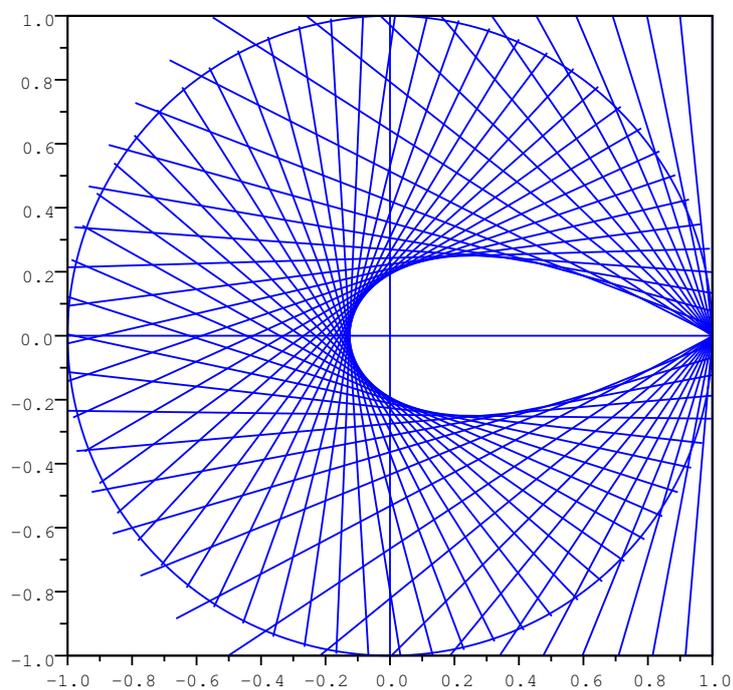


FIGURE 2.3 – $\text{conv}_{\lambda \in [0,1]} \{ \mathcal{E}(\lambda) \}$

Démonstration. En utilisant le Corollaire 2.2.28 et les équations paramétriques de la frontière de $\mathcal{E}(\lambda)$ (voir remarque 2.2.4), on peut montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a que $-\frac{1}{8} \leq x_\lambda(t) \leq 1$ et $-\frac{1}{4} \leq y_\lambda(t) \leq \frac{1}{4}$. \square

Michel Crouzeix a montré dans [Cro08] que l'image numérique d'un produit de projections est inclus dans un secteur du plan complexe de sommet 1.

Théorème 2.2.30 ([Cro08]). *Soient $P_1, P_2 \in \mathcal{B}(H)$ deux projections orthogonales. On a que*

$$W(P_2P_1) \subset \{z \in \mathbb{C}, |\arg(1 - z)| \leq \frac{\pi}{6}\}.$$

La Proposition suivante est une amélioration du résultat de Michel Crouzeix.

Proposition 2.2.31. *Soient M_1 et M_2 deux sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert H . On a l'inclusion suivante :*

$$W(P_{M_2}P_{M_1}) \subset \left\{ z \in \mathbb{C}, |\arg(1 - z)| \leq \arctan\left(\sqrt{\frac{\cos^2(M_1, M_2)}{4 - \cos^2(M_1, M_2)}}\right) \right\}.$$

Cette proposition implique que l'opérateur $P_{M_2}P_{M_1}$ est un opérateur de Ritt de type $\arctan\left(\sqrt{\frac{\cos^2(M_1, M_2)}{4 - \cos^2(M_1, M_2)}}\right)$. On invite le lecteur à regarder [Le 12] pour plus d'informations sur les opérateurs de Ritt.

Preuve de la Proposition 2.2.31. Supposons que l'on ait trouvé θ_λ tel que

$$\mathcal{E}(\lambda) \subset \{z \in \mathbb{C}, |\arg(1 - z)| \leq \theta_\lambda\}$$

pour tout $\lambda \in [0, 1]$. En prenant $\theta = \sup\{\theta_\lambda : \lambda \in \sigma(P_2P_1)\}$, on obtiendra que

$$W(P_2P_1) \subset \text{conv}_{\lambda \in \sigma(P_2P_1)}\{\mathcal{E}(\lambda)\} \subset \{z \in \mathbb{C}, |\arg(1 - z)| \leq \theta\}.$$

Remarquons d'abord que $\mathcal{E}(0) = \{0\}$ et $\mathcal{E}(1) = [0, 1]$. Donc on a que $\theta_0 = \theta_1 = 0$. Pour $\lambda \in]0, 1[$, on note $(x_\lambda(t), y_\lambda(t))$ la paramétrisation de la frontière de $\mathcal{E}(\lambda)$ donné dans la remarque 2.2.4. On note $\theta_\lambda(t)$ l'angle entre la droite qui passe par les points 0 et 1 et celle qui relie les points 1 et $(x_\lambda(t), y_\lambda(t))$. On a que $\theta_\lambda = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\theta_\lambda(t)|$, et

$$\tan(\theta_\lambda(t)) = \frac{y_\lambda(t)}{1 - x_\lambda(t)} = \frac{\sqrt{\lambda(1 - \lambda)} \sin(t)}{2 - \lambda - \sqrt{\lambda} \cos(t)}.$$

En dérivant $\tan(\theta_\lambda(t))$, on voit que t_0 est un point critique si $\cos(t_0) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2 - \lambda}$. Donc

on a que

$$\begin{aligned}
 \tan(\theta_\lambda) &= \frac{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}\sqrt{1-\frac{\lambda}{(2-\lambda)^2}}}{2-\lambda-\sqrt{\lambda}\frac{\sqrt{\lambda}}{(2-\lambda)}} \\
 &= \frac{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}\sqrt{(2-\lambda)^2-\lambda}}{(2-\lambda)^2-\lambda} \\
 &= \frac{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}{\sqrt{(2-\lambda)^2-\lambda}} \\
 &= \frac{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}{\sqrt{4-5\lambda+\lambda^2}} \\
 &= \frac{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}{\sqrt{(1-\lambda)(4-\lambda)}} \\
 &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{4-\lambda}}.
 \end{aligned}$$

Comme $\theta = \sup_{\lambda \in \sigma(P_2 P_1)} \theta_\lambda$, on a que $\tan(\theta) = \sup_{\lambda \in \sigma(P_2 P_1) \setminus \{1\}} \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{4-\lambda}}$. Finalement on conclut en utilisant le Lemme 1.2.11. \square

Remarque 2.2.32. On obtient comme conséquence de ce résultat que l'image numérique d'un produit de deux projections orthogonale est inclus dans un secteur de sommet 1 et d'angle $\frac{\pi}{6}$ ([Cro08]). De plus le résultat de la Proposition 2.2.31 est optimal, dans le sens où si $\theta < \arctan\left(\sqrt{\frac{\cos^2(M_1, M_2)}{4-\cos^2(M_1, M_2)}}\right)$, alors $W(P_2 P_1)$ n'est pas inclus dans $\{z \in \mathbb{C}, |\arg(1-z)| \leq \theta\}$.

2.2.4 Quelques exemples

Soient P_1, P_2 deux projections orthogonales. Le spectre $\sigma(P_2 P_1)$ est toujours un sous-ensemble compact de $[0, 1]$. Dans cette section, nous allons étudier le problème spectral inverse suivant : soit K un sous ensemble compact de $[0, 1]$; quand peut-on trouver deux projections orthogonales P_1 et P_2 telles que $\sigma(P_2 P_1) = K$? Nous allons voir que c'est possible si et seulement si $0 \in K$ ou bien $K = \{1\}$.

On commence avec le cas $K = \{1\}$.

Proposition 2.2.33. *Soient M_1 et M_2 deux sous-espaces de H . Si 0 n'appartient pas à $\sigma(P_{M_2} P_{M_1})$, alors on a que $M_1 = M_2 = H$, $P_{M_1} = P_{M_2} = I$ et $\sigma(P_{M_2} P_{M_1}) = \{1\}$.*

Démonstration. On décompose H comme dans (1.1) :

$$H = (M_1 \cap M_2) \oplus (M_1 \cap M_2^\perp) \oplus (M_1^\perp \cap M_2) \oplus (M_1^\perp \cap M_2^\perp) \oplus \tilde{H}.$$

Alors

$$P_{M_2}P_{M_1} = I \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus P_2P_1.$$

Comme 0 n'appartient pas à $\sigma(P_2P_1)$, on obtient $M_1 \cap M_2^\perp = M_1^\perp \cap M_2 = M_1^\perp \cap M_2^\perp = \tilde{H} = \{0\}$ (sinon $P_{M_2}P_{M_1}$ aurait un noyau non trivial). On a donc que $H = M_1 \cap M_2$ et $M_1 = M_2 = H$. Ainsi $P_{M_1} = P_{M_2} = I$ et $\sigma(P_{M_2}P_{M_1}) = \sigma(I) = \{1\}$. \square

Maintenant on suppose que $0 \in K$.

Théorème 2.2.34. *Soit H un espace de Hilbert séparable. Soit K un sous ensemble compact de $[0, 1]$ tel que $0 \in K$. Alors il existe deux projections orthogonale P_1, P_2 agissant sur H telles que $\sigma(P_2P_1) = K$. De plus $P_1P_2P_1$ est diagonalisable.*

Démonstration. Comme K est un sous ensemble compact de $[0, 1]$, il existe une suite (λ_n) dans K telle que $\overline{\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}} = K$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $\theta_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\lambda_n = \cos(\theta_n)^2$. Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée de H . On note $h_n = e_{2n}$, $\tilde{f}_n = e_{2n+1}$ et $\tilde{w}_n = \cos(\theta_n)e_{2n} + \sin(\theta_n)e_{2n+1}$. Soit $N_1 = \overline{\text{vect}\{h_n, n \in \mathbb{N}\}}$ et $N_2 = \overline{\text{vect}\{\tilde{w}_n, n \in \mathbb{N}\}}$ (voir Figure 2.2). Alors on a que $P_1h_n = h_n$, $P_1\tilde{f}_n = 0$ et $P_2h_n = \cos(\theta_n)^2h_n + \cos(\theta_n)\sin(\theta_n)\tilde{f}_n$, $P_2\tilde{f}_n = \cos(\theta_n)\sin(\theta_n)h_n + \sin(\theta_n)^2\tilde{f}_n$. Ainsi $P_2P_1h_n = \cos(\theta_n)^2h_n + \cos(\theta_n)\sin(\theta_n)\tilde{f}_n$ et $P_2P_1\tilde{f}_n = 0$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} P_2P_1 &= \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} P_2P_1 \Big|_{\overline{\text{vect}\{h_n, \tilde{f}_n\}}} \\ &= \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \begin{pmatrix} \cos(\theta_n)^2 & 0 \\ \cos(\theta_n)\sin(\theta_n) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a aussi $\sigma(P_2P_1) = \overline{\{\cos(\theta_n)^2, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}} = \overline{\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}} = K$. \square

Remarque 2.2.35. On a prouvé dans la section précédente l'inclusion suivante : $\overline{W(P_2P_1)} \subset \text{conv}\{\cup_{\lambda \in [0,1]} \mathcal{E}(\lambda)\}$. Il existe des exemples où cette inclusion est une égalité. D'après le Théorème 2.2.7, on a juste besoin de deux projections telles que $\sigma(P_2P_1) = [0, 1]$. Les projections de l'exemple 2.2.26 font l'affaire, mais $P_1P_2P_1$ n'est pas diagonalisable. Avec le Théorème 2.2.34, on peut aussi construire un exemple tel que $P_1P_2P_1$ soit diagonalisable et $\sigma(P_2P_1) = [0, 1]$.

Remarque 2.2.36. Comme on connaît les formes possibles pour $\sigma(P_2P_1)$, le Théorème 2.2.7 nous donne toutes les formes possibles pour $\overline{W(P_2P_1)}$.

Remarque 2.2.37. En utilisant la paramétrisation de la frontière de $\mathcal{E}(\lambda)$ (voir Remarque 2.2.4), on peut montrer que pour tout $\lambda \in [0, \frac{1}{4}]$, $\mathcal{E}(\lambda) \subset \mathcal{E}(\frac{1}{4})$. Soit $K_1 = [0, \frac{1}{4}]$ and $K_2 = \{0, \frac{1}{4}\}$. D'après le Théorème 2.2.34, il existe des projections orthogonales P_1, P_2, Q_1, Q_2 telles que $\sigma(P_2P_1) = K_1$ et $\sigma(Q_2Q_1) = K_2$. De plus, on a que :

$$\overline{W(P_2P_1)} = \overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in [0, \frac{1}{4}]} \mathcal{E}(\lambda)\}} = \overline{\mathcal{E}(\frac{1}{4})} = \overline{\text{conv}\{\mathcal{E}(0) \cup \mathcal{E}(\frac{1}{4})\}} = \overline{W(Q_2Q_1)}.$$

Ceci montre que tous les points du spectre de P_2P_1 qui sont inférieurs à $\frac{1}{4}$ ne sont pas déterminés de manière unique par l'image numérique. Nous allons voir dans

la prochaine section que la situation est différente pour des valeurs spectrales plus grandes que $\frac{1}{4}$.

2.3 Le spectre de P_2P_1 en fonction de l'image numérique

2.3.1 La relation entre le rayon spectral et le rayon numérique

Dans cette section nous allons montrer la proposition suivante, et la comparer avec la formule de Kittaneh (voir Théorème 1.4.5).

Proposition 2.3.1. *Soient M_1, M_2 deux sous-espaces fermés de H . Le rayon numérique et le rayon spectral de $P_{M_2}P_{M_1}$ sont reliés par la formule suivante*

$$\omega(P_{M_2}P_{M_1}) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{r(P_{M_2}P_{M_1})} + r(P_{M_2}P_{M_1}) \right).$$

Preuve de la Proposition 2.3.1. Si $M_1 = M_2 = H$, c'est vrai. Maintenant on suppose que $M_1 \neq H$ ou $M_2 \neq H$. En combinant la définition du rayon numérique avec le Théorème 2.2.7, on obtient :

$$\omega(P_2P_1) = \sup_{w \in W(P_2P_1)} |w| = \sup_{w \in \overline{W(P_2P_1)}} |w| = \sup_{w \in \mathcal{E}(\lambda), \lambda \in \sigma(P_2P_1)} |w|.$$

D'abord on calcule $\sup_{w \in \mathcal{E}(\lambda)} |w|$ pour un λ fixé. On note $(x_\lambda(t), y_\lambda(t))$ la paramétrisation de la frontière de $\mathcal{E}(\lambda)$ donnée dans la remarque 2.2.4. On a que

$$\sup_{w \in \mathcal{E}(\lambda)} |w| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \sqrt{x_\lambda(t)^2 + y_\lambda(t)^2}$$

et $x_\lambda(t)^2 + y_\lambda(t)^2 = \frac{1}{4}(\lambda^2 \cos(t)^2 + 2\lambda\sqrt{\lambda} \cos(t) + \lambda)$. Donc

$$\sup_{w \in \mathcal{E}(\lambda)} |w| = \sqrt{\frac{1}{4}(\lambda^2 + 2\lambda\sqrt{\lambda} + \lambda)} = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda}).$$

Finalement,

$$\omega(P_2P_1) = \sup_{w \in \mathcal{E}(\lambda), \lambda \in \sigma(P_2P_1)} |w| = \sup_{\lambda \in \sigma(P_2P_1)} \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda}) = \frac{1}{2}(r(P_2P_1) + \sqrt{r(P_2P_1)}).$$

□

Remarque 2.3.2. La formule de Kittaneh (voir Théorème 1.4.5) nous dit que pour n'importe quel opérateur T , on a l'inégalité suivante :

$$\omega(T) \leq \frac{1}{2} \left(\|T\| + \|T^2\|^{\frac{1}{2}} \right).$$

Nous allons comparer la Proposition 2.3.1 avec la formule de Kittaneh quand $T = P_2P_1$. Si $M_1 \cap M_2 \neq \{0\}$, alors 1 est valeur propre de P_2P_1 . Donc $\|P_2P_1\| = \|(P_2P_1)^2\| = 1$, $r(P_2P_1) = 1$ et $\omega(P_2P_1) = 1$. Ainsi $\omega(P_2P_1) = \frac{1}{2}(\sqrt{r(P_2P_1)} + r(P_2P_1)) = \frac{1}{2}(\|P_2P_1\| + \|(P_2P_1)^2\|^{\frac{1}{2}})$ et dans ce cas, l'inégalité de Kittaneh est une égalité.

Si $M_1 \cap M_2 = \{0\}$, alors d'après le Lemme 1.2.7 on a que $\|(P_2P_1)^n\| = \cos(M_1, M_2)^{2n-1}$ et $\|P_1P_2P_1\| = \cos(M_1, M_2)^2 = r(P_1P_2P_1) = r(P_2P_1)$. donc on a que $\omega(P_2P_1) = \frac{1}{2}(\sqrt{r(P_2P_1)} + r(P_2P_1)) = \frac{1}{2}(\cos(M_1, M_2) + \cos(M_1, M_2)^2)$ et aussi $\frac{1}{2}(\|P_2P_1\| + \|(P_2P_1)^2\|^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}(\cos(M_1, M_2) + \cos(M_1, M_2)^{\frac{3}{2}})$. Si $\cos(M_1, M_2) < 1$, alors

$$\omega(P_2P_1) < \frac{1}{2} \left(\|P_2P_1\| + \|(P_2P_1)^2\|^{\frac{1}{2}} \right).$$

Donc dans ce cas, l'inégalité de Kittaneh est stricte.

2.3.2 Retrouver $\sigma(P_2P_1)$ à partir de $\overline{W(P_2P_1)}$ (et $\overline{W(P_2(I - P_1))}$)

Contrairement aux sections précédentes, où l'on a décrit $\overline{W(P_2P_1)}$ en fonction de $\sigma(P_2P_1)$, le but de cette section est d'obtenir des informations sur le spectre de P_2P_1 à partir de son image numérique. On donne une idée de comment y parvenir.

On pose $g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha)\lambda + \sqrt{\lambda(1 - \sin(\alpha)^2\lambda)})$, alors on a que $\rho_{W(P_2P_1)}(\alpha) = \sup_{\lambda \in \sigma(P_2P_1)} g_\alpha(\lambda)$. On va se servir des fonctions supports pour identifier si l'ellipse $\mathcal{E}(\lambda)$ est dans l'image numérique. Si c'est le cas, alors λ sera dans le spectre. On note \mathcal{S} l'adhérence de $\text{conv}_{\lambda \in [0,1]} \{\mathcal{E}(\lambda)\}$. Par le Corollaire 2.2.28, on a que $W(P_2P_1) \subset \mathcal{S}$, donc $\sup_{\lambda \in \sigma(P_2P_1)} g_\alpha(\lambda) = \rho_{W(P_2P_1)}(\alpha) \leq \rho_{\mathcal{S}}(\alpha) = \sup_{\lambda \in [0,1]} g_\alpha(\lambda)$. La continuité de la fonction $g_\alpha(\cdot)$ et la compacité de $\sigma(P_2P_1)$, nous garantie l'existence d'un point $\lambda_0 \in \sigma(P_2P_1)$ tel que $\rho_{W(P_2P_1)}(\alpha) = g_\alpha(\lambda_0)$. Avec cette information, nous sommes capables de trouver une formule explicite pour $\rho_{\mathcal{S}}(\alpha)$. De plus, nous verrons que l'égalité $\rho_{W(P_2P_1)}(\alpha) = \rho_{\mathcal{S}}(\alpha)$ est équivalente à la présence d'un unique point λ_0 (qui dépend seulement de α) dans le spectre de P_2P_1 .

On commence par donner une condition nécessaire et suffisante pour que λ soit un point critique de $g_\alpha(\lambda)$.

Lemme 2.3.3. *Soit $\lambda_0 \in]0, 1[$ et $\alpha \in]0, \pi[$. Alors λ_0 est un point critique de g_α si et seulement si on a :*

$$\alpha = 2 \arcsin(\sqrt{1 - \lambda_0 \sin(\alpha)^2}).$$

Démonstration. On a $g'_\alpha(\lambda) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha) + \frac{1-2\lambda \sin(\alpha)^2}{2\sqrt{\lambda(1-\sin(\alpha)^2\lambda)})$. Donc $g'_\alpha(\lambda) = 0$ si et seulement si $\sqrt{\lambda} \cos(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{1-\sin(\alpha)^2\lambda}} - \sqrt{1 - \lambda \sin(\alpha)^2}$. On note $X = \sqrt{1 - \sin(\alpha)^2\lambda}$.

On a que $g'_\alpha(\lambda) = 0$ si et seulement si $\sqrt{\frac{1-X^2}{\sin(\alpha)^2}} \cos(\alpha) = \frac{1}{2X} - X$, ou bien, de manière équivalente, si et seulement si $\cot(\alpha) = \frac{1-2X^2}{2X\sqrt{1-X^2}}$. On pose $X = \sin(\gamma)$ et on obtient que $\cot(\alpha) = \frac{1-2\sin(\gamma)^2}{2\sin(\gamma)\sqrt{1-\sin(\gamma)^2}} = \cot(2\gamma)$. Comme $\lambda \in [0, 1]$, on a que

$X \in [|\cos(\alpha)|, 1]$, et $\gamma \in [\arcsin(|\cos(\alpha)|), \frac{\pi}{2}] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$. Donc $2\gamma \in [0, \pi]$. Ainsi $g'_\alpha(\lambda) = 0$ si et seulement si $\alpha = 2\gamma$, si et seulement si $\alpha = 2 \arcsin(\sqrt{1 - \lambda_0 \sin(\alpha)^2})$. \square

Le corollaire suivant nous dit que les fonctions support de $W(P_2P_1)$ pour $\alpha \in]0, \frac{\pi}{3}]$ ne donnent aucune information intéressante sur $\sigma(P_2P_1)$.

Corollaire 2.3.4. *Si $\alpha \in [0, \frac{\pi}{3}]$, et $\lambda_0 \in]0, 1[$, alors λ_0 n'est pas un point critique de g_α .*

Démonstration. On a juste besoin de vérifier que la condition du Lemme 2.3.3 n'est pas vérifiée. Si $\lambda_0 \in]0, 1[$, alors $2 \arcsin(\sqrt{1 - \lambda_0 \sin(\alpha)^2}) \in] \arcsin(|\cos(\alpha)|), \pi[$. Si α vérifie la condition du Lemme 2.3.3, alors $\alpha \in] \arcsin(|\cos(\alpha)|), \pi[$. On veut savoir quand on a $\alpha = 2 \arcsin(|\cos(\alpha)|)$? Si $\alpha = 2 \arcsin(|\cos(\alpha)|)$, en utilisant quelques formules trigonométriques, on obtient que $\sin(\alpha) = 2 |\cos(\alpha)| \sin(\alpha)$. Donc $|\cos(\alpha)| = \frac{1}{2}$. Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$, alors $2 \arcsin(|\cos(\alpha)|) = \frac{\pi}{3} = \alpha$. Si $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, alors $2 \arcsin(|\cos(\alpha)|) = \frac{\pi}{3} \neq \alpha$. Autrement dit, $\alpha = 2 \arcsin(|\cos(\alpha)|)$ si et seulement si $\alpha = \frac{\pi}{3}$. De plus si $\alpha \in [0, \frac{\pi}{3}]$, alors on a $\alpha < 2 \arcsin(|\cos(\alpha)|)$, donc g_α n'a pas de points critiques sur $]0, 1[$. \square

La proposition suivante nous dit que $\rho_{W(P_2P_1)}(\alpha)$ possède des informations sur $\sigma(P_2P_1)$ quand $\alpha \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$.

Proposition 2.3.5. *Si $\alpha \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$, alors le seul point critique de g_α est $\lambda_\alpha = \frac{1+\cos(\alpha)}{2\sin(\alpha)^2}$.*

Démonstration. D'après le Lemme 2.3.3, on sait que λ est un point critique de g_α si et seulement si $\alpha = 2 \arcsin(\sqrt{1 - \lambda \sin(\alpha)^2})$. On compose de chaque coté de l'inégalité par la fonction sinus et on utilise quelques formules trigonométriques pour obtenir que $\sin(\alpha) = 2\sqrt{1 - \lambda \sin(\alpha)^2} \sqrt{\lambda} \sin(\alpha)$. En divisant chaque coté par $\sin(\alpha)$ et en élevant au carré, on obtient que $4\lambda^2 \sin(\alpha)^2 - 4\lambda + 1 = 0$. Cependant si λ est un point critique de g_α , alors $\lambda = \frac{1+\cos(\alpha)}{2\sin(\alpha)^2}$ ou bien $\lambda = \frac{1-\cos(\alpha)}{2\sin(\alpha)^2}$. Si $\lambda = \frac{1-\cos(\alpha)}{2\sin(\alpha)^2}$, alors

$$\begin{aligned} 2 \arcsin(\sqrt{1 - \lambda \sin(\alpha)^2}) &= 2 \arcsin(\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos(\alpha))}) \\ &= 2 \arcsin(\cos(\frac{\alpha}{2})) \\ &\neq \alpha. \end{aligned}$$

Le Lemme 2.3.3 dit que λ n'est pas un point critique de g_α . Si $\lambda = \frac{1+\cos(\alpha)}{2\sin(\alpha)^2}$, alors

$$\begin{aligned} 2 \arcsin(\sqrt{1 - \lambda \sin(\alpha)^2}) &= 2 \arcsin(\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(\alpha))}) \\ &= 2 \arcsin(\sin(\frac{\alpha}{2})) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.3.3, λ est un point critique de g_α . \square

Remarque 2.3.6. La condition $\alpha \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$ nous garantie que $\lambda_\alpha \in [0, 1]$. On remarque que

$$\lambda_\alpha = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2 \sin(\alpha)^2} = \frac{1}{2(1 - \cos(\alpha))}.$$

Si on a $\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \pi$, alors $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2(1 - \cos(\alpha))} \leq 1$. Donc $\lambda_\alpha \in [\frac{1}{4}, 1]$.

On donne maintenant une formule explicite pour $\rho_{\mathcal{S}}(\alpha)$.

Corollaire 2.3.7. *La fonction support de $\mathcal{S} = \overline{\text{conv}\{\cup_{\lambda \in [0,1]} \mathcal{E}(\lambda)\}}$ est donné par la formule suivante :*

$$\rho_{\mathcal{S}}(\alpha) = \begin{cases} \cos(\alpha) & \text{if } \alpha \in [0, \frac{\pi}{3}] \\ \frac{1}{4(1 - \cos(\alpha))} & \text{if } \alpha \in [\frac{\pi}{3}, \pi] \end{cases}.$$

Démonstration. On sait que $\rho_{\mathcal{S}}(\alpha) = \max_{\lambda \in [0,1]} g_\alpha(\lambda)$. On a montré précédemment que si $\alpha \in [0, \frac{\pi}{3}]$, alors $\rho_{\mathcal{S}}(\alpha) = \max\{g_\alpha(0), g_\alpha(1)\}$ et si $\alpha \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$ alors $\rho_{\mathcal{S}}(\alpha) = \max\{g_\alpha(0), g_\alpha(\lambda_\alpha), g_\alpha(1)\}$, avec $\lambda_\alpha = \frac{1}{2(1 - \cos(\alpha))}$. On a que $g_\alpha(0) = 0$ et $g_\alpha(1) = \cos(\alpha)$ et aussi $g_\alpha(\lambda_\alpha) = \frac{1}{4(1 - \cos(\alpha))}$. Maintenant il ne reste plus qu'à montrer que pour tout $\alpha \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$, on a $g_\alpha(\lambda_\alpha) \geq g_\alpha(1)$. Comme $\frac{1}{4(1 - \cos(\alpha))} - \cos(\alpha) = \frac{1 - 4 \cos(\alpha) + 4 \cos(\alpha)^2}{4(1 - \cos(\alpha))} = \frac{(1 - 2 \cos(\alpha))^2}{4(1 - \cos(\alpha))}$, et que le dernier terme est toujours positif, on obtient le résultat annoncé. \square

Maintenant nous somme prêts pour montrer le Théorème suivant.

Théorème 2.3.8. *Soit $\alpha \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\frac{1}{2(1 - \cos(\alpha))} \in \sigma(P_{M_2}P_{M_1})$;
2. $\text{sup}\{\text{Re}(z \exp(-i\alpha)), z \in W(P_{M_2}P_{M_1})\} = \frac{1}{4(1 - \cos(\alpha))}$.

Preuve du Théorème 2.3.8. Soit $\alpha \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$. On sait que

$$\rho_{W(P_2P_1)}(\alpha) = \sup_{\lambda \in \sigma(P_2P_1)} g_\alpha(\lambda).$$

Comme $\sigma(P_2P_1)$ est un ensemble compact et g_α est une fonction continue, il existe un $\lambda_0 \in \sigma(P_2P_1)$ tel que : $\rho_{W(P_2P_1)}(\alpha) = \max_{\lambda \in \sigma(P_2P_1)} g_\alpha(\lambda) = g_\alpha(\lambda_0)$. D'après la Proposition 2.3.5, on a $g_\alpha(\lambda_0) = \frac{1}{4(1 - \cos(\alpha))}$ si et seulement si $\lambda_0 = \lambda_\alpha = \frac{1}{2(1 - \cos(\alpha))}$.

"1 \Rightarrow 2" : Si $\rho_{W(P_2P_1)}(\alpha) = \frac{1}{4(1 - \cos(\alpha))} = g_\alpha(\lambda_0)$, alors on a que $\lambda_0 = \lambda_\alpha = \frac{1}{2(1 - \cos(\alpha))}$. Comme $\lambda_0 \in \sigma(P_2P_1)$, on obtient que $\lambda_\alpha \in \sigma(P_2P_1)$.

"2 \Rightarrow 1" : Si $\lambda_\alpha \in \sigma(P_2P_1)$, alors on a que :

$$g_\alpha(\lambda_\alpha) \leq \max_{\lambda \in \sigma(P_2P_1)} g_\alpha(\lambda) \leq \max_{\lambda \in [0,1]} g_\alpha(\lambda) = g_\alpha(\lambda_\alpha).$$

Ainsi

$$\rho_{W(P_2P_1)}(\alpha) = \max_{\lambda \in \sigma(P_2P_1)} g_\alpha(\lambda) = g_\alpha(\lambda_\alpha) = \frac{1}{4(1 - \cos(\alpha))}.$$

\square

Si on nous donne α , le Théorème 2.3.8 nous dit si λ_α est dans le spectre ou pas, en regardant la fonction support de $W(P_2P_1)$ dans la direction α . Si on se donne λ , le corollaire suivant nous dit dans quelle direction α_λ il faut regarder si on veut savoir si λ est dans $\sigma(P_2P_1)$ ou pas.

Corollaire 2.3.9. *Soit $\lambda \in [\frac{1}{4}, 1]$. On note $\alpha_\lambda = \arccos(1 - \frac{1}{2\lambda})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\rho_{W(P_2P_1)}(\alpha_\lambda) = \frac{1}{4(1-\cos(\alpha_\lambda))}$;
2. $\lambda \in \sigma(P_2P_1)$.

Démonstration. On note $f : [\frac{\pi}{3}, \pi] \longrightarrow [\frac{1}{4}, 1]$ la fonction donnée par $f(\alpha) = \frac{1}{2(1-\cos(\alpha))}$. L'équivalence vient du Théorème 2.3.8, combiné avec le fait que f est bijective, et sa fonction réciproque est donnée par la formule $\lambda \mapsto \arccos(1 - \frac{1}{2\lambda})$. \square

La proposition suivante est une "astuce" qui permet de reconstruire la plupart du spectre de P_2P_1 à partir de $\sigma(P_2(I - P_1))$. Comme $P_2(I - P_1)$ est encore un produit de deux projections orthogonales, tous les résultats de ce chapitre sont encore valable pour cet opérateur.

Proposition 2.3.10. *Soit $\lambda \neq 0$. Si $\lambda \in \sigma(P_2(I - P_1))$, Alors $1 - \lambda \in \sigma(P_2P_1)$.*

Démonstration. On décompose H comme dans (1.1). Ainsi on a que

$$H = (M_1 \cap M_2) \oplus (M_1 \cap M_2^\perp) \oplus (M_1^\perp \cap M_2) \oplus (M_1^\perp \cap M_2^\perp) \oplus \tilde{H}$$

et

$$\begin{aligned} P_{M_1} &\sim I \oplus I \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P_{M_2} &\sim I \oplus 0 \oplus I \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{pmatrix} \\ I - P_{M_1} &\sim 0 \oplus 0 \oplus I \oplus I \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ P_{M_2}P_{M_1} &\sim I \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} C^2 & 0 \\ CS & 0 \end{pmatrix} \\ P_{M_2}(I - P_{M_1}) &\sim 0 \oplus 0 \oplus I \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} 0 & CS \\ 0 & S^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On rappelle que $C^2 + S^2 = I$, donc on a que $\sigma(S^2) = 1 - \sigma(C^2)$. Supposons que les sous-espaces $M_1^{(\perp)} \cap M_2^{(\perp)}$ et \tilde{H} ne sont pas égaux à $\{0\}$. Alors $\sigma(P_{M_2}P_{M_1}) = \cup\{\{1\}, \{0\}, \sigma(C^2) \cup \{0\}\}$. Si $M_1 \cap M_2 = \{0\}$, alors on doit enlever $\{1\}$ dans la formule précédente pour avoir $\sigma(P_{M_2}P_{M_1})$. Si $M_1 \cap M_2^\perp = M_1^\perp \cap M_2 = M_1^\perp \cap M_2^\perp = \{0\}$, alors il faut enlever $\{0\}$ dans la formule précédente pour avoir $\sigma(P_{M_2}P_{M_1})$. Si $\tilde{H} = \{0\}$, alors on doit enlever $\sigma(C^2) \cup \{0\}$ de l'union précédente pour obtenir $\sigma(P_{M_2}P_{M_1})$.

De la même manière, si les sous-espaces $M_1^{(\perp)} \cap M_2^{(\perp)}$ et \tilde{H} ne sont pas égaux à $\{0\}$, alors $\sigma(P_{M_2}(I - P_{M_1})) = \cup\{\{0\}, \{1\}, (1 - \sigma(C^2)) \cup \{0\}\}$. Si $M_1 \cap M_2 = M_1 \cap M_2^\perp = M_1^\perp \cap M_2^\perp = \{0\}$, alors il faut enlever $\{0\}$ dans la formule précédente pour avoir $\sigma(P_{M_2}(I - P_{M_1}))$. Si $M_1^\perp \cap M_2 = \{0\}$, alors il faut retirer $\{1\}$ dans la formule précédente pour avoir $\sigma(P_{M_2}(I - P_{M_1}))$. Si $\tilde{H} = \{0\}$, alors on doit enlever $(1 - \sigma(C^2)) \cup \{0\}$ de l'union précédente pour obtenir $\sigma(P_{M_2}(I - P_{M_1}))$.

Soit $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda \in \sigma(P_{M_2}(I - P_{M_1}))$. Supposons que $\lambda = 1$ et $M_1^\perp \cap M_2 \neq \{0\}$. Alors on a que $P_{M_2}P_{M_1} = 0$ sur $M_1^\perp \cap M_2$. Donc $1 - \lambda = 0$ est une valeur propre de $P_{M_2}P_{M_1}$.

Dans les autres cas, on a que $\lambda \in 1 - \sigma(C^2)$ et $\tilde{H} \neq \{0\}$, ainsi $1 - \lambda \in \sigma(C^2) \subset \sigma(P_{M_2}P_{M_1})$. \square

Exemple 2.3.11. Il existe des projections orthogonales telles que $1 - \sigma(P_{M_2}(I - P_{M_1})) \neq \sigma(P_{M_2}P_{M_1})$. On va construire un tel exemple dans $H = \mathbb{C}^3$. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de \mathbb{C}^3 . On pose $M_1 = \text{vect}\{e_1\}$ et $M_2 = \text{vect}\{e_2\}$. Alors on a que $M_1 \cap M_2 = \{0\}$, $M_1 \cap M_2^\perp = \text{vect}\{e_2\}$, $M_1^\perp \cap M_2 = \text{vect}\{e_1\}$, $M_1^\perp \cap M_2^\perp = \text{vect}\{e_3\}$ et $\tilde{H} = \{0\}$. Donc $P_{M_2}P_{M_1} = 0$, $P_{M_2}(I - P_{M_1}) = P_{M_2}$, $\sigma(P_{M_2}P_{M_1}) = \{0\}$ et $\sigma(P_{M_2}(I - P_{M_1})) = \{0, 1\}$.

Remarque 2.3.12. Le Théorème 2.3.8 nous permet de reconstruire $\sigma(P_2P_1) \cap [\frac{1}{4}, 1]$ à partir de $\overline{W(P_2P_1)}$. Comme $I - P_1$ est aussi une projection orthogonale, on peut aussi déduire $\sigma(P_2(I - P_1)) \cap [\frac{1}{4}, 1]$ à partir de $\overline{W(P_2(I - P_1))}$. De plus la Proposition 2.3.10 nous permet de retrouver $\sigma(P_2P_1) \cap [0, \frac{3}{4}]$ à partir de $\sigma(P_2(I - P_1)) \cap [\frac{1}{4}, 1]$.

Autrement dit, on peut déduire $\sigma(P_2P_1)$ à partir de $\overline{W(P_2P_1)}$ et $\overline{W(P_2(I - P_1))}$.

Proposition 2.3.13. Soient P_1, P_2 deux projections orthogonales. Si $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, alors on a que

$$\rho_{W(P_2P_1)}(\alpha) = r(\text{Re}(\exp(-i\alpha)P_2P_1)) = \|\text{Re}(\exp(-i\alpha)P_2P_1)\| = \omega(\text{Re}(\exp(-i\alpha)P_2P_1)).$$

Cette proposition est importante car si on connaît en même temps les rayons spectraux $r(\text{Re}(\exp(-i\alpha)P_2P_1))$ et $r(\text{Re}(\exp(-i\alpha)P_2(I - P_1)))$ pour tout $\alpha \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ alors, en utilisant le Théorème 2.3.8 et la Proposition 2.3.10, on peut en déduire $\sigma(P_2P_1)$.

Démonstration. Remarquons que $\text{Re}(\exp(-i\alpha)P_2P_1)$ est un opérateur autoadjoint, donc

$$r(\text{Re}(\exp(-i\alpha)P_2P_1)) = \|\text{Re}(\exp(-i\alpha)P_2P_1)\| = \omega(\text{Re}(\exp(-i\alpha)P_2P_1))$$

et la plus grande valeur spectrale positive de $\text{Re}(\exp(-i\alpha)P_2P_1)$ est la plus grande valeur dans l'image numérique. Autrement dit, on doit juste prouver que pour tout $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la plus grande valeur spectrale positive de $\text{Re}(\exp(-i\alpha)P_2P_1)$ est plus grande que la valeur absolue de la plus petite valeur spectral négative.

D'après les notations de la fin de la preuve du Lemme 2.2.1 (i.e. $\tilde{v}_i(\lambda, \alpha) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha)\lambda \pm \sqrt{\lambda(1 - \sin(\alpha)^2\lambda)})$), on a que

$$\operatorname{Re}(\exp(-i\alpha)P_2P_1) \sim \begin{pmatrix} \tilde{v}_1(C^2, \alpha) & 0 \\ 0 & \tilde{v}_2(C^2, \alpha) \end{pmatrix}.$$

On a aussi que pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et pour tout $\alpha \in [0, \pi]$, $\tilde{v}_1(\lambda, \alpha) \geq 0$ et $\tilde{v}_2(\lambda, \alpha) \leq 0$. De plus $\lambda \in \sigma(C^2)$ si et seulement si $\tilde{v}_1(\lambda, \alpha)$ et $\tilde{v}_2(\lambda, \alpha) \in \sigma(\operatorname{Re}(\exp(-i\alpha)P_2P_1))$. Cependant $|\tilde{v}_1(\lambda, \alpha)| - |\tilde{v}_2(\lambda, \alpha)| = \tilde{v}_1(\lambda, \alpha) + \tilde{v}_2(\lambda, \alpha) = \lambda \cos(\alpha)$. Ce dernier terme est positif si $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et négatif si $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Donc $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ implique que $\rho_{W(P_2P_1)}(\alpha) = r(\operatorname{Re}(\exp(-i\alpha)P_2P_1))$. \square

2.4 Applications à la vitesse de convergence dans le Théorème de von Neumann-Halperin et au principe d'incertitude

2.4.1 Applications à la méthode des projections alternés

Von Neumann a montré que pour tout $x \in H$ on a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(P_{M_2}P_{M_1})^n x - P_{M_1 \cap M_2} x\| = 0.$$

D'après le Chapitre 1, si on pose $N_1 = M_1 \cap (M_1 \cap M_2)^\perp$ et $N_2 = M_2 \cap (M_1 \cap M_2)^\perp$, on a que $N_1 \cap N_2 = \{0\}$. De plus on a que $(P_{M_2}P_{M_1})^n - P_{M_1 \cap M_2} = (P_{N_2}P_{N_1})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi l'étude de la convergence de $(P_{M_2}P_{M_1})^n$ vers $P_{M_1 \cap M_2}$ revient à étudier la convergence de $(P_{N_2}P_{N_1})^n$ vers 0.

La nouveauté de cette caractérisation de la convergence arbitrairement lente viens de l'utilisation de l'image numérique de $P_{N_2}P_{N_1}$ dans les conditions 6, 7 et 8.

Proposition 2.4.1. *Soient N_1, N_2 deux sous-espaces fermés de H tels que $N_1 \cap N_2 = \{0\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $(P_{N_2}P_{N_1})^n$ converge arbitrairement lentement vers 0
2. $\|P_{N_2}P_{N_1}\| = 1$
3. $N_1^\perp + N_2^\perp$ n'est pas fermé
4. $1 \in \sigma(P_{N_2}P_{N_1})$
5. $\cos(N_1, N_2) = 1$
6. $1 \in \overline{W(P_{N_2}P_{N_1})}$
7. Il existe une suite (λ_n) dans $[0, 1[$ telle que $\lim \lambda_n = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}(\lambda_n) \subset \overline{W(P_2P_1)}$

2.4. Applications à la vitesse de convergence dans le Théorème de von
Neumann-Halperin et au principe d'incertitude

8. Il existe $\theta < \frac{\pi}{6}$ tel que $W(P_{N_2}P_{N_1}) \subset \{z \in \mathbb{C}, |\arg(1-z)| \leq \theta\}$.

Démonstration. Les équivalences 1 à 5 sont connues (voir Chapitre 1).

"6 \Rightarrow 2". Comme $1 \in \overline{W(P_{N_2}P_{N_1})}$, on peut trouver une suite (x_n) telle que $\|x_n\| = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle P_{N_2}P_{N_1}x_n, x_n \rangle = 1$. Comme on a que

$$\begin{aligned} \langle P_{N_2}P_{N_1}x_n, x_n \rangle &\leq \|P_{N_2}P_{N_1}x_n\| \|x_n\| \\ &\leq \|P_{N_2}P_{N_1}x_n\| \\ &\leq \|P_{N_2}P_{N_1}\| \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

on a aussi que $\|P_{N_2}P_{N_1}\| = 1$.

"4 \Rightarrow 6". Comme $1 \in \sigma(P_{N_2}P_{N_1})$ et $\sigma(P_{N_2}P_{N_1}) \subset \overline{W(P_{N_2}P_{N_1})}$, on a que $1 \in \overline{W(P_{N_2}P_{N_1})}$.

"7 \Rightarrow 6". Il est clair que $x_{\lambda_n}(0) = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2} + \frac{\lambda_n}{2} \in \mathcal{E}(\lambda_n) \subset \overline{W(P_2P_1)}$.

"4 \Rightarrow 7". Comme $N_1 \cap N_2 = \{0\}$, 1 n'est pas valeur propre de $P_{N_2}P_{N_1}$. Donc il existe $\lambda_n \in \sigma(P_{N_2}P_{N_1})$ tels que $\lim_n \lambda_n = 1$. L'assertion 7 viens du Théorème 2.2.7.

"5 \Leftrightarrow 8". C'est une conséquence du Lemme 2.2.31. \square

Remarque 2.4.2. Dans l'esprit de la section du Chapitre 1, on peut étendre "1 \Leftrightarrow 6" à un nombre fini de projections, pour obtenir l'énoncé suivant : Si P_{N_1}, \dots, P_{N_r} sont des projections orthogonale telles que $\bigcap_{i=1}^r N_i = \{0\}$, alors $(P_{N_r} \dots P_{N_1})^n$ converge arbitrairement lentement vers 0 si et seulement si $1 \in \overline{W(P_{N_r} \dots P_{N_1})}$. La preuve est similaire.

Remarque 2.4.3. L'équivalence entre 5, 7 et 8 est encore vraie même sans l'hypothèse que $N_1 \cap N_2 = \{0\}$.

2.4.2 Applications aux paires annihilantes

Dans cette section on va donner de nouvelles caractérisations des paires annihilantes. On commence par rappeler le contexte. On note \mathcal{F} la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$. Soient S et Σ deux sous ensembles mesurables de \mathbb{R} . On pose $P_S = M_{1_S}$ et $P_\Sigma = \mathcal{F}^* M_{1_\Sigma} \mathcal{F}$.

La condition $1 \notin W(P_S P_\Sigma)$ de la proposition suivante est une nouvelle caractérisation des paires annihilantes.

Proposition 2.4.4. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. (S, Σ) est une paire annihilante
2. $\text{Im}P_S \cap \text{Im}P_\Sigma = \{0\}$
3. $1 \notin W(P_S P_\Sigma)$.

Démonstration. On a que $1 \in W(P_S P_\Sigma)$ si et seulement si il existe $h \in H$ tel que $\|h\| = 1$ et $\langle P_S P_\Sigma h, h \rangle = 1$. C'est équivalent à l'existence d'un certain $h \in H$ tel que $\|P_S P_\Sigma h\| = \|h\| = 1$. Cette dernière assertion est équivalente à la négation de (2). \square

Les conditions e, f, g, h et i de la proposition suivante sont des nouvelles caractérisations des paires fortement annihilantes.

Proposition 2.4.5. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- a. (S, Σ) est une paire fortement annihilante
- b. $r(P_S P_\Sigma) < 1$
- c. $\text{Im} P_S \cap \text{Im} P_\Sigma = \{0\}$ and $\cos(P_S, P_\Sigma) < 1$
- d. $1 \notin \sigma(P_S P_\Sigma)$.
- e. $1 \notin \overline{W(P_S P_\Sigma)}$
- f. $\omega(P_S P_\Sigma) < 1$
- g. pour tout $\alpha \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $\omega(\text{Re}(\exp(-i\alpha) P_S P_\Sigma)) < \cos(\alpha)$
- h. il existe $\alpha \in [0, \frac{\pi}{3}]$ tel que $\omega(\text{Re}(\exp(-i\alpha) P_S P_\Sigma)) < \cos(\alpha)$
- i. il existe $\theta < \frac{\pi}{6}$ tel que $W(P_S P_\Sigma) \subset \{z \in \mathbb{C}, |\arg(1 - z)| \leq \theta\} \setminus \{1\}$.

Démonstration. “ $d \Leftrightarrow e$ ”. D’après le Théorème 2.2.7, $1 \in \overline{W(P_S P_\Sigma)}$ si et seulement si $\mathcal{E}(1) \subset \overline{W(P_S P_\Sigma)}$, si et seulement si $1 \in \sigma(P_S P_\Sigma)$.

“ $b \Leftrightarrow f$ ”. C’est une conséquence directe de la Proposition 2.3.1.

“ $d \Rightarrow g$ ”. C’est une conséquence du Corollaire 2.3.4.

“ $g \Rightarrow h$ ” C’est trivial.

“ $i \Rightarrow d$ ” C’est une conséquence du Corollaire 2.3.4.

“ $c \Leftrightarrow i$ ” C’est une conséquence du Lemme 2.2.31, et de la proposition précédente. \square

Chapitre 3

Différences de projections orthogonales

Le but de ce chapitre est de présenter une caractérisation des opérateurs qui s'écrivent comme une différence de deux projections orthogonales. Notre caractérisation, qui est semblable à la caractérisation de Davis [Dav58], utilise le théorème des deux sous espaces de Halmos (on rappelle que le résultat de Halmos est postérieur à celui de Davis). Elle permet via l'interprétation géométrique de la construction de reconstruire explicitement toutes les projections P et Q qui réalisent $T = P - Q$. Comme application, on va écrire certains opérateurs unitaires (dont le shift bilatéral) comme combinaison linéaire de projections orthogonales. Comme autre application, on va démontrer une extension du principe d'incertitude de Erb, en utilisant le fait que l'opérateur de multiplication par la variable $M_x \in L^2([-1, 1], w)$ est une différence de projections orthogonales.

3.1 A propos d'un analogue du résultat de Crimmins pour les différences de projections orthogonales

Le but de cette section est d'expliquer qu'il est impossible de trouver un analogue du résultat de Crimmins pour des différences de deux projections orthogonales. Le point de départ est une caractérisation des opérateurs qui peuvent s'écrire comme un produit de deux projections orthogonales. Ce résultat est dû à Crimmins (on peut trouver ce résultat dans le papier de Radjavi et Williams [RW69, Théorème 8]).

Théorème 3.1.1 (Crimmins). *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe deux projections orthogonales P et Q telles que $T = PQ$,*

2. $T^2 - TT^*T = 0$.

Naturellement on peut se demander si il existe un analogue de ce résultat pour caractériser les différences de projections orthogonales. Avant de discuter plus en détail de cette question, on va mentionner (à titre d'information) une autre caractérisation des opérateurs qui peuvent d'écrire comme un produit de projections orthogonales.

Théorème 3.1.2 (Sebestyen [Seb90]). *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe deux projections orthogonales P et Q telles que $T = PQ$,*
2. *pour tout $x \in \text{Ker}(T)^\perp$, on a que $\|Tx\|^2 = \langle Tx, x \rangle$.*

On peut trouver des preuves courtes, élégantes et modernes de ces deux résultats dans [CM11, Théorème 3.1].

Maintenant on va expliquer pourquoi la situation est plus délicate pour des différences de projections orthogonales. Si on note par $p_1(x, y)$ le polynôme non commutatif défini par $p_1(x, y) = x^2 - xyx$, on peut reformuler le Théorème 3.1.1 de la manière suivante.

Corollaire 3.1.3. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. L'opérateur T peut s'écrire comme produit de deux projections orthogonales si et seulement si $p_1(T, T^*) = 0$.*

A priori, si on cherche à transposer le résultat de Crimmins aux différences de projections orthogonales, il suffirait de trouver un polynôme non commutatif $p(x, y)$ tel que $p(T, T^*) = 0$ si et seulement si T peut s'écrire comme différences de projections. Malheureusement ce n'est pas possible. Il faut d'abord remarquer que si T est une différence de projections orthogonales, alors T est autoadjoint. Si ce polynôme $p(x, y)$ existe, alors le polynôme a une variable $q(x)$ défini par $q(x) = p(x, x)$ vérifie, pour tous les opérateurs T qui s'écrivent comme différence de projection, que $q(T) = 0$. Par le théorème de l'application spectrale (spectral mapping theorem) on obtient pour toute différence de projections $P - Q$ que :

$$q(\sigma(P - Q)) = \sigma(q(P - Q)) = \sigma(0) = \{0\}.$$

Or il est assez facile de construire, à l'aide du théorème d'Halmos et du théorème spectral pour les opérateurs autoadjoints, deux projections P et Q telles que $\sigma(P - Q) = [-1, 1]$. Cependant le lecteur qui n'est pas familiarisé avec ces deux résultats peut regarder l'exemple 3.4.4 pour une construction explicite de telles projections. Si on prend une différence de projections telle que $\sigma(P - Q) = [-1, 1]$, on obtient que le polynôme $q(x)$ doit s'annuler sur $[-1, 1]$. Donc le polynôme q est nul. En résumé, si il existe un polynôme non commutatif $p(x, y)$ tel que $p(T, T^*) = 0$ pour toutes les opérateurs T qui s'écrivent comme différence de projections orthogonales, alors $p(T, T^*)$ s'annule aussi pour tous les opérateurs autoadjoints.

En conclusion on ne peut pas trouver un analogue de du résultat de Crimmins sans faire intervenir d'autres opérateurs que T et T^* .

3.2 Différences de projections orthogonales en dimension 2

Comme nous l'avons vu précédemment, le Théorème des deux sous-espaces d'Halmos nous dit que la partie en position générique de deux projections orthogonales se comporte comme en dimension 2. Il est donc important de comprendre ce qui se passe en dimension 2 avant d'envisager de comprendre ce qui se passe en dimension infinie.

Soit H un espace de Hilbert généré par deux vecteurs orthonormaux e_1 et e_2 . On note M la droite engendré par le vecteur e_1 . Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On note N la droite engendrée par le vecteur $\cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$. Les droites M et N forment un angle (aigu) θ entre elles. La bissectrice Δ de M et N est la droite qui va couper cet angle en deux, i.e. Δ est la droite générée par le vecteur $\cos(\frac{\theta}{2})e_1 + \sin(\frac{\theta}{2})e_2$. On note P_Δ la projection orthogonale sur la droite Δ . On a que les matrices de P, Q, P_Δ dans la base (e_1, e_2) sont

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & \sin(\theta)^2 \end{pmatrix},$$

$$P_\Delta = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2})^2 & \cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2}) & \sin(\frac{\theta}{2})^2 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $I - P_\Delta$ est la projection sur l'orthogonal de Δ , que l'on notera Δ^\perp . Cette droite est la bissectrice de l'angle obtus formé par les droites M et N . La matrice de $T = P - Q$ dans la base (e_1, e_2) est

$$T = \begin{pmatrix} \sin(\theta)^2 & -\cos(\theta)\sin(\theta) \\ -\sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)^2 \end{pmatrix}.$$

La matrice T est Hermitienne, en effet $T^* = P^* - Q^* = P - Q = T$. On peut diagonaliser cette matrice dans une base orthonormée. En faisant un dessin de la situation, il est facile de voir que les vecteurs $f_1 = \cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})e_1 + \sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})e_2$ et $f_2 = \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})e_1 + \sin(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})e_2$ forment une base orthonormée dans laquelle la matrice T est diagonale. Dans cette base, la matrice de T s'écrit

$$T = \begin{pmatrix} \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

A partir de cet expression de T , il est facile de voir que l'adhérence de l'image de la partie positive de T (autrement dit le sous-espace $\text{Im}(\frac{T+|T|}{2})$) est le sous-espace engendré par f_1 et l'adhérence de l'image de la partie négative de T (autrement dit le sous-espace $\text{Im}(\frac{T-|T|}{2})$) est le sous-espace engendré par f_2 . Dans la base (f_1, f_2) on a que les matrices P et Q s'écrivent comme ceci

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})^2 & \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) & \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})^2 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})^2 & \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}) & \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})^2 \end{pmatrix}.$$

La matrice de la projection orthogonale sur la bissectrice Δ de M et N dans base (f_1, f_2) s'écrit comme ceci

$$\begin{aligned} P_{\Delta} &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4})^2 & \cos(\frac{\pi}{4}) \sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4})^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour simplifier les notations, on va noter Pos le sous-espace $\overline{\text{Im}(\frac{T+|T|}{2})}$ et Neg le sous-espace $\overline{\text{Im}(\frac{T-|T|}{2})}$. Si on utilise la représentation matricielle des opérateur $T, P_{Pos}, P_{Neg}, P_{\Delta}$ dans la base (f_1, f_2) , on obtient que

$$\begin{aligned} (I - P_{\Delta})TP_{Pos}P_{\Delta} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sin(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & -\sin(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De la même manière on obtient que

$$\begin{aligned} (I - P_{\Delta})TP_{Neg}P_{\Delta} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & -\sin(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sin(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & -\sin(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En résumé on a obtenu que (voir la Figure 3.1)

$$(I - P_{\Delta})TP_{Pos}P_{\Delta} = (I - P_{\Delta})TP_{Neg}P_{\Delta}.$$

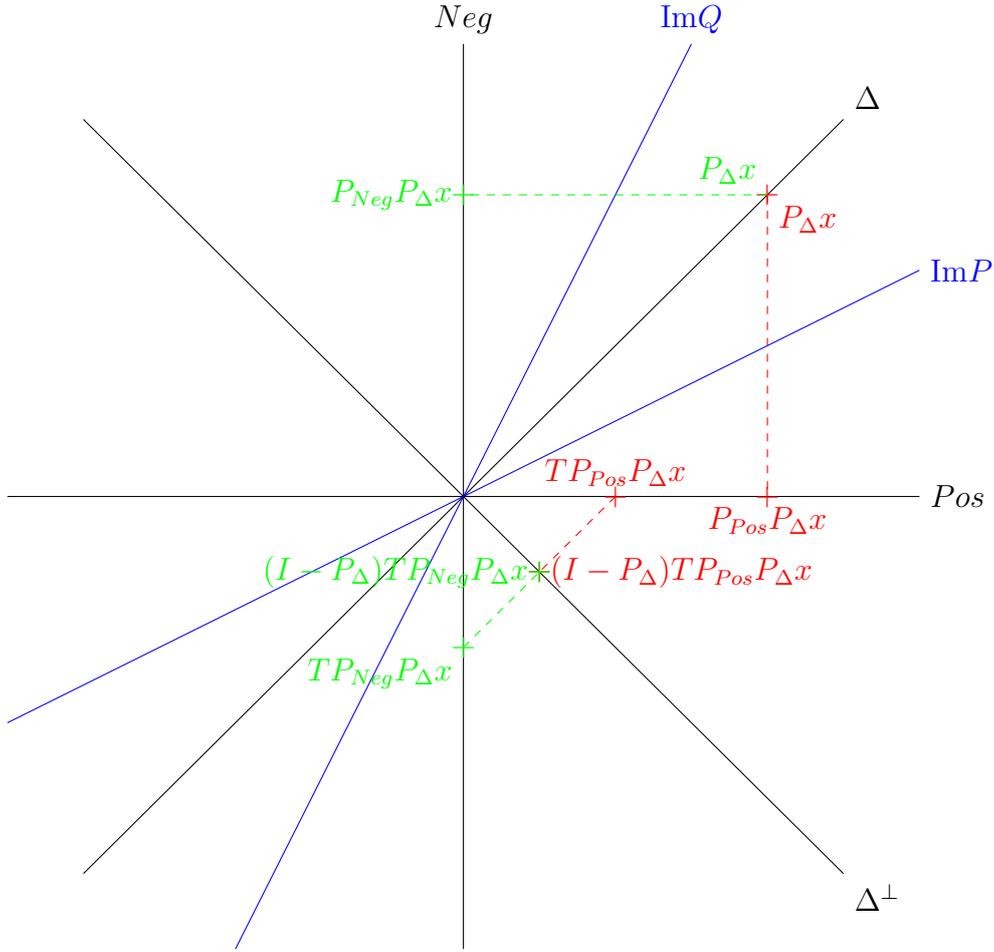


FIGURE 3.1

Il s'agit de l'équation que l'on va généraliser en dimension infinie. Le premier problème ici est que la définition de Δ dépend de P et Q . Il va falloir s'affranchir de cette dépendance, il se peut que l'on ne sache pas au départ si T est une différence de projections orthogonales, ou bien il se peut aussi que l'on ne connaisse pas P et Q .

Pour analyser la situation on va prendre un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ (toujours en dimension 2). Supposons que $-I \leq T \leq I$ (sinon $T \neq P - Q$). On note Pos le sous-espace $\overline{\text{Im}(\frac{T+|T|}{2})}$ et Neg le sous-espace $\overline{\text{Im}(\frac{T-|T|}{2})}$. Pour construire la droite Δ on va vouloir prendre une bissectrice de Pos et Neg . Pour pouvoir prendre une bissectrice de Pos et Neg , il faut d'abord supposer que ces deux sous-espaces sont de dimension 1. Dans la situation précédente, on a pris 2 droites M et N , on a pu choisir de manière canonique Δ et prenant la bissectrice de l'angle le plus petit. Comme Pos et Neg sont des droites orthogonales, on n'a pas de manière canonique pour choisir Δ . On va voir plus tard que le choix de Δ va influencer sur la reconstruction

de M et N . Une manière plus rapide de se rendre compte que le choix de Δ influe sur M et N est de refaire le même raisonnement que précédemment en intervertissant les rôles de P_Δ et $I - P_\Delta$.

Comme $\dim(Pos) = \dim(Neg) = 1$, il existe deux vecteurs orthonormaux f_1, f_2 tels que f_1 engendre Pos et f_2 engendre Neg . On va définir la projection orthogonale P_Δ dans la base orthonormée (f_1, f_2) par

$$P_\Delta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit la droite Δ comme l'image de P_Δ . Il existe deux nombres $a, b \in [0, 1]$ tels que dans la base (f_1, f_2) on ait que

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}.$$

On a que

$$\begin{aligned} (I - P_\Delta)TP_{Pos}P_\Delta &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De la même manière on obtient que

$$\begin{aligned} (I - P_\Delta)TP_{Neg}P_\Delta &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & -b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} b & b \\ -b & -b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si on suppose que $(I - P_\Delta)TP_{Pos}P_\Delta = (I - P_\Delta)TP_{Neg}P_\Delta$, on obtient que $a = b$. Comme $a \in [0, 1]$, il existe $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $a = \sin(\theta)$. Donc dans la base (f_1, f_2) on a que

$$T = \begin{pmatrix} \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Si on pose P et Q dans la base (f_1, f_2) comme ceci

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})^2 & \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) & \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})^2 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})^2 & \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}) & \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})^2 \end{pmatrix}.$$

on a que $T = P - Q$.

3.3 Position générique et bissectrice entre sous-espaces

Le but de cette section est de préparer l'approche pour la dimension infinie. On a besoin d'introduire quelques notions avant d'attaquer le problème. Dans cette section, H sera un espace de Hilbert quelconque et T désignera un opérateur linéaire borné tel que $-I \leq T \leq I$. On note toujours P et Q les projections orthogonales respectivement sur les sous-espaces M et N . D'après le théorème d'Halmos, on peut décomposer H comme ceci :

$$H = \left((M \cap N) \oplus (M^\perp \cap N^\perp) \right) \oplus (M \cap N^\perp) \oplus (M^\perp \cap N) \oplus \tilde{H}.$$

On a que

$$P = (I \oplus 0) \oplus I \oplus 0 \oplus \tilde{P},$$

$$Q = (I \oplus 0) \oplus 0 \oplus I \oplus \tilde{Q},$$

$$P - Q = (0 \oplus 0) \oplus I \oplus -I \oplus \tilde{P} - \tilde{Q}.$$

Avant d'essayer de faire une décomposition similaire pour T , nous allons avoir besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3.1. *Soient \tilde{P} et \tilde{Q} deux projections en position générique. On a que $-1, 0, 1$ ne sont pas valeurs propres de $\tilde{P} - \tilde{Q}$.*

Démonstration. En utilisant le Théorème d'Halmos 1.1.3, on peut voir que dans un espace de Hilbert $K \oplus K$, $\tilde{P} - \tilde{Q}$ peut s'écrire de la manière suivante

$$\tilde{P} - \tilde{Q} \sim \begin{pmatrix} S^2 & -CS \\ -SC & -S^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & -C \\ -C & -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

On définit U et $|T|$ comme ceci

$$U = \begin{pmatrix} S & -C \\ -C & -S \end{pmatrix}, |T| = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

L'opérateur U est unitaire, en effet on a que

$$\begin{aligned}
 UU^* &= U^*U \\
 &= \begin{pmatrix} S & -C \\ -C & -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & -C \\ -C & -S \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} S^2 + C^2 & -SC + CS \\ -CS + SC & S^2 + C^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

La dernière ligne de calcul s'obtient en se rappelant que S commute avec C (puisque $S = (I - C^2)^{\frac{1}{2}}$), et que $C^2 + S^2 = I$.

Soit $h \oplus k \in K \oplus K$. Supposons que $U|T|(h \oplus k) = 0 \oplus 0$. En composant par U^* de chaque coté de l'égalité on obtient que $|T|(h \oplus k) = 0 \oplus 0$. Donc on a que $Sh = 0$ et $Sk = 0$. Comme S est injectif on a que $h = 0$ et $k = 0$. Donc $0 \notin \sigma_p(U|T|)$. Donc 0 n'est pas valeur propre de $\tilde{P} - \tilde{Q}$.

Supposons que $U|T|(h \oplus k) = h \oplus k$. En composant par U^* de chaque coté de l'égalité on obtient que $|T|(h \oplus k) = U^*(h \oplus k)$. Donc on a que $Sh = Sh - Ch$ et $Sk = -Ch - Sk$. En simplifiant la première égalité on obtient que $Ch = 0$, et comme C est injectif on en déduit que $h = 0$. En remplaçant h par 0 dans la deuxième égalité on obtient que $Sk = -Sk$, et comme S est injectif on en déduit que $k = 0$. Donc $1 \notin \sigma_p(U|T|)$. Donc 1 n'est pas valeur propre de $\tilde{P} - \tilde{Q}$.

Supposons que $U|T|(h \oplus k) = -(h \oplus k)$. En composant par U^* de chaque coté de l'égalité on obtient que $|T|(h \oplus k) = -U^*(h \oplus k)$. Donc on a que $Sh = -Sh + Ch$ et $Sk = Ch + Sk$. En simplifiant la deuxième égalité on obtient que $Ch = 0$, et comme C est injectif on en déduit que $h = 0$. En remplaçant h par 0 dans la première égalité on obtient que $Sk = -Sk$, et comme S est injectif on en déduit que $k = 0$. Donc $-1 \notin \sigma_p(U|T|)$. Donc -1 n'est pas valeur propre de $\tilde{P} - \tilde{Q}$. \square

Si T est un opérateur autoadjoint tel que $-I \leq T \leq I$, on peut décomposer H comme ceci :

$$H = \text{Ker}(T) \oplus \text{Ker}(I - T) \oplus \text{Ker}(I + T) \oplus \hat{H},$$

avec \hat{H} étant le sous-espace orthogonal au sous-espaces engendrés par $\text{Ker}(T)$, $\text{Ker}(I - T)$ et $\text{Ker}(I + T)$. Dans cette décomposition on a que

$$T = 0 \oplus I \oplus -I \oplus \tilde{T},$$

où \tilde{T} est la restriction de T à \hat{H} . Si T peut s'écrire comme différence de projection orthogonales (i.e. $T = P - Q$), comme $-1, 0, 1 \notin \sigma_p(T)$ on peut identifier $(M \cap N) \oplus (M^\perp \cap N^\perp)$ à $\text{Ker}(T)$, $M \cap N^\perp$ à $\text{Ker}(I - T)$, $M^\perp \cap N$ à $\text{Ker}(I + T)$ et \hat{H} à \hat{H} . Cette identification justifie la définition suivante.

Définition 3.3.2. Soit T un opérateur autoadjoint tel que $-I \leq T \leq I$. On dit que T est en position générique si $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(I - T) = \text{Ker}(I + T) = \{0\}$.

Si T est un opérateur autoadjoint tel que $-I \leq T \leq I$, on va voir que sa partie qui n'est pas en position générique est automatiquement une différence de projections orthogonales, i.e. T restreint à $\text{Ker}(T) \oplus \text{Ker}(I - T) \oplus \text{Ker}(I + T)$ peut s'écrire sous la forme $P - Q$. Supposons que la partie en position générique \tilde{H} de T soit réduite à $\{0\}$. Soient S_1 et S_2 deux sous-espaces de H tels que $\text{Ker}(T) = S_1 \oplus S_2$. Alors H peut se décomposer ainsi

$$H = S_1 \oplus S_2 \oplus \text{Ker}(I - T) \oplus \text{Ker}(I + T).$$

On peut donc écrire T comme ceci

$$T = 0 \oplus 0 \oplus I \oplus -I.$$

Si on pose P et Q de cette façon

$$\begin{aligned} P &= I \oplus 0 \oplus I \oplus 0 \\ Q &= I \oplus 0 \oplus 0 \oplus I, \end{aligned}$$

on a que $T = P - Q$, où P est la projection orthogonale sur $M = S_1 \oplus \text{Ker}(I - T)$ et Q la projection orthogonales sur $N = S_1 \oplus \text{Ker}(I + T)$.

Si T est un opérateur autoadjoint tel que $-I \leq T \leq I$, seule la partie en position générique peut poser problème pour pouvoir écrire T comme différence de projections orthogonales. Nous nous concentrerons sur ce point dans la section suivante. Pour l'instant nous allons avoir besoin de définir la notion de bissectrice entre deux sous-espaces orthogonaux. Il n'y aura pas de choix canonique pour cette bissectrice. Déjà en dimension 2, si e_1, e_2 sont des vecteurs orthogonaux, les droites engendrées par $e_1 + e_2$ et $e_1 - e_2$ sont deux bissectrices distinctes des droites engendrées par e_1 et e_2 .

Définition 3.3.3. Soit S_1 et S_2 deux sous-espaces orthogonaux de H . Si il existe une isométrie surjective $V : S_1 \rightarrow S_2$, on note $P_{\Delta_{S_1, S_2}(V)}$ la projection orthogonale définie sur $H = S_1 \oplus S_2 \oplus (S_1^\perp \cap S_2^\perp)$ par

$$P_{\Delta_{S_1, S_2}(V)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & V^* & 0 \\ V & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\Delta_{S_1, S_2}(V)$ l'image de $P_{\Delta_{S_1, S_2}(V)}$. On appelle ce sous-espace la bissectrice des sous-espaces S_1 et S_2 associés à l'isométrie surjective V .

Quand il n'y aura pas de risque de confusion on omettra de préciser les sous-espaces S_1 et S_2 et on notera la bissectrice associée à l'isométrie surjective V par $\Delta(V)$. Dans l'exemple précédent en dimension 2, si on note V_1 et V_2 les isométries surjectives entre le sous-espace engendré par e_1 vers le sous-espace engendré par e_2 définies par $V_1(e_1) = e_2$ et $V_2(e_1) = -e_2$, on obtient que $\Delta(V_1)$ est la droite engendrée par $e_1 + e_2$ et $\Delta(V_2)$ est la droite engendrée par $e_1 - e_2$.

3.4 Quelques caractérisations des opérateurs qui s'écrivent comme différence de projections orthogonales en position générique

Le but de cette section est de donner une caractérisation des opérateurs $T \in \mathcal{B}(H)$ en position générique qui s'écrivent comme différence de deux projections orthogonales. Dans cette section on suppose que T est en position générique, et on note $Pos = \overline{\text{Im}(\frac{T+|T|}{2})}$ et $Neg = \overline{\text{Im}(\frac{T-|T|}{2})}$. Comme T est en position générique, en particulier $\text{Ker}(T) = \{0\}$, et T est autoadjoint, donc Pos et Neg sont des sous-espaces orthogonaux et de plus on a que $H = Pos \oplus Neg$. Voici le résultat principal de cette section

Proposition 3.4.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur en position générique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe deux projections orthogonales en position générique P et Q telles que $T = P - Q$,*
2. *il existe une isométrie surjective $V : Pos \rightarrow Neg$ telle que*

$$(I - P_{\Delta(V)})TP_{Pos}P_{\Delta(V)} = (I - P_{\Delta(V)})TP_{Neg}P_{\Delta(V)}.$$

Démonstration. Montrons que $1 \Rightarrow 2$. Supposons qu'il existe deux projections orthogonales P et Q en position générique telles que $T = P - Q$. D'après le Théorème 1.1.2, il existe une isométrie surjective $V : M \rightarrow M^\perp$ et deux opérateurs $C, S \in \mathcal{B}(M)$ tels que dans $H = M \oplus M^\perp$ on ait

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} C^2 & CSV^* \\ VSC & VS^2V^* \end{pmatrix}.$$

Donc on a que

$$T = P - Q = \begin{pmatrix} S^2 & -CSV^* \\ -VSC & -VS^2V^* \end{pmatrix}.$$

On pose $A = (I + C)^{\frac{1}{2}}$ et $B = (I - C)^{\frac{1}{2}}$, et on pose dans $H = M \oplus M^\perp$ l'opérateur

$$W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A + B & (-A + B)V^* \\ V(A - B) & V(A + B)V^* \end{pmatrix}.$$

On a que

$$\begin{aligned} W^*W &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} A + B & (A - B)V^* \\ V(-A + B) & V(A + B)V^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A + B & (-A + B)V^* \\ V(A - B) & V(A + B)V^* \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2A^2 + 2B^2 & 0 \\ 0 & V(2A^2 + 2B^2)V^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.4. Quelques caractérisations des opérateurs qui s'écrivent comme différence de projections orthogonales en position générique

La dernière ligne de calcul s'obtient en utilisant le fait que $A^2 + B^2 = I + C + I - C = 2I$. De même on a que

$$\begin{aligned} WW^* &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} A+B & (-A+B)V^* \\ V(A-B) & V(A+B)V^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+B & (A-B)V^* \\ V(-A+B) & V(A+B)V^* \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2A^2 + 2B^2 & 0 \\ 0 & V(2A^2 + 2B^2)V^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc W est unitaire. On a aussi que

$$\begin{aligned} W^* \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & -VSV^* \end{pmatrix} W &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} A+B & (A-B)V^* \\ V(-A+B) & V(A+B)V^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & -VSV^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+B & (-A+B)V^* \\ V(A-B) & V(A+B)V^* \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} A+B & (A-B)V^* \\ V(-A+B) & V(A+B)V^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(A+B) & -S(A-B)V^* \\ -VS(A-B) & -VS(A+B)V^* \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} S((A+B)^2 - (A-B)^2) & -2S((A-B)(A+B))V^* \\ -2VS((A-B)(A+B)) & -VS((A+B)^2 - (A-B)^2)V^* \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4SAB & -2S(A^2 - B^2)V^* \\ -2VS(A^2 - B^2) & -4VSABV^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S^2 & -CSV^* \\ -VSC & -VS^2V^* \end{pmatrix} \\ &= T. \end{aligned}$$

Les dernières lignes de calcul s'obtiennent en utilisant le fait que S commute avec A et B , et que $A^2 - B^2 = I + C - I + C = 2C$ et que $AB = \sqrt{(I+C)(I-C)} = \sqrt{I-C^2} = \sqrt{S^2} = S$.

Comme $S \geq 0$ on a que

$$P_{Pos} = W^* \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W, \quad P_{Neg} = W^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} W.$$

On pose $\tilde{V} : H \rightarrow H$ l'opérateur unitaire défini dans $H = M \oplus M^\perp$ par

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} 0 & -V^* \\ V & 0 \end{pmatrix}.$$

On va montrer que la restriction de \tilde{V} à Pos , $\tilde{V}|_{Pos} : Pos \rightarrow Neg$ est l'isométrie surjective qui satisfait la condition 2. Tout d'abord il s'agit de vérifier que $\tilde{V}(Pos) =$

Neg. Il suffit de montrer que $P_{Neg}\tilde{V}P_{Pos} = \tilde{V}P_{Pos}$ et $P_{Pos}\tilde{V}P_{Neg} = \tilde{V}P_{Neg}$. On a que

$$\begin{aligned}
 & 4W\tilde{V}W^* \\
 &= \begin{pmatrix} A+B & (-A+B)V^* \\ V(A-B) & V(A+B)V^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -V^* \\ V & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+B & (A-B)V^* \\ V(-A+B) & V(A+B)V^* \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A+B & (-A+B)V^* \\ V(A-B) & V(A+B)V^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A-B & -(A+B)V^* \\ V(A+B) & V(A-B)V^* \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -((A+B)^2 + (A-B)^2)V^* \\ V((A+B)^2 + (A-B)^2) & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -V^* \\ V & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Donc on a que

$$\begin{aligned}
 W\tilde{V}P_{Pos}W^* &= W\tilde{V}W^*WP_{Pos}W^* \\
 &= W \begin{pmatrix} 0 & -V^* \\ V & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^* \\
 &= W \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V & 0 \end{pmatrix} W^*,
 \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
 WP_{Neg}\tilde{V}P_{Pos}W^* &= WP_{Neg}W^*W\tilde{V}W^*WP_{Pos}W^* \\
 &= W \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -V^* \\ V & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^* \\
 &= W \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V & 0 \end{pmatrix} W^* \\
 &= W \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V & 0 \end{pmatrix} W^*.
 \end{aligned}$$

On obtient $P_{Neg}\tilde{V}P_{Pos} = \tilde{V}P_{Pos}$, et de la même façon $P_{Pos}\tilde{V}P_{Neg} = \tilde{V}P_{Neg}$. De plus, on a que

$$P_{\Delta(V)} = \frac{1}{2}W^* \begin{pmatrix} I & V^* \\ V & I \end{pmatrix} W.$$

3.4. Quelques caractérisations des opérateurs qui s'écrivent comme différence de projections orthogonales en position générique

On a que

$$\begin{aligned}
& W(I - P_{\Delta(V)})TP_{Pos}P_{\Delta(V)}W^* \\
&= W(I - P_{\Delta(V)})W^*WTW^*WP_{Pos}W^*WP_{\Delta(V)}W^* \\
&= \frac{1}{4}W \begin{pmatrix} I & -V^* \\ -V & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & -VSV^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V^* \\ V & I \end{pmatrix} W^* \\
&= \frac{1}{4}W \begin{pmatrix} I & -V^* \\ -V & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V^* \\ V & I \end{pmatrix} W^* \\
&= \frac{1}{4}W \begin{pmatrix} I & -V^* \\ -V & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & SV^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^* \\
&= \frac{1}{4}W \begin{pmatrix} S & SV^* \\ -VS & -VSV^* \end{pmatrix} W^*.
\end{aligned}$$

De même on a que

$$\begin{aligned}
& W(I - P_{\Delta(V)})TP_{Neg}P_{\Delta(V)}W^* \\
&= W(I - P_{\Delta(V)})W^*WTW^*WP_{Neg}W^*WP_{\Delta(V)}W^* \\
&= \frac{1}{4}W \begin{pmatrix} I & -V^* \\ -V & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & -VSV^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V^* \\ V & I \end{pmatrix} W^* \\
&= \frac{1}{4}W \begin{pmatrix} I & -V^* \\ -V & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -VSV^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V^* \\ V & I \end{pmatrix} W^* \\
&= \frac{1}{4}W \begin{pmatrix} I & -V^* \\ -V & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -VS & -VSV^* \end{pmatrix} W^* \\
&= \frac{1}{4}W \begin{pmatrix} S & SV^* \\ -VS & -VSV^* \end{pmatrix} W^*.
\end{aligned}$$

Donc on a bien que $(I - P_{\Delta(V)})TP_{Pos}P_{\Delta(V)} = (I - P_{\Delta(V)})TP_{Neg}P_{\Delta(V)}$.

Montrons que $2 \Rightarrow 1$. Il existe deux opérateurs $A \in \mathcal{B}(Pos)$ et $B \in \mathcal{B}(Neg)$ tels que $0 \leq A \leq I$, $0 \leq B \leq I$ et dans $H = Pos \oplus Neg$, T s'écrit

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}.$$

On a que

$$\begin{aligned}
 (I - P_{\Delta(V)})TP_{Pos}P_{\Delta(V)} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} I & -V^* \\ -V & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V^* \\ V & I \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} I & -V^* \\ -V & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V^* \\ V & I \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} I & -V^* \\ -V & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & AV^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} A & AV^* \\ -VA & -VA V^* \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

On a aussi que

$$\begin{aligned}
 (I - P_{\Delta(V)})TP_{Neg}P_{\Delta(V)} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} I & -V^* \\ -V & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V^* \\ V & I \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} I & -V^* \\ -V & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V^* \\ V & I \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} I & -V^* \\ -V & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -BV & -B \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} V^*BV & V^*B \\ -BV & -B \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Comme $(I - P_{\Delta(V)})TP_{Pos}P_{\Delta(V)} = (I - P_{\Delta(V)})TP_{Neg}P_{\Delta(V)}$, on en déduit que $B = VA V^*$. Donc dans $H = Pos \oplus Neg$, on a que

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -VA V^* \end{pmatrix}.$$

Comme $0 \leq A \leq I$, il existe un opérateur $\Theta \in \mathcal{B}(Pos)$ tel que $0 \leq \Theta \leq I$ et $\sin(\Theta) = A$. On définit P et Q dans $H = Pos \oplus Neg$ comme ceci

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\Theta}{2})^2 & \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\Theta}{2}) \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\Theta}{2}) V^* \\ V \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\Theta}{2}) \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\Theta}{2}) & V \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\Theta}{2})^2 V^* \end{pmatrix}, \\
 Q &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2})^2 & \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2}) \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2}) V^* \\ V \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2}) \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2}) & V \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2})^2 V^* \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Comme $\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\Theta}{2}) = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2})$ et $\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2}) = \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\Theta}{2})$, on a que $\sin(\frac{\pi}{4} +$

3.4. Quelques caractérisations des opérateurs qui s'écrivent comme différence de projections orthogonales en position générique

$\frac{\Theta}{2}) \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2}) = \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\Theta}{2}) \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\Theta}{2})$. De plus on a que

$$\begin{aligned} \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\Theta}{2})^2 - \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2})^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(\frac{\Theta}{2}) + \sin(\frac{\Theta}{2})) \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(\frac{\Theta}{2}) - \sin(\frac{\Theta}{2})) \right)^2 \\ &= 2 \sin(\frac{\Theta}{2}) \cos(\frac{\Theta}{2}) \\ &= \sin(\Theta). \end{aligned}$$

On a aussi que

$$\begin{aligned} \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\Theta}{2})^2 - \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2})^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(\frac{\Theta}{2}) - \sin(\frac{\Theta}{2})) \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(\frac{\Theta}{2}) + \sin(\frac{\Theta}{2})) \right)^2 \\ &= -2 \sin(\frac{\Theta}{2}) \cos(\frac{\Theta}{2}) \\ &= -\sin(\Theta). \end{aligned}$$

Donc on a que

$$P - Q = \begin{pmatrix} \sin(\Theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\Theta) \end{pmatrix},$$

et donc $T = P - Q$. □

Dans son papier [Dav58], Davis donne la caractérisation suivante des opérateurs qui s'écrivent comme différence de projections orthogonales.

Théorème 3.4.2 ([Dav58]). *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Alors T est une différence de projections orthogonales si et seulement si $-I \leq T \leq I$ et si l'opérateur T restreint à $\overline{\text{Im}}(I - T^2)$ que l'on note $T_{\overline{\text{Im}}(I - T^2)}$ est unitairement équivalent à $-T_{\overline{\text{Im}}(I - T^2)}$.*

Autrement dit, si T est en position générique et si il existe un opérateur unitaire $W \in \mathcal{B}(H)$ tel que $T = -WTW^*$, alors T est une différence de projection orthogonales. Si l'opérateur W vérifie $T = -WTW^*$ mais si $W \neq W^*$, alors W n'est pas directement utilisable dans la reconstruction de P et Q . Par contre si l'opérateur $V : \text{Pos} \rightarrow \text{Neg}$ satisfait la condition (2) de la Proposition 3.4.1, alors on peut reconstruire directement P et Q à l'aide de V .

Dans cette section on va reformuler la Proposition 3.4.1 en termes d'existence de sous-espaces invariants d'une certaine forme pour $|T|$ et T^2 .

Corollaire 3.4.3. *Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur en position générique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe deux projections orthogonales en position générique P et Q telles que $T = P - Q$,*

2. il existe une isométrie surjective $V : Pos \rightarrow Neg$ telle que

$$(I - P_{\Delta(V)})|T|P_{\Delta(V)} = 0,$$

3. il existe une isométrie surjective $V : Pos \rightarrow Neg$ telle que $\Delta(V)$ soit un sous-espace invariant de $|T|$.

4. il existe une isométrie surjective $V : Pos \rightarrow Neg$ telle que

$$(I - P_{\Delta(V)})T^2P_{\Delta(V)} = 0,$$

5. il existe une isométrie surjective $V : Pos \rightarrow Neg$ telle que $\Delta(V)$ soit un sous-espace invariant de T^2 .

Démonstration. Comme T est en position générique, il existe $A \in \mathcal{B}(Pos)$ et $B \in \mathcal{B}(Neg)$ tels que $0 \leq A \leq I$ et $0 \leq B \leq I$, et dans $H = Pos \oplus Neg$ on puisse écrire

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}, \quad |T| = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & B^2 \end{pmatrix}.$$

Les équivalences (2) \Leftrightarrow (3) et (4) \Leftrightarrow (5) sont évidentes. Montrons (1) \Leftrightarrow (2). D'après la Proposition 3.4.1, 1 est équivalent à l'existence d'une isométrie surjective $V : Pos \rightarrow Neg$ telle que

$$(I - P_{\Delta(V)})TP_{Pos}P_{\Delta(V)} = (I - P_{\Delta(V)})TP_{Neg}P_{\Delta(V)}.$$

En passant le membre de droite à gauche on obtient que

$$(I - P_{\Delta(V)})T(P_{Pos} - P_{Neg})P_{\Delta(V)} = 0.$$

Or dans $H = Pos \oplus Neg$ on peut écrire que

$$\begin{aligned} T(P_{Pos} - P_{Neg}) &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \\ &= |T|, \end{aligned}$$

d'où (1) \Leftrightarrow (2).

Montrons que (2) \Rightarrow (4). On a que

$$\begin{aligned} (I - P_{\Delta(V)})|T|P_{\Delta(V)} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -I & V^* \\ V & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V^* \\ V & I \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -I & V^* \\ V & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & AV^* \\ BV & B \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -A + V^*BV & -AV^* + V^*B \\ VA - BV & VAV^* - B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.4. Quelques caractérisations des opérateurs qui s'écrivent comme différence de projections orthogonales en position générique

Donc $B = VAV^*$. On a que

$$\begin{aligned} (I - P_{\Delta(V)})T^2P_{\Delta(V)} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -I & V^* \\ V & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & VA^2V^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V^* \\ V & I \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -A^2 + A^2 & -A^2V^* + A^2V^* \\ VA - VA & VAV^* - VAV^* \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc (4) est vrai.

Montrons que (4) \Rightarrow (2). On a que

$$\begin{aligned} (I - P_{\Delta(V)})T^2P_{\Delta(V)} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -I & V^* \\ V & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V^* \\ V & I \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -A^2 + V^*B^2V & -A^2V^* + V^*B^2 \\ VA^2 - B^2V & VA^2V^* - B^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où $B^2 = VA^2V^*$. Comme $0 \leq A$ et $0 \leq B$, on peut en déduire que $B = VAV^*$. Donc on a que

$$\begin{aligned} (I - P_{\Delta(V)})|T|P_{\Delta(V)} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -I & V^* \\ V & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & VAV^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V^* \\ V & I \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -I & V^* \\ V & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & AV^* \\ VA & VAV^* \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -A + A & -AV^* + AV^* \\ VA - VA & VAV^* - VAV^* \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc on a bien (2). □

On va illustrer ce résultat par un exemple.

Exemple 3.4.4 (L'opérateur de multiplication par la variable). On se place dans $H = L^2([-1, 1])$. On va étudier $T = M_x$ défini pour tout $f \in L^2([-1, 1])$ par $M_x f(x) = xf(x)$. On a que $-I \leq M_x \leq I$ et $\text{Ker}(M_x) = \text{Ker}(I - M_x) = \text{Ker}(I + M_x) = \{0\}$. Donc M_x est en position générique. On a que $|M_x| = M_{|x|}$, $\frac{|M_x| + M_x}{2} = M_{\frac{|x|+x}{2}} = M_{x\mathbb{1}_{[0,1]}}$ et $\frac{|M_x| - M_x}{2} = M_{\frac{|x|-x}{2}} = -M_{x\mathbb{1}_{[-1,0]}}$. Donc $\text{Pos} = L^2([0, 1])$ et $\text{Neg} = L^2([-1, 0])$. On pose $V : \text{Pos} \rightarrow \text{Neg}$ définie pour tout $f \in \text{Pos}$ par $Vf(x) = f(-x)$. On a que V est une isométrie surjective et de plus pour tout $f \in \text{Neg}$ on a que $V^*f(x) = f(-x)$. Dans $H = \text{Pos} \oplus \text{Neg}$ on a que

$$\begin{aligned} (I - P_{\Delta(V)})|T|P_{\Delta(V)} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -I & V^* \\ V & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x & 0 \\ 0 & -M_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & V^* \\ V & I \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -I & V^* \\ V & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x & M_xV^* \\ -M_xV & -M_x \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -M_x - V^*M_xV & -M_xV^* - V^*M_x \\ VM_x + M_xV & VM_xV^* + M_x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit $f \in L^2([0, 1])$. On a que

$$\begin{aligned}
 (-M_x - V^*M_xV)(f)(x) &= -xf(x) - V^*M_x(f(-x)) \\
 &= -xf(x) - V^*(xf(-x)) \\
 &= -xf(x) - (-xf(x)) \\
 &= -xf(x) + xf(x) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Donc on a que $-M_x - V^*M_xV = 0$. De même, on montre que $-M_xV^* - V^*M_x = VM_x + M_xV = VM_xV^* + M_x = 0$. Donc on a que $(I - P_{\Delta(V)})|T|P_{\Delta(V)} = 0$, et d'après le Corollaire 3.4.3, on a que M_x peut s'écrire comme différence de projections orthogonales. Si on pose $\theta = \arcsin(x)$, on a que $M_x = M_{\sin(\arcsin(x))} = M_{\sin(\theta)}$. En regardant la preuve de la Proposition 3.4.1, on a que $T = P - Q$ avec dans $H = Pos \oplus Neg$.

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{pmatrix} M_{\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})} & M_{\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}V^* \\ VM_{\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})} & VM_{\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})}V^* \end{pmatrix}, \\
 Q &= \begin{pmatrix} M_{\cos^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})} & M_{\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})}V^* \\ VM_{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})} & VM_{\sin^2(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})}V^* \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

3.5 Le shift bilatéral comme combinaison linéaire de 4 projections orthogonales

Maintenant nous allons exprimer l'opérateur de décalage bilatéral comme combinaison linéaire de 4 projections orthogonales.

Corollaire 3.5.1. *Soit $S : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})$ le shift bilatéral défini pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$ par $Sf(e^{i\theta}) = e^{i\theta}f(e^{i\theta})$. Il existe 4 projections orthogonales P_{Re}, Q_{Re}, P_{Im} et Q_{Im} telles que $S = P_{Re} - Q_{Re} + iP_{Im} - iQ_{Im}$.*

Le shift bilatéral est en fait la multiplication par $e^{i\theta}$, i.e. $S = M_{e^{i\theta}}$.

Démonstration. On a que $S = \text{Re}(S) + i\text{Im}(S)$, avec $\text{Re}(S) = \frac{S+S^*}{2} = M_{\cos(\theta)}$ et $\text{Im}(S) = \frac{S-S^*}{2i} = M_{\sin(\theta)}$. Pour prouver le corollaire, il suffit de montrer que $\text{Re}(S)$ et $\text{Im}(S)$ sont des différences de projections orthogonales. On va commencer par montrer que $\text{Im}(S)$ est une différence de projections orthogonales. Comme $\text{Im}(S) = M_{\sin(\theta)}$, on a que $Pos_{Im} = \{f \in L^2(\mathbb{T}), \mathbb{1}_{\{e^{i\theta}, \arg(e^{i\theta}) \in [0, \pi]\}}f = f\}$ et $Neg_{Im} = \{f \in L^2(\mathbb{T}), \mathbb{1}_{\{e^{i\theta}, \arg(e^{i\theta}) \in [\pi, 2\pi]\}}f = f\}$. On pose $V_{|Im} : Pos_{Im} \rightarrow Neg_{Im}$, tel que pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}$ on ait que $Vf(e^{i\theta}) = f(e^{-i\theta})$. Dans $H = Pos_{Im} \oplus Neg_{Im}$, on a que

$$|M_{\sin(\theta)}| = \begin{pmatrix} M_{\sin(\theta)} & 0 \\ 0 & -M_{\sin(\theta)} \end{pmatrix}.$$

On a que

$$\begin{aligned} & (I - P_{\Delta(V_{Im})}) |T| P_{\Delta(V_{Im})} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -M_{\sin(\theta)} - V_{Im}^* M_{\sin(\theta)} V_{Im} & -M_{\sin(\theta)} V_{Im}^* - V_{Im}^* M_{\sin(\theta)} \\ V_{Im} M_{\sin(\theta)} + M_{\sin(\theta)} V_{Im} & V_{Im} M_{\sin(\theta)} V_{Im}^* + M_{\sin(\theta)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soit $f \in Pos_{Im}$, on a que

$$\begin{aligned} (-M_{\sin(\theta)} - V_{Im}^* M_{\sin(\theta)} V_{Im})(f)(e^{i\theta}) &= -\sin(\theta)f(e^{i\theta}) - V_{Im}^* \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} f(e^{-i\theta}) \right) \\ &= -\sin(\theta)f(e^{i\theta}) - \frac{e^{-i\theta} - e^{i\theta}}{2i} f(e^{i\theta}) \\ &= -\sin(\theta)f(e^{i\theta}) + \sin(\theta)f(e^{i\theta}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc $-M_{\sin(\theta)} - V_{Im}^* M_{\sin(\theta)} V_{Im} = 0$. De la même manière on montre que $-M_{\sin(\theta)} V_{Im}^* - V_{Im}^* M_{\sin(\theta)} = V_{Im} M_{\sin(\theta)} + M_{\sin(\theta)} V_{Im} = V_{Im} M_{\sin(\theta)} V_{Im}^* + M_{\sin(\theta)} = 0$. Donc $(I - P_{\Delta(V_{Im})}) |T| P_{\Delta(V_{Im})} = 0$ et d'après le Corollaire 3.4.3 on a que $M_{\sin(\theta)}$ est une différence de projections orthogonales, avec

$$\begin{aligned} P_{Im} &= \begin{pmatrix} M_{\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})} & M_{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})} V_{Im}^* \\ V_{Im} M_{\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})} & V_{Im} M_{\sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})} V_{Im}^* \end{pmatrix} \\ Q_{Im} &= \begin{pmatrix} M_{\cos^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})} & M_{\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})} V_{Im}^* \\ V_{Im} M_{\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})} & V_{Im} M_{\sin^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})} V_{Im}^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On va s'occuper maintenant de $Re(S)$. On pose $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$. On a que $Re(S) = M_{\cos(\theta)} = M_{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)} = M_{\sin(\alpha)}$. On remarque que $Re(S)$ ressemble beaucoup à $Im(S)$ et les calculs vont être presque les mêmes. On a que

$$\begin{aligned} Pos_{Re} &= \{f \in L^2(\mathbb{T}), \mathbb{1}_{\{e^{i\theta}, \arg(e^{i\theta}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}} f = f\} \\ Neg_{Re} &= \{f \in L^2(\mathbb{T}), \mathbb{1}_{\{e^{i\theta}, \arg(e^{i\theta}) \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]\}} f = f\}. \end{aligned}$$

On pose $V_{Re} : Pos_{Re} \rightarrow Neg_{Re}$, tel que pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}$ on ait que $Vf(e^{i\alpha}) = f(e^{-i\alpha})$. En faisant exactement les mêmes calculs que précédemment on obtient que $Re(S) = P_{Re} - Q_{Im}$. De plus dans $H = Pos_{Re} \oplus Neg_{Re}$ on a que

$$\begin{aligned} P_{Re} &= \begin{pmatrix} M_{\cos^2(\frac{\theta}{2})} & M_{\cos(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\theta}{2})} V_{Im}^* \\ V_{Im} M_{\sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})} & V_{Im} M_{\sin^2(\frac{\theta}{2})} V_{Im}^* \end{pmatrix} \\ Q_{Im} &= \begin{pmatrix} M_{\cos^2(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})} & M_{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})} V_{Im}^* \\ V_{Im} M_{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})} & V_{Im} M_{\sin^2(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})} V_{Im}^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

3.6 Certains opérateurs unitaires vus comme combinaisons linéaires de 4 projections orthogonales

Dans cette section on va écrire certains opérateurs unitaires de la manière suivante $\sum_{k=0}^3 (i)^k P_k$. Plus précisément, on va s'intéresser aux opérateurs unitaires de multiplicité spectrale égale à 1. Dit plus simplement, on va étudier les opérateurs de la forme $U : L^2(\mathbb{T}, \mu) \rightarrow L^2(\mathbb{T}, \mu)$ définis pour tout $f \in L^2(\mathbb{T}, \mu)$ par $Uf(e^{i\theta}) = e^{i\theta} f(e^{i\theta})$, avec μ une mesure borélienne sur \mathbb{T} . Dans cette section on va faire l'hypothèse que $\mu(A) = \mu(-A)$ pour tout borélien $A \subset \mathbb{T}$. Avec cette hypothèse on ne pourra plus utiliser le découpage de \mathbb{T} utilisé pour prouver le Corollaire 3.5.1. On va poser $\mathbb{T}_k = \{e^{i\theta} \in \mathbb{T}, \arg(e^{i\theta}) \in [0 + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}]\}$. Dans la preuve du Corollaire 3.5.1, on a "identifié", pour la partie réelle de S , \mathbb{T}_1 avec \mathbb{T}_4 et \mathbb{T}_2 avec \mathbb{T}_3 , et pour la partie imaginaire de S on a identifié \mathbb{T}_1 avec \mathbb{T}_2 et \mathbb{T}_4 avec \mathbb{T}_3 . Ici on va identifier \mathbb{T}_1 avec \mathbb{T}_3 et \mathbb{T}_2 avec \mathbb{T}_4 pour la partie réelle et la partie imaginaire de U .

La preuve du prochain corollaire de la Proposition 3.4.1 sera presque la même que celle du Corollaire 3.5.1. Il faut juste changer les isométries surjectives V_{Re} et V_{Im} , vérifier que ce sont bien des isométries surjectives, et vérifier que l'on garde bien les relations $-M_{\sin(\theta)} - V_{Im}^* M_{\sin(\theta)} V_{Im} = -M_{\sin(\theta)} V_{Im}^* - V_{Im}^* M_{\sin(\theta)} = V_{Im} M_{\sin(\theta)} + M_{\sin(\theta)} V_{Im} = V_{Im} M_{\sin(\theta)} V_{Im}^* + M_{\sin(\theta)} = 0$. On va le faire dans les deux prochains lemmes.

Lemme 3.6.1. *Soit μ une mesure borélienne sur \mathbb{T} telle que pour tout borélien $A \subset \mathbb{T}$ on ait que $\mu(A) = \mu(-A)$. Alors les applications $V_{Re} : Pos_{Re} \rightarrow Neg_{Re}$ et $V_{Im} : Pos_{Im} \rightarrow Neg_{Im}$, définies par $Vf(e^{i\theta}) = f(-e^{i\theta})$ sont des isométries surjectives.*

Démonstration. On va vérifier que V_{Im} est une isométrie surjective. Pour V_{Re} la preuve est similaire. Soit $f \in Pos_{Im}$. On a que

$$\begin{aligned} \|V_{Im}f\|^2 &= \int_{\mathbb{T}_2 \cup \mathbb{T}_3} |f(-e^{i\theta})|^2 d\mu(e^{i\theta}) \\ &= \int_{\mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_4} |f(e^{i\theta})|^2 d\mu(e^{i\theta}) \\ &= \|f\|^2 \end{aligned}$$

Donc V_{Im} est une isométrie. Soit $g \in Neg_{Im}$. On pose $f(z) = g(-z)$. Alors $V_{Im}f = g$. Donc V_{Im} est surjective. \square

Lemme 3.6.2. *Avec les mêmes hypothèses et les mêmes notations que précédemment, on a que $-M_{\sin(\theta)} - V_{Im}^* M_{\sin(\theta)} V_{Im} = -M_{\sin(\theta)} V_{Im}^* - V_{Im}^* M_{\sin(\theta)} = V_{Im} M_{\sin(\theta)} + M_{\sin(\theta)} V_{Im} = V_{Im} M_{\sin(\theta)} V_{Im}^* + M_{\sin(\theta)} = 0$.*

Démonstration. On va montrer que $-M_{\sin(\theta)} - V_{Im}^* M_{\sin(\theta)} V_{Im} = 0$. Les autres égalités

se montrent d'une manière similaire. Soit $f \in Pos_{I_m}$. On a que

$$\begin{aligned}
 (-M_{\sin(\theta)} - V_{I_m}^* M_{\sin(\theta)} V_{I_m})(f)(e^{i\theta}) &= -\sin(\theta)f(e^{i\theta}) - V_{I_m}^* \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} f(-e^{i\theta}) \right) \\
 &= -\sin(\theta)f(e^{i\theta}) - \frac{-e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i} f(e^{i\theta}) \\
 &= -\sin(\theta)f(e^{i\theta}) + \sin(\theta)f(e^{i\theta}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

En utilisant presque la même preuve que pour le Corollaire 3.5.1, on en déduit ce résultat.

Corollaire 3.6.3. *Soit μ une mesure borélienne sur \mathbb{T} telle que pour tout borélien $A \subset \mathbb{T}$ on ait que $\mu(A) = \mu(-A)$. Soit $U : L^2(\mathbb{T}, \mu) \rightarrow L^2(\mathbb{T}, \mu)$ l'opérateur défini pour tout $f \in L^2(\mathbb{T}, \mu)$ par $Uf(e^{i\theta}) = e^{i\theta}f(e^{i\theta})$. Alors, il existe 4 projections orthogonales P_{Re}, Q_{Re}, P_{Im} et Q_{Im} telles que $U = P_{Re} - Q_{Re} + iP_{Im} - iQ_{Im}$.*

3.7 Une amélioration du principe d'incertitude de Erb

Dans cette section on va améliorer le résultat de Erb (i.e. le Corollaire 1.13.4). L'idée pour réussir est d'essayer de "majorer" le principe d'incertitude de Erb par un principe d'incertitude avec des projections orthogonales (de type paires annihilantes). La remarque clef ici est que M_x est une différence de projections orthogonales. On rappelle le contexte, on est dans l'espace de Hilbert $H = L^2([-1, 1], w)$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{[-1,1]} f(x)\overline{g(x)}w(x)dx,$$

avec $w(x)$ un poids positif tel que $\text{supp}(w) = [-1, 1]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{[-1,1]} x^n w(x)dx < \infty.$$

On commence par un lemme.

Lemme 3.7.1. *Soit $\alpha \in [0, 1]$. L'opérateur $M_x \in \mathcal{B}(L^2([-1, 1], w))$ peut s'écrire comme une différence de projections orthogonales $P_\alpha - Q_\alpha$. De plus on peut choisir P_α tel que l'image $\text{Im}(P_\alpha)$ de P_α soit*

$$\left\{ f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x}h(x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ \sqrt{1+x}h(-x)\sqrt{\frac{w(-x)}{w(x)}} \exp(i\alpha x) & \text{si } x \in [-1, 0] \end{cases} : h \in L^2([0, 1], w) \right\}.$$

Démonstration. On note $Pos = L^2([0, 1], w)$ et $Neg = L^2([-1, 0], w)$. On pose

$$V_\alpha : Pos \rightarrow Neg$$

$$h(x) \mapsto h(-x) \sqrt{\frac{w(-x)}{w(x)}} \exp(i\alpha x).$$

On a que

$$V_\alpha^* : Neg \rightarrow Pos$$

$$h(x) \mapsto h(-x) \sqrt{\frac{w(-x)}{w(x)}} \exp(-i\alpha x).$$

Donc on a que

$$\begin{aligned} V_\alpha V_\alpha^*(h)(x) &= V_\alpha \left(h(-x) \sqrt{\frac{w(-x)}{w(x)}} \exp(-i\alpha x) \right) \\ &= h(x) \sqrt{\frac{w(x)}{w(-x)}} \sqrt{\frac{w(-x)}{w(x)}} \exp(i\alpha x) \exp(-i\alpha x) \\ &= h(x). \end{aligned}$$

De même, on a que $V_\alpha^* V_\alpha(f) = f$. De plus on a que

$$\begin{aligned} \|V_\alpha h\|_{Neg}^2 &= \int_{[-1,0]} \left| h(-x) \sqrt{\frac{w(-x)}{w(x)}} \exp(i\alpha x) \right|^2 w(x) dx \\ &= \int_{[-1,0]} |h(-x)|^2 w(-x) dx \\ &= \|h\|_{Pos}^2. \end{aligned}$$

Donc V_α est une isométrie surjective. On pose dans $H = Pos \oplus Neg$

$$P_\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} M_{1+x} & M_{\sqrt{1-x^2}} V_\alpha^* \\ V_\alpha M_{\sqrt{1-x^2}} & V_\alpha M_{1-x} V_\alpha^* \end{pmatrix}, \quad Q_\alpha = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} M_{1-x} & M_{\sqrt{1-x^2}} V_\alpha^* \\ V_\alpha M_{\sqrt{1-x^2}} & V_\alpha M_{1+x} V_\alpha^* \end{pmatrix}.$$

On a que

$$P_\alpha - Q_\alpha = \begin{pmatrix} M_x & 0 \\ 0 & V_\alpha M_x V_\alpha^* \end{pmatrix} = M_x.$$

Nous allons maintenant montrer que $\text{Im}(P_\alpha)$ est bien le sous espace annoncé dans le lemme. Soient $g_{Pos} \in Pos$ et $g_{Neg} \in Neg$. On pose $g = g_{Pos} \oplus g_{Neg}$. Pour presque

tout $x \in [0, 1]$, on a que

$$\begin{aligned} P_\alpha g(x) &= \frac{1}{2} \left(M_{1+x}(g_{Pos}) + M_{\sqrt{1-x^2}} V_\alpha^*(g_{Neg}) \right) (x) \\ &= \frac{1}{2} M_{\sqrt{1+x}} \left(M_{\sqrt{1+x}} g_{Pos} + M_{\sqrt{1-x}} V_\alpha^*(g_{Neg}) \right) (x) \\ &= \frac{\sqrt{1+x}}{2} \left(\sqrt{1+x} g_{Pos}(x) + \sqrt{1-x} g_{Neg}(-x) \sqrt{\frac{w(-x)}{w(x)}} \exp(-i\alpha x) \right). \end{aligned}$$

On pose pour presque tout $x \in [0, 1]$,

$$h(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+x} g_{Pos}(x) + \sqrt{1-x} g_{Neg}(-x) \sqrt{\frac{w(-x)}{w(x)}} \exp(-i\alpha x) \right).$$

Donc on a pour presque tout $x \in [0, 1]$ que $P_\alpha g(x) = \sqrt{1-x} h(x)$. De même, on a pour presque tout $x \in [-1, 0]$ que

$$\begin{aligned} P_\alpha g(x) &= \frac{1}{2} \left(V_\alpha M_{\sqrt{1-x^2}}(g_{Pos})(x) + V_\alpha M_{1-x} V_\alpha^*(g_{Neg})(x) \right) \\ &= \frac{1}{2} V_\alpha M_{\sqrt{1-x}} \left(M_{\sqrt{1+x}}(g_{Pos})(x) + M_{\sqrt{1-x}} V_\alpha^*(g_{Neg})(x) \right) \\ &= V_\alpha M_{\sqrt{1-x}} h(x) \\ &= \frac{\sqrt{1+x}}{2} h(-x) \sqrt{\frac{w(-x)}{w(x)}} \exp(i\alpha x). \end{aligned}$$

En résumé, si $g \in \text{Im} P_\alpha$, c'est à dire si $P_\alpha g = g$, il existe une fonction $h \in Pos$ tel que pour presque tout $x \in [0, 1]$,

$$g(x) = \sqrt{1+x} h(x)$$

et pour presque tout $x \in [-1, 0]$ on ait

$$g(x) = \sqrt{1+x} h(-x) \sqrt{\frac{w(-x)}{w(x)}} \exp(i\alpha x).$$

Soit $h \in Pos$. Soit $g_{Pos} \in Pos$ la fonction définie pour presque tout $x \in [0, 1]$ par

$$g_{Pos}(x) = \sqrt{1+x} h(x),$$

et soit $g_{Neg} \in Neg$ la fonction définie pour presque tout $x \in [-1, 0]$ par

$$g_{Neg}(x) = \sqrt{1+x} h(-x) \sqrt{\frac{w(-x)}{w(x)}} \exp(i\alpha x).$$

On note $g = g_{Pos} + g_{Neg}$. Pour presque tout $x \in [0, 1]$, on a que

$$\begin{aligned} P_\alpha g(x) &= \frac{1}{2} \left(M_{1+x}(g_{Pos}) + M_{\sqrt{1-x^2}} V_\alpha^*(g_{Neg}) \right) (x) \\ &= \frac{1}{2} \left((1+x)\sqrt{1+x}h(x) + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x}h(x) \right) \\ &= \sqrt{1-x} \left(\frac{1+x+1-x}{2} h(x) \right) \\ &= \sqrt{1-x}h(x) \\ &= g_{Pos}(x). \end{aligned}$$

On a aussi pour presque tout $x \in [-1, 0]$ que

$$\begin{aligned} P_\alpha g(x) &= \frac{1}{2} V_\alpha \left(M_{\sqrt{1-x^2}}(g_{Pos}) + M_{1-x} V_\alpha^*(g_{Neg}) \right) (x) \\ &= \frac{1}{2} V_\alpha \left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x}h(x) + (1-x)\sqrt{1-x}h(x) \right) \\ &= V_\alpha \left(\sqrt{1-x} \frac{1+x+1-x}{2} h(x) \right) \\ &= \sqrt{1+x}h(-x) \sqrt{\frac{w(-x)}{w(x)}} \exp(i\alpha x) \\ &= g_{Neg}(x). \end{aligned}$$

Autrement dit $P_\alpha g = g$, et donc $g \in \text{Im}P_\alpha$. □

Lemme 3.7.2. Si $\sqrt{\frac{(1+x)w(-x)}{(1-x)w(x)}}$ ne coïncide pas presque partout avec une fraction rationnelle sur $[0, 1]$, alors $\text{Im}P_0$ ne contient pas de polynôme non nul.

Démonstration. Par l'absurde, supposons que le polynôme non nul $p(x)$ appartient à $\text{Im}(P_0)$. Alors il existe $h \in Pos$ tel que

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x}h(x) &= p(x) & x \in [0, 1], \\ \sqrt{1+x}h(-x) \sqrt{\frac{w(-x)}{w(x)}} &= p(x) & x \in [-1, 0]. \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in [0, 1]$, on a que

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x}h(x) &= p(x), \\ \sqrt{1-x}h(x) \sqrt{\frac{w(x)}{w(-x)}} &= p(-x). \end{aligned}$$

Autrement dit, on a que

$$h(x) = \frac{p(x)}{\sqrt{1+x}} = \frac{p(-x)}{\sqrt{1-x}} \sqrt{\frac{w(-x)}{w(x)}}.$$

Donc

$$\frac{p(x)}{p(-x)} = \sqrt{\frac{(1+x)w(-x)}{(1-x)w(x)}}.$$

A gauche on a une fonction qui coïncide presque partout avec une fraction rationnelle, contrairement au membre de droite de l'inégalité, ce qui prouve par l'absurde ce lemme. \square

Voici l'analogie du lemme précédent.

Lemme 3.7.3. *Si $\sqrt{\frac{(1+x)w(-x)}{(1-x)w(x)}}$ coïncide presque partout avec une fraction rationnelle sur $[0, 1]$, alors $\text{Im}P_1$ ne contient pas de polynôme non nul.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons que le polynôme non nul $p(x)$ appartient à $\text{Im}(P_1)$. Alors il existe $h \in \text{Pos}$ tel que

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x}h(x) &= p(x) & x \in [0, 1], \\ \sqrt{1+x}h(-x)\sqrt{\frac{w(-x)}{w(x)}} \exp(-ix) &= p(x) & x \in [-1, 0]. \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in [0, 1]$, on a que

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x}h(x) &= p(x), \\ \sqrt{1-x}h(x)\sqrt{\frac{w(x)}{w(-x)}} \exp(ix) &= p(x). \end{aligned}$$

Autrement dit, on a que

$$h(x) = \frac{p(x)}{\sqrt{1+x}} = \frac{p(-x)}{\sqrt{1-x}} \sqrt{\frac{w(-x)}{w(x)}} \exp(ix).$$

Donc

$$\frac{p(x)}{p(-x)} \sqrt{\frac{(1-x)w(x)}{(1+x)w(-x)}} = \exp(ix).$$

A gauche on a une fonction qui coïncide presque partout avec une fraction rationnelle, contrairement au membre de droite de l'inégalité, ce qui prouve par l'absurde ce lemme. \square

On peut résumer les deux lemmes précédents comme ceci.

Corollaire 3.7.4. *Il existe deux projections orthogonales P et Q telles que $M_x = P - Q$, et $\text{Im}(P)$ ne contient aucun polynômes non nul.*

On peut maintenant prouver ce théorème qui est une amélioration du Corollaire 1.13.4.

Théorème 3.7.5. Soit Π une projection orthogonale sur un sous-espace engendré par un nombre fini de polynômes. Si $\text{supp}(w) = [-1, 1]$, alors il existe une constante $c = c(w, \Pi) > 0$ telle que pour tout $f \in L^2([-1, 1], w)$ on ait que

$$\|f\|^2 \leq c \left((\|f\|^2 - \epsilon(f)) + \|(I - \Pi)f\|^2 \right),$$

autrement dit

$$\|f\|^2 \leq c \left(\langle (I - M_x)f, f \rangle + \|(I - \Pi)f\|^2 \right).$$

Ce théorème améliore de deux manières le Corollaire 1.13.4. Premièrement, on ne demande plus que w soit dans la sous classe de Nevai. Deuxièmement on ne demande plus que $\text{Im}(\Pi)$ soit engendré par les polynômes orthonormaux canoniques de $L^2([-1, 1], w)$, on peut prendre n'importe quel espace engendré par un nombre fini de polynômes quelconques.

Démonstration. D'après le Corollaire 3.7.4, il existe deux projections orthogonales P et Q telles que $M_x = P - Q$, et $\text{Im}(P)$ ne contient aucun polynômes. On a que

$$W(M_x + i\Pi) = W(P - Q + i\Pi) \subset W(-Q) + W(P + i\Pi).$$

Comme $\text{Im}(P) \cap \text{Im}(\Pi) = \{0\}$ et que Π est une projection de rang fini, on a que (P, Π) est une paire annihilante compacte. D'après la Proposition 1.10.8, (P, Π) est une paire fortement annihilante. Donc $1 + i \notin W(P + i\Pi)$, et il existe $c > 0$ tel que pour tout $f \in L^2([-1, 1], w)$

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &\leq c \left(\langle (I - P)f, f \rangle + \langle (I - \Pi)f, f \rangle \right) \\ &\leq c \left(\langle (I - P)f, f \rangle + \langle Qf, f \rangle + \langle (I - \Pi)f, f \rangle \right) \\ &= c \left(\langle (I - (P - Q))f, f \rangle + \langle (I - \Pi)f, f \rangle \right) \\ &= c \left(\langle (I - M_x)f, f \rangle + \langle (I - \Pi)f, f \rangle \right). \end{aligned}$$

□

Remarque 3.7.6. En se servant de l'image numérique de $P + i\Pi$, on peut en dire un peu plus sur le Théorème précédent. Supposons que $\text{Im}(P_0) \cap \text{Im}(\Pi) = \{0\}$ (sinon il suffit de prendre P_1 à la place de P_0). On pose $\theta = \arccos(\cos(\text{Im}(P_0) \cap \text{Im}(\Pi)))$. Comme $\text{Im}(P_0) \cap \text{Im}(\Pi) = \{0\}$ et $\dim(\text{Im}(\Pi)) < \infty$, on a que $\cos(\theta) < 1$. Pour tout $x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta), 1]$, on pose

$$\gamma(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta - \arccos(2x - 1)).$$

D'après le Corollaire 1.12.3, on a que tout point du carré délimité par $0, 1, 1 + i, i$ qui se situe au dessus de γ n'est pas dans l'image numérique de $P_0 + i\Pi$, et par conséquent n'est pas dans l'image numérique de $M_x + i\Pi$.

Chapitre 4

Algèbres de von Neumann et méthode des projections aléatoires

Dans ce court chapitre, on va parler de méthode des projections aléatoires et d'algèbres de von Neumann engendré par un nombre fini de projections orthogonales. Davis [Dav55] a montré qu'il existe 3 projections orthogonales qui engendrent $\mathcal{B}(H)$ comme algèbre de von Neumann. Il a aussi montré que deux projections orthogonales ne peuvent pas engendrer $\mathcal{B}(H)$ comme algèbre de von Neumann. Plus tard, Sunder [Sun88] a montré que l'on pouvait prendre n projections orthogonales ($n \geq 3$) tels que ces n projections engendrent $\mathcal{B}(H)$ comme algèbre de von Neumann, mais n'importe quel sous ensemble strict de ces projections n'engendrent pas $\mathcal{B}(H)$ comme algèbre de von Neumann.

Récemment Paszkiewicz [Pas12a] à montré qu'il existe trois projections orthogonales pour lesquelles la méthode des projections aléatoires ne converge pas toujours en topologie forte. Kopecká et Müller ont annoncé dans [KM] qu'il semblerait que la preuve de Paszkiewicz ne soit pas correcte, et ont proposé une autre preuve.

Avant de montrer qu'on pouvait le faire avec 3 projections, Paszkiewicz l'a fait avec 5 projections [Pas12b]. Il est clair d'après la construction qu'il a faite, que si on choisit 4 projections parmi ces 5 projections, ces projections vont toujours converger en topologie forte dans la méthode des projections aléatoire.

A partir de ces deux remarques, on se pose la question naïve suivante.

Question 4.0.7. *Soient P_1, \dots, P_r des projections orthogonales. Est ce que si la méthode des projections aléatoires converge toujours en topologie forte, alors*

$$W^*(P_1, \dots, P_r) \neq \mathcal{B}(H)?$$

Notons qu'une éventuelle réponse positive a cette question permettrait de donner une condition nécessaire pour que la méthode des projections aléatoires converge toujours en topologie forte. Le but de ce chapitre est de répondre négativement à la Question 4.0.7 en construisant 3 projections orthogonales qui génèrent $\mathcal{B}(H)$ comme algèbre de von Neumann et qui vont toujours converger en topologie forte dans la méthode des projections aléatoires.

4.1 Résultats préliminaires

Dans cette section on va faire quelques rappels sur les algèbres de von Neumann. Ensuite on va donner une condition suffisante pour garantir la convergence en topologie forte de la méthode des projections aléatoires. On commence avec les algèbres de von Neumann. On note \mathcal{A}' le commutant de \mathcal{A} , c'est à dire

$$\mathcal{A}' = \{T \in \mathcal{B}(H) : \forall A \in \mathcal{A}, TA = AT\}.$$

On note \mathcal{A}'' le double commutant de \mathcal{A} , c'est à dire $\mathcal{A}'' = (\mathcal{A}')'$.

Définition 4.1.1. On dit que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ est une *algèbre de von Neumann* si

1. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, i.e. pour tout $A \in \mathcal{A}$, $A^* \in \mathcal{A}$
2. $I \in \mathcal{A}$
3. $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$.

Le théorème suivant est un théorème important sur les algèbres de von Neumann.

Théorème 4.1.2 (Théorème du double commutant). *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ tel que $I \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$
2. \mathcal{A} est fermé en topologie forte
3. \mathcal{A} est fermé en topologie faible.

Définition 4.1.3. L'algèbre de von Neumann *engendrée* par $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(H)$ (que l'on note $W^*(\mathcal{S})$) est la plus petite algèbre de von Neumann qui contient l'identité, \mathcal{S} et \mathcal{S}^* , c'est à dire

$$W^*(\mathcal{S}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \text{ algèbre de von Neumann} \\ \mathcal{S} \subset \mathcal{A}}} \mathcal{A}.$$

Le résultat suivant est dû à Bauschke [Bau95].

Théorème 4.1.4 ([Bau95]). *Soient M_1, \dots, M_r des sous-espaces fermés de H . On note $M = \bigcap_{i=1}^r M_i$. Si pour tout $J \subset \{1, \dots, r\}$ on a que $\sum_{j \in J} M_j^\perp$ est fermé, alors la méthode des projections aléatoires converge toujours en topologie forte. C'est à dire pour tout $h \in H$ et pour tout sélection aléatoire $s : \mathbb{N} \rightarrow \{1, \dots, r\}$, on a que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| P_{s(n)} \dots P_{s(1)} h - P_M h \right\| = 0.$$

4.2 Réponse à la Question 4.0.7

Dans cette section on va construire 3 projections orthogonales qui vont engendrer $\mathcal{B}(H)$ comme algèbre de von Neumann, et qui vont toujours converger en topologie forte dans la méthode des projections aléatoires. L'idée est de modifier la construction de Davis de telle sorte que les projections obtenues satisfassent les conditions suffisantes du théorème 4.1.4. On va commencer par construire les projections.

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée d'un espace de Hilbert H . On pose $x_n = e_{2n}$ et $y_n = e_{2n+1}$. On pose $\theta_n = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}$. On pose $w_n = \cos(\theta_n)x_n + \sin(\theta_n)y_n$. On pose $z_{2n-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_{2n-1} + x_{2n})$ et $z_{2n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(y_{2n} + y_{2n+1})$. On pose $M_1 = \overline{\text{vect}}\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, $M_2 = \overline{\text{vect}}\{w_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $M_3 = \overline{\text{vect}}\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$. On note P_i la projection orthogonale sur le sous-espace M_i .

Lemme 4.2.1. *On a pour tout $i \neq j$ que $\cos(M_i, M_j) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.*

Démonstration. D'après la construction des sous-espaces M_i on peut voir facilement que l'on a $\cos(M_1, M_2) = \cos(M_1, M_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Montrons que $\cos(M_2, M_3) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Soient $z \in M_3$ et $w \in M_2$ tels que $\|z\| = \|w\| = 1$. Il existe α_n, β_n et γ_n tels que

$$z = \sum_{n \geq 1} \alpha_n z_{2n-1} + \beta_n z_{2n}, \quad w = \sum_{n \geq 0} \gamma_n w_n, \quad \sum_{n \geq 1} |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 = 1, \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} |\gamma_n|^2 = 1.$$

On a que

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle &= \left\langle \sum_{n \geq 1} \alpha_n z_{2n-1} + \beta_n z_{2n}, \sum_{k \geq 0} \gamma_k w_k \right\rangle \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} \langle \alpha_n (x_{2n-1} + x_{2n}) + \beta_n (y_{2n} + y_{2n+1}), \gamma_k \cos(\theta_k) x_k + \gamma_k \sin(\theta_k) y_k \rangle \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sum_{n \geq 1} \alpha_n \overline{\gamma_{2n-1}} \cos(\theta_{2n-1}) + \sum_{n \geq 1} \alpha_n \overline{\gamma_{2n}} \cos(\theta_{2n}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n \geq 1} \beta_n \overline{\gamma_{2n}} \sin(\theta_{2n}) + \sum_{n \geq 1} \beta_n \overline{\gamma_{2n+1}} \sin(\theta_{2n+1}) \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\alpha_1 \overline{\gamma_1} \cos(\theta_1) + \sum_{n \geq 1} \overline{\gamma_{2n+1}} (\alpha_{n+1} \cos(\theta_{2n+1}) + \beta_n \sin(\theta_{2n+1})) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n \geq 1} \overline{\gamma_{2n}} (\alpha_n \cos(\theta_{2n}) + \beta_n \sin(\theta_{2n})) \right]. \end{aligned}$$

Donc on a que

$$\begin{aligned}
 |\langle z, w \rangle| &\leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left[|\alpha_1 \overline{\gamma_1} \cos(\theta_1)| + \left| \sum_{n \geq 1} \overline{\gamma_{2n+1}} (\alpha_{n+1} \cos(\theta_{2n+1}) + \beta_n \sin(\theta_{2n+1})) \right| \right. \\
 &\quad \left. + \left| \sum_{n \geq 1} \overline{\gamma_{2n}} (\alpha_n \cos(\theta_{2n}) + \beta_n \sin(\theta_{2n})) \right| \right] \\
 &\leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left[|\alpha_1 \overline{\gamma_1} \cos(\theta_1)| + \left(\sum_{n \geq 1} |\gamma_{2n+1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \geq 1} |\alpha_{n+1}|^2 + |\beta_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\sum_{n \geq 1} |\gamma_{2n}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \geq 1} |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &\leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left[|\gamma_1| + \left(\sum_{n \geq 1} |\gamma_{2n+1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n \geq 1} |\gamma_{2n}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &\leq \frac{\sqrt{2}}{2}.
 \end{aligned}$$

D'où $\cos(M_2, M_3) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. □

Lemme 4.2.2. *On a que $M_1^\perp + M_2^\perp + M_3^\perp = H$. En particulier $M_1^\perp + M_2^\perp + M_3^\perp$ est fermé.*

Démonstration. Comme $\cos(M_1, M_2) = \cos(M_1^\perp, M_2^\perp) < 1$, on a que $M_1^\perp + M_2^\perp$ est fermé. En particulier on a que $(M_1 \cap M_2)^\perp = M_1^\perp + M_2^\perp$. Comme $M_1 \cap M_2 = \{0\}$, on en déduit que $M_1^\perp + M_2^\perp = H$, ainsi $M_1^\perp + M_2^\perp + M_3^\perp = H$ est fermé. □

On rappelle que $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \{0\}$.

Corollaire 4.2.3. *La méthode des projections aléatoire sur les sous-espaces M_1, M_2 et M_3 converge toujours en topologie forte. C'est à dire, pour toute sélection aléatoire $s : \mathbb{N} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ et pour tout vecteur $h \in H$ on a que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{s(n)} \dots P_{s(1)} h\| = 0.$$

Proposition 4.2.4. *On a que $W^*(P_1, P_2, P_3) = \mathcal{B}(H)$.*

Démonstration. On va montrer que $W^*(P_1, P_2, P_3)' = \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{C}\}$. Le théorème du double commutant nous permettra de conclure la preuve. Soit $T \in W^*(P_1, P_2, P_3)'$. En particulier T commute avec P_1 et P_2 . D'après le théorème d'Halmos, dans $H = M_1 \oplus M_1^\perp$, T est de la forme

$$T \sim \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

avec A qui commute avec C . On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Cx_n = \cos(\theta_n)x_n$. Autrement dit, C est un opérateur diagonal dans la base x_n de multiplicité spectral égal à 1. Donc A est un opérateur diagonal dans la base x_n , c'est à dire $Ax_n = \lambda_n x_n$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a que $Tx_n = \lambda_n x_n$ et $Ty_n = \lambda_n y_n$. On a aussi que T commute avec P_3 . Or

$$\begin{aligned} TP_3(x_{2n-1} + x_{2n}) &= T(x_{2n-1} + x_{2n}) \\ &= \lambda_{2n-1}x_{2n-1} + \lambda_{2n}x_{2n}. \end{aligned}$$

On a aussi que

$$\begin{aligned} P_3T(x_{2n-1} + x_{2n}) &= P_3(\lambda_{2n-1}x_{2n-1} + \lambda_{2n}x_{2n}) \\ &= \left\langle \lambda_{2n-1}x_{2n-1} + \lambda_{2n}x_{2n}, \frac{x_{2n-1} + x_{2n}}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{x_{2n-1} + x_{2n}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\lambda_{2n-1} + \lambda_{2n}}{2}(x_{2n-1} + x_{2n}). \end{aligned}$$

Comme $TP_3 = P_3T$ on a que

$$\frac{\lambda_{2n-1} + \lambda_{2n}}{2}(x_{2n-1} + x_{2n}) = \lambda_{2n-1}x_{2n-1} + \lambda_{2n}x_{2n},$$

et donc

$$\frac{\lambda_{2n-1} + \lambda_{2n}}{2} = \lambda_{2n-1} = \lambda_{2n}.$$

Donc $T = \lambda_1 I$. □

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 4.2.5. *Il existe 3 projections orthogonales $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{B}(H)$ telles que $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \{0\}$ et la méthode des projections aléatoire sur les sous-espaces M_1, M_2 et M_3 converge toujours en topologie forte. C'est à dire, pour toute sélection aléatoire $s : \mathbb{N} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ et pour tout vecteur $h \in H$ on a que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{s(n)} \dots P_{s(1)} h\| = 0.$$

De plus on a que

$$W^*(P_1, P_2, P_3) = \mathcal{B}(H).$$

Chapitre 5

Sous-espaces Hyperinvariants pour des perturbations compactes d'opérateurs de multiplication

5.1 Introduction

Soit X un espace de Banach complexe et séparable. On appelle problème du sous-espace invariant la question : est-ce que tout opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{B}(X)$ possède un sous-espace invariant non trivial, c'est à dire est-ce qu'il existe un sous-espace fermé M de X tel que $M \neq \{0\}$, $M \neq X$ et $T(M) \subset M$? Le problème du sous-espace hyperinvariant est la question suivante : est-ce que pour tout opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{B}(X)$ tel que $T \neq \lambda I$ possède un sous-espace hyperinvariant non trivial, c'est à dire est-ce qu'il existe un sous-espace fermé M de X tel que $M \neq \{0\}$, $M \neq X$ et pour tout opérateur $S \in \mathcal{B}(X)$ tel que $TS = ST$, on ait que $S(M) \subset M$? Enflo [Enf87] et Read [Rea86] ont montré qu'il existe des espaces de Banach sur lesquels la réponse au problème du sous-espace invariant est négative. D'un autre coté, Argyros et Haydon [AH11] ont construit un espace de Banach sur lequel tout opérateur linéaire borné est de la forme $\lambda I + K$, où $\lambda \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe et $K \in \mathcal{K}(X)$ est un opérateur compact. En vertu du Théorème de Lomonosov, sur cet espace de Banach la réponse au problème du sous-espace hyperinvariant est positive. Cependant les problèmes du sous-espace invariant et hyperinvariant sont encore ouverts pour les espaces de Banach réflexifs séparables, en particulier pour les espaces de Hilbert séparables. Pour les opérateurs normaux dans les espaces de Hilbert, le théorème spectral nous garantit l'existence d'un sous-espace hyperinvariant. Lomonosov [CP11, Theorem 6.1.2] a montré que tout opérateur compact agissant sur un espace de Banach possède un sous-espace hyperinvariant. Cependant, si N est un opérateur normal agissant sur H et K est un opérateur compact agissant sur H , on ne sait pas en général si $N + K$ possède un sous-espace hyperinvariant non trivial. On invite le lecteur à regarder le livre de Chalendar et Partington [CP11] pour plus d'informations sur le problème du sous-espace invariant.

En 2007, Foias, Jung, Ko et Pearcy [FJKP07] ont montré le résultat suivant.

Théorème 5.1.1 ([FJKP07]). *Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée d'un espace de Hilbert complexe et séparable H . Soit $D = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n e_n \otimes e_n$ un opérateur diagonal borné agissant sur H . Soient $u, v \in H$ deux vecteurs tels que :*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle u, e_n \rangle|^{\frac{2}{3}} < \infty, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle v, e_n \rangle|^{\frac{2}{3}} < \infty.$$

Alors la perturbation de rang un $D + u \otimes v$ de l'opérateur diagonal D possède un sous-espace hyper-invariant non trivial.

En 2012, Fang et Xia [FX12] ont amélioré ce résultat. Leur approche permet de considérer des perturbations de rang fini d'opérateurs diagonaux. Ils ont aussi amélioré la condition de sommabilité de Foias, Jung, Ko et Pearcy. Voici leur résultat.

Théorème 5.1.2 ([FX12]). *Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée d'un espace de Hilbert complexe et séparable H . Soit $D = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n e_n \otimes e_n$ un opérateur diagonal borné agissant sur H . Soient $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_r \in H$ des vecteurs tels que*

$$\sum_{k=1}^r \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle u_k, e_n \rangle| < \infty, \quad \sum_{k=1}^r \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle v_k, e_n \rangle| < \infty.$$

Alors la perturbation de rang fini $D + \sum_{i=1}^r u_i \otimes v_i$ de l'opérateur diagonal D possède un sous-espace hyper-invariant non trivial.

Le but de ce chapitre est d'améliorer l'approche de Fang et Xia pour traiter certaines perturbations compactes d'opérateur de multiplication sur des espaces L^p séparables. Le théorème spectral pour les opérateurs normaux nous dit que tout opérateur normal est un opérateur de multiplication sur un certain espace L^2 . Comme tout opérateur diagonal est en particulier normal, on peut voir ceci comme une généralisation du résultat précédent.

Les résultats de ce Chapitre sont tirés de l'article [Kla14a].

5.1.1 Notations

Ici nous allons définir quelques notations pour ce chapitre. On note H un espace de Hilbert séparable, et X un espace de Banach séparable. On notera m la mesure de Lebesgue sur le plan complexe. On notera l'ensemble des opérateurs bornés (respectivement l'ensemble des opérateurs compacts) agissant sur X par $\mathcal{B}(X)$ (respectivement $\mathcal{K}(X)$). Soit $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur borné. On note le commutant de T par

$$\{T\}' = \{S \in \mathcal{B}(X), ST = TS\}.$$

On note aussi respectivement le spectre, le spectre ponctuel et le spectre essentiel de l'opérateur T par $\sigma(T)$, $\sigma_p(T)$ et $\sigma_e(T)$. Soit (Ω, μ) un espace mesuré borélien σ -fini. Soient $p, q \in]1, \infty[$ deux nombres tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ est

une fonction à valeurs complexes essentiellement bornée, on note M_f l'opérateur de multiplication agissant sur $L^p(\Omega, \mu)$ défini comme ceci :

$$\begin{aligned} M_f : L^p(\Omega, \mu) &\rightarrow L^p(\Omega, \mu) \\ g &\mapsto fg \end{aligned}$$

Soit $u \in L^p(\Omega, \mu)$ et $v \in L^q(\Omega, \mu)$, on définit l'opérateur de rang un $u \otimes v$ pour tout $x \in L^p(\Omega, \mu)$ par la formule

$$u \otimes v(x) = \left(\int_{\Omega} x(\xi) \overline{v(\xi)} d\mu(\xi) \right) u.$$

Dans la suite de ce chapitre, on considérera des opérateurs compacts K agissant sur $L^p(\Omega, \mu)$ de la forme suivante. Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L^p(\Omega, \mu)$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L^q(\Omega, \mu)$. On suppose que pour tout $x \in L^p(\Omega, \mu)$, la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_{\Omega} x(\xi) \overline{v_n(\xi)} d\mu(\xi) \right) u_n$$

converge. On note par K l'opérateur agissant sur $L^p(\Omega, \mu)$ défini par

$$K = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n.$$

Si $p = 2$, tout opérateur compact peut s'écrire comme ci dessus (il s'agit de sa décomposition en valeurs singulières voir [GGK90] et Théorème 5.1.8). De plus on peut supposer que les familles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont orthonormées.

5.1.2 Résultats principaux

Ici nous allons présenter les résultats principaux de ce chapitre. Le premier résultat est une généralisation de l'approche de Fang et Xia [FX12]. Cette généralisation nous permet de considérer certaines perturbations compactes d'opérateurs de multiplication sur des espaces L^p . On rappelle au lecteur qu'un opérateur diagonal est un opérateur de multiplication sur un espace mesuré $L^2(\Omega, \mu)$ avec μ une mesure purement atomique.

Théorème 5.1.3. *Soit (Ω, μ) un espace mesuré, où μ est une mesure borélienne σ -finie. Soit $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ une fonction à valeurs complexes essentiellement bornée. On suppose que $K \in \mathcal{K}(H)$ est un opérateur compact tel qu'il existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L^p(\Omega, \mu)$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $L^q(\Omega, \mu)$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs tels que pour tout $x \in L^p(\Omega, \mu)$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_{\Omega} x(\xi) \overline{v_n(\xi)} d\mu(\xi) \right) u_n$ converge et $K = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n$. Supposons qu'il existe une courbe de Jordan Γ dans \mathbb{C} telle que*

1. Il existe $a, b \in \sigma_e(M_f)$ tels que a soit dans l'intérieur de la courbe de Jordan Γ et b soit dans l'extérieur de la courbe de Jordan Γ ,
2. $\mu(f^{-1}(\Gamma)) = 0$,
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $z \in \Gamma$, on a que $u_n \in \text{Im}(M_f - z)$ et $v_n \in \text{Im}(M_f - z)^*$,
4. Pour tout $z \in \Gamma$, on note $A(z)$ l'opérateur défini par la formule suivante :
 $A(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n ((M_f - z)^{-1}u_n) \otimes ((M_{\bar{f}} - \bar{z})^{-1}v_n)$. On suppose que pour tout $z \in \Gamma$, on ait que $A(z)$ est un opérateur compact, et que l'application $A : \Gamma \rightarrow \mathcal{K}(X)$ est continue.

Alors l'opérateur borné $M_f + K$ agissant sur $L^p(\Omega, \mu)$ possède un sous-espace hyperinvariant non trivial.

Le deuxième résultat est une généralisation du résultat de Fang et Xia (cf Théorème 5.1.2) dans le cas des perturbations compactes d'opérateur diagonaux dans un espace de Hilbert. Ce résultat est une conséquence du Théorème précédent.

Théorème 5.1.4. Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée d'un espace de Hilbert complexe et séparable H . Soit $D = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n e_n \otimes e_n$ un opérateur diagonal borné agissant sur H . Soit $K \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur compact. On note la décomposition en valeurs singulières de K comme ceci : $K = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n$. Si il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels positifs telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait que $a_n b_n = s_n$ et

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_n \langle u_n, e_k \rangle| < \infty \quad (5.1)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |b_n \langle e_j, v_n \rangle| < \infty. \quad (5.2)$$

Si $D + K \neq \lambda I$, alors $D + K$ possède un sous-espace hyperinvariant non trivial.

Notons que ce résultat généralise le Théorème 5.1.2. Dans un espace de Hilbert, tout opérateur compact K peut s'écrire sous la forme $K = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n$.

5.1.3 Résultats préliminaires

Avant de commencer les preuves des résultats principaux de ce chapitre, on va présenter quelques résultats qui vont nous être utiles. Le premier résultat est classique. On peut trouver une preuve de ce résultat dans le cadre Hilbertien dans l'article de Fang et Xia [FX12, Proposition 4.1]. La preuve utilise le théorème de Lomonosov. Ici nous allons en donner une autre preuve.

Proposition 5.1.5. Soit $P \in \mathcal{B}(X)$ un idempotent tel que $\dim(P(X)) = \dim((I - P)(X)) = \infty$. Alors pour tout opérateur compact $L \in \mathcal{K}(X)$, l'opérateur $P + L$ possède un sous-espace hyperinvariant non trivial.

Démonstration. Si $\sigma_p(P+L) \neq \emptyset$, alors $P+L$ possède un sous-espace hyperinvariant non trivial. Supposons que $\sigma_p(P+L) = \emptyset$. Par le Théorème de Weyl, on a que $\sigma(P+L) \subset \sigma(P) \cup \sigma_p(P+L) = \sigma(P) = \{0, 1\}$. Comme $\{0, 1\} = \sigma_e(P) \subset \sigma(P+L)$, on a que $\sigma(P+L) = \{0, 1\}$. On peut donc trouver un sous-espace hyperinvariant non trivial pour $P+L$ en utilisant le calcul fonctionnel de Riesz-Dunford. \square

Le résultat suivant est une conséquence de la théorie de l'intégrale de Bochner. Le lecteur peut trouver une preuve de ce résultat dans [HP57].

Proposition 5.1.6. *Soit Γ une courbe de Jordan rectifiable continue par morceaux. Si $F : \Gamma \rightarrow \mathcal{K}(X)$ est une application continue, alors*

$$L = \int_{\Gamma} F(z) dz$$

existe et est un opérateur compact.

On rappelle maintenant un résultat classique concernant les opérateurs normaux dans les espaces de Hilbert. Ce résultat nous dit que n'importe quel opérateur normal sur un espace de Hilbert peut être vu comme un opérateur de multiplication sur un certain espace mesuré. On invite le lecteur à regarder par exemple [Arv02, Theorem 2.4.5], pour une preuve de ce résultat.

Théorème 5.1.7. *Soit $N \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal sur un espace de Hilbert complexe H . Alors il existe un espace mesuré (Ω, μ) muni d'une mesure σ -finie, une fonction essentiellement bornée $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ et une isométrie surjective $W : L^2(\Omega, \mu) \rightarrow H$ tels que*

$$WM_f = NW.$$

Nous mentionnons ensuite un résultat à propos des opérateurs compacts dans les espaces de Hilbert. Ce résultat est connu sous le nom de décomposition en valeurs singulières. Le lecteur peut trouver une preuve de ce résultat dans [GGK90, Chapter VI, Theorem 1.1].

Théorème 5.1.8. *Soit $K \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur compact agissant sur un espace de Hilbert H . Alors il existe deux familles orthonormées $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs dans H et une suite de nombres réels positifs $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$, et*

$$K = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n.$$

5.2 Preuve du Théorème 5.1.3

Pour prouver le Théorème 5.1.3, on va s'inspirer de l'approche de Fang et Xia [FX12]. L'idée est de créer une "bonne" formule d'inversion à droite pour $T - z$. Ensuite, en utilisant un calcul fonctionnel de Riesz-Dunford non conventionnel, nous allons prouver que le commutant de T est inclus dans le commutant d'une certaine perturbation

compacte d'un idempotent. Cette dernière possède un sous-espace hyperinvariant non trivial, et donc T aussi. On commence par quelques résultats techniques pour construire la formule d'inversion à droite de $T - z$. Dans cette section on suppose que les hypothèses du Théorème 5.1.3 sont satisfaites. En particulier on suppose que $K = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n$ est un opérateur compact (rappelons que tel qu'il est défini, K n'a aucune raison d'être compact en général).

Lemme 5.2.1. *Notons $T = M_f + K$ la perturbation compacte de l'opérateur de multiplication M_f sur l'espace de Banach $L^p(\Omega, \mu)$. Supposons que les hypothèses 3 et 4 du Théorème 5.1.3 sont satisfaites et que $\sigma_p(T) = \emptyset$. Alors pour tout $z \in \Gamma$, l'opérateur $I + A(z)(M_f - z)$ est inversible.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $z \in \Gamma$ tel que l'opérateur $I + A(z)(M_f - z)$ ne soit pas inversible. Comme $A(z)$ est compact et que l'opérateur $M_f - z$ est borné, on a que $A(z)(M_f - z)$ est compact. Donc $-1 \in \sigma_p(A(z)(M_f - z))$. Il existe un vecteur $h \in L^p(\Omega, \mu)$ non nul tel que $A(z)(M_f - z)h = -h$. On a que

$$\begin{aligned} -h &= A(z)(M_f - z)h \\ &= \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n \left((M_f - z)^{-1} u_n \right) \otimes \left((M_{\bar{f}} - \bar{z})^{-1} v_n \right) \right) (M_f - z)h \\ &= \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n \left((M_f - z)^{-1} u_n \right) \otimes v_n \right) h. \end{aligned}$$

En composant de chaque coté de l'égalité par $M_f - z$ on obtient que

$$-(M_f - z)h = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n \right) h = Kh.$$

Donc on a que $zh = (M_f + K)h = Th$, autrement dit $z \in \sigma_p(T)$. Ceci contredit l'hypothèse que $\sigma_p(T) = \emptyset$. □

Le lemme suivant est une conséquence directe du Lemme 5.2.1.

Lemme 5.2.2. *On suppose que les hypothèses 3 et 4 du Théorème 5.1.3 sont satisfaites et que $\sigma_p(T) = \emptyset$. Alors pour tout $z \in \Gamma$, on a que l'opérateur $B(z) = \left(I + A(z)(M_f - z) \right)^{-1} A(z)$ est compact. De plus l'application*

$$\begin{aligned} B : \Gamma &\rightarrow \mathcal{K}(X) \\ z &\mapsto B(z) \end{aligned}$$

est continue.

On a aussi besoin du lemme suivant.

Lemme 5.2.3. *Soit Γ une courbe de Jordan telle que l'hypothèse 2 du Théorème 5.1.3 soit vérifiée. Soit $\mathcal{L} \subset L^p(\Omega, \mu)$ le sous-espace vectoriel (pas fermé) des combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices d'ensembles mesurables S_i tels que $f(S_i)$ soit à distance strictement positive de Γ . On note $W = \bigcap_{z \in \Gamma} \text{Im}(M_f - z)$. Alors \mathcal{L} et W sont denses dans $L^p(\Omega, \mu)$.*

Démonstration. On a que $w \in \mathcal{L}$ si et seulement si il existe des nombres complexes $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{C}$, des sous ensembles mesurables de $\Omega : S_1, \dots, S_r$ tels que $w = \sum_{i=1}^r a_i \mathbb{1}_{S_i}$ et

$$\inf_{\xi \in S_i, z \in \Gamma} |f(\xi) - z| > 0$$

pour tout $i = 1, \dots, r$.

Pour montrer que l'adhérence de \mathcal{L} est $L^p(\Omega, \mu)$, il suffit de montrer que toutes les fonctions indicatrices d'ensembles mesurables sont dans la fermeture de \mathcal{L} . En effet le sous-espace des combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices est dense dans $L^p(\Omega, \mu)$. Soit B un sous ensemble mesurable de Ω . On note $B_\varepsilon = \{\xi \in B, \text{dist}(f(\xi), \Gamma) > \varepsilon\}$. On a que $\mathbb{1}_{B_\varepsilon}$ tend vers $\mathbb{1}_B$ quand ε tend vers 0 (car $\mu(f^{-1}(\Gamma)) = 0$). De plus on a que $\mathbb{1}_{B_\varepsilon} \in \mathcal{L}$.

Donc la fermeture de \mathcal{L} est $L^p(\Omega, \mu)$. Comme $\mathcal{L} \subset W$, l'adhérence de W est aussi $L^p(\Omega, \mu)$. □

Maintenant on peut montrer le lemme suivant qui est l'analogue du Lemme 3.4 de [FX12].

Lemme 5.2.4. *Avec les notations du Lemme 5.2.2, pour tout $z \in \Gamma$, on note $R(z)$ l'opérateur (éventuellement non borné) défini par $R(z) = (M_f - z)^{-1} - B(z)$. Alors pour tout $w \in W$, on a que*

$$(T - z)R(z)w = w.$$

Dans ce lemme, $R(z)$ peut être un opérateur non borné puisque $(M_f - z)^{-1}$ n'est pas borné lorsque $z \in \sigma(M_f) \cap \Gamma$. D'après le Lemme 5.2.2, on a que $B(z)$ est un opérateur compact pour tout $z \in \Gamma$.

Démonstration. Soient $w \in W$ et $z \in \Gamma$. On observe que

$$\begin{aligned} & (M_f - z)A(z)(M_f - z) \\ &= (M_f - z) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n \left((M_f - z)^{-1} u_n \right) \otimes \left((M_{\bar{f}} - \bar{z})^{-1} v_n \right) \right) (M_f - z) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n \\ &= K. \end{aligned}$$

Pour tout $w \in W \subset \text{Im}(M_f - z)$, l'expression $R(z)w$ a un sens. En remplaçant K par cette expression on a que

$$\begin{aligned}
 & (T - z)R(z)w \\
 &= (M_f - z + K) \left((M_f - z)^{-1} - \left(I + A(z)(M_f - z) \right)^{-1} A(z) \right) w \\
 &= (M_f - z) \left(I + A(z)(M_f - z) \right) \left((M_f - z)^{-1} - \left(I + A(z)(M_f - z) \right)^{-1} A(z) \right) w \\
 &= (M_f - z) \left((M_f - z)^{-1} + A(z) - A(z) \right) w \\
 &= w,
 \end{aligned}$$

ce qui prouve le Lemme 5.2.4. □

Lemme 5.2.5. *Soit $S \in \{T\}'$ et $w \in W$. Alors $Sw \in W$.*

Démonstration. Soit $S \in \{T\}'$, $z \in \Gamma$ et $w \in W$. En utilisant dans la quatrième égalité le fait que $K = (M_f - z)A(z)(M_f - z)$, on a que

$$\begin{aligned}
 Sw &= S(T - z)R(z)w \\
 &= (T - z)SR(z)w \\
 &= (M_f - z)SR(z)w + KSR(z)w \\
 &= (M_f - z)SR(z)w + (M_f - z)A(z)(M_f - z)SR(z)w \\
 &= (M_f - z) \left(SR(z)w + A(z)(M_f - z)SR(z)w \right).
 \end{aligned}$$

Donc $Sw \in \text{Im}(M_f - z)$. □

Proposition 5.2.6. *Soit Γ une courbe de Jordan qui satisfait les hypothèses 1 et 2 du Théorème 5.1.3. On note Θ la composante connexe de \mathbb{C} bornée par Γ et m la mesure de Lebesgue sur le plan complexe. Alors pour tout $w \in \mathcal{L}$ on a*

$$M_{\mathbb{1}_{f^{-1}(\Theta)}} w = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (M_f - z)^{-1} w \, dz,$$

où la courbe de Jordan Γ est orientée dans le sens trigonométrique. De plus, si il existe $a, b \in \sigma_e(M_f)$ tels que $a \in \Theta$ et $b \notin \Theta$, alors $\dim(\text{Im}(M_{\mathbb{1}_{f^{-1}(\Theta)}})) = \dim(\text{Im}(I - M_{\mathbb{1}_{f^{-1}(\Theta)}})) = \infty$.

Observons que $M_{\mathbb{1}_{f^{-1}(\Theta)}}$ est idempotent (c'est à dire que $(M_{\mathbb{1}_{f^{-1}(\Theta)}})^2 = M_{\mathbb{1}_{f^{-1}(\Theta)}}$).

Démonstration. Soit $w \in \mathcal{L}$. Alors il existe des nombres complexes $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{C}$ et des sous ensembles mesurables de Ω , S_1, \dots, S_r , tels que $w = \sum_{i=1}^r a_i \mathbb{1}_{S_i}$ et $\inf_{\xi \in S_i, z \in \Gamma} |f(\xi) - z| > 0$ pour tout $i = 1, \dots, r$. Comme $\mu(f^{-1}(\Gamma)) = 0$, on a pour

μ -presque tout $\xi \in \Omega$ que $f(\xi) \notin \Gamma$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (M_f - z)^{-1} w(\xi) dz &= \sum_{i=1}^r \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{a_i \mathbb{1}_{S_i}(\xi)}{f(\xi) - z} dz \\ &= \sum_{i=1}^r a_i \mathbb{1}_{S_i}(\xi) \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{f(\xi) - z} dz \\ &= - \sum_{i=1}^r a_i \mathbb{1}_{S_i}(\xi) \mathbb{1}_{\Theta}(f(\xi)) \\ &= -M_{\mathbb{1}_{f^{-1}(\Theta)}} w(\xi). \end{aligned}$$

Maintenant nous allons montrer que si $a \in \sigma_e(M_f) \cap \Theta$, alors $\dim(\text{Im}(M_{\mathbb{1}_{f^{-1}(\Theta)}})) = \infty$. Un argument similaire permet de prouver l'autre affirmation. D'abord, remarquons que pour tout opérateur compact $L \in \mathcal{K}(L^p(\Omega, \mu))$, on a que $a \in \sigma(M_f + L)$. Autrement dit, $M_f + L - aI$ n'a pas d'inverse borné. Soit $\varepsilon > 0$ et notons par B le disque $B = \{w \in \mathbb{C}, |a - w| < \varepsilon\}$. Notons $\tilde{f} = f - (f - a - \varepsilon)\mathbb{1}_{f^{-1}(B)}$. Si $|f(\xi) - a| \geq \varepsilon$, alors $\tilde{f}(\xi) - a = f(\xi) - a$. Sinon on a que $\tilde{f}(\xi) - a = \varepsilon$. Maintenant \tilde{f} est une fonction bornée et $\tilde{f} - a$ est minorée strictement par rapport à zéro (c'est à dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour presque tout $\xi \in \Omega$, $|\tilde{f}(\xi) - a| \geq c > 0$). Donc $\frac{1}{\tilde{f} - a}$ est une fonction bornée et

$$M_{\frac{1}{\tilde{f} - a}} = (M_{\tilde{f}} - a)^{-1} = (M_f - M_{f - a - \varepsilon} M_{\mathbb{1}_{f^{-1}(B)}} - a)^{-1}$$

est un opérateur borné. Si $M_{\mathbb{1}_{f^{-1}(B)}}$ était un opérateur compact, alors $M_{\tilde{f}} - a$ ne serait pas inversible. Donc $M_{\mathbb{1}_{f^{-1}(B)}}$ n'est pas un idempotent compact. De plus on a que $\dim(\text{Im}(M_{\mathbb{1}_{f^{-1}(B)}})) = \infty$. Quitte à choisir ε suffisamment petit, on a que $\text{Im}(M_{\mathbb{1}_{f^{-1}(B)}}) \subset \text{Im}(M_{\mathbb{1}_{f^{-1}(\Theta)}})$, et donc $\dim(\text{Im}(M_{\mathbb{1}_{f^{-1}(\Theta)}})) = \infty$. \square

Maintenant nous sommes prêts à démontrer le Théorème 5.1.3.

Proof of Theorem 5.1.3. Supposons que $\sigma_p(T) = \emptyset$. On rappelle que pour tout $z \in \Gamma$, $B(z) = (I + A(z)(M_f - z))^{-1} A(z)$ et $R(z) = (M_f - z)^{-1} - B(z)$. D'après le Lemme 5.2.2, $B(z)$ est un opérateur compact et l'application $B : \Gamma \rightarrow \mathcal{K}(X)$ est continue. Donc $\|B(z)\|$ est bornée sur l'ensemble compact Γ et on a

$$\int_{\Gamma} \|B(z)\| dz < \infty.$$

De plus, par le Lemme 5.2.4,, on a pour tout $w \in W$ que $(T - z)R(z)w = w$. D'après la Proposition 5.1.6, on a que

$$L = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} B(z) dz$$

est un opérateur compact. D'après la Proposition 5.2.6, on sait qu'il existe un idempotent P ($P = M_{\mathbb{1}_{f^{-1}(\Theta)}}$) tel que pour tout $w \in \mathcal{L}$,

$$Pw = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (M_f - z)^{-1} w dz,$$

et tel que $\dim(P(X)) = \dim((I - P)(X)) = \infty$.

Soit $S \in \{T\}'$. Alors pour tout $w \in W$ on a que $(T - z)SR(z)w = S(T - z)R(z)w = Sw = (T - z)R(z)Sw$ (car $Sw \in W$ par le Lemme 5.2.5). Comme $\sigma_p(T) = \emptyset$, l'opérateur $T - z$ est injectif. Donc $SR(z)w = R(z)Sw$. Pour tout $w \in \mathcal{L}$ (rappelons que $\mathcal{L} \subset W$) on a

$$S(P + L)w = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma} SR(z)w \, dz = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma} R(z)Sw \, dz = (P + L)Sw.$$

Comme la fermeture de \mathcal{L} est $L^p(\Omega, \mu)$, on a que $S \in \{P + L\}'$. Donc $\{T\}' \subset \{P + L\}'$. Comme $P + L$ possède un sous-espace hyperinvariant non trivial par la Proposition 5.1.5, T aussi en possède un. \square

5.3 Corollaires dans un espace de Hilbert

Dans cette section on va donner quelques corollaires du Théorème 5.1.3 pour des perturbations compactes d'opérateurs normaux et diagonaux dans un espace de Hilbert. On donnera aussi quelques exemples.

Soit $N \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal sur un espace de Hilbert. Soit (Ω, μ) un espace mesuré, $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ et $W : L^2(\Omega, \mu) \rightarrow H$ un opérateur unitaire comme dans le Théorème Spectral 5.1.7. Soit $K \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur compact. Alors WKW^* est un opérateur compact agissant sur $L^2(\Omega, \mu)$, donc par le Théorème de décomposition en valeurs singulières 5.1.8, il existe une suite de nombre réels positifs $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ et il existe deux familles de vecteurs orthonormés $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $L^2(\Omega, \mu)$ telles que

$$WKW^* = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n.$$

avec ces notations On peut énoncer ce corollaire direct du Théorème 5.1.3.

Corollaire 5.3.1. *Soit $N \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur normal borné et $K \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur compact. Avec les mêmes notations que précédemment, supposons qu'il existe une courbe de Jordan Γ telle que*

1. *Il existe $a, b \in \sigma_e(N)$ tels que a soit dans l'intérieur de la courbe de Jordan Γ et b soit dans l'extérieur de la courbe de Jordan Γ ,*
2. *$\mu(f^{-1}(\Gamma)) = 0$,*
3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $z \in \Gamma$, on a que $u_n \in \text{Im}(M_f - z)$ et $v_n \in \text{Im}(M_f - z)^*$,*
4. *Pour tout $z \in \Gamma$, on note $A(z)$ l'opérateur (éventuellement non borné) défini par $A(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n ((M_f - z)^{-1}u_n) \otimes ((M_{\bar{f}} - \bar{z})^{-1}v_n)$. On suppose que pour tout $z \in \Gamma$, on ait que $A(z)$ est un opérateur compact, et l'application $A : \Gamma \rightarrow \mathcal{K}(H)$ est continue.*

Alors l'opérateur $T = N + K$ possède un sous-espace hyperinvariant non trivial.

Nous allons donner quelques applications simples de ce corollaire.

Exemple 5.3.2. Soit (Ω, μ) un espace mesuré muni d'une mesure σ -finie. Plus précisément, on prend $\Omega = \{\xi \in \mathbb{C}, |\xi| \leq 1\}$ et on munit cet espace de $\mu = m$ la mesure de Lebesgue sur le plan complexe. Soit $A = \{\xi \in \mathbb{C}, \frac{1}{3} \leq |\xi| \leq \frac{2}{3}\}$. Soit $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ la fonction bornée définie pour tout $\xi \in \Omega$ par $f(\xi) = \xi$. Soient $g, h \in L^2(\Omega, \mu)$. On pose $u = (1 - \mathbb{1}_A)g$ et $v = (1 - \mathbb{1}_A)h$. Soit $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}, |z| = \frac{1}{2}\}$. Alors $\sigma_\varepsilon(M_f) = \Omega$, $\mu(f^{-1}(\Gamma)) = 0$ et pour tout $z \in \Gamma$, $\frac{u}{f-z}, \frac{v}{f-z} \in L^2(\Omega, \mu)$. De plus l'application

$$A : \Gamma \rightarrow \mathcal{K}(H)$$

$$z \mapsto \frac{u}{f-z} \otimes \frac{v}{f-z}$$

est continue. Par le Corollaire 5.3.1, $M_f + u \otimes v$ a un sous-espace hyperinvariant non trivial.

Exemple 5.3.3. Soit (Ω, μ) un espace mesuré muni d'une mesure σ -finie. Plus précisément, on prend $\Omega = \{\xi \in \mathbb{C}, |\xi| \leq 1\}$ et on munit cet espace de $\mu = m$ la mesure de Lebesgue sur le plan complexe. Soit $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ la fonction bornée définie pour tout $\xi \in \Omega$ par $f(\xi) = \xi$. Soient $g_n, h_n \in L^2(\Omega, \mu)$ tels que $\|g_n\| \leq 1$ et $\|h_n\| \leq 1$. On pose $u_n(\xi) = (1 - |\xi|)g_n(\xi)$ et $v_n(\xi) = (1 - |\xi|)h_n(\xi)$. Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n < \infty$. On pose $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Alors pour tout $z \in \Gamma$ on a que

$$\int_{\Omega} \frac{|u_n(\xi)|^2}{|\xi - z|^2} d\mu(\xi) \leq \int_{\Omega} \frac{|1 - |\xi||^2 |g_n(\xi)|^2}{||\xi| - |z||^2} d\mu(\xi) = \int_{\Omega} \frac{|1 - |\xi||^2 |g_n(\xi)|^2}{||\xi| - 1|^2} d\mu(\xi)$$

$$= \int_{\Omega} |g_n(\xi)|^2 d\mu(\xi) < \infty.$$

Donc $u_n \in \text{Im}(M_f - z)$. De la même manière, on peut montrer que $v_n \in \text{Im}(M_f - z)^*$. Pour tout $z \in \Gamma$, on a que

$$\|A(z)\| = \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n \left((M_f - z)^{-1} u_n \right) \otimes \left((M_{\bar{f}} - \bar{z})^{-1} v_n \right) \right\|$$

$$\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n \|g_n\| \|h_n\|$$

$$\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n < \infty.$$

Donc $A(z)$ est un opérateur borné. On pose $A_N(z) = \sum_{n=1}^N s_n \left((M_f - z)^{-1} u_n \right) \otimes \left((M_{\bar{f}} - \bar{z})^{-1} v_n \right)$. Alors on a que

$$\|A(z) - A_N(z)\| = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} s_n \left((M_f - z)^{-1} u_n \right) \otimes \left((M_{\bar{f}} - \bar{z})^{-1} v_n \right) \right\| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} s_n.$$

Le dernier terme est le reste d'une série convergente, donc il tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Donc $A(z)$ est une limite d'une suite d'opérateurs de rang fini, donc c'est un opérateur compact.

Soient $z_1, z_2 \in \Gamma$. Alors

$$\|A(z_1) - A(z_2)\| \leq \|A(z_1) - A_N(z_1)\| + \|A_N(z_1) - A_N(z_2)\| + \|A_N(z_2) - A(z_2)\|.$$

Les quantités à droite sont petites si N est assez grand et si z_1 est assez proche de z_2 . Donc l'application $A : \Gamma \rightarrow \mathcal{K}(H)$ est continue. Ainsi, $M_f + \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n$ possède un sous-espace hyperinvariant non trivial.

Maintenant on donne une version du Corollaire 5.3.1 pour des perturbations compactes d'opérateurs diagonaux.

Corollaire 5.3.4. *Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée de l'espace de Hilbert H . Soit $D = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n e_n \otimes e_n$ un opérateur diagonal borné agissant sur H . Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux familles de vecteurs orthonormés de H . On note $K = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n$. Supposons qu'il existe une courbe de Jordan Γ telle que*

1. *Il existe deux points a, b d'accumulation de valeurs propres de D tels que a soit dans l'intérieur de la courbe de Jordan Γ et b soit dans l'extérieur de la courbe de Jordan Γ ,*
2. $\Gamma \cap \sigma_p(D) = \emptyset$,
3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z \in \Gamma$, on a que $u_n \in \text{Im}(D - z)$ and $v_n \in \text{Im}(D - z)^*$,*
4. *Pour tout $z \in \Gamma$ on note $A(z)$ l'opérateur (éventuellement non borné) défini par $A(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n ((D - z)^{-1} u_n) \otimes ((D^* - \bar{z})^{-1} v_n)$. Pour tout $z \in \Gamma$, on suppose que $A(z)$ est un opérateur compact, et que l'application $A : \Gamma \rightarrow \mathcal{K}(H)$ est continue.*

Alors l'opérateur $T = N + K$ possède un sous-espace hyperinvariant non trivial.

Démonstration. Soit $\Omega = \mathbb{N}$. On pose $\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \delta_{\{n\}}$, avec $\delta_{\{n\}}$ la mesure de Dirac au point $\{n\}$. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $f(n) = \lambda_n$. Alors D est unitairement équivalent à M_f , l'opérateur de multiplication par la fonction f agissant sur $L^2(\Omega, \mu)$. Comme a et b sont des points d'accumulation de valeurs propres de D , on a que $a, b \in \sigma_e(D) = \sigma_e(M_f)$. Comme $\Gamma \cap \sigma_p(D) = \emptyset$, on a que $f^{-1}(\Gamma) = \emptyset$, donc $\mu(f^{-1}(\Gamma)) = 0$. Par le Corollaire 5.3.1, $D + K$ possède un sous-espace hyperinvariant non trivial. \square

5.4 Conséquences pour des perturbations compactes d'opérateurs diagonaux agissant sur des espaces de Hilbert : preuve du Théorème 5.1.4

Le but de cette section est de prouver le Théorème 5.1.4. Nous allons avoir besoin de quelques résultats préliminaires avant de commencer la preuve du Théorème 5.1.4. Tout d'abord, nous allons montrer cette version modifiée du Lemme 2.1 de [FX12].

Lemme 5.4.1. *Soit $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes, et soit $(\alpha_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_{n,k}| < \infty.$$

Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|\alpha_{n,k}|^2}{|\operatorname{Re}(\lambda_k) - x|^2} < \infty.$$

Démonstration. Supposons que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_{n,k}| < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$2\delta \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_{n,k}| < \varepsilon.$$

On note $I_{n,k}$ l'intervalle $[\operatorname{Re}(\lambda_k) - \delta\alpha_{n,k}, \operatorname{Re}(\lambda_k) + \delta\alpha_{n,k}]$, et on définit les fonctions $f_{n,k}$ sur \mathbb{R} par la formule suivante :

$$f_{n,k}(x) = \frac{|\alpha_{n,k}|^2}{|\operatorname{Re}(\lambda_k) - x|^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus I_{n,k}}(x).$$

On a que

$$\int_{\mathbb{R}} f_{n,k}(x) dx = \int_{\mathbb{R} \setminus I_{n,k}} \frac{|\alpha_{n,k}|^2}{|\operatorname{Re}(\lambda_k) - x|^2} dx = |\alpha_{n,k}|^2 \frac{2}{\delta |\alpha_{n,k}|} = \frac{2 |\alpha_{n,k}|}{\delta}.$$

Notons F la fonction $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} f_{n,k}(x)$. Comme les fonctions $f_{n,k}$ sont positives, en utilisant le théorème de Beppo-Levi on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} F(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} f_{n,k}(x) dx = \frac{2}{\delta} \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_{n,k}| < \infty.$$

Donc $F \in L^1$, et pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F(x) < \infty$. On note Λ l'ensemble

$$\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{R}, \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\alpha_{n,k}|^2}{|\operatorname{Re}(\lambda_k) - x|^2} = \infty \right\}.$$

On a que

$$\Lambda \subset \left(\bigcup_{k,n \in \mathbb{N}} I_{n,k} \right) \cup \{x \in \mathbb{R}, F(x) = \infty\}.$$

En utilisant l'additivité de la mesure de Lebesgue, on obtient que

$$\begin{aligned} m(\Lambda) &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} m(I_{n,k}) + m(\{x \in \mathbb{R}, F(x) = \infty\}) \\ &= 2\delta \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_{n,k}| + 0 \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme on a choisi ε de manière arbitraire, on a que $m(\Lambda) = 0$. □

Lemme 5.4.2. *Supposons que les conditions (5.1) et (5.2) du Théorème 5.1.4 sont satisfaites, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a que*

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|a_n \langle u_n, e_k \rangle|^2}{|\operatorname{Re}(\lambda_k) - x|^2} < \infty, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{|b_n \langle e_j, v_n \rangle|^2}{|\operatorname{Re}(\lambda_k) - x|^2} < \infty$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du Lemme 5.4.1. □

Pour pouvoir utiliser le Théorème 5.1.3, on va devoir trouver une courbe de Jordan qui va séparer les valeurs propres de D en deux parties. Puis il faudra vérifier que $A(z)$ possède bien toutes les propriétés requises sur Γ . D'abord on pose $A_1(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n ((D - z)^{-1} u_n) \otimes e_n$ et $A_2(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n e_n \otimes ((D^* - \bar{z})^{-1} v_n)$. On remarque que

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n \left((D - z)^{-1} u_n \right) \otimes \left((D^* - \bar{z})^{-1} v_n \right) \\ &= \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \left((D - z)^{-1} u_n \right) \otimes e_n \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n e_n \otimes \left((D^* - \bar{z})^{-1} v_n \right) \right) \\ &= A_1(z) A_2(z). \end{aligned}$$

Maintenant nous avons juste besoin d'estimer $\|A_1(z)\|$ et $\|A_2(z)\|$. Ensuite nous pourrons choisir la courbe de Jordan Γ dont nous avons besoin.

Lemme 5.4.3. *Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$. On note $x = \operatorname{Re}(z)$. Supposons que la condition (5.1) du Théorème 5.1.4 est satisfaite. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\operatorname{Re}(\lambda_k), k \in \mathbb{N}\}$, $A_1(z)$ est un opérateur borné et on a que*

$$\|A_1(z)\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|a_n \langle u_n, e_k \rangle|^2}{|\operatorname{Re}(\lambda_k) - x|^2}.$$

5.4. Conséquences pour des perturbations compactes d'opérateurs diagonaux agissant sur des espaces de Hilbert : preuve du Théorème 5.1.4

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$. Rappelons nous que $|\operatorname{Re}(\lambda_k - z)| \leq |\lambda_k - z|$. On a que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|a_n \langle u_n, e_k \rangle|^2}{|\lambda_k - z|^2} \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|a_n \langle u_n, e_k \rangle|^2}{|\operatorname{Re}(\lambda_k) - x|^2}.$$

Soit $h \in H$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on obtient que

$$\begin{aligned} \|(A_1(z))(h)\|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n \langle h, e_n \rangle \langle u_n, e_k \rangle}{\lambda_k - z} \right|^2 \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n \langle u_n, e_k \rangle}{\lambda_k - z} e_n \right\|^2 \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, h_n \rangle e_n \right\|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{a_n \langle u_n, e_k \rangle}{\lambda_k - z} \right|^2 \|h\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi l'inégalité est prouvée. Notons que nous nous sommes servis de la condition (5.1) dans l'application de l'inégalité Cauchy-Schwartz pour nous assurer que $\left(\frac{a_n \langle u_n, e_k \rangle}{\lambda_k - z} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de carré sommable. \square

De la même manière, on peut montrer le lemme suivant.

Lemme 5.4.4. *Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$. On note $x = \operatorname{Re}(z)$. Supposons que la condition (5.2) du Théorème 5.1.4 est satisfaite. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\operatorname{Re}(\lambda_k), k \in \mathbb{N}\}$, $A_2(z)$ est un opérateur borné et on a que*

$$\|A_2(z)\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{|b_n \langle e_j, v_n \rangle|^2}{|\operatorname{Re}(\lambda_k) - x|^2}.$$

Lemme 5.4.5. *Supposons que les conditions (5.1) et (5.2) du Théorème 5.1.4 soient satisfaites. Alors pour presque tout $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\operatorname{Re}(\lambda_k), k \in \mathbb{N}\}$, pour tout $z \in s_0 = \{z = x_0 + iy, y \in \mathbb{R}\}$, on a que les opérateurs $A_1(z)$ et $A_2(z)$ sont compacts. De plus les applications $A_1 : s_0 \rightarrow \mathcal{K}(H)$ et $A_2 : s_0 \rightarrow \mathcal{K}(H)$ sont continues.*

Démonstration. Rappelons nous d'abord que les conditions (5.1) et (5.2) et les Lemmes 5.4.3 et 5.4.4 nous garantissent que les opérateurs $A_1(z)$ et $A_2(z)$ sont bornés pour presque tout x_0 . Soit E_N la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par e_0, e_1, \dots, e_N . Alors on a que

$$E_N A_1(z) = \sum_{k \leq N} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n \langle u_n, e_k \rangle}{\lambda_k - z} e_k \otimes e_n.$$

Notons que $E_N A_1(z)$ est de rang fini. Donc on a que

$$A_1(z) - E_N A_1(z) = \sum_{k > N} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n \langle u_n, e_k \rangle}{\lambda_k - z} e_k \otimes e_n.$$

En utilisant le Lemme 5.4.3, on obtient que

$$\|A_1(z) - E_N A_1(z)\| \leq \sum_{k>N} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|a_n \langle u_n, e_k \rangle|^2}{|\operatorname{Re}(\lambda_k) - x|^2}.$$

D'après le Lemme 5.4.2, le terme de droite est le reste d'une série convergente pour presque tout $x_0 \in \mathbb{R}$, donc elle tend vers zero quand N tend vers l'infini. Donc $A_1(z)$ est limite uniforme d'opérateurs de rang fini, et donc c'est un opérateur compact.

Maintenant on choisit $z_1, z_2 \in s_0$. Grâce à l'inégalité triangulaire, on obtient que

$$\begin{aligned} \|A_1(z_1) - A_1(z_2)\| &\leq \|A_1(z_1) - E_N A_1(z_1)\| \\ &\quad + \|E_N A_1(z_1) - E_N A_1(z_2)\| \\ &\quad + \|E_N A_1(z_2) - A_1(z_2)\|. \end{aligned}$$

On peut choisir $N \in \mathbb{N}$ assez grand, tel que les normes $\|A_1(z_1) - E_N A_1(z_1)\|$ et $\|E_N A_1(z_2) - A_1(z_2)\|$ soient petites. Maintenant un calcul simple nous donne que

$$E_N A_1(z_1) - E_N A_1(z_2) = \left(\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\lambda_k - z_1} - \frac{1}{\lambda_k - z_2} \right) e_k \otimes e_k \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n u_n \otimes e_n \right).$$

Ainsi on a

$$\|E_N A_1(z_1) - E_N A_1(z_2)\| \leq \max_{k=1, \dots, N} \left| \frac{1}{\lambda_k - z_1} - \frac{1}{\lambda_k - z_2} \right| \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n u_n \otimes e_n \right\|.$$

Notons que $\|\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n u_n \otimes e_n\|$ ne dépend pas de z_1, z_2 . On a que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_0 \neq \operatorname{Re}(\lambda_k)$, donc la fonction $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(y) = \frac{1}{\lambda_k - x_0 - iy}$ est continue. Donc la quantité

$$\max_{k=1, \dots, N} \left| \frac{1}{\lambda_k - z_1} - \frac{1}{\lambda_k - z_2} \right|$$

est petite quand z_1 est proche de z_2 . On en déduit que $\|E_N A_1(z_1) - E_N A_1(z_2)\|$ est petite quand z_1 est proche de z_2 . Ainsi l'application $A_1 : s_0 \rightarrow \mathcal{K}(H)$ est continue. On peut faire une preuve similaire pour $A_2 : s_0 \rightarrow \mathcal{K}(H)$. \square

Notons que si $A_1(z)$ et $A_2(z)$ vérifient les conditions 3 et 4 du Théorème 5.1.3, alors $A(z) = A_1(z)A_2(z)$ aussi. Maintenant nous sommes prêts pour la preuve du Théorème 5.1.4.

Preuve du Théorème 5.1.4. On note ρ le rayon spectral de D . Si $\sigma_e(D) = \{\lambda\}$, alors il existe un opérateur compact K_e tel que $D = \lambda I + K_e$. Donc $T = D + K = \lambda I + K_e + K$ est une perturbation compacte d'un multiple de l'identité, et le Théorème de Lomonosov nous garantit l'existence d'un sous-espace hyperinvariant non trivial.

Supposons que $\sigma_e(D)$ contient au moins deux points a et b . Quitte à considérer si nécessaire une rotation $e^{i\theta}D$ de D on peut supposer que $\operatorname{Re}(a) < \operatorname{Re}(b)$. Par

5.4. Conséquences pour des perturbations compactes d'opérateurs diagonaux
agissant sur des espaces de Hilbert : preuve du Théorème 5.1.4

le Lemme 5.4.5, pour presque tout $x_0 \in]\operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b)[\setminus \{\operatorname{Re}(\lambda_k), k \in \mathbb{N}\}$, on pose $s_0 = \{x_0 + iy, y \in [-\rho - 1, \rho + 1]\}$, on a que l'application $A : s_0 \rightarrow \mathcal{K}(H)$ est bien définie et continue. On pose

$$\begin{aligned} s_1 &= \{x + i(\rho + 1), x \in [x_0 - \rho - 1, x_0]\} \\ s_2 &= \{x_0 - \rho - 1 + iy, y \in [-\rho - 1, \rho + 1]\} \\ s_3 &= \{x - i(\rho + 1), x \in [x_0 - \rho - 1, x_0]\}. \end{aligned}$$

On remarque que $(s_1 \cup s_2 \cup s_3 \cup (s_0 \setminus \sigma(D))) \cap \sigma(D) = \emptyset$. Donc pour tout $z \in s_1 \cup s_2 \cup s_3 \cup (s_0 \setminus \sigma(D))$, $(D - z)^{-1}$ est un opérateur borné. Donc on a que

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n \left((D - z)^{-1} u_n \right) \otimes \left((D^* - \bar{z})^{-1} v_n \right) \\ &= (D - z)^{-1} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} s_n u_n \otimes v_n \right) (D - z)^{-1} \\ &= (D - z)^{-1} K (D - z)^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi l'application $A : s_1 \cup s_2 \cup s_3 \cup (s_0 \setminus \sigma(D)) \rightarrow \mathcal{K}(H)$ est bien définie et continue. On pose $\Gamma = s_0 \cup s_1 \cup s_2 \cup s_3$. Comme $A : s_0 \rightarrow \mathcal{K}(H)$ est continue et $s_0 \cap (s_1 \cup s_2 \cup s_3 \cup (s_0 \setminus \sigma(D))) \neq \emptyset$, on a que l'application $A : \Gamma \rightarrow \mathcal{K}(H)$ est continue. Finalement, il nous reste plus qu'à appliquer le Théorème 5.1.3 pour conclure. \square

Chapitre 6

Perturbations de rang un d'opérateurs diagonaux

6.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux perturbations de rang un d'opérateurs diagonaux. Sans entrer tout de suite dans les détails, on va chercher des perturbations de rang un qui vont changer la nature du spectre d'un opérateur diagonal. Cette étude est motivée par une question posée par Ionascu dans [Ion01]. Tout d'abord on commence par fixer quelques notations. Dans ce chapitre, H est un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie, et $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ désigne une base hilbertienne de H . Soient $u, v \in H$ deux vecteurs. On note $u \otimes v$ l'opérateur de rang un défini pour tout $h \in H$ par la formule

$$u \otimes v(h) = \langle h, v \rangle u.$$

On rappelle que $u \otimes v$ est un opérateur de rang un, et que pour tout opérateur $R \in \mathcal{B}(H)$ de rang un, il existe $u, v \in H$ (pas uniques) tels que $R = u \otimes v$. Un opérateur D est dit diagonal si il existe une suite de nombre complexes $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et une base orthonormée $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de H telles que

$$D = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i e_i \otimes e_i.$$

Question 6.1.1 (Ionascu [Ion01]). *Soit D un opérateur diagonal. Est-ce qu'il existe une perturbation de rang un de cet opérateur, sans valeur propre, qui conserve le spectre ? Autrement dit, est-ce qu'il existe $u, v \in H$ tels que*

1. $\sigma(D + u \otimes v) = \sigma(D)$,
2. $\sigma_p(D + u \otimes v) = \emptyset$?

On mentionne aussi que Stampfli [Sta84] a construit un opérateur diagonal D et un opérateur de rang un $u \otimes v$ tel que $D + u \otimes v$ n'a aucune valeur propre.

Théorème 6.1.2 ([Sta84]). *Il existe un opérateur diagonal $D \in \mathcal{B}(H)$ avec $\sigma(D) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) \in [0, 1]\}$ et il existe deux vecteurs $u, v \in H$ tels que $\sigma_p(D + u \otimes v) = \emptyset$.*

A l'inverse Sophie Grivaux dans [Gri12] a construit une perturbation de rang un d'un opérateur diagonal unitaire qui possède une infinité non dénombrable de valeurs propres de module 1.

Théorème 6.1.3 ([Gri12]). *Il existe un opérateur diagonal unitaire U et il existe deux vecteurs $u, v \in H$ tels que $\sigma_p(U + u \otimes v) \cap \mathbb{T}$ soit non dénombrable. De plus $U + u \otimes v$ est hypercyclique.*

Ce résultat est une réponse positive à une question de Shkarin qui demandait si il existait une perturbation de rang un d'un opérateur unitaire qui était hypercyclique.

6.2 Quelques résultats existants sur les perturbations d'opérateurs diagonaux

Dans cette section on va rappeler quelques résultats de Ionascu sur le spectre des perturbations de rang un d'opérateurs diagonaux.

Proposition 6.2.1 (Ionascu [Ion01]). *Soit $D = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i e_i \otimes e_i$ un opérateur diagonal. Si il existe $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i \neq j$ et $\lambda_i = \lambda_j$, alors pour tout $u, v \in H$ on a que*

$$\lambda_i \in \sigma_p(D + u \otimes v).$$

Démonstration. On pose $\lambda = \lambda_i = \lambda_j$ et $T = D + u \otimes v$. On a que

$$(T - \lambda_i)e_i = \lambda_i e_i + \langle e_i, v \rangle u - \lambda_i e_i = \langle e_i, v \rangle u.$$

De même, on a que $(T - \lambda_j)e_j = \langle e_j, v \rangle u$. Si $\langle e_i, v \rangle = 0$ (respectivement $\langle e_j, v \rangle = 0$), alors e_i (respectivement e_j) est un vecteur propre de T , et donc $\lambda \in \sigma_p(D + u \otimes v)$. Sinon on a que

$$(T - \lambda) \left(\frac{e_i}{\langle e_j, v \rangle} - \frac{e_j}{\langle e_i, v \rangle} \right) = 0,$$

donc $\lambda \in \sigma_p(D + u \otimes v)$. □

Si on se souvient que seuls les opérateurs diagonaux de multiplicité spectrale égale à un possèdent un vecteur cyclique, on peut réinterpréter le résultat précédent de la manière suivante.

Corollaire 6.2.2. *Soit D un opérateur diagonal qui ne possède pas de vecteur cyclique. Pour tous vecteurs $u, v \in H$, on a que*

$$\sigma_p(D + u \otimes v) \neq \emptyset.$$

Ce corollaire nous dit que si D n'a pas de vecteur cyclique, la réponse à la Question 6.1.1 est non. Voici un autre résultat de Ionascu.

Théorème 6.2.3 (Ionascu [Ion01]). *Soit $D = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i e_i \otimes e_i$ un opérateur diagonal. Soit $i \in \mathbb{N}$. Si pour tout $j \neq i$, $\lambda_j \neq \lambda_i$, et si λ_i est un point isolé de $\sigma(D)$, alors pour tous $u, v \in H$, on a l'alternative suivante*

1. soit $\lambda_i \in \sigma_p(D + u \otimes v)$,
2. soit $\lambda_i \notin \sigma(D + u \otimes v)$.

Ce théorème nous dit que si $\sigma(D)$ possède des points isolés, alors la réponse à la Question 6.1.1 est non.

Démonstration. Supposons que $\lambda_i \neq 0$ (sinon on peut considérer $D + \alpha I$ avec $\alpha \neq 0$ et faire le même raisonnement). On pose $T = D - \lambda_i e_i \otimes e_i$. Comme λ_i est une valeur propre isolée de D , on a que $\sigma(T) = (\sigma(D) \setminus \{\lambda_i\}) \cup \{0\}$. On a que

$$D + u \otimes v = T + \lambda_i e_i \otimes e_i + u \otimes v.$$

Comme $\lambda_i e_i \otimes e_i + u \otimes v$ est un opérateur compact (car de rang fini), d'après le théorème de Weyl, on a que $\sigma(D + u \otimes v) \setminus \sigma(T) \subset \sigma_p(D + u \otimes v)$. Autrement dit, si λ_i est dans le spectre de $D + u \otimes v$, alors c'est une valeur propre de ce dernier. \square

Définition 6.2.4. Soit $E \subset \mathbb{C}$ un sous ensemble du plan complexe. On dit que E est un ensemble *parfait* si il ne possède pas de points isolés.

On vient de voir que si D n'a pas de vecteur cyclique ou si D a un point isolé, alors la réponse à la Question 6.1.1 est non. Par contre les résultats de Ionascu ne disent rien sur les opérateurs diagonaux qui possèdent un vecteur cyclique et qui n'ont pas de point isolé dans leur spectre. Autrement dit, après les travaux de Ionascu, la question à laquelle il n'y a pas de réponse est celle ci.

Question 6.2.5. *Soit $D = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i e_i \otimes e_i$ un opérateur diagonal. On suppose que D possède un vecteur cyclique. De plus on suppose que $\sigma(D)$ est un ensemble parfait. Est-ce qu'il existe une perturbation de rang un de cet opérateur, sans valeur propre, qui conserve le spectre? Autrement dit, est-ce qu'il existe $u, v \in H$ tels que*

1. $\sigma(D + u \otimes v) = \sigma(D)$,
2. $\sigma_p(D + u \otimes v) = \emptyset$?

Le résultat suivant est encore dû à Ionascu et nous donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que z soit une valeur propre d'une perturbation de rang un d'un opérateur diagonal.

Proposition 6.2.6 (Ionascu [Ion01]). *Soit $D = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i e_i \otimes e_i$ un opérateur diagonal tel que pour tous $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$. Soient $u, v \in H$ tels que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on ait que $\langle u, e_i \rangle \neq 0$ et $\langle v, e_i \rangle \neq 0$. On a que $z \in \sigma_p(D + u \otimes v)$ si et seulement si*

1. $z \notin \sigma_p(D)$,
2. $\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|\langle u, e_i \rangle|^2}{|z - \lambda_i|^2} < \infty$,
3. $\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\langle u, e_i \rangle \overline{\langle v, e_i \rangle}}{z - \lambda_i} = 1$.

Démonstration. On va prouver le sens " \Rightarrow ". Soit $z \in \sigma_p(D + u \otimes v)$, alors il existe $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$ et

$$Dx + u \otimes v(x) = Dx + \langle x, v \rangle u = zx.$$

Autrement dit on a que

$$\langle x, v \rangle u = (z - D)x.$$

Si $\langle x, v \rangle = 0$, alors $(D - z)x = 0$. Comme les λ_i sont deux à deux distincts, il existe un unique $i \in \mathbb{N}$ tel que $z = \lambda_i$ et $x = e_i$. Ce qui nous fait que $\langle e_i, v \rangle = \langle x, v \rangle = 0$ et contredit les hypothèses de la proposition. Donc $\langle x, v \rangle \neq 0$. On a donc que

$$u = -(D - z) \frac{x}{\langle x, v \rangle}.$$

Si $z \in \sigma_p(D)$ alors il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $z = \lambda_i$. Donc

$$\langle u, e_i \rangle = - \frac{\langle (D - z)x, e_i \rangle}{\langle x, v \rangle} = - \frac{\langle (D - \lambda_i)x, e_i \rangle}{\langle x, v \rangle} = 0,$$

ce qui contredit les hypothèses de la proposition. Donc $z \notin \sigma_p(D)$.

Si on pose $\tilde{x} = \frac{x}{\langle x, v \rangle}$, on a que pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$\langle u, e_i \rangle = - \langle (D - z)\tilde{x}, e_i \rangle = (z - \lambda_i) \langle \tilde{x}, e_i \rangle.$$

Autrement dit

$$\langle \tilde{x}, e_i \rangle = \frac{\langle u, e_i \rangle}{z - \lambda_i},$$

et comme $(\langle \tilde{x}, e_i \rangle)_i \in l^2$, on a que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|\langle u, e_i \rangle|^2}{|z - \lambda_i|^2} < \infty.$$

De plus on a que $x = - \langle x, v \rangle (D - z)^{-1}u$ donc $\langle x, v \rangle = - \langle \langle x, v \rangle (D - z)^{-1}u, v \rangle = - \langle x, v \rangle \langle (D - z)^{-1}u, v \rangle$ et donc comme $\langle x, v \rangle \neq 0$

$$- \langle (D - z)^{-1}u, v \rangle = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\langle u, e_i \rangle \langle e_i, v \rangle}{z - \lambda_i} = 1.$$

Montrons le sens " \Leftarrow ". Soit z tels que les conditions (1), (2) et (3) soient vérifiées. Posons

$$x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\langle u, e_i \rangle}{z - \lambda_i} e_i.$$

D'après (2), on a bien que $x \in H$. De plus $(z - D)x = u$. Donc

$$zx = Dx + u = Dx + \langle x, v \rangle u$$

car $\langle x, v \rangle = \sum_i \frac{\langle u, e_i \rangle \overline{\langle v, e_i \rangle}}{z - \lambda_i} = 1$. Donc $z \in \sigma_p(D + u \otimes v)$. □

La condition (1) de la Proposition 6.2.6 nous dit que si $z = \lambda_i$ alors z ne peut pas être valeur propre de $D + u \otimes v$. On remarque que (2) revient à dire que $u \in \text{Im}(D - z)$. En effet si $u \in \text{Im}(D - z)$, alors il existe $h \in H$ tel que

$$\begin{aligned} u &= (D - z)h \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} (\lambda_i - z) e_i \otimes e_i(h) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} (\lambda_i - z) \langle h, e_i \rangle e_i. \end{aligned}$$

Autrement dit on a que $\langle u, e_i \rangle = (\lambda_i - z) \langle h, e_i \rangle$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, et donc

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|\langle u, e_i \rangle|^2}{|z - \lambda_i|^2} &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|(\lambda_i - z) \langle h, e_i \rangle|^2}{|z - \lambda_i|^2} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle h, e_i \rangle|^2 \\ &< \infty. \end{aligned}$$

De même, si on a (2), et que l'on définit le vecteur $h \in H$ en posant pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\langle h, e_i \rangle = \frac{\langle u, e_i \rangle}{z - \lambda_i},$$

on a que $h \in H$, et

$$\begin{aligned} (D - z)h &= \sum_{i \in \mathbb{N}} (\lambda_i - z) e_i \otimes e_i(h) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} (\lambda_i - z) \langle h, e_i \rangle e_i \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} (\lambda_i - z) \frac{\langle u, e_i \rangle}{z - \lambda_i} e_i \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle u, e_i \rangle e_i \\ &= u. \end{aligned}$$

Donc $u \in \text{Im}(D - z)$. Autrement dit, si $z \notin \sigma(D)$, comme $D - z$ est inversible, on a que la condition (2) est automatiquement vérifiée. Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant, qui donne une réponse positive à la question 6.2.5.

Théorème 6.2.7. *Soit $D = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i e_i \otimes e_i$ un opérateur diagonal borné. On suppose que D possède un vecteur cyclique. De plus on suppose que $\sigma(D)$ est un ensemble parfait. Alors, il existe $u, v \in H$ tels que*

1. $\sigma(D + u \otimes v) = \sigma(D)$,
2. $\sigma_p(D + u \otimes v) = \emptyset$.

De plus on peut choisir $u, v \in H$ de sorte que $\|u \otimes v\|$ soit arbitrairement petite.

Pour prouver le Théorème 6.2.7, on va, dans un premier temps, construire un vecteur $u \in H$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\langle u, e_i \rangle \neq 0$ et pour tout $z \in \sigma(D) \setminus \sigma_p(D)$ on ait

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|\langle u, e_i \rangle|^2}{|z - \lambda_i|^2} = \infty.$$

Ainsi la condition (2) de la Proposition 6.2.6 ne sera pas vérifiée quand $z \in \sigma(D) \setminus \sigma_p(D)$, et donc ceci prouvera que $(\sigma(D) \setminus \sigma_p(D)) \cap \sigma_p(D + u \otimes v) = \emptyset$.

Ensuite on va construire un vecteur $v \in H$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\langle v, e_i \rangle \neq 0$ et pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(D)$

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\langle u, e_i \rangle \overline{\langle v, e_i \rangle}}{z - \lambda_i} \neq 1.$$

Cela revient à construire une fonction analytique de la forme

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{c_i}{z - \lambda_i} - 1$$

qui ne s'annule pas sur $\mathbb{C} \setminus \sigma(D)$, avec une condition de sommabilité sur c_i qui permet de garantir que $v \in H$. Ainsi la condition (3) de la Proposition 6.2.6 ne sera pas vérifiée pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(D)$ et $D + u \otimes v$ et donc $(\mathbb{C} \setminus \sigma(D)) \cap \sigma_p(D + u \otimes v) = \emptyset$. D'après la condition (1) qui affirme que $\sigma_p(D) \cap \sigma_p(D + u \otimes v) = \emptyset$, $D + u \otimes v$ n'aura pas de valeurs propres, et on aura ainsi obtenu une réponse positive à la Question 6.2.5.

6.3 Résultats préliminaires

Avant de passer à la preuve du Théorème 6.2.7 en deux étapes, on va avoir besoin d'un peu de matériel. Dans cette section nous allons présenter tous les outils dont nous allons avoir besoin. Le premier résultat est une adaptation d'un résultat classique de théorie de la mesure. On peut trouver ce résultat sous une forme beaucoup plus générale dans [Rog70, Th 32].

Théorème 6.3.1. *Soit $E \subset \mathbb{C}$ un sous ensemble du plan complexe de mesure de Lebesgue nulle. Alors il existe une famille de boules ouvertes $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que*

1. $E \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} O_i$,

2. $\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(O_i)^2 < \infty$,

3. pour tout $z \in E$, il existe une infinité de $i \in \mathbb{N}$ tels que $z \in O_i$.

On va donner une courte preuve de ce résultat. Cette preuve est un cas particulier de la preuve plus générale que l'on peut trouver dans [Rog70].

Démonstration. Supposons que E soit de mesure de Lebesgue nulle. On a que

$$0 = m(E) = \inf_{\substack{(B_j)_j \text{ boules ouvertes} \\ \text{telles que } E \subset \cup_j B_j}} \sum_j m(B_j)$$

Donc il existe une suite de boules ouvertes $(B_j^{(n)})_{j \in \mathbb{N}}$ telle que $\sum_{j \in \mathbb{N}} m(B_j^{(n)}) < \frac{1}{2^n}$ et $E \subset \cup_{j \in \mathbb{N}} B_j^{(n)}$. Comme $m(B_j^{(n)}) = \frac{\pi}{4} \text{diam}(B_j^{(n)})^2$, on a que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{diam}(B_j^{(n)})^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{4}{\pi} m(B_j^{(n)}) \leq \frac{4}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Comme $E \subset \cup_{j \in \mathbb{N}} B_j^{(n)}$, on a que pour tout $z \in E$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $z \in B_j^{(n)}$, autrement dit z appartient à une infinité de $B_j^{(n)}$. Donc la famille $(B_j^{(n)})_{j \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}}$ satisfait les conclusions du théorème. \square

Nous allons avoir besoin aussi de la notion de point de Lebesgue d'un sous ensemble mesurable du plan complexe. Nous allons les définir puis voir quelques propriétés de ces derniers. On invite le lecteur à aller consulter le livre [SS05] pages 106-108. Dans la suite B sera une boule du plan complexe.

Définition 6.3.2. Soit $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble mesurable du plan complexe. Soit $z \in \mathbb{C}$. On dit que z est un point de densité de Lebesgue pour E si

$$\text{dens}(z, E) = \lim_{m(B) \rightarrow 0, z \in B} \frac{m(E \cap B)}{m(B)} = 1.$$

Si z est un point de densité de Lebesgue pour E , alors il y a "beaucoup" (au sens de la mesure de Lebesgue) de points autour de z qui appartiennent à E . Maintenant on va voir le théorème de densité de Lebesgue qui nous dit que presque tout les points de E sont des points de densité.

Théorème 6.3.3. Soit $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble mesurable du plan complexe. Alors on a pour presque tout z ,

$$\text{dens}(z, E) = \mathbb{1}_E(z).$$

Dans la suite nous allons devoir approcher des points de densité non pas par des boules mais par des carrés dyadiques. Pour finir cette section on va donner un résultat qui nous dira qu'utiliser des carrés au lieu de boules, ce n'est pas grave du point de vue de la densité de Lebesgue.

Définition 6.3.4. On dit qu'une famille d'ensembles mesurable (U_α) s'écrase régulièrement sur z si il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout U_α , il existe une boule B telle que

$$z \in B, U_\alpha \subset B \text{ et } m(U_\alpha) \geq cm(B).$$

Un exemple d'une telle famille est la famille des carrés dyadiques ouverts. En effet chaque carré est inclus dans la boule de centre l'intersection des diagonales du carré et de diamètre la diagonale du carré. Si on note l la longueur du côté du carré, on a que l'aire du carré est l^2 et l'aire de la boule décrite auparavant est $\frac{\pi}{2}l^2$. Autrement dit on peut choisir $c = \frac{\pi}{2}$ dans la définition ci-dessus.

On peut trouver une preuve de la proposition qui suit dans [SS05].

Proposition 6.3.5. *Pour tout point de densité de Lebesgue $z \in E$, si (U_α) s'écrase régulièrement sur z alors*

$$\lim_{m(U_\alpha) \rightarrow 0, z \in U_\alpha} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} \mathbb{1}_E(y) dy = \lim_{m(U_\alpha) \rightarrow 0, z \in U_\alpha} \frac{m(E \cap U_\alpha)}{m(U_\alpha)} = \mathbb{1}_E(z).$$

6.4 Un vecteur qui n'est pas dans $\text{Im}(D - z)$

Le but de cette section est de montrer que si D satisfait les hypothèses de la Question 6.2.5, alors il existe un vecteur $u \in H$ qui n'appartient à $\text{Im}(D - z)$ pour aucun $z \in \sigma(D)$.

Proposition 6.4.1. *Soit $D = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i e_i \otimes e_i$ un opérateur diagonal tel que pour tout $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ et $\sigma(D)$ est un ensemble compact parfait. Alors il existe un vecteur $u \in H$ tel que*

1. pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\langle u, e_i \rangle \neq 0$,
2. pour tout $z \in \sigma(D) \setminus \sigma_p(D)$,

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|\langle u, e_i \rangle|^2}{|z - \lambda_i|^2} = \infty.$$

La preuve de cette proposition est inspirée d'un article de Stampfli [Sta84]. On va découper la preuve de cette proposition en plusieurs lemmes.

Sans perte de généralité, quitte à considérer $\alpha D + \beta I$ au lieu de D , on peut supposer que $\sigma(D) \subset [0, 1] \times [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $(C_{n,k})_{k=0}^{2^n}$ la famille des carrés dyadiques $[i2^{-n}, (i+1)2^{-n}] \times [j2^{-n}, (j+1)2^{-n}]$ avec $i, j \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ (voir la Figure 6.1). On note $D_{n,k}$ l'intérieur du carré $C_{n,k}$. On note F_n la frontière des carrés dyadiques à l'étage n , c'est à dire

$$F_n = \bigcup_{k=0}^{2^n} \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x = k2^{-n} \text{ ou } y = k2^{-n}\}.$$

$C_{1,1}$	$C_{1,2}$
$C_{1,3}$	$C_{1,4}$

$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$	$C_{2,4}$
$C_{2,5}$	$C_{2,6}$	$C_{2,7}$	$C_{2,8}$
$C_{2,9}$	$C_{2,10}$	$C_{2,11}$	$C_{2,12}$
$C_{2,13}$	$C_{2,14}$	$C_{2,15}$	$C_{2,16}$

FIGURE 6.1

On pose

$$A_1 = \{z \in \sigma(D) : \text{dens}(z, \sigma(D)) = 1\} \setminus \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n,$$

$$A_2 = \sigma(D) \setminus A_1.$$

On rappelle que d'après le Théorème de densité de Lebesgue 6.3.3, on a que $m(A_1) = m(\sigma(D))$ et $m(A_2) = 0$.

Lemme 6.4.2. *Si $D_{n,k} \cap A_1 \neq \emptyset$, alors $D_{n,k}$ contient une infinité de valeurs propres de D .*

Démonstration. Soit $z \in D_{n,k} \cap A_1$. On a par définition de A_1 que $\text{dens}(z, \sigma(D)) = 1$. Autrement dit, si on note $B(z, r)$ la boule centrée en z de rayon r , on a que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(B(z, r) \cap \sigma(D))}{m(B(z, r))} = 1.$$

Pour prouver le lemme on va montrer par l'absurde que $m(D_{n,k} \cap \sigma(D)) > 0$. Supposons que $m(D_{n,k} \cap \sigma(D)) = 0$. On a que

$$\begin{aligned} m(B(z, r) \cap \sigma(D)) &= m(B(z, r) \cap D_{n,k} \cap \sigma(D)) + m(B(z, r) \cap (\mathbb{C} \setminus D_{n,k}) \cap \sigma(D)) \\ &= m(B(z, r) \cap (\mathbb{C} \setminus D_{n,k}) \cap \sigma(D)). \end{aligned}$$

Quand r est assez petit, on a que $B(z, r) \subset D_{n,k}$ (car $D_{n,k}$ est ouvert), donc $m(B(z, r) \cap (\mathbb{C} \setminus D_{n,k}) \cap \sigma(D)) = m(\emptyset) = 0$. Donc $m(B(z, r) \cap \sigma(D)) = 0$ et

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(B(z, r) \cap \sigma(D))}{m(B(z, r))} = 0.$$

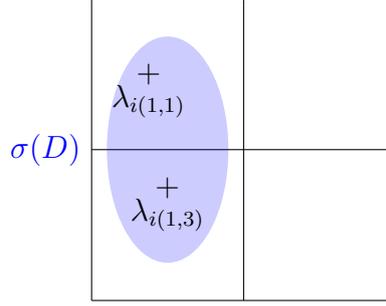


FIGURE 6.2

Ceci contredit l'hypothèse que $z \in A_1$ et $\text{dens}(z, \sigma(D)) = 1$. \square

D'après le Théorème de densité de Lebesgue 6.3.3, on a que $m(A_2) = 0$ (car $m(\cup_{n \in \mathbb{N}} F_n) = 0$). D'après le Théorème 6.3.1, il existe une famille $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de sous ensembles ouverts du plan complexe \mathbb{C} telle que $A_2 \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} O_i$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $O_i \cap \sigma(D) \neq \emptyset$, $\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(O_i)^2 < \infty$ et pour tout $z \in A_2$, il existe une infinité de $i \in \mathbb{N}$ tels que $z \in O_i$. Maintenant nous allons "re-numéroter" les valeurs propres " λ_i " et les vecteurs propres " e_i " de D par étage.

On initialise à l'étage 0 ($n = 0$). On a que $C_{0,1} = [0, 1] \times [0, 1]$ et $D_{0,1} =]0, 1[\times]0, 1[$. Si $D_{0,1} \cap A_1 \neq \emptyset$, on choisit $i(0, 1) \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_{i(0,1)} \in D_{0,1} \cap \sigma(D)$. Sinon on ne fait rien. On note $I_0 = \{i(0, 1) : D_{0,1} \cap A_1 \neq \emptyset\}$, et $E_0 = \{k \in \mathbb{N} : D_{0,k} \cap A_1 \neq \emptyset\}$.

On choisit ensuite $j(0) \in \mathbb{N} \setminus I_0$ tel que $\lambda_{j(0)} \in \sigma(D) \cap O_0$ (on peut le faire car $O_0 \cap \sigma(D) \neq \emptyset$, $\sigma(D)$ est un ensemble parfait et O_0 est ouvert). On note $J_0 = \{j(0)\}$.

Une fois que les étages $0, \dots, n-1$ ont été construits, on construit l'étage n (voir la Figure 6.2). Pour chaque $k \in \{1, \dots, 2^{2n}\}$, si $D_{n,k} \cap A_1 \neq \emptyset$, on choisit $i(n, k) \in \mathbb{N} \setminus (J_{n-1} \cup_{k=0}^{n-1} I_k)$ tel que $\lambda_{i(n,k)} \in D_{n,k} \cap \sigma(D)$. Sinon on ne fait rien. On note $I_n = \{i(n, k) : D_{n,k} \cap A_1 \neq \emptyset\}$, et $E_n = \{k \in \mathbb{N} : D_{n,k} \cap A_1 \neq \emptyset\}$.

On choisit $j(n) \in \mathbb{N} \setminus (J_{n-1} \cup_{k=0}^n I_k)$ tel que $\lambda_{j(n)} \in \sigma(D) \cap O_n$ (on peut le faire car $O_n \cap \sigma(D) \neq \emptyset$, $\sigma(D)$ est un ensemble parfait et O_n est ouvert). On note $J_n = \{j(k) : k = 0, \dots, n\}$.

Par construction, on a pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq m$, que

$$J_n \cap J_m = \emptyset, \quad I_n \cap I_m = \emptyset, \quad J_n \cap I_m = \emptyset, \quad J_n \cap I_n = \emptyset.$$

Autrement dit, les $\lambda_{i(n,k)}$ et les $\lambda_{j(n)}$ sont tous distincts.

A la fin de cette re-numérotation, il n'est pas exclu que l'on ait "oublié" certains λ_i (c'est à dire qu'il est possible que $\mathbb{N} \neq \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n \cup_{m \in \mathbb{N}} J_m$). On va découper notre espace de Hilbert H en trois sous-espaces : $H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_{reste}$ avec

$$\begin{aligned} H_1 &= \overline{\text{vect}}\{e_{i(n,k)} : n \in \mathbb{N}, k \in E_n\} = \overline{\text{vect}}\{e_i : i \in \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n\}, \\ H_2 &= \overline{\text{vect}}\{e_{j(n)} : n \in \mathbb{N}\} = \overline{\text{vect}}\{e_j : j \in \cup_{n \in \mathbb{N}} J_n\}, \\ H_{reste} &= \overline{\text{vect}}\{e_i : i \notin \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n \cup_{m \in \mathbb{N}} J_m\}. \end{aligned}$$

On pose $\beta_n = \#I_n$. On définit u_1, u_2 et u_{reste} de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in E_n} \frac{1}{n\sqrt{\beta_n}} e_{i(n,k)} \\ u_2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{diam}(O_n) e_{j(n)} \\ u_{reste} &= \sum_{i \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, i \notin I_n \cup J_n} \frac{1}{i} e_i \end{aligned}$$

On a que

$$\begin{aligned} \|u_1\|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in E_n} \left| \langle u, e_{i(n,k)} \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in E_n} \frac{1}{n\beta_n} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} < \infty. \end{aligned}$$

Donc on a bien que $u_1 \in H_1$. Pour u_2 on a que

$$\|u_2\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \langle u, e_{j(n)} \rangle \right|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{diam}(O_n)^2 < \infty.$$

On a bien que $u_2 \in H_2$. On a aussi que $u_{reste} \in H_{reste}$. On pose $u = u_1 + u_2 + u_{reste}$. On a bien que $u \in H$.

Pour finir la démonstration de la Proposition 6.4.1 on va montrer que si $z \in A_1 \setminus \sigma_p(D)$ alors $u_1 \notin \text{Im}(D - z)$, et si $z \in A_2 \setminus \sigma_p(D)$, alors $u_2 \notin \text{Im}(D - z)$, ceci permettra de conclure. En effet si $z \in \sigma(D)$ alors soit $z \in A_1$, soit $z \in A_2$. Si $z \in A_i$ alors $u_i \notin \text{Im}(D - z)$ et donc $u \notin \text{Im}(D - z)$.

Lemme 6.4.3. *Soit $z \in A_1 \setminus \sigma_p(D)$. Alors $u_1 \notin \text{Im}(D - z)$.*

Démonstration. Soit $z \in A_1 \setminus \sigma_p(D)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des uniques $l_n(z), m_n(z) \in \{0, \dots, 2^n\}$, tels que $z \in [l_n(z)2^{-n}, (l_n(z)+1)2^{-n}[\times] m_n(z)2^{-n}, (m_n(z)+1)2^{-n}[$. On pose pour tout $p \in \{1, \dots, 2^n\}$

$$\begin{aligned} L_{n,p}(z) &= \bigcup_{\substack{m, l \in \{0, \dots, 2^{2n}\} \\ |m - m_n(z)| \leq p \\ |l - l_n(z)| \leq p}} [l2^{-n}, (l+1)2^{-n}] \times [m2^{-n}, (m+1)2^{-n}]. \end{aligned}$$

On peut dire que $L_{n,p}(z)$ est l'union des carrés $C_{n,k}$ qui sont à p cases de z au plus (voir la Figure 6.3).

Fait 1. *Les $L_{n,p}(z)$ s'écrasent régulièrement sur z .*

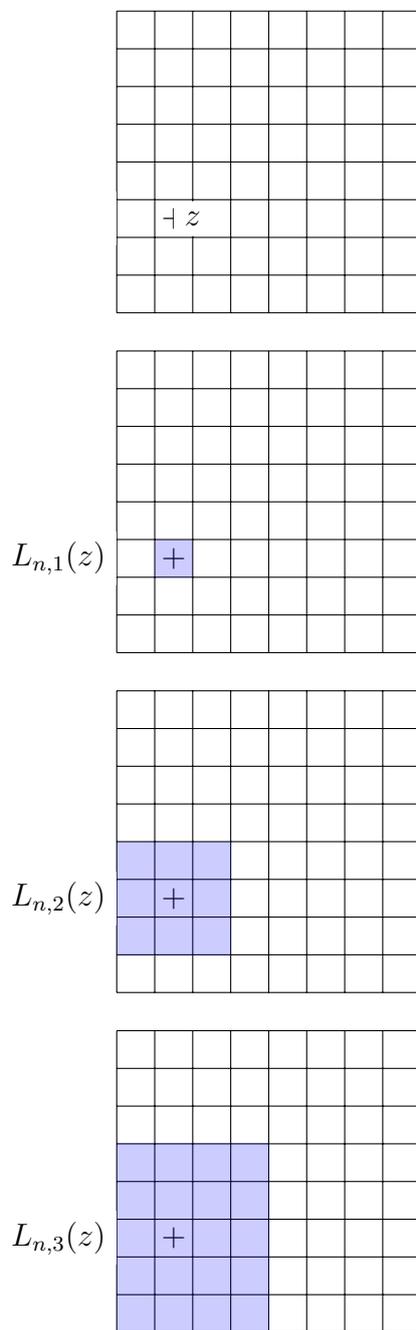


FIGURE 6.3

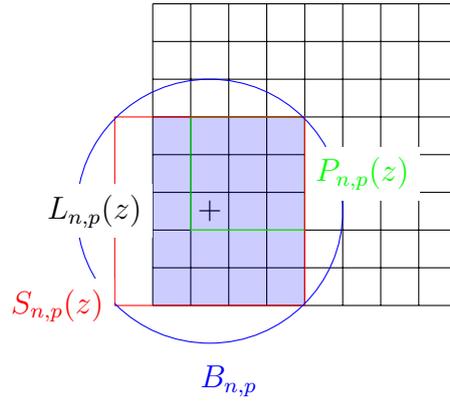


FIGURE 6.4

Preuve du Fait. En effet, si $\text{Re}(z) < 2^{-1}$ et $\text{Im}(z) < 2^{-1}$ (les cas $\text{Re}(z) > 2^{-1}$ et $\text{Im}(z) < 2^{-1}$, $\text{Re}(z) < 2^{-1}$ et $\text{Im}(z) > 2^{-1}$, $\text{Re}(z) > 2^{-1}$ et $\text{Im}(z) > 2^{-1}$ se traitent de manière similaire), $L_{n,p}(z)$ contient le petit carré $P_{n,p}$ suivant

$$P_{n,p} = [l_n(z)2^{-n}, (l_n(z) + p)2^{-n}] \times [m_n(z)2^{-n}, (m_n(z) + p)2^{-n}].$$

On a que $m(P_{n,p}) = \frac{(p+1)^2}{2^{2n}}$. De plus on a que $L_{n,p}(z)$ est inclus dans le grand carré $S_{n,p}$ suivant

$$S_{n,p} = [(l_n(z) - p)2^{-n}, (l_n(z) + p)2^{-n}] \times [(m_n(z) - p)2^{-n}, (m_n(z) + p)2^{-n}].$$

Comme $S_{n,p}$ est un carré, il existe une boule $B_{n,p}$ telle que $S_{n,p} \subset B_{n,p}$ et

$$m(B_{n,p}) = \frac{\pi}{2} m(S_{n,p}) = \frac{\pi}{2} \frac{(2p+1)^2}{2^{2n}} \leq \frac{\pi}{2} 4 \frac{(p+1)^2}{2^{2n}} = 2\pi m(P_{n,p}).$$

Autrement dit on a que $L_{n,p}(z) \subset B_{n,p}$ et

$$\frac{1}{2\pi} m(B_{n,p}) \leq m(P_{n,p}) \leq m(L_{n,p}(z)).$$

Donc les $L_{n,p}(z)$ s'écrasent régulièrement sur z . □

Comme $\text{dens}(z, \sigma(D)) = 1$, d'après la Proposition 6.3.5 les $L_{n,p}(z)$ assez petits ont beaucoup de points en commun avec $\sigma(D)$. C'est à dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $L_{n,p}(z)$ tel que $m(L_{n,p}(z)) < \varepsilon$ on ait que

$$\frac{m(\sigma(D) \cap L_{n,p}(z))}{m(L_{n,p}(z))} > \frac{3}{4}. \quad (6.1)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $m_n(z) - p + 1 \geq 0$, $l_n(z) - p + 1 \geq 0$, $m_n(z) + p \leq 2^n$ et $l_n(z) + p \leq 2^n$, alors

$$L_{n,p}(z) = [(l_n(z) - p + 1)2^{-n}, (l_n(z) + p)2^{-n}] \times [(m_n(z) - p + 1)2^{-n}, (m_n(z) + p)2^{-n}]$$

est un carré. On note $G_n(z)$ les p qui vérifient cette condition, autrement dit si on note

$$p_n(z) = \min\{m_n(z) + 1, l_n(z) + 1, 2^n - m_n(z), 2^n - l_n(z)\},$$

on a que

$$G_n(z) = \{p \in \mathbb{N} : 1 \leq p \leq p_n(z)\}.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $\varepsilon \geq 4 \cdot 2^{-2\alpha}$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq p \leq 2^{n-\alpha}$. On a que

$$\begin{aligned} m(L_{n,p}(z)) &\leq (2p-1)^2 2^{-2n} \\ &\leq 4p^2 2^{-2n} \\ &\leq 4 \cdot 2^{2n-2\alpha} 2^{-2n} \\ &= 4 \cdot 2^{-2\alpha} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Autrement dit, si $1 \leq p \leq 2^{n-\alpha}$, alors $L_{n,p}(z)$ vérifie (6.1).

On a que $p_n(z) \sim 2^n \min\{\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z), 1 - \operatorname{Re}(z), 1 - \operatorname{Im}(z)\}$. Si on fixe un $\varepsilon > 0$ tel que (6.1) soit vérifié et

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} p_n(z) 2^{-n},$$

alors on a que

$$2^{n-\alpha} \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} 2^n \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} p_n(z) \leq p_n(z).$$

Autrement dit si ε est assez petit, on peut de plus supposer que les $L_{n,p}(z)$ pour $1 \leq p \leq 2^{n-\alpha}$ sont des carrés, composés de $(2p-1)^2$ carrés $C_{n,k}$. On suppose à partir de maintenant que cette condition est satisfaite.

On va montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $p \in \{1, \dots, 2^{n-\alpha}\}$, il existe un sous ensemble $I'_{n,p}$ de I_n tel que $\#I'_{n,p} = p$, les $I'_{n,p}$ sont deux à deux disjoints, et pour tout $i \in I'_{n,p}$, $\lambda_i \in L_{n,p}(z)$.

Soit $n \geq 1$. Si $p = 1$, alors $L_{n,1}(z)$ est le seul carré $D_{n,k}$ contenant z . Comme $z \in A_1$ et que $z \in D_{n,k}$ alors $A_1 \cap D_{n,k} \neq \emptyset$. Donc $k \in E_n$ et $\lambda_{i(n,k)} \in D_{n,k}$, et on pose $I'_{n,1} = \{i(n,k)\}$.

Dans $L_{n,p}(z)$, il y a $(2p-1)^2$ carrés $D_{n,k}$. Comme (6.1) est vérifiée, on a que

$$m(L_{n,p}(z) \cap \sigma(D)) = m(L_{n,p}(z) \cap A_1) > \frac{3}{4} m(L_{n,p}(z)).$$

Il y a au moins $\frac{3}{4}$ des carrés $D_{n,k}$ qui forment $L_{n,p}(z)$ qui rencontrent A_1 . Sinon il aurait plus de $\frac{1}{4}$ des $(2p-1)^2$ carrés $D_{n,k}$ inclus dans $L_{n,p}(z)$ qui ne rencontrent pas $\sigma(D)$, c'est à dire

$$m(L_{n,p}(z) \setminus \sigma(D)) \geq \frac{1}{4} (2p-1)^2 2^{-2n},$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
 m(L_{n,p}(z) \cap \sigma(D)) &= m(L_{n,p}(z)) - m(L_{n,p}(z) \setminus \sigma(D)) \\
 &\leq (2p-1)^2 2^{-2n} - \frac{1}{4}(2p-1)^2 2^{-2n} \\
 &= \frac{3}{4}(2p-1)^2 2^{-2n} \\
 &= \frac{3}{4}m(L_{n,p}(z)).
 \end{aligned}$$

Ce n'est pas possible car ça contredit (6.1).

Autrement dit, on a choisi pendant la re-numérotation au moins $\frac{3(2p-1)^2}{4}$ carrés dans $L_{n,p}(z)$. On note $J'_{n,p}$ l'ensemble des indices $i(n, k)$ correspondants. On a que $J'_{n,p} \subset I_n$. Soit $I''_{n,p} = J'_{n,p} \setminus \cup_{l=1}^{p-1} I'_{n,l}$. On a bien que pour tout $i \in I''_{n,p}$, $\lambda_i \in L_{n,p}(z)$ et donc

$$|z - \lambda_i| < \frac{p\sqrt{2}}{2^n}.$$

De plus on a que

$$\begin{aligned}
 \#(I''_{n,p}) &\geq \frac{3}{4}(2p-1)^2 - \sum_{l=1}^{p-1} l \\
 &\geq \frac{3}{4}(2p-1)^2 - \frac{p(p-1)}{2} \\
 &\geq p.
 \end{aligned}$$

Donc on peut choisir $I'_{n,p}$ comme étant n'importe quel sous ensemble de $I''_{n,p}$ de cardinal p .

On a bien que les $I'_{n,p}$ ainsi construits sont deux à deux disjoints, et qu'ils sont tous contenus dans I_n . On a que

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \in E_n} \frac{1}{|z - \lambda_{i(n,k)}|^2} &= \sum_{i \in I_n} \frac{1}{|z - \lambda_i|^2} \\
 &\geq \sum_{p=1}^{2^{n-\alpha}} \sum_{i \in I'_{n,p}} \frac{1}{|z - \lambda_i|^2} \\
 &\geq \sum_{p=1}^{2^{n-\alpha}} \frac{2^{2n}}{2p^2} \\
 &= \frac{2^{2n}}{2} \sum_{p=1}^{2^{n-\alpha}} \frac{1}{p} \\
 &\geq \frac{2^{2n}}{2} \log(2^{n-\alpha}) \\
 &= \frac{2^{2n}}{2} (n - \alpha) \log(2).
 \end{aligned}$$

Donc on a que

$$\begin{aligned}
 \|(D - z)^{-1}u_1\|^2 &\geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in E_n} \frac{1}{n^2 \beta_n} \frac{1}{|z - \lambda_{i(n,k)}|^2} \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2 \beta_n} \sum_{k \in E_n} \frac{1}{|z - \lambda_{i(n,k)}|^2} \\
 &\geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2 \beta_n} \frac{2^{2n}}{2} (n - \alpha) \log(2) \\
 &= \frac{\log(2)}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} (n - \alpha) \frac{2^{2n}}{n^2 \beta_n} \\
 &\geq \frac{\log(2)}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n - \alpha}{n^2} \\
 &= \infty.
 \end{aligned}$$

Rappelons qu'il y a 2^{2n} carrés $C_{n,k}$ à l'étage n , et par conséquent β_n ne peut pas excéder 2^{2n} et donc $\frac{2^{2n}}{\beta_n} \geq 1$. Ceci prouve que si $z \in A_1 \setminus \sigma_p(D)$ alors $u_1 \notin \text{Im}(D - z)$. \square

Lemme 6.4.4. *Soit $z \in A_2 \setminus \sigma_p(D)$. Alors $u_2 \notin \text{Im}(D - z)$.*

Démonstration. Soit $z \in A_2 \setminus \sigma_p(D)$. On note $J_z = \{i \in \mathbb{N} : z \in O_i\}$. Alors on a que

$$\begin{aligned}
 \|(D - z)^{-1}u_2\|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\langle u, e_{j(n)} \rangle|^2}{|z - \lambda_{j(n)}|^2} \\
 &\geq \sum_{i \in J_z} \frac{|\langle u, e_{j(i)} \rangle|^2}{|z - \lambda_{j(i)}|^2} \\
 &= \sum_{i \in J_z} \frac{\text{diam}(O_i)^2}{|z - \lambda_{j(i)}|^2} \\
 &\geq \sum_{i \in J_z} \frac{\text{diam}(O_i)^2}{\text{diam}(O_i)^2} \\
 &= \sum_{i \in J_z} 1 \\
 &= \infty,
 \end{aligned}$$

puisque'il existe une infinité de i tels que $z \in O_i$. Ceci prouve que si $z \in A_2 \setminus \sigma_p(D)$, alors $u_2 \notin \text{Im}(D - z)$. \square

On en conclut que si $z \in \sigma(D) \setminus \sigma_p(D)$, alors $u \notin \text{Im}(D - z)$. Ceci achève la preuve de la Proposition 6.4.1.

6.5 Une fonction analytique qui ne s'annule pas en dehors d'un ensemble parfait

Grâce au travail effectué dans la section précédente, on va pouvoir empêcher la condition (2) de la Proposition 6.2.6 d'être vérifiée pour $z \in \sigma(D) \setminus \sigma_p(D)$. Autrement dit on peut construire une perturbation de rang un de D qui n'aura pas de valeur propre dans $\sigma(D)$. Dans cette section on va construire l'outil qui va nous permettre de s'assurer que l'on puisse construire une perturbation de rang un qui n'a pas de valeur propre en dehors de $\sigma(D)$. Pour cela, on va faire en sorte que la condition (3) de la Proposition 6.2.6 ne soit pas vérifiée pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(D)$. Les résultats de cette section sont dûs à William Alexandre.

Proposition 6.5.1. *Soit $F \subset \mathbb{C}$ un ensemble fermé parfait. Soit $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans F . Soit $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres strictement positifs tels que*

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i < \infty.$$

Alors il existe une suite de nombre complexes $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que

1. pour tout $i \in \mathbb{N}$, $c_i \neq 0$,
2. pour tout $i \in \mathbb{N}$, $|c_i| \leq \gamma_i$,
3. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{z - \lambda_i}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus F$,
4. pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus F$, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{z - \lambda_i} - 1 \neq 0$.

Démonstration. On veut trouver une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus F$ de la forme

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{z - \lambda_i} - 1$$

qui ne s'annule pas sur $\mathbb{C} \setminus F$. Si on choisit f sous la forme

$$f(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{z - \mu_i}{z - \lambda_i},$$

avec des $\mu_i \in F \setminus \{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$ bien choisis, de sorte que le produit infini converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus F$, cela nous permettra de montrer que $f(z)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C} \setminus F$. Les μ_i vont être construits par récurrence. A chaque étape N , on va considérer le produit partiel

$$f_N(z) = \prod_{i=1}^N \frac{z - \mu_i}{z - \lambda_i},$$

et montrer que f_N peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{i=1}^N \frac{c_{i,N}}{z - \lambda_i} - 1.$$

Avec un choix judicieux des μ_i , on va montrer que l'on peut avoir un contrôle sur les $c_{i,N}$. Ces derniers vont converger vers des $c_{i,\infty} = c_i$, ce qui va nous donner un candidat naturel pour $f(z)$ directement sous la forme

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{z - \lambda_i} - 1.$$

Il restera à vérifier que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus F$. Ce sera en fait une conséquence du fait que f_N va converger vers f uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus F$.

Soient $c_{1,N}, \dots, c_{N,N} \in \mathbb{C}$, des coefficients complexes. On a que

$$\sum_{i=1}^N \frac{c_{i,N}}{z - \lambda_i} - 1 = \frac{\sum_{i=1}^N c_{i,N} \prod_{j=1, j \neq i}^N (z - \lambda_j) - \prod_{i=1}^N (z - \lambda_i)}{\prod_{i=1}^N (z - \lambda_i)}.$$

Si on veut que

$$\sum_{i=1}^N \frac{c_{i,N}}{z - \lambda_i} - 1 = \prod_{i=1}^N \frac{z - \mu_i}{z - \lambda_i},$$

on doit avoir que

$$\sum_{i=1}^N c_{i,N} \prod_{j=1, j \neq i}^N (z - \lambda_j) - \prod_{i=1}^N (z - \lambda_i) = \prod_{i=1}^N (z - \mu_i).$$

Appliquée au point $z = \lambda_k$, cette dernière égalité se réécrit

$$c_{k,N} \prod_{j=1, j \neq k}^N (\lambda_k - \lambda_j) = \prod_{i=1}^N (\lambda_k - \mu_i).$$

Si on pose

$$c_{k,N} = (\lambda_k - \mu_k) \prod_{j=1, j \neq k}^N \frac{\lambda_k - \mu_j}{\lambda_k - \lambda_j},$$

on a que

$$f_N(z) = \prod_{i=1}^N \frac{z - \mu_i}{z - \lambda_i} = \sum_{i=1}^N \frac{c_{i,N}}{z - \lambda_i} - 1.$$

On se donne une suite de nombre réels positifs $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + \epsilon_i) < \infty.$$

6.5. Une fonction analytique qui ne s'annule pas en dehors d'un ensemble parfait

Maintenant, comme F est un ensemble parfait, on peut choisir par récurrence les $\mu_k \in F \setminus \{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$, tels que pour tout $j < k$ on ait

$$\frac{|\lambda_k - \mu_k|}{|\lambda_j - \mu_k|} < \epsilon_k,$$

et

$$\left| (\lambda_k - \mu_k) \prod_{i=1}^{k+1} \frac{\lambda_k - \mu_i}{\lambda_k - \lambda_j} \right| < \frac{\gamma_k}{\prod_{i=k+1}^{\infty} (1 + \epsilon_i)},$$

et on définit les coefficients $c_{k,N}$ associés à ces μ_k comme ceci

$$c_{k,N} = (\lambda_k - \mu_k) \prod_{j=1, j \neq k}^N \frac{\lambda_k - \mu_j}{\lambda_k - \lambda_j}.$$

On pose

$$c_k = c_{k,\infty} = \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_k - \mu_j}{\lambda_k - \lambda_j} (\lambda_k - \mu_k) \prod_{j=k}^{\infty} \frac{\lambda_k - \mu_j}{\lambda_k - \lambda_j}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} |c_k| &= \left| \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_k - \mu_j}{\lambda_k - \lambda_j} (\lambda_k - \mu_k) \right| \left| \prod_{j=k+1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \mu_j}{\lambda_k - \lambda_j} \right| \\ &= \left| \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_k - \mu_j}{\lambda_k - \lambda_j} (\lambda_k - \mu_k) \right| \left| \prod_{j=k+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_k - \lambda_j} \right) \right| \\ &\leq \frac{\gamma_k}{\prod_{i=k+1}^{\infty} (1 + \epsilon_i)} \prod_{i=k+1}^{\infty} (1 + \epsilon_i) \\ &= \gamma_k. \end{aligned}$$

Comme $\gamma_k \in l^1$, on a que $c_k \in l^1$. Comme c_k peut s'écrire comme un produit convergent de nombres complexes, c'est à dire que

$$c_k = K_k \prod_{j=k+1}^{\infty} (1 + \alpha_j)$$

avec

$$K_k = \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_k - \mu_j}{\lambda_k - \lambda_j} (\lambda_k - \mu_k),$$

et

$$\alpha_j = \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_k - \lambda_j},$$

on a que $c_k \neq 0$. Notons que $c_k = \lim_{N \rightarrow \infty} c_{k,N}$. Soit $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus F$ un ensemble compact. On a que

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \Omega} |f(z) - f_N(z)| &\leq \sup_{z \in \Omega} \left| \sum_{i=1}^N \frac{c_i - c_{i,N}}{z - \lambda_i} \right| + \sup_{z \in \Omega} \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{c_i}{z - \lambda_i} \right| \\ &\leq \frac{1}{\text{dist}(\Omega, F)} \left(\sum_{i=1}^N |c_i - c_{i,N}| + \sum_{i=N+1}^{\infty} |c_i| \right). \end{aligned}$$

Comme $c_i \in l^1$, on a que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=N+1}^{\infty} |c_i| = 0.$$

On a que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N |c_i - c_{i,N}| &= \sum_{i=1}^N \left| (\lambda_i - \mu_i) \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{\lambda_i - \mu_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right| \left| \prod_{j=N+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right) - 1 \right| \\ &= \sum_{i=1}^N \left| \prod_{j=1}^{i-1} \frac{\lambda_i - \mu_j}{\lambda_i - \lambda_j} (\lambda_i - \mu_i) \right| \left| \prod_{j=i+1}^N \frac{\lambda_i - \mu_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right| \left| \prod_{j=N+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right) - 1 \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\prod_{j=i+1}^{\infty} (1 + \epsilon_j)} \prod_{j=i+1}^N (1 + \epsilon_j) \left| \prod_{j=N+1}^{\infty} (1 + \epsilon_j) - 1 \right| \\ &= \frac{\left| \prod_{j=N+1}^{\infty} (1 + \epsilon_j) - 1 \right|}{\prod_{j=N+1}^{\infty} (1 + \epsilon_j)} \sum_{i=1}^N \gamma_i. \end{aligned}$$

Comme $\sum_{i=1}^N \gamma_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i < \infty$ et que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left| \prod_{j=N+1}^{\infty} (1 + \epsilon_j) - 1 \right|}{\prod_{j=N+1}^{\infty} (1 + \epsilon_j)} = 0,$$

on a que f_N converge vers f uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus F$. Comme f_N ne s'annule jamais sur $\mathbb{C} \setminus F$, f non plus. □

6.6 Preuve du théorème principal

Maintenant on peut répondre positivement à la Question 6.2.5.

Preuve du théorème 6.2.7. D'après la Proposition 6.4.1, il existe $u \in H$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\langle u, e_i \rangle \neq 0$ et pour tout $z \in \sigma(D) \setminus \sigma_p(D)$ on a que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|\langle u, e_i \rangle|^2}{|z - \lambda_i|^2} = \infty.$$

Soit $\delta > 0$. D'après la Proposition 6.5.1, il existe des c_i tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on ait

$$0 < |c_i| \leq \delta |\langle u, e_i \rangle|^2,$$

et pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(D)$, on ait que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{c_i}{z - \lambda_i} \neq 1.$$

On définit le vecteur v en posant pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$\langle v, e_i \rangle = \frac{\overline{c_i}}{\langle u, e_i \rangle}.$$

Alors $v \in H$, car

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|c_i|^2}{|\langle u, e_i \rangle|^2} \\ &\leq \delta^2 \sum_{i \in \mathbb{N}} |\langle u, e_i \rangle|^2 \\ &= \delta^2 \|u\|^2. \end{aligned}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(D)$ on a que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\langle u, e_i \rangle \overline{\langle v, e_i \rangle}}{z - \lambda_i} \neq 1.$$

D'après la Proposition 6.2.6, on a que $\sigma_p(D + u \otimes v) = \emptyset$. En effet si $z \in \sigma_p(D)$ alors $z \notin \sigma_p(D + u \otimes v)$ par (1). Si $z \in \sigma(D) \setminus \sigma_p(D)$, alors $\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{|\langle u, e_i \rangle|^2}{|z - \lambda_i|^2} = \infty$, et donc $z \notin \sigma_p(D + u \otimes v)$ par (2). Si $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(D)$, alors $\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\langle u, e_i \rangle \overline{\langle v, e_i \rangle}}{z - \lambda_i} \neq 1$ et donc $z \notin \sigma_p(D + u \otimes v)$ par (3). De plus, on a que

$$\|u \otimes v\| \leq \|u\| \|v\| \leq \delta \|u\|^2.$$

En choisissant δ arbitrairement petit, on obtient que $\|u \otimes v\|$ est arbitrairement petite.

Il reste à vérifier que $\sigma(D) = \sigma(D + u \otimes v)$. On a que $\sigma_e(D) = \sigma(D)$ car $\sigma(D)$ n'a pas de points isolés. Donc on a que $\sigma(D) = \sigma_e(D) \subset \sigma(D + u \otimes v)$. Si $z \in \sigma(D + u \otimes v) \setminus \sigma(D)$, alors par le Théorème de Weyl, on aurait que $z \in \sigma_p(D + u \otimes v)$. Or $D + u \otimes v$ n'a pas de valeur propre. Donc $\sigma(D) = \sigma(D + u \otimes v)$. □

6.7 Le cas non borné

Dans cette section, on va généraliser le Théorème 6.2.7 aux opérateurs diagonaux non bornés.

Théorème 6.7.1. *Soit $D = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i e_i \otimes e_i$ un opérateur diagonal (éventuellement non borné). On suppose que pour tout $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$. De plus on suppose que $\sigma(D) = \{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble parfait. Alors, il existe $u, v \in H$ tels que $\sigma_p(D + u \otimes v) = \emptyset$.*

De plus on peut choisir $u, v \in H$ de sorte que $\|u \otimes v\|$ soit arbitrairement petite.

Démonstration. Dans la preuve précédente, seule la Proposition 6.4.1 ne fonctionne pas pour des opérateurs diagonaux non bornés. Rappelons que dans la preuve de la Proposition 6.4.1, on s'est ramené au cas où $\sigma(D) \subset [0, 1] \times [0, 1]$, ce qui n'est possible que si $\sigma(D)$ est borné. Pour s'en sortir, on va écrire D comme une somme directe infinie d'opérateurs diagonaux bornés.

On note $\mathcal{C}_{n,k} =]n, n+1] \times]k, k+1]$. On a que $\mathbb{C} = \sqcup_{n,k \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_{n,k}$. On pose pour tout $n, k \in \mathbb{Z}$:

$$H_{n,k} = \overline{\text{vect}}\{e_i : \lambda_i \in \mathcal{C}_{n,k}\}.$$

On a que $H_{n,k}$ réduit D ,

$$D = \bigoplus_{n,k \in \mathbb{Z}} D|_{H_{n,k}},$$

et

$$H = \bigoplus_{n,k \in \mathbb{Z}} H_{n,k}.$$

On va chercher à appliquer la Proposition 6.4.1 à $D|_{H_{n,k}}$. On va voir que ce n'est pas encore possible.

Si $z \in \sigma(D|_{H_{n,k}}) \cap \text{int}(\mathcal{C}_{n,k})$, le point z ne peut pas être isolé dans $\sigma(D|_{H_{n,k}})$, sinon il serait aussi isolé dans $\sigma(D)$, ce qui contredit l'hypothèse que $\sigma(D)$ est un ensemble parfait.

Si $z \in \sigma(D|_{H_{n,k}}) \cap \mathcal{C}_{n,k} \setminus \text{int}(\mathcal{C}_{n,k})$ est un point isolé de $\sigma(D|_{H_{n,k}})$, alors $z \in \sigma_p(D)$ (sinon, comme $z \in \sigma(D|_{H_{n,k}})$ il serait limite de $\lambda_i \in \mathcal{C}_{n,k}$ et ne serait pas isolé). Donc il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $z = \lambda_i$. Comme $z \in \sigma(D)$ et que $\sigma(D)$ est un ensemble parfait, $z = \lambda_i$ n'est pas isolé dans soit $\sigma(D|_{H_{n+1,k}})$, $\sigma(D|_{H_{n,k+1}})$ ou $D|_{H_{n+1,k+1}}$.

Pour éviter que $z = \lambda_i$ soit un point isolé de $\sigma(D|_{H_{n,k}})$, il faut mettre le e_i dans le bon sous-espace "voisin" à $H_{n,k}$.

On note $\tilde{H}_{n,k}$ le découpage précédent de H qui prend en compte cette dernière précaution. On a toujours que $\tilde{H}_{n,k}$ réduit D ,

$$D = \bigoplus_{n,k \in \mathbb{Z}} D|_{\tilde{H}_{n,k}},$$

et

$$H = \bigoplus_{n,k \in \mathbb{Z}} \tilde{H}_{n,k}.$$

Donc $\sigma(D|_{\tilde{H}_{n,k}})$ est un compact parfait et on peut appliquer la Proposition 6.4.1. Il existe $u_{n,k}$ tel que pour tout $z \in \sigma(D|_{\tilde{H}_{n,k}}) \setminus \sigma_p(D|_{\tilde{H}_{n,k}})$,

$$u_{n,k} \notin \text{Im}(D|_{\tilde{H}_{n,k}} - z).$$

Donc pour tout $\alpha_{n,k} > 0$, on a pour tout $z \in \sigma(D|_{\tilde{H}_{n,k}}) \setminus \sigma_p(D|_{\tilde{H}_{n,k}})$,

$$\alpha_{n,k} u_{n,k} \notin \text{Im}(D|_{\tilde{H}_{n,k}} - z).$$

On choisit une suite de nombres strictement positifs $\alpha_{n,k}$ telle que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{n,k}^2 \|u_{n,k}\| < \infty.$$

Si on pose

$$u = \bigoplus_{n,k \in \mathbb{Z}} \alpha_{n,k} u_{n,k},$$

on a que $u \in H$. De plus on a que pour tout $z \in \sigma(D) \setminus \sigma_p(D)$, il existe $n, k \in \mathbb{Z}$ tels que $z \in \sigma(D|_{\tilde{H}_{n,k}}) \setminus \sigma_p(D|_{\tilde{H}_{n,k}})$. En effet, si $z \in \sigma(D)$, alors il existe une suite λ_i de valeurs propres de D qui convergent vers z . Quitte à extraire, on peut supposer que tous les λ_i sont dans un seul carré $C_{m,j}$. D'après la construction des $\tilde{H}_{m,j}$, λ_i correspond à un e_i qui est soit dans $\tilde{H}_{m,j}$, $\tilde{H}_{m+1,j}$, $\tilde{H}_{m,j+1}$ ou bien $\tilde{H}_{m+1,j+1}$. Par le principe des tiroirs, il y a au moins un de ces sous-espaces qui contient une infinité de ces e_i . Pour se fixer les idées, notons le $\tilde{H}_{n,k}$. Alors il y a une infinité de ces λ_i dans le spectre de D restreint à $\tilde{H}_{n,k}$. Comme λ_i converge vers z et que le spectre est fermé, on a que $z \in \sigma(D|_{\tilde{H}_{n,k}})$. Comme on a que

$$u_{n,k} \notin \text{Im}(D|_{\tilde{H}_{n,k}} - z)$$

et ainsi

$$u \notin \text{Im}(D - z).$$

Comme la Proposition 6.5.1 ne demande pas que $\sigma(D)$ soit borné, on peut finir la preuve comme celle du Théorème 6.2.7. □

Bibliographie

- [AA65] I. AMEMIYA et T. ANDÔ – « Convergence of random products of contractions in Hilbert space », *Acta Sci. Math. (Szeged)* **26** (1965), p. 239–244.
- [AB77] W. O. AMREIN et A. M. BERTHIER – « On support properties of L^p -functions and their Fourier transforms », *J. Functional Analysis* **24** (1977), no. 3, p. 258–267.
- [AGK04] A. ATZMON, G. GODEFROY et N. J. KALTON – « Invariant subspaces and the exponential map », *Positivity* **8** (2004), no. 2, p. 101–107.
- [Agl82] J. AGLER – « Geometric and topological properties of the numerical range », *Indiana Univ. Math. J.* **31** (1982), no. 6, p. 767–777.
- [AH11] S. A. ARGYROS et R. G. HAYDON – « A hereditarily indecomposable l_∞ -space that solves the scalar-plus-compact problem », *Acta Math.* **206** (2011), no. 1, p. 1–54.
- [Arv02] W. ARVESON – *A short course on spectral theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 209, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [Bau95] H. H. BAUSCHKE – « A norm convergence result on random products of relaxed projections in Hilbert space », *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), no. 4, p. 1365–1373.
- [BDH09] H. H. BAUSCHKE, F. DEUTSCH et H. HUNDAL – « Characterizing arbitrarily slow convergence in the method of alternating projections. », *Int. Trans. Oper. Res.* **16**, no. 4, 413–425. (2009).
- [BGM] C. BADEA, S. GRIVAUX et V. MÜLLER – « The rate of convergence in the method of alternating projections. », *Algebra i Analiz* **23** (2011), no. 3, 1–30; translation in *St. Petersburg Math. J.* **23** (2012), no. 3, 413–434.
- [BGM10] — , « A generalization of the Friederichs angle and the method of alternating projections », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **348**, no. 1-2, 53–56. (2010).

- [BL10] C. BADEA et Y. LYUBICH – « Geometric, spectral and asymptotic properties of averaged products of projections in Banach spaces », *Studia Math.* **201**, no. 1, 21–35. (2010).
- [BS10] A. BOTTCHER et I. SPITKOVSKY – « A gentle guide to the basics of two projections theory », *Linear Algebra Appl.* **432**, no. 6, 1412–1459. (2010).
- [CM11] G. CORACH et A. MAESTRIPIERI – « Products of orthogonal projections and polar decomposition », *Linear Algebra Appl.* **434**, no. 6, 1594–1609. (2011).
- [Coh07] G. COHEN – « Iterates of a product of conditional expectation operators. », *J. Funct. Anal.* **242**, no. 2, 658–668. (2007).
- [CP11] I. CHALENDAR et J. R. PARTINGTON – *Modern approaches to the invariant-subspace problem*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 188, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.
- [Cro07] M. CROUZEIX – « Numerical Range and functional calculus in Hilbert space », *J. Funct. Anal.* **244**, no. 2, 668–690. (2007).
- [Cro08] — , « A functional calculus based on the numerical range : applications », *Linear Multilinear Algebra* **56**, no. 1-2, 81–103. (2008).
- [Dav55] C. DAVIS – « Generators of the ring of bounded operators », *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), p. 907–972.
- [Dav58] — , « Separation of two linear subspaces », *Acta Sci. Math. Szeged* **19** (1958), p. 172–187.
- [DD99] B. DELYON et F. DELYON – « Generalization of von Neumann’s spectral sets and integral representation of operators. », *Bull. Soc. Math. France* **127**, no. 1, 25–41. (1999).
- [Deu01] F. DEUTSCH – *Best Approximation in Inner Product Spaces*, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [DH10a] F. DEUTSCH et H. HUNDAL – « Slow convergence of sequences of linear operators I, arbitrarily slow convergence », *J. Approx. Theory* **162**, no. 9, 1701–1716. (2010).
- [DH10b] — , « Slow convergence of sequences of linear operators II, arbitrarily slow convergence », *J. Approx. Theory* **162**, no. 9, 1717–1738. (2010).
- [Enf87] P. ENFLO – « On the invariant subspace problem for Banach spaces », *Acta Math.* **158** (1987), no. 3-4, p. 213–313.

- [Erb13] W. ERB – « An orthogonal polynomial analogue of the Landau-Pollak-Slepian time-frequency analysis », *J. Approx. Theory* **166** (2013), p. 56–77.
- [FJKP07] C. FOIAS, I. B. JUNG, E. KO et C. PEARCY – « On rank-one perturbations of normal operators », *J. Funct. Anal.* **253** (2007), no. 2, p. 628–646.
- [FN71] T. FURUTA et R. NAKAMOTO – « Certain numerical radius contraction operators », *Proc. Amer. Math. Soc.* **29** (1971), p. 521–524.
- [FX12] Q. FANG et J. XIA – « Invariant subspaces for certain finite-rank perturbations of diagonal operators », *J. Funct. Anal.* **263** (2012), no. 5, p. 1356–1377.
- [Gal04] A. GALÁNTAI – *Projectors and projection methods.*, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2004.
- [Gal08] — , « Subspaces, angles and pairs of orthogonal projections. », *Linear Multilinear Algebra* **56**, no. 3, 227–260. (2008).
- [GGK90] I. GOHBERG, S. GOLDBERG et M. A. KAASHOEK – *Classes of linear operators. Vol. I*, Operator Theory : Advances and Applications, vol. 49, Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.
- [GR97] K. E. GUSTAFSON et D. K. RAO – *Numerical Range*, Springer, 1997.
- [Gri12] S. GRIVAUX – « A hypercyclic rank one perturbation of a unitary operator », *Math. Nachr.* **285** (2012), no. 5-6, p. 533–544.
- [Hal62] I. HALPERIN – « The product of projection operators », *Acta Sci. Math. (Szeged)* **23** (1962), p. 96–99.
- [Hal69] P. R. HALMOS – « Two Subspaces », *Trans. Amer. Math. Soc.*, **144**, 381–389. (1969).
- [HJ94] V. HAVIN et B. JORICKE – *The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis*, Springer-Verlag, 1994.
- [HP57] E. HILLE et R. S. PHILLIPS – *Functional analysis and semi-groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 31, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1957, rev. ed.
- [Ion01] E. J. IONASCU – « Rank-one perturbations of diagonal operators », *Integral Equations Operator Theory* **39** (2001), no. 4, p. 421–440.
- [Kit03] F. KITTANEH – « A numerical radius inequality and an estimate for the numerical radius of the Froebenius companion », *Studia Math.* **158**, no. 1, 11–17. (2003).

- [Kla14a] H. KLAJA – « Hyperinvariant subspaces for some compact perturbations of multiplication operators », *J. Operator Theory* **accepté** (2014).
- [Kla14b] —, « The numerical range and the spectrum of a product of two orthogonal projections », *J. Math. Anal. Appl.* **411** (2014), no. 1, p. 177–195.
- [KM] E. KOPECKÁ et V. MÜLLER – « A product of three projections », Preprint.
- [KW88] S. KAYALAR et H. WEINERT – « Error bounds for the method of alternating projections », *Math. Control Signals Systems 1*, no. 1, 43–59. (1988).
- [Le 12] C. LE MERDY – « H^∞ functional calculus and square function estimates for Ritt operators », *ArXiv e-prints* (2012).
- [Len72] A. LENARD – « The numerical range of a pair of projection », *J. Functional Analysis 10 (1972)*, 410–423. (1972).
- [Lom73] V. I. LOMONOSOV – « Invariant subspaces of the family of operators that commute with a completely continuous operator », *Funkcional. Anal. i Priložen.* **7** (1973), no. 3, p. 55–56.
- [Lum61] G. LUMER – « Semi inner product spaces », *Trans. Amer. Math. Soc.* **100** 1961 29–43. (1961).
- [Nee99] M. NEES – « Products of orthogonal projections as Carleman operators », *Integral Equations Operator Theory* **35**, no. 1, 85–92. (1999).
- [NN87] S. NELSON et M. NEUMANN – « Generalisations of the projection method with applications to SOR theory for Hermitian positive semi definite linear system », *Numer. Math.* **51**, no. 2, 123–141. (1987).
- [NRR76] E. A. NORDGREN, H. RADJAVI et P. ROSENTHAL – « A geometric equivalent of the invariant subspace problem », *Proc. Amer. Math. Soc.* **61** (1976), no. 1, p. 66–68 (1977).
- [Pas12a] A. PASZKIEWICZ – « In the Amemiya-Ando problem 3 is enough », *ArXiv e-prints* (2012).
- [Pas12b] —, « The Amemiya-Ando conjecture falls », *ArXiv e-prints* (2012).
- [Rea86] C. J. READ – « A short proof concerning the invariant subspace problem », *J. London Math. Soc. (2)* **34** (1986), no. 2, p. 335–348.
- [Roc70] R. ROCKFELLAR – *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.
- [Rog70] C. A. ROGERS – *Hausdorff measures*, Cambridge University Press, London, 1970.

- [RSN90] F. RIESZ et B. SZ.-NAGY – *Functional analysis*, Dover Books on Advanced Mathematics, Dover Publications Inc., New York, 1990, Translated from the second French edition by Leo F. Boron, Reprint of the 1955 original.
- [RW69] H. RADJAVI et J. P. WILLIAMS – « Products of self-adjoint operators », *Michigan Math. J.* **16**, 177–185. (1969).
- [Seb90] Z. SEBESTYEN – « Characterization of subprojections suboperators », *Acta Math. Hungar.* **56**, no. 1-2, 115–119. (1990).
- [SS05] E. M. STEIN et R. SHAKARCHI – *Real analysis*, Princeton Lectures in Analysis, III, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005, Measure theory, integration, and Hilbert spaces.
- [SS10] V. SIMONCINI et D. B. SZYLD – « On the field of values of oblique projections », *Linear Algebra Appl.* **433** (2010), no. 4, 810–818. (2010).
- [Sta84] J. G. STAMPFLI – « One-dimensional perturbations of operators », *Pacific J. Math.* **115** (1984), no. 2, p. 481–491.
- [Sun88] V. S. SUNDER – « N subspaces », *Canad. J. Math.* **40** (1988), no. 1, p. 38–54.
- [TUZ03] H. TAKEMOTO, A. UCHIYAMA et L. ZSIDO – « The σ -convexity of all bounded convex sets in \mathbb{R}^n and \mathbb{C}^n », *Nihonkai Math. J.* **14** (2003), no. 1, p. 61–64.
- [TW99] S. TSO et P. WU – « Matricial range of quadratic operators », *Rocky Mountain J. Math.* **29**, no. 3, 1139–1152. (1999).