

N° d'ordre : 41593

UNIVERSITÉ LILLE 1 SCIENCES ET TECHNOLOGIES

THÈSE

présentée en vue
d'obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : Génie Électrique

par

Sonia MAALEJ

Doctorat délivré par l'Université de Lille 1 Sciences et Technologies

Commande Robuste des Systèmes à Paramètres Variables

Soutenue le 12 décembre 2014 devant le jury d'examen :

Président	M. Jimmy Lauber	Prof. des Universités	Université de Valenciennes
Rapporteur	M. Cédric Join	Maître de Conférences, HdR	Université de Lorraine
Rapporteur	M. Kevin Guelton	Maître de Conférences, HdR	Université de Reims
Membre	M. Ahmed Toumi	Prof. des Universités	Ecole Nationale d'Ingénieur de Sfax
Directeur	M. Lotfi Belkoura	Prof. des Universités	Université Lille 1
Encadrant	M. Alexandre Kruszewski	Maître de Conférences	École Centrale de Lille

Thèse préparée au
Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal
L.A.G.I.S, CNRS UMR 8219 - École Centrale de Lille
Projet NON-A -INRIA Lille-Nord Europe
Ecole Doctorale SPI 072 (Lille I, Lille III, Artois, ULCO, UVHC, EC Lille)
PRES Université Lille Nord-de-France

Commande Robuste des Systèmes à Paramètres Variables

Résumé : Les travaux de cette thèse portent sur l'analyse de stabilité et la synthèse de commandes robustes pour les systèmes non linéaires. La conception des contrôleurs/observateurs nécessite souvent la connaissance totale ou partielle du modèle du procédé à contrôler. Néanmoins, l'obtention d'un modèle à la fois exploitable et suffisamment fidèle est difficile et chronophage, ce qui provoque l'augmentation du coût total de développement d'un système d'asservissement. Afin de réduire la quantité ainsi que la qualité des informations nécessaires sur le système, de nouvelles méthodes de synthèse d'observateurs et de contrôleurs ont été développées dans cette thèse. En effet, si le modèle est connu, une loi de commande par retour de sortie à base d'observateur de type Luenberger a été proposée. Dans le cas où peu d'informations sont disponibles, une loi de commande à modèle restreint ("sans modèle") a été développée. Afin d'estimer l'état du système, des dérivateurs/estimateurs non-asymptotiques tel que les dérivateurs numériques basés sur l'algèbre différentielle ou encore les dérivateurs asymptotiques tels que les observateurs et les filtres ont été considérés. Les deux lois de commande proposées ont permis de conserver l'aspect non linéaire du système ainsi que d'obtenir des résultats les plus généraux que possible en reformulant les problèmes sous la forme de systèmes polytopiques convexes.

Mots-clés : Commande robuste, Systèmes non linéaires, Commande à modèle restreint, Polytopes Convexes, Estimateurs/Dérivateurs, Contrôleurs/Observateurs.

Robust Control for Time Varying Parameters Systems

Abstract : This work focuses on the stability analysis and the robust control synthesis for nonlinear systems. The design of controllers/observers often require a complete or partial knowledge of the process model to control. Nevertheless, obtaining a model both reliable and sufficiently accurate is not only difficult and time-consuming but also it increases the total development cost of a control system. In order to reduce the quantity and quality of informations required on the system, new methods of observers and controllers synthesis have been proposed. With known models, an output feedback controller based Luenberger observer was proposed. In case where few informations are available, a restricted-model ("model-free") controller is proposed. In order to estimate the system state, non-asymptotic derivators /estimators based on differential algebra or asymptotic ones such as observers or filters have been considered. Both of these control laws have allow to maintain the nonlinear aspects of the system and to obtain general results by reformulating the problem into convex polytopic systems forms.

Keywords : Robust control, Non-linear systems, Model-free control, Convex polytopes, Estimator/Derivator, Controller/Observer.

A mes premiers professeurs : mes parents

Remerciements

C'est avec un grand plaisir que je réserve cette page, en signe de gratitude et de reconnaissance à tous ceux qui m'ont aidé à la réalisation de ce travail de doctorat qui a été préparé à l'Université Lille 1, au sein de l'équipe SyNer (Systèmes Non linéaires et à Retards) du Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal (LAGIS - UMR CNRS 8219) sous la direction de Monsieur Lotfi BELKOURA, Professeur des Universités, Lille 1 et encadré par Monsieur Alexandre KRUSZEWSKI, Maître de Conférence à l'École Centrale de Lille. Ce travail s'inscrit dans le cadre du projet Non-A (Non-Asymptotic estimation for online systems) soutenu par l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et Automatique). Les activités de recherche des équipes SyNer et Non-A se situent dans le cadre général de l'estimation et de la commande des processus. Elles développent notamment une théorie de l'estimation bâtie autour de l'algèbre différentielle et du calcul opérationnel, pour une grande part, mais aussi de techniques à grands gains (modes glissants, commutations...). Ces deux approches conduisent notamment à l'estimation en temps fini.

Je tiens à remercier très vivement Lotfi pour avoir accompagné mon travail durant ces trois années de thèse au cours desquelles, au-delà de quelques difficultés, il a toujours été présent au bon moment et m'a toujours prodigué de très bons conseils. Je tiens à lui exprimer toute mon amitié et ma reconnaissance.

Je remercie très chaleureusement Alexandre, pour sa fructueuse collaboration, sa confiance, sa disponibilité et son soutien continu durant toute la période d'encadrement. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude pour ses précieux conseils et toute l'aide qu'il m'a procurée durant l'élaboration de ce travail.

Les résultats expérimentaux n'auraient pu être obtenus sans l'entière disponibilité et la compétence de Romain Delpoux, post doctorant au Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes au sein de l'équipe Ingénierie Numérique des Systèmes Mécaniques. Je le remercie pour son aide et sa sympathie.

J'adresse mes remerciements à Messieurs Cédric Join, Maître de Conférences (HdR) à l'Université de Lorraine-France et Kevin Guelton, Maître de Conférences (HdR) à l'Université de Reims-France pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant : (i) d'être les rapporteurs de ce mémoire et (ii) de participer au jury de soutenance. Je les remercie de l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de mes travaux.

Mes remerciements vont également à Monsieur Jimmy Lauber, Professeur des Universités à l'Université de Valenciennes-France, Présidente du jury de thèse, Monsieur Ahmed Toumi, Professeur des Universités à l'École Nationale d'Ingénieur de Sfax-Tunisie d'avoir accepté d'être membres du même jury.

Mes remerciements s'adressent à tous les membres des équipes SyNer et Non-A, en commençant par notre "big boss" Jean-Pierre Richard, Professeur à l'École Centrale de Lille, de m'avoir accepté dans son équipe et pour son soutien, ses conseils, sa pertinence et sa sympathie. Laurentiu Hetel, Christophe Fiter et Christophe Sueur pour toutes les discussions quotidiennes. C'est avec sympathie que je remercie tous les membres du LAGIS et de l'Inria. Je pense particulièrement à Philippe Vanheege, directeur du LAGIS notamment pour ses nombreuses signatures, mais également Christine, Brigitte, Marie-Bénédicte, Hilaire, Gilles, Jacques, Bernard et Patrick toujours disponibles.

Merci à tous les doctorants et post-doctorants et plus particulièrement mes collègues Nouha, Hassan, Rahma, Sara, Safa, Wided, Karama, Ayyoub et à tous mes amis spécialement Issam, Zineb, Ines, Nadhira, Imen, Adam. Ces trois années de thèse n'auraient pas été aussi agréables sans eux, autant pour les discussions scientifiques que pour les cafés et les sorties.

Je dois beaucoup à mes parents et à mes grands-parents pour leur encouragement et leur soutien malgré les longues distances. Aucun mot ne saurait exprimer ma reconnaissance et ma gratitude à leur égard. Merci Dieu d'être leur fille.

Je suis également reconnaissante à mes sœurs bien-aimés, Sirine et Maroua et à mon beau-frère qui ont consulté pour moi toujours. Un grand bisou pour mon ange, ma nièce Rannem, pour le bonheur et la joie qu'elle apporte à ma vie. Merci pour ma belle-famille qui ont cru en moi.

Finalement, mais sans doute pas le dernier, je voudrais adresser les grands mots à mon cher époux Zied, pour le remercier, pour son amour, son soutien, ses sacrifices démesurés, son affection et ses encouragements permanents. Merci mon chéri pour me donner la liberté d'entreprendre ce défi et continuer l'aventure.

Table des matières

Remerciements	7
Table des figures	11
Liste des tableaux	13
Introduction	1
1 Analyse et Synthèse des Systèmes Non Linéaires	5
1.1 Synthèse du Modèle	6
1.1.1 Modèles LPV, Quasi-LPV et TS	6
1.1.2 Représentation Polytopique	8
1.2 Synthèse de la Loi de Commande	12
1.2.1 Commande à Base d'un Modèle	13
1.2.2 Commande à modèle restreint	15
1.3 Synthèse de l'Estimateur/Dérivateur	18
1.4 Stabilité par les méthodes de Lyapunov	19
1.4.1 Notions de base sur la stabilité	19
1.4.2 Application aux systèmes Polytopiques	21
1.5 Discussion et Conclusion	22
2 Stabilisation des Systèmes Non Linéaires par Observateur	25
2.1 Introduction	26
2.2 Problématique	27
2.3 Analyse de Stabilité	32
2.4 Conception du Contrôleur	35
2.4.1 Approche Séquentielle	35
2.4.2 Approche Globale	37
2.4.3 Exemple : Robot à joint à liaison flexible (Flexible link joint robot)	39

2.5	Sous-classe de systèmes T-S : Systèmes SISO	41
2.5.1	Etude de la stabilité	41
2.5.2	Exemple : Pendule Inverse	44
2.6	Conclusion	45
3	Commande à Modèle Restreint : Approche Non-Asymptotique	47
3.1	Introduction	48
3.2	Définition de la loi de commande	49
3.3	Principe et Outils de la dérivation numérique	51
3.3.1	Principe	51
3.3.2	Outils	52
3.3.3	Estimation de la dérivation	54
3.3.4	Remarques	55
3.4	Implémentation : Estimation de la dérivée première d'un signal	56
3.5	Synthèse d'une loi de commande	58
3.5.1	Conception du contrôleur	59
3.5.2	Étude de stabilité du système discrétisé	62
3.5.3	Exemple	63
3.6	Conclusion	64
4	Commande à Modèle Restreint : Approche Asymptotique	65
4.1	Problématique	66
4.2	Stabilité du Cas Nominal	67
4.2.1	Analyse de Stabilité	67
4.2.2	Implémentation sur un Moteur Synchrone à Aimants Permanents (MSAP)	70
4.3	Synthèse de contrôleur avec connaissances limitées	75
4.3.1	Analyse de Stabilité	76
4.3.2	Analyse de précision	81
4.3.3	Analyse de Performances	84
4.3.4	Exemple	87
4.4	Conclusion	89
	Conclusion et Perspectives	91
	Bibliographie	99

Table des figures

1.1	Diagramme de Venn des systèmes à dimension fini	7
1.2	Architecture du Contrôleur de la loi de commande "sans modèle" . . .	17
2.1	Décomposition générale d'un système vu comme une interconnexion par rétroaction	31
2.2	Stabilisation par rétroaction, système bouclé $\dot{x} = h(x)$	33
3.1	Architecture du Contrôleur	51
3.2	Discrétisation d'intégrale	54
3.3	Evolution du signal et de sa dérivée première pour $T_h = 10^{-4}$ et $T_f = 0.008$	58
3.4	Erreur d'estimation	58
3.5	Évolution de l'erreur de poursuite	63
3.6	Évolution de l'erreur de poursuite	63
4.1	Banc d'essai de moteur pas à pas, LAGIS/EC-Lille France	71
4.2	Résultat expérimental sur le MSAP illustrant l'évolution de la sortie $\theta(t)$, la dynamique désirée $\theta_{ref}(t)$, l'erreur d'estimation $E_t = \theta - \theta_{ref}$ et le signal de commande v_q pour un gain désiré constant $K = [100 \ 20]$ et pour différentes valeurs du paramètre du contrôleur τ	74
4.3	Domaine de stabilité du système (4.36) avec $\tau_x = 0.01$, $\alpha = 1$ et $K_x = [10^{-4} \ 2.210^{-2}]$	79
4.4	Domaine de stabilité du système de second ordre de l'équation diffé- rentielle (4.36) avec $\tau_x = 0.01$, $\alpha = 1$ et $K_x = [10^{-4} \ 2.210^{-2}]$	80
4.5	Domaine de stabilité du système de second ordre de l'équation diffé- rentielle (4.36) avec $\tau = 0.01$ et $K = [10^{-4} \ 2.210^{-2}]$ pour différentes approximations du gain d'entrée α	81
4.6	Évolutions de la sortie $y(t)$ du système (4.56), de la sortie de la dy- namic $y_r(t)$, de l'erreur de poursuite $e_z(t) = y_r(t) - y(t)$ et de la commande $u(t)$ pour les gains induits $J_1^* = 0.03$ et $J_2^* = 3$	89

Liste des tableaux

2.1	Table comparative pour $\Delta B_m = 0$	40
2.2	Conditions de stabilité	44
4.1	Paramètres du MSAP [Delp 12]	71
4.2	Conditions de stabilité	80
4.3	Le gain induit et borné \mathcal{L}_2 pour différents δ	87
4.4	Détermination des paramètres du contrôleur	88

Introduction Générale

Contexte

Depuis longtemps, l'analyse et la synthèse d'une loi de commande pour les systèmes dynamiques fait l'objet de nombreuses recherches. L'étude de stabilité, stabilisation, rejet de perturbation, suivi de référence, ..., de ces systèmes nécessite souvent la connaissance totale ou partielle du modèle du procédé à contrôler. Ceci impose donc une connaissance de son comportement, de l'évolution de ses composants au cours du temps, de ses interactions avec l'environnement extérieur ainsi que des contraintes qu'il subit.

L'obtention d'un modèle du procédé doit permettre la détermination des entrées de commande pour assurer un suivi parfait de la dynamique désirée. Ceci exige la conception d'une loi de commande offrant une égalité parfaite entre le comportement du procédé et le comportement du modèle ce qui demeure quasiment irréalisable, le modèle du procédé devenant alors d'une complexité trop grande. Ceci est contraire à la démarche de l'automaticien qui consiste à chercher un modèle relativement simple permettant de traduire le mieux possible le comportement d'un procédé complexe. De plus, l'ensemble des paramètres numériques associés à ce système est défini souvent sous la forme de variations et/ou d'incertitudes liées d'une part aux méthodes d'identification et d'autre part à la dispersion des différents composants du procédé. De ce fait, le modèle général adopté reste une approximation du comportement dynamique du système où la commande générée ne garantit pas l'obtention de la trajectoire désirée. On distingue ainsi deux types de modèles : les modèles linéaires qui peuvent approximer localement des systèmes non linéaires, mais sans garantir la stabilité du système dans tout l'espace d'état et, les modèles non linéaires qui regroupent les systèmes présentant des comportements complexes qui ne peuvent pas être décrits par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Ceci explique l'origine de la complexité et la diversité des systèmes non linéaires. En effet, si le modèle linéarisé est convenable pour certains cas, le respect de certaines contraintes pratiques (telles que les saturations, les hystérésis, la variation

des paramètres dans le temps,..) mène à des systèmes bouclés non linéaires. Les travaux publiés font état de plusieurs classes de systèmes non linéaires et types de modèles qui seront brièvement abordés au chapitre suivant. Enfin, parmi l'ensemble des entrées influençant le comportement dynamique du système, un certain nombre d'entrées exogènes dites perturbations ne sont pas mesurables ; ce qui rend leur rejet incertain en l'absence de bouclage. Toutes ces raisons font qu'il est nécessaire d'adjoindre au système une paire contrôleur/observateur adéquate permettant d'assurer un suivi robuste de la trajectoire désirée.

Compte tenu que l'obtention d'un bon modèle est une étape difficile et chronophage, et que la conception des contrôleurs/observateurs est basée sur ces derniers, le coût total de développement d'un système d'asservissement devient important.

Objectifs de la thèse

L'objectif principal de cette thèse est de développer de nouvelles méthodes de synthèse d'observateurs et de contrôleurs visant à réduire la quantité et la qualité des informations nécessaires sur le système. L'étude de stabilité de ces modèles s'effectuera en reformulant les problèmes sous la forme de systèmes polytopiques.

Organisation de la thèse

Ce mémoire est organisé comme suit :

Chapitre 1

Ce premier chapitre a pour objectif de positionner le problème vis-à-vis de l'état de l'art. La première partie introduira les différentes classes de modèles rencontrés dans ce manuscrit. On s'attardera sur la classe des modèles polytopiques qui constitue un cadre théorique attractif et bien posé pour traiter les problèmes de commande pour les systèmes non linéaires. Pour cette classe de modèles, on présentera les principaux théorèmes de stabilité et les différentes lois de commandes appropriées. Enfin, on présentera les différentes problématiques liées à leur utilisation qui seront traitées dans les chapitres suivants, c'est à dire : la stabilisation de systèmes polytopiques à paramètres non mesurables et la commande avec modèles restreints.

Chapitre 2

Le deuxième chapitre présente une solution au premier problème. Dans un premier temps, le cas des modèles Takagi-Sugeno à variables de prémisses non mesurées (polytopique à paramètres non mesurés) sera exposé. La loi de commande choisie est

celle par retour de sortie avec observateur linéaire de type Luenberger. Pour l'analyse de stabilité et la conception de ce contrôleur, le système bouclé est considéré comme une interconnexion de deux sous systèmes. Ceci permettra une analyse de la stabilité orientée ISS (Input to State Stability) et l'utilisation du théorème du petit gain. La solution finale au problème de conception d'une loi de commande se traduira sous forme de problème LMI (Linear Matrix Inequality) à résoudre. Finalement, une procédure visant la simplification de la synthèse du contrôleur sera proposée.

Chapitre 3

Le troisième chapitre est dédié aux systèmes Linéaires Invariants dans le Temps (LTI). On considère pour ce chapitre la loi de commande introduite par [Join 08a] et dite "sans modèle". Afin de reconstruire l'état du système, un estimateur non asymptotique basé sur les techniques algébriques sera utilisé. Tandis que le contrôleur résultant offre de "bons" résultats en pratique ainsi qu'en simulation, il n'existe pas à notre connaissance de procédures d'analyse simples de la stabilité de la boucle fermée. Ceci se traduit par une difficulté de réglages du contrôleur ainsi que de quantification des effets des différents paramètres de la loi de commande sur la réponse en boucle fermée.

Chapitre 4

Le quatrième chapitre se focalise sur l'étude de la classe de systèmes non linéaires représentée sous forme d'un ensemble de sous systèmes Linéaires à Paramètres Variables (LPV). On va considérer pour cette étude la loi de commande à modèle restreint ("sans modèle") où la dérivation des signaux est réalisée à l'aide d'un filtre linéaire. Un exemple pratique sera fourni afin de démontrer l'utilité d'une telle loi de commande. Ensuite, pour une sous-classe de cette famille de systèmes, la preuve de l'existence systématique d'un contrôleur stabilisant et performant sera établie ainsi qu'une méthode de réglage directe. La stabilité et les performances en boucle fermée seront étudiées grâce à la théorie de Lyapunov et l'étude du gain induit \mathcal{L}_2 .

Chapitre 5

Ce dernier chapitre constitue la conclusion de ce manuscrit. Un résumé des différents résultats et une conclusion y seront proposés. A partir de ces conclusions, différentes perspectives et extensions seront discutées.

CHAPITRE 1

Analyse et Synthèse des Systèmes Non Linéaires

Sommaire

2.1	Introduction	26
2.2	Problématique	27
2.3	Analyse de Stabilité	32
2.4	Conception du Contrôleur	35
2.4.1	Approche Séquentielle	35
2.4.2	Approche Globale	37
2.4.3	Exemple : Robot à joint à liaison flexible (Flexible link joint robot)	39
2.5	Sous-classe de systèmes T-S : Systèmes SISO	41
2.5.1	Etude de la stabilité	41
2.5.2	Exemple : Pendule Inverse	44
2.6	Conclusion	45

Dans ce chapitre seront présentés quelques concepts de base ainsi que les techniques les plus répandues dans la littérature reliées à l'analyse et la synthèse des systèmes non linéaires. Tout d'abord, une étude sur ces systèmes ainsi que les différentes approches et procédures de transformation seront présentées. Ensuite, une discussion sur la synthèse des lois de commande sera donnée : le choix de la loi de commande adéquate se réalise selon le cahier des charges et les informations disponibles sur le système à étudier. Finalement, quelques notions de base utiles à cette étude sur la stabilité par les méthodes de Lyapunov seront rappelées.

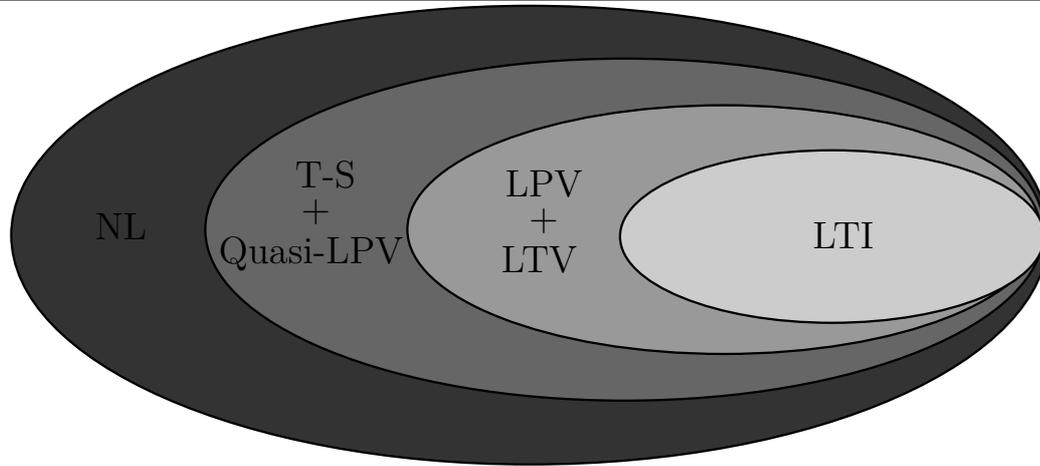
1.1 Synthèse du Modèle

Les travaux publiés dans la littérature font état de plusieurs classes de systèmes non linéaires bien spécifiques. À titre d'exemple, on peut citer la classe des systèmes polynomiaux [Eben 06] ou encore la classe des systèmes non linéaires affines par rapport à la commande [Chab 93, Bank 86, Celi 93]. Les différents travaux effectués sur ces modèles restent très spécifiques et leur complexité tend à limiter les résultats obtenus mais ont l'avantage d'être les moins conservatifs. Par exemple, on peut citer [Bacc 91] où seules la stabilisation par rétroaction de classe C^1 des systèmes plans est étudiée ou encore [Chab 93] où seuls les systèmes de dimension deux sont considérés. D'un autre côté, on trouve la classe des systèmes présentés sous forme paramétrique où l'étude de stabilité se réalise tout en évitant de traiter le caractère non linéaire des systèmes. Les résultats obtenus sur ces classes sont très généraux du point de vue applicabilité grâce aux nombreuses méthodes systématiques existantes. Vu que certaines informations sur le modèle ne sont plus exploitées, ces résultats obtenus souffrent d'un conservatisme plus important. Parmi ces modèles, on peut noter les classes de systèmes non linéaires moins spécifiques comme les systèmes Linéaires à Paramètres Variants dans le temps (**LPV**) [Sham 88, Lee 97, Sham 99]. Ces systèmes permettent de proposer un modèle décrivant le comportement du système d'une manière globale comme un ensemble de sous-systèmes linéaires connectés par des fonctions. Ce sont ces arguments qui ont poussé différents auteurs à étudier cette classe de systèmes et cette thèse s'attachera à contribuer à différentes techniques d'observation et de contrôle les concernant.

1.1.1 Modèles LPV, Quasi-LPV et TS

Ce paragraphe présente certaines classes de systèmes non linéaires utilisées pour le contrôle des systèmes dynamiques. Le diagramme de Venn de ces classes est donné par la *Figure 1.1*.

Figure 1.1 Diagramme de Venn des systèmes à dimension fini



Modèles LPV

Les modèles LPV représentent une classe particulière de systèmes non linéaires qui a suscité un intérêt considérable ces dernières années. Plusieurs approches ont été développées permettant de représenter, de manière équivalente, un système non linéaire sous forme LPV [Heck 04, Marc 04, Tan 97]. Deux approches principales d'identification existent : l'approche locale, qui est basée sur l'interpolation des modèles locaux Linéaires et Invariants dans le Temps (**LTI**) pour des points de fonctionnement fixes du système [Stei 03, Love 07, Caig 09] et, l'approche globale qui est basée sur l'hypothèse d'excitation de toutes les non linéarités du système. Un modèle dépendant de paramètres est alors directement obtenu (voir [Lee 96, Bami 99, Verd 05, Giar 06, Wing 09, Feli 07]).

Un système LPV est un système linéaire et variable dans le temps qui peut être mis sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(\theta(t))x + B(\theta(t))u \\ y &= C(\theta(t))x + D(\theta(t))u \end{cases} ,$$

où θ est un vecteur composé par des paramètres variables dans le temps et bornés. Compte tenu que la majorité des systèmes LPV dont les paramètres variables sont indépendants (reliés entre eux par des relations non linéaires) ne peuvent pas être représentés de manière exacte sous forme LPV, une autre représentation a été introduite dans les années 90s par [Doyl 91, Lamb 93, Belc 98] nommée transformation linéaire fractionnaire (Linear Fractional Transformation (**LFT**)). Cette dernière consiste à séparer les éléments non linéaires et à les regrouper dans un opérateur bouclé autour de la dynamique nominale, linéaire et invariante du système. Néanmoins, selon l'étude comparative réalisée par [Luzi 14], dès que la modélisation associée au système LPV n'introduit pas de conservatisme excessif (c'est-à-dire dans le cas où la

dépendance par rapport aux paramètres est affine), la synthèse polytopique devient préférable à la représentation LFT.

Modèles Quasi-LPV

Bien que la forme des systèmes LPV soit similaire à celle d'un système LTI, elle reste toujours non fiable pour capturer la dynamique non linéaire du système initial [Bern 10]. Une alternative a été introduite par [Sham 93] qui consiste à représenter le système non linéaire sous la forme d'un modèle Quasi-LPV à travers une transformation exacte de l'état non linéaire. On note qu'à la différence des modèles LPV, dont les paramètres varient directement par rapport au temps, les modèles Quasi-LPV peuvent dépendre de l'état, de l'entrée ou de toute autre variable de décision ξ du système. Un système est dit Quasi-LPV s'il peut être mis sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\xi)x(t) + B(\xi)u(t) \\ y(t) &= C(\xi)x(t) + D(\xi)u(t) \end{cases} .$$

Cette classe de systèmes est équivalente aux modèles de Takagi-Sugeno (**T-S**) [Taka 85] qui seront présentés dans le paragraphe suivant.

Modèle de T-S

La caractéristique principale des modèles T-S, inspirée des modèles flous, est de permettre de représenter localement les relations entrées/sorties du système par un ensemble de modèles (multimodèles) linéaires avec des fonctions non linéaires. Un multimodèle est une répartition floue de l'espace de décision Z caractérisé par l'ensemble des variables caractéristiques (de décision) $z(t)$ qui peuvent être variables d'état mesurables, et/ou de commande. Les zones de fonctionnement sont représentées sous forme de propositions sur les variables de prémisses (nommées aussi paramètres variants). Pour plus de détail sur ces modèles, le lecteur peut se reporter à l'introduction du *Chapitre 2*.

1.1.2 Représentation Polytopique

Modèles T-S, modèles flou de T-S [Taka 85], modèles linéaires polytopiques [Ange 01], multimodèle [Murr 97] ou modèles affines par morceaux, sont autant de termes montrant que dans la littérature, plusieurs terminologies sensiblement équivalentes peuvent définir ce type de modèles. L'idée principale s'appuie sur l'utilisation d'un ensemble de sous-modèles de structures simples (fréquemment linéaires) où chaque sous-modèle contribue de manière variable dans le temps au comportement global du système.

De façon pratique, ces modèles peuvent être obtenus par identification, par linéarisation ou encore par transformation polytopique convexe. La suite de cette section offre un aperçu sur chacune de ces méthodes.

Par Identification

Cette approche est réalisée, en se basant sur les techniques d'identification des modèles T-S, à partir des mesures acquises des entrées/sorties du procédé physique [Gass 99, Gass 00]. Dans ce cas, le problème d'identification du modèle non linéaire se réduit à l'identification de modèles locaux autour de points de fonctionnement préalablement choisis. Cette identification exige, indépendamment du type de modèle choisi, la détermination d'une structure optimale, l'estimation des paramètres et puis la validation du modèle final. Le modèle obtenu étant de type entrées/sorties, il est souvent nécessaire de les transformer en représentation d'état qui est plus classique dans le domaine de l'analyse de stabilité de ces modèles et de la synthèse de lois de commande. Cette méthode d'identification est utilisée souvent dans le cas de systèmes dotés d'une dynamique difficile à décrire à l'aide d'un modèle analytique.

Par Linéarisation

Cette méthode s'appuie sur la linéarisation d'un modèle non linéaire autour d'un ensemble fini de points de fonctionnement [Ma 01, Tana 01]. Un représentant T-S est obtenu par l'interconnexion des dynamiques locales linéaires à l'aide de fonctions d'appartenance judicieusement choisies (gaussiennes, triangulaires, trapézoïdales, etc.). Cette méthode est basée sur des techniques d'optimisation afin de minimiser l'erreur quadratique de sortie. Notons que cette approche ne constitue qu'une approximation du modèle non linéaire considéré.

À titre d'exemple considérons le système non linéaire suivant [Chad 12] :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

où $x(t)$ présente le vecteur d'état du système et $u(t)$ son entrée. La fonction $f(x(t))$ est supposée continument dérivable. Autour du point de fonctionnement (x_i, u_i) la linéarisation de la fonction $f(x(t))$ est donnée par :

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + d_i$$

où

$$A_i = \frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)} \Big|_{(x(t)=x_i)}, \quad B_i = \frac{\partial f(x(t))}{\partial u(t)} \Big|_{(u(t)=u_i)}, \quad d_i = f(x_i, u_i) - A_i x_i - B_i u_i.$$

En considérant plusieurs modèles locaux (dits aussi sous-modèles) issus d'une linéarisation autour de n points de fonctionnement (x_i, u_i) , la formulation multimodèle aboutit à :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + d_i),$$

où $\mu_i(\cdot)$ sont les fonctions d'activation à déterminer, $z(t)$ est le vecteur des variables de décision dépendant des variables d'état mesurables et de la commande $u(t)$. On

note que pour cette méthode, le nombre de modèles dépend de la complexité du système non linéaire, de la précision de modélisation désirée et du choix de la structure des fonctions d'activation.

Par Transformation en secteurs non linéaires

Cette approche est basée directement sur la connaissance analytique du modèle non linéaire [SKaw 92, Tana 01]. Cette méthode permet, contrairement aux deux méthodes citées précédemment, l'obtention d'un modèle polytopique représentant *exactement* le modèle non linéaire dans un compact de l'espace d'état et de manière systématique. Le principe repose sur une transformation polytopique convexe des termes non linéaires du processus dynamique à considérer.

Contrairement aux représentations affines qui se basent sur la dépendance affine des paramètres variants, la représentation polytopique est basée sur les notions de barycentre et d'enveloppe convexe. On rappelle qu'une enveloppe convexe d'un ensemble de points P_i (dénotée $\text{conv}(P_i)$) est le plus petit ensemble convexe contenant tous les sommets. Cette enveloppe peut être représentée par la relation barycentrique :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} := \text{conv}(P_i, i \in \{1..N\}) &= \{P(t) \mid \sum_{i=1}^N \mu_i P_i; \mu_i \in \Delta_\mu, i \in \{1..N\}\}, \\ \Delta_\mu &:= \{\mu = \sum_{i=1}^N \mu_i = 1; \forall i \in \{1..N\}, 0 \leq \mu_i \leq 1\}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Afin d'illustrer cet aspect, considérons le système LPV autonome défini par l'équation différentielle :

$$\dot{x} = A(\xi)x.$$

Déterminer un modèle polytopique associé à ce système revient à chercher les N matrices A_i dont l'enveloppe convexe contient $A(\xi)$ pour toute valeur admissible du vecteur de paramètre ξ :

$$\forall \xi, \exists \mu_1, \dots, \mu_N \geq 0 \mid \sum_{i=1}^N \mu_i = 1, A(\xi) = \sum_{i=1}^N \mu_i A_i.$$

Ces N matrices constituent alors les sommets du modèle polytopique. Pour faciliter l'analyse de la synthèse de la loi de commande, on a intérêt à limiter le nombre de sommets N . Cependant, ceci peut causer l'augmentation du degré de conservatisme du modèle polytopique par rapport à celui du procédé.

Plusieurs méthodes de conception de ces sommets existent dans la littérature. Les techniques principales sont basées sur : le maillage et la bornitude [Donk 09, Fuji 09, Skaf 09], le développement de séries de Taylor [Hete 11, Hete 07], la décomposition de Jordan [Wouw 10, Cloo 10], ou encore le Théorème de Gayley-Hamilton [Giel 10, Goeb 09]. Pour une comparaison entre ces différentes approches, le lecteur peut se reporter à [Heem 10].

La méthode basée sur la bornitude des termes non linéaires avec $F(t)$, une fonction bornée, est décrite par la procédure suivante :

$$\begin{aligned} F_i(.) &: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x(t) &\mapsto F_i(x) \end{aligned}$$

avec

$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x)$$

et

$$F_1(x) + F_2(x) = 1, \forall (\alpha_1, \alpha_2)$$

Les fonctions F_i sont obtenues à partir de F et de ces bornes :

$$F_1(x) = \frac{\alpha_2 - F(x)}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad F_2(x) = \frac{F(x) - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

où

$$\alpha_1 = \min_{x(t) \in [a, b]} F(x), \quad \alpha_2 = \max_{x(t) \in [a, b]} F(x)$$

L'utilisation de cette transformation pour l'obtention de représentants polytopiques est illustrée par l'exemple suivant :

Exemple numérique : Soit le modèle non linéaire continu :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

avec

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, A(x(t)) = \begin{pmatrix} -1 & \sin(x_2(t)) \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La fonction $F(x_2(t)) = \sin(x_2(t))$ qui représente le terme non linéaire est bornée pour tout $x_2(t)$:

$$-1 \leq F(x_2(t)) \leq 1.$$

D'après la méthode, on peut écrire :

$$F(x_2(t)) = -1.F_1(x_2(t)) + 1.F_2(x_2(t))$$

avec

$$F_1(x_2(t)) + F_2(x_2(t)) = 1.$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$F_1(x_2(t)) = \frac{1 - \sin(x_2(t))}{2}, \quad F_2(x_2(t)) = \frac{1 + \sin(x_2(t))}{2}.$$

Par conséquent on obtient :

$$A(x(t)) = F_1(x_2(t))A_1 + F_2(x_2(t))A_2$$

avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Une représentation équivalente au modèle non linéaire, est

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 F_i(\xi)(A_i x(t) + Bu(t)),$$

où ξ représente pour cet exemple le vecteur de variables de décision dépendant de l'état $x_2(t)$.

Cette méthode offre la possibilité de réduire le nombre de modèles par rapport à la méthode de linéarisation tout en évitant d'injection d'erreurs d'approximation. L'analyse de la stabilité et la synthèse de la loi de commande de ces modèles sont basées essentiellement sur la théorie de Lyapunov et la formulation LMI. Cependant, lors de la synthèse du contrôleur par analyse convexe, le nombre de contraintes LMI dépend du nombre de sous-modèles. La réduction de ce nombre, dépendant de la méthode de transformation, permet une diminution de la complexité.

Remarque 1.1. *Ces méthodes s'appliquent aussi bien au cas continu qu'au cas discret.*

Après avoir détaillé les méthodes d'obtention des représentations polytopiques, on s'intéresse maintenant aux méthodes d'analyse et de contrôle spécifiques à ces modèles.

1.2 Synthèse de la Loi de Commande

La synthèse d'une loi de commande nécessite d'une part un modèle mathématique du processus à contrôler et d'autre part, une méthode efficace et adaptée au modèle. Ainsi, la modélisation du comportement dynamique du système à commander doit reproduire le plus fidèlement possible cette dynamique tout en restant suffisamment simple pour être compatible avec les méthodes de synthèse. Depuis les années 70, de nombreux types de contrôleurs et de méthodes de synthèses ont vu le jour. Parmi ces correcteurs et méthodes, on peut distinguer deux approches différentes : l'approche où toute la démarche repose sur un modèle suffisamment fidèle et l'approche où l'on cherche à être le moins dépendant possible d'un bon modèle et ainsi limiter les informations nécessaires.

1.2.1 Commande à Base d'un Modèle

Afin de contrôler un système dynamique, certaines lois de commandes nécessitent la disponibilité des informations sur le système (le modèle, l'état, ...). Parmi ces lois de commandes, on remarque la commande par retour d'état et la commande par retour de sortie.

Commande par Retour d'État

Au cours de ces dernières décennies, plusieurs avancées ont été réalisées pour le contrôle des systèmes en s'appuyant sur la théorie de l'espace d'état (voir [Ande 71, Khal 02]). Ainsi, la stabilisation par retour d'état a été abordée pour plusieurs types de modèles T-S tels que les modèles avec incertitudes paramétriques bornées [Chen 00, Park 03, Tana 96] ou encore avec retard [Cao 01, Xu 05]. On trouve également de nombreux résultats pour la synthèse de retour d'état avec contraintes de performances : placement de pôles des modèles locaux [Hong 00], critères H_2 , H_∞ [Zera 08] ou encore par le critère du cercle [Ban 07].

Les travaux de [Tana 92] sur l'analyse de stabilité et la stabilisation par retour statique des systèmes non linéaires mis sous forme T-S ont donné naissance à la procédure de contrôle nommée Compensation Parallèle Distribuée (**PDC**) [Wang 96, Tana 98]. Cette loi de commande est définie par :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) K_i x(t)$$

où les K_i représentent les gains de contrôle à calculer. Cette loi de commande dépend des mêmes fonctions de pondération (activation) que le modèle du système et son implémentation nécessite l'accessibilité de tous les états du système (ils doivent être soit mesurables soit estimables) ainsi que la variable z (prémisse) ce qui peut être problématique dans certaines situations. L'utilisation des mêmes fonctions de pondération que celles du modèle permet de prendre en compte les non linéarités de ce dernier dans la loi de commande sans que les procédures de synthèse les fassent intervenir explicitement [Tana 01].

Commande par Retour de Sortie

Lorsque l'état du système n'est pas complètement disponible, la stabilisation par retour de sortie doit être envisagée. Dans ce cadre, trois approches sont communément considérées :

1. **Retour de sortie statique** : Le problème de retour de sortie statique a attiré l'attention de nombreux chercheurs [Cao 98, Chan 03, Kar 99, Prem 01, Syrm 97]. Ce type de loi de commande a souvent été utilisé dans le cadre de la

commande robuste [Yone 01, Yone 06, Li 00]. Généralement, l'existence d'une loi de commande par retour de sortie statique et d'ordre plein,

$$u(t) = Ky(t),$$

est donnée en fonction de la solvabilité du problème de stabilité. Dans le cas linéaire, le système décrit par des matrices (A, B, C) est dit stabilisable par retour de sortie statique s'il existe un gain K tel que la matrice $A + BKC$ est de Hurwitz. L'implémentation de ce contrôleur statique s'avère relativement simple et permet de minimiser le coût de calcul en ligne [Chad 02, Huan 06, Sym 97]. Néanmoins, cette simplicité s'acquière au prix d'un compromis en termes de performances souhaitées en boucle fermée et de la synthèse du gain statique.

2. **Retour de sortie dynamique** : Cette approche consiste à utiliser un contrôleur ayant sa propre dynamique :

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c + D_c y \end{cases} .$$

Grâce à sa structure, cette loi de commande permet d'améliorer les performances en introduisant des spécifications relatives à la dynamique souhaitée en boucle fermée [Chen 00, Zera 08]. La conception d'un tel contrôleur d'ordre plein pour les systèmes polytopiques a été étudiée par de nombreux auteurs tels que [Guel 09]. Bien que cette famille de contrôleurs soit la plus générale et englobe les autres catégories, les méthodes de synthèses proposées s'avèrent conservatrices. Ce conservatisme provient principalement de la complexité du contrôleur et de la difficulté à obtenir des conditions numériquement exploitables [Guel 09, Bour 09]. De nombreux auteurs continuent à travailler sur la réduction de ce conservatisme.

3. **Retour de sortie par observateur** : Cette approche propose un compromis entre généricité et facilité de synthèse. Elle consiste à introduire un observateur réalisant l'estimation des variables d'état non mesurées à partir des mesures d'entrées/sorties [Tana 98, Ma 98, Guer 06]. La conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires est un problème difficile qui est largement étudié dans les domaines de contrôle. Cette famille de lois de commande a reçu une attention considérable depuis l'apparition des travaux de Kalman [Kalm 61] et Luenberger [Luen 71]. Les techniques disponibles pour la conception de ces observateurs non linéaires peuvent être classées en trois groupes. Tout d'abord, on trouve les observateurs à *grand gain* [Thau 73] qui sont basés sur des algorithmes de placement de pôles, sur les équations algébriques de Riccati (ARE) [Arca 01], sur les équations de Lyapunov [Gaut 92, John 89] ou encore sur la méthode Backstepping [Song 97]. Ensuite, on trouve les observateurs

type *filtre de Kalman*, dont la conception est basée sur la linéarisation locale du système autour d'une trajectoire de référence, et qui consiste à restreindre la validité de l'approche dans une petite région de l'espace d'état [Zeit 87]. Enfin, les observateurs d'*entrée et de sortie* comme dans [Proy 93, Back 05]. Certains de ces observateurs nécessitent l'estimation des dérivées de la sortie et aucune analyse complète de la conception de l'observateur. Par ailleurs, la linéarisation des approches basées sur la transformation de coordonnées est généralement basée sur un ensemble de conditions extrêmement restrictives qui peuvent difficilement être respectées par tout système physique.

On note que les méthodes non linéaires classiques (linéarisation par bouclage, backstepping, modes glissants, ...) ne sont pas tout à fait satisfaisantes du point de vue simplicité/efficacité de synthèse car elles demandent un certain savoir-faire de la part de l'utilisateur [Khal 02].

1.2.2 Commande à modèle restreint

La plupart des algorithmes de contrôle traditionnels ont besoin d'un modèle mathématique du système à contrôler. L'obtention de ces derniers étant complexe et long, de nombreux chercheurs ont tenté de limiter les connaissances nécessaires dans leur méthodes de synthèse. Ainsi, différentes catégories de contrôleur ont fait leur apparition. Parmi ces méthodes, on peut citer la commande robuste qui permet de se passer de la connaissance précise des paramètres du modèle, la commande adaptative qui utilise une estimation en ligne des paramètres pour ajuster la loi de commande ou encore, la loi de commande à modèle restreint dite "sans modèle" qui tente d'estimer la dynamique du système afin de l'annuler. Quelques types d'approches sont décrits dans la suite :

Commande Adaptative

Du point de vue de la commande robuste, la commande adaptative est une approche qui permet de réduire l'impact des incertitudes, des perturbations externes et des non linéarités du modèle du procédé grâce à l'identification en temps réel du modèle du système bouclé. Cette loi de commande est souvent classifiée en deux grandes catégories [Land 86] : directe où les gains du correcteur sont modifiés directement à partir des sorties mesurées [Tong 04, Leu 05, Boul 08, Luzi 14, Xiao 12] et, indirecte où les gains de la loi de commande sont modifiés en fonction de l'estimé de ces paramètres [Leu 99, Tong 04, Li 14, Bout 13, Boul 14]. La majorité des travaux cités ci-dessus est basée sur l'estimation de l'erreur de poursuite par observateur (une étude comparative entre ces recherches peut être trouvée dans [Boul 14]). Le principal défaut de ces lois de commande est qu'elles ne prennent en compte que les incertitudes présentées sous la forme des variations des paramètres du procédé et non les incertitudes non structurées tel que les dynamiques non modélisées. De plus,

le principe de séparation entre observation, estimation et commande ne s'applique souvent pas sur ces systèmes. Ce problème reste toujours ouvert.

Commande "sans modèle" de [Join 08a]

Le concept de commande "sans modèle" a été présenté dans [Join 08a]. L'idée sous-jacente est que le signal porte en lui les informations sur le système qui l'a produit. La commande sans modèle repose sur une modélisation locale, sans cesse réactualisée, à partir de la seule connaissance du comportement entrée-sortie. Cette modélisation obtenue par des estimations permettant ensuite de contrôler un processus efficacement à base de contrôleurs plus classiques.

En identifiant uniquement le gain statique du modèle, et cela de manière grossière ou empirique, cette loi de commande permet d'asservir un procédé complexe. En effet, la précision du gain statique n'est plus primordiale, ce qui permet de s'affranchir d'un travail d'identification complexe, tout en accédant aux exigences fonctionnelles et dynamiques souhaitées.

Pour des raisons de simplicité, les systèmes avec une seule variable de contrôle u et une seule variable de sortie y sont considérés (systèmes SISO). Le modèle inconnu "complexe" mathématique (supposé être de dimension finie, linéaire ou non) décrivant le comportement entrée/sortie du système par l'équation différentielle

$$E_d(y, \dot{y}, \dots, y^{(\nu)}, u) = 0, \quad (1.2)$$

est remplacé par un modèle ultra-local valable durant un court laps de temps comme suit [Join 08a] :

$$y^{(n)} = F + \alpha u \quad (1.3)$$

où

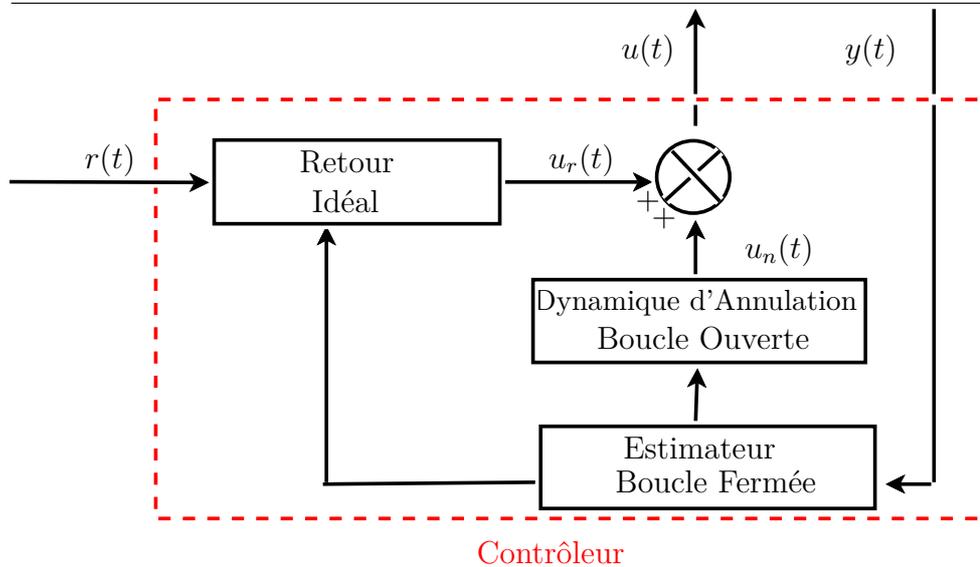
- $y^{(n)}$ est la dérivation de y à l'ordre $n \geq 1$;
- n c'est l'ordre de dérivation spécifié par l'automaticien et qui n'est pas nécessairement égale à l'ordre de dérivation ν du modèle du système initial. Selon [Flie 13], cet entier n peut toujours être choisi assez faible, i.e. 1 ou seulement et rarement 2 ;
- $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre de synthèse constant, fixé par l'automaticien afin que les valeurs numériques de αu et $y^{(n)}$ aient le même ordre de grandeur. Ce paramètre n'a pas a priori ni de valeur précise ni de signification physique ;
- F est une fonction qui contient toutes les informations "structurelles" et dépend de toutes les autres variables du système y compris des perturbations et leurs dérivées, est un paramètre estimé à chaque instant grâce à la connaissance de u et y .

Le point le plus fort de cette commande sans modèle est que la considération d'un modèle ultra-local implique que la nécessité d'une modélisation "bonne" et "globale" est abandonnée.

Remarque 1.2. Avec des systèmes à déphasage non minimal, ces procédures peuvent conduire à des valeurs divergentes des commandes u pour un t grand, et, donc, à des valeurs numériquement inadmissibles des fonctions F et de la commande. Ces techniques ne s'appliquent pas, à l'état actuel, au déphasage non minimal. Cependant, il faut noter qu'une solution a été proposée par [Flie 13] pour un cas particulier des systèmes linéaire à déphasage non-minimal avec un seul zéro instable.

Puisque la dynamique du système est estimée dans la valeur de F , il est alors possible de l'annuler et de la remplacer par la dynamique désirée (Figure 1.2), Fliess et al. [Join 08a] ont proposé un contrôleur intelligent nommé : contrôleur Proportionnel-Intégral-Dérivé intelligent (**iPID**).

Figure 1.2 Architecture du Contrôleur de la loi de commande "sans modèle"



La loi de commande résultante est la suivante :

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \text{Dynamique d'Annulation} + \text{Dynamique Désirée} \\
 u(t) &= -\frac{1}{\alpha}F(t) + \frac{1}{\alpha}(\ddot{r}(t) - K_P e(t) - K_I \int e(t) - K_D \dot{e}(t)) \\
 u(t) &= u_n(t) + u_r(t)
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

où r est la trajectoire de référence déterminée, par exemple, par des techniques de *platitude* [Flie 92], $e = y - r$ est l'erreur de poursuite et les matrices K_P , K_I , K_D sont les gains de réglage.

Cette loi de commande offre les deux avantages suivants [Join 08a] :

- se passer d'une modélisation mathématique précise, qu'elle soit basée sur des lois physiques ou des procédures d'identification, comme l'exige trop souvent la théorie du contrôle *moderne*. De plus, toutes les perturbations (frottements,

hystérésis, effets thermiques, vieillissement, ...) et erreurs de modèle sont rassemblées, sans chercher à les distinguer, dans la fonction F ;

- réglage simple du correcteur correspondant, dit *PI intelligent*, ou *iPI*. D'où une rupture avec les PID classiques dont le réglage est pénible (voir, par exemple [Astr 06, ODwy 06]). Le nombre de paramètres de synthèse est très réduit et le correcteur est synthétisé une seule fois.

Bien que de nombreuses variantes d'un tel dispositif de commande aient été développées dans la littérature [Abou 11, Gedo 11, Join 08a, DAnd 10] en affirmant que la stabilité ainsi que certaines performances sont assurées, aucune d'entre elles n'a fourni, selon notre connaissance, une preuve standard sur une classe de systèmes.

1.3 Synthèse de l'Estimateur/Dérivateur

Que l'on considère la stabilisation des modèles polytopiques ou la commande à modèle restreint, il est nécessaire d'avoir accès à une bonne estimation des variables d'état, des dérivées successives de la sortie ou encore des paramètres variants. Cela n'étant pas toujours le cas, l'utilisation d'observateurs ou de filtres s'impose.

La dérivation numérique, ou l'estimation des dérivées d'un signal temporel bruité est un problème ancien dans les domaines de l'analyse numérique, du traitement du signal et de l'automatique. Depuis longtemps, ce problème a attiré l'attention vu son importance dans les domaines de l'ingénierie et des mathématiques appliquées. Dans la littérature, différentes approches ont été présentées pour la dérivation des signaux. Ces techniques se divisent principalement en deux types : estimateurs Asymptotiques et estimateurs Non-Asymptotiques. Lorsque le niveau de bruit est faible, l'approche la plus courante est celle des différences finies qui présente l'avantage d'être peu coûteuse en temps de calcul et simple à implémenter. Cette situation se présentant que rarement, la plus part des travaux s'appuient sur l'utilisation d'observateurs d'état [Chit 02, Dabr 99, Ibri 03] ou encore des méthodes de dérivation par mode glissants [Ibri 04, Leva 93, Floq 03].

Une nouvelle approche de la dérivation numérique et l'estimation paramétrique, basée sur l'algèbre différentielle a été présentée dans [Flie 03b, Flie 03a, Mbou 07b]. Pour chaque ordre donné, une formule explicite donnant une estimation dérivée ponctuelle, est obtenue à l'aide d'opérations algébriques élémentaires. Ces expressions sont composées d'intégrales itérées du signal d'observation bruité dont la valeur estimée converge en temps fini. Cette méthode a été appliquée pour l'estimation de paramètres [Gens 07, Mbou 07a, Vill 10], pour la détection de rupture et de retards [Belk 10, Belk 09, Flie 10, Tiga 10] ou encore pour la différentiation numérique [Mbou 07a, Mbou 09, Riach 10]. Des applications en commande tolérante aux fautes, traitement du signal, traitement d'images ainsi qu'en commande non linéaire peuvent être trouvés dans [Flie 05c, Flie 05b, Flie 05a, Flie 04]. Les techniques algébriques

ont également montré leur efficacité dans divers domaines industriels. On citera notamment : commande de véhicules [Vill 09, DAnd 10], application aux systèmes électromécaniques [Delp 14, Mich 10], communication sécurisée [Neve 06, Zhen 09] ou encore traitement d'images et de vidéo [Yu 10b, Yu 10a, Join 08b].

1.4 Stabilité par les méthodes de Lyapunov

Un problème important dans le domaine du contrôle des systèmes polytopiques est la recherche de critères de stabilité. Avant d'aborder cet aspect, quelques concepts fondamentaux de la théorie de la stabilité seront rappelés.

1.4.1 Notions de base sur la stabilité

D'une manière intuitive, la stabilité est la propriété d'un système à revenir à sa position d'équilibre lorsqu'il en est écarté ponctuellement. Initialement, la stabilité est analysée pour les systèmes invariants dans le temps et autonomes (c'est à dire pour lesquelles il n'y a ni contrôle ni bouclage avec une commande donnée). De tels systèmes sont définis comme suit :

Définition 1.1. (*Système autonome*) L'équation différentielle ordinaire :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad \forall t \geq 0, \quad (1.5)$$

avec $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction localement lipschitzienne et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , est dite autonome si $f(x(t))$ est explicitement indépendante de la variable t (qui présente généralement le temps).

Formellement, les points d'équilibre x_e représentent les racines réelles de l'équation $f(x) = 0$.

Définition 1.2. [Khal 02] Le point d'équilibre x_e du système (1.5) est

– stable (dans le sens de Lyapunov) si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0;$$

– attractif si $\exists \delta > 0$ tel que

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e;$$

– asymptotiquement stable si il est stable et attractif.

On note que par translation, le point d'équilibre peut être ramené à l'origine ($x_e = 0$), ce qui simplifie souvent l'étude de la stabilité.

Deuxième méthode de Lyapunov

Le concept de stabilité est étroitement lié à la théorie de stabilité de Lyapunov. Cette théorie établit le fait que les systèmes dont la trajectoire est attirée vers un point d'équilibre asymptotiquement stable perdent progressivement de l'énergie, de façon monotone. Lyapunov généralise la notion d'énergie en utilisant une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, appelée "fonction candidate de Lyapunov", qui dépend de l'état du système. Cette fonction est souvent une norme ou distance. Les principaux théorèmes en temps continu et discret, très souvent utilisés pour l'analyse de stabilité, sont donnés comme suit [Khal 02] :

Theorème 1.1. *Considérant le système autonome (1.5) ayant un point d'équilibre isolé ($x_e = 0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, où Ω est un voisinage de x_e). S'il existe une fonction localement lipschitzienne $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec des dérivées partiellement continues et deux fonctions α et β de classe \mathcal{K}^1 tel que :*

$$\alpha(\|x\|) \leq V(x) \leq \beta(\|x\|), \quad \forall x \in \Omega,$$

alors, l'origine du système $x = 0$ est

- stable (dans le sens de Lyapunov) si

$$\frac{dV(x)}{dt} \leq 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad x \neq 0;$$

- asymptotiquement stable s'il existe une fonction φ de classe \mathcal{K} tel que

$$\frac{dV(x)}{dt} \leq -\varphi(\|x\|), \quad \forall x \in \Omega, \quad x \neq 0;$$

- globalement asymptotiquement stable s'il est stable et $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0.$$

Il existe également une version en temps discret de la théorie de la stabilité par Lyapunov donnée par le théorème suivant :

Theorème 1.2. *Considérant le système autonome*

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

ayant un point d'équilibre isolé ($x_e = 0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, où Ω est un voisinage de x_e). S'il existe une fonction localement lipschitzienne $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec des dérivées partiellement continues et deux fonctions α et β de classe \mathcal{K} tel que :

1. Une fonction de classe \mathcal{K} est une fonction $\varphi : [0, a) \rightarrow [0, +\infty)$ strictement décroissante et vérifie $\varphi(0) = 0$.

$$\alpha(\|x\|) \leq V(x) \leq \beta(\|x\|), \quad \forall x \in \Omega,$$

alors, l'origine du système $x = 0$ est

– stable (dans le sens de Lyapunov) si

$$\Delta V(x_k) \leq 0, \quad \forall x_k \in \Omega, \quad x_k \neq 0.$$

où

$$\begin{aligned} \Delta V(x_k) &= V(x_{k+1}) - V(x_k) \\ &= \Delta f(x_k) - V(x_k) \end{aligned}$$

– asymptotiquement stable s'il existe une fonction φ de classe \mathcal{K} tel que :

$$\Delta V(x_k) \leq -\varphi(\|x_k\|), \quad \forall x_k \in \Omega, \quad x_k \neq 0;$$

Remarque 1.3. Les définitions locales des deux théorèmes cités ci-dessus sont valides globalement si les fonctions considérées sont de classe \mathcal{K}_∞ et $\Omega = \mathbb{R}^n$.

1.4.2 Application aux systèmes Polytopiques

Les fonctions de Lyapunov ont largement été utilisées lors de l'étude de la stabilité de nombreux problèmes liés aux systèmes polytopiques [Tana 98, Tana 01, Boyd 94, Sche 97]. Le principal avantage de cette combinaison est la possibilité d'exprimer les critères de stabilité sous forme de conditions LMI. Ces dernières peuvent être efficacement résolues par la technique de programmation convexe [Boyd 94].

Selon [Boyd 94], le système LPV définit par :

$$\dot{x}(t) = A(\xi)x(t)$$

avec $A(\xi) \in \mathcal{P}$ où Δ_ξ est défini dans (1.1), est stable s'il existe une fonction matricielle $S(\xi)$, définie positive sur \mathcal{P} , telle que

$$\forall \xi \in \Delta_\xi, \quad A(\xi)^T S(\xi) + S(\xi)A(\xi) + \xi \frac{\partial S}{\partial \xi} < 0.$$

Cette inégalité traduit la décroissance de la fonction $V(x, \xi) = x^T S(\xi)x$ le long de la trajectoire du système. Si la fonction choisie S est indépendante de ξ , on parle alors de la stabilité quadratique. L'inégalité précédente devient

$$\forall \xi \in \Delta_\xi, \quad A(\xi)^T S(\xi) + S(\xi)A(\xi) < 0; \quad S > 0.$$

D'où le théorème de stabilité des systèmes polytopiques suivant :

Theorème 1.3. [Boyd 94] : *L'inclusion différentielle*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t); \quad A(t) \in \mathcal{P}$$

est quadratiquement stable s'il existe une matrice P définie positive telles que

$$A_i^T P + P A_i < 0; \quad \forall i = 1..N.$$

On constate que les conditions de ce théorème sont sous la forme d'un nombre fini N d'LMI à satisfaire afin de garantir la stabilité quadratique d'un système polytopique. Cependant, cette approche quadratique présente des limitations sérieuses parce que ses solutions sont par nature conservatives. En effet, il existe des modèles stables pour lesquels il n'existe pas de solution quadratique [Sala 05]. Différentes sources peuvent causer ce conservatisme [Guer 12] tels que : le type du modèle polytopique [Guer 07, Boua 10], la méthode considérée afin d'éliminer les fonctions de pondération pour la formulation des conditions LMIs [Tuan 01, Sala 07b, Sala 07a], l'intégration des informations des fonctions de pondération [Sala 08, Bern 09], ou encore le choix de la fonction de Lyapunov [Joha 99, Tana 01].

1.5 Discussion et Conclusion

Un modèle devrait représenter le mieux possible le fonctionnement dynamique d'un système ainsi que les modes de fonctionnement et toutes les interactions entre les différentes grandeurs.

Pour les chapitres suivants de ce manuscrit, on considérera l'approche polytopique dans la mesure où elle présente l'avantage de s'affranchir d'approximations de modélisation lors du passage du modèle analytique non linéaire au modèle linéaire. Pour le système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x, u, \xi) \\ y(t) &= g(x, u, \xi) \end{cases},$$

on considère la représentation polytopique convexe :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi)(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi) C_i x(t) \end{cases},$$

où $x(t)$ est le vecteur d'état, $u(t)$ est le vecteur d'entrée et $y(t)$ est le vecteur de sortie. r est le nombre de sous-modèle. A_i , B_i et C_i sont des matrices constantes qui représentent respectivement la matrice d'état, d'entrée et d'observation. Les fonctions $\mu_i(\xi)$ sont les fonctions de pondération en fonction du vecteur ξ des variables de décision et qui vérifient la propriété de la somme convexe $\Delta_{\mu(\xi)}$, i.e.

$$\forall i = 1..r, \quad 0 < \mu_i(\xi) < 1 \text{ et } \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi) = 1.$$

Noter que de manière générale, les transformations polytopiques convexes sont injectives. De ce fait, une infinité de modèles peuvent être associés à un système non linéaire donné.

Pour cette classe de systèmes, la loi de commande la plus répondue est celle par retour de sortie par observateur de type Luenberger :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z) K_i(t),$$

et

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi_e) (A_i x_e(t) + B_i u(t)) \\ y_e(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi_e) C_i x_e(t) \end{cases} .$$

Deux problèmes majeurs de conception de cet observateur figurent : Le premier réside lorsque les variables de prémisses sont ni mesurables ni estimables c'est-à-dire : $\xi \neq \xi_e$. Une solution présentée dans ce manuscrit (*Chapitre 1*) consiste à considérer une loi de commande linéaire et un observateur de Luenberger linéaire. Le deuxième problème se présente quand peu d'informations sur le système sont disponibles. Afin de résoudre ce problème, il est possible de considérer la loi de commande à modèle restreint dite commande "sans modèle" [Join 08a]. Cependant il n'existe pas à notre connaissance de preuves de stabilité de cette loi de commande lorsque les différentes estimations nécessaires sont imparfaites. Le *Chapitre 3* proposera de pallier à ce problème en proposant une étude de cette loi de commande lorsqu'un dérivateur de type algébrique sera utilisé. Le *Chapitre 4* étendra cette étude dans le cas de l'utilisation de filtre dérivateur et proposera des méthodes de réglage garantissant la stabilisation et les performances.

CHAPITRE 2

Stabilisation des Systèmes Non Linéaires par Observateur

Sommaire

3.1	Introduction	48
3.2	Définition de la loi de commande	49
3.3	Principe et Outils de la dérivation numérique	51
3.3.1	Principe	51
3.3.2	Outils	52
3.3.3	Estimation de la dérivation	54
3.3.4	Remarques	55
3.4	Implémentation : Estimation de la dérivée première d'un signal	56
3.5	Synthèse d'une loi de commande	58
3.5.1	Conception du contrôleur	59
3.5.2	Étude de stabilité du système discrétisé	62
3.5.3	Exemple	63
3.6	Conclusion	64

Ce chapitre met l'accent sur le problème de contrôle des systèmes non linéaires mis sous forme de modèle Takagi-Segeno (**T-S**) lorsque les variables de prémisses ne sont pas mesurées. Tout d'abord, une introduction sur la synthèse de stabilité des systèmes non-linéaires sous forme de modèle T-S ainsi que la problématique et quelques notions et théorèmes utiles pour notre étude seront présentés. L'objectif principal de ce chapitre portera sur la conception d'un observateur linéaire de type Luenberger et d'un retour d'état qui assurent la stabilité de la boucle fermée de l'interconnexion. La première partie de cette étude (*Section 2.3*) portera sur l'analyse générale de la

stabilité du système bouclé (de l'interconnexion). La seconde partie (*Section 2.4*) établira deux méthodes de conception d'une paire contrôleur/observateur, basées sur des conditions suffisantes sous forme de LMIs et/ou BMIs. La troisième partie de ce travail (*Section 2.5*) mettra l'accent sur l'existence systématique d'un retour de sortie dynamique par observateur assurant la stabilité en boucle fermée d'une sous-classe de cette famille de systèmes. La conception et la stabilité seront étudiées grâce à l'analyse de la stabilité entrée-état (**ISS**), le théorème du petit gain et la théorie de Lyapunov.

2.1 Introduction

Afin d'analyser et concevoir des systèmes non linéaires pour des circuits électriques, des systèmes mécaniques, des systèmes de contrôle, et d'autres disciplines d'ingénierie, il est nécessaire d'absorber et d'élaborer une large gamme d'outils d'analyse non linéaire. Il existe différents types de problèmes de stabilité qui se posent dans l'étude de ces systèmes. Une des solutions les plus populaires permettant une synthèse systématique consiste à considérer les modèles de T-S [Taka 85] avec des méthodes de Lyapunov. Cette approche a prouvé son efficacité dans l'analyse, le contrôle et l'observation d'une grande classe de systèmes non linéaires [Tana 01]. L'idée derrière la modélisation T-S est d'incorporer le système non linéaire dans un ensemble convexe de systèmes linéaires. Grâce à la propriété de la somme convexe de leurs fonctions de pondération, les modèles T-S permettent la généralisation de certains outils linéaires afin d'exprimer les conditions de stabilité en tant qu'ensemble d' LMI [Boyd 94].

Étant donné que cette représentation simplifie l'étude de stabilité des systèmes non linéaires, les modèles T-S ont été étudiés par de nombreux auteurs afin de résoudre des problèmes de conception de la paire contrôleur/observateur [Sala 05]. Cependant, certains de ces problèmes restent toujours à l'étude tel que celui de la stabilisation des modèles T-S lorsque les variables de prémisses ne sont pas mesurées. Ce problème apparaît lorsque un/ou plusieurs arguments des fonctions non linéaires du processus ne sont pas directement mesurés [Berg 02, Icha 10, Park 04a]. Cette question sur les prémisses non mesurables est réellement pertinente puisque, dans de nombreuses applications pratiques, l'ensemble des variables mesurées est limité, soit parce qu'elles ne sont pas accessibles pour être mesurées ou parce que les capteurs ne sont pas disponibles ou trop coûteux. Cela rend le problème de conception de contrôle beaucoup plus complexe et augmente radicalement le conservatisme des conditions dérivées [Guer 06, Icha 11]. Afin de réduire ce conservatisme, de nombreuses études imposent certaines hypothèses supplémentaires sur les fonctions de pondération [Berg 02, Icha 10, Park 04a].

En général, les propriétés de stabilité des modèles T-S sont analysées en considérant les fonctions quadratiques de Lyapunov [Tana 01, Rhee 06, Estr 13, Ge 14,

Chi 12]. Une extension de ces outils est assurée par la stabilité ISS [Akhe 07, Tana 01]. Afin de concevoir des lois de commande des modèle T-S, la propriété de l'ISS a été déjà examinée en se basant sur la théorie du théorème du petit gain [Lend 10, Chan 11, Yone 09]. Néanmoins, à notre connaissance, seulement les cas des prémisses mesurés ou estimés ont été étudiés avec ces outils.

2.2 Problématique

Les modèles de T-S permettent un réécriture des modèles non linéaires sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_m &= f(x_m, u, t) \\ y_m &= Cx_m \end{cases}, \quad (2.1)$$

où f est une fonction continue et non linéaire. L'approche par secteur non linéaire [Tana 01, Nagy 09] (le lecteur peut se reporter à la *Section 1.1.2* du *Chapitre 1*) figure parmi les méthodes de modélisation T-S les plus populaires. Cette transformation permet d'obtenir une représentation exacte, sous la forme T-S, du système (2.1) dans un ensemble compact de l'espace d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_m &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi)(A_{m_i}x_m + B_{m_i}u) \\ y &= Cx_m \end{cases}, \quad (2.2)$$

où $x_m(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur des entrées et $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est le vecteur des sorties. r est le nombre de sous-modèles ou de règles. $A_{m_i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{m_i} \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ et $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ sont des matrices connues qui représentent respectivement les matrices d'état, d'entrée et d'observation. Les fonctions $\mu_i(\xi)$ sont les fonctions de pondération en fonction des variables ξ qui peuvent dépendre de l'état et/ou des variables exogènes. Ces fonctions doivent vérifier la propriété de la somme convexe :

$$\Delta_{\mu(\xi)} = \mu(\xi) : \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi) = 1, \quad 0 \leq \mu_i(\xi) \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}. \quad (2.3)$$

Afin d'alléger l'écriture, on utilise les notations suivantes :

$$\begin{aligned} A_m(\xi) &:= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi)A_{m_i}, \\ B_m(\xi) &:= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi)B_{m_i}. \end{aligned}$$

La loi de contrôle la plus couramment utilisée pour ces systèmes est la Compensation Parallèle Distribuée (PDC) développée par [Tuan 01] :

$$u = \bar{K}(\xi_e(t))x_e(t); \quad \bar{K}(\xi_e(t)) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi)K_i, \quad (2.4)$$

où les K_i sont les gains de contrôle à déterminer, ξ_e est une estimation de ξ et x_e est l'état estimé du modèle T-S qui peut être déterminé en considérant par exemple des observateurs de Luenberger [Tana 94]. Ces derniers figurent parmi les plus utilisés avec une représentation d'état donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_e &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi_e)(A_{m_i}x_e + B_{m_i}u + L_i(y_m - y_e)) \\ y_e &= Cx_e \end{cases} \quad (2.5)$$

où $x_e \in \mathbb{R}^n$ dénote l'état estimé et les matrices $L_i \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$, $i = 1..r$, représentent les gains de l'observateur à déterminer.

La plupart des travaux supposent que les variables de prémisses sont mesurées ($\xi_e = \xi$) tels que [Tana 96, Tana 98, Tana 03, Krus 08] ce qui n'est, évidemment, pas toujours vrai. Dans le cas mesuré, le principe de séparation est applicable et la synthèse du retour d'état devient indépendante de la synthèse de l'observateur. Lorsque ces variables ne sont plus mesurées (i.e $\xi_e \neq \xi$), le principe de séparation ne peut plus être appliqué [Xiao 98, Yan 10]. Afin de proposer des méthodes de synthèses numériquement exploitables, beaucoup d'auteurs ont proposé des résultats en se basant sur de hypothèses comme :

- des conditions de Lipschitz sur les fonctions de pondération [Icha 10, Berg 01, Berg 02, Berg 00] ;
- la disponibilité, à priori, des conditions initiales du système [Mood 14, Tana 01] ;
- la possibilité de transmettre l'état loin de la singularité pour la linéarisation par rétroaction [Park 04a, Wang 97].

Afin d'éviter ces contraintes restrictives et/ou conservatives, cette partie du manuscrit propose une méthode de conception sans hypothèses supplémentaires. Afin de limiter le problème de conservatisme, on propose de laisser libre la structure de l'observateur. Ainsi, on propose l'utilisation d'une loi de contrôle et d'un observateur de structures linéaires :

$$u = Kx_e \quad (2.6)$$

et

$$\begin{cases} \dot{x}_e &= A_e x_e + B_e u + L(y_m - y_e) \\ y_e &= Cx_e \end{cases}, \quad (2.7)$$

où (A_e, B_e, L) sont des matrices à déterminer afin de garantir la stabilité de la boucle fermée.

Afin d'illustrer la difficulté du problème, on va dans un premier temps considérer que le système et l'observateur admettent la même matrice d'entrée i.e. $B_{m_i} = B_e$, $\forall i = 1..r$. Dans ce cas, deux conditions indépendantes (voir *Théorème 2.1*) doivent être résolues.

Théorème 2.1. *Le système bouclé composé par le système initial (2.2), la loi de commande (2.6) et l'observateur (2.7) avec $B_{m_i} = B_e$, $\forall i = 1..r$, est asymptotiquement stable s'il existe des matrices S_1, P_2 symétriques et définies positives et des*

matrices S_2, S_3 qui vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{pmatrix} S_1 A_m^T(\xi) + A_m(\xi) S_1 + S_2^T B + B S_2 & B & S_1 \Delta A(\xi)^T \\ * & -I & 0 \\ * & * & -I \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{pmatrix} P_2 A_e^T(\xi) - C^T S_3^T - S_3 C & K^T & P_2 \\ * & -I & 0 \\ * & * & -I \end{pmatrix} < 0$$

Le gain de contrôle et de l'observateur sont donnés respectivement par $K = S_2 S_1^{-1}$ et $L = P_2^{-1} S_3$.

Preuve 2.1. La représentation d'état du système bouclé composée par le système initial (2.2), la loi de commande (2.6) et l'observateur (2.7) avec $B_{m_i} = B_e = B$, $\forall i = 1..r$, peut être mise, avec l'état étendu $X = [x_m \ e]^T$ où $e = x_m - x_e$ représente l'erreur d'estimation, sous la forme suivante :

$$\dot{X} = A(t)X ,$$

où

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_m(t) + BK & -BK \\ A_m(t) - A_e & A_e - LC \end{pmatrix}.$$

Soit la fonction candidate de Lyapunov $V = X^T P X$ où P est une matrice définie positive et choisie symétrique par bloc (similairement au principe de séparation) tel que $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$, où P_1, P_2 sont deux matrices définies positives et symétriques.

En développant la condition ($\dot{V} < 0$) et en appliquant le Complément de Schur et quelques majorations, on obtient les conditions de ce théorème. ■

Cependant cette approche demeure conservative et peu d'exemples peuvent être trouvés. Ce conservatisme est principalement dû au choix de la fonction de Lyapunov effectuée. En effet, cette structure diagonale nécessaire à l'obtention de conditions LMI casse le lien entre le problème de conception de l'observateur et de la commande qui est pourtant très fort. On propose dans ce chapitre une nouvelle approche de conception basée sur l'analyse de la théorie de l'ISS de l'interconnexion composée par le système non linéaire mis sous la forme T-S et une paire contrôleur/observateur. Cette approche permettra de séparer les deux problèmes observateur/commande tout en considérant les interactions entre ces deux éléments. Le reste de cette section présente quelques notions standards sur les propriétés de l'ISS ainsi que quelques théorèmes et définitions utiles à la suite.

Outils et Théorèmes

Fonction de classe \mathcal{K} , \mathcal{K}_∞ et \mathcal{KL} : Une fonction $\alpha : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ est dite de classe \mathcal{K} (notée $\alpha \in \mathcal{K}$) si elle est continue, strictement décroissante et $\alpha(0) = 0$. Si de plus α est bornée, alors elle est dite de classe \mathcal{K}_∞ ($\alpha \in \mathcal{K}_\infty$). Une fonction $\beta : [0; \infty) \times [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ est dite de classe \mathcal{KL} ($\beta \in \mathcal{KL}$) si $\beta(\cdot, t)$ est de classe \mathcal{K} pour tout $t \geq 0$ fixé et $\beta(r, t)$ décroît vers zéro quand $t \rightarrow \infty$ pour tout $r \geq 0$ fixé.

Input-to-State Stability (ISS) [Sont 89] : un système $\dot{z} = f(z, v)$ est dit *Input-to-State Stable (ISS)* par rapport à v s'il existe deux fonctions $\beta \in \mathcal{KL}$ et $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ telles que pour tout état initial $z(t_0)$ et toute entrée $v(\cdot)$ la solution correspondante vérifie l'inégalité :

$$|z(t)| \leq \beta(|z(t_0)|, t - t_0) + \gamma(\|v\|_{[t_0, t]})$$

pour tout $t \geq t_0$, où $\|v\|_{[t_0, t]} := \sup\{|v(s)| : s \in [t_0, t]\}$ (sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nulle) et $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne usuelle. On dénote la **fonction gain** (ou simplement **gain**) de l'ISS par γ .

Theorème 2.2. ISS-Lyapunov [Yang 03] : pour une fonction donnée C^1 , $V_1 : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ est dite une fonction ISS-Lyapunov s'il existe des fonctions α_1, α_2 de classe \mathcal{K}_∞ et α_3, α_4 de classe \mathcal{K} vérifiant :

$$\alpha_1(\|z\|) \leq V(z) \leq \alpha_2(\|z\|), \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

$$\frac{\partial V}{\partial Z} f(z, v) \leq -\alpha_3(\|z\|) + \alpha_4(\|v\|), \quad (2.8)$$

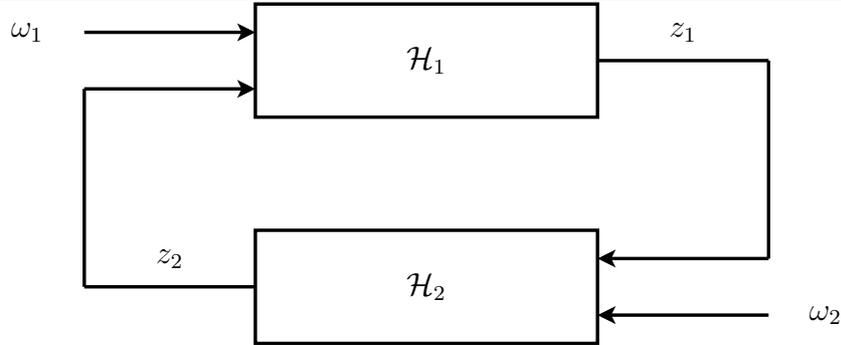
où $\|z\|$ et $\|v\|$ représentent des normes quelconques, alors le système $\dot{z}(t) = f(z, v)$ est ISS avec un gain

$$\gamma(s) = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \alpha_3^{-1} \circ \alpha_4(s), \quad \forall s > 0,$$

où \circ est l'opérateur de composition des fonctions et α_i^{-1} est la fonction inverse de α_i .

Structure d'une interconnexion par rétroaction : la structure d'une interconnexion par rétroaction \mathcal{H} d'un système donné par la Figure 2.1 est la décomposition de ce système en deux sous-systèmes \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 . Dans cette structure, la variable d'état et les signaux externes d'entrée de \mathcal{H} sont donnés respectivement par $z = (z_1^T \ z_2^T)^T$ et $w = (w_1^T \ w_2^T)^T$. Le premier sous-système \mathcal{H}_1 admet comme état z_1 et comme entrée $v_1 = (z_2^T \ w_1^T)^T$ et, le deuxième sous-système \mathcal{H}_2 admet comme état z_2 et comme entrée $v_2 = (z_1^T \ w_2^T)^T$.

Figure 2.1 Décomposition générale d'un système vu comme une interconnexion par rétroaction



Noter que lorsqu'on examine un système interconnecté, il est possible d'analyser la stabilité de la boucle fermée en étudiant séparément chaque sous-système grâce au théorème de petit gain. De toute évidence, ce théorème ne fournit que des conditions suffisantes.

Theorème 2.3. [Libe 06] : le système \mathcal{H} est ISS par rapport à l'entrée $w = (w_1^T \ w_2^T)^T$ si :

1. \mathcal{H}_1 est un ISS par rapport à $v_1 = (z_2^T \ w_1^T)^T$, avec un gain γ_1 de z_2 à z_1 , i.e., pour un $\beta_1 \in \mathcal{KL}$, $\gamma_1, \bar{\gamma}_1 \in \mathcal{K}_\infty$, on a :

$$|z_1(t)| \leq \beta_1(z_1(t_0), t - t_0) + \gamma_1(\|z_2\|_{[t_0, t]}) + \bar{\gamma}_1(\|w_1\|_{[t_0, t]}).$$

2. \mathcal{H}_2 est un ISS par rapport à $v_2 = (z_1^T \ w_2^T)^T$, avec un gain γ_2 de z_1 à z_2 , i.e., pour un $\beta_2 \in \mathcal{KL}$, $\gamma_2, \bar{\gamma}_2 \in \mathcal{K}_\infty$, on a :

$$|z_2(t)| \leq \beta_2(z_2(t_0), t - t_0) + \gamma_2(\|z_1\|_{[t_0, t]}) + \bar{\gamma}_2(\|w_2\|_{[t_0, t]}).$$

3. Il existe une fonction $\rho \in \mathcal{K}_\infty$ tel que :

$$(id + \rho) \circ \gamma_1 \circ (id + \rho) \circ \gamma_2(r) \leq s, \quad \forall s \geq 0.$$

Afin d'obtenir une conception numérique d'un contrôleur basée sur des formules LMI, les résultats ci-dessus sont complétés par les propriétés suivantes :

- Dans le cas où les deux fonctions gain ISS (γ_1 et γ_2) sont linéaires, la condition du petit gain se réduit à : $\gamma_m \gamma_e < 1$ [Libe 06].
- S'il n'existe aucun signal externe comme entrée, alors l'interconnexion \mathcal{H} est Globalement Asymptotiquement Stable (GAS) [Libe 06].
- \mathcal{H} est ISS si et seulement si il admet une fonction ISS-Lyapunov [Sont 95].

2.3 Analyse de Stabilité

Après avoir décrit les procédures et les méthodes qui seront utilisées dans ce chapitre, cette section reformule le problème sous l'angle d'une interconnexion de systèmes tel qu'elle est décrite dans la section précédente. Rappelons tout d'abord le modèle T-S du système (la variable de temps t est omise afin de faciliter la lecture) :

$$\begin{cases} \dot{x}_m &= A_m(\xi)x_m + B_m(\xi)u \\ y_m &= Cx_m \end{cases} \quad (2.9)$$

avec le retour d'état linéaire

$$u = Kx_e \quad (2.10)$$

et l'observateur linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_e &= A_e x_e + B_e u + L(y_m - y_e) \\ y_e &= Cx_e \end{cases} . \quad (2.11)$$

La dynamique du système et l'erreur d'observation $e = x_m - x_e$ sont gouvernées par :

$$\dot{x}_m = (A_m(\xi) + B_m(\xi)K)x_m - B_m(\xi)Ke, \quad (2.12)$$

et

$$\dot{e} = (A_e - LC - \Delta B(\xi)K)e + (\Delta A(\xi) + \Delta B(\xi)K)x_m \quad (2.13)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta A(\xi) &= A_m(\xi) - A_e, \\ \Delta B(\xi) &= B_m(\xi) - B_e. \end{aligned}$$

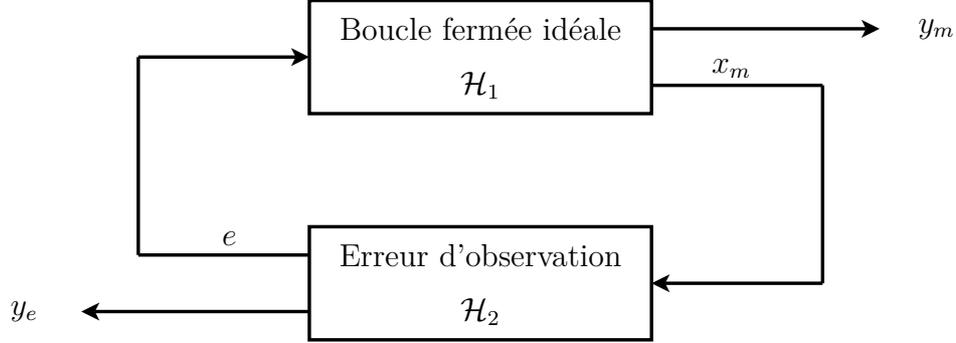
En écrivant ces équations avec le vecteur d'état étendu $\dot{x} = [\dot{x}_m^T \ \dot{e}^T]^T$ on obtient le système bouclé sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mathcal{A}(\xi)x \\ y &= \mathcal{C}x \end{cases} \quad (2.14)$$

où

$$\mathcal{A}(\xi) = \begin{pmatrix} A_m(\xi) + B_m(\xi)K & B_m(\xi)K \\ \Delta A(\xi) + \Delta B(\xi)K & A_e - LC - \Delta B(\xi)K \end{pmatrix}.$$

En se basant sur le principe de la structure d'une interconnexion par rétroaction défini dans la section précédente, il est aisé de voir que le système bouclé (2.14) peut être considéré comme une interconnexion \mathcal{H} par rétroaction des deux sous-systèmes \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 définis respectivement par les équations (2.12) et (2.13). Le premier sous-système \mathcal{H}_1 admet comme état $z_1 = x_m$ et entrée $v_1 = e$, et le deuxième sous-système \mathcal{H}_2 admet comme état $z_2 = e$ et entrée $v_2 = x_m$. Cette structure est illustrée en *Figure 2.2*.

Figure 2.2 Stabilisation par rétroaction, système bouclé $\dot{x} = h(x)$ 

Puisque la dimension des sous systèmes est essentiellement inférieure à celle de leur interconnexion, trouver une fonction de Lyapunov pour chaque sous-système semble plus facile que pour le système global. En considérant cette alternative et l'interconnexion \mathcal{H} décrite ci-dessus sous l'hypothèse que chaque sous-système est ISS en admettant l'état de l'autre sous-système comme entrée, on cherche d'établir des conditions nécessaires garantissant la stabilité du système global. Après avoir prouvé que chaque sous-système \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 de cette interconnexion satisfaisait les propriétés ISS, il nous reste plus qu'à vérifier la condition du petit gain.

Theorème 2.4. *L'interconnexion par rétroaction, sous aucun effet externe, composée par le système (2.9), la loi de commande (2.10) et l'observateur (2.11) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices P_m , P_e symétriques et définies positives et des scalaires γ_m , γ_e qui vérifient :*

$$\forall i = 1..r,$$

$$\begin{pmatrix} \text{sym}(P_m A_{m_i} + P_m B_{m_i} K) + P_m & -P_m B_{m_i} K \\ * & -\gamma_m^2 P_e \end{pmatrix} < 0 \quad (2.15)$$

$$\begin{pmatrix} -\gamma_e^2 P_m & K^T \Delta B_i^T P_e + \Delta A_i^T P_e \\ * & P_e + \text{sym}(-P_e L C + P_e A_e - P_e \Delta B_i K) \end{pmatrix} < 0 \quad (2.16)$$

$$P_m \leq P_e \quad (2.17)$$

$$\gamma_m \gamma_e < 1 \quad (2.18)$$

avec $\Delta A_i = A_{m_i} - A_e$ et $\Delta B_i = B_{m_i} - B_e$.

Preuve 2.2. Soient les normes : $\|x_m\| = \sqrt{x_m^T P_m x_m}$ et $\|e\| = \sqrt{e^T P_e e}$ avec P_m et P_e deux matrices symétriques et définies positives. On analyse dans un premier temps les propriétés ISS du système bouclé idéal \mathcal{H}_1 d'équation (2.12) en admettant x_m comme état et e comme entrée. Pour une matrice $P_m > 0$ et pour tout ξ , x_m , e ,

la condition (2.15) assure :

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(\xi) \begin{pmatrix} x_m \\ e \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \text{sym}(P_m A_{m_i} + P_m B_{m_i} K) + P_m & -P_m B_{m_i} K \\ * & -\gamma_m^2 P_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_m \\ e \end{pmatrix} < 0 \quad (2.19)$$

Cette dernière est équivalente à :

$$2 \frac{\partial V_m}{\partial x_m} \dot{x}_m \leq -2\alpha_{m3}(\|x_m\|) + 2\alpha_{m4}(\|e\|), \quad (2.20)$$

avec :

$$\begin{aligned} V_m(x_m) &= x_m^T P_m x_m \\ \alpha_{m3}(s) &= 0.5s^2, \quad \alpha_{m4}(s) = 0.5\gamma_m^2 s^2 \end{aligned}$$

Vu que $V_m(x_m) = \|x_m\|^2$, alors on peut clairement voir que :

$$\begin{aligned} \alpha_{m1}(\|z\|) &\leq V_m(z) \leq \alpha_{m2}(\|z\|), \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \\ \alpha_{m1}(s) &= \alpha_{m2}(s) = s^2 \end{aligned}$$

où $\alpha_{e1}, \alpha_{e2} \in \mathcal{K}_\infty$.

D'après le Théorème 2.2, on constate que si (2.15) est vérifiée pour tout $i \in \{1 \dots n\}$ alors le sous-système \mathcal{H}_1 est ISS avec un gain ISS :

$$\gamma_m(s) = \alpha_{m1}^{-1} \circ \alpha_{m2} \circ \alpha_{m3}^{-1} \circ \alpha_{m4}(s) = \gamma_m s$$

On passe maintenant à l'analyse des propriétés ISS de la dynamique de l'erreur d'estimation \mathcal{H}_2 d'équation (2.13) qui admet e comme état et x_m comme entrée. Pour tout ξ, x_m, e , la condition (2.16) assure la condition suivante :

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(\xi) \begin{pmatrix} x_m \\ e \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\gamma_e^2 P_m & K^T \Delta B_i^T P_e + \Delta A_i^T P_e \\ * & P_e + \text{sym}(P_e A_e - P_e L C - P_e \Delta B_i K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_m \\ e \end{pmatrix} < 0 \quad (2.21)$$

Cette dernière est équivalente à :

$$2 \frac{\partial V_e}{\partial e} \dot{e} \leq -2\alpha_{e3}(\|e\|) + 2\alpha_{e4}(\|x_m\|), \quad (2.22)$$

avec

$$\begin{aligned} V_e(e) &= \|e\|^2 \\ \alpha_{e3}(s) &= 0.5s^2, \quad \alpha_{e4}(s) = 0.5\gamma_m^2 s^2 \end{aligned}$$

Comme $V_e(e) = e^T P_e e$, alors :

$$\begin{aligned} \alpha_{e1}(\|e\|) &\leq V_e(e) \leq \alpha_{e2}(\|e\|), \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \\ \alpha_{e1}(s) &= s^2, \quad \alpha_{e2}(s) = s^2 \end{aligned}$$

où $\alpha_{e1}, \alpha_{e2} \in \mathcal{K}_\infty$.

D'après le Théorème 2.2, on constate que si les deux conditions (2.16) et (2.17) sont vérifiées pour tout $i \in \{1 \dots n\}$ alors le sous-système \mathcal{H}_2 est ISS avec un gain ISS :

$$\gamma_e(s) = \alpha_{e1}^{-1} o \alpha_{e2} o \alpha_{e3}^{-1} o \alpha_{e4}(s) = \gamma_e s$$

Finalemment, selon le théorème du petit gain, l'interconnexion $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est ISS si la condition $\gamma_m \gamma_e < 1$ est vérifiée. ■

Remarque 2.1. Afin d'alléger les calculs et de réduire la complexité des LMIs du théorème précédent, on propose comme solution de fixer les deux gains γ_m et γ_e selon la condition du petit gain : $\gamma_e \gamma_m < 1$. Les résultats du théorème restent toujours valables.

À noter que les conditions du Théorème 2.4 représentent une LMI en P_m et P_e (et éventuellement en L en considérant le changement de variable $Y = P_e L$) si et seulement si le reste des matrices et scalaires des conditions de ce théorème sont connus. De ce fait, ce théorème ne permet que l'analyse de stabilité du bouclage. Ceci n'est pas satisfaisant car la difficulté principale est de concevoir une paire observateur/contrôleur. L'exploitation du Théorème 2.4 pour la conception de cet observateur (i.e. la détermination de ses matrices) fait l'objet de la section suivante.

2.4 Conception du Contrôleur

À partir des résultats précédents, il est possible de proposer des solutions permettant de résoudre le problème de conception de l'observateur et du retour d'état. Pour cela, deux procédures de conceptions sont proposées en se basant sur le Théorème 2.4 :

1. **Approche séquentielle** : résolution des conditions (2.15), (2.16) et (2.17) du Théorème 2.4 séparément ;
2. **Approche globale** : résolution des conditions (2.15), (2.16) et (2.17) du Théorème 2.4 simultanément.

Il sera montré dans la suite de cette partie que ces deux propositions fournissent des résultats différents en terme d'ensemble de solutions. Leurs principales limites résident, pour la première, dans la nature non linéaire du problème d'optimisation, et pour la seconde, dans les majorations utilisées.

2.4.1 Approche Séquentielle

L'idée principale de cette approche est de résoudre les conditions matricielles non linéaires du Théorème 2.4 séparément (l'une après l'autre). En appliquant quelques manipulations matricielles, les conditions de ce théorème sont vérifiées si celles du corollaire ci-dessous le sont.

Corollaire 2.1. *L'interconnexion par rétroaction, sous aucun effet externe, composée par le système (2.9), la loi de commande (2.10) et l'observateur (2.11) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices X_m , P_e symétriques et définies positives, des matrices Y_m , Z_1 , Z_2 , Z_3 et des scalaires γ_m , γ_e qui vérifient :*

$$\forall i = 1..r,$$

$$\begin{pmatrix} \text{sym}(A_{m_i}X_m + B_{m_i}Y_m) + X_m & -B_{m_i}Y_m \\ * & -\gamma_m^2 X_m \end{pmatrix} < 0 \quad (2.23)$$

$$\begin{pmatrix} -\gamma_e^2 P_m & K^T B_{m_i}^T P_e + A_{m_i}^T P_e - Z_1^T - K^T Z_3^T \\ * & P_e + \text{sym}(-Z_2 C + Z_1 - P_e B_{m_i} K + Z_3 K) \end{pmatrix} < 0 \quad (2.24)$$

$$P_m \leq P_e \quad (2.25)$$

$$\gamma_m \gamma_e < 1 \quad (2.26)$$

Les gains de contrôle et de l'observateur sont donnés respectivement par $K = Y_m P_m$ (où $P_m = X_m^{-1}$) et $L = P_e^{-1} Z_2$. Les matrices d'état et d'entrée de l'observateur sont $A_e = P_e^{-1} Z_1$ et $B_e = P_e^{-1} Z_3$.

Preuve 2.3. *Considérons le Théorème 2.4. D'après l'équation (2.17) on obtient : $-P_e < -P_m$. On applique cette majoration sur le terme droite à gauche de l'équation (2.15). En multipliant ensuite à droite et à gauche par $\text{diag}(P_m^{-1}, P_m^{-1})$ et en effectuant le changement de variables suivant : $K = Y_m P_m$, $P_m = X_m^{-1}$, $L = P_e^{-1} Z_2$, $A_e = P_e^{-1} Z_1$ et $B_e = P_e^{-1} Z_3$, les deux premières conditions du Théorème 2.4 se ramènent à celles de ce corollaire. ■*

On note que les conditions de ce corollaire ne peuvent pas être résolues directement puisqu'elles ne sont pas linéaires en $(K, P_m, Z_3, P_e, \gamma_e^2)$. Cependant, on remarque que la condition (2.23) est une LMI (linéaire) en (X_m, Y_m, γ_m^2) , et de même que les conditions (2.24) et (2.25) représentent une LMI en $(P_e, Z_1, Z_2, Z_3, \gamma_e^2)$ pour des valeurs données de K et $P_m = X_m^{-1}$. La stabilité du système interconnecté peut ainsi être obtenue par la résolution des conditions de ce corollaire séparément en appliquant l'algorithme ci-dessous :

Algorithme 2.1. (Approche séquentielle)

Étape 2.1.1 : Minimiser γ_m de sorte qu'il existe deux matrices K et X_m vérifiant la condition (2.23) en se basant sur des optimisations LMI.

Étape 2.1.2 : Minimiser γ_e de sorte qu'il existe des matrices L , A_e , B_e et P_e telle que les conditions (2.24) et (2.25) soient vérifiées en se basant sur des optimisations LMI ainsi que sur les valeurs de K et $P_m = X_m^{-1}$ calculées à l'Étape 2.1.1.

Étape 2.1.3 : Vérifier la validité du théorème du petit gain (2.26).

L'approche décrite ci-dessus est conservative du fait de la séquence d'optimisation effectuée. Cependant, l'absence de solutions obtenues par le solveur des LMIs (en appliquant l'Algorithme 2.1) n'implique pas l'absence de solutions au corollaire. Par

ailleurs, cette technique ne permet pas la prise en compte des contraintes imposées sur les gains γ_m et γ_e . Au prix d'un temps de calcul plus long, cette limitation peut être levée en considérant l'approche ci-dessous.

Algorithme 2.2. (Approche Séquentielle : Gains Fixes)

Étape 2.2.1 : Fixer le gain ISS du système γ_m^f tel que $\gamma_m^f > \gamma_m$ (où γ_m est donné par l'Algorithme 2.1).

Étape 2.2.2 : Calculer le gain K et la matrice X_m qui vérifient la condition (2.23) en se basant sur des optimisations LMI.

Étape 2.2.3 : Calculer le gain de l'observateur L et les matrices (A_e, B_e) telle que les conditions (2.24) et (2.25) soient vérifiées en se basant sur des optimisations LMI ainsi que sur les valeurs de K et $P_m = X_m^{-1}$ calculées à l'Étape 2.2.2. Dans ce cas, le gain ISS de l'observateur γ_e est donné par $\gamma_e = \frac{\beta}{\gamma_m}$ où $0 < \beta < 1$. En effet, il existe toujours un réel $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $0 < \beta < 1$ et $\gamma_e = \frac{\beta}{\gamma_m}$.

Étape 2.2.4 : Répéter les étapes précédentes jusqu'à ce que le cahier des charges soit vérifié.

2.4.2 Approche Globale

Dans cette section, une deuxième approche de conception est proposée. Cette approche est basée sur le *Théorème 2.4* et plus précisément sur le *Corollaire 2.1*. On remarque que les conditions de ce corollaire (2.23) et (2.24) ne présentent pas une LMI même pour des gains γ_m et γ_e donnés due à la présence de la variable P_m et de son inverse X_m , ainsi qu'au produit des variables K et Z_3 . Néanmoins, ces deux conditions peuvent être utilisées grâce à quelques manipulations matricielles.

Afin d'obtenir une première estimation de la solution, on propose dans un premier temps, d'ignorer la différences entre la matrice d'entrée du système et celle de l'observateur : $\Delta B_i = 0$. Grâce à cette hypothèse, et pour des gains γ_m et γ_e donnés, on obtient des conditions LMIs en fonction de toutes les autres variables. Le résultat est le suivant :

Corollaire 2.2. Soient γ_m et $0 < \beta < 1$ des scalaires donnés. L'interconnexion par rétroaction, sous aucun effet externe, composée par le système (2.9), la loi de commande (2.10) et l'observateur (2.11) avec $B_m(\xi) = B_m$ est asymptotiquement stable s'il existe des matrices X_m, P_e symétriques et définies positives et des matrices Y_m, Z_1, Z_2, Z_3 qui vérifient :

$$\forall i = 1..r,$$

$$\begin{pmatrix} \text{sym}(A_{m_i}X_m + B_{m_i}Y_m) + X_m & -B_{m_i}Y_m \\ * & -\gamma_m^2 X_m \end{pmatrix} < 0, \quad (2.27)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta^2}{\gamma_m^2}(X_m - 2I) & K^T B_{m_i}^T P_e - K^T Z_2^T + A_{m_i}^T P_e - Z_1^T \\ * & P_e + \text{sym}(Z_1 - Z_3 C - P_e B_{m_i} K + Z_2 K) \end{pmatrix} < 0. \quad (2.28)$$

$$\begin{pmatrix} -P_e & I \\ I & -X_m \end{pmatrix} < 0 \quad (2.29)$$

Les gains de contrôle et de l'observateur sont donnés par $K = Y_m X_m$ et $L = P_e^{-1} Z_3$. Les matrices d'état et d'entrée de l'observateur sont données par $A_e = P_e^{-1} Z_1$ et $B_e = P_e^{-1} Z_2$.

Preuve 2.4. Comme la matrice P_m est symétrique et définie positive, alors on peut écrire :

$$(I - P_m)P_m^{-1}(I - P_m) > 0 \Leftrightarrow -P_m < -2I + P_m^{-1}. \quad (2.30)$$

En appliquant cette majoration sur le terme (1,1) de la condition (2.24), cette dernière devient :

$$\begin{pmatrix} \gamma_e^2(X_m - 2I) & K^T B_{m_i}^T P_e - K^T Z_2^T + A_{m_i}^T P_e - Z_1^T \\ * & P_e + \text{sym}(Z_1 - Z_3 C - P_e B_{m_i} K + Z_2 K) \end{pmatrix} < 0$$

D'autre part, en appliquant le Complément de Schur sur l'inégalité (2.25), on obtient la propriété suivante :

$$P_m \leq P_e \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -P_e & I \\ I & -X_m \end{pmatrix} < 0.$$

Finalement, considérer ces conditions avec $\gamma_e = \beta/\gamma_m$ avec $0 < \beta < 1$, les conditions de ce corollaire impliquent celles du Corollaire 2.1. ■

On note que le fait de majorer la matrice P_m par son inverse X_m (i.e. la majoration (2.30)) peut augmenter le degré de conservatisme de cette approche. La conception du contrôleur par cette approche globale peut être obtenue en appliquant les étapes de l'algorithme suivant.

Algorithme 2.3. (Approche Globale) On considère l'interconnexion par rétroaction, sous aucun effet externe, composée par le système (2.9), la loi de commande (2.10) et l'observateur (2.11).

Étape 2.3.1 : Choisir $\gamma_m > 0$ et β tels que $0 < \gamma_m < 1$ et $1 \approx \beta < 1$. Soit $\gamma_e = \frac{\beta}{\gamma_m}$; $0 < \beta < 1$.

Étape 2.3.2 : Résoudre simultanément la condition LMI du Corollaire 2.2 avec $K^T B_{m_i}^T P_e - K^T Z_2^T = 0$ et $K^T B_{m_i}^T P_e + K^T Z_2^T - P_e B_{m_i} K + Z_2 K = 0$ où X_m, Y_m, P_e, Z_1 et Z_2 sont les variables de décision. Calculer les matrices $P_m = X_m^{-1}$ et $K = Y_m X_m$.

Étape 2.3.3 : En considérant les valeurs obtenues de K et X_m :

- Étape 2.3.3.1 : Minimier γ_m sous la contrainte (2.27) via une optimisation LMI. On dénote la solution trouvée γ_m^* .

- Étape 2.3.3.2 : Fixer $\gamma_e = 1/\gamma_m^*$ et résoudre la condition LMI (2.28) et (2.29) en

P_e , Z_1 , Z_2 et Z_3 . Si une solution faisable est obtenue, alors le système bouclé est stable et le gain de contrôle est donné par K et les matrices de l'observateur sont données par $A_e = P_e^{-1}Z_1$, $B_e = P_e^{-1}Z_2$ et $L = P_e^{-1}Z_3$. Sinon, répéter les étapes précédentes en choisissant une autre valeur de γ_m .

Cette approche semble plus logique dans le sens où l'on cherche dans un premier temps une paire observateur/retour d'état dans le cas où l'entrée de l'observateur n'est pas sous l'effet d'incertitudes. Si cette étape échoue alors il est improbable qu'il existe une telle paire dans le cas incertain.

2.4.3 Exemple : Robot à joint à liaison flexible (Flexible link joint robot)

Cette section illustre les avantages et les limitations des différentes techniques proposées dans ce chapitre ainsi qu'une étude comparative basée sur un exemple issu de la littérature.

On considère un robot manipulateur à une seule liaisons pivot actionné par un moteur à courant continu représenté par [Korb 07]. En utilisant une approche de transformation par secteurs non linéaires [Tana 01], une représentation du modèle est donnée sous la forme (2.31) avec $r = 2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_m &= A_m(\xi)x + B_m(\xi)u \\ y &= Cx_m \end{cases} \quad (2.31)$$

où $A_m(\xi) := \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi)A_{m_i}$ et $B_m(\xi) := \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi)B_{m_i}$.

$$A_{m_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.25 & -48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.5 & 0 & -22.83 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{m_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.25 & -48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.5 & 0 & \mathbf{a} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{m_1} = B_m - \Delta B_m, \quad B_{m_2} = B_m + \Delta B_m, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où la matrice ΔB_m représente la variation de $B_m(\xi)$ autour de sa valeur nominale $B_m^T = \begin{pmatrix} 0 & 21.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En se basant sur la structure T-S, la stabilité de ce système a été étudiée par plusieurs auteurs pour $\Delta B_m = 0$. Cependant, les différentes approches utilisées présentent quelques limitations. À titre d'exemple, pour la conception d'un observateur pour les systèmes T-S avec des prémisses non-mesurables et variables, la méthode développée dans [Berg 00] n'admet aucune solution à cause de la valeur de la

constante de Lipschitz considérée. Les auteurs de [Icha 10] ont proposé, afin d'assurer de meilleurs résultats que les méthodes suggérées par [Raja 98, Ragh 94], un observateur basé sur la convergence de l'erreur d'estimation de l'état. Le théorème résultant pour la conception de cet observateur (*Théorème 1* de [Icha 10]) considère l'existence de la constante de Lipschitz suivante [Icha 10] :

$$\begin{aligned} |\mu_i(x_m)x_m - \mu_i(x_e)x_e| &\leq \alpha_i |x_m - x_e| \\ |(\mu_i(x_m) - \mu_i(x_e))u| &\leq \beta_i |x_m - x_e|, \end{aligned}$$

avec

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9.7601 & 0 \\ 0 & 1 & 5.78 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3.6176 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta_1 = \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.42 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose dans un premier temps que la matrice de variation d'entrée est nulle : $\Delta B_m = 0$. La *Table 2.1* résume les résultats obtenus à partir de l'analyse des méthodes issues du *Théorème 1* de [Icha 10] et des deux *Corollaires 2.1* et *2.2* de ce chapitre.

TABLE 2.1 – Table comparative pour $\Delta B_m = 0$

Approche	nbr. variables	dim. LMI	const. Lipschitz	$a = -18.77$	$a = 22.77$
[Icha 10]	$\frac{n^2}{2}(r+1) + \frac{n}{2}(r+3) + r$	$2r(1+n) + n$	α_i, β_i	✓	✓
			$100\alpha_i, 100\beta_i$	×	×
Algo. 2.1	$2(n+1)^2$	$5nr$	–	✓	×
Algo. 2.3	$(2n+1)^2 + 3n$	$12nr$	–	✓	×

où n représente l'ordre du système et les notations abrégées : ✓ représente l'existence d'une solution où bien plus précisément la stabilité du système et × représente l'échec du solveur, c'est-à-dire l'instabilité.

Ces résultats démontrent qu'il existe un certain nombre de différences importantes entre l'approche proposée par [Icha 10] et celles développées dans ce chapitre. Les *Corollaires 2.1* et *2.2* développés dans ce chapitre ne nécessitent aucune hypothèse de Lipschitz sur les fonctions de pondérations. Le prix à payer en utilisant ces approches est que la stabilité n'est plus assurée pour certains système (par exemple pour $a = 22.77$).

Lorsque l'on s'intéresse à l'aspect robustesse de ces deux approches proposées dans ce chapitre, on remarque une différence de performance en terme de conservatisme. En effet, en fixant $\Delta B_m = 1$, l'*Algorithme 2.1* permet la stabilisation du système pour $a \in [-22.83 \quad -22]$ ainsi que l'*Algorithme 2.3* pour $a \in [-22.83 \quad 9]$. Cette différence peut cependant s'inverser pour d'autres exemples.

2.5 Sous-classe de systèmes T-S : Systèmes SISO

Cette section vise à fournir, pour une classe particulière de modèles T-S, une procédure de conception simplifiée. Soit la classe de systèmes SISO (Single-Input-Single-Output), non linéaires et variables dans le temps donnée par :

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &= -a_0(\xi)y(t) - \dots - a_{n-1}(\xi)y^{(n-1)}(t) + \alpha(\xi)u^p(t), \\ |a_i(\xi)| &\leq \bar{a}_i; \quad \bar{a}_i \in \mathbb{R}^+ \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \end{aligned} \quad (2.32)$$

où les $y^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ représentent les dérivées de la sortie $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ du système, $a_i(\xi)$, $\alpha(\xi)$ sont des paramètres bornés et variables dans le temps et $u^p(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est la loi de contrôle. Afin de normaliser l'entrée du système, on considère le changement de variable :

$$u^p(t) = \frac{1}{\hat{\alpha}} u(t), \quad (2.33)$$

avec $\hat{\alpha}$ est une approximation de $\alpha(\xi)$. Ce système peut être décrit sous la forme d'un modèle T-S, en choisissant comme état $x_m(t) = [y(t) \quad \dots \quad y^{(n-1)}(t)]^T$, comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_m &= A_m(\xi)x_m + B_m(\xi)u \\ y &= Cx_m \end{cases}, \quad (2.34)$$

où $A_m(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ représente la dynamique, $B_m(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$ représente la matrice d'entrée et $C_m \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ est la matrice de sortie avec :

$$A_m(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -a_0(\xi) & -a_1(\xi) & \dots & \dots & -a_{n-1}(\xi) \end{pmatrix}, \quad B_m(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \frac{\alpha(\xi)}{\hat{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

2.5.1 Etude de la stabilité

On considère la loi de contrôle (2.10) et l'observateur linéaire (2.11) décrit dans la *Section 2.3* de ce chapitre. La boucle fermée du système par cet observateur et le système (2.34) avec les matrices (2.35) peut être représentée en considérant un vecteur d'état étendu $X = [x_m \quad x_e]$ par :

$$\begin{cases} \dot{X} &= \mathcal{A}(\xi)X \\ Y &= \mathcal{C}X \end{cases}, \quad (2.36)$$

où

$$\mathcal{A}(\xi) = \begin{pmatrix} A_m(\xi) + B_m(\xi)K & -B_m(\xi)K \\ \Delta A(\xi) + \Delta B(\xi)K & A_e - LC - \Delta B(\xi)K \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned}\Delta A(\xi) &= A_m(\xi) - A_e \\ \Delta B(\xi) &= B_m(\xi) - B_e\end{aligned}$$

Comme cette représentation d'état est similaire à celle étudiée dans la *Section 2.3*, la stabilité de ce système bouclé peut être alors étudiée en utilisant les résultats du *Théorème 2.4* : en considérant le *Corollaire 2.1* ou/et le *Corollaire 2.2* avec les algorithmes appropriés. Le but est de simplifier la procédure de conception. Cet objectif est atteint grâce à la structure particulière des différentes matrices de cette classe de systèmes. Le résultat est formalisé par le théorème suivant :

Théorème 2.5. *Si la boucle fermée composée par le système :*

$$y^{(n)}(t) = -a_0(\xi)y(t) - \dots - a_{n-1}(\xi)y^{(n-1)}(t) + \alpha(\xi)u^p(t), \quad (2.37)$$

avec la loi de contrôle linéaire :

$$u^p = \frac{1}{\hat{\alpha}}u; \quad u = \frac{1}{\hat{\alpha}}Kx_e, \quad (2.38)$$

et l'observateur linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}_e = A_e x_e + B_e u + L(y_m - y_e) \\ y_e = C x_e \end{cases}. \quad (2.39)$$

est asymptotiquement stable pour toutes fonctions continues et bornées

$$a_i(\cdot) : \mathbb{R}^{n_\xi} \mapsto [-\bar{a}_i, \bar{a}_i], \quad i \in \{0, \dots, n-1\} \quad (2.40)$$

$$\alpha(\cdot) : \mathbb{R}^{n_\xi} \mapsto [\hat{\alpha} \cdot (1 - \delta), \hat{\alpha} \cdot (1 + \delta)], \quad \delta \in \mathbb{R}^+ \quad (2.41)$$

alors la boucle fermée composée par le système :

$$z^{(n)}(t) = -b_0(\xi)z(t) - \dots - b_{n-1}(\xi)z^{(n-1)}(t) + \beta(\xi)v^p(t), \quad (2.42)$$

avec la loi de contrôle :

$$v^p = \frac{1}{\hat{\beta}}v = \frac{1}{\hat{\beta}}\tau^n K T^{-1} z_e, \quad (2.43)$$

et l'observateur linéaire :

$$\begin{cases} \dot{z}_e = \tau T A_e T^{-1} z_e + \tau^{1-n} T B_e u + \tau T L (w_m - w_e) \\ w_e = C T^{-1} z_e \end{cases}. \quad (2.44)$$

est asymptotiquement stable pour toutes fonctions continues et bornées :

$$b_i(\cdot) : \mathbb{R}^{n_\xi} \mapsto [-\tau^{n-i} \cdot a_i, \tau^{n-i} \cdot a_i], \quad i \in \{0, \dots, n-1\} \quad (2.45)$$

$$\beta(\cdot) : \mathbb{R}^{n_\xi} \mapsto [\hat{\beta} \cdot (1 - \delta), \hat{\beta} \cdot (1 + \delta)] \quad (2.46)$$

Preuve 2.5. Soit le système (2.37) avec la loi de contrôle (2.38) et l'observateur (2.39) :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_m(t) \\ x_e(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_m(\xi) + B_m(\xi)K & -B_m(\xi)K \\ \Delta A(\xi) + \Delta B(\xi)K & A_e - LC - \Delta B(\xi)K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_m(t) \\ x_e(t) \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

En appliquant le changement de variable $Z(t) = QX(\tau t)$, $Q = \text{diag}(T^{-1}, T^{-1})$ et $T = \text{diag}(1, \tau, \dots, \tau^{n-1})$, la boucle fermée (2.47) devient :

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \frac{d}{dt} (QX(\tau t)) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_m(t) \\ z_e(t) \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \tau \begin{pmatrix} T(A_m(\xi) + B_m(\xi)K)T^{-1} & -T(B_m(\xi)K)T^{-1} \\ T(\Delta A(\xi) + \Delta B(\xi)K)T^{-1} & T(A_e - LC - \Delta B(\xi)K)T^{-1} \end{pmatrix} Z(t) \quad (2.49)$$

Si cette boucle est asymptotiquement stable pour toutes fonctions continues et bornées (2.40) et (2.41), alors la loi de contrôle (2.43) et l'observateur (2.44) stabilise le système :

$$\begin{aligned} z^{(n)}(t) &= -\tau^n a_0(\xi)z(t) - \dots - \tau a_{n-1}(\xi)z^{(n-1)}(t) + \frac{\alpha(\xi)}{\hat{\alpha}}v(t), \\ |a_i(\xi)| &\leq \bar{a}_i, \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Enfinement, en considérant le changement de variable $b_i = \tau^{n-i}a_i$, cette boucle est stable pour toutes fonctions continues et bornées satisfaisant (2.45) et (2.46). ■

Afin d'illustrer ce résultat, on considère le système de second ordre de la classe de systèmes SISO, non linéaire et à paramètres variables dans le temps :

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t) &= -a_0(\xi)y(t) - a_1(\xi)\dot{y}(t) + \alpha(\xi)u^p(t) \\ |a_i(\xi)| &\leq 1; \forall i \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (2.51)$$

avec $\alpha(\cdot)$ tel que $\alpha(\xi)/\hat{\alpha} \in [\underline{c} \ \bar{c}] = [0.8 \ 1.2]$. Ce système peut être réécrit sous la forme (2.34) en choisissant ces matrices :

$$\begin{aligned} A_{m_1} = A_{m_5} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, & A_{m_2} = A_{m_6} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} \\ A_{m_3} = A_{m_7} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}, & A_{m_4} = A_{m_8} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +1 & +1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{m_1} = B_{m_2} = B_{m_3} = B_{m_4} &= \begin{pmatrix} 0 & 0.8 \end{pmatrix}^T \\ B_{m_5} = B_{m_6} = B_{m_7} = B_{m_8} &= \begin{pmatrix} 0 & 1.2 \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

En appliquant l'Algorithme 2.1, une solution faisable est obtenue, ce qui signifie que le système bouclé est stable pour toutes fonctions $a_i(\cdot)$ et $\alpha(\cdot)$ vérifiant les bornes appropriées. Dans ce cas, l'observateur résultant est décrit par les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} A_e &= 10^3 * \begin{pmatrix} -0.0002 & 0.9999 \\ -0.1331 & -0.0988 \end{pmatrix}, & B_e &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ L^T &= 10^4 * \begin{pmatrix} 0.0023 & 1.5333 \end{pmatrix}, & K &= \begin{pmatrix} -5.9564 & -5.5852 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Étant donné qu'on peut toujours calculer un τ vérifiant les conditions du Théorème 2.5, on peut affirmer que pour tout modèle de second ordre (2.51) avec un gain d'entrée $\alpha(\cdot)$ dont la variation ne dépasse pas 20% de sa valeur nominale $\hat{\alpha}$, peut être stabilisable par le retour d'état (2.43) et l'observateur (2.44).

Des résultats similaires sont obtenus pour des modèles de la même classe et d'ordre supérieur. Ces résultats sont regroupés dans la Table 2.2 où le choix du paramètre τ doit satisfaire $\tau^{n-i} \cdot \bar{a}_i < \sigma$, $i \in \{1 \dots n-1\}$.

TABLE 2.2 – Conditions de stabilité

Ordre	n=2	n=3	n=4
σ	1	1	0.1
\underline{c}	0.8	0.8	0.9
\bar{c}	1.2	1.2	1.1

2.5.2 Exemple : Pendule Inverse

Le processus du pendule inverse est un système initialement instable et largement utilisé, comme un exemple de référence, pour étudier les problèmes de stabilité [Wang 96, Park 04b, Hyun 10].

On considère nos approches et le modèle T-S du pendule inverse décrit par [Hyun 10, Sofi 13] pour un ensemble compact de l'espace d'état (2.34) avec les matrices suivantes :

$$A_{m_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 17.29 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{m_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9.35 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{m_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.18 \end{pmatrix} \text{ et } B_{m_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.01 \end{pmatrix},$$

Ce système entre dans le cas traité dans la Section 2.5 qui permet la conception du contrôleur **sans** résoudre de conditions LMI. Pour cela il faut suivre les étapes suivantes :

- Obtenir l'ordre de ce modèle ainsi que ces bornes : $n = 2$ et $\bar{a}_i = 18$, $\forall i \in \{1, 2\}$;
- D'après la Table 2.2, on choisit $\tau = 10^{-2}$ compte tenu que ce choix vérifie la condition : $\tau^{2-i} * \bar{a}_i < 1$;

- Finalement, les matrices du contrôleur et de l'observateur sont calculées depuis (2.43) et (2.44).

Cet exemple illustre l'utilité et l'efficacité du théorème (*Théorème 2.5*). Cette approche offre non seulement une méthode simple de réglage de l'observateur, mais aussi un domaine de stabilité très large. On peut également noter que l'*Algorithme 2.1* est également capable de fournir une solution à ce problème.

2.6 Conclusion

Ce chapitre a considéré l'utilisation du théorème du petit gain et les propriétés d'analyse ISS afin d'aborder le problème de stabilisation de modèles T-S avec des variables de prémisses non mesurables. Les résultats proposés considèrent des hypothèses beaucoup moins fortes que les méthodes existantes dans la littérature. Ces résultats ont démontré leur utilité sur des cas où d'autres méthodes échouent. Pour une classe particulière de modèles T-S (systèmes SISO), une nouvelle procédure de conception a été proposée permettant de calculer systématiquement une paire observateur/contrôleur où le problème de la résolution de conditions LMI/BMI ne se pose plus.

Néanmoins, les approches de conception développées dans ce chapitre exigent une certaine connaissance du modèle du système non linéaire. Ceci nous mène à poser plusieurs questions : Comment peut on réduire le conservatisme de ces approches ? Dans certains cas pratiques, peu d'informations sur le modèle du système sont disponibles, est-il possible de concevoir une loi de commande permettant de palier la méconnaissance du comportement du procédé ? Dans ce cas, quel est le prix à payer vis-à-vis du cahier des charges imposé ?

CHAPITRE 3

Commande à Modèle Restreint : Approche Non-Asymptotique

Sommaire

4.1	Problématique	66
4.2	Stabilité du Cas Nominal	67
4.2.1	Analyse de Stabilité	67
4.2.2	Implémentation sur un Moteur Synchrone à Aimants Permanents (MSAP)	70
4.3	Synthèse de contrôleur avec connaissances limitées	75
4.3.1	Analyse de Stabilité	76
4.3.2	Analyse de précision	81
4.3.3	Analyse de Performances	84
4.3.4	Exemple	87
4.4	Conclusion	89

Le but principal du chapitre précédent était l'adaptation des méthodes d'analyse du petit gain à l'attention des systèmes non linéaires afin de concevoir une loi de commande basée sur observateur. On a démontré que le système en boucle fermée peut être considéré comme une interconnexion formée par le processus non linéaire et un observateur linéaire de type Luenberger. Ce dispositif de commande permet de garantir la stabilité asymptotique de l'interconnexion. Néanmoins, deux aspects importants liés aux problèmes de contrôle par retour de sortie, sont à prendre en considération. En effet, en pratique ni le modèle exact ni ses paramètres ne sont directement accessibles à l'automaticien. Afin de résoudre ces deux problèmes, on propose dans ce chapitre une nouvelle loi de commande basée sur le principe de la commande "sans modèle" [Join 08a, Flie 13]. Afin de reconstituer l'état du système,

une approche d'estimation algébrique non-asymptotique sera considérée. Après avoir introduit la commande "sans modèle" existante dans la littérature, la problématique de ce chapitre sera reformulée dans la *Section 3.2*. La *Section 3.3* présentera un rappel sur le principe de dérivation numérique ainsi que les techniques algébriques. Ensuite, afin d'exposer l'idée de base de cette méthode, l'estimation de la dérivée première d'un signal sera étudiée dans la *Section 3.4*. Finalement, la *Section 3.5* sera dédiée à la synthèse de la loi de commande : conception du contrôleur et analyse de stabilité.

3.1 Introduction

Dans la théorie des systèmes, contrôler un processus nécessite souvent de bons modèles ainsi que de bonnes informations sur le processus. Un problème majeur à pendre en considération est lié à la non disponibilité de tous les paramètres variants (ou prémisses) en temps réel pour la mise en œuvre de la loi de commande.

Si aucune information sur ces paramètres variants n'est disponible, la commande "sans modèle" peut être une alternative. Cette notion a été proposée et développée par [Join 08a]. C'est une commande basée sur une modélisation locale mise à jour de façon continue par l'intermédiaire de l'unique connaissance du comportement entrée/sortie du système. Elle se distingue des identifications "boîte noire" décrites dans [Kers 06, Sjob 95]. L'idée principale de cette loi de commande consiste à rechercher un modèle valable sur une plage de fonctionnement aussi large que possible. Cette dernière est basée sur des signaux et donc ne nécessite pas beaucoup de spécifications sur le système. Pour mettre en œuvre ce contrôle, il est nécessaire que les dérivées des sorties soient disponibles ou estimées.

Dans ce contexte, plusieurs approches de dérivation et estimation ont été développées. On distingue principalement deux catégories : estimateurs asymptotiques et non-asymptotiques (le lecteur peut se reporter à la *Section 1.3* du *Chapitre 1*). On s'intéresse dans ce chapitre uniquement aux estimateurs non-asymptotiques basés sur les méthodes algébriques. Cette nouvelle approche pour l'identification de paramètres des systèmes linéaires a été développée au sein de l'équipe-projet ALIEN du centre INRIA et initialement introduite par M. Fliess et H. Sira-Ramirez [Flie 03b]. Des outils similaires à ces outils non-asymptotiques ont été développés en traitement du signal [Flie 03a] ou encore pour aboutir à l'estimation des dérivées [Flie 05c, Mbou 07a, Liu 08, Mbou 09, Riach 10]. Les fondements théoriques de ces méthodes, proposés comme des alternatives efficaces aux techniques d'identification existantes de [Ljun 94, Sjob 95, Kers 06], peuvent être trouvés dans [Flie 03b, Trap 06, Flie 06a, Flie 08b]. Contrairement aux méthodes traditionnelles, le problème d'estimation se traduit par des formules algébriques exactes dépendantes d'intégrales des signaux mesurés produisant un effet de filtrage intéressant en présence de bruit [Flie 03b, Flie 06b].

Cependant, dans le cadre de l'application de l'approche sans modèle aux systèmes LPV, peu de travaux portent sur les méthodes de réglages et les effets des paramètres sur la qualité de la réponse du système en boucle fermée. Ceci nous a motivé pour proposer une loi de commande à modèle restreint similaire à celle de [Join 08a] et puis, d'appliquer ces techniques algébriques afin de résoudre les problèmes de paramétrage.

3.2 Définition de la loi de commande

Pour des raisons de simplicité, seuls les systèmes SISO (systèmes caractérisés par une seule variable de contrôle u et une seule variable de sortie y) sont considérés dans notre étude. Le modèle inconnu "complexe" mathématique (supposé être de dimension finie, linéaire ou non) décrivant le comportement entrée/sortie de ces systèmes est donné par l'équation différentielle

$$E_d(y, \dot{y}, \dots, y^{(\nu)}, u) = 0, \quad (3.1)$$

est remplacé par un modèle ultra-local valable durant un court laps de temps comme suit [Join 08a] :

$$y^{(n)} = F + \alpha u, \quad (3.2)$$

où u représente une loi de contrôle définie par [Join 08a] comme un iPID, F représente la fonction structurelle qui contient toutes les parties inconnues. Le coefficient est un paramètre choisi par l'utilisateur afin d'assurer un équilibre des ordres de grandeur des termes non absorbés par la fonction F ([Maal 13] (**sur les marges de stabilité**)). Pour plus de détail sur cette structure, le lecteur peut se reporter à la *Section 1.2.2 du Chapitre 1*. Les iPIDs présentent une solution simple aux problèmes de la commande des systèmes complexes incertains ou non dont de nombreux exemples d'applications ont déjà été proposés [Abou 11, DAnd 10, Gedo 11, Join 08a].

Motivé par les nombreux avantages offerts par le principe de la commande sans modèle proposé par [Join 08a] (annuler la dynamique du processus initiale et la remplacer par celle imposée par le cahier des charges) on propose une loi de commande composée de ces deux dynamiques [Maal 13], c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \text{Loi de Commande} &= \text{Dynamique d'Annulation} + \text{Dynamique Désirée} \\ u(t) &= -\frac{1}{\alpha}F(t) + \frac{1}{\alpha}(-KY(t) + k_0r(t)) \\ u(t) &= u_n(t) + u_r(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

où $K = [k_0, \dots, k_{n-1}]$ est un vecteur composé par les coefficients de la dynamique désirée du système bouclé proposée par le cahier des charges, $r(t)$ est la référence et $Y(t)$ est un vecteur composé par les dérivées successives de la sortie du système $y(t)$. On rappelle que ces deux dynamiques sont définies par [Join 08a], pour une loi de

commande de type iPID comme suit : $u_n(t) = -\frac{1}{\alpha}F(t)$ et $u_r(t) = \frac{1}{\alpha}\ddot{r}(t) - K_P e(t) - K_I \int e(t) - K_D \dot{e}(t)$ (pour plus de détails, le lecteur peut se reporter à la *Section 1.2.2* du *Chapitre 1*).

Il est aisé de voir qu'en remplaçant la commande $u(t)$ par son expression (3.3), la dynamique du système initial (3.2) revient à celle spécifiée par le cahier des charges, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) = F(t) + \alpha u(t) &\Rightarrow y^{(n)}(t) = -KY(t) + k_0 r(t) \\ &= -k_0 y(t) - \dots - k_{n-1} y^{(n-1)}(t) + k_0 r(t) \end{aligned}$$

Néanmoins, ce résultat n'est valable que dans le cas idéal de commande. En effet, en pratique, peu d'informations sont accessibles pour l'automaticien. On considère alors la loi de commande suivante :

Loi de commande de [Maal 13]

En se basant sur le même principe que la commande "sans modèle", on propose le contrôleur illustré dans la *Figure 3.1* avec :

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{u}_n(t) + \hat{u}_r(t) \\ &= -\frac{1}{\alpha}\hat{F}(t) + \frac{1}{\alpha}(-K\hat{Y}(t) + k_0 r(t)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

où

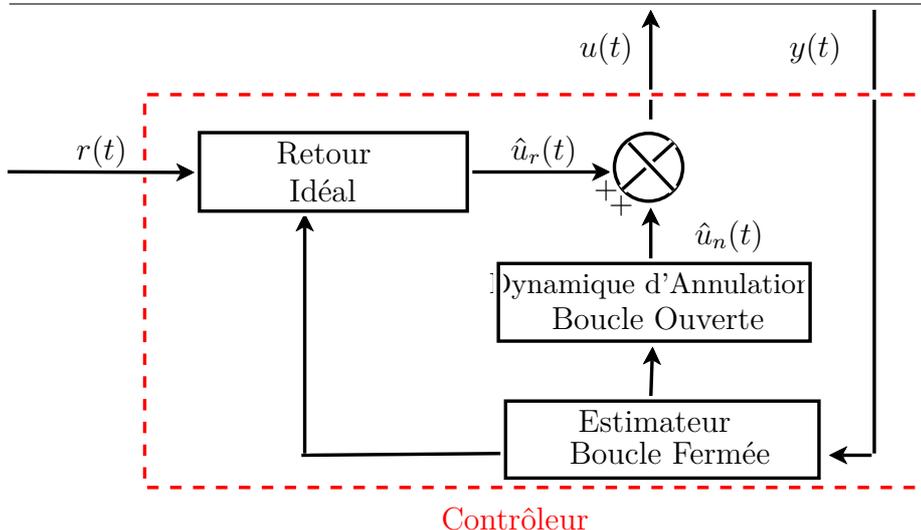
- $\hat{F}(t)$ est une estimation de la fonction structurelle ;
- $\hat{Y}(t) = [z_0(t) \ \dots \ z_{n-1}(t)]^T$ est un vecteur composé par les $z_i(t)$: les estimations successives des dérivées de la sortie du système $y^{(i)}(t)$;
- $K = [k_0, \dots, k_{n-1}]$ est un vecteur composé par les coefficients k_i de la dynamique désirée $y_r(t)$ du système bouclé proposé par le cahier des charges (bloc "Retour Idéal") tel que :

$$y_r^{(n)}(t) = -k_0 y_r(t) - \dots - k_{n-1} y_r^{(n-1)}(t) + k_0 r(t); \quad (3.5)$$

- $r(t)$ est la référence.

Comme cité précédemment, le choix du paramètre $\hat{\alpha}$ sera guidé par l'analyse des termes non regroupés dans la fonction structurelle F . (Pour Cédric, ce coeff est issu de l'équilibre de courant dans la manip du chapitre suivant)

Figure 3.1 Architecture du Contrôleur



Étant donné que la loi de commande (3.4) ne considère que les valeurs estimées de la fonction structurelle $F(t)$ et des dérivées successives de la sortie, une bonne estimation de ces valeurs est nécessaire. Dans ce cadre, Fliess et al. [Flie 13] ont proposé d'utiliser les techniques algébriques définie dans la section suivante et détaillées dans [Flie 08a, Mbou 09].

3.3 Principe et Outils de la dérivation numérique

Ce paragraphe présente un rappel sur les dérivateurs numériques basés sur l'algèbre différentielle en décrivant, brièvement, leur principe et les outils utiles pour l'estimation des paramètres et/ou états.

3.3.1 Principe

Étant donné un signal bruité, et afin de calculer sa $n^{\text{ième}}$ dérivée partielle, un modèle local donné par un développement de Taylor multidimensionnel tronqué à l'ordre N ($N > n$, N et n sont des multi-indices) est considéré sur une courte fenêtre d'estimation $[t - T_f; t]$ (où t étant l'instant courant et T_f la taille de la fenêtre). Ce modèle est réécrit dans le domaine opérationnel grâce à des transformations de Laplace multivariées. Afin d'isoler la dérivée partielle désirée, des dérivations opérationnelles et des manipulations algébriques inspirées de [Miku 83] sont appliquées. Une fois revenu au domaine spatial, cette estimée s'exprime, sur la fenêtre d'estimation, en fonction d'intégrales itérées du signal de mesure bruité, multiplié par un certain polynôme temporel. Ces intégrales peuvent, par exemple, être évaluées

numériquement par la méthode des Trapèzes ou d'Euler-Maclaurin.

3.3.2 Outils

Les outils de la dérivation numérique sont basés sur l'algèbre différentielle et le calcul opérationnel. L'algèbre différentielle offre un moyen puissant permettant de développer des structures linéaires. Les détails et définitions de ces outils sont brièvement rappelés ici (néanmoins, ils sont largement décrits dans [Flie 03b, Flie 06b, Flie 08a, Mbou 09]).

Développement de Taylor

Pour un signal $x(t)$ analytique en $t = 0$, c'est-à-dire :

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!},$$

sa série de Taylor tronquée à l'ordre N peut être représentée par :

$$x_N(t) = \sum_{i=0}^N x^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!}.$$

Ce polynôme correspond à une approximation de la fonction x sur un petit intervalle temporel avec une faible erreur : $x(t) - x_N(t) \equiv o(t^N)$.

Manipulations Algébriques

•) *Transformée de Laplace* : la propriété fondamentale de la transformée de Laplace est :

$$\mathcal{L}[y^{(n)}] = s^n y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} \dot{y}(0) - \dots - y^{(n-1)}(0).$$

•) *Formule de Leibniz*

$$\frac{d^h(x(s)y(s))}{ds^h} = \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \frac{d^{h-j}(x(s))}{ds^{h-j}} \frac{d^j(y(s))}{ds^j},$$

avec :

$$\frac{d^k(s^l)}{ds^k} = \begin{cases} \frac{l!}{(l-k)!} s^{l-k}, & \text{si } 0 < k \leq l \\ 0, & \text{si } 0 < l < k \\ \frac{(-1)^k (k-l-1)!}{(-l-1)!} s^{l-k}, & \text{si } l < 0 < k \end{cases}$$

•) *Domaines Opérationnel/Temporel* : les règles de transformation de base entre le calcul opérationnel et le domaine transformation de base entre le calcul opérationnel et le domaine temporel sont :

$$\mathcal{L}^{-1}[s^{-1}] = \int_0^t, \quad \mathcal{L}^{-1}[s^{-n}] = \int^{(n)} : \text{intégrales itérées.}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\right] = -t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d^n}{ds^n}\right] = (-t)^n : \text{dérivations algébriques.}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[s^{-l} \cdot \frac{d^k y(s)}{ds^k}\right] = \begin{cases} \int^l \dots \int^{(-\tau_1)^k} y(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_l, & \text{si } l \geq 1 \\ \frac{d^l((-t)^k y(t))}{dt^l}, & \text{si } l \leq 0 \end{cases}$$

De plus, on considère l'égalité suivante :

$$\int^l \dots \int y(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_l = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{l-1} y(\tau)}{(l-1)!} d\tau.$$

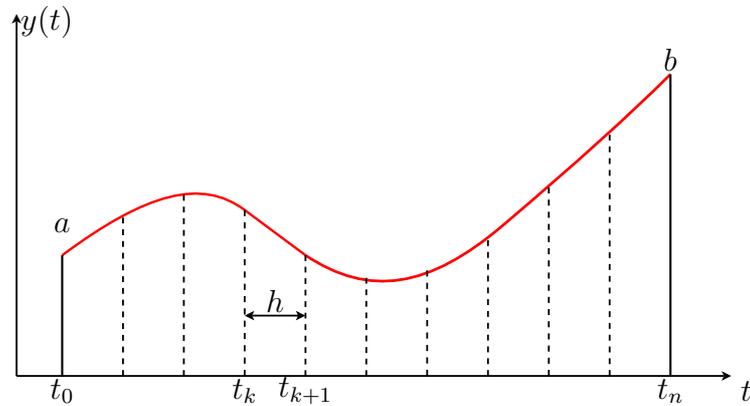
L'association de ces deux dernières équations, pour $l \geq 1$ donne :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^{-i} d^j F(s)}{ds^j}\right) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{i-1} (-\tau)^j f(\tau)}{(i-1)!} d\tau. \quad (3.6)$$

Discretisation d'intégrale

Soit une fonction $y(t)$ suffisamment lisse de $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ (voir figure 3.2). Pour intégrer cette fonction, on subdivise l'intervalle $[a; b]$ en n parties égales telles que $t_k = a + kh$; $k \in [0; n]$, $y_k = y(t_k)$ et $h = \frac{b-a}{n}$. Ensuite, il s'agit de trouver un polynôme passant par les n points $(t_k; y_k)$ dont l'intégration formelle est facile à mener. Soit l'intégrale $Y = \int_a^b y(t) dt$. L'idée est donc de modéliser la fonction $y(t)$ par un polynôme dont l'intégration formelle est facile. Il existe plusieurs façon de procéder. On peut, par exemple, considérer un polynôme $p(t)$ de degré $n - 1$ de la forme : $p(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j t^j$ (i.e. le polynôme de Taylor tronqué du signal $y(t)$) et dire que ce polynôme doit passer par les n points (t_i, y_i) .

Figure 3.2 Discrétisation d'intégrale



Fenêtre Glissante

Sur un long intervalle de temps, la contribution du bruit de mesures et des termes non modélisés ont un effet néfaste sur le calcul des intégrales [Liu 11]. Afin de minimiser cet effet et de valider l'hypothèse de perturbations constantes, les signaux doivent être intégrés sur une fenêtre glissante. En pratique, on peut facilement étendre les formules définies précédemment pour travailler sur une fenêtre glissante de longueur T_f , et donc sur un court intervalle de temps $[t - T_f, t]$ (t étant l'instant courant et T_f la taille de la fenêtre glissante).

3.3.3 Estimation de la dérivation

Dans la littérature, on peut trouver différentes méthodes de mise en oeuvre de ces estimateurs. Par exemple, dans [Gens 07], le résultat de l'intégrale sur un échantillon est mis en mémoire à chaque instant d'échantillonnage. L'intégrale sur la fenêtre est égale à la somme des résultats de chaque échantillon de l'instant " $t - T_f$ " à " t ". Afin d'évoluer le long du signal, une solution serait de recalculer cette somme à chaque instant. Afin de minimiser le temps de calcul, la solution proposée consiste à mettre à jour l'intégrale calculée à l'échantillon précédent en soustrayant le premier élément de la fenêtre et en y ajoutant le nouvel élément entrant. Cette méthode est très efficace en temps réel. Cependant, on remarque que l'intégrale (3.6) étant un produit de convolution, tous les points de la fenêtre changent à chaque instant.

Pour notre étude, l'approche utilisée pour le calcul de cette intégrale, est issue des travaux de [Mbou 09]. Le principe est similaire à celui de la discrétisation d'intégrale décrit dans le paragraphe précédent : l'intégrale sur l'intervalle $[0, t]$ est réécrite sur un intervalle plus court $[0, T_f]$. On suppose, pour la suite, que les procédés sont cadencés à une fréquence d'échantillonnage régulière ayant une période d'échantillonnage T_h telle que $T_f = MT_h$ avec M le nombre de points de la fenêtre.

De plus, W_m et $t_m = mT_h/T_f$, $m = 0, \dots, M$, sont les poids et les abscisses associées. Afin de calculer numériquement ces intégrales, on utilise l'approximation numérique suivante [Mbou 09] :

$$\int_0^1 h(t)dt \approx \sum_{m=0}^M W_m h(t_m).$$

En effet, c'est en travaillant sur cette fenêtre glissante que l'on peut obtenir une estimation en *temps réel* des dérivées de $y^{(i)}(t)$ tout en supposant que les perturbations sont constantes. Le bon choix de la longueur de la fenêtre permettra effectivement de minimiser l'erreur d'estimation [Liu 08].

3.3.4 Remarques

1. Pour simplifier les calculs, on suppose que la perturbation extérieure inconnue $\Pi(t)$ est suffisamment lisse sur une petite fenêtre de temps. Une bonne approximation peut être appliquée à cette perturbation en la considérant comme un polynôme de la forme :

$$\Pi(t) = c_0 + c_1 t, \quad (3.7)$$

où c_0 et c_1 sont des constantes sur cette fenêtre de temps.

2. On note que la multiplication par s dans le domaine fréquentiel correspond à une dérivation par rapport au temps dans le domaine temporel. Ceci n'est pas désirable en présence de bruit de mesure. Pour pallier ce problème, on divise par s suffisamment de fois. La multiplication par s^{-n} correspond alors à des intégrales itérées (à l'ordre n) jouant le rôle de filtre passe-bas et servant à atténuer l'effet du bruit de mesure.
3. Étant donné qu'à l'instant $t = 0$, la détermination des paramètres est indéterminée, on doit commencer l'estimation à un temps légèrement postérieur $t = \epsilon$ tel que $\epsilon > 0$.
4. Le produit MT_h présente la taille, en unités de temps, de la fenêtre glissante d'intégration. Ce produit est facilement réglable en ajustant le nombre d'échantillons M et la période d'échantillonnage T_h , à condition de ne pas dépasser la fréquence d'acquisition maximale des capteurs, qui est $f_{hmax} = 1/T_{hmin}$.
5. Dans les applications pratiques, T_f (la longueur de la fenêtre glissante) doit être choisie environ 20 à 100 fois supérieure à la période d'échantillonnage T_h .
6. L'ordre du développement de Taylor tronqué doit être supérieur ou à la limite égal à celui de dérivation.

3.4 Implémentation : Estimation de la dérivée première d'un signal

Compte tenu de son importance, le problème de dérivation numérique, ou de l'estimation des dérivées d'un signal temporel bruité a attiré l'attention de plusieurs recherches dans différents domaines tels que les domaines de l'analyse numérique, du traitement du signal et de l'automatique.

Afin de représenter l'idée de base de cette méthode, on commence par un exemple introductif. Soit

$$y(t) = x(t) + \Pi \quad (3.8)$$

où Π est une perturbation constante et continue et $y(t)$ est une observation bruitée sur un intervalle ouvert fini de temps d'un signal $x(t)$. Le but est d'estimer les dérivées successives de ce signal $x(t)$ en utilisant celui mesurable et bruité $y(t)$. Supposant que le signal x est analytique en $t = 0$, sa série de Taylor tronquée à l'ordre 1 peut être alors donnée par :

$$x_1(t) = a_0 + a_1 t,$$

où a_0 , a_1 sont deux paramètres inconnus à identifier. On utilisant les notations classiques du calcul opérationnel, il vient, pour $t \geq 0$:

$$X_1(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2}, \quad (3.9)$$

où $X_1(s)$ représente la transformation de Laplace de $x_1(t)$ et s représente la variable de Laplace. Pour éliminer le terme a_0 , on multiplie les deux membres de l'expression précédente par s puis on dérive par rapport à s , c'est-à-dire :

$$\frac{d}{ds} [s \{ X_1(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} \}] \Rightarrow X_1(s) + s \frac{dX_1(s)}{ds} = -\frac{a_1}{s^2}.$$

Avant de revenir au domaine temporel, une multiplication par s^{-2} est nécessaire pour obtenir uniquement des intégrales :

$$s^{-2} X_1(s) + s^{-1} \frac{dX_1(s)}{ds} = -s^{-4} a_1.$$

On revient au domaine temporel en rappelant que $\frac{d}{ds}$ correspond à la multiplication par $-t$:

$$a_1 = \frac{6 \int_0^t (\tau x_1(\tau) - (t - \tau)x(\tau)) d\tau}{t^3}.$$

Les résultats obtenus jusqu'à présent sont valables sur l'intervalle de temps $[0, t]$. Avec un simple changement de variable, cet integrale sur l'intervalle $[0, t]$ est réécrite sur l'intervalle $[0, T_f]$ comme suit :

$$\hat{a}_1 = \frac{6 \int_0^{T_f} (2\tau - T_f)x_1(t - T_f + \tau) d\tau}{T_f^3}.$$

Il faut noter que le "zéro" de ces deux intervalles est différent. Il représente pour l'intervalle $([0, T_f])$ le début de la fenêtre glissante et évolue donc en même temps que celle-ci. On normalise ensuite l'intervalle d'estimation de $[0, T_f]$ à $[0, 1]$ pour obtenir :

$$\hat{a}_1 = \frac{6 \int_0^1 (2\tau - 1)x_1^{T_f}(1 - \tau)d\tau}{T_f}.$$

où $x_1^{T_f}(\ell) = x_1(t - T_f\ell)$. À noter que l'intégrale sur l'intervalle de temps $[0, 1]$ est un filtre entrée-sortie classique très facile à programmer. C'est en travaillant sur cette fenêtre glissante que l'on peut obtenir une estimation en *temps réel* de la dérivée première de $y(t)$. En évaluant ces intégrales numériquement [Mbou 09], on aura :

$$\hat{a}_1 = \frac{6T_h}{T_f^2} \sum_{m=0}^M (2mT_h - T_f)x_1^{T_f}(1 - \frac{mT_h}{T_f}),$$

On obtient finalement une estimation débruitée du signal $y(t)$ grâce à une estimation de la dérivée de $x_1(t)$ via l'estimation de a_1 . Afin de généraliser cet estimateur, nous pouvons écrire l'estimation de la dérivée première d'un signal sous la forme suivante :

$$\hat{a}_1 = \sum_{m=0}^M \phi(t_m)x_1^{T_f}(1 - t_m), \tag{3.10}$$

où $t_m = mT_h/T_f$ et $\phi(t_m) = \frac{6T_h}{T_f}(2t_m - 1)$ est une fonction qui dépend uniquement du temps d'échantillonnage et de la longueur de la fenêtre glissante. Cette fonction étant indépendante du temps t , elle peut être calculée hors ligne, ce qui est appréciable dans les applications en temps réel.

Remarque 3.1. 1. *Cet exemple permet de comprendre la variété possible d'estimateurs que l'on peut obtenir par cette méthode, en modifiant, par exemple, l'ordre du polynôme de Taylor ou l'entier N .*

2. *L'extension de cette procédure à des polynômes de degré plus élevé est simple. Pour estimer les dérivées d'une fonction $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, on prend un développement de Taylor tronqué à un certain ordre et on applique des calculs similaires à ceux précédemment présentés. En utilisant des fenêtres temporelles glissantes, on peut estimer les dérivées de façon efficace. Néanmoins, cette méthode devient de plus en plus mal conditionnée pour des ordres de troncature élevés [Mbou 07a].*

Exemple de Simulation

Soit $x(t) = 24\sin(\pi t)$ un signal et $\dot{x}(t) = 24\pi\cos(\pi t)$ sa dérivée première. La figure 3.3 représente l'évolution du signal, sa dérivée première et son estimation en choisissant un pas d'échantillonnage $T_h = 10^{-4}$ et une fenêtre glissante de longueur $T_f = 0.008$. L'erreur d'estimation est illustrée dans la Figure 3.4.

Figure 3.3 Evolution du signal et de sa dérivée première pour $T_h = 10^{-4}$ et $T_f = 0.008$

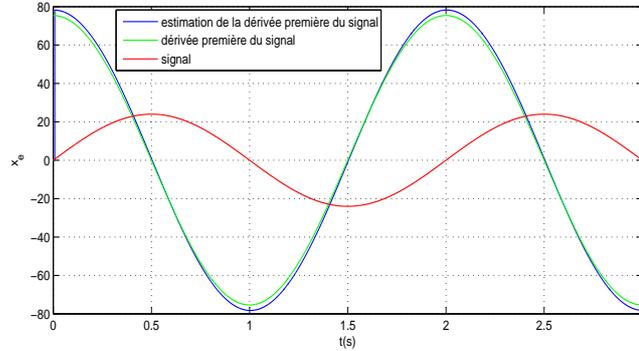
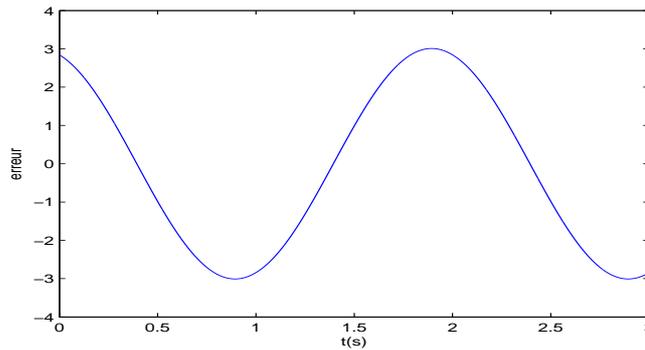


Figure 3.4 Erreur d'estimation



D'après ces figures, on note que la valeur estimée suit quasi-instantanément et exactement la valeur réelle (avec une erreur d'estimation de l'ordre de 3%).

3.5 Synthèse d'une loi de commande

L'objectif principal de cette section consiste à la conception d'un contrôleur assurant la stabilité de la boucle fermée composée par un système LPV décrit par l'équation différentielle (3.1) et une loi de commande (3.4). Bien que l'estimateur algébrique offrait de "bonne" estimation, il sera utilisé ici afin d'estimer les paramètres du contrôleur. Par ailleurs, une version discrète de cette loi de commande, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} u(t_k) &= \hat{u}_n(t_k) + \hat{u}_r(t_k) \\ &= -\frac{1}{\hat{\alpha}} \hat{F}(t_k) + \frac{1}{\hat{\alpha}} (-K \hat{Y}(t_k) + k_0 r(t_k)) \end{aligned}$$

ainsi que du système non linéaire doit être considérée. Ce dernier, à paramètres inconnus et variables dans le temps, sera approché à un système à paramètres invariants

dont la représentation d'état est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m u(t) \\ y(t) &= C_m x_m(t) \end{cases} \quad (3.11)$$

où A_m , B_m et C_m sont des matrices constantes et connues.

Afin de résoudre les deux principaux problèmes de ce chapitre : la conception du contrôleur et l'étude de la stabilité du système bouclé en admettant la commande à modèle restreint ("sans modèle") avec les dérivateurs numériques comme estimateur, on se place dans le cadre de travail suivant :

- Un développement de Taylor tronqué à l'ordre 2 ;
- Des systèmes LTI en temps discrets ;
- Un modèle local du même ordre que l'équation différentielle ($n = \nu = 2$) ;
- Une fonction structurale $F(t) = F(y, \dot{y}, \dots)$ contenant toute la dynamique du système et éventuellement les perturbations. Cette fonction est considérée non mesurable ainsi qu'indépendante du contrôle (dynamique à déphasage minimale) ;
- Un contrôleur basé sur une estimation $\hat{\alpha}$ du paramètre α .

3.5.1 Conception du contrôleur

Rappelons la loi de contrôle considérée dans cette étude pour un système de second ordre :

$$u(t_k) = -\frac{1}{\hat{\alpha}}(\hat{F}(t_k) + K\hat{Y}(t_k) - k_0 r(t_k)), \quad (3.12)$$

où $\hat{Y}(t_k) = [z_0(t_k), z_1(t_k), z_2(t_k)]$ tels que $z_0(t_k) = \hat{y}(t_k)$, $z_1(t_k) = \hat{y}(t_{k+1})$ et $z_2(t_k) = \hat{y}(t_{k+2})$ représentent respectivement la sortie estimée, les dérivées premières et secondes du polynôme de Taylor tronqué à l'ordre 2 du signal.

L'estimation de la fonction structurale $F(t)$ est triviale en inversant la dynamique du modèle local (3.2). Cette opération entraîne l'apparition d'une boucle algébrique entre le contrôle u et la fonction \hat{F} . Afin de résoudre ce problème, on introduit un retard sur le contrôle [Join 08a] :

$$\hat{F}(t_k) = z_2(t_k) - \hat{\alpha}u(t_{k-1}). \quad (3.13)$$

Concernant l'estimation des dérivées de la sortie, c'est-à-dire $z_0(t_k)$, $z_1(t_k)$ et $z_2(t_k)$, on propose le dérivateur-estimateur suivant :

Proposition 3.1. *L'estimation des dérivées successives d'un signal approximé par un développement de Taylor tronqué à l'ordre 2, sur une fenêtre glissante de longueur T_f et de fréquence T_h , peut être réalisée à l'aide de l'estimateur-dérivateur suivant :*

$$\begin{cases} x_a(t_{k+1}) = A_a x_a(t_k) + B_a y(t_k) \\ y_a(t_k) = C_a x_a(t_k) + D_a y(t_k) \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.14)$$

avec $x_a(t_k) = [x^{T_f}(1 - t_0) \ x^{T_f}(1 - t_1) \ \dots \ x^{T_f}(1 - t_M)]^T$ où on a dénoté $x^{T_f}(l) = x(t - T_f l)$,

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & \dots & & 0 \end{pmatrix}, \quad B_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

$$C_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Phi_1(t_0) & \Phi_1(t_1) & \dots & \Phi_1(t_M) \\ \Phi_2(t_0) & \Phi_2(t_1) & \dots & \Phi_2(t_M) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tels que $\forall m \in \{0 \dots M\}$, $M = T_f/T_h$,

$$\begin{aligned} \Phi_1(t_m) &= \frac{12T_h}{T_f}((1 - t_m)(2 - 12t_m) + 3t_m^2) \\ \Phi_2(t_m) &= \frac{60T_h}{T_f^2}((1 - t_m)(1 - 5t_m) + t_m^2) \end{aligned}$$

avec $t_m = mT_h/T_f$.

Démonstration 3.1. Cette preuve utilise les mêmes transformations et outils que l'exemple d'implémentation détaillé dans la section précédente. On suppose que $z_0(t_k) = \hat{y}(t_k) = y(t_k)$. Le but de cette proposition étant d'estimer la dérivée première et seconde de la sortie du système, on considère le polynôme de Taylor tronqué à l'ordre 2 suivant :

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2. \quad (3.16)$$

La dérivée première et seconde de ce polynôme sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= a_1 + 2a_2 t \Rightarrow \dot{p}(t)|_{T_f} = a_1 + 2a_2 T_f, \\ p^{(2)}(t) &= 2a_2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

- Calcul de la dérivée seconde :

En multipliant les deux membres de l'expression (3.16) par l'opérateur linéaire différentiel $\mathcal{O}_j^\iota = s^{-j} \frac{d}{ds} s^\iota \frac{d}{ds} s$ avec $j = 4$ et $\iota = 2$, on obtient :

$$s^{-4} \left[\frac{d}{ds} \left[s^2 \left[\frac{d}{ds} \left[s \{ p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \} \right] \right] \right] \right] \Rightarrow 2s^{-3} P + 4s^{-2} \frac{dP}{ds} + s^{-1} \frac{d^2 P}{ds^2} = 4a_2 s^{-6}.$$

En revenant au domaine temporel, l'estimation du paramètre a_2 sur l'intervalle du temps $[0, T_f]$ puis celle normalisée $[0, 1]$ sont données par :

$$\begin{aligned} \hat{a}_2 &= \frac{30}{T_f^5} \int_0^{T_f} ((T_f - \tau)(T_f - 5\tau) + \tau^2) p(t - T_f + \tau) d\tau \\ \Rightarrow \hat{a}_2 &= \frac{30}{T_f^2} \int_0^1 ((1 - \tau)(1 - 5\tau) + \tau^2) p^{T_f}(1 - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

En appliquant la transformation d'Euler, on obtient :

$$\hat{a}_2 = \sum_{m=0}^M \phi_2(t_m) p^{T_f}(1-t_m),$$

où $\phi_2(t_m) = \frac{30T_h}{T_f^2}((1-t_m)(1-5t_m) + t_m^2)$.

Finalemnt, la dérivée seconde du signal est fournie par :

$$\begin{cases} z_2(t_k) &= 2\hat{a}_2 &= \sum_{m=0}^M \Phi_2(t_m) p^{T_f}(1-t_m) \\ \Phi_2(t_m) &= 2\phi_2(t_m) &= \frac{60T_h}{T_f^2}((1-t_m)(1-5t_m) + t_m^2) \end{cases} ; \forall m \in \{0..M\}. \quad (3.18)$$

- Calcul de la dérivée première :

En appliquant les mêmes étapes que précédemment, avec l'opérateur linéaire différentiel \mathcal{O}_5^3 , on obtient :

$$\hat{a}_1 = \sum_{m=0}^M \phi_1(t_m) p^{T_f}(1-t_m),$$

où $\phi_1(t_m) = \frac{12T_h}{T_f}((1-t_m)(-3+13t_m) - 2t_m^2)$.

Donc, la dérivée première du signal est donnée par :

$$\begin{cases} z_1(t_k) &= \hat{a}_1 + z_2(t_k)T_f &= \sum_{m=0}^M \Phi_1(t_m) p^{T_f}(1-t_m) \\ \Phi_1(t_m) &= \phi_1(t_m) + T_f\Phi_2(t_m) &= \frac{12T_h}{T_f}((1-t_m)(2-12t_m) + 3t_m^2) \end{cases} ; \forall m \in \{0..M\}. \quad (3.19)$$

- Reconstruction de l'état :

Soit $x_a(t_k)$ un vecteur composé par les états $x^{T_f}(t-t_m)$ (où on a dénoté $x^{T_f}(l) = x(t-T_f l)$ aux instants (abscisses) t_m où $m \in \{0..M\}$, c'est-à-dire : $x_a(t_k) = [x^{T_f}(1-t_0) \ x^{T_f}(1-t_1) \ \dots \ x^{T_f}(1-t_M)]^T$). Dans ce cas, les deux expressions (3.18) et (3.19) peuvent être mises sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} z_1(t_k) \\ z_2(t_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1(t_0) & \Phi_1(t_1) & \dots & \Phi_1(t_M) \\ \Phi_2(t_0) & \Phi_2(t_1) & \dots & \Phi_2(t_M) \end{pmatrix} x_a(t_k).$$

L'objectif consiste à calculer les dérivées successives de la sortie (c'est-à-dire, $\hat{Y}(t_k) = [z_0(t_k) \ z_1(t_k) \ z_2(t_k)]^T$), on pose $y_a(t_k) = \hat{Y}(t_k)$ le vecteur de sortie de cet estimateur. Il revient alors la représentation d'état (3.14) décrite par les matrices (3.15). ■

3.5.2 Étude de stabilité du système discrétisé

Rappelons que l'implémentation de l'estimateur-contrôleur défini précédemment nécessite la discrétisation du système initial. Le modèle discrétisé du système LTI (3.11) aux instants t_k avec un pas d'échantillonnage T_h peut être mis sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x_m(t_{k+1}) = e^{A_m T_h} x_m(t_k) + \int_0^{T_h} e^{A_m s} ds B_m u(t_k) \\ y(t_k) = C_m x_m(t_k) \end{cases}, k \in \mathbb{N}.$$

En posant $A_d = e^{A_m T_h}$ et $B_d = \int_0^{T_h} e^{A_m s} ds B_m$, on aura :

$$\begin{cases} x_m(t_{k+1}) = A_d x_m(t_k) + B_d u(t_k) \\ y(t_k) = C_m x_m(t_k) \end{cases}, k \in \mathbb{N}. \quad (3.20)$$

La boucle fermée composée par ce système discrétisé et le dérivateur (3.14) avec (3.15) donné par la *Proposition 3.1* peut être représentée, avec l'état étendu $x_d(t_k) = [x_m(t_k) \ x_a(t_k) \ u(t_{k-1})]^T$, comme suit :

$$x_d(t_{k+1}) = \mathcal{A}_d x_d(t_k), \quad (3.21)$$

avec

$$\mathcal{A}_d = \begin{pmatrix} A_d - \frac{1}{\alpha} B_d (T_2 D_a + k_0 + T_1 k_1 D_a) C_m & -\frac{1}{\alpha} B_d (T_2 + T_1 k_1) C_a & B_d \\ B_a C_m & A_a & 0 \\ -\frac{1}{\alpha} (T_2 D_f - k_0 + T_1 k_1 D_a) C_m & -\frac{1}{\alpha} (T_2 C_f + T_1 k_1) C_a & 1 \end{pmatrix}$$

où $T_1 = [1 \ 0]$ et $T_2 = [0 \ 1]$.

La stabilité de ce système bouclé peut être vérifiée en appliquant le théorème suivant :

Theorème 3.1. *Le système bouclé (3.21) composé par le système LTI discrétisé (3.20) et la loi de contrôle avec le dérivateur numérique (3.14) de la Proposition (3.1) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice P symétrique et définie positive telle que :*

$$\mathcal{A}_d^T P \mathcal{A}_d - P < 0. \quad (3.22)$$

Preuve 3.1. [Boyd 94] *On considère la fonction candidate de Lyapunov $V(x_h) = x_h^T P x_h$ telle que $P = P^T > 0$. L'incrément de Lyapunov est :*

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(x_{h+1}) - V(x_h) \\ &= x_{h+1}^T P x_{h+1} - x_h^T P x_h \\ &= x_h^T (\mathcal{A}_d^T P \mathcal{A}_d - P) x_h \end{aligned}$$

Pour que $\Delta V < 0$, il suffit que la condition (3.22) soit vérifiée. ■

3.5.3 Exemple

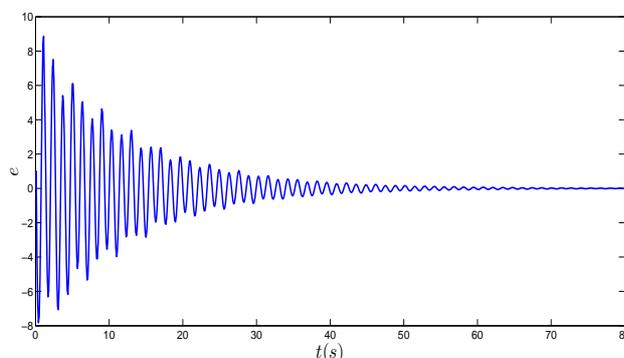
Soit un système SISO décrit par la représentation d'état (3.11) avec :

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -20 \end{pmatrix}, B_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } C_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La fenêtre glissante est divisée en $M = 10$ intervalles avec la fréquence $T_h = 0.1s$. La dynamique désirée admet un gain $K = [1 \ 2.2]$.

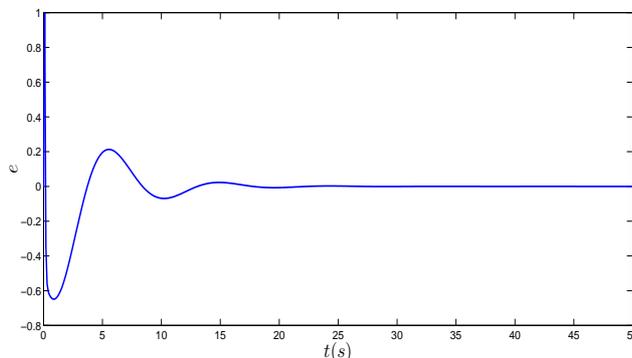
En appliquant le *Théorème 3.22*, une solution faisable est obtenue. Une simulation de ce système bouclé est illustrée dans la *Figure 3.5*.

Figure 3.5 Évolution de l'erreur de poursuite



Cependant, si on choisit pour ce même système de considérer une fenêtre glissante avec $M = 100$ points et un pas $T_h = 0.1s$. Dans ce cas des solutions non faisables sont obtenues pour les LMI. Par contraste, en simulation, le système converge (*Figure 3.6*).

Figure 3.6 Évolution de l'erreur de poursuite



Ce dernier résultat illustre le conservatisme des conditions LMI à considérer pour assurer la stabilité du système et l'existence d'un dilemme entre les performances

et la solvabilité du problème. Comme solution, on peut considérer d'autres lois de commande ou encore d'autres estimateurs. Ceci sera l'objectif du chapitre suivant.

3.6 Conclusion

Ce chapitre a eu pour objectif la conception d'un contrôleur basé sur le principe de la commande sans modèle développée par [Fliess et al. 2008], et ayant pour objectif d'annuler la dynamique du système initial et de la remplacer par celle désirée par la seule connaissance du comportement entrée/sortie du système. Le but principal était, donc, la conception d'une loi de contrôle décrite par l'expression (3.2). Ceci revient à choisir un "bon" estimateur pour l'estimation des dérivées de la sortie et la fonction structurelle. Un contrôleur-estimateur basé sur l'estimation des dérivées par des dérivateurs numériques caractérisés par leur comportement non-asymptotique était proposé. Ce contrôleur permet de se libérer de l'identification des paramètres ainsi que la caractérisation des bruits qui est souvent difficile à obtenir avec des processus réels. L'estimée s'exprime à l'aide d'intégrales itérées (filtres passe-bas) en utilisant des techniques particulières de calcul en temps réel des paramètres du régulateur. Ceci se réalise à l'aide des méthodes mathématiques basées sur le calcul opérationnel (transformée de Laplace).

Néanmoins, cette méthode (le couplage : une commande sans modèle et un estimateur algébrique non-asymptotique) peut présenter certaines limitations :

- Dans le cas particulier de notre étude des systèmes LPV où l'ordre du modèle local est maintenu égal à celui du système considéré, complexité de calcul pour des systèmes d'ordre élevé : plus ce dernier est élevé, plus cette méthode devient difficile à appliquer ;
- Le choix des paramètres de cet estimateur (temps d'échantillonnage, de la longueur de la fenêtre glissante, de l'ordre du développement de Taylor, ...) joue un rôle important dans l'amélioration de la qualité de l'estimation. La question du réglage de ces paramètres (souvent réalisé en simulation ou par essais) demeure ouverte [Liu 11].
- La preuve de la stabilité du système discrétisé reste limitée aux systèmes LTI. Cet aspect sera reconsidéré au chapitre suivant dédié à la commande robuste.
- Temps de calcul pouvant être élevé : ces estimations doivent être réalisées en ligne, et par la suite, elles dépendent de la qualité des capteurs et de la fréquence d'échantillonnage.

Le chapitre suivant présente une conception de contrôleur alternative en considérant une approche de dérivation basée sur des filtres (approche asymptotique).

Commande à Modèle Restreint : Approche Asymptotique

Les conclusions du chapitre précédent ne permettent pas, dans le cadre discrétisé, d'établir de méthode de réglage du correcteur ni de quantifier les effets des différents paramètres de la loi de commande sur la réponse en boucle fermée. Ceci étant principalement dû à la nature du dérivateur de la commande "sans modèles". On se propose ici d'étudier une autre version de cette loi où la dérivation des signaux sera réalisée à l'aide de filtres linéaires. Ainsi le principe même de cette loi de commande sera conservé i.e. estimer et annuler la dynamique du système, la différence résidant uniquement dans le choix du dérivateur.

Ce dérivateur, probablement moins performant, peut facilement être étudié par les outils issus du domaine des LPV. Ainsi, il sera possible d'appliquer tous les outils disponibles de la commande robuste, de conserver les paramètres variants du système (et donc de sortir du cas linéaire) et de travailler en temps continu. De plus pour une sous-classe de cette famille de systèmes, la preuve de l'existence systématique d'un contrôleur stabilisant et performant sera établie ainsi qu'une méthode de réglage directe i.e. sans résolution de conditions LMI nécessitant un solveur. La stabilité et les performances en boucle fermée seront étudiées grâce à la théorie de Lyapunov et l'étude du gain induit \mathcal{L}_2 .

Dans tout ce chapitre, on veillera à conserver au maximum l'aspect non linéaire du système afin d'obtenir les résultats les plus généraux possibles. Dans un premier temps, le modèle, la loi de commande et le dérivateur ainsi que la problématique seront décrits. Puis, dans la *Section 4.2*, une étude de la stabilité sera présentée pour le cas nominal ; c'est à dire pour le système non linéaire sans incertitudes ni échantillonnage. Un exemple pratique sera fourni afin de démontrer l'utilité d'une telle loi de commande. Dans un deuxième temps, une procédure visant à simplifier la synthèse du contrôleur sera donnée dans la *Section 4.3*. Cette procédure permettra

également de maîtriser les performances du système d'un point de vue respect du cahier des charges (données sous forme d'un modèle de référence).

4.1 Problématique

Le concept de commande "sans modèle" dont il est question est identique à celui présenté dans le chapitre précédent [Join 08a]. Le principe de cette loi de commande et ses propriétés sont rappelés ci-dessous.

Le modèle inconnu "complexe" mathématique (supposé être de dimension finie, linéaire ou non) décrivant le comportement entrée/sortie de ces systèmes par l'équation différentielle

$$E_d(y, \dot{y}, \dots, y^{(\nu)}, u) = 0, \quad (4.1)$$

est remplacé par un modèle ultra-local valable durant un court laps [Join 08a] :

$$y^{(n)} = F + \alpha u. \quad (4.2)$$

La loi de commande $u(t)$ se décompose en deux parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{u}_n(t) + \hat{u}_r(t) \\ &= -\frac{1}{\hat{\alpha}} \hat{F}(t) + \frac{1}{\hat{\alpha}} (-K \hat{Y}(t) + k_0 r(t)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

où

- $\hat{\alpha}$ représente une approximation du gain de l'entrée du système ;
- $\hat{F}(t)$ est une estimation de la dynamique du système en boucle ouverte ;
- $\hat{Y}(t) = [z_0(t) \ \dots \ z_{n-1}(t)]^T$ est un vecteur composé par les $z_i(t)$: les estimations des dérivées successives de la sortie du système $y^{(i)}(t)$;
- $K = [k_0, \dots, k_{n-1}]$ est un vecteur composé par les coefficients k_i de la dynamique désirée $y_r(t)$ du système bouclé, proposée par le cahier des charges et donnée par :

$$y_r^{(n)}(t) = -k_0 y_r(t) - \dots - k_{n-1} y_r^{(n-1)}(t) + k_0 r(t); \quad (4.4)$$

- $r(t)$ est la référence.

Afin de pouvoir modéliser la boucle fermée sous forme polytopique, on adoptera une dérivation basée sur les filtres continus.

$$\begin{cases} \frac{z_0(s)}{y(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \\ \frac{z_i(s)}{y(s)} = \left(\frac{s}{\tau s + 1} \right)^i \quad \forall i = 1 \dots n - 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

Cet estimateur est causal et assure une bonne estimation si et seulement si le paramètre τ est suffisamment petit devant la dynamique du système. Il fournit donc les estimations $z_i(t)$ de $y^{(i)}(t)$ pour tout $i \in \{1..n - 1\}$ où n représente l'ordre du système.

Les questions que l'on peut alors se poser sont : Comment régler le paramètre τ afin de garantir la stabilité et le respect du cahier des charges ? Est-il possible d'obtenir une méthode de réglage simple pour ce type de loi de commande ? La boucle fermée ainsi obtenue sera-t-elle sensible vis-a-vis des paramètres de réglage ? Quelles-sont les limitations de cette loi de commande ?

4.2 Stabilité du Cas Nominal

On considère les systèmes sous forme LPV décrits par :

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) &= A_m(t)x_m(t) + B_mu(t) \\ y(t) &= C_mx_m(t) \end{cases}, \quad (4.6)$$

où $x_m(t) \in \mathbb{R}^\nu$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}$ est le vecteur d'entrée et $y(t) \in \mathbb{R}$ est le vecteur de sortie. $A_m(t) \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu}$, $B_m \in \mathbb{R}^{\nu \times 1}$ et $C_m \in \mathbb{R}^{1 \times \nu}$ sont des matrices connues qui représentent respectivement les matrices d'état, d'entrée et de mesure. La matrice d'état $A_m(t)$ est supposée à paramètres variables non mesurables et bornés dans le temps.

4.2.1 Analyse de Stabilité

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'utilité de cette loi de commande lorsque le modèle est connu. Cette section propose des conditions de stabilité pour les systèmes bouclés par cette loi de commande ainsi que l'application sur un banc d'essai moteur.

Conception du contrôleur/dérivateur

Étant donné que la loi de commande (4.3) ne considère que les valeurs estimées de la fonction structurelle $F(t)$ et des dérivées successives de la sortie, une bonne estimation de ces valeurs est nécessaire.

Pour l'estimation de la fonction $F(t)$, elle peut être effectuée en inversant la dynamique de l'équation (4.2) comme suit :

$$\hat{F}(t) = z_n(t) - \hat{\alpha}\hat{u}(t) \quad (4.7)$$

avec

$$\frac{\hat{u}(s)}{u(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (4.8)$$

et $z_n(t)$ est l'estimation de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la sortie (c'est-à-dire de $y^{(n)}(t)$) qui peut être déterminée en considérant la proposition ci-dessous.

Proposition 4.1. [Maal 13] Soit le filtre décrit par le système (4.5). L'estimation de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la sortie $y(t)$ peut être exprimée par :

$$z_n(t) = \frac{1}{\tau^n} y(t) - \frac{1}{\tau^n} x_{e_1}(t) - \frac{1}{\tau^{n-1}} x_{e_2}(t) - \dots - \frac{1}{\tau} x_{e_n}(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (4.9)$$

où $x_{e_i}(t) = \int z_i(t) dt$, $i \in \{1..n\}$.

Démonstration 4.1. [Maal 13] Soit le filtre décrit par le système (4.5) et considérons le raisonnement par récurrence. Pour $n = 1$, on a :

$$\frac{z_1(s)}{y(s)} = \frac{s}{\tau s + 1} \Rightarrow y(s)s = \tau s z_1(s) + z_1(s).$$

En multipliant l'expression précédente par $1/s$ et en retournant au domaine temporel, on obtient :

$$z_1(t) = \frac{1}{\tau} (y(t) - x_{e_1}(t)).$$

L'équation (4.9) est alors vérifiée pour $n = 1$. Ensuite, d'après l'expression (4.5) et pour $i = n + 1$, on a :

$$\frac{z_{n+1}}{y} = \left(\frac{s}{\tau s + 1} \right)^{n+1} = \frac{s}{\tau s + 1} \left(\frac{s}{\tau s + 1} \right)^n.$$

Comme $\frac{z_{n+1}}{y} = \frac{z_{n+1}}{z_n} \frac{z_n}{y}$, alors :

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{s}{\tau s + 1} \Rightarrow s z_n(s) = \tau s z_{n+1}(s) + z_{n+1}(s).$$

L'application de la transformée inverse de Laplace pour des conditions initiales nulles donne :

$$z_{n+1}(t) = \frac{1}{\tau} z_n(t) - \frac{1}{\tau} x_{e_{n+1}}(t).$$

Finalement, en remplaçant le vecteur $z_n(t)$ par son expression (4.9), on obtient :

$$z_{n+1}(t) = \frac{1}{\tau^{n+1}} y(t) - \frac{1}{\tau^{n+1}} x_{e_1}(t) - \frac{1}{\tau^n} x_{e_2}(t) - \dots - \frac{1}{\tau^{n+1}} x_{e_{n+1}}(t).$$

On peut donc affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, la Proposition 4.1 est vérifiée. ■

D'après cette proposition, l'estimateur (4.5) peut être alors représenté dans l'espace d'état en admettant comme état $x_e(t) = [x_{e_1}(t) \quad \dots \quad x_{e_n}(t) \quad \hat{u}(t)]^T$ où $x_{e_i}(t) = \int z_i(t) dt$, $\forall i \in \{1..n\}$, par :

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) = A_e x_e(t) + B_{ey} y(t) + B_{eu} u(t) \\ \dot{Y}(t) = C_{eyx} x_e(t) + C_{eyy} y(t) \\ \hat{u}(t) = C_{eu} x_e(t) \end{cases} \quad (4.10)$$

où u est défini par (4.3),

$$A_e = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\tau^2} & -\frac{1}{\tau} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\tau^3} & -\frac{1}{\tau^2} & -\frac{1}{\tau} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{\tau^{n-1}} & -\frac{1}{\tau^{n-2}} & \dots & \dots & -\frac{1}{\tau} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\tau^n} & -\frac{1}{\tau^{n-1}} & \dots & \dots & \dots & -\frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}, \quad B_{ey} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau^2} \\ \dots \\ \frac{1}{\tau^n} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{eu} = \begin{pmatrix} 0_{(1 \times n)} \\ \frac{1}{\tau} \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

$$C_{eyx} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{(1 \times n)} \\ A_{e((1:n-1) \times (1:n))} & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{eyy} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{ey(1:n-1)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_{eu}^T = \begin{pmatrix} 0_{(1 \times n)} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'estimation de la dynamique $F(t)$ peut être ainsi modélisée par :

$$\hat{F}(t) = C_{fx}x_e(t) + C_{fy}y(t), \quad (4.12)$$

où

$$C_{fx} = \left(-\frac{1}{\tau^n} \quad -\frac{1}{\tau^{n-1}} \quad \dots \quad -\frac{1}{\tau} \quad -\hat{\alpha} \right) \quad \text{et} \quad C_{fy} = \frac{1}{\tau^n}. \quad (4.13)$$

Le correcteur complet composé par l'estimateur/dérivateur (4.10) avec (4.11) et la loi de contrôle (4.3) avec (4.12), est illustré par la proposition ci-dessous.

Proposition 4.2. [Maal 13] *La représentation d'état du contrôleur et son dérivateur peut être donnée par :*

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) &= A_o x_e(t) + B_{o1} y(t) + B_{o2} r(t) \\ u(t) &= C_o x_e(t) + D_{o1} y(t) + D_{o2} r(t) \end{cases} \quad (4.14)$$

avec $\dot{x}_e(t) = [z_1(t) \dots z_n(t) \hat{u}(t)]^T$ et les matrices :

$$\begin{aligned} A_o &= A_e - \frac{B_{eu}}{\hat{\alpha}} (C_{fx} + K C_{eyx}) \\ B_{o1} &= B_{ey} - \frac{B_{eu}}{\hat{\alpha}} (C_{fy} + K C_{eyy}) \\ B_{o2} &= \frac{B_{eu}}{\hat{\alpha}} k_0 \\ C_o &= -\frac{1}{\hat{\alpha}} (C_{fx} + K C_{eyx}) \\ D_{o1} &= -\frac{1}{\hat{\alpha}} (C_{fy} + K C_{eyy}) \\ D_{o2} &= \frac{k_0}{\hat{\alpha}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

où les différentes matrices sont définies dans (4.11) et (4.13).

On peut noter que ce contrôleur ne dépend que du paramètre de dérivation τ .

Conditions de Stabilité

Soit la boucle fermée composée du système LPV (4.6) et de l'estimateur/dérivateur en *Proposition 4.2* avec l'état étendu $x(t) = [x_m(t) \ x_e(t)]^T$. La représentation étendue de cette boucle est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + Br(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (4.16)$$

avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_m(t) + B_m D_{o1} C_m & B_m C_o \\ B_{o1} C_m & A_o \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_m D_{o2} \\ B_{o2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C^T = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ C_m^T \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Puisque les paramètres de la matrice $A_m(t)$ sont bornés, elle peut être représentée sous la forme polytopique i.e.

$$\begin{aligned} A_m(t) \in \mathcal{P} &\Rightarrow A_m(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(t) A_{m_i}; \mu_i \in \Delta_\mu \\ &\Rightarrow A(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(t) A_i; \mu_i \in \Delta_\mu \end{aligned}$$

La représentation polytopique de ce système bouclé est alors :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\mu(t))x(t) + Br(t), \\ A(\mu(t)) &= \sum_{i=1}^N \mu_i(t) A_i, \quad \forall i, \mu_i(t) \geq 0, \\ &\sum_{i=1}^N \mu_i(t) = 1. \end{cases} \quad (4.18)$$

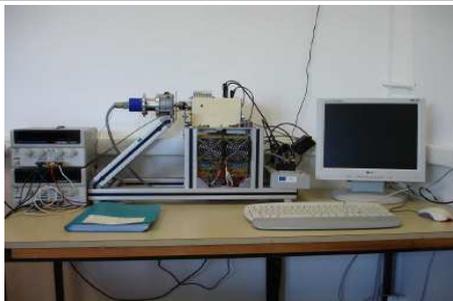
Le lecteur peut consulter la *Section 1.1.2* du *Chapitre 1* pour plus de détails sur cette représentation. On applique alors le théorème suivant pour l'étude de stabilité :

Theorème 4.1. *[Boyd 94] Le système autonome (4.16) (i.e. $r(t) = 0$) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice P symétrique et définie positive telle que :*

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad \forall i \in \{1..N\}. \quad (4.19)$$

4.2.2 Implémentation sur un Moteur Synchrone à Aimants Permanents (MSAP)

Cette section propose une illustration des résultats de ce chapitre sur un Moteur Synchrone à Aimants Permanents (MSAP), une plateforme expérimentale développée au Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal (LAGIS) de l'École Centrale de Lille (voir *Figure 4.1*). Une étude complète sur la robustesse du contrôleur est donnée dans [Maal 14].

Figure 4.1 Banc d'essai de moteur pas à pas, LAGIS/EC-Lille France

Le modèle le plus courant pour ce type de moteur s'exprime dans le repère tournant noté $(d - q)$ (pour plus de détails [Delp 12]) :

$$\begin{cases} L \frac{di_d}{dt} = v_d - Ri_d + n_p L w i_q \\ L \frac{di_q}{dt} = v_q - n_p L w i_d - Ri_q - K_c w \\ J \frac{dw}{dt} = K_c i_q - f_v w \\ \frac{d\theta}{dt} = w \end{cases} \quad (4.20)$$

où v_q et v_d représentent les tensions appliquées aux deux phases équivalentes du MSAP, i_d et i_q représentent les courants dans chacune des deux phases, L est l'inductance d'un enroulement, R est la résistance d'un enroulement, K_c est la constante du contre-FEM supposée égale à la constante de couple, w est la vitesse angulaire du rotor supposée bornée ($w(t) \in [\underline{w}, \bar{w}]$), θ est la position angulaire du rotor, n_p est le nombre de paires de pôles (ou le nombre de dents du rotor), J est le moment d'inertie du rotor et de la charge et f_v représente le coefficient de frottement visqueux.

Les paramètres ont été identifiés dans [Delp 12] et sont rappelés ici :

TABLE 4.1 – Paramètres du MSAP [Delp 12]

Paramètre	Valeur	Unité
L	10.2	mH
R	2.86	Ω
K_c	0.26	$N.m.A^{-1}$
w	$[-15 \ 15]$	$rads^{-1}$
n_p	50	-
J	$3.18.10^{-4}$	$kg.m^2$
f_v	$2.37.10^{-4}$	$N.m.S.rad^{-1}$

Mise en forme du modèle

Du point de vue contrôle, il est courant d'imposer $v_d = 0$ sur les MSAP. v_q sera donc la seule entrée de commande ($u = v_q$). On choisit comme sortie du système la position angulaire du rotor $\theta(t)$. La représentation d'état de ce moteur avec le vecteur d'état $x_m(t) = [i_d(t) \ i_q(t) \ w(t) \ \theta(t)]^T$ est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) &= A_m(w(t))x_m(t) + B_m u(t) \\ y(t) &= C_m x_m(t) \end{cases}, \quad (4.21)$$

$$A_m(w(t)) = \begin{pmatrix} -R/L & n_p w(t) & 0 & 0 \\ -n_p w(t) & -R/L & -K_c/L & 0 \\ 0 & K_c/J & -f_v/J & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_m^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Ce modèle sera utilisé lors des tests de stabilité (conditions LMI), tandis qu'un modèle plus simple sera utilisé pour la synthèse du correcteur. Comme les dynamiques des courants sont très rapides, on se propose d'utiliser un modèle ultra-local d'ordre deux ($n = 2$) :

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t) &= f(t) + \hat{\alpha} u(t) \\ \hat{\alpha} &= \hat{K}_c / (\hat{J} \hat{R}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

L'estimation du gain d'entrée $\hat{\alpha}$ a été déterminée en étudiant les points d'équilibre des équations des courants.

Le système bouclé formé par le MSAP représenté par (4.21) (modèle d'ordre 4) et le contrôleur (4.14) décrit en *Proposition 4.2*, peut être mis sous la forme d'espace d'état avec le vecteur d'état $x(t) = [x_m(t) \ x_c(t)]^T$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(w(t))x(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases},$$

avec

$$A(w(t)) = \begin{pmatrix} A_m(w(t)) + B_m D_{o_1} C_m & B_m C_o \\ B_{o_1} C_m & A_o \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_m D_{o_2} \\ B_{o_2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C^T = \begin{pmatrix} 0_{(1 \times 3)} \\ 1 \\ 0_{(1 \times 3)} \end{pmatrix},$$

où les différentes matrices sont définies dans (4.15).

La représentation polytopique de ce système bouclé est donnée par (4.18) où $N = 2$, avec $A_1 = A(\underline{w})$ et $A_2 = A(\bar{w})$.

Simulation du MSAP

L'analyse de stabilité de ce système peut être effectuée en adoptant la fonction quadratique de Lyapunov $V(x) = x^T P x$. Les conditions de stabilité sont données, sous forme d'ensemble de LMI à satisfaire par le *Théorème 4.1*.

Afin d'illustrer la robustesse de notre contrôleur, on étudie la stabilité du MSAP dont ses paramètres admettent des incertitudes variables dans le temps. On suppose que $\hat{\alpha} = K_c/(JR)$ où K_c , J et R prennent leurs valeurs nominales. La variation de la vitesse angulaire du rotor de ce moteur est spécifiée et donnée par $w(t) \in [-15 \ 15]$. On suppose pour ce cas que le MSAP admet la forme (4.21) où sa matrice d'état $A_m(t)$ est décrite par :

$$A_m(t) = \begin{pmatrix} -p_3(t) & n_p w(t) & 0 & 0 \\ -n_p w(t) & -p_3(t) & -p_4(t) & 0 \\ 0 & p_1(t) & -p_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où les différents paramètres admettent les incertitudes suivantes :

- $p_1(t) \in [0.9 * K_c/J \quad 1.2 * K_c/J]$ représente la variation de l'incertitude sur K_c/J ,
- $p_2(t) \in [0.9 * f_v/J \quad 1.2 * f_v/J]$ représente la variation de l'incertitude sur F_v/J ,
- $p_3(t) \in [R/L \quad 1.2 * R/L]$ représente la variation de l'incertitude sur R/L ,
- $p_4(t) \in [K_c/L \quad 1.02 * K_c/L]$ représente la variation de l'incertitude sur K_c/L .

Dans ce cas, la matrice $A_m(t)$ possède 5 paramètres indépendants et variables dans le temps ($w(t)$ et $p_i(t)$). Cette matrice étant bornée, le système bouclé peut être alors mis sous la forme convexe (4.18) avec $A(\mu(t)) \in \text{conv}(A_1, \dots, A_N)$ où $N = 2^5$ et les A_i sont les sommets formés par les bornes des $p_i(t)$ et $w(t)$.

Malgré ce nombre assez élevé des paramètres incertains, le MSAP est stabilisant par le contrôleur (4.14) de la *Proposition 4.2* avec $\tau = 0.01$ et $K = [100 \ 20]$ (une dynamique désirée en boucle fermée $\ddot{y}(t) = -100y(t) - 20\dot{y}(t) + 100r(t)$). En effet, en utilisant MatLab/SeDuMi [Stur 99] comme solveur et YALMIP [Lofb 04] comme parseur de MATLAB[®], des solutions sont obtenues pour les 2^5 conditions LMI du *Théorème 4.1*.

Néanmoins, il est à noter que les résultats obtenus par ce théorème ne sont pas optimaux. Comme solution, on peut considérer, par exemple, d'autres valeurs de τ et $\hat{\alpha}$ ou encore, proposer des fonctions de Lyapunov plus générales et complexes telles que celles considérées dans [Asem 11, Horn 11]. Dans ce cas, on aura peut être des incertitudes plus larges et plus intéressantes.

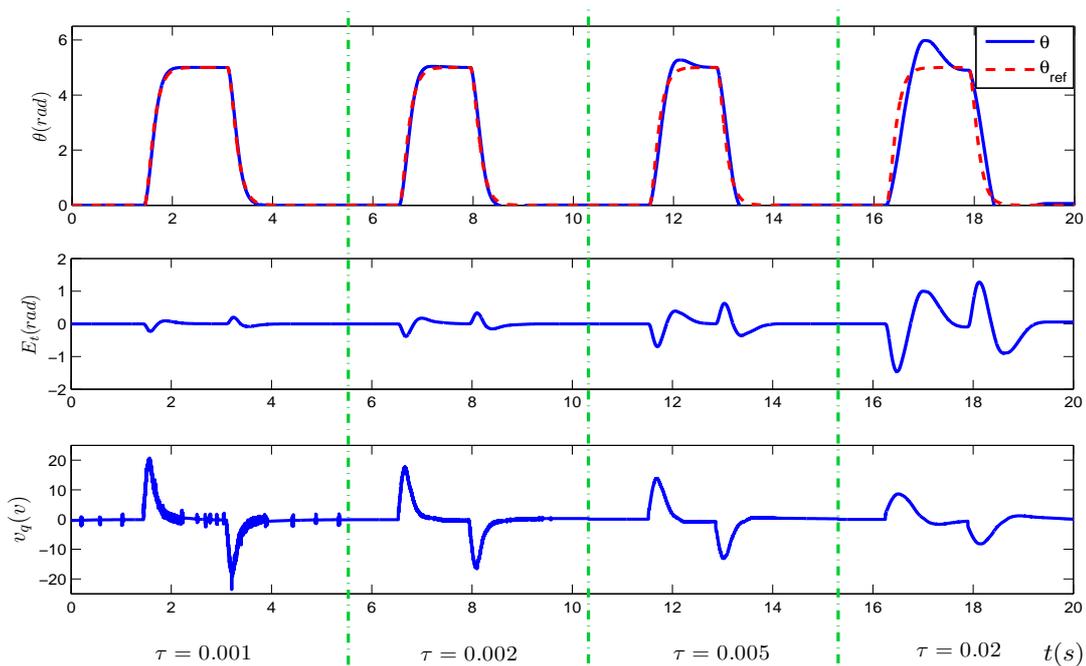
Essais Expérimentaux

La loi de commande est implémentée sur une carte de prototypage rapide de la société dSpace avec une période d'échantillonnage de $10^{-4}s$. On souhaite mettre en

évidence que, ainsi qu'énoncé dans le *Théorème 4.1*, la réponse en boucle fermée sera stable. Ces essais visent aussi l'étude de l'influence du paramètre τ du dérivateur sur les performances du système. Pour cela, les essais seront effectués dans les conditions suivantes :

- la vitesse angulaire du rotor $w(t) \in [-15 \ 15]$,
- la consigne envoyée au contrôleur est un signal carré alternant entre $\theta_{ref} = 0rad$ et $\theta_{ref} = 5rad$,
- on choisit comme dynamique désirée en boucle fermée : $\ddot{\theta}_{ref}(t) = -100\theta_{ref}(t) - 20\dot{\theta}_{ref}(t) + 100r(t)$ c'est-à-dire l'expression (4.4) avec $n = 2$, $K = [100 \ 20]$ et $y_r(t) = \theta_{ref}(t)$.

Figure 4.2 Résultat expérimental sur le MSAP illustrant l'évolution de la sortie $\theta(t)$, la dynamique désirée $\theta_{ref}(t)$, l'erreur d'estimation $E_t = \theta - \theta_{ref}$ et le signal de commande v_q pour un gain désiré constant $K = [100 \ 20]$ et pour différentes valeurs du paramètre du contrôleur τ



Les réponses du moteur pour $\tau \in \{0.001, 0.002, 0.005, 0.02\}$ sont illustrées en *Figure 4.2*. On note que les réponses sont conformes à ce que la théorie avait prévue

de point de vue stabilité. Elles présentent même de bonnes propriétés telles que le suivi de consigne et la dynamique obtenue. Il existe cependant une différence de qualité du point de vue du suivi du cahier des charges (réponse idéale représentée par le signal $\theta_{ref}(t)$). Plus la valeur de τ est petite, plus la réponse est proche de la réponse idéale. Par contre pour des valeurs de τ trop faible, les bruits de mesures apparaissent sur le signal de commande $v_q(t)$. Ceci est sûrement lié à la fréquence de coupure des filtres qui s'effectue à de plus grandes valeurs. Il faut également noter que pour des valeurs extrêmes de τ le système devient instable (non représenté sur la figure).

Cette loi de commande semble être efficace pour le réglage de ce système dans le sens où elle ne nécessite pas de réglage très complexes : une fois la dynamique souhaitée fixée, il ne reste plus qu'à déterminer la valeur de τ assurant la stabilité et un bon suivi. Cependant la preuve de stabilité nécessite la connaissance du modèle et de ses paramètres.

4.3 Synthèse de contrôleur avec connaissances limitées

Les expériences menées sur le moteur pas-à-pas soulèvent plusieurs questions : Ce correcteur permet-il d'assurer la précision pour tous les systèmes ? Comment choisir la valeur de τ pour assurer la stabilité et le respect du cahier des charges ? Ce chapitre va tenter de répondre à ces questions de la façon la plus générale possible tout en proposant des méthodes de réglage simples à appliquer.

Les lois de commande de type "commande sans modèles" étant sensibles à la présence de zéros invariants [Flie 13], la suite se focalise sur les modèles non linéaires sous la forme :

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &= -a_0(t)y(t) - \dots - a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \alpha u(t), \\ |a_i(t)| &< \bar{a}_i \quad \forall i = 0..n-1 \end{aligned} \quad (4.24)$$

où $y(t) \in \mathbb{R}$ est la sortie du système, $u(t) \in \mathbb{R}$ est la commande, α est le gain d'entrée et les variables $a_i \in \mathbb{R}$ sont des paramètres inconnus, variables dans le temps ou fonction de variables d'état dont leur valeur absolue est bornée par \bar{a}_i , $\forall i = 0..n-1$.

En choisissant comme vecteur d'état $x_m(t) = [y(t) \quad \dots \quad y^{(n-1)}(t)]^T$, la représentation dans l'espace d'état de la dynamique de ce système est donnée par (4.6)

avec $\nu = n$ et les matrices

$$A_m(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}, B_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ et } C_m^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

On rappelle également les équations du correcteur :

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) = A_o(\tau_x)x_e(t) + B_{o_1}(\tau_x)y(t) + B_{o_2}(\tau_x)r(t) \\ u(t) = C_o(\tau_x)x_e(t) + D_{o_1}(\tau_x)y(t) + D_{o_2}(\tau_x)r(t) \end{cases} \quad (4.26)$$

où les matrices sont données par (4.15).

4.3.1 Analyse de Stabilité

Cette partie s'intéresse à la stabilité du système (4.24) lorsqu'il est contrôlé par (4.26). Le premier théorème met en évidence le caractère général du correcteur en affirmant que si un système sous la forme (4.24) et d'ordre n est stabilisé par la loi de commande (4.26) alors pour tous les systèmes (4.24) du même ordre il existe un correcteur stabilisant de la forme (4.26). De plus, ce théorème est constructif puisqu'il permet également de calculer les paramètres de ces correcteurs.

Theorème 4.2. *Si la boucle fermée formée par le système*

$$y^{(n)}(t) = -a_0(t)y(t) - \dots - a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \alpha u(t) \quad (4.27)$$

et le contrôleur/estimateur

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) = A_o(\tau_x)x_e(t) + B_{o_1}(\tau_x)y(t) + B_{o_2}(\tau_x)r(t) \\ u(t) = C_o(\tau_x)x_e(t) + D_{o_1}(\tau_x)y(t) + D_{o_2}(\tau_x)r(t) \end{cases} \quad (4.28)$$

où les différentes matrices sont données par (4.15), est asymptotiquement stable pour toutes fonctions continues et bornées

$$a_i(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto [-\bar{a}_i, \bar{a}_i], \quad i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad (4.29)$$

alors, la boucle fermée formée par le système

$$z^{(n)}(t) = -b_0(t)z(t) - \dots - b_{n-1}(t)z^{(n-1)}(t) + \beta v(t) \quad (4.30)$$

et le contrôleur/estimateur

$$\begin{cases} \dot{z}_e(t) = A_o(\tau_z)z_e(t) + B_{o_1}(\tau_z)z(t) + B_{o_2}(\tau_z)w(t) \\ v(t) = C_o(\tau_z)z_e(t) + D_{o_1}(\tau_z)z(t) + D_{o_2}(\tau_z)w(t) \end{cases} \quad (4.31)$$

tels que

$$\begin{aligned}
A_o(\tau_z) &= \gamma T_1 A_o(\tau_x) T_1^{-1} \\
B_{o_1}(\tau_z) &= \gamma T_2 B_{o_1}(\tau_x) \\
B_{o_2}(\tau_z) &= \gamma T_2 B_{o_2}(\tau_x) \\
C_o(\tau_z) &= C_o(\tau_x) T_1^{-1} \\
D_{o_1}(\tau_z) &= D_{o_1}(\tau_x) \\
D_{o_2}(\tau_z) &= D_{o_2}(\tau_x)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

avec

$$\begin{aligned}
\gamma &= \tau_x / \tau_z \\
T_1 &= \text{diag}(1, \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{n-1}) \\
T_2 &= \text{diag}(1, \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{n-1}, 1)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

est asymptotiquement stable pour toute fonction continue et bornée

$$b_i(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto [-\gamma^{n-i} \bar{a}_i, \gamma^{n-i} \bar{a}_i], \quad i \in \{0, \dots, n-1\}, \tag{4.34}$$

avec $K_z = \gamma^n K T_1^{-1}$.

Preuve 4.1. Supposons que la boucle fermée formée par le système SISO décrit par l'équation différentielle (4.27) et le contrôleur/dérivateur (4.28) soit stable. Sa représentation dans l'espace d'état est :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_m(t) \\ x_e(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_m(t) + B_m D_{o_1}(\tau_x) C_m & B_m C_o(\tau_x) \\ B_{o_1}(\tau_x) C_m & A_o(\tau_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_m(t) \\ x_e(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_m D_{o_2}(\tau_x) \\ B_{o_2}(\tau_x) \end{pmatrix} r(t) \\
\frac{d}{dt} X(t) &= \mathcal{A}(t, \tau_x) X(t) + \mathcal{B}(\tau_x) r(t)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

avec les matrices (4.15).

On considère le changement de variables : $w(t) = r(\gamma t)$ où $\gamma \in \mathcal{R}_+^*$ et $Z(t) = QX(\gamma t)$, tels que $Q = \text{diag}(T_1, T_2)$, $T_1 = \text{diag}(1, \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{n-1})$ et $T_2 = \text{diag}(1, \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{n-1}, 1)$. Dans ce cas, le système bouclé (4.35) devient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} Z(t) &= \frac{d}{dt} (QX(\gamma t)) = Q \frac{d}{dt} (X(\gamma t)) = Q \gamma \frac{dX}{dt}(\gamma t) \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} Z(t) &= Q \gamma (\mathcal{A}(\gamma t, \tau_x) X(\gamma t) + \mathcal{B}(\tau_x) r(\gamma t)) \\
&= Q \gamma \mathcal{A}(\gamma t, \tau_x) Q^{-1} Z(t) + \gamma Q \mathcal{B}(\tau_x) w(t) \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} Z(t) &= \gamma \begin{pmatrix} T_1 (A_m(t) + B_m D_{o_1}(\tau_x) C_m) T_1^{-1} & T_1 B_m C_o(\tau_x) T_2^{-1} \\ T_2 B_{o_1}(\tau_x) C_m T_1^{-1} & T_2 A_o(\tau_x) T_2^{-1} \end{pmatrix} Z(t) + \gamma \begin{pmatrix} T_1 B_m D_{o_2}(\tau_x) \\ T_2 B_{o_2}(\tau_x) \end{pmatrix} w(t).
\end{aligned}$$

Le changement de variable employé étant linéaire, cette dernière équation est asymptotiquement stable pour toute fonction continue et bornée (4.29), ce qui signifie que le système

$$\begin{aligned}
z^{(n)}(t) &= -\gamma^n a_0(t) z(t) - \dots - \gamma a_{n-1}(t) z^{(n-1)}(t) + \beta v(t), \\
|a_i(t)| &\leq \bar{a}_i, \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\}
\end{aligned}$$

est stabilisé par le contrôleur/dérivateur (4.31) avec les matrices (4.32). Finalement, en considérant le changement de variables $b_i = \gamma^{n-i}a_i$, on peut affirmer que ce système est stable en boucle fermée pour toute fonction continue (4.34). ■

Exemple de méthode de réglage

On se propose d'utiliser ce résultat afin de proposer une méthode de réglage pour les systèmes du second ordre. La méthode est facilement généralisable aux systèmes d'ordre plus élevé.

Soit un système de second ordre à paramètres variables dans le temps sous la forme (4.24) donnée par :

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t) &= -a_0(t)y(t) - a_1(t)\dot{y}(t) + \alpha u(t), \\ |a_i(t)| &< \bar{a}_i \quad \forall i = 0, 1. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ce système peut être réécrit sous la forme polytopique

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} A_m(t) + B_m D_{o_1} C_m & B_m C_o \\ B_{o_1} C_m & A_o \end{pmatrix} x(t) + B r(t),$$

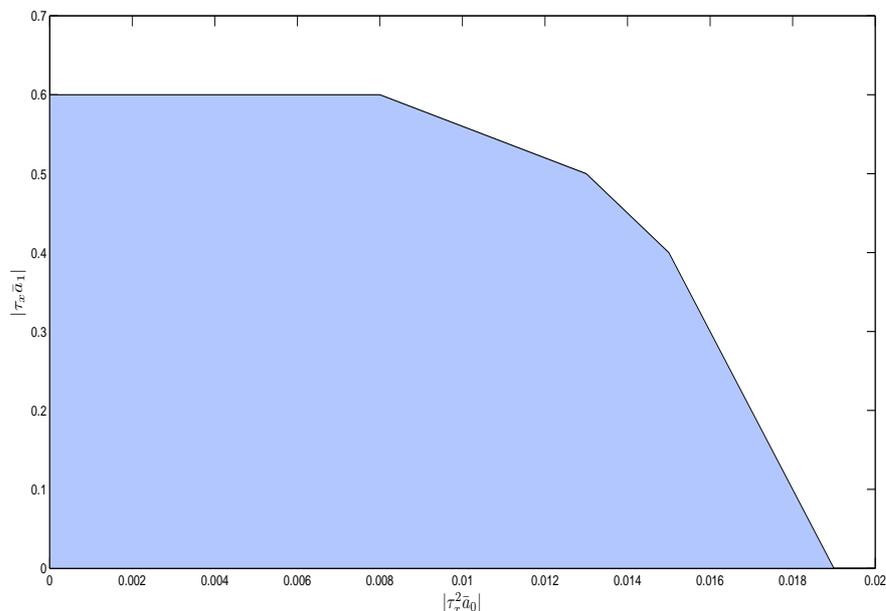
avec $A_m(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(t) A_{m_i}$; $\mu_i \in \Delta_\mu$, $N = 4$ et les matrices :

$$\begin{aligned} A_{m_1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\bar{a}_0 & -\bar{a}_1 \end{pmatrix}, & A_{m_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\bar{a}_0 & +\bar{a}_1 \end{pmatrix} \\ A_{m_3} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +\bar{a}_0 & -\bar{a}_1 \end{pmatrix}, & A_{m_4} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +\bar{a}_0 & +\bar{a}_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La *Figure 4.3* présente le domaine de stabilité de ce système dans le repère $(\tau_x^2 \bar{a}_0, \tau_x \bar{a}_1)$. Ce domaine a été calculé numériquement en utilisant le *Théorème 4.1* avec les paramètres suivants :

- une référence nulle : $r(t) = 0$;
- $K_x = [10^{-4} \ 2.210^{-2}]$, c'est-à-dire, pour une dynamique souhaitée vérifiant :
 $y_r^{(2)} = -10^{(-4)}y_r - 2.210^{-2}\dot{y}_r$;
- $\tau_x = 0.01$;
- en considérant $\hat{\alpha} = \alpha$ et donc sans perte de généralité $\alpha = 1$.

Figure 4.3 Domaine de stabilité du système (4.36) avec $\tau_x = 0.01$, $\alpha = 1$ et $K_x = [10^{-4} \ 2.210^{-2}]$



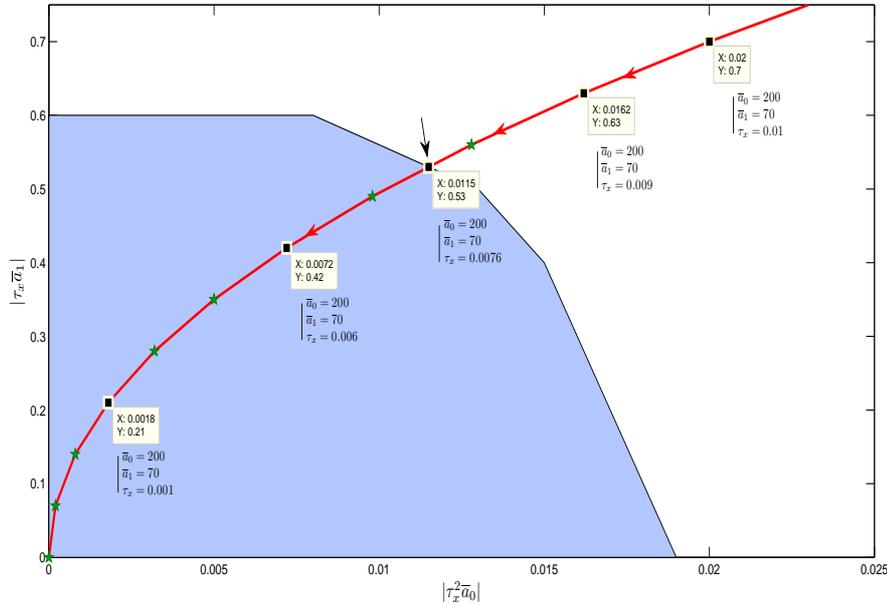
A partir de cette figure, il est possible de déterminer une valeur du paramètre τ assurant la stabilité de n'importe quel système de la forme (4.36). Prenons par exemple le système suivant :

$$z^{(2)}(t) = -b_0(t)z(t) - b_1(t)\dot{z}(t) + \beta v(t) \quad (4.37)$$

avec $b_0 \in [-200, 200]$ et $b_1 \in [-70, 70]$.

En sélectionnant différentes valeurs de τ pour le contrôleur, il est possible de déplacer le couple $(\tau_z^2 b_0, \tau_z b_1)$ afin qu'il se situe dans la zone de stabilité de la boucle fermée. Ainsi sur la *Figure 4.4*, on peut voir qu'une valeur de $\tau_z = 0.006$ place la boucle fermée dans la zone stable. Ceci implique de part le *Théorème 4.2* que le correcteur (4.31) paramétré avec (4.32) et (4.33) où $\gamma = \tau_x/\tau_z = 0.01/0.006$ stabilise le système. Il faut également noter que l'utilisation du *Théorème 4.2* modifie la rapidité de la dynamique souhaitée (la forme de la réponse sera la même) qui sera alors donnée par l'équation différentielle : $z_r^{(2)} = -2.810^{-4}z_r - 0.0374\dot{z}$. Néanmoins, ce théorème ne permet pas de prévoir la qualité du suivi de la dynamique désirée.

Figure 4.4 Domaine de stabilité du système de second ordre de l'équation différentielle (4.36) avec $\tau_x = 0.01$, $\alpha = 1$ et $K_x = [10^{-4} \ 2.210^{-2}]$



Pour tout système de second ordre décrit par l'équation différentielle (4.36) avec paramètres bornés, il existe une valeur de γ permettant l'obtention d'une boucle fermée stable. Le contrôleur stabilisant sera obtenu à partir du *Théorème 4.2*. La proposition suivante étend ce résultat à des systèmes d'ordre différents.

Proposition 4.3. *Pour tous les systèmes linéaires SISO à paramètres variables dans le temps bornés décrits par l'équation différentielle (4.24) avec $n \in \{1, 2, 3\}$ telle que $|a_i(t)| \leq a \ \forall i \in \{0, 1, 2\}$, il existe un contrôleur stabilisant. Ce correcteur est obtenu en déterminant le réel τ vérifiant :*

$$\tau^{n-i} * a < \sigma(n) \quad \forall i = 0..n - 1. \quad (4.38)$$

avec $\sigma(n)$ donné en *Table 4.2* ainsi que la dynamique désirée.

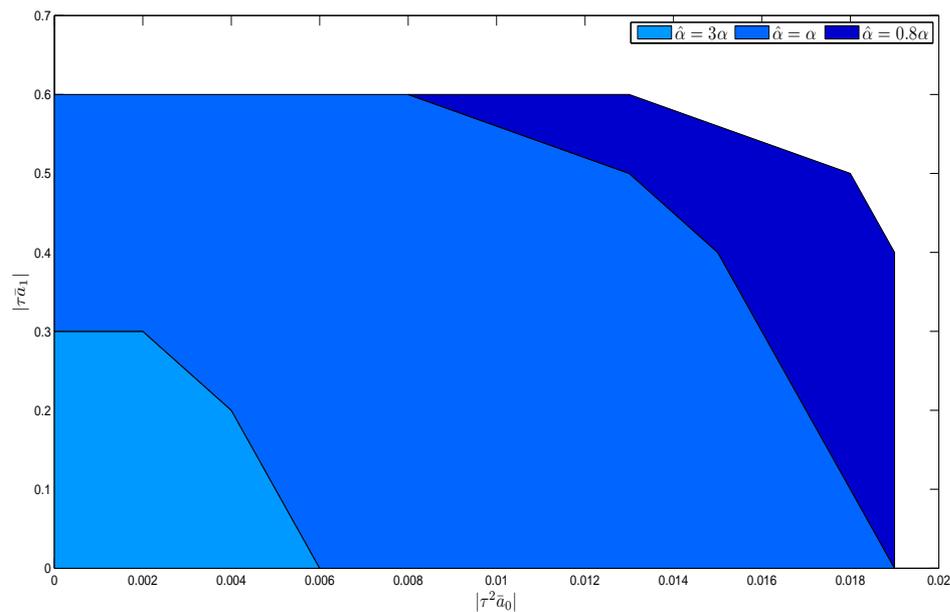
Ordre	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$\sigma(n)$	0.9	10^{-2}	10^{-6}
K	$0.0022/\tau$	$[10^{-4}/\tau^2 \ 0.022/\tau]$	$10^{-2}[10^{-4}/\tau^3 \ 0.03/\tau^2 \ 3/\tau]$

Preuve 4.2. *La preuve de cette proposition découle du calcul numérique des domaines de stabilité de systèmes de chaque ordre et de l'utilisation du *Théorème (4.2)*, pour $n \in \{1, 2, 3\}$.*

Remarque 4.1. *Puisque la stabilité est conservée lorsque le paramètre τ diminue, il est possible d'accélérer la réponse de la dynamique désirée sans altérer la stabilité. Si la forme de la réponse n'est pas satisfaisante, il faut tracer le domaine de stabilité lié à cette nouvelle dynamique comme c'était le cas dans l'exemple (Figure 4.3).*

On note que finalement seuls l'ordre du système et la valeur du gain d'entrée α sont importants puisqu'il existera toujours une valeur de τ permettant de stabiliser le système. On peut alors se poser la question de la robustesse de ce type d'algorithme vis-à-vis du paramètre α . La figure 4.5 illustre les différents domaines de stabilité lorsque ce paramètre est mal estimé (de -20% à +200%). Cette figure a été obtenue en appliquant le théorème de stabilité des système polytopiques avec $\hat{\alpha}/\alpha \in \{3, 1, 0.8\}$

Figure 4.5 Domaine de stabilité du système de second ordre de l'équation différentielle (4.36) avec $\tau = 0.01$ et $K = [10^{-4} \ 2.210^{-2}]$ pour différentes approximations du gain d'entrée α



Encore une fois, une valeur suffisamment petite de τ permet de compenser l'incertitude sur le gain d'entrée α .

4.3.2 Analyse de précision

Après avoir étudié les propriétés de stabilité de la boucle fermée, on examine ici les conditions pour lesquelles le correcteur proposé assure la précision en régime

permanent. Contrairement à l'approche [Join 08a], la loi de commande de ce chapitre ne comporte pas explicitement d'intégrateur. Le théorème suivant apporte une réponse à cette problématique.

Theorème 4.3. *Supposons que le système (4.24) n'admette qu'un seul point d'équilibre et aucun cycle limite. Le contrôleur (4.14) de la Proposition (4.2) assure une erreur nulle entre la consigne $r(t)$ et la sortie $y(t)$ en régime permanent pour ce système, si le paramètre $a_0(t)$ et le signal de référence $r(t)$ sont constants au cours du temps.*

Preuve 4.3. *Sans perte de généralité, on étudiera la précision du système pour $\tau = 1$. Le système bouclé avec l'état étendu $x = [x_m \ x_e]^T$ est décrit par la représentation d'état suivante :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + Br(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

où

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_m(t) + B_m D_{o_1} C_m & B_m C_o \\ B_{o_1} C_m & A_o \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_m D_{o_2} \\ B_{o_2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C^T = \begin{pmatrix} 0_{(1 \times (2n-1))} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

À l'équilibre, on a $\dot{x} = 0$; ce qui implique :

$$\dot{x}_m = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1..n\}, \quad \frac{d^{(i)}y(t)}{dt^{(i)}} = 0 \quad (4.39)$$

$$\dot{x}_e = 0 \Rightarrow \begin{cases} \hat{u}(t) &= 0 \\ \dot{x}_{e_i}(t) &= z_i(t) = \frac{d^{(i)}\hat{y}(t)}{dt^{(i)}} = 0 \quad \forall i \in \{1..n\} \end{cases} \quad (4.40)$$

Par la suite, on obtient :

$$A_m(t)x_m(t) + B_m D_{o_1} C_m x_m(t) + B_m C_o x_e + B_m D_{o_2} r(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\alpha} B_m a_0(t) y(t) - \frac{1}{\alpha} B_m (1 + k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1}) y(t) + \frac{1}{\alpha} B_m (1 + k_0 + k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1}) \hat{y}(t) + B_m \hat{u}(t) + \frac{1}{\alpha} B_m k_0 r(t) = 0 \quad (4.41)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\alpha} B_m a_0(t) y(t) + B_m \hat{u}(t) + \frac{1}{\alpha} B_m k_0 (r(t) - z_0(t)) + \frac{1}{\alpha} B_m (1 + k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1}) (z_0(t) - y(t)) = 0.$$

De même :

$$\begin{aligned}
& B_{o_1} C_m x_m(t) + A_o x_e(t) + B_{o_2} r(t) = 0 \\
\Leftrightarrow & (B_{ey} - \frac{B_{eu}}{\hat{\alpha}} (C_{fy} + K C_{eyy})) y(t) + \\
& (A_e - \frac{B_{eu}}{\hat{\alpha}} (C_{fx} + K C_{eyx})) x_e(t) + \frac{B_{eu}}{\hat{\alpha}} k_0 r(t) = 0 \\
\Leftrightarrow & (B_{ey} - \frac{B_{eu}}{\hat{\alpha}} (C_{fy} + K C_{eyy})) y(t) + \\
& (-B_{ey} + \frac{B_{eu}}{\hat{\alpha}} C_{fy} + \frac{B_{eu}}{\hat{\alpha}} (K C_{eyy} - k_0)) z_0(t) + \frac{B_{eu}}{\hat{\alpha}} k_0 r(t) = 0 \\
\Leftrightarrow & (B_{ey} - \frac{B_{eu}}{\hat{\alpha}} (C_{fy} + K C_{eyy})) (y(t) - z_0(t)) + \frac{B_{eu}}{\hat{\alpha}} k_0 (r(t) - z_0(t)) = 0.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

D'autre part, compte tenu que le filtre utilisé (4.5) est à gain statique unitaire, alors on obtient à l'équilibre : $y(t) = z_0(t)$. Dans ce cas, les expressions (4.41) et (4.42) deviennent :

$$-\frac{1}{\alpha} B_m a_0(t) y(t) + B_m \hat{u}(t) + \frac{1}{\hat{\alpha}} B_m k_0 (r(t) - z_0(t)) = 0,$$

$$\frac{B_{eu}}{\hat{\alpha}} k_0 (r(t) - z_0(t)) = 0.$$

Soit $k_0 \neq 0$ afin d'assurer le suivi de la trajectoire désirée $r(t)$ c'est-à-dire : $k_0 r(t) \neq 0$ et $r(t) - z_0(t) = 0$. Dans ce cas, on aura :

$$\begin{cases} -\frac{1}{\alpha} B_m a_0(t) y(t) + B_m \hat{u}(t) = 0 \\ r(t) = z_0(t) \end{cases}$$

Ensuite, en dérivant ces égalités par rapport au temps, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -\frac{1}{\alpha} \dot{a}_0(t) y(t) - \frac{1}{\alpha} a_0(t) \dot{y}(t) + \dot{\hat{u}}(t) = 0 \\ \dot{r}(t) = \dot{z}_0(t) \end{cases},$$

et en considérant les conditions (4.39) et (4.40), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{a}_0(t) = 0 \\ \dot{r}(t) = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, afin de satisfaire ces dernières égalités, il suffit que $a_0(t)$ et $r(t)$ soient constantes au cours de temps. ■

Remarque 4.2. Dans le cas où les paramètres du système sont variables en fonction d'un vecteur de paramètres inconnus ξ (c'est-à-dire $A_m(\xi)$), le théorème précédent reste valable à condition que la dérivée de ce vecteur par rapport au temps soit nulle : $\dot{\xi} = 0$.

4.3.3 Analyse de Performances

Comme cela a été souligné dans la première partie de ce chapitre, la qualité du suivi de la dynamique désirée varie en fonction du paramètre de réglage τ . Ce paragraphe cherche à quantifier cette qualité de suivi et du paramétrage du correcteur pour garantir certaines performances. Pour ce faire, on choisit d'étudier le gain induit $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$ existant entre le signal de référence $r(t)$ et l'erreur $e_p(t)$ entre le signal de sortie du système $y(t)$ et la sortie idéale $y_r(t)$. On cherche donc la plus petite borne supérieure Γ au critère J :

$$J = \sup_{r \in \mathcal{L}_2} \frac{\|e_p\|_{\mathcal{L}_2}}{\|r\|_{\mathcal{L}_2}}; \quad \|r\|_{\mathcal{L}_2} \neq 0, \quad (4.43)$$

Du résultat de cette étude découle le théorème suivant :

Theorème 4.4. *Le système bouclé formé par le système (4.24), le contrôleur (4.14) avec (4.15) et la dynamique désirée (3.5) est stable et vérifie $J < \Gamma$ où J est défini par (4.47) et Γ est un scalaire fixé, s'il existe une matrice P symétrique et définie positive telle que la condition suivante soit vérifiée.*

$$\begin{pmatrix} A_p(t)^T P + P A_p(t) + C_{e_z}^T C_{e_z} & P B_p \\ B_p^T P & -\Gamma^2 I_d \end{pmatrix} < 0, \quad (4.44)$$

avec les différentes matrices définies dans (4.46).

Preuve 4.4. *On considère la représentation d'état étendu $x_p(t) = [x_m(t) \ x_e(t) \ x_r(t)]^T$ prenant en compte le système en boucle fermée $[x_m(t) \ x_e(t)]^T$ et le système représentant la dynamique désirée $x_r(t)$:*

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) &= A_p(t)x_p(t) + B_p r(t) \\ e_p(t) &= C_{e_p} x_p(t) \end{cases} \quad (4.45)$$

avec :

$$A_p(t) = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & A_r \end{pmatrix}, \quad B_p = \begin{pmatrix} B \\ B_r \end{pmatrix}, \quad C_{e_p}^T = \begin{pmatrix} -C_m \\ 0_{(1 \times (n+1))} \\ C_r \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

où $A(t)$ et B sont données par (4.17) avec (4.15), et A_r, B_r et C_r par :

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -k_0 & -k_1 & \dots & \dots & -k_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_0 \end{pmatrix}, \quad C_r^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'après [Boyd 94], si :

$$\dot{V} + e_p^T e_p - \Gamma^2 r^T r < 0.$$

alors :

$$J = \sup_{r \in \mathcal{L}_2} \frac{\|e_p\|_{\mathcal{L}_2}}{\|r\|_{\mathcal{L}_2}} < \Gamma; \quad \|r\|_{\mathcal{L}_2} \neq 0, \quad (4.47)$$

En développant la condition $\dot{V} + e_p^T e_p - \Gamma^2 r^T r < 0$ en utilisant la définition (4.45), on obtient directement les conditions du théorème. ■

Le théorème suivant met en évidence le caractère général du correcteur en affirmant que si un système sous la forme (4.24) et d'ordre n est stabilisé par la loi de commande (4.26) assurant un gain induit $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$ avec une borne supérieure Γ , alors pour tous les systèmes (4.24) du même ordre il existe un correcteur stabilisant de la forme (4.26) assurant les mêmes performances. De plus, ce théorème est constructif puisqu'il permet également de calculer les paramètres de ces correcteurs.

Theorème 4.5. *Si la boucle fermée formée par le système*

$$y^{(n)}(t) = -a_0(t)y(t) - \dots - a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \alpha u(t), \quad (4.48)$$

le contrôleur/estimateur

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) &= A_o(\tau_x)x_e(t) + B_{o_1}(\tau_x)y(t) + B_{o_2}(\tau_x)r(t) \\ u(t) &= C_o(\tau_x)x_e(t) + D_{o_1}(\tau_x)y(t) + D_{o_2}(\tau_x)r(t) \end{cases} \quad (4.49)$$

où les différentes matrices sont données par (4.15), et la dynamique spécifiée

$$y_r^{(n)}(t) = -k_0^x y_r(t) - k_1^x \dot{y}_r(t) - \dots - k_{n-1}^x y_r^{(n-1)}(t)$$

est asymptotiquement stable et assure un gain induit

$$J = \sup_{r \in \mathcal{L}_2} \frac{\|e_p\|_{\mathcal{L}_2}}{\|r\|_{\mathcal{L}_2}}; \quad \|r\|_{\mathcal{L}_2} \neq 0,$$

pour toutes fonctions continues et bornées

$$a_i(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto [-\bar{a}_i, \bar{a}_i], \quad i \in \{0, \dots, n-1\}, \quad (4.50)$$

alors, la boucle fermée formée par le système

$$z^{(n)}(t) = -b_0(t)z(t) - \dots - b_{n-1}(t)z^{(n-1)}(t) + \beta v(t), \quad (4.51)$$

le contrôleur/estimateur

$$\begin{cases} \dot{z}_e(t) &= A_o(\tau_z)z_e(t) + B_{o_1}(\tau_z)z(t) + B_{o_2}(\tau_z)w(t) \\ v(t) &= C_o(\tau_z)z_e(t) + D_{o_1}(\tau_z)z(t) + D_{o_2}(\tau_z)w(t) \end{cases} \quad (4.52)$$

et la dynamique spécifiée

$$z_r^{(n)}(t) = -k_0^z z_r(t) - k_1^z \dot{z}_r(t) - \dots - k_{n-1}^z z_r^{(n-1)}(t)$$

tels que

$$\begin{aligned} A_o(\tau_z) &= \gamma T_1 A_o(\tau_x) T_1^{-1} \\ B_{o1}(\tau_z) &= \gamma T_2 B_{o1}(\tau_x) \\ B_{o2}(\tau_z) &= \gamma T_2 B_{o2}(\tau_x) \\ C_o(\tau_z) &= C_o(\tau_x) T_1^{-1} \\ D_{o1}(\tau_z) &= D_{o1}(\tau_x) \\ D_{o2}(\tau_z) &= D_{o2}(\tau_x) \\ k_i^z &= \gamma^{n-i} k_i^x; \quad i = 0..n-1 \end{aligned} \quad (4.53)$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma &= \tau_x / \tau_z \\ T_1 &= \text{diag}(1, \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{n-1}) \\ T_2 &= \text{diag}(1, \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{n-1}, 1) \end{aligned} \quad (4.54)$$

est asymptotiquement stable, tout en assurant le même gain induit J , pour toute fonction continue et bornée

$$b_i(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto [-\gamma^{n-i} \bar{a}_i, \gamma^{n-i} \bar{a}_i], \quad i \in \{0, \dots, n-1\}. \quad (4.55)$$

Preuve 4.5. On dénote $e_{p_z}(t) = e_p(\gamma t)$. Étant donnée que par définition, la norme induite L_2 d'un signal u est donnée par

$$\|u(t)\|_{\mathcal{L}_2} = \sqrt{\int_0^{+\infty} |u(t)|^2 dt},$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned} \|e_{p_z}(t)\|_{\mathcal{L}_2} &= \|e_p(\gamma t)\|_{\mathcal{L}_2} \\ \Rightarrow &= \sqrt{\int_0^{+\infty} |e_p(\gamma t)|^2 d(\gamma t)} \end{aligned}$$

En considérant le nouveau changement de variable $s = \gamma t$,

$$\begin{aligned} \|e_{p_z}(t)\|_{\mathcal{L}_2} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\int_0^{+\infty} |e_p(s)|^2 d(s)} \\ \Rightarrow &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \|e_p(s)\|_{\mathcal{L}_2} \end{aligned}$$

De même, on démontre que

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_{\mathcal{L}_2} &= \|r(\gamma t)\|_{\mathcal{L}_2} \\ \Rightarrow &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \|r(s)\|_{\mathcal{L}_2} \end{aligned}$$

Ainsi, le critère à minimiser

$$\begin{aligned} J &= \sup_{r \in \mathcal{L}_2} \frac{\|e_p\|_{\mathcal{L}_2}}{\|r\|_{\mathcal{L}_2}} \quad ; \quad \|r\|_{\mathcal{L}_2} \neq 0 \\ &= \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|e_{p_z}\|_{\mathcal{L}_2}}{\|w\|_{\mathcal{L}_2}} \quad ; \quad \|w\|_{\mathcal{L}_2} \neq 0 \end{aligned}$$

est le même quelque soit le changement de variable.

La suite de la preuve de ce théorème utilise ensuite les mêmes arguments que la Preuve 4.1 du Théorème 4.2. ■

On se propose d'utiliser ce résultat afin d'offrir une méthode de réglage sous certaines performances pour une classe de systèmes. Soit l'exemple du système SISO de second ordre de la méthode de réglage définie dans la Section 4.3.1. En adoptant le raisonnement décrit dans la Section 4.3.1, on calcule le gain induit maximal, pour différents domaines de stabilité, assurant la stabilité du système bouclé. Les résultats obtenus sont illustrés dans la proposition suivante.

Proposition 4.4. *Soit J un gain induit donné. Pour tous les systèmes linéaires SISO à paramètres variables dans le temps bornés décrits par l'équation différentielle (4.24) avec $n = 2$ tels que $|a_i(t)| \leq a \forall i \in 0, 1$, il existe un contrôleur stabilisant assurant J . Ce correcteur est obtenu en déterminant les deux réels τ et $\Gamma(\delta)$ tels que*

$$\tau^{2-i} * a < \delta^{2-i} \quad \forall i = 0, 1.$$

$$J < \Gamma(\delta),$$

où $\delta \in [0, \delta_{max}]$ avec δ_{max} et $\Gamma(\delta_{max})$ sont données en table 4.3. Dans ce cas, le gain de la dynamique désirée est donné par $K = [10^{-4}/\tau^2, 0.022/\tau]$.

TABLE 4.3 – Le gain induit et borné \mathcal{L}_2 pour différents δ

δ_{max}	0.001	0.01	0.015	0.025	0.035	0.045	0.055
$\Gamma(\delta_{max})$	0.005	0.009	0.015	0.035	0.058	0.097	0.15
δ_{max}	0.065	0.075	0.085	0.095	0.115	0.125	0.13
$\Gamma(\delta_{max})$	0.206	0.281	0.376	0.499	0.955	1.545	2.202

4.3.4 Exemple

Soit le système de second ordre :

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = \frac{2}{3}b y(t) + b \sin(y(t))\dot{y}(t) + u(t) \\ b = 3 \end{cases} . \quad (4.56)$$

Supposons que le cahier des charges impose, outre l'assurance de la stabilité de système, de garantir un gain induit d'ordre $J_1^* = 0.03$ puis un gain induit d'ordre $J_2^* = 3$.

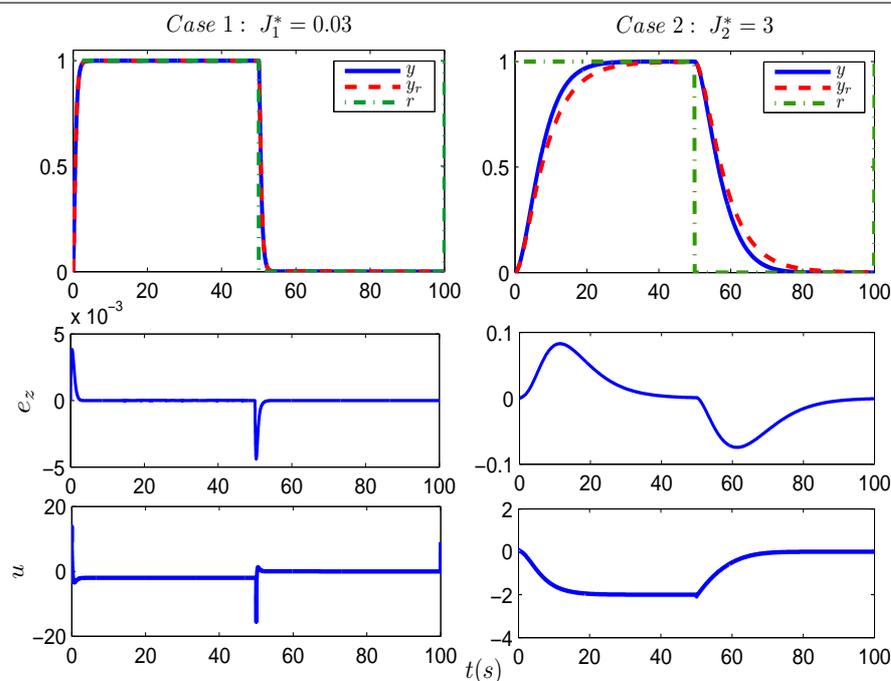
Vu que le système (4.56) appartient à la classe des systèmes SISO étudiés dans la section précédente, nous pouvons affirmer, d'après le Théorème 4.5 qu'il existe un contrôleur stabilisant sous les performances désirées. Notre but sera donc, d'ajuster les paramètres de ce contrôleur. Les étapes à suivre sont illustrées dans la table ci-dessous :

TABLE 4.4 – Détermination des paramètres du contrôleur

Étapes	Paramètres	$J_1^* = 0.03$	$J_2^* = 3$
Étape 1	γ	0.015	2.202
Étape 2	δ_{max}	0.015	0.13
	δ	0.01	0.125
Étape 3	τ	0.0033	0.0417
	K	[9 6.6]	[0.0576 1.528]

On observe, sur la *Figure 4.6*, l'évolution de la sortie $y(t)$ de ce système bouclé, de la sortie de la dynamique $y_r(t)$, de l'erreur de poursuite $e_z(t) = y_r(t) - y(t)$ et de la commande $u(t)$ en admettant dans un premier lieu un $\tau = 0.0033$ et un gain $K = [9 \ 6.6]$ afin de vérifier le gain induit $J_1^* = 0.03$, et ensuite un $\tau = 0.0417$ et un $K = [0.0576 \ 1.528]$ pour un $J_2^* = 3$. D'après cette figure, on constate que, pour le premier cahier des charges ($J_1^* = 0.03$), la référence et la dynamique idéale sont bien suivies et l'erreur entre la sortie du système et la dynamique idéale est très faible. Par contraste, pour le second cahier des charges ($J_2^* = 3$) l'erreur de poursuite est plus large. Cependant, la commande $u(t)$ est plus élevée pour les petites valeurs de τ .

Figure 4.6 Évolutions de la sortie $y(t)$ du système (4.56), de la sortie de la dynamique $y_r(t)$, de l'erreur de poursuite $e_z(t) = y_r(t) - y(t)$ et de la commande $u(t)$ pour les gains induits $J_1^* = 0.03$ et $J_2^* = 3$



4.4 Conclusion

Ce chapitre a permis l'étude de la loi de commande dite "sans modèle". L'utilisation d'un dérivateur de type filtre a permis l'étude de la stabilité, de la précision, des performances de la boucle fermée et l'élaboration de méthodes de réglages dans le cas non linéaire. Bien que ces résultats démontrent l'efficacité de cette loi de commande, ils se limitent au cas des systèmes non linéaires SISO où il n'existe pas de zéros invariants et où les termes non linéaires restent bornés. De plus cette loi de commande s'appuie malgré tout sur un modèle et le réglage de cette commande nécessite quelques connaissances sur le système : l'ordre de la dynamique, une estimation des bornes des fonctions non linéaires ainsi qu'une estimation du gain d'entrée. On note tout de même qu'il est possible de régler empiriquement cette loi de commande si le système n'est pas critique et/ou stable utilisant comme valeur initiale de τ , une valeur inférieure à la dynamique du système (valeur relevée par essai indiciel).

Ces travaux ouvrent de nouvelles perspectives d'étude : repousser les limites du modèle, étudier l'influence de dynamiques rapides (i.e. considérer un correcteur d'ordre inférieur à celui du système), ou encore analyser les effets de l'échantillonnage.

Conclusion et Perspectives

Cette thèse a tenté d'apporter une solution à deux types de problèmes liés à la conception d'une loi de commande stabilisante pour les systèmes non linéaires mis sous la forme polytopique avec des paramètres variants (prémises) supposés ni mesurables ni estimables :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi)(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi) C_i x(t) \end{cases},$$

où $x(t)$ est le vecteur d'état, $u(t)$ est le vecteur d'entrée et $y(t)$ est le vecteur de sortie. r est le nombre de sous-modèle. A_i , B_i et C_i sont des matrices constantes qui représentent respectivement la matrice d'état, d'entrée et d'observation. Les fonctions $\mu_i(\xi)$, supposées ni mesurables ni estimables, sont les fonctions de pondération en fonction du vecteur ξ des variables de décision qui vérifient la propriété de la somme convexe.

Pour notre étude, on a considéré dans un premier temps (*Chapitre 2* du manuscrit) que le modèle du système est connu. Puis, afin de garder au maximum l'aspect non linéaire de ces systèmes et de s'approcher du domaine d'application réel, on a supposé dans un deuxième temps (*Chapitres 3 et 4*) que peu d'informations sur le système sont disponibles. De plus, pour ces deux études de cas et, pour une sous-classe de cette famille de systèmes décrite par

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &= -a_0(t)y(t) - \dots - a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \alpha u(t), & (E1) \\ |a_i(t)| &< \bar{a}_i \quad \forall i = 0..n-1 \end{aligned}$$

où les variables $a_i \in \mathbb{R}$ sont des paramètres inconnus, variables dans le temps, la preuve de l'existence systématique d'un contrôleur stabilisant a été établie ainsi qu'une méthode de réglage directe i.e. sans la résolution de conditions LMI nécessitant un solveur. On note que toutes nos études pour l'analyse de stabilité et la synthèse du contrôleur en boucle fermée ont été réalisées principalement grâce à la théorie de Lyapunov. Les résultats de ces études sont comme suit :

Commande à base de modèle

Au début de notre étude de la synthèse d'une loi de commande stabilisante pour la classe de systèmes décrite ci-dessus, on a supposé le cas où le modèle du système est disponible pour l'automaticien c'est-à-dire, que les matrices A_i , B_i et C_i sont connues. De ce fait, on a choisi une loi de contrôle par retour de sortie linéaire par observateur linéaire de type Luenberger. Ce choix est expliqué par le fait que ces observateurs sont connus par leur robustesse (peu sensibles) par rapport aux variations paramétriques. La linéarité de la loi de contrôle et de l'observateur a offert l'indépendance de ces derniers vis-à-vis des prémisses supposées non mesurables.

Bien que cette combinaison, contrôleur/observateur, ait présenté des solutions pour des problèmes de conception là où d'autres résultats plus spécifiques échouent, elle admet une faiblesse principale liée à l'hypothèse de la disponibilité du modèle du système. De plus, considérer une loi de contrôle linéaire ainsi qu'un observateur linéaire induisent du conservatisme. On note qu'il existe, bien entendu, d'autres failles relatives aux techniques des estimateurs asymptotiques (observateur) qui peuvent être liées aux bruits de mesure, au caractère asymptotique de la convergence ainsi qu'à la difficulté de les mettre en œuvre pour une identification en ligne et en boucle fermée. Ceci nous mène à poser plusieurs questions :

Question 1. *Comment peut-on réduire le conservatisme de ces approches ? Compte tenu qu'en pratique peu d'informations sur le modèle du système sont souvent disponibles, suffit-il de mettre de l'intelligence dans la loi de commande pour compenser la méconnaissance du comportement du procédé ? Dans ce cas, quel est le prix à payer vis-à-vis du cahier des charges imposé ?*

Afin d'alléger les hypothèses considérées pour cette étude et essayer de répondre à ces questions, on a proposé d'étudier dans un second lieu la synthèse d'une loi de commande basée sur un modèle restreint.

Commande à base d'un modèle restreint

La commande à base d'un modèle restreint ou encore dite "sans modèle" présente une alternative permettant de sortir des notions de commande classiques vers une loi qui exige moins d'information sur le comportement du système. L'idée sous-jacente consiste à développer une loi de contrôle permettant d'annuler la dynamique du processus et de la remplacer par celle désirée. Afin d'atteindre ce but, on a proposé une loi de commande, différente à celle développée par [Join 08a], mais qui est basée sur le même principe. Cette loi de commande est donnée par [Maal 13, Maal 14] :

$$\begin{aligned}
 \text{Loi de Commande} &= \text{Dynamique d'Annulation} + \text{Dynamique Désirée} \\
 u(t) &= \hat{u}_n(t) + \hat{u}_r(t) \\
 &= -\frac{1}{\alpha} \hat{F}(t) + \frac{1}{\alpha} (-K\hat{Y}(t) + k_0 r(t))
 \end{aligned}$$

où $\hat{F}(t)$ est une estimation de la dynamique inconnue du système en boucle ouverte, $\hat{Y}(t)$ est un vecteur composé par les estimations des dérivées successives de la sortie du système et K est un vecteur composé par les coefficients de la dynamique désirée. On a constaté donc que cette loi nécessite l'estimation de certains paramètres vu que peu d'informations sur le système sont disponibles. Afin de calculer ces estimations, on a proposé deux types d'estimateurs : un estimateur non-asymptotique inspiré des techniques algébriques (*Chapitre 3*) et un autre estimateur asymptotique basé sur des filtres (*Chapitre 4*).

Dérivateurs algébriques

La procédure d'estimation algébrique basée sur l'algèbre différentielle est donnée par des formules exactes donnant lieu à une convergence non asymptotique. Grâce à cette approche, on a pu exprimer les paramètres désirés en fonction d'intégrales itérées de la sortie mesurée et des entrées du système. Tandis que ces estimateurs ont offert de "bonnes" estimations où la valeur estimée converge en un temps fini, ils restent toujours sensibles par rapport aux variations paramétriques. De plus, l'application des techniques algébriques nécessite la discrétisation du système initial. Cette transformation demeure quasi-impossible pour les systèmes à paramètres variables et inconnus dans le temps par le fait qu'elle nécessite le calcul de la matrice exponentielle d'une matrice variable. Ce sont les raisons pour lesquelles les paramètres du système doivent être connus et donc, seul les systèmes LTI sont concernés.

Question 2. *Est-il possible d'étendre les outils des techniques algébriques pour contrôler les systèmes non linéaires mis sous forme polytopique avec des paramètres variants dans le temps ?*

D'autre part, ces estimations doivent être réalisées en ligne et dépendent de la qualité des capteurs, de la complexité des calculs qui augmente en fonction de l'ordre du système, de la fréquence d'échantillonnage, de la longueur de la fenêtre glissante.... Cependant, selon notre connaissance, aucune méthode de réglage de ces paramètres n'existait dans la littérature.

Question 3. *Est-il possible de développer une méthode de réglage simple des paramètres de ces contrôleurs algébriques ? Comment peut-on diminuer la sensibilité de la boucle fermée vis-à-vis des paramètres de réglage ?*

Dérivateurs à base de filtres

Afin de conserver au maximum l'aspect non-linéaire du système et d'obtenir des résultats les plus généraux possible, on a proposé d'étudier une autre version de la loi de commande à modèle restreint dont la dérivation des signaux a été réalisée à l'aide des filtres linéaires. Cette approche nous a permis non seulement d'analyser la

stabilité et de synthétiser un contrôleur/observateur applicable dans le domaine réel (un exemple pratique a été fourni [Maal 14]), mais aussi de maîtriser les performances de la sous-classe de systèmes non linéaire décrite précédemment d'un point de vue respect du cahier des charges [Maal 14].

Bien que ces résultats démontrent l'efficacité de cette loi de commande, ils se limitent au cas des systèmes non linéaires SISO où il n'existe pas de zéros invariants et où les termes non linéaires restent bornés. De plus cette loi de commande s'appuie quand même sur un modèle et le réglage de cette commande nécessite certaines connaissances sur le système : l'ordre de la dynamique, une estimation des bornes des fonctions non linéaires ainsi qu'une estimation du gain d'entrée.

Question 4. *Est-il possible d'être plus dépendant du modèle du système non linéaire et de développer, sous certaines performances, une loi de commande restreinte avec des dérivateurs simple à manipuler ?*

Question 5. *Ces dérivateurs sont certainement moins performants que ceux basés sur les techniques algébriques.*

Est-il possible d'étendre cette approche à d'autres estimateurs ? Dans quelle mesure les estimateurs algébriques sont-ils plus performants ?

Extensions

Rappelons tout d'abord que les contrôleurs numériques sont omniprésents, et ont permis l'explosion des systèmes embarqués et des systèmes de contrôle en réseau. Dû à leur nature, ils introduisent des phénomènes d'échantillonnage des signaux et des dynamiques à temps discret [Astr 84]. Ce problème doit être pris en compte dans la conception d'un dispositif de commande. Selon la longueur de la période d'échantillonnage, deux solutions sont souvent adaptées afin d'analyser ces systèmes :

1. **Cas Nominal** : Lorsque la période d'échantillonnage est suffisamment petite, le système en boucle fermée peut être considéré comme un système à temps continu. Dans ce cas, le contrôleur est implémenté dans un dispositif basé de processeur de telle sorte que les données du capteur ne soient disponibles qu'aux instants d'échantillonnage. Vu que le contrôleur est linéaire, sa dynamique peut être alors représentée par un modèle continu tout en simplifiant les conditions de stabilité. Cette méthodologie est applicables même sur les systèmes LTV (Linear Time Varying).
2. **Cas Discret** : Si la période d'échantillonnage n'est pas assez petite, trois alternatives sont possibles :
 - (a) *Alternative 1* : Discrétiser le système initial et travailler en temps discret [Zhan 01];

- (b) *Alternative 2* : Envisager la dynamique du temps discret comme un retard continu par morceau [Frid 88, Astr 95, Frid 92] ;
- (c) *Alternative 3* : Représenter le système échantillonné sous forme de modèle impulsif [Hadd 99].

On note ici que tout au long de notre étude, on a considéré que la période d'échantillonnage était toujours assez faible par rapport à la dynamique du système. La suite de ce chapitre présente quelques pistes permettant d'offrir des solutions et de répondre à certaines questions qui n'étaient pas traitées durant notre étude.

Commande à modèle restreint : du continu vers le discret

Cette section vise à étendre les résultats du *Chapitre 4* obtenus à partir de l'étude de la commande à modèle restreint dont le dérivateur est à base de filtres linéaires. Dans cette partie, l'effet de l'échantillonnage sera pris en considération. Dans ce cas, l'entrée du système sera donnée par $u(s_k)$ et celle du contrôleur par $r(s_k)$ et $y(s_k)$ où s_k représente les instants de l'échantillonnage. La boucle fermée du système et son contrôleur peut être donnée en admettant l'état étendu $x(t) = [x_m(t) \ x_e(t)]^T$ comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + A_d x(s_k) + Br(s_k) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_m(t) & 0 \\ 0 & A_o \end{pmatrix}, \quad A_d = \begin{pmatrix} B_m D_{o_1} C_m & B_m C_o \\ B_{o_1} C_m & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_m D_{o_2} \\ B_{o_2} \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 0_{(1 \times 2n-1)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

où les différentes matrices sont définies par (4.15), (4.11) et (4.13) dans la *Section 4.2* du *Chapitre 4*.

Afin de conserver le caractère continu du système, l'approche des systèmes retardés peut être considérée (l'*Alternative 2* du cas discret) [Frid 88, Astr 95, Frid 92].

Le contrôleur est implémenté en temps discret dont sa dynamique est considérée comme un retard continu par morceaux :

$$s_k = t - (t - s_k) = t - d(t), \quad \forall t \in [s_k, s_{k+1}], \quad k \in \mathbb{N},$$

où $d(t) = t - s_k$ représente un retard variable dans le temps induit par le contrôleur vérifiant $0 \leq d(t) \leq h$, $\dot{d}(t) \leq \eta < \infty$ et $h = \tau/v$, $v \in \mathbb{R}_+^*$. En adoptant cette approche, la boucle fermée est remodelée en un système LPV avec un retard variable comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + A_d x(t - d(t)) + Br(t - d(t)) \\ x(s) &= \phi(s), \quad -h \leq s \leq 0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (E2)$$

où $\phi(\cdot)$ est la fonction initiale tel que $x(s) = \phi(s) \in \mathcal{L}_2[-h, 0] \equiv \left\{ f(\cdot) \mid \int_0^\infty f^T(t)f(t)dt < \infty \right\}$.

De nombreux résultats existent concernant la stabilité de cette classe de système.

On se propose de se baser sur les travaux de [Bouk 08] qui considère le cas linéaire.

Une extension de ces résultats pour les systèmes à paramètres variants (LPV) est donné par le *Théorème* ci-dessous :

Théorème 1. *Le système autonome (E2) est stable s'il existe des matrices P, Q, R, S symétriques et définies positives, des matrices W_1, W_2, W_3, W_4 telles que les conditions suivantes soient vérifiées :*

$$\forall i = 1 \dots N$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} & \Xi_{14} \\ * & \Xi_{22} & \Xi_{23} & \Xi_{24} \\ * & * & \Xi_{33} & \Xi_{34} \\ * & * & * & \Xi_{44} \end{pmatrix} < 0.$$

où pour $A(t) \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} \Xi_{11} &= A_i^T P + P^T A_i + Q + R - W_1 - W_1^T + h A_i^T S A_i, \\ \Xi_{12} &= -W_2 + W_1^T + P A_d + h A_i^T S A_d, \\ \Xi_{13} &= -W_3, \quad \Xi_{14} = -W_4 + W_1^T, \\ \Xi_{22} &= -(1 - \eta)Q + W_2 + W_2^T + h A_d^T S A_d, \\ \Xi_{23} &= W_3, \quad \Xi_{24} = W_4 + W_2^T, \quad \Xi_{33} = -R, \\ \Xi_{34} &= W_3^T, \quad \Xi_{44} = W_4 + W_4^T - \frac{1}{h}S. \end{aligned}$$

Preuve 1. *La preuve résulte en considérant les fonctionnelles de Lyapunov-Krasowskii suivantes :*

$$V(x(t)) = V_1(x(t)) + V_2(x(t)) + V_3(x(t)) + V_4(x(t))$$

où

$$\begin{aligned} V_1(x(t)) &= x^T(t) P x(t) \\ V_2(x(t)) &= \int_{t-d(t)}^t x^T(s) Q x(s) ds \\ V_3(x(t)) &= \int_{t-h}^t x^T(s) R x(s) ds \\ V_4(x(t)) &= \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) S \dot{x}(s) ds d\theta \end{aligned}$$

avec $P > 0, Q > 0, R > 0$ et $S > 0$. Ensuite, en procédant de façon similaire à [Bouk 08] et en utilisant les techniques polytopiques standards, on obtient les conditions de stabilité de ce théorème. ■

Une extension des résultats obtenus dans la *Section 4.3* du *Chapitre 4* liée à la preuve d'existence systématique d'un contrôleur stabilisant, peut être facilement établie pour la même sous-classe (E1) de système non linéaire retardé i.e.

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &= -a_0(t)y(t) - \dots - a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \alpha u(t - d(t)), \quad (E3) \\ |a_i(t)| &< \bar{a}_i \quad \forall i = 0..n - 1 \end{aligned}$$

En fixant le retard, ce dernier résultat ainsi qu'une méthode de réglage directe des paramètres du contrôleur, pour un système de second ordre décrit par l'équation différentielle ci-dessus (E3) sont donnés par la proposition suivante :

Proposition 1. *Pour toutes les classes de systèmes linéaires SISO à paramètres variables dans le temps bornés décrits par l'équation différentielle (E3) avec $n = 2$ et $|\bar{a}_i| < a \forall i = 0, 1$, il existe un contrôleur stabilisant la boucle fermée donnée par (E2). Ce correcteur est obtenu en déterminant le réel τ tel que :*

$$\begin{aligned}\tau^{2-i} * a &< 10^{-2} \quad \forall i = 0, 1 \\ h &= \tau/5 \\ K &= [10^{-4}/\tau^2 \quad 0.022/\tau]\end{aligned}$$

La question qui se pose ici est, est-il possible de développer d'autres méthodes de réglage permettant d'assurer la stabilité ainsi que certaines performances indépendamment à la fois du paramètre τ et de l'échantillonnage ?

Estimateur algébrique : du LTI vers LPV

Cette partie vise l'extension des résultats du *Chapitre 3* dont l'*alternative 1* du cas discret (i.e. de discrétiser le système) a été considérée pour qu'ils soient applicable aux systèmes LPV. Dû à leur nature, l'application des techniques algébriques nécessite la discrétisation du système initial. Cette transformation demeure difficile pour les systèmes à paramètres variables et inconnus dans le temps. Afin de résoudre ce problème et d'étendre l'application de l'approche algébrique aux systèmes LPV, une des solutions possibles consiste à envisager la dynamique du temps discret du contrôleur algébrique comme un retard continu par morceau. Cette approche est similaire à celle considérée dans le paragraphe précédent à la différence que pour ces estimateurs algébriques le retard devient variable. Dans ce cas, les expressions (3.18) et (3.19) deviennent :

$$z_i(t) = \sum_{m=0}^M \Phi_i(t - d_m(t)) x^{T_i}(1 - t + d_m(t)); \quad i \in 1, 2$$

et

$$\forall m = 0..M - 1 \quad d_m(t) \in [mT_h \quad (m + 1)T_h]$$

avec les expressions des $\Phi_i(t - d_m(t))$ appropriées.

Tandis que la variation du retard $d_m(t)$ rend souvent le système plus conservatif, il peut présenter une solution utile pour certaines classes de systèmes LPV.

Des résultats similaires peuvent être obtenus pour un système non linéaire de second ordre en adoptant cette approche algébrique pour l'estimation de la fonction "structurelle" $F(t)$ et la dérivée première $\dot{y}(t)$ à partir du modèle local

$$\ddot{y}(t) = F(t) + \alpha u(t); \quad F(t) = F.$$

L'estimation de F et \dot{y} peut être calculée dans ce cas en appliquant, respectivement, les opérateurs linéaires différentiels $(s^{-3} \frac{d^2 t}{ds^2})$ et $\mathcal{O}_4^{-1} = (s^{-4} \frac{d}{ds} s^{-1} \frac{d}{ds} s)$.

Bibliographie

- [Abou 11] H. Abouaissa, M. Fliess, V. Iordanova, and C. Join. “First steps towards a model-free control of a freeway traffic flow—Prolégomènes à une régulation sans modèle du trafic autoroutier”. In : *Conférence Méditerranéenne sur l’Ingénierie Sûre des Systèmes Complexes*, 2011.
- [Akhe 07] A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot, and D. Maquin. “Design of sliding mode unknown input observer for uncertain Takagi-Sugeno model”. In : *Mediterranean Conference on Control Automation*, pp. 1–6, 2007.
- [Ande 71] B. Anderson and J. Moore. *Linear Optimal Control*. Prentice Hall, 1971.
- [Ange 01] G. Angelis. *System analysis, modeling and control with Polytopic Linear Models*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, Netherland, 2001.
- [Arca 01] M. Arcak and P. Kokotovic. “Observer-based control of systems with slope-restricted nonlinearities”. In : *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 384–389, 2001.
- [Asem 11] M. Asemani, V. Majd, and S. Mobayen. “A multiple Lyapunov function approach for robust H_∞ ; observer-based tracking control of uncertain T-S fuzzy systems”. *International Conference on Control, Instrumentation and Automation*, pp. 367–372, 2011.
- [Astr 06] K. Åström and T. Hägglund. *Advanced PID Control*. The Instrumentation, Systems, and Automation Society ; Research Triangle Park, NC 27709, 2006.
- [Astr 84] K. Åström and B. Wittenmark. *Computer controlled systems : theory and design*. Prentice-Hall, 1984.
- [Astr 95] K. Åström and B. Wittenmark. *Adaptive Control*. Addison-Wesley, 1995.

- [Bacc 91] A. Bacciotti and P. Boieri. “A characterization of single input planar nonlinear systems”. *Systems and Control letters*, Vol. 16, No. 2, pp. 139–143, 1991.
- [Back 05] J. Back, K. Yu, and J. Seo. “Dynamic Observer Error Linearization”. In : *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pp. 6364–6369, 2005.
- [Bami 99] B. Bamieh and L. Giarre. “Identification of linear parameter varying models”. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 2, pp. 1505 –1510, 1999.
- [Ban 07] X. Ban, X. Z. Gao, X. Huang, and A. V. Vasilakos. “Stability analysis of the simplest Takagi-Sugeno fuzzy control system using circle criterion”. *Inf. Sci.*, Vol. 177, No. 20, pp. 4387–4409, 2007.
- [Bank 86] S. Banks. “Stabilizability of finite and infinite-dimensional bilinear systems”. *Journal of Mathematical Control and Information*, Vol. 3, pp. 410–415, 1986.
- [Belc 98] C. Belcastro. “Parametric uncertainty modeling : an overview”. In : *American Control Conference*, pp. 992–996, 1998.
- [Belk 09] L. Belkoura, J.-P. Richard, and M. Fliess. “Parameters estimation of systems with delayed and structured entries”. *Automatica*, 2009.
- [Belk 10] L. Belkoura, T. Floquet, K. I. Taarit, W. Perruquetti, and Y. Orlov. “Estimation problems for a class of impulsive systems”. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2010.
- [Berg 00] P. Bergsten and R. Palm. “Thau-Luenberger observers for TS fuzzy systems”. In : *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pp. 671–676, 2000.
- [Berg 01] P. Bergsten, R. Palm, and D. Driankov. “Fuzzy observers”. In : *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pp. 700–703, 2001.
- [Berg 02] P. Bergsten, R. Palm, and D. Driankov. “Observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems”. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics*, Vol. 32, No. 1, pp. 114–121, 2002.
- [Bern 09] M. Bernal, T. M. Guerra, and A. Kruszewski. “A membership-function-dependent approach for stability analysis and controller synthesis of Takagi-Sugeno models”. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 160, No. 19, pp. 2776 – 2795, 2009.
- [Bern 10] M. Bernal and T.-M. Guerra. “Generalized Nonquadratic Stability of Continuous-Time Takagi-Sugeno Models”. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 18, No. 4, pp. 815–822, 2010.

- [Boua 10] T. Bouarar, K. Guelton, and N. Manamanni. “Robust fuzzy Lyapunov stabilization for uncertain and disturbed Takagi-Sugeno descriptors”. *ISA Transactions*, Vol. 49, No. 4, pp. 447 – 461, 2010.
- [Bouk 08] E. Boukas. “Free-Weighting Matrices Delay-Dependent Stabilization for Systems with Time-Varying Delays”. *ICIC Express Letters*, Vol. 2, No. 2, pp. 167–173, 2008.
- [Boul 08] A. Boulkroune, M. Tadjine, M. M’Saad, and M. Farza. “How to Design a Fuzzy Adaptive Controller Based on Observers for Uncertain Affine Nonlinear Systems”. *Fuzzy Sets Syst.*, Vol. 159, No. 8, pp. 926–948, 2008.
- [Boul 14] A. Boulkroune, N. Bounar, M. M’Saad, and M. Farza. “Indirect adaptive fuzzy control scheme based on observer for nonlinear systems : A novel SPR-filter approach”. *Neurocomputing*, Vol. 135, No. 0, pp. 378–387, 2014.
- [Bour 09] T. Bourar. *Contribution à la synthèse de lois de commande pour les descripteurs de type Takagi-Sugeno incertains et perturbés*. PhD thesis, Université de Reims Champagne Ardenne, France., 2009.
- [Bout 13] Y. Boutalis, M. C. Christodoulou, and D. Theodoridis. “Indirect adaptive control of nonlinear systems based on bilinear neuro-fuzzy approximation”. *International Journal of Neural Systems*, Vol. 23, No. 5, p. 1350022, 2013.
- [Boyd 94] S. Boyd, L. El-Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. “Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory”. *SIAM*, Vol. 15, No. , pp. 23–24, 1994.
- [Caig 09] J. D. Caigny, J. Camino, and J. Swevers. “Interpolating model identification for SISO linear parameter-varying systems”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 23, No. 8, pp. 2395–2417, 2009.
- [Cao 01] Y. Cao and P. M. Frank. “Stability analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear Takagi-Sugeno fuzzy models”. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 124, No. 2, pp. 213–229, 2001.
- [Cao 98] Y.-Y. Cao, J. Lam, and Y.-X. Sun. “Static Output Feedback Stabilization : An ILMI Approach”. *Automatica*, Vol. 34, No. 12, pp. 1641–1645, 1998.
- [Celi 93] S. Celikovsky. “On the stabilization of the homogeneous bilinear systems”. *Systems & Control Letters*, Vol. 21, No. 6, pp. 503–510, 1993.
- [Chab 93] R. Chabour, G. Sallet, and J. Vivalda. “Stabilization of nonlinear systems : A bilinear approach”. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, Vol. 6, No. 3, pp. 224–246, 1993.

- [Chad 02] M. D. Chadli, M. and J. Ragot. “Static output feedback for Takagi-Sugeno systems : an LMI approach”. In : *Mediterranean Conference on Control and Automation, Lisbon, Portugal, 2002*.
- [Chad 12] M. Chadli and P. Borne. *Multimodèles en automatique*. Lavoisier, 2012.
- [Chan 03] W. Chang, J. B. Park, Y. H. Joo, and G. Chen. “Static output-feedback fuzzy controller for Chen’s chaotic system with uncertainties”. *Information Sciences*, Vol. 151, No. 0, pp. 227 – 244, 2003.
- [Chan 11] W.-J. Changa, W.-Y. Wu, and C.-C. Ku. “ H_∞ constrained fuzzy control via state observer feedback for discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy systems with multiplicative noises”. *ISA Transactions*, Vol. 50, No. 1, pp. 37–43, 2011.
- [Chen 00] J. Chen, L. Qiu, and O. Toker. “Limitations on maximal tracking accuracy”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 2, pp. 326–331, 2000.
- [Chi 12] X.-B. Chi, X.-C. Jia, and Q.-L. Han. “Sampled-data stabilization for Takagi-Sugeno fuzzy systems using membership function deviations”. In : *Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, pp. 2476–2481, 2012.
- [Chit 02] Y. Chitour. “Time-varying high-gain observers for numerical differentiation”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, No. 9, pp. 1565–1569, 2002.
- [Cloo 10] M. Cloosterman, L. Hetel, N. van de Wouw, W. Heemels, J. Daafouz, and H. Nijmeijer. “Controller synthesis for networked control systems”. *Automatica*, Vol. 46, No. 10, pp. 1584 – 1594, 2010.
- [Dabr 99] A. Dabroom and H. Khalil. “Discrete-time implementation of high-gain observers for numerical differentiation”. *International Journal of Control*, Vol. 72, No. 17, pp. 1523–1537, 1999.
- [DAnd 10] B. D’Andréa-Novel, C. Boussard, M. Fliess, O. El Hamzaoui, H. Mounier, and B. Steux. “Commande sans modèle de la vitesse longitudinale d’un véhicule électrique”. In : *Sixième Conférence Internationale Francophone d’Automatique*, 2010.
- [Delp 12] R. Delpoux, M. Bodson, and T. Floquet. “Parameter estimation of permanent magnet stepper motors without position or velocity sensors”. In : *American Control Conference*, 2012.
- [Delp 14] R. Delpoux and T. Floquet. “On-line parameter estimation via algebraic method : An experimental illustration”. *Asian Journal of Control*, 2014.
- [Donk 09] M. Donkers, L. Hetel, W. Heemels, N. van de Wouw, and M. Steinbuch. “Stability Analysis of Networked Control Systems Using a Switched

- Linear Systems Approach”. In : *Hybrid Systems : Computation and Control*, pp. 150–164, Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [Doyl 91] J. Doyle, A. Packard, and K. Zhou. “Review of LFTs, LMIs, and μ ”. In : *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1227–1232, 1991.
- [Eben 06] C. Ebenbauer and F. Allgöwer. “Analysis and design of polynomial control systems using dissipation inequalities and sum of squares”. *Computers & Chemical Engineering*, Vol. 30, No. 10, pp. 1590–1602, 2006.
- [Estr 13] V. Estrada-Manzo, T. Guerra, Z. Lendek, and M. Bernal. “Improvements on non-quadratic stabilization of continuous-time Takagi-Sugeno descriptor models”. In : *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pp. 1–6, 2013.
- [Feli 07] F. Felici, J.-W. van Wingerden, and M. Verhaegen. “Subspace identification of MIMO LPV systems using a periodic scheduling sequence”. *Automatica*, Vol. 43, No. 10, pp. 1684 – 1697, 2007.
- [Flie 03a] M. Fliess, M. Mboup, H. Mounier, and H. Sira-Ramirez. “Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples”. *Algebraic Methods in Flatness, Signal Processing and State Estimation*, pp. 1–21, 2003.
- [Flie 03b] M. Fliess and H. Sira-Ramirez. “An Algebraic Framework For Linear Identification”. *Esaim Contr. Opt. Calc. Variat.*, Vol. 9, 2003.
- [Flie 04] M. Fliess and H. Sira-Ramirez. “Control via state estimations of some nonlinear systems”. *IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, 2004.
- [Flie 05a] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, and A. Sedoglavic. “Estimation des dérivées d’un signal multidimensionnel avec applications aux images et aux vidéos”. *GRETSI*, pp. 136–139, 2005.
- [Flie 05b] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, and H. Sira-Ramirez. “Analyse et représentation de signaux transitoires : application à la compression, au débruitage et à la détection de ruptures”. *GRETSI*, 2005.
- [Flie 05c] M. Fliess, C. Join, and H. Sira-Ramirez. “Closed-loop fault-tolerant control for uncertain nonlinear systems”. *Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems*, Vol. 322, pp. 217–233, 2005.
- [Flie 06a] M. Fliess. “Analyse non standard du bruit”. *Comptes Rendus Mathématique*, Vol. 342, No. 10, pp. 797 – 802, 2006.
- [Flie 06b] M. Fliess, C. Join, and H. Sira-Ramirez. “Complex Continuous Nonlinear Systems : Their Black Box Identification And Their Control”. In : *Proc. IFAC Symposium on System Identification*, 2006.

- [Flie 08a] M. Fliess, C. Join, and H. Sira-Ramirez. “Non-linear estimation is easy”. *Int. J. Modelling Identification and Control*, Vol. 4, No. 1, pp. 12–27, 2008.
- [Flie 08b] M. Fliess and H. Sira-Ramirez. “Closed-loop Parametric Identification for Continuous-time Linear Systems via New Algebraic Techniques”. *Identification of Continuous-time Models from Sampled Data*, pp. 363–391, 2008.
- [Flie 10] M. Fliess, C. Join, and M. Mboup. “Algebraic change-point detection”. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, Vol. 21, No. 2, pp. 131–143, 2010.
- [Flie 13] M. Fliess and C. Join. “Model-free control”. *International Journal of Control*, Vol. 86, No. 12, pp. 2228–2252, 2013.
- [Flie 92] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. “Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats”. *C. R. Acad. Sciences*, Vol. 315, pp. 619–24, 1992.
- [Floq 03] T. Floquet, J.-P. Barbot, and W. Perruquetti. “Higher-order sliding mode stabilization for a class of nonholonomic perturbed systems”. *Automatica*, Vol. 39, No. 6, pp. 1077 – 1083, 2003.
- [Frid 88] E. Fridman, Y. Mischev, and V. Sobolev. “Asymptotic analysis of digital control systems”. *Automation and remote control*, Vol. 49, pp. 1175–1180, 1988.
- [Frid 92] E. Fridman. “Use of models with aftereffect in the problem of design of optimal digital control”. *Automation and remote control*, Vol. 53, No. 10, pp. 1523–1528, 1992.
- [Fuji 09] H. Fujioka. “A Discrete-Time Approach to Stability Analysis of Systems With Aperiodic Sample-and-Hold Devices”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 54, No. 10, pp. 2440–2445, 2009.
- [Gass 00] K. Gasso. *Identification des systèmes dynamiques non linéaires : approche multimodèles*. PhD thesis, Institut national polytechnique de Lorraine, 2000.
- [Gass 99] K. Gasso, G. Mourot, A. Boukhriss, and J. Ragot. “Optimisation de la structure d’un modèle de Takagi-Sugeno”. In : *Actes des rencontres francophones sur la logique floue*, 1999.
- [Gaut 92] J. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. “A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 6, pp. 875 –880, 1992.
- [Ge 14] X. Ge, Q.-L. Han, and X. Jiang. “Sampled-data H_∞ filtering of Takagi-Sugeno fuzzy systems with interval time-varying delays”. *Journal of the Franklin Institute*, No. 0, p. , 2014.

- [Gedo 11] P. Gédouin, E. Delaleau, J. Bourgeot, C. Join, S. Arbab-Chirani, and S. Calloch. *Experimental comparison of classical pid and model-free control : position control of a shape memory alloy active spring*. Elsevier, 2011.
- [Gens 07] A. Gensior, J. Weber, H. Guldner, and J. Rudolph. “An algebraic parameter identification algorithm and asymptotic observers for estimation of the load of a boost converter”. In : *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, pp. 7–11, 2007.
- [Giar 06] L. Giarra, D. Bauso, P. Falugi, and B. Bamieh. “LPV model identification for gain scheduling control : An application to rotating stall and surge control problem”. *Control Engineering Practice*, Vol. 14, No. 4, pp. 351 – 361, 2006.
- [Giel 10] R. Gielen, S. Oлару, M. Lazar, W. Heemels, N. van de Wouw, and S.-I. Niculescu. “On polytopic inclusions as a modeling framework for systems with time-varying delays”. *Automatica*, Vol. 46, No. 3, pp. 615 – 619, 2010.
- [Goeb 09] R. Goebel, R. Sanfelice, and A. Teel. “Hybrid dynamical systems”. *IEEE Control Systems*, Vol. 29, No. 2, pp. 28–93, 2009.
- [Guel 09] K. Guelton, T. Bouarar, and N. Manamanni. “Robust dynamic output feedback fuzzy Lyapunov stabilization of Takagi-Sugeno systems-A descriptor redundancy approach”. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 160, No. 19, pp. 2796–2811, 2009.
- [Guer 06] T. Guerra, A. Kruszewski, L. Vermeiren, and H. Tirmant. “Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi-Sugeno’s form”. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 157, No. 9, pp. 1248–1259, 2006.
- [Guer 07] T.-M. Guerra, M. Bernal, A. Kruszewski, and M. Afroun. “A way to improve results for the stabilization of continuous-time fuzzy descriptor models”. In : *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 5960–5964, 2007.
- [Guer 12] T. M. Guerra, M. Bernal, K. Guelton, and S. Labiod. “Non-quadratic local stabilization for continuous-time Takagi-Sugeno models”. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 201, No. 0, pp. 40–54, 2012.
- [Hadd 99] M. Haddad, V. Chellaboina, and N. Kablar. “Nonlinear impulsive dynamical systems. I. Stability and dissipativity”. In : *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4404–4422 vol.5, 1999.
- [Heck 04] S. Hecker and A. Varga. “Generalized lft-based representation of parametric uncertain models”. *European Journal of Control*, Vol. 10, No. 4, pp. 326–337, 2004.

- [Heem 10] W. P. Heemels, N. van de Wouw, R. H. Gielen, M. C. Donkers, L. Hetel, S. Olaru, M. Lazar, J. Daafouz, and S. Niculescu. “Comparison of Overapproximation Methods for Stability Analysis of Networked Control Systems”. In : *International Conference on Hybrid Systems : Computation and Control*, pp. 181–190, 2010.
- [Hete 07] L. Hetel, J. Daafouz, and C. Lung. “LMI control design for a class of exponential uncertain systems with application to network controlled switched systems”. In : *American Control Conference*, pp. 1401–1406, 2007.
- [Hete 11] L. Hetel, A. Kruszewski, W. Perruquetti, and J. P. Richard. “Discrete and Intersample Analysis of Systems With Aperiodic Sampling”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 56, No. 7, pp. 1696–1701, 2011.
- [Hong 00] S. Hong and R. Langari. “An LMI-based H fuzzy control system design with TS framework”. *Inf. Sci.*, Vol. 123, No. 3-4, pp. 163–179, 2000.
- [Horn 11] W.-R. Horng, C.-H. Fang, C.-H. Lee, and J.-H. Chou. “ H_2 guaranteed cost of uncertain continuous T-S fuzzy systems by multiple Lyapunov function approach”. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pp. 1380–1387, 2011.
- [Huan 06] D. Huang and S. K. Nguang. “Robust H_∞ ; Static Output Feedback Control of Fuzzy Systems : An ILMI Approach”. *Trans. Sys. Man Cyber. Part B*, Vol. 36, No. 1, pp. 216–222, 2006.
- [Hyun 10] C.-H. Hyun, C.-W. Park, and S. Kim. “Takagi-Sugeno fuzzy model based indirect adaptive fuzzy observer and controller design”. *Information Sciences*, Vol. 180, No. 11, pp. 2314 – 2327, 2010.
- [Ibri 03] S. Ibrir. “Online exact differentiation and notion of asymptotic algebraic observers”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 48, No. 11, pp. 2055–2060, 2003.
- [Ibri 04] S. Ibrir. “Linear time-derivative trackers”. *Automatica*, Vol. 40, No. 3, pp. 397 – 405, 2004.
- [Icha 10] D. Ichalal, B. Marx, J. Ragot, and D. Maquin. “Brief paper : state estimation of Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables”. *Control Theory Applications*, Vol. 4, No. 5, pp. 897–908, 2010.
- [Icha 11] D. Ichalal, H. Arioui, and S. Mammar. “Observer design for two-wheeled vehicle : A Takagi-Sugeno approach with unmeasurable premise variables”. In : *Mediterranean Conference on Control Automation*, pp. 934–939, 2011.
- [Joha 99] M. Johansson, A. Rantzer, and K. Arzen. “Piecewise quadratic stability of fuzzy systems”. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 7, No. 6, pp. 713–722, 1999.

- [John 89] John and Tsinias. “Observer design for nonlinear systems”. *Systems and Control Letters*, Vol. 13, pp. 135 – 142, 1989.
- [Join 08a] C. Join, J. Masse, and M. Fliess. “Etude préliminaire d’une commande sans modèle pour papillon de moteur A model-free control for an engine throttle : a preliminary study”. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, Vol. 42, No. 2-3, pp. 337–354, 2008.
- [Join 08b] C. Join and S. Tabbone. “Robust curvature extrema detection based on new numerical derivation”. In : *Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems*, 2008.
- [Kalm 61] R. E. Kalman and R. S. Bucy. “New Results in Linear Filtering and Prediction Theory”. *Journal of Basic Engineering*, Vol. 83, No. 1, pp. 95 –108, 1961.
- [Kar 99] I. Kar. “Design of static output feedback controller for uncertain systems”. *Automatica*, Vol. 35, No. 1, pp. 169–175, 1999.
- [Kers 06] G. Kerschen, K. Worden, A. Vakakis, and J.-C. Golinval. “Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 20, No. 3, pp. 505 – 592, 2006.
- [Khal 02] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [Korb 07] J. Korbicz, M. Witczak, and V. Puig. “LMI-based strategies for designing observers and unknown input observers for non-linear discrete-time systems”. *Bulletin of the Polish Academy of Sci. Tech. Sci.*, Vol. 55, No. 1, 2007.
- [Krus 08] A. Kruszewski, R. Wang, and T.-M. Guerra. “Nonquadratic Stabilization Conditions for a Class of Uncertain Nonlinear Discrete Time TS Fuzzy Models : A New Approach”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 53, No. 2, pp. 606–611, 2008.
- [Lamb 93] P. Lambrechts, J. Terlouw, S. Bennani, and M. Steinbuch. “Parametric Uncertainty Modeling using LFTs”. In : *American Control Conference*, pp. 267–272, 1993.
- [Land 86] I. D. Landau and L. Dugard. *Commande adaptative : aspects pratiques et théoriques. Série Automatique*, Masson, 1986.
- [Lee 96] H. Lee and K. Poolla. “Identification of Linear Parameter-Varying Systems using Nonlinear Programming”. *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 121, pp. 71–78, 1996.
- [Lee 97] L. Lee. *Identification and Robust Control of Linear Parameter-Varying Systems*. PhD thesis, University of California at Berkeley, California, 1997.

- [Lend 10] Z. Lendek, J. Lauber, T. M. Guerra, R. Babuška, and B. De Schutter. “Adaptive Observers for TS Fuzzy Systems with Unknown Polynomial Inputs”. *Fuzzy Sets Syst.*, Vol. 161, No. 15, pp. 2043–2065, 2010.
- [Leu 05] Y.-G. Leu, W.-Y. Wang, and T.-T. Lee. “Observer-based direct adaptive fuzzy-neural control for nonaffine nonlinear systems”. *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 16, No. 4, pp. 853–861, 2005.
- [Leu 99] Y.-G. Leu, T.-T. Lee, and W.-Y. Wang. “Observer-based adaptive fuzzy-neural control for unknown nonlinear dynamical systems”. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics*, Vol. 29, No. 5, pp. 583–591, 1999.
- [Leva 93] A. Levant. “Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control”. *International Journal of Control*, Vol. 58, No. 6, pp. 1247–1263, 1993.
- [Li 00] J. Li, H. O. Wang, D. Niemann, and K. Tanaka. “Dynamic parallel distributed compensation for Takagi-Sugeno fuzzy systems : An LMI approach”. *Information Sciences*, Vol. 123, No. 4, pp. 201–221, 2000.
- [Li 14] Y. Li, T. Li, and X. Jing. “Indirect adaptive fuzzy control for input and output constrained nonlinear systems using a barrier Lyapunov function”. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol. 28, No. 2, pp. 184–199, 2014.
- [Libe 06] D. Liberzon and D. Nesic. *Stability Analysis of Hybrid Systems Via Small-Gain Theorems*. Vol. 3927, Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [Liu 08] D.-Y. Liu, O. Gíbaru, W. Perruquetti, M. Fliess, and M. Mboup. “An error analysis in the algebraic estimation of a noisy sinusoidal signal”. In : *Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2008.
- [Liu 11] D.-Y. Liu, O. Gíbaru, and W. Perruquetti. “Error Analysis of Jacobi Derivative Estimators for Noisy Signals”. *Numer. Algorithms*, Vol. 58, No. 1, pp. 53–83, Sep. 2011.
- [Ljun 94] L. Ljung and T. Glad. “On global identifiability for arbitrary model parametrizations”. *Automatica*, Vol. 3, No. 2, pp. 265 – 276, 1994.
- [Lofb 04] J. Lofberg. “YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB”. In : *IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, pp. 284–289, 2004.
- [Love 07] M. Lovera and G. Mercere. “Identification for gain-scheduling : a balanced subspace approach”. *American Control Conference*, pp. 858–863, 2007.
- [Luen 71] D. Luenberger. “An introduction to observers”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 16, No. 6, pp. 596 – 602, dec 1971.

- [Luzi 14] A. R. Luzi. *Commande variante dans le temps pour le contrôle d'attitude de satellites*. PhD thesis, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, 2014.
- [Ma 01] X. Ma and Z. Sun. "Analysis and design of fuzzy reduced-dimensional observer and fuzzy functional observer". *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 120, No. 1, pp. 35–63, 2001.
- [Ma 98] X. Ma, Z. Sun, and Y. He. "Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer". *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol. 6, pp. 41–50, 1998.
- [Maal 13] S. Maalej, A. Kruszewski, and L. Belkoura. "Derivative based control for LTV system with unknown parameters". In : *European Control Conference*, pp. 1341–1346, 2013.
- [Maal 14] S. Maalej, A. Kruszewski, R. Delpoux, and L. Belkoura. "Derivative based control for LPV system with unknown parameters : An application on a Permanent Magnet Synchronous Motors". In : *International Multi-Conference on Systems, Signals Devices*, pp. 1–6, 2014.
- [Marc 04] A. Marcos and J. Balas. "Development of linear-parameter-varying models for aircraft". *J. Guidance, Control, Dynamics*, Vol. 27, No. 2, pp. 218–228, 2004.
- [Mbou 07a] M. Mboup. "Parameter estimation via differential algebra and operational calculus". Rapport de recherche, 2007.
- [Mbou 07b] M. Mboup, C. Join, and M. Fliess. "A revised look at numerical differentiation with an application to nonlinear feedback control". *Mediterranean Conference on Control Automation*, pp. 1–6, 2007.
- [Mbou 09] M. Mboup, C. Join, and M. Fliess. "Numerical differentiation with annihilators in noisy environment". *Numerical Algorithms*, Vol. 50, No. 4, pp. 439–467, 2009.
- [Mich 10] L. Michel, C. Join, M. Fliess, P. Sicard, and A. Cheriti. "Model-free control of dc/dc converters". In : *IEEE Workshop on Control and Modeling for Power Electronics*, pp. 1–8, 2010.
- [Miku 83] J. Mikusinski. *Operational calculus*. Vol. 1 and 2, Varsovie and Oxford University Press, Oxford, 1983.
- [Mood 14] H. Moodi and M. Farrokhi. "On observer-based controller design for Sugenô systems with unmeasurable premise variables". *ISA Transactions*, No. 0, p. , 2014.
- [Murr 97] R. Murray-Smith and T. Johansen. *Multiple Model Approaches To Non-linear Modelling And Control. Series in Systems and Control*, Taylor & Francis, 1997.

- [Nagy 09] A. M. Nagy, G. Mourot, B. Marx, G. Schutz, and J. Ragot. “Model structure simplification of a biological reactor”. In : *IFAC Symposium on System Identification*, 2009.
- [Neve 06] A. Neves, M. Mboup, and M. Fliess. “An algebraic receiver for full response CPM demodulation”. In : *International Telecommunications Symposium*, pp. 387–392, 2006.
- [ODwy 06] A. O’Dwyer. *Handbook of Pi And Pid Controller Tuning Rules*. Imperial College Press, 2006.
- [Park 03] C. Park. “LMI-based robust stability analysis for fuzzy feedback linearization regulators with its application”. *Inf. Sci.*, Vol. 152, pp. 287–301, 2003.
- [Park 04a] C.-W. Park and M. Park. “Adaptive Parameter Estimator Based on T-S Fuzzy Models and Its Applications to Indirect Adaptive Fuzzy Control Design”. *Inf. Sci. Inf. Comput. Sci.*, Vol. 159, No. 1-2, pp. 125–139, 2004.
- [Park 04b] C.-W. Park and Y.-W. Cho. “T-S model based indirect adaptive fuzzy control using online parameter estimation”. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics*, Vol. 34, No. 6, pp. 2293–2302, 2004.
- [Prem 01] E. Prempain and I. Postlethwaite. “Static output feedback stabilisation with H_1 performance for a class of plants”. *Systems and Control Letter*, Vol. 43, No. 6, pp. 159–166, 2001.
- [Proy 93] T. Proychev and R. Mishkov. “Transformation of nonlinear systems in observer canonical form with reduced dependency on derivatives of the input”. *Automatica*, Vol. 29, No. 2, pp. 495 – 498, 1993.
- [Ragh 94] S. Raghavan and J. K. Hedrick. “Observer design for a class of nonlinear systems”. *International Journal of Control*, Vol. 59, No. 2, pp. 515–528, 1994.
- [Raja 98] R. Rajamani. “Observers for Lipschitz nonlinear systems”. *IEE Trans. Autom. Control*, Vol. 43, pp. 397–401, 1998.
- [Rhee 06] B.-J. Rhee and S. Won. “A New Fuzzy Lyapunov Function Approach for a Takagi-Sugeno Fuzzy Control System Design”. *Fuzzy Sets Syst.*, Vol. 157, No. 9, pp. 1211–1228, 2006.
- [Riac 10] S. Riachy, Y. Bachalany, M. Mboup, and J.-P. Richard. “Differentiation numerique multivariable I : estimateurs algebriques et structure”. *Sixieme Conference Internationale Francophone d’Automatique Nancy*, 2010.
- [Sala 05] A. Sala, T. M. Guerra, and R. Babuka. “Perspectives of fuzzy systems and control”. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 156, No. 3, pp. 432 – 444, 2005.

- [Sala 07a] A. Sala and C. Arino. “Relaxed Stability and Performance Conditions for Takagi and Sugeno Fuzzy Systems With Knowledge on Membership Function Overlap”. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics*, Vol. 37, No. 3, pp. 727–732, 2007.
- [Sala 07b] A. Sala and C. Ariño. “Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control : Applications of Polya’s theorem”. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 158, No. 24, pp. 2671–2686, 2007. Theme : Modelling and Control.
- [Sala 08] A. Sala and T. M. Guerra. “Stability Analysis of Fuzzy Systems : Membership-Shape and Polynomial Approaches”. *Proceedings of IFAC World Congress, Seoul, South Korea*, Vol. 17, pp. 5605–5610, 2008.
- [Sche 97] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. “Multiobjective output-feedback control via LMI optimization”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, No. 7, pp. 896–911, 1997.
- [Sham 88] J. Shamma. *Analysis and Design of Gain Scheduled Control Systems*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering, 1988.
- [Sham 93] J. Shamma and J. Cloutier. “Gain-Scheduled Missile Autopilot Design Using Linear Parameter Varying Transformations”. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 16, No. 2, pp. 256–261, 1993.
- [Sham 99] J. Shamma and D. Xiong. “Set-valued methods for linear parameter varying systems”. *Automatica*, Vol. 35, pp. 1081–1089, 1999.
- [Sjob 95] J. Sjoberg, Q. Zhang, L. Ljung, A. Benveniste, B. Delyon, P.-Y. Glorennec, H. Hjalmarsson, and A. Juditsky. “Nonlinear black-box modeling in system identification : a unified overview”. *Automatica*, Vol. 31, No. 12, pp. 1691 – 1724, 1995.
- [Skaf 09] J. Skaf and S. Boyd. “Analysis and Synthesis of State-Feedback Controllers With Timing Jitter”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 54, No. 3, pp. 652–657, 2009.
- [SKaw 92] S.Kawamoto, K. Tada, A. Ishigame, and T. Taniguchi. “An approach to stability analysis of second order fuzzy systems”. In : *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pp. 1427–1434, 1992.
- [Sofi 13] N. A. Sofianos and Y. S. Boutalis. “Stable indirect adaptive switching control for fuzzy dynamical systems based on T- multiple models”. *International Journal of Systems Science*, Vol. 44, No. 8, pp. 1546–1565, 2013.
- [Song 97] R. Song, S. Ishijima, and A. Kojima. “Design of nonlinear observer by a backstepping approach”. *Electrical Engineering in Japan*, Vol. 121, No. 3, pp. 53–59, 1997.

- [Sont 89] E. Sontag. “Smooth stabilization implies coprime factorization”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 4, pp. 435–443, 1989.
- [Sont 95] E. Sontag and Y. Wang. “On characterizations of the input-to-state stability property”. *Systems & Control Letters*, Vol. 24, No. 5, pp. 351 – 359, 1995.
- [Stein 03] M. Steinbuch, R. van de Molengraft, and A. van der Voort. “Experimental modelling and LPV control of a motion system”. *Proceedings of the American Control Conference*, Vol. 2, pp. 1374 – 1379, 2003.
- [Stur 99] J. F. Sturm. “Using SeDuMi 1.02, A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones”. *Optimization Methods and Software*, Vol. 11, No. 1-4, pp. 625–653, 1999.
- [Syrm 97] V. Syrmos, C. Abdallah, P. Dorato, and K. Grigoriadis. “Static output feedback : a survey”. *Automatica*, Vol. 33, No. 2, pp. 125–137, 1997.
- [Taka 85] T. Takagi and M. Sugeno. “Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control”. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol. SMC-15, No. 1, pp. 116–132, 1985.
- [Tan 97] W. Tan. *Applications of Linear Parameter-Varying Control Theory*. PhD thesis, Dept. of Mechanical Engineering, University of California at Berkeley, Berkeley, 1997.
- [Tana 01] K. Tanaka, T. Hori, and H. Wang. “A fuzzy Lyapunov approach to fuzzy control system design”. In : *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 4790–4795, 2001.
- [Tana 03] K. Tanaka, T. Hori, and H. Wang. “A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems”. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 11, No. 4, pp. 582–589, 2003.
- [Tana 92] K. Tanaka and M. Sugeno. “Stability analysis and design of fuzzy control systems”. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 45, No. 2, pp. 135 – 156, 1992.
- [Tana 94] K. Tanaka and M. Sano. “On the concepts of regulator and observer of fuzzy control systems”. In : *Proceedings of the Third IEEE Conference on Fuzzy Systems IEEE World Congress on Computational Intelligence*, pp. 767–772, 1994.
- [Tana 96] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang. “Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control : quadratic stabilizability, H_∞ control theory, and linear matrix inequalities”. *IEEE T. Fuzzy Systems*, Vol. 4, No. 1, pp. 1–13, 1996.
- [Tana 98] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. Wang. “Fuzzy regulators and fuzzy observers : relaxed stability conditions and LMI-based designs”. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 6, No. 2, pp. 250–265, 1998.

- [Thau 73] F. Thau. “Observing the state of non-linear dynamic systems”. *International Journal of Control*, Vol. 18, No. 3, pp. 471–479, 1973.
- [Tiga 10] Z. Tiganj, M. Mboup, C. Pouzat, and L. Belkoura. “An Algebraic Method for Eye Blink Artifacts Detection in Single Channel EEG Recordings”. In : *International Conference on Biomagnetism Advances in Biomagnetism*, pp. 175–178, Dubrovnik, Croatia, 2010.
- [Tong 04] S. Tong, H.-X. Li, and W. Wang. “Observer-based adaptive fuzzy control for SISO nonlinear systems”. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 148, No. 3, pp. 355–376, 2004.
- [Trap 06] R. Trapero, H. Sira-Ramirez, and V. Batlle. “An algebraic approach to fast perturbed sinusoidal signal parameters identification”. *Proceedings of international conference on Modeling, identification, and control*, pp. 423–428, 2006.
- [Tuan 01] H. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, and Y. Yamamoto. “Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design”. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 9, No. 2, pp. 324–332, 2001.
- [Verd 05] V. Verdult and M. Verhaegen. “Kernel methods for subspace identification of multivariable LPV and bilinear systems”. *Automatica*, Vol. 41, No. 9, pp. 1557 – 1565, 2005.
- [Vill 09] J. Villagra, B. D’Andréa-Novel, S. Choi, M. Fliess, and H. Mounier. “Robust stop-and-go control strategy : an algebraic approach for nonlinear estimation and control”. *Int. J. Vehicle Autonomous Systems*, Vol. 7, No. 3-4, pp. 270–291, 2009.
- [Vill 10] J. Villagra, N. D. M. Brigitte, Fliess, and H. Mounier. “An algebraic approach for maximum friction estimation”. *IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, 2010.
- [Wang 96] H. Wang, K. Tanaka, and M. Griffin. “An approach to fuzzy control of nonlinear systems : stability and design issues”. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 4, No. 1, pp. 14–23, 1996.
- [Wang 97] L. Wang. *A Course in Fuzzy Systems and Control*. Prentice Hall PTR, 1997.
- [Wing 09] J. van Wingerden and M. Verhaegen. “Subspace identification of Bilinear and LPV systems for open- and closed-loop data”. *Automatica*, Vol. 45, No. 2, pp. 372–381, 2009.
- [Wouw 10] N. van de Wouw, P. Naghshtabrizi, M. B. G. Cloosterman, and J. P. Hespanha. “Tracking control for sampled-data systems with uncertain time-varying sampling intervals and delays”. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 20, No. 4, pp. 387–411, 2010.

- [Xiao 12] B. Xiao, Q. Hu, and Y. Zhang. “Adaptive Sliding Mode Fault Tolerant Attitude Tracking Control for Flexible Spacecraft Under Actuator Saturation”. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 20, No. 6, pp. 1605–1612, 2012.
- [Xiao 98] M. Xiao-Jun, Z. qi S., and H. Yan-Yan. “Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer”. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 6, No. 1, pp. 41–51, 1998.
- [Xu 05] S. Xu and J. Lam. “Robust H_∞ control for uncertain discrete-time-delay fuzzy systems via output feedback controllers”. *IEEE T. Fuzzy Systems*, Vol. 13, No. 1, pp. 82–93, 2005.
- [Yan 10] S. Yan and Z. Sun. “Study on separation principles for T-S fuzzy system with switching controller and switching observer”. *Neurocomputing*, Vol. 73, No. 13-15, pp. 2431–2438, 2010.
- [Yang 03] Y. Yang and J. Ren. “Adaptive fuzzy robust tracking controller design via small gain approach and its application”. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 11, No. 6, pp. 783–795, 2003.
- [Yone 01] J. Yoneyama, M. Nishikawa, H. Katayama, and A. Ichikawa. “Design of output feedback controllers for Takagi-Sugeno fuzzy systems”. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 121, No. 1, pp. 127–148, 2001.
- [Yone 06] J. Yoneyama. “Output feedback stabilization of fuzzy systems with unobservable premise variables”. In : *IEEE/SMC International Conference on System of Systems Engineering*, p. 6, 2006.
- [Yone 09] J. Yoneyama. “ H_∞ ; Filtering for Fuzzy Systems with Immeasurable Premise Variables : An Uncertain System Approach”. *Fuzzy Sets Syst.*, Vol. 160, No. 12, pp. 1738–1748, 2009.
- [Yu 10a] L. Yu, J. P. Barbot, G. Zheng, and H. Sun. “Toeplitz-structured Chaotic Sensing Matrix for Compressive Sensing”. In : *International Symposium on Communication Systems Networks and Digital Signal Processing*, pp. 229–233, 2010.
- [Yu 10b] L. Yu, J. P. Barbot, G. Zheng, and H. Sun. “Compressive Sensing With Chaotic Sequence”. *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 17, No. 8, pp. 731–734, 2010.
- [Zeit 87] M. Zeitz. “The extended Luenberger observer for nonlinear systems”. *Systems and Control Letters*, Vol. 9, No. 2, pp. 149 – 156, 1987.
- [Zera 08] M. Zerar, K. Guelton, and N. Manamanni. “Linear fractional transformation based H-infinity output stabilization for Takagi-Sugeno fuzzy models”. *Mediterranean Journal of Measurement and Control*, Vol. 4, No. 3, pp. 111–121, 2008.

-
- [Zhan 01] W. Zhang, M. Branicky, and S. Phillips. “Stability of networked control systems”. *IEEE on Control Systems*, Vol. 21, No. 1, pp. 84–99, 2001.
- [Zhen 09] G. Zheng, D. Boutat, T. Floquet, and J. Barbot. “Secure communication based on multi-input multi-output chaotic system with large message amplitude”. *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 41, No. 3, pp. 1510 – 1517, 2009.

Commande Robuste des Systèmes à Paramètres Variables

Résumé : Les travaux de cette thèse portent sur l'analyse de stabilité et la synthèse de commandes robustes pour les systèmes non linéaires. La conception des contrôleurs/observateurs nécessite souvent la connaissance totale ou partielle du modèle du procédé à contrôler. Néanmoins, l'obtention d'un modèle à la fois exploitable et suffisamment fidèle est difficile et chronophage, ce qui provoque l'augmentation du coût total de développement d'un système d'asservissement. Afin de réduire la quantité ainsi que la qualité des informations nécessaires sur le système, de nouvelles méthodes de synthèse d'observateurs et de contrôleurs ont été développées dans cette thèse. En effet, si le modèle est connu, une loi de commande par retour de sortie à base d'observateur de type Luenberger a été proposée. Dans le cas où peu d'informations sont disponibles, une loi de commande à modèle restreint ("sans modèle") a été développée. Afin d'estimer l'état du système, des dérivateurs/estimateurs non-asymptotiques tel que les dérivateurs numériques basés sur l'algèbre différentielle ou encore les dérivateurs asymptotiques tels que les observateurs et les filtres ont été considérés. Les deux lois de commande proposées ont permis de conserver l'aspect non linéaire du système ainsi que d'obtenir des résultats les plus généraux que possible en reformulant les problèmes sous la forme de systèmes polytopiques convexes.

Mots-clés : Commande robuste, Systèmes non linéaires, Commande à modèle restreint, Polytopes Convexes, Estimateurs/Dérivateurs, Contrôleurs/Observateurs.

Robust Control for Time Varying Parameters Systems

Abstract : This work focuses on the stability analysis and the robust control synthesis for nonlinear systems. The design of controllers/observers often require a complete or partial knowledge of the process model to control. Nevertheless, obtaining a model both reliable and sufficiently accurate is not only difficult and time-consuming but also it increases the total development cost of a control system. In order to reduce the quantity and quality of informations required on the system, new methods of observers and controllers synthesis have been proposed. With known models, an output feedback controller based Luenberger observer was proposed. In case where few informations are available, a restricted-model ("model-free") controller is proposed. In order to estimate the system state, non-asymptotic derivators /estimators based on differential algebra or asymptotic ones such as observers or filters have been considered. Both of these control laws have allow to maintain the nonlinear aspects of the system and to obtain general results by reformulating the problem into convex polytopic systems forms.

Keywords : Robust control, Non-linear systems, Model-free control, Convex polytopes, Estimator/Derivator, Controller/Observer.

