

Université Lille 1 - Sciences et Technologies

Rapport de thèse présenté pour l'obtention du titre

Docteur de l'Université de Lille 1

Spécialité : Mécanique

Présentée par : **Franck N'GUYEN**

Morphologie mathématique appliquée au développement d'outils de maillage EF automatiques dans le cas de microstructures hétérogènes bi et multi-phasées

Soutenue publiquement le 11 Décembre 2014 devant le jury composé de :

- **Rapporteurs :**

Alain RASSINEUX, Professeur, Université de Technologie de Compiègne

Fayssal BENKHALDOUN, Professeur, Institut Galilée, Université Paris 13

- **Examineurs :**

Samuel FOREST, Directeur de recherche, MINES-ParisTech / CNRS

Christian LANTUÉJOUL, Directeur de recherche, MINES-ParisTech / CNRS

Gaétan HELLO, Maître de Conférences, Université d'Évry Val d'Essonne

Toufik KANIT, Maître de Conférences HDR, Maître de Thèse, Université de Lille 1

Abdellatif IMAD, Professeur, Directeur de thèse, Université de Lille 1

Remerciements

Je souhaite remercier, en premier lieu, l'ensemble des membres de mon jury pour avoir accepté de contribuer à l'évaluation de mon travail de thèse et M. Christian Lantuéjoul d'en avoir accepté la présidence.

Je remercie mes deux rapporteurs M. Fayssal Benkhaldoun pour, ses nombreuses questions, ainsi que pour nos vifs échanges, lors de la soutenance, qui témoignent de sa grande curiosité mathématique. Et je remercie M. Alain Rassineux pour son rapport complet et très riche. Votre expertise dans le domaine des mathématiques appliquées au maillage à été des plus intéressante et constructive même si nos outils mathématiques sont fondamentalement distincts. Je vous remercie, personnellement, pour les discussions que nous avons eues pendant la soutenance, et qui, je l'espère sincèrement, ne s'arrêteront pas à la réception de mon manuscrit définitif.

Parmi les membres examinateurs du jury, je voudrais exprimer ma profonde gratitude à Christian Lantuéjoul, auto-qualifié de "vieux dinosaure" mais qui est l'un des pères fondateurs de la morphologie mathématique puis de la géostatistique de l'Ecole de Mines de Paris. Ses remarques ainsi que son regard sur mon travail de thèse sont autant de conseils à suivre à la lettre dans le futur. Je remercie bien évidemment et aussi tout particulièrement Samuel Forest dont nos collaborations depuis 2003 ont largement contribué à mon éducation scientifique. Dés lors je m'attache à suivre tes conseils qui m'ont toujours guidé vers le bon objectif.

J'adresse un sincère remerciement à mon directeur de thèse Abdellatif Imad qui à fait preuve d'une gigantesque ouverture d'esprit pour m'accueillir dans son laboratoire de mécanique alors que ma thèse ne contient pas, ou si peu, le moindre gramme de cette discipline.

Comment remercier mon maître de thèse Toufik Kanit qui m'a toujours témoigné une confiance inoxydables et sans qui je ne serais pas entrain d'écrire ces lignes. Tu es le point initial de ma thèse sans qui, rien n'aurait été possible.

J'aimerais, à présent adresser mes remerciements les plus sincères à Francis Maison-neuve professeur de mathématique de l'École des Mines pour ses précieux conseils et son aide essentielle dans le développement théorique de concepts bien délicats à manipuler.

Je voudrais remercier bien entendu Michel Schmidt ancien directeur du centre de géostatistique de l'Ecole des Mines dont l'expertise mathématique m'a permis de construire les premiers éléments de ma thèse. Son ouvrage, "Morphologie mathématique" est un vé-

ritable outil de recherche pédagogique permettant d'appréhender des fonctions, parfois nouvellement écrites, de cette thématique.

Dans un périmètre à peine plus éloigné, je remercie bien entendu Dominique Jeulin avec lequel les échanges et les collaborations ont toujours été enrichissantes. Dominique fait partie des personnes qui ont été à la source de mon engagement pour la Morphologie Mathématique. Enfin je voudrais remercier François Grillon qui, il y a maintenant bien longtemps, a pris le pari de développer l'analyse d'image au Centre des Matériaux, et qui m'a transmis ses connaissances - car sa vocation était de transmettre l'intégralité de son savoir - et d'en assurer mon éducation scientifique dans le domaine de l'imagerie.

Dans un périmètre encore plus lointain, il devient difficile de dresser une liste exhaustive, des acteurs, thésards, chercheurs, qui, par leur travaux conjoints, ou leurs discussions ont contribué, brique après brique à mon façonnage scientifique. Merci donc à Aurélie, Delphine, Toufik, Hervé, Jean Marc, Laurent, Benjamin, Nikolay, Céline, Kamel, Thierry, Antony, Justin, etc ..., La liste est si longue...

Je voudrais évidemment remercier mes proches qui m'ont donné le courage de me lancer dans cette aventure, ma mère et mon épouse bien sûr, mais aussi mes deux affreux : chaton et chouchounette laquelle a toujours pris un malin plaisir à s'intercaler entre l'ordinateur et moi. Enfin à la frontière de la famille, mes meilleurs amis de Trémoins et de Tours \Leftrightarrow Paris qui témoignent d'un soutien indéfectible, véritable ciment d'une vie.

Paris, le 5, Février 2015

Franck N'Guyen

Résumé

Au travers ce manuscrit, nous proposons une méthode de description exhaustive d'une microstructure 2D et 3D afin d'en extraire des composantes morphologiques pertinentes qui seront la base d'une triangulation surfacique. Nous proposons cette structure triangulaire morphologiquement optimisée comme base d'entrée d'un des nombreux codes commerciaux de maillage qui utilise comme source d'entrée une description vectorielle d'une image 2D ou une triangulation surfacique d'une image 3D. Ces outils de maillage seront utilisés dans le cadre d'un calcul élément fini afin d'évaluer la pertinence morphologique de notre triangulation. La base expérimentale de notre étude est la représentation discrète d'une image composée de pixels en 2D ou de voxels en 3D. Cette représentation nous permet d'utiliser des outils de la morphologie mathématique qui par ses concepts topologiques ou probabilistes, permet une application directe sur les images lorsqu'elles sont constituées de deux (cas ensembliste) ou de plusieurs phases (cas fonctionnel).

Les descripteurs morphologiques d'une image 2D sont simples et exhaustifs. Une image peut être simplement définie par une description vectorielle du contour des objets et éventuellement par des points de rencontre ou de contact entre les différentes phases qui la composent. La simplicité d'analyse des composantes de l'image en 2D conduit à considérer la procédure de triangulation d'une image multiphasée comme une variante de celle utilisée dans le cas d'une image biphasée. Dans le cas 2D, ces outils morphologiques permettent l'identification de ces composantes mais aussi d'établir, de façon fidèle à la morphologie des phases, un échantillonnage judicieux de marqueurs morphologiques qui pourront affiner la triangulation. En deux dimensions il existe plusieurs méthodes de triangulation mais il nous a semblé que la triangulation de Delaunay, par son respect morphologique du contour de chacun des objets, est l'outil le plus approprié pour cette étude. En trois dimensions, nous scindons le cas biphasé du cas multiphasé. Dans le cas biphasé nous étudions les limites de la morphologie mathématique dont les outils peuvent encore être utilisés dans quelques étapes de la triangulation comme la définition de surface des objets dans l'image. La triangulation proprement dite sera réalisée par des outils morphologiques originaux.

Le cas multiphasé est beaucoup plus complexe Les descripteurs morphologiques sont au nombre de trois. Ils sont définis par la surface de contact entre les phases, les bords de ces surfaces et éventuellement les points de bords multiples qui sont communs à plusieurs phases. Ces composantes ne sont plus définissables simplement et uniquement par les outils morphologiques classiques et l'établissement de nouveaux concepts mathématiques donnant lieu à des propositions et parfois des preuves, est nécessaire. Ces nouveaux outils vont nous permettre à la fois de réaliser une description fidèle des composantes de l'image, mais aussi de proposer une méthode originale de triangulation de ces surfaces. On note que la procédure établie dans le cadre d'une image multiphasée 3D devient, bien évidemment, applicable dans le cas biphasé 3D.



Table des matières

I	Etude bibliographique : Maillage des microstructures des matériaux hétérogènes 2D et 3D, bi et multiphasés	7
I.1	Introduction	9
I.2	Maillage des microstructures 2D bi et multiphasées	10
I.2.1	Introduction	10
I.2.2	Méthodes surfaciques.	10
I.2.2.1	Maillage par quadrillage	10
I.2.2.2	Maillage par le "morphing" d'une image et d'un maillage	11
I.2.2.3	Maillage par convergence du maillage sur une forme	12
I.2.2.4	Maillage par quadtree	13
I.2.2.5	Triangulation duale d'un Voronoï Centroidal 2D	14
I.2.2.6	La triangulation de Delaunay	15
I.2.2.7	Maillage par triangulation de Delaunay suivi d'une décimation de triangles	16
I.2.3	Maillage par la détection du contour des phases.	17
I.2.3.1	Problématique liée à la détection du contour des phases	18
I.2.3.2	Maillage par la technique du <i>Marching Square (MS)</i>	18
I.2.3.3	Méthode de résolution du <i>Marching Square</i>	21
I.2.3.4	Méthode alternative au <i>Marching Square</i>	22
I.2.3.5	Technique de subdivision des pixels	22
I.2.3.6	Le <i>Marching Triangle</i>	22
I.2.3.7	Maillage par approximation parabolique	23
I.2.3.8	Approche frontale	23
I.2.4	Synthèse des maillages de microstructure 2D	24
I.3	Maillage des microstructures biphasées 3D	26
I.3.1	Introduction	26
I.3.2	Maillage volumique.	28
I.3.2.1	Approche frontale	28
I.3.2.2	Approche type Delaunay 3D	28
I.3.2.3	Approche par octree	30
I.3.2.4	Morphing image/maillage	30

I.3.2.5	Triangulation duale d'un Voronoï Centroidal 3D	31
I.3.3	Maillage surfacique	31
I.3.4	Extraction des surfaces des phases	32
I.3.4.1	Triangulation surfacique	33
I.3.4.2	Triangulation de surface explicite	33
I.3.4.3	Triangulation des surfaces implicites	34
I.3.4.4	Méthodes type Marching	34
I.3.4.5	Marching Diamond (MD)	38
I.3.5	Synthèse de l'étude des microstructures 3D biphasées	38
I.4	Maillage des microstructures multiphasées 3D	39
I.4.1	Maillage par contraintes géométriques	39
I.4.2	Maillage par triangulation de Delaunay	41
I.4.3	Maillage par approximation géométrique de la surface	41
I.4.3.1	Marching Cube Multiphasé	41
I.4.3.2	Marching tetrahedra Multiphasé	41
I.4.3.3	Méthode Hybride	41
I.4.3.4	Méthode par projection	42
I.4.3.5	Maillage de surface implicite	42
I.4.4	Synthèse de l'étude des microstructures 3D biphasées	42
II	Outils de la morphologie mathématique	43
II.1	Qu'est ce qu'une image ?	45
II.1.1	Généralités	45
II.1.2	Représentation d'une image dans un espace discret	45
II.1.3	Configurations de voisinage	46
II.1.3.1	Configurations 2D	46
II.1.3.2	Configurations 3D	46
II.2	Notion de phases d'une image	48
II.3	Lien entre les ensembles et les fonctions	49
II.4	Morphologie mathématique	50
II.5	Métrie géodésique	51
II.6	Quelques opérateurs morphologiques	51
II.6.1	Cas euclidien	52
II.6.1.1	Dilatation et érosion	52
II.6.1.2	Fermeture et ouverture d'une image	54
II.6.1.3	Gradient d'une image	54
II.6.2	Cas géodésique	56
II.6.2.1	Dilatation géodésique et Reconstruction géodésique	56
II.6.3	Squelette d'une image	58
II.6.4	Détection des points d'extrémité du squelette	59
II.7	Calcul des frontières d'un processus ponctuel	60

II.7.1	Processus ponctuel	61
II.7.2	Diagramme de Voronoï.	61
II.7.3	Fonction distance.	62
II.7.4	Ligne de partage des eaux	64
II.8	Synthèse	67

III Maillage de microstructures hétérogènes 2D à formes complexes utilisant les outils de la morphologie mathématique **69**

III.1	Triangulation de Delaunay contrainte appliquée aux microstructures biphasées 2D	71
III.1.1	Choix d'une microstructure biphasée	71
III.1.2	Détermination morphologique du contour de l'image	72
III.1.3	Echantillonnage des points sur l'image du gradient	73
III.1.4	Détection des points remarquables d'une image	74
III.1.4.1	Points remarquables sur les parties convexes de X	75
III.1.4.2	Points remarquables sur les parties concave de X	76
III.1.4.3	Réunion des points remarquables	76
III.1.5	Construction des vecteurs du contour	77
III.1.6	Echantillonnage adaptatif des points de triangulation.	79
III.1.7	Implantation des points dans X	80
III.1.8	Résultats de la triangulation morphologique de Delaunay contrainte.	82
III.1.8.1	Triangulation de l'ensemble X	82
III.1.8.2	Triangulation du complémentaire de l'ensemble X	83
III.1.9	Densification contrôlée de la triangulation.	84
III.1.9.1	Densification morphologique	84
III.1.9.2	Contrôle de la "dédensification" interne θ	87
III.1.10	Qualité du maillage	87
III.1.10.1	Nombre d'éléments	88
III.1.10.2	Distance de Hausdorff	88
III.1.10.3	Vérification du maillage par calcul EF	89
III.1.11	Optimisation du maillage	90
III.1.11.1	Comparaison avec le Marching Square	92
III.1.12	Synthèse	94
III.2	Triangulation de Delaunay contrainte appliquée aux microstructures multiphasées 2D	94
III.2.1	Choix d'une image	94
III.2.2	Détermination du contour d'une image multiphasée.	95
III.2.3	Détermination des points remarquables	96
III.2.3.1	Détection des points remarquables	96
III.2.3.2	Détection des points d'échantillonnage	97

III.2.3.3	Vérification du maillage par un calcul EF	100
III.3	Organigramme de la triangulation contrainte de Delaunay 2D	102
III.4	Choix des microstructures réelles	104
III.4.1	Cas biphasé	104
III.4.1.1	Description du matériau	104
III.4.1.2	Traitement de l'image	105
III.4.1.3	Application de la procédure du maillage sur l'image	109
III.4.1.4	vérification du maillage par un calcul EF.	110
III.4.2	Cas multiphasé	112
III.4.2.1	Description du matériau	112
III.4.2.2	Traitement de l'image	112
III.4.2.3	Vérification du maillage par un calcul EF	114
III.4.2.4	Synthèse	115
IV	Maillage d'une microstructure 3D biphasée	117
IV.1	Choix d'une microstructure 3D biphasée	119
IV.2	Maillage d'une microstructure biphasée 3D	119
IV.2.1	Contour de la microstructure	120
IV.2.2	Sélections des points sur le contour des objets.	121
IV.2.2.1	Sélection de points par le "hit and run" 3D	121
IV.2.2.2	Sélection de points sur les contours remarquables d'une image	121
IV.2.2.3	Densification morphologique contrôlée	124
IV.3	Problématique liée à la triangulation des points de surface	126
IV.3.1	Problématique liée à la construction du dual Voronoï/Delaunay	126
IV.3.1.1	Condition de la frontière commune unique	127
IV.3.1.2	Adjacence sur un point de trois cellules	131
IV.3.1.3	Homéomorphisme à un disque en 2D ou une sphère en 3D	131
IV.3.1.4	Synthèse sur la problématique du passage dual Voronoï/Delaunay	131
IV.4	Définition d'un graphe interne aux cellules du Voronoï	132
IV.4.1	Le graphe-M	132
IV.4.2	Composantes nécessaires à la construction du graphe-M	133
IV.5	Construction morphologique du Graphe-M	133
IV.5.1	Diagramme de Voronoï géodésique et fonction distance géodésique	133
IV.5.1.1	Cas géodésique	134
IV.5.2	Lieux remarquables de la fonction distance	135
IV.5.2.1	Définition des points multiples sur la fonction distance	136
IV.5.3	Définition d'un parcours géodésique associé aux cellules du Voronoï	139
IV.5.4	Labellisation des cellules de Voronoï géodésique	140
IV.5.4.1	Vérification de la qualité des polygones	141
IV.5.5	Définition du Graphe-M sur une cellule de Voronoï géodésique	143

IV.5.6	Conservation de la morphologie des arêtes du cylindre	144
IV.5.7	Résultats de la triangulation	145
IV.5.8	Distance de Hausdorff 3D	147
IV.5.9	Organigramme de la triangulation morphologique d'une micro- structure biphasée 3D	148
IV.6	Généralisation de la méthode	150
IV.6.1	Génération de la microstructure 3D biphasée	150
IV.6.2	Résultat de la triangulation et maillage volumique	151
IV.6.3	Vérification du maillage par un calcul EF	153
IV.7	Maillage des exemples tests	155
IV.8	Synthèse	157
V	Maillage d'une microstructure multiphasée 3D	159
V.1	Introduction	161
V.2	Démarche du maillage d'une microstructure 3D multiphasée	161
V.2.1	Problématique liée aux bords de surface d'un Voronoï	162
V.3	Choix d'une microstructure multiphasée	163
V.4	Composition d'une microstructure multiphasée	166
V.5	Définition des composantes connexes de l'image	167
V.5.1	Problématiques liées à la définition du contour d'une image multiphasée.	167
V.5.1.1	Problème de parité	167
V.5.1.2	Idée	168
V.5.2	Trame dédoublée	169
V.5.2.1	Définition des composante connexes sur la trame dédoublée sur une coupe	169
V.5.2.2	Définition des composantes connexes sur la trame dédou- blée sur l'image 3D	171
V.5.3	Adjonction des surfaces mitoyennes aux phases de l'image	182
V.6	Triangulation des surfaces des phases	185
V.6.1	Choix d'une triangulation	185
V.6.2	Voronoï géodésique ou fonction label ensembliste	187
V.6.3	Construction du graphe-M sur le Voronoï ensembliste.	189
V.6.3.1	Principe du Graphe-M	190
V.6.4	Définition de germes supplémentaires sur chaque courbe C com- posante connexe du bord.	193
V.6.4.1	Définition des germes dans Σ_1	193
V.7	Résultat de la triangulation morphologique	194
V.7.1	Triangulation d'une surface	194
V.7.2	Triangulation des surfaces d'une phase	194
V.7.3	Triangulation de l'ensemble de l'image et maillage volumique.	196

TABLE DES MATIÈRES

V.7.4	Variation du pas de triangulation	198
V.7.5	Vérification du maillage par un calcul EF	201
V.7.6	Organigramme de la procédure de maillage des microstructures multiphasée 3D.	202
V.8	Comparaison avec le Marching Cube	203
V.9	Synthèse	204
A	Détermination des paramètres morphologiques des composantes d'une image	209
A.1	Analyse individuelle	209
A.2	Analyse globale	210
A.2.1	Granulométrie par ouverture.	210
A.2.1.1	Définition générale	210
A.2.1.2	Application au calcul d'épaisseur de forme	212

Table des figures

1	CAO 3D.	1
2	a) Image MRI d'une tête humaine, b) phases représentatives d'un cerveau, c) Mousse de Nickel 3D.	2
I.1	Images biphasée (a) et multiphasée (b).	9
I.2	Image biphasée.	11
I.3	Grille régulière.	11
I.4	Maillage : un élément fini par pixel.	11
I.5	Déraffinage du maillage par Yams.	11
I.6	Effet d'escalier persistant.	11
I.7	Maillage par le logiciel OOF : Object Oriented Finite element, (a) super- position d'un maillage grossier, (b) convergence réciproque de l'image avec le maillage, (c) maillage de l'image.	12
I.8	Ajustement du maillage au contour de l'image. (a) Image d'un cercle, (b) superposition d'un premier maillage et localisation des triangles qui inter- sectent le contour, (c) ajustement des nœuds des triangles identifiés sur le contour du cercle, (d) maillage final.	13
I.9	Quadtrees. (a) motif du découpage en quadtree, (b) parcours de l'image par le motif, (c) partitionnement hiérarchique de la microstructure, (d) découpage très fin sur les bords de l'image	14
I.10	(a) image biphasée, (b) Voronoï centroïdal 2D, (c) maillage dual du Voronoï centroïdal.	15
I.11	Cercle vide.	15
I.12	Points de triangulation 2D.	15
I.13	Triangulation de Delaunay.	15
I.14	(a) Image originale , (b) triangulation de Delaunay, (c) décimation des triangles indésirables.	16
I.15	(a) Image originale , (b) triangulation de Delaunay, (c) décimation des triangles indésirables.	16
I.16	Maillage de Polygones.	17
I.17	Maillage semi automatique d'une image EBSD.	17
I.18	Carré élémentaire du Marching Square.	19

TABLE DES FIGURES

I.19	Marching Square binaire en 2D.	19
I.20	Marching Square biphasé. a) Microstructure biphasée, b) premier maillage fin, c) remaillage.	20
I.21	Détail sur l'image multiphasée 2D.	20
I.22	Premier maillage.	20
I.23	Remaillage.	20
I.24	Nœud de la face centrée.	21
I.25	Marching Square multiple 2D.	21
I.26	Dual contouring.	21
I.27	Subdivision de pixels.	22
I.28	Marching triangle.	22
I.29	Approximation parabolique du contour.	23
I.30	Maillage frontal 2D.	24
I.31	2-simplexe entre trois voxels.	26
I.32	Remaillage par Yams.	27
I.33	Delaunay 3D.	29
I.34	Octree	30
I.35	Logiciel OOF 3D.	31
I.36	Voronoi centroïdal 3D.	31
I.37	Composante d'un voxel.	32
I.38	Contour d'une image par des voxels.	32
I.39	Contour d'une image par des surfels.	32
I.40	Paradoxe de Jordan en topologie algébrique.	33
I.41	Projection surfacique.	34
I.42	Marching 3D biphasé.	35
I.43	Table d'indirection du Marching Cube [Lorensen and Cline, 1987].	36
I.44	Trou d'une des configurations du Marching Cube.	37
I.45	Table d'indirection du Marching Tétraédra.	37
I.46	Protect balls.	40
I.47	Voronoi 3D [Voronoi, 1908a].	40
I.48	Subdivision de faces des phases.	41
II.1	Représentation continue (a) et discrète (b) d'une image 2D.	45
II.2	Représentation continue et discrète (a) d'une image 3D (b).	46
II.3	Connexités d'un pixel : (a) pixel central, (b) voisin direct de (a), (c) voisin axiaux de (a), (d) voisin direct et axiaux de (a).	46
II.4	Connexités d'un voxel, (a) pixel central,(b) voisin direct de (a), (c) voisin axiaux de (a), (d) voisin faible de (a).	47
II.5	Voisins faibles ou naturels.	47
II.6	Nombre d'objets par connexité.	48
II.7	Représentation ensembliste ou fonctionnelle d'une image.	49

II.8	Fonction de répartition de l'image.	49
II.9	Equivalence entre ensemble et fonction.	50
II.10	Georges MATHERON (1930 – 2000).	50
II.11	Distance géodésique.	51
II.12	Dilatation et érosion binaire de X	53
II.13	Erosion et dilatation fonctionnelles.	53
II.14	Gradient fonctionnel symétrique.	55
II.15	Gradient fonctionnel supérieur.	55
II.16	Gradient fonctionnel inférieur.	56
II.17	Itération de la dilatation géodésique (a) ensemble X initial, (b) implanta- tion de Y dans X , (c) première dilatation géodésique de Y conditionnement X , (d) deuxième dilatation géodésique.	57
II.18	Reconstruction géodésique.	58
II.19	Squelette de X	59
II.20	$HTM(X)$, (a) ensemble (X) initial (b) élément structurant composite, (c) résultat de la transformation du $HMT(X)$	60
II.21	Procédus ponctuel de Poisson.	61
II.22	Cellules de Voronoï des germes g	62
II.23	Fonction distance 2D.	63
II.24	Correction de la propagation.	63
II.25	Fonction distance sur germes.	64
II.26	Représentation de f en pseudo 3D.	65
II.27	Représentation de f en pseudo 3D.	65
II.28	Inondation des marqueurs CB_{mi}	66
III.1	Triangulation de Delaunay contrainte.	71
III.2	Forme arbitraire complexe X	72
III.3	Gradient morphologique ensembliste et de la matrice image de X	73
III.4	Positionnement de P_0 sur un point remarquable de X	74
III.5	Ensembles des points remarquables sur les convexités(en rouge) et sur les concavités (en vert) de X	74
III.6	Squelette de X	75
III.7	Détection des points remarquables sur les parties convexes de X	76
III.8	Détection des points remarquables sur les parties concaves de X	76
III.9	Points simples sur (a) $S_q(X)$, (b) $S_q(X^c)$, (c) union morphologique des points sur le gradient $\partial^-(X)$	77
III.10	Construction des vecteurs géodésiques.	78
III.11	Erreur euclidienne.	79
III.12	Erreur de non injectivité.	79
III.13	Echantillonnage adaptatif.	80
III.14	Construction itérative du Hit and run (a) implantation de densité θ (b).	81

TABLE DES FIGURES

III.15	Réunion de l'ensemble des points de triangulation.	82
III.16	Triangulation de Delaunay contrainte de X	83
III.17	Maillage de la microstructure biphasée.	84
III.18	Identification des zones fines de X	85
III.19	Identification des zones fines du contour de X	86
III.20	Densification contrôlée.	86
III.21	Densité de maillage (a) θ_1 , (b) $\theta_2 = \frac{1}{2}\theta_1$, (c) $\theta_3 = \frac{1}{5}\theta_1$	87
III.22	Conformité des triangles pour un calcul EF.	87
III.23	Distance de Hausdorff.	89
III.24	Mécanisme de chargement mécanique 2D.	89
III.25	Représentation du champ de déplacement U_1 dans la direction x	90
III.26	Redécoupage optimisé.	91
III.27	Frontal mesh by Yams.	92
III.28	"Escaliers" du Marching square.	93
III.29	Désensification du Marching square.	93
III.30	Image multiphasée.	95
III.31	Gradient de Beucher sur f	96
III.32	a) Union des $S_q(f)$, b) Squelette non connexe avec le contour de la phase, c) squelette connexe avec le contour de la phase.	97
III.33	Points remarquables sur les points multiples du gradient f	98
III.34	Points remarquables sur le gradient f	99
III.35	Triangulation multiphasée.	100
III.36	Calcul EF sur le maillage du matériau hétérogène multiphasé.	101
III.37	Organigramme de la triangulation contrainte de Delaunay appliquée aux microstructures bi et multiphasées	103
III.38	Image MEB d'agglomérat de particules d'argent.	104
III.39	Histogramme de niveau de gris de l'image.	105
III.40	Résultat de la binarisation de l'image.	107
III.41	Image après traitements morphologiques	108
III.42	Détail agrandi de la superposition de l'image binaire sur l'image à teinte de gris.	108
III.43	Résultat de la triangulation morphologique.	109
III.44	Détail de l'image avec le maillage des deux phases associées.	110
III.45	Champ de déplacement U_1 dans la direction x	111
III.46	EBSD de cuivre.	112
III.47	Image après traitements morphologiques	113
III.48	Maillage d'une image EBSD.	114
III.49	Champ de déplacement U_1 dans la direction x	115
IV.1	Microstructures 3D biphasée.	119
IV.2	Gradient inférieur d_6, d_{26}	120

IV.3	Hit and Run 3D.	121
IV.4	(a) Squelette de X , (b) superposition du squelette sur le contour de X , (c) localisation des intersections entre le squelette et contour de X , (d) échantillonnage différencié de points sur ces intersections.	123
IV.5	(a) Squelette de X^c , (b) (c) localisation des intersections entre le squelette et contour de X^c sous différents angles, (d) échantillonnage différencié de points sur ces intersections.	123
IV.6	Localisation morphologique de P_X	124
IV.7	Densification locale sur P_x	125
IV.8	(e) Union des processus ponctuels G sur $\partial^-(X)$ issus du (a) hit and run 3D global de X , de (b) $front(X)$, de (c) $front(X^c)$, et de (d) P_X	125
IV.9	Localisation du plus proche voisin.	126
IV.10	Graphe de Delaunay 2D.	127
IV.11	(a) Concavité des cellules, (b) concavité beaucoup plus importante des cellules.	128
IV.12	Diagramme de Voronoï 2D discret	128
IV.13	Non unicité des géodésiques.	129
IV.14	Cocyclicité.	131
IV.15	Graphe-M.	132
IV.16	Convexité des cellules de la fonction distance.	134
IV.17	Fonction distance 3D euclidienne.	134
IV.18	Fonction distance géodésique.	135
IV.19	Zones remarquables de fonction distance.	136
IV.20	Reconstruction géodésique de $f - c$	137
IV.21	Maximas locaux 2D.	138
IV.22	Maximas locaux 3D.	138
IV.23	lpe 3D de f	139
IV.24	Superposition des marqueur sur la $lpe(f)$	140
IV.25	(a) Labéllisation $\mathcal{L}(\mathcal{M}_X)$, (b) cellules fortement connexes M_X	141
IV.26	Polygone.	142
IV.27	Répartition des premiers voisins.	142
IV.28	Surface des cellules.	142
IV.29	Chemin géodésique sur les cellules.	143
IV.30	Définition des triangles du Graphe-M.	144
IV.31	(a) Cellules du bord de X , (b) superposition de la frontière ($front(X)$) et du contour de X ($\partial^-(X)$).	144
IV.32	(a) Points additionnels sur la lpe ., (b) Graphe-M sur une cellule apparte- nant à la frontière ($front(X)$).	145
IV.33	Triangulation morphologique.	146
IV.34	Raffinement morphologique.	147
IV.35	Distance de Hausdorff 3D.	147

IV.36	Organigramme de la triangulation morphologique d'une microstructure bi-phasée 3D	149
IV.38	Schéma booléen de cylindre.	150
IV.37	Fibre orientée.	150
IV.39	Triangulation de X	151
IV.40	Amas de fibre de la figure IV.38 (a).	151
IV.41	Maillage des cylindres et du complémentaire de l'image.	152
IV.42	Chargement mécanique 3D.	153
IV.43	Champ de déplacement U_1 dans la direction x	154
IV.44	Voronoi géodésique sur la bouteille de Klein.	155
IV.45	Triangulation sur la bouteille de Klein.	155
IV.46	Voronoi géodésique sur "Stanford Bunny".	156
IV.47	Triangulation sur "Stanford Bunny".	156
IV.48	Voronoi géodésique sur "Elephant".	156
IV.49	Triangulation sur "Elephant".	156
V.1	Effet de bord de la triangulation duale. a) Surface algébrique, b) surface discrétisée, c) Voronoi géodésique, d) Discontinuité de la triangulation duale, e) Détail sur les cellules 1 et 2 non mitoyennes par la cellule 3, f) Détail d'un élément triangulaire manquant au bord de la surface	163
V.2	Schéma de feuilles mortes de sphères.	164
V.3	Caractéristiques morphologiques de l'image.	165
V.4	Contact ponctuel.	165
V.5	Représentation discrète d'une microstructure multiphasée. a) volume 3D, b) coupe 2D du volume 3D.	166
V.6	Différentes phases de l'image.	167
V.7	Gradient morphologique sur une image multiphasée. a) Coupe de l'image, b) gradient fort, c) gradient faible, d,e) place du gradient dans l'image	168
V.8	Courbe d_4 simple.	171
V.9	Composantes connexes 2D.	171
V.10	Composantes connexes 3D.	182
V.11	Labellisation des différentes composantes connexes 3D.	182
V.12	Surfaces adjointes à une phase.	183
V.13	Surfaces adjointes à une phase.	183
V.14	Définition exacte de l'arête centrale.	184
V.15	Σ sur une phase.	184
V.16	Paradoxe de Delaunay.	186
V.17	Triangle erronés.	186
V.18	Singleton sur Σ	187
V.19	Idempotence de la propagation.	188
V.20	Maximas locaux sur Voronoi géodésique.	191

TABLE DES FIGURES

V.21	Echantillonnage sur C	193
V.22	Triangulation de surface par le Graphe-M.	194
V.23	Triangulation simple d'une phase.	195
V.24	Triangulation "affinée" par une densification de Σ et de C	195
V.25	Construction itérative de la triangulation.	196
V.26	Conversion de la triangulation en maillage tétraédrique.	197
V.27	Triangulation morphologique adaptative, a) Phase voxélisée, b) triangulation surfacique morphologique, c) maillage volumique.	198
V.28	Triangulation limite.	199
V.29	Efet d'escalier.	200
V.30	Champ de déplacement U_1 dans la direction x	201
V.31	Organigramme de la triangulation morphologique d'une microstructure multiphasée 3D.	202
V.32	Maillage par Marching Cube.	203
V.33	Zoom sur les angles du maillage par Marching Cube.	204
A.1	Huit disques individuellement mesurables.	209
A.2	Agglomérat de disques.	210
A.3	Courbe granulométrique.	211
A.4	Courbe de la densité granulométrique.	211
A.5	a) Ensemble de disque connectés par des lignes, b) courbe de la densité granulométrique.	212
A.6	Localisation des zones morphologiques fine de X	212
A.7	Localisation des différentes tailles de d'ouverture	213

Introduction générale

Depuis quelques décennies et dans de nombreux domaines de la recherche et de l'industrie comme les sciences des matériaux, le médical, la compréhension de phénomènes physiques tels que l'étude du comportement de structure, la durée de vie de pièces mécaniques, la propagation de la chaleur ou la déformation d'un cerveau, nécessitent dans bien des cas, l'apport du calcul par éléments finis.

Dès lors, la définition d'un maillage précis des objets à étudier est le préambule incontournable pour une démarche optimale des études. Celui-ci permet de réduire l'ensemble des objets à étudier en un ensemble de points (nœuds) judicieusement répartis permettant ainsi de diminuer fortement la charge et le temps de calcul. Cette méthode est opposée à celles des différences finies, méthode sans maillage, très couteuse en ressources numériques. Lorsque la forme à étudier est un ensemble de surfaces à géométries définies (cercle, triangle, carré), on réalise alors une CAO (Conception Assisté par Ordinateur) de la structure, illustré par la figure 1 . C'est ainsi que l'on conçoit la quasi totalité des structures qui nécessitent une compréhension approfondie de phénomènes physiques.

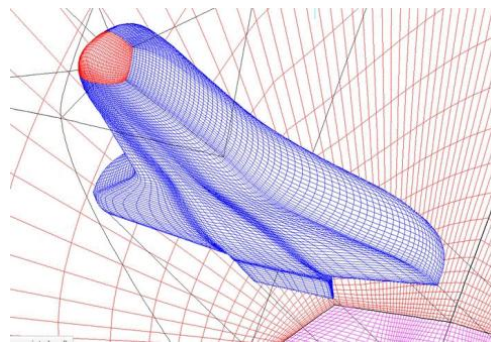


FIGURE 1 – CAO 3D.

Problématique

Depuis une dizaine d'années, les moyens d'investigation tridimensionnelle des matériaux (Micro tomographie X) ont permis l'exploration et l'investigation d'objets sur lesquels il est possible d'étudier la morphologie mais aussi leur comportement.

Il existe une quantité impressionnante de données numériques expérimentales dont la dimension en terme de quantité d'information à analyser rend inefficace la plupart des

outils informatiques même les plus puissants. Par exemple une image issue de la tomographie X, de dimension 2000x2000x2000 voxels représente 8 Go. Le stockage est multiplié par 2,8 ou 16 suivant la technique d'acquisition ce qui accroît davantage la capacité numérique nécessaire . Lors d'un calcul numérique il est déraisonnable d'intégrer la totalité d'un volume dans un code . L'option de parallélisation des algorithmes offre une possibilité informatique de traitement.

Ainsi, il apparait l'idée d'un maillage, le nombre de données à étudier est fortement diminué par sélection judicieuse de points de l'image entre lesquels on approxime une constante morphologique.

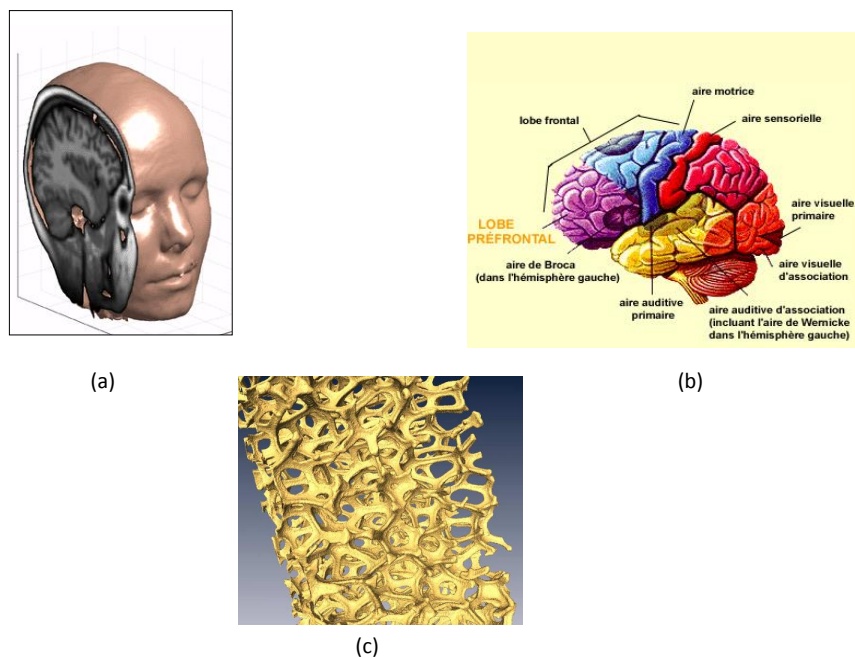


FIGURE 2 – a) Image MRI d'une tête humaine, b) phases représentatives d'un cerveau, c) Mousse de Nickel 3D.

Pour autant sur des images expérimentales, la localisation est loin d'être triviale, la nature est rarement constituée de formes convexes qui peuvent être approximées en un ensemble de formes simples.

C'est précisément dans ce contexte que s'inscrit notre étude qui est la description morphologique fidèle d'une microstructure dans le but de réaliser une triangulation de points judicieusement répartis sur la surface de chacune des phases et cela quelle que soit la dimension bi ou tridimensionnelle, le nombre de phases et la dimension de l'image. La figure 2 illustre trois exemples d'images présentant des complexités géométriques à une ou plusieurs phases : une tête humaine, un cerveau, une mousse de Nickel.

Objectif de la thèse

Un objectif de cette thèse est d'utiliser les outils de la morphologie mathématique dans l'investigation de microstructures afin de proposer une méthode de triangulation morphologique optimisée considérée soit comme un premier maillage dans le cas 2D, soit comme une enveloppe surfacique utilisable directement dans un code de maillage volumique.

Dans une problématique de calcul mécanique sur une microstructure expérimentale, la procédure d'étude comprend l'acquisition d'une image, son éventuel traitement et son maillage suivi d'un calcul mécanique. Les méthodes actuelles proposent le plus souvent des méthodes de maillage dont la finesse écarte toute possibilité d'étude d'image de grande taille au regard du nombre important d'éléments générés. En effet la taille de maille est à l'échelle du pixel en 2D ou du voxel en 3D. Dans ce cas leur adaptation à un calcul EF est étroitement liée à une opération de simplification ou de lissage qui est souvent dommageable pour la morphologie originale de la microstructure.

Nous proposons une triangulation qui a comme double contrainte le respect de la morphologie originale et la proposition d'un nombre raisonnable d'éléments de maillage par l'introduction d'un pas de triangulation défini soit par un opérateur soit morphologiquement déduit de la microstructure.

Un autre objectif de cette thèse est aussi le développement d'outils morphologiques originaux lorsque les opérateurs morphologiques classiques ne sont plus adaptés pour résoudre les différents obstacles rencontrés dans la problématique de maillage des microstructures.

Cette approche prédomine la problématique du temps de calcul bien que l'ensemble des procédures établies dans cette thèse sont parallélisables.

Organisation du manuscrit

Le manuscrit est scindé en 5 chapitres, dans chacune des sections est exposée notre procédure automatique de maillage adaptée aux différentes configurations d'une image.

Le chapitre **I** présente un état de l'art des différentes méthodes de maillage des microstructures, ainsi que la dimension 2D ou 3D de l'image. Dans ce cadre, nous présentons les complexités qui sont parfois des obstacles numériques mais aussi théoriques, que chacune des méthodes doit résoudre. Dans ce chapitre, sont présentées les problématiques rencontrées dans la littérature liées au nombre de phases de la microstructure.

Le chapitre **II** expose les principaux outils de la morphologie mathématique qui sont utilisés pour notre étude de maillage. Nous présentons un bref historique des fonctions, puis nous introduisons leurs concepts ainsi que leur domaine d'application suivant le nombre de phases et la dimension de l'image. Ces outils étant définis dans un cadre théorique, nous présentons leurs reformulations dans le champ discret d'une image. Dans ce contexte, nous donnons la définition d'une image et nous indiquons la distinction dans le choix des opérateurs utilisés, uniquement parfois, en fonction du nombre de phases qu'elle contient. Bien souvent, les opérateurs morphologiques sont multi-dimensionnels.

Le chapitre III rassemble les problématiques de maillage des microstructures bi et aussi multiphasées qui est une variante du cas biphasée. Nous proposons une adaptation morphologique de la triangulation de Delaunay contrainte. Cette triangulation nécessite des paramètres ; nous présentons leurs cadres théoriques et nous proposons leurs adaptation à un champ discret dans lequel est représentée une image. Afin d'illustrer ces concepts de triangulation, nous choisissons une image possédant une complexité morphologique relativement prononcée afin de montrer la robustesse des outils morphologiques. Cette image est adaptée dans les contextes bi et multiphasé. En 2D, les descripteurs morphologiques des objets de l'image obtenus par notre méthode, suffisent à la construction de la triangulation de Delaunay contrainte réalisée en post traitement. Elle est ainsi contrainte par des lieux remarquables de l'image qui garantissent la fidélité morphologique de la triangulation avec la forme originale de l'image. Bien que non optimale, nous considérons la triangulation de Delaunay contrainte comme un premier maillage de la structure. Nous testons par différentes techniques la qualité du maillage obtenu par différents outils comme un calcul par éléments finis dont l'unique but est la validation de la structure maillée par convergence du calcul EF. Pour conclure sur ce chapitre, nous réalisons, pour chacun des cas bi et multiphasé, une chaîne d'études couvrant l'acquisition d'une image expérimentale, son traitement, son maillage et le calcul EF, par notre procédure automatique.

Le chapitre IV est uniquement consacré au maillage des microstructures 3D biphasées, la compréhension théorique du cas multiphasé étant singulièrement différente. Nous exposons ici, l'ensemble des opérateurs morphologiques transposables en 3D et utilisés afin de réaliser la triangulation de la surface de chacun des objets de l'image. Cependant, les résolutions des ambiguïtés de construction d'une triangulation résolue en 2D n'est plus simplement réalisable en 3D. La troisième dimension complexifie le cadre théorique d'étude. Ainsi assez rapidement, il devient nécessaire de construire de nouveaux outils de triangulation. Le but de cette étude est de réaliser une triangulation surfacique fidèle à la morphologie des objets d'une image avec une densité d'éléments significativement inférieure aux différentes techniques de maillage rencontrées dans la littérature. Nous vérifions la solidité de la triangulation en effectuant, par post traitement, une optimisation puis remplissage tétraédrique dont la base triangulaire est précisément les éléments de la triangulation morphologique. La structure obtenue est le maillage de la microstructure. Nous illustrons notre méthodologie au travers d'un exemple biphasé morphologiquement complexe, puis nous généralisons la procédure de maillages sur cas d'enchevêtrement morphologique optimal représenté par un schéma booléen de cylindre sur lequel nous appliquons une procédure de vérification de maillage par un calcul EF.

Le chapitre V, traite de la problématique de la triangulation des microstructures dans le cas multilphasé. Dans le cas biphasé 3D, les descripteurs morphologiques 2D étant en partie transposables en 3D, on obtient alors le contour ainsi que des points de triangulation des objets de l'image. Dans le cas où la microstructure possède plusieurs phases, ces opérateurs ne permettent plus d'établir les descripteurs morphologiques nécessaires à une triangulation. Par exemple, la mitoyenneté des phases complexifie les procédures de

détection de contour par des choix arbitraires de localisation de la frontière des phases. Par conséquent, nous proposons dans ce chapitre la conception théorique d'une nouvelle approche morphologique consistant à construire les composantes nécessaires à une triangulation d'une microstructure multiphasée. Nous redéfinissons donc la surface des phases mais aussi leurs bords ainsi que les différents points de bords multiples communs à plusieurs phases. Ces points sont définis comme des invariants de la triangulation, ils sont sommets des éléments triangulaires, entre lesquels un nouvel échantillonnage sera éventuellement réalisé. La procédure de triangulation établie au chapitre [V](#) sera redéfinie dans ce cadre. Comme au chapitre précédent, nous proposons une triangulation surfacique de la surface des phases optimisées en nombre d'éléments et fidèle à la morphologie de la microstructure. Un remplissage tétraédrique vérifie la solidité de la triangulation qui est alors convertie en maillage. Pour illustrer la méthodologie de maillage, nous utilisons une procédure de schéma booléen de feuilles mortes 3D afin de générer une microstructure multiphasée sur laquelle sont réalisés la triangulation et le maillage, puis un calcul EF est réalisé comme application numérique.

Chapitre I

Etude bibliographique : Maillage des microstructures des matériaux hétérogènes 2D et 3D, bi et multiphasés

Ce chapitre vise à présenter une étude générale, parfois non exhaustive, concernant les techniques de maillage des microstructures des matériaux hétérogènes 2D et 3D, bi et multiphasés. Nous exposerons la problématique liée au passage de la représentation numérisée de la microstructure en un pavage homogène de triangles ou de tétraèdres caractéristiques de la surface ou du volume des phases. Ce chapitre présente la complexité de la description précise des phases par détection de leur contour afin d'en obtenir une triangulation. Nous présentons des méthodes géométriques où le maillage s'adapte à l'image ou l'inverse, en conservant l'idée que le maillage ne doit pas être une modification morphologique de la microstructure.

Sommaire

I.1	Introduction	9
I.2	Maillage des microstructures 2D bi et multiphasées	10
I.2.1	Introduction	10
I.2.2	Méthodes surfaciques.	10
I.2.3	Maillage par la détection du contour des phases	17
I.2.4	Synthèse des maillages de microstructure 2D	24
I.3	Maillage des microstructures biphasées 3D	26
I.3.1	Introduction	26
I.3.2	Maillage volumique	28
I.3.3	Maillage surfacique.	31
I.3.4	Extraction des surfaces des phases	32
I.3.5	Synthèse de l'étude des microstructures 3D biphasées	38
I.4	Maillage des microstructures multiphasées 3D	39
I.4.1	Maillage par contraintes géométriques.	39
I.4.2	Maillage par triangulation de Delaunay	41
I.4.3	Maillage par approximation géométrique de la surface	41
I.4.4	Synthèse de l'étude des microstructures 3D biphasées	42

I.1 Introduction

Cette section rassemble à la fois les études de maillage des microstructures bi (Fig.I.1.a) et multiphasées (Fig.I.1.b) 2D.



FIGURE I.1 – Images biphasée (a) et multiphasée (b).

La littérature est disparate en termes de publications, mais il apparaît clairement que de nos jours, le monde industriel et académique sont fondamentalement tournés vers les aspects tridimensionnels des images. Il est vrai qu'en 2D les moyens informatiques puissants peuvent pallier les imprécisions des méthodes avec des temps de calculs raisonnables. Le cas biphasé ou binaire est le cas le plus simple. On recense dans ce cas quelques publications originales et il existe de nombreux algorithmes de maillage. Pour les microstructures multiphasées, la gestion du nombre de phases est plus délicate et dans ce domaine, les publications ainsi que les algorithmes sont moins abondants.

En 3D, la hiérarchie de la complexité d'étude du maillage liée au nombre de phases est respectée, le cas biphasé reste plus simple à étudier. Il existe beaucoup de méthodes et c'est précisément dans ce domaine où la littérature est la plus prolifique. Il est très délicat et très ambitieux de vouloir rassembler dans un état de l'art une quantité de plus d'un millier d'articles sur cette thématique de recherche. Les techniques utilisées ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients et dans ce cas le sujet est loin d'être clos à ce jour. Retenons la phrase de Alain Rassineux qui appelle à une grande modestie quant à la méthode à utiliser en disant « *L'obtention d'un résultat est le seul moyen d'évaluer la fiabilité et la qualité de la méthode* »

Le cas multiphasé est infiniment plus complexe à traiter. Le challenge académique se situe dans ce domaine particulier dans lequel il existe un paradoxe : avec une littérature peu abondante, là aussi, le sujet semble loin d'être clos même si quelques auteurs prétendent avoir trouvé la méthode parfaite et sans faille de maillage. Pour autant, apparaissent sur le marché quelques codes commerciaux capables de proposer des maillages de bonne qualité même si parfois une intervention de l'opérateur est nécessaire.

I.2 Maillage des microstructures 2D bi et multiphasées

I.2.1 Introduction

Dans cette section, l'aspect bidimensionnel ainsi que la relative simplicité d'analyse nous permet de regrouper les études de maillage de microstructures bi et multiphasées. Toutefois, nous distinguons, schématiquement deux méthodes de maillage :

- Les méthodes de maillage surfaciques
- Les méthodes de maillage contraintes par le contour des phases.

Les méthodes surfaciques, sont des méthodes globales de maillage ; la gestion des frontières de phases est un cas particulier de la méthodologie utilisée.

Les méthodes de maillage contraintes par le contour des phases sont des méthodes séquentielles. Elles procèdent par détection puis la triangulation du contour de chacune des phases puis un algorithme additionnel réalise, en post-traitement, le maillage des phases conditionnellement à ce contour.

I.2.2 Méthodes surfaciques

I.2.2.1 Maillage par quadrillage

Cette méthode est la plus simple et encore couramment utilisée. Très simple à mettre en œuvre, elle s'applique à la fois en 2D et 3D sur des microstructures bi ou multiphasées. Elle consiste en la superposition sur une microstructure (Fig.I.2) d'une grille régulière (Fig.I.3) à l'échelle du pixel lequel étant alors associé à un élément de maillage (type EF , par exemple). Le résultat donc conduit à un maillage exact de la structure. Cependant le nombre d'éléments qu'il génère est parfois très important, une étape de regroupement des éléments est alors réalisée (Fig. I.5). Bien que lourde et coûteuse en ressources numériques, cette méthode reste assez répandue au sein des laboratoires de recherche. On note aussi, que les contours des objets suivent la discrétisation en pixel de l'image ce qui induit une topologie dite en "escalier" ce qui entraîne une distorsion importante des éléments et les résultats d'un futur calcul par éléments finis seront donc localement éronnés à ces endroits. L'interprétation du calcul devra être globale et non locale. Un lissage peut être appliqué mais la forme initiale des objets peut alors être affectée. La figure I.6 est un détail de la figure I.5.

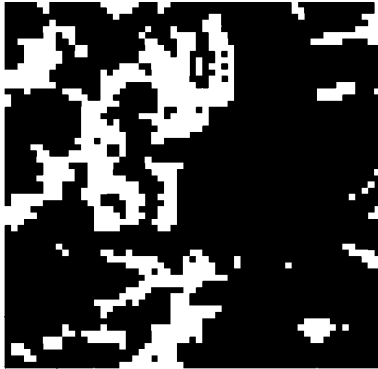


FIGURE I.2 – Image biphasée.

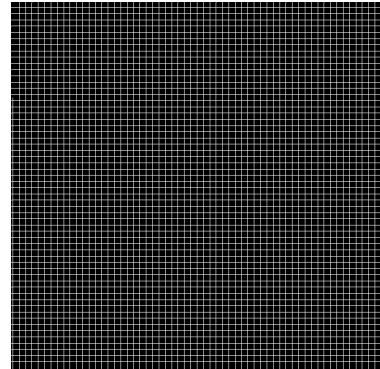


FIGURE I.3 – Grille régulière.

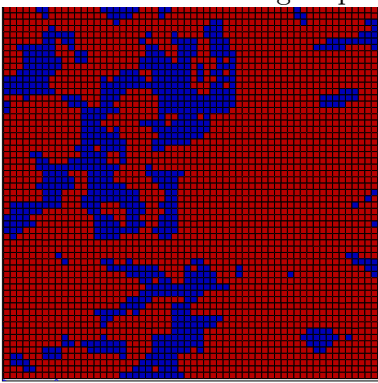


FIGURE I.4 – Maillage : un élément fini par pixel.

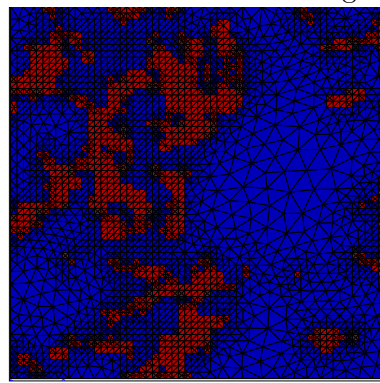


FIGURE I.5 – Déraffinage du maillage par Yams.

La figure I.6 illustre un effet d'escalier persistant après remaillage.

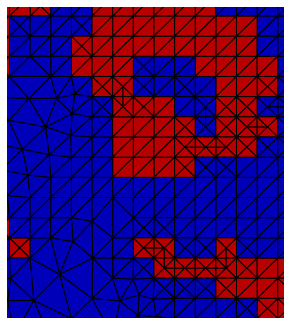


FIGURE I.6 – Effet d'escalier persistant.

I.2.2.2 Maillage par le "morphing" d'une image et d'un maillage

S.Langer et al [Langer, 2001] ont proposé une technique de maillage d'une microstructure biphasée. Elle consiste à adapter à cette microstructure un quadrillage triangulaire grossier qui fait office de premier maillage (I.7.a). Ils affinent celui-ci par itérations successives (I.7.b) jusqu'à ce que l'image et le maillage convergent vers une structure d'équilibre (I.7.c). Il attribue alors, une valeur unique d'une phase à un élément du maillage. Cette procédure a donné lieu à l'établissement d'un code de calcul "Oriented finite element :

OOF". On note que le maillage final peut contenir des formes relativement anguleuses. On note aussi que pour des images multiphasées il sera fort complexe d'attribuer avec certitude une phase plutôt qu'une autre dans le maillage.

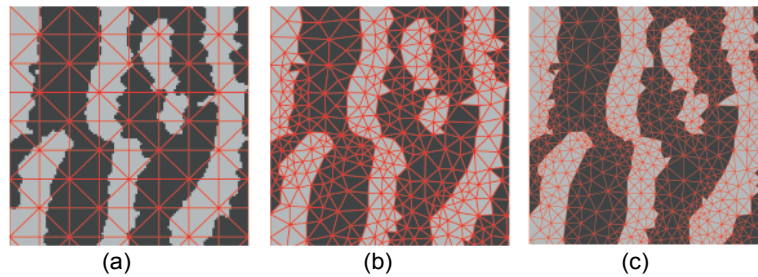


FIGURE I.7 – Maillage par le logiciel OOF : Object Oriented Finite element, (a) superposition d'un maillage grossier, (b) convergence réciproque de l'image avec le maillage, (c) maillage de l'image.

La figure Fig. I.7 présente un maillage qui respecte assez bien la topologie initiale de l'image lorsque celle-ci n'est pas trop perturbée.

I.2.2.3 Maillage par convergence du maillage sur une forme

Dans un esprit équivalent d'adaptation du maillage à une forme, nous pouvons citer l'étude de F.Yang [Yang et al., 2011]. La méthode consiste en l'application d'un premier maillage sur une forme douce et sans partie anguleuse (Fig.I.8.a), puis les éléments sur le contour de l'objet sont détectés (Fig.I.8.b) puis ajustés (Fig.I.8.c) de telle façon que chaque nœud du maillage coïncide avec un point du contour (Fig.I.8.d). La finesse de la méthode repose sur l'optimisation des triangles qui restent compatibles avec un calcul EF.

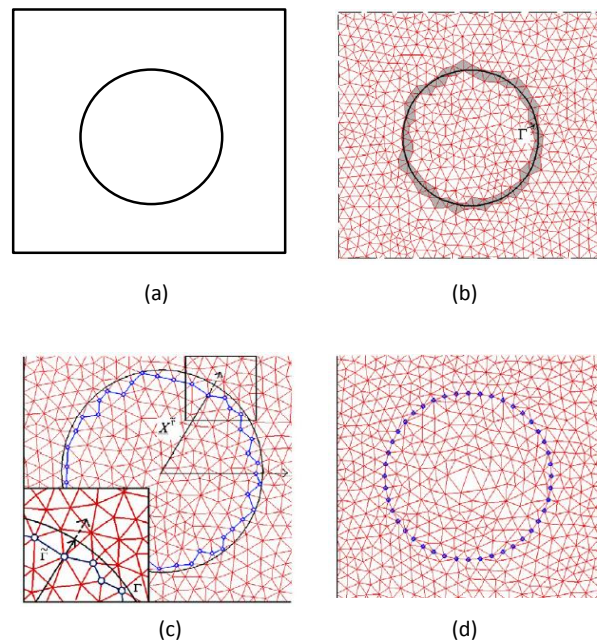


FIGURE I.8 – Ajustement du maillage au contour de l’image. (a) Image d’un cercle, (b) superposition d’un premier maillage et localisation des triangles qui intersectent le contour, (c) ajustement des nœuds des triangles identifiés sur le contour du cercle, (d) maillage final.

I.2.2.4 Maillage par quadtree

Les premiers développements théoriques du Quadtree remontent dès 1974 avec R.Finkel [Finkel and Bentley., 1974] qui évoquent déjà la généralisation de la méthode à N dimension.

La méthode par quadtree est un partitionnement hiérarchique récursif en fonction du contour d’une image. Cette technique est applicable à la fois sur des images bi et multiphasées.

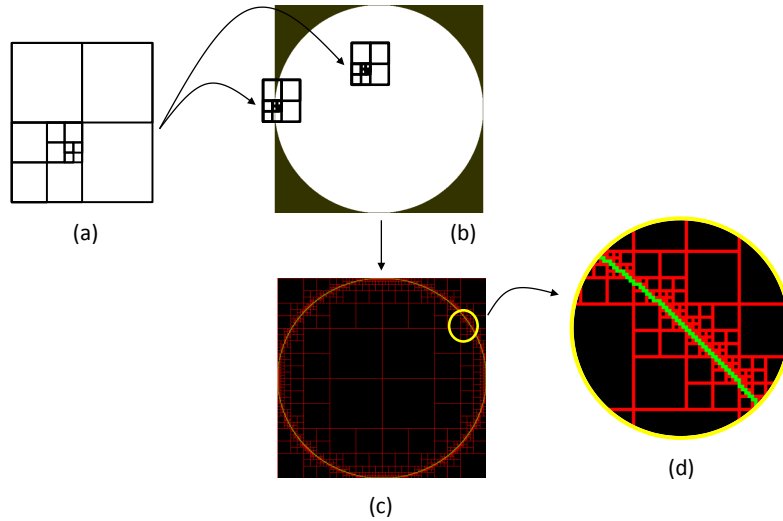


FIGURE I.9 – Quadtree. (a) motif du découpage en quadtree, (b) parcours de l’image par le motif, (c) partitionnement hiérarchique de la microstructure, (d) découpage très fin sur les bords de l’image

En 2D, le motif élémentaire (Fig.I.9.a) parcourt l’image (Fig.I.9.b) laquelle est subdivisée en fonction d’un critère de convergence défini préalablement. Le résultat est la définition d’un partitionnement hiérarchique de l’image (Fig.I.9.c). Chaque subdivision génère un grand nombre de données réparties de façon optimisée dans un arbre numérique appelé arbre quaternaire en 2D. Par la suite, les cellules sont décomposées en triangles pour réaliser l’étape de triangulation. Cette triangulation peut véritablement être considérée comme un maillage. On note que le maillage peut être très fin sur le contour de l’image (Fig.I.9.d).

I.2.2.5 Triangulation duale d’un Voronoï Centroidal 2D

Une autre approche originale a été réalisée par J.Dardenne [Dardenne, 2009] sur le maillage 2D biphasé établi par triangulation duale d’un diagramme de Voronoï centroidal TVC adapté à la morphologie de l’image par calcul de l’axe médian. Le Voronoï centroidal est une variation du Voronoï, dans lequel, le barycentre et les centres des cellules sont confondus. Cela induit, dans le graphe dual, des éléments de triangulation de bonnes qualités.

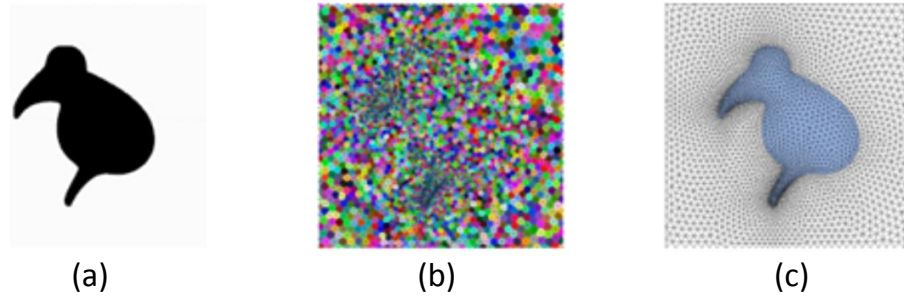


FIGURE I.10 – (a) image biphasée, (b) Voronoï centroïdal 2D, (c) maillage dual du Voronoï centroidal.

I.2.2.6 La triangulation de Delaunay

Le mathématicien B.Delaunay [Delaunay, 1934] définit la triangulation suivante :

Soit un ensemble de points P aléatoirement répartis dans le plan (Fig. I.12) , la triangulation de Delaunay est atteinte lorsque à l'intérieur de tout triangle n'existe aucun point de P . Il définit ainsi la théorie du cercle vide en 2D qui se généralise en sphère vide en 3D :

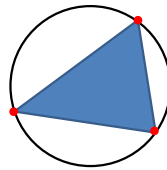


FIGURE I.11 – Cercle vide.

Cette triangulation conduit tout naturellement à la définition de l'enveloppe convexe de l'ensemble des points P Fig. I.13

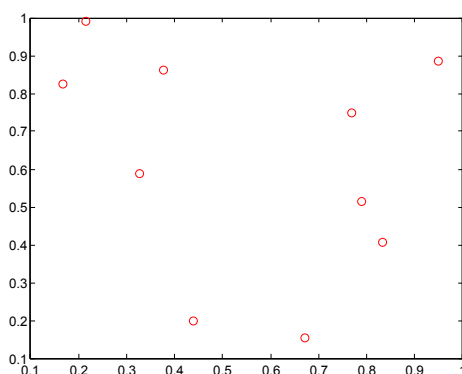


FIGURE I.12 – Points de triangulation 2D.

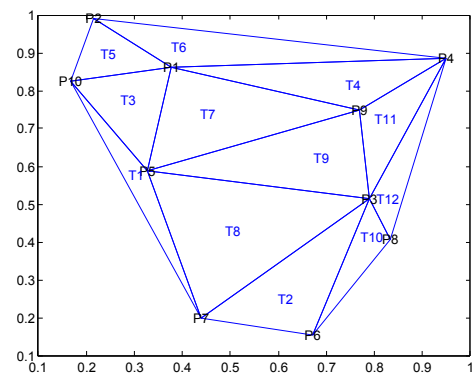


FIGURE I.13 – Triangulation de Delaunay.

Ainsi, la structure formée peut être alors considérée comme un premier maillage si les éléments triangulaires respectent un facteur de forme compatible avec un calcul par éléments finis et si les points de la triangulation définissent eux même une enveloppe

convexe. Dans le cas contraire L.Chen établit une technique projective sur un plan d'une surface afin de réaliser des maillages de qualité optimale [Chen and Holst, 2011].

I.2.2.7 Maillage par triangulation de Delaunay suivi d'une décimation de triangles

La détection automatique du contour par cette approche est depuis longtemps un sujet d'étude. Une première approche consiste à trianguler un nuage de points de façon classique et de procéder ensuite par "décimation" de triangles inappropriés.

J R Schewchuk [Schewchuk, 1935] propose une technique de sélection angulaire des triangles à décimer.

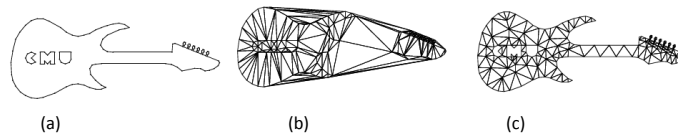


FIGURE I.14 – (a) Image originale , (b) triangulation de Delaunay, (c) décimation des triangles indésirables.

La figure Fig. I.14 illustre une sélection judicieuse des triangles, par leur forme, ou leurs angles. La triangulation obtenue est liée à une triangulation de Delaunay.

Une autre décimation des éléments indésirables de la triangulation de Delaunay est possible en considérant les éléments de la triangulation comme des objets définis, entre autres, par leur courbure : les α - *objet*. [Loménie and Stamon, 2008]

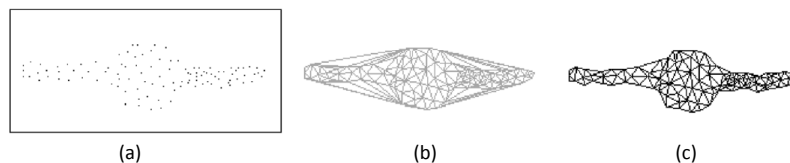


FIGURE I.15 – (a) Image originale , (b) triangulation de Delaunay, (c) décimation des triangles indésirables.

M kraus [Kraus et al., 2013] reprend en partie ces travaux et adapte la contrainte du contour de la triangulation de Delaunay à des structures composées de polygones arbitraires.

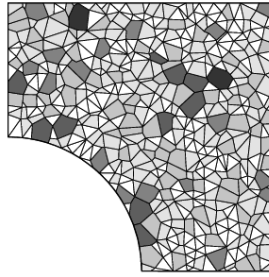


FIGURE I.16 – Maillage de Polygones.

N.Sukumar [N. Sukuma and Prévost, 2003] applique la triangulation contrainte de Delaunay sur une image dont les contours non anguleux permettent leurs discrétisations semi-manuelles par l'utilisateur. Il réalise ensuite une autre étude qui utilise les voisins naturels d'un diagramme de Voronoï afin de définir un maillage EF de bonne qualité [N. Sukumar, 2014]. A.Simone reprend les travaux de Sukumar pour montrer que dans le cas d'une formulation explicite d'un calcul EF, le maillage n'a pas besoin d'être conforme à la topologie de la microstructure, un simple maillage quadratique suffit [Simone et al., 2006]. N.Moes démontre que dans ce cas, une modélisation de fissure 2D est indépendante du maillage [Moës et al., 1999].

Cependant une méthode similaire a été utilisée par E Héripéré [Héripéré et al., 2007] ou G.Bertolino [Bertolino et al., 2007] afin de réaliser un maillage fidèle à la topologie d'une image EBSD sur quelques grains dont les contours ont été réalisés semi-manuellement.

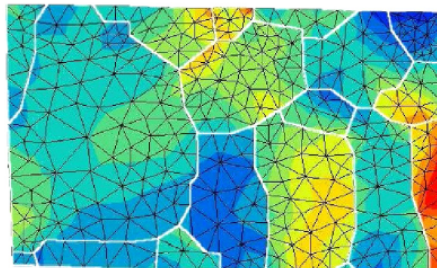


FIGURE I.17 – Maillage semi automatique d'une image EBSD.

Dans notre étude, au chapitre II, nous utilisons une métrique différente de la métrique euclidienne : la métrique géodésique.

A ce titre, dans le cadre géodésique, il existe quelques études comme celle de E.Papadopoulou [Papadopoulou and Lee, 1998] ou J.Leonidas et S.Oudot qui apportent une variante géodésique de la triangulation de Delaunay dans le cas plan [Gao et al., 2008], [Oudot et al., 2010]

I.2.3 Maillage par la détection du contour des phases

La notion de contour de phase est une notion importante car la connaissance de celui-ci permet de contraindre les algorithmes à répartir les éléments de maillage de part et d'autre

de cette frontière. Dans un éventuel calcul de comportement, l'information importante et problématique, se situe à l'interface des objets. Il est donc nécessaire de fixer le contour de l'image pour ne pas modifier la forme de départ par des outils de maillage.

I.2.3.1 Problématique liée à la détection du contour des phases

En géométrie, le contour d'une image se nomme isocontour en 2D et isosurface en 3D. Un isocontour peut être défini comme étant :

Soit un champ scalaire $f(x, y)$ définissant une surface implicite. L'isocontour est défini par $\{x, y\} \in R^2, f(x, y) = c$ où c est une constante appelée isovaleur.

La détection de contour d'une surface implicite d'une image est une technique d'infographie. Apparue dès les années 1970, l'infographie est née du besoin d'établir un lien entre l'image et la représentation informatique de celle-ci. Cette technique est largement répandue dans des domaines comme l'imagerie, les jeux vidéo ou l'architecture.

Par cette technique, la détection du contour des objets revient à étudier un point de l'image (pixel) et les valeurs numériques des pixels appartenant à son voisinage immédiat afin d'en définir, éventuellement, une séparation entre eux. C'est ainsi que les méthodes type "Marching" ont été établies. Très populaires dans le monde académique et industriel, ces méthodes permettent de définir l'enveloppe des objets afin d'établir un maillage à l'échelle du plus petit élément représentatif de l'image : le pixel.

Pour des images bidimensionnelles, la méthode la plus répandue est le Marching Square (MS). Cependant, la littérature issue de la communauté scientifique est peu fournie en 2D et les développements actuels se concentrent principalement sur les aspects tridimensionnels de cette méthode dite du "Marching Cube" (MC) [Lorensen and Cline, 1987].

I.2.3.2 Maillage par la technique du *Marching Square* (MS)

Le Marching Square est l'approche bidimensionnelle du Marching Cube établi par W.Lorensen et E.Cline [Lorensen and Cline, 1987]. Cette méthode est plus un algorithme qu'une mathématique ; son origine n'est pas véritablement définie car la procédure est peu complexe. C'est une approche dite au pixel qui s'intéresse à la frontière géométrique entre plusieurs phases définies localement dans un cube élémentaire (Fig. I.18).

En dimension 2, le voisinage est une matrice de 2 par 2 pixels. L'algorithme a pour but de déterminer une frontière entre les pixels de cette matrice élémentaire (Fig.I.19)

Le MS établit l'isocontour de chacune des phases par parcours de cette petite fenêtre de test sur l'ensemble de l'image. Le nombre de combinaisons à étudier dépendra directement du nombre de phases de l'image et de la taille de celle-ci. Par cette technique, il apparaît, déjà en 2D, que la complexité d'évaluation de la frontière entre une image binaire et une images multiphasée est encore plus marquante. Cette complexité aura une incidence directe sur le temps et la justesse du calcul.

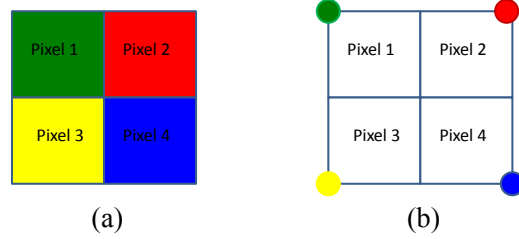


FIGURE I.18 – Carré élémentaire du Marching Square.

La figure Fig. I.18.a représente la fenêtre élémentaire du Marching Square. Chacune des couleurs représente une phase de l'image. Pour simplifier la représentation, les phases de l'image sont symbolisées par des cercles aux quatre coins du carré (Fig.I.18.b) .

Dans le cas 2D biphasé, quatre nœuds du cube ont la possibilité d'être à 0 ou 1 soit $2^4 = 16$ possibilités. Dans cette configuration la plus simple, il n'existe que deux cas ambigus : les cas 6 et 11 où la frontière est double ainsi que le choix de son positionnement. Dans le cas multiphasé, où l'image contient plusieurs composantes de couleur, quatre nœuds peuvent prendre au maximum quatre valeurs différentes soit $4^4 = 256$ possibilités avec d'autres cas ambigus.

Dans certains cas, il est possible de décider du positionnement de la frontière des phases pour ces cas ambigus, mais parfois, ces cas peuvent empêcher l'automatisation complète du maillage. L'intervention d'un opérateur est requise pour choisir manuellement la position de la frontière. On note que la littérature est quasiment dépourvue de résultats de maillage d'images multiphasées. Les résultats obtenus proviennent bien souvent de méthodes semi automatiques ou manuelles [Hériprié et al., 2007], [Bertolino et al., 2007] . Ce problème sera évidemment présent et plus complexe pour le maillage d'images multiphasées tridimensionnelles.

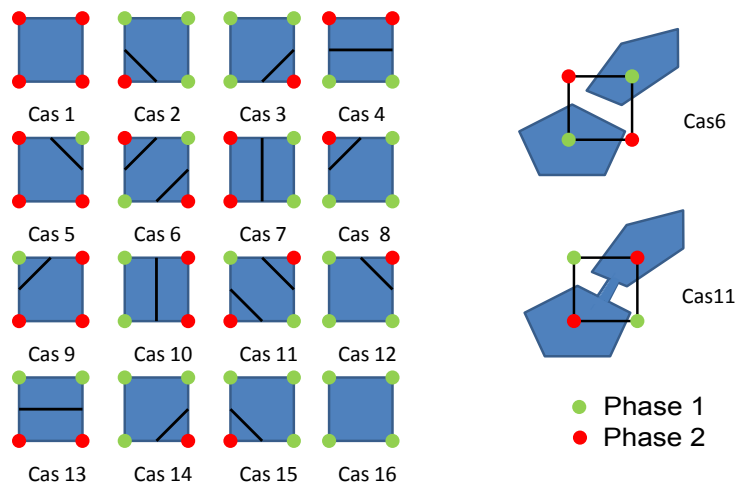


FIGURE I.19 – Marching Square binaire en 2D.

Dans le biphasé, les configurations des pixels (rouge ou vert) autour du carré de recherche s'écrivent simplement (Fig .I.19). Il est fastidieux d'établir les 256 configurations du multiple Marching Square.

Ce contour va permettre l'opération de maillage à l'échelle du pixel. Comme il a été possible de définir les frontières entre les pixels, les cas 1 et 15 permettent aussi d'établir un élément de maillage car ils sont complètement inclus dans leurs phases respectives. Ainsi, un élément peut être défini par le partage du carré en deux par une arête de celui-ci. Il existe d'autres techniques de "remplissage triangulaire" à partir de ce contour, mais on note que le maillage obtenu du contour est par ce principe très fin. Par ailleurs, comme il n'existe aucune contrainte de contour, le remaillage peut occasionner des trous ou des écarts importants de forme entre image et maillage. Le résultat du maillage (Fig.I.20.a) de la microstructure biphasée (Fig.I.20.b) illustre l'extrême finesse du maillage de la microstructure biphasée. Le "dérafinage" du maillage peut induire des écarts topologiques entre le maillage et l'image (Fig.I.20.c).

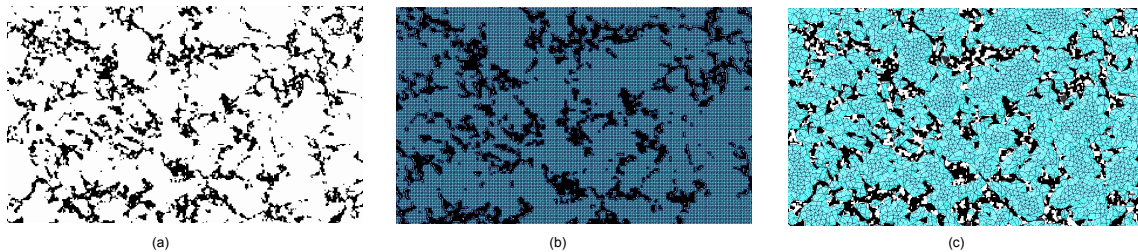


FIGURE I.20 – Marching Square biphasé. a) Microstructure biphasée, b) premier maillage fin, c) remaillage.

Sur une microstructure multiphasé (Fig.I.21), les cas ambigus peuvent provoquer la fusion de grains (Fig.I.22) et l'affinage du maillage peut générer des trous dans le maillage (Fig.I.23).



FIGURE I.21 – Détail sur l'image multiphasée 2D.

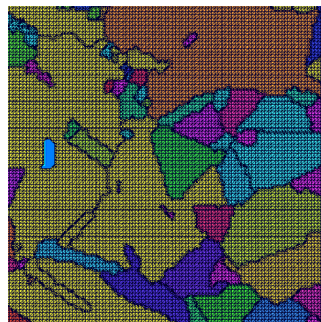


FIGURE I.22 – Premier maillage.

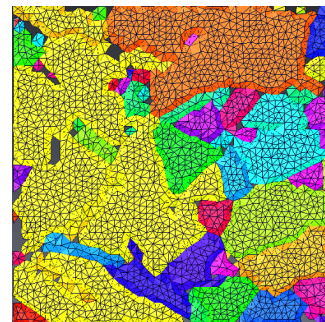


FIGURE I.23 – Remaillage.

Par conséquent l'alternative est simple : soit résoudre les cas ambigus du Marching Square, ou soit proposer une investigation différente.

Dans la littérature la première solution n'est utilisée que dans le cas biphasé. Dans les

cas multiphasés, la deuxième solution est plus répandue.

I.2.3.3 Méthode de résolution du *Marching Square*

Z.Wu [Wu and Sullivan, 2003] résout en 2D tous les cas ambigus du Marching Square en ajoutant un nouveau "nœud" au centre du carré lorsque celui ci est composé de plus de trois phases. Cette technique lui permet d'établir une frontière entre chacun des pixels [Wu and Sullivan, 2003]. Il applique son algorithme à une image provenant de l'imagerie médicale. Sur cette image les formes sont relativement douces (non anguleuses) et le nombre de phases est de douze

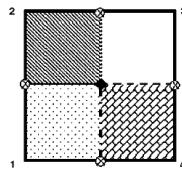


FIGURE I.24 – Nœud de la face centrée.

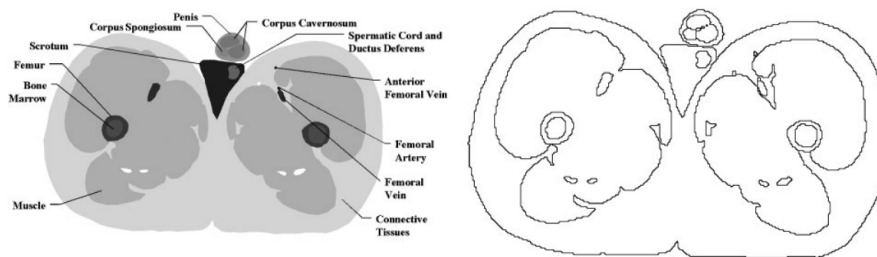


FIGURE I.25 – Marching Square multiple 2D.

Cependant, Y.Zhang [Zhang and Qian, 2012b] contredit Wu et Langer car leur méthode, selon elle, n'est pas applicable pour des formes complexes. Depuis 2002, elle étudie la résolution des cas ambigus d'abord du Marching Square puis du Marching Cube [Zhang et al., 2010]. Elle propose une autre approche de subdivision en octree du carré élémentaire et applique la technique du dual contouring pour recalculer les frontières nouvellement formées de cet ensemble [Zhang and Qian, 2012a] (Fig.I.26) .

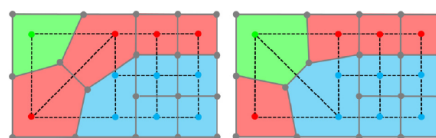


FIGURE I.26 – Dual contouring.

I.2.3.4 Méthode alternative au *Marching Square*

I.2.3.5 Technique de subdivision des pixels

S. Bischoff [Bischoff and Kobbelt, 2006] propose une subdivision des pixels en subpixels afin de contourner les cas ambigus et la surdensification est effacée par une étape de remaillage, cette méthode est applicable aussi en 3D (Fig.I.27).

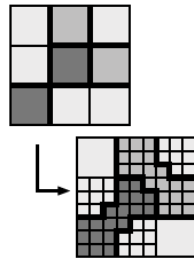


FIGURE I.27 – Subdivision de pixels.

I.2.3.6 Le *Marching Triangle*

Il est à noter que parce que le *Marching Square* dérive du *Marching Cube* et que cet algorithme inventé par Cline et Owen en 1987 a été soumis au copyright, plusieurs développements ont été inventés pour contourner ce brevet. Plusieurs variantes sont apparues comme le *Marching triangle* ou la version 2D du *Marching diamant*.

Le *Marching triangle*, introduit par A.Hilton [Hilton et al., 1996], dérive du *Marching Square*, où les triangles sont découpés dans le carré élémentaire (Fig.I.28). Les cas à traiter sont donc plus nombreux et le calcul est plus coûteux en mémoire et en temps. Cependant cette méthode ne contient pas de cas ambigus et l'extraction de l'isosurface est plus précise.

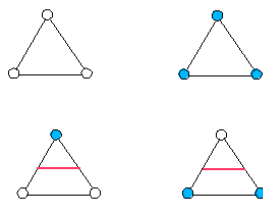


FIGURE I.28 – *Marching triangle*.

La version 2D du *Marching diamant* à été mise au point en 2004 par J.Anderson [Anderson et al., 2005]. Il procède par un découpage assez complexe en 2D des triangles élémentaires. Cette méthode semble très efficace selon les auteurs mais peu de recherche évolue dans cette voie.

I.2.3.7 Maillage par approximation parabolique

On peut aussi citer l'étude de Yang qui propose une approximation parabolique adaptative locale sur un nuage de points. Cette approximation est affinée avec une grille hiérarchique qui par subdivision itérative permet de discrétiser finement le contour des objets et de réaliser un maillage de la structure [Yang et al., 2010], [Yang and wan Kim, 2007]. Il applique son algorithme en 2D (Fig.I.29) puis le généralise en 3D

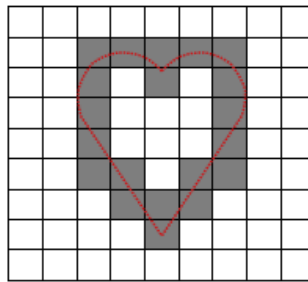


FIGURE I.29 – Approximation parabolique du contour.

I.2.3.8 Approche frontale

La technique de maillage frontal est une méthode qui procède par établissement entre deux points du contour, appelé front, d'un triangle le plus équilatéral possible. Cette méthode a été introduite en 2D dès 1985 par S.Lo [Lo, 1985]. Cette technique nécessite la connaissance préalable et déterministe du contour des phases car il est nécessaire de connaître le voisin immédiat d'un nœud du front.

Il existe plusieurs algorithmes dont voici un exemple. Il procède en trois étapes :

Tant qu'il existe un front :

- Choisir un élément du front (Fig.I.30.a),
- Identifier un point voisin (Fig.I.30.b),
- Etablir, au mieux, un triangle équilatéral (Fig.I.30.b).
- Itérer le processus (Fig.I.30.c)

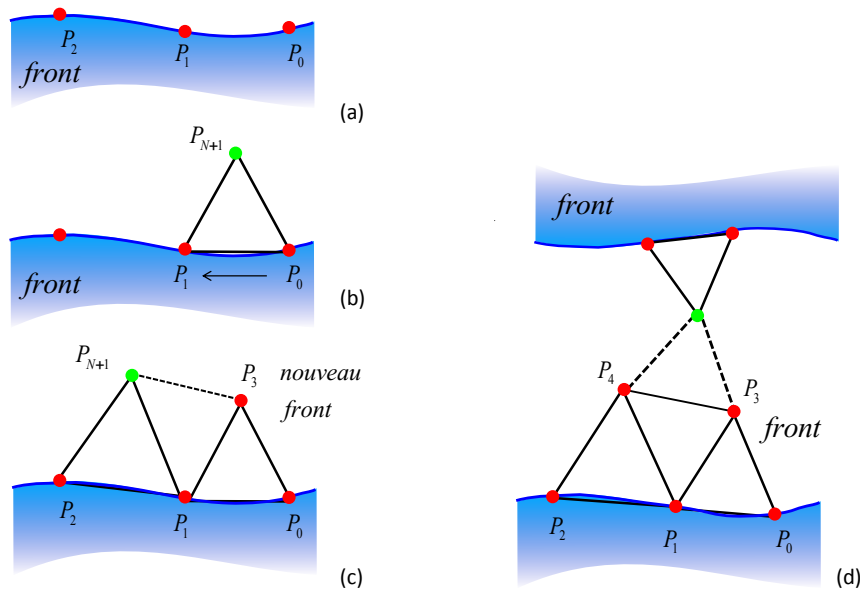


FIGURE I.30 – Maillage frontal 2D.

Une des problématiques de la méthode est donc la sélection du point du voisinage du front à considérer pour constituer un triangle. Or le voisin le plus proche n'est pas forcément à une distance euclidienne minimale ; la recherche du plus proche voisin dépend de la topologie du front.

Et bien sûr, l'autre difficulté inhérente à la méthode est la gestion des triangles lorsque deux fronts se rencontrent. En 2D, les configurations de rencontre sont identifiées et des résolutions existent pour éviter les éventuelles superpositions de triangles (Fig.I.30.d).

I.2.4 Synthèse des maillages de microstructure 2D

Le passage en revue de toutes ces méthodes de maillage nous présente les avantages et les inconvénients de chacune de ces procédures. Dans le cas biphasé, la relative simplicité d'analyse permet à l'ensemble de ces méthodes, de proposer des maillages triangulaires de bonne qualité au sens élément fini.

Cependant toutes ne sont pas transposables pour des microstructures hétérogènes multiphasées et il est fréquent que la méthode dite par quadrillage dans ce cas soit la plus appropriée quitte à lisser le maillage final afin d'estomper l'effet d'escalier mais en contre partie, un fort lissage entrainera un écart de forme entre le contour de l'image et le contour du maillage.

Notons que dans une perspective de calcul numérique, dans certains cas comme en mécanique des matériaux, l'étude de la déformation peut s'affranchir du maillage de la microstructure. Par exemple, l'analyse quantitative d'une image EBSD est suffisante pour évaluer le comportement du matériau étudié [Choi et al., 2013]

L'ensemble de ces approches type Marching sont des approches dites au pixel. Cependant, il n'est pas toujours nécessaire de connaître tous les points de contour d'une forme pour réaliser un maillage de celui-ci. En effet, quelques points judicieusement répartis peuvent permettre l'application de la triangulation de Delaunay par exemple.

I.3 Maillage des microstructures biphasées 3D

I.3.1 Introduction

Depuis le début des années 70, les progrès technologiques dans le domaine médical ont rendu possible la généralisation tridimensionnelle de la technique d’acquisition d’images d’un corps soumis à un rayonnement X dont les fondements théoriques et expérimentaux remontent au début du XXI^{ème} siècle par la découverte des rayonnements X par W.Röntgen. Il a obtenu le prix Nobel de physique en 1901 pour ses travaux dans ce domaine [Röntgen, 1901].

Des outils comme les premiers tomographes X médicaux initiés par G.Hounsfield [Hounsfield, 1973] ont rendu possible les premières acquisitions d’images d’un cerveau. Cependant la grande quantité d’informations que représente une image tridimensionnelle requière l’élaboration d’algorithmes toujours plus performants et robustes afin que ces données puissent être utilisables d’un point de vue informatique.

Dans des techniques comme la visualisations d’objets dans une image, il n’est pas nécessaire de connaître la localisation de la totalité des voxels. En effet, seuls ceux des contours sont utiles. Il existe plusieurs outils de détection de contour défini sur un ensemble de voxels. Les premières études remontent au début des années 80 avec E.Artzy [Artzy et al., 1981] ou S.W.Zucker [Zucker and Hummel, 1981] qui furent les premiers à avoir réalisé l’investigation d’un contour d’une image 3D composée de voxels.

En ne conservant que le contour des objets, le volume d’information de l’image est considérablement réduit. Cependant, le nombre de voxels peut, suivant la topologie de l’image, rester important et il est nécessaire de simplifier de nouveau l’image. Retirer des voxels de contour entraînerait la décohésion morphologique de l’objet d’où l’idée de remplacer un ensemble local de voxels par des éléments simples le plus souvent des 2-simplexe en 3D (Fig.I.31) . L’idée étant de diminuer le nombre d’informations à traiter tout en estompant l’aspect cubique des voxels.

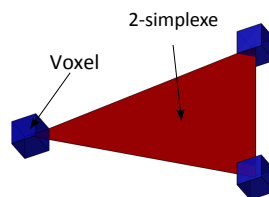


FIGURE I.31 – 2-simplexe entre trois voxels.

Ces éléments triangulaires sont pratiques car ils peuvent aisément être utilisés comme base d’un 3-simplexe lors d’un « remplissage » tétraédrique du contour triangulé. La structure réalisée peut être alors considérée, sous certaines conditions de forme de triangles, comme un maillage. Celui-ci est massivement utilisé de nos jours dans des nombreux domaines physiques, chimiques ou simplement de visualisation. Ainsi, dans les techniques où l’image est un vecteur dans la compréhension de phénomènes physiques, l’ensemble de

l'image doit être simplifiée et les éléments (voxels) qui la composent sont alors remplacés par une structure à base de tétraèdre ou d'hexaèdre. Pour atteindre cette structure de maillage volumique, d'un point de vue très schématique, il est possible de dégager deux grandes familles d'étude.

La première approche est une triangulation volumique globale; elle s'intéresse au maillage tétra ou hexaédrique directe sur l'image biphasée 3D.

La deuxième approche est séquentielle. Dans un premier temps, elle consiste en la détection du contour des phases sur lequel est réalisée une triangulation de surface, celle-ci est simplifiée, par regroupement optimisé des éléments triangulaires, afin que dans un deuxième temps, un mailleur volumique appelé "remplisseur" utilise les triangles de surface comme base d'un tétraèdre lors d'une triangulation volumique tétraédrique.

Ce partage en familles d'études est très simplificateur car il est fréquent qu'une méthode soit utilisée conjointement par deux approches.

Dans les deux cas, il est important de souligner qu'il existe des méthodes d'optimisation de triangulation et de maillage capables d'adapter une première approche de maillage en un résultat utilisable dans un domaine particulier. Nous pouvons citer les codes de calculs comme Yams développés par P.Frey de l'INRIA [Frey, 2001] qui optimise une première triangulation à une structure adaptée à un calcul par éléments finis. Il est à noter que ce domaine d'études est un sujet de recherche très exploré pour lequel de véritables solutions existent pour optimiser un maillage suivant des critères géométriques bien établis.

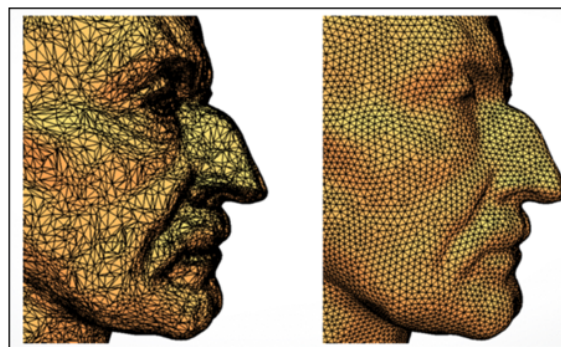


FIGURE I.32 – Remailage par Yams.

De récentes avancées dans ce domaine permettent la conversion d'un maillage tétraédrique en un maillage hexaédrique.

Nous présentons dans cette section les différentes techniques principales de maillage de microstructures biphasées. Cependant, contrairement au cas multiphasé, la littérature est loin d'être exhaustive dans le cas biphasé. Il est très délicat et très ambitieux de vouloir rassembler dans un état de l'art une quantité de plus d'un millier d'articles sur cette thématique de recherche. Les techniques utilisées ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients et le sujet est loin d'être clos à ce jour. Retenons la phrase d'Alain Rassineux qui appelle à une grande modestie quant à la méthode à utiliser en disant « L'obtention d'un résultat est le seul moyen d'évaluer la fiabilité et la qualité de la méthode ».

I.3.2 Maillage volumique

Une triangulation volumique, définie par un pavage tétrahédrique peut véritablement être considérée comme un maillage volumique d'une image 3D. L'ambition de cette approche est de proposer le même algorithme sur la totalité de l'image, les frontières de phases sont étudiées uniquement par un raffinement automatique de la procédure.

Dans cette optique, cette approche peut se concevoir sur des microstructures biphasées mais la généralisation d'une approche aux microstructures multiphasées est parfois plus délicate. Classiquement, trois approches se distinguent dans la littérature :

- Approche frontale
- Approche type Delaunay 3D
- Approche par octree

I.3.2.1 Approche frontale

En 3D, le front initial est déjà une triangulation ce qui place cette méthode dans une approche de "remplissage". Dans le principe, la propagation du front est analogue à la méthodologie utilisée en 2D ; un calcul d'une normale à un triangle permet de positionner un nouveau point du front à l'intérieur du contour de l'objet. Le front progresse librement jusqu'à la rencontre d'un autre front. Contrairement au cas 2D, en 3D, la gestion du nouveau front est délicate lors de l'insertion d'un nouveau point aux abords d'un autre front. La méthodologie de résolution pour éviter une superposition du nouveau tétraèdres est délicate à appréhender. Comme la résolution analytique est complexe, on a souvent recours aux méthodes dites de convergence qui, parfois, se bloquent dans un front lorsqu'il est tortueux. Un des points délicats de la méthode en 3D est que l'algorithme rencontre un point du front formant un polyèdre non divisible en tétraèdre : c'est le polyèdre de Schönhart [[E.Schönhardt., 1928](#)].

Par ailleurs, il semble difficile de concevoir l'adaptation de cette technique pour une image multiphasée.

I.3.2.2 Approche type Delaunay 3D

Dans ce domaine, les travaux de P.L Georges, dès le début des années 80, ont largement contribué à l'adaptation de la triangulation de Delaunay dans la problématique du maillage [[George and Borouchaki, 1997](#)] au sens général ou plus appliqué aux éléments finis [[Frey and George, 1999](#)]. La définition en 3D de la triangulation de Delaunay est singulièrement la même qu'en 2D : pour un ensemble P de points dans l'espace euclidien en trois dimensions, une triangulation de Delaunay $DT(P)$ est réalisée si aucun point de P ne se trouve dans la sphère circonscrite d'un 3 – *simplexe* (tétraèdre) de $DT(P)$. Le partitionnement de l'espace est réalisé par des tétraèdres satisfaisants cette condition.

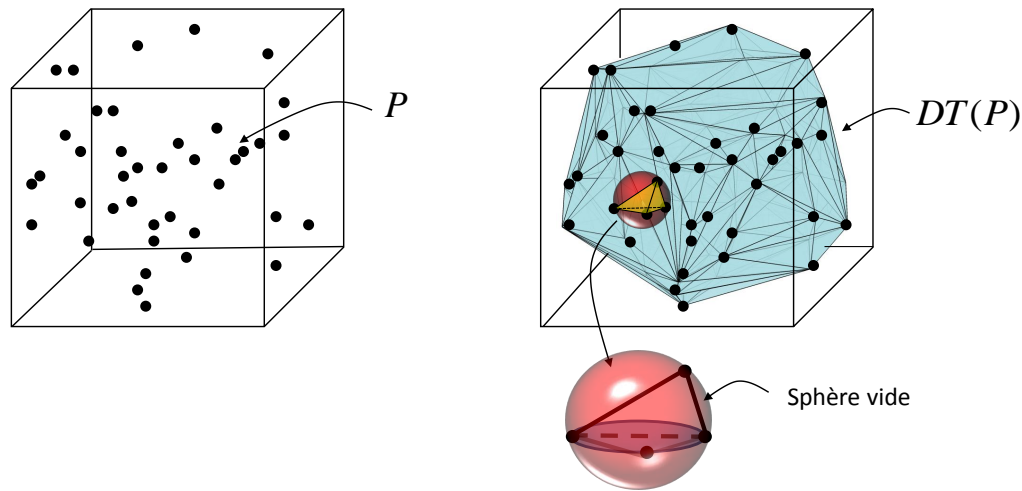


FIGURE I.33 – Delaunay 3D.

Comme en 2D, pour des points échantillonnés dans un ensemble, la réunion de l'ensemble des $n - \text{simplexe}$ forme une enveloppe convexe dite de Hull. Cette structure est donc peu adaptée aux objets concaves. La contrainte de la triangulation est beaucoup plus délicate dans le cas 3D. En 2D, nous avons présenté un exemple où une simple définition vectorielle ordonnée du contour d'un objet suffisait à atteindre une triangulation contrainte de Delaunay. En 3D, suivant la répartition des points dans l'espace, la condition de la sphère vide peut être difficilement respectée. Il existe plusieurs techniques pour parler à ce problème. Par échantillonnage, un nombre important de points de triangulation à la frontière des objets et conditionnels à une fonction distance C.Dobrzynski propose un algorithme de forçage d'une face d'un triangle de Delaunay à être contrainte par le contour de l'objet [Dobrzynski, 2005]. Il est possible, par des techniques de décimation d'éléments, de sélectionner uniquement ceux dont le barycentre est inclus dans l'objet. Ces techniques peuvent empêcher parfois la création de triangles "dégénérés" à surface faible ou nulle (slivers), inhérents à la construction du diagramme de Delaunay. Dans des cas où la morphologie de la microstructure est "douce", J.D.Boissonnat adapte complètement la triangulation de Delaunay à la surface des phases. Cette méthodologie fait partie intégrante du code de calcul libre CGAL C++ [Boissonnat et al., 2002]

P.Georges indique que la triangulation contrainte de Delaunay est encore mal maîtrisée [George and Borouchaki, 1997]. Il montre l'existence de cas problématiques liés à cette contrainte qui conduit, parfois, à l'établissement de polyèdre type Schöhardt, non partitionnable en éléments tétraédriques sans ajout d'un point de J.Steiner [Steiner and Weierstrass, 1882], dont la localisation est parfois délicate.

Cependant, P.George, H.Borouchaki parviennent à concevoir une procédure de découpage d'un polyèdre arbitraire [George and Borouchaki, 2002]. Ils établissent des conditions de triangulations contraintes de Delaunay 3D [George and Borouchaki, 1997]; travaux menés en parallèle par J.Shewchuk [Shewchuk, 1998].

I.3.2.3 Approche par octree

La décomposition en octree est la version tridimensionnelle de la décomposition en quadtree. Sur ce principe en 3D la décomposition cubique des cellules en tétraèdres produit le maillage de la structure (Fig.I.34). Cette méthode a été inventée dans les années 1980 par D.J.R Meagher [[Laboratory and Meagher, 1980](#)] qui apporte une nouvelle représentation des images sur un ordinateur, ou M.Yerry [[M.Yerry, 1983](#)] qui généralise en 3D l’approche 2D du quadtree.

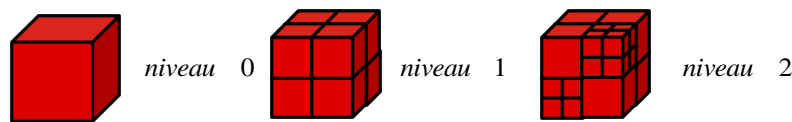


FIGURE I.34 – Octree

L’avantage de cette méthode est que ce découpage est organisé en arbre hiérarchique dont l’optimisation informatique permet la manipulation d’objets de grande taille.

La procédure algorithmique peut être décomposée en 4 principales étapes :

- Choix de la taille du motif de l’octree principal
- Décomposition récursive de l’image, suivant ce motif, en cellules dont la taille minimale est fixée par un critère d’arrêt défini préalablement
- Définition des cellules appartenant à chacune des phases respectives.
- Partitionnement en triangles des cellules de l’octree.

Par cette méthode, ce partitionnement n’est délicat qu’à la frontière des phases. Cependant, si elle est trop perturbée, il y aura création d’éléments trop fins car les éléments s’adaptent de façon récursive à la topologie. Ces éléments seront par la suite délicats à fusionner lors d’une éventuelle optimisation de triangulation.

Cette technique, par son arbre hiérarchique optimisé, trouve une utilisation dans la gestion de données importantes générées par un scan laser pour des techniques de visualisation [[Elseberg., 2013](#)].

I.3.2.4 Morphing image/maillage

Récemment, d’autres approches originales apparaissent, comme la convergence réciproque adaptative d’un maillage et d’une image 3D initiée par S.Langer [[Langer, 2001](#)] et généralisée en 3D uniquement pour des images biphasées par V.R Coffman [[Coffman et al., 2012](#)] (Fig.I.35).

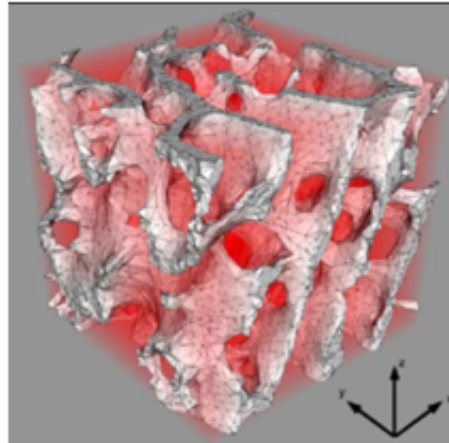


FIGURE I.35 – Logiciel OOF 3D.

Cette convergence adaptative est réalisée sur une image dont les contours ont été dépourvus d'irrégularité topologique par le passage d'un filtre du type laplacien.

I.3.2.5 Triangulation duale d'un Voronoï Centroïdal 3D

J.Dardenne généralise son étude du Voronoï centroïdal en 3D [Dardenne, 2009] (Fig.I.36).

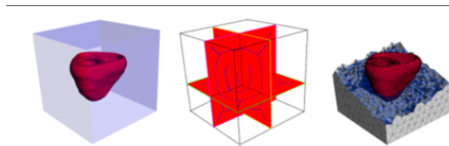


FIGURE I.36 – Voronoï centroïdal 3D.

En principe cette méthode est établie pour les images multiphasées, mais les auteurs n'ont pas proposé de résultat.

I.3.3 Maillage surfacique

Cette approche est née du constat qu'il n'est ni informatiquement possible ni utile de traiter un nombre parfois élevé de données d'une image afin d'en avoir une représentation visuelle. En effet, dans une image 3D, seuls les voxels de la surface sont utiles pour obtenir une représentation visuelle. La recherche de la surface des phases devient donc une nécessité informatique.

La procédure de maillage est donc indirecte ou séquentielle. La première étape procède en une extraction surfacique des objets de l'image. Suivant la méthode, cette extraction peut constituer une première triangulation. Dans d'autres cas, les éléments d'extraction peuvent être partitionnés en éléments triangulaires. Quelle que soit la méthode, dans un deuxième temps, on applique, sur cette surface triangulée, une procédure de maillage volumique.

I.3.4 Extraction des surfaces des phases

Dans le domaine de l'imagerie, nous sommes en présence d'objets discrétisés par des voxels. Par conséquent, en géométrie et plus précisément en topologie discrète, il est possible d'établir des notions de frontière d'objet. Dans cette approche, la frontière de l'objet est définie comme le bord du complexe cellulaire que le modélise [Kovalevsky, 1989] (Fig.I.37).

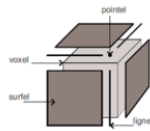


FIGURE I.37 – Composante d'un voxel.

Un complexe cellulaire de dimension 3 complète l'information d'un voxel par un ensemble de données :

- Surfactive : surfel
- Linéique : lignel
- Ponctuel : pointel

Cette définition permet d'établir des frontières d'objet interne ou externe en considérant :

- les voxels (Fig.I.38) :

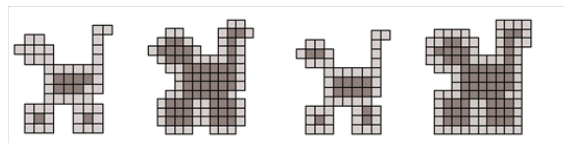


FIGURE I.38 – Contour d'une image par des voxels.

ou :

- les surfels (Fig.I.39) :

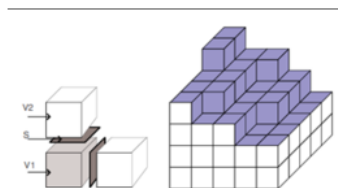


FIGURE I.39 – Contour d'une image par des surfels.

L'établissement des frontières d'objet par les surfels offre des bonnes propriétés topologiques. Cette frontière est rendue fortement connexe afin de respecter le caractère injectif d'une courbe de C.Jordan [Jordan, 1887] (Fig.I.40).

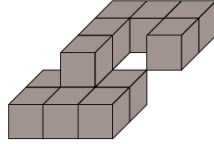


FIGURE I.40 – Paradoxe de Jordan en topologie algébrique.

Par cette technique, D.Boltcheva parvient à la reconstruction par modélisation surfacique d'un objet par son approche sur la modélisation géométrique et topologique d'images discrètes [boltcheva, 2007].

I.3.4.1 Triangulation surfacique

La triangulation de surface n'est pas simple en 3D ; le résultat de l'extraction de surface conduit à un ensemble de voxels de connexité définie sur lequel il est nécessaire de répartir de façon judicieuse des triangles. Le terme « judicieux » se décline en plusieurs critères dont le nombre, la forme, et la taille des triangles. Ces critères sont mutuellement contraints ; il est judicieux de décrire une surface morphologiquement complexe avec un nombre plus ou moins important de triangles les plus équilatéraux possible (au sens EF) et de taille adaptée à la topologie. Les premières approches analytiques de description mathématique d'une image sont apparues dans les années 70. H.N Christiansen convertit des lignes de contour ou isolignes en des éléments polygonaux de maillage [Christiansen and Sederberg, 1978]. E.Keppel approxime déjà une surface complexe par triangulation d'une image [Keppel, 1975]. Il est très délicat d'approcher analytiquement la forme d'une image ; des techniques à base de B-splines rationnelles non uniformes (NURBS) sont utilisées si la topologie de la surface est relativement peu perturbée. En revanche, lorsque la surface peut se décrire de façon analytique, une forme de triangulation est possible.

I.3.4.2 Triangulation de surface explicite

Les surfaces explicites sont de la forme $y = f(x)$; elles sont faciles à représenter graphiquement : de nombreux logiciels sont capables d'évaluer des fonctions du type en balayant les paramètres et pour obtenir très rapidement de nombreux points de la surface, et les ordinateurs actuels disposent de cartes graphiques pouvant afficher le résultat sous n'importe quel angle en temps réel. Dans ce cadre, il est possible d'établir des relations de voisinage entre les différents points de la surface afin d'obtenir une triangulation.

Les problématiques liées à cette triangulation seront étudiées au chapitre IV.3.1. Notons les travaux de G.Leibon [Leibon and Letscher, 2000] qui a formulé sous certaines conditions d'échantillonnages la formulation d'une triangulation duale d'un Voronoï géométrique.

I.3.4.3 Triangulation des surfaces implicites

Les surfaces, surtout lorsqu'elles sont réelles, ne peuvent pas être définies explicitement mais de façon implicite par une formulation $f(x, y, z) = c$, où c est une constante représentative de l'isosurface.

On note que la formulation générale des surfaces est "implicite". Une formulation explicite d'une surface n'est en fait qu'un cas particulier d'une formulation implicite ou paramétrique.

Une image, dont la représentation est un champ scalaire, peut être considérée comme une surface implicite.

Il existe de nombreuses méthodes pour appréhender la triangulation d'une surface implicite. J.D Boissonnat et D.Attali fixent des conditions d'implantation de germes sur une surface pour que la complexité d'une triangulation soit linéaire [Attali and Boissonnat, 2004]. J.D Boissonnat et J.Flötotto établissent un système de coordonnées adapté à la topologie locale des points échantillonnés sur la surface [Boissonnat and Flötotto, 2002], [Flötotto, 2003], [Boissonnat and Flötotto, 2004]. Le résultat est l'établissement d'un atlas de Voronoï restreint à un espace tangent.

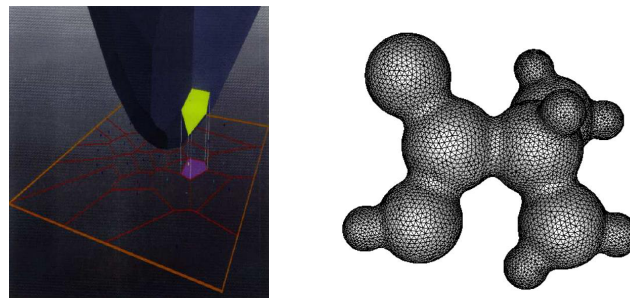


FIGURE I.41 – Projection surfacique.

Cette méthode est bien adaptée pour des formes dont les courbures sont relativement douces.

P Frey et H.Borouchaki [Frey and Borouchaki, 1996], [Frey and Borouchaki, 1997] définissent une formulation d'une triangulation d'une surface implicite composée de l'intersection de trois cylindres.

Des études sur des métriques géodésiques appliquées aux points échantillonnés sur surface ont été réalisées par F.Mémoli [Mémoli and Sapiro, 2006]

I.3.4.4 Méthodes type Marching

Cette méthode est plus un algorithme qu'une mathématique. Dans cette approche, l'espace est divisé en une partition d'entités élémentaires à géométrie définie (cube, tétraèdre, diamant). Ces entités sont évaluées individuellement et indépendamment. Pour chaque entité, la valeur de la fonction implicite est évaluée à chacun de ses sommets. Si la fonction n'a pas le même signe à tous les sommets de l'entité élémentaire il y a intersection

de la surface de l'objet par la fonction. Suivant les signes de chaque sommet un certain nombre de triangles approximant la surface sont générés selon une table de correspondance prédéfinie. Les sommets de ces triangles sont positionnés sur les arêtes des entités élémentaires, leur position étant déterminée par interpolation selon la valeur de la fonction aux extrémités des arêtes.

Marching Cube (MC)

Dans le concept, le Marching Cube est la généralisation tridimensionnelle du Marching Square.

La méthode du Marching Cube a été inventée par W.Lorensen et H.Cline [Lorensen and Cline, 1987]. Elle a fait l'objet d'un brevet en 1985 pour une durée de 20 ans. Elle est très massivement diffusée dans le monde académique et industriel. Cette technique permet de définir l'enveloppe des objets (isosurface) par calcul de l'isosurface d'une image. La méthode procède par l'étude des valeurs scalaires des voxels du voisinage immédiat d'un voxel central. En dimension 3, le voisinage est un cube de $2 \times 2 \times 2$ voxels (Fig.I.42). Cette petite fenêtre de test va parcourir l'image. L'algorithme a pour but de définir une frontière entre les voxels de ce cube élémentaire. La technique du Marching Cube est donc une technique d'extraction de surface.

Le maillage déduit de cette méthode est à l'échelle du plus petit élément représentatif de l'image : le voxel.

Cette technique est soumise à de nombreuses controverses mais sa grande simplicité d'implémentation conjuguée à une grande rapidité d'exécution ont fait d'elle le cœur des codes de calculs utilisés dans les principaux logiciels de maillage commerciaux actuels et cela même pour le cas multiphasé (Avizo, Dream3D, Simpleware...). T.Newman dresse une étude approfondie sur les limites et les améliorations de la méthode [Newman and Yi, 2006].

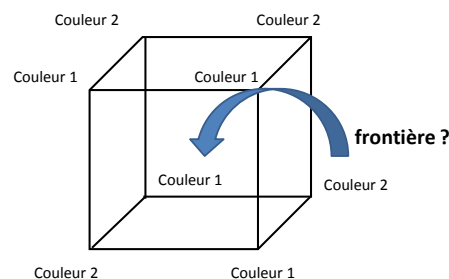


FIGURE I.42 – Marching 3D biphasé.

Le nombre de combinaisons à étudier dépendra directement du nombre de couleurs ou phases dans le cube élémentaire. En biphasé, les 8 voxels du cube prennent deux valeurs scalaires soit $2^8 = 256$ possibilités ; par élément de symétrie ce nombre est ramené à 15 dont voici la liste des configurations possibles (Fig.I.43).

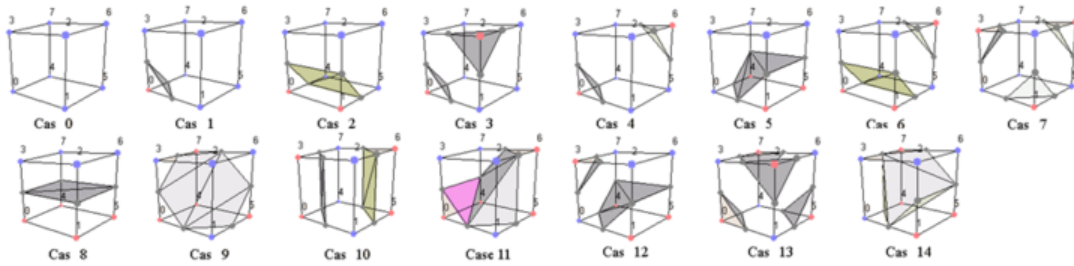


FIGURE I.43 – Table d’indirection du Marching Cube [Lorensen and Cline, 1987].

Sur chaque itération du parcours du cube sur l’image, on compare la valeur de l’interpolation linéaire entre la surface locale avec celles calculées préalablement dans les 15 configurations possibles de placement local des voxels sur le cube. La surface de séparation des phases, appelée isosurface est ainsi construite par l’union de toutes les frontières ainsi établies. Les éléments surfaciques générés sont des polygones aisément divisibles en triangles et donc peuvent directement être convertis en des éléments tétraédriques pour un maillage volumique. Cependant le nombre d’éléments produit est parfois élevé. Le rapport peut être d’un élément de triangulation, ou plus suivant les méthodes, pour un voxel de l’image. Ce nombre élevé reste le principal inconvénient de la méthode, qui est commun avec toutes les approches type Marching qui n’intègrent pas, par construction, de pas de maillage.

Pour autant, pour diminuer le nombre d’éléments, une étape de simplification du maillage ou « remaillage » lui est souvent associée. Cette étape est bien sûr délicate et parfois, toute aussi coûteuse en ressources informatiques. On peut citer des simplifications de maillage par approximation polygonale D.luebke [Luebke, 2001] S.Silva [Silva et al., 2007].

Un autre aspect problématique lié à la démarche réside dans le choix de la détermination parfois délicate de la frontière entre les voxels du cube. Si d’un point de vue intuitif, il est simple d’imaginer que dans le cas 0, il n’y pas de frontière entre les 8 voxels ayant la même valeur numérique, que pour le cas 1 la frontière se place naturellement à la limite de l’unique voxel de valeur scalaire différente des autres, il est plus délicat pour les cas 3, 6, 7, 10, 12, 13 de placer une frontière unique entre les voxels (Fig.I.43) . Ces cas sont appelés cas ambigus, ils conduisent à des erreurs topologiques. Des méthodes de résolution de ces cas ambigus ont été apportées dès la création du MC. G.Wyvill [Wyvill et al., 1986] ou G Nielson [Nielson and Hamann, 1991], proposent des approches analytiques afin de décider du placement des frontières dans le cube. De nos jours, certains codes de maillage qui intègrent le Marching Cube laissent, parfois, le soin à l’utilisateur de corriger lui-même ces indécisions topologiques.

Un cas pathologique du MC réside dans le fait qu’il peut générer des trous suivant la configuration des voxels dans le cas biphasé (Fig.I.44).

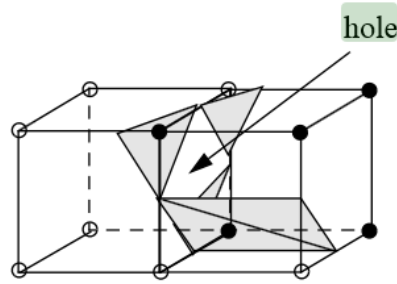


FIGURE I.44 – Trou d'une des configurations du Marching Cube.

De nombreuses méthodes existent pour remédier à ce trou [Lewiner et al., 2003], [Cignoni et al., 2000]. G.L Masala propose de redéfinir les configurations des frontières du cube dans le cas biphasé; il en dénombre 21 qui évitent la formation de trous [Masala et al., 2013]. Il existe d'autres variantes du MC comme le Marching Cube 33 qui, avec une table de correspondance différente, respecte fidèlement la topologie de la microstructure biphasée[Custodio et al., 2013]

Les triangles peuvent être de mauvaise qualité : "triangles minces". Il existe des méthodes comme celle de C.Dietrich pour générer des triangles du Marching Cube sans ces cas problématiques [Dietrich et al., 2009]

Marching Tetrahedra (MT)

De ces ambiguïtés inhérentes à la nature même du cube, d'autres variantes algorithmiques sont apparues comme le Marching Tetrahedra (MT). Il a été aussi créé pour contourner le brevet du Marching Cube. L'algorithme est une variante de celui du Marching Cube. Le principe est de diviser le cube élémentaire en six tétraèdres (Fig.I.45)

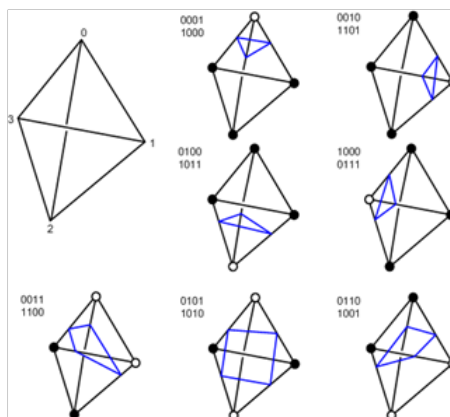


FIGURE I.45 – Table d'indirection du Marching Tétrahédra.

Comme pour le Marching Cube, les frontières sont définies par les différentes localisations des voxels sur le tétraèdre. Dans le cas biphasé, les quatre sommets du tétraèdre

peuvent avoir le choix entre deux valeurs scalaires donc $2^4 = 16$ configurations possibles. On peut se ramener facilement à 8 configurations grâce aux éléments de symétrie du tétraèdre. L'algorithme est plus simple que celui du MC et surtout, il ne souffre d'aucun cas ambigu. En revanche, et cela est prévisible, avec cette méthode le nombre d'éléments augmente considérablement. Pour le Marching Cube, il y a au maximum 5 facettes par cube élémentaire alors que pour le Marching Tétraèdre il y a au maximum $6 \times 2 = 12$ facettes par cube élémentaire.

Il faut ajouter aussi que l'anisotropie géométrique d'un tétraèdre engendre une anisotropie de maillage qui peut, dans un calcul mécanique, poser quelques problèmes d'interprétation. Cependant G.M Treece [Treece et al., 1999] parvient par cette technique à un maillage fidèle à la topologie de la microstructure.

I.3.4.5 Marching Diamond (MD)

Comme son nom l'indique, la fenêtre d'étude est de la forme d'un diamant. La détermination des frontières est plus précise et surtout symétrique en effectuant une interpolation barycentrique sur les diamants formés par tétraèdres localisés sur chaque bord du diamant. L'isosurface a un caractère plus lissé et plus précis que les précédentes études. J.C Anderson parvient à une structure de maillage lissée [Anderson et al., 2005]. Cependant cette méthode inventée en 2006 ne rencontre plus de développement.

I.3.5 Synthèse de l'étude des microstructures 3D biphasées

Au travers de cet état de l'art, il apparaît que déjà pour des microstructures biphasées le maillage tridimensionnel est une aventure très complexe. Toutes les méthodes ont leurs propres avantages et leurs inconvénients. La génération de cas particuliers empêche parfois une automatisation des algorithmes.

Concernant les méthodes de maillage volumique direct, l'approche de la triangulation de Delaunay est séduisante, mathématiquement démontrable en 2D et en 3D. Elle permet une densité de maille uniforme et optimale suivant une répartition correcte de densité de points de triangulation. Cependant elle n'est pas adaptée pour une version contrainte 3D, la gestion des éléments de bord étant très délicate. L'approche du Voronoï Centroïdal est intéressante car elle permet une adaptation du maillage à la forme de l'image. Cependant, cette technique reste sensible aux éventuelles aspérités de surface très fréquentes lorsqu'on utilise des images expérimentales. C'est le cas pour des images acquises par Tomographie X qui sont par nature « bruitées ». De même que pour la recomposition en atlas par projection sur un plan tangent d'un nuage de points il est nécessaire que la densité de points, soit suffisante et que le plan de référence soit suffisamment proche pour que la métrique euclidienne soit utilisable.

Concernant les méthodes de maillage séquentielle, l'extraction de la surface par une étude topologique ou de voisinage de voxels, permet l'extraction d'une surface fidèle à la morphologie de l'objet à étudier. Dans le premier cas, une étude sur un complexe cellulaire

peut permettre la modélisation géométrique et topologique du bord d'un objet cohérent avec les conditions de Jordan [Jordan, 1887]. Sur ce modèle, Boltcheva construit une triangulation basée sur la dualité Delaunay/Voronoi. A notre connaissance, cette approche, bien que très prometteuse, laisse peu de trace dans la littérature.

Toutes ces raisons expliquent en partie le grand intérêt des techniques type Marching et plus particulièrement du Marching cube. Son principal inconvénient est le nombre important d'éléments qu'il génère car cette méthode est « fine » par construction. Elle réalise une triangulation de la microstructure à l'échelle du voxel. Il est nécessaire de procéder par une étape "remaillage".

Toutes les techniques qui dérivent du Marching Cube produisent encore plus d'éléments. L'avantage de la levée des ambiguïtés apportée par le Marching Tetra ne peut compenser une utilisation encore plus imposante de la densité de maille. Ce qui implique une étape plus importante de simplification du maillage pour que celui ci puisse être utilisable lors d'un calcul EF par exemple.

I.4 Maillage des microstructures multiphasées 3D

Introduction

Le maillage 3D dans le cas de microstructures, présentant plusieurs phases constitue un challenge pour le monde des mécaniciens en vue de prendre en considération la réalité de la morphologie des matériaux hétérogènes. Ces informations sont nécessaires pour établir des calculs numériques robustes et adéquats. Pour adapter l'image à un calcul élément fini, chacune des phases est définie par une loi de comportement physique homogène (mécanique, thermique, électromagnétique, ...) et une fraction volumique. Les difficultés rencontrées dans le cas biphasé deviennent parfois insurmontables dans ce cas.

La littérature n'est pas prolifique dans le domaine du maillage de microstructure 3D multiphasée, toutefois, nous regroupons les différentes approches de maillage surfacique et volumique.

On distingue deux familles d'études :

- La première, la moins répandue, tente d'extraire de l'image des composantes qui serviront de contraintes géométriques en vue d'une adaptation spécifique à une procédure de triangulation type Delaunay, par exemple.
- La deuxième est géométrique : elle a pour but de proposer une triangulation de chacune des phases en cohérence avec les phases moyennes.

I.4.1 Maillage par contraintes géométriques

D.Boltcheva contraint une triangulation à être contenue par des frontières définies par une transition de label numérique de chacune des phases. Ces frontières sont des points qui par dilatation morphologique (en rouge sur la figure I.46) constituent une barrière (protecting balls) qui contraint les triangles à être placés de chaque côté de la sphère.

Une triangulation de Delaunay contrainte par les frontières des phases est donc établie [Boltcheva et al., 2009].

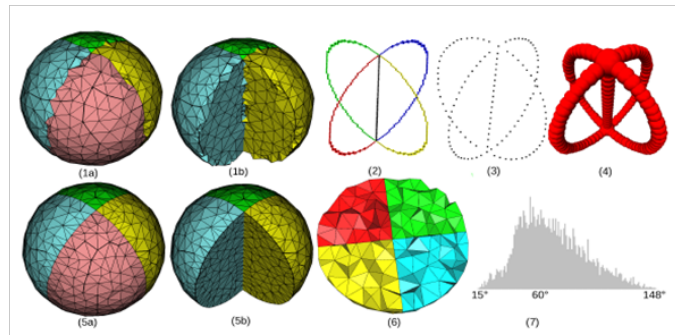


FIGURE I.46 – Protect balls.

Cependant, pour des structures hétérogènes contenant des formes à géométrie complexe, ce principe est parfois difficilement applicable.

En science des matériaux, une représentation classique est le graphe de Voronoï en trois dimensions qui représente assez bien une structure polycristalline que l'on observe à la surface de certains matériaux (Fig.I.47).

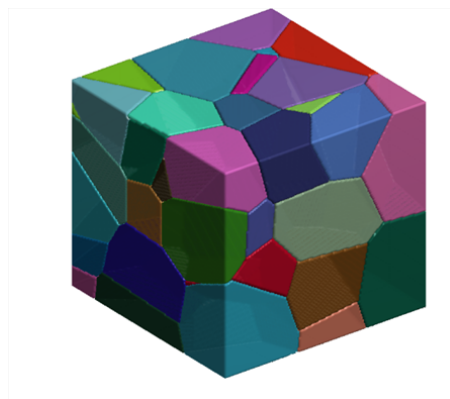


FIGURE I.47 – Voronoï 3D [Voronoi, 1908a].

Dans une structure polycristalline, les contraintes géométriques sont simples à identifier : ce sont des points de jonction entre les différentes phases. La parfaite convexité des phases permet d'approximer les interfaces des phases par des plans. Ainsi, comme pour une CAO, il est possible de partitionner chacun des plans en éléments triangulaires [Quey et al., 2011] (Fig.I.48).

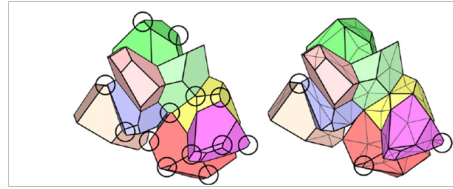


FIGURE I.48 – Subdivision de faces des phases.

I.4.2 Maillage par triangulation de Delaunay

L'approche de Delaunay dans le cas des microstructures multiphasées, est rendu complexe par la gestion des interfaces des phases. Néanmoins, sur des surfaces douces, J.P Pons réussit à trianguler un volume multiphasé [Pons et al., 2007].

I.4.3 Maillage par approximation géométrique de la surface

I.4.3.1 Marching Cube Multiphasé

Dans ce cas, le nombre de combinaisons du cube est désormais : $8^8 = 16777216$ possibilités. Par élément de symétrie, ce nombre peut être réduit.

Wu parvient à un maillage surfacique de 8 phases d'une microstructure 3D [Wu and Sullivan, 2003]. P.G Young propose une technique originale de maillage par Marching Cube Volumétrique EVoMaCs [Young et al., 2008]. Cette procédure est le cœur du logiciel de maillage Simpleware.

I.4.3.2 Marching tetrahedra Multiphasé

V.Otreppe parvient à mailler une structure multiphasée [d'Otreppe et al., 2012], [d'Otreppe and Boman, 2010]. Elle combine une méthode de reconstruction de surface implicite avec un système d'extraction de maillage multi-région d'une microstructure multiphasée.

I.4.3.3 Méthode Hybride

Dual Contouring

Le Dual Contouring est l'opération séquentielle du partitionnement en octree de la microstructure suivie d'une recherche du contour local par une technique type Marching Cube. Y.Zhang utilise cette technique, résout les ambiguïtés de configuration liées au Marching Cube pour obtenir des maillages de bonne qualité [Zhang and Bajaj, 2006],[Zhang et al., 2005a], [Zhang et al., 2010], [Zhang and Qian, 2012b]. Puis, elle propose une méthode originale de lissage du maillage ainsi formé [Zhang et al., 2005b].

I.4.3.4 Méthode par projection

Sur des surfaces lisses et localement projetables, A.Cachia parvient au partitionnement de 12 phases sur une microstructure multiphasée [[Cachia et al., 2003](#)].

I.4.3.5 Maillage de surface implicite

P.A Fayolle applique la triangulation de Delaunay à des points échantillonnés sur une surface implicite. Cette procédure est applicable pour les microstructures multiphasées et le résultat du maillage produit des triangles de bonne qualité [[Fayolle and Pasko, 2012](#)]

I.4.4 Synthèse de l'étude des microstructures 3D biphasées

Déjà complexe dans le cas des microstructures biphasées 3D, le maillage des microstructures multiphasées comporte un bon nombre d'obstacles à la fois théoriques et techniques. Une approche unique n'est pas toujours concevable, ainsi dans la littérature, il est fréquent de relever plusieurs techniques combinées ; le dual contouring en est un exemple.

Chapitre II

Outils de la morphologie mathématique

Dans ce chapitre, nous rappelons, en premier lieu, quelques notions sur les images ainsi que leurs représentations dans un espace discret. Ensuite, nous présentons les principaux outils morphologiques utilisés pour l'ensemble des études de maillage de microstructures bi et multiphasées 2D et 3D. Ces outils sont issus principalement de la Morphologie Mathématique. Nous présentons leurs historiques ainsi que leurs fondements théoriques, principalement ensemblistes et fonctionnels. L'ensemble des concepts a pour champs d'application les images discrètes sur lesquelles des composantes morphologiques nécessaires à une triangulation sont établies.

Sommaire

II.1	Qu'est ce qu'une image ?	45
II.1.1	Généralités	45
II.1.2	Représentation d'une image dans un espace discret	45
II.1.3	Configurations de voisinage.	46
II.2	Notion de phases d'une image	48
II.3	Lien entre les ensembles et les fonctions	49
II.4	Morphologie mathématique	50
II.5	Métrie géodésique	51
II.6	Quelques opérateurs morphologiques	51
II.6.1	Cas euclidien	52
II.6.2	Cas géodésique.	56
II.6.3	Squelette d'une image	58
II.6.4	Détection des points d'extrémité du squelette	59
II.7	Calcul des frontières d'un processus ponctuel	60
II.7.1	Processus ponctuel.	61
II.7.2	Diagramme de Voronoï.	61
II.7.3	Fonction distance	62
II.7.4	Ligne de partage des eaux	64
II.8	Synthèse	67

II.1 Qu'est ce qu'une image ?

II.1.1 Généralités

Dans notre étude, nous considérons une image comme étant la composition d'un ensemble d'éléments indivisibles que l'on nomme pixels en 2D ou voxels en 3D. Ces éléments sont présentés sous la forme d'une matrice 2D ou d'un volume 3D ; on parle alors de matrice image. Chacun de ces pixels ou voxels possède une valeur scalaire unique.

II.1.2 Représentation d'une image dans un espace discret

Largement utilisée dans le Chapitre V, lors de la triangulation de microstructures multiphasées 3D, la représentation discrétisée des images, par des pixels 2D ou en voxels 3D, est le point de départ de notre étude.

Depuis le milieu des années 60, apparaissent les premiers concepts mathématiques pour l'étude des images ; le terme "Image Processing" apparaît dans la communauté scientifique [Kovaszny and Joseph, 1955]. C'est A. Rosenfeld qui, à partir des années 1960 [Rosenfeld, 1965], a considérablement contribué au développement d'outils mathématiques, en topologie numérique (terme qu'il a lui-même inventé) pour établir des concepts sur la représentation numérisée et informatisée d'une image.

Il étudie une image lorsque celle-ci est représentée dans un espace discret \mathbb{Z}^2 en 2D et déjà \mathbb{Z}^3 en 3D alors que la technologie expérimentale et informatique était à leur début. On retrouve ses principes dans beaucoup de fondements théoriques de techniques comme l'analyse d'images, par exemple.

En 2D et en 3D, dans un espace discret, une image composée d'une quantité dénombrable d'éléments, par opposition aux objets non dénombrables dans un espace continu (Fig. II.1.a). Ces éléments sont des pixels représentant les plus petits éléments indivisibles d'une image 2D (Fig. II.1.b) et des voxels dans une image 3D. Leur localisation est donnée par une position (x, y) en 2D et (x, y, z) en 3D dans le repère orthonormé naturel de l'image et on leur affecte une valeur scalaire unique.

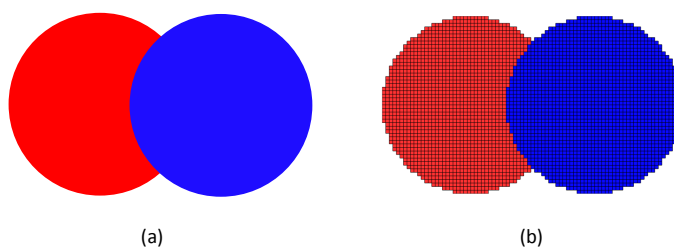


FIGURE II.1 – Représentation continue (a) et discrète (b) d'une image 2D.

La figure II.2 représente deux images dans l'espace continu (Fig. II.2.a) et dans l'espace discret (Fig. II.2.b).

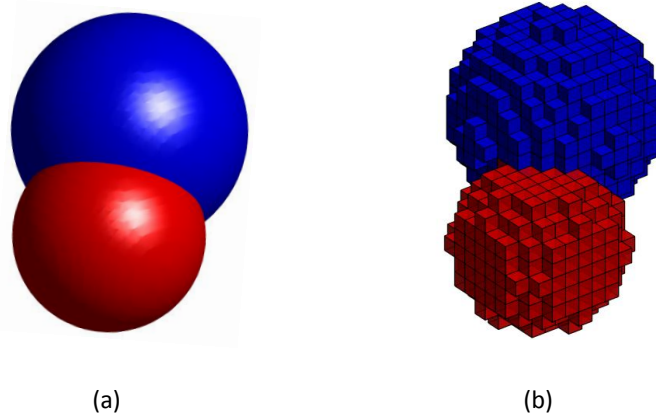


FIGURE II.2 – Représentation continue et discrète (a) d’une image 3D (b).

II.1.3 Configurations de voisinage

II.1.3.1 Configurations 2D

L’agencement des pixels dans une image est par construction ordonnée et conditionnée par un assemblage carré de pixels (Fig.II.3) . La nature même de l’image permet donc pour un pixel d’avoir deux configurations de voisinages qui induisent chacune une relation d’adjacence spécifique si deux pixels partagent une face, ou un sommet commun.

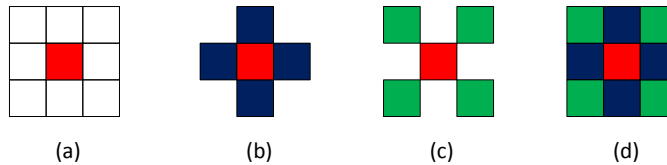


FIGURE II.3 – Connexités d’un pixel : (a) pixel central, (b) voisin direct de (a), (c) voisin axiaux de (a), (d) voisin direct et axiaux de (a).

Soient deux pixels (i, j) et (i', j') sont dits :

- 4 – *adjacents* s’ils sont voisins axiaux ou forts si :

$$|i - i'| + |j - j'| = 1 \tag{II.1}$$

- 8 – *adjacents* s’ils sont voisins 2D diagonaux ou faibles si :

$$\max(|i - i'|, |j - j'|) = 1 \tag{II.2}$$

II.1.3.2 Configurations 3D

En 3D, un voxel central possède trois configurations de voisinage chacune donne à celui-ci, une relation d’adjacence spécifique selon qu’il partage une face, une arête ou un sommet avec un autre voxel (Fig.II.4).

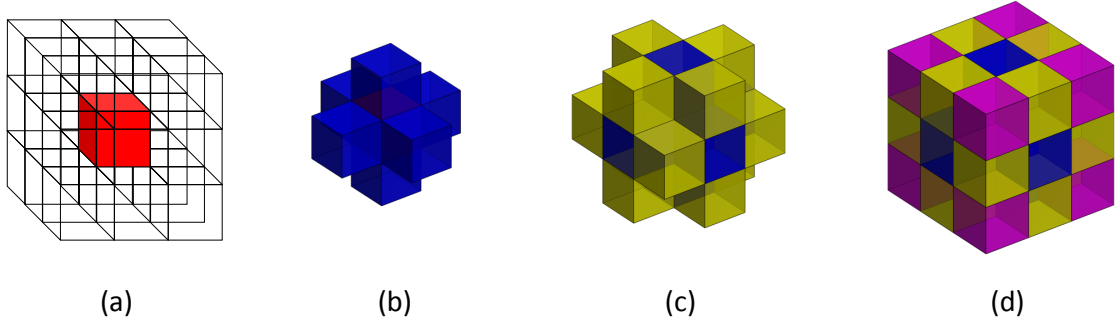


FIGURE II.4 – Connexités d'un voxel, (a) pixel central, (b) voisin direct de (a), (c) voisin axiaux de (a), (d) voisin faible de (a).

Soient deux voxels (i, j, k) et (i', j', k') sont dits :

$6 - adjacent$ s'ils sont voisins axiaux ou forts si :

$$|i - i'| = |j - j'| = |k - k'| = 1 \quad (\text{II.3})$$

$18 - adjacent$ s'ils sont voisins 3D axiaux ou diagonaux si :

$$|i - i'| = |j - j'| = |k - k'| \leq 2 \text{ et } \max(|i - i'|, |j - j'|, |k - k'|) = 1 \quad (\text{II.4})$$

$26 - adjacent$ s'ils sont voisins 3D axiaux, diagonaux ou diamétraux si :

$$\max(|i - i'|, |j - j'|, |k - k'|) = 1 \quad (\text{II.5})$$

On note que les voxels situés sur les sommets d'un voxel sont appelés voisins faibles ou naturels (Fig.II.5).

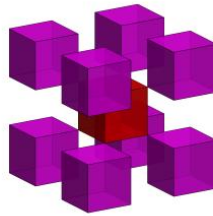


FIGURE II.5 – Voisins faibles ou naturels.

Dans notre étude, nous nous intéressons plus particulièrement à la connexité forte des voxels par opposition aux connexités axiales et faibles. On définira des métriques associées à ces adjacences par exemple, nous utilisons au chapitre V la distance d_6 pour évaluer la distance entre deux voxels fortement connexes. Le choix de la $6 - adjacent$ ou l'adjacence forte est à la base de nos principaux développements mathématiques.

Ces relations d'adjacences définissent des notions d'objets dans une image binaire : il est possible de joindre ou de disjoindre un objet suivant ses composantes connexes. En effet, la figure II.6.a représente un objet unique en connexité axiale ou faible et deux

objets distincts en connexités fortes.(II.6.b). La figure II.6.c représente un objet unique en connexité faible mais deux objets en connexité forte ou axiale (Fig.II.6.d)

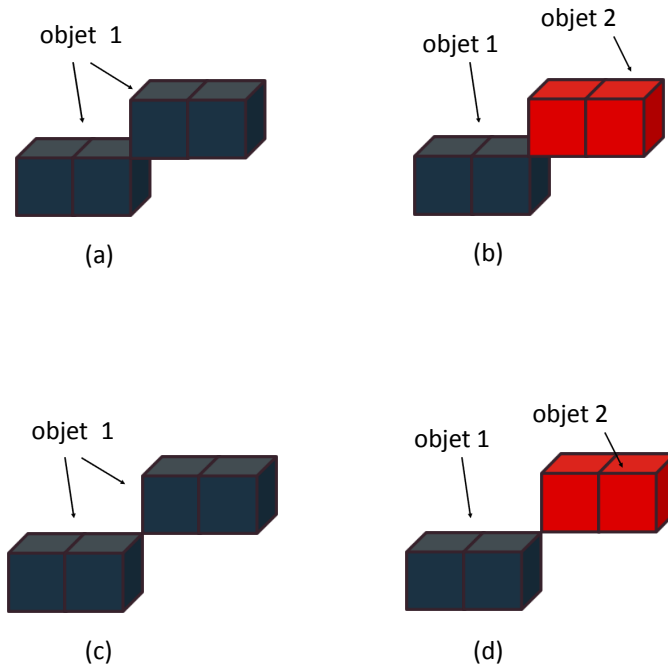


FIGURE II.6 – Nombre d’objets par connexité.

II.2 Notion de phases d’une image

L’ensemble des valeurs scalaires des pixels ou voxels d’une image est réparti en classes, que l’on nomme phases. Ces valeurs permettent de distinguer deux familles d’images :

- les images biphasées :

L’image est composée de deux classes de valeur scalaire. Cette image que nous choisissons de nommer X est dite binaire ou biphasée. Dans le tableau II.7, la colonne X est la représentation des images 2D et 3D au sens ensembliste. Dans cette représentation, une phase est le complémentaire ensembliste de l’autre phase. Dans ce cas, cette description permet de définir une notion d’objets sur lesquels il est possible de procéder à des mesures morphologiques telles que la surface ou le volume. Ces mesures ont été initiées par O.Minkowski [Minkowski, 1903] puis H.Hadwiger [Hadwiger, 1957]. La notion d’objet dans ce cas est uniquement liée aux composantes connexes des pixels 2D ou voxels 3D. On appelle objet d’une image biphasée pour une adjacence définie (4,8-adjacents 2D ou 6, 18, ou 26-adjacents 3D), l’ensemble des pixels ou des voxels mitoyens à cette adjacence.

- Les images multiphasées :

L’image est composée d’un nombre de classes de valeurs scalaires strictement supérieur à 2, l’image que nous choisissons de nommer f , est dite numérique, fonctionnelle, à teinte ou niveau de gris, labélisée ou multiphasée. Dans le tableau II.7, la colonne f est la représentation d’images 2D et 3D au sens fonctionnel. Elles sont très connues dans le

milieu médical, par exemple, les images acquises par résonance magnétique nucléaire (IRM) permettent d'obtenir une représentation tridimensionnelle d'un corps soumis à un champ magnétique. On note que plusieurs phases sont mitoyennes dans l'image. Dans ce cas, à la frontière des phases même si deux pixels ou voxels possèdent une composante connexe forte commune ils sont morphologiquement insécables, seule leur valeur scalaire différente permet leur distinction.



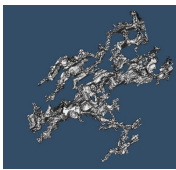
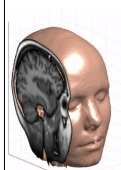
	X	f
$2D$		
$3D$		

FIGURE II.7 – Représentation ensembliste ou fonctionnelle d'une image.

II.3 Lien entre les ensembles et les fonctions

Pour une image multiphasée, on représente donc par f la fonction de répartition du nombre de valeurs scalaires d'une image en fonction de cette valeur (Fig.II.8).

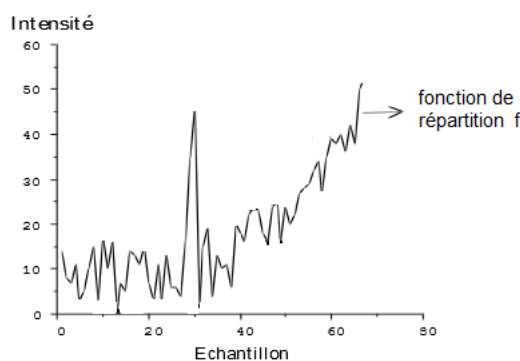


FIGURE II.8 – Fonction de répartition de l'image.

On note qu'il n'existe plus dans ce cadre de notion de complémentaire de l'image ni même d'objet. (Fig.II.8)

J.Serra montre qu'il y a équivalence entre ensemble et fonction en morphologie mathématique. Un ensemble est un cas particulier d'une fonction (Fig.II.9).

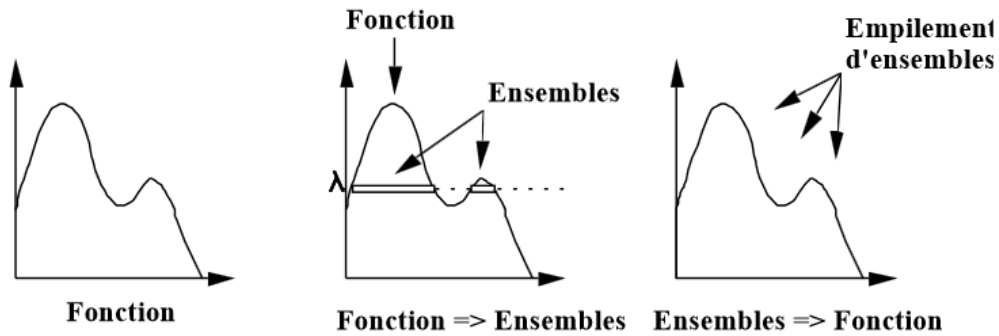


FIGURE II.9 – Equivalence entre ensemble et fonction.

II.4 Morphologie mathématique

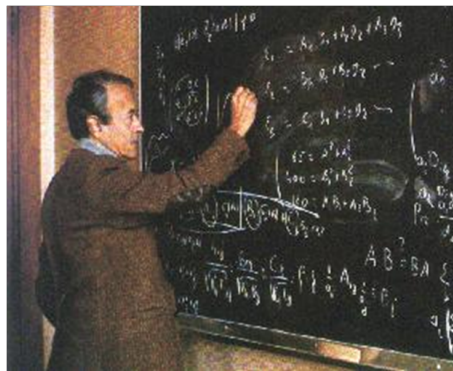


FIGURE II.10 – Georges MATHERON (1930 – 2000).

La morphologie mathématique a été inventée en 1964 par Georges Matheron(1930-2000) lors d'une première communication sur le sujet [Matheron, 1964a] . Elle regroupe une partie des concepts liés à la manipulation des ensembles. Ainsi, elle trouve une application immédiate dans le traitement d'images lorsque la représentation simplifiée d'une image est associée à un ensemble. Ces opérateurs permettent la description d'un objet placé dans un espace à une ou plusieurs dimensions. Le volume et la surface sont, entre autres, des paramètres de formes que l'on calcule avec cette mathématique. Le contour d'un objet, obtenu par dérivation de l'image est un résultat très important car c'est sur celui-ci que l'on applique en des points particuliers une triangulation et donc le maillage de l'objet.

Lorsque la description d'une image est, au sens ensembliste, plus complexe, la morphologie mathématique permet une description fonctionnelle de l'image.

II.5 Métrique géodésique

Dans cette étude, nous utilisons couramment la métrique euclidienne ("à vol d'oiseaux") classique en géométrie mais aussi une métrique dépendante du support sur lequel elle repose : la métrique géodésique.

Les premiers développements sur la métrique géodésique remontent à l'étude de J.C Klein sur l'analyse individuelle [Klein, 1976] mais ce sont C.Lantuéjoul, S.Beucher et F.Maisonneuve qui ont fondé les principales bases de la géodésie [Lantuéjoul and Beucher, 1981], [Lantuéjoul, 1982], [Lantuéjoul and Maisonneuve, 1983], [Lantuéjoul and Maisonneuve, 1984].

Dans une forme quelconque de \mathbb{R}^n , le calcul de la distance euclidienne ne tient donc pas compte de la forme de l'objet ni même des obstacles (vide) d'un point à un autre. En revanche, étant donné deux points (a,b) dans un compact $X \subseteq \mathbb{R}^n$, il existe toujours un plus court chemin de a à b qui soit inclus dans X . Cela définit une nouvelle distance, dite géodésique, restreinte à la référence X , d'où découle une classe très riche en opérateurs . Ces opérations sont toujours isotropes car elles ne mettent en jeu que des boules ou des disques. La distance géodésique est définie donc comme :

$$d_X(x, y) = \min \{l(C_{xy}) : C_{xy}, \text{chemin reliant } x \text{ à } y \text{ dans } X\} \quad (\text{II.6})$$

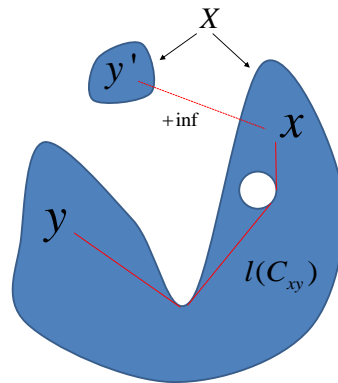


FIGURE II.11 – Distance géodésique.

Cette métrique nous permet de calculer la distance minimale entre deux points d'une surface quelconque. La figure II.11 illustre la distance géodésique entre les points x et y , on note que cette distance est infinie entre x et y' : $d_X(x, y') = \text{inf}$ puisqu'ils ne sont pas dans la même composante connexe.

II.6 Quelques opérateurs morphologiques

La liste des opérateurs morphologiques n'est pas exhaustive car elle est en constante évolution. Dans cette section, nous nous limitons à présenter quelques opérateurs morpho-

logiques élémentaires utilisés dans notre étude.

Notons que dans notre étude, l'analyse des microstructures biphasées et multiphasées nécessite, respectivement, l'utilisation des opérateurs ensemblistes et fonctionnels de la morphologie mathématique.

Suivant la métrique utilisée, la définition des opérateurs peut être différente. Nous présentons donc les deux configurations.

II.6.1 Cas euclidien

II.6.1.1 Dilatation et érosion

La dilatation et son dual, l'érosion, sont les opérateurs de base en morphologie mathématique. Une grande partie des opérations morphologiques plus complexes dérivent de ces opérateurs.

Cas ensembliste

La dilatation ensembliste est équivalente à l'addition de H.Minkowski de deux ensembles, A et B dans \mathbb{R}^n [Minkowski, 1896].

$$A \oplus B = \{a + b | a \in A, b \in B\} \tag{II.7}$$

La dilatation ensembliste est définie par l'addition de l'ensemble X avec l'union de toutes les intersections des ensembles formés par X et la boule B rayon r et de centre x (Fig.II.12).

On note $\delta_B(X) = \delta_{B_{r,x}}(X) = X \oplus B$

$$\delta_B(X) = X \oplus B = \cup \{B_x, x \in X\} \tag{II.8}$$

B est appelé élément structurant. J.Serra est l'un des premier à avoir étudié les propriétés des dilatations binaires en fonction de la forme des éléments structurants, [Serra, 1969], [Serra, 1972].

La soustraction ensembliste a été introduite par H.Hadwiger. [Hadwiger, 1957]

$$X \ominus B = \{z : B_z \subseteq X\} \tag{II.9}$$

est l'union des intersections de l'ensemble X avec une boule B lorsque B est complètement inclus dans X .

On note $\mathcal{E}_B(X) = X \ominus B$

$$\varepsilon_B(X) = X \ominus B = \cap \{X_b, b \in B\} \tag{II.10}$$

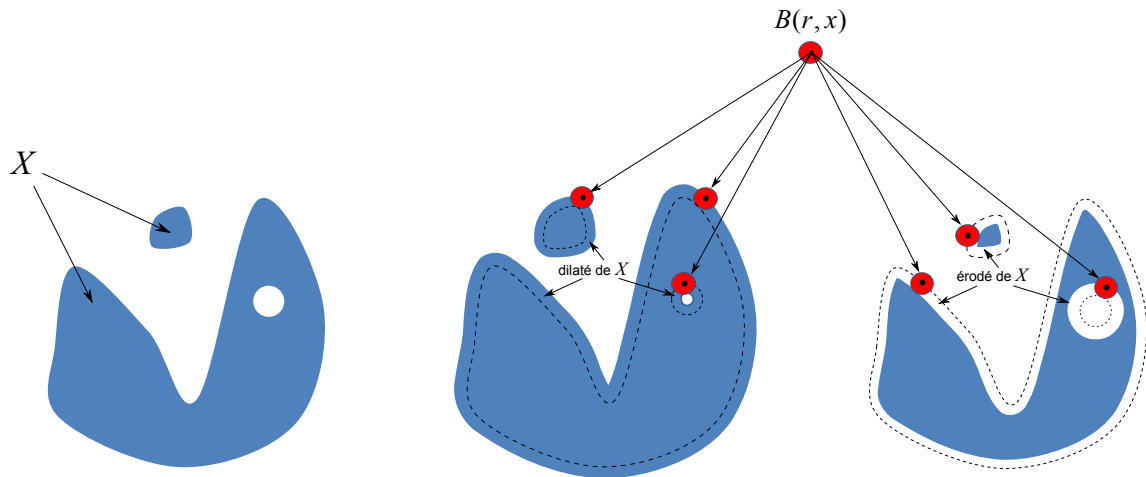


FIGURE II.12 – Dilatation et érosion binaire de X .

Cas fonctionnel

J.Serra [Serra, 1975] et A.Rosenfeld [Rosenfeld and Kak, 1976] ont généralisé aux fonctions les opérateurs de dilatation et d'érosion (Fig.II.13) :

- Dilatation de la fonction f par un segment B de longueur l centré en x

$$(\delta_B f)(x) = (f \oplus B)(x) = \sup_{y \in B} [f(x - y)] \quad (\text{II.11})$$

- Erosion de la fonction f par un segment B

$$(\varepsilon_B f)(x) = (f \ominus B)(x) = \inf_{y \in B} [f(x - y)] \quad (\text{II.12})$$

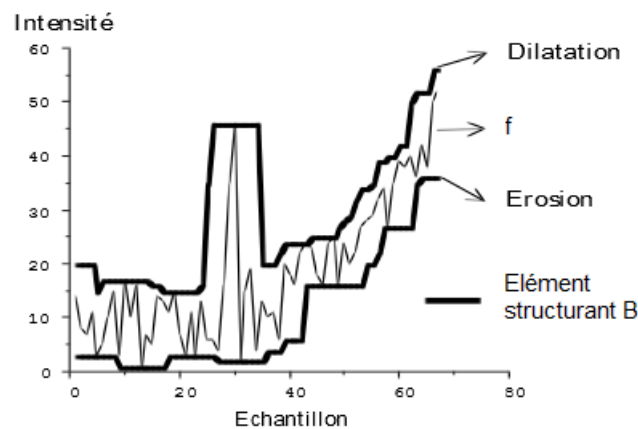


FIGURE II.13 – Erosion et dilatation fonctionnelles.

II.6.1.2 Fermeture et ouverture d'une image

Ces deux opérateurs morphologiques dérivent de la dilatation et de l'érosion [Matheron, 1967].

La fermeture morphologique est l'opération séquentielle de la dilatation suivie de l'érosion ensembliste :

$$\gamma_B = \delta_B \mathcal{E}_B \tag{II.13}$$

$$X \bullet B = [X \oplus B] \ominus B \tag{II.14}$$

L'ouverture morphologique est l'opération séquentielle de l'érosion suivie de la dilatation ensembliste :

$$\emptyset_B = \mathcal{E}_B \delta_B \tag{II.15}$$

$$X \circ B = [X \ominus B] \oplus B \tag{II.16}$$

II.6.1.3 Gradient d'une image

Cas ensembliste

Le gradient morphologique a été introduit par Beucher dans le cas ensembliste et fonctionnel. Il relie ce gradient au gradient d'une fonction dans le cas continu et définit trois gradients [Rivest et al., 1993] :

- Le gradient symétrisé ou gradient épais :

Ce gradient est aussi appelé gradient Laplacien car les deux parties gauche et droite de la courbe sont sélectionnées par cet opérateur. Le contour de la courbe est double ou épais.

$$\partial X = (X \oplus B) \setminus (X \ominus B) \tag{II.17}$$

- Le gradient supérieur ou gradient par dilatation :

$$\partial^+ X = (X \oplus B) \setminus X \tag{II.18}$$

- Le gradient inférieur ou gradient par érosion :

$$\begin{aligned} \partial^- X &= X \setminus (X \ominus B) \\ \text{ou } \partial^-(X) &= X \cap (\varepsilon_{B(r)}(X))^c \end{aligned} \tag{II.19}$$

Cas fonctionnel

L'équivalence entre ensemble et fonction est conservée pour les opérateurs de dilatation et d'érosion. On retrouve les trois gradients dans le cas fonctionnel :

$$g(f) = \delta_B(f) - \varepsilon_B(f) \tag{II.20}$$

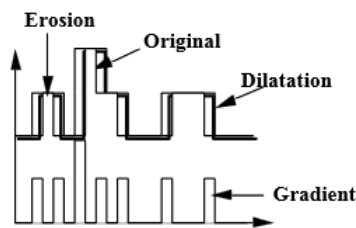


FIGURE II.14 – Gradient fonctionnel symétrique.

On peut choisir de privilégier soit la partie supérieure du gradient (Fig.II.21 :

$$g^+(f) = \delta_B(f) - f \tag{II.21}$$

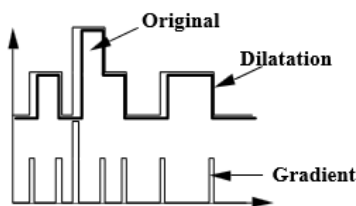


FIGURE II.15 – Gradient fonctionnel supérieur.

soit la partie inférieure du gradient (Fig.II.22) :

$$g^-(f) = f - \varepsilon_B(f) \tag{II.22}$$

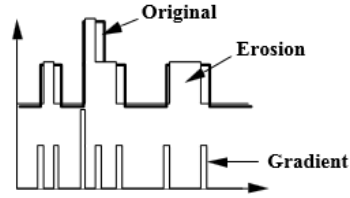


FIGURE II.16 – Gradient fonctionnel inférieur.

II.6.2 Cas géodésique

II.6.2.1 Dilatation géodésique et Reconstruction géodésique

- Dilatation géodésique

Dans cette section, nous traitons le cas de la dilatation géodésique uniquement dans le cas ensembliste car c’est l’opérateur que nous utilisons dans notre étude.

Soit $\delta_B(X)$ la dilatation euclidienne de X par la boule B , la dilatation géodésique est l’intersection de cette dilatation avec X (Fig.II.17) :

$$\delta_X(Y) = \delta(Y) \cap X \tag{II.23}$$

La dilatation de taille n se construit alors par itération successive :

$$\begin{aligned} \delta_{X,n}(Y) &= \delta_X^{(n)}(Y), \text{ avec} \\ \delta_X^{(n)}(Y) &= \delta(\dots\delta(\delta(Y) \cap X) \cap X\dots) \cap X \end{aligned} \tag{II.24}$$

Dans un ensemble X (Fig.II.17 a) on implante un germe Y (Fig.II.17 b). La dilatation isotrope de Y est contrainte par X (Eq.(II.23)), (Fig.II.17 c) et ne se propage donc pas au delà des frontières de celui-ci. (Fig.II.17 d).

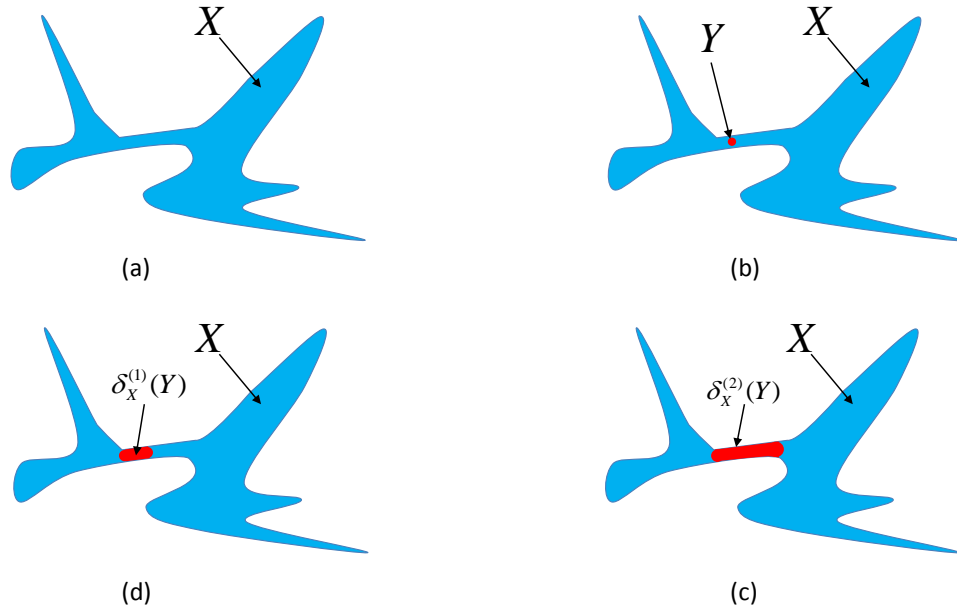


FIGURE II.17 – Itération de la dilatation géodésique (a) ensemble X initial, (b) implantation de Y dans X , (c) première dilatation géodésique de Y conditionnement X , (d) deuxième dilatation géodésique.

- Reconstruction géodésique

Contrairement à la dilatation euclidienne, la dilatation géodésique n'est pas extensive car bornée par X . On définit l'idempotence de la dilatation géodésique infinie :

L'idempotence d'une fonction f :

$$f(f(x)) = f \quad (\text{II.25})$$

Au sens morphologique :

$$\delta_X^{+\infty}(Y) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \delta_{X,\lambda}(Y) \quad (\text{II.26})$$

ou :

$$\delta_X^{(n)}(Y) = \delta_X^{(n-1)}(Y) \quad (\text{II.27})$$

La reconstruction de Y dans X est donc atteinte à l'idempotence de la dilatation géodésique :

$$R_X(Y) = \delta_X^{+\infty}(Y) \quad (\text{II.28})$$

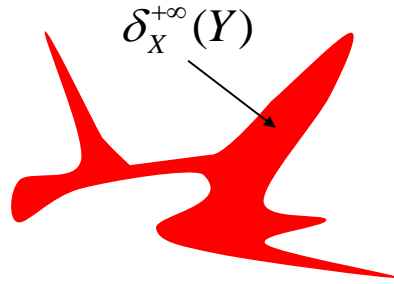


FIGURE II.18 – Reconstruction géodésique.

La figure II.18 présente la dilatation infinie de Y conditionnellement à X , l'idempotence étant atteinte lorsque l'ensemble Y devient stationnaire, les mesures statistiques de Y sont indépendantes du temps.

II.6.3 Squelette d'une image

Le squelette d'un ensemble est équivalent à une ligne médiane à égale distance des points du contour. Il a été étudié pour la première fois par T.Motzkin [Motzkin, 1936], puis A.Rosenfeld [Park and Rosenfeld, 1971], H.blum [Blum, 1973]. G.Matheron repris ce concept en morphologie mathématique [Matheron, 1978]. Dans cette approche C.Lantuéjoul en fit une étude approfondie durant sa thèse de doctorat [Lantuéjoul, 1978], [Lantuéjoul, 1979]. F.Meyer et S.Beucher définissent le squelette dans un espace digital [Meyer, 1985] [Beucher, 1994a],[Meyer, 1988],[Meyer, 1989], [Meyer, 1990], [Brigger et al., 1994].

Le squelette de l'ensemble X ou endosquelette dans le cas ensembliste est défini par le lieu des boules maximales inclus dans une forme X . Si $\overset{\circ}{B}(x, r) \subset X$ est une boule ouverte B de centre x et de rayon r , noté $\overset{\circ}{B}(r)$, et $\gamma_{B(\varepsilon)}$ la fermeture de taille unitaire $\varepsilon = 1$ dans le cas digital, $s_r(X)$ représente l'ensemble des centres de boules maximales de rayon r inclus dans X comme étant l'intersection des érodés de l'ensemble X diminué de la fermeture unitaire de cet érodé :

$$s_r(X) = \bigcap_{\varepsilon > 0} (\mathcal{E}_{\overset{\circ}{B}(r)}^\varepsilon(X) \setminus \gamma_{B(\varepsilon)}(\mathcal{E}_{\overset{\circ}{B}(r)}^\varepsilon(X)) \tag{II.29}$$

Le squelette $S_q(X)$ de X est l'union de tous ces centres :

$$S_q(X) = \bigcup_{r > 0} \bigcap_{\varepsilon > 0} (\mathcal{E}_{\overset{\circ}{B}(r)}^\varepsilon(X) \setminus \gamma_{B(\varepsilon)}(\mathcal{E}_{\overset{\circ}{B}(r)}^\varepsilon(X)) \tag{II.30}$$

Le lieu des centres des boules B_r maximale dans X du squelette $S_q(X)$ est établi lorsque chacune des boules B_r est tangente en deux points sur le contour de X (Fig.II.19

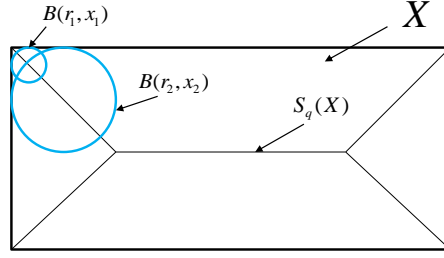


FIGURE II.19 – Squelette de X .

La figure II.19 présente chaque itération du squelette lorsqu'une boule B_r de différents rayons tangente son contour.

II.6.4 Détection des points d'extrémité du squelette

En morphologie mathématique, ces points sont des points simples du squelette en trame digitale définie par M.Schmitt [Schmitt, 1989].

Dans un squelette dont l'épaisseur est unitaire, les extrémités, points simples, sont représentées par huit configurations matricielles de fin de ligne M_{Fl} , codées dans une matrice élémentaire 3x3 en trame digitale.

Le point central de la matrice représente l'extrémité de la ligne du squelette autour duquel gravitent les huit possibilités de la localisation du prolongement de celui-ci :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.31})$$

La détection des points simples s'effectue par la technique du "hit-or-miss" . C'est un des premiers opérateurs créé par J.Serra qui symbolisera le lancement de la Morphologie Mathématique [Serra, 1965b], [Serra, 1965a], et [Banon and Barrera, 1991].

Le "hit-or-miss" (HMT) est défini pour les images multiphasées mais peut être appliqué dans le cas ensembliste.

La définition de P.Soille : [Soille, 1999] :

Soit B un élément structurant composite composé de B_1 dont les composantes binaires représentent le motif élémentaire à identifier et B_2 dont les éléments doivent correspondre avec le complémentaire de l'ensemble X . Par notation on appelle $B = B_1 \cap B_2$. On note $B = (B_1, B_2)$ l'ensemble composite des deux éléments structurants B_1 et B_2

La transformation par le hit-or-miss HMT d'un ensemble X par un élément structurant composite B est l'ensemble des points x dont l'origine de B coïncide avec x , B_1 correspond avec X quand simultanément B_2 correspond avec X^c (Fig.II.33) :

$$HMT_B(X) = \{x | (B_1)_x \subseteq X, (B_2)_x \subseteq X^c\} \tag{II.32}$$

Cette technique est composée d'opérations morphologiques élémentaires (érosion, dilatation). Le "hit-or-miss" noté aussi $B \circledast X$ est défini par l'intersection ensembliste de l'érodé de X par B_1 avec l'érodé du complémentaire de X par B_2 :

$$HMT(X) = B \circledast X = \varepsilon_{B_1}(X) \cap \varepsilon_{B_2}(X^c) \tag{II.33}$$

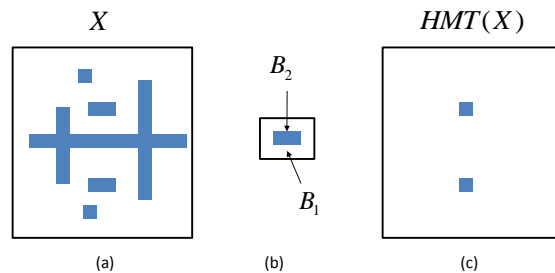


FIGURE II.20 – $HMT(X)$, (a) ensemble (X) initial (b) élément structurant composite, (c) résultat de la transformation du $HMT(X)$

Ce produit renvoie $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ si la configuration est identique, ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ si

l'élément structurant composite B ne rencontre pas de correspondance dans X .

La figure II.20 indique que sur l'ensemble X (Fig.II.20.a), l'opération du $HMT(X)$ par B (Fig.II.20.b) conduit à l'identification des objets de X ayant strictement la même configuration, en pixel que B (Fig.II.20 c). Il est important de souligner que la taille des objets identifiés est un unique pixel.

Ainsi la détection des points simples du squelette qui consiste à identifier l'équivalence de chaque sous-matrice M_i de l'image avec chacune des huit configurations M_{Fl} de fin de ligne conduira à l'établissement d'un pixel unique lors de l'équivalence

II.7 Calcul des frontières d'un processus ponctuel

Dans notre étude de triangulation morphologique, il est nécessaire de définir un processus ponctuel dans un ensemble, et d'estimer les distances relatives des points de ce processus afin d'en définir les frontières. Elles peuvent être établies directement par le diagramme de Voronoï ou indirectement par des opérations morphologiques.

II.7.1 Processus ponctuel

Très couramment utilisé en morphologie mathématique et plus particulièrement en géostatistique, un processus ponctuel, lorsqu'il est uniforme, peut être décrit par un processus de Poisson.

Ce processus ponctuel Fig. (II.21) permet d'implanter des points uniformément dans un ensemble X dans le cas où la définition $Mes(X)$ est possible autrement dit que X est géométriquement mesurable. Ce concept a été inventé puis développé par G.Matheron [Matheron, 1967] [Matheron, 1975], puis massivement repris par D.Jeulin [Jeulin, 1979] ,[Jeulin, 1991] pour élaborer des structures morphologiques aléatoires (schémas booléens).

La probabilité que n points d'un processus de Poisson de densité θ appartiennent à un ensemble X est donnée par :

$$P_n(X) = \frac{[\theta Mes(X)]^n}{n!} \exp[-\theta Mes(X)] \quad (\text{II.34})$$

avec $\theta = \frac{n}{S}$, et $Mes(X)$ est la mesure de la surface du masque X .

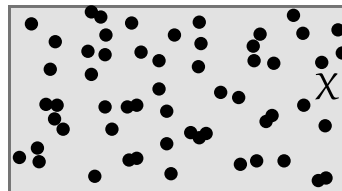


FIGURE II.21 – Procéssus ponctuel de Poisson.

II.7.2 Diagramme de Voronoï

Le diagramme ou graphe de Voronoï définit des frontières d'un processus ponctuel. Il a été inventé par G.Voronoï au début du 20^{ème} siècle [Voronoï, 1908b]. Ce graphe est couramment utilisé dans les modèles morphologiques probabilistes.

Soit X un ensemble de points ou germes g , uniformément répartis dans \mathbb{R}^d , définissant ainsi un processus ponctuel de Poisson d'intensité θ , définissant le nombre de germes par unité de surface ou de volume, le graphe de Voronoï est la représentation en cellules, ou zones d'influences, de ces germes dans X [Lantuejoul, 2002].

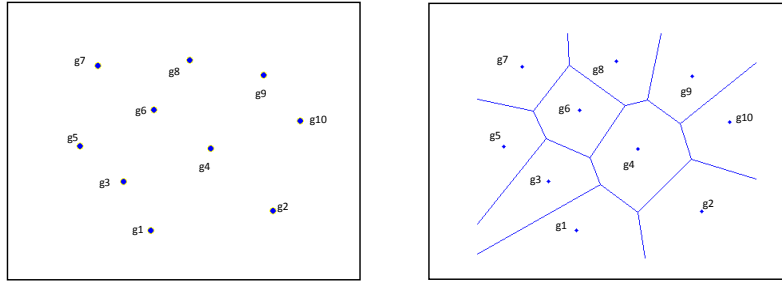


FIGURE II.22 – Cellules de Voronoï des germes g .

La cellule $C(x, X)$ associée au germe g de X est :

$$C(x, X) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid |x - g| < \min_{h \in X} |x - h| \right\} \tag{II.35}$$

$C(x, X)$ est un polytope convexe limité par un ensemble d'hyperplans qui sont les médiatrices de chacun des germes pris deux à deux.

Lorsque X est un sous ensemble de \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{R}^3 , les cellules du Voronoï sont donc strictement convexes par construction. Pour X simplement connexe, la distance euclidienne est égale à la distance géodésique ; la condition de l'unicité des géodésiques est donc toujours vérifiée. Il existe un chemin unique reliant un point à un autre.

Dans la suite de la démonstration, nous conserverons l'exemple 2D (Fig : II.22) dont la simplicité de la représentation permet la compréhension des concepts morphologiques 3D.

II.7.3 Fonction distance

La fonction distance permet de calculer les distances entre deux ou plusieurs objets. Elle a été introduite pour la première fois par J.Steiner au milieu du 19^{ème} siècle sous la forme d'un concept (dilatation par des boules) [Steiner, 1840]. C'est G.Matheron qui introduit cette fonction en morphologie mathématique [Matheron, 1967] puis A.Rosenfeld l'applique dans le cas digital [Rosenfeld and Pfaltz, 1966].

M Schmitt définit la version continue de la fonction distance sur X comme étant la fonction $\rho_X(x) = d(x, X^c) = \min \{d(x, y), y \in X^c\}$, $d(x, X^c)$ représente la distance d'un point à son complémentaire, autrement dit à sa frontière [Schmitt and Mattioli,].

Au sens morphologique, si l'on définit une distance dans l'espace étudié, on peut associer à chaque ensemble X le sous ensemble X_λ constitué des points qui sont à une distance supérieure à λ de son centre (Fig.II.23). La fonction distance représente la transition entre les ensembles et les fonctions car on attribue à chaque iso-distance d'une itération de la fonction distance, la valeur scalaire λ associée.

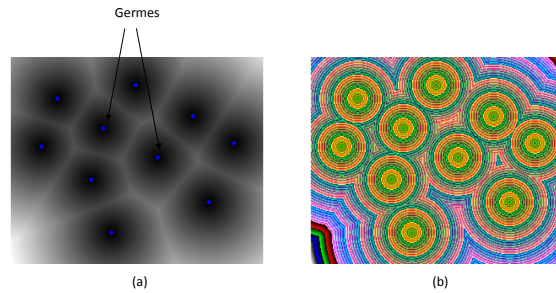


FIGURE II.25 – Fonction distance sur germes.

Les zones de plus fortes intensités représentent les valeurs scalaires des distances les plus éloignées des points initiaux de la propagation (Fig. II.25.a). Celle-ci est par construction euclidienne. On note le caractère isotrope de la propagation de la fonction distance, plus apparent en fausses couleurs (Fig. II.25.b). Cette isotropie dans le calcul des distances conduit à la construction de frontières assurant le caractère convexe des cellules issues des germes du processus initial. Ces cellules sont identiques à celles du diagramme de Voronoï sur ces germes.

Cette fonction a été soumise à de nombreux développements numériques et algorithmiques initiés par L.Vincent [Vincent, 1990].

II.7.4 Ligne de partage des eaux

La ligne de partage des eaux (*lpe*) est un opérateur complexe dans la hiérarchie des opérateurs morphologiques. Elle est fréquemment utilisée dans des procédures de segmentation. Dans notre cas, elle peut être considérée comme technique de détection de frontières de la fonction distance.

Elle a été inventée, dans ce but par S.Beucher et C.Lantuéjoul [Beucher and Lantuejoul, 1979] et F.Maisonneuve [Maisonneuve, 1982b]. L.Vincent et P.Soille généralisent ce concept dans un espace digital par un processus d'immersion [Vincent and Soille, 1991].

La *lpe* nécessite la connaissance de marqueurs [Beucher, 1983] ou extremas régionaux [Maisonneuve, 1982a].

La *lpe* est à la base de plusieurs outils élaborés en morphologie mathématique comme la segmentation d'image. Aussi, F.Meyer a optimisé son algorithme [Meyer, 1991], mais aussi S.Beucher par calcul de la *lpe* par files d'attente hiérarchiques [Beucher, 1994b] puis a apporté des corrections à son algorithme [Beucher, 2002].

F Meyer utilise une terminologie propre à la géologie, les lignes de plus fortes intensités sont les lignes de crêtes. Elles représentent l'ensemble des valeurs scalaires des distances d'un point de l'image aux germes. On représente la fonction distance en pseudo 3D où sur l'axe \vec{Oz} sont représentées les valeurs scalaires des distances.

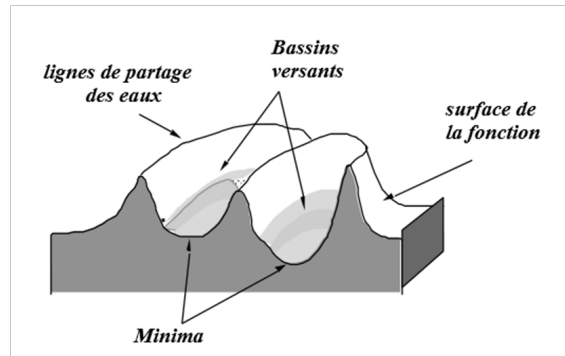


FIGURE II.26 – Représentation de f en pseudo 3D.

Pour un processus ponctuel et dans le cas continu, les frontières de la fonction distance coïncident donc avec les arêtes du graphe de Voronoï géodésique. Cette frontière est aussi appelée ligne de partage de eaux (watershed) étudiée au chapitre II.7.4. Dans cette représentation se dessinent des bassins versants CB_{m_i} et des vallées qui sont les minimas locaux m_i ils sont aussi les lieux d'implantation des germes g_i (Fig.II.26).

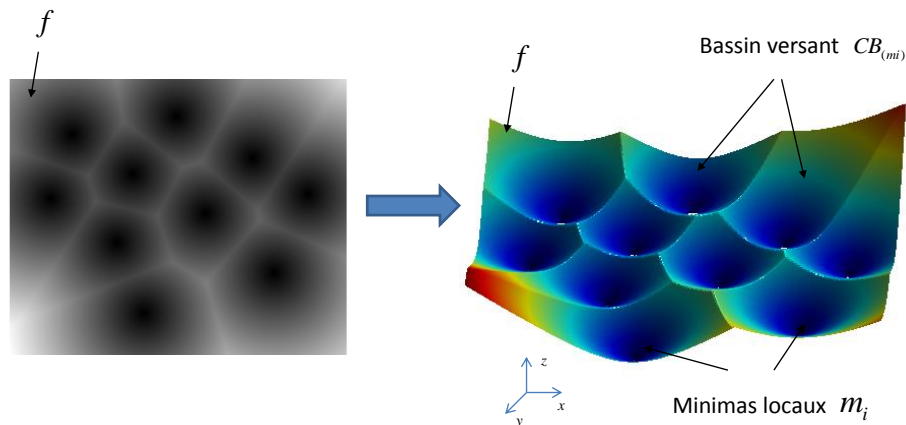


FIGURE II.27 – Représentation de f en pseudo 3D.

Le principe consiste à inonder cette surface par ses minimas locaux. La lpe est la digue ou la **fonction d'étanchéité** qui empêche la fusion des eaux provenant de différentes sources. L'image est partitionnée en deux secteurs différents : les bassins versants et la ligne de partage des eaux (Fig.II.28).

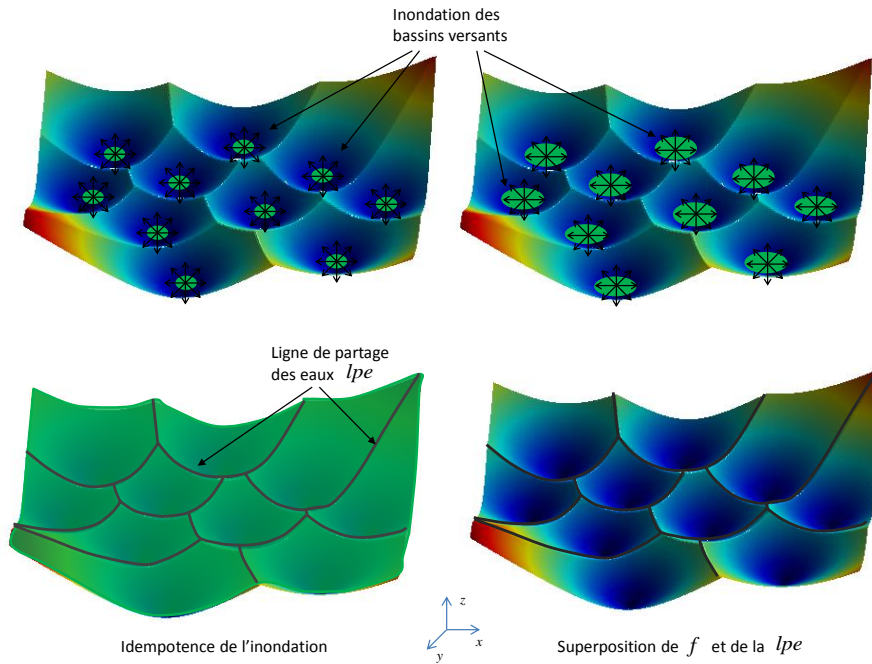


FIGURE II.28 – Inondation des marqueurs CB_{m_i} .

Définition

Soit f la fonction de répartition de la fonction distance, et m l'ensemble des minimas locaux dont le centre est le lieu d'implantation du processus ponctuel. On définit un bassin versant CB_{m_i} d'un minimum local m_i comme étant l'ensemble de points $x \in sup(f)$ tel que leur distance respective soit plus proche de m_i que de tous les autres minimas régionaux. La ligne de partage des eaux de f , $lpe(f)$, est l'ensemble des points de la fonction n'appartenant à aucun bassin versant [Meyer, 1988] :

$$lpe(f) = sup(f) \cap [\cup(CB_i(m_i))]^c \tag{II.37}$$

Il est intéressant de constater l'analogie de la lpe avec celle du squelette. Meyer [Meyer, 1986] fait la comparaison entre la construction du squelette et un feu de prairie. Supposons que X soit la représentation d'une prairie et qu'à un instant un feu se propage de tous les points du bord. La vitesse du feu étant égale à 1. Le squelette appelé aussi **fonction d'extinction**, est par ce principe l'union des lieux de rencontre de chaque front. Cette fonction d'extinction est équivalente à la fonction d'étanchéité ou ligne de partage des eaux de f . Pour un processus ponctuel, la ligne de partage des eaux est strictement équivalente au diagramme de Voronoï sur ce processus.

II.8 Synthèse

Dans cette section, nous avons présenté les principaux outils morphologiques qui sont utilisés dans notre étude. Leur champ d'application est défini dans \mathbb{R}^n qui autorise l'utilisation de ces concepts pour des microstructures 2D et 3D. Les cas ensemblistes et fonctionnels sont transposés respectivement en microstructures bi et multiphasés.

Chapitre III

Maillage de microstructures hétérogènes 2D à formes complexes utilisant les outils de la morphologie mathématique

Dans ce chapitre, nous proposons le couplage entre une description morphologique adaptée et optimisée d'une microstructure biphasée avec la triangulation contrainte de Delaunay. Cette triangulation sera considérée comme un premier maillage de la microstructure. L'implantation des points de triangulation est contrôlée afin d'éviter la formation de triangles aplatis à surface faible ou nulle que peut engendrer une implantation de trois points alignés.

Nous associons à cette section, l'étude de la triangulation d'une microstructure multiphasée qui dérive directement de la procédure établie pour les microstructures biphasées.

Sommaire

III.1 Triangulation de Delaunay contrainte appliquée aux micro-structures biphasées 2D	71
III.1.1 Choix d'une microstructure biphasée	71
III.1.2 Détermination morphologique du contour de l'image	72
III.1.3 Echantillonnage des points sur l'image du gradient	73
III.1.4 Détection des points remarquables d'une image	74
III.1.5 Construction des vecteurs du contour	77
III.1.6 Echantillonnage adaptatif des points de triangulation	79
III.1.7 Implantation des points dans X	80
III.1.8 Résultats de la triangulation morphologique de Delaunay contrainte	82
III.1.9 Densification contrôlée de la triangulation	84
III.1.10 Qualité du maillage	87
III.1.11 Optimisation du maillage	90
III.1.12 Synthèse	94
III.2 Triangulation de Delaunay contrainte appliquée aux micro-structures multiphasées 2D	94
III.2.1 Choix d'une image	94
III.2.2 Détermination du contour d'une image multiphasée	95
III.2.3 Détermination des points remarquables	96
III.3 Organigramme de la triangulation contrainte de Delaunay 2D	102
III.4 Choix des microstructures réelles	104
III.4.1 Cas biphasé	104
III.4.2 Cas multiphasé	112

Préambule

La triangulation de Delaunay est fréquemment utilisée en 2D car elle optimise la qualité des éléments triangulaires qui la composent par le concept de la sphère vide étudié au chapitre I.2.2.6.

La variation contrainte de cette triangulation est très intéressante car elle permet de s'affranchir de cette enveloppe convexe par la connaissance exacte du contour et donc de décrire n'importe quelle surface arbitraire (Fig. III.1).

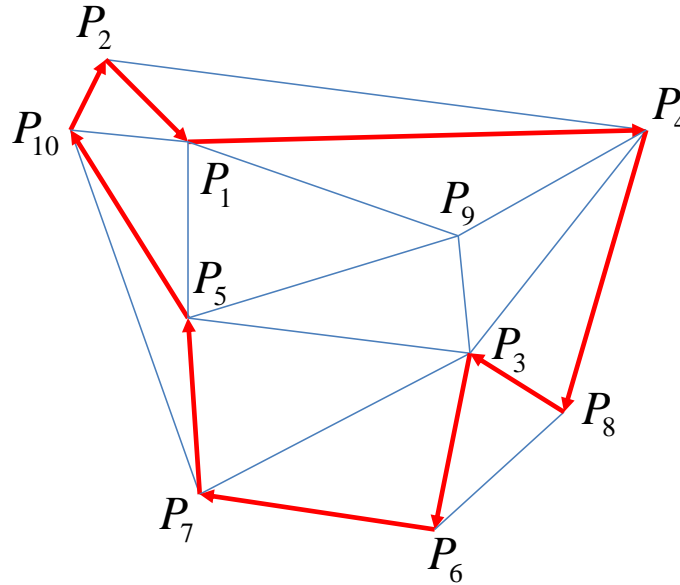


FIGURE III.1 – Triangulation de Delaunay contrainte.

Sur la figure III.1 ; le contour est formé de $\overrightarrow{P_1P_4}, \overrightarrow{P_4P_8}, \overrightarrow{P_8P_3}, \overrightarrow{P_3P_6}, \overrightarrow{P_6P_7}, \overrightarrow{P_7P_5}, \overrightarrow{P_5P_{10}}, \overrightarrow{P_{10}P_2}, \overrightarrow{P_2P_1}$ respectant ainsi $\sum_0^{n-1} \overrightarrow{P_nP_{n+1}} = \vec{0}$. Les points à l'intérieur de ce contour se nomment points internes de triangulation. Il existe de nombreux algorithmes pour réaliser cette triangulation à partir de ces vecteurs L-P.Chew [Paul Chew, 1989]. Une des difficultés de la triangulation est donc la détermination morphologique de ces vecteurs.

La triangulation de Delaunay nécessite deux étapes :

- définition de la morphologie du contour de l'image
- implantation judicieuse de points à l'intérieur de l'image.

III.1 Triangulation de Delaunay contrainte appliquée aux microstructures biphasées 2D

III.1.1 Choix d'une microstructure biphasée

Dans notre démarche, cette étude s'applique sur un ensemble arbitraire X , à forte complexité morphologique (Fig. III.2). Les parties entourées indiquent des points de re-

broussement (B), des zones à formes fines (A), et des fortes composantes concaves (B). L'ensemble X n'est pas simplement connexe ; il contient des trous (C), dont l'un est très proche du contour extérieur de X occasionnant localement une relative minceur de X . X est disjoint en deux sous ensembles distincts. la représentation de X dans une trame discrète est une matrice image biphasée composée d'une phase et de son complémentaire, respectivement représentés dans la matrice par 1 et 0. Un exemple d'une matrice image est illustré dans la figure III.2 a) correspondant à un détail de la forme X .

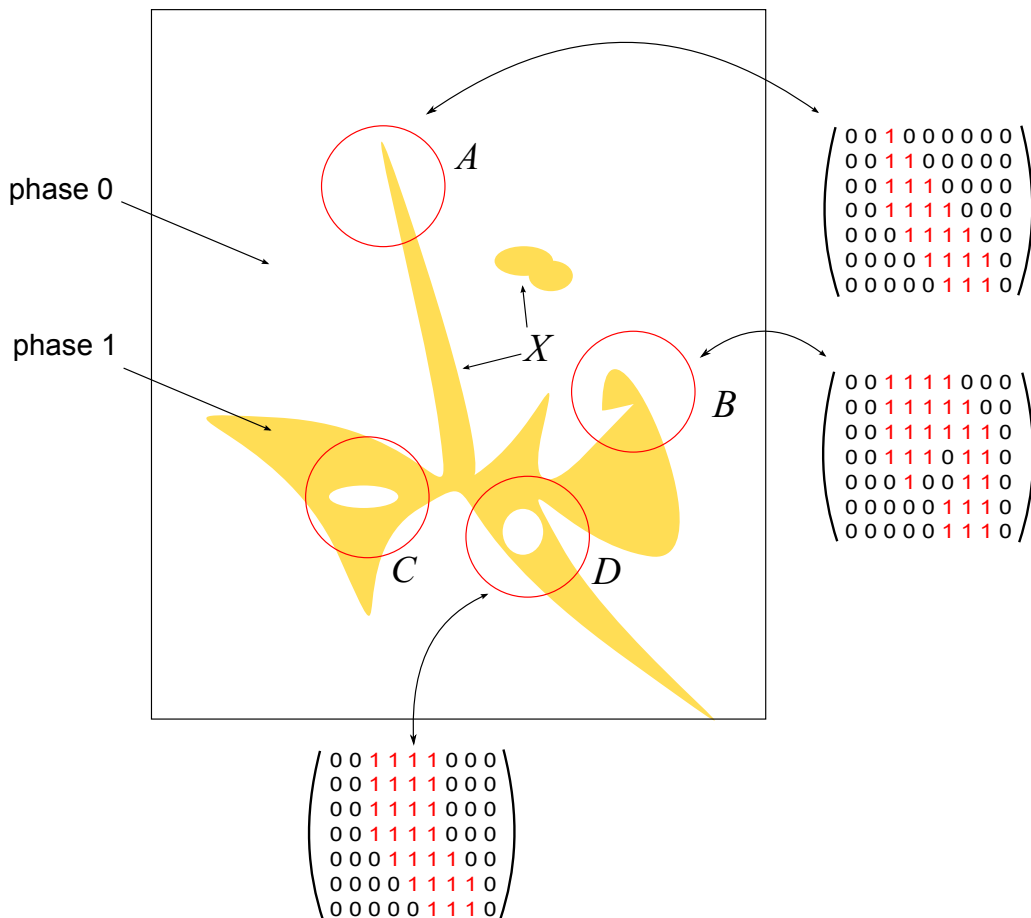


FIGURE III.2 – Forme arbitraire complexe X

III.1.2 Détermination morphologique du contour de l'image

La définition vectorielle morphologique du contour d'une image constitue la phase essentielle de l'approche proposée dans cette étude. Elle nécessite deux étapes majeures. La première consiste à déterminer le contour de chacun des objets de l'image. Par la suite, on définit les vecteurs dont les extrémités sont placées en des points particuliers de ce contour.

Dans le cas des images 2D biphasées, le contour est réalisé par la version ensembliste du gradient de Beucher étudié au chapitre II.6.1.3.

On choisit le gradient morphologique inférieur car ce sens de dérivation permet de

rester à l'intérieur de l'ensemble X . La figure III.3 illustre les différentes étapes nécessaires pour la détermination du contour de l'image. Le gradient inférieur $\partial^-(X)$ (Fig. III.3.c) est défini par l'ensemble X (Fig. III.3.a) diminué de son érodé morphologique $\varepsilon_B(X)$, (Fig. III.3.b).

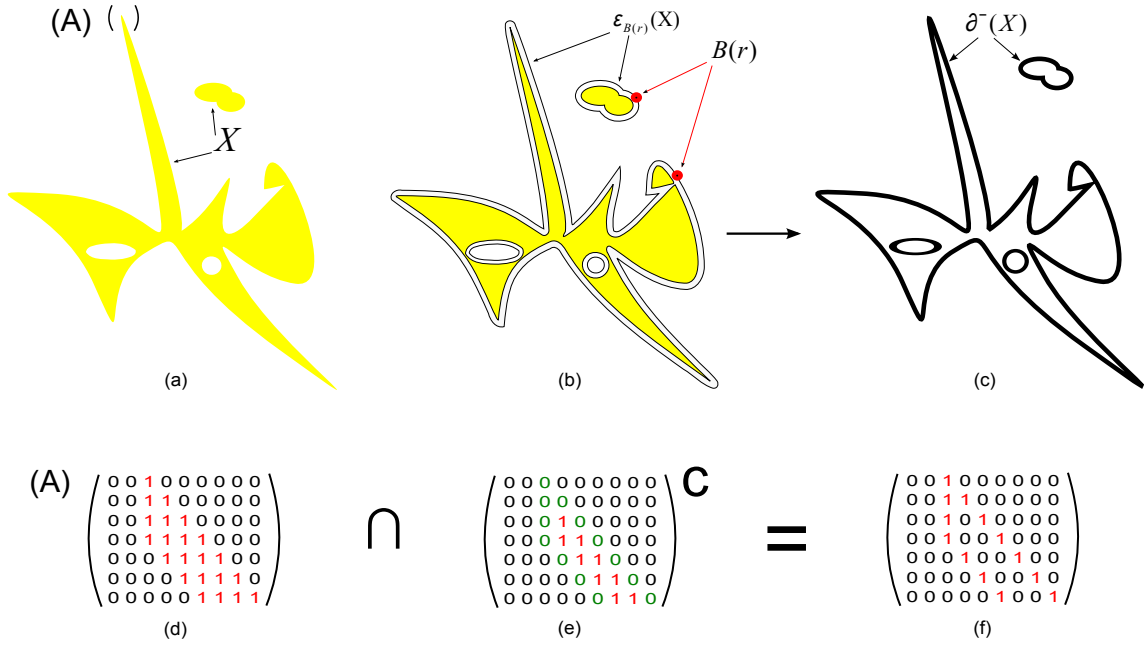


FIGURE III.3 – Gradient morphologique ensembliste et de la matrice image de X .

En trame digitale, le gradient inférieur $\partial^-(X)$ résulte de l'intersection ensembliste entre la matrice image (Fig. III.3.d) illustré, détail A, avec le complémentaire de la matrice érosion Fig. III.3 (e). Le résultat du gradient morphologique est une matrice image binaire (Fig. III.3.f) dont les valeurs à 1 correspondent au contour défini par gradient de Beucher. On note que ce calcul suit l'idée intuitive d'une dérivée classique en considérant comme nulles les zones d'intensité constante de l'image. Elle donne une valeur scalaire unique à la frontière des objets, égale à 1, pour une image biphasée. Cette démarche appliquée à l'ensemble de l'image X permet de déterminer le contour global (Fig. III.3.c).

III.1.3 Échantillonnage des points sur l'image du gradient

Un échantillonnage aléatoire de points dans la matrice image du gradient ne garantit pas un espacement contrôlé des points. Par ailleurs, pour décrire au mieux la forme de l'ensemble X , les extrémités des vecteurs doivent être placées sur des points remarquables du contour : pointes ou concavités (Fig. III.4). Pour des formes réelles parfois complexes, ces points ne sont pas toujours localisables de façon analytique sur des rebroussements ou des inflexions du contour.

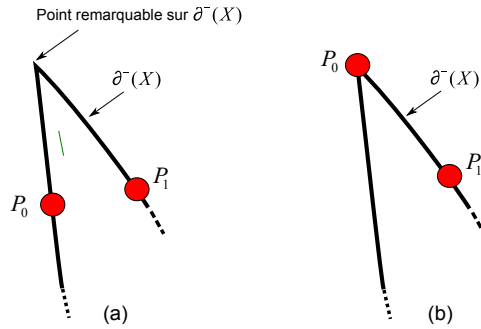


FIGURE III.4 – Positionnement de P_0 sur un point remarquable de X .

La figure III.4.a illustre un mauvais échantillonnage de P_0 qui entraînera un écart de forme entre le contour de l'image et le contour de la triangulation. Il est donc nécessaire que la position des points d'échantillonnages soit contrainte par la topologie de la forme. Sur la figure III.4, le point remarquable est une pointe sur laquelle un point d'échantillonnage doit être positionné (III.4.b).

III.1.4 Détection des points remarquables d'une image

Sur un ensemble X , il y a deux sortes de points remarquables. Ils sont situés sur les parties convexes ou concaves de X (Fig.III.5)

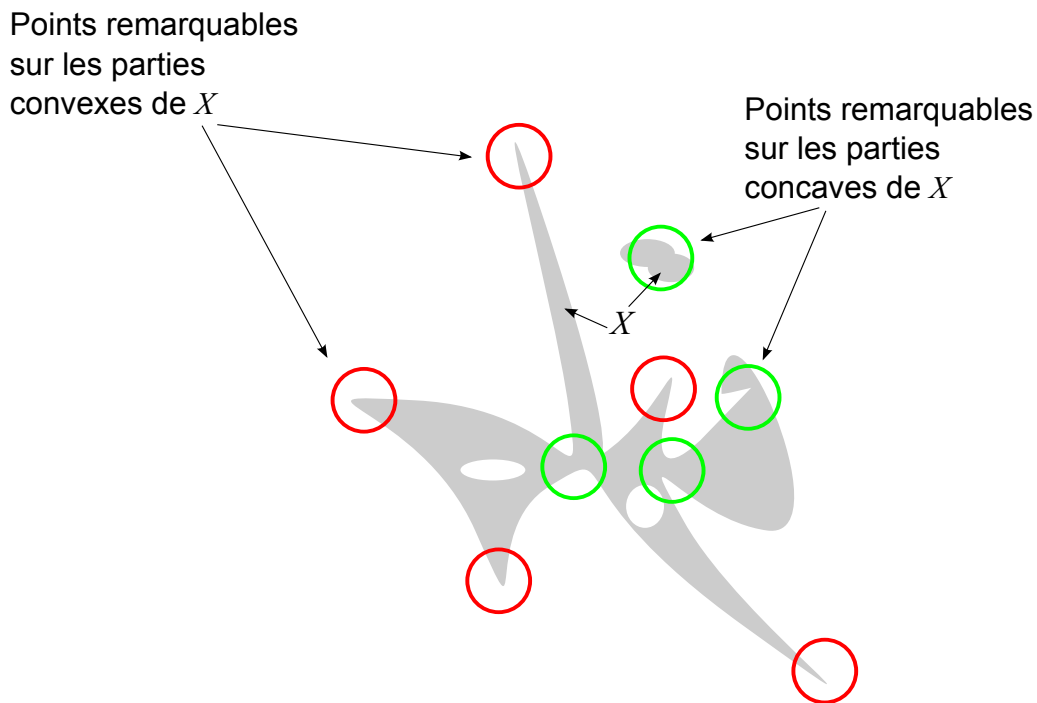


FIGURE III.5 – Ensembles des points remarquables sur les convexités(en rouge) et sur les concavités (en vert) de X

III.1.4.1 Points remarquables sur les parties convexes de X

Squelettisation de X :

La localisation des points remarquables sur les convexités de X est réalisée sur le squelette $S_q(X)$ de X (endosquelette). La procédure de squelettisation par boules maximales incluses dans une forme, étudiée au chapitre II.6.3, est appliquée sur X (Fig.III.6.c) dont de détail (Fig.III.6.b) indique la procédure itérative de la détermination des lieux des boules maximales. Le résultat est une ligne mince dont chaque extrémité coïncide avec chacun des points remarquables de X (Fig.III.6.d).

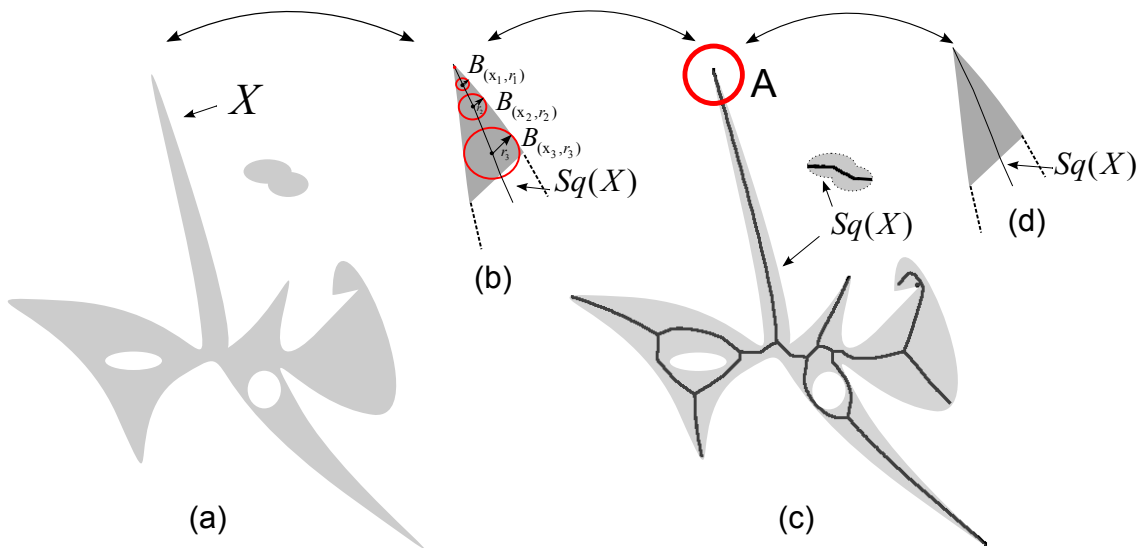


FIGURE III.6 – Squelette de X

Détection des points simples sur $S_q(X)$

La représentation digitale du squelette est une image dont l'épaisseur est au plus un pixel; on parle de ligne d'un squelette. (Fig.III.7.a). On réalise une opération de "hit and miss", détaillée au chapitre II.6.4, afin d'extraire les points simples du squelette qui sont les points remarquables des parties convexes de X (Fig.III.7.d).

La figure III.7.b indique que seules les configurations conformes des points simples sont considérées; le résultat du $HMT(X)$ conduit à une sous matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ localisée exactement sur la position du point simple. Une configuration non conforme conduit à une sous matrice nulle.

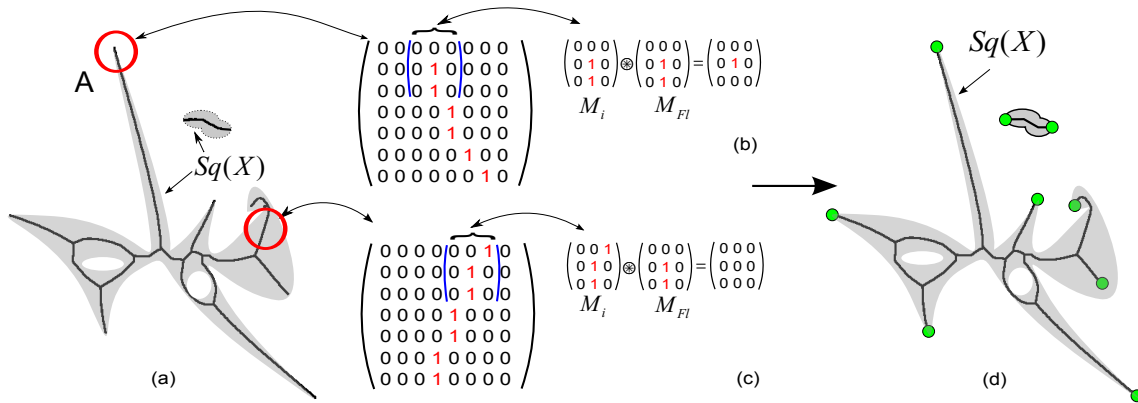


FIGURE III.7 – Détection des points remarquables sur les parties convexes de X .

III.1.4.2 Points remarquables sur les parties concave de X

Les points remarquables situés sur les concavités de X sont détectés sur le squelette du complémentaire de X (exosquelette). On réalise donc strictement la même opération sur X^c (Fig.III.8).

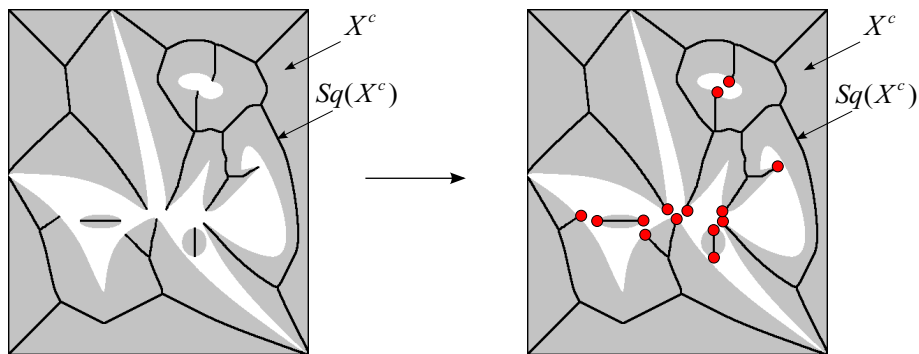


FIGURE III.8 – Détection des points remarquables sur les parties concaves de X .

III.1.4.3 Réunion des points remarquables

Les différents points remarquables sont rassemblés dans une image unique (Fig.III.9.c) par addition ensembliste des points extraits des convexités (Fig.III.9.a) et des concavités (Fig.III.9.b) de X .

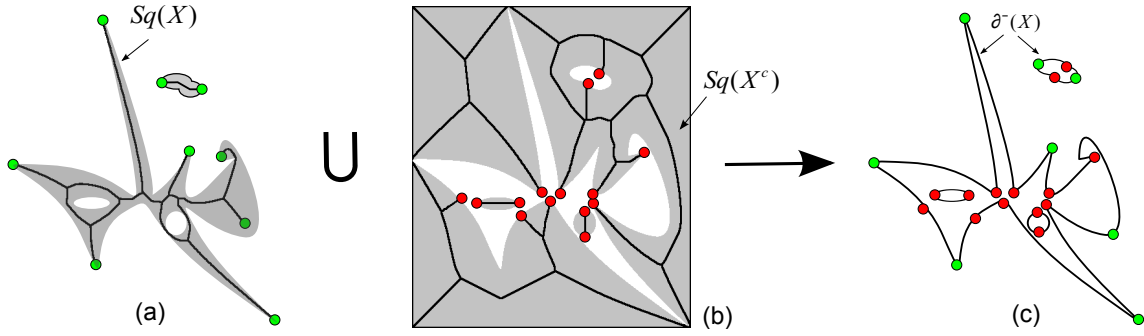


FIGURE III.9 – Points simples sur (a) $Sq(X)$, (b) $Sq(X^c)$, (c) union morphologique des points sur le gradient $\partial^-(X)$.

III.1.5 Construction des vecteurs du contour

Entre deux points remarquables successifs, on calcule $\delta_G^{(n)}(P_i)$ la dilatation géodésique itérative unitaire du premier point remarquable P_i que l'on appelle germe géodésique, sur le contour $\partial^-(X)$ jusqu'au deuxième point remarquable. A chaque itération $i = \lambda$, (avec $\lambda = cte$ pour la démonstration), un nouveau point $P_{i\lambda}$ est établi Eq. (III.1) :

$$\delta_G^{(\lambda)}(P_i) = \underbrace{\delta(\dots\delta(\delta(P_i) \cap G) \cap G \dots)}_{\lambda \text{ fois}} \cap G$$

ou si on admet que

$$\delta_G(P_i) \stackrel{def}{=} (P_i \oplus B_{(x,r)}) \cap G \quad (III.1)$$

alors

$$\delta_G^\lambda(P_i) = \underbrace{\delta_G(P_i) \circ \dots \circ \delta_G(P_i)}_{\lambda \text{ fois}}$$

La dilatation est isotrope dans \mathbb{R}^n ainsi, si P_i est le germe, chaque $\delta_G^\lambda(P_i)$ conduit à deux directions de propagation possible pour le premier point, $i = 0$, $\delta_G^\lambda(P_0)$ aboutit à deux positions possibles de P_1 (Fig. III.10.a) :

Pour respecter un sens de propagation vectoriel que nous impose la triangulation de Delaunay contrainte, on choisit un sens arbitraire (Fig. III.10.b) :

Un nouveau point P_{i+1} est placé et on définit donc un vecteur $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$. Sur la Fig. III.10 b, les vecteurs $\overrightarrow{P_0 P_1}$ et $\overrightarrow{P_1 P_2}$ sont établis.

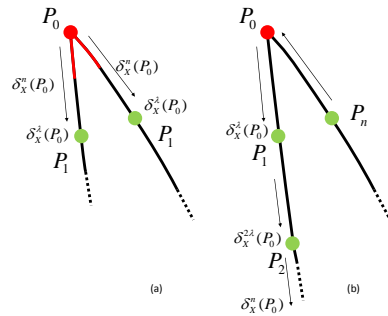


FIGURE III.10 – Construction des vecteurs géodésiques.

On poursuit le processus de construction des vecteurs par dilatation géodésique itérative jusqu'à idempotence pour fermer ainsi le contour de chaque objet Eq. (III.2).

$$\delta(\delta_G^{(n)}(P_i)) = \delta_G^{(n)}(P_i) \quad (\text{III.2})$$

A l'idempotence, on dit que l'on a réalisé une reconstruction géodésique de G par dilatations géodésiques successives de dimension unitaire Eq. (III.3).

$$\gamma_G(P_i) = R_G(P_i) = \delta_G^{+\infty}(P_i) \quad (\text{III.3})$$

La Fig. III.10 b indique que l'idempotence géodésique est atteinte à la construction de $\overrightarrow{P_n P_0}$.

Ces vecteurs construits par dilatations géodésiques sont appelés vecteurs géodésiques.

Remarque sur la métrique euclidienne

Il est important de remarquer que seule la reconstruction du contour par dilatation géodésique itérative permet d'établir les vecteurs de contour. En admettant qu'il existe une méthode pour échantillonner à intervalle régulier des points sur G il est délicat d'établir un chemin vectoriel par simple calcul du plus proche voisin d'un point d'échantillonnage sans risquer de commettre une erreur euclidienne de voisinage.

Si on prend un faible taux d'échantillonnage, cette erreur est encore plus importante. La figure III.11 en est un exemple.

Soit P_0 son voisin euclidien le plus proche est P_1 , le vecteur $\overrightarrow{P_0 P_1}$ est établi. En revanche, par rapport à P_1 , P_n est plus proche de lui que P_2 , l'établissement du vecteur $\overrightarrow{P_1 P_n}$ est une rupture dans la définition vectorielle du contour(Fig. III.11.b).

Ce problème est en partie résolu si la ligne de contour est non anguleuse, "douce". Elle peut alors être approximée par une fonction [Yang et al., 2010].

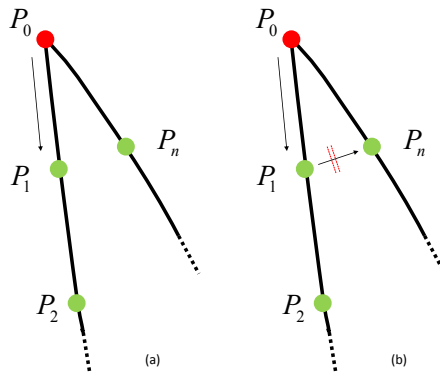


FIGURE III.11 – Erreur euclidienne.

III.1.6 Echantillonnage adaptatif des points de triangulation

Pour assurer une bonne définition du contour, la localisation des points remarquables est une condition nécessaire mais pas suffisante. Il est en plus nécessaire que la courbe polygonale vectorielle ainsi établie, doive rester injective ; elle ne doit pas se recouper elle même, respectant ainsi le principe de la courbe de Jordan [Jordan, 1887] illustrée Fig. III.12 a. Par exemple, pour une courbe de Jordan Γ quelconque dans \mathbb{R}^2 , injective par définition, la courbe polygonale induite par des points de discrétisation trop éloignés crée un vecteur, en rouge sur la Fig. III.12, qui rompt le caractère injectif de la courbe.

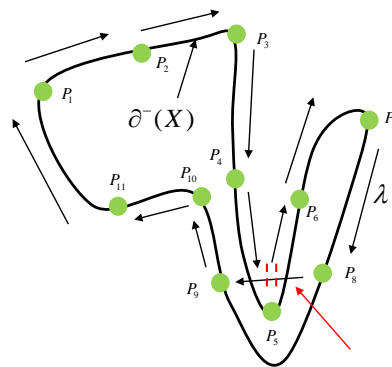


FIGURE III.12 – Erreur de non injectivité.

La figure Fig. III.12 illustre un cas de non injectivité de la courbe de Jordan par l'établissement du vecteur $\overrightarrow{P_8P_9}$ qui coupe les vecteurs $\overrightarrow{P_4P_5}$ et $\overrightarrow{P_5P_6}$.

Cette singularité est détectée lorsque qu'il existe un rapport k entre la distance euclidienne et la distance géodésique trop élevé. En pratique, il ne doit pas excéder le triple de la distance euclidienne :

$$d_X(x, y) = k(x, y) d(x, y) \quad \text{où} \quad 1 \leq k \leq 3 \quad (\text{III.4})$$

Au sens morphologique, la détection des parties fines du contour de X est réalisée par l'intersection ensembliste du contour de X et du complémentaire de X diminué de son ouverture de taille r .

$$P(X) = \partial^-(X) \cap (X \cap (X \circ B_r)^c) \tag{III.5}$$

Le rayon r de la boule B permet la localisation de zones fines (Fig : III.13.a) sur lesquelles on réalise une densification $\lambda_2 = 2\lambda$ pour que la courbe polygonale garde son caractère injectif (Fig.III.13.b).

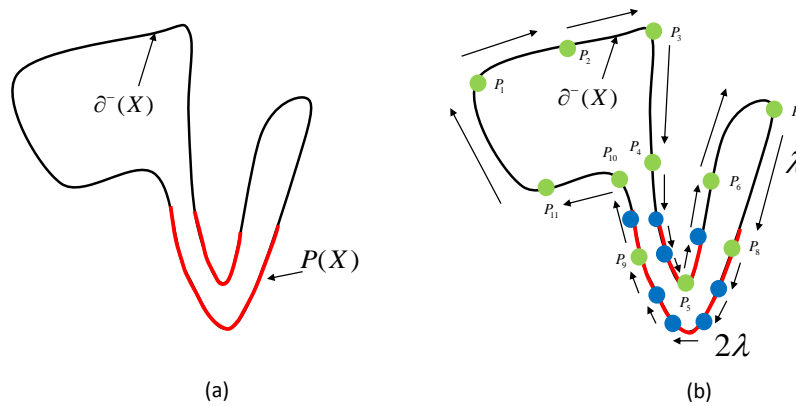


FIGURE III.13 – Echantillonnage adaptatif.

III.1.7 Implantation des points dans X

La deuxième étape de la triangulation contrainte de Delaunay consiste en la répartition uniforme de points dans l'ensemble X . Pour être utilisable lors d'un calcul EF, les triangles doivent tendre vers une certaine "équilarité".

Dans notre cas où X n'est pas géométriquement défini, le processus ponctuel de Poisson évoqué section II.7.1 peut être établi simplement. C.Lantuéjoul, redéfinit un processus d'implantation ponctuelle uniforme à l'intérieur d'un ensemble quelconque [Lantuéjoul, 2002]. La procédure du Hit an Run de C.Lantuéjoul en 2D, illustrée figure III.14.a, commence par l'implantation d'un point x_i lorsque l'intersection d'une droite L_i passant par ce point avec le contour de l'image $\partial^-(X)$ est non vide : $L_i \cap \partial^-(X) \neq \{\emptyset\}$. Pour garantir un espacement régulier des points, on introduit une distance de répulsion r autour de chacun des points x_i . Cette distribution ainsi que cet espacement nous permettent de garantir une triangulation homogène de notre image.

La probabilité qu'un point x soit contenu dans un masque X :

$$P(x, X) = \int_Z f(x, y) dy \quad x \in X \tag{III.6}$$

avec

$$f(x, y) = \frac{2}{d\omega} \frac{1}{l(x, y, X)|x - y|^{d-1}}, \quad (\text{III.7})$$

$x \in X$, $x \neq y$, $d, \omega = \text{constantes}$, et $l(x, y, X)$ la longueur du segment $(x, y) \in X$.

On poursuit ce processus itératif jusqu'à atteindre θ la densité de maillage (Fig III.14.b). Pour établir des triangles de forme proche de l'équilatéral, on impose au processus une distance de répulsion λ sur les points x_i . On note que l'introduction de cette distance rompt la propriété d'uniformité de la distribution mais nous permet d'établir une répartition homogène de points inclus dans X .

$$d(x_i, x_{i+1}) \leq \lambda \quad (\text{III.8})$$

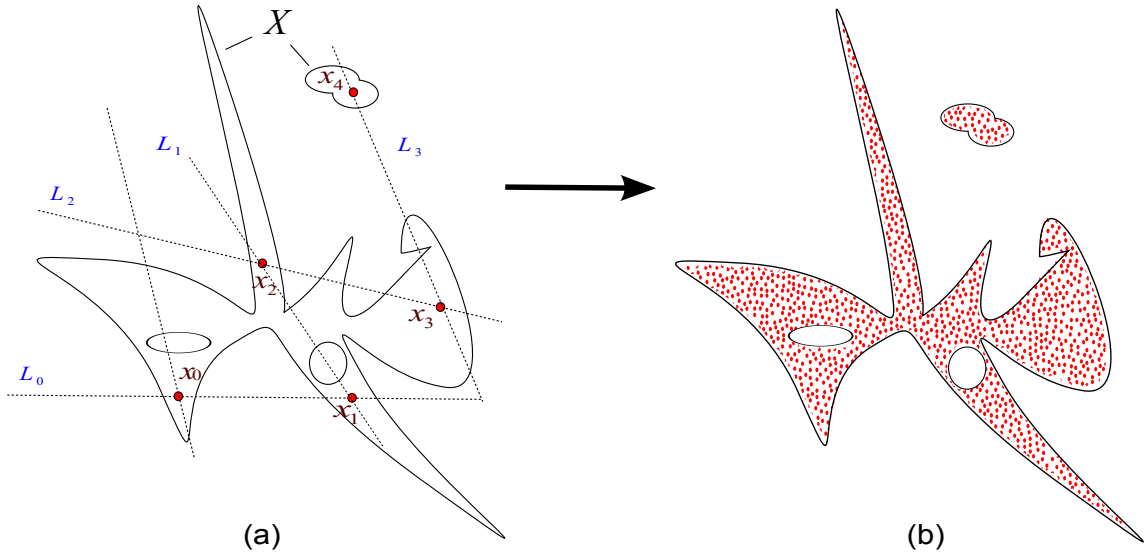


FIGURE III.14 – Construction itérative du Hit and run (a) implantation de densité θ (b).

On réunit l'ensemble des points de triangulation avec les points remarquables. L'ensemble des points nécessaires à la triangulation de Delaunay contrainte est rassemblé figure III.15.

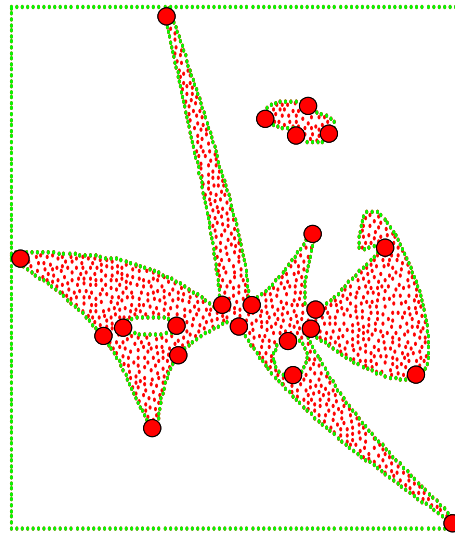


FIGURE III.15 – Réunion de l'ensemble des points de triangulation.

III.1.8 Résultats de la triangulation morphologique de Delaunay contrainte

III.1.8.1 Triangulation de l'ensemble X

A ce stade, tout logiciel de maillage disponible peut permettre de réaliser la triangulation à partir des vecteurs de contours ainsi que de nos point internes, (qhull, yams etc.). Dans notre cas, la triangulation de la microstructure a été réalisée à l'aide du logiciel libre de Qhull. Cette triangulation doit respecter impérativement à la fois le contour et les points remarquables de la microstructure d'une part, et elle doit tenir compte des densités de maillage λ et θ respectivement du contour et de la forme, d'autre part.

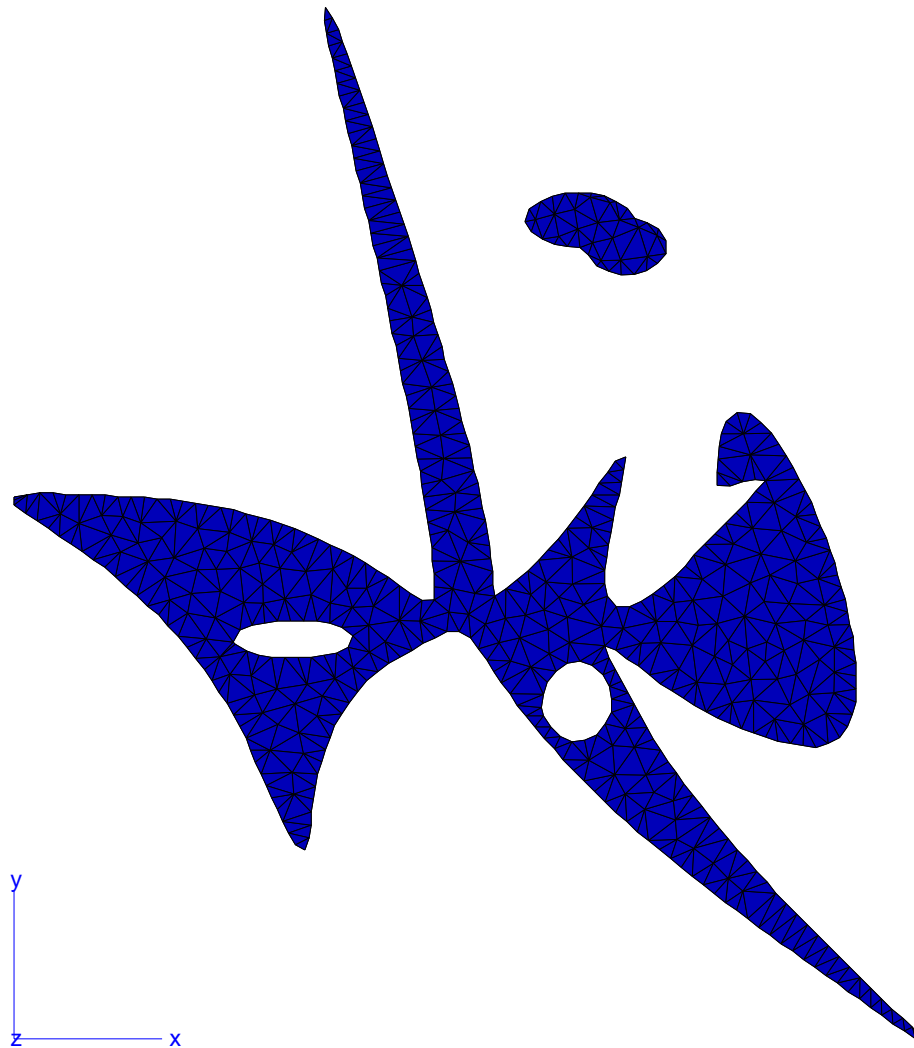


FIGURE III.16 – Triangulation de Delaunay contrainte de X .

La figure [III.16](#) illustre le maillage automatique de la première phase (phase 1) de la microstructure. La triangulation respecte fidèlement la contrainte de la forme, par le positionnement des points remarquables. Par ailleurs, on note que par cette méthode, l'effet d'escalier dû à la discrétisation de l'image en pixel, ne peut pas exister.

III.1.8.2 Triangulation du complémentaire de l'ensemble X

La triangulation contrainte de Delaunay de la phase 0 est réalisé sur le complémentaire de l'image de la phase 1. Il est réalisé selon le même processus détaillé précédemment. La triangulation de cette phase doit respecter absolument le contour commun entre les deux phases tout en assurant la continuité de la triangulation. (Fig. [III.17](#)).

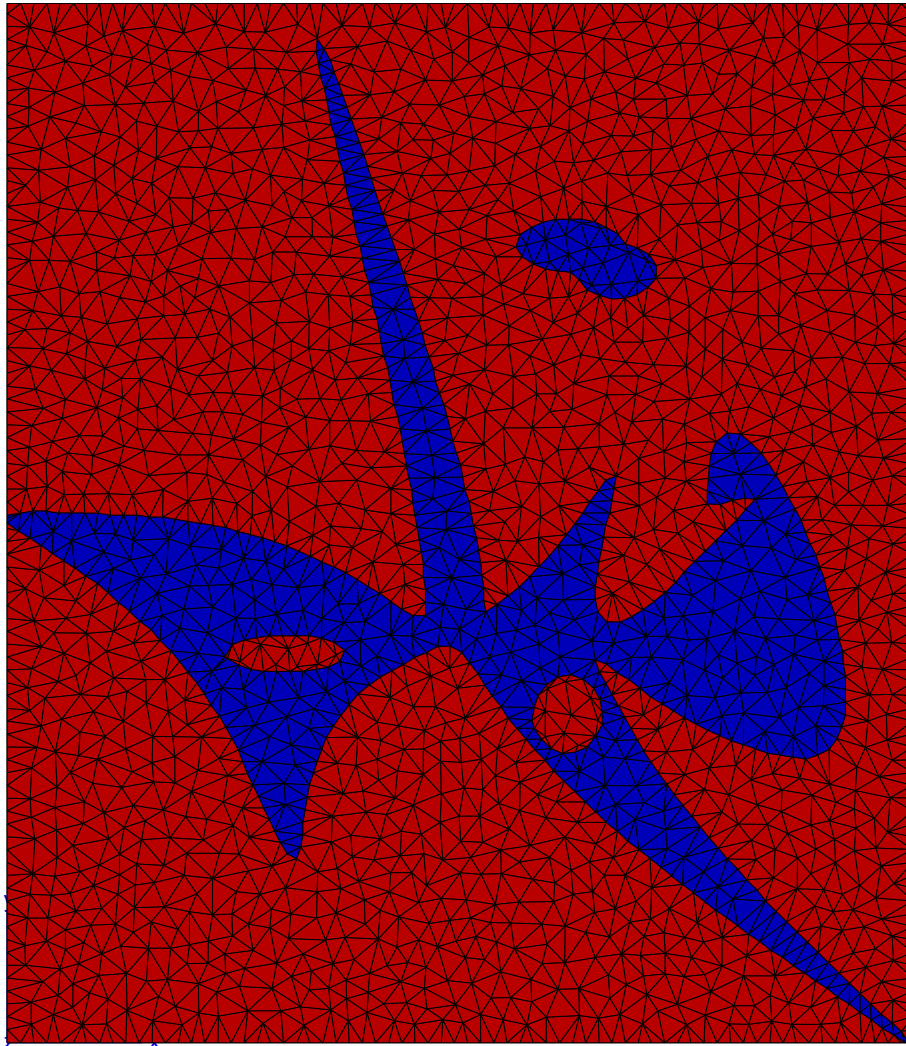


FIGURE III.17 – Maillage de la microstructure biphasée.

Le résultat final de la triangulation démontre que le couplage de la morphologie mathématique avec la triangulation contrainte de Delaunay permet de définir une procédure robuste automatique et optimisée de la méthode proposée dans cette investigation.

III.1.9 Densification contrôlée de la triangulation

III.1.9.1 Densification morphologique

Une amélioration importante de cette technique concerne la densification automatique et contrôlée d'une densité de maillage dans des zones critiques qui sont souvent le siège de fortes concentrations de contrainte. Pour résoudre ce problème, une densification différenciée est proposée dans ces zones critiques.

La densification concerne les zones fines de X ce qui implique une redensification du contour local de ces zones.

Densification locale de X

En morphologie mathématique, la boule B de rayon r , $B(r, x)$ peut constituer un indicateur de ces zones considérées fines. On définit donc les parties morphologiques fines de X : P_X comme étant l'intersection ensembliste entre X et le complémentaire de son ouvert par une boule B de rayon de taille légèrement supérieure à la taille des zones fines (Eq.(III.18)). Le calcul de r peut être réalisé, en pratique, par une opération de granulométrie par ouverture dont le principe sera détaillé dans l'annexe A :

$$P_X = X \cap (X \circ B(r, x))^c \quad (\text{III.9})$$

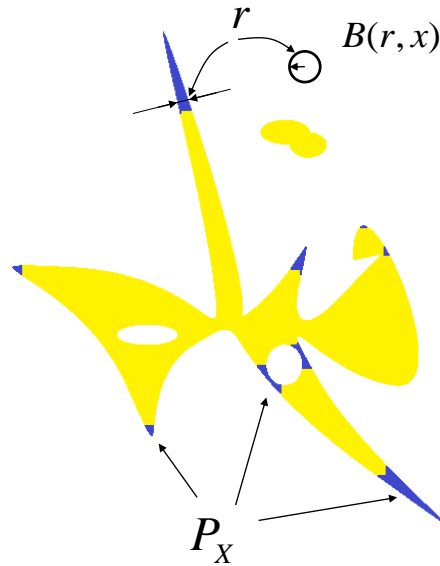


FIGURE III.18 – Identification des zones fines de X .

Dans notre cas, la figure III.18 illustre les zones considérées fines dans la phase 1 de la microstructure. La localisation de ces zones critiques permet de procéder à une densité de maillage locale différente θ_2 (Fig. III.20.b). Par exemple, une densité double de points $\theta_2 = 2\theta_1$ peut être définie dans ces nouvelles zones localisées morphologiquement.

Densification locale du contour X

Pour rester en cohérence avec θ_2 , il est important de redéfinir localement sur le contour un nouveau $\lambda_2 = 2\lambda$ dans cette nouvelle zone de l'image. Les zones du contour concernées par la densification locale de X , noté P_g , sont déduites de P_X . En effet, elles sont identifiées comme étant l'intersection ensembliste entre le contour de X et P_X (Fig.III.19)

$$P_g = P_X \cap \partial^-(X) \quad (\text{III.10})$$

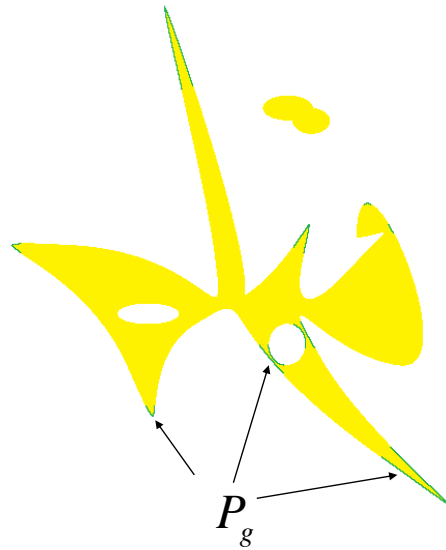


FIGURE III.19 – Identification des zones fines du contour de X .

La figure III.19 illustre les zones du contour adjointes aux zones de X identifiées précédemment. La localisation de ces zones critiques permet de procéder à une densité de maillage locale différente λ_2 (Fig. III.20.b). Par exemple, une densité double de points $\lambda_2 = 2\lambda_1$ peut être définie dans ces nouvelles zones de contour.

Union des densités et triangulation

Les différentes densités $\lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2$, sont regroupées et le processus de la triangulation s’effectue de façon continue sur ce champ à densité anisotrope (Fig.III.20.c). Il est important de noter que les différentes densités sont mutuellement contraintes, lorsqu’un point d’un processus est généré, il est défini avec une zone de répulsion dans laquelle on interdit l’implantation d’un nouveau point.

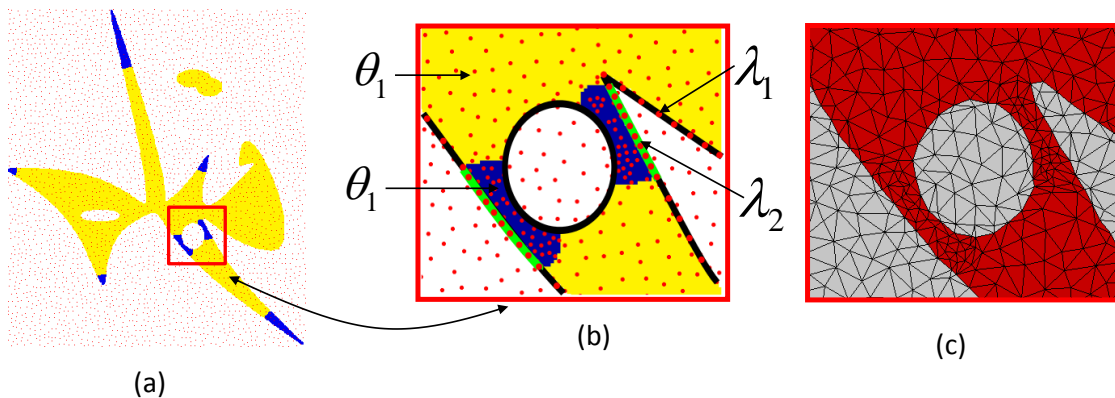


FIGURE III.20 – Densification contrôlée.

Cette option offre un intérêt important dans l’étude des matériaux hétérogènes à forte complexité microstructurale présentant des zones ou des phases fines comme dans le cas

d'un matériau composite par exemple.

III.1.9.2 Contrôle de la "dédensification" interne θ

A λ_1 et λ_2 constants, la contrainte vectorielle du contour définie par les vecteurs géodésiques dont les points remarquables sont l'une des contrainte morphologiques, permet d'établir différentes densités de mailles θ_1 et θ_2 , tout en conservant une distance de Hausdorff inférieure au pixel. Le maillage de la Fig. III.21 a une densité de maille $\theta_2 = \frac{1}{2}\theta_1$ (Fig. III.21.b) et $\theta_3 = \frac{1}{5}\theta_1$ (Fig. III.21.c)

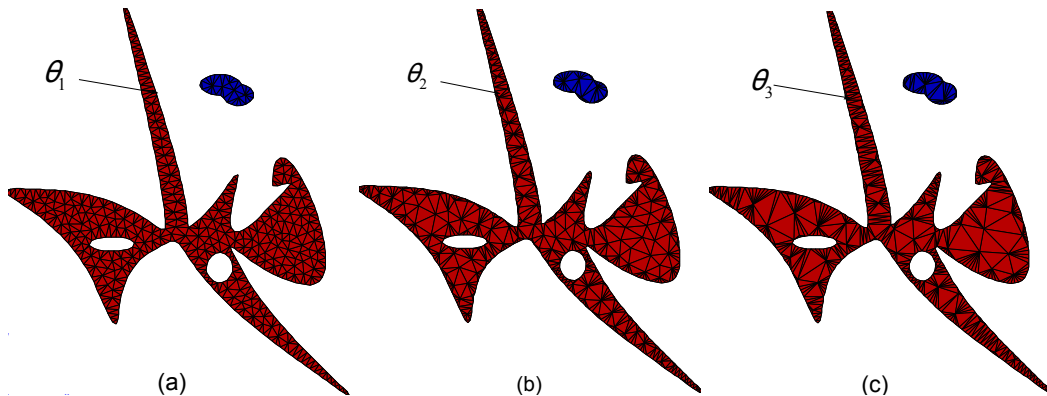


FIGURE III.21 – Densité de maillage (a) θ_1 , (b) $\theta_2 = \frac{1}{2}\theta_1$, (c) $\theta_3 = \frac{1}{5}\theta_1$.

La figure III.21.c illustre la robustesse de la méthode qui contraint la triangulation à être incluse dans X . La triangulation reste cohérente malgré une densité θ relativement faible. Cette triangulation peut être considérée comme un maillage de la microstructure.

III.1.10 Qualité du maillage

A ce stade, et dans chaque étude sur le maillage, il est d'usage de consacrer une section concernant la qualité des éléments triangulaires du maillage. Dans l'appellation "qualité du maillage", on entend : compatibilité des éléments triangulaires avec un calcul EF. Elle est construite sur la base de la triangulation de Delaunay, conjuguée à une implantation contrôlée de points internes, tend à garantir une répartition optimisée des triangles. Cependant, les contraintes morphologiques de X nous imposent un positionnement de points de triangulation pouvant conduire à l'établissement de triangles non compatibles pour un calcul EF (Fig. III.20).

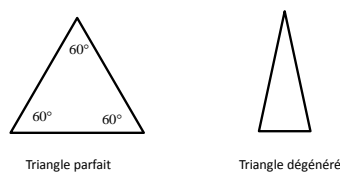


FIGURE III.22 – Conformité des triangles pour un calcul EF.

Par conséquent, nous considérons que la justesse du positionnement des triangles sur le contour de X qui préserve l'intégrité de la forme ainsi que le nombre d'éléments sont deux critères essentiels dans la vérification de la triangulation. Enfin, un calcul élément fini sera réalisé sur le maillage comme ultime étape de vérification.

III.1.10.1 Nombre d'éléments

Le nombre d'éléments est directement lié aux différentes densités θ et λ fixées par l'utilisateur : ce sont deux données d'entrée de la triangulation. Au regard des techniques type "Marching" où la densité de maille est au moins égale au nombre de pixels qu'il est bien souvent nécessaire de simplifier, dans le but d'un calcul élément fini, puis d'optimiser afin d'éviter l'effet "d'escalier" des pixels.

III.1.10.2 Distance de Hausdorff

On vérifie le positionnement des triangles sur le contour de l'image en mesurant l'écart éventuel entre l'image réelle et le maillage. Il doit être le plus faible possible. La distance de Hausdorff permet de mesurer cet écart. M.Schmitt donne une formulation morphologique [Schmitt, 1989] et Huttenlocher applique cette formulation en trame digitale [Huttenlocher et al., 1993] et Aspert mesure l'écart d'un maillage triangulaire avec une surface [Aspert et al., 2002]

Dans notre cas, il faut évaluer la distance qui sépare le contour établi par le gradient de Beucher $\partial^-(X)$ (Fig.III.23.b) des vecteurs du contour de la triangulation (Fig.III.23 (a)). Cette distance est définie par :

$$d(\partial^-(X), L(X)) = \max \left\{ \sup_{x \in \partial^-(X)} d(x, L(X)), \sup_{x \in L(X)} d(x, \partial^-(X)) \right\} \quad (\text{III.11})$$

- en version euclidienne :

$$d(\partial^-(X), L(X)) = \inf \left\{ \varepsilon, \partial^-(X) \subset \delta_{B(\varepsilon)}(L(X)), L(X) \subset \delta_{B(\varepsilon)}(\partial^-(X)) \right\} \quad (\text{III.12})$$

- en version morphologique :

où $B(\varepsilon)$ est la boule fermée de rayon ε et $d(x, \partial^-(X)) = \inf_{y \in \partial^-(X)} d(x, y)$ la distance euclidienne de x à $\partial^-(X)$.

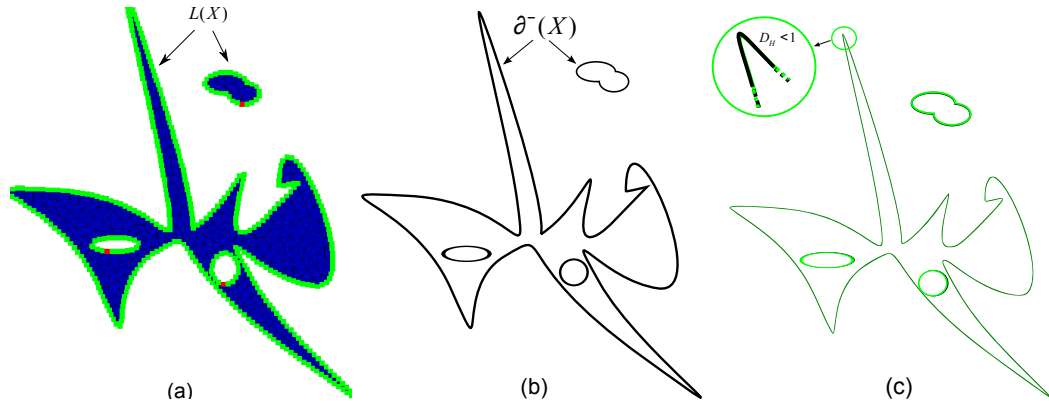


FIGURE III.23 – Distance de Hausdorff.

Dans notre approche, la mesure de cette distance est inférieure au pixel $d(\partial^-(X), L(X)) < 1$ (Fig. III.23.c), on considère que les deux contours sont superposables. On vérifie que notre méthode conserve l'intégrité du contour de chacun des objets de l'image de la microstructure.

III.1.10.3 Vérification du maillage par calcul EF

L'objectif de cette section consiste à tester le fichier de maillage réalisé avec notre technique. Le matériau choisi est un biphasique. La première phase est élastique et la deuxième est plastique parfaite. On réalise un essai de traction simple dans la direction x (Fig. III.24). Le calcul par élément fini est réalisé par le code de calcul ZeBuLon. La figure III.25 illustre le champ de déplacement U_1 suivant l'axe x , avec un déplacement maximal $d_{max} = 4mm$. Cette opération montre la convergence du calcul EF et confirme par conséquent la qualité du maillage proposé par notre technique.

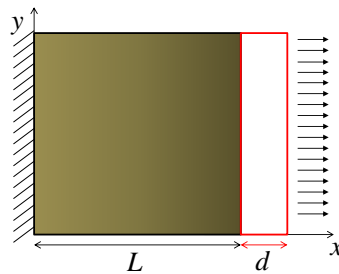


FIGURE III.24 – Mécanisme de chargement mécanique 2D.

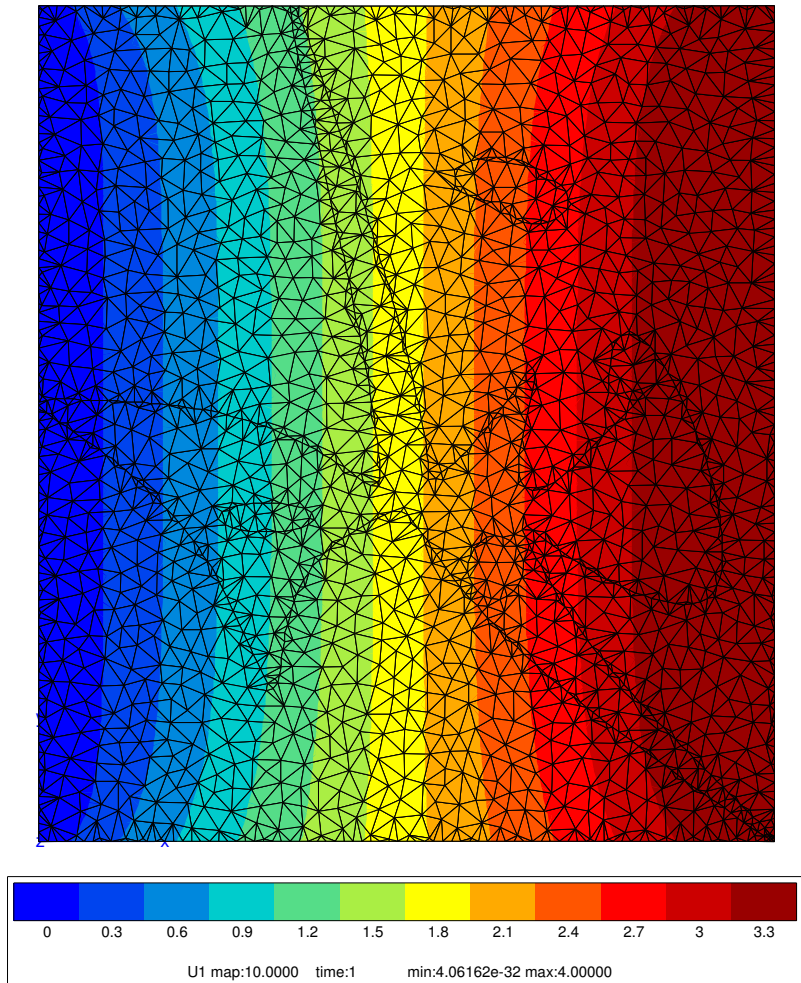


FIGURE III.25 – Représentation du champ de déplacement U_1 dans la direction x .

III.1.11 Optimisation du maillage

Schématiquement, il y a deux procédures de remaillage propres à une optimisation d'un maillage compatible à un calcul EF : la technique de remaillage libre et la technique de remaillage contrainte par un contour défini préalablement.

J.Ruppert établit un des premiers algorithmes optimisé [Ruppert, 1995], puis J.Shewchuk propose un code de calcul équivalent appelé "Triangle" [Shewchuk, 1995].

Remaillage libre

Dans cette approche, il existe deux sens de remaillage : la fusion des éléments ou le partitionnement judicieux d'un élément en éléments compatibles à un calcul EF.

Le premier sens est largement utilisé dans le cas des techniques de triangulation, comme le Marching Square (MS), qui fournissent un nombre important d'éléments. Dans ce cas, la technique est complexe : elle consiste à fusionner des triangles tout en respectant l'équilibre de la triangulation. Les codes de remaillage peuvent parfois estimer analytiquement une surface ou un contour afin de placer au mieux les triangles. Cette description analy-

tique s'apparente à un lissage qui peut dans certain cas modifier la forme de départ de la microstructure (effet d'escalier, rognage de la forme originale, ...).

Le deuxième sens, le plus simple, consiste en un partitionnement optimisé d'un triangle inapproprié par des éléments triangulaires compatibles pour un calcul EF.

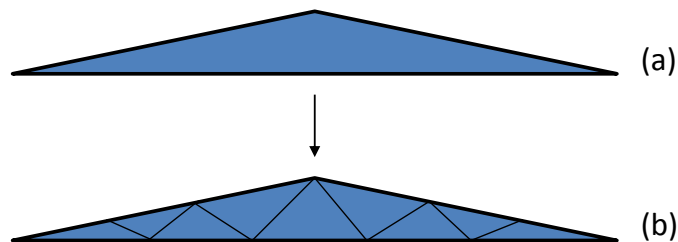


FIGURE III.26 – Redécoupage optimisé.

La figure III.26.a indique qu'un élément triangulaire fortement asymétrique peut être partitionné en plusieurs éléments compatibles à un calcul EF (Fig.III.26.b)

Notre étude de remaillage peut s'inscrire dans cette approche, les éléments triangulaires "aplatis" dans les zones fines (A), (D) de l'image (Fig.III.2) sont divisés en éléments compatibles à un calcul EF.

Remaillage contraint

Dans cette approche, seule une description du contour suffit et est utilisée comme donnée d'entrée pour une technique type maillage frontale. Cette technique pourra s'appliquer sur notre description vectorisée et morphologiquement optimisée du contour de l'image qui considère à la fois les particularités géométriques mais aussi la morphologie de la microstructure. La progression triangulaire de la méthode frontale sera donc, dès la première itération, morphologiquement optimisée par notre approche. Ceci montre aussi la souplesse de la technique globale de maillage automatique proposée dans cette étude.

A titre d'exemple, nous avons utilisé le logiciel libre Yams de l'INRIA [Frey, 2001] qui illustre une proposition d'amélioration du maillage (Fig.III.27).

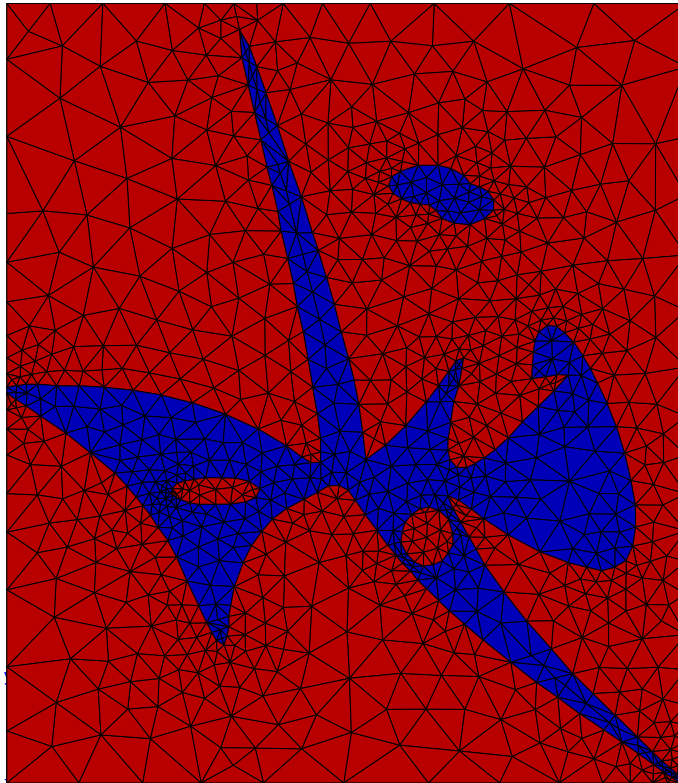


FIGURE III.27 – Frontal mesh by Yams.

Dans ce code de calcul, nous avons imposé de conserver les contours (lisets) de notre forme.

III.1.11.1 Comparaison avec le Marching Square

Le but de cette section est de positionner notre démarche par rapport aux techniques actuelles. Dans le domaine du Marching Square, la liste des codes de calculs est loin d'être exhaustive, mais nous avons fait le choix, à titre de comparaison, du logiciel Avizo Fire (Edition 8.0.0). Le but est de souligner les problématiques liées à cette méthode.

Avec la technique du marching square, la densité de maillage est maximale, le nombre d'éléments est au moins égal au nombre de pixels (Fig.III.28.a). Comme le Marching Square suit de façon fidèle une forme composée de pixels, on observe une discrétisation du maillage en "escalier" au frontière de l'objet (Fig.III.28.b.c).

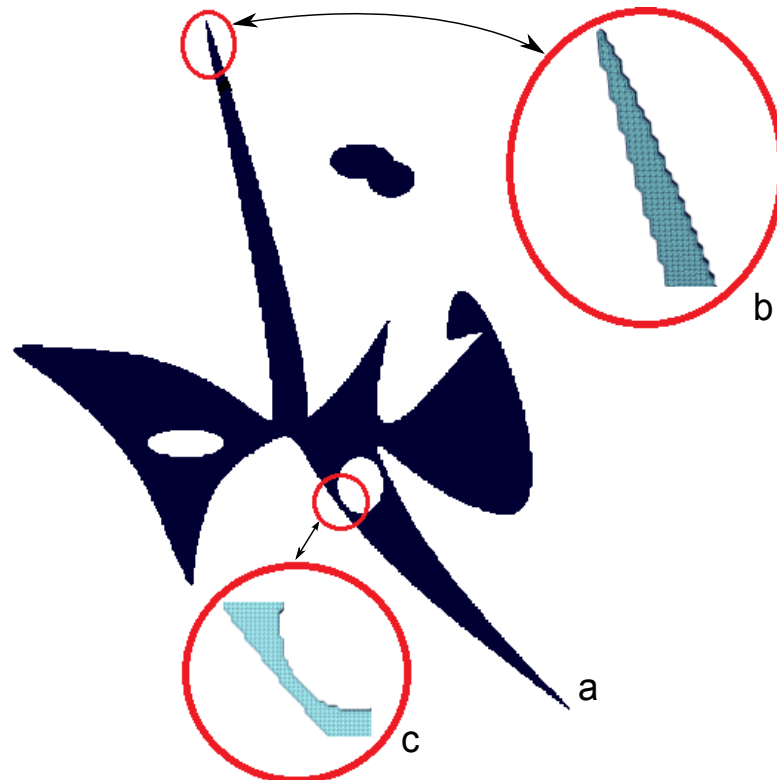


FIGURE III.28 – "Escaliers" du Marching square.

Il est bien évidemment nécessaire de "dérafiner" le maillage afin qu'il puisse se prêter à un calcul EF. Une dédensification avec une préservation topologique est nécessaire. La figure. III.29.a illustre un exemple de réduction du nombre d'éléments qui minimise mais ne supprime pas l'effet d'escalier. Si on ajoute une composante de lissage du maillage, comme la contrainte du contour n'existe pas, il est possible d'occasionner une perte de la topologie originale de X . (Fig. III.29.c). Le lissage est pourtant une procédure importante dans ce cas. Il existe cependant d'autres méthodes de lissage comme celle établie par G.Taubin [Taubin, 1995].

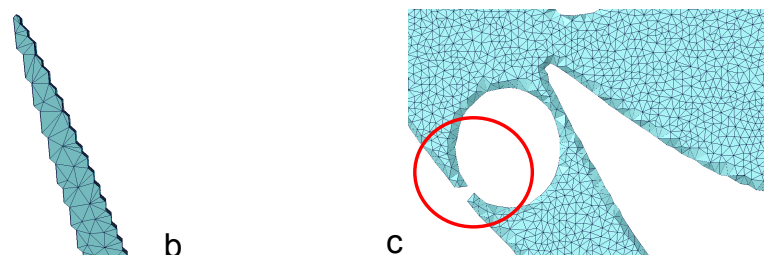


FIGURE III.29 – Désensification du Marching square.

Il apparaît clairement que la connaissance contour des objets de l'image est une étape incontournable pour une étude de maillage.

III.1.12 Synthèse

Dans notre étude, nous avons choisi comme stratégie, l'adaptation de la taille de chacun des triangles d'un maillage en fonction de la topologie réelle de la microstructure afin de construire une triangulation morphologique contrainte de Delaunay. Le résultat du maillage n'est pas inutilement fin dans des endroits inappropriés. Par conséquent, le nombre raisonnable d'éléments du maillage ainsi que l'absence de tout lissage de la structure, sont considérés comme les deux principaux avantages de notre triangulation.

III.2 Triangulation de Delaunay contrainte appliquée aux microstructures multiphasées 2D

III.2.1 Choix d'une image

Dans une image biphasée chacun des pixels possède une valeur scalaire unique : 1. Dans notre étude nous nous intéressons aux images labellisées qui sont un cas particulier des images multiphasées ou un groupe de pixels possède une valeur scalaire entière unique.

L'ensemble X est partitionné en zones à forme arbitraire . On attribue à chacune des zones un label unique. Notre image f contient n phases (Fig.III.30). Ainsi chacune des phases X_i de f est définie par :

$$\begin{aligned} f & \in \{1, n\} \\ X_i & = f^{-1}(i) \end{aligned} \tag{III.13}$$

On remarque qu'il existe plusieurs niveaux d'imbrication de phases dans f .

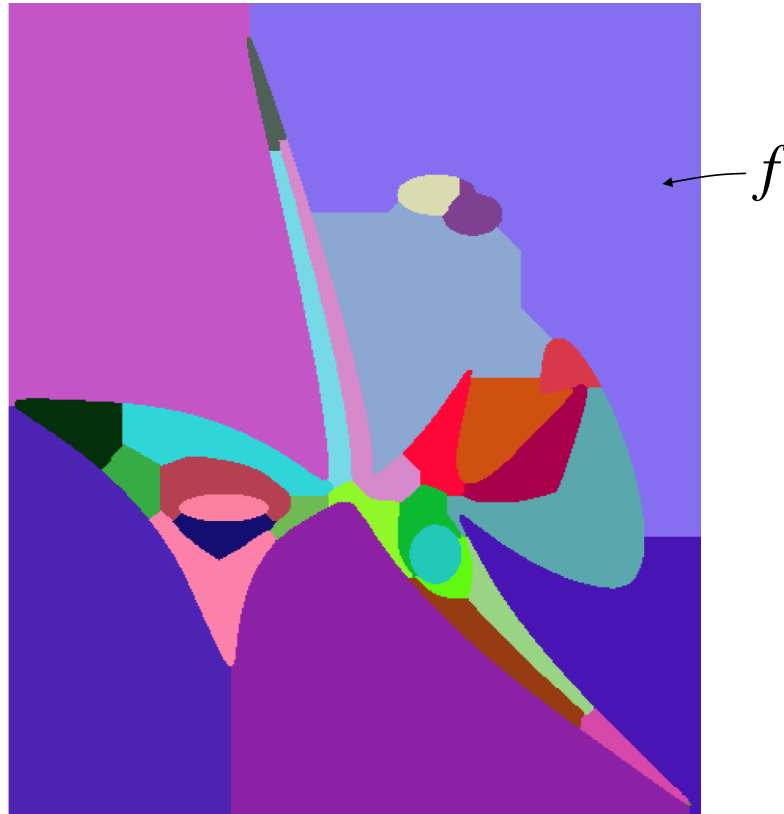


FIGURE III.30 – Image multiphasée.

III.2.2 Détermination du contour d'une image multiphasée

Dans cette section on choisit le gradient inférieur :

$$g^-(f) = f - \varepsilon_B(f) \quad (\text{III.14})$$

Si le gradient symétrique n'est pas retenu pour son épaisseur, il est équivalent de choisir soit le gradient supérieur soit le gradient inférieur dans la détermination du contour d'une image multiphasée. Cependant, il est important de souligner la part arbitraire de ce choix dans la détermination de la frontière des phases. Suivant la numérotation des labels, une frontière peut se placer dans l'une des deux phases mitoyennes.

Le résultat pour nos images :

Dans le cas où f est constitué de plusieurs phases, le gradient de l'image, $\partial^-(f)$, renvoie un champ scalaire où chacune des isovaleurs représente une partie du contour de chaque composante connexe de l'image (Fig.III.31) . Les parties planes ou constantes de l'image sont toutes égales à 0 par dérivation.

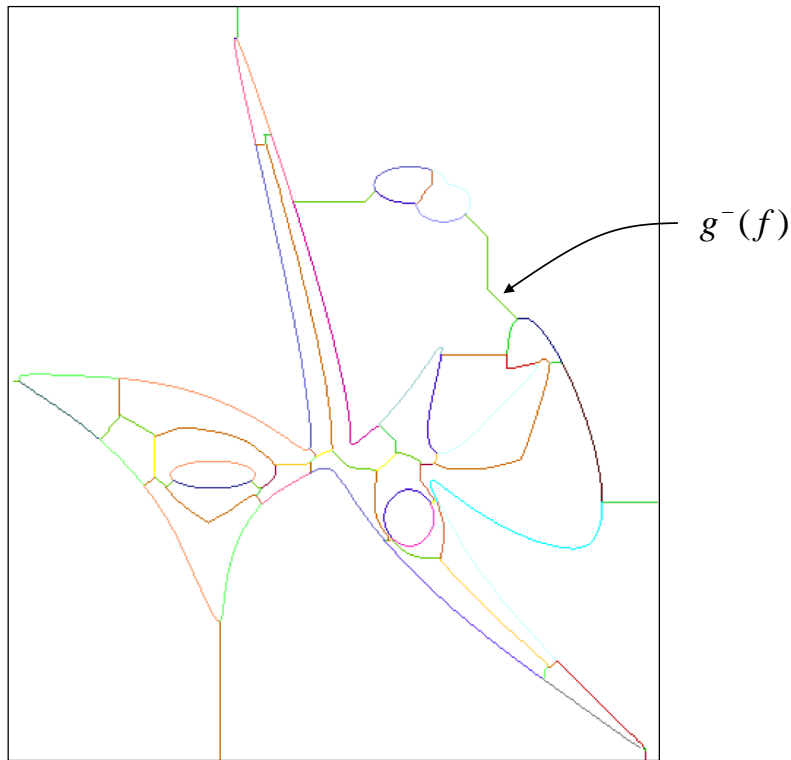


FIGURE III.31 – Gradient de Beucher sur f .

III.2.3 Détermination des points remarquables

Dans une image multiphasée, il existe deux catégories de points :

- les points définis par les points simples des différents squelettes par chacune des phases,
- les points définis par les intersections d'un minimum de trois phases (points multiples).

III.2.3.1 Détection des points remarquables

La squeletisation est réalisée sur les sous-ensembles de $f : X_i$ (Fig. III.32.a).

$$Sq(f) = \cup Sq(X_i) \quad (\text{III.15})$$

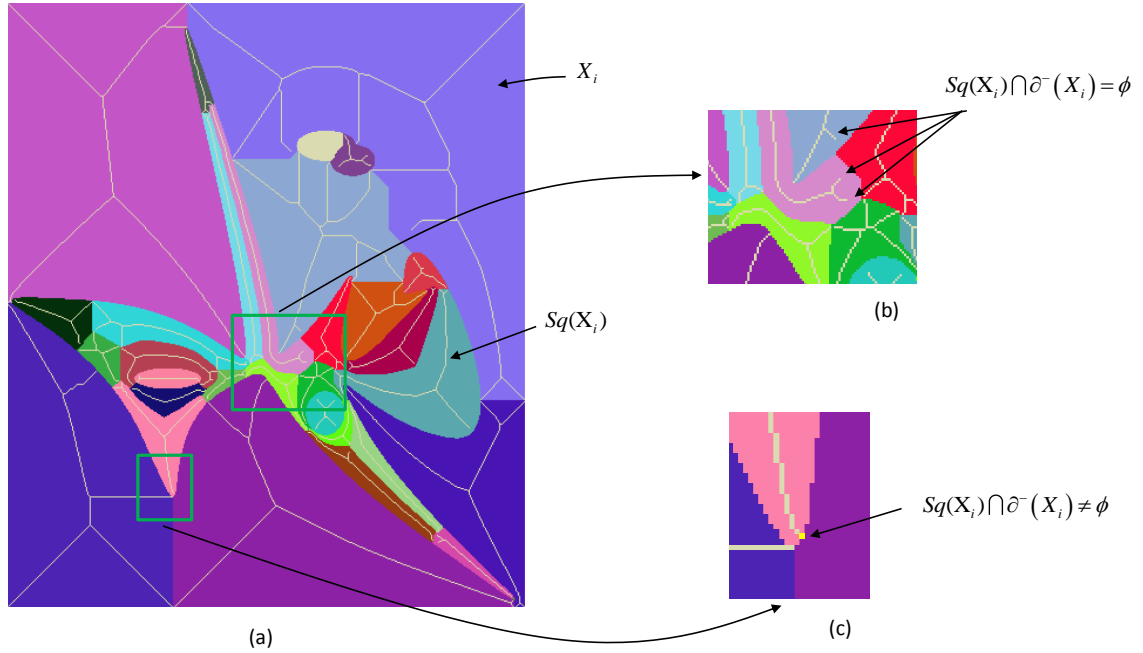


FIGURE III.32 – a) Union des $S_q(f)$, b) Squelette non connexe avec le contour de la phase, c) squelette connexe avec le contour de la phase.

La totalité des points terminaux n'est pas sélectionnée ; l'opération de squeletisation a uniquement pour but de détecter les singularités topologiques significatives, suivant la topologie considérée un point de jonction de phase coïncide avec un point terminal du squelette (Fig. III.32.b), ces points sont alors fusionnés. Ces jonctions permettent de définir les premiers points de triangulation.

Seules les branches du squelette connexes avec le contour des phases sont considérées suivant une condition d'intersection ensembliste entre le squelette local et son gradient morphologique associé. Les formes de l'image comportant des courbures douces conduisent à l'établissement d'un squelette dont les points terminaux ne sont pas connexes aux courbures locales (Fig. III.32.c)

$$Sq(X_i) \cap \partial^-(X_i) \quad (III.16)$$

Il est, par conséquent, fréquent que le squelette ne soit pas connecté avec le contour des objets.

III.2.3.2 Détection des points d'échantillonnage

Considérons la partie non nulle du gradient de f , X_{g_f} est un ensemble mince dont l'épaisseur est de un pixel sur lequel l'opérateur de recherche de configuration de point "Hit and miss" peut être appliqué. Dans le cas où l'épaisseur du contour est supérieur à 1, on lui applique une squeletisation :

$$X_{gf} = \cup_i \partial^-(X) \tag{III.17}$$

Les configurations d'un motif élémentaire d'un point multiple en trame digitale sont identifiables, et sont représentées par un ordonnancement de pixels dans une matrice de détection de points multiples M_{tpl} de dimension 3x3. Il y a trois principaux cas possibles à symétrie et rotation près :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{III.18}$$

La figure III.33 illustre sur un détail de l'image le résultats des différentes opérations du Hit and Run.

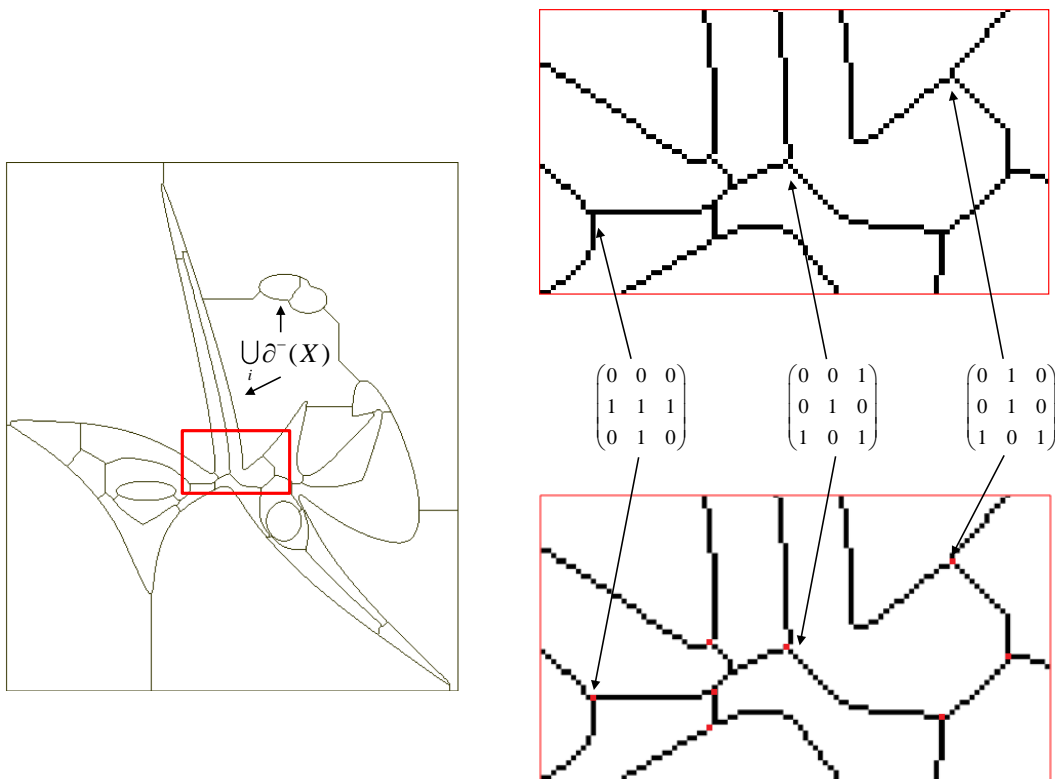


FIGURE III.33 – Points remarquables sur les points multiples du gradient f .

L'ensemble des points remarquables constitue une contrainte topologique pour la triangulation.

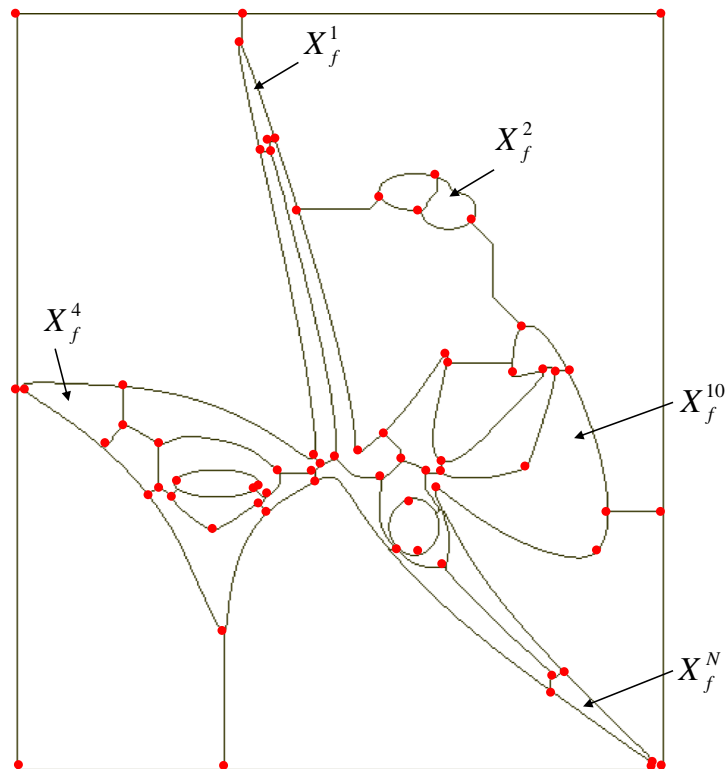


FIGURE III.34 – Points remarquables sur le gradient f .

A ce stade, la procédure utilisée pour la triangulation d'une image biphasée est directement applicable à chacune des i phases de f que l'on considère comme des sous-ensembles X_f^i biphasés (Fig. III.34). Le contour de chaque composante connexe de l'image est défini par plusieurs parties du gradient borné par des points remarquables et échantillonnés suivant une densité λ . Le hit and run est réalisé sur chacun des sous-ensembles de f . La densité de maillage θ est définie identique sur chaque composante mais peut aussi être variable. Les points de contours communs aux phases mitoyennes garantissent la continuité de la triangulation. Notre procédure respecte l'ensemble des contours de l'image établi par la triangulation respectant ainsi les différentes distances de Hausdorff locales de chacun des X_i (Fig. III.35).



FIGURE III.35 – Triangulation multiphasée.

III.2.3.3 Vérification du maillage par un calcul EF

En utilisant l'image de la figure III.35, on effectue un calcul par éléments finis avec une sollicitation de traction simple en imposant un déplacement de 4 mm. A chaque phase on affecte des propriétés mécaniques différentes (33 phases).

La figure III.36 illustre le champ de déplacement U_1 dans la direction x . Cette figure témoigne de la convergence des calculs effectués ce qui valide le maillage EF ainsi réalisé.

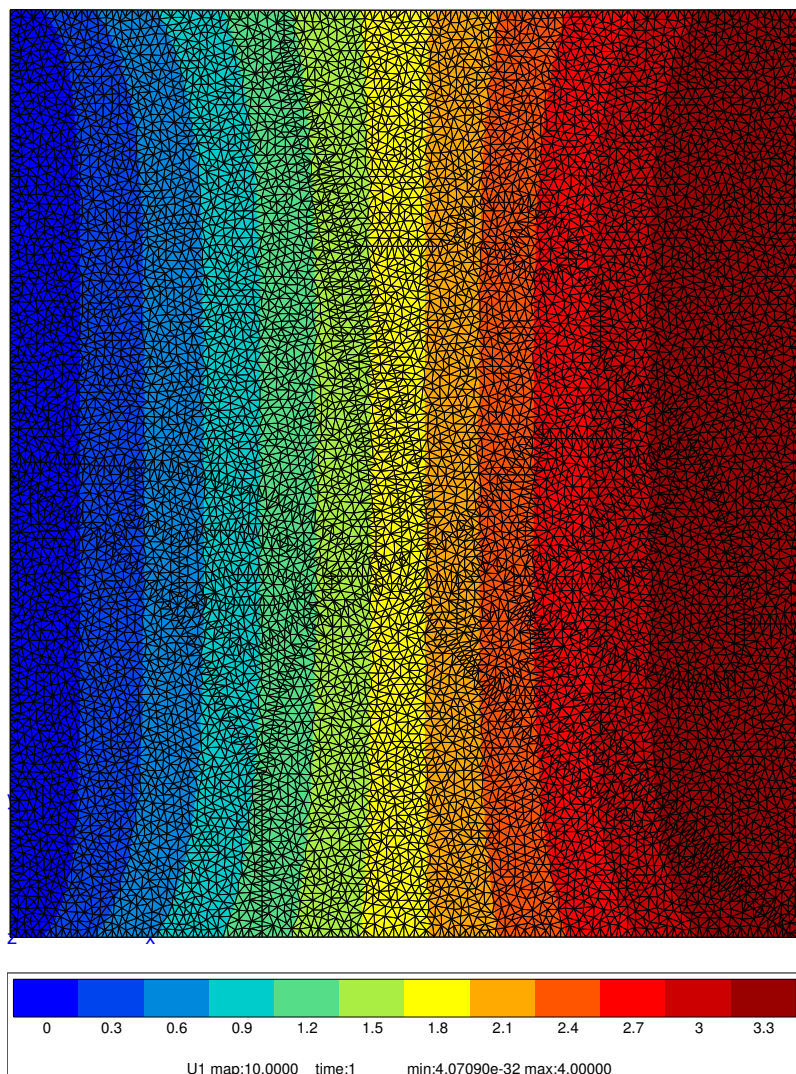


FIGURE III.36 – Calcul EF sur le maillage du matériau hétérogène multiphasé.

III.3 Organigramme de la triangulation contrainte de Delaunay 2D

L'organigramme (Fig. III.37) présente les principales étapes du maillage des microstructures bi et multiphasées 2D. La procédure de maillage, sélectionne en fonction du nombre de phases de l'image, la méthodologie d'étude. L'algorithme consiste à établir une formulation vectorielle fidèle à la morphologie générale de l'image. Les opérateurs de morphologie mathématique permettent la description du contour de l'image puis de détecter des points remarquables ainsi que des points de densification additionnels qui complètent la formulation vectorielle du contour des objets. La triangulation de Delaunay contrainte est alors réalisée à l'intérieur du champ de vecteur dans lequel est introduit des points internes de triangulation. Ce maillage est alors utilisable dans un calcul EF.

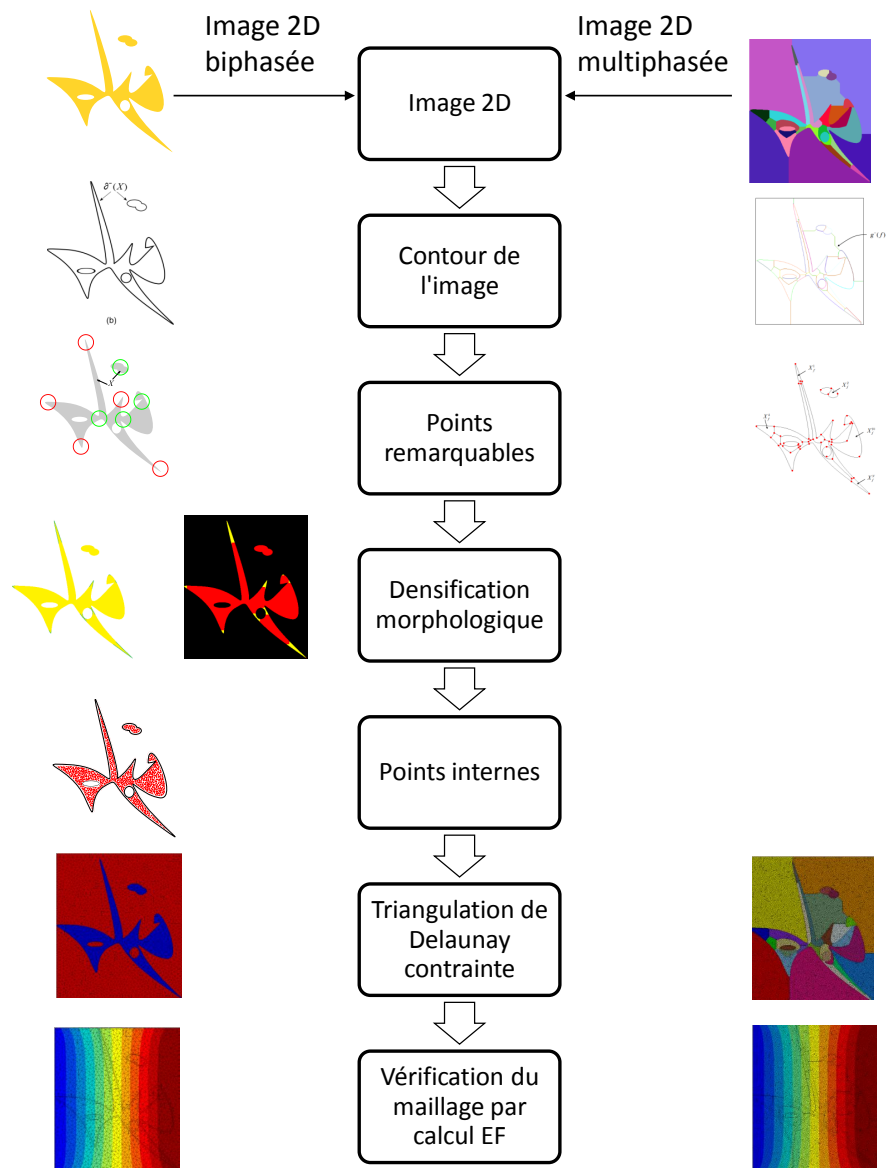


FIGURE III.37 – Organigramme de la triangulation contrainte de Delaunay appliquée aux microstructures bi et multiphasées .

III.4 Choix des microstructures réelles

Dans cette section, nous appliquons notre procédure de maillage sur une microstructure réelle.

La procédure de maillage se décompose en trois principales étapes :

- traitement de l'image,
- application de procédure du maillage sur l'image,
- vérification du maillage par un calcul EF.

III.4.1 Cas biphasé

III.4.1.1 Description du matériau

Dans cette section, nous avons choisi une image réelle à forte complexité morphologique (Fig. III.38). Il s'agit d'une coupe d'un agglomérat de particules d'argent mélangées à des particules d'oxydes (d'étain et de bismuth) dont le processus industriel nous a été indiqué avec l'aimable autorisation de M.Jeandin du Centre des matériaux de l'Ecole des Mines de Paris et de la société Métalor.

L'image de la microstructure, acquise à l'aide d'un microscope électronique à balayage (MEB) est dite à teinte ou à niveau de gris ; la valeur de chacun des pixels est comprise entre 0 et 255 pour une image codée sur 8 bits.

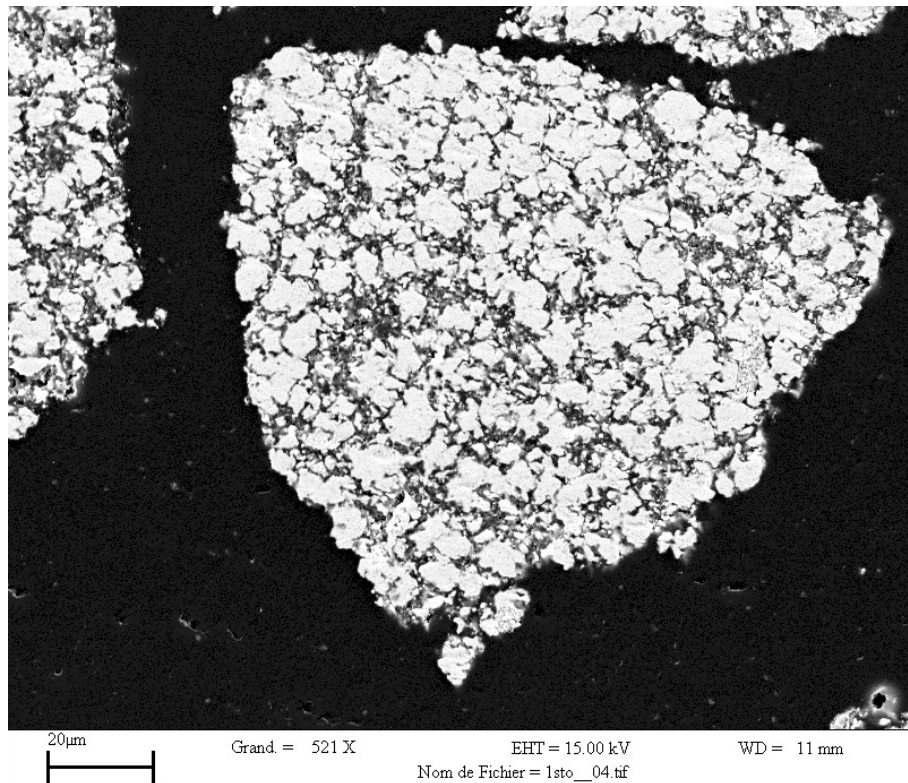


FIGURE III.38 – Image MEB d’agglomérat de particules d’argent.

Dans cette représentation, cette image n'est pas directement exploitable car les phases ne sont pas encore distinctes.

III.4.1.2 Traitement de l'image

En premier lieu, un faible traitement d'image sera utilisé afin de rendre compatible l'image en un maillage EF. Il est important de souligner l'aspect minimaliste de la procédure par la plus petite matrice élémentaire (3x3) dans le but de respecter au mieux la morphologie de la microstructure originale.

Détection des phases de l'image

La fonction de répartition du nombre de pixels en fonction de leurs valeurs scalaires, indique un caractère quasi bimodale de la distribution qui autorise une opération de binarisation, ou seuillage, direct par une constante sur l'histogramme de niveau de gris.

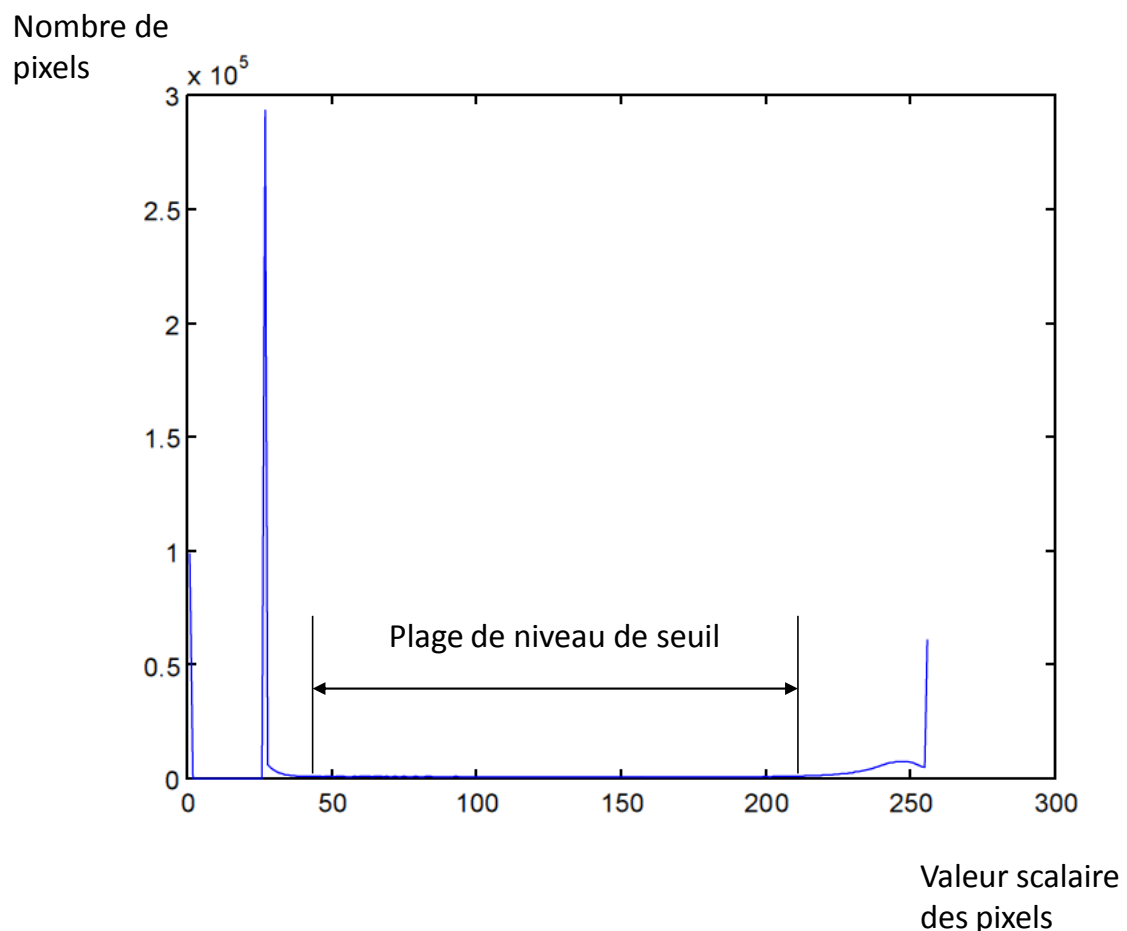


FIGURE III.39 – Histogramme de niveau de gris de l'image.

Sur l'histogramme III.39, on note l'étendue de la plage de niveau de gris dans laquelle le choix d'une valeur scalaire aura peu d'influence sur la quantité de pixels récupérée après l'opération de binarisation.

Le résultat de la binarisation est la définition d'une image binaire (à deux niveaux de gris) dite biphasée ; les valeurs scalaires de la phase sont à 1 et ceux de son complémentaire sont à 0.



FIGURE III.40 – Résultat de la binarisation de l'image.

Tous les éléments de l'image ne sont pas utiles dans un calcul mécanique. Les composantes de petites tailles sont soustraites par une opération d'érosion, de taille unitaire, suivie de la reconstruction ensembliste conditionnelle à l'image binaire originale, dont le principe a été détaillé au chapitre [II.6.2.1](#).

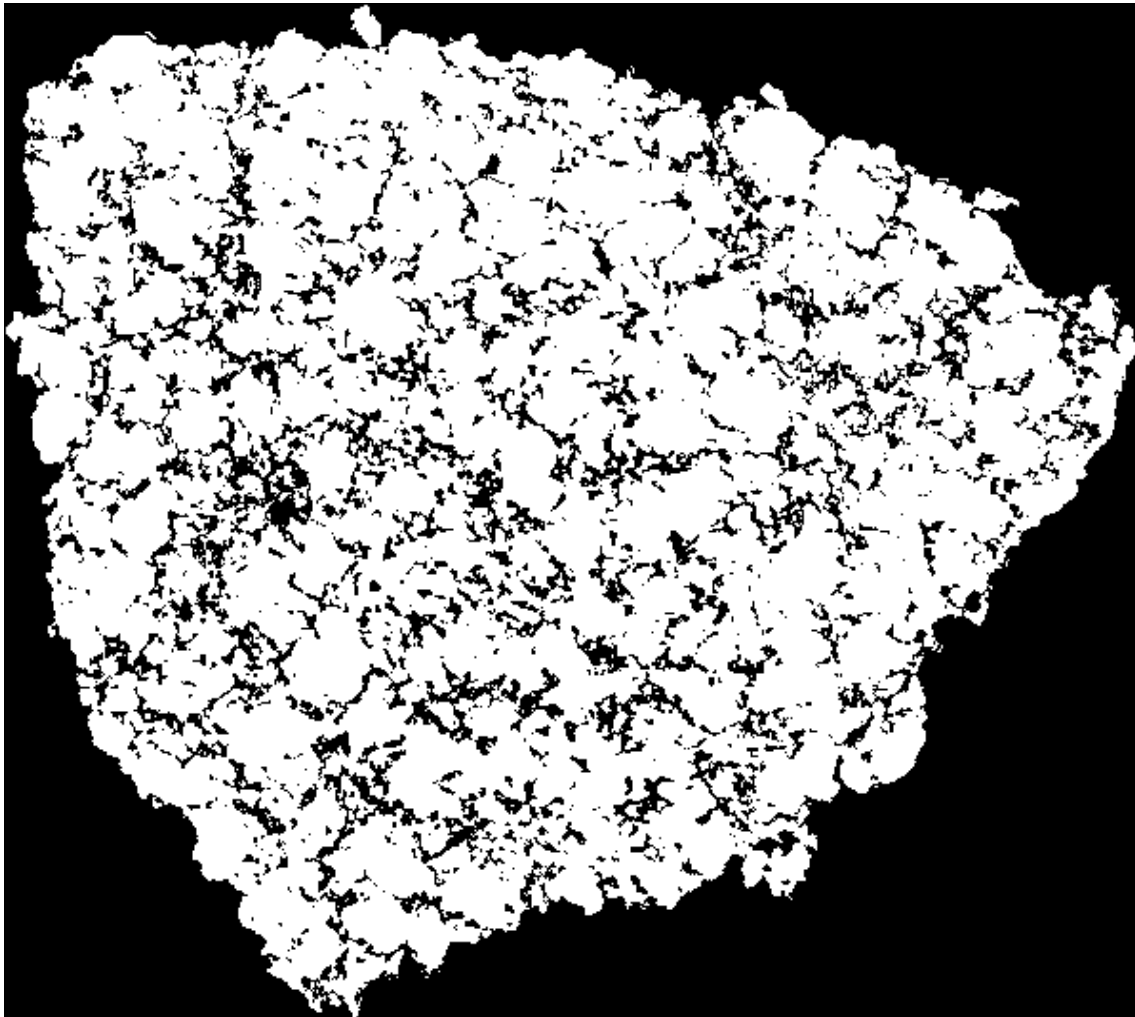


FIGURE III.41 – Image après traitements morphologiques

La figure III.41 illustre le "nettoyage" de l'image et la conservation de l'élément central pour l'illustration du maillage.

Afin de vérifier l'intégrité de la microstructure originale, on procède par la superposition de l'image binaire, en rouge sur la figure III.42 sur l'image originale. La figure III.42 indique un détail sur cette superposition.

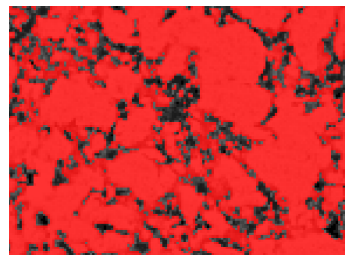


FIGURE III.42 – Détail agrandi de la superposition de l'image binaire sur l'image à teinte de gris.

Par ce détail, apparait le respect de la forme originale car les principales zones "claires" de l'image ont été sélectionnées par l'opération de binarisation. On note la forte complexité morphologique de la microstructure : elle contient des trous et de nombreux rebroussements.

III.4.1.3 Application de la procédure du maillage sur l'image

La procédure de triangulation contrainte de Delaunay morphologique est réalisée sur la phase ainsi que sur son complémentaire.

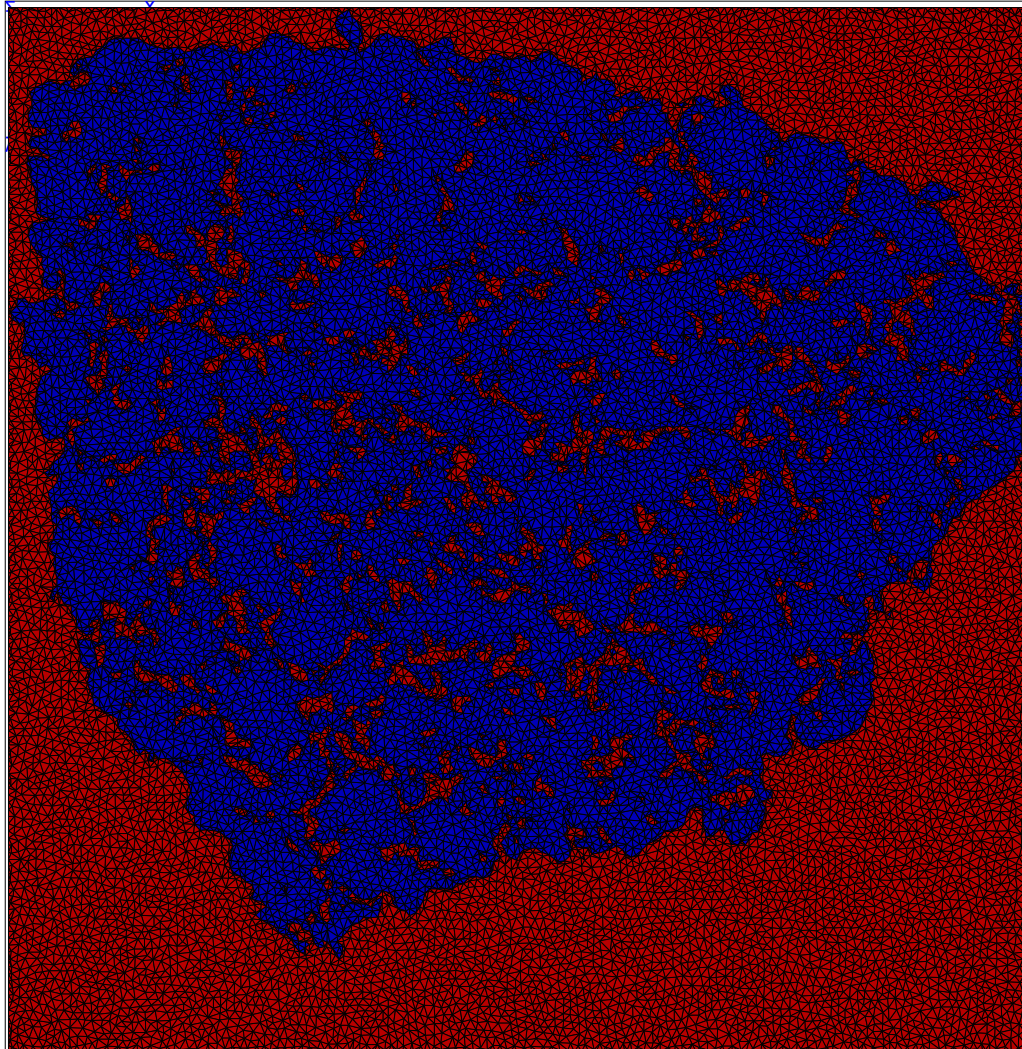


FIGURE III.43 – Résultat de la triangulation morphologique.

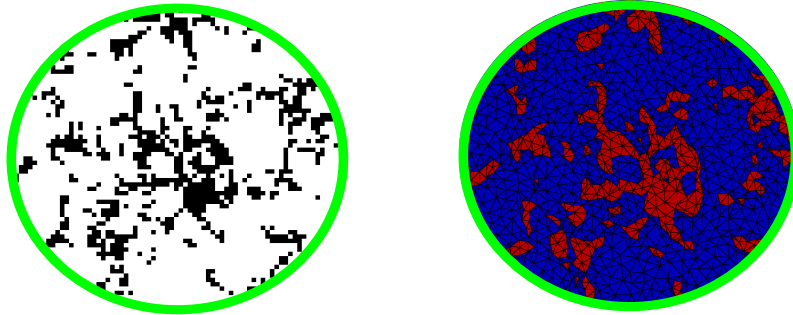


FIGURE III.44 – Détail de l'image avec le maillage des deux phases associées.

Sur un détail de l'image (Fig. III.44), seuls les objets dont la taille est proche du pixel ne sont pas considérés dans le maillage. On note qu'il est délicat de réaliser un calcul EF pour ces objets de taille unitaires.

III.4.1.4 vérification du maillage par un calcul EF.

Afin de vérifier la convergence du calcul EF la microstructure étudiée est sollicitée en traction simple avec un déplacement maximal de 4mm . Pour chaque phase les propriétés mécaniques sont affectées.

La figure III.45 illustre le champ de déplacement U_1 dans la direction x . La validité de ce calcul numérique confirme la qualité du maillage proposé, en plus dans ce cas, notre démarche permet d'effectuer des calculs EF à partir d'une image d'une microstructure hétérogène réelle. Cette procédure originale constitue un apport scientifique important dans le domaine de la mécanique des matériaux hétérogènes.

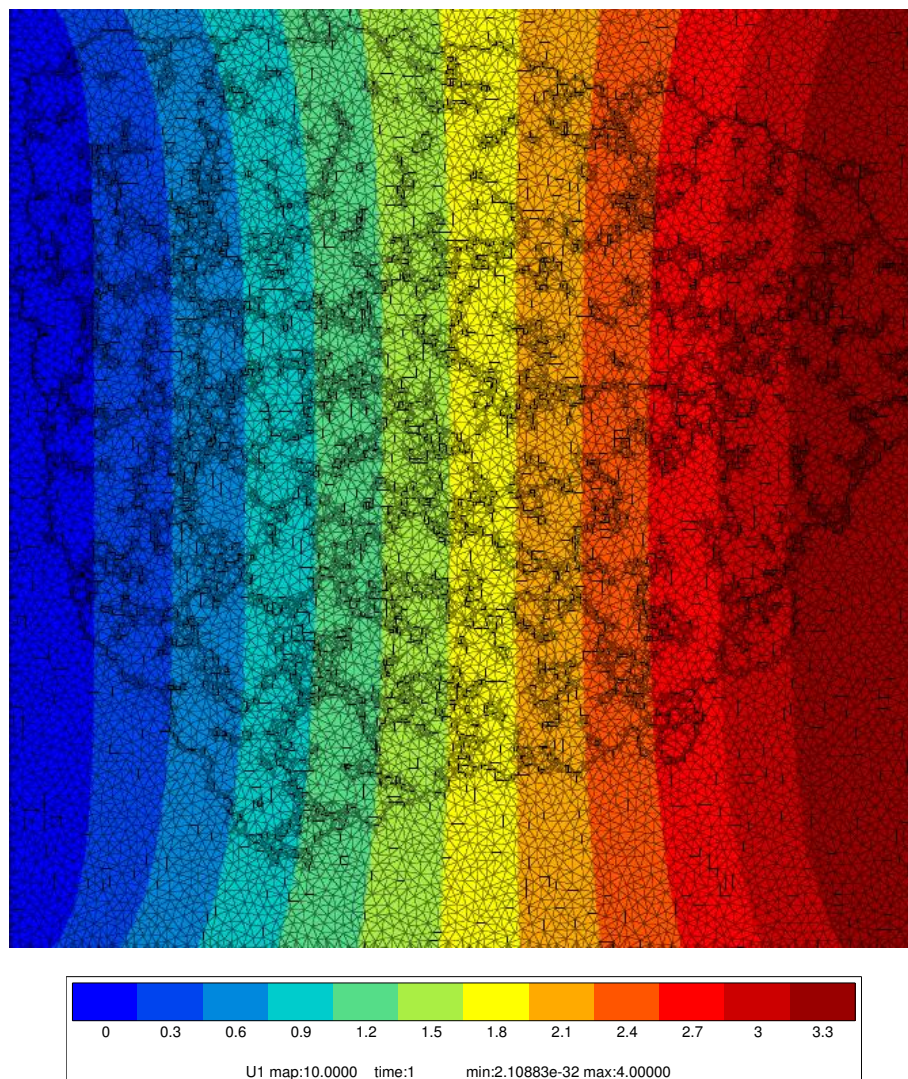


FIGURE III.45 – Champ de déplacement U_1 dans la direction x .

III.4.2 Cas multiphasé

III.4.2.1 Description du matériau

Le cas multiphasé est représenté par une image EBSD, bien connue chez les métallurgistes, où chaque couleur de l'image représente, entre autres, l'orientation d'un grain métallurgique (Fig. III.46). La microstructure est constituée de cuivre dont les grains contiennent des macles; elle comporte 1514 phases dont certaines sont imbriquées dans d'autres phases. L'image choisie est issue de la thèse de Céline Gérard [Gérard et al., 2009], avec son aimable consentement [Gérard et al., 2009].

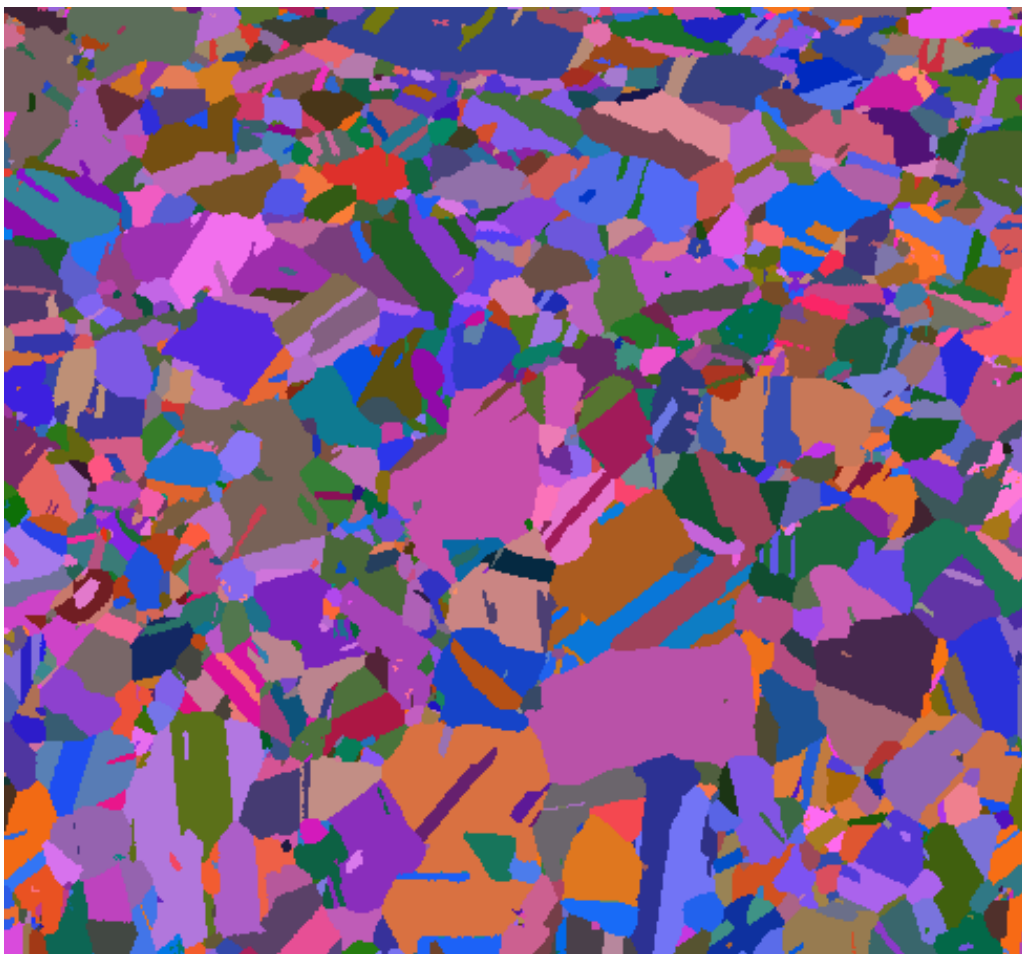


FIGURE III.46 – EBSD de cuivre.

III.4.2.2 Traitement de l'image

Détection des phases de l'image

Dans la même démarche de traitement minimal d'image, on réalise comme dans l'étude précédente une opération d'érosion, de taille unitaire, suivie d'une reconstruction de l'image, cette fois, dans le cas fonctionnel (Fig.III.47) .

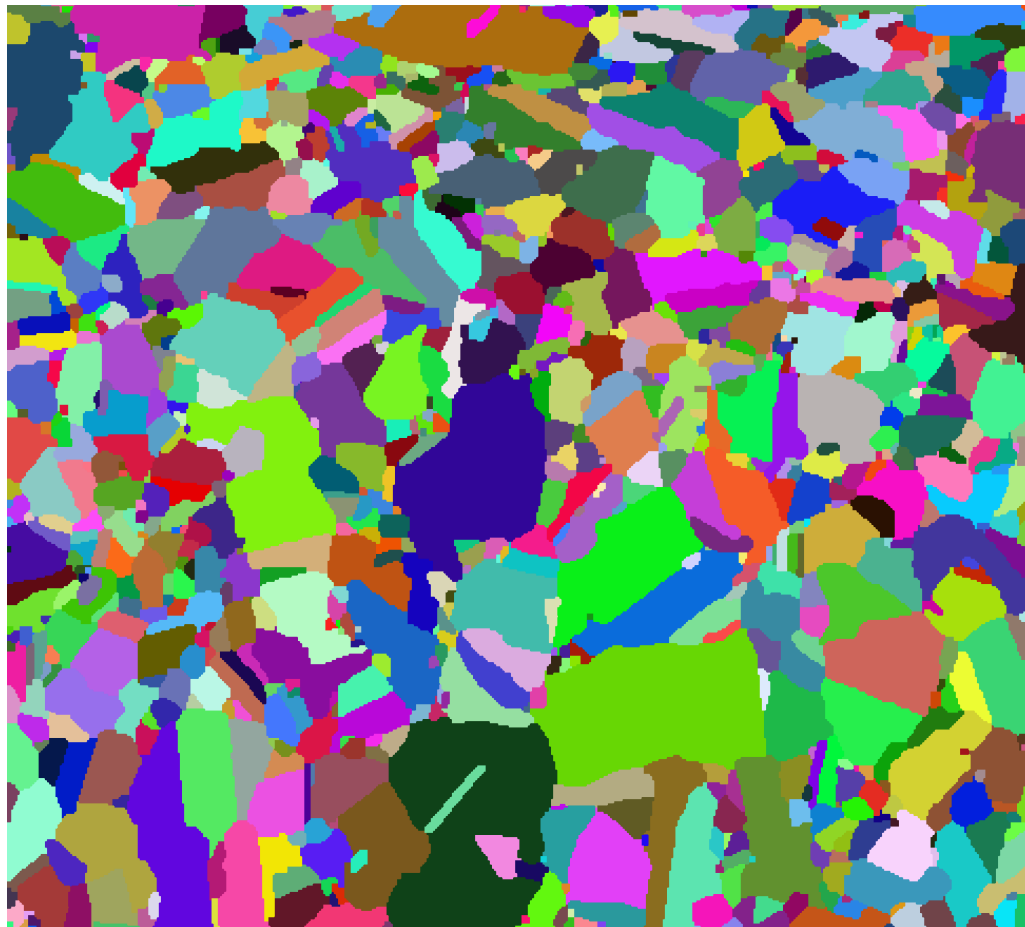


FIGURE III.47 – Image après traitements morphologiques

La procédure automatique de triangulation contrainte de Delaunay morphologique est réalisée sur chacune des 1514 phases de la microstructure.

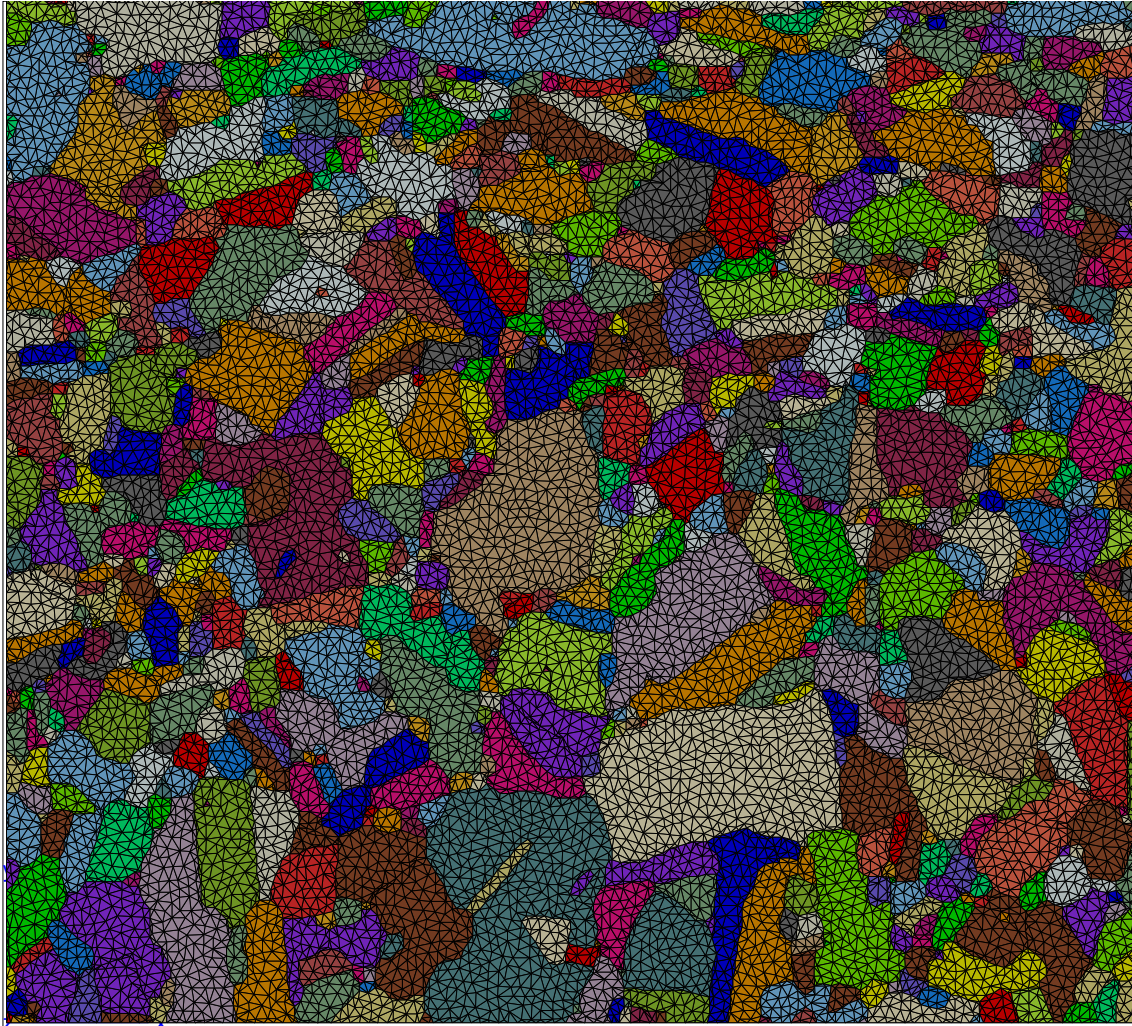


FIGURE III.48 – Maillage d’une image EBSD.

Ce résultat est une grande importance pour ce type de microstructures. La figure III.48 montre la pertinence de la technique de maillage proposée dans cette étude. Elle met en évidence l’originalité de ce maillage qui prend en compte tous les détails morphologiques de l’image.

III.4.2.3 Vérification du maillage par un calcul EF

On réalise un calcul EF à partir l’image illustrée par la figure III.48. Il s’agit d’une image EBSD 2D multiphasee.

Sur cette figure chaque couleur représente une orientation cristallographique différente. La microstructure est sollicitée en traction simple avec un déplacement maxi de 4mm.

La figure III.49 illustre le champ de déplacement U_1 dans la direction x .

Malgré la complexité morphologique de cette microstructure, notre technique de maillage a permis d'effectuer des calculs EF corrects ce qui atteste de la robustesse de la méthode.

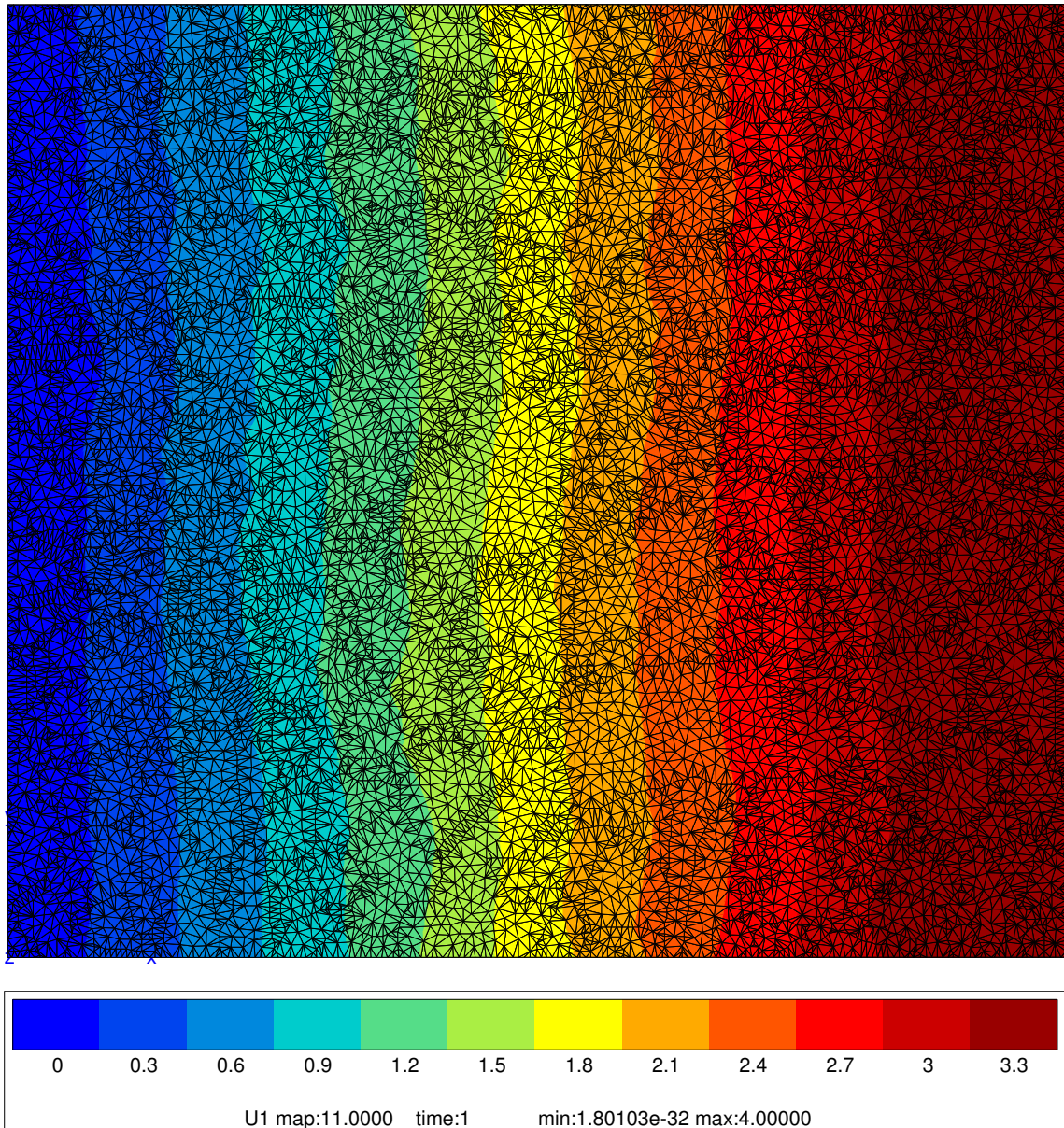


FIGURE III.49 – Champ de déplacement U_1 dans la direction x .

III.4.2.4 Synthèse

La triangulation morphologique de Delaunay contrainte appliquée à une microstructure multiphaseée complète la problématique de la triangulation de microstructures dans le cas bidimensionnel. Il est important de souligner que le principal avantage de cette approche est la description vectorielle du contour des phases grâce aux outils de la morphologie mathématique. Cette description permet l'application de la triangulation de Delaunay

dont le résultat est soit directement utilisable pour un calcul éléments finis ou optimisable par de nombreux codes d'optimisation de maillage.

Chapitre IV

Maillage d'une microstructure 3D biphasée

Dans ce chapitre, nous appliquons la procédure de triangulation établie pour les images bidimensionnelles aux images tridimensionnelles. La transposition est possible dans certains cas mais parfois, la redéfinition de nouveaux opérateurs morphologiques a été nécessaire. Le cœur de l'étude biphasée 3D repose principalement sur l'établissement d'un graphe interne appelé graphe-M déduit du Voronoï géodésique établi à la surface de chacun des objets de l'image. Ce graphe-M est établi à l'intérieur d'une cellule de Voronoï ne comportant aucun problème de cocyclicité inhérent au passage dual Voronoï/Delaunay. Nous rappelons que notre étude se porte sur un pavage triangulaire adaptatif de l'image strictement contraint par la forme des objets. Cette première triangulation de surface sera par la suite utilisée directement par des mailleurs automatiques pour assurer le passage de notre structure triangulaire à une structure tétraédrique ou hexaédrique.

Sommaire

IV.1	Choix d'une microstructure 3D biphasée	119
IV.2	Maillage d'une microstructure biphasée 3D	119
IV.2.1	Contour de la microstructure	120
IV.2.2	Sélections des points sur le contour des objets	121
IV.3	Problématique liée à la triangulation des points de surface . .	126
IV.3.1	Problématique liée à la construction du dual Voronoi/Delaunay	126
IV.4	Définition d'un graphe interne aux cellules du Voronoï	132
IV.4.1	Le graphe-M	132
IV.4.2	Composantes nécessaires à la construction du graphe-M . . .	133
IV.5	Construction morphologique du Graphe-M	133
IV.5.1	Diagramme de Voronoï géodésique et fonction distance géodésique	133
IV.5.2	Lieux remarquables de la fonction distance	135
IV.5.3	Définition d'un parcours géodésique associé aux cellules du Voronoi	139
IV.5.4	Labellisation des cellules de Voronoï géodésique	140
IV.5.5	Définition du Graphe-M sur une cellule de Voronoï géodésique	143
IV.5.6	Conservation de la morphologie des arêtes du cylindre	144
IV.5.7	Résultats de la triangulation	145
IV.5.8	Distance de Hausdorff 3D	147
IV.5.9	Organigramme de la triangulation morphologique d'une mi- crostructure biphasée 3D	148
IV.6	Généralisation de la méthode	150
IV.6.1	Génération de la microstructure 3D biphasée	150
IV.6.2	Résultat de la triangulation et maillage volumique	151
IV.6.3	Vérification du maillage par un calcul EF	153
IV.7	Maillage des exemples tests	155
IV.8	Synthèse	157

IV.1 Choix d'une microstructure 3D biphasée

Dans cette étude, nous avons choisi une microstructure biphasée, X , comme étant un ensemble composite disjoint constitué de cylindres pleins et droits (Fig. IV.1.a). X est la réunion d'un cylindre isolé contenant un défaut modélisé par une sphère légèrement décentrée de l'axe du cylindre afin de simuler une proximité de ce défaut avec le bord (Fig. IV.1.c). X est aussi composé de deux autres cylindres fusionnés par leur côté créant une discontinuité concave géométrique. Elle est comparable aux concavités présentées sur l'ensemble X 2D du chapitre III. Cette singularité topologique située à la jonction des cylindres engendre une ligne où se situe des points "selles" ou "col" (Fig. IV.1.d). Par ailleurs, par construction, tous les cylindres ont un angle local de 90° situé entre la hauteur et le rayon du cylindre (Fig. IV.1.b). Toutes ces contraintes topologiques devront être prises en compte lors de la triangulation. Comme en 2D biphasée, l'ensemble des voxels qui compose la phase X a comme valeur scalaire 1 et ceux du complémentaire de X : X^c sont affectés à 0.

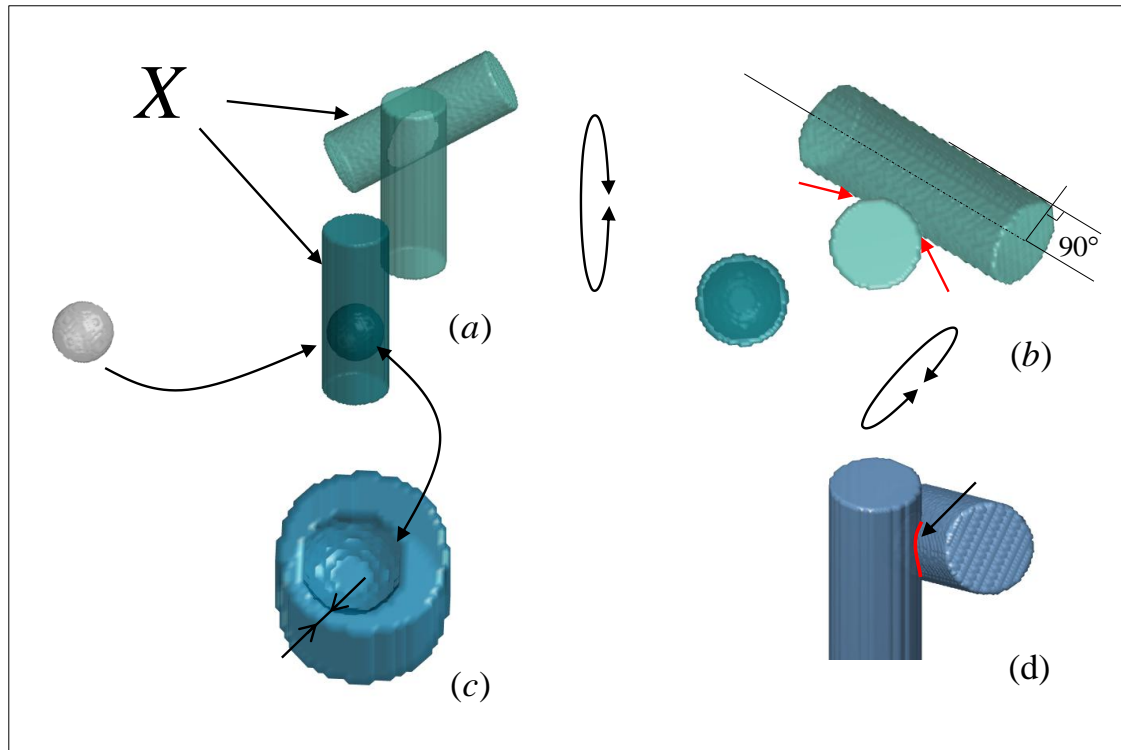


FIGURE IV.1 – Microstructures 3D biphasées.

IV.2 Maillage d'une microstructure biphasée 3D

Pour une microstructure 2D, les principales étapes de la triangulation sont :

- 1 - image de départ biphasée,
- 2 - définition du contour de chacun des objets de l'image par le gradient de Beucher,

- 3 - sélection de points du contour espacés par un pas régulier,
- 4 - calcul sur ces points de vecteurs de contour,
- 5 - implantation de points dans chacun des objets, points internes,
- 6 -triangulation de Delaunay contrainte sur l'ensemble vecteurs de contour et union des points internes de chacun des objets.

Toutes les étapes de la procédure de maillage 2D ne sont pas transposables pour un maillage 3D. Dans cette section, nous développons des outils adéquats.

IV.2.1 Contour de la microstructure

En 3D, l'étape (2) est transposable. Les opérateurs morphologiques sont, pour la plupart, définis dans \mathbb{R}^n [Rivest et al., 1993]. La composante B du gradient de Beucher inférieur définit pour un ensemble X : $\partial^-(X) = X - \mathcal{E}_B(X)$ est une boule de rayon r centrée en x : $B(r, x)$ En trame discrète, la représentation de B est un cube 6-18 ou 26-connexité.

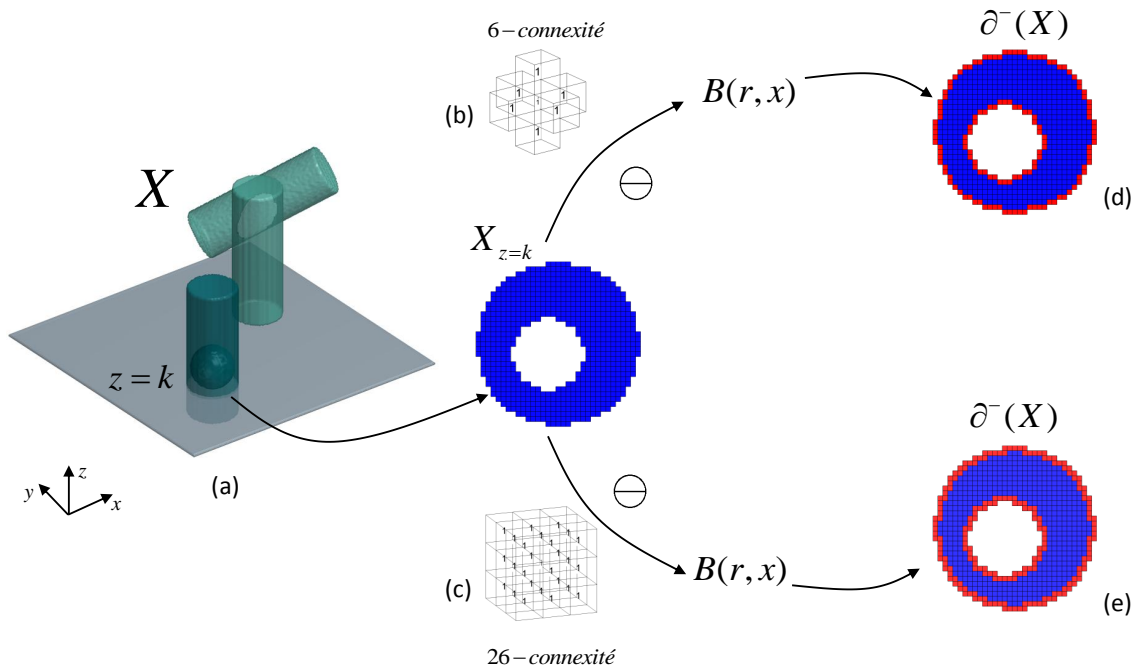


FIGURE IV.2 – Gradient inférieur d_6, d_{26} .

La forte ou la faible connexité des voxels est définie par le choix de l'élément structurant B en 6-18 ou 26-connexité. La figure IV.2 illustre l'opération du gradient inférieur sur X (IV.2.a) qui conduit suivant B soit à un contour mince (Fig.IV.2.d) si B est 6-connexe (Fig.IV.2.b) ou soit à un contour épais (Fig.IV.2.e) si B est 26-connexe (Fig.IV.2.c) car la 26-connexité du cube permet la considération des éléments diagonaux du cube.

Par le produit de convolution d'un élément structurant sur une image, on retrouve le contour d'un objet discrétisé obtenu en topologie algébrique. Nous choisissons la 6-connexité qui permet une description morphologique plus fine et plus fidèle des objets de l'image.

IV.2.2 Sélections des points sur le contour des objets

IV.2.2.1 Sélection de points par le "hit and run" 3D

La procédure du Hit an Run de C.Lantuéjoul (étape 3) est transposable en 3D. Comme en 2D, on définit un point x_i lorsque l'intersection d'une droite L_i avec le contour de l'image $\partial^-(X)$ est non vide : $L_i \cap \partial^-(X) \neq \{\emptyset\}$ (Fig. IV.3.a). Pour garantir un espacement régulier des points, on introduit une distance de répulsion r autour de chacun des points x_i (Fig. IV.3.b). Comme en 2D, l'introduction de cette distance ôte le caractère uniforme de la distribution mais nous permet de garantir une triangulation homogène de notre ensemble X par une répartition régulière des points sur la surface. (Fig. IV.3.c).

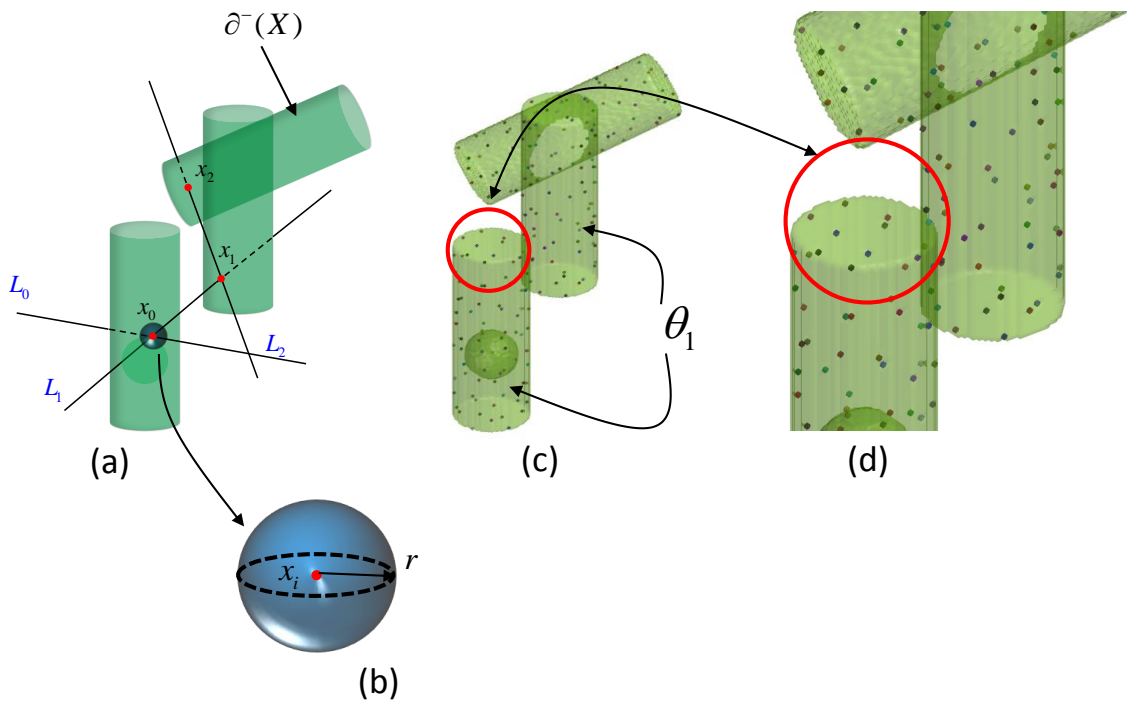


FIGURE IV.3 – Hit and Run 3D.

Le résultat est un processus ponctuel régulier de densité θ sur le contour des objets. Ces points seront utilisés comme sommets d'une future triangulation. Toutefois, il est nécessaire, comme en 2D, de contraindre la position de ces points par la topologie de l'objet afin de préserver l'intégrité de la forme initiale (Fig. IV.3.d).

Dans la suite de l'étude, le Hit and Run 3D sera utilisé pour réaliser les différents processus ponctuels des zones de l'image que nous définissons pour affiner notre triangulation morphologique.

IV.2.2.2 Sélection de points sur les contours remarquables d'une image

En 3D, la procédure de détection des points remarquables sur le contour de X est comparable à celle utilisée pour les microstructures 2D. En 3D, les points remarquables

sont localisés sur les contours remarquables des parties convexes et concaves des surfaces de X localisées par les différents squelettes de X et de X^c .

• **Squelette surfacique par l'axe médian**

En 2D, nous avons utilisé le squelette de Lantuéjoul, évoqué au chapitre II.6.3, construit par un amincissement homotopique de l'image et de son complémentaire afin de localiser des points remarquables sur le contour. En 2D, le squelette a été obtenu par l'union des lieux des centres de cercles maximaux inscrits dans une forme.

En 3D, la formulation établie par C.Lantuéjoul reste exacte mais plus complexe à mettre en application. Plusieurs méthodes existent pour atteindre le squelette d'une image. D.Attali définit le concept de Polyboule sur des graphes de Voronoï 2D et 3D [Attali, 1995] ; C.Lohou établit le squelette en topologie discrète [Lohou, 2001].

Cependant, le lieu des centres des boules maximales inscrites dans une forme dont la représentation est le squelette peut être atteint par la relation de distance d'un point appartenant à l'objet par rapport à un point appartenant à son contour. La définition de J.Chaussard inspirée de Chazal and Lieutier introduit cette notion distance pour un ensemble de points x et y . Il établit ensuite le lien entre cette formulation et celle de la squelettisation par boules maximales [Chaussard, 2010], [Chaussard et al., 2010], [Chazal and Lieutier, 2005] :

soit $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ la distance euclidienne de x et y notés $d(x, y)$ où $d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

La relation de cette distance avec le squelette est donnée par : Soit X un sous ensemble de \mathbb{R}^n ou de \mathbb{Z}^n . Posons $d(y, X) = \min_{x \in X} \{d(y, x)\}$. $|X|$ représente le nombre d'éléments de X . On choisit par E la représentation de \mathbb{R}^n ou de \mathbb{Z}^n . Soit $x \in E, r \in \mathbb{R}^+$, on note par $B_r(x)$ une boule centrée en x et de dimension n définie par $B_r(x) = \{y \in E | d(x, y) \leq r\}$. Aussi, on définit $\overset{0}{B}_r(x) = \{y \in E | d(x, y) < r\}$.

Soit $X \subseteq E$. Une boule $B_r(x) \subseteq X$ est maximale dans X si elle est strictement non incluse dans une autre boule incluse dans X .

Par conséquent, l'axe médian euclidien de X noté $EMA(X)$ est le lieu des centres des boules maximales de X .

Comme en 2D, les points remarquables situés sur les convexités de X sont localisés par le squelette de X et les concavités sont localisées par le squelette du complémentaire de X .

• **Détection des contours remarquables sur les parties convexes de X**

La squelettisation de X par l'axe médian : $EMA(X)$, conduit à la définition du squelette surfacique de X (Fig.IV.4.a) sur lequel l'intersection ensembliste avec l'image du gradient $\partial^-(X)$ permet d'établir la frontière commune entre ces deux surfaces définissant ainsi les lieux des parties convexes de X (Fig.IV.4.c) :

$$font(X) = EMA(X) \cap \partial^-(X) \quad (IV.1)$$

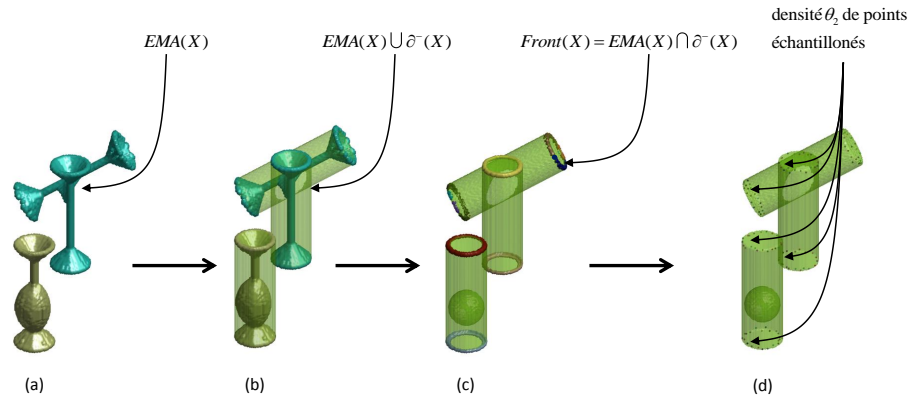


FIGURE IV.4 – (a) Squelette de X , (b) superposition du squelette sur le contour de X , (c) localisation des intersections entre le squelette et contour de X , (d) échantillonnage différencié de points sur ces intersections.

On réalise une densité de points $\theta_2 = 2\theta_1$ sur $front(X)$ (Fig. IV.4.d).

• Détection des contours remarquables sur les parties concaves de X

Les concavités de X sont localisées par le squelette du complémentaire de X . Si les objets sont disjoints, par définition le squelette n'est pas connexe avec le contour des objets (Fig. IV.5.a). Dans ce cas il est établi à mi-distance des objets. En revanche, lors d'un rebroussement ou d'une concavité, une frontière $front(X^c)$ est établie par intersection de l'image du gradient $\partial^-(X)$ et de l'image du squelette $EMA(X^c)$:

$$font(X^c) = EMA(X^c) \cap \partial^-(X^c) \quad (IV.2)$$

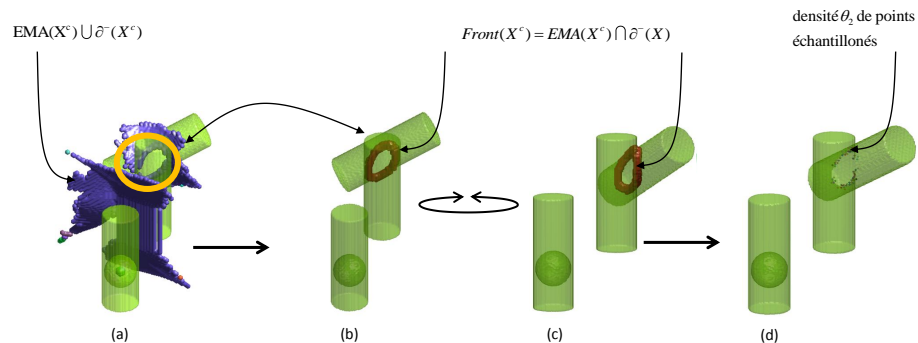


FIGURE IV.5 – (a) Squelette de X^c , (b) (c) localisation des intersections entre le squelette et contour de X^c sous différents angles, (d) échantillonnage différencié de points sur ces intersections.

On réalise une densité de points $\theta_2 = 2\theta_1$ sur $front(X^c)$ (Fig. IV.5.d).

L'instabilité du squelette par l'axe médian sur les bords du complémentaire de l'image est due à l'imprécision du calcul sur des distances importantes entre le bord des objets et du reste de l'image (Fig. IV.5.a). Mais dans notre cas, seuls les contacts entre les deux images sont utilisés.

IV.2.2.3 Densification morphologique contrôlée

Contrairement en 2D, il ne s'agit pas de localiser des zones morphologiquement fines incluses dans X , mais sur son contour $\partial^-(X)$; toute notre étude se situe à la surface des objets. Ces zones sont localisées par la soustraction ensembliste de X diminué de l'intersection entre son ouverture et son gradient morphologique :

$$P_X = X \setminus \gamma_{B(x,r)}(X) \cap \partial^-(X) \tag{IV.3}$$

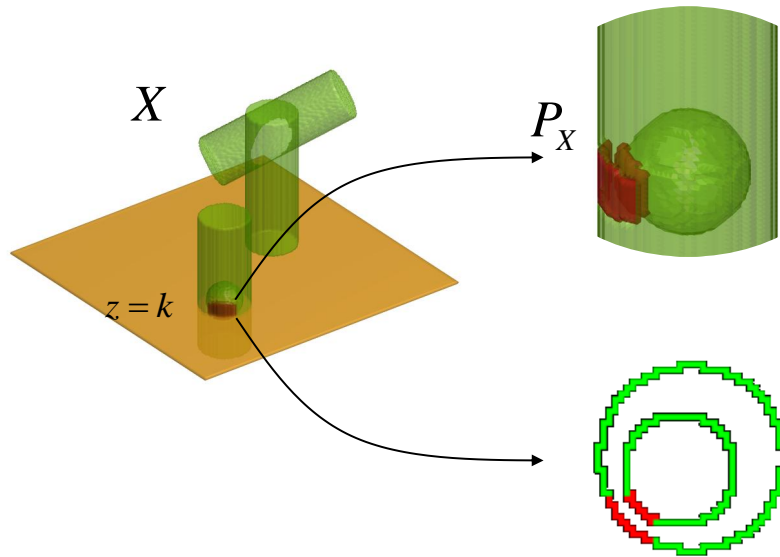
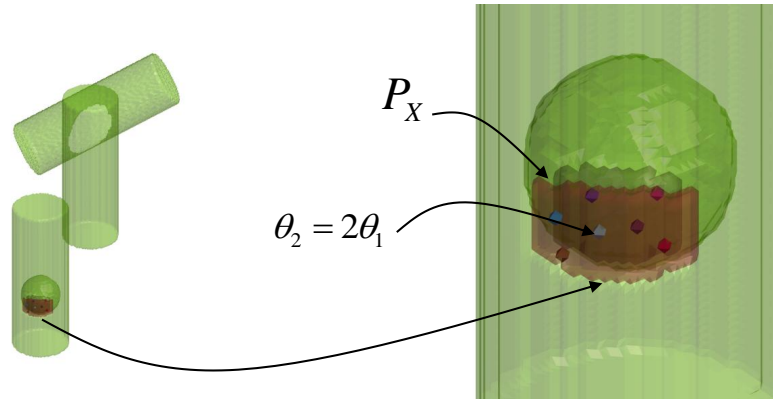


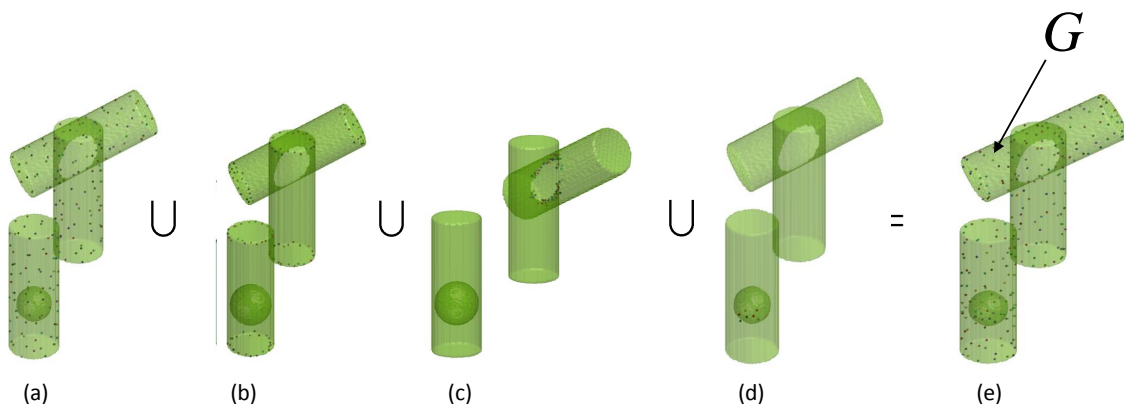
FIGURE IV.6 – Localisation morphologique de P_X .

La taille des zones fines est définie par le rayon r de la boule $B(r, x)$, r peut être une constante définie par l'opérateur ou une variable déduite des composantes morphologiques de l'image que l'on peut obtenir, par exemple, par granulométrie par ouverture (procédure détaillée dans l'annexe A).

On implante une densité $\theta_2 = 2\theta_1$ sur les surfaces de P_x (Fig.IV.7) .


 FIGURE IV.7 – Densification locale sur P_x .

Le résultat de l'implantation est l'union ensembliste de l'ensemble des processus ponctuels G réalisés à la surface des objets.


 FIGURE IV.8 – (e) Union des processus ponctuels G sur $\partial^-(X)$ issus du (a) hit and run 3D global de X , de (b) $front(X)$, de (c) $front(X^c)$, et de (d) P_X .

On note que chacune des implantations réalisées séquentiellement est dépendante de la précédente. Lorsque l'on réalise un premier processus ponctuel, celui-ci possède en chacun de ses points une zone de répulsion qui évite, lors du processus suivant, l'implantation de nouveaux points dans leur environnement immédiat. Cette protection est importante car la distance entre les germes va conditionner par la suite la forme des triangles de la future triangulation. Les points trop proches ou alors fusionnés ne sont pas acceptables car ils vont conduire à l'établissement local de triangles de mauvaise qualité. Cette précaution prise, il est possible de réaliser l'union ensembliste des images des différentes implantations.

Cette étape marque la fin de l'analogie fonctionnelle possible entre la procédure établie en 2D et les fonctions qui seront nécessaires, dans la suite de l'étude, à la réalisation d'une triangulation morphologique d'une microstructure 3D biphasée.

IV.3 Problématique liée à la triangulation des points de surface

En 2D, nous avons utilisé la triangulation de Delaunay afin de relier les points d'un processus ponctuel par des 2-simplexe. Elle permet la construction directe d'une triangulation en optimisant la forme des triangles. Elle maximise la taille des arêtes les plus petites tout en minimisant les angles de chacun des triangles que nous avons étudiés au chapitre I.2.2.6. La complexité curviligne en 2D est définie sur la ligne du contour de chacun des objets de l'image. Ainsi, un parcours vectoriel de la surface suffit à définir une triangulation de Delaunay interne à l'objet.

En 3D, la complexité curviligne n'est plus une ligne mais la surface des objets définissant ainsi le champ 3D sur lequel, sur un échantillonnage de points, nous construisons notre triangulation morphologique.

Une surface curviligne en trois dimensions ne peut plus être définie simplement par une description vectorielle afin de réaliser une triangulation de Delaunay. D'autant plus que nous avons étudié, au chapitre I.3.2.2, que la condition de la sphère vide nécessaire à la triangulation de Delaunay 3D contrainte est délicate à appréhender et parfois, elle n'est pas définissable sans ajout de points de Steiner.

Nous rappelons que, comme en 2D, il est tout aussi délicat de construire une triangulation directe par une métrique euclidienne car le voisin le plus proche n'est pas forcément le voisin effectif; cela est possible que si la distance entre deux points de triangulation est inférieure à la courbure locale de l'objet.

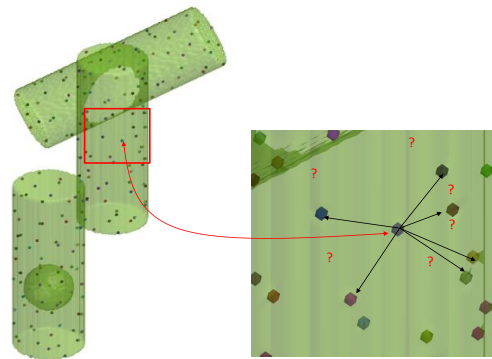


FIGURE IV.9 – Localisation du plus proche voisin.

La recherche du plus proche voisin d'un point de surface sera réalisée par une approche indirecte avec le digramme de Voronoï.

IV.3.1 Problématique liée à la construction du dual Voronoï/Delaunay

Sous certaines conditions, que nous évoquons, le graphe de Delaunay peut se déduire du graphe du Voronoï. On dit que ces deux triangulations sont géométriquement duales.

La triangulation de Delaunay peut se construire directement par adjacence de cellules de Voronoï.

$$DEL(g, X) = \{(g_i, g_j) \in X / Vor_X(g_i) \cap Vor_X(g_j) \neq \emptyset\} \quad (IV.4)$$

On note que l'équation Eq.(IV.4) symbolise une intersection alors que les cellules sont simplement adjacentes.

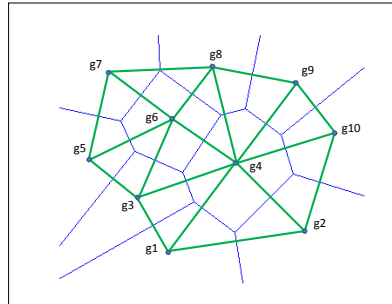


FIGURE IV.10 – Graphe de Delaunay 2D.

Par exemple, le segment ou l'arête $[g_1g_2]$ est construit par adjacence de leur cellule respective. Cette représentation établit la triangulation des germes qui sont les sommets d'un triangle élémentaire par exemple $g_1g_4g_2, g_{10}g_4g_9, \dots$ (Fig. IV.10).

M.Eck définit trois conditions pour réaliser ce passage dual [Eck et al., 1995] :

- Deux régions de Voronoï n'ont qu'une frontière commune,
- Les régions de Voronoï se rencontrent par trois,
- Chaque région de Voronoï est homéomorphe à un disque en 2D ou une sphère en 3D.

IV.3.1.1 Condition de la frontière commune unique

Cette première condition est liée à la convexité des cellules. Si les cellules ne sont pas convexes elles peuvent partager plusieurs frontières communes ; dans ce cas, l'unicité de la triangulation duale ne peut plus être garantie car par exemple, le triangle $g_1g_2g_4$ se superpose avec $g_2g_3g_4$ (Fig. IV.11.a). Cependant, dans des situations où la concavité des formes est plus prononcée, un dual unique peut être établi alors que la condition de frontière commune n'est pas respectée (Fig. IV.11.b).

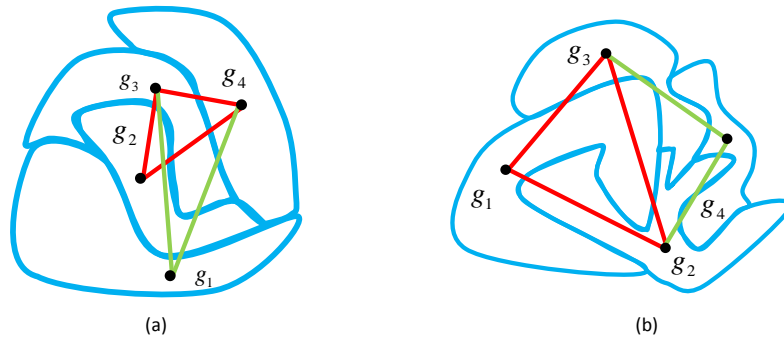


FIGURE IV.11 – (a) Concavité des cellules, (b) concavité beaucoup plus importante des cellules.

Le lien entre la convexité et l'établissement d'un dual géométrique est délicat à établir [Poincaré, 1905], [Loeb, 1986].

Le diagramme de Voronoï doit être construit sur la notion d'unicité de la distance géodésique entre deux points sur la surface. En 2D, comme en 3D, cette la condition sur ce graphe est toujours assurée même dans le cas discret. On note que dans une trame discrète les imprécisions numériques de calculs induisent quelques écarts de convexité entre la définition idéalisée d'un polygone (Fig.IV.12.a), et sa représentation dans une matrice image composée de pixels 2D ou voxels 3D (Fig.IV.12.a) . Ces écarts sont inversement proportionnels à la taille des cellules discrétisées. Ils sont relativement faibles pour des cellules de dimensions suffisantes.

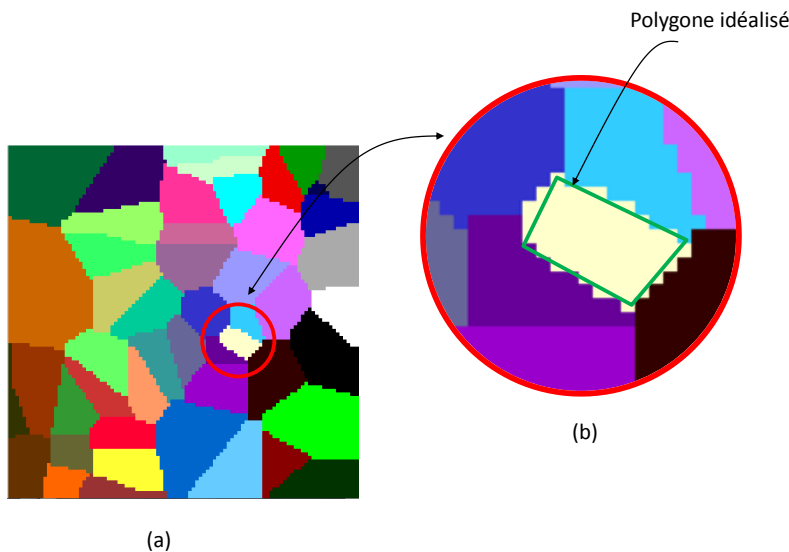


FIGURE IV.12 – Diagramme de Voronoï 2D discret

En revanche, dans notre cas, le champ de répartition est la surface des objets sur laquelle l'unicité des géodésiques entre deux points n'est plus garantie par la topologie locale. La convexité, qui est un critère fort dans l'établissement du dual unique, ne peut plus être établie simplement.

L'unicité des géodésiques est fortement fonction de l'échantillonnage des points suivant leurs nombres mais aussi leurs positions.

Dans le cas où X n'est plus un sous ensemble de \mathbb{R}^2 mais une surface régulière de \mathbb{R}^3 contenant une bosse (même de faible amplitude), si l'on prend deux points a et b antipodiques à cette bosse, il existe deux géodésiques Γ_1 et Γ_2 joignant ces points, chacune contournant d'un côté de cette bosse et définissant le plus court chemin de a à b contraint par X (Fig. IV.13). Il n'y a pas d'unicité géodésique dans ce cas.

De même, pour la convexité géodésique de d_X , soit x un point de Γ_1 et y un point de Γ_2 , On appelle Γ_{xy} une X -géodésique entre x et y et $z \in \Gamma_{xy}$

On peut avoir $d_X(a, z) \geq \max [d_X(a, x), d_X(a, y)]$ (Fig. IV.13)

de sorte que $z \mapsto d_X(a, z)$ n'est pas géodésiquement convexe au sens de la démonstration de F.Maisonneuve et CH.Lantuéjoul [F.Maisonneuve and Ch.Lantuéjoul, 1984].

Il existera toujours deux géodésiques possibles entre a et z . La notion d'unicité géodésique comme critère pour établir la convexité n'est plus applicable.

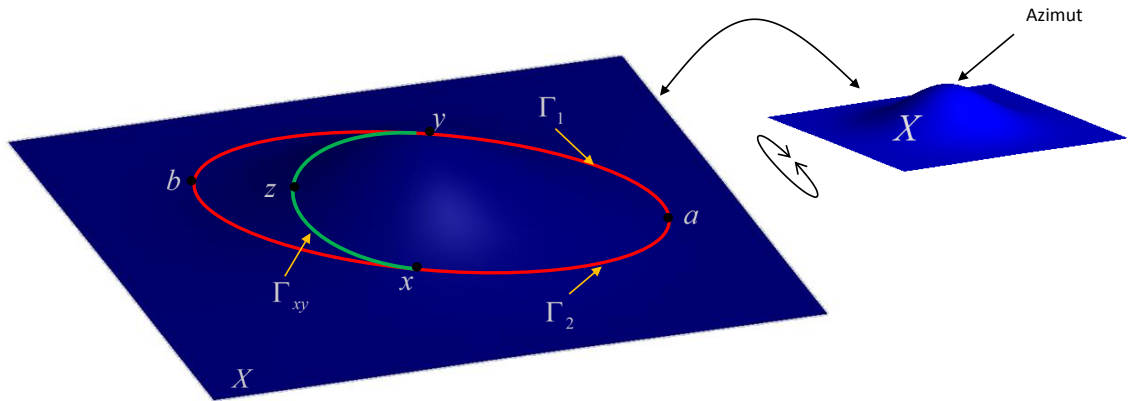


FIGURE IV.13 – Non unicité des géodésiques.

Voici un exemple où une zone d'influence n'est pas géodésiquement convexe, si :

$$\begin{aligned} d_X(a, x) &< d_X(b, x) \\ d_X(a, y) &< d_X(b, y) \\ d_X(a, z) &> d_X(b, z). \end{aligned}$$

Cela implique que x et y sont dans la zone d'influence de a , tandis que $z \in \Gamma_{xy}$ est dans celle de b et non de a

Enfin, il existe un cas limite de non unicité si l'on prend comme surface X une sphère dans \mathbb{R}^3 (compacte et simplement connexe). Soit a et b deux points antipodiques, il existe une infinité de géodésiques entre a et b constitués de tous les demi-grands cercles d'extrémité a et b .

La propriété de convexité des zones d'influences ne subsiste plus dans le contexte géodésique. On ne peut considérer la convexité comme critère à la

construction d'un dual du diagramme de Voronoï.

La triangulation de surface est une opération très délicate dans notre cas les surfaces sont représentées par un nuage de points dont la formulation explicite est bien souvent inconnue.

Pour des formes simples comme une sphère, H.S Na établit une formulation d'un Voronoï géodésique [H-S. Na and Cheong, 2002], et K.Sugihara définit une partition de Laguerre (variante du diagramme de voronoï) [Sugihara, 2002]. H.Hu établit un diagramme de Voronoï pour une ellipse [Hu et al., 2014].

Lorsque la surface est représentée par une équation plus complexe, la triangulation devient plus problématique, par exemple pour des surfaces de Riemann, G.Leibon et D.Letscher définissent une formulation d'un diagramme de Voronoï construit à partir de géodésiques uniques établies sur des points de densité suffisante sur surface [Leibon and Letscher, 2000]. Ce diagramme est construit exactement de la même façon que dans l'espace euclidien. Il en hérite donc de la plupart de ses propriétés. L'unicité de ces géodésiques permet d'assurer la convexité de l'ensemble des cellules du Voronoï. Ainsi par dualité géométrique, ce diagramme permet d'établir directement la triangulation de Delaunay. Kunze et Rauch définissent des *courbes médiales* qui conduisent à une définition du Voronoï géodésique sur une surface lorsqu'elle est définie par une formulation paramétrique [Kunze et al., 1997], [Henning Naß and Dogan, 2007] sur laquelle P.Georges établit une formation analytique d'un maillage [George and Borouchaki, 1997]. Cependant, les auteurs préconisent une grande vigilance quant au calcul de la distance géodésique sur une surface non plane afin d'en définir un Voronoï. En effet, le concept de la convexité géodésique d'une surface tridimensionnelle est délicat quelle soit simplement connexe ou non. L'établissement d'un graphe de Voronoï doit fortement être soumis à des conditions d'échantillonnage pour que chaque point de la surface soit inclus dans sa propre zone d'influence.

C'est la raison pour laquelle D.Lieber suggère, pour une formulation explicite, une implantation de germes d'une densité suffisante pour que l'unicité des géodésiques soit respectée. Cependant leurs localisations est difficilement appréhendable car elle est dépendante d'une topologie locale parfois difficilement mesurable. Ce problème est évoqué par R.Kunze lorsque la surface est représentée par deux bosses étroites sur un plan [Kunze et al., 1997]. Dans ce cas, il est possible d'imaginer une implantation de points autour de chacune des bosses mais dans d'autre configuration, ce problème peut être plus délicat à considérer.

Le passage dual du Voronoï, lors de l'établissement d'un graphe de Delaunay par exemple, n'est pas aussi simplement définissable qu'en 2D où la convexité des cellules est toujours vérifiée, comme le démontre F.Maisonneuve et C.Lantuéjoul [F.Maisonneuve and Ch.Lantuéjoul, 1984].

S.Cabelo étudie la complexité de l'établissement d'un Voronoï géodésique d'ordre supérieur [Cabello et al., 2009]

IV.3.1.2 Adjacence sur un point de trois cellules

Cette deuxième condition est liée à l'établissement d'un dual du Voronoï. Dans certaines configurations d'implantation, il est possible que sur quatre points du Voronoï, deux triangles satisfassent la condition du cercle inscrit de Delaunay et se superposent. Ces quatre points sont dit cocycliques. Ces cas sont rares dans le cas continu où il existe beaucoup d'algorithmes de perturbation des coordonnées pour éviter cette situation. C.Börger propose une approche analytique [Börger, 1990], J.Dardenne propose une recherche de cycle minimal pour une configuration de trois ou quatre points cocycliques. D.Bolchava fusionne le centre de 6 points cocycliques. Dans une trame discrète, ces cas peuvent facilement et fréquemment se produire et l'on rencontre parfois plus de quatre points cocycliques.

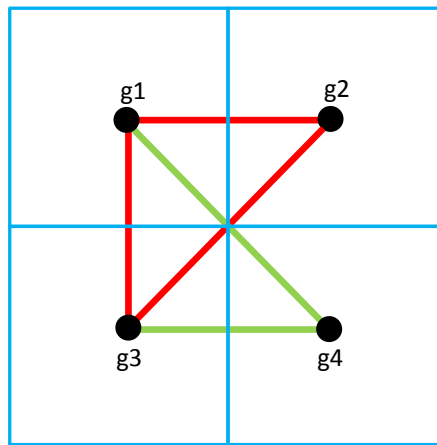


FIGURE IV.14 – Cocyclicité.

Il y a donc ambiguïté dans la construction du dual géométrique. La figure IV.14, indique que les germes g_1, g_2, g_3, g_4 , sont cocycliques. Le triangle $g_1g_2g_3$ se superpose avec le triangle $g_2g_3g_4$ (Fig.IV.14).

IV.3.1.3 Homéomorphisme à un disque en 2D ou une sphère en 3D

L'homéomorphisme est la bijection réciproque entre la cellule et une sphère. Cette troisième condition assure que la triangulation est une surface fermée c'est-à-dire sans bord, c'est notre cas ici.

IV.3.1.4 Synthèse sur la problématique du passage dual Voronoï/Delaunay

Le passage dual de la triangulation de Voronoï est très délicat à appréhender. Il dépend de la localisation des germes sur X et des ambiguïtés de cocyclicité peuvent apparaitre. Il existe plusieurs méthodes pour palier à ces problèmes, toutefois leur robustesse est difficilement quantifiable dans des cas réels d'images expérimentales. Par la suite, au chapitre V, nous montrerons que la triangulation de Delaunay ne peut être adaptée à une étude

de triangulation de surface ouverte car ce graphe comporte des situations paradoxales sur les bords d'une surface.

IV.4 Définition d'un graphe interne aux cellules du Voronoï

IV.4.1 Le graphe-M

Sur la base d'un diagramme de Voronoï, il est possible de définir une triangulation non plus par adjacence des cellules voisines mais sur le rapport qui existe entre une cellule, son centre et les différents points de jonction (nœuds) des cellules qui lui sont mitoyennes.

Ce graphe a été élaboré lors de cette étude en étroite collaboration avec Francis Maisonneuve de l'Ecole des Mines de Paris (graphe-Maisonneuve).

Nous reviendrons, au chapitre V, sur une définition du graphe-M adapté à la triangulation de surface ouverte. Dans le cas d'une surface fermée, il se décrit par sa composition géométrique car il est composé de sommets et de segments :

- **les sommets** : Il y a deux sortes de sommets : Les sommets $\{g_1, \dots, g_n\}$ en sont les points de départ sur la surface, ils sont aussi les germes du diagramme de Voronoï associé ; et les sommets $\{x_1, \dots, x_n\}$ du Voronoï, c'est-à-dire les points triples (ou plus) des frontières entre cellules mitoyennes.

- **les segments** : Les arêtes sont les segments $[x_i x_j]$ où x_i et x_j sont voisins sur la frontière d'une même cellule de germe g_i du Voronoï, ainsi que les segments $[g_k x_i]$ et $[g_k x_j]$. Cette triangulation est approximativement 3 (à 4) fois plus fine que celle de Delaunay sur les g_k . En effet, une densité de germes θ produit 2θ sommets (en moyenne 6 sommets par polygone et chaque sommet est commun à 3 polygones), donc 2θ triangles de Delaunay, tandis que chaque polygone produit en moyenne 6 triangles.

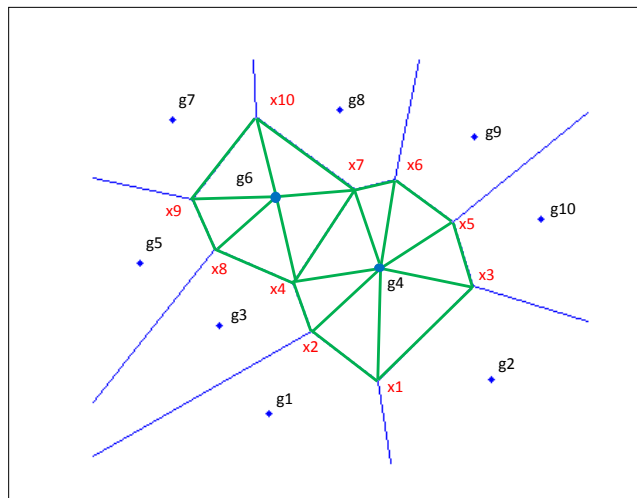


FIGURE IV.15 – Graphe-M.

Dans le plan euclidien, elle n'est pas perturbée par des triplets alignés ou des quadruplets cocycliques qui ne peuvent exister dans cette configuration (considérant un réseau

à mailles carrées de g_k). Les triangles ainsi déterminés ne se chevauchent pas, sans avoir à faire d'hypothèses de convexité ou d'unicité géodésique. Par ailleurs, le problème de l'unicité géodésique se lève de lui-même puisque, par construction, c'est la même géodésique qui est utilisée pour former deux triangles "adjacents". Cela suffit à garantir le non chevauchement des triangles.

Les triangles situés sur le « bord » du graphe ne sont pas définis. En effet, les cellules issues de g_9 ou de g_{10} ne sont pas complètes. Ce problème disparaît de lui-même si on travaille sur une surface-bord d'un compact de \mathbb{R}^3 .

Les triangles issus de ces cellules peuvent avoir un caractère non conforme à un calcul éléments finis. Nous rappelons que notre but ici est uniquement d'exprimer la justesse de la triangulation morphologique par rapport à la surface des objets. L'adaptation de la triangulation à un calcul pour établir un maillage, sera réalisée par la suite en « post traitement » par des logiciels adaptés.

IV.4.2 Composantes nécessaires à la construction du graphe-M

Dans le cas d'une surface curviligne d'objets d'une image tridimensionnelle biphasée, afin de réaliser le graphe-M, il est donc nécessaire de construire le Voronoï géodésique de cette surface. Le graphe de Voronoï défini par une métrique euclidienne devra être contraint par une métrique géodésique. La triangulation sera obtenue par l'application du graphe-M sur l'ensemble des cellules de ce Voronoï.

Les trois composante du graphe-M sont :

- Construction du diagramme de Voronoï géodésique,
- Définition des zones remarquables sur ce graphe,
- Définition d'un parcours géodésique pour établir les éléments de la triangulation du graphe-M.

IV.5 Construction morphologique du Graphe-M

IV.5.1 Diagramme de Voronoï géodésique et fonction distance géodésique

Nous avons observé que le calcul du Voronoï géodésique n'est pas atteint directement par calcul des géodésiques ; en revanche, la propagation d'une dilatation peut être contrainte par un ensemble X .

Dans le cadre de notre étude même si la variété sous-jacente n'est pas connue, elle est représentée et ordonnée de façon discrète (voxel) dans un champ fini (image) sur laquelle nous pouvons utiliser des opérateurs morphologiques.

On applique aux germes de surface, établis par les différents processus ponctuels, une opération de dilatation géodésique.

La dilatation géodésique est croissante et extensive, chaque itération n de $\delta_X^n(X)$ si elle est isotrope, représente une iso-distance au germe. L'union des lieux de rencontre

de l'ensemble des dilatés représente les frontières de cellules contenant les germes. Pour un processus ponctuel, beaucoup de concepts morphologiques convergent vers le même résultat. Dans ce cas particulier, les cellules de cette dilatation géodésique appelée fonction distance coïncident avec les frontières des cellules du Voronoï géodésique.

Pour un processus ponctuel, l'établissement des frontières entre les germes peut être établi par le calcul de la fonction distance (Chap. II.7.3), sur le complémentaire de l'image. Dans ce cas, les frontières ainsi définies sont celles établies par le diagramme de Voronoï [Schmitt and Mattioli,]. Les cellules construites dans ce cas sont donc, par définition, convexes (Fig. IV.16).

D'après l'équation (II.36), la fonction distance est établie par une famille de disques pour que sa progression soit isotrope.

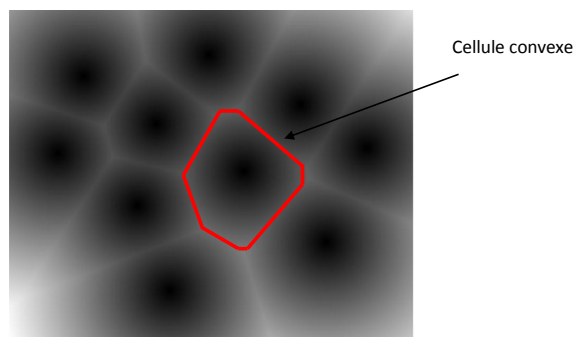


FIGURE IV.16 – Convexité des cellules de la fonction distance.

IV.5.1.1 Cas géodésique

La propagation de la fonction distance est donc uniforme en 2D et en 3D ; elle couvre l'ensemble de l'espace du champ de l'image (Fig. IV.17).

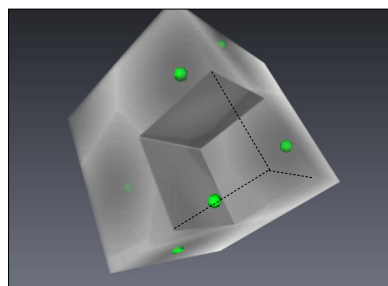


FIGURE IV.17 – Fonction distance 3D euclidienne.

Comme en 2D, la mesure de la distance est contrainte par X , $d(x, y)$ devient $d_X(x, y)$ avec $d_X(x, y) = l(C_{XY})$

Contrainte par X , la propagation de la fonction distance se réalise itérativement (Fig.IV.18.a) sur la surface des objets de l'image jusqu'à idempotence (Fig.IV.18.b). La fonction distance devient identique à la fonction de la distance géodésique et le bassin versant devient identique au squelette par zone d'influence [Meyer, 1994].

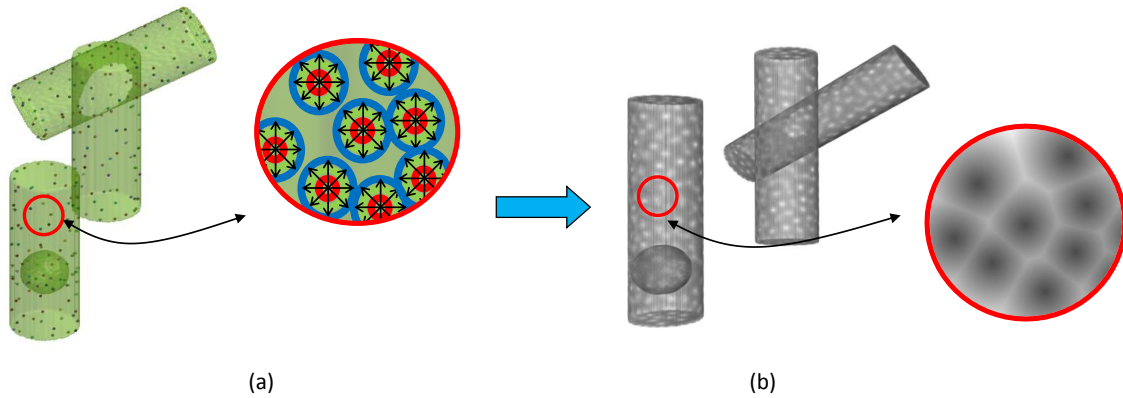


FIGURE IV.18 – Fonction distance géodésique.

Dans les étapes suivantes, l'apport de la géodésie n'est plus utile car seule la propagation de la fonction distance nécessite une contrainte géodésique nous ne distinguerons uniquement que les cas 2D et 3D. On note que par cette méthode la réalisation d'un Voronoï géodésique peut être établi sur toute surface quelle que soit sa topologie, elle peut contenir des points selles, et n'est pas nécessairement lisse et contenir un « bruit numérique ». Ainsi l'établissement de ce Voronoï est beaucoup moins dépendant de la condition d'injectivité de Jordan, le caractère extensif de la dilatation géodésique construit le Voronoï sur la totalité de la surface.

IV.5.2 Lieux remarquables de la fonction distance

Les différentes composantes qui seront utilisées pour une triangulation se dessinent sur cette fonction (Fig.IV.19) :

- Les points multiples
- Les arêtes des cellules de Voronoï.

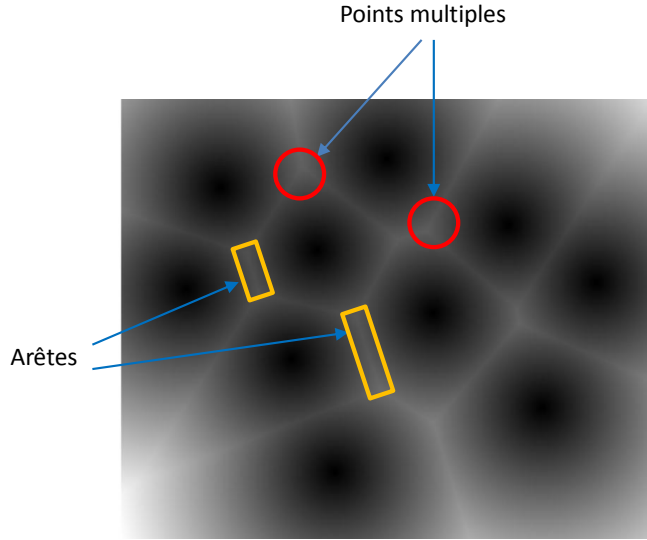


FIGURE IV.19 – Zones remarquables de fonction distance.

IV.5.2.1 Définition des points multiples sur la fonction distance

La vitesse unitaire constante de la propagation de la fonction distance implique qu'elle est lipschitzienne de rapport 1, ce qui signifie que les lignes de plus grande pente sur cette fonction ont une pente valant au plus 1. Les définitions suivantes permettent d'étudier les lignes où la pente est précisément égale à 1 Schmitt [Schmitt and Mattioli,]. Plusieurs composantes topologiques sont définies :

$$\begin{aligned}
 \forall x \in X \\
 \text{L'amont de } x &: Am(x) = \{y, \rho_{G(y)} = \rho_{G(x)} + d(x, y)\}, \\
 \text{L'aval de } x &: Av(x) = \{y, \rho_{G(y)} = \rho_{G(x)} - d(x, y)\}, \\
 \text{L'arête de } x &: Ar(x) = Av(x) \cup Am(x).
 \end{aligned}
 \tag{IV.5}$$

L'amont de X est un unique segment éventuellement réduit à x . L'aval de X est composé de un ou plusieurs segments dont l'une des extrémités est x . On appelle **points multiples** le point dont l'aval possède plusieurs segments.

Ces points sont aussi appelés maxima locaux m_f d'une fonction. Un point x du graphe est un maximum local si aucun chemin qui le joint aux autres points du graphe n'est strictement ascendant. Les maxima sont des parties connexes plates entourées de points situés tous plus bas. Ils sont souvent utilisés comme marqueurs morphologiques à une éventuelle reconstruction géodésique.

La localisation des maxima locaux de la fonction distance est réalisée par différence de f avec la reconstruction géodésique de f diminuée d'une constante c .

$$\gamma^{rec}(f; f - c) = \{\delta_f^{(n)}(f - c), n > 0\}
 \tag{IV.6}$$

Comme la plus grande pente est au plus égale à 1, il est d'usage pour une fonction distance de choisir $c = 1$ (Fig.IV.7) .

$$\gamma^{rec}(f; f - 1) = \left\{ \delta_f^{(n)}(f - 1), n > 0 \right\} \quad (IV.7)$$

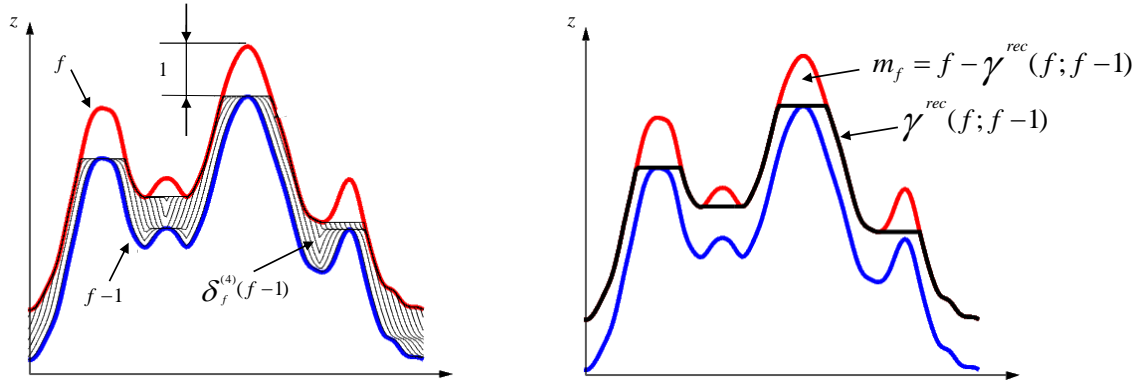


FIGURE IV.20 – Reconstruction géodésique de $f - c$.

L'image des maxima locaux ou marqueurs est le résultat de la différence entre f et la reconstruction de f diminuée de $c = 1$ (Fig.IV.21).

$$m_f = f - \gamma^{rec}(f; f - 1) \quad (IV.8)$$

Cas 2D

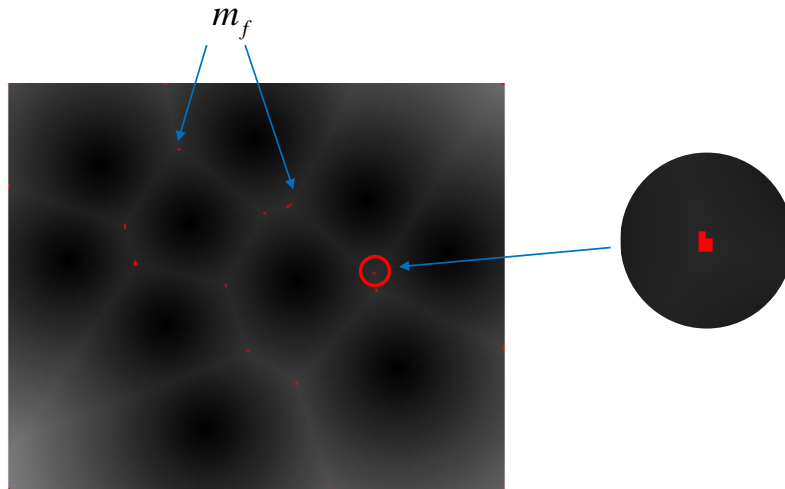


FIGURE IV.21 – Maximas locaux 2D.

En trame discrète, les imprécisions de calcul en virgule flottante de la fonction distance conduisent à l'établissement d'un point multiple par un ou plusieurs pixels ou voxels. Cela peut entraîner une fusion des points multiples proches. Le résultat de cette fusion sera considéré comme un unique point multiple lors de la construction du graphe-M.

Cas 3D

Comme pour le Voronoï 2D, on définit les points multiples (Fig.IV.22.b) comme étant les maximas locaux de la fonction distance géodésique (Fig.IV.22.a).

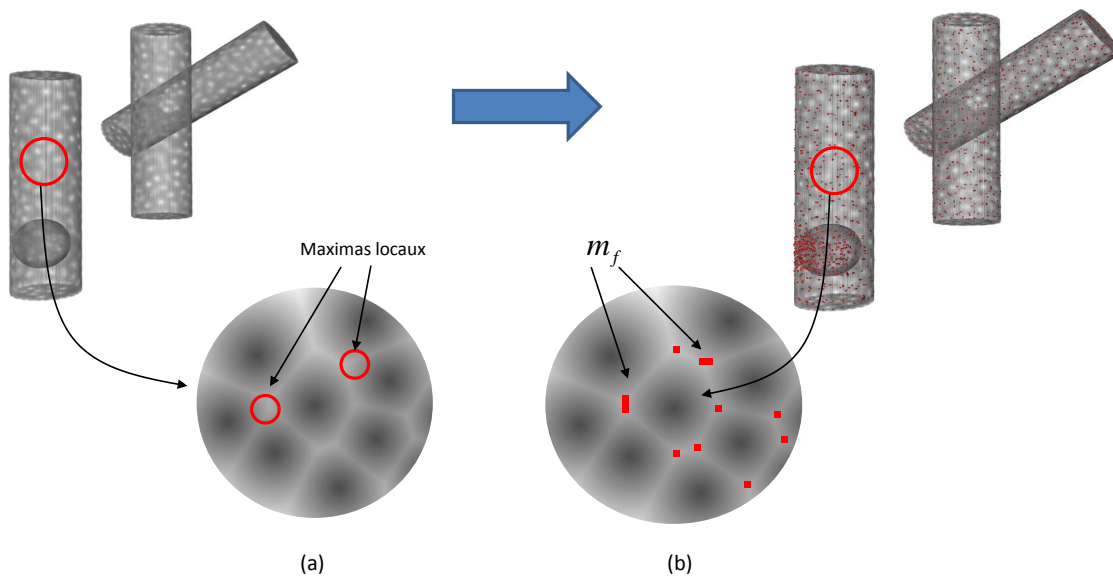


FIGURE IV.22 – Maximas locaux 3D.

IV.5.3 Définition d'un parcours géodésique associé aux cellules du Voronoï

L'ensemble de ces techniques permet, lorsque X est un sous ensemble de \mathbb{R}^2 , la définition des composantes morphologiques nécessaires à la définition du graphe-M. Ces outils sont définis dans \mathbb{R}^d qui permet leurs applications sur notre surface curviligne 3D.

Cas 3D

La ligne de partage des eaux (lpe) de la surface de l'image est par construction géodésique car elle est définie par itération successive de la propagation des minimas locaux le long des bassins versants de la fonction distance géodésique f .

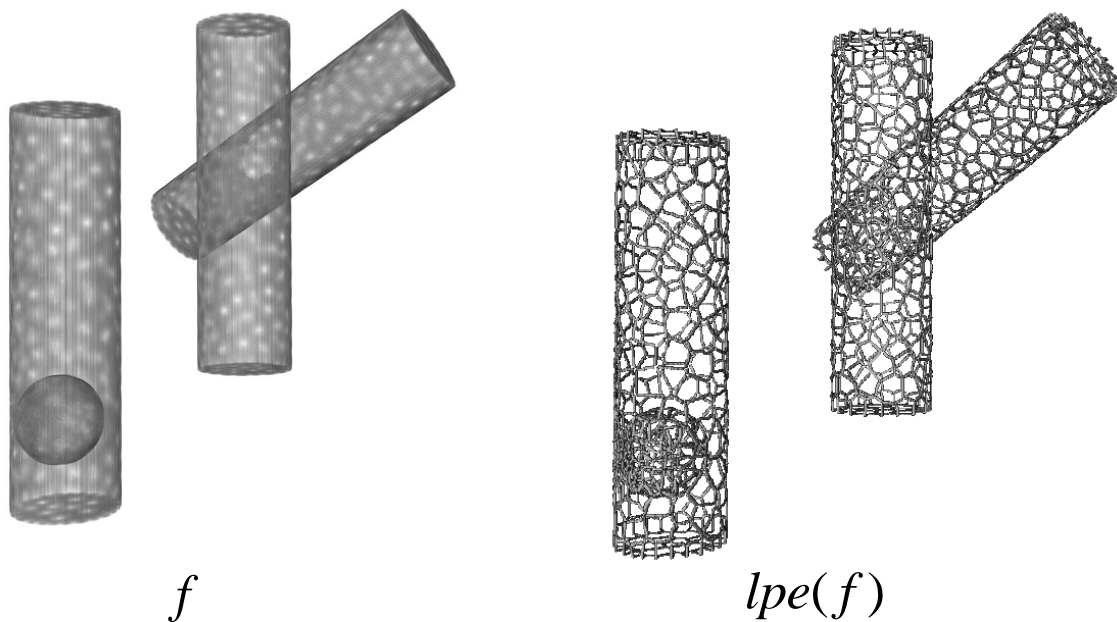


FIGURE IV.23 – lpe 3D de f .

La $lpe(f)$ représente l'ensemble des chemins géodésiques de l'image. Elle constitue un objet unique dont l'épaisseur est au moins égale à un voxel compte tenu de la parité des distances aux germes de l'image. Pour construire le graphe-M, il est nécessaire d'établir une relation d'appartenance entre une cellule de Voronoï et une partie des chemins établis par la $lpe(f)$ (Fig.IV.23) .

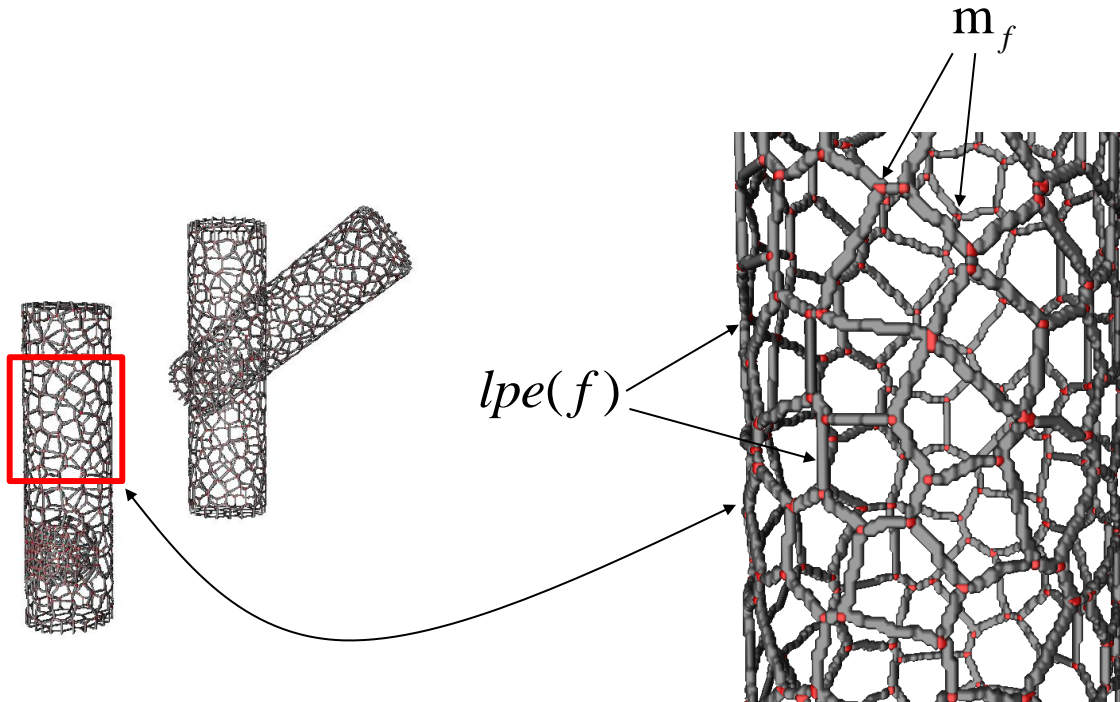


FIGURE IV.24 – Superposition des marqueurs sur la $lpe(f)$.

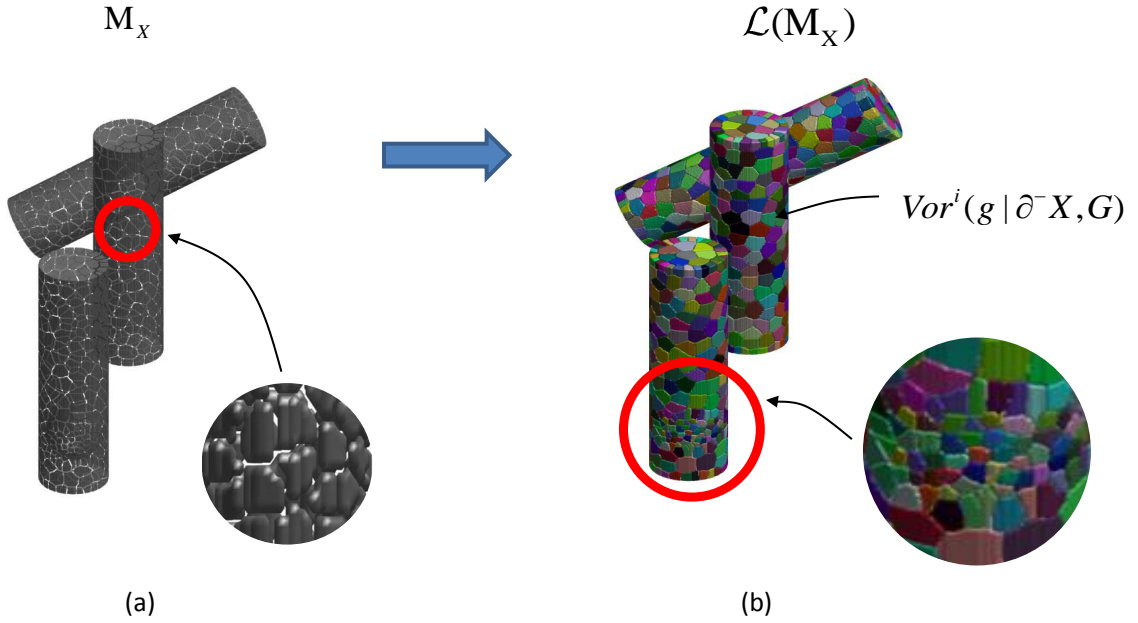
La superposition des deux images indique que tout le croisement de la $lpe(f)$ coïncide avec les maxima de la fonction distance m_i (Fig. IV.24).

IV.5.4 Labellisation des cellules de Voronoï géodésique

Pour définir le graphe-M sur chacune des cellules de Voronoï, l'image du contour de X , $\partial^-(X)$, est segmentée par l'image de la $lpe(f)$. M_X représente la décohésion de l'image binaire en cellules de Voronoï indépendantes non connexes entre elles :

$$M_X = \partial^-(X) \setminus lpe(f) \tag{IV.9}$$

Cette soustraction ensembliste conduit à la définition de cellules (Fig. IV.25.a), chacune localement, simplement et fortement connexe sur laquelle une valeur scalaire (label) lui est attribuée (Fig. IV.25.b). L'ensemble définissant l'image labélisée de M_X : $\mathcal{L}(\mathcal{M}_X)$


 FIGURE IV.25 – (a) Labéllisation $\mathcal{L}(\mathcal{M}_X)$, (b) cellules fortement connexes M_X .

La labéllisation $\mathcal{L}(\mathcal{M}_X)$ conduit à la définition d'une approximation du Voronoï géodésique du contour $\partial^-(X)$. Chacune des cellules $Vor_{\partial^-(X), G}^i(g)$ ou $Vor^i(g | \partial^-(X), G) \subset \partial^-(X)$ se présente sous la forme d'une sorte de polygone curviligne.

IV.5.4.1 Vérification de la qualité des polygones

Pour être utilisable dans la procédure du graphe-M, il est nécessaire que chacun des polygones $Vor^i(g | \partial^-(X), G)$ possède une dimension suffisante pour qu'un contour issu de la $lpe(f)$ puisse être établi. La distance de répulsion imposée par la boule $B(r, x)$ lors des différents processus ponctuels nous permet de garantir un diamètre équivalent $2r$ pour une cellule.

Toutefois, il est important de vérifier la dimension de chacun des polygones. La dimension d'une cellule peut être approximée par sa surface. Les cellules du Voronoï géodésique ont globalement les mêmes propriétés que dans le plan ; ce sont dans un espace curviligne, des sortes de « polygones » qui ont, dans le cas euclidien un nombre de côté moyen égal à 5. L'aire d'un polygone régulier est proportionnelle au nombre n et à la longueur de ses côtés c . On approxime c à une constante. Pour le calcul de la surface limite d'une cellule, on choisit $c = 2$. Une taille d'arête inférieure à deux voxels entraînera juste la fusion des deux points triples à son extrémité (Fig. IV.26).

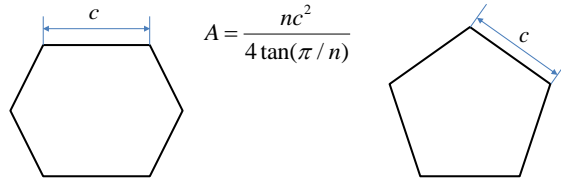


FIGURE IV.26 – Polygone.

Calcul du nombre moyen de côtés par cellule

Dans notre cas, l'image compte 576 cellules et le nombre de côtés moyen d'une cellule est calculé suivant l'historgramme de répartition du nombre de voisins par cellule (Fig.IV.27).

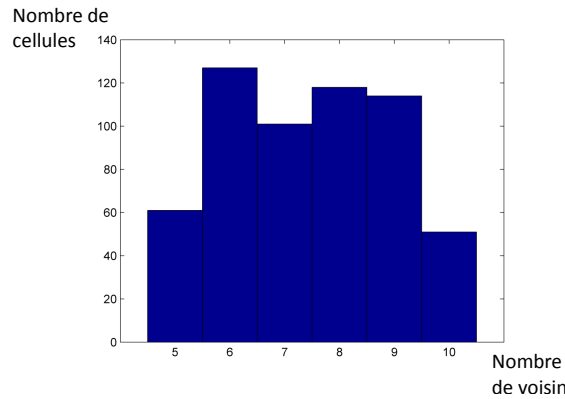


FIGURE IV.27 – Répartition des premiers voisins.

Le nombre moyen de voisins par cellule :

On estime que la longueur minimale d'une arête doit être égale à au moins 2 voxels pour définir une cellule. Dans ce cas, la surface minimale d'une cellule est :

$$A = \frac{7x^2}{4 \tan(\pi/7)} \simeq 15 \text{ voxels}$$

Nos cellules ont toutes une surface supérieure à la surface minimale acceptable.

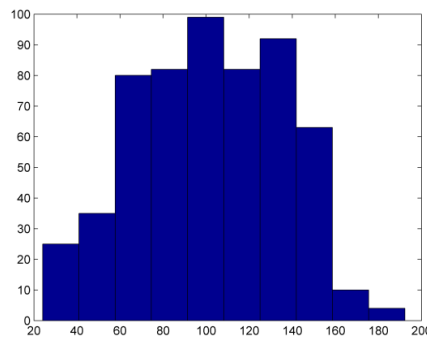


FIGURE IV.28 – Surface des cellules.

On note que l'historgramme n'est pas bimodal suivant les deux densités θ_1 et θ_2 car

le processus du calcul du plus proche voisin géodésique par la fonction distance permet d'assurer une transition progressive de la taille des cellules et confère à l'histogramme un aspect gaussien (Fig. IV.28).

IV.5.5 Définition du Graphe-M sur une cellule de Voronoï géodésique

Chacune des cellules $Vor^i(g|\partial^-(X), G)$ de $\mathcal{L}(MX)$ (Fig. IV.10.a) possède son propre chemin géodésique ∂X_i (Fig. IV.10.c) défini par l'intersection ensembliste du dilaté morphologique de la cellule et de la ligne de partage des eaux $lpe(f)$ (Eq.(IV.29).c).

$$lpe^i(f) = (Vor^i(g|\partial^-(X), G) \oplus B(r, x)) \cap lpe(f) \quad (IV.10)$$

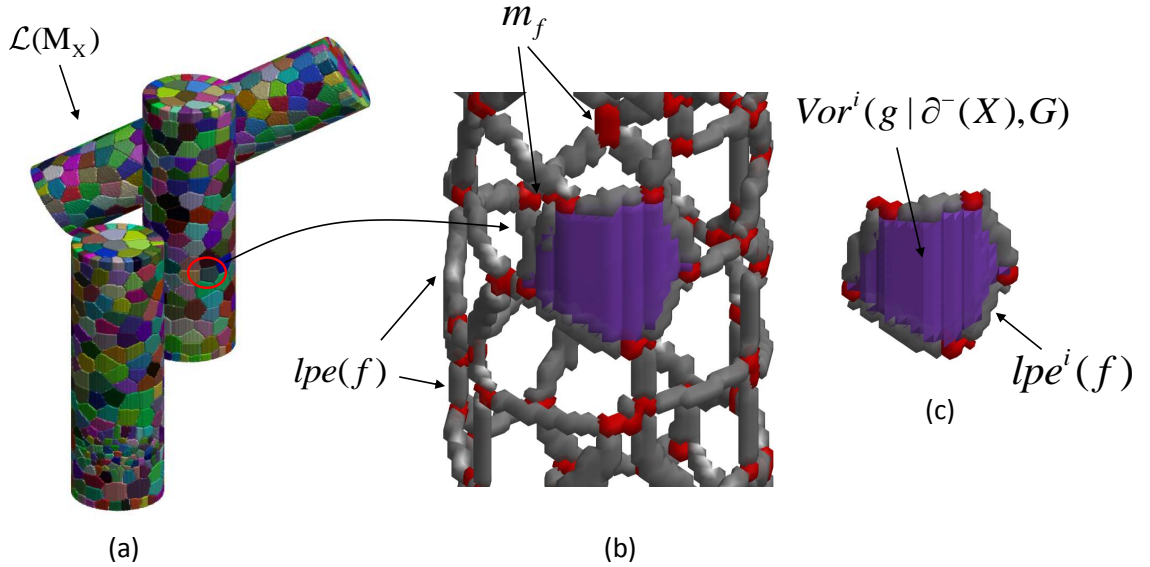


FIGURE IV.29 – Chemin géodésique sur les cellules.

Chaque cellule contient donc son propre chemin géodésique qui comporte un nombre fini de points "multiples" (Fig. IV.10.b). Pour assurer le caractère consécutif de la recherche des points multiples, la construction des triangles du graphe-M est réalisée par reconstruction géodésique itérative d'un point multiple à un autre sur la portion de la lpe adjacente à la cellule (Fig. IV.30.a). A chaque itération, on évalue l'intersection entre la dilatation géodésique itérative d'un point multiple avec le point multiple suivant. A chaque intersection non vide, un nouveau triangle t_i est défini entre les deux m_f^i mitoyens et le germe initial g_i de la cellule (Fig. IV.30.b).

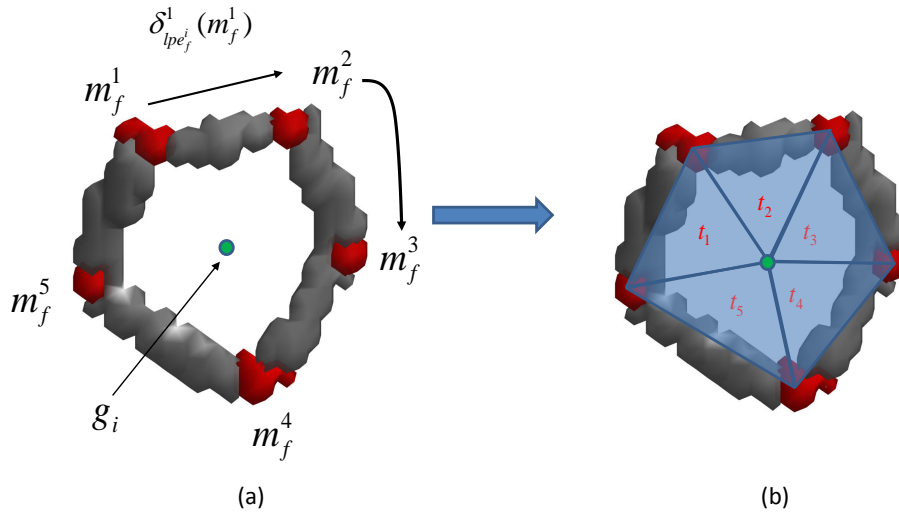


FIGURE IV.30 – Définition des triangles du Graphe-M.

Par construction, les triangles du graphe-M ne peuvent donc pas se superposer ; la mitoyenneté des cellules sur une surface fermée garantit la solidité de la triangulation car chaque arête est partagée avec deux autres triangles. On vérifie la solidité de la triangulation en calculant le nombre de voisins d'un triangle. Ce nombre doit être égal à trois pour une surface régulière de \mathbb{R}^3 simplement connexe et fermée.

IV.5.6 Conservation de la morphologie des arêtes du cylindre

L'implantation du processus ponctuel θ_2 sur $front(X)$ permet l'implantation le long de cette frontière de cellules jointives dont leur constitution s'étend de part et d'autre de cette frontière que l'on appelle "bord" de X (Fig. IV.31.a).

Cette frontière étant établie précédemment (section IV.2.2.2) par l'intersection du squelette et du contour de X , (Fig. IV.31.b).

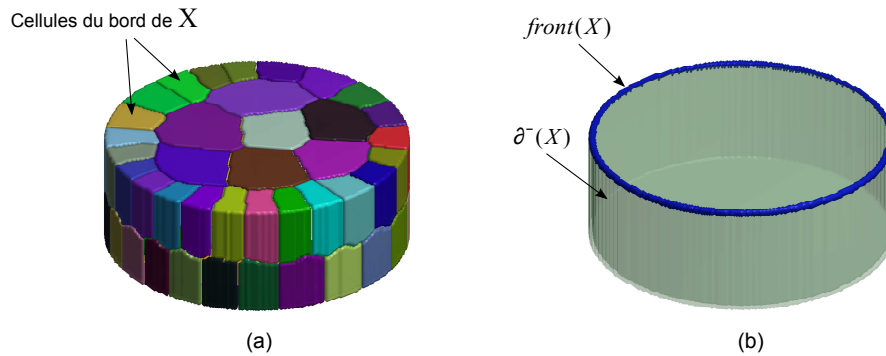


FIGURE IV.31 – (a) Cellules du bord de X , (b) superposition de la frontière ($front(X)$) et du contour de X ($\partial^-(X)$).

Afin de garder l'intégrité de la forme initiale, il est donc nécessaire qu'une base d'un triangle repose sur cette frontière. Pour réaliser cette opération, il suffit d'ajouter à l'en-

semble des minimas locaux de la lpe : m_f , les lieux d'intersection de la lpe avec la frontière de X : $front(X)$, appelés m_{brd} :

$$m_{brd} = lpe \cap front(X) \quad (IV.11)$$

La figure IV.32.a illustre la création de nouveaux nœuds inclus dans la lpe et dont le rôle sera strictement identique à celui des nœuds issus de maximas locaux de la fonction distance géodésique (Fig.IV.24).

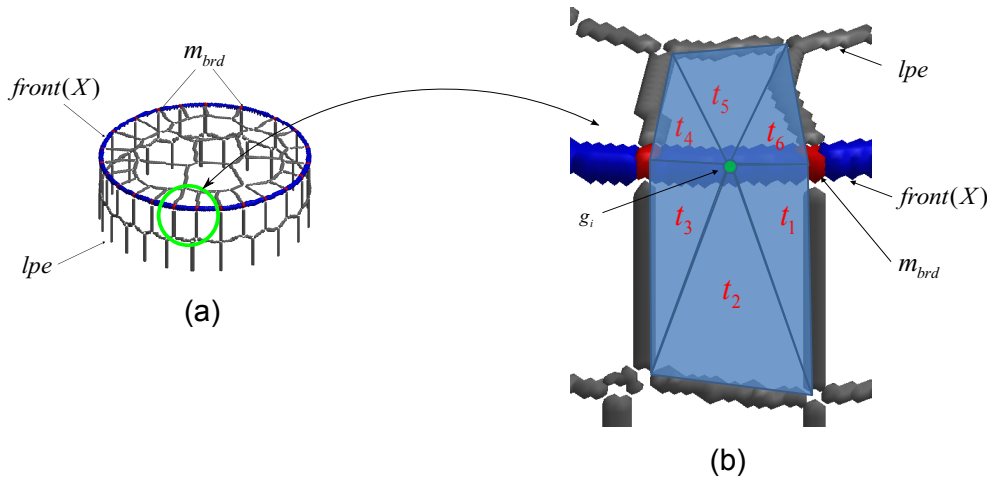


FIGURE IV.32 – (a) Points additionnels sur la lpe ., (b) Graphe-M sur une cellule appartenant à la frontière ($front(X)$).

La figure IV.32.b présente deux triangles mitoyens t_4 et t_3 , possédant une arête commune située exactement dans l'alignement local de $front(X)$, il en est de même pour les triangles t_6 et t_1 .

IV.5.7 Résultats de la triangulation

Les deux familles de nœuds de triangulation : m_f ainsi que m_{brd} sont réunies et on réalise le processus itératif du graphe-M sur l'ensemble des cellules de Voronoï jusqu'à obtenir la triangulation finale de $\partial^-(X)$: $T(X)$

La triangulation établie par le graphe-M du Voronoï géodésique est fidèle aux différentes densités des processus ponctuels θ_1 et θ_2 imposées par la morphologie des objets dont les singularités topologiques de surface ont été détectés conjointement par les différents squelettes de X ainsi que par la finesse relative des objets détectée préalablement (Fig. IV.33.a).

On note le respect des angles de la forme initiale. Les angles des bords des cylindres forment tous des angles à 90° , aux imprécisions de calcul en virgule flottante près (Fig. IV.33.b). La jonction entre les deux cylindres est constituée de triangles dont leurs bases

suivent la ligne de points selles (Fig. IV.33.c)

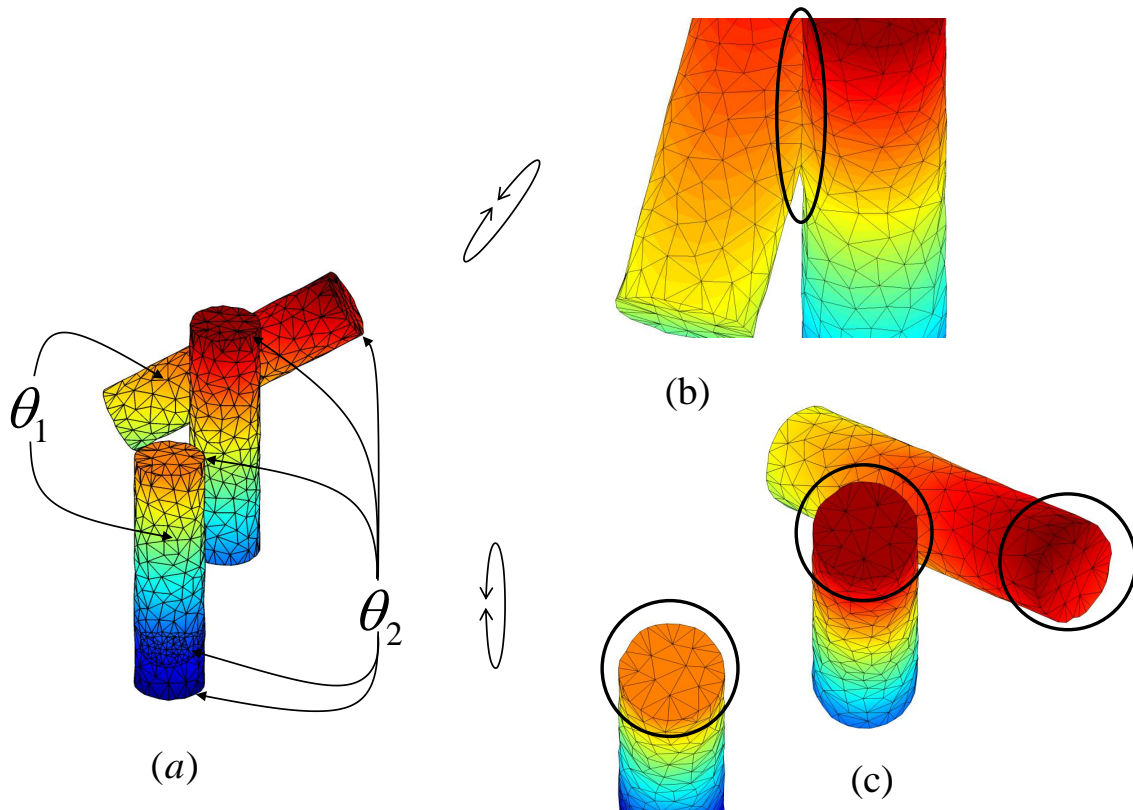


FIGURE IV.33 – Triangulation morphologique.

Les différentes densités des processus ponctuels ont conduit à une triangulation fidèle à la morphologie de X .

Le vide simulé par une sphère dans X conduit à une densification automatique localisée de la triangulation. Par ailleurs ce vide possède sa propre triangulation.

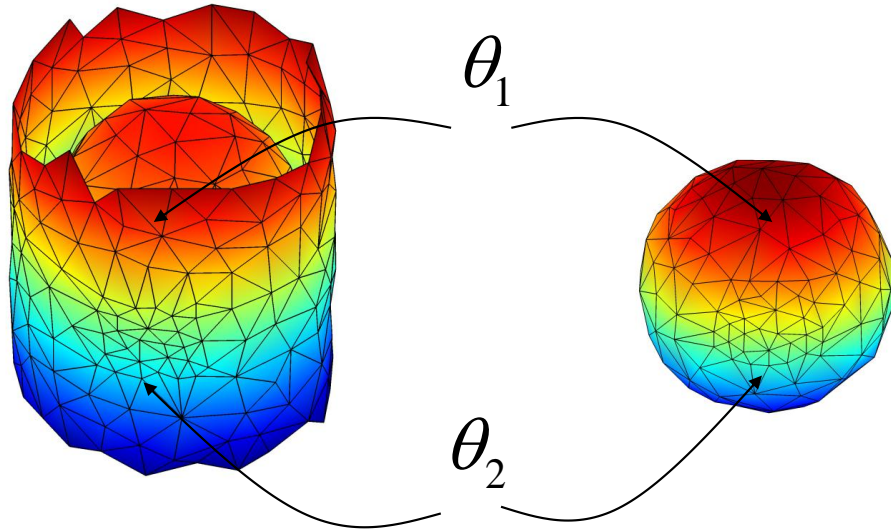


FIGURE IV.34 – Raffinement morphologique.

IV.5.8 Distance de Hausdorff 3D

L'expression de la distance de Hausdorff est établie sur la base d'opérations morphologiques, érosion, dilatation, qui sont établies sur \mathbb{R}^d . L'équation énoncée au chapitre III.1.10.2 est donc applicable en 3D où l'élément structurant est une boule B centrée en x et de rayon r :

$$D_H = d(\partial^-(X), T(X)) = \inf \left\{ \varepsilon, \partial^-(X) \subset \delta_{B(\varepsilon)}(T(X)), T(X) \subset \delta_{B(\varepsilon)}(\partial^-(X)) \right\} \text{(IV.12)}$$

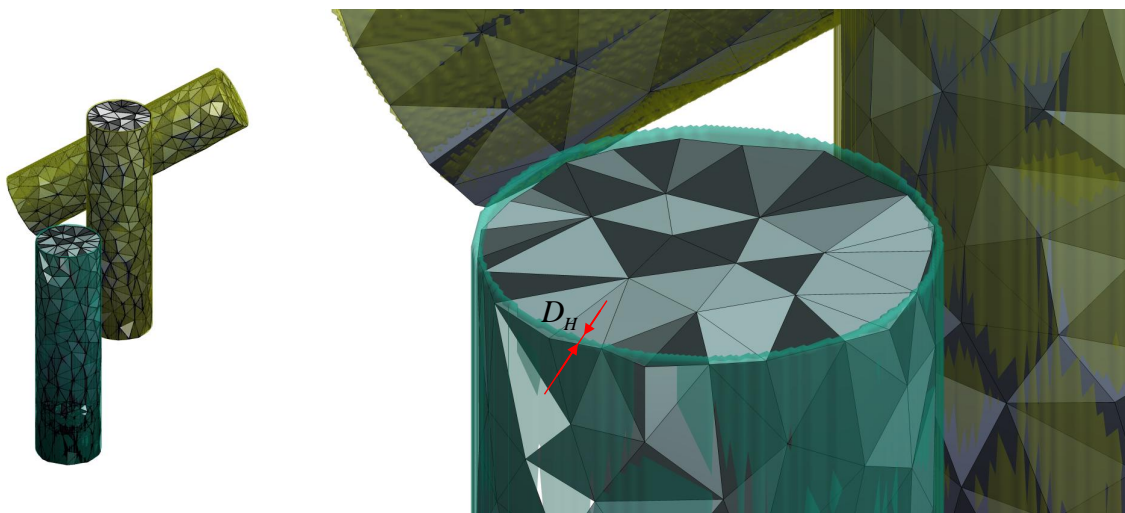


FIGURE IV.35 – Distance de Hausdorff 3D.

La faible distance de Hausdorff $D_H \leq 1$ est prévisible car chaque élément triangulaire

est construit sur la base d'une cellule de Voronoï construite à la surface de chaque objet ; par conséquent, aucun triangle ne peut être en dehors du périmètre formé par la ligne de partage des eaux de la fonction distance géodésique ni même en dehors de la surface de la cellule (Fig.IV.12).

IV.5.9 Organigramme de la triangulation morphologique d'une microstructure biphasée 3D

Nous présentons les différentes étapes de la procédure de maillage de microstructures biphasées 3D. La méthodologie est similaire à celle utilisée pour les images 2D jusqu'à la construction du Voronoï géodésique sur la surface de chacun des objets de l'image, qui permet la construction itérative de la triangulation de chacune des cellules par construction du graphe-M.

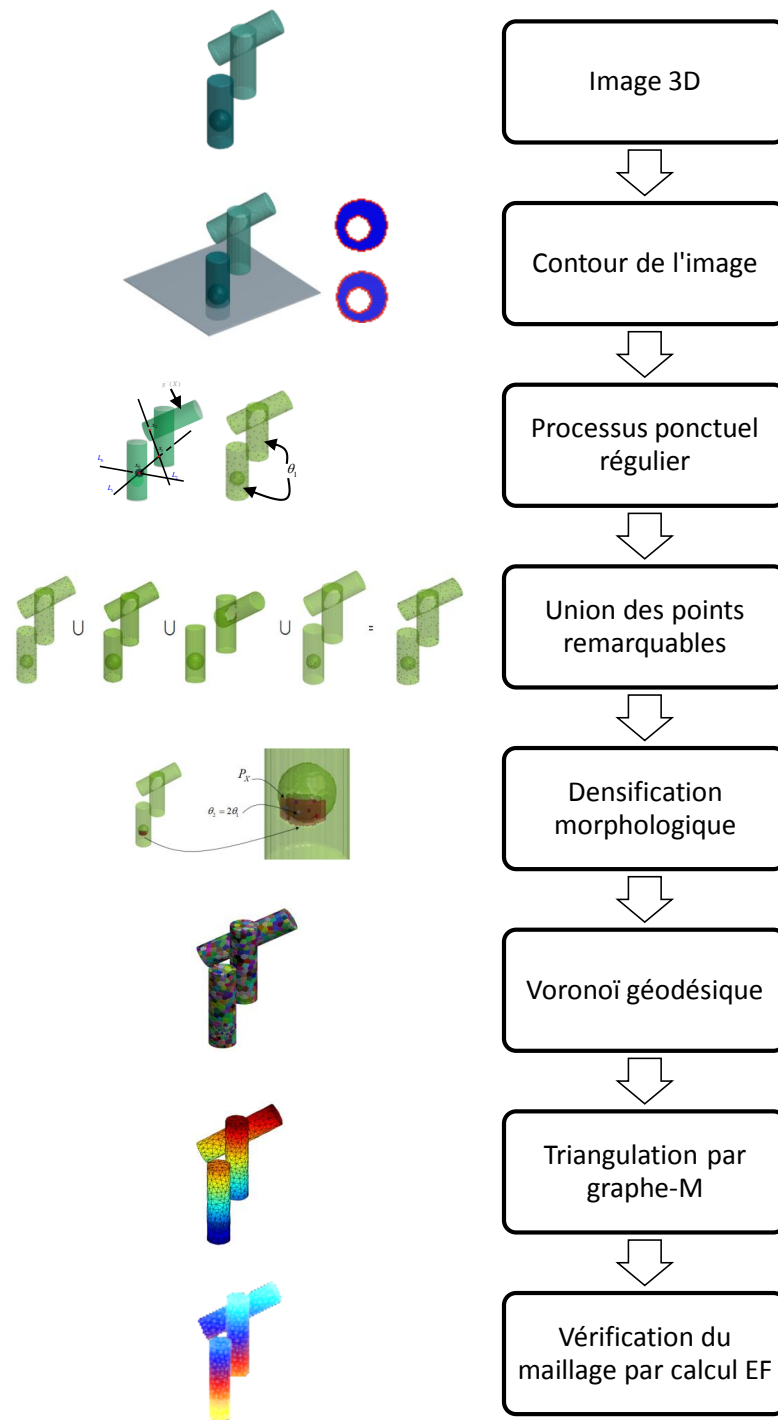


FIGURE IV.36 – Organigramme de la triangulation morphologique d'une microstructure biphasée 3D .

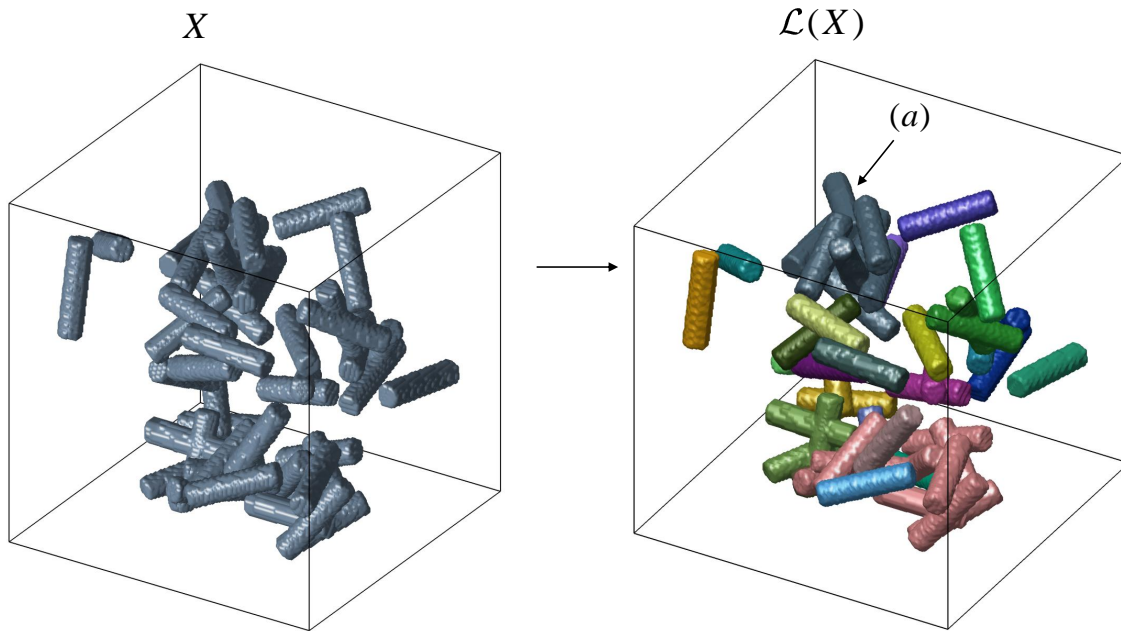


FIGURE IV.38 – Schéma booléen de cylindre.

IV.6 Généralisation de la méthode

IV.6.1 Génération de la microstructure 3D biphasée

Dans cette section, nous avons choisi de modéliser une microstructure biphasée d'un bloc de composite renforcé par des fibres courtes.

Nous plaçons un enchevêtrement de fibres modélisée par des cylindres dans une image. Pour garantir le placement aléatoire de chacun des objets nous utilisons la procédure du schéma booléen de cylindres dont la répartition géométrique suit un processus ponctuel évoqué au chapitre III.1.7. En chacun des points du processus ponctuel, on implante un cylindre orienté suivant deux angles ϕ_1 et ϕ_2 suivant les règles d'implantation définies par Y.Bréchet [Néda et al., 1999]

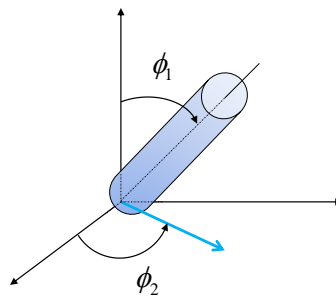


FIGURE IV.37 – Fibre orientée.

On réalise l'implantation de 100 cylindres dans un volume de 500x500x500 voxel cube. La fraction volumique de l'ensemble est d'environ $V_f = 4\%$.

Le caractère aléatoire de l'implantation peut créer une fusion des différents cylindres comme sur la Fig IV.38 (a). On affecte à chaque composante de X un label. Cette opération $Lab(X)$ permet de distinguer les amas de cylindres car une couleur unique est attribuée pour un amas.

IV.6.2 Résultat de la triangulation et maillage volumique

La figure IV.39 illustre la triangulation totale de la simulation d'un bloc de composite à fibres courtes. Cette triangulation respecte la morphologie initiale des fibres.

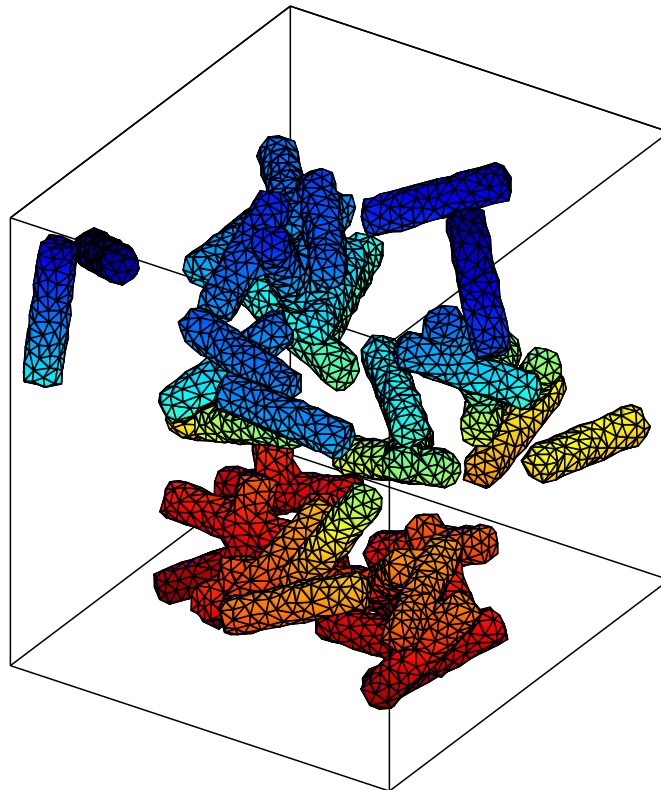


FIGURE IV.39 – Triangulation de X .

La figure IV.40 présente une triangulation optimale d'un amas de fibres du repère a) de la figure IV.38 (a).

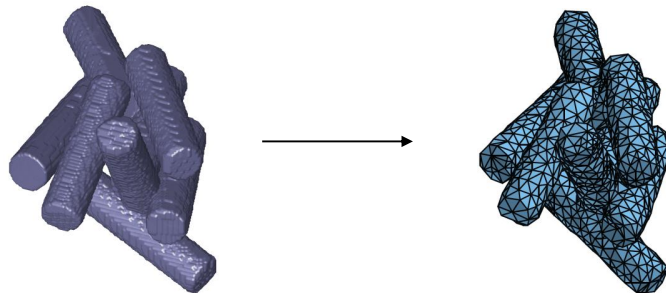


FIGURE IV.40 – Amas de fibre de la figure IV.38 (a).

La triangulation est réalisée globalement sur l'image. Comme en 2D la triangulation du complémentaire de X s'appuie sur les nœuds de triangulation préalablement établis sur X .

Le non recouvrement des triangles du graphe-M permet l'application directe d'un mailleur ou « remplisseur » volumique tétraédrique.

Cette étape constitue véritablement la vérification de la triangulation car la plupart des "remplisseurs" nécessitent, en entrée de leur code, un premier maillage exempt de trou et de superposition de triangles.

Ce maillage illustre la robustesse de notre technique qui peut s'appliquer aux matériaux composites 3D qui prend en compte la dimension et le caractère aléatoire des orientations des fibres.

Ce résultat de maillage constitue un apport significatif pour les investigations dans le domaine de la mécanique des matériaux composites en tenant compte de l'architecture réelle des fibres.

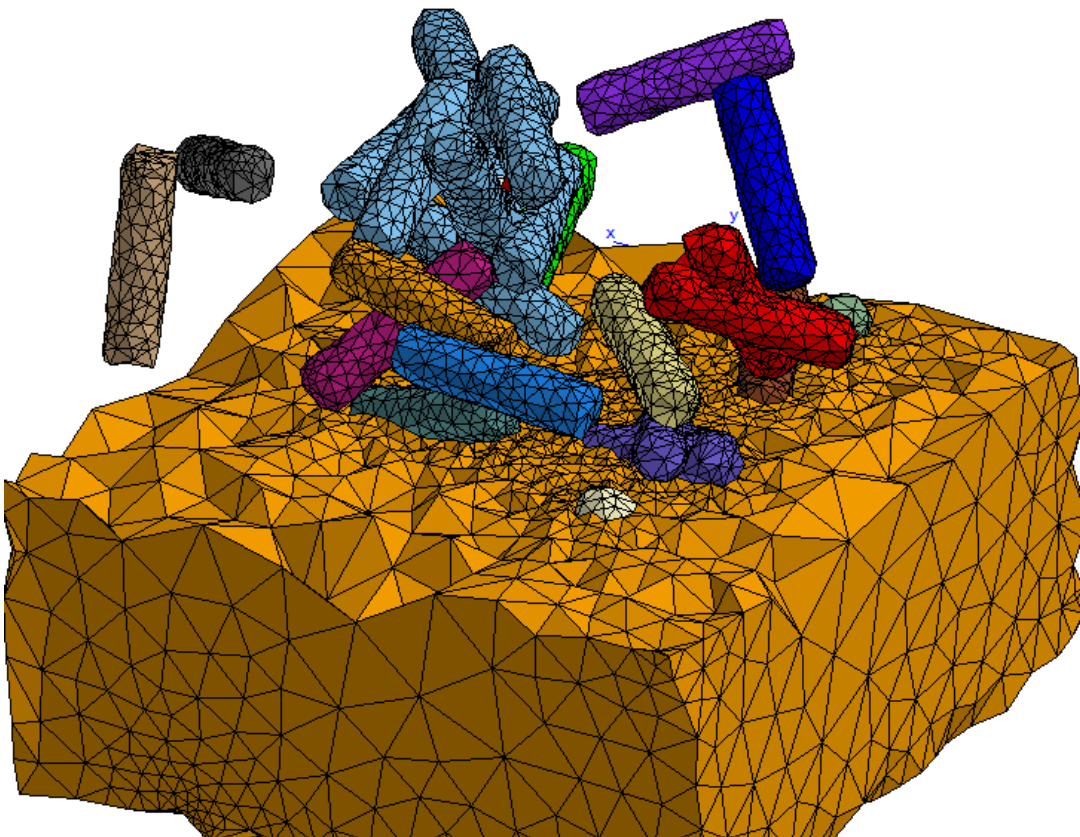


FIGURE IV.41 – Maillage des cylindres et du complémentaire de l'image.

La figure Fig. IV.41 illustre le maillage des fibres ainsi qu'une représentation partielle du maillage du complémentaire de X qui recouvre bien sur la totalité de X . C'est le résultat original du fait de l'automatisme de la technique de maillage proposée dans notre étude. Ainsi, il est possible de réaliser des problèmes complexes comme le couplage pro-

cedé/propriétés dans le cas des matériaux composites.

IV.6.3 Vérification du maillage par un calcul EF

La vérification du maillage étant réalisée, nous vérifions son adaptation à un calcul mécanique.

Le chargement utilisé section III.1.10.3 est adapté en 3D pour le calcul EF d'un composite à fibres courtes sollicité en traction. Les propriétés mécaniques de la matrice et des fibres sont introduites. Cette démarche a uniquement pour objectif de vérifier la convergence des calculs, validant ainsi la qualité du maillage.

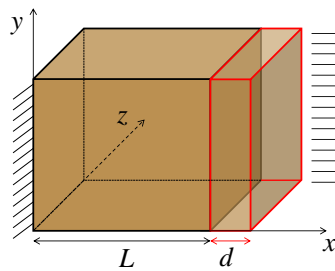


FIGURE IV.42 – Chargement mécanique 3D.

Les résultats du calcul EF sont illustrés par la figure IV.43 qui représente le champ de déplacement U_1 dans la direction x .

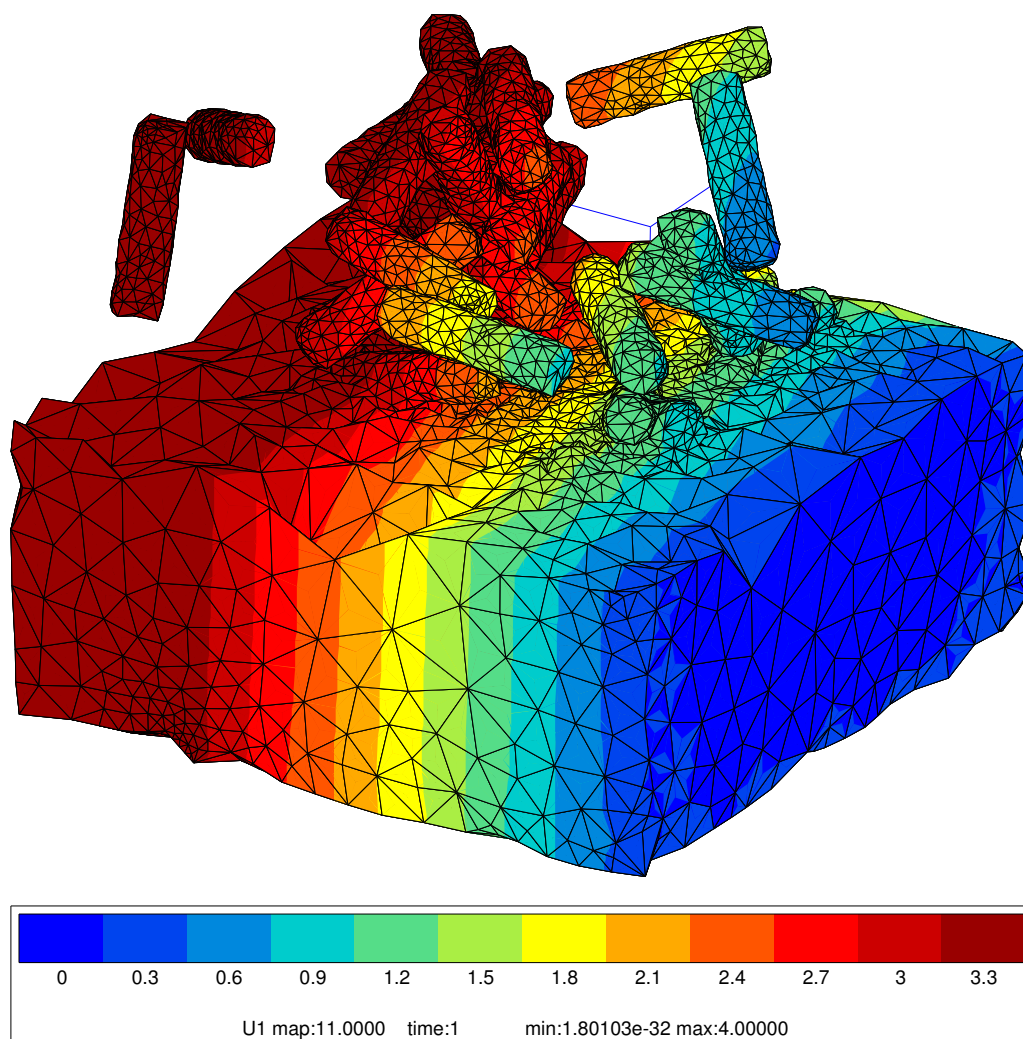


FIGURE IV.43 – Champ de déplacement U_1 dans la direction x.

IV.7 Maillage des exemples tests

Dans cette section, nous proposons d'appliquer notre méthode de maillage sur différents cas tests souvent rencontrés dans la littérature. La méthode est généralisable pour le maillage de toute surface fermée. Afin de tester la robustesse de la procédure, nous avons testé l'algorithme pour la triangulation de surfaces fermées dans le cas où elles ne sont pas représentatives d'un volume. C'est le cas de la bouteille de Klein, qui par définition, est non orientable : elle ne possède ni "d'intérieur" ni "d'extérieur". Dans ce cas, la progression géodésique de la dilatation permet la construction du Voronoï géodésique (Fig. IV.44) qui conduit simplement à la triangulation de la surface (Fig. IV.45).



FIGURE IV.44 – Voronoï géodésique sur la bouteille de Klein.

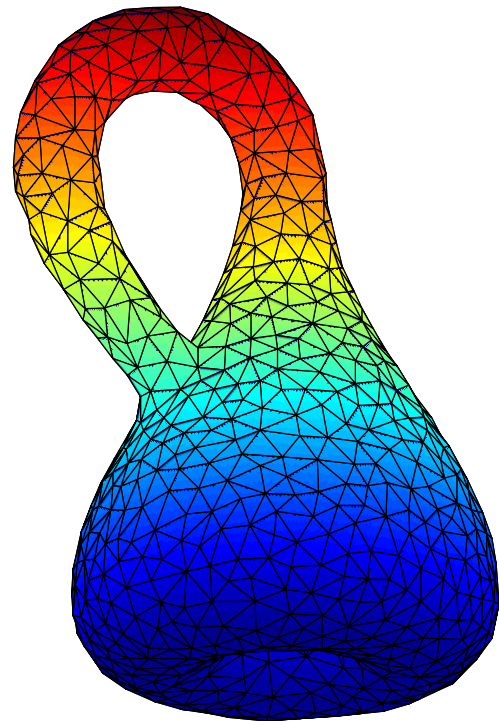


FIGURE IV.45 – Triangulation sur la bouteille de Klein.



FIGURE IV.46 – Voronoï géodésique sur "Stanford Bunny".

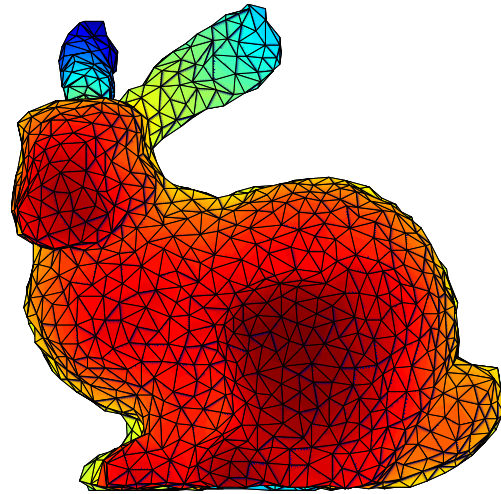


FIGURE IV.47 – Triangulation sur "Stanford Bunny".

Dans les autres cas présentés, les cellules de Voronoï permettent le maillage de la microstructure biphasée. Dans tous les cas, les contraintes morphologiques (rebroussements, concavités 3D), sont respectées par la procédure. Ceci est illustré par les figures IV.47 à IV.49 qui proposent une triangulation dans le cas du "Stanford Bunny" et de "L'éléphant".



FIGURE IV.48 – Voronoï géodésique sur "Elephant".

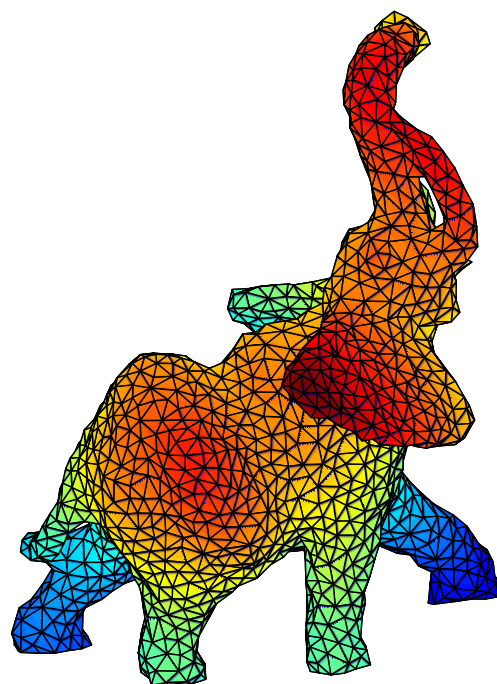


FIGURE IV.49 – Triangulation sur "Elephant".

Il est à noter que le maillage de ces cas tests est réalisé d'une façon automatique, qui ne nécessite pas de corrections manuelles à posteriori.

IV.8 Synthèse

Dans cette section, nous avons proposé une nouvelle méthode de maillage. Elle s'appuie sur la triangulation de surfaces fermées discrètes par l'application de la procédure du graphe-M défini sur l'ensemble des cellules du Voronoï géodésique. Cette technique originale est une alternative robuste à une triangulation type Delaunay établie par dual géométrique sur ce graphe. L'implantation contrôlée des différents processus ponctuels établis à la surface des objets garantit la définition de cellules de tailles suffisantes pour établir le graphe-M.

Il faut noter que cette partie de notre travail constitue une amélioration significative pour les techniques de maillage d'images 3D biphasees préservant les morphologies initiales de formes complexes.

Cette triangulation ne peut contenir ni des triangles qui se superposent ni de trous qui pourraient occasionner une lacune de définition d'un élément. Bien que plus fine que la triangulation de Delaunay, la triangulation par le Graphe-M génère un nombre beaucoup moins important d'éléments que des techniques type Marching, par exemple.

Chapitre V

Maillage d'une microstructure multiphasée 3D

Notre étude se positionne dans l'idée que l'image multiphasée contient intrinsèquement un nombre suffisant d'informations pour que la surface voxélisée des différentes phases qui la composent soit modélisée en une surface triangulée. L'étude exhaustive des configurations locales des composantes d'une image permet d'établir un ensemble de critères mathématiques pouvant définir les trois composantes nécessaires à une triangulation contrainte surfacique : les surfaces, les bords de surface et les points de bord communs entre plusieurs phases. Dans un premier temps, nous présentons les outils d'extraction des composantes de l'image. Ensuite, par un échantillonnage adaptatif, nous appliquons la version ensembliste du graphe-M sur l'ensemble des surfaces de l'image pour en définir la triangulation globale de la microstructure.

Sommaire

V.1	Introduction	161
V.2	Démarche du maillage d'une microstructure 3D multiphasée	161
V.2.1	Problématique liée aux bords de surface d'un Voronoï	162
V.3	Choix d'une microstructure multiphasée	163
V.4	Composition d'une microstructure multiphasée	166
V.5	Définition des composantes connexes de l'image	167
V.5.1	Problématiques liées à la définition du contour d'une image multiphasée	167
V.5.2	Trame dédoublée.	169
V.5.3	Adjonction des surfaces moyennes aux phases de l'image	182
V.6	Triangulation des surfaces des phases	185
V.6.1	Choix d'une triangulation	185
V.6.2	Voronoi géodésique ou fonction label ensembliste	187
V.6.3	Construction du graphe-M sur le Voronoï ensembliste	189
V.6.4	Définition de germes supplémentaires sur chaque courbe C composante connexe du bord	193
V.7	Résultat de la triangulation morphologique	194
V.7.1	Triangulation d'une surface.	194
V.7.2	Triangulation des surfaces d'une phase	194
V.7.3	Triangulation de l'ensemble de l'image et maillage volumique	196
V.7.4	Variation du pas de triangulation	198
V.7.5	Vérification du maillage par un calcul EF	201
V.7.6	Organigramme de la procédure de maillage des microstructures multiphasées 3D.	202
V.8	Comparaison avec le Marching Cube	203
V.9	Synthèse	204

V.1 Introduction

Le maillage 3D dans le cas de microstructures présentant plusieurs phases constitue un challenge pour le monde des mécaniciens en vue de prendre en considération la réalité de la morphologie réelle des matériaux hétérogènes. Ces informations sont nécessaires pour établir des calculs numériques robustes et adéquats. Pour adapter l'image à un calcul élément fini, chacune des phases est définie par une loi de comportement physique homogène (mécanique, thermique, électromagnétique, ...) et une fraction volumique. Dans le cas biphasé, les surfaces sont par définition fermées ; il est possible d'appliquer sans erreur, la triangulation par le graphe-M sur l'ensemble des cellules du Voronoï géodésique. la triangulation d'une phase de l'image devient alors la duplication de la triangulation du complémentaire de l'image. Dans le cas d'une microstructure hétérogène multiphasée, les phases contiguës sont constituées de l'ensemble des surfaces mitoyennes. Elles sont ouvertes, et dans ce cas, la triangulation est beaucoup plus délicate.

V.2 Démarche du maillage d'une microstructure 3D multiphasée

Notre étude se décompose en deux étapes principales consistant dans un premier temps à extraire de l'image des composantes morphologiques sur lesquelles, dans un deuxième temps, est réalisée une triangulation morphologique de surface.

Notre stratégie revient donc à réaliser une triangulation de surfaces représentées par chacune des interfaces des phases de la microstructure.

Nous proposons dans ce chapitre une alternative aux études précédentes pour lesquelles nous exprimons les limites propres à la définition des composantes connexes d'une image, et à la triangulation de surfaces ouvertes. Cela implique que la plupart des développements théoriques utilisés dans cette section sont originaux. En effet, nous observerons que certains outils issus de la morphologie mathématique comme le gradient de Beucher, dont nous avons fait largement usage dans cette étude, ne sont plus assez précis pour une étude de triangulation contrainte de surface. En effet, comme pour les techniques type « *marching* », le gradient morphologique permet d'extraire uniquement que la surface des phases de l'image. Dans une image multiphasée, il est nécessaire de connaître en plus les bords de surface ainsi que les points d'intersection entre plusieurs phases. Ces composantes sont des contraintes morphologiques établissant des frontières à l'intérieur desquelles la triangulation doit être impérativement continue afin d'éviter les superpositions éventuelles de triangles à la frontière des phases.

Concernant le gradient de Beucher, on note qu'il contient en plus une part d'arbitraire suivant le sens : inférieur ou supérieur (chapitre : [II.6.1.3](#)). Notre choix se porte sur une étude exhaustive de l'image d'une microstructure multiphasée tridimensionnelle afin de déterminer non seulement les contours mais aussi les bords de surface ainsi que les points de labels multiples. Cette recherche sera réalisée à l'échelle d'un cube élémentaire $2 \times 2 \times 2$.

Nous réalisons cette recherche non pas directement sur l'image mais nous dupliquons notre image dans une autre image de dimension double. Dans la mesure où toute l'étude est réalisée localement sur la frontière d'une phase, l'augmentation de la taille de l'image n'a qu'une influence modérée sur le temps de calcul. On intercale à chacun des voxels un nouveau voxel vide.

Sur cette base, nous étudions, au niveau local à ce cube élémentaire, toutes les composantes connexes définies par les voxels situés sur les 8 sommets de ce cube. Nous décidons, si ce nouveau voxel est dans la phase considérée, sur la surface, sur un bord ou s'il s'agit d'un point de bord multiple commun à plusieurs phases. Le remplissage de ce nouvel espace est le résultat de ces nouveaux outils mathématiques et va nous permettre de construire directement nos trois composantes connexes. C'est sur ce principe que repose un de nos plus importants développements de cette étude car ce remplissage est soumis à des propositions et à des preuves.

Ces trois composantes connexes étant définies il s'agit ensuite, de réaliser une triangulation de chacune des surfaces moyennes des phases, au niveau local de leur bord ainsi que leur éventuel point de bord multiple. Nous avons là aussi développé de nouveaux outils morphologiques pour réaliser cette triangulation car dans ce cas les méthodes de triangulation classiques engendrent parfois des paradoxes de raccordement de points de triangulation. Les complexités sont multiples. Dans une stratégie de triangulation de surface, il s'agit désormais de considérer une surface ouverte. Nous utilisons le Voronoï géodésique utilisé dans le cas biphasé mais dans le cas d'une surface ouverte, apparaissent des problèmes liés au bord de surface. Suivant la disposition des germes, il peut apparaître une discontinuité dans la triangulation des éléments situés sur le bord de la surface.

V.2.1 Problématique liée aux bords de surface d'un Voronoï

Pour assurer la continuité d'une triangulation de plusieurs surfaces jointives, tous les triangles situés sur le bord de surface doivent partager une arête commune. Pour cela, il est nécessaire qu'à l'intérieur d'une surface les germes situés au bord soient voisins directs par adjacence commune de leur cellule de Voronoï respective. Ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, sur une surface algébrique (Fig.V.1.a) : $x^3y + xz^3 + y^3z + z^3 + 5z = 0$; on réalise un Voronoï géodésique (Fig.V.1.c) sur un processus ponctuel réparti sur la surface discrétisée (Fig.V.1.b).

Si on réalise une triangulation duale type Delaunay, il apparaît que la cellule 3 empêche les deux cellules 1 et 2 d'être contiguës (Fig.V.1.c), cela crée une discontinuité de la triangulation duale si elle est construite sur l'adjacence des cellules (Fig.V.1.d).

Par conséquent, le principe d'une triangulation duale type Delaunay ne peut être appliquée ici car elle dépend fortement du lieu d'implantation des germes de triangulation. Une triangulation pour qu'elle soit robuste doit être indépendante de l'échantillonnage des germes de triangulation.

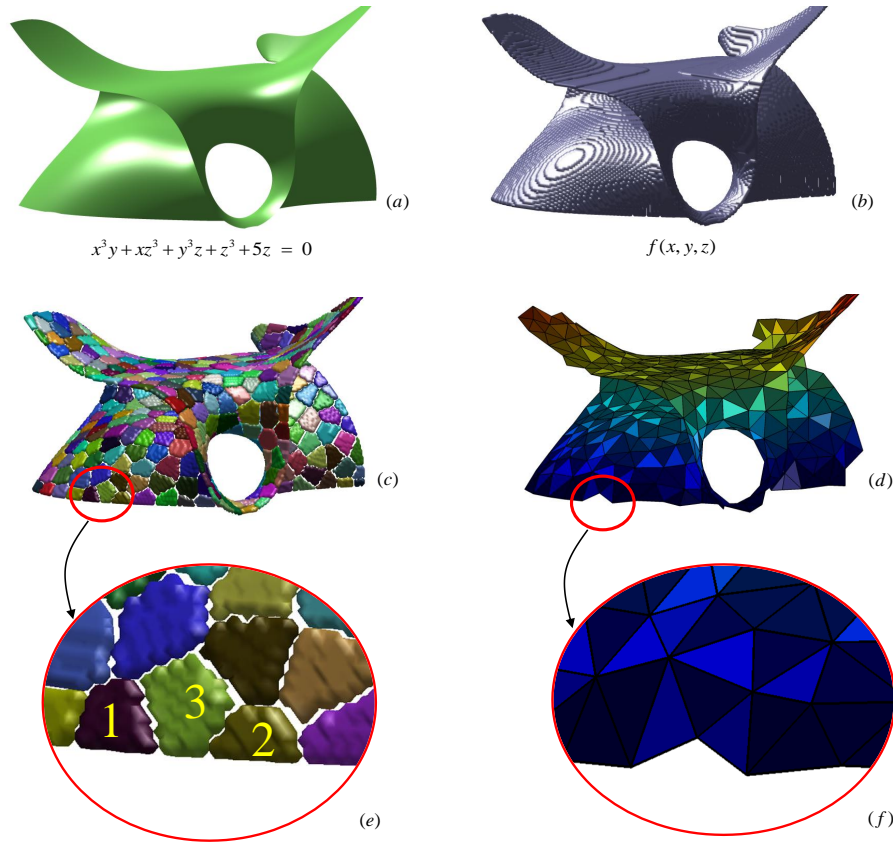


FIGURE V.1 – Effet de bord de la triangulation duale. a) Surface algébrique, b) surface discrétisée, c) Voronoï géodésique, d) Discontinuité de la triangulation duale, e) Détail sur les cellules 1 et 2 non mitoyennes par la cellule 3, f) Détail d'un élément triangulaire manquant au bord de la surface

Nous observerons par la suite (chapitre V.6.1), que cette triangulation duale géométrique de Voronoï en 3D contient un paradoxe fort où malgré la connaissance des trois composantes utiles à une triangulation, le graphe de Delaunay ne peut assurer une bonne continuité de la triangulation sur un ensemble de surfaces jointives. Même si elle reste juste localement sur une surface.

Dans notre étude, nous redéfinirons le graphe-M pour qu'il contourne ce problème par l'établissement d'un Voronoï construit sur la réunion ensembliste de germes labélisés par un singleton sur lesquels on réalise une propagation liée à la forte connexité des voxels. L'étude cardinale de chaque sous-ensemble local permet de définir des conditions de conformité et la triangulation de la surface devient le résultat de l'ensemble des configurations conformes sur ce Voronoï.

V.3 Choix d'une microstructure multiphasée

Pour nous rapprocher de la réalité morphologique d'une microstructure multiphasée, nous avons choisi d'élaborer une image synthétique. Cette image est le résultat d'un modèle

d'implantation de sphères du type fonction de feuilles mortes classique en morphologie mathématique [Matheron, 1968] [Jeulin, 1979].

Séquentiellement, on introduit une sphère ainsi que son label dans un volume 3D, elle prend la place de tout ce qui existait précédemment dans l'image (Fig.V.2) . Ce principe crée des concavités géométriques plus ou moins importantes dans l'image.

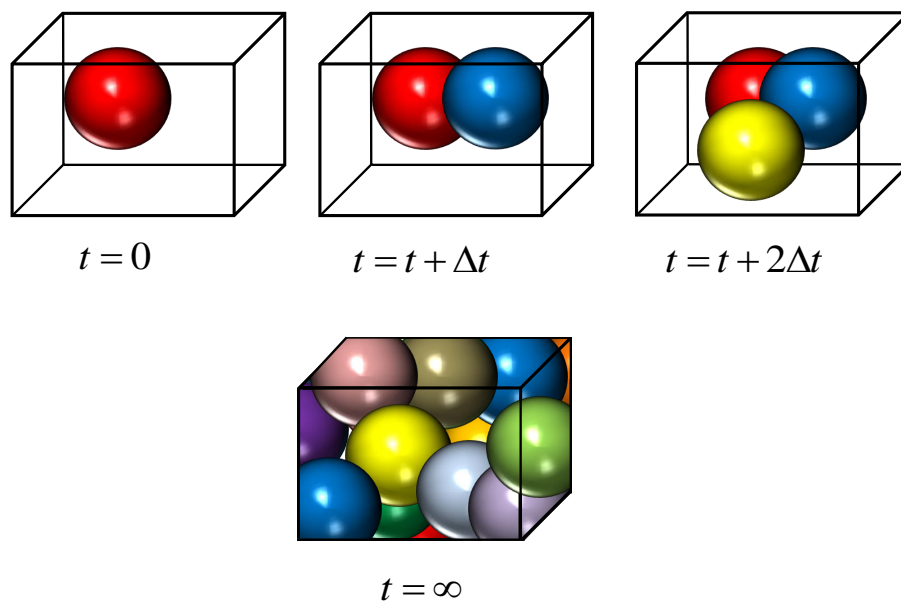


FIGURE V.2 – Schéma de feuilles mortes de sphères.

A $t = \infty$, c'est à dire, lorsque le volume de l'image est comblé avec un pourcentage proche de 100%, on arrête l'implantation (Fig.V.2). L'image est alors constituée de 33 phases dont le vide résiduel entre les sphères est lui-même considéré comme une phase disjointe.

La structure ainsi formée est constituée de phases présentant de fortes concavités géométriques (Fig .V.3), qui empêchent toute approximation analytique ou toute étude séquentielle par projection sur un plan, sans commettre d'importants compromis sur la forme originale.

Pour une illustration visuelle, la taille de l'image est volontairement petite 30x20x20.

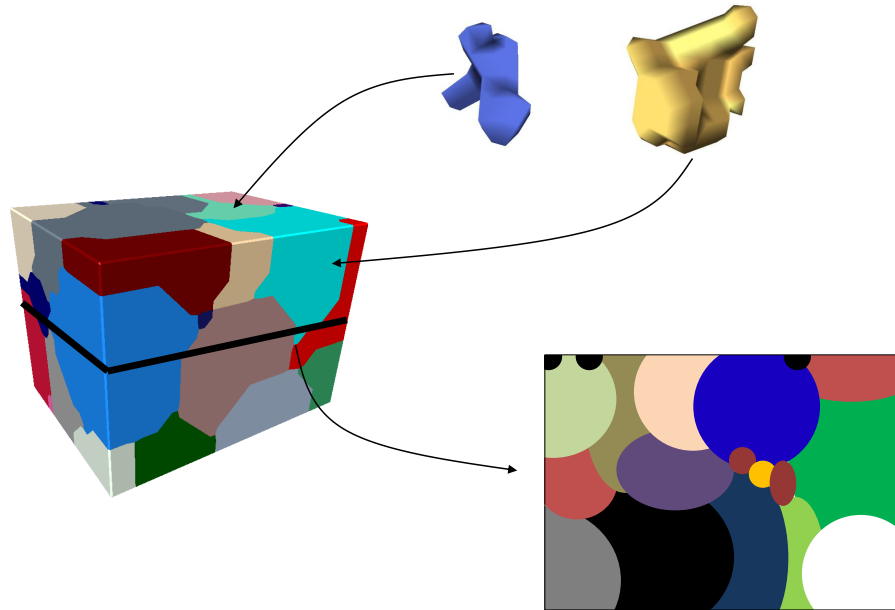


FIGURE V.3 – Caractéristiques morphologiques de l'image.

Par ailleurs, il n'est pas nécessaire pour la démonstration de choisir une image de grande taille car le principal problème de la triangulation réside dans la gestion des contacts entre les phases. Une procédure de triangulation de surface doit être capable de gérer toutes les morphologies de surface que constitue un contact entre deux phases.

Un cas limite apparaît si deux phases mitoyennes ont pour point de rencontre un voxel (Fig.V.4) . Une triangulation doit considérer ce point comme un élément triangulaire. Ce problème est indépendant du volume des phases considérées.

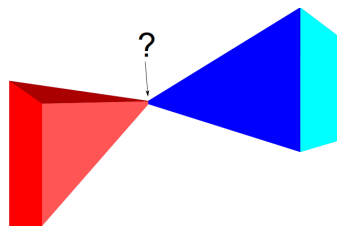


FIGURE V.4 – Contact ponctuel.

L'idée d'appliquer à l'image des opérations morphologiques pour en modifier la structure est soumise au risque de créer les mêmes singularités topologiques, dans une autre zone de l'image, qui n'apparaissent pas avant la transformation de celle-ci.

En effet, les opérateurs morphologiques agissent le plus souvent globalement sur l'image et non localement. L'aspect local est, par ailleurs, très délicat à appréhender avec ces outils. Dans le cas biphasé, il est possible de réaliser un «nettoyage morphologique» de l'image par exemple, une ouverture ensembliste permet de séparer des objets ou d'éliminer ceux dont la taille n'est pas suffisante pour une triangulation. Dans le cas multiphasé, une opération morphologique qui augmenterait la dimension d'une surface de contact entre deux phases

peut provoquer la diminution d'une autre surface à un autre endroit de l'image. Il est très périlleux de bâtir un algorithme de convergence de formes des phases pour qu'elles puissent se prêter à une triangulation sans erreur.

Toutes ces raisons expliquent, en partie, la stratégie actuelle de maillage consistant à trianguler à l'échelle du voxel l'ensemble de la microstructure par la technique du Marching cube, afin de conserver la contiguïté des éléments triangulaires dans toutes les situations. Par la suite, la grande quantité d'éléments générés devra être simplifiée.

V.4 Composition d'une microstructure multiphasée

Représentation discrète de l'image

La disparité morphologique des surfaces de contact entre les phases impose une étude exhaustive locale de chacun des voxels de l'image. Ainsi, dans la suite de l'étude, nous avons opté pour une représentation voxélisée. Nous montrons ensuite qu'une étude de l'environnement de chacun des voxels permet la définition des composantes nécessaires à la triangulation surfacique de l'image.

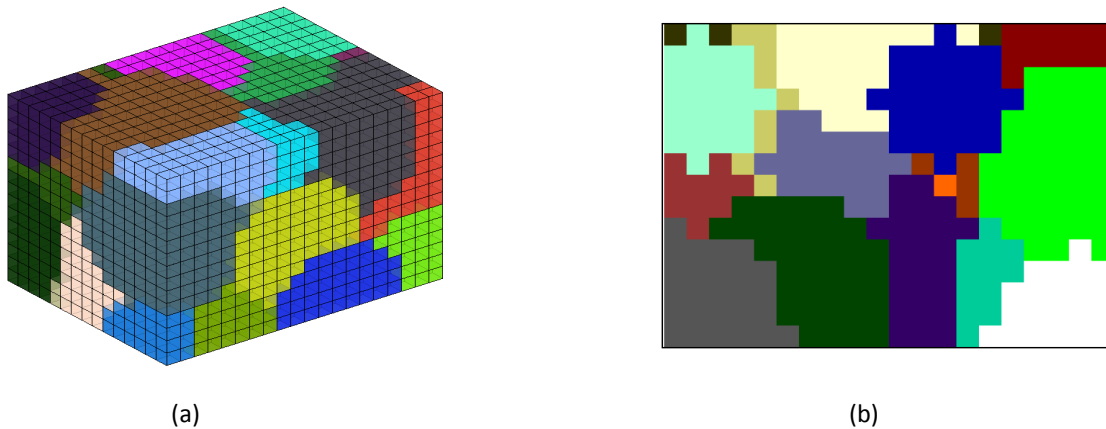


FIGURE V.5 – Représentation discrète d'une microstructure multiphasée. a) volume 3D, b) coupe 2D du volume 3D.

Phases de l'image

Dans cette représentation, les phases de l'image sont des ensembles de voxels connexes de morphologie non définie (Fig.V.6) .

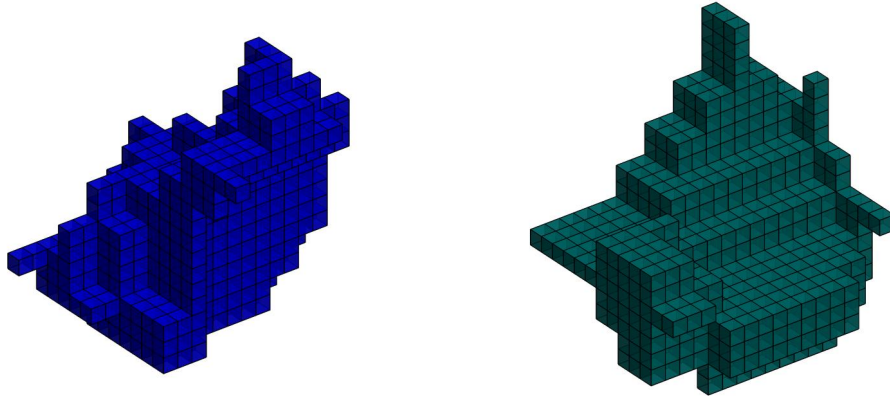


FIGURE V.6 – Différentes phases de l'image.

V.5 Définition des composantes connexes de l'image

V.5.1 Problématiques liées à la définition du contour d'une image multiphasée

V.5.1.1 Problème de parité

Déjà dans le cas biphasé, un des problèmes rencontrés dans la détermination rigoureuse du squelette d'un objet X , d'un Skiz ou d'un graphe de Voronoï digitalisé est son "épaisseur" variable, qui peut être due de manière imparable à la parité du nombre de pixels du plus court chemin séparant deux morceaux de la frontière de X . La résolution de ce problème d'épaisseur, par exemple, par un amincissement terminal, comporte une part inévitable d'arbitraire.

On retrouve un problème apparenté lorsqu'on doit déterminer la frontière entre plusieurs objets mitoyens disjoints X_i . Soit l'élément structurant B le carré unité en 2D, le cube unité en 3D. L'utilisation du demi-gradient intérieur (par exemple), $\partial X_i = X_i \setminus (X_i \ominus B)$, en parallèle sur chaque objet conduit à une réunion de frontières ∂_i "épaisse"; et toute détermination séquentielle des frontières comporte une part d'arbitraire liée à l'ordre dans lequel on traite les objets. Cela se produit quel que soit le choix des éléments de voisinage que l'on attribue à la boule B pour l'établissement des composantes connexes.

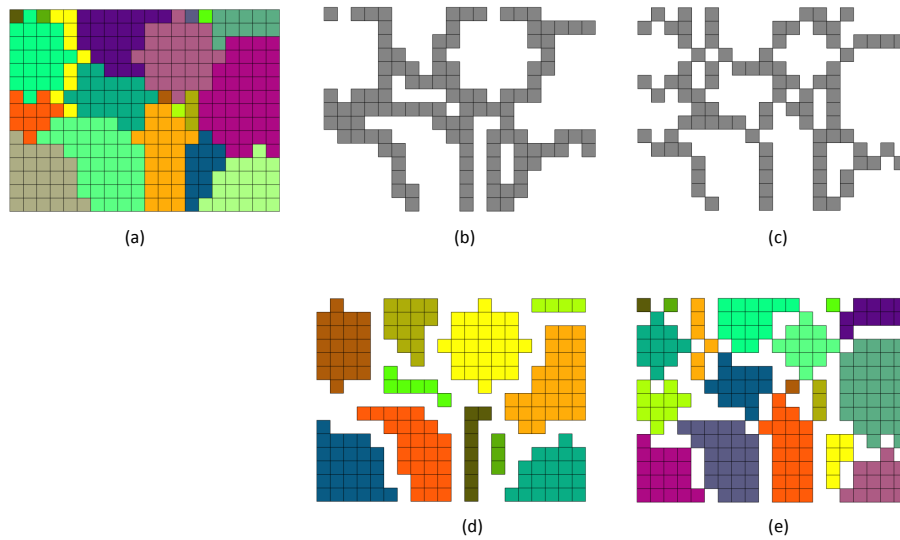


FIGURE V.7 – Gradient morphologique sur une image multiphasée. a) Coupe de l'image, b) gradient fort, c) gradient faible, d,e) place du gradient dans l'image

La simple définition des frontières des objets en forte ou faible connexité (Fig. V.7.b.c) peut engendrer leur segmentation ou leur disparition si la taille des objets est inférieure à la taille de l'élément structurant B (Fig. V.7.d.e). Les modifications topologiques sont de l'ordre de l'unité et en 2D, il est possible d'affiner le gradient morphologique par un amincissement topologique des frontières en 4 ou en 8-connexité. On note qu'un amincissement par squelettisation ou calcul de l'axe médian peut créer, à partir des irrégularités morphologique du contour, des résidus indésirables de forme (barbules) F.Meyer 87. Toutefois, en 2D comme en 3D, il existe toute une famille de filtres bien connus en analyse d'images pour « réparer » les « erreurs » de contour.

La redéfinition partielle de l'image dans le cas biphasé produit un écart avec la forme originale qui est le plus souvent tolérable. Mais, dans le cas multiphasé la possible segmentation ou création de nouvelles phases peut induire des situations très délicates pour une triangulation.

V.5.1.2 Idée

Une idée, pour résoudre ces difficultés, consiste à dilater d'un facteur 2 l'image à étudier avant de la déposer sur la trame de maille carrée ou cubique, de sorte qu'elle soit portée par $(2\mathbb{Z})^2$ en 2D ou $(2\mathbb{Z})^3$ en 3D. Il reste alors à compléter la trame de manière à préserver les adjacences propres aux objets et au fond.

En effet, quand on considère une image avec plusieurs "objets connexes" mitoyens disjoints, l'obligation d'éviter les indécidabilités en cas de croisement conduit à choisir l'adjacence forte ou directe pour les points objets (4-adjacence en 2D, 6-adjacence en 3D). A première vue, cette adjacence paraît plus « grossière » dans la description morphologique d'une image

Cependant, son pouvoir séparateur nous permet de distinguer les objets du reste de

l'image. Pour les points de fond on prendra en conséquence la 8-adjacence en 2D, et la 18-adjacence ou la 26-adjacence en 3D, que l'on appelle adjacence faible.

En résumé, on considère des objets labellisés mitoyens sur une trame cubique \mathbb{Z}^3 3D (ou carrée \mathbb{Z}^2 en 2D) et on cherche dans un premier temps à définir leur frontière commune sans part d'arbitraire lié à l'ordre d'examen des objets; ceci en vue de trianguler cette frontière à partir d'un échantillonnage "cohérent".

Les objets sont supposés fortement connexes et constituer une partition de la trame (quitte à considérer chaque composante connexe forte d'un objet ou du fond comme un nouvel objet). Le choix de la forte connexité pour tous les objets met à l'abri du paradoxe du théorème de Jordan sur la connexité.

L'exigence d'absence d'arbitraire dans la définition de la frontière conduit à dédoubler la trame pour "ménager de la place" pour celle-ci.

V.5.2 Trame dédoublée

Pour la démonstration nous nous plaçons dans un cas général et utiliser des labels ensemblistes tel que x, y, z, t en 2D et x, y, z, t, u, v, s, w , en 3D plutôt que numérique 1, 2, 3...

- Notons X, Y, \dots les différents objets labellisés x, y, \dots de la trame initiale injectés dans la trame dédoublée \mathbb{Z}^3 en 3D (ou \mathbb{Z}^2 en 2D). Notons aussi \tilde{X} et \tilde{Y} les objets sur la trame dédoublée issus de respectivement X et de Y .

- Remplissage de la trame dédoublée :

0) la trame initiale labellisée est injectée dans la trame dédoublée par l'homothétie de rapport 2 et de centre par exemple $(1, 1, 1)$ (ou $(1, 1)$) :

$$\begin{aligned} (i, j, k) \in \mathbb{Z}^3 &\mapsto (2i - 1, 2j - 1, 2k - 1) \in (2\mathbb{Z} - 1)^3 \subset \mathbb{Z}^3 \\ (ou(i, j) \in \mathbb{Z}^2 &\mapsto (2i - 1, 2j - 1) \in (2\mathbb{Z} - 1)^2 \subset \mathbb{Z}^2). \end{aligned} \tag{V.1}$$

Par ce passage nous garantissons l'intégrité de l'image de départ en dupliquant la totalité d'une image dans une image deux fois plus grande

V.5.2.1 Définition des composante connexes sur la trame dédoublée sur une coupe

$$\begin{pmatrix} x & x & y & y \\ x & x & x & y \\ x & x & x & y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & . & x & . & y & . & y & . & y \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ x & . & x & . & x & . & x & . & y \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ x & . & x & . & x & . & x & . & y \end{pmatrix} \tag{V.2}$$

On va associer à chacun des points restants (7 points sur 8 en 3D ou 3 points sur 4 en 2D) un label numérique : L'ensemble des règles de remplissage de la matrice repose sur une discussion sur la parité des coordonnées du voisinage d'un point que l'on considère.

(1) Pour tout point *milieu d'arête élémentaire*, c'est-à-dire dont une seule des coordonnées entières est paire :

- label numérique à 0 (nouveau *point-objet*) si ces 2 voisins directs (les 2 voisins naturels d'un milieu d'arête, issus de l'image initiale) ont un même label x ;
- label numérique à 1 (*point-surface*) si ces 2 voisins naturels ont des labels distincts x, y .

(2) Pour tout point *centre de face carrée élémentaire*, c'est-à-dire dont deux des coordonnées entières sont paires :

- label numérique à 0 (nouveau point-objet) si ses 4 voisins directs ont le label numérique 0 — autrement dit si ses 4 voisins diagonaux (les 4 voisins naturels d'un centre de carré, issus de l'image initiale) ont un même label x ;
- label numérique à 1 (point-surface) si 2 de ses 4 voisins directs ont le label numérique 1 — de sorte qu'il y a 2 labels distincts x, y parmi ses 4 voisins naturels (le cas d'un seul voisin direct de label 1 est impossible) ;
- label numérique à 2 (*point-bord simple*) si au moins 3 de ses 4 voisins directs ont le label numérique 1 — de sorte qu'il y a entre 2 et 4 labels distincts parmi ses 4 voisins naturels.

On observe que seul le statut des points rajoutés compte (points-objet codés à 0, points-surface ou plutôt points-frontièreMoins1D codés à 1, points-bord ou plutôt points-frontièreMoins2D codés à 2, points-extrémité ou plutôt points-frontièreMoins3D codés à 3).

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 1 & 2 & 1 \\ y & 1 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 1 & 2 & 1 \\ z & 1 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 1 & 2 & 1 \\ z & 1 & t \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 1 & 2 & 1 \\ z & 1 & t \end{pmatrix} \quad (\text{V.3})$$

où x, y, z et t sont 2 à 2 distincts, les chiffres 0, 1 et 2 codant la nature des points-frontière.

Pour l'exemple précédent,

$$\begin{pmatrix} x & . & x & . & y & . & y & . & y \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ x & . & x & . & x & . & x & . & y \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ x & . & x & . & x & . & x & . & y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 & x & 1 & y & 0 & y & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & x & 0 & x & 0 & x & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & x & 0 & x & 0 & x & 1 & y \end{pmatrix} \quad (\text{V.4})$$

Le morceau de frontière commun à X, Y et coïncide dans l'exemple avec l'ensemble des zéros obtenus, qui forme une courbe d_4 — *simple*. Ainsi, alors que les objets et étaient

mitoyens sur la trame initiale, l'objet Y est à présent séparé de X par une frontière "mince" sans part d'arbitraire.

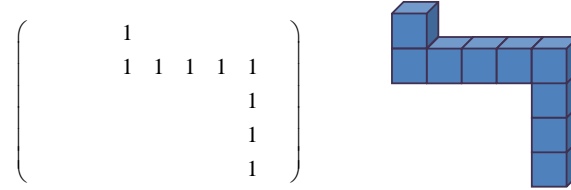


FIGURE V.8 – Courbe d_4 simple.

On réalise l'algorithme sur une coupe de l'axe \vec{Oz} de l'image (Fig.V.9) . Il apparait clairement que chacune des phases de l'image est composée d'une surface, de son bord, ainsi que les points multiples.

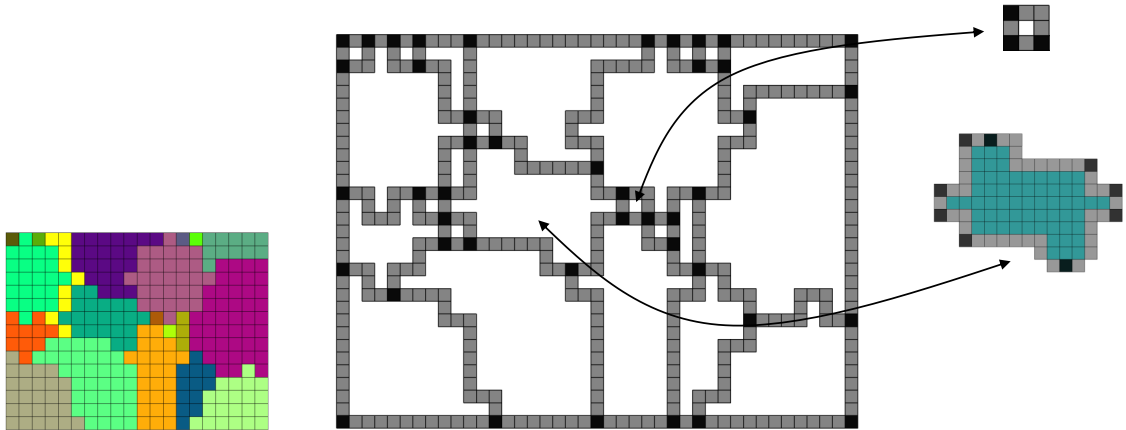


FIGURE V.9 – Composantes connexes 2D.

On remarque que le résultat est plus « fin » que celui obtenu en morphologie mathématique classique. Il est important de souligner ici que dans cette configuration chaque phase est entourée par une courbe d_4 – simple composée localement d'un bord de surface et des points multiples avec lesquels il sera simple d'échantillonner des points intermédiaires en vue d'une triangulation. Par ce principe, même une phase constituée que d'un seul pixel est considérée dans la figure V.9, la phase unitaire est entourée par trois bords fortement connexes et de trois points de bords multiples. Cette description adaptative à l'échelle d'un pixel permet d'éviter une surdensification globale pour décrire des zones sinueuses de l'image.

V.5.2.2 Définition des composantes connexes sur la trame dédoublée sur l'image 3D

On poursuit cette démarche pour les images 3D. On réalise d'autres règles de remplissage de la matrice dédoublée 3D avec cette fois un motif élémentaire cubique de taille $2 \times 2 \times 2$.

(3) Pour tout point centre de cube élémentaire, c'est-à-dire dont les trois coordonnées entières sont paires :

- label numérique à 0 (nouveau point-objet) si ses 6 voisins directs ont le label numérique 0 — autrement dit si ses 8 voisins diamétralement opposés (les 8 voisins naturels d'un centre de cube, issus de l'image initiale) ont un même label x ;
- label numérique à 1 (point-surface) si aucun de ses 6 voisins directs n'a le label numérique 2 et s'il y a exactement 2 labels distincts parmi ses 8 voisins naturels, avec au moins deux de ses voisins naturels diamétralement opposés ayant ces labels distincts ;
- label numérique à 2 (point-bord simple) si 1 ou 2 de ses 6 voisins directs ont le label numérique 2 ; ou bien si aucun d'entre eux n'a ce label 2 et s'il y a au moins 2 labels distincts parmi ses 8 voisins naturels, les voisins naturels diamétralement opposés partageant un même label s'il y a exactement 2 labels distincts ;
- label numérique à 3 (*point-bord multiple*) si au moins 3 de ses 6 voisins directs ont le label numérique 2 — de sorte qu'il y a entre 2 et 8 labels distincts parmi ses 8 voisins naturels.

Ainsi les données (issues de la trame initiale) sont parfaitement respectées, puisque tous restent des points-objet.

Illustrons et justifions par les trois propositions qui suivent les règles de labellisation numérique ci-dessus. Comme on va le voir, le label numérique entre 0 et trois des nouveaux points de la trame dédoublée se réfère au moins à la codimension des ensembles auxquels ils appartiennent. On peut bien sûr attribuer aux nouveaux points-objets (label numérique 0) le label plus précis x commun à tous ses voisins.

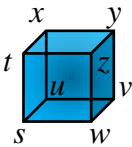
A l'étape (2), à rotation et symétrie près, les 2 cas de labellisation numérique à 1 sont :

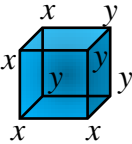
$$\begin{array}{cc} x & y \\ y & y \end{array} \text{ et } \begin{array}{cc} x & y \\ x & y \end{array} \tag{V.5}$$

et les 4 cas de labellisation numérique à 2 sont :

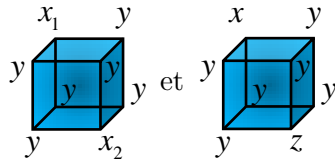
$$\begin{array}{cc} x & y \\ y & x \end{array}, \begin{array}{cc} x & y \\ y & z \end{array} \text{ et } \begin{array}{cc} x & y \\ t & z \end{array} \tag{V.6}$$

On se place dans toute la suite exclusivement dans le contexte 3D. Appelons *composante connexe locale* d'un cube, en abrégé *ccl*, tout sous-ensemble de sommets de ce cube qui sont fortement adjacents sur la trame initiale et ont le même label. Il y a entre 1 et 8 *ccl*, qu'il est possible de labelliser par le label commun des sommets, indicé si besoin par un numéro entre 1 et 4 (voir ci-dessous). **Ce sont ces *ccl* qui déterminent la géométrie de l'image à l'échelle locale du cube**, et donc celle de leurs frontières ; c'est pourquoi, on les considère localement comme des objets distincts, même si certaines d'entre elles partagent le même label du fait d'une connexion forte plus lointaine.

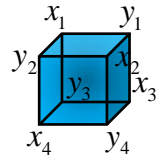
Ainsi, en notant  un cube de sommets $\begin{matrix} x & y \\ t & z \end{matrix}$ en haut (up) et $\begin{matrix} u & v \\ s & w \end{matrix}$ en en niveau bas (down), voici un cas particulier de cube à 2 ccl dont le centre a le label 1 ainsi

que ses 6 voisins directs : 

Puis voici deux cas particuliers de cube à 3 ccl dont le centre a le label 2 alors que ses 6 voisins directs ont le label 1 :

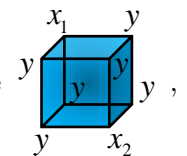


Enfin voici un cas particulier de cube à 8 ccl dont le centre a le label 3 alors qu'il y a seulement 2 labels distincts parmi ses 8 voisins naturels :

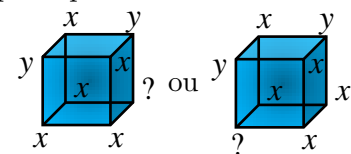


Proposition 1. *Le centre d'un cube élémentaire est labellisé à 1 (point-surface) si et seulement si il y a 2 ccl, et donc 2 labels x et y distincts pour les sommets du cube.*

Démonstration. • Supposons que le centre du cube soit labellisé à 1 et supposons par l'absurde qu'il y ait plus de 2 ccl, donc par exemple au moins 2 ccl de label x . La distance forte (d_6) entre deux telles ccl ne peut être égale à 2, car on aurait une face du cube de labels $\begin{matrix} x & y \\ y & x \end{matrix}$ dont le centre aurait le label 2 d'après la règle de remplissage (2). La

distance serait donc égale à 3 et on aurait affaire (à rotation près) au cube , qui est un des deux cas particuliers de cube à 3 ccl indiqués ci-dessus, dont le centre est labellisé à 2 : contradiction.

• Inversement, si un cube a 2 ccl de labels distincts et , aucune de ses faces ne peut avoir pour Labels $\begin{matrix} x & y \\ y & x \end{matrix}$, car les deux x ou les deux y ne seraient pas dans une même ccl, comme on le voit en labellisant les sommets de la face parallèle, down sur le dessin, où on impose que les deux x soient dans une même ccl :

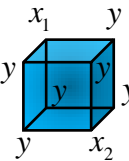


On en déduit qu'aucun des 6 voisins directs du centre du cube n'a le label numérique 2 (cf. l'étude détaillée ci-dessus de la règle de remplissage (2)). Toutes les faces du cube, celle

de niveau up en particulier, sont donc (à rotation et symétrie près, et quitte à intervertir x et y) de la forme :

$$\begin{matrix} x & y & x & y & y & y \\ x & y & y & y & y & y \end{matrix}, \text{ ou } \quad (V.7)$$

Si les 4 couples de sommets diamétralement opposés avaient le même label x ou y , les faces avant (front) et arrière (back) seraient dans le premier cas de la forme $\begin{matrix} x & y \\ y & x \end{matrix}$ incompatible avec 2 ccl; on retomberait dans le deuxième cas sur le cas particulier du

cube  à 3 ccl; et on aurait l'unique label dans le troisième cas : contradiction.

On conclut qu'au moins deux sommets diamétralement opposés ont des labels distincts, de sorte que le centre du cube a bien le label 1.

□

Notons, $\tilde{X}, \tilde{Y}, \dots$ les sous-ensembles obtenus à partir des différents objets X, Y, \dots de la trame initiale injectés dans la trame dédoublée en leur adjoignant leurs nouveaux points-objet respectifs. Notons par ailleurs F (comme *frontière*) le complémentaire de la réunion de ces sous ensembles $\tilde{X}, \tilde{Y}, \dots$; les points de F sont caractérisés par leurs numériques compris entre 1 et 3.

Les règles de remplissage (1), (2) et (3) garantissent que $\tilde{X}, \tilde{Y}, \dots$ sont encore des objets fortement connexes de la trame dédoublée, et que si on note B le cube unité de \mathbb{Z}^3 :

$$B = -1, 0, 1^3 \text{ (boule unité de } \mathbb{Z}^3 \text{ pour la distance faible } d_{26} \text{),}$$

on a pour tout objet X la relation $X \oplus B = \tilde{X} \oplus B$. De plus, si on définit la frontière de l'objet X comme étant son gradient morphologique extérieur associé à la dilatation par B :

$$\partial \tilde{X} \stackrel{def}{=} (\tilde{X} \oplus B) \setminus \tilde{X} \quad (V.8)$$

on a :

$$F = \bigcup_{X \text{ objet}} \partial \tilde{X} = \bigcup_{X, Y \text{ objets mitoyens}} (\partial \tilde{X} \cap \partial \tilde{Y}) \quad (V.9)$$

En posant X et Y mitoyens $\stackrel{def}{\Leftrightarrow} (X \oplus B) \cap (Y \oplus B) \neq \emptyset \Leftrightarrow \partial \tilde{X} \cap \partial \tilde{Y} \neq \emptyset$.

En effet, l'inclusion $\partial \tilde{X} \cap \partial \tilde{Y} \subseteq (\tilde{X} \oplus B) \cap (\tilde{Y} \oplus B) = (X \oplus B) \cap (Y \oplus B)^c$ est trivial. Et comme $\tilde{Y} \oplus B \subseteq (\tilde{X})^c$ (c pour complémentaire dans la trame), on a $(\tilde{X} \oplus B) \cap (\tilde{Y} \oplus B) \subseteq (\tilde{X} \oplus B) \setminus \tilde{X} = \partial \tilde{X}$; de même $(\tilde{X} \oplus B) \cap (\tilde{Y} \oplus B) \subseteq \partial \tilde{Y}$. De sorte que $\partial \tilde{X} \cap \partial \tilde{Y} = (X \oplus B) \cap (Y \oplus B)$

La partition de F en surface F_1 , bord simple F_2 et bord multiple F_3 , déterminée par les valeurs 1,2 et 3 des labels numériques de ses points, induit pour tout couple d'objets mitoyens (X, Y) une partition analogue sur leur frontière commune $\partial \tilde{X} \cap \partial \tilde{Y}$ (qui peut ne pas être fortement connexe).

De là soit Σ_1 une composante fortement connexe de l'ensemble F_1 des points de F de label numérique 1. Associons à chaque point de Σ_1 la partition de l'ensemble de ses voisins naturels en deux sous-ensembles selon leurs labels (cf. la proposition 1). D'après les règles de remplissage de la trame (1), (2) et (3), les sous-ensembles en question associés à des points fortement voisins sont inclus les uns dans les autres, au sens où, pour un même label, chacun des deux singletons associés à un milieu d'arête $\sigma \in \Sigma_1$ fortement voisin d'un centre de face $\sigma' \in \Sigma_1$ est inclus dans l'un des deux sous-ensembles de sommets associés à σ ; et chacun des deux sous-ensembles (fortement connexes) associés à un centre de face $\sigma' \in \Sigma_1$ fortement voisin d'un centre de cube $\sigma'' \in \Sigma_1$ est inclus dans l'un des deux sous-ensembles de sommets associés à σ'' .

Du fait que Σ_1 est fortement connexe, ce sont donc les mêmes 2 labels x et y qui sont impliqués pour tous les points de Σ_1 ; Σ_1 apparaît ainsi comme un sous-ensemble fortement connexe de $\partial \tilde{X} \cap \partial \tilde{Y}$, où X est l'objet de label x et Y est l'objet de label y ; de sorte qu'on peut attribuer à Σ_1 le label ensembliste x, y . De plus, les sous-ensembles de la partition associée à chaque point de Σ_1 sont fortement connexes sur la trame initiale (cf. l'étude détaillée de la règle de remplissage (2) et la proposition 1); étant inclus les uns dans les autres comme expliqué ci-dessus, leurs réunions, qui sont les sous-ensembles de X et Y concernés, sont donc aussi fortement connexes sur la trame initiale.

Notons Σ le sur-ensemble de Σ_1 obtenu en rajoutant les centres de faces de cube élémentaire et les centres de cube qui ne sont pas dans Σ_1 et dont au moins un milieu d'arête est dans Σ_1 . Σ est fortement connexe comme Σ_1 (tout nouveau point de Σ est fortement adjacent soit à un point de Σ_1 milieu d'arête, cas d'un centre de face, soit à un nouveau point de Σ centre de face, cas d'un centre de cube). Comme de plus tout point de Σ_1 milieu d'arête est fortement adjacent à un point de X et à un point de Y , on a

$$\Sigma \subseteq (X \oplus B) \cap (Y \oplus B) = \partial \tilde{X} \cap \partial \tilde{Y} \subseteq F \quad (\text{V.10})$$

On dira que Σ est un morceau de surface de label ensembliste x, y . La réunion de tous les morceaux de surface F est entier, car tout point de F est dans un cube élémentaire dont les 8 sommets issus de la trame initiale n'ont pas tous le même label, et donc dont au moins un milieu d'arête a la label numérique 1; le point de F est donc dans le morceau de surface Σ déterminé par la composante fortement connexe $\Sigma_1 \subseteq F_1$ du milieu d'arête en question.

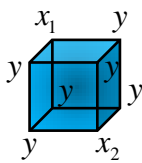
Proposition 2. *Si le centre d'un cube élémentaire est labellisé à 2 (point-bord simple), alors il y a 3 ou 4 ccl, avec de 2 à 4 labels distincts pour les sommets du cube. Et lorsque deux voisins directs du centre du cube sont labellisé à 2, ces ccl se présentent tour à tour*

dans le même ordre circulaire autour de ces deux centres de face.

Démonstration. • Supposons pour commencer qu'aucun des 6 voisins directs du centre du cube labellisé à 2 n'a le label 2 (point-bord simple isolé).

Si le cube a seulement 2 labels distincts x et y en ses sommets, avec au moins 3 ccl d'après la proposition 1, le début de la preuve de cette proposition montre que la seule possibilité pour le

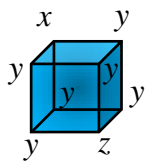
cube est (à rotation et symétrie près et quitte à intervertir x et y) le cas particulier à 3 ccl (où les sommets diamétralement opposés partagent les mêmes labels) :



Si le cube a au moins 3 labels distincts x , y et z , il en existe au moins deux, disons x et y , en les sommets d'une même arête. Par hypothèse chaque face du cube a au plus 2 sommets de labels distincts puisque leur centre n'est pas point-bord simple ; de sorte qu'un troisième label z est forcément en un sommet diamétralement opposé à (celui labellisé à) x ou à y , disons à x ; et idem pour un éventuel quatrième label t en un sommet qui serait donc diamétralement opposé à y et ainsi sur une même arête que z .

On voit en considérant une face contenant les labels z et t que l'existence de t distinct de x , y et z est incompatible avec l'hypothèse que le centre de ladite face n'a pas le label 2 (les 4 sommets restants sont labellisés à x ou y).

Puis en considérant la face contenant les labels y et z , dont les 2 sommets restants doivent être labellisés à x ou y , on voit que seul y est possible pour eux. De proche en proche en considérant d'abord les deux autres faces contenant z , on voit que seul y est aussi possible comme label pour les trois derniers sommets. On obtient donc l'unique configuration (à rotation et symétrie près) :



qui est l'autre cas particulier à 3 ccl cité plus haut.

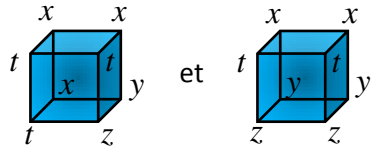
• Supposons à présent qu'au moins un des 6 voisins directs du centre du cube labellisé à 2 a aussi le label 2. Désignons dans la suite les faces du cube par $l(left)$, $r(right)$, $f(front)$, $b(back)$, $u(up)$ et $d(down)$, et supposons par exemple que le centre de la face r est un point-bord simple. D'après la règle de remplissage (3), il y a au plus un centre d'une autre face qui est point-bord simple ; cette face peut ou non avoir une arête commune avec la face r .

- Considérons d'abord la situation où les labels des sommets de la face r sont tous distincts :

$$\begin{cases} x \text{ pour le sommet } rub \text{ (notation pour l'intersection des faces right, up et back)} \\ y \text{ pour le sommet } rdb, z \text{ pour le sommet } rdf \text{ et } t \text{ pour le sommet } ruf. \end{cases}$$

On peut supposer quitte à faire une rotation que les centres des faces f , u , et b ne sont pas des points-bord simples, et donc que les sommets de ces faces ont au plus 2 labels distincts. Alors nécessairement le label du sommet lub est x (considérer les faces u et b) et le label de luf est t (considérer les faces u et f); celui de ldb est x ou y , ce qu'on note $x \vee y$ (considérer la face b) et celui de ldf est $t \vee z$ (considérer f). Et comme il est exclu par hypothèse que les centres des faces l et d soient tous deux des points-bord simples, les labels de ldb et ldf sont plus précisément dans l'ordre soit x et t , soit y et z .

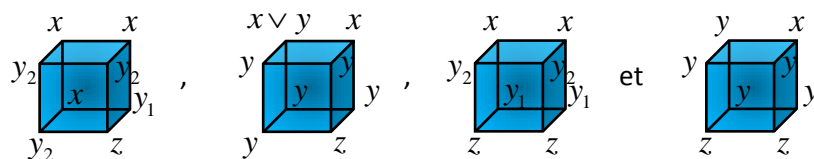
Dans les deux cas, on a affaire à 4 ccl aux labels distincts. Dans le premier cas, le centre de d est aussi un point-bord simple dont les labels des voisins naturels x, y, z, t sont les mêmes et dans le même ordre circulaire que ceux du centre de r ; dans le second cas, c'est le centre de l qui vérifie ces propriétés :



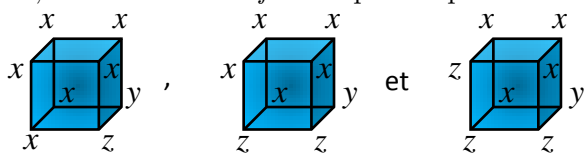
- Considérons ensuite la situation où il n'y a que 3 labels distincts x, y, z aux sommets de la face r ; autrement dit, en se replaçant dans le cadre précédent, supposons que $t = x$ ou $t = y$ (le cas $t = z$ se ramenant à $t = x$ par rotation ou symétrie).

. Dans le cas où $t = y$, on peut encore supposer quitte à faire une rotation suivi éventuellement d'une symétrie que les centres des faces f , u , et b ne sont pas des points-bord simples. Alors un raisonnement analogue au précédent montre que les sommets lub et ldb ont pour label $x \vee y$, luf a le label y et ldf a le label $y \vee z$. Et comme il est exclu que les centres des faces l et d soient tous deux des points-bord simples, les labels de ldb et ldf sont plus précisément dans l'ordre soit x et y , soit y et y , soit y et z .

Dans le premier cas, le label de lub doit être x puisque le centre de la face b n'est pas un point-bord simple; alors il y a 4 ccl de labels x, y_1, y_2 et z et le centre de d est un point-bord simple dont les labels des voisins naturels x, y_1, z, y_2 sont les mêmes et dans le même ordre circulaire que ceux du centre de r . Dans le deuxième cas, il y a 3 ccl aux labels distincts x, y et z et il n'y a pas d'autre centre de face point-bord simple. Dans le troisième cas, le label de lub peut être x (sous-cas 1); alors il y a 4 ccl de labels x, y_1, y_2 et z et le centre de l vérifie les mêmes propriétés que le centre de d dans le premier cas. Ou bien le label de lub peut être y (sous-cas 2); alors on est dans la même situation que dans le deuxième cas :

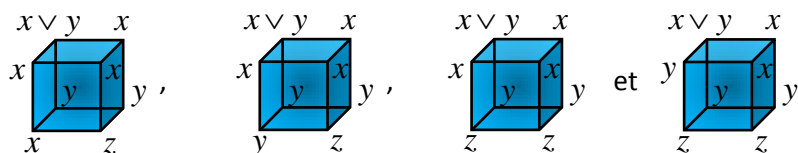


.Dans le cas où $t = x$, on peut supposer quitte à faire une symétrie que le centre de la face b n'est pas un point-bord simple, de sorte que les sommets lub et ldb de b ont les labels $x \vee y$. Le label de ldf est $x \vee y \vee z$, sinon les centres des faces d et f seraient tous deux des points-bord simples, ce qui est exclu par hypothèse. Supposons par l'absurde que le label du sommet luf soit distinct de $x \vee y \vee z$. Alors le centre de f serait un point-bord simple, donc ce ne devrait pas être le cas du centre des autres faces l , u et d . Or pour u , ceci imposerait au sommet lub d'avoir le label x , donc pour l , ceci imposerait au sommet ldb d'avoir aussi le label x , et le centre de d serait un autre point-bord simple : contradiction. Ainsi le label du sommet luf est $x \vee y \vee z$. Supposons pour commencer que le label de ldb est x , de sorte que le label de lub doit être x puisque le centre de la face b n'est pas un point-bord simple ; alors le centre de d est un point-bord simple, donc le centre de la face f ne doit pas l'être ; de sorte que le label y est impossible pour luf et ldf . Ainsi luf et ldf ont pour labels $x \vee z$, et même plus précisément dans l'ordre soit x et x , soit x et z , soit z et z , car le centre de f n'est pas un point-bord simple :

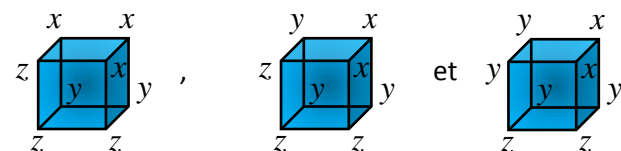


Dans ces 3 cas, on a affaire à 3 ccl aux labels distincts ; les labels des ccl voisines naturelles x, y, z du centre de d sont les mêmes et dans le même ordre circulaire que ceux du centre de r . Supposons à présent que le label de ldb est y . Comme lub a pour label $x \vee y$ et luf et ldf ont pour label $x \vee y \vee z$, il y a 18 possibilités à examiner, qu'on peut regrouper ainsi :

D'abord 4 cas doubles où on a affaire à 3 ccl aux labels distincts x, y et z et où le centre de d (premier cas), f (deuxième cas), l (troisième cas), f (quatrième cas) est un point-bord simple dont les labels des ccl voisines naturelles x, y, z sont les mêmes et dans le même ordre circulaire que ceux du centre de r :



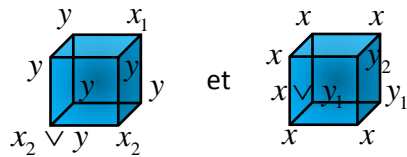
Ensuite 3 cas où on a aussi affaire à 3 ccl aux labels distincts x, y et z et où le centre de l (premier cas), u (deuxième cas), f (troisième cas) est un point-bord simple dont les labels des ccl voisines naturelles x, y, z sont les mêmes et dans le même ordre circulaire que ceux du centre de r :



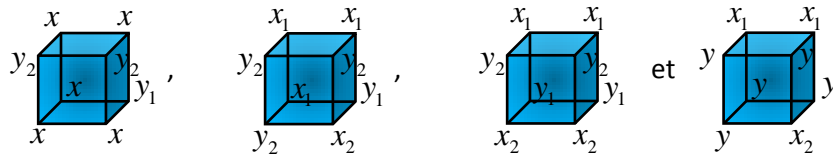
Les 7 cas restants où les triplets de sommets (lub, luf, ldf) ont respectivement pour labels $(x \vee y, y, x), (x, y, z)$ ou $(x \vee y \vee z, z, x \vee y)$, dans lesquels on a affaire à 4 ou 5 ccl, sont impossibles car il y a plus de 2 centres de face points-bord simples.

- Considérons enfin la situation où il n'y a que 2 labels distincts x, y aux sommets de

la face r dont le centre est point-bord simple ; autrement dit, en se replaçant dans le cadre précédent, supposons que $z = x$ et $t = y$. On peut supposer comme dans la situation à 4 labels distincts et quitte à faire une rotation que les centres des faces f , u , et b ne sont pas des points-bord simples, et donc que les sommets de ces faces ont au plus 2 labels distincts. Alors nécessairement les sommet lub , ldb , luf et ldf ont pour labels $x \vee y$. Si le label de lub est y , il en est de même pour ldb et luf (considérer les faces b et u). Dans ce cas on a affaire à 3 ccl de labels x_1 , x_2 et y et il n'y a pas d'autre centre de face point-bord simple. De même, si le label de luf est x , il en est de même pour lub et ldf (considérer les faces u et f). Dans ce second cas on a affaire à 3 ccl de labels x , y_1 et y_2 et il n'y a pas d'autre centre de face point-bord simple :



Par contre si les labels de lub et luf sont respectivement x et y , ldb et ldf ont pour labels $x \vee y$, ce qui donne 4 possibilités :

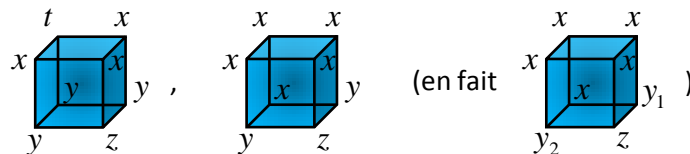


Dans le deuxième et le troisième cas on a affaire à 4 ccl et le centre de d (deuxième cas), l (troisième cas) est un point-bord simple dont les labels des ccl voisines naturelles x_1, y_1, x_2, y_2 sont les mêmes et dans le même ordre circulaire que ceux du centre de r . Dans le premier et le quatrième cas on a affaire à 3 ccl et il n'y a pas d'autre centre de face point-bord simple.

□

Remarque : On a établi en début de preuve de la proposition 2 que lorsque le centre du cube a le label 2 mais n'a aucun de ses 6 voisins directs de label 2, alors il existe exactement 3 ccl avec 2 ou 3 labels distincts. Et la suite de la preuve montre que ceci est encore vrai si le centre du cube a un seul de ses 6 voisins directs de label 2.

On en déduit que si un cube a au moins 4 ccl, il a au moins 2 centres de face qui ont le label 2. Mais même s'il a exactement 4 ccl qui se présentent tour à tour dans le même ordre circulaire aux sommets de deux faces (dont les centres sont donc labellisés à 2), il est faux que ceci implique que le centre du cube ait le label 2 et non 3, car il peut y avoir d'autres centres de face de label 2 ; voici un vrai et un "faux" contre-exemple :

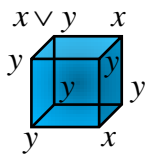


On peut cependant établir le résultat suivant qui, par élimination, assure qu'il y a entre 4 et 8 ccl dans un cube dont le centre a le label 3 :

Proposition 3. *Si un cube élémentaire a 3 ccl (et donc 2 ou 3 labels distincts pour les sommets du cube), son centre est un point-bord simple.*

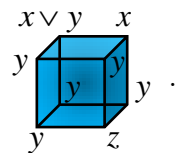
Démonstration. • Supposons pour commencer qu'aucun des 6 voisins directs du centre du cube n'a le label 2; alors comme le cube a 3 ccl, la proposition 1 assure que le centre du cube a bien le label 2. On suppose dorénavant que l'un des centres de face du cube, disons la face r , a le label 2.

• Considérons d'abord le cas où les sommets rub, rdb, rdf et ruf ont respectivement pour labels x, y, x et y . Comme il y a seulement 3 ccl, les deux sommets par exemple de labels y doivent être fortement connectés dans le cube; ceci impose que y est aussi le label de ldb et luf et aussi par exemple de ldf , le label de lub devant alors être $x \vee y$:



Comme tous les centres de faces autres que r ont le label 1, le centre du cube a bien le label 2.

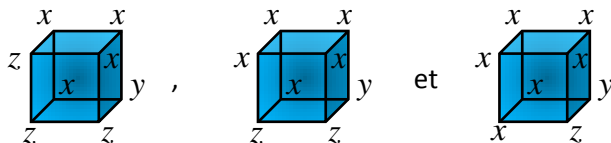
• Considérons à présent le cas où les sommets rub, rdb, rdf et ruf ont respectivement pour labels x, y, z et y . Comme le cube a seulement 3 ccl, les deux sommets de labels y doivent être fortement connectés dans le cube; ceci impose comme précédemment que y est aussi le label de ldb et luf et aussi par exemple de ldf , le label de lub devant être $x \vee y$:



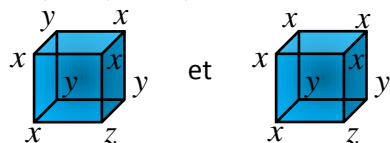
Comme tous les centres de faces autres que r ont le label 1, le centre du cube a bien le label 2.

• Considérons enfin le cas où les sommets rub, rdb, rdf et ruf ont respectivement pour labels x, y, z et x , dernier cas à considérer puisque le cube a seulement 3 ccl.

- Supposons que le label de ldb est x ; alors la ccl de label y est réduite au point rdb et les 3 triplets de labels possibles pour (ldf, luf, lub) sont $(z, z, x), (z, x, x)$ et (x, x, x) :

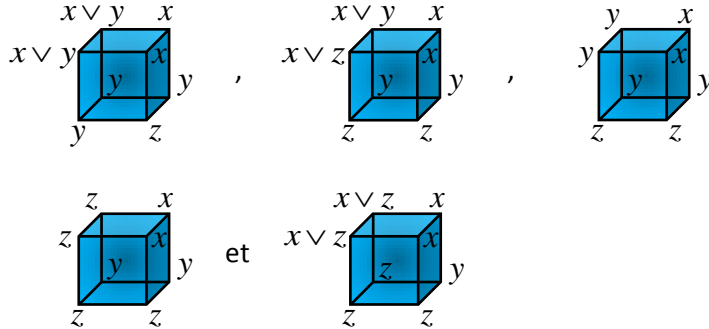


Supposons de manière analogue que le label de ldf est x ; alors la ccl de label z est réduite au point rdf et on obtient pour (ldb, lub, luf) 2 nouveaux triplets de labels possibles (y, y, x) et (y, x, x) :



Dans ces 5 cas, seul le centre de la face d a le label 2 comme la face r ; de sorte que le centre du cube a bien le label 2. - Il reste pour le couple (ldb, ldf) les 3 labels possibles

(y, y) , (y, z) et (z, z) , car (z, y) est incompatible avec seulement 3 ccl pour le cube. Pour $(ldb, ldf) = (y, y)$, on a $(lub, luf) = (xVy, xVy)$; pour $(ldb, ldf) = (y, z)$, on a $(lub, luf) = (xVy, xVz)$ ou $(lub, luf) = (y, y)$ ou $(lub, luf) = (z, z)$; et pour $(ldb, ldf) = (z, z)$, on a $(lub, luf) = (xVz, xVz)$, soit 14 cas possibles :



On observe que dans chacun des ces 14 cas, il y a exactement une face autre que r dont le centre a la label 2; de sorte que le centre du cube a bien le label 2.

□

Plaçons-nous dans le cas où exactement 2 voisins directs du centre d'un cube élémentaire (et donc aussi celui-ci) sont labellisé à 2. D'après la proposition 2, les listes ordonnées \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 des labels (éventuellement indicés) qui sont consécutifs dans l'ordre circulaire des ccl voisines naturelles de ces 2 voisins directs (en déclarant consécutifs également le dernier et le premier label) sont les mêmes (quitte si besoin à inverser l'ordre circulaire). Ceci justifie le fait de considérer que la portion de chemin qui relie ces voisins directs en passant par le centre du cube fait partie d'un même bord simple, commun à 3 ou 4 morceaux de surface Σ^i ayant pour labels ensemblistes les paires de labels consécutifs.

En conséquence chaque composante fortement connexe B_2 de l'ensemble F_2 des points de F de label numérique 2 est une courbe simple, éventuellement réduite à un point, éventuellement fermée, à laquelle on peut attribuer la liste ordonnée en question comme label global. Dans le cas où B_2 n'est pas fermée, elle peut avoir un point-bord multiple en prolongement de l'une et/ou l'autre de ses extrémités; le sur-ensemble B de B_2 obtenu par ajout de ces points-bord multiples éventuels est encore une courbe simple (fortement connexe) qu'on appellera *morceau de bord, de label \mathcal{L}* , incluse dans les mêmes 3 ou 4 morceaux de surface Σ^i . Comme par construction il n'existe pas de point-bord multiple isolé, la réunion de tous les morceaux de bord est $F_2 \cup F_3$ entier.

Dans la suite on ne retiendra que les B_2 et B qui sont des courbes fermées simples non réduites à un point ou (pour les B) des courbes simples dont les deux extrémités distinctes sont des points-bord multiples, et on supposera que la réunion B_Σ de ces morceaux de bord inclus dans un morceau de surface Σ est une (ou éventuellement la réunion de plusieurs) courbe(s) fermée(s) simple(s) disjointes) entourant (bordant) Σ_1 . Cette propriété, qui demanderait à être caractérisée, paraît vérifiée lorsque la topologie des objets n'est pas trop pathologique. Elle exclut en particulier qu'un objet soit entièrement entouré par un autre objet. Dans ce cas on utiliserait la procédure établit pour les images biphasées.

Ainsi l'image est décomposée en composantes fortement connexes d_6 : les surfaces, les

bords de surfaces et les points de bord multiples qui par définition sont tous centre de cube. Par construction, il ne peut pas exister une consécuité locale de ces points sur l'image. Par convention, le label 3 (noir) correspond au point de bord multiple, le label 2 aux bords de surface et le label 1 à celui des surfaces. Le label 0 correspondant à l'intérieur d'une phase n'étant bien sûr pas retenu (Fig.V.10) .

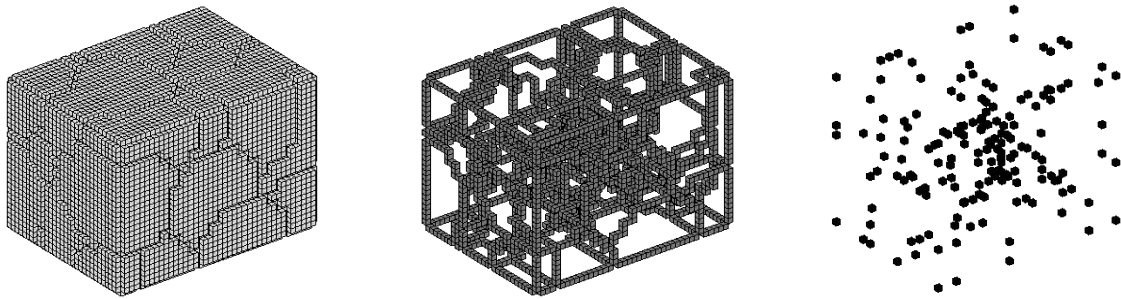


FIGURE V.10 – Composantes connexes 3D.

La forte connexité de l'ensemble des composantes de l'image permet l'étiquetage, ou la labellisation d_6 de tous les objets dans le but d'une étude séquentielle de chaque surface (Fig.V.11).

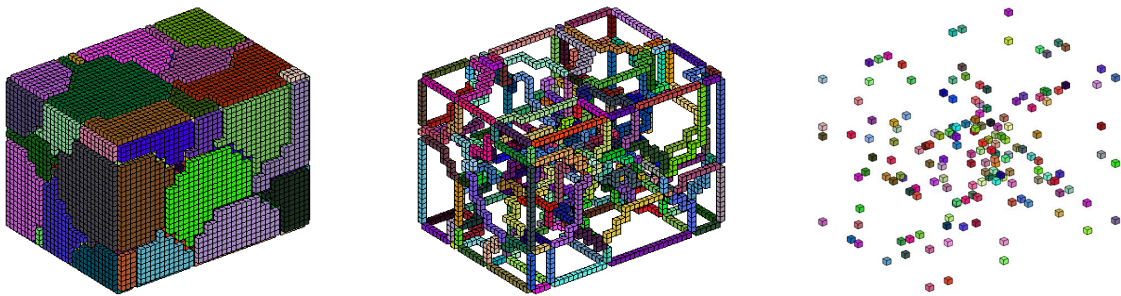


FIGURE V.11 – Labellisation des différentes composantes connexes 3D.

V.5.3 Adjonction des surfaces mitoyennes aux phases de l'image

Une image multiphasée est composée de phases sur lesquelles sont adjointes les surfaces de contact Σ . Ces surfaces ont des formes quelconques pouvant être localement fines à certains endroits (Fig. V.12).

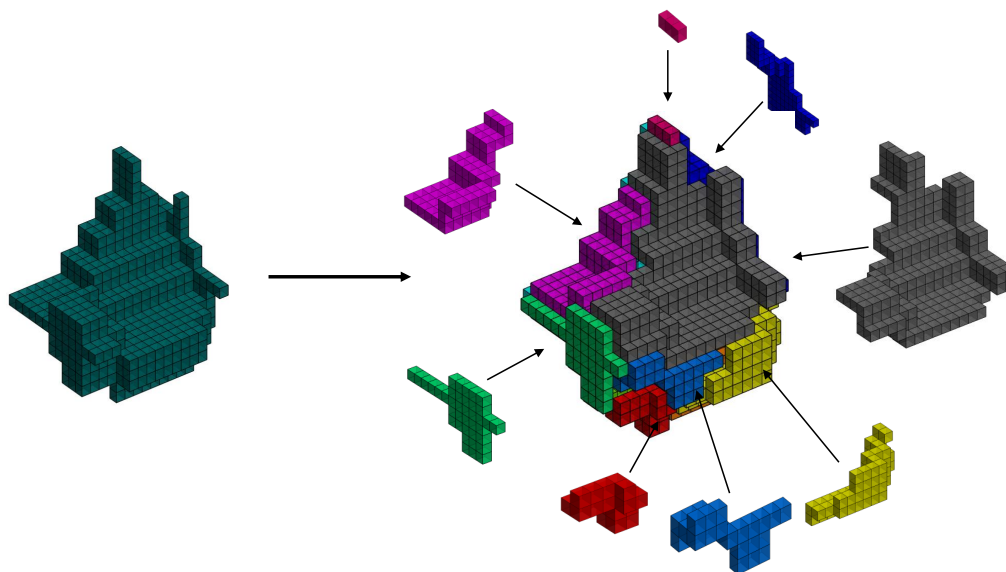


FIGURE V.12 – Surfaces adjointes à une phase.

Pour cette phase, la figure V.13 illustre un cas limite où une surface de contact Σ est de la dimension d'un voxel unique.

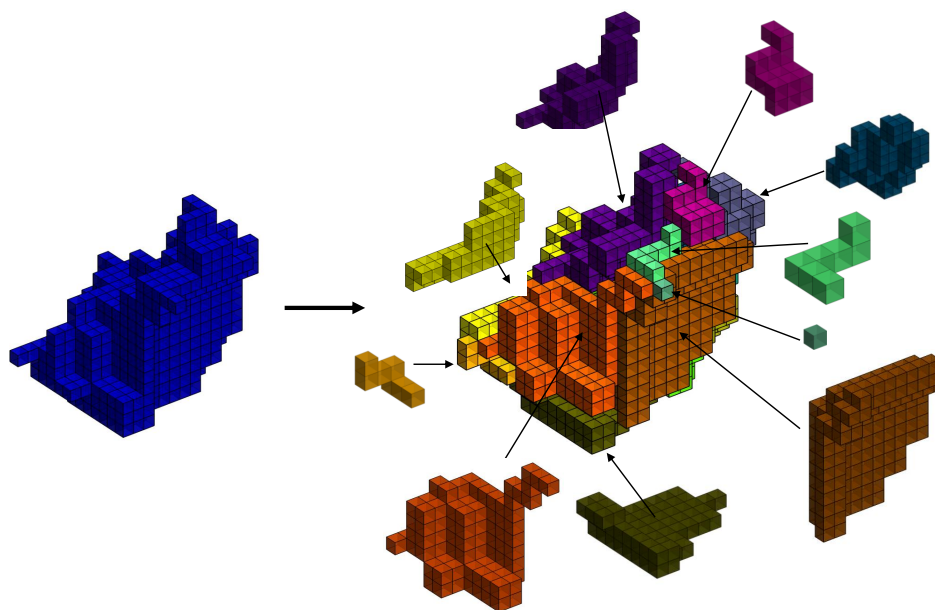


FIGURE V.13 – Surfaces adjointes à une phase.

Remarque importante On note, par cette démarche, que l'étude des composantes connexes permet la levée du caractère ambiguë de l'étude du nombre d'éléments constituant

le label. Si dans une fenêtre locale, la discussion se porte uniquement sur le nombre de composantes labélisées noté nc :

- $nc = 1$, la fenêtre est complètement incluse dans une phase,
- $nc = 2$, la fenêtre décrit la frontière entre de deux phases,
- $nc = 3$, la fenêtre décrit une arête de bord de surface,
- $nc > 3$, la fenêtre décrit un point multiple.

Alors, la zone contigüe entre les quatre phases est considérée comme un point triple et non pas une arête. En trois dimensions, le nombre d'éléments constituant un label composite n'est donc pas pertinent pour déterminer un point frontière. Notre approche conduit à la définition pertinente de chacune des composantes connexes de l'image.

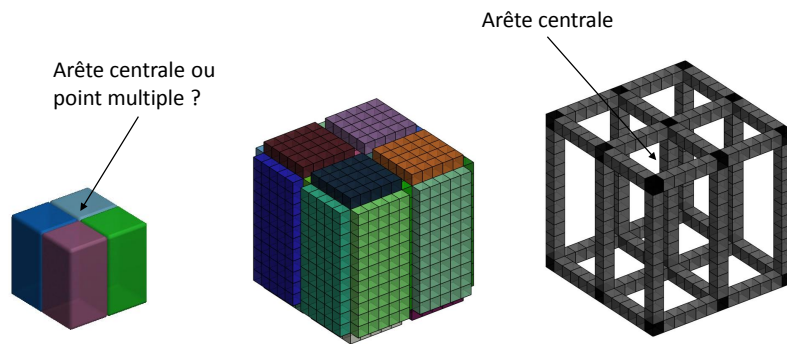


FIGURE V.14 – Définition exacte de l'arête centrale.

Avec notre approche, chaque morceau de surface est connexe fort (d_6) avec des bords de surface ainsi qu'avec des points de bord multiples.

notre phase et donc composée de l'adjonction de l'ensemble des différentes surfaces appartenant à celle-ci (Fig.V.15).

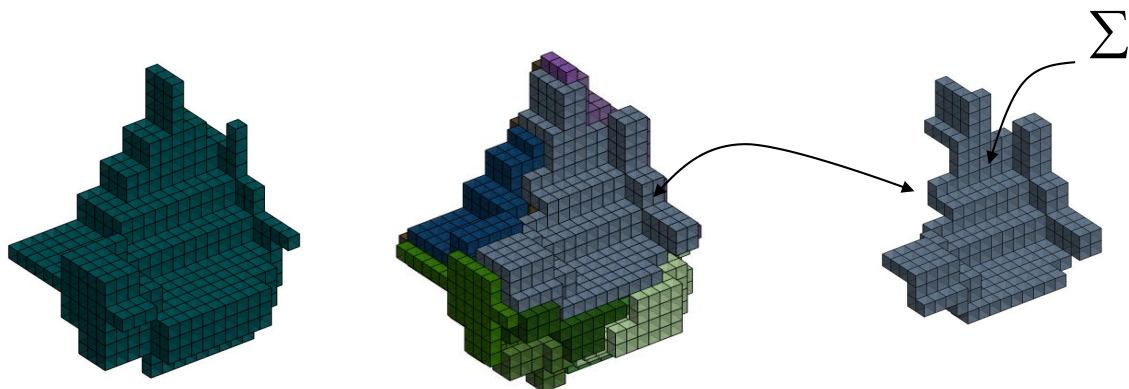


FIGURE V.15 – Σ sur une phase.

V.6 Triangulation des surfaces des phases

V.6.1 Choix d'une triangulation

Il s'agit de construire une triangulation de chaque morceau de surface Σ . L'idée la plus simple consiste à choisir pour sommets des points de Σ plus ou moins régulièrement répartis; et à considérer le graphe de Delaunay déterminé par le diagramme de Voronoï dans Σ ayant ces points pour germes et relatif à la distance géodésique de Σ .

Ceci demande à être précisé. En effet, l'emploi de la distance grossière d_6 au lieu de la distance euclidienne — même sur une surface plane et hors cadre géodésique — conduit à un diagramme de Voronoï dégradé : les frontières entre régions de Voronoï (en définissant la *région de Voronoï* dite aussi *zone d'influence* d'un germe comme étant l'ensemble des points strictement plus proches de ce germe que de tous les autres) peuvent être épaisses et sont couramment communes à plus de 3 régions de Voronoï; ce qui pose un premier problème dans la définition du graphe de Delaunay associé. Et de toute façon, la propriété cruciale de non chevauchement des triangles de Delaunay n'a rien d'évidente dans ce contexte élargi.

Par ailleurs, en vue de définir une triangulation cohérente de tous les morceaux de surface Σ , un soin particulier doit être consacré à leurs bords B_Σ : tous les points-bord multiples doivent en particulier être des germes de la triangulation et les autres points-bord simples de B_Σ retenus comme germes devront (aussi) rester les mêmes pour les autres surfaces Σ' qu'ils bordent. De plus les couples de germes de bord qui sont consécutifs sur une même composante fortement connexe C de B_Σ doivent être reliés par une arête du graphe de triangulation; alors que ceux qui ne sont pas consécutifs ne doivent pas l'être, pour éviter toute triangulation abusive

Remarque importante La triangulation de Delaunay, bien que pratique au sens dual géométrique du Voronoï, présente un risque d'erreur dans la définition des arêtes du contour de Σ . Si on prend une surface Σ dont la complexité morphologique est relativement faible, la seule courbure est représentée sur la figure [V.16](#) par les points x_{15}, x_{16}, x_{17} et x_1 ,

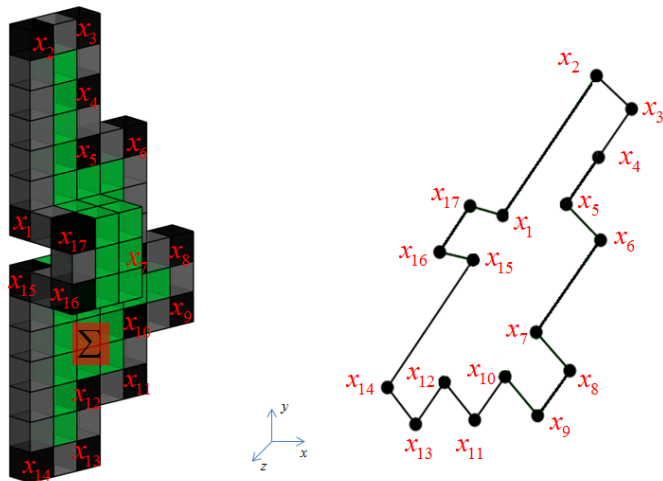


FIGURE V.16 – Paradoxe de Delaunay.

Si on établit un partitionnement en cellule de voronoï par les germes x_1, \dots, x_m , la triangulation de Delaunay duale renvoie deux arêtes $[x_{15}, x_{17}]$, $[x_{15}, x_1]$ qui n'appartiennent pas à la surface Σ . Cela est dû au fait que la cellule issue de x_{15} est contiguë à celle de x_{17} de même que celle de x_{17} et de x_1 . En revanche l'arête $[x_7, x_{10}]$ est légitime comme $[x_7, x_9]$ alors qu'elles sont dans une même configuration géométrique que respectivement $[x_{15}, x_1]$ et $[x_{15}, x_{17}]$: C'est le paradoxe de Delaunay (Fig.V.17).

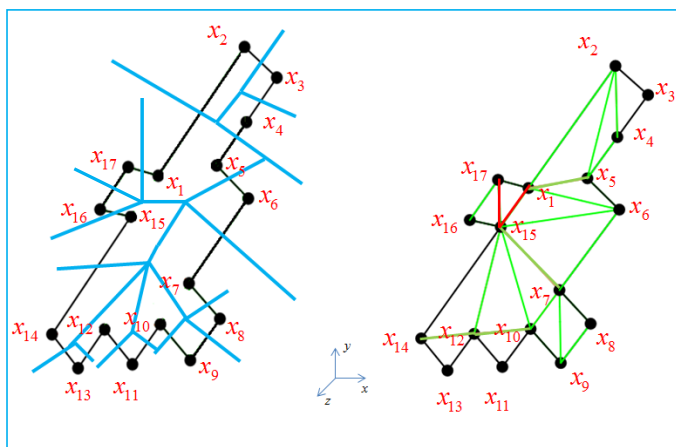


FIGURE V.17 – Triangle erronés.

La construction du dual géodésique issue du Voronoï dépend donc fortement des configurations d'échantillonnage des germes x_1, \dots, x_m . Cette triangulation reste juste de façon intrinsèque à Σ mais elle présente un risque de superposition de triangles sur des surfaces Σ mitoyennes.

V.6.2 Voronoï géodésique ou fonction label ensembliste

Comme un point sur deux de Σ est tel que la somme de ses coordonnées est paire, et tels sont en particulier tous les points-bord multiples et un point sur deux de B_Σ qui sont des centres de cube, on peut imposer de ne choisir comme germes dans Σ que des points vérifiant cette propriété; ceci permettra, comme vu pour les frontières entre objets sur la trame dédoublée, une définition (quasi) absente d'arbitraire du diagramme de Voronoï d_6 -géodésique associé. On pourra prendre comme germes, outre les points-bord multiples, tous les points où B_Σ fait un angle droit —pour être assuré de n'oublier aucune composante fortement connexe de B_Σ —, ainsi que d'autres points (centres de cube) de B_Σ répartis sur ses longs fragments en ligne droite.

Soit d_6^Σ la distance d_6 -géodésique dans Σ . Numérotons arbitrairement $x_1, \dots, x_m \in \Sigma$ les m germes retenus; et pour tout point $y \in \Sigma$, posons $\delta(y) = \min_{1 \leq i \leq m} d_6^\Sigma(y, x_i)$, valeur du minimum des distances d_6 -géodésiques de y aux germes x_1, \dots, x_m .

On définit sur Σ une fonction label ensembliste $\mathcal{L} : \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(\{1, \dots, m\})$ de la manière suivante :

- on attribue aux $x_1, \dots, x_m \in \Sigma$ les labels singletons respectifs (Fig.V.18) :

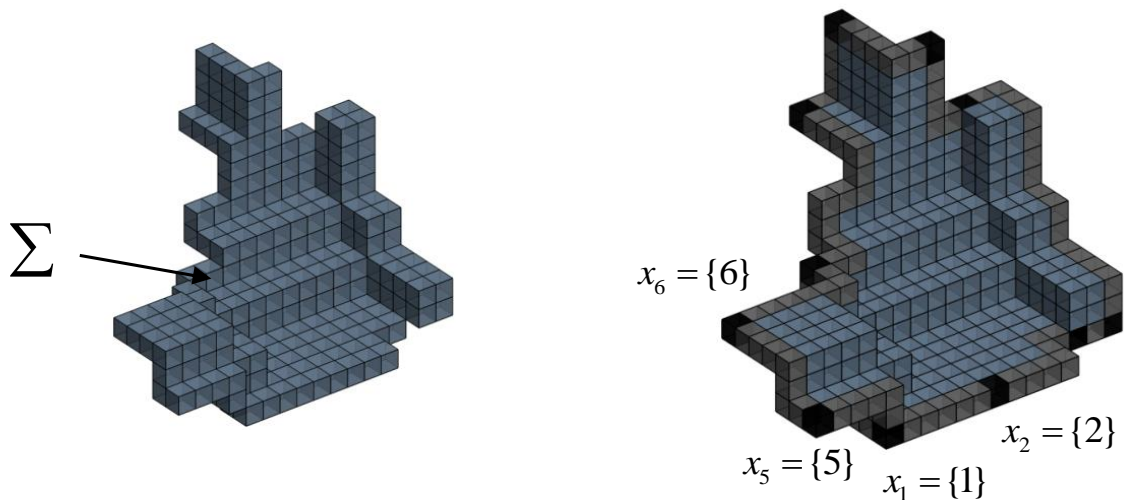


FIGURE V.18 – Singleton sur Σ .

- on propage ces labels $\{1\}, \dots, \{m\}$ par d_6 -dilatations incrémentales dans Σ : quand un point y de Σ est atteint pour la première fois par un ou plusieurs labels, on lui attribue comme label ensembliste (définitif) $\mathcal{L}(y)$ la réunion des labels des points d_6 -voisins déjà labellisés (en lesquels la valeur de δ est inférieure de 1). On arrête toute propagation quand tous les points de Σ ont été atteints et donc labellisés à idempotence de la propagation puisqu'elle est géodésique (Fig.V.19).

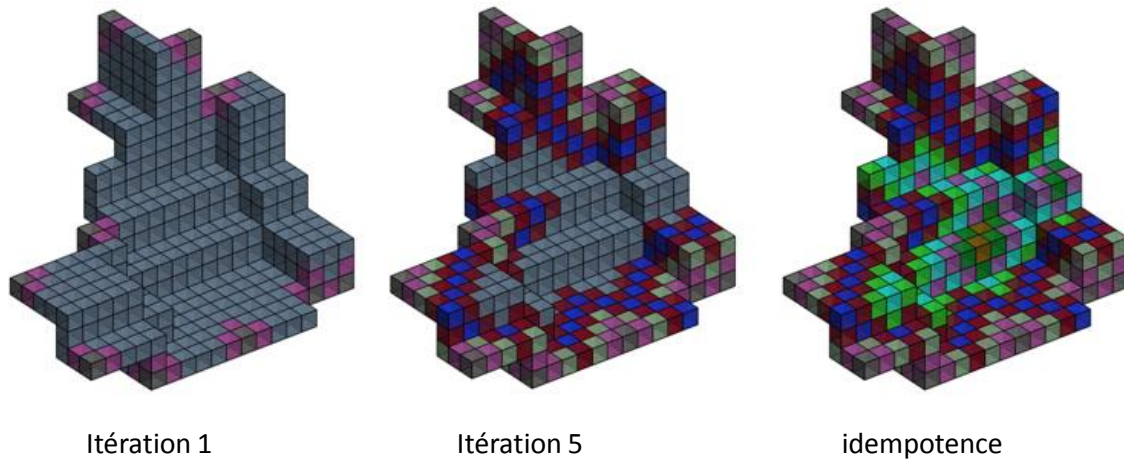


FIGURE V.19 – Idempotence de la propagation.

La zone d'influence (stricte) de chaque germe x_i est constituée de tous les points de Σ de label $\{i\}$; les frontières des cellules sont constituées de tous les autres points de Σ , dont les labels ne sont pas des singletons.

Un raffinement consiste à "amincir" quelque peu ces frontières en modifiant légèrement la règle d'attribution des labels ci-dessus : le label ensembliste attribué est comme précédemment la réunion des labels des points d_6 -voisins déjà labellisés, sauf dans le cas où au moins un de ces voisins a comme label un singleton et que celui-ci est contenu dans tous les autres labels des voisins déjà labellisés; auquel cas le label ensembliste attribué est simplement ce singleton. Ceci étend légèrement la zone d'influence correspondante, sans risque d'effacer les frontières entre zones d'influence distinctes comme le montre le premier point de la proposition suivante, et tout en conservant la connexité forte desdites zones d'influence comme le montre le second point :

Proposition 4. *Soit Σ un morceau de surface.*

- *Soient y et z deux points d_6 -voisins de Σ . On a $|\delta(y) - \delta(z)| = 1$, et y et z ne sont pas dans deux zones d'influence (strictes) distinctes.*
- *Soit $L = \mathcal{L}(y)$ le label d'un point $y \in \Sigma$; $\forall i \in L$, il existe au moins une géodésique γ_i (chemin de longueur d_6 minimale dans Σ) joignant x_i à y , telle que les labels ensemblistes successifs des points de γ_i en partant de x_i forment une suite croissante (au sens large) pour l'inclusion, depuis $\{i\}$ en x_i jusqu'à L en y .*

Démonstration. • En effet, deux points fortement adjacents dans Σ ont les sommes de leurs 3 coordonnées respectives décalées de 1. On en déduit (comme pour $C \subset B_\Sigma$) que la distance d_6^Σ entre deux points quelconques de Σ , qui est égale à la longueur d'une géodésique les joignant, a la même parité que celle de la différence entre les sommes de leurs coordonnées respectives.

Comme tous les germes ont la somme de leurs coordonnées paire, les distances d_6 -géodésiques d'un point quelconque $y \in \Sigma$ à chacun des germes x ont toutes la même

parité, celle de la somme des coordonnées du point y . Il en est donc de même de la parité de $\delta(y) = \min_{1 \leq i \leq m} d_6^\Sigma(y, xi)$.

Soient $y, z \in \Sigma$ deux points voisins, la différence $\delta(y) - \delta(z)$ est donc impaire; et on a plus précisément $\delta(y) = \delta(z) \pm 1$ car d'autre par δ est 1-lipschitzienne par inégalité triangulaire sur la distance d_6^Σ . Et si par exemple $\delta(y) = \delta(z) - 1$, le label est d'abord attribué à z dans le processus de propagation des labels; si ce label est $\{i\}$, le label de y attribué à l'étape suivante contient nécessairement $\{i\}$ et donc ne peut pas être un singleton $\{j\}$ avec $j \neq i$.

- Comme $i \in L$, il existe vu la procédure de labellisation au moins un point $z \in \Sigma$ voisin de y tel que $\delta(z) = \delta(y) - 1$ et tel que le label $\mathcal{L}(z)$ contient i . On a donc $\delta(z) = d_6^\Sigma(z, xi)$ et comme $i \in L$, on a aussi $\delta(y) = d_6^\Sigma(y, xi)$; de sorte que $d_6^\Sigma(z, xi) = d_6^\Sigma(y, xi) - 1$. Dans le cas où L n'est pas un singleton, on a de plus $\mathcal{L}(z) \subseteq L$; dans le cas où $L = \{i\}$ on a $\mathcal{L}(z) = \{i\}$, quitte à choisir un autre voisin $z \in \Sigma$ tel que $\delta(z) = \delta(y) - 1$ (du fait de la procédure raffiné ci-dessus). On définit z comme étant le point précédant y sur la géodésique en construction γ_i .

Si $z \neq x_i$, on raisonne avec z à la place de y , et ainsi de suite par récurrence inverse jusqu'à atteindre x_i , ce qui achève la détermination de γ_i .

□

Un exemple-type de succession des labels ensemblistes le long d'une géodésique γ_i bien choisie joignant x_i à y est le cas où $L = \mathcal{L}(y)$ est de cardinal 3, soit $L = \{i, j, l\}$

$$\underbrace{\{i\}, \dots, \{i\}}_{\geq 1 \text{ fois}}, \underbrace{\{i, j\}, \dots, \{i, j\}}_{\geq 0 \text{ fois}}, \underbrace{\{i, j, l\}, \dots, \{i, j, l\}}_{\geq 1 \text{ fois}} \quad (\text{V.11})$$

Remarque : on pourrait envisager le raffinement plus puissant suivant : le label ensembliste attribué est comme précédemment la réunion des labels des points d_6 -voisins déjà labellisés, sauf dans le cas où au moins un de ces voisins a un label non vide qui est contenu dans tous les autres labels des voisins déjà labellisés; auquel cas le label ensembliste attribué est simplement ce plus petit label non vide. La proposition 4 est toujours valide, même si la preuve de son second point doit être légèrement modifiée.

V.6.3 Construction du graphe-M sur le Voronoï ensembliste

Nous avons étudié dans le cas biphasé le graphe-M lors de la triangulation des microstructures 3D biphasées (chapitre IV.4.1), où le graphe-M était défini par des opérateurs ensemblistes de reconstruction géodésique d'un germe à un autre le long d'un parcours établi par la *lpe* locale mitoyenne à une cellule de Voronoï géodésique.

Dans cette section, nous allons redéfinir le graphe-M de façon déterministe à l'échelle des germes.

V.6.3.1 Principe du Graphe-M

Plaçons-nous d'abord dans le cas élémentaire du plan euclidien. On dit que $p \geq 3$ points $\{x_{i1}, \dots, x_{ip}\}$. parmi $\{x_1, \dots, x_m\}$. forment un sous-ensemble cocyclique s'ils se situent sur le cercle frontière d'un disque fermé ne contenant aucun autre point x_j , appelé disque circonscrit à $\{x_{i1}, \dots, x_{ip}\}$.

Sous l'hypothèse qu'il existe des sous-ensembles cocycliques et que leur cardinal p n'est nulle part supérieure à 3, le graphe de Delaunay "dual" du graphe de Voronoï de germes x_1, \dots, x_m a par définition pour sommets ces germes et pour arêtes les segments $[x_i, x_j]$ entre germes x_i et x_j d'un même sous-ensemble cocyclique, autrement dit entre germes dont les zones d'influence ont une frontière commune.

On peut envisager un autre type de graphe associé au même diagramme de Voronoï, qu'on désignera comme le graphe-M :

- Ses sommets sont les germes x_1, \dots, x_m ainsi que tous les centres des disques circonscrits aux sous-ensembles cocycliques $\{x_{i1}, \dots, x_{ip}\}$, centres notés y_L où $L = \{i_1, \dots, i_p\} \in \mathcal{P}(\{1, \dots, m\})$.

- Les arêtes sont les segments $[x_i, y_L]$ où $i_j \in L$ (arêtes entre les germes et les points multiples des frontières de leur zone d'influence) ; et les segments $[y_L, y_M]$ où $\text{card}(L \cap M) = 2$ (points multiples voisins sur la frontière commune à deux zones d'influence).

Cette construction a les mêmes caractéristiques évoquées au chapitre IV.4.1 :

- elle constitue de manière quasi-évidente une triangulation correcte ;
- le cardinal p des sous-ensembles cocycliques peut dépasser 3 sans qu'il soit nécessaire d'aménager la définition (contrairement au cas du graphe de Delaunay) ;
- elle est typiquement 3 fois plus fine que la triangulation de Delaunay (un triangle entre 3 germes cocycliques est remplacé en général par 6 "demi-triangles") ;
- elle ne comporte aucune arête entre germes.

On propose d'étendre de cette construction - d'apparence robuste - dans le cadre géodésique et discrétisé défini précédemment : en se référant à la procédure de labellisation décrite ci-dessus, on dira que p germes $x_{i1}, \dots, x_{ip} \in \Sigma$ forment un sous-ensemble (géodésiquement) cocyclique si :

$L \stackrel{\text{déf}}{=} \{i_1, \dots, i_p\} \in \mathcal{L}(\Sigma)$ et L **maximal**, (Fig.V.20) (pour la relation d'inclusion) dans $\mathcal{L}(\Sigma)$; tout point $y \in \Sigma$ tel $\mathcal{L}(y) = L$ vérifie en effet

$$\delta(y) = d_6^\Sigma(y, x_{i1}) = \dots = d_6^\Sigma(y, x_{ip}) \text{ et } \forall k \notin \{i_1, \dots, i_p\}, d_6^\Sigma(y, x_k) > \delta(y)$$

c'est-à-dire qu'il est centre d'un disque circonscrit au sous-ensemble $\{x_{i1}, \dots, x_{ip}\}$; on notera y_L l'un d'entre eux qui minimise δ , que l'on désignera abusivement dans la suite comme le centre du disque circonscrit à $\{x_{i1}, \dots, x_{ip}\}$.

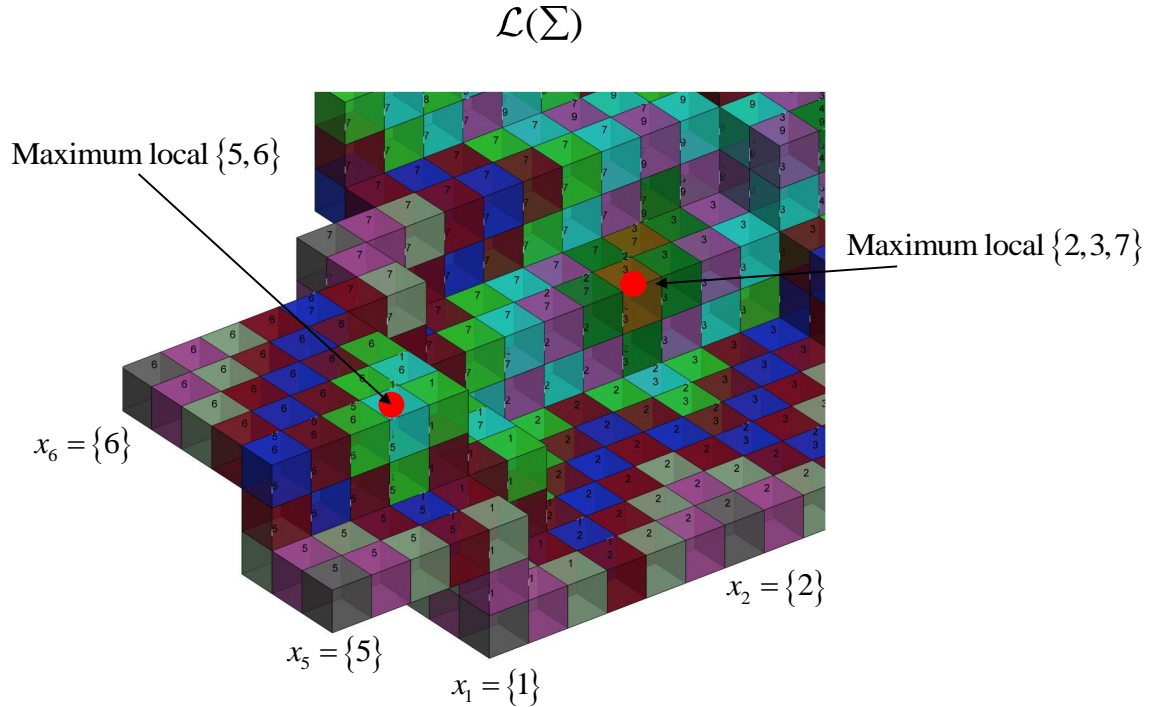


FIGURE V.20 – Maximas locaux sur Voronoï géodésique.

En fait, avec le raffinement de labellisation spécifié plus haut, les labels maximaux peuvent être des sous-ensembles stricts des précédents ; de sorte qu'en reprenant les notations précédentes on peut avoir $d_6^\Sigma(y, x_k) = \delta(y)$ pour certains $k \in \{i_1, \dots, i_p\}$ (réduction fictive des cardinaux des sous-ensembles cocycliques, souvent élevés). Mais malgré cela, du fait de la "grossièreté" de la distance d_6 , on peut rencontrer la situation où deux éléments distincts L et M de la liste des labels maximaux vérifient $\text{card}(L \cap M) > 2$, conduisant couramment à une triangulation non conforme (chevauchement de triangles).

Une façon de résoudre le problème consiste alors à fusionner ces labels en un (pseudo) label maximal $L \cup M$ et un pseudo centre de disque circonscrit associé $y_{L \cup M}$, par exemple y_L si $\text{card } L > \text{card } M$ et y_M sinon. On reprend l'opération de fusion sur la nouvelle liste de labels, en continuant jusqu'à ce que la condition $\text{card}(L \cap M) \leq 2$ soit vérifiée pour toute la liste de (pseudo) labels maximaux.

Il reste à tenir compte spécifiquement des bords de la surface Σ pour compléter convenablement le graphe-M ; on peut commencer par remarquer :

Lemme : la longueur (selon la distance d_6) de chaque composante fortement connexe \mathcal{C} de B_σ est un multiple de 4.

Démonstration. \mathcal{C} est supposée être une courbe fermée simple. Les points consécutifs de \mathcal{C} sont alternativement des centres de cubes et des centres de faces de cubes, de sorte que sa longueur est le double de celle de la courbe homothétique \mathcal{C}' de rapport 1/2, obtenue en ne conservant que les centres de cubes considérés comme consécutifs.

Montrons qu'une telle courbe \mathcal{C}' sur la trame \mathbb{Z}^3 est de longueur paire (selon la distance d_6) : en effet deux points d_6 -voisins de \mathbb{Z}^3 ont les sommes de leurs 3 coordonnées respectives décalées de 1. On en déduit que la longueur d'une courbe quelconque de \mathbb{Z}^3 joignant deux points a et b a la même parité que celle de la différence entre les sommes des coordonnées respectives de a et de b . Il suffit de considérer un point quelconque $b = a$ de la courbe \mathcal{C}' pour conclure. □

Pour déterminer les arêtes de bord, c'est-à-dire entre germes de bord consécutifs, on propage les labels ensemblistes des germes qui sont dans B_Σ par d_6 -dilatations incrémentales dans B_Σ , c'est à dire selon la distance d_6 -géodésique dans chaque composante connexe \mathcal{C} de B_Σ : quand un point de B_Σ est atteint pour la première fois par un ou par deux labels, on lui attribue comme (nouveau) label ensembliste selon le cas celui du point voisin ou la réunion de ceux de ses deux points voisins. On arrête toute propagation quand tous les points de B_Σ ont été atteints et donc labellisés.

Les labels doubles $\{i, j\}$ attestent du caractère consécutif des germes x_i et x_j sur B_Σ , qu'on relie par l'arête $[x_i, x_j]$. Les labels des points de B_Σ depuis x_i jusqu'à x_j forment une suite de la forme

$$\underbrace{\{i\}, \dots, \{i\}}_{\geq 1 \text{ fois}}, \{i, 1\}, \underbrace{\{l\}, \dots, \{l\}}_{\geq 1 \text{ fois}} \tag{V.12}$$

En fait, pour éviter que des arêtes du graphe-M proprement dit ne se superposent même partiellement avec ces nouvelles arêtes — les seules reliant des germes entre eux —, il suffit de garantir qu'aucun centre de disque circonscrit y_L ne soit sur le bord de Σ . Une façon d'y parvenir est de *modifier les conditions initiales* de la procédure de labellisation raffinée des points de Σ détaillée ci-dessus : on adjoint aux germes x_1, \dots, x_m tous les points de B_Σ dont la somme des coordonnées est paire, quel l'on munit des labels simples ou doubles attribués juste ci-dessus. Du fait de ces "germes fictifs" supplémentaires, la procédure de labellisation dans Σ ne conduit plus à proprement parler à un graphe de Voronoï, mais plutôt à une sorte de skiz... Et comme les points y_L sont des sommets du graphe-M, on peut estimer qu'on dispose ainsi d'un nombre suffisant de sommets dans Σ_1 et choisir tous les germes x_1, \dots, x_m sur le bord B_Σ . Les triangles déterminés par le graphe-M complété au bord sont alors de deux types : les sommets en sont soit deux points de bord x_i et x_j consécutifs et l'unique point y_L dont le label maximal L contient i et j (cette unicité, qui serait à prouver, est lié à la position de bord de x_i et x_j) ; soit deux points y_L et y_M dont les labels maximaux ont pour intersection une paire $L \cap M = \{i, j\}$ et l'un quelconque des 2 points (de bord, non consécutifs) x_i et x_j .

Pour finir, il est possible de réduire un peu le nombre de triangles en dérogeant au principe de ne pas relier par une arête deux germes x_i et x_j non consécutifs d'une composante fortement connexe \mathcal{C} de B_Σ , dans le cas particulier suivant :

• ces deux germes sont les extrémités de deux arêtes de bord consécutives $[x_i, x_k]$ et $[x_k, x_j]$ orthogonales en x_k et chacune de longueur 2 ou 4 ; $L = i, j, k$ est un label maximal. En effet dans ce cas le sommet y_L vérifie $\delta(y_L) = 2$, les arêtes $[x_i, y_L]$ et $[y_L, x_j]$ sont alignés (ou presque) et il existe un autre (pseudo) label maximal M tel que $L \cap M = \{i, j\}$. L'alignement en question assure qu'on ne commet pas d'abus en supprimant ces deux arêtes —ainsi que le sommet y_L et la dernière arête associée $[y_L, y_M]$ —au bénéfice de la nouvelle arête $[x_i, x_j]$. Les quatre anciens triangles (x_i, x_k, y_L) , (x_j, x_k, y_L) , (y_L, y_M, x_i) et (y_L, y_M, x_j) sont ainsi remplacés par leurs réunions deux à deux (x_k, x_i, x_j) (triangle dont les 3 sommets sont des germes) et (y_M, x_i, x_j) .

V.6.4 Définition de germes supplémentaires sur chaque courbe C composante connexe du bord

Afin d'affiner la triangulation, on définit un pas de triangulation λ . On procède par λ dilatation d_6^C géodésique itérative d'un point multiple x_i à un autre. A chaque λ itération, un nouveau point x_i est ajouté à la liste des germes (Fig.V.21) .

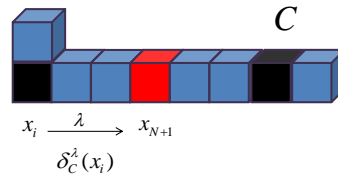


FIGURE V.21 – Echantillonnage sur C .

V.6.4.1 Définition des germes dans Σ_1

En plus des maxima locaux, il est possible de densifier, s'il est nécessaire, la densité de germes de triangulation dans une surface Σ

Pour tout point $y \in \Sigma_1$ et tout ensemble de germes G de Σ , notons $\delta_G(y) = \min_{x \in G} d_6^\Sigma(y, x)$ la valeur du minimum des distances d_6 – géodésiques de y aux points de G .

- On prend initialement pour G l'ensemble des germes du bord ainsi que les labels maximaux ;

- on détermine un point y de $\Sigma_1 \setminus G$ tel que ;

$$\delta_G(y) > \frac{\text{card}\Sigma}{4} \quad \text{et} \quad \forall z \in \Sigma_1, \delta_G(z) \leq \frac{\text{card}\Sigma}{4} \quad \text{ou} \quad \delta_G(z) \geq \delta_G(y) \quad (\text{V.13})$$

on adjoint ce point y à G et on modifie δ_G en conséquence ; - on itère l'étape précédente jusqu'à ce qu'il n'existe plus de point y de $\Sigma_1 \setminus G$ pour lequel $\delta_G(z) > \frac{\text{card}\Sigma}{4}$

V.7 Résultat de la triangulation morphologique

V.7.1 Triangulation d'une surface

Sur une surface, le résultat de la triangulation par le graphe-M conduit à la définition d'une structure triangulaire connexe dont la figure V.22 indique sur deux orientations les différentes connexions entre les germes de bords ainsi que les maxima locaux du Voronoï géodésique.

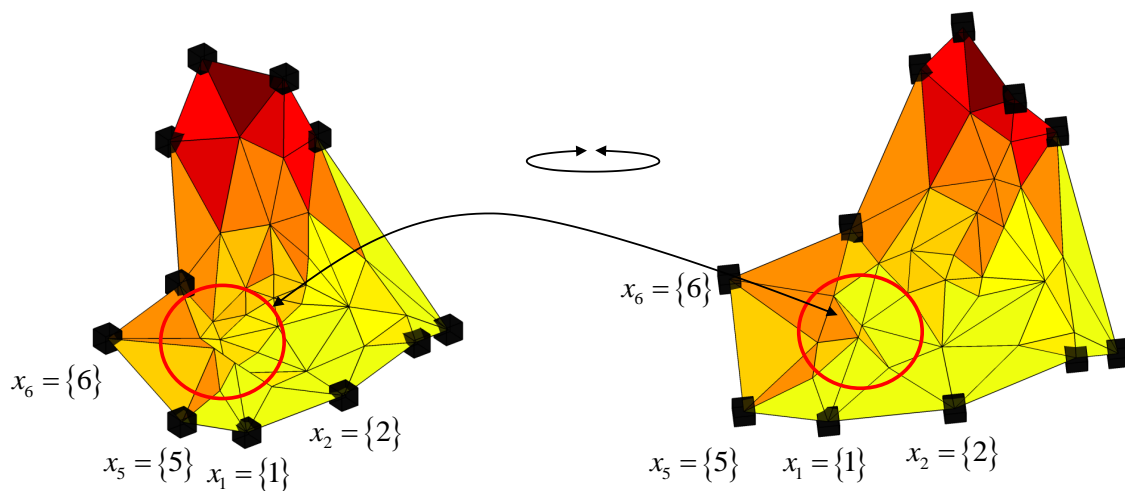


FIGURE V.22 – Triangulation de surface par le Graphe-M.

On note un estompage conséquent de l'effet d'escalier ou « pixélisation » lié à toute image digitalisée ; notre triangulation considère rectiligne les bords de surface entre deux points de bords consécutifs.

Concernant la forme des triangles, nous rappelons que notre étude est basée sur une triangulation la plus juste et la plus fidèle de la morphologie de chacune des phases d'une image dans de but de minimiser le nombre de triangles générés. La qualité des éléments triangulaires, leur forme, leur nombre sont des paramètres qui seront pris en compte lors de l'adaptation de la triangulation en maillage tétraédrique . Cette opération sera réalisée en post traitement par des d'outils numériques déjà existants (par exemple ghs3D [Simulog, 2003]).

V.7.2 Triangulation des surfaces d'une phase

On poursuit la procédure sur l'ensemble des surfaces d'une phase où dans un premier temps seuls les points de bords, ainsi que les maxima locaux sont considérés (Fig.V.23).

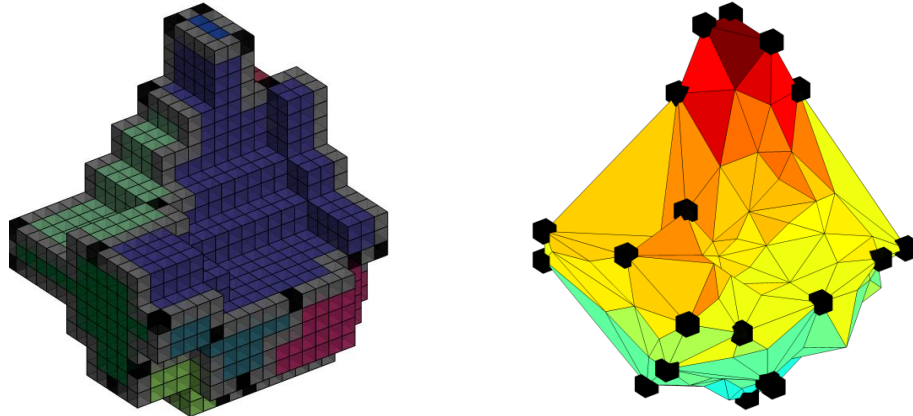


FIGURE V.23 – Triangulation simple d'une phase.

Dans un deuxième temps, la précision de la triangulation est affinée par incrément de λ dilatation d_ϵ sur les bords de surfaces ainsi que par la densification contrôlée de germes supplémentaires dans chaque Σ (Fig. V.24).

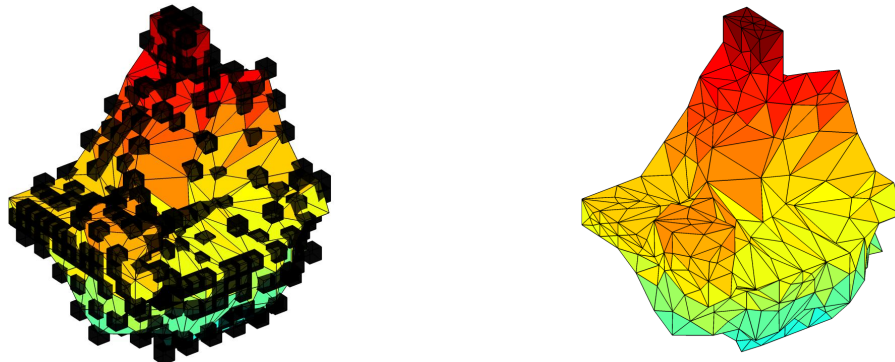


FIGURE V.24 – Triangulation "affinée" par une densification de Σ et de C .

V.7.3 Triangulation de l'ensemble de l'image et maillage volumique

Les surfaces sont indépendantes ; on établit une procédure itérative de construction de la triangulation globale (Fig.V.25).

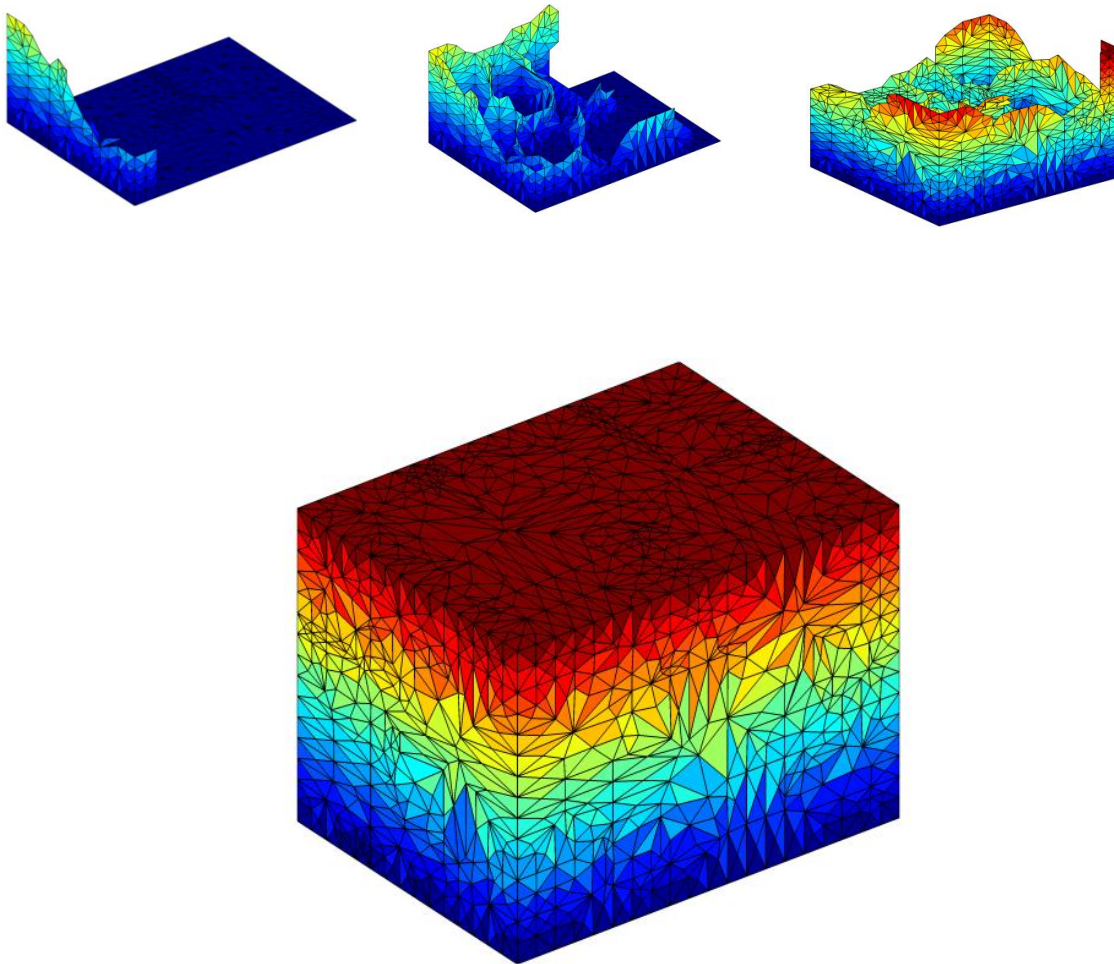


FIGURE V.25 – Construction itérative de la triangulation.

Cette triangulation morphologique optimisée est donc un pavage triangulaire des différentes surfaces des phases de l'image. Elle contient 2344 éléments triangulaires répartis sur les 15167 voxels de la surface totale de l'image à trianguler. Elle est donc 6,5 fois moins dense que l'image elle-même. Ce nombre sera comparé à celui obtenu par opération du Marching Cube dans la section V.8. On note le respect fidèle de la géométrie globale de l'image comme les arêtes et coins de l'image.

Ainsi, notre triangulation sera utilisée directement dans un code de calcul en vue d'une adaptation spécifique à un calcul éléments finis. On note que ce résultat évite l'étape de « dérafinage » appelée aussi « décimation » nécessaire pour des techniques type « multiple marching cube » très prolifique en nombre d'éléments générés. L'étape de la décimation est parfois à la fois coûteuse en temps de calcul au regard du nombre d'éléments à étudier, mais aussi complexe car pour décimer correctement une zone surfacique de maillage, l'ap-

proximation analytique locale (nurbs polynomes 3D ...) de la surface à analyser est parfois requise.

Dans notre cas, la surface possède donc une densité de maille anisotrope, avec une densité de triangles proportionnelle à λ fois moins importante que le nombre de voxels de l'image. Un optimiseur de maillage comme "Yams" peut optimiser le facteur de forme des triangles afin qu'un mailleur volumique comme "ghs3d" utilise chacun des triangles comme base de tétraèdre pour une technique type maillage frontal, par exemple (Fig.V.26).

Ce "remplissage tétraédrique" de la surfaces des phases représente, comme dans le cas 3D biphasée, la principale vérification de la triangulation. Ce résultat conduit au maillage de la microstructure.

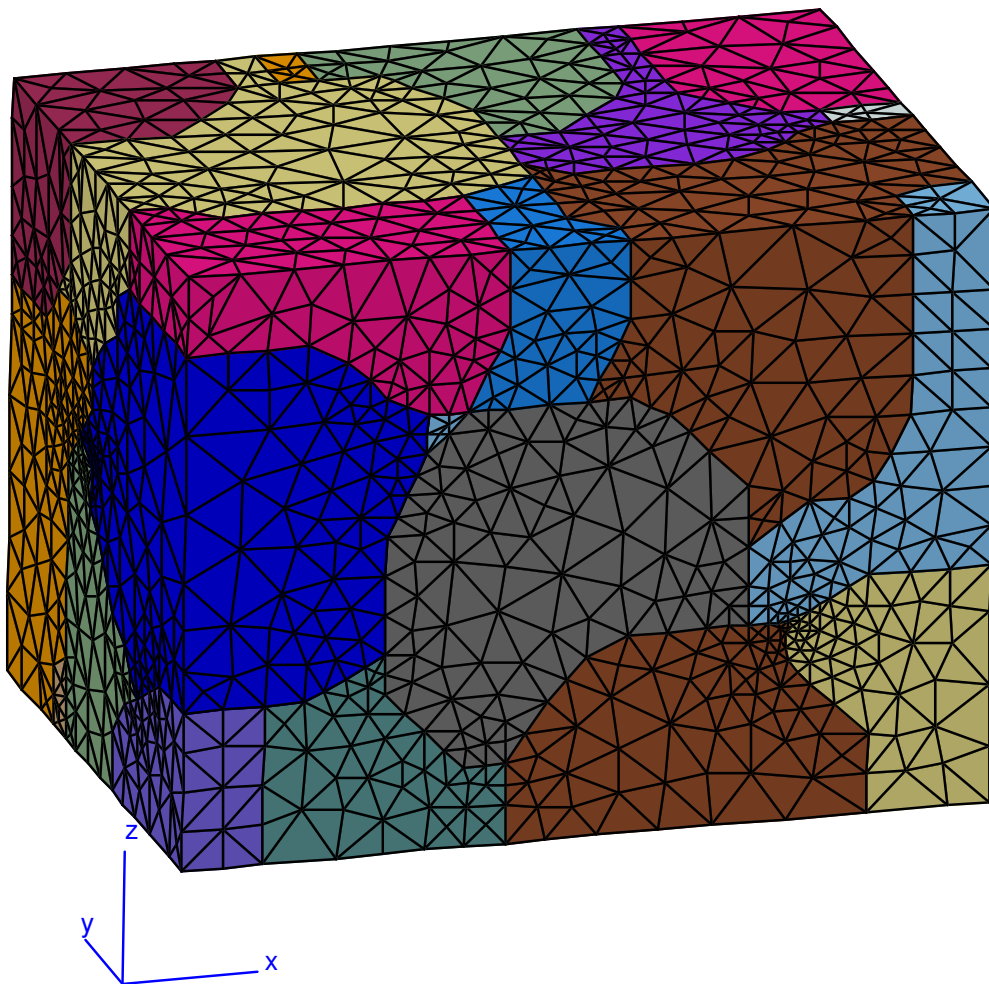


FIGURE V.26 – Conversion de la triangulation en maillage tétraédrique.

Il apparaît aussi dans cette étude qu'il n'est pas nécessaire de trianguler finement la totalité de la microstructure afin de décrire des surfaces ponctuelles que l'exemple figure V.4 aurait pu suggérer. La figure V.27.a illustre, dans le cercle vert, une zone de l'image où la largeur est de un unique voxel et la hauteur contient une surface verticale plane composée d'un nombre plus important de voxels. Notre triangulation morphologique positionne des

éléments triangulaires fins des zones fines et des triangles plus étirés dans des zones plus larges de l'image (Fig. V.27.b). Le mailler volumique utilisé conserve cette propriété (Fig. V.27.c).

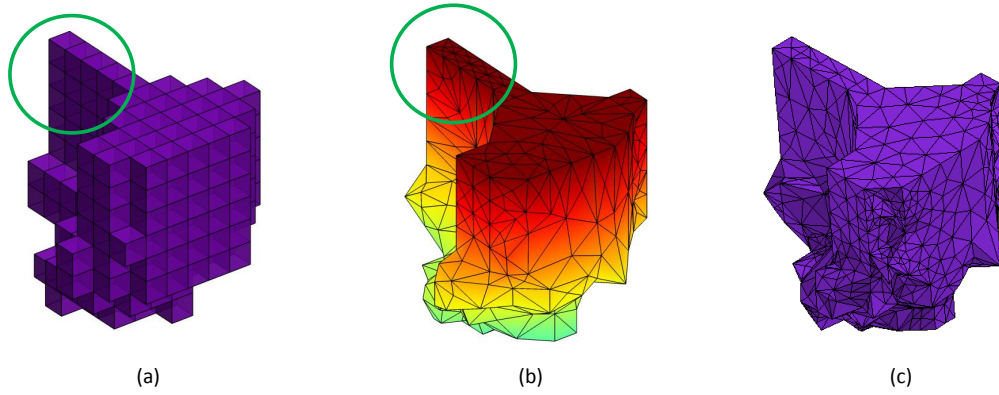


FIGURE V.27 – Triangulation morphologique adaptative, a) Phase voxélisée, b) triangulation surfacique morphologique, c) maillage volumique.

V.7.4 Variation du pas de triangulation

Dans notre approche, la limite inférieure de la densité de maillage est obtenue par l'unique considération des points multiples comme germes de triangulation. On ne rajoute pas des points sur le contour \mathcal{C} ni même sur les différentes surfaces Σ . Le résultat est un maillage très simplifié qui donne un aspect rectiligne à la frontière des différentes phases (Fig.V.28).

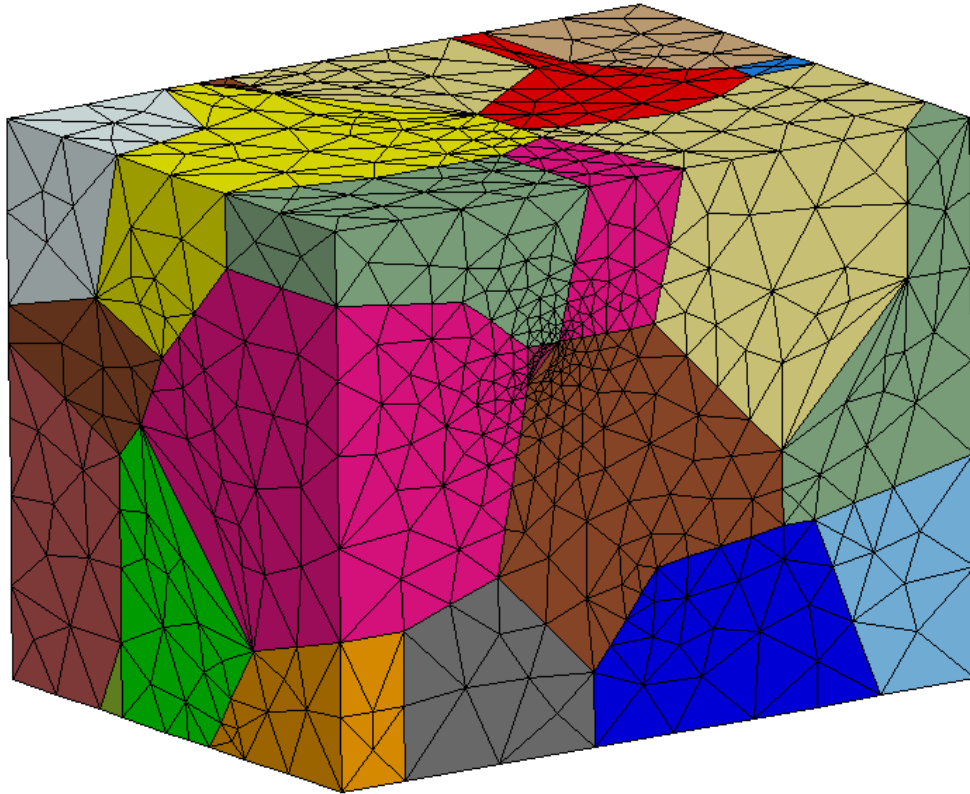


FIGURE V.28 – Triangulation limite.

Le pas de triangulation est un paramètre fort dans une stratégie de maillage des microstructures. Dans notre étude, λ est constant mais bien évidemment il peut être variable et défini en fonction de la topologie de la composante connexe considérée.

Remarque importante concernant les outils d'optimisation de maillage

Un des problèmes lors d'un calcul EF sur un maillage issu d'une image est l'effet d'escalier lié à la pixelisation/voxelisation inhérente au codage de l'image elle-même dans un espace discret. Ces "escaliers" provoquent des concentrations de contraintes locales qui n'autorisent qu'une interprétation globale du calcul. Il est très délicat d'estomper ces effets d'escalier sans compromission avec la forme originale. Dans l'hypothèse d'une optimisation simple du maillage, par exemple par le logiciel Yams [Frey, 2001], l'effet d'escalier reste persistant (Fig.V.29).

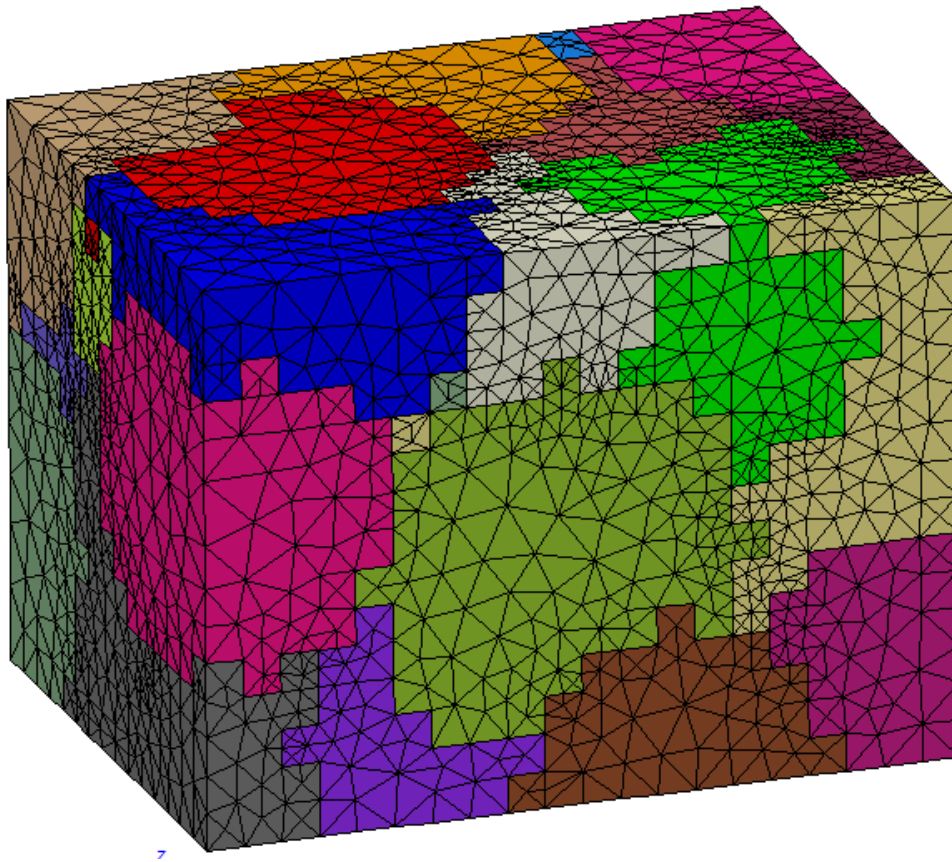


FIGURE V.29 – Efet d’escalier.

Par conséquent il est préférable d’obtenir directement une triangulation optimisée car l’exercice du lissage du maillage, dans le cas multiphasé, peut s’avérer délicat.

V.7.5 Vérification du maillage par un calcul EF

Comme dans le cas biphasé 3D, la vérification du maillage est précédemment réalisée lors du remplissage tétraédrique de la triangulation. Nous vérifions l'adaptation du maillage obtenu par un calcul mécanique en effectuant un calcul EF. La procédure de chargement est identique à celle utilisée au chapitre IV.6.3.

La figure V.30 illustre le champ de déplacement U_1 dans la direction x .

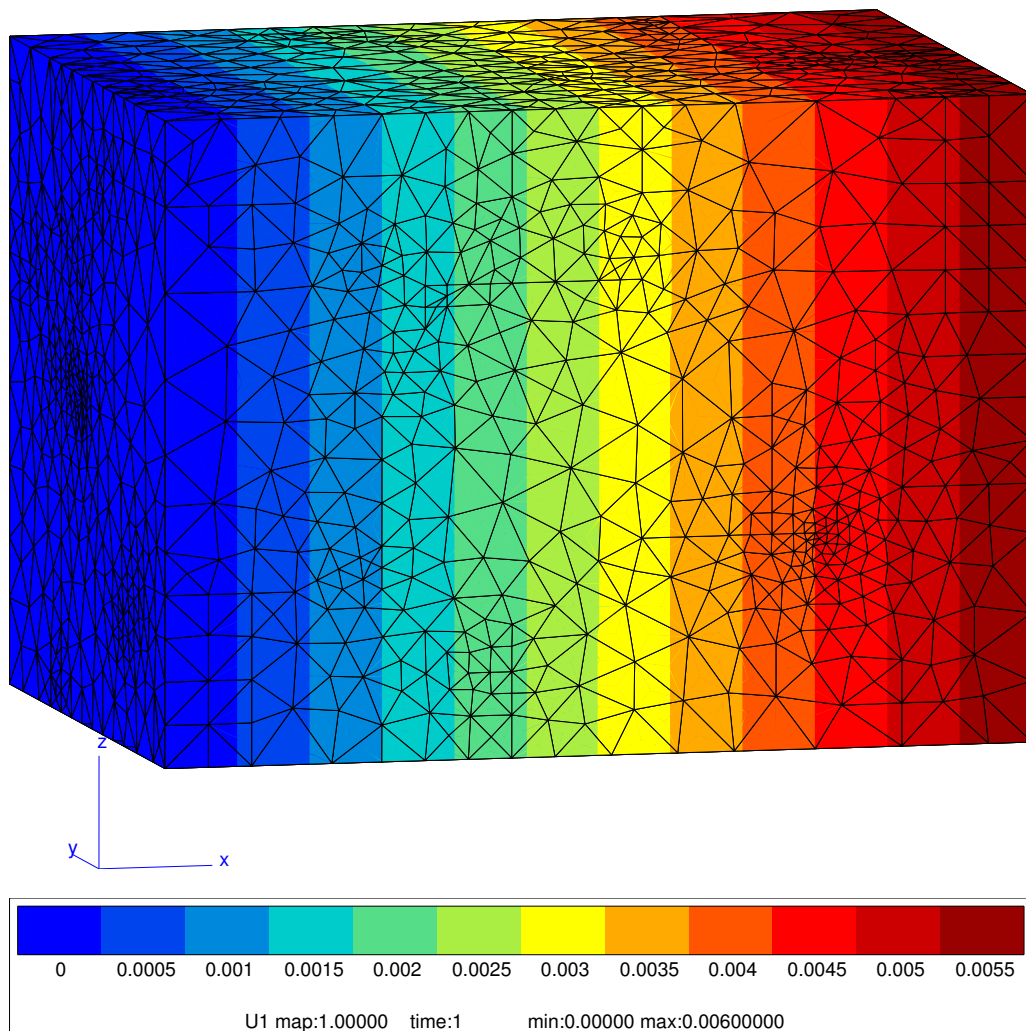


FIGURE V.30 – Champ de déplacement U_1 dans la direction x .

La convergence du calcul montre la robustesse de la technique proposée en 3D multiphasée. Ce résultat constitue un point déterminant pour les calculs numériques des matériaux hétérogènes dans une configuration 3D multiphasée.

V.7.6 Organigramme de la procédure de maillage des microstructures multiphasée 3D

Les principales étapes de la procédure de maillage des microstructures multiphasées 3d sont illustrées sur l'organigramme figure V.31. Elles se décomposent en deux problématiques principales : la définition des composantes connexes de la microstructure suivie de la triangulation de chacune des surfaces. La triangulation est adaptée en maillage EF par post traitement.

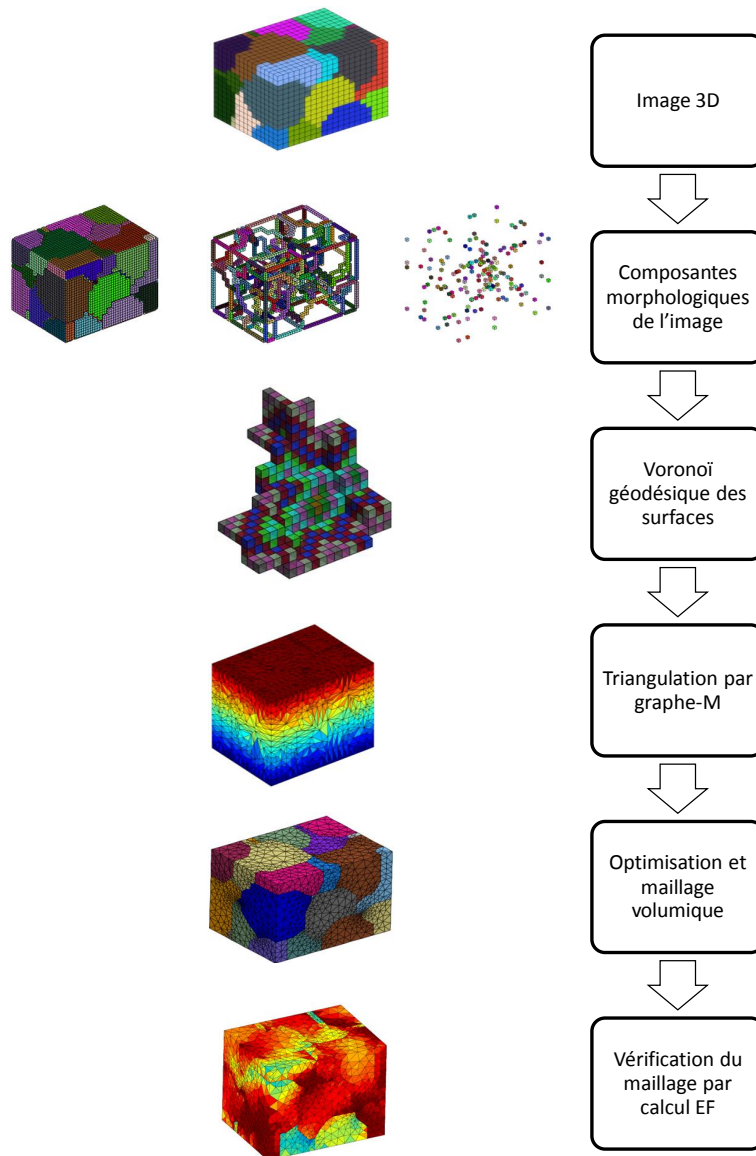


FIGURE V.31 – Organigramme de la triangulation morphologique d'une microstructure multiphasée 3D.

V.8 Comparaison avec le Marching Cube

Le logiciel utilisé pour réaliser le Marching Cube est Avizo. Le résultat du maillage par cette technique est un partitionnement quasi régulier de l'image à l'échelle des voxels ; le nombre d'éléments est donc très élevé : on relève 11885 éléments répartis sur les 15167 voxels de la surface de l'image (Fig.V.32). Ce nombre est environ 5 fois plus élevé que notre triangulation morphologique. Pour des images de taille plus importante, ce facteur aura un impact sur le temps et la puissance de calcul nécessaire au post traitement du maillage par Marching Cube par des algorithmes de "dérafinage".

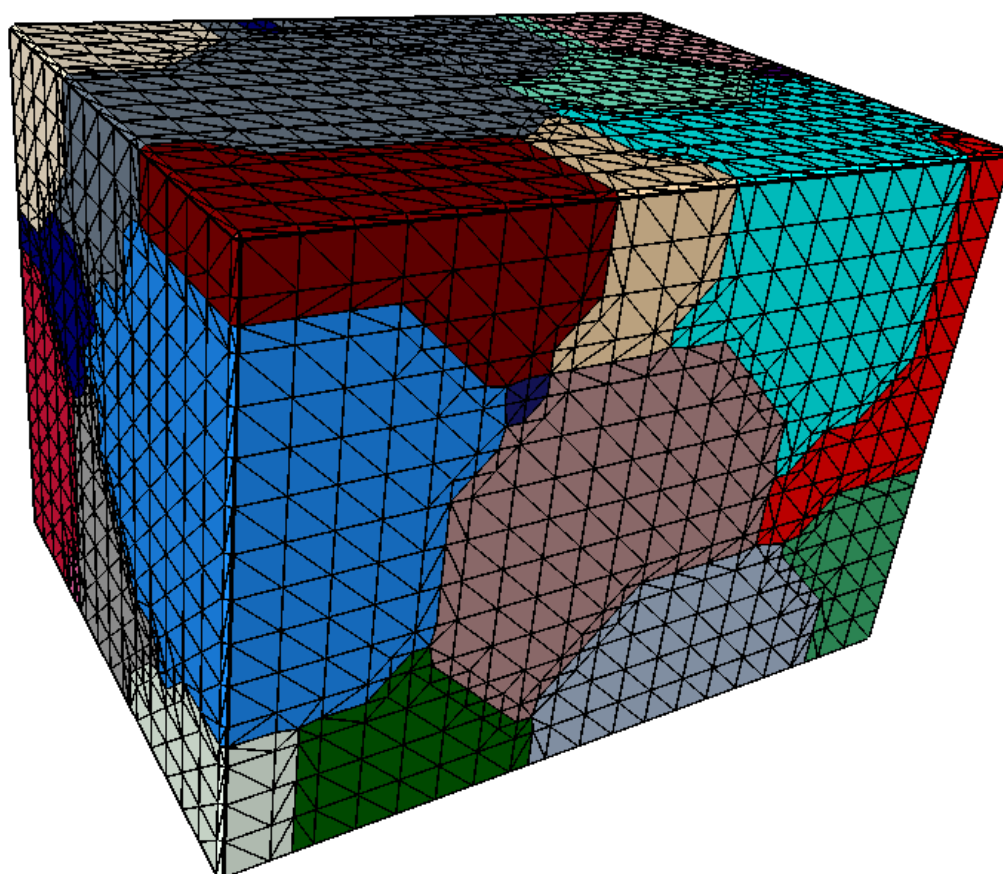


FIGURE V.32 – Maillage par Marching Cube.

On note la difficulté, par cette technique, de respecter les angles de l'image (Fig.V.32).

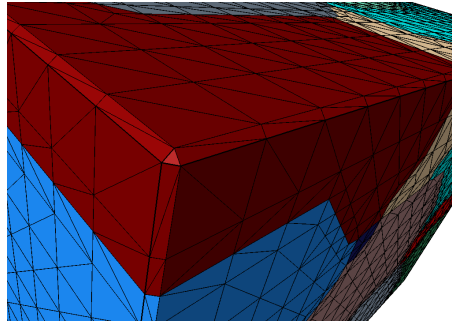


FIGURE V.33 – Zoom sur les angles du maillage par Marching Cube.

V.9 Synthèse

Dans cette section, il apparaît assez clairement que la triangulation des microstructures multiphasées est singulièrement plus complexe que dans le cas biphasé. Une approche directe sur l'image reste très délicate à mettre en œuvre, ainsi nous proposons une méthode originale basée sur la trame dédoublée. Elle permet d'établir de façon robuste les trois composantes connexes nécessaires à une triangulation de surfaces. Les nouveaux concepts liés à cette procédure sont prouvés ce qui témoigne de la robustesse de la méthode. Dans ce contexte, le Voronoï ensembliste réalisé sur l'ensemble des surfaces des phases permet au graphe-M de construire la triangulation de l'ensemble des cellules. Cette triangulation est, comme dans le cas biphasé 3D, exempt de toute ambiguïté de construction, elle permet alors l'application de procédures, en post traitement, d'optimisation des triangles puis de réaliser un maillage volumique compatible EF.

Notre approche par la trame dédoublée permet de ne faire aucun compromis sur la forme originelle de l'image tout en proposant un nombre d'éléments de triangulation environ 5 à 6 fois inférieur aux techniques de maillages classiques. La triangulation morphologique s'adapte à l'échelle du voxel sans pour autant surdensifier le maillage dans les endroits morphologiquement non pertinents (zones planes).

On note que la densité de mailles est morphologiquement adaptative, elle est strictement contrainte par les trois composantes connexes établies précédemment.

Conclusion générale

Le travail de cette thèse porte sur le développement d'une nouvelle technique de maillage automatique appliquée aux structures hétérogènes relativement complexes. Les outils de la morphologie mathématique sont utilisés comme moyen de reconnaissance précise des contours et des surfaces des différentes phases constitutives du matériau. En effet, la détermination de ces deux paramètres reste le maillon faible des différentes techniques de maillage, largement exposées dans ce manuscrit. La technique proposée dans cette étude permet le maillage automatique de différentes configurations de matériaux hétérogènes : 2D et 3D bi et multi-phasés. En 2D, la squelettisation d'une image constitue un outil efficace pour la détermination des points remarquables du contour de chaque phase. Généralement, ces zones sont des rebroussements ou des concavités morphologiques 2D et 3D de la microstructure difficilement accessibles par des calculs analytiques de surface. Cette procédure conduit manifestement à une construction judicieuse et précise de chaque contour, ce qui permet de proposer un maillage adéquat et fidèle à la géométrie initiale de chaque phase du matériau. Dans cette contribution, un couplage fort entre une description morphologique adaptée et optimisée d'une microstructure biphasée avec la triangulation contrainte de Delaunay est développé. Cette triangulation est considérée comme un maillage initial de la microstructure. L'implantation des points de triangulation est contrôlée afin d'éviter la formation de triangles aplatis à surface faible ou nulle que peut engendrer une implantation de trois points alignés. La triangulation morphologique permet d'éliminer la lourde étape qui incombe à toutes ces méthodes de maillage. En effet, quel que soit le nombre de phases et la dimension de l'image, ces concepts permettent la description exhaustive d'une image afin de déterminer les composantes morphologiques nécessaires à une triangulation. Cette description permet l'introduction d'un pas de triangulation défini soit par un opérateur soit de façon morphologique. Par conséquent, la triangulation obtenue est d'une densité proportionnelle à ce pas de maillage, moins dense en termes de nombre d'éléments. Une amélioration importante de cette technique concerne la densification automatique et contrôlée d'une densité de maillage dans des zones critiques de la microstructure, qui sont souvent le siège de fortes concentrations de contrainte. Pour résoudre ce problème, une densification différenciée est proposée dans ces zones critiques, ce qui démontre la robustesse de la technique de maillage proposée.

La morphologie mathématique permet de contourner la triangulation de Delaunay, très efficace en 2D mais source d'ambiguïtés de configurations en 3D, par la création

de superposition de triangles induite lors d'une rencontre de points cocycliques. Ainsi, le Voronoï géodésique constitue un outil alternatif pour surmonter cette ambiguïté. Par des opérateurs morphologiques élémentaires, cette technique permet l'élaboration d'un Graphe-M, alternatif à la triangulation de Delaunay, exempt de toute éventuelle confusion dans l'établissement des éléments de la triangulation. Ce graphe étroitement lié au Voronoï permet la reconnaissance automatique de toutes les surfaces représentées par les frontières morphologiques des différentes phases dans une microstructure hétérogène.

Les différents maillages proposés dans cette étude ont fait l'objet d'une vérification rigoureuse. En effet, la justesse du positionnement des triangles sur le contour d'une phase préservant l'intégrité de la forme ainsi que le nombre d'éléments sont deux critères essentiels dans la vérification de la qualité de la triangulation. Enfin, un calcul élément fini est systématiquement réalisé sur chaque maillage comme ultime étape de vérification. Tous ces éléments témoignent de la robustesse de l'automatisation de la technique de maillage proposée. L'intégrité de l'image initiale est contrôlée aussi par la vérification du positionnement des triangles sur le contour de l'image en mesurant l'écart éventuel entre l'image réelle et le maillage, en utilisant le principe de la distance de Hausdorff.

La technique de maillage, proposée dans cette étude, constitue une nouvelle approche basée essentiellement sur les outils de la morphologie mathématique. Elle a été testée avec succès sur de multiples configurations de matériaux hétérogènes à morphologies relativement complexes. Il est important de souligner que cette méthode est applicable à la fois sur des images virtuelles ou réelles des matériaux hétérogènes. Ainsi, le champ d'application de cette technique est vaste allant de la mécanique des matériaux hétérogènes jusqu'à l'imagerie médicale.

Perspectives

A l'issue de cette étude qui concerne le développement d'outils de maillage utilisant la morphologie mathématique, plusieurs perspectives peuvent être proposées.

Nous nous limitons essentiellement à deux perspectives principales conduisant à la proposition d'un outil de maillage automatique, fiable et simple d'utilisation :

1. Dans une perspective d'industrialisation du produit, il est impératif de procéder à une optimisation du temps de mise en œuvre dans les logiciels de calculs par EF existants. Il apparaît important de développer des outils informatiques dans le but d'optimiser la vitesse d'exécution des différentes procédures de triangulation.

2. Dans une perspective de design et d'optimisation de la morphologie de nouveaux matériaux hétérogènes, il est essentiel d'intégrer cette technique au processus global de la chaîne de couplage production/procédé/propriétés, en tenant compte de la complexité de la morphologie réelle des matériaux.

Annexe A

Détermination des paramètres morphologiques des composantes d'une image

Préambule

Dans cette section, nous allons illustrer la procédure de détermination automatique des parties morphologiquement fines des microstructures biphasées 2D section [III.1.9.1](#) et 3D section [IV.2.2.3](#).

A.1 : Analyse individuelle

Lorsque qu'un ensemble est constitué de sous-ensembles individualisables, il est possible d'effectuer des mesures de formes [[Minkowski, 1903](#)]. En trame discrète, un sous-ensemble ou un objet est composé de pixels ou de voxels possédant une composante connexe commune ;

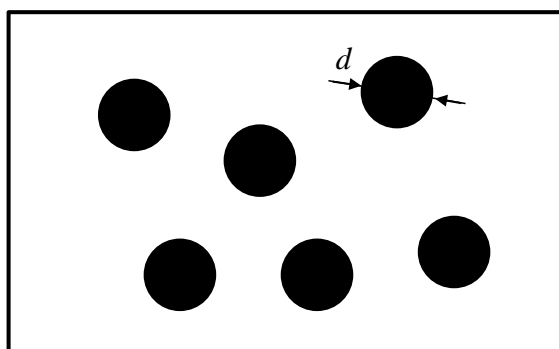


FIGURE A.1 – Huit disques individuellement mesurables.

La figure [A.1](#) illustre huit disques de diamètre d sur les lesquels il est possible d'effectuer

des mesures de forme : aire, périmètre, indice de circularité ...

A.2 : Analyse globale

Lorsque les huit disques partagent une ou plusieurs composantes connexes, la mesure du diamètre de chacun des disques n'est pas atteinte par une analyse individuelle. Les disques constituent un ensemble unique.

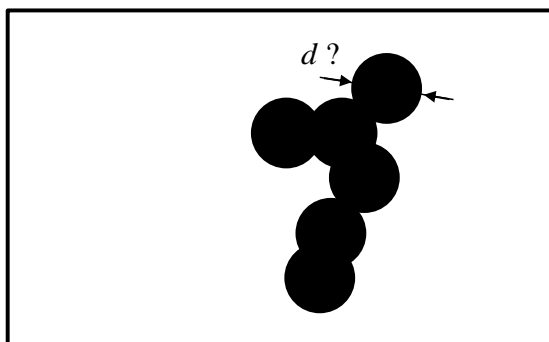


FIGURE A.2 – Agglomérat de disques.

la figure A.2 illustre un unique objet que constitue un agglomérat unique de disque.

A.2.1 : Granulométrie par ouverture

A.2.1.1 : Définition générale

La granulométrie par ouverture a été introduite par G.Matheron [Matheron, 1964b] et développée ensuite par R.Miles [Miles, 1974] et C.Lantuéjoul [Lantuéjoul, 1980]. Ce dernier apporta un correctif lié au bord de champ d'une image. Elle consiste en l'application d'ouverture morphologique de taille λ croissante sur un ensemble X afin d'établir la fonction granulométrique $G(\lambda)$:

$$G(\lambda) = \frac{Mes(X) - Mes(T_\lambda(X))}{Mes(X)} \quad (A.1)$$

$Mes(X)$ représente la mesure de l'ensemble X appelée mesure de Lebesgue, c'est à dire le volume dans \mathbb{R}^3 , l'aire dans \mathbb{R}^2 et la longueur dans \mathbb{R}^1 . $T_\lambda(X)$ est l'opérateur d'ouverture de l'ensemble X . Par exemple $T_\lambda(X)$ est représenté par l'ouverture sur X par boule B de taille λ croissante : $O^{\lambda B}(X)$

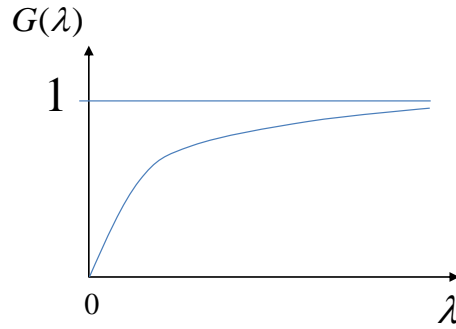


FIGURE A.3 – Courbe granulométrique.

D'après l'équation Eq.(A.1), lorsque $\lambda = 0$, la valeur de $Mes(T_\lambda(X))$ est égale à $Mes(X)$ ainsi $G(X) = 0$. A λ infini, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (Mes(T_\lambda(X))) = 0$ donc $G(\lambda) = 1$

G est une fonction de distribution, c'est sur la fonction densité de mesure $g(\lambda)$ qu'il est possible d'atteindre quelques paramètres morphologiques élémentaires comme la surface moyenne des objets dans une image lorsqu'ils sont raisonnablement interconnectés.

$$g(\lambda) = G'(\lambda) \quad \text{où} \quad G(\lambda) = \int_0^{\lambda_{\max}} g(\lambda) d\lambda \quad (\text{A.2})$$

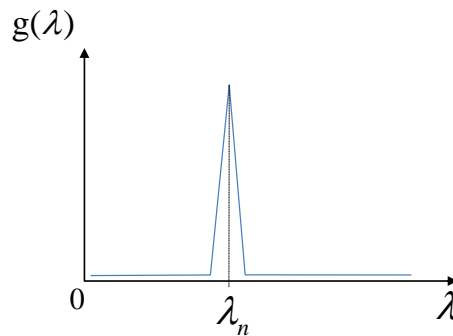


FIGURE A.4 – Courbe de la densité granulométrique.

Les différentes variations de la courbe de distribution sont détectées sur la courbe de densité granulométrique indiquant les différentes valeurs pour lesquelles valeur λ_n conduit à une différence significative entre $Mes(X)$ et $Mes(T_\lambda(X))$.

L'image figure A.2 est constituée de huit cercles de taille identique ; la courbe de densité granulométrique contient un seul point significatif correspondant à $\lambda = \frac{1}{2}d$.

A.2.1.2 : Application au calcul d'épaisseur de forme

Exemple théorique

Les huit disques de diamètre d_2 sont relié par une ligne de largeur d_1 figure A.5.a. Ils constitues ainsi un ensemble unique où l'opération de granulométrie par ouverture est réalisée. La courbe de densité granulométrique indique deux singularités respectivement à $\lambda_1 = \frac{1}{2}d_1$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}d_2$

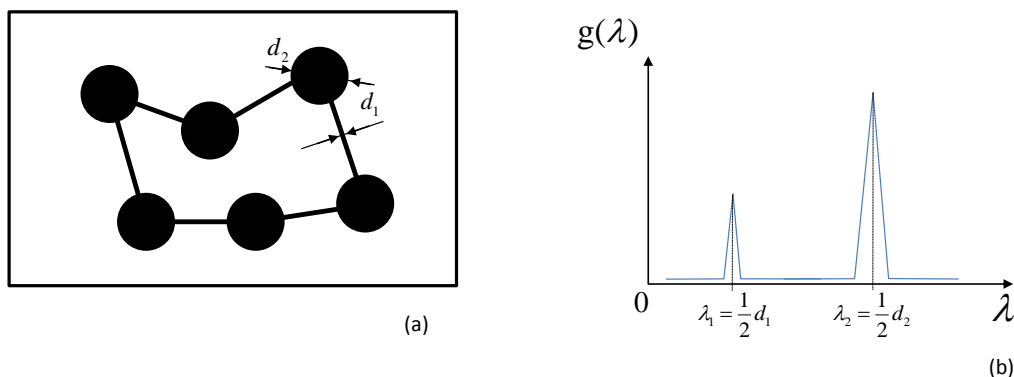


FIGURE A.5 – a) Ensemble de disque connectés par des lignes, b) courbe de la densité granulométrique.

Exemple de notre étude

Dans la section III.1.9.1 les zones fine de X présenté sur la figure III.1.9.1 sont mesurées par granulométrie par ouverture.

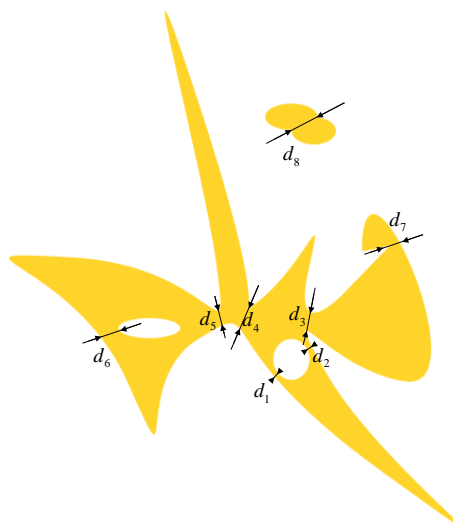


FIGURE A.6 – Localisation des zones morphologiques fine de X .

La figure A.7 localise 6 tailles d'ouvertures significatives sur les 8 localisées sur l'image, en effet plusieurs distances caractéristiques de l'image sont équivalentes comme $r_3 = d_6$ par exemple.

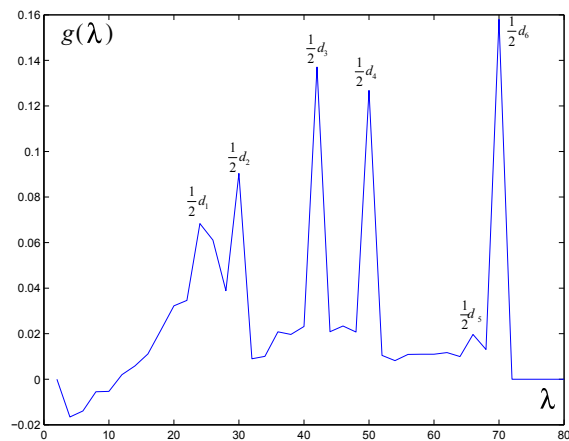


FIGURE A.7 – Localisation des différentes tailles de d'ouverture .

Par l'opération de granulométrie par ouverture, la procédure de densification morphologique est complètement automatisable.

Bibliographie

- [Anderson et al., 2005] Anderson, J., Bennett, J., and Joy, K. (2005). Marching diamonds for unstructured meshes. In *Visualization, 2005. VIS 05. IEEE*, pages 423–429.
- [Artzy et al., 1981] Artzy, E., Frieder, G., and Herman, G. T. (1981). The theory, design, implementation and evaluation of a three-dimensional surface detection algorithm. *Computer Graphics and Image Processing*, 15(1) :1 – 24.
- [Aspert et al., 2002] Aspert, N., Santa-Cruz, D., and Ebrahimi, T. (2002). Mesh : measuring errors between surfaces using the hausdorff distance. In *Multimedia and Expo, 2002. ICME '02. Proceedings. 2002 IEEE International Conference on*, volume 1, pages 705–708 vol.1.
- [Attali, 1995] Attali, D. (1995). *Squelettes et graphes de Voronoï 2D et 3D*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I.
- [Attali and Boissonnat, 2004] Attali, D. and Boissonnat, J.-D. (2004). A linear bound on the complexity of the delaunay triangulation of points on polyhedral surfaces. *Discrete & Computational Geometry*, 31(3) :369–384.
- [Banon and Barrera, 1991] Banon, G. and Barrera, J. (1991). Minimal representations for translation-invariant set mappings by mathematical morphology. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 51(6) :1782–1798.
- [Bertolino et al., 2007] Bertolino, G., Bilger, N., and Crépin, J. (2007). Modeling microstructures and microstructural effects on macroscopic and intragranular mechanical behavior. *Computational Materials Science*, 40(3) :408 – 416.
- [Beucher, 1983] Beucher, S. (1983). Extrema of grey-tone functions and mathematical morphology. (793) :326–336.
- [Beucher, 1994a] Beucher, S. (1994a). Digital skeletons in euclidean and geodesic spaces. *Signal Processing*, 38(1) :127 – 141. *Mathematical Morphology and its Applications to Signal Processing*.
- [Beucher, 1994b] Beucher, S. (1994b). Watershed, hierarchical segmentation and waterfall algorithm. In Serra, J. and Soille, P., editors, *Mathematical Morphology and Its Applications to Image Processing*, volume 2 of *Computational Imaging and Vision*, pages 69–76. Springer Netherlands.
- [Beucher, 2002] Beucher, S. (2002). Algorithmes sans biais de ligne de partage des eaux. *Note interne CM*.

- [Beucher and Lantuejoul, 1979] Beucher, S. and Lantuejoul, C. (1979). Use of Watersheds in Contour Detection. In *International Workshop on Image Processing : Real-time Edge and Motion Detection/Estimation, Rennes, France*.
- [Bischoff and Kobbelt, 2006] Bischoff, S. and Kobbelt, L. (2006). Extracting consistent and manifold interfaces from multi-valued volume data set. *Bildverarbeitung fur die Medizin*.
- [Blum, 1973] Blum, H. (1973). Biological shape and visual science (part i). *Journal of Theoretical Biology*, 38(2) :205 – 287.
- [Boissonnat et al., 2002] Boissonnat, J.-D., Devillers, O., Pion, S., Teillaud, M., and Yvinec, M. (2002). Triangulations in {CGAL}. *Computational Geometry*, 22(1–3) :5 – 19. 16th {ACM} Symposium on Computational Geometry.
- [Boissonnat and Flototto, 2002] Boissonnat, J.-D. and Flototto, J. (2002). A local coordinate system on a surface. In *Proceedings of the Seventh ACM Symposium on Solid Modeling and Applications, SMA '02*, pages 116–126, New York, NY, USA. ACM.
- [Boissonnat and Flötotto, 2004] Boissonnat, J.-D. and Flötotto, J. (2004). A coordinate system associated with points scattered on a surface. *Computer-Aided Design*, 36(2) :161 – 174. Solid Modeling and Applications.
- [boltcheva, 2007] boltcheva (2007). *Reconstruction multi-objets d'images 3D multi-labels à partir d'un algorithme de Delaunay Discret*. PhD thesis, Université Louis Pasteur Strasbourg.
- [Boltcheva et al., 2009] Boltcheva, D., Yvinec, M., and Boissonnat, J.-D. (2009). Feature preserving Delaunay mesh generation from 3D multi-material images. *Computer Graphics Forum*.
- [Börgers, 1990] Börgers, C. (1990). Generalized delaunay triangulations of non-convex domains. *Computers & Mathematics with Applications*, 20(7) :45 – 49.
- [Brigger et al., 1994] Brigger, P., Kunt, M., and Meyer, F. (1994). The geodesic morphological skeleton and fast transformation algorithms. In *Mathematical morphology and its applications to image processing*, pages 133–140. Springer Netherlands.
- [Cabello et al., 2009] Cabello, S., Fort, M., and Sellarès, J. (2009). Higher-order voronoi diagrams on triangulated surfaces. *Information Processing Letters*, 109(9) :440 – 445.
- [Cachia et al., 2003] Cachia, A., Mangin, J.-F., Rivière, D., Papadopoulos-Orfanos, D., Kherif, F., Bloch, I., and Régis, J. (2003). A generic framework for the parcellation of the cortical surface into gyri using geodesic voronoi diagrams. *Medical Image Analysis*, 7(4) :403 – 416. Medical Image Computing and Computer Assisted Intervention.
- [Chaussard, 2010] Chaussard, J. (2010). *Topological tools for discrete shape analysis*. PhD thesis, Université Paris-Est.
- [Chaussard et al., 2010] Chaussard, J., Couprie, M., and Talbot, H. (2010). Robust skeletonization using the discrete lambda-medial axis. *Pattern Recognition Letters*, In Press, Corrected Proof :-.

- [Chazal and Lieutier, 2005] Chazal, F. and Lieutier, A. (2005). The λ -medial axis. *Graph. Models*, 67(4) :304–331.
- [Chen and Holst, 2011] Chen, L. and Holst, M. (2011). Efficient mesh optimization schemes based on optimal delaunay triangulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(9–12) :967 – 984.
- [Choi et al., 2013] Choi, S.-H., Kim, E.-Y., Woo, W., Han, S., and Kwak, J. (2013). The effect of crystallographic orientation on the micromechanical deformation and failure behaviors of {DP980} steel during uniaxial tension. *International Journal of Plasticity*, 45(0) :85 – 102. In Honor of Rob Wagoner.
- [Christiansen and Sederberg, 1978] Christiansen, H. N. and Sederberg, T. W. (1978). Conversion of complex contour line definitions into polygonal element mosaics. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 12(3) :187–192.
- [Cignoni et al., 2000] Cignoni, P., Ganovelli, F., Montani, C., and Scopigno, R. (2000). Reconstruction of topologically correct and adaptive trilinear isosurfaces. *Computers & Graphics*, 24(3) :399 – 418.
- [Coffman et al., 2012] Coffman, V. R., Reid, A. C., Langer, S. A., and Dogan, G. (2012). Oof3d : An image-based finite element solver for materials science. *Mathematics and Computers in Simulation*, 82(12) :2951 – 2961. {APPLIED} {SCIENTIFIC} {COMPUTING} {IX} - Numerical Approximation and Simulation Technologies.
- [Custodio et al., 2013] Custodio, L., Etienne, T., and Silva, C. (2013). Practical considerations on marching cubes 33 topological correctness. *Computers & Graphics*.
- [Dardenne, 2009] Dardenne, J. (2009). *Maillage 3D de structure anatomiques pour la simulation électromagnétique et thermique*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- [Delaunay, 1934] Delaunay, B. (1934). Sur la sphère vide. A la mémoire de Georges Voronoï. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk*, pages 793–800.
- [Dietrich et al., 2009] Dietrich, C., Scheidegger, C., Comba, J., Nedel, L., and Silva, C. (2009). Marching cubes without skinny triangles. *Computing in Science Engineering*, 11(2) :82–87.
- [Dobrzynski, 2005] Dobrzynski, C. (2005). *Adaptation de Maillage anisotrope 3D et application à l'aéro-thermique des bâtiments*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI.
- [d’Otreppe and Boman, 2010] d’Otreppe, V. and Boman, Romain, a. P.-J.-P. (2010). Smooth multiple-region mesh generation for biomedical applications. In *ECCM 2010, 4th European Conference on Computational Mechanics*.
- [d’Otreppe et al., 2012] d’Otreppe, V., Boman, R., and Ponthot, J.-P. (2012). Generating smooth surface meshes from multi-region medical images. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 28(6-7) :642–660.

- [Eck et al., 1995] Eck, M., DeRose, T., Duchamp, T., Hoppe, H., Lounsbery, M., and Stuetzle, W. (1995). Multiresolution analysis of arbitrary meshes. In *Proceedings of the 22Nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH '95, pages 173–182, New York, NY, USA. ACM.
- [Elseberg., 2013] Elseberg., J. (2013). One billion points in the cloud - an octree for efficient processing of 3d scans. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, page 76–88.
- [E.Schönhardt., 1928] E.Schönhardt. (1928). über die zerlegung von dreieckpolyedern. *Mathematisch annalen*, pages 309–312.
- [Fayolle and Pasko, 2012] Fayolle, P.-A. and Pasko, A. (2012). Optimized surface discretization of functionally defined multi-material objects. *Advances in Engineering Software*, 45(1) :301 – 312.
- [Finkel and Bentley., 1974] Finkel, R. A. and Bentley., J. L. (1974). Quad trees a data structure for retrieval on composite keys. *Acta Informatica*, pages 1–9.
- [Flötotto, 2003] Flötotto, J. (2003). *Un système de coordonnées associé à un échantillon de points d'une variété : définition, propriétés et applications*. These, Université Nice Sophia Antipolis.
- [F.Maisonneuve and Ch.Lantuéjoul, 1984] F.Maisonneuve and Ch.Lantuéjoul (1984). Geodesic convexity. *Acta Stereologica*, pages 169–174.
- [Frey, 2001] Frey, P. (2001). YAMS A fully Automatic Adaptive Isotropic Surface Remeshing Procedure. Technical Report RT-0252, INRIA.
- [Frey and Borouchaki, 1996] Frey, P. and Borouchaki, H. (1996). Texel : triangulation de surfaces implicites. Partie I : aspects théoriques. Research Report RR-3066, INRIA.
- [Frey and Borouchaki, 1997] Frey, P. and Borouchaki, H. (1997). Triangulation des surfaces implicites. *Compte rendu de l'académie des sciences Paris.*, pages 101–106.
- [Frey and George, 1999] Frey, P. J. and George, P.-L. (1999). *Maillages : applications aux éléments finis*. Hermès sciences publ. DL1999 (53-Mayenne, Paris).
- [Gao et al., 2008] Gao, J., Guibas, L. J., Oudot, S., and Wang, Y. (2008). Geodesic delaunay triangulation and witness complex in the plane. In *SODA '08*, pages 571–580.
- [George and Borouchaki, 1997] George, P.-L. and Borouchaki, H. (1997). *Triangulation de Delaunay et maillage : applications aux éléments finis*. Hermès, Paris.
- [George and Borouchaki, 2002] George, P. L. and Borouchaki, H. (2002). Maillage simplicial d'un polyèdre arbitraire. Partie 1 : Existence et co t. Research Report RR-4397, INRIA.
- [Gérard et al., 2009] Gérard, C., N'Guyen, F., Osipov, N., Cailletaud, G., Bornert, M., and Caldemaison, D. (2009). Comparison of experimental results and finite element simulation of strain localization scheme under cyclic loading. *Computational Materials Science*, 46(3) :755 – 760. Proceedings of the 18th International Workshop on Computational Mechanics of Materials IWCMM-18.

- [H-S. Na and Cheong, 2002] H-S. Na, C.-N. L. and Cheong, O. (2002). Voronoi diagrams on the sphere. *Computational Geometry Theory Applications*, 23 :183–194.
- [Hadwiger, 1957] Hadwiger, H. (1957). *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer-Verlag, Berlin.
- [Henning Naß and Dogan, 2007] Henning Naß, Prof. F.-E. Wolter, H. T. and Dogan, C. (2007). Computation of geodesic voronoi diagrams in riemannian 3-space using medial equations. In *Cyberworlds, 2007. CW '07. International Conference on*, pages 376–385.
- [Hilton et al., 1996] Hilton, A., Stoddart, A. J., Illingworth, J., and Windeatt, T. (1996). Marching triangles : range image fusion for complex object modelling. In *Image Processing, 1996. Proceedings., International Conference on*, volume 1, pages 381–384 vol.2.
- [Hounsfield, 1973] Hounsfield, G. N. (1973). Computerized transverse axial scanning (tomography) : Part 1. Description of system. *British Journal of Radiology*, 46 :1016–1022.
- [Hériprié et al., 2007] Hériprié, E., Dexet, M., Crépin, J., Gélébart, L., Roos, A., Bornert, M., and Caldemaison, D. (2007). Coupling between experimental measurements and polycrystal finite element calculations for micromechanical study of metallic materials. *International Journal of Plasticity*, 23(9) :1512 – 1539.
- [Hu et al., 2014] Hu, H., Liu, X., and Hu, P. (2014). Voronoi diagram generation on the ellipsoidal earth. *Computers & Geosciences*, 73(0) :81 – 87.
- [Huttenlocher et al., 1993] Huttenlocher, D., Klanderman, G., and Rucklidge, W. (1993). Comparing images using the hausdorff distance. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 15(9) :850–863.
- [Jeulin, 1979] Jeulin, D. (1979). *Morphologie Mathématique et Propriétés Physiques des agglomérés de minerais de fer et du coke métallurgique*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris.
- [Jeulin, 1991] Jeulin, D. (1991). *Modeles morphologiques de structures aleatoires et de changement d'échelle*. PhD thesis, Université de Caen. 1991CAEN2016.
- [Jordan, 1887] Jordan, C. (1887). Cours d'analyse de l'École polytechnique. *Gauthier-Villars*, pages 587–594.
- [Keppel, 1975] Keppel, E. (1975). Approximating complex surfaces by triangulation of contour lines. *IBM J. Res. Dev.*, 19(1) :2–11.
- [Klein, 1976] Klein, J. (1976). *Conception et réalisation d'une unité logique pour l'analyse quantitative d'images*.
- [Kovalevsky, 1989] Kovalevsky, V. (1989). Finite topology as applied to image analysis. volume 46, pages 141 – 161.
- [Kovaszny and Joseph, 1955] Kovaszny, L. and Joseph, H. (1955). Image processing. *Proceedings of the IRE*, 43(5) :560–570.
- [Kraus et al., 2013] Kraus, M., Rajagopal, A., and Steinmann, a. P. (2013). Investigations on the polygonal finite element method : Constrained adaptive delaunay tessellation and conformal interpolants. *Comput. Struct.*, 120 :33–46.

- [Kunze et al., 1997] Kunze, R., Wolter, F., and Rausch, T. (1997). Geodesic voronoi diagrams on parametric surfaces. In *Proceedings of the 1997 Conference on Computer Graphics International*, CGI '97, pages 230–, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society.
- [Laboratory and Meagher, 1980] Laboratory, R. P. I. I. P. and Meagher, D. (1980). *Octree Encoding : a New Technique for the Representation, Manipulation and Display of Arbitrary 3-D Objects by Computer*.
- [Langer, 2001] Langer (2001). 00f : an image-based finite-element analysis of material microstructures. *Computing in Science and Engineering*.
- [Lantuejoul, 1982] Lantuejoul, C. (1982). *Multicomputers and Image Processing : Algorithms and Programs ; Based on a Symposium Held in Madison, WISC., May 26-29, 1981*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA.
- [Lantuejoul, 2002] Lantuejoul, C. (2002). *Geostatistical Simulation : Models and Algorithms*. Collezione legale Pirola. Springer.
- [Lantuejoul and Beucher, 1981] Lantuejoul, C. and Beucher, S. (1981). On the use of the geodesic metric in image analysis. *Journal of Microscopy*, 121(1) :39–49.
- [Lantuejoul and Maisonneuve, 1983] Lantuejoul, C. and Maisonneuve, F. (1983). Geodesic methods in quantitative image analysis. *Pattern Recognition*, 16(3) :358 –.
- [Lantuejoul and Maisonneuve, 1984] Lantuejoul, C. and Maisonneuve, F. (1984). Geodesic methods in quantitative image analysis. *Pattern Recognition*, 17(2) :177 – 187.
- [Lantuéjoul, 1978] Lantuéjoul, C. (1978). *La squeletisation et son application aux mesure topologiques des mosaïques polycristallines*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris.
- [Lantuéjoul, 1979] Lantuéjoul, C. (1979). Skeletonizations. *Rapport interne du centre de Géostatistique et Morphologie Mathématique Ecole des Mines, Fontainebleau*, 593.
- [Lantuéjoul, 1980] Lantuéjoul, C. (1980). On the estimation of mean values in individual analysis of particles. *Microscopica Acta*, 5 :266–73.
- [Leibon and Letscher, 2000] Leibon, G. and Letscher, D. (2000). Delaunay triangulations and voronoi diagrams for riemannian manifolds. In *Proceedings of the Sixteenth Annual Symposium on Computational Geometry*, SCG '00, pages 341–349, New York, NY, USA. ACM.
- [Lewiner et al., 2003] Lewiner, T., Lopes, H., Vieira, A. W., and Tavares, G. (2003). Efficient implementation of marching cubes' cases with topological guarantees. *Journal of Graphics Tools*, 8 :2003.
- [Lo, 1985] Lo, S. H. (1985). A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 21 :1403–1426.
- [Loeb, 1986] Loeb, J.-J. (1986). *Pseudo-convexité des ouverts invariants et convexité géodesique dans certains espaces symétriques*, volume 1198 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg.

- [Lohou, 2001] Lohou, C. (2001). *Contribution à l'analyse topologique des images : étude d'algorithmes de squelettisation pour images 2D et 3D selon une approche topologie digitale ou topologie discrète*. PhD thesis, Université de Marne-la-vallée.
- [Loménie and Stamon, 2008] Loménie, N. and Stamon, G. (2008). MorphologicalMesh Filtering and -objects. *Pattern Recognition Letters*, 29(10) :1571–1579.
- [Lorensen and Cline, 1987] Lorensen, W. E. and Cline, H. E. (1987). Marching cubes : A high resolution 3D surface construction algorithm. *COMPUTER GRAPHICS*, 21(4) :163–169.
- [Luebke, 2001] Luebke, D. P. (2001). A developer's survey of polygonal simplification algorithms. *IEEE Comput. Graph. Appl.*, 21(3) :24–35.
- [Maisonneuve, 1982a] Maisonneuve, F. (1982a). Extrema regionaux : algorithme parallele. *Rapport interne du centre de Géostatistique et Morphologie Mathématique Ecole des Mines,Fontainebleau*, 781.
- [Maisonneuve, 1982b] Maisonneuve, F. (1982b). Sur le partage des eaux. *Rapport interne du centre de Géostatistique et Morphologie Mathématique Ecole des Mines,Fontainebleau*.
- [Masala et al., 2013] Masala, G., Golosio, B., and Oliva, P. (2013). An improved marching cube algorithm for 3d data segmentation. *Computer Physics Communications*, 184(3) :777 – 782.
- [Matheron, 1964a] Matheron, G. (1964a). GM 56 : Fonctions aléatoires du type tout ou rien. *Rapport interne du centre de Géostatistique et Morphologie Mathématique Ecole des Mines,Fontainebleau*, 56 :CG call number N-53.
- [Matheron, 1964b] Matheron, G. (1964b). GM 57 : Etude théorique des granulométrie. *Rapport interne du centre de Géostatistique et Morphologie Mathématique Ecole des Mines,Fontainebleau*, 56 :CG call number N-54.
- [Matheron, 1967] Matheron, G. (1967). Eléments pour une théorie des milieux poreux.
- [Matheron, 1968] Matheron, G. (1968). Schema booleen sequentiel de partition aleatoire. Internal Report 83, Fontainebleau : Centre de géostatistique et de morphologie mathématiques de L'Ecole des Mines.
- [Matheron, 1975] Matheron, G. (1975). *Random sets and integral geometry*. Wiley series in probability and mathematical statistics : Probability and mathematical statistics. Wiley.
- [Matheron, 1978] Matheron, G. (avril 1978). Quelques propriétés topologiques du squelette. Technical Report 560, Fontainebleau : Centre de géostatistique et de morphologie mathématiques.
- [Meyer, 1985] Meyer, F. (1985). The binary skeleton in three steps. *Proc. IEEE Workshop on Computer Architecture and Image Database Management, IEEE Computer Society Press*, pages 477–483.

- [Meyer, 1986] Meyer, F. (1986). Squelettes. In *Ecole d'été 1986*. Centre de géostatistique et de morphologie mathématiques de L'Ecole des Mines, Fontainebleau.
- [Meyer, 1988] Meyer, F. (1988). Skeleton in digital spaces. *Images Analysis and Mathematical Morphologie Teorical Advances Academic Press London*, (2) :257–296.
- [Meyer, 1989] Meyer, F. (1989). Skeletons and perceptual graphs. *Signal Processing*, 16(4) :335 – 363. Special Issue on Advances in Mathematical Morphology.
- [Meyer, 1990] Meyer, F. (1990). Digital euclidean skeletons. In *Lausanne-DL tentative*, pages 251–262. International Society for Optics and Photonics.
- [Meyer, 1991] Meyer, F. (1991). Un algorithme optimal pour la ligne de partage des eaux. *8e congrès de reconnaissance des formes et intelligence artificielle*, pages, Lyon, France, pages 847–857.
- [Meyer, 1994] Meyer, F. (1994). Topographic distance and watershed lines. *Signal Processing*, 38(1) :113 – 125. Mathematical Morphology and its Applications to Signal Processing.
- [Miles, 1974] Miles, R. (1974). On the elimination of edge effects in planar sampling, stochastic geometry. *Harding EF*.
- [Minkowski, 1896] Minkowski, H. (1896). *Geometrie der Zahlen*. Leipzig : Teubner.
- [Minkowski, 1903] Minkowski, H. (1903). Volumen und oberfläche. *Mathematische Annalen*, 57 :447–495.
- [Mémoli and Sapiro, 2006] Mémoli, F. and Sapiro, G. (2006). Computing with point cloud data. In Krim, H. and Yezzi, Anthony, J., editors, *Statistics and Analysis of Shapes, Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*, pages 201–229. Birkhäuser Boston.
- [Moës et al., 1999] Moës, N., Dolbow, J., and Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1) :131–150.
- [Motzkin, 1936] Motzkin, T. (1936). *Beiträge zur Theorie der linearen Ungleichungen*. Azriel.
- [M.Yerry, 1983] M.Yerry (1983). A modified quadtree approach to finite element mesh generation. *EEE Computer Graphics and Applications*,, pages 39–46.
- [N. Sukuma and Prévost, 2003] N. Sukuma, D. J. Srolovitz, B. and Prévost, J.-H. (2003). Brittle fracture in polycrystalline microstructures with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,, page 2015–2037.
- [N. Sukumar, 2014] N. Sukumar, J. B. (2014). Brittle fractvoronoi-based interpolants for fracture modeling. *R. In van de Weygaert, G. Vegter, J. Ritzerveld, V. Icke (Eds.), Tessellations in the Sciences ; Virtues, Techniques and Applications of Geometric Tilings, Springer Verlag (2014) (in press),.*

- [Néda et al., 1999] Néda, Z., Florian, R., and Brechet, Y. (1999). Reconsideration of continuum percolation of isotropically oriented sticks in three dimensions. *Phys. Rev. E*, 59 :3717–3719.
- [Newman and Yi, 2006] Newman, T. S. and Yi, H. (2006). A survey of the marching cubes algorithm. *Computers & Graphics*, 30(5) :854–879.
- [Nielson and Hamann, 1991] Nielson, G. M. and Hamann, B. (1991). The asymptotic decider : Resolving the ambiguity in marching cubes. In *Proceedings of the 2Nd Conference on Visualization '91, VIS '91*, pages 83–91, Los Alamitos, CA, USA. IEEE Computer Society Press.
- [Oudot et al., 2010] Oudot, S. Y., Guibas, L. J., Gao, J., and Wang, Y. (2010). Geodesic delaunay triangulations in bounded planar domains. *ACM Trans. Algorithms*, 6(4) :67 :1–67 :47.
- [Papadopoulou and Lee, 1998] Papadopoulou, E. and Lee, D. T. (1998). A new approach for the geodesic voronoi diagram of points in a simple polygon and other restricted polygonal domains. *Algorithmica*, 20(4) :319–352.
- [Park and Rosenfeld, 1971] Park, C.-M. and Rosenfeld, A. (1971). Connectivity and genus in three dimensions. *TR-156 Computer Science Cente*, University of Maryland.
- [Paul Chew, 1989] Paul Chew, L. (1989). Constrained delaunay triangulations. *Algorithmica*, 4(1-4) :97–108.
- [Poincaré, 1905] Poincaré, H. (1905). volume 6. Transactions of the American Mathematical Society.
- [Pons et al., 2007] Pons, J.-P., Ségonne, F., Boissonnat, J.-D., Rineau, L., Yvinec, M., and Keriven, R. (2007). High-quality consistent meshing of multi-label datasets. In *Information Processing in Medical Imaging*, pages 198–210.
- [Quey et al., 2011] Quey, R., Dawson, P., and Barbe, F. (2011). Large-scale 3d random polycrystals for the finite element method : Generation, meshing and remeshing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(17–20) :1729 – 1745.
- [Rivest et al., 1993] Rivest, J.-F., Soille, P., and Beucher, S. (1993). Morphological gradients. *J. Electronic Imaging*, 2(4) :326–336.
- [Röntgen, 1901] Röntgen, W. (1901). in recognition of the extraordinary services he has rendered by the discovery of the remarkable rays subsequently named after him. *prix Nobel de Phisique*.
- [Rosenfeld, 1965] Rosenfeld, A. (1965). Perceptrons as 'figure' detectors (corresp.). *Information Theory, IEEE Transactions on*, 11(2) :304–305.
- [Rosenfeld and Kak, 1976] Rosenfeld, A. and Kak, A. C. (1976). *Digital Picture Processing*. New York Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA.
- [Rosenfeld and Pfaltz, 1966] Rosenfeld, A. and Pfaltz, J. L. (1966). Sequential operations in digital picture processing. *J. ACM*, 13(4) :471–494.

- [Ruppert, 1995] Ruppert, J. (1995). A delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation. *Journal of Algorithms*, 18(3) :548 – 585.
- [Schmitt, 1989] Schmitt, M. (1989). *Des algorithmes morphologiques à l'intelligence artificielle*.
- [Schmitt and Mattioli,] Schmitt, M. and Mattioli, J. *Morphologie mathématique*. Logique mathématiques informatique. Masson, 1994 (Impr. en Belgique), Paris, Milan, Barcelone.
- [Serra, 1965a] Serra, J. (1965a). Contribution à l'analyse pétrographique quantitative. *Notes internes du centre de Géostatistique et de Morphologie Mathématique, Ecole des Mines*.
- [Serra, 1965b] Serra, J. (1965b). La transformation en tout ou rien. *Notes internes du centre de géostatistique et de morphologie mathématique, école des Mines*.
- [Serra, 1969] Serra, J. (1969). Introduction à la morphologie mathématique. *Cahier du centre de géostatistique et de morphologie mathématique, école des Mines*.
- [Serra, 1972] Serra, J. (1972). L'échantillonnage des inclusion dans les aciers. *Rapport du centre de géostatistique et morphologie mathématique de l'école de Mines, Fontainebleau*, (298).
- [Serra, 1975] Serra, J. (1975). L'échantillonnage des inclusion dans les aciers. *Rapport du centre de géostatistique et morphologie mathématique de l'école de Mines, Fontainebleau*, (298).
- [Shewchuk, 1935] Shewchuk, J. R. (1935). Triangle : Engineering a 2D quality mesh generator and delaunay triangulator. *Applied Computational Geometry : Towards Geometric Engineering*, pages 203–222.
- [Shewchuk, 1998] Shewchuk, J. R. (1998). A condition guaranteeing the existence of higher-dimensional constrained delaunay triangulations. In *Proceedings of the Fourteenth Annual Symposium on Computational Geometry*, pages 76–85.
- [Silva et al., 2007] Silva, S., Silva, F., Madeira, J., and Sousa Santos, B. (2007). Evaluation of mesh simplification algorithms using polymeco : a case study.
- [Simone et al., 2006] Simone, A., Duarte, C. A., and Van der Giessen, E. (2006). A generalized finite element method for polycrystals with discontinuous grain boundaries. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(8) :1122–1145.
- [Simulog, 2003] Simulog (2003). *TetMesh-GHS3D User's Manual*, 4th edition edition.
- [Soille, 1999] Soille, P. (1999). *Morphological Image Analysis : Principles and Applications*. Springer.
- [Steiner, 1840] Steiner, J. (1840). Über parallele Flächen. *Monatsbericht die Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 114–118.
- [Steiner and Weierstrass, 1882] Steiner, J. and Weierstrass, K. (1882). *Jacob Steiner's gesammelte Werke, herausg. von K. Weierstrass*. Number vol. 2 in Jacob Steiner's gesammelte Werke, herausg. von K. Weierstrass.

- [Sugihara, 2002] Sugihara, K. (2002). Laguerre voronoi diagram on the sphere. *J. Geometry and Graphics*, 6(1) :69–81.
- [Taubin, 1995] Taubin, G. (1995). A signal processing approach to fair surface design. In *Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 351–358. ACM.
- [Treece et al., 1999] Treece, G., Prager, R., and Gee, A. (1999). Regularised marching tetrahedra : improved iso-surface extraction. *Computers & Graphics*, 23(4) :583 – 598.
- [Vincent, 1990] Vincent, L. (1990). *Algorithmes morphologiques à base de files d’attente et de lacets : extension aux graphes*. Les Cahiers du Centre de morphologie mathématique de Fontainebleau. Ecole nationale supérieure des Mines de Paris.
- [Vincent and Soille, 1991] Vincent, L. and Soille, P. (1991). Watersheds in digital spaces : An efficient algorithm based on immersion simulations. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 13(6) :583–598.
- [Voronoi, 1908a] Voronoi, G. (1908a). Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième mémoire. Recherches sur les paralléloèdres primitifs. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1908(134) :198–287.
- [Voronoi, 1908b] Voronoi, G. (1908b). Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. deuxième mémoire. recherches sur les paralléloèdres primitifs. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 134 :198–287.
- [Wu and Sullivan, 2003] Wu, Z. and Sullivan, J. M. (14 sep 2003). Multiple material marching cubes algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(2) :189–207.
- [Wyvill et al., 1986] Wyvill, G., McPheeters, C., and Wyvill, B. (1986). Data structure for soft objects. *The Visual Computer*, 2(4) :227–234.
- [Yang et al., 2011] Yang, F.-L., Chen, C. H., and Young, D. L. (2011). A novel mesh regeneration algorithm for 2d fem simulations of flows with moving boundary. *J. Comput. Physics*, 230(9) :3276–3301.
- [Yang et al., 2010] Yang, Z., Seo, Y.-H., and wan Kim, T. (2010). Adaptive triangular-mesh reconstruction by mean-curvature-based refinement from point clouds using a moving parabolic approximation. *Computer-Aided Design*, 42(1) :2 – 17. *Advances in Geometric Modelling and Processing*.
- [Yang and wan Kim, 2007] Yang, Z. and wan Kim, T. (2007). Moving parabolic approximation of point clouds. *Computer-Aided Design*, 39(12) :1091 – 1112.
- [Young et al., 2008] Young, P., Beresford-West, T., Coward, S., Notarberardino, B., Walker, B., and Abdul-Aziz, A. (2008). An efficient approach to converting three-dimensional image data into highly accurate computational models. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 366(1878) :3155–3173.

- [Zhang and Bajaj, 2006] Zhang, Y. and Bajaj, C. (2006). Adaptive and quality quadrilateral/hexahedral meshing from volumetric data. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(9–12) :942 – 960.
- [Zhang et al., 2005a] Zhang, Y., Bajaj, C., and Sohn, B.-S. (2005a). 3d finite element meshing from imaging data. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(48–49) :5083 – 5106. Unstructured Mesh Generation.
- [Zhang et al., 2005b] Zhang, Y., Bajaj, R., and Xu, G. (2005b). Surface smoothing and quality improvement of quadrilateral/hexahedral meshes with geometric flow. In *In Proceedings, 14th International Meshing Roundtable*, pages 449–468. John Wiley & Sons.
- [Zhang et al., 2010] Zhang, Y., Hughes, T. J., and Bajaj, C. L. (2010). An automatic 3d mesh generation method for domains with multiple materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(5–8) :405 – 415. Computational Geometry and Analysis.
- [Zhang and Qian, 2012a] Zhang, Y. and Qian, J. (2012a). Dual contouring for domains with topology ambiguity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 217–220(0) :34 – 45.
- [Zhang and Qian, 2012b] Zhang, Y. and Qian, J. (2012b). Resolving topology ambiguity for multiple-material domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 247–248(0) :166 – 178.
- [Zucker and Hummel, 1981] Zucker, S. and Hummel, R. A. (1981). A three-dimensional edge operator. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, PAMI-3(3) :324–331.