

NUMÉRO D'ORDRE : 41726

Université de Lille 1 — Laboratoire Paul Painlevé

Thèse

*présentée pour l'obtention du*

**DIPLÔME DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE 1**

Spécialité : **Mathématiques**

---

**Quelques nouveaux résultats de divisibilité  
infinie sur la demi-droite**

---

par

**Pierre BOSCH**

Soutenue le 23 juin 2015 devant le jury composé de :

---

M. Alexander	LINDNER	Universität Ulm	Rapporteur
M. Philippe	MARCHAL	Université Paris Nord	Rapporteur
M. Gérard	LETAC	Université de Toulouse	Examinateur
M. Hervé	QUEFFÉLEC	Université de Lille 1	Examinateur
M. Olivier	RAMARÉ	Université de Lille 1	Examinateur
M. Pierre	VALLOIS	Université de Lorraine	Examinateur
M. Thomas	SIMON	Université de Lille 1	Directeur

---



Thèse préparée au  
**Département de Mathématiques**  
Laboratoire Paul Painlevé (UMR CNRS 8524)  
Université Lille 1  
59 655 Villeneuve d'Ascq CEDEX

*À Élise, que j'aurais tant voulu présente...*



# Remerciements

*Voici la partie du manuscrit que je redoute le plus (principalement car elle ne sera pas relue) !...*

*Mes premiers remerciements vont à mon directeur Thomas Simon. Merci de m'avoir accepté en thèse bien qu'au départ, je ne sois pas un probabiliste. J'ai eu la chance durant ces trois années de profiter de son dynamisme et de sa grande culture mathématique.*

*Je souhaite remercier l'ensemble de mon jury : Alexander Lindner et Philippe Marchal pour avoir accepté d'être rapporteur. Je remercie également Gérard Letac, Hervé Queffélec, Olivier Ramaré et Pierre Vallois. C'est un véritable honneur que de tels chercheurs composent mon jury.*

*Je ne serais pas là sans Pierre Portal et Frédéric Bernicot avec qui j'ai pris énormément de plaisir à préparer mes mémoires de M1 et M2. J'ai adoré écouter avec Léa Blanc-Centi les plaintes d'Olivier Serman au cours d'un certain semestre d'enseignement. Je n'oublie pas Martine Queffélec pour son éternelle bonne humeur. Je remercie toute l'équipe de proba-stats pour son accueil.*

*Je remercie l'ensemble du personnel qui a toujours été très sympathique. Je ne connais pas tout le monde personnellement, mais c'est de ma faute car je suis parfois trop réservé. Je remercie donc les « sportifs » Omar (à qui je souhaite un bon rétablissement) et François, Jean-Jacques, Nadine, Sabine, Carine, Hélène, Catherine, Soledad, Fatima... (ceux ou celles qui regrettent de ne pas être dans cette liste, je vous prie de me pardonner).*

*Nous avons une bien jolie équipe de doctorants à Lille 1. Parmi eux : Pierre-Louis, Landry, Florian... Des anciens : Hubert, Matthieu, Maxime (de Lens mais on lui pardonne)... Il y en a un qui tape l'incruste : Benjamin, merci (à l'heure où j'écris ces lignes) de me laisser gagner au tennis toutes les semaines. Mes fantastiques co-bureaux : Émilie (j'ai de nouveau failli écrire Émile), Julien et Pierre. Et je remercie également deux non mathématiciens : Antoine et Laurent.*

*Je remercie bien entendu toute ma famille et tous mes amis. Plus particulièrement, ma maman, mon papa, Élise, Jérôme. Les anglais : Clémence, Thomas, Lucas, Virginie et Christophe. Catherine et Rémi. Je m'arrête là mais je n'oublie pas les autres.*

*Enfin, merci à Julie d'être à mes côtés, te rencontrer a été la plus belle chose qui m'est arrivée durant ces sept années passées à Lille 1.*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Divisibilité infinie et processus de Lévy . . . . .	4
1.2	Exemples classiques de lois infiniment divisibles . . . . .	10
1.3	Familles de lois infiniment divisibles sur la demi-droite . . . . .	15
1.4	Un cas d'étude : le carré d'une variable gaussienne . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Rappels et compléments sur les perpétuités de processus de Lévy</b>	<b>25</b>
2.1	Caractérisation par les moments entiers . . . . .	26
2.2	Étude de la densité . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Auto-décomposabilité des puissances négatives de la loi gamma</b>	<b>41</b>
3.1	Démonstration du théorème principal . . . . .	43
3.2	Remarques et compléments . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Divisibilité infinie des puissances négatives de la loi bêta</b>	<b>53</b>
4.1	Démonstrations des théorèmes principaux . . . . .	56
4.2	Remarques et compléments . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Propriété HCM et la loi de Cauchy</b>	<b>71</b>
5.1	Introduction et notations . . . . .	71
5.2	Démonstration du Théorème 5.2 . . . . .	73
5.3	Propriété HCM de $K_\nu$ . . . . .	76
5.4	À propos de la densité de $T_\alpha$ . . . . .	77
5.5	Liens avec la fonction de Mittag-Leffler . . . . .	78
5.6	Remarques et compléments . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Propriété HCM et les lois stables positives</b>	<b>93</b>
6.1	Introduction . . . . .	93
6.2	Démonstration du théorème . . . . .	93
6.3	Remarques et compléments . . . . .	96
<b>A</b>	<b>Fonctions complètement monotones et fonctions de Bernstein</b>	<b>99</b>
A.1	Fonctions complètement monotones et fonctions de Stieltjes . . . . .	99
A.2	Fonctions de Bernstein . . . . .	102
A.3	La fonction $\lambda \mapsto \lambda^\alpha$ . . . . .	105
A.4	Inversions de Laplace et inversion de Stieltjes . . . . .	106

---

<b>B</b>	<b>Monotonie complète hyperbolique</b>	<b>107</b>
B.1	Fonctions HCM . . . . .	107
B.2	Densités HCM . . . . .	108
<b>C</b>	<b>Formulaire sur la fonction gamma</b>	<b>109</b>
C.1	Une fonction importante . . . . .	109
C.2	Une formule de Malmsten . . . . .	110
C.3	Moments fractionnaires d'une loi stable . . . . .	112
C.4	Représentation de la fonction $1/\Gamma$ . . . . .	113
C.5	La formule sommatoire de Gauss et les fonctions hypergéométriques . . . .	113

# Notations

## Divers

- $\Gamma$  désigne la fonction gamma :  $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ .
- $B$  désigne la fonction bêta :

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx.$$

- $\delta_a$  désigne la masse de Dirac en  $a$ .
- $\sharp(E)$  désigne le cardinal de l'ensemble  $E$ .
- $X \stackrel{d}{=} Y$  signifie que  $X$  et  $Y$  ont la même loi.
- $X \sim \mathbf{p}$ , ou  $X \sim \mathbf{p}(dx)$  signifie que  $X$  a pour loi  $\mathbf{p}$ . C'est-à-dire,  $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbf{p}(A)$ .
- $\mathcal{L}$  désigne la transformée de Laplace sur  $\mathbb{R}_+$  :  $\mathcal{L}\mu(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mu(dx)$ .
- $\hat{\mathbf{p}}$  désigne la fonction caractéristique de  $\mathbf{p}$  :  $\hat{\mathbf{p}}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \mathbf{p}(dx)$ .

## Variables aléatoires classiques

- $X \sim \Gamma(t, s)$  signifie que  $X \sim \Gamma(t)^{-1} s^{-t} x^{t-1} e^{-x/s} dx$ ,  $x > 0$ .  $t$  est appelé paramètre de forme,  $s$  paramètre d'échelle.
- $\Gamma_t$  désigne une variable gamma de paramètre  $t$ . Plus précisément,  $\Gamma_t \sim \Gamma(t, 1)$ . C'est-à-dire,  $\Gamma_t \sim \Gamma(t)^{-1} x^{t-1} e^{-x} dx$ ,  $x > 0$ . Observons que si  $X \sim \Gamma(t, s)$ , alors  $X \stackrel{d}{=} s \times \Gamma_t$ .
- $\mathbf{B}_{a,b}$  désigne une variable bêta de paramètre  $(a, b)$ . C'est-à-dire,

$$\mathbf{B}_{a,b} \sim B(a, b)^{-1} x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx, \quad x \in (0, 1).$$

Nous avons la relation  $\Gamma_a \stackrel{d}{=} \mathbf{B}_{a,b} \times \Gamma_{a+b}$  où les variables  $\mathbf{B}_{a,b}$  et  $\Gamma_{a+b}$  sont supposées indépendantes.

- $\mathbf{L}$  désigne une variable exponentielle d'espérance 1 :  $\mathbf{L} \sim e^{-x} dx$ ,  $x > 0$ .
- $\mathbf{Z}_\alpha$  désigne une variable strictement  $\alpha$ -stable positive ( $\alpha \in (0, 1]$ ) caractérisée par  $\mathbb{E}(e^{-\lambda \mathbf{Z}_\alpha}) = e^{-\lambda^\alpha}$ .
- $\mathbf{Z}^{(\alpha)} = (\mathbf{Z}_t^{(\alpha)})_{t \geq 0}$  désigne le subordinateur strictement  $\alpha$ -stable tel que  $\mathbf{Z}_1^{(\alpha)} \stackrel{d}{=} \mathbf{Z}_\alpha$ .

## Familles de lois infiniment divisibles sur $\mathbb{R}_+$

- ME : Mélange par la moyenne de la loi exponentielle.
- $\text{M}\Gamma_t$  : Mélange par le paramètre d'échelle de la loi gamma de paramètre de forme  $t$ .  $\text{M}\Gamma_1 = \text{ME}$ ,  $\text{M}\Gamma_s \subset \text{M}\Gamma_t$  si  $s < t$  et  $\text{M}\Gamma_t \subset \text{ID} \Leftrightarrow t \leq 2$ .

- SD : Ensemble des lois auto-décomposables.
- GGC : Convolutions généralisées de lois gamma.
- HCM : Hyperboliquement complètement monotone.
- $\mathcal{E}_-$  : Ensemble des perpétuités de processus de Lévy intégrables, d'espérances positives et spectralement négatifs.

# Chapitre 1

## Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques concepts classiques qui seront utilisés tout au long de cette thèse. Le contenu de ce chapitre est probabiliste et nous avons rassemblé en annexe les aspects analytiques correspondants, essentiellement liés aux fonctions de Bernstein et aux fonctions complètement monotones. Lorsque ces notions sont utilisées, nous le faisons de façon implicite, renvoyant le lecteur à l'annexe pour plus de détails.

Comme son titre l'indique, le sujet général de cette thèse est la notion de divisibilité infinie. Une variable aléatoire  $X$  à valeurs réelles est dite infiniment divisible quand, pour tout entier  $n$ , elle est la somme indépendante de  $n$  variables aléatoires de même loi. Du point de vue des lois, cela signifie que la distribution de  $X$  admet une racine  $n$ -ième pour le produit de convolution, pour tout  $n$ . Dans cette thèse, nous nous intéresserons essentiellement aux lois et moins à leurs réalisations que sont les variables aléatoires. L'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  sera fixé une fois pour toutes et toujours supposé suffisamment grand. Pour des raisons de commodité de langage, nous confondrons souvent les deux notions, et les deux phrases « telle variable aléatoire est infiniment divisible » ou « telle loi est infiniment divisible » auront le même sens.

Dès les origines de la théorie (de Finetti, Lévy, Khintchine), le concept de divisibilité infinie est relié à deux constructions limite, qui requièrent un espace de probabilité sous-jacent non trivial. La première est celle de semi-groupe de convolution, conséquence en temps continu de la divisibilité infinie, et dont le pendant probabiliste est la notion de processus de Lévy ou processus à accroissements indépendants et stationnaires. De façon schématique, on peut montrer qu'une variable aléatoire réelle est infiniment divisible si et seulement si elle est la marginale en temps 1 d'un processus de Lévy. La seconde est celle de suite infinitésimale : on peut montrer – voir par exemple le chapitre 4 dans [30] – qu'une variable aléatoire réelle  $X$  est infiniment divisible si et seulement si elle est la limite en loi d'une suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  définie par

$$S_n = a_n + \sum_{k=1}^{K_n} X_k^{(n)} \quad (1.1)$$

où  $(a_n)_{n \geq 1}$  est une suite réelle,  $T = (X_k^{(n)})_{n \geq 1, 1 \leq k \leq K_n}$  est un tableau triangulaire (i.e.  $(K_n)_{n \geq 1}$  est une suite strictement croissante d'entiers positifs) de variables indépendantes, et où les lignes  $(X_k^{(n)})_{1 \leq k \leq K_n}$  sont composées de variables asymptotiquement négligeables, c'est-à-dire, telles que  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$\max_{1 \leq k \leq K_n} \mathbb{P}(|X_k^{(n)}| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Les processus de Lévy joueront un rôle important dans cette thèse, quoiqu'en retrait par rapport à la divisibilité infinie. Les suites infinitésimales n'apparaîtront qu'en filigrane lorsque nous parlerons de lois stables ou auto-décomposables, où elles peuvent être utilisées pour définir ce type de lois – voir par exemple le chapitre 3 dans [45]. Cependant, nous parlerons de stabilité ou d'auto-décomposabilité sous un angle uniquement analytique, sans évoquer le point de vue des théorèmes limite.

Donnons maintenant quelques définitions plus précises. Sauf mention explicite du contraire, toutes nos lois et tous nos processus seront à valeurs réelles.

## 1.1 Divisibilité infinie et processus de Lévy

**Définition 1.1** (*n*-divisibilité) Une mesure de probabilité  $\mathbf{p}$  est dite *n*-divisible s'il existe une mesure de probabilité  $\mathbf{p}_n$  telle que  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_n^{*n}$ .

**Définition 1.2** (Divisibilité infinie) Une mesure de probabilité  $\mathbf{p}$  est dite infiniment divisible si pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathbf{p}$  est *n*-divisible.

Observons que si  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  sont infiniment divisibles, alors  $\mathbf{p} * \mathbf{q}$  est infiniment divisible. Autrement dit, la somme de deux variables indépendantes infiniment divisibles est infiniment divisible.

**Proposition 1.3** Soit  $(\mathbf{p}^{(n)})_{n \geq 0}$  une suite composée de mesures de probabilités infiniment divisibles. Si  $\mathbf{p}^{(n)} \rightarrow \mathbf{p}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  étroitement, alors  $\mathbf{p}$  est infiniment divisible.

Autrement dit, si  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une suite de variables infiniment divisibles et si  $X_n \xrightarrow{d} X$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , alors  $X$  est infiniment divisible.

### 1.1.1 Définition d'un processus de Lévy

**Définition 1.4** On dit qu'un processus stochastique  $(X_t)_{t \geq 0}$  est stochastiquement continu si  $\forall t_0 \geq 0$ ,  $X_t \rightarrow X_{t_0}$  lorsque  $t \rightarrow t_0$  en probabilité. C'est-à-dire, si  $\forall t_0 \geq 0$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbb{P}(|X_t - X_{t_0}| > \varepsilon) = 0.$$

**Définition 1.5** (Processus de Lévy) On dit qu'un processus stochastique  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy si :

- (1) Les accroissements de  $X$  sont indépendants :  $\forall n \geq 1$ ,  $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ,  $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  sont indépendants ;
- (2)  $X_0 = 0$  p.s. ;
- (3) Les accroissements de  $X$  sont stationnaires : la loi de  $X_{t+s} - X_t$  ne dépend pas de  $t$  ;
- (4)  $X$  est stochastiquement continu ;
- (5)  $X$  a une modification càdlàg : il existe  $\Omega_0 \in \mathcal{F}$  avec  $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$  tel que,  $\forall \omega \in \Omega_0$ ,  $t \mapsto X_t(\omega)$  est càdlàg.

**Définition 1.6** Un processus de Lévy croissant est appelé subordonateur.

Observons que si  $X$  est un subordonateur, alors  $\forall t \geq 0$ ,  $X_t \geq 0$  p.s.

**Théorème 1.7** (d'extension de Kolmogorov) Soit  $(\mathbf{p}_t)_{t \geq 0}$  un semi-groupe de convolution, alors on peut construire un processus de Lévy  $(X_t)_{t \geq 0}$  tel que pour tout  $t \geq 0$ ,  $X_t \sim \mathbf{p}_t$ .

### 1.1.2 La formule de Lévy-Khintchine : le cas positif

Soit  $\mathbf{p}$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}_+$  infiniment divisible. Par injectivité de la transformée de Laplace, les égalités  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_n^{*n}$  pour  $n \geq 1$  sont équivalentes à

$$\forall n \geq 1, \mathcal{L}\mathbf{p} = (\mathcal{L}\mathbf{p}_n)^n.$$

Ainsi,  $\mathbf{p}$  est infiniment divisible si et seulement si  $\forall n \geq 1$ ,  $(\mathcal{L}\mathbf{p})^{1/n}$  est la transformée de Laplace d'une mesure de probabilité, c'est-à-dire, une fonction complètement monotone valant 1 en 0. La fermeture de la classe des fonctions complètement monotones par limite simple, entraîne la proposition suivante :

**Proposition 1.8** *Une mesure de probabilité  $\mathbf{p}$  sur  $\mathbb{R}_+$  est infiniment divisible si et seulement si, pour tout  $t \geq 0$ ,  $(\mathcal{L}\mathbf{p})^t$  est une fonction complètement monotone.*

À partir d'une telle mesure de probabilité  $\mathbf{p}$ , on construit l'unique semi-groupe  $(\mathbf{p}_t)_{t \geq 0}$  en posant

$$\mathbf{p}_t = \mathcal{L}^{-1}((\mathcal{L}\mathbf{p})^t).$$

Ce fait élémentaire et la Proposition A.14 (plus précisément son corollaire) sont à l'origine de la formule de Lévy-Khintchine dans le cas positif :

**Théorème 1.9** (Exposant de Lévy-Khintchine ou de Laplace) *Soit une mesure de probabilité  $\mathbf{p}$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Alors  $\mathbf{p}$  est infiniment divisible si et seulement s'il existe  $a \geq 0$  et une mesure  $\mu$  sur  $(0, +\infty)$  tels que*

$$\forall \lambda \geq 0, \mathcal{L}\mathbf{p}(\lambda) = \exp\left(-a\lambda - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \mu(dx)\right). \quad (1.2)$$

La mesure  $\mu$  vérifie la condition d'intégrabilité  $\int_0^\infty (1 \wedge x) \mu(dx) < +\infty$ .

La fonction  $\varphi : \lambda \mapsto -\log(\mathcal{L}\mathbf{p}(\lambda)) = a\lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \mu(dx)$ , qui est une fonction de Bernstein, est appelée exposant de Laplace. La mesure  $\mu$  est appelée mesure de Lévy. Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus de Lévy ayant  $(\mathbf{p}_t)_{t \geq 0}$  comme semi-groupe de convolution, alors,  $\forall t \geq 0, \forall \lambda \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda X_t}) = \mathcal{L}\mathbf{p}_t(\lambda) = \exp(-t\varphi(\lambda)) = \exp\left(-at\lambda - t \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \mu(dx)\right).$$

### 1.1.3 La formule de Lévy-Khintchine : le cas réel

Le cas où la mesure de probabilité  $\mathbf{p}$  n'est pas supportée sur  $\mathbb{R}_+$  est analogue mais plus compliqué. Ici, rien ne garantit que la transformée de Laplace  $\mathcal{L}\mathbf{p}(\lambda)$  soit définie pour  $\lambda \neq 0$ . La fonction caractéristique est plus adaptée : pour tout  $u \in \mathbb{R}$ , on pose

$$\hat{\mathbf{p}}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \mathbf{p}(dx).$$

Les égalités  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_n)^{*n}$  sont alors équivalentes à  $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{\mathbf{p}}_n)^n$ . L'équivalent du Théorème 1.9 est le suivant :

**Théorème 1.10** (Exposant de Lévy-Khintchine) *Une mesure de probabilité  $\mathbf{p}$  sur  $\mathbb{R}$  est infiniment divisible si et seulement s'il existe une fonction  $\Phi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par*

$$\Phi(u) = iau - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}^*} (e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)) \mu(dx), \quad (1.3)$$

telle que  $\forall u \in \mathbb{R}$ ,  $\hat{\mathbf{p}}(u) = \exp(\Phi(u))$ . La mesure  $\mu$  vérifie la condition d'intégrabilité  $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \mu(dx) < +\infty$ .

La fonction  $\Phi$  est appelée exposant de Lévy-Khintchine et la mesure  $\mu$ , mesure de Lévy. Observons que la condition d'intégrabilité vérifiée par la mesure de Lévy est moins restrictive que dans le cas positif. La fonction de troncature  $\mathbf{1}_{[-1,1]}$  peut être remplacée par n'importe quelle fonction  $\rho$  ayant  $\rho(x) = 1 + O(x)$  pour développement limité en 0, et telle que  $x \mapsto x\rho(x)$  soit bornée sur  $\mathbb{R}^*$ . Changer la fonction de troncature change le coefficient de dérive  $a$ . En général,  $\rho(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$  ou  $\rho(x) = (1 + x^2)^{-1}$ . Si  $\int_{[-1,1]} |x| \mu(dx) < +\infty$ , alors le terme  $ix\rho(x)$  n'est pas nécessaire afin de faire converger l'intégrale et on peut choisir  $\rho = 0$ . Lorsque  $\int_{[-1,1]^c} |x| \mu(dx) < +\infty$  (c'est-à-dire, lorsque l'on suppose que  $\mathbf{p}$  admet un moment d'ordre 1 – voir le Théorème 25.3 dans [45]), on peut choisir comme fonction de troncature  $\rho = 1$ . Enfin, lorsque  $\mathbf{p}$  admet des moments exponentiels positifs et négatifs, on écrira, pour les valeurs de  $u \in \mathbb{R}$  où l'intégrale converge,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ux} \mathbf{p}(dx) = \exp(\Psi(u)).$$

La fonction  $\Psi$  est en général appelée exposant de Laplace. De l'expression de l'exposant de Lévy-Khintchine (1.3), on déduit

$$\Psi(u) = au + \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}^*} (e^{ux} - 1 - ux\rho(x)) \mu(dx). \quad (1.4)$$

Étant donné une mesure de probabilité  $\mathbf{p}$  infiniment divisible, on construit le semi-groupe  $(\mathbf{p}_t)_{t \geq 0}$  en posant

$$\mathbf{p}_t = \mathcal{F}^{-1} (u \mapsto e^{t\Phi(u)})$$

où  $\mathcal{F} : \mathbf{p} \mapsto \hat{\mathbf{p}}$ .

### 1.1.4 Informations données par l'exposant de Lévy-Khintchine

L'exposant de Lévy-Khintchine permet de comprendre le comportement du processus de Lévy. Le terme  $a$  est appelé dérive, il correspond à la partie linéaire du processus. La partie  $-\sigma^2 u^2/2$  correspond à la composante brownienne. Enfin, la mesure de Lévy décrit comment le processus saute : par exemple, la probabilité que le processus ne fasse pas de saut de taille supérieure à 1 pendant un temps  $t > 0$  est égale à  $e^{-t\mu((1, +\infty))}$ . Si pour un borélien  $A$  de  $\mathbb{R}^*$ ,  $\mu(A) = 0$ , cela signifie que le processus ne fera jamais de saut dont la taille est un élément de  $A$ . En particulier, si  $\mu((-\infty, 0)) = 0$  (respectivement  $\mu((0, +\infty)) = 0$ ), alors le processus ne saute pas « vers le bas » (respectivement « vers le haut »), dans ce cas, on dit que le processus est spectralement positif (respectivement spectralement négatif). Illustrons ceci par quelques exemples simples :

**Exemple n° 1 : le cas déterministe.** Soit  $X$  le processus défini par  $X_t = at$  pour  $t \geq 0$ . Son semi-groupe de convolution est  $(\delta_{at})_{t \geq 0}$  et son exposant de Lévy-Khintchine  $\Phi(u) = iau$  car

$$\mathbb{E}(e^{iuX_t}) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \delta_{at}(dx) = e^{tiau}.$$

**Exemple n° 2 : le processus de Poisson standard.** Le processus  $N$  est défini comme suit : soit  $(\mathbf{L}_k)_{k \geq 1}$  une suite i.i.d. de variables exponentielles de paramètres  $c^{-1}$  et soit  $T_n = \mathbf{L}_1 + \cdots + \mathbf{L}_n$ ,  $n \geq 1$ . On pose pour  $t \geq 0$ ,

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}.$$

Il est facile de montrer que  $N_t$  suit une loi de Poisson de paramètre  $ct$ . Il est moins facile de montrer que  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy, c'est-à-dire, montrer que  $N_{t+s} - N_t$  est indépendant de  $(N_u)_{0 \leq u \leq t}$  et que  $N_{t+s} - N_t \stackrel{d}{=} N_s$ . La preuve repose essentiellement sur l'absence de mémoire de la loi exponentielle. La fonction caractéristique

$$\mathbb{E}(e^{iuN_t}) = \sum_{n \geq 0} e^{iun} e^{-ct} \frac{(ct)^n}{n!} = \exp(ct(e^{iu} - 1))$$

est donc de la forme (1.3) avec  $a = 0$ ,  $\sigma = 0$ ,  $\rho = 0$  et  $\mu = c\delta_1$ .

**Exemple n° 3 : le processus de Poisson composé.** Soit  $N$  un processus de Poisson standard comme ci-dessus, et soit  $(Y_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d., indépendante du processus  $N$ . Soit  $\nu$  la loi commune de ces variables. On définit alors pour tout  $t \geq 0$ ,

$$X_t = \sum_{n=1}^{N_t} Y_n.$$

$X$  est un processus de Lévy, sa fonction caractéristique

$$\mathbb{E}(e^{iuX_t}) = \sum_{n=1}^{\infty} [\mathbb{E}(e^{iuY_1})]^n e^{-ct} \frac{(ct)^n}{n!} = \exp\left(ct \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1) \nu(dx)\right)$$

est donc de la forme (1.3) avec  $a = 0$ ,  $\sigma = 0$ ,  $\rho = 0$  et  $\mu = c\nu$ . Autrement dit, après un temps exponentiel de moyenne  $c^{-1}$ , le processus  $X$  saute suivant une probabilité  $\nu$ . Bien sûr, si l'on choisit  $Y_n = 1$ , on retrouve le processus de Poisson standard.

**D'autres informations données par la mesure de Lévy.** Dans ce manuscrit, le théorème suivant est principalement utilisé afin de donner des exemples non triviaux de lois qui ne sont pas infiniment divisibles. On le trouve par exemple dans [45] (Théorème 26.1). Pour une mesure  $\mu$  sur  $\mathbb{R}$ , on note  $S_\mu$  son support.

**Théorème 1.11** *Soit  $X$  une variable aléatoire infiniment divisible et soit  $\mu$  sa mesure de Lévy. Posons  $m = \inf\{a > 0 / S_\mu \subset [-a, a]\}$ . Alors,*

$$(1) \quad \forall c \in (0, 1/m),$$

$$\mathbb{P}(|X| > r) e^{cr \log(r)} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0.$$

$$(2) \quad \forall c \in (1/m, +\infty),$$

$$\mathbb{P}(|X| > r) e^{cr \log(r)} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} +\infty.$$

### 1.1.5 La subordination de Bochner

Considérons un processus de Lévy  $X$  d'exposant de Lévy-Khintchine  $\Phi$ , et un subordonateur  $S$  d'exposant de Laplace  $\varphi$  indépendant de  $X$ . Nous pouvons définir formellement le processus  $Y$  par  $Y_t = X_{S_t}$  qui est le processus de Lévy  $X$  indexé en temps par le subordonateur  $S$ . Le théorème suivant – voir par exemple le Théorème 32.1 dans [45] – donne un sens à la définition de  $Y$ .

**Théorème 1.12** (de subordination de Bochner) *Le processus  $Y$  est un processus de Lévy dont l'exposant de Lévy-Khintchine est la fonction définie par  $-\varphi(-\Phi(u))$ .*

Notons  $(\mathbf{p}_t)_{t \geq 0}$  le semi-groupe de convolution du subordonateur  $S$ . Puisque les processus  $X$  et  $S$  sont supposés indépendants,

$$\mathbb{E}(e^{iuX_{S_t}}) = \int_0^\infty \mathbb{E}(e^{iuX_s}) \mathbf{p}_t(ds) = \int_0^\infty e^{s\Phi(u)} \mathbf{p}_t(ds) = e^{-t\varphi(-\Phi(u))},$$

$\varphi(-\Phi(u))$  a bien un sens car  $\operatorname{Re}(\Phi(u)) \leq 0$ .

Nous verrons que ce théorème permet d'obtenir des résultats intéressants lorsque  $X$  est un processus de Lévy stable – voir les paragraphes 1.2.2 et 1.3.1. Bien entendu, ce théorème a d'autres applications en probabilité.

### 1.1.6 Processus de Lévy et processus ponctuels

Considérons un processus de Lévy intégrable  $X$  d'exposant de Lévy-Khintchine  $\Phi$  – voir la formule (1.3) – et supposons que  $\int_{[-1,1]^c} |x| \mu(dx) < +\infty$ . Nous pouvons donc choisir comme fonction de troncature  $\rho = 0$ . Ainsi,

$$\Phi(u) = iau - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}^*} (e^{iux} - 1 - iux) \mu(dx). \quad (1.5)$$

$X = (X_t)_{t \geq 0}$  se décompose donc sous la forme  $X_t = at + \sigma B_t + \xi_t$ . Si nous supposons de plus, que  $\xi$  est à variation finie, alors  $\Phi$  peut se mettre sous la forme

$$\Phi(u) = i\tilde{a}u - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}^*} (e^{iuz} - 1) \mu(dz) \quad (1.6)$$

et  $X_t = \tilde{a}t + \sigma B_t + \xi_t$ . Dans ce cas,  $\xi$  est un processus de sauts pur. Enfin, observons la relation  $\tilde{a} = a - \int_{\mathbb{R}^*} z \mu(dz)$ . Les résultats exposés ci-dessous sont par exemple développés dans [7].

#### 1.1.6.1 Le cas où $\xi$ est à variation finie

Supposons que le processus de sauts  $\xi$  est à variation finie. Nous pouvons écrire

$$\xi_t = \sum_{s \leq t} \Delta \xi_s$$

où  $\Delta \xi_s = \xi_s - \xi_{s-}$ . Soit  $N(t, \cdot)$  la mesure aléatoire définie, pour un ensemble compact  $A$  de  $\mathbb{R}^*$ , par

$$N(t, A) = \#\{s > 0 / \Delta \xi_s \in A\}.$$

Alors,  $(N(t, A))_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson d'intensité  $\mu(A)$ . Plus précisément,  $N$  est un processus ponctuelle de Poisson d'intensité  $ds\mu(dx)$ . On a alors,

$$\xi_t = \sum_{s \leq t} \Delta \xi_s = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} x N(ds, dx) = \int_{\mathbb{R}^*} x N(t, dx).$$

**Proposition 1.13** *Supposons que  $\Phi$  soit de la forme (1.6) ( $\xi$  est à variation finie). Soient  $N$  un processus ponctuel de Poisson sur  $\mathbb{R}^*$  d'intensité  $\mu$  et  $B$  un mouvement brownien standard indépendant de  $N$ . Alors,  $X$  a la même loi que le processus*

$$\left( \tilde{a}t + \sigma B_t + \int_{\mathbb{R}^*} x N(t, dx) \right)_{t \geq 0}.$$

**Proposition 1.14** (1)  $\mathbb{E} \left( \int_{\mathbb{R}^*} f(x) N(t, dx) \right) = t \int_{\mathbb{R}^*} f(x) \mu(dx)$  ;

$$(2) f(\xi_t) = f(0) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} (f(\xi_{s-} + x) - f(\xi_{s-})) N(ds, dx).$$

(2) est une formule d'Itô pour un processus de sauts pur (à variation finie).

### 1.1.6.2 Le cas où $\xi$ est à variation infinie

Lorsque le processus  $\xi$  est à variation infinie,  $\int_{\mathbb{R}^*} x N(t, dx)$  ne converge plus. Introduisons le compensateur  $\tilde{N}$  défini par

$$\tilde{N}(t, dx) = N(t, dx) - t\mu(dx).$$

Nous avons une représentation analogue à celle de la Proposition 1.13 :

**Théorème 1.15** *Supposons que  $\Phi$  soit de la forme (1.5). Soient  $N$  un processus ponctuel de Poisson sur  $\mathbb{R}^*$  d'intensité  $\mu$  et  $B$  un mouvement brownien standard indépendant de  $N$ . Alors,  $X$  a la même loi que le processus*

$$\left( at + \sigma B_t + \int_{\mathbb{R}^*} x \tilde{N}(t, dx) \right)_{t \geq 0}. \quad (1.7)$$

Il est possible d'énoncer ce théorème dans un cadre plus général : si l'on ne suppose plus que  $X$  est intégrable, alors son exposant de Lévy-Khintchine  $\Phi$  se met sous la forme (1.3) et  $X$  a la même loi que

$$\left( at + \sigma B_t + \int_{|x| \leq 1} x \tilde{N}(t, dx) + \int_{|x| > 1} x N(t, dx) \right)_{t \geq 0}.$$

**Proposition 1.16** *Pour toute fonction  $\mu$ -intégrable  $f$ ,  $\mathbb{E} \left( \int_{\mathbb{R}^*} f(x) \tilde{N}(t, dx) \right) = 0$ .*

**Théorème 1.17** (Formule d'Itô avec sauts) *Soient un processus de Lévy  $X$  donné par (1.7) et  $f$  une fonction de classe  $C^2$ , on a,*

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(0) + a \int_0^t f'(X_s) ds + \sigma \int_0^t f'(X_s) dB_s + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t f''(X_s) ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} (f(X_{s-} + x) - f(X_{s-})) \tilde{N}(ds, dx) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} (f(X_{s-} + x) - f(X_{s-}) - x f'(X_{s-})) \mu(dx) ds. \end{aligned}$$

## 1.2 Exemples classiques de lois infiniment divisibles

### 1.2.1 Les plus faciles

De nombreuses lois connues de tous les probabilistes sont infiniment divisibles. Par exemple, nous avons vu que la loi gaussienne  $\mathcal{N}(m, t)$  d'espérance  $m$  et de variance  $t$  dont la densité est la fonction définie par

$$\frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2t}\right)$$

est infiniment divisible. Le moyen le plus simple pour démontrer ceci consiste à utiliser la relation bien connue

$$\forall m_1, m_2 \in \mathbb{R}, \forall t_1, t_2 > 0, \mathcal{N}(m_1, t_1) * \mathcal{N}(m_2, t_2) = \mathcal{N}(m_1 + m_2, t_1 + t_2). \quad (1.8)$$

Le semi-groupe de  $\mathbf{p} = \mathcal{N}(m, \sigma^2)$  est défini pour tout  $t \geq 0$  par  $\mathbf{p}_t = \mathcal{N}(mt, \sigma^2 t)$  et le processus de Lévy correspondant est appelé mouvement brownien. Les lois suivantes vérifient le même type de relation et sont donc infiniment divisibles :

1. La loi de Poisson d'intensité  $c$  définie par la suite  $(p_n)_{n \geq 0}$  où  $p_n = e^{-c} c^n / n!$  : son semi-groupe  $(\mathbf{p}_t)_{t \geq 0}$  est défini par la suite  $(p_n^{(t)})_{n \geq 0}$  où

$$p_n^{(t)} = e^{-ct} \frac{(ct)^n}{n!}.$$

2. La loi gamma de paramètre  $(a, b)$  : son semi-groupe est défini par

$$\mathbf{p}_t(dx) = \frac{b^{-at}}{\Gamma(at)} x^{at-1} e^{-x/b} dx, \quad x > 0.$$

3. La loi de Cauchy standard : son semi-groupe est défini par  $\mathbf{p}_t(dx) = \frac{tdx}{\pi(t^2+x^2)}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
4. La loi binomiale négative de paramètre  $r > 0$  définie par la suite  $(p_n)_{n \geq 0}$  avec

$$p_n = \binom{r+n-1}{n} p^r (1-p)^n.$$

Son semi-groupe  $(\mathbf{p}_t)_{t \geq 0}$  est défini par la suite  $(p_n^{(t)})_{n \geq 0}$  avec

$$p_n^{(t)} = \binom{rt+n-1}{n} p^{rt} (1-p)^n.$$

En particulier, la loi exponentielle et son analogue discrète, la loi géométrique, sont infiniment divisibles. Nous voyons que la loi gaussienne se divise en lois gaussiennes (de même pour les autres lois citées ci-dessus). Un théorème dû à Cramer établit que si la somme de deux variables indépendantes  $X + Y$  suit une loi gaussienne, alors  $X$  et  $Y$  sont des variables gaussiennes. Raikov prouve le même résultat pour la loi de Poisson. Ces deux lois sont les seules à vérifier cette propriété.

Considérons un mouvement brownien standard  $B = (B_t)_{t \geq 0}$ . On a  $\forall t \geq 0, B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$  et  $B_t^2 \sim (2\pi t)^{-1/2} x^{-1/2} e^{-x/2t} dx$ ,  $x > 0$ , c'est-à-dire  $B_t^2 \sim \Gamma(1/2, 2t)$ . Ainsi, puisque la loi

gamma est infiniment divisible,  $B_t^2 \sim \text{ID}$ . Néanmoins, le semi-groupe de convolution sous-jacent est  $\{\mathbf{p}_s = \Gamma(s/2, 2t), s \geq 0\}$  et n'a plus rien à voir avec  $\{\mathcal{N}(0, t), t \geq 0\}$ . Nous verrons au Théorème 1.31 que le carré d'une variable gaussienne non centrée est encore infiniment divisible, la démonstration est par contre moins triviale. Lorsque  $t = 1$ , les statisticiens nomment la loi de  $B_1^2$ , loi du  $\chi^2$  à un degré de liberté, abrégé en  $\chi^2(1)$ .  $\chi^2(1)$  est donc infiniment divisible et il n'est pas bien compliqué de voir que cette propriété tient encore pour un  $\chi^2$  à  $n$  degrés de liberté puisque l'on a

$$\chi^2(n) = \Gamma\left(\frac{n}{2}, 2\right).$$

Nous verrons que la loi  $t$  de Student, est aussi infiniment divisible, l'argument ci-dessus étant la première étape de la démonstration.

Le lecteur non initié pourrait, au vu des exemples cités, penser que toutes les lois de probabilité sont infiniment divisibles. Ceci est bien entendu faux puisqu'il est facile de voir qu'une loi de Bernoulli de paramètre  $p \in (0, 1)$  n'est pas 2-divisible. Et plus généralement, une loi à support compact ne peut être infiniment divisible, excepté si la loi est une masse de Dirac. En effet, il est facile de voir que si une probabilité  $\mathbf{p}$  a un support inclus dans  $[0, a]$ , alors sa variance est majorée par  $a^2/4$ . De plus, si  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_n^{*n}$  alors le support de  $\mathbf{p}_n$  est inclus dans  $[0, a/n]$  et la variance de  $\mathbf{p}_n$  est majorée par  $a^2/4n^2$ . On en déduit que

$$\text{Var}(\mathbf{p}) = \text{Var}(\mathbf{p}_n^{*n}) = n \text{Var}(\mathbf{p}_n) \leq \frac{a^2}{4n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

c'est-à-dire que  $\mathbf{p}$  est une masse de Dirac. En particulier, la loi uniforme n'est pas infiniment divisible et il est même possible de montrer qu'elle n'est pas  $n$ -divisible quel que soit  $n \geq 2$ . Cette propriété peut être généralisée grâce au Théorème 1.11 : une loi qui est « presque » à support compact (c'est-à-dire dont les queues de distributions sont trop légères) ne peut être infiniment divisible. Par exemple, soit  $\Gamma_t$  une variable gamma de paramètre  $t$ , alors  $\Gamma_t^\xi$  n'est pas infiniment divisible lorsque  $\xi \in (0, 1)$ . En effet, supposons le contraire, on a  $\forall c > 0$ ,

$$\mathbb{P}(\Gamma_t^\xi > r) e^{cr \log(r)} = \frac{e^{cr \log(r)}}{\Gamma(t)} \int_{r^{1/\xi}}^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \lesssim \exp\left(-\frac{r^{1/\xi}}{2} + cr \log(r)\right) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0.$$

En utilisant les notations du Théorème 1.11, nous déduisons que  $M = 0$ , c'est-à-dire que la mesure de Lévy de  $\Gamma_t^\xi$  est nulle. Ainsi,  $\Gamma_t^\xi$  est une variable gaussienne, ce qui est bien entendu absurde. De même, si  $X$  est une variable gaussienne non triviale, alors la demi-gaussienne  $|X|$  n'est pas infiniment divisible. Notons que la question de la 2-divisibilité de la demi-gaussienne est un problème ouvert contrairement au cas de la loi uniforme. Enfin, il existe des lois dont les queues de distributions sont exponentielles, ou même polynomiales, qui ne sont pas infiniment divisibles.

### 1.2.2 Un peu moins faciles : les mélanges de lois

Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard, c'est-à-dire l'unique (en loi) processus de Lévy continu tel que  $B_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et soit  $(S_t)_{t \geq 0}$  un subordonateur indépendant de  $B$ , alors le processus  $Y = (B_{S_t})_{t \geq 0}$  est un processus de Lévy – voir le Théorème 1.12. En faisant jouer l'auto-similarité de  $B$ , on obtient l'égalité (ponctuelle) en loi :

$$\forall t \geq 0, Y_t = B_{S_t} \stackrel{d}{=} \sqrt{S_t} \times B_1.$$

Si l'on remplace  $B$  par  $Z$  où  $Z$  est un processus de Lévy auto-similaire, disons  $H$ -auto-similaire (nécessairement  $H \in [1/2, +\infty)$ , le cas  $H = 1/2$  correspond au mouvement brownien, voir le paragraphe 1.3.1 et le chapitre 3 dans [45]), alors l'égalité en loi précédente devient

$$\forall t \geq 0, Y_t = Z_{S_t} \stackrel{d}{=} S_t^H \times Z_1.$$

Les lois marginales d'un processus de Lévy étant infiniment divisibles, nous voyons que  $S_t^H \times Z_1$  a une loi infiniment divisible quel que soit  $t \geq 0$ . En particulier, soient  $B$  une variable gaussienne centrée et  $S$  une variable positive infiniment divisible, indépendante de  $B$ , alors  $\sqrt{S} \times B$  est infiniment divisible. Cette propriété permet de démontrer que la loi  $t$  de Student est infiniment divisible. En effet, on dit que  $T$  suit une loi  $t$  de Student à  $n$  degrés de liberté si

$$T \stackrel{d}{=} \frac{Z}{\sqrt{C_n/n}}$$

où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  est indépendante de  $C_n \sim \chi^2(n)$ . Ainsi, puisque  $C_n \stackrel{d}{=} 2\Gamma_{n/2}$ ,

$$T \stackrel{d}{=} \sqrt{\frac{n}{2}} \times \sqrt{\Gamma_{n/2}^{-1}} \times Z$$

est infiniment divisible si  $\Gamma_{n/2}^{-1}$  l'est. Ce résultat a été démontré par Grosswald [32] où la mesure de Lévy de  $\Gamma_u^{-1}$  ( $u > 0$ ) est donnée explicitement à l'aide de fonctions de Bessel de première espèce. D'autres preuves ont été données par la suite, par exemple, Kent [37] montre que la loi de  $\Gamma_t^{-1}$  est celle du temps de passage d'une diffusion et sa divisibilité infinie. L'égalité en loi de Dufresne [26] permet de montrer l'auto-décomposabilité qui est une propriété plus forte que la divisibilité infinie – voir le paragraphe 1.3.2. On dit que la loi  $t$  de Student est un mélange de la loi normale par la loi de  $\Gamma_{n/2}^{-1}$ .

En effet, considérons une variable positive  $X$  de loi  $\mathbf{p}$  indépendante de  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Calculons la loi de  $\sqrt{X} \times Z$  que l'on note  $\mathbf{q}$  :

$$\mathbb{E} \left( e^{iuz\sqrt{X} \times Z} \right) = \mathbb{E} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{iuz\sqrt{X}} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz \right) = \int_{\mathbb{R}} e^{iuz} \mathbb{E} \left( \frac{e^{-z^2/2X}}{\sqrt{2\pi X}} \mathbf{1}_{\{X \neq 0\}} \right) dz + \mathbb{P}(X = 0)$$

donc

$$\mathbf{q}(dz) = \int_{(0, +\infty)} \frac{e^{-z^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} \mathbf{p}(dt) + \mathbf{p}(\{0\})\delta_0(dz).$$

**Définition 1.18** (Mélange de lois) Soient  $(\Omega, \mathcal{F})$  et  $(\Theta, \mathcal{G})$  deux espaces mesurables et  $(\mathbf{q}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  une famille de lois probabilités sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . On suppose que  $\forall A \in \mathcal{F}$ , l'application

$$\theta \mapsto \mathbf{q}_\theta(A)$$

est  $\mathcal{G} - \mathcal{F}$  mesurable. Soit  $\mathbf{p}$  une probabilité sur  $(\Theta, \mathcal{G})$ , alors la mesure de probabilité sur  $\Omega$  définie par

$$\mathbf{q}(A) = \int_{\Theta} \mathbf{q}_\theta(A) \mathbf{p}(d\theta)$$

est appelé mélange de la famille  $(\mathbf{q}_\theta)_{\theta \in \Theta}$  par la mesure de probabilité  $\mathbf{p}$ .

Posons  $\mathbf{q}_0 = \delta_0$  et pour  $t > 0$ ,

$$\mathbf{q}_t(dz) = \frac{e^{-z^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} dz,$$

alors  $\mathbf{q}$  est le mélange de la famille  $(\mathbf{q}_t)_{t \geq 0}$  par la mesure  $\mathbf{p}$ . Il est commode de dire qu'une variable gaussienne de variance 0 est une constante, c'est-à-dire définir  $\mathcal{N}(0, 0) = \delta_0$ . Nous venons donc de démontrer que la loi de  $\sqrt{X} \times Z$  est un mélange de la loi normale par la loi de  $X$  et qu'elle est infiniment divisible si  $X$  l'est. Réciproquement, en remontant le calcul, nous voyons qu'un mélange de la loi normale est la loi d'un produit indépendant  $\sqrt{X} \times Z$  avec  $X \geq 0$  et  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

Un type de mélange qui reviendra régulièrement dans ce manuscrit est le mélange de la loi gamma. Fixons le paramètre de forme  $t > 0$  et considérons la famille  $(\mathbf{q}_\theta)_{\theta \geq 0}$  définie par

$$\mathbf{q}_\theta(dx) = \frac{x^{t-1} e^{-x/\theta}}{\theta^t \Gamma(t)} dx \quad \text{et} \quad \mathbf{q}_0 = \delta_0.$$

Comme pour le mélange gaussien, ajouter  $\delta_0$  est naturel puisque si  $\Gamma_t \sim \Gamma(t, 1) = \mathbf{q}_1$ , alors  $\theta \Gamma_t \sim \mathbf{q}_\theta$  et  $\theta \Gamma_t \xrightarrow{d} 0$  lorsque  $\theta \rightarrow 0$ . Cette relation que l'on peut réécrire

$$\Gamma_t \sim \mathbf{q}_1 \iff \theta \Gamma_t \sim \mathbf{q}_\theta$$

et le même calcul que dans le cas gaussien montrent qu'une probabilité sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $\mathbf{q}$ , est un mélange de la loi gamma de paramètre  $t$  si et seulement s'il existe une variable aléatoire  $X$  indépendante de  $\Gamma_t$  telle que

$$X \times \Gamma_t \sim \mathbf{q}.$$

Lorsque le paramètre de forme  $t$  est égal à 1, la famille  $(\mathbf{q}_\theta)_{\theta \geq 0}$  correspond à l'ensemble des lois exponentielles et le paramètre d'échelle  $\theta$  est alors égal à l'espérance. Pour les mêmes raisons, il est commode d'inclure  $\delta_0$  dans la famille des lois exponentielles.

**Proposition 1.19** *La loi d'un mélange de la loi gamma de paramètre  $t$  est de la forme*

$$\mathbf{q}(dx) = c\delta_0(dx) + (1-c)x^{t-1}f(x)dx$$

où  $c \in [0, 1]$ ,  $f$  est une fonction complètement monotone et  $\int_0^\infty x^{t-1}f(x)dx = 1$ .

*Démonstration.* Par définition, il existe une mesure de probabilité  $\mathbf{p}$  sur  $\mathbb{R}_+$  telle que

$$\mathbf{q}(dx) = \int_0^\infty \mathbf{q}_\theta(dx)\mathbf{p}(d\theta) = \mathbf{p}(\{0\})\delta_0(dx) + \underbrace{x^{t-1} \int_{(0,+\infty)} \Gamma(t)^{-1}\theta^{-t}e^{-x/\theta}\mathbf{p}(d\theta)}_{(1-c)f(x)} dx.$$

$f$  est complètement monotone puisque  $f$  est une transformée de Laplace. Ensuite,

$$\int_0^\infty x^{t-1}f(x)dx = \frac{1}{1-c} \int_{(0,+\infty)} \theta^{-t} \int_0^\infty \frac{x^{t-1}}{\Gamma(t)} e^{-x/\theta} dx \mathbf{p}(d\theta) = 1. \quad \square$$

En particulier, nous voyons que lorsque  $c = 0$  et  $t = 1$ , un mélange de la loi exponentielle a une densité complètement monotone. Dans la littérature, l'ensemble des mélanges de la loi exponentielle est souvent noté ME. De façon analogue, nous allons noter  $\text{M}\Gamma_t$  la classe des mélanges de la loi gamma de paramètre  $t$ . Un changement de variable montre le résultat suivant :

**Proposition 1.20** Soit  $\mathfrak{q} \in \text{M}\Gamma_t$  un mélange de la loi gamma de paramètre  $t$  et soit  $X \sim \mathfrak{q}$ . Alors pour tout  $\xi \geq 1$ ,  $X^\xi \sim \text{M}\Gamma_{t/\xi}$ .

*Démonstration.* Si  $X \sim c\delta_0(dx) + (1-c)x^{t-1}f(x)dx$  où  $f$  est une fonction complètement monotone. Alors  $X^\xi \sim c\delta_0(dx) + (1-c)x^{t/\xi-1}f(x^{1/\xi})$ . La fonction  $x \mapsto f(x^{1/\xi})$  est complètement monotone comme composition d'une fonction complètement monotone avec une fonction de Bernstein – voir l'annexe A.  $\square$

Pour tous  $a, b > 0$ , la décomposition

$$\Gamma_a \stackrel{d}{=} \mathbf{B}_{a,b} \times \Gamma_{a+b},$$

où les variables  $\mathbf{B}_{a,b}$  et  $\Gamma_{a+b}$  sont supposées indépendantes, entraîne la proposition suivante :

**Proposition 1.21**  $\forall t_1 < t_2$ ,  $\text{M}\Gamma_{t_1} \subset \text{M}\Gamma_{t_2}$ .

Ci-dessous, nous énonçons un résultat très puissant démontré indépendamment par Goldie [31] et Steutel [51] :

**Théorème 1.22** Les mélanges de la loi exponentielle sont infiniment divisibles.

Observons que l'on ne suppose pas que la loi par laquelle on mélange soit infiniment divisible. On peut raccourcir l'énoncé en « ME  $\subset$  ID ». La démonstration de ce théorème est moins directe que celle du mélange gaussien qui repose uniquement sur la subordination de Bochner. Ce théorème combiné avec la proposition précédent peut s'avérer très utile et assez puissant. Par exemple, soit  $\mathbf{L}$  une variable exponentielle standard, alors pour tout  $\xi \geq 1$ ,  $\mathbf{L}^\xi$  est infiniment divisible. Nous utiliserons également ce théorème pour prouver la divisibilité infinie de  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$  lorsque  $b \leq 1 - s$  – voir le Théorème 4.1. Il y a plusieurs façons de démontrer le Théorème 1.22. La première repose sur un théorème plus puissant dû à Steutel. Nous en donnerons également une preuve rapide au Corollaire A.24.

**Théorème 1.23** (Steutel) Soit  $\mathfrak{q}$  la mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}_+$  définie par

$$\mathfrak{q}(dx) = c\delta_0(dx) + (1-c)f(x)dx$$

où  $c \in [0, 1]$  et où  $f$  est une densité de probabilité log-convexe. Alors  $\mathfrak{q}$  est infiniment divisible.

Comme une fonction complètement monotone est nécessairement log-convexe – voir le Lemme A.6, le Théorème 1.22 peut être vu comme un corollaire du Théorème 1.23.

La question qui s'est naturellement posée fut : cela reste-t-il vrai pour un mélange de la loi gamma de paramètre  $t$  ? En vertu de la convergence en loi

$$\frac{\Gamma_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{d} 1,$$

et de la stabilité de la classe des lois infiniment divisibles pour la convergence en loi, nous voyons que cette propriété ne peut être vraie quel que soit  $t > 0$ . En effet, la convergence en loi se démontre facilement en calculant la transformée de Laplace :

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda\Gamma_t/t}) = \frac{1}{(1 + \lambda/t)^t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} e^{-\lambda}.$$

Puis considérons une variable  $U$  qui suit une loi uniforme sur  $[0, 1]$  indépendante de  $(\Gamma_t)_{t>0}$ , alors

$$(U/t) \times \Gamma_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{d} U,$$

mais  $U$  n'est pas infiniment divisible puisqu'elle est à support compact. D'autre part, si  $t \leq 1$ ,  $M\Gamma_t \subset M\Gamma_1 = ME \subset ID$ . Steutel avait conjecturé dans [51] que le paramètre  $t$  maximal est 2. En 1994, Kristiansen donne une réponse positive à cette question :

**Théorème 1.24** (Kristiansen) *Soit une mesure de probabilité  $\mathbf{q}$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Si  $\mathbf{q}$  est un mélange de la loi gamma de paramètre 2, alors  $\mathbf{q}$  est infiniment divisible.*

**Corollaire 1.25** (du Théorème 1.24)  $\forall t \leq 2, M\Gamma_t \subset ID$ .

Autrement-dit, soit  $\Gamma_2 \sim x e^{-x} dx$  ( $x > 0$ ) une variable gamma de paramètre 2. Alors pour toute variable aléatoire  $X$  positive et indépendante de  $\Gamma_2$ ,  $X \times \Gamma_2$  a une loi infiniment divisible. Enfin, il existe des contre-exemples lorsque  $t > 2$  – voir l'exemple 12.1 du chapitre VI dans [52]. La convergence  $(U/t) \times \Gamma_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{d} U$  et le fait que  $U \not\sim ID$  entraînent l'existence d'un réel  $t > 0$  tel que  $(U/t) \times \Gamma_t \not\sim ID$  – voir la Proposition 1.3. Cela nous donne un exemple de loi non infiniment divisible dont les queues de distributions décroissent de manière exponentielle. Cet exemple n'est cependant pas tout à fait explicite.

## 1.3 Familles de lois infiniment divisibles sur la demi-droite

Dans cette section, nous introduisons brièvement quatre sous-classes de l'ensemble des lois infiniment divisibles sur la demi-droite qui sont toutes fermées pour la limite en loi. Voici comment elles sont imbriquées :

$$\left. \begin{array}{l} \{\text{densités HCM}\} \\ \{\text{lois } \alpha\text{-stables positives}\}_{\alpha \in (0,1)} \end{array} \right\} \subset \text{GGC} \subset \{\text{lois SD positives}\} \subset ID.$$

### 1.3.1 Les lois stables

Soit  $(X_k)_{k \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Supposons qu'il existe deux suites  $(a_n)_{n \geq 1}$ ,  $a_n \in \mathbb{R}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$ ,  $b_n > 0$  telles que

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n (X_k - a_k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} \mathbf{p} \quad (1.9)$$

pour une certaine loi de probabilité  $\mathbf{p}$ . Les lois limites  $\mathbf{p}$  sont appelées lois stables. La loi gaussienne est donc une loi stable. On peut montrer que la fonction caractéristique d'une loi stable a nécessairement l'une des deux formes suivantes :

$$\hat{\mathbf{p}}_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}(u) = \exp \left[ i\gamma u - \delta |u|^\alpha \left( 1 - i\beta \operatorname{sgn}(u) \tan \left( \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \right], \quad \alpha \in (0, 2] \setminus \{1\},$$

$$\hat{\mathbf{p}}_{1, \beta, \gamma, \delta}(u) = \exp \left[ i\gamma u - \delta |u| \left( 1 + i \frac{2\beta}{\pi} \operatorname{sgn}(u) \log(u) \right) \right], \quad \alpha = 1,$$

avec  $\beta \in [-1, 1]$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  et  $\delta \geq 0$ . Lorsque  $\alpha \neq 1$  et  $\gamma = 0$ , on a  $\forall c > 0$ ,

$$\hat{\mathbf{p}}_{\alpha,\beta,0,\delta}(c^{1/\alpha}u) = (\hat{\mathbf{p}}_{\alpha,\beta,0,\delta}(u))^c,$$

on dit que  $\mathbf{p}_{\alpha,\beta,0,\delta}$  est strictement  $\alpha$ -stable. De même, lorsque  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$ ,  $\mathbf{p}_{1,0,\gamma,\delta}$  est strictement 1-stable. Dans ce cas,  $\mathbf{p}_{1,0,\gamma,\delta}$  est une loi de Cauchy de paramètre  $(\delta, \gamma)$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{p}_{1,0,\gamma,\delta} \sim \frac{\delta^2}{(x - \gamma)^2 + \delta^2} dx.$$

Pour une loi  $\mathbf{p}$  strictement stable, notons  $\rho$  le paramètre de positivité. Il est défini par  $\rho = \mathbf{p}(\mathbb{R}_+)$ . Si  $\alpha \neq 1$  et  $\gamma = 0$ , alors

$$\rho = \mathbf{p}_{\alpha,\beta,0,\delta}(\mathbb{R}_+) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan\left(\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)}{\pi\alpha}.$$

Si  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$ , alors

$$\rho = \mathbf{p}_{1,0,\gamma,\delta}(\mathbb{R}_+) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(\gamma/\delta)}{\pi}.$$

Observons que le paramètre de positivité  $\rho$  appartient nécessairement à l'intervalle  $[0, 1]$  si  $\alpha \in (0, 1]$ , et à l'intervalle  $[1 - 1/\alpha, 1/\alpha]$  si  $\alpha \in (1, 2]$  – voir la figure 1.1. Désormais,

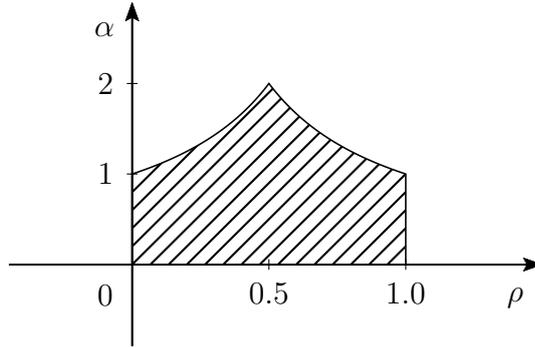


FIGURE 1.1 – Domaine des paramètres admissibles  $(\rho, \alpha)$

pour  $\alpha \in (1, 2]$  et  $\rho$  dans le bon intervalle,  $\mathbf{Z}_{\alpha,\rho}$  désigne une variable strictement  $\alpha$ -stable dont le paramètre de positivité vaut  $\rho$ , normalisée par

$$\mathbb{E}(e^{iu\mathbf{Z}_{\alpha,\rho}}) = \exp \left[ -|u|^\alpha \left( \cos \left( \left( \rho - \frac{1}{2} \right) \pi \alpha \right) - i \sin \left( \left( \rho - \frac{1}{2} \right) \pi \alpha \right) \operatorname{sgn}(u) \right) \right]. \quad (1.10)$$

L'intérêt de cette paramétrisation est la continuité en le paramètre  $\alpha$ . Les seules lois stables à support sur  $\mathbb{R}_+$  sont celles dont le paramètre de positivité  $\rho$  vaut 1 avec  $\alpha \in (0, 1]$ . Dans ce cas, on note  $\mathbf{Z}_\alpha = \mathbf{Z}_{\alpha,1}$ . Observons que  $\mathbf{Z}_1 = 1$  et que

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda\mathbf{Z}_\alpha}) = e^{-\lambda^\alpha}.$$

Les lois stables positives apparaissent dans l'expression des branches positives de  $\mathbf{Z}_{\alpha,\rho}$ . Notons  $\mathbf{Z}_{\alpha,\rho}^+ = \mathbf{Z}_{\alpha,\rho} | \mathbf{Z}_{\alpha,\rho} > 0$ , alors la formule (3.3.16) dans [56] établit que

$$\mathbf{Z}_{\alpha,\rho}^+ \stackrel{d}{=} \left( \frac{\mathbf{Z}_{\alpha\rho}}{\mathbf{Z}_\rho} \right)^\rho \quad (1.11)$$

où les variables  $\mathbf{Z}_{\alpha\rho}$  et  $\mathbf{Z}_\rho$  sont supposées indépendantes. Ainsi, lorsque  $\alpha = 1$ , le quotient indépendant  $(\mathbf{Z}_\rho/\bar{\mathbf{Z}}_\rho)^\rho$  a la loi de la branche positive d'une loi de Cauchy. Ce fait sera redémontré dans la section 5.4.

### 1.3.2 Les lois auto-décomposables

Une loi de probabilité  $\mathbf{p}$  est dite auto-décomposable si pour tout  $c \in (0, 1)$ , il existe deux variables aléatoires indépendantes  $X \sim \mathbf{p}$  et  $Y_c$  telles que

$$X \stackrel{d}{=} cX + Y_c.$$

Nous noterons  $X \sim \text{SD}$  (pour *self-decomposable*). Si l'on ne suppose pas que les variables  $X_k$  de (1.9) sont identiquement distribuées, alors, si  $b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  et  $b_{n+1}/b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ , la loi limite  $\mathbf{p}$  est auto-décomposable.

Soit  $X$  une variable aléatoire positive,  $X \sim \text{SD}$  si et seulement s'il existe un réel  $a \geq 0$  et une fonction décroissante  $m : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda X}) = \exp\left(-a\lambda - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \frac{m(x)}{x} dx\right).$$

Observons le fait élémentaire suivant : si  $X$  et  $Y$  sont deux variables indépendantes auto-décomposables, alors  $X + Y$  est auto-décomposable. En effet,  $\forall c \in (0, 1)$ , on peut écrire

$$X + Y = c(X + Y) + X_c + Y_c$$

où toutes les variables sont supposées indépendantes.

Enfin, si  $\mathbf{p}$  est une loi auto-décomposable (non triviale), alors elle admet une densité – voir par exemple le chapitre III Proposition 4.16 dans [52] pour le cas où  $\mathbf{p}$  est supportée sur la demi-droite.

### 1.3.3 Convolutions généralisées de lois gamma

Soit  $X \sim \Gamma(t, s)$  une variable gamma de paramètre  $(t, s)$ , c'est-à-dire,  $X \stackrel{d}{=} s \times \mathbf{\Gamma}_t$  où  $\mathbf{\Gamma}_t \sim \Gamma(t)^{-1} x^{t-1} e^{-x} dx$ . Un calcul d'une intégrale de Frullani – voir la formule (A.2) – permet d'exprimer sa transformée de Laplace explicitement :

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda X}) = \mathbb{E}(e^{-s\lambda\mathbf{\Gamma}_t}) = (1 + s\lambda)^{-t} = \exp\left(-\int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \frac{te^{-x/s}}{x} dx\right).$$

Ainsi, nous voyons que  $X \sim \text{SD}$ . Les lois limites des suites de type (1.1), où l'on suppose que toutes les variables  $X_k^{(n)}$  suivent une loi gamma, forment la classe des lois GGC (pour *generalized gamma convolution*). Leurs transformées de Laplace sont limites de transformées de Laplace du type

$$\exp\left(-\int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \frac{\sum_{k=1}^n t_k e^{-x/s_k}}{x} dx\right).$$

La transformée de Laplace d'une loi GGC se met donc sous la forme

$$\exp\left(-a\lambda - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \frac{m(x)}{x} dx\right) = \exp\left(-a\lambda - \int_0^\infty \log\left(1 + \frac{\lambda}{y}\right) \nu(dy)\right) \quad (1.12)$$

où  $a \geq 0$ ,  $m$  est une fonction complètement monotone et  $\nu$  est la mesure de Laplace de  $m$  ( $m = \mathcal{L}\nu$ ) – voir l'annexe A. La mesure  $\nu$  est appelée mesure de Thorin.

Il est facile de voir que la classe des lois GGC est stable par convolution, Bondesson [16] a récemment démontré que cette classe est également stable par convolution multiplicative :

**Théorème 1.26** (Bondesson) *Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de lois GGC. Alors  $X \times Y \sim \text{GGC}$ .*

**Corollaire 1.27** (Bondesson) *Si  $X \sim \text{GGC}$ , alors  $e^X - 1 \sim \text{GGC}$ .*

Ces deux résultats ont joué un rôle majeur dans cette thèse. Nous en donnons des éléments de démonstration à la fin de la section suivante. Cette propriété est fautive si l'on suppose seulement que  $X$  et  $Y$  sont infiniment divisibles. Par exemple, si  $X$  et  $Y$  sont deux variables de Poissons indépendantes, alors bien que  $X, Y \sim \text{ID}$ ,  $X \times Y \not\sim \text{ID}$  – voir l'exemple 12.15 du chapitre II dans [52]. La question pour la classe des lois auto-décomposables est ouverte.

### 1.3.4 Les densités hyperboliquement complètement monotones

Une fonction  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  est dite hyperboliquement complètement monotone (HCM) si pour tout  $u > 0$ , la fonction définie implicitement pour  $w = v + v^{-1}$  ( $v > 0$ ) par

$$f(uv)f(u/v)$$

est complètement monotone. La stabilité de l'ensemble des fonctions complètement monotones par produit et passage à limite simple – voir la Proposition A.4 – entraîne la même stabilité pour la classe des fonctions HCM. Les fonctions  $x \mapsto x^a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) et  $x \mapsto (1+bx)^{-c}$  ( $b, c \geq 0$ ) sont HCM. En effet,  $(uv)^a \times (u/v)^a = u^{2a}$  et

$$(1 + buv)^{-c} \times (1 + bu/v)^{-c} = (1 + b^2u^2 + buw)^{-c}$$

définissent des fonctions complètement monotones en  $w$ . Nous voyons ainsi que la transformée de Laplace d'une loi GGC est HCM. Bondesson a prouvé dans [14] que la réciproque est vraie :

**Théorème 1.28** (Bondesson) *Soit  $\mathfrak{p}$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}_+$ .  $\mathfrak{p}$  est GGC si et seulement si  $\mathcal{L}\mathfrak{p}$  est HCM.*

En particulier, toute fonction HCM est la limite simple de fonctions du type

$$x \mapsto a \times x^b \times (1 + cx)^{-d}$$

où  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ . Ce théorème, combiné avec le Théorème B.5, permet de démontrer un autre résultat liant les fonctions HCM et les lois GGC :

**Théorème 1.29** (Bondesson) *Soit  $\mathfrak{p} \sim f$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}_+$  dont la densité  $f$  est HCM. Alors  $\mathfrak{p}$  est GGC.*

On termine cette courte initiation par la proposition suivante qui est aussi une conséquence du Théorème B.5 :

**Proposition 1.30** *Soient  $X, Y \sim \text{HCM}$  deux variables aléatoires indépendantes. Alors,  $X \times Y \sim \text{HCM}$ .*

Dans l'annexe B, on énonce quelques propriétés supplémentaires des fonctions HCM qui seront utiles tout au long de ce manuscrit.

Pour démontrer le Théorème 1.26, Bondesson s'est appuyé sur la caractérisation des lois GGC du Théorème 1.28 :

*Éléments de démonstration du Théorème 1.26.* On suppose que

$$X = \sum_{i=1}^m b_i^{-1} \Gamma_{\beta_i} \quad \text{et} \quad Y = \sum_{j=1}^n c_j \Gamma_{\gamma_j}$$

où toutes les variables sont supposées indépendantes. Notons  $\Psi$  la transformée de Laplace de  $XY$  et  $\Phi$  celle de  $Y$ . Alors, il faut montrer que la fonction

$$\Psi : \lambda \mapsto \mathbb{E}(e^{-\lambda XY}) = \mathbb{E}(\Phi(\lambda X)) = C \times \int_{(0,+\infty)^m} \Phi\left(\lambda \sum_{i=1}^m x_i\right) \prod_{i=1}^m (x_i^{\beta_i-1} e^{-b_i x_i}) dx$$

(où  $x = (x_1, \dots, x_m)$ ) est HCM, c'est-à-dire, montrer que pour tout  $u > 0$ ,

$$\int_{(0,+\infty)^m \times (0,+\infty)^m} \Phi\left(uv \sum_{i=1}^m x_i\right) \Phi\left(\frac{u}{v} \sum_{i=1}^m x'_i\right) \prod_{i=1}^m ((x_i x'_i)^{\beta_i-1} e^{-b_i(x_i+x'_i)}) dx dx'$$

est complètement monotone en  $w = v + v^{-1}$ . Nous avons  $\Psi(\lambda) = \prod_{j=1}^n (1 + c_j \lambda)^{-\gamma_j}$  donc

$$\begin{aligned} \Phi\left(uv \sum_{i=1}^m x_i\right) \Phi\left(\frac{u}{v} \sum_{i=1}^m x'_i\right) &= \prod_{j=1}^n \left[1 + c_j u \left(v \sum_{i=1}^m x_i + \frac{1}{v} \sum_{i=1}^m x'_i\right) + c_j^2 u^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x'_i\right)\right]^{-\gamma_j} \\ &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ e^{-(c_j u [v \sum_{i=1}^m x_i + \frac{1}{v} \sum_{i=1}^m x'_i] + c_j^2 u^2 [\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x'_i]) \Gamma_{\gamma_j}} \right]. \end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini-Tonelli et par la Proposition A.5, « il suffit » de montrer que pour tous  $t_1, t_2 > 0$  fixés,

$$\int_{(0,+\infty)^m \times (0,+\infty)^m} e^{-t_1(v \sum_{i=1}^m x_i + \frac{1}{v} \sum_{i=1}^m x'_i) - t_2(\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x'_i)} \prod_{i=1}^m ((x_i x'_i)^{\beta_i-1} e^{-b_i(x_i+x'_i)}) dx dx'$$

est complètement monotone en  $w = v + v^{-1}$ . □

Le Corollaire 1.27 est une conséquence de ce résultat et du Théorème 6.2.6 dans [15] qui établit que pour tous  $s, t > 0$ ,  $e^{s\Gamma_t} - 1 \sim \text{GGC}$ .

### 1.3.5 Une conjecture de Bondesson

Soit  $\mathbf{Z}_\alpha$  une variable strictement  $\alpha$ -stable positive. Nous avons vu que sa loi se caractérise très simplement via sa transformée de Laplace, la formule (A.6) permet d'écrire

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda \mathbf{Z}_\alpha}) = e^{-\lambda^\alpha} = \exp\left(-\frac{\alpha \sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \log\left(1 + \frac{\lambda}{x}\right) x^{\alpha-1} dx\right). \quad (1.13)$$

Cette représentation est du type (1.12), cela nous permet de déduire que toutes les lois de probabilités positives  $\alpha$ -stables sont GGC ( $0 \leq \alpha < 1$ ). Il est donc naturel de se poser

la question si ces densités sont hyperboliquement complètement monotones. Bondesson a conjecturé dans [15] que  $\mathbf{Z}_\alpha \sim \text{HCM}$  si et seulement si  $\alpha \leq 1/2$ . Il y a différentes manières de prouver que la condition  $\alpha \leq 1/2$  est nécessaire. Par exemple, lorsque  $\alpha > 1/2$ , il est montré dans [49] que la densité n'est pas hyperboliquement monotone : on dit que la fonction  $f$  est hyperboliquement monotone si  $\forall u > 0$ ,  $f(uv)f(u/v)$  est monotone en  $w = v + v^{-1} \in [2, \infty)$ . Le Théorème 5.2 donne une autre preuve de la nécessité de la condition  $\alpha \leq 1/2$ . Nous donnerons une réponse positive à cette question dans le chapitre 6 – voir le Théorème 6.1.

Lorsque  $\alpha > 1/2$ , il est connu qu'aucune des puissances  $\mathbf{Z}_\alpha^\delta$  ( $\delta \in \mathbb{R}^*$ ) n'a de densité HCM (le Théorème 5.2 redémontre ce fait). Jedidi et Simon [35] (voir la conjecture 3.3) émettent une conjecture renforcée :  $\mathbf{Z}_\alpha^\delta \sim \text{HCM}$  si et seulement si  $\alpha \leq 1/2$  et  $|\delta| \geq \alpha/(1-\alpha)$ . Nous donnerons dans le chapitre 5 des arguments en faveur de cette conjecture renforcée. Le Théorème 5.2 en démontrera la partie « seulement si ».

## 1.4 Un cas d'étude : le carré d'une variable gaussienne

Soit  $X_{m,t} \sim \mathcal{N}(m, t)$  une variable gaussienne. Nous avons vu précédemment que si  $m = 0$ , alors  $X_{0,t}^2 \sim \text{ID}$  car  $X^2 \sim \Gamma(1/2, 2t)$ . La question qui va nous intéresser est assez naturelle : que se passe-t-il si  $m \neq 0$  ?

**Théorème 1.31** *Soit  $X_{m,t} \sim \mathcal{N}(m, t)$  une variable gaussienne de moyenne  $m$  et de variance  $t$ . Alors  $X_{m,t}^2$  a une loi infiniment divisible et sa mesure de Lévy est donnée par*

$$\mu_{m,t}(dx) = \left( \frac{1}{2x} + \frac{m^2}{4t^2} \right) e^{-x/2t} dx.$$

*En particulier  $X_{m,t}^2$  est auto-décomposable si et seulement si  $m = 0$ .*

La démonstration de ce théorème, bien qu'élémentaire, est assez instructive. En effet, elle fait intervenir quelques idées et propriétés qui reviendront souvent dans ce manuscrit.

*Démonstration.* Afin de simplifier les notations, considérons pour le moment le cas où  $t = 1$ . Soit  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , alors  $X_{m,1} \stackrel{d}{=} Z + m$ , donc  $X_{m,1}^2 \stackrel{d}{=} Z^2 + 2mZ + m^2$ . On calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( e^{-\lambda X_{m,1}^2} \right) &= \mathbb{E} \left( e^{-\lambda(Z^2 + 2mZ + m^2)} \right) = e^{-\lambda m^2} \mathbb{E} \left( e^{-\lambda(Z^2 + 2mZ)} \right) \\ &= \frac{e^{-\lambda m^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\lambda m x} e^{-(1+2\lambda)x^2/2} dx \\ &= \frac{e^{-\lambda m^2}}{\sqrt{2\pi(1+2\lambda)}} \int_{\mathbb{R}} \exp \left( -\frac{2\lambda m x}{\sqrt{1+2\lambda}} \right) e^{-x^2/2} dx && x \rightsquigarrow \frac{x}{\sqrt{1+2\lambda}} \\ &= \frac{e^{-\lambda m^2}}{\sqrt{1+2\lambda}} \mathbb{E} \left( \exp \left( -\frac{2\lambda m Z}{\sqrt{1+2\lambda}} \right) \right) = e^{-\varphi_{m,1}(\lambda)} \end{aligned}$$

où

$$\varphi_{m,1}(\lambda) = \frac{1}{2} \log(1+2\lambda) + \frac{\lambda m^2}{1+2\lambda},$$

(rappelons que  $\mathbb{E}(e^{uZ}) = e^{u^2/2}$ ). Et si  $t \neq 1$ , on écrit

$$X^2 \stackrel{d}{=} t \left( Z + \frac{m}{\sqrt{t}} \right)^2$$

donc  $\mathbb{E}\left(e^{-\lambda X_{m,t}^2}\right) = e^{-\varphi_{m,t}(\lambda)}$ , avec

$$\varphi_{m,t}(\lambda) = \frac{1}{2} \log(1 + 2t\lambda) + \frac{\lambda m^2}{1 + 2t\lambda}.$$

Le lemme suivant achève la démonstration.  $\square$

**Lemme 1.32** *La fonction  $\varphi_{m,t}$  définie ci-dessus est une fonction de Bernstein complète. Plus précisément,*

$$\varphi_{m,t}(\lambda) = \frac{1}{2} \log(1 + 2t\lambda) + \frac{\lambda m^2}{1 + 2t\lambda} = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \left( \frac{1}{2x} + \frac{m^2}{4t^2} \right) e^{-x/2t} dx.$$

*Démonstration.* Supposons l'égalité démontrée, il est alors évident que la fonction  $\varphi_{m,t}$  soit Bernstein complète puisque que la fonction

$$x \mapsto \left( \frac{1}{2x} + \frac{m^2}{4t^2} \right) e^{-x/2t}$$

est complètement monotone. On commence par écrire la trivialité

$$\log(1 + 2t\lambda) = \int_0^\infty \log\left(1 + \frac{\lambda}{y}\right) \delta_{1/2t}(dy)$$

et en utilisant la formule (A.2) (ou en dérivant l'égalité ci-dessus) nous voyons que

$$\frac{1}{2} \log(1 + 2t\lambda) = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \frac{e^{-x/2t}}{2x} dx.$$

L'autre partie se vérifie plus facilement, mais il est instructif de voir le lien entre mesure de Bernstein et mesure de Stieltjes d'une fonction de Bernstein complète :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda m^2}{1 + 2t\lambda} &= \frac{m^2}{2t} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda + u} \delta_{1/2t}(du) = \frac{m^2}{2t} \int_0^\infty \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{\lambda + u} \right) u \delta_{1/2t}(du) \\ &= \frac{m^2}{2t} \int_0^\infty \left( \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) e^{-ux} dx \right) u \delta_{1/2t}(dt) = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \frac{m^2 e^{-x/2t}}{4t^2} dx. \quad \square \end{aligned}$$

La classe des lois de probabilités sur  $\mathbb{R}_+$  infiniment divisibles dont l'exposant de Laplace (qui est toujours une fonction de Bernstein) est une fonction de Bernstein complète est souvent nommée dans la littérature, classe de Bondesson et abrégée BO. Ainsi  $X_{m,t}^2 \sim \text{BO}$ .  $X_{m,t}^2 \sim \text{SD}$  seulement si  $m = 0$  puisqu'il est facile de voir que lorsque  $m \neq 0$ , la densité de Bernstein n'est pas de la forme  $f(x)/x$ , avec  $f$  décroissante.

**Corollaire 1.33** (du Théorème 1.31) *Soient  $m \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  et  $X_{m,t} \sim \mathcal{N}(m, t)$ . Alors*

$$X_{m,t}^2 \stackrel{d}{=} 2t \Gamma_{1/2} + Y_{m^2,t}$$

où  $\Gamma_{1/2} \sim \Gamma(1/2, 1)$  est indépendante d'une certaine variable (infiniment divisible)  $Y_{m^2,t}$  donnée par :

$$Y_{m^2,t} = 2t \sum_{k=1}^{N_{m^2/2t}} \mathbf{L}_k$$

avec  $(N_t)_{t \geq 0}$  un processus de Poisson standard et  $(\mathbf{L}_k)_{k \geq 1}$  une suite i.i.d. de variables exponentielles indépendante du processus  $N$ .

Puisque  $X_{0,t}^2 \stackrel{d}{=} 2t \mathbf{\Gamma}_{1/2}$ , on peut réécrire cette décomposition de la manière suivante :

$$X_{m,t}^2 \stackrel{d}{=} X_{0,t}^2 + Y_{m^2,t}$$

où les deux variables du membre de droite sont supposées indépendantes. Observons que la loi de  $Y_{m^2,t}$  est la loi marginale d'un processus de Poisson composé.

*Démonstration.* Il suffit de prouver que la variable  $Y_{m^2,t}$  a bien pour exposant de Lévy-Khintchine la fonction

$$\lambda \mapsto \frac{\lambda m^2}{1 + 2t\lambda}.$$

Si  $(N_s)_{s \geq 0}$  est un processus de Poisson standard, alors  $\mathbb{E}(e^{-\lambda N_s}) = e^{-s(1-e^{-\lambda})}$ , et si  $M_s = \sum_{k=1}^{N_s} \mathbf{L}_k$ , alors

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda M_s}) = \exp(-s \mathbb{E}(1 - e^{-\lambda \mathbf{L}_1})).$$

Enfin, par le lemme précédent,

$$\frac{\lambda m^2}{1 + 2t\lambda} = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \frac{m^2 e^{-x/2t}}{4t^2} dx = \frac{m^2}{2t} \mathbb{E}(1 - e^{2t\mathbf{L}_1})$$

donc en posant  $s = m^2/2t$ , on obtient  $Y_{m^2,t} \stackrel{d}{=} 2t M_{m^2/2t}$ .  $\square$

Pour  $m' \leq m$ , une simple application du « théorème belge » donne

$$N_{m^2/2t} = (N_{m^2/2t} - N_{m'^2/2t}) + N_{m'^2/2t}.$$

Un processus de Poisson étant un processus à accroissements indépendants et stationnaires, on a  $N_{m'^2/2t} \perp (N_{m^2/2t} - N_{m'^2/2t}) \stackrel{d}{=} N_{(m^2-m'^2)/2t}$ . On obtient la décomposition

$$X_{m,t}^2 \stackrel{d}{=} X_{m',t}^2 + Y_{m^2-m'^2,t} \quad (1.14)$$

pour  $0 \leq m' \leq m$ . On peut généraliser (1.14) :

**Théorème 1.34** *Il existe une décomposition*

$$X_{m,t}^2 \stackrel{d}{=} X_{m',t'}^2 + Y_{m,t,m',t'}$$

où  $Y_{m,t,m',t'}$  est une certaine variable aléatoire infiniment divisible indépendante de  $X_{m',t'}$  si et seulement si  $t' \leq t$  et

$$\frac{1}{t'} - \frac{1}{t} + \frac{m^2}{t^2} - \frac{m'^2}{t'^2} \geq 0.$$

*Démonstration.* Notons  $\Phi_{m,t}$  la transformée de Laplace de  $X_{m,t}^2$  pour  $m \in \mathbb{R}$  et  $t > 0$ . Nous devons déterminer quand la fonction  $\Phi_{m,t}/\Phi_{m',t'}$  est la transformée de Laplace d'une mesure de probabilité (à support positif) infiniment divisible. Il suffit d'étudier le signe de la différence des densités de Lévy-Khintchine. Nous avons vu au Théorème 1.31 que

$$\mu_{m,t}(dx) = \left( \frac{1}{2x} + \frac{m^2}{4t^2} \right) e^{-x/2t} dx$$

donc il faut déterminer si la fonction  $f_{m,t,m',t'}$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$f_{m,t,m',t'}(x) = \left( \frac{1}{2x} + \frac{m^2}{4t^2} \right) e^{-x/2t} - \left( \frac{1}{2x} + \frac{m'^2}{4t'^2} \right) e^{-x/2t'}$$

est positive.

**1<sup>er</sup> cas :**  $m = m' = 0$   $f_{0,t,0,t'} : x \mapsto (e^{-x/2t} - e^{-x/2t'}) / 2x$  est une fonction positive si et seulement si  $t' \leq t$ . La fonction  $f_{0,t,0,t'}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc  $Y_{0,t,0,t'}$  a la loi d'un processus de Poisson composé pris en un certain temps.

**2<sup>e</sup> cas :**  $t = t'$  On retrouve la décomposition (1.14) lorsque  $|m'| \leq |m|$ . Si  $|m'| > m$ , la fonction  $f_{m,t,m',t}$  est négative donc une telle décomposition n'est pas possible.

**3<sup>e</sup> cas :**  $t < t'$  Si  $m' = 0$ ,  $f_{m,t,0,t'}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -e^{-x/2t'} / 2x < 0$  donc  $f_{m,t,0,t'}$  n'est pas une fonction positive. Si  $m' \neq 0$ ,  $f_{m,t,m',t'}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -m'^2 e^{-x/2t'} / 4t'^2 < 0$  donc  $f_{m,t,m',t'}$  n'est pas une fonction positive. La décomposition est donc impossible si  $t < t'$ .

**4<sup>e</sup> cas :**  $t' < t$

$$2f_{m,t,m',t'}(x) = \frac{e^{-x/2t} - e^{-x/2t'}}{x} + \frac{m^2 e^{-x/2t}}{2t^2} - \frac{m'^2 e^{-x/2t'}}{2t'^2} = e^{-x/2t'} g_{m,t,m',t'}(x)$$

avec

$$g_{m,t,m',t'}(x) = \frac{\exp\left[\left(\frac{1}{2t'} - \frac{1}{2t}\right)x\right] - 1}{x} + \frac{m^2}{2t^2} \exp\left[\left(\frac{1}{2t'} - \frac{1}{2t}\right)x\right] - \frac{m'^2}{2t'^2}.$$

La fonction  $g_{m,t,m',t'}$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc  $f_{m,t,m',t'}$  est une fonction positive si et seulement si  $g_{m,t,m',t'}(0+) \geq 0$ . Or

$$g_{m,t,m',t'}(0+) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t'} - \frac{1}{t} + \frac{m^2}{t^2} - \frac{m'^2}{t'^2} \right). \quad \square$$

Caractériser l'existence d'une telle décomposition semble plus difficile lorsque  $Y_{m,t,m',t'}$  n'est plus supposé infiniment divisible. Il faudrait pour cela déterminer quand la fonction  $\Phi_{m,t} / \Phi_{m',t'}$  est une fonction complètement monotone.



# Chapitre 2

## Rappels et compléments sur les perpétuités de processus de Lévy

Cette thèse n'est pas centrée sur l'étude des fonctionnelles exponentielles mais utilise à plusieurs reprises cette théorie. Ce chapitre est donc l'occasion d'en donner quelques éléments. Étant donné un processus de Lévy réel  $X$ , nous nous intéressons à la loi de la variable aléatoire

$$I = \int_0^\infty e^{-X_s} ds.$$

Dans la littérature, ce type de variable aléatoire est appelé fonctionnelle exponentielle du processus  $X$ , ou encore, perpétuité de  $X$ . Les perpétuités ont été très étudiées dans les années 1990-2000 et nous renvoyons au survol de Bertoin et Yor [10] pour un ensemble de résultats. Les perpétuités sont toujours bien définies et positives, prenant éventuellement des valeurs infinies. Un théorème d'Erickson – voir [10], Théorème 1 – entraîne que  $\mathbb{P}(I < +\infty) = 0$  ou 1 et que

$$\mathbb{P}(I = +\infty) = 0 \iff \lim_{t \rightarrow +\infty} X_t = +\infty \text{ p.s.}$$

Un résultat démontré par Dufresne [26] et obtenu en parallèle par Bouchaud et al. – voir les formules (4.4) et (4.20) dans [21] – dans un cadre physique, est le suivant : soit  $B$  un mouvement brownien standard et  $t$  un nombre positif, alors

$$\int_0^\infty e^{B_s - ts/2} ds \stackrel{d}{=} \frac{2}{\Gamma_t}.$$

Depuis, une multitude de démonstrations de cette identité en loi remarquable ont été données. La preuve la plus simple est certainement celle qui repose sur le Théorème 2.2 énoncé dans la section suivante. Ce résultat, dû à Bertoin et Yor, relie l'exposant de Laplace d'un processus de Lévy sans sauts positifs aux moments entiers négatifs de sa perpétuité. L'identité de Dufresne s'obtient alors en écrivant les moments entiers positifs de  $\Gamma_t$ .

Nous commençons ce chapitre en démontrant deux résultats classiques sur les perpétuités, l'un sur les subordinateurs dû à Carmona, Petit et Yor [22], l'autre sur les processus de Lévy spectralement négatifs dû à Bertoin et Yor [9] et déjà évoqué ci-dessus. Nous présentons ensuite quelques exemples instructifs. Enfin, nous nous intéressons à l'étude de la densité des perpétuités de Lévy et généralisons partiellement une équation intégrale-différentielle due à Carmona, Petit et Yor [22].

## 2.1 Caractérisation par les moments entiers

### 2.1.1 Deux théorèmes

**Théorème 2.1** ([22], Proposition 3.3) *Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un subordonateur d'exposant de Laplace  $\varphi$ , et soit  $J$  sa perpétuité*

$$J = \int_0^\infty e^{-X_s} ds.$$

*La variable aléatoire  $J$  est finie presque sûrement. Sa loi est déterminée par ses moments entiers positifs qui vérifient*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(J^n) = \frac{n!}{\varphi(1) \times \cdots \times \varphi(n)}.$$

**Remarques :**

- En général, une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}_+$  n'est pas déterminée par ses moments entiers positifs. Autrement dit, il peut exister une autre loi ayant les mêmes moments entiers positifs. Si  $X$  est telle que  $\mathbb{E}(e^{sX}) < +\infty$ , il est clair par le développement de Taylor de l'exponentielle et l'injectivité de la transformée de Laplace que la loi de  $X$  est déterminée par ses moments entiers positifs. On dit alors que la suite  $(\mathbb{E}(X^n))_{n \geq 0}$  est une suite normalisée de moments de Stieltjes. Nous renvoyons à [5] pour un ensemble de résultats classiques sur le problème des moments.
- Il est possible de considérer un subordonateur « tué » après un temps exponentiel  $T$  d'espérance  $q^{-1}$  et indépendant du subordonateur  $X$ . C'est-à-dire, ou bien considérer que  $X_t = +\infty$  lorsque  $t \geq T$ , dans ce cas l'exposant de Laplace vérifie  $\varphi(0) = q$ . Ou bien écrire  $J = \int_0^T e^{-X_s} ds$ , et on a alors :

$$\mathbb{E}(J^n) = \frac{n!}{(q + \varphi(1)) \times \cdots \times (q + \varphi(n))}$$

avec  $\varphi(0) = 0$ .

**Théorème 2.2** ([9], Proposition 2) *Soit  $(X_t)$  un processus de Lévy intégrable tel que :*

- (1)  $\forall u, t \geq 0, \mathbb{E}(e^{uX_t}) = \exp(t\Psi(u)) < +\infty$  ;
- (2)  $m = \mathbb{E}(X_1) = \Psi'(0+) \in (0, +\infty)$ .

*Et soit la perpétuité*

$$I = \int_0^\infty e^{-X_s} ds.$$

*Alors la variable aléatoire  $I$  est finie presque sûrement et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,*

$$\mathbb{E}(I^{-n}) = m \times \frac{\Psi(1) \times \cdots \times \Psi(n-1)}{(n-1)!}.$$

*De plus, si le processus de Lévy  $X$  est spectralement négatif, alors la loi de  $I$  est déterminée par ses moments entiers négatifs.*

**Remarques :** Rappelons qu'un processus de Lévy  $X$  est dit spectralement négatif si sa mesure de Lévy a un support inclus dans  $(-\infty, 0)$ . Dans ce cas,

- la condition (1) est automatiquement vérifiée,

- le théorème établit que la suite  $(\mathbb{E}(I^{-n}))_{n \geq 0}$  est une suite normalisée de moments de Stieltjes.

**Corollaire 2.3** (du Théorème 2.2) *Soit  $\mathbf{p}$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}_+$  et soit  $X \sim \mathbf{p}$ . Alors  $\mathbf{p}$  est la loi de la perpétuité d'un processus de Lévy intégrable spectralement négatif si et seulement si la fonction  $\Psi$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par*

$$\Psi(u) = u \times \frac{\mathbb{E}(X^{-(u+1)})}{\mathbb{E}(X^{-u})} \quad (2.1)$$

*est l'exposant de Laplace d'un processus de Lévy spectralement négatif avec moyenne strictement positive. Dans ce cas, ce processus de Lévy est le processus sous-jacent.*

Autrement dit, soit  $\mathcal{P}_- = \mathcal{L}\{\text{Processus de Lévy spectralement } \leq 0 \text{ à moyenne } > 0\}$ , alors l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_- &\longrightarrow \{\text{Lois positives}\} \\ \mathcal{L}((X_t)_{t \geq 0}) &\longmapsto \mathcal{L}\left(\int_0^\infty e^{-X_s} ds\right) \end{aligned}$$

est une application injective. En particulier, si  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  sont deux exposants de Laplace de processus de Lévy spectralement négatifs à moyennes positives tels que,  $\forall n \geq 0$ ,  $\Psi_1(n) = \Psi_2(n)$ , alors  $\Psi_1 = \Psi_2$ . Il est intéressant de remarquer que cette propriété est fautive pour l'exposant de Lévy-Khintchine. Par exemple, considérons le processus de Lévy  $X$  défini par

$$X_t = B_t + 2\pi \sum_{n=1}^{N_t} Y_n$$

où  $B$  désigne un mouvement brownien standard,  $Y_n$  des variables de Bernoulli de paramètres  $1/2$  et  $N$  un processus de Poisson standard, tous indépendants. Alors

$$\mathbb{E}(e^{iuB_t}) = \exp\left(-\frac{tu^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(e^{iuX_t}) = \exp\left(-\frac{tu^2}{2} + \frac{t(e^{2i\pi u} - 1)}{2}\right),$$

donc les exposants de Lévy-Khintchine valent tous deux  $-n^2/2$  sur les entiers  $n \in \mathbb{Z}$ .

La proposition suivante est une remarque semble-t-il due à Vervaat, et joue un rôle important dans les chapitres 2 et 4.

**Proposition 2.4** *La perpétuité d'un processus de Lévy spectralement négatif est auto-décomposable.*

Nous notons  $\mathcal{E}_-$  l'ensemble des perpétuités de processus de Lévy intégrables, de moyennes positives et spectralement négatifs. Nous avons l'inclusion  $\mathcal{E}_- \subset \text{SD}$ . L'intégrabilité du processus de Lévy n'est pas nécessaire pour avoir l'inclusion  $\mathcal{E}_- \subset \text{SD}$  mais les théorèmes que nous manipulerons nécessiteront cette hypothèse.

## 2.1.2 Les preuves

Le Théorème 2.2 joue un rôle important dans cette thèse car c'est sur lui que reposent les démonstrations des Théorèmes 3.2 et 4.3. Nous en donnons donc la preuve, ainsi que celle du Théorème 2.1 qui est très similaire.

### 2.1.2.1 Démonstration du Théorème 2.1

Ici nous n'avons pas besoin d'utiliser le théorème d'Erickson pour s'assurer que l'intégrale converge p.s. En effet,  $J$  est positif et par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\mathbb{E}(J) = \int_0^\infty \mathbb{E}(e^{-X_s}) ds = \int_0^\infty e^{-s\varphi(1)} ds = \frac{1}{\varphi(1)} < +\infty,$$

ainsi  $J < +\infty$  p.s. Posons pour tout  $t \geq 0$ ,  $J_t = \int_t^\infty e^{-X_s} ds$ . Alors,  $t \mapsto J_t$  est p.s. absolument continue et pour tout  $r > 0$ ,

$$J_0^r - J_t^r = r \int_0^t J_s^{r-1} e^{-X_s} ds.$$

Par indépendance des accroissements,  $J_t = e^{-X_t} \tilde{J}$  où  $X_t \perp \tilde{J}$ , avec

$$\tilde{J} = \int_0^\infty e^{-(X_{s+t}-X_t)} ds \stackrel{d}{=} J.$$

La dernière égalité vient de la stationnarité des accroissements. Ainsi, par le théorème de convergence monotone,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\underbrace{J_0^r - J_t^r}_{\geq 0}\right) &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \mathbb{E}\left((J^r - J_t^r) \mathbf{1}_{\{J \leq A\}}\right) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\mathbb{E}(J^r \mathbf{1}_{\{J \leq A\}}) - \mathbb{E}(e^{-rX_t} \tilde{J}^r \mathbf{1}_{\{\tilde{J} \leq A\}})\right] \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\mathbb{E}(J^r \mathbf{1}_{\{J \leq A\}}) - \mathbb{E}(J^r \mathbf{1}_{\{J \leq A\}}) e^{-t\varphi(r)}\right] = \mathbb{E}(J^r) (1 - e^{-t\varphi(r)}). \end{aligned}$$

D'autre part, le théorème de Fubini-Tonelli entraîne que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(J_0^r - J_t^r) &= r \int_0^t \mathbb{E}(J_s^{r-1} e^{-X_s}) ds = r \int_0^t \mathbb{E}(e^{-rX_s}) \mathbb{E}(J^{r-1}) ds \\ &= r \mathbb{E}(J^{r-1}) \int_0^t e^{-s\varphi(r)} ds = \frac{r \mathbb{E}(J^{r-1}) (1 - e^{-t\varphi(r)})}{\varphi(r)}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\mathbb{E}(J^r) = \frac{r \mathbb{E}(J^{r-1})}{\varphi(r)}. \quad (2.2)$$

Une récurrence conclut la première partie de la preuve. Pour montrer que les moments

$$m_n = \frac{n!}{\varphi(1) \times \cdots \times \varphi(n)}, \quad n \geq 1$$

caractérisent la loi de  $J$ , on majore pour  $0 \leq u < u_0 < \varphi(+\infty)$ ,

$$m_n \leq \frac{n!}{\varphi(1) \times \cdots \times \varphi(n_0) \times u_0^{n-n_0}}$$

où  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  est tel que  $\varphi(n_0) \geq u_0$ . Ainsi,

$$\mathbb{E}(e^{uJ}) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n J^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n u^n}{n!} \leq \frac{u_0^{n_0}}{\varphi(1) \times \cdots \times \varphi(n_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{u}{u_0}\right)^n < +\infty.$$

Par injectivité de la transformée de Laplace,  $u \mapsto \mathbb{E}(e^{uJ})$  ( $0 \leq u < u_0$ ) caractérise la loi de  $J$ .

Le cas où le subordonateur  $X$  est tué à temps exponentiel  $T$  (que l'on note  $X^T$ ) se fait par approximation. On considère un processus de Poisson standard  $N$  d'intensité  $q$  (l'espérance de la variable exponentielle  $T$ ). On pose alors pour  $a > 0$ ,  $X^{(a)} = X + aN$  qui est un subordonateur d'exposant  $\varphi_a$  défini par

$$\varphi_a(\lambda) = \varphi(\lambda) + q(1 - e^{-a\lambda}) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} q + \varphi(\lambda).$$

Enfin, soit  $J^{(a)}$  la perpétuité de  $X^{(a)}$ . Le théorème de convergence dominée entraîne que  $J_a \rightarrow J$  p.s. lorsque  $a \rightarrow +\infty$  et une nouvelle application du théorème de convergence dominée entraîne que

$$\mathbb{E}(J^n) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(J_a^n) = \frac{n!}{(q + \varphi(1)) \times \cdots \times (q + \varphi(n))}.$$

### 2.1.2.2 Démonstration du Théorème 2.2

Par l'hypothèse (1) du théorème, pour tous  $a, u > 0$ ,

$$\mathbb{P}(X_1 \geq a) = \mathbb{P}(e^{uX_1} \geq e^{au}) \leq e^{\Psi(u) - au}.$$

Soit  $a > 0$  tel que  $\mathbb{P}(\inf_{t \in [0,1]} X_t < -a) \leq 1/2$ . Nous allons démontrer que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} X_t \geq 2a\right) \leq 2\mathbb{P}(X_1 \geq a).$$

Il est bien connu que l'on peut remplacer  $2a$  par  $a$  et l'inégalité par une égalité dans le cas du mouvement brownien (principe de réflexion de Désiré André), ou plus généralement, dans le cas du processus stable spectralement négatif. En effet, soit le temps d'arrêt

$$T_{2a} = \inf\{t > 0 / X_t > 2a\} \stackrel{\text{p.s.}}{=} \inf\{t > 0 / X_t = 2a\},$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} X_t \geq 2a\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} X_t \geq 2a, X_1 \geq a\right) + \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} X_t \geq 2a, X_1 < a\right) \\ &\leq \mathbb{P}(X_1 \geq a) + \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} X_t \geq 2a, X_{1-T_{2a}+T_{2a}} - X_{T_{2a}} < -a \mid \mathcal{F}_{T_{2a}}^X\right)\right] \\ &\leq \mathbb{P}(X_1 \geq a) + \frac{1}{2} \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} X_t \geq 2a\right). \end{aligned}$$

On obtient ainsi la majoration suivante, valable pour tout  $u > 0$  :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} X_t \geq 2a\right) \leq 2e^{\Psi(u) - au}.$$

Ainsi, pour  $\varepsilon > 0$  assez petit,

$$\mathbb{P}\left(\int_0^1 e^{-X_s} ds < \varepsilon^2\right) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{s \in [0,1]} X_s \geq 2 \log(1/\varepsilon)\right) \leq 2e^{\Psi(u) - \varepsilon^2 u}.$$

Ceci assure la finitude des moments  $\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^1 e^{-X_s} ds \right)^{-n} \right]$ , pour  $n \geq 0$ , et donc des moments  $\mathbb{E}(I^{-n})$  puisque

$$I = \int_0^\infty e^{-X_s} ds \geq \int_0^1 e^{-X_s} ds \geq 0.$$

La suite de la démonstration est similaire à celle du Théorème 2.1. Pour  $t \geq 0$ , soit  $I_t = \int_t^\infty e^{-X_s} ds$ . Alors, pour tout  $r > 0$ ,

$$I_t^{-r} - I_0^{-r} = r \int_0^t I_s^{-r-1} e^{-X_s} ds.$$

De la même façon, on voit que  $I_t = e^{-X_t} \tilde{I}$  où  $X_t \perp \tilde{I}$  et  $I \stackrel{d}{=} \tilde{I}$ . On obtient alors

$$\mathbb{E}(I^{-r-1}) = \frac{\Psi(r)\mathbb{E}(I^{-r})}{r}. \quad (2.3)$$

Enfin,

$$\mathbb{E}(I^{-1}) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\Psi(r)\mathbb{E}(I^{-r})}{r} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\Psi(r)}{r} = \Psi(0^+) = m.$$

La première partie de la preuve vient après une récurrence.

Si  $X$  est spectralement négatif, alors  $\Psi(u) = O(u^2)$  lorsque  $u \rightarrow +\infty$  – voir l’expression générale d’un exposant de Laplace à la formule (1.4). Il existe donc une constante  $c > 0$  telle que

$$\mathbb{E}(I^{-n}) = m \times \frac{\Psi(1) \times \cdots \times \Psi(n-1)}{(n-1)!} \leq c^n n!.$$

Il s’ensuit que

$$\mathbb{E} \left( \exp \left( \frac{1}{2cI} \right) \right) < +\infty.$$

Un raisonnement similaire à celui de la démonstration du Théorème 2.1 entraîne que la loi de  $I^{-1}$  est caractérisée par ses moments entiers positifs.

### 2.1.2.3 Une remarque concernant les moments entiers

Dans chacune des démonstrations, s’est posée la question de savoir si une suite de moments entiers caractérise une mesure de probabilité. Pour le Théorème 2.1, on aurait pu utiliser un résultat dû à Berg et Durán :

**Théorème 2.5** ([6] Théorème 1.3) *Soient  $f$  une fonction complètement monotone,  $m_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,*

$$m_n = \frac{1}{f(1) \times \cdots \times f(n)}.$$

*Alors, la suite  $(m_n)_{n \geq 0}$  est une suite normalisée de moments de Stieltjes. C’est-à-dire, il existe une unique mesure de probabilité  $\mathbf{p}$  sur  $\mathbb{R}_+$ , telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,*

$$m_n = \int_0^\infty x^n \mathbf{p}(dx).$$

Observons que si  $\varphi$  est une fonction de Bernstein, alors  $f : \lambda \mapsto \varphi(\lambda)/\lambda$  est complètement monotone, ainsi,

$$\frac{n!}{\varphi(1) \times \cdots \times \varphi(n)} = \frac{1}{f(1) \times \cdots \times f(n)}$$

définit une suite de moments de Stieltjes.

### 2.1.2.4 Démonstration du Corollaire 2.3

Supposons que la fonction définie par (2.1) soit l'exposant de Laplace d'un processus de Lévy spectralement négatif. Alors, soient  $X$  un tel processus de Lévy et  $I$  sa perpétuité. Par le Théorème 2.2, les moments entiers négatifs de  $I$  caractérisent sa loi et sont donnés par

$$\mathbb{E}(I^{-n}) = m \times \frac{\Psi(1) \times \cdots \times \Psi(n-1)}{(n-1)!} = \int_0^\infty x^{-n} \mathbf{p}(dx)$$

où  $m = \int_0^\infty x^{-1} \mathbf{p}(dx) = \Psi'(0+) > 0$ , donc  $I \sim \mathbf{p}$ .

Réciproquement, si  $\Psi$  est l'exposant de Laplace d'un processus de Lévy à moyenne positive, la formule (2.3) montre alors que  $\Psi$  est de la forme (2.1).

### 2.1.2.5 Démonstrations de la Proposition 2.4

Soit  $X$  un processus de Lévy spectralement négatif à moyenne positive et soit  $I(X)$  sa perpétuité. L'auto-décomposabilité de  $I(X)$  est une conséquence directe de la propriété de Markov forte. En effet, pour tout  $x > 0$ ,

$$T_x = \inf\{t > 0 / X_t = x\}$$

est un temps d'arrêt fini presque sûrement puisque  $(X_t)_{t \geq 0}$  est spectralement négatif et tend vers  $+\infty$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Alors,

$$\begin{aligned} I(X) &= \int_0^\infty e^{-X_t} dt = \int_0^{T_x} e^{-X_t} dt + \int_{T_x}^\infty e^{-X_t} dt = \int_0^{T_x} e^{-X_t} dt + e^{-x} \int_0^\infty e^{-(X_t + T_x - x)} dt \\ &\stackrel{d}{=} \int_0^{T_x} e^{-X_t} dt + e^{-x} \int_0^\infty e^{-\tilde{X}_t} dt = \int_0^{T_x} e^{-X_t} dt + e^{-x} \times I(\tilde{X}) \end{aligned}$$

où  $\tilde{X}$  désigne une copie du processus  $X$  indépendante de  $(X_t, 0 \leq t \leq T_x)$ .

## 2.1.3 Quelques exemples

### 2.1.3.1 Puissances positives de la loi gamma

Considérons une variable exponentielle  $\mathbf{L}$  de paramètre 1. On a  $\mathbf{L} = \int_0^{\mathbf{L}} ds$ , autrement dit

$$\mathbf{L} = \int_0^T e^{-X_s} ds,$$

où  $T = \mathbf{L}$  et où  $X$  est le subordonateur constant égal à 0. On peut aussi écrire

$$\mathbb{E}(\mathbf{L}^n) = n! = \frac{n!}{\varphi(1) \times \cdots \times \varphi(n)}$$

avec  $\varphi(\lambda) = 1$  et nous voyons par le Théorème 2.1 que  $\mathbf{L} \stackrel{d}{=} \int_0^{\mathbf{L}} ds$ . Bien entendu, ceci n'est pas l'application la plus impressionnante de ce théorème.

Soit  $\alpha \in (0, 1)$ . Intéressons nous à la variable  $\mathbf{L}^\alpha$ . Nous savons que sa loi n'est pas infiniment divisible et il n'est donc pas possible d'appliquer le Théorème 2.2. En revanche,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{L}^{n\alpha}) &= \Gamma(1 + n\alpha) = \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(1)} \times \frac{\Gamma(1 + 2\alpha)}{\Gamma(1 + \alpha)} \times \cdots \times \frac{\Gamma(1 + n\alpha)}{\Gamma(1 + (n-1)\alpha)} \\ &= \frac{n!}{\varphi(1) \times \cdots \times \varphi(n)} \end{aligned}$$

avec

$$\varphi(\lambda) = \lambda \frac{\Gamma(1 - \alpha + \alpha\lambda)}{\Gamma(1 + \alpha\lambda)} = \lambda\phi(1 - \alpha + \alpha\lambda),$$

et

$$\phi(u) = \frac{\Gamma(u)}{\Gamma(\alpha + u)}.$$

Le Lemme C.1 nous permet de voir que  $1/\phi$  est une fonction de Bernstein complète donc  $\varphi$  est une fonction de Bernstein complète. Le Lemme C.2 établit que

$$\phi(u) = \int_0^\infty e^{-ux} \frac{(1 - e^{-x})^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dx,$$

donc

$$\varphi(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{e^{-(1-\alpha)x/\alpha} (1 - e^{-x/\alpha})^{\alpha-1}}{\alpha\Gamma(\alpha)} dx = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \frac{(1 - \alpha)e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}x}}{\alpha^2\Gamma(\alpha)(1 - e^{-x/\alpha})^{2-\alpha}} dx$$

où la deuxième égalité vient après une intégration par parties. Soit  $X$  un subordonateur ayant pour exposant de Laplace  $\varphi$ . Le Théorème 2.1 permet d'écrire l'égalité en loi

$$\mathbf{L}^\alpha \stackrel{d}{=} \int_0^\infty e^{-X_s} ds.$$

Soit  $\mathbf{\Gamma}_t$  une variable gamma de paramètre  $t$ , on a

$$\mathbb{E}(\mathbf{\Gamma}_t^{\alpha n}) = \frac{\Gamma(t + n\alpha)}{\Gamma(t)} = \frac{n!}{\varphi(1) \times \cdots \times \varphi(n)}$$

avec

$$\varphi(\lambda) = \lambda \frac{\Gamma(t - \alpha + \alpha\lambda)}{\Gamma(t + \alpha\lambda)} = \lambda\phi(t - \alpha + \alpha\lambda)$$

et

$$\phi(u) = \frac{\Gamma(u)}{\Gamma(\alpha + u)}.$$

On voit donc que  $\mathbf{\Gamma}_t^\alpha$  a la loi de la perpétuité d'un subordonateur si et seulement si  $\alpha \leq t$ . Et dans ce cas, le même calcul donne l'expression de la mesure de Lévy du subordonateur :

$$\mu(dx) = \frac{e^{-\frac{t-\alpha}{\alpha}x} (t - \alpha + (1 - t)e^{-x/\alpha})}{\alpha^2\Gamma(\alpha)(1 - e^{-x/\alpha})^{2-\alpha}} dx.$$

### 2.1.3.2 L'égalité en loi de Dufresne

L'égalité en loi de Dufresne est une simple application du Théorème 2.2. En effet, soit  $B$  un mouvement brownien standard, et soit  $X$  le mouvement brownien avec dérive défini par

$$X_s = \sqrt{2}B_s + st.$$

Son exposant de Laplace  $\Psi$  est explicite :

$$\mathbb{E}(e^{uX_s}) = e^{s(ut+u^2)} = e^{s\Psi(u)}$$

avec  $\Psi(u) = ut + u^2 = u(t + u)$ . On a  $\Psi'(0) = t$ , et pour  $n \geq 1$ ,

$$t \times \frac{\Psi(1) \times \cdots \times \Psi(n-1)}{(n-1)!} = t \times \cdots \times (t+n-1) = \frac{\Gamma(t+n)}{\Gamma(t)} = \mathbb{E}(\Gamma_t^n).$$

Alors le Théorème 2.2 établit que  $\int_0^\infty e^{-X_s} ds \stackrel{d}{=} \Gamma_t^{-1}$ , c'est-à-dire, après un changement de variable

$$\int_0^\infty e^{B_s - st/2} ds \stackrel{d}{=} \frac{2}{\Gamma_t}.$$

### 2.1.4 Deux propriétés surprenantes

Commençons par un résultat intermédiaire sur les puissances négatives d'une variable gamma.

**Lemme 2.6** *Toutes les lois gamma sont multiplicativement infiniment divisibles. Plus précisément, soient  $a, s > 0$  et  $\Gamma_a$  une variable gamma de paramètre  $a$ . Alors pour tout  $n \geq 1$ , il existe une mesure de probabilité  $\mu_{a,n}$  à support sur  $\mathbb{R}_+$ , GGC, telle que : pour toute famille indépendante  $(Y_k)_{1 \leq k \leq n}$  de loi  $\mu_{a,n}$ ,*

$$\Gamma_a^{-s} \stackrel{d}{=} Y_1 \times \cdots \times Y_n.$$

*Démonstration.* Nous verrons dans la démonstration du Théorème 4.5 que si  $b$  est un entier (c'est également une condition nécessaire), alors pour tout  $a > 0$ ,  $-\log(\mathbf{B}_{a,b}) \sim \text{GGC}$ . Donc pour tout  $n \geq 1$ , il existe des variables aléatoires positives i.i.d.  $X_1^{(b)}, \dots, X_n^{(b)}$  telles que

$$-\log(\mathbf{B}_{a,b}) \stackrel{d}{=} X_1^{(b)} + \cdots + X_n^{(b)}.$$

De plus,  $\mathbb{E}(e^{-\lambda X_1^{(b)}}) = \mathbb{E}(e^{-\lambda(-\log(\mathbf{B}_{a,b}))})^{1/n}$  donc  $X_1^{(b)} \sim \text{GGC}$ . Ainsi,

$$b^{-s} \mathbf{B}_{a,b}^{-s} \stackrel{d}{=} b^{-s/n} e^{sX_1^{(b)}} \times \cdots \times b^{-s/n} e^{sX_n^{(b)}}$$

où chaque terme du produit de droite est GGC par le Théorème 1.26. On a  $b \mathbf{B}_{a,b} \xrightarrow{d} \Gamma_a$  lorsque  $b \rightarrow +\infty$  car

$$\mathbb{E}(b^u \mathbf{B}_{a,b}^u) = b^u \frac{\Gamma(a+u)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+u)} \underset{b \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b^u}{(a+b)^u} \frac{\Gamma(a+u)}{\Gamma(a)} \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(a+u)}{\Gamma(a)} = \mathbb{E}(\Gamma_a^u).$$

En écrivant

$$\mathbb{E}(b^{-s/n} e^{sX_1^{(b)}}) = \mathbb{E}(b^{-s} \mathbf{B}_{a,b}^{-s})^{1/n},$$

nous voyons que les variables

$$b^{-s/n} e^{sX_1^{(b)}}, \quad 1 \leq k \leq n$$

convergent en loi lorsque  $b \rightarrow +\infty$ ,  $b \in \mathbb{N}^*$ . Notons  $\mathbf{p}$  cette loi limite et soient  $Y_1, \dots, Y_n$  des variables aléatoires i.i.d. de loi  $\mathbf{p}$ . La classe GGC est stable pour la convergence en loi donc  $Y_1 \sim \text{GGC}$ . D'autre part, on a bien

$$\Gamma_a^{-s} \stackrel{d}{=} Y_1 \times \cdots \times Y_n$$

par ce qui précède. □

**Remarque :** Ce résultat est aussi une conséquence de la formule de Malmsten – voir la Proposition C.3, la démonstration étant similaire à celle du Lemme 6.4 que nous verrons plus loin.

**Théorème 2.7** Pour  $\alpha \in (0, 1)$ , soit  $(\mathbf{Z}_t^{(\alpha)})_{t \geq 0}$  un subordonateur strictement  $\alpha$ -stable. Alors, la variable aléatoire

$$J_\alpha = \int_0^\infty e^{-\mathbf{Z}_t^{(\alpha)}} dt$$

est finie presque sûrement et  $\forall s > 0$ ,  $J_\alpha^{-s} \sim \text{GGC}$ .

*Démonstration.* Par le Théorème 2.1, la loi de  $J_\alpha$  est caractérisée par ses moments entiers positifs. De plus,

$$\mathbb{E}(J_\alpha^n) = \frac{n!}{1^\alpha \times \dots \times n^\alpha} = (n!)^{1-\alpha}.$$

Commençons par le cas  $\alpha = 1/2$ . Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{E}(J_{1/2}^n) = (n!)^{1/2}$ . Par le Lemme 2.6, nous pouvons écrire

$$\mathbf{L}^{-s} \stackrel{d}{=} Y_1 \times Y_2$$

où  $\mathbf{L}$  désigne une variable exponentielle,  $Y_1$  et  $Y_2$  sont deux variables aléatoires positives, indépendantes, de même loi GGC. De plus,

$$\mathbb{E}(Y_1^{-n/s}) = (\mathbb{E}(\mathbf{L}^n))^{1/2} = (n!)^{1/2}.$$

La loi de  $J_{1/2}$  étant caractérisée, par ses moments entiers positifs qui sont les mêmes que ceux de  $Y_1^{-1/s}$ , nous en déduisons que

$$J_{1/2} \stackrel{d}{=} Y_1^{-1/s} \quad \text{et} \quad J_{1/2}^{-s} \stackrel{d}{=} Y_1.$$

Le théorème est donc démontré dans le cas  $\alpha = 1/2$  puisque  $Y_1 \sim \text{GGC}$ .

Le cas  $\alpha = 1 - 1/q$  avec  $q$  entier  $\geq 3$  se traite de manière analogue. En effet, nous obtenons alors

$$\mathbb{E}(J_{1-1/q}^n) = (n!)^{1/q}.$$

En invoquant de nouveau le Lemme 2.6, nous écrivons  $\mathbf{L}^{-s} \stackrel{d}{=} Y_1 \times \dots \times Y_q$  et nous en déduisons que  $J_{1-1/q}^{-s} \stackrel{d}{=} Y_1 \sim \text{GGC}$ .

Si  $\alpha = 1 - p/q$ ,

$$\mathbb{E}(J_{1-p/q}^n) = (n!)^{p/q} = \underbrace{(n!)^{1/q} \times \dots \times (n!)^{1/q}}_{p \text{ termes}}$$

donc

$$J_{1-p/q} \stackrel{d}{=} J_{1-1/q}^{(1)} \times \dots \times J_{1-1/q}^{(p)}$$

où les  $J_{1-1/q}^{(k)}$ ,  $1 \leq k \leq p$  désignent  $p$  copies indépendantes de la variable  $J_{1-1/q}$ . Le caractère GGC de  $J_{1-p/q}^{-s}$  vient alors de la stabilité de la classe GGC par le produit de variables indépendantes du Théorème 1.26.

Le cas  $\alpha$  quelconque est une conséquence de la continuité de la loi de  $J_\alpha$  en le paramètre  $\alpha$  qui vient de la continuité de l'application  $\alpha \mapsto (n!)^\alpha$ .  $\square$

**Remarque :** Désignons respectivement par  $\tilde{J}_{1/2}$ ,  $\tilde{\mathbf{Z}}^{(1/2)}$  et  $\tilde{\Gamma}_{1/2}$  des copies indépendantes de  $J_{1/2}$ ,  $\mathbf{Z}^{(1/2)}$  et  $\Gamma_{1/2}$ . Nous avons  $J_{1/2} \times \tilde{J}_{1/2} \stackrel{d}{=} \mathbf{L}$  et

$$\left(\mathbf{Z}_1^{(1/2)}\right)^{-1} + \left(\tilde{\mathbf{Z}}_1^{(1/2)}\right)^{-1} \stackrel{d}{=} 4\Gamma_{1/2} + 4\tilde{\Gamma}_{1/2} \stackrel{d}{=} 4\mathbf{L},$$

où l'égalité en loi  $\mathbf{Z}_1^{(1/2)} \stackrel{d}{=} (4\Gamma_{1/2})^{-1}$  peut se démontrer en calculant les moments fractionnaires et en utilisant la formule de duplication de la fonction  $\Gamma$ . Autrement dit,

$$J_{1/2} \stackrel{d}{=} \mathbf{L}^{\odot \frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad Z_1^{(1/2)} \stackrel{d}{=} \left(4\mathbf{L}^{*\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$

où  $\odot$  désigne la convolution multiplicative.

Le Théorème 2.7 entraîne que l'inverse de la perpétuité d'un subordonateur stable est auto-décomposable. Cette propriété peut être généralisée à une classe plus grande de subordonateurs :

**Proposition 2.8** *Soient  $\varphi$  une fonction de Bernstein complète,  $X$  un subordonateur ayant  $\varphi$  pour exposant de Laplace et sa perpétuité*

$$J = \int_0^\infty e^{-X_s} ds.$$

Alors  $J^{-1}$  a loi de la perpétuité d'un processus de Lévy intégrable, d'espérance positive et spectralement négatif.

**Remarque :** L'exposant de Laplace du subordonateur strictement  $\alpha$ -stable  $(\mathbf{Z}_t^{(\alpha)})$  est  $\lambda \mapsto \lambda^\alpha$ . Cette exposant est donc une fonction de Bernstein complète – voir la Proposition A.28.

*Démonstration.* La formule (2.2) entraîne que  $\forall \lambda > 0$ ,  $\mathbb{E}(J^{\lambda-1}) < +\infty$  et

$$\varphi(\lambda) = \lambda \times \frac{\mathbb{E}(J^{\lambda-1})}{\mathbb{E}(J^\lambda)}.$$

Alors,

$$u \times \frac{\mathbb{E}(J^{u+1})}{\mathbb{E}(J^u)} = u \times \frac{u+1}{\varphi(u+1)}.$$

Le Théorème A.18 entraîne que la fonction  $\lambda \mapsto \lambda/\varphi(\lambda)$  est une fonction de Bernstein complète, donc  $u \mapsto (u+1)/\varphi(u+1)$  est une fonction de Bernstein complète. Il existe donc une fonction complètement monotone  $m$  telle que

$$\frac{\lambda}{\varphi(\lambda)} = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) m(x) dx \quad \text{et} \quad \frac{u+1}{\varphi(u+1)} = \frac{1}{\varphi(1)} + \int_0^\infty (1 - e^{-ux}) e^{-x} m(x) dx$$

avec  $\int_0^\infty (1 \wedge x) m(x) dx < +\infty$ . Ainsi, la fonction  $\Psi$  définie par

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= u \times \frac{\mathbb{E}(J^{u+1})}{\mathbb{E}(J^u)} = \frac{u}{\varphi(1)} + u \int_{-\infty}^0 (1 - e^{ux}) e^x m(-x) dx \\ &= \frac{u}{\varphi(1)} + \underbrace{\left[ (1 + ux - e^{ux}) m(x) \right]_{-\infty}^0}_{=0} + \int_{-\infty}^0 (e^{ux} - 1 - ux) \underbrace{\frac{d}{dx} (e^x m(-x))}_{\geq 0} dx \end{aligned}$$

est l'exposant d'un processus de Lévy intégrable, de dérivée  $1/\varphi(1) > 0$  et spectralement négatif. Il suffit d'invoquer le Théorème 2.2 pour conclure.  $\square$

## 2.2 Étude de la densité

### 2.2.1 Introduction

Soit  $Z$  un processus de Lévy intégrable et soit  $I = \int_0^\infty e^{-Z_s}$  sa perpétuité. Nous avons vu dans la section 2.1, que sous certaines hypothèses sur  $Z$ , il est possible de lier les moments entiers de la perpétuité  $I$ , avec l'exposant de Laplace de  $Z$ . Le théorème suivant établit, que sous d'autres hypothèses sur  $Z$ , la loi de  $I$  admet une densité qui vérifie une certaine équation intégrale-différentielle.

**Théorème 2.9** (Proposition 2.1 [22]) *Soit un processus de Lévy  $Z$ , intégrable, d'espérance positive, dont le processus de sauts est à variation finie et ayant un exposant de Lévy-Khintchine de la forme (1.6). Alors, sa perpétuité  $I = \int_0^\infty e^{-Z_s} ds$  est finie presque sûrement et sa loi a une densité  $g$ , de classe  $C^1$  par morceaux, qui satisfait l'équation intégrale-différentielle suivante :*

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma^2}{2} \frac{d}{d\zeta} \left( \zeta^2 g(\zeta) \right) + \left[ \left( \frac{\sigma^2}{2} - \tilde{a} \right) \zeta + 1 \right] g(\zeta) \\ = \int_\zeta^{+\infty} g(r) \mu([\log(r/\zeta), +\infty)) dr - \int_0^\zeta g(r) \mu((-\infty, \log(r/\zeta)]) dr. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Réciproquement, si une densité de probabilité  $g$  sur  $\mathbb{R}_+$  satisfait l'équation (2.4), alors  $g$  est la densité de  $I$ .

A priori, ce théorème est plus difficile à exploiter que les Théorèmes 2.1 et 2.2, car résoudre explicitement ce type d'équations est rarement possible. De plus, la question de l'unicité de la solution n'est pas non plus une question facile a priori. Dans la section suivante, nous vérifierons cependant la validité de cette équation sur un exemple classique.

Le but de cette partie est de présenter une généralisation partielle de ce résultat au cas où le processus  $\xi$  est à variation infinie. Il n'est alors plus possible d'écrire l'exposant de Lévy-Khintchine sous la forme (1.6) et l'intégrale dans (2.4) ne converge plus.

**Théorème 2.10** *Soit un processus de Lévy  $Z$ , intégrable, d'espérance positive et ayant un exposant de Lévy-Khintchine de la forme (1.5). Alors, la perpétuité  $I = \int_0^\infty e^{-Z_s} ds$  est finie presque sûrement. De plus, si  $I$  admet une densité  $g$  de classe  $C^1$  par morceaux, alors elle satisfait l'équation intégrale-différentielle suivante :*

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma^2}{2} \frac{d}{d\zeta} \left( \zeta^2 g(\zeta) \right) + \left[ \left( \frac{\sigma^2}{2} - a \right) \zeta + 1 \right] g(\zeta) \\ = \int_\zeta^{+\infty} \left( g(r) \mu([\log(r/\zeta), +\infty)) - g(\zeta) \int_{\log(r/\zeta)}^{+\infty} \frac{z}{e^z - 1} \mu(dz) \right) dr \\ - \int_0^\zeta \left( g(r) \mu((-\infty, \log(r/\zeta)]) + g(\zeta) \int_{-\infty}^{\log(r/\zeta)} \frac{z}{e^z - 1} \mu(dz) \right) dr. \end{aligned} \quad (2.5)$$

**Remarque :** Lorsque le processus est à variation finie, un calcul montre que l'on retrouve l'équation (2.4) à partir de (2.5). En effet,  $\tilde{a} = a - \int_{\mathbb{R}^*} z \mu(dz)$  et

$$\int_\zeta^{+\infty} \int_{\log(r/\zeta)}^{+\infty} \frac{z}{e^z - 1} \mu(dz) dr = \int_0^{+\infty} \frac{z}{e^z - 1} \int_\zeta^{\zeta e^z} dr \mu(dz) = \zeta \int_0^{+\infty} z \mu(dz).$$

Un calcul similaire donne  $\zeta \int_{-\infty}^0 z \mu(dz)$  et l'on retrouve l'équation (2.4).

L'inconvénient de ce résultat est de supposer a priori que  $I$  admet une densité de classe  $C^1$  par morceaux. Cette hypothèse est cependant vérifiée dans de très nombreux exemples. Nous renvoyons à Bertoin, Lindner et Maller [8] pour plusieurs résultats sur la régularité de la loi des perpétuités.

Le Théorème 2.10 est montré sous une forme légèrement différente par Pardo, Patie et Savov – voir le Théorème 3.3 dans [41] à l'aide de la factorisation de Wiener-Hopf. Nous en donnons une preuve plus simple utilisant la formule d'Itô avec sauts, inspirée d'un article de Bailleul [3] où est redémontrée l'identité de Dufresne.

### 2.2.2 Démonstration du Théorème 2.10

Nous considérons un processus de Lévy  $Z$  qui satisfait aux conditions du Théorème 2.10. On applique le Théorème 1.15 : soit  $N$  un processus ponctuel de Poisson d'intensité  $ds\mu(dx)$ , indépendant d'un mouvement brownien standard  $B$ . On peut supposer que  $Z_t = at + \sigma B_t + \xi_t$  avec

$$\xi_t = \int_{\mathbb{R}^*} x \tilde{N}_t(dx).$$

Puis considérons le processus de Markov  $(X, Y)$  partant de  $(x, y)$ , défini par

$$Y_t = ye^{Z_t} \quad \text{et} \quad X_t = x + \int_0^t \frac{ds}{Y_s} = x + \frac{1}{y} \int_0^t e^{-Z_s} ds.$$

Comme  $Z_1$  est d'espérance strictement positive ( $\mathbb{E}(Z_1) = a > 0$ ), la loi des grands nombres pour les processus de Lévy – voir l'exercice 9 du chapitre 1 dans [7] – entraîne que

$$\frac{Z_s}{s} \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} a \quad \text{p.s.,}$$

donc  $(X_t)_{t \geq 0}$  converge presque sûrement lorsque  $t \rightarrow +\infty$  vers une limite que l'on notera  $X_\infty$ . Pour  $A \geq 0$ , soit  $F_A$  la fonction définie par  $F_A(x, y) = \mathbb{P}_{(x,y)}(X_\infty \geq A)$ .

**Lemme 2.11** *Le processus  $(F_A(X_t, Y_t))_{t \geq 0}$  partant de  $F_A(x, y)$  est une martingale fermée.*

*Démonstration.* Pour  $r \geq 0$ , on note  $\theta_r$  le shift sur la trajectoire de  $(X, Y)$ . C'est-à-dire,

$$(X, Y) \circ \theta_r = (X_{t+r}, Y_{t+r})_{t \geq 0}.$$

Alors, pour tout  $r \geq 0$ ,  $X_\infty \circ \theta_r = X_\infty$ . En effet,

$$X_\infty \circ \theta_r = X_r + \int_0^\infty \frac{ds}{Y_{s+r}} = x + \int_0^r \frac{ds}{Y_s} + \int_r^\infty \frac{ds}{Y_s} = X_\infty.$$

Donc,

$$\begin{aligned} F_A(X_t, Y_t) &= \mathbb{E}_{(X_t, Y_t)} [\mathbf{1}_{[A, +\infty)}(X_\infty)] = \mathbb{E}_{(x,y)} [\mathbf{1}_{[A, +\infty)}(X_\infty \circ \theta_t) \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}_{(x,y)} [\mathbf{1}_{[A, +\infty)}(X_\infty) \mid \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

où la deuxième égalité est due à la propriété de Markov et où  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  désigne la filtration naturelle. Ce calcul nous montre que  $(F_A(X_t, Y_t))_{t \geq 0}$  est une martingale fermée.  $\square$

Notons  $\mathcal{A}$  le générateur du processus de Markov  $(X, Y)$ .

**Lemme 2.12** *L'ensemble des fonctions de classe  $C^2$  sur  $(0, +\infty)^2$  est inclus dans le domaine de définition de  $\mathcal{A}$ , et pour toute fonction  $f$  de classe  $C^2$ ,  $\forall (x, y) \in (0, +\infty)^2$ ,*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f(x, y) &= \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + ay \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{\sigma^2 y^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^*} \left( f(x, e^z y) - f(x, y) - z \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \mu(dz). \end{aligned} \quad (2.6)$$

*Démonstration.* On applique le Théorème 1.17 :

$$\begin{aligned} f(X_t, Y_t) - f(x, y) &= f(X_t, ye^{Z_t}) - f(x, y) \\ &= \int_0^t \left( \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s) \frac{e^{-Z_s}}{y} + \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s) ay e^{Z_s} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_s, Y_s) y^2 e^{2Z_s} + \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s) e^{Z_s} \right) ds \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s) \sigma y e^{Z_s} dB_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} \left( f(X_s, e^z Y_{s-}) - f(X_s, Y_{s-}) \right) \tilde{N}(ds, dz) \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} \left( f(X_s, e^z Y_{s-}) - f(X_s, Y_{s-}) - z \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_{s-}) \right) \mu(dz) ds. \end{aligned}$$

Par la Proposition 1.16,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(x,y)}(f(X_t, Y_t) - f(x, y)) &= \\ \mathbb{E}_{(x,y)} \left[ \int_0^t \left( \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s) \frac{e^{-Z_s}}{y} + \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s) ay e^{Z_s} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_s, Y_s) y^2 e^{2Z_s} + \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s) e^{Z_s} \right) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} \left( f(X_s, e^z Y_{s-}) - f(X_s, Y_{s-}) - z \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_{s-}) \right) \mu(dz) ds \right] \end{aligned}$$

car les intégrales en  $dB_s$  et en  $\tilde{N}(ds, dz)$  définissent des martingales issues de 0. La démonstration s'achève en divisant le tout par  $t$ , puis en faisant tendre  $t \rightarrow 0$ .  $\square$

Nous pouvons désormais démontrer le Théorème 2.10. Supposons que  $F_A$  soit de classe  $C^2$  par morceaux. Puisque  $(F_A(X_t, Y_t))_{t \geq 0}$  est une martingale issue de  $F_A(x, y)$ ,  $\forall t > 0$ ,

$$\frac{\mathbb{E}_{(x,y)}(F_A(X_t, Y_t) - F_A(x, y))}{t} = 0,$$

donc  $\mathcal{A}F_A = 0$ . Or,

$$F_A(x, y) = \mathbb{P}_{(x,y)}(X_\infty \geq A) = \mathbb{P} \left( \int_0^\infty e^{-Z_s} ds \geq y(A - x) \right) = 1 - G(y(A - x))$$

où  $G$  désigne la fonction de répartition de  $\int_0^\infty e^{-Z_s} ds$ . En notant la densité  $g = G'$ , un calcul à partir de l'équation  $\mathcal{A}F_A = 0$  donne l'équation (2.5).  $\square$

**Remarque :** Le Théorème 3.9 dans [8] établit que la fonction  $F_A$  est absolument continue, en particulier continue. On peut donc établir a priori que  $\mathcal{A}F_A = 0$ . Cependant, cela n'est pas suffisant pour démontrer le caractère  $C^2$  de la fonction  $F_A$ .

### 2.2.3 Exemples

#### 2.2.3.1 L'inverse d'une variable bêta

Soit une variable  $\mathbf{B}_{a,b} \sim \mathbf{B}(a,b)^{-1} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) dx$ . Considérons la variable bêta de deuxième espèce  $\mathbf{B}_{a,b}^{(2)} = \mathbf{B}_{a,b}^{-1} - 1$  dont la densité est la fonction définie par

$$f_{a,b}(x) = \mathbf{B}(a,b)^{-1} x^{b-1} (x+1)^{-(a+b)} \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x).$$

Il est connu que pour  $b > 1$  (nécessaire pour la deuxième égalité),

$$\mathbf{B}_{a,b}^{-1} \stackrel{d}{=} \int_0^\infty e^{-(s-N_s^{b,a+b})} ds \stackrel{d}{=} 1 + \int_0^\infty e^{-(N_s^{a+b-1,b-1}-s)} ds \quad (2.7)$$

où  $N^{c,m}$  désigne un processus de Poisson composé sans dérive, ayant pour mesure de Lévy

$$\mu_{c,m}(dx) = c m e^{-mx} dx.$$

Les processus  $N^{b,a+b}$  et  $N^{a+b-1,b-1}$  ont donc pour mesures de Lévy respectives

$$b(a+b)e^{-(a+b)x} dx \quad \text{et} \quad (a+b-1)(b-1)e^{-(b-1)x} dx.$$

Remarquons au passage les égalités suivantes :

$$(N_s^{b,a+b})_{s \geq 0} \stackrel{d}{=} \left( \frac{N_{bs}^{1,1}}{a+b} \right)_{s \geq 0} \quad \text{et} \quad (N_s^{a+b-1,b-1})_{s \geq 0} \stackrel{d}{=} \left( \frac{N_{(a+b-1)s}^{1,1}}{b-1} \right)_{s \geq 0}.$$

L'expression de la loi de  $\mathbf{B}_{a,b}^{-1}$  comme celle de la perpétuité du processus  $(s - N_s^{b,a+b})_{s \geq 0}$  sera un cas particulier du Théorème 4.3, résultat qui s'appuie sur le Théorème 2.2. Nous pouvons vérifier cette expression dans le cadre du Théorème 2.9 : lorsque  $\zeta > 1$ , le terme de gauche de l'équation (2.4) devient

$$(1-\zeta)f_{a,b}(\zeta-1) = (1-\zeta) \mathbf{B}(a,b)^{-1} \zeta^{-(a+b)} (\zeta-1)^{b-1},$$

et le terme de droite,

$$-\int_0^\zeta f_{a,b}(r-1) b \left( \frac{r}{\zeta} \right)^{a+b} dr = -\mathbf{B}(a,b)^{-1} \zeta^{-(a+b)} (\zeta-1)^b.$$

L'équation intégrale-différentielle (2.4) est donc bien vérifiée.

La deuxième identité en loi dans (2.7) ne peut être obtenue ni par le Théorème 2.1, ni par le Théorème 2.2 puisque le processus sous-jacent n'est ni un subordonateur, ni un processus de Lévy spectralement négatif. C'est une conséquence du Théorème 2.1 dans [29]. Nous pouvons aussi vérifier cette expression dans le cadre du Théorème 2.9. Le calcul est assez similaire : pour tout  $\zeta > 0$ , le terme de gauche de l'équation (2.4) est

$$(1+\zeta)f_{a,b}(\zeta) = (1+\zeta) \mathbf{B}(a,b)^{-1} \zeta^{b-1} (\zeta+1)^{-(a+b)}$$

et celui de droite

$$\int_\zeta^\infty f_{a,b}(r)(a+b-1) \left( \frac{\zeta}{r} \right)^{b-1} dr = \mathbf{B}(a,b)^{-1} \zeta^{b-1} (\zeta+1)^{-(a+b-1)}.$$

Remarquons que même si le processus  $(N_t^{a+b-1, b-1} - t)_{t \geq 0}$  est spectralement positif, sa perpétuité est auto-décomposable et même HCM. En effet, on a l'identité bien connue

$$\mathbf{B}_{a,b}^{(2)} \stackrel{d}{=} \mathbf{B}_{a,b}^{-1} - 1 \stackrel{d}{=} \Gamma_b / \Gamma_a$$

et le terme de droite a une densité HCM. Enfin, observons que  $(\mathbf{B}_{a,b}^{(2)})^{-1} \stackrel{d}{=} \Gamma_a / \Gamma_b$  a aussi une densité HCM.

### 2.2.3.2 L'égalité en loi de Dufresne

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 2.1.3.2, lorsque la mesure de Lévy est nulle ( $Z$  est alors un mouvement brownien avec dérive), sa perpétuité a la même loi que l'inverse d'une variable gamma. L'équation intégrale-différentielle (2.4) se simplifie en une équation différentielle que l'on sait résoudre explicitement :

$$-\frac{\sigma^2}{2} \frac{d}{d\zeta} \left( \zeta^2 g(\zeta) \right) + \left[ \left( \frac{\sigma^2}{2} - a \right) \zeta + 1 \right] g(\zeta) = 0$$

dont les solutions sont

$$g(\zeta) = C \times \exp \left( - \left( 1 + \frac{2a}{\sigma^2} \right) \log(\zeta) - \frac{2}{\sigma^2 \zeta} \right) = C \times \zeta^{-(1 + \frac{2a}{\sigma^2})} e^{-\frac{2}{\sigma^2 \zeta}}$$

pour une certaine constante  $C \in \mathbb{R}$ . En identifiant la constante  $C > 0$  pour que la fonction  $g$  soit une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}_+$ , on retrouve la densité de  $2/(\sigma^2 \Gamma_{2a/\sigma^2})$ . Dans [3], Bailleul obtient cette équation différentielle en utilisant la formule d'Itô.

## 2.2.4 Une conjecture

Nous avons quatre exemples de perpétuités de processus de Lévy spectralement positifs, dont l'inverse est auto-décomposable :

1.  $\mathbf{B}_{a,b}^{(2)} \stackrel{d}{=} \mathbf{B}_{a,b}^{-1} - 1 \stackrel{d}{=} \int_0^\infty e^{-(N_s^{a+b-1, b-1} - s)} ds$ ,  $b > 1$  – voir le paragraphe 2.2.3.1 ;
2.  $\Gamma_t^\alpha = \int_0^\infty e^{-X_s} ds$  – voir le paragraphe 2.1.3.1 ;
3.  $J_\alpha = \int_0^\infty e^{-\mathbf{Z}_s^{(\alpha)}} ds$  – voir le Théorème 2.7 ;
4.  $\mathbf{B}_{a,b} = \int_0^\infty e^{-(s + N_s^{b, a-1})} ds$ ,  $a > 1$  – voir le Théorème 2.1 (i) [29] ;

Plus généralement, la Proposition 2.8 établit que dès qu'un subordonateur  $X$  a un exposant de Laplace qui est une fonction de Bernstein complète, l'inverse de sa perpétuité s'exprime comme la perpétuité d'un processus de Lévy spectralement négatif, en particulier l'inverse de la perpétuité est auto-décomposable. Il serait intéressant de voir si ce fait peut se généraliser à toutes les perpétuités de processus de Lévy spectralement positifs.

**Conjecture :** Soit  $X$  un processus de Lévy spectralement positif tel que  $X_t \rightarrow +\infty$  p.s. quand  $t \rightarrow +\infty$ . Soit

$$I = \int_0^\infty e^{-X_s} ds$$

sa perpétuité. Alors  $I^{-1}$  est auto-décomposable.

# Chapitre 3

## Auto-décomposabilité des puissances négatives de la loi gamma

Suite à ses travaux sur la divisibilité infinie et la complète monotonie, Steutel avait conjecturé en 1973 dans [51] que  $\mathbf{L}^\xi$  a une loi infiniment divisible lorsque  $\xi \notin (0, 1)$ . Par la suite, Bondesson a étendu la conjecture à  $\Gamma_t^\xi$  et a même supposé qu'elles étaient toutes GGC [15]. Nous répondons positivement à ces questions à travers deux théorèmes. Nous verrons dans le chapitre 3 que lorsque  $\xi \in (-1, 0)$ , la loi de  $\Gamma_t^\xi$  peut être exprimée comme celle de la perpétuité d'un certain processus de Lévy spectralement négatif. L'auto-décomposabilité et donc la divisibilité infinie en découle immédiatement. Dans le chapitre 4 nous verrons d'une façon totalement différente que nous pouvons raffiner la propriété d'auto-décomposabilité en GGC. Le point clé est le récent Théorème 1.26 de Bondesson à propos de la stabilité de la classe GGC par le produit de variables indépendantes. Cela achève l'étude de la divisibilité infinie des différentes puissances d'une variable gamma. En résumé nous avons le théorème :

**Théorème 3.1** *Soit  $\Gamma_t$  une variable gamma de paramètre  $t$ . On a,*

- (1)  $\Gamma_t^\xi \sim \text{HCM}$  si et seulement si  $|\xi| \geq 1$  ;
- (2)  $\Gamma_t^\xi$  n'est pas infiniment divisible lorsque  $\xi \in (0, 1)$  ;
- (3)  $\Gamma_t^\xi \sim \text{GGC}$  lorsque  $\xi \in (-1, 0)$ .

*En particulier,  $\Gamma_t^\xi \sim \text{ID} \Leftrightarrow \Gamma_t^\xi \sim \text{SD} \Leftrightarrow \Gamma_t^\xi \sim \text{GGC} \Leftrightarrow \xi \notin (0, 1)$ .*

Les deux premiers points sont connus depuis un certain temps, seul le point n° 3 restait ouvert. Il est l'objet du chapitre 3 et du Théorème 4.5. Afin d'être le plus complet possible, donnons une démonstration des points n° 1 et n° 2.

*Démonstration (de (1) et (2)) du Théorème 3.1.* Si  $\xi \in (0, 1)$ , nous avons vu à la fin de la section 1.2.1 que  $\Gamma_t^\xi$  n'est pas infiniment divisible. Ceci prouve (2) et une partie de (1). En effet,

$$\Gamma_t^\xi \sim \text{HCM} \iff \Gamma_t^{-\xi} \sim \text{HCM} \implies \Gamma_t^{-\xi} \sim \text{ID}.$$

Enfin, il est évident que la fonction  $x \mapsto x^{t-1}e^{-x}$  est HCM, c'est-à-dire,  $\Gamma_t \sim \text{HCM}$ . Le Théorème B.2 entraîne (1).  $\square$

La méthode employée ici pour démontrer la divisibilité infinie des puissances  $\Gamma_t^\xi$  avec  $|\xi| \geq 1$  utilise la technologie HCM. Avant que Thorin et Bondesson ne formalisent cette

théorie, l'étude était assez laborieuse et se faisait au cas pas cas. Par exemple, en 1976 Grosswald [32] prouve que  $\Gamma_t^{-1} \sim \text{GGC}$  quelle que soit la valeur de  $t > 0$ , en 1978 Bondesson [12] prouve que  $\Gamma_t^2 \sim \text{ID}$  quelque soit  $t > 0$  et que  $\Gamma_t^3 \sim \text{ID}$  lorsque  $t$  est un entier. Le Théorème 1.22 dû à Goldie (puis Steutel) entraîne la divisibilité infinie de  $\Gamma_t^\xi$  lorsque  $\xi \geq 1 \vee t$ . Il faudra attendre un papier de Thorin en 1978 [53] qui démontre que toutes les puissances  $\Gamma_t^\xi$  avec  $|\xi| \geq 1$  ont une loi GGC en utilisant les techniques HCM dans une forme primitive.

Le théorème des valeurs extrêmes – voir par exemple le Théorème 8.13.1 dans [11] – établit que les distributions non dégénérées qui apparaissent comme limites de maxima proprement renormalisés de variables indépendantes et identiquement distribuées appartiennent à l'une des trois familles suivantes :

- la distribution de Gumbel :  $F_0(x) = e^{-e^{-x}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  ;
- la distribution de Fréchet : pour  $\xi < 0$ ,  $F_\xi(x) = e^{-x^{1/\xi}}$ ,  $x > 0$  ;
- la distribution de Weibull : pour  $\xi > 0$ ,  $F_\xi(x) = 1 - e^{-x^{1/\xi}}$ ,  $x > 0$ .

Dans la suite,  $X_\xi$  désignera une variable aléatoire ayant pour fonction de répartition  $F_\xi$ . Ainsi

$$X_0 \stackrel{d}{=} -\log(\mathbf{L}) \quad \text{et} \quad X_\xi \stackrel{d}{=} \mathbf{L}^\xi \quad \text{lorsque } \xi \neq 0.$$

Remarquons la convergence en loi suivante :

$$\frac{1 - X_\xi}{\xi} \xrightarrow{d} X_0 \quad \text{lorsque } \xi \rightarrow 0,$$

de sorte que la paramétrisation est continue en  $\xi$ . Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à l'auto-décomposabilité de ces lois. Nous avons l'égalité en loi

$$\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{Z}_\alpha} \stackrel{d}{=} \mathbf{L}^{1/\alpha}$$

– voir par exemple le Lemme 5.9. Ceci entraîne l'auto-décomposabilité de la loi de Gumbel. En effet,

$$X_0 \stackrel{d}{=} -\log(\mathbf{L}) \stackrel{d}{=} -\alpha \log(\mathbf{L}) + \alpha \log(\mathbf{Z}_\alpha) \stackrel{d}{=} \alpha X_0 + \alpha \log(\mathbf{Z}_\alpha)$$

pour  $\alpha \in (0, 1)$ . Nous avons vu que la loi de Weibull n'est pas infiniment divisible lorsque  $\xi \in (0, 1)$  donc non auto-décomposable – voir le Théorème 3.1. En revanche, lorsque  $\xi \geq 1$ , sa densité est complètement monotone donc infiniment divisible par le Théorème 1.22, la loi apparaît en fait comme le temps de passage d'une chaîne de Markov en temps continu – voir par exemple la section 9.3 dans [15]. Dans ce chapitre, nous établissons le théorème suivant :

**Théorème 3.2** *Pour tous  $\alpha \in (0, 1)$  et  $t > 0$ , la variable aléatoire  $\Gamma_t^{-\alpha}$  a une loi auto-décomposable.*

L'auto-décomposabilité de toutes les lois de Fréchet découle directement de ce théorème ainsi que de la discussion précédente. Ainsi, la loi extrême de paramètre  $\xi \in \mathbb{R}$  est infiniment divisible si et seulement si  $\xi \notin (0, 1)$ . Contrairement au cas où  $|\xi| \geq 1$ , l'argument est purement probabiliste et consiste à exprimer la loi de  $\Gamma_t^\xi$  comme celle de la perpétuité d'un processus de Lévy spectralement négatif. Cela généralise un résultat classique attribué à Dufresne [26] dans le cas  $\xi = -1$ . L'identification est possible via une étude des moments entiers négatifs de la variable  $\Gamma_t^\xi$  s'appuyant sur un résultat de Bertoin et

Yor [9] – voir le Théorème 2.2. La démonstration est donnée dans la section 3.1. Dans la section 3.2, nous passerons en revue les différentes interprétations de la divisibilité infinie de  $\Gamma_t^\xi$  lorsque  $\xi < 0$ .

### 3.1 Démonstration du théorème principal

Posons  $\alpha = -\xi \in (0, 1)$ . La stratégie pour démontrer le Théorème 3.2 est de prouver une égalité en loi du type

$$\Gamma_t^{-\alpha} \stackrel{d}{=} I(X) = \int_0^\infty e^{-Xt} dt$$

où  $X$  est un processus de Lévy spectralement négatif, intégrable et d'espérance positive. L'auto-décomposabilité sera une conséquence de la Proposition 2.4.

Nous allons utiliser le Théorème 2.2. Pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\mathbb{E}(\Gamma_t^{\alpha n}) = \frac{\Gamma(t + \alpha n)}{\Gamma(t)} = m \times \frac{\Psi(1) \times \cdots \times \Psi(n-1)}{(n-1)!}$$

avec

$$m = \frac{\Gamma(t + \alpha)}{\Gamma(t)} \quad \text{et} \quad \Psi(u) = u \frac{\Gamma(t + \alpha(u+1))}{\Gamma(t + \alpha u)}.$$

Nous savons par le Lemme C.1 que la fonction définie par

$$\frac{\Gamma(\lambda + \alpha)}{\Gamma(\lambda)} = \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \frac{e^{-\alpha x}}{(1 - e^{-x})^{\alpha+1}} dx$$

est une fonction de Bernstein complète, cela signifie que la fonction  $m_\alpha$  définie par

$$m_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \times \frac{e^{-\alpha x}}{(1 - e^{-x})^{\alpha+1}}$$

est complètement monotone. Donc

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(t + \alpha(u+1))}{\Gamma(t + \alpha u)} &= \int_0^\infty (1 - e^{-(t+\alpha u)x}) m_\alpha(x) dx \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-tx}) m_\alpha(x) dx + \int_0^\infty (1 - e^{-\alpha ux}) e^{-tx} m_\alpha(x) dx \\ &= \frac{\Gamma(t + \alpha)}{\Gamma(t)} + \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{-\infty}^0 (1 - e^{ux}) \frac{e^{(1+t/\alpha)x}}{(1 - e^{x/\alpha})^{\alpha+1}} dx. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= \frac{\Gamma(t + \alpha)}{\Gamma(t)} u - \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{-\infty}^0 (e^{ux} - 1 - ux) \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{(1+t/\alpha)x}}{(1 - e^{x/\alpha})^{\alpha+1}} \right) dx \\ &= \frac{\Gamma(t + \alpha)}{\Gamma(t)} u + \int_{-\infty}^0 (e^{ux} - 1 - ux) f_{\alpha,t}(x) dx \end{aligned}$$

où  $f_{\alpha,t}(x)dx$  est une mesure de Lévy sur  $(-\infty, 0)$  définie par

$$f_{\alpha,t}(x) = \frac{e^{(1+t/\alpha)x}(\alpha + e^{x/\alpha} + t(1 - e^{x/\alpha}))}{\alpha\Gamma(1 - \alpha)(1 - e^{x/\alpha})^{\alpha+2}}.$$

$\Psi$  est donc l'exposant de Laplace d'un processus de Lévy spectralement négatif d'espérance  $m = \Gamma(t + \alpha)/\Gamma(t) > 0$  – voir la représentation (1.4). Soit  $X$  un tel processus, alors  $\Gamma_t^{-\alpha} \stackrel{d}{=} I(X) \sim \text{SD}$ .  $\square$

**Remarque :** Lorsque  $t = 1$ , l'expression de  $f_{\alpha,1}$  se simplifie quelque peu :

$$f_{\alpha,1}(x) = \frac{(1 + \alpha) e^{(1+1/\alpha)x}}{\alpha \Gamma(1 - \alpha) (1 - e^{x/\alpha})^{\alpha+2}}.$$

## 3.2 Remarques et compléments

Dans cette section nous allons passer en revue différentes interprétations de la divisibilité infinie de  $\Gamma_t^\xi$  lorsque  $\xi < 0$ . Puis, nous finirons par évoquer le lien entre le Théorème 3.2 et un résultat dû à Patie [42].

### 3.2.1 Le cas $\xi = -1$

Ce cas est très classique et a plusieurs interprétations. Lorsque  $\alpha = 1$ , la fonction

$$\Psi : u \mapsto u \frac{\Gamma(t + u + 1)}{\Gamma(t + u)} = u(t + u) = tu + u^2$$

est l'exposant de Laplace d'un mouvement brownien avec dérive. On obtient l'égalité en loi de Dufresne

$$\frac{1}{\Gamma_t} \stackrel{d}{=} \int_0^\infty e^{B_{2s} - ts} ds$$

que l'on peut réécrire après un changement de variable

$$\frac{2}{\Gamma_t} \stackrel{d}{=} \int_0^\infty e^{B_s - ts/2} ds$$

où  $(B_s)$  désigne un mouvement brownien standard. L'auto-décomposabilité de  $\Gamma_t^{-1}$  se démontre en utilisant l'argument de la section 3.1.

Lorsque  $t = 1/2$ ,  $\Gamma_{1/2}^{-1}$  a la loi même loi que le temps de passage en 1 d'un certain mouvement brownien. En effet, soit  $T = \inf\{s > 0 / B_s = 1\}$  où  $B$  désigne un mouvement brownien standard. Considérons la martingale  $M^{(u)}$  bornée par  $e^u$  définie par

$$M_s^{(u)} = \exp(uB_{s \wedge T} - u^2(s \wedge T)/2).$$

Ainsi  $\mathbb{E}(M_T^{(u)}) = \mathbb{E}(M_0^{(u)}) = 1$ , on en déduit que  $\mathbb{E}(e^{u - u^2 T/2}) = 1$ , c'est-à-dire

$$\forall \lambda \geq 0, \mathbb{E}(e^{-\lambda T}) = e^{-\sqrt{2\lambda}}.$$

Avec les notations précédentes, cela signifie que  $T \stackrel{d}{=} 2 Z_{1/2} \stackrel{d}{=} (2\Gamma_{1/2})^{-1}$ . La loi de  $\Gamma_{1/2}^{-1}$  est donc une inverse-gaussienne (IG). Lorsque  $t \neq 1/2$ , on peut encore voir la loi de  $\Gamma_t^{-1}$  comme le temps de passage d'une certaine diffusion. En effet,

$$\Gamma_t^{-1} \sim \frac{x^{-t-1}}{\Gamma(t)} e^{-1/x} dx$$

est de la forme

$$A \times x^b \times e^{-cx-dx^{-1}} dx$$

avec  $a, c, d \geq 0$  et  $b \in \mathbb{R}$ , forme générale d'une loi inverse-gaussienne généralisée (GIG) [4]. Ainsi la loi de  $\Gamma_t^{-1}$  est celle du temps de passage d'une certaine chaîne de Markov en temps continu. Plus précisément,

$$\frac{1}{4\Gamma_t} \stackrel{d}{=} \inf\{s > 0 / X_s = 0\} \quad (3.1)$$

où  $(X_s)$  est un processus de Bessel de dimension  $2(1-t)$  partant de 1. La divisibilité infinie découle alors de la propriété de Markov appliquée aux temps de passage en  $k/n$  ( $0 \leq k \leq n$ ) et du résultat sur les tableaux triangulaires mentionné dans l'introduction.

Ces interprétations ne donnent a priori aucune information sur la mesure de Lévy. Mais dans ce cas, il est possible d'exprimer la transformée de Laplace de  $1/4\Gamma_t$  à l'aide de fonctions de Bessel modifiées. Notons  $\varphi_t(\lambda) = -\log(\mathbb{E}e^{-\lambda/4\Gamma_t})$ , les formules (7.12.23), (7.11.25) et (7.11.26) dans [28] entraînent que

$$\varphi'_t(\lambda) = \frac{K_{t-1}(\sqrt{\lambda})}{2\sqrt{\lambda}K_t(\sqrt{\lambda})}.$$

Lorsque  $t = 1/2$ ,  $\varphi'_{1/2}(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ , ceci prouve la divisibilité infinie de  $(4\Gamma_t)^{-1}$  et nous retrouvons la célèbre identité en loi

$$\mathbf{Z}_{1/2} \stackrel{d}{=} \frac{1}{4\Gamma_{1/2}}. \quad (3.2)$$

Lorsque  $t = 3/2$ ,

$$2\varphi'_{3/2}(\lambda) = \frac{1}{1 + \sqrt{\lambda}} = \mathbb{E}\left(\frac{1}{1 + \lambda C^2}\right)$$

où  $C$  désigne une variable de Cauchy standard. La première égalité provient de la formule (7.2.40) dans [28] et la seconde du Lemme 5.10. Ainsi,

$$\varphi'_{3/2}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + \lambda x^2)(1 + x^2)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{(\lambda + x)(1 + x)},$$

ce qui montre que la fonction  $\varphi'_{3/2}$  est une transformée de Stieltjes ayant pour mesure de Stieltjes

$$\nu_{3/2}(dx) = \frac{\sqrt{x} dx}{2\pi(1 + x)}.$$

Ceci revient à dire que  $(4\Gamma_{3/2})^{-1} \sim \text{GGC}$  avec  $\nu_{3/2}$  comme mesure de Thorin – voir la Proposition A.22. Cette dernière propriété a été montrée quelque soit  $t > 0$  dans [32], la mesure de Thorin s'exprimant à l'aide des fonctions de Bessel usuelles  $J$  et  $Y$  :

$$\nu_t(dx) = \frac{dx}{\pi^2 x (J_t^2(\sqrt{x}) + Y_t^2(\sqrt{x}))}$$

où

$$J_t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+t+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+t},$$

$$Y_t(x) = \frac{J_t(x) \cos(\pi t) - J_{-t}(x)}{\sin(\pi t)} \quad t \notin \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad Y_n = \lim_{t \rightarrow n} Y_t \quad n \in \mathbb{Z}.$$

### 3.2.2 Le cas $\xi = 0$

Nous avons déjà vu que la distribution  $F_0$  est auto-décomposable. Ceci est également une conséquence directe de la théorie des valeurs extrêmes car

$$\mathbf{L}_1 + \frac{\mathbf{L}_2}{2} + \cdots + \frac{\mathbf{L}_n}{n} - \log(n) \stackrel{d}{=} \max(\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_n) - \log(n) \xrightarrow{d} X_0$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ , où  $(\mathbf{L}_k)$  désigne une suite i.i.d. de variables exponentielles de paramètres 1. De plus, après quelques calculs – voir la démonstration de la Proposition C.3 pour des détails, nous obtenons l'expression suivante pour la transformée de Laplace de  $X_0$  :

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda X_0}) = \Gamma(1 + \lambda) = \exp\left(-\gamma u - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x} - \lambda x) \frac{dx}{x(e^x - 1)}\right) \quad (3.3)$$

où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler. En outre, la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 1} e^{-nx}$$

est complètement monotone, cela signifie que la distribution  $F_0$  est une GGC étendue dans le sens du chapitre 7 de [15]. Nous verrons au Théorème 4.5 que cette propriété combinée avec le très puissant Théorème 1.26 (plus précisément, avec son corollaire) permet de démontrer le caractère GGC de la loi de  $\Gamma_t^{-\alpha}$  lorsque  $\alpha \in (0, 1)$ .

### 3.2.3 Le cas $\xi \in (-1, 0)$

L'auto-décomposabilité de la loi de  $\Gamma_t^\xi$  a été démontrée grâce à l'identification

$$\Gamma_t^\xi \stackrel{d}{=} I(X) = \int_0^\infty e^{-X_u} du$$

où  $X$  est un processus de Lévy spectralement négatif. Nous allons en donner une autre explication, analogue à (3.1). C'est-à-dire voir  $\Gamma_t^\xi$  comme le temps de passage d'une certaine diffusion. Introduisons la transformée de Lamperti [40] : posons pour  $0 \leq t \leq \Gamma_t^\xi$ ,

$$Y_u = \exp(-X_{\tau_u})$$

où  $\tau_u = \inf\{t > 0 / \int_0^t e^{-X_s} ds > u\}$ , avec la convention  $\inf \emptyset = +\infty$ . Alors

$$Y = (Y_u, 0 \leq u < I(X) = \int_0^\infty e^{-X_s} ds)$$

est un processus de Markov spectralement positif (1 auto-similaire) partant de 1, et nous avons

$$\Gamma_t^\xi \stackrel{d}{=} I(X) = \inf\{u > 0 / Y_u = 0\}.$$

La divisibilité infinie s'obtient, comme dans le cas  $\xi = -1$ , en utilisant le résultat sur les tableaux triangulaires.

Il est aussi possible d'interpréter la loi de  $\Gamma_t^\xi$  comme celle du dernier temps de passage d'un certain processus. Posons pour  $x, u > 0$

$$Z_u^{(x)} = x \exp(X_{\sigma_{u/x}})$$

où

$$I_t = \int_0^t e^{X_s} ds \quad \text{et} \quad \sigma_v = \inf\{t > 0 / I_t \geq v\}.$$

Alors  $Z^{(x)}$  est un processus de Markov spectralement négatif 1 auto-similaire partant de  $x$ . De plus, les lois finies dimensionnelles de  $X^{(x)}$  convergent vers la loi du processus  $X^{(0)}$  lorsque  $x \rightarrow 0$ . Le processus  $X^{(0)}$  est un processus de Markov spectralement négatif 1 auto-similaire, et  $X_u^{(0)} \rightarrow +\infty$  lorsque  $u \rightarrow \infty$  voir par exemple l'introduction de [23]. Introduisons le dernier temps de passage pour  $x > 0$

$$U(x) = \sup\{u > 0 / X_u^{(0)} \leq x\},$$

la Proposition 1 [23] entraîne l'identification en loi

$$\Gamma_t^\xi \stackrel{d}{=} U(1).$$

Le processus  $(U(x))_{x>0}$  est un processus croissant 1 auto-similaire additif (i.e. à accroissement indépendants) spectralement négatif. Par le Théorème 16.1 [45], nous retrouvons l'auto-décomposabilité de  $\Gamma_t^\xi$ .

Enfin, le Théorème 3.2 peut-être interprété analytiquement en terme de fonctions de Bessel généralisées. Posons  $\alpha = -\xi$ ,

$$\mathbb{E} \left( e^{-\lambda \Gamma_t^{-\alpha}} \right) = \frac{1}{\alpha \Gamma(t)} \int_0^\infty x^{-t/\alpha-1} e^{-\lambda x - x^{-1/\alpha}} dx = \frac{\mathcal{Z}_{1/\alpha}^{t/\alpha}(\lambda)}{\alpha \Gamma(t)}$$

où l'on a utilisé la notation (1.7.42) de [38]. L'infinie divisibilité de la loi de  $\Gamma_t^\xi$  entraîne que la fonction

$$\lambda \mapsto - \frac{(\mathcal{Z}_\rho^\nu)'(\lambda)}{\mathcal{Z}_\rho^\nu(\lambda)}$$

est complètement monotone pour tous  $\rho > 1$  et  $\nu > 0$ . Le caractère GGC de la loi de  $\Gamma_t^{-\alpha}$  qui est l'objet du Théorème 4.5 entraîne que cette dernière fonction est une transformée de Stieltjes – voir de nouveau la Proposition A.22.

### 3.2.4 Le cas $\xi < -1$

Tout d'abord, observons qu'il n'est pas possible ici d'essayer d'exprimer la loi de  $\Gamma_t^\xi$  comme celle de la perpétuité d'un processus de Lévy spectralement négatif car

$$\Psi(u) = u \frac{\Gamma(t + |\xi| + |\xi|u)}{\Gamma(t + |\xi|u)} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} |\xi|^{|\xi|} u^{|\xi|+1}$$

n'est plus un exposant de Laplace. En effet, la forme générale d'un exposant de Laplace est

$$\Psi(u) = au + \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}^*} (e^{ux} - 1 - ux \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)) \mu(dx)$$

donc, si  $\mu((0, +\infty)) = 0$ , alors  $\Psi(u) = O(u^2)$ , et si  $\mu((0, +\infty)) > 0$ , alors  $\forall c > 0$ ,

$$\frac{\Psi(u)}{u^c} \underset{u \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Comme dit précédemment, dans cette situation, le moyen le plus simple pour montrer la divisibilité infinie est d'utiliser la technologie HCM. En effet, la densité de  $\mathbf{\Gamma}_t$  est une fonction HCM, donc  $\mathbf{\Gamma}_t^\xi \sim \text{HCM}$  dès que  $|\xi| \geq 1$  – voir le Corollaire B.6. Cela ne nous donne cependant aucune information sur la mesure de Thorin ni sur la mesure de Lévy.

Le Théorème 3.2 permet cependant de donner une nouvelle démonstration (celle-ci probabiliste) de la divisibilité infinie de  $\mathbf{\Gamma}_1^\xi = \mathbf{L}^\xi$  lorsque  $\xi < -1$ . Posons  $\alpha = -1/\xi \in (0, 1)$ , nous avons par le Lemme 5.9,

$$\mathbf{L}^\xi = \mathbf{L}^{-1/\alpha} \stackrel{d}{=} \mathbf{L}^{-1} \times \mathbf{Z}_\alpha \stackrel{d}{=} \mathbf{Z}_{\mathbf{L}^{-\alpha}}^{(\alpha)}$$

où  $\mathbf{Z}_\alpha$  désigne une variable strictement  $\alpha$ -stable indépendante de la variable exponentielle  $\mathbf{L}$  et où  $(\mathbf{Z}_t^{(\alpha)})_{t \geq 0}$  désigne un subordonateur stable normalisé tel que  $\mathbf{Z}_1^{(\alpha)} \stackrel{d}{=} \mathbf{Z}_\alpha$ . La variable  $\mathbf{L}^\xi$  a donc une loi infiniment divisible comme loi marginale d'un subordonateur. Elle est même auto-décomposable par la Proposition 4.1 [44] (une démonstration est donnée ci-dessous) car ici, on compose un subordonateur stable par un subordonateur auto-décomposable (notons que la composition de deux subordonateurs auto-décomposables n'est pas nécessairement un subordonateur auto-décomposable). On peut exprimer l'exposant de Lévy-Khintchine de  $\mathbf{L}^\xi$  en fonction de celui de  $\mathbf{L}^{1/\xi}$ . En effet, réutilisons la factorisation ci-dessus,

$$\mathbb{E} \left( e^{-\lambda \mathbf{L}^\xi} \right) = \mathbb{E} \left( e^{-\lambda \mathbf{Z}_\alpha / \mathbf{L}} \right) = \mathbb{E} \left( e^{-\lambda^\alpha \mathbf{L}^{-\alpha}} \right).$$

Posons pour  $\beta < 0$  et  $\lambda \geq 0$ ,  $\varphi_\beta(\lambda) = -\log \left( \mathbb{E} \left( e^{-\lambda \mathbf{L}^\beta} \right) \right)$ , nous avons démontré que  $\forall \lambda \geq 0$ ,

$$\varphi_\xi(\lambda) = \varphi_{-\alpha}(\lambda^\alpha) = \varphi_{1/\xi}(\lambda^{-1/\xi})$$

ce qui prouve une fois de plus que  $\mathbf{L}^\xi$  a une loi infiniment divisible car la composée de deux fonctions de Bernstein est une fonction de Bernstein. Nous finissons ce paragraphe par la démonstration de la Proposition 4.1 de [44]. On sait par le Théorème 3.2 que  $\mathbf{L}^{-\alpha}$  a une loi auto-décomposable, il existe donc une fonction  $m$  décroissante sur  $(0, \infty)$  telle que

$$\varphi_{-\alpha}(\lambda) = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \frac{m(x)}{x} dx.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \varphi_\xi(\lambda) = \varphi_{-\alpha}(\lambda^\alpha) &= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda^\alpha x}) \frac{m(x)}{x} dx = \alpha \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda^\alpha x^\alpha}) \frac{m(x^\alpha)}{x} dx \\ &= \alpha \int_0^\infty \mathbb{E} (1 - e^{-\lambda x \mathbf{Z}_\alpha}) \frac{m(x^\alpha)}{x} dx \\ &= \alpha \int_0^\infty \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda xy}) f_\alpha(y) \frac{m(x^\alpha)}{x} dx dy \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \underbrace{\int_0^\infty f_\alpha(y) m \left( \frac{x^\alpha}{y^\alpha} \right) dy}_{\tilde{m}(x)} \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

où  $f_\alpha$  désigne la densité de  $\mathbf{Z}_\alpha$ . La fonction  $\tilde{m}$  est une fonction décroissante sur  $(0, \infty)$ .

### 3.2.5 Lien avec l'auto-décomposabilité de $\mathbf{Z}_\alpha^\delta$

L'auto-décomposabilité de  $\mathbf{Z}_\alpha^\alpha$  a été montrée par Patie [42] en utilisant le même type d'argument que dans la section 3.1. En effet,

$$\mathbb{E}(\mathbf{Z}_\alpha^{-\alpha n}) = \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+\alpha n)} = m \frac{\Psi(1) \times \cdots \times \Psi(n-1)}{(n-1)!}$$

avec

$$m = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \quad \text{et} \quad \Psi(u) = u(u+1) \times \frac{\Gamma(1+\alpha u)}{\Gamma(1+\alpha(u+1))}.$$

Or, la fonction

$$h : \lambda \mapsto \lambda \times \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\alpha + \lambda)}$$

est une fonction de Bernstein complète comme fonction conjuguée d'une fonction de Bernstein complète – voir le Lemme C.1 et le Théorème A.18. En particulier  $\tilde{h} : \lambda \mapsto h(1-\alpha+\lambda)$  est une fonction de Bernstein complète puisque  $1-\alpha \geq 0$ . Donc la fonction définie par

$$\frac{1}{\alpha} \times \tilde{h}(\alpha(u+1)) = (u+1) \times \frac{\Gamma(1+\alpha u)}{\Gamma(1+\alpha(u+1))}$$

est une fonction de Bernstein complète. Ainsi, comme dans la démonstration du Théorème 3.2, cela entraîne que  $\Psi$  est l'exposant de Laplace d'un processus de Lévy spectralement négatif, et que  $\mathbf{Z}_\alpha^\alpha$  est auto-décomposable. On obtient par des calculs analogues

$$\Psi(u) = \frac{u}{\Gamma(1+\alpha)} + \int_{-\infty}^0 (e^{ux} - 1 - ux) \frac{(1-\alpha)e^{x/\alpha} ((2-\alpha)e^{x/\alpha} + 1 - e^{x/\alpha})}{\alpha^2 \Gamma(1+\alpha) (1 - e^{x/\alpha})^{3-\alpha}} dx.$$

Dans le cas  $\alpha = t = 1/2$ , en comparant la mesure de Lévy avec celle du Théorème 3.2 nous retrouvons l'identité en loi (3.2) :

$$\sqrt{\mathbf{Z}_{1/2}} \stackrel{d}{=} \frac{1}{2\sqrt{\Gamma_{1/2}}}.$$

Le Théorème 3.2 entraîne que toutes les puissances positives de  $\mathbf{Z}_{1/2}$  sont auto-décomposables et il serait intéressant de savoir si la même chose se produit pour  $\mathbf{Z}_\alpha$  lorsque  $\alpha \in (0, 1)$ . Le même raisonnement que celui du début de la section 3.2.4 montre qu'exprimer la loi de  $\mathbf{Z}_\alpha^\delta$  comme la perpétuité d'un processus de Lévy spectralement négatif n'est pas possible lorsque  $\delta > \alpha/(1-\alpha)$ . Les calculs pour un  $\alpha \in (0, 1)$  et un  $\delta \in (0, \alpha/(1-\alpha)]$  quelconques semblent cependant compliqués. Notons

$$A = \{\alpha \in (0, 1) / \mathbf{Z}_\alpha^{\alpha/(1-\alpha)} \sim \mathcal{E}_-\}$$

où  $\mathcal{E}_-$  désigne l'ensemble des lois de toutes les perpétuités de processus de Lévy spectralement négatifs. Voici une description partielle de l'ensemble  $A$  :

**Proposition 3.3**  $(0, 1/2) \cap A = \emptyset$  et  $\{(p-1)/p, p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\} \subset A$ .

Au chapitre 6, nous verrons que  $\mathbf{Z}_\alpha^\delta \sim \text{HCM} \subset \text{ID}$  si  $\alpha \leq 1/2$  et  $|\delta| \geq 1$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{C}_- = \{\text{Exposants de Laplace de PLSN à moyennes } > 0\}$  où PLSN signifie processus de Lévy spectralement négatif. Pour tout  $\alpha \in (0, 1)$ , on considère la fonction  $\Psi$  définie par

$$\Psi(u) = u \frac{\mathbb{E}\left(\mathbf{Z}_\alpha^{-(u+1)\alpha/(1-\alpha)}\right)}{\mathbb{E}\left(\mathbf{Z}_\alpha^{-u\alpha/(1-\alpha)}\right)}.$$

Nous allons montrer que si  $\alpha = (p-1)/p$  pour un entier  $p \geq 2$ , alors  $\Psi \in \mathcal{C}_-$ , et que si  $\alpha < 1/2$ , alors  $\Psi \notin \mathcal{C}_-$ .

Commençons par le cas  $\alpha < 1/2$ . Par la Proposition C.6, on a

$$\Psi(u) = u \frac{\Gamma\left(1 + \frac{u+1}{1-\alpha}\right) \Gamma\left(1 + \frac{u\alpha}{1-\alpha}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{(u+1)\alpha}{1-\alpha}\right) \Gamma\left(1 + \frac{u}{1-\alpha}\right)} = u \times \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{1-\alpha} + \frac{u}{1-\alpha}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{u}{1-\alpha}\right)} \times \frac{\Gamma\left(1 + \frac{u\alpha}{1-\alpha}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{u\alpha}{1-\alpha}\right)}.$$

Pour tous  $a, b \geq 0$ , on a le développement asymptotique suivant :

$$\frac{\Gamma(a+b+x)}{\Gamma(b+x)} \underset{u \rightarrow +\infty}{=} x^a \left(1 + \frac{a(a+2b-1)}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

donc

$$\Psi(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\alpha)} \left(u^2 + \frac{u}{2} + O(1)\right).$$

Supposons que  $\Psi \in \mathcal{C}_-$  : il existe  $a > 0$ ,  $b \geq 0$  et une mesure  $\mu$  sur  $(-\infty, 0)$  tels que

$$\Psi(u) = au + bu^2 + \int_{-\infty}^0 (e^{ux} - 1 - ux)\mu(dx).$$

Nous voyons que

$$a = \Psi'(0+) = \frac{\Gamma(1+1/(1-\alpha))}{\Gamma(1+\alpha/(1-\alpha))} = \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\alpha)}$$

(la valeur de  $b$  est une conséquence du développement asymptotique ci-dessus). Ainsi,

$$\frac{\Psi(u)}{u} - \frac{u}{\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\alpha)} - \frac{1}{1-\alpha} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{ux} - 1}{u} - x\right) \mu(dx). \quad (3.4)$$

Or, pour tout  $x < 0$ ,

$$u \mapsto \frac{e^{ux} - 1}{u} = - \int_x^0 e^{ut} dt$$

est une fonction croissante, donc le membre de droite de (3.4) est croissant en  $u$ . Nous en déduisons que

$$\frac{1}{2\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\alpha)} \geq \frac{1}{1-\alpha},$$

c'est-à-dire  $\alpha^{\alpha/(1-\alpha)} \leq 1/2$ . Cette inéquation est vérifiée si et seulement si  $\alpha \geq 1/2$ . On en conclut que  $\Psi \notin \mathcal{C}_-$  si  $\alpha < 1/2$ .

Passons au cas où  $\alpha = (p-1)/p$  pour un certain entier  $p \geq 2$  :

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= u \frac{\mathbb{E}\left(\mathbf{Z}_{\frac{p-1}{p}}^{-(p-1)(u+1)}\right)}{\mathbb{E}\left(\mathbf{Z}_{\frac{p-1}{p}}^{-(p-1)u}\right)} = u \frac{\Gamma(1+p+pu)\Gamma(1+(p-1)u)}{\Gamma(1+pu)\Gamma(p+(p-1)u)} \\ &= \frac{pu}{p-1} \underbrace{\frac{\prod_{k=1}^{p-1}(k+pu)}{\prod_{k=1}^{p-2}(k+(p-1)u)}}_{\varphi(u)}. \end{aligned}$$

Une décomposition en éléments simples nous donne l'existence de deux réels  $a$  et  $b$  tels que

$$\varphi(u) = \frac{\prod_{k=1}^{p-1}(k+pu)}{\prod_{k=1}^{p-2}(k+(p-1)u)} = a + bu + \sum_{k=1}^{p-2} \frac{c_k}{k+(p-1)u}$$

avec

$$c_k = \frac{\prod_{i=1}^{p-1} \left(i - \frac{kp}{p-1}\right)}{\prod_{i=1, i \neq k}^{p-2} (i-k)}.$$

On a  $i - \frac{kp}{p-1} = \frac{1}{p-1}(i(p-1) - kp)$  donc si  $i \leq k$ , alors  $\frac{1}{p-1}(i(p-1) - kp) < 0$ , et si  $i \geq k+1$ , alors  $\frac{1}{p-1}(i(p-1) - kp) > 0$ . Donc  $\text{sgn}(c_k) = (-1)^k / (-1)^{k-1} = -1$ . En posant  $u = 0$ , nous voyons que

$$a - \sum_{k=1}^{p-2} \frac{|c_k|}{k+(p-1)u} > 0,$$

et en faisant tendre  $u \rightarrow +\infty$ , nous voyons que  $b > 0$ . Ainsi, la fonction  $\varphi$  est une fonction de Bernstein complète. La suite est analogue à la fin de la démonstration de la Proposition 2.8.  $\square$



# Chapitre 4

## Divisibilité infinie des puissances négatives de la loi bêta

Ce chapitre complète le résultat du chapitre précédent concernant la divisibilité infinie de toutes les lois de Fréchet. Plus précisément nous avons vu que pour tout  $s \geq 0$  la loi de  $\Gamma_a^{-s}$  est infiniment divisible. Le cas  $s \geq 1$  était déjà connu et lorsque  $0 < s \leq 1$ , nous avons exprimé la loi de  $\Gamma_a^{-s}$  comme celle de la perpétuité d'un processus de Lévy spectralement négatif. De plus, cette technique fonctionne dans le cas  $0 < s \leq 1$  et uniquement dans celui-ci. Dans ce chapitre, la problématique est la même mais pour la loi bêta dont la densité est définie pour  $x \in (0, 1)$  par

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} = \frac{1}{\mathbf{B}(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}.$$

Les puissances positives de  $\mathbf{B}_{a,b}$  ne peuvent avoir une loi infiniment divisible car elles sont à support compact – voir le paragraphe 1.2.1. D'autre part, il est bien connu que la loi de  $-\log(\mathbf{B}_{a,b})$  est infiniment divisible avec une mesure de Lévy explicite – voir par exemple la remarque après le Corollaire C.5. Dans ce chapitre, nous allons montrer que toutes les puissances négatives de  $\mathbf{B}_{a,b}$  ont une loi infiniment divisible. Cela permettra de retrouver la divisibilité infinie de

$$-\log(\mathbf{B}_{a,b}) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s^{-1} (\mathbf{B}_{a,b}^{-s} - 1) \quad (4.1)$$

ainsi que des puissances négatives  $\Gamma_a^{-s}$  au vu de la convergence en loi

$$b^{-s} \mathbf{B}_{a,b}^{-s} \xrightarrow{d} \Gamma_a^{-s}, \quad b \rightarrow +\infty. \quad (4.2)$$

La divisibilité infinie de  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$  est équivalente à celle de  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s} - 1$  dont le support est  $\mathbb{R}_+$ . Dans le cas  $s = 1$ , cette dernière variable aléatoire est connue comme variable bêta de seconde espèce et sa divisibilité infinie apparaît dans une longue liste d'exemples de l'appendice B dans [52]. Le problème lorsque  $s \neq 1$  semble avoir échappé à toute résolution jusqu'alors. Ces variables aléatoires apparaissent comme facteurs multiplicatifs grâce à leurs moments de type gamma – voir par exemple [33]. Elles sont par exemple liées aux densités stables via les variables de Kanter – voir (2.4) et (7.1) dans [50]. Elles joueront un rôle clé dans la résolution de la conjecture de Bondesson à propos de la propriété HCM de celles-ci – voir le chapitre 6. Il a été conjecturé dans [35] Conjecture 3.2 que  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$  a une loi GGC lorsque  $s \geq 1$ . Il ne semble pas possible d'exprimer la transformée de Laplace de  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$

d'une manière assez explicite pour montrer que l'exposant est une fonction de Bernstein. Nous allons donc procéder via différentes méthodes qui donneront plus d'informations que la seule divisibilité infinie. La première utilise la notion de mélange de la loi exponentielle. Nous avons vu au paragraphe 1.2.2 qu'un tel mélange de loi est infiniment divisible.

**Théorème 4.1** *La densité de  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s} - 1$  est complètement monotone si et seulement si  $b \leq 1$ .*

La deuxième méthode employée consiste à montrer que la densité de  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s} - 1$  est HCM pour certains paramètres  $a, b, s$  (voir les figures 4.1 et 4.2) :

**Théorème 4.2** *La densité de  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s} - 1$  est HCM si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :*

- (1)  $b \wedge s > 1$  ;
- (2)  $b = 1$  ou  $s = 1$  ;
- (3)  $b < 1$ ,  $s \in [1/2, 1)$  et  $a + b + s \geq 1$ .

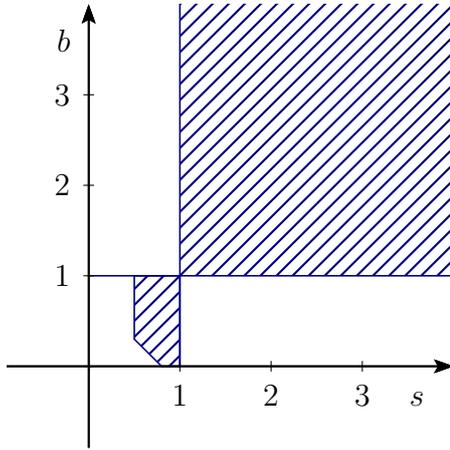


FIGURE 4.1 – Le cas  $a < 1/2$ .

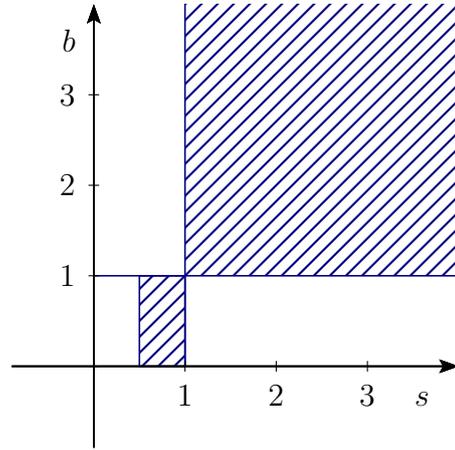


FIGURE 4.2 – Le cas  $a \geq 1/2$ .

Ainsi nous voyons que la loi de  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$  est infiniment divisible dès que  $b \leq 1$  ou  $s \geq 1$ . Afin de pouvoir traiter le cas  $b > 1$  et  $s < 1$ , nous allons, comme dans le chapitre 3, essayer d'exprimer la loi de  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$  comme celle de la perpétuité d'un processus de Lévy spectralement négatif. Rappelons que

$$\mathcal{E}_- = \mathcal{L} \left( \left\{ I(X) = \int_0^\infty e^{-X_s} ds, (X_s)_{s \geq 0} \text{ PLSN avec moyenne positive} \right\} \right)$$

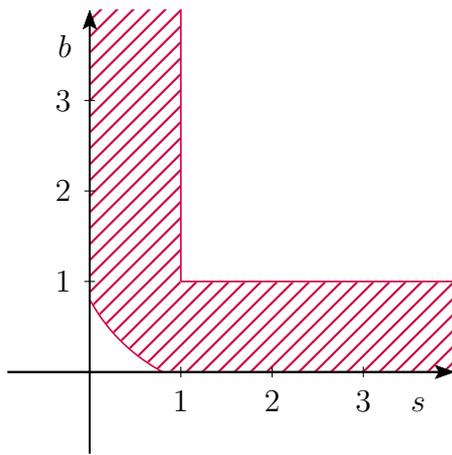
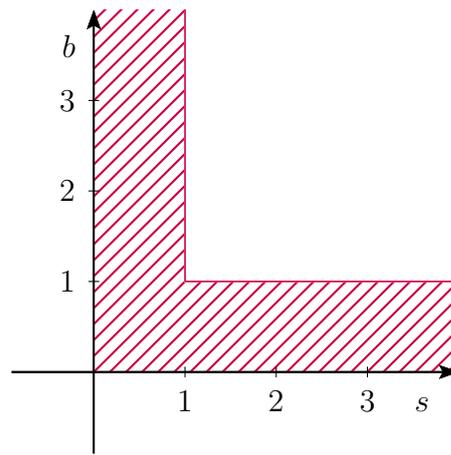
où PLSN signifie « processus de Lévy spectralement négatif », et que toutes les perpétuités de  $\mathcal{E}_-$  ont une loi auto-décomposable – voir la Proposition 2.4.

**Théorème 4.3**

$$\mathbf{B}_{a,b}^{-s} \sim \mathcal{E}_- \iff b \wedge s \leq 1 \leq 2a + b + bs + s.$$

Comme pour le Théorème 4.2, le domaine caractérisant l'appartenance à  $\mathcal{E}_-$  a une forme différente lorsque  $a < 1/2$  ou  $a \geq 1/2$  (voir les figures 4.3 et 4.4).

En combinant les trois théorèmes ci-dessus et après une petite analyse asymptotique qui sera faite dans la section suivante, nous pouvons énoncer le résultat principal de ce chapitre :

FIGURE 4.3 – Le cas  $a < 1/2$ .FIGURE 4.4 – Le cas  $a \geq 1/2$ .

**Corollaire 4.4**  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$  est infiniment divisible quels que soient  $a, b, s > 0$ . De plus,  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$  est auto-décomposable si et seulement si  $2a + b + bs + s \geq 1$ .

Remarquons qu'en combinant la formule (4.1) avec le corollaire nous retrouvons le fait que  $-\log(\mathbf{B}_{a,b})$  a une loi auto-décomposable lorsque  $2a + b \geq 1$ . On peut montrer, en utilisant la formule de Malmsten – plus précisément le Corollaire C.5 – et après des calculs pénibles, que cette dernière condition est également nécessaire – voir l'exemple VI.12.21 dans [52] ou le Corollaire 2 dans [55]. Enfin, nous verrons dans la section 4.2.1 qu'il arrive que  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$  ait une loi auto-décomposable qui ne soit pas GGC.

Lors du chapitre précédent, nous avons vu que  $\Gamma_a^{-s} \sim \text{SD}$  quels que soient  $a, s > 0$ . Nous améliorons ici cette propriété :

**Théorème 4.5**  $\Gamma_a^{-s} \sim \text{GGC}$  quels que soient  $a, s > 0$ .

La preuve de ce théorème est en fait une simple conséquence de la formule de Malmsten et du résultat principal de [16] qui établit que la classe des lois GGC est stable par le produit de variables indépendantes – voir le Théorème 1.26.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, donnons des éléments de démonstration des trois théorèmes précédents. Nous verrons deux preuves du Théorème 4.1, la première est une conséquence du Lemme C.1, la deuxième est plus compliquée mais instructive, elle utilise la formule de Malmsten et le critère de Steutel à propos des mélanges de la loi exponentielle – voir le Théorème A.23. La démonstration du Théorème 4.2 n'est pas aussi immédiate que celle pour  $\Gamma_a^{-s}$  lorsque  $|s| \geq 1$ . Elle repose sur le lien entre fonctions HCM et transformées de Laplace de lois GGC. Comme le Théorème 3.2, le Théorème 4.3 repose sur le Théorème 2.2, bien qu'il ne sera pas possible d'exprimer la mesure de Lévy aussi explicitement. Nous devons faire appel à quelques propriétés des séries hypergéométriques notamment de Klein [39] à propos de leurs zéros, et d'une propriété de log-convexité dus à Anderson, Vamanamurthy et Vuorinen [2].

## 4.1 Démonstrations des théorèmes principaux

### 4.1.1 Démonstrations du Théorème 4.1

Après un changement de variable et quelques simplifications, la densité de  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s} - 1$  définie sur  $(0, +\infty)$  peut se mettre sous la forme

$$f_{a,b,s}(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{s\Gamma(a)\Gamma(b)} (x+1)^{\frac{1-a-b}{s}-1} ((x+1)^{\frac{1}{s}} - 1)^{b-1}. \quad (4.3)$$

Nous calculons la dérivée logarithmique de  $f_{a,b,s}$  :

$$(\log f_{a,b,s})'(x) = \frac{1}{s(x+1)} \left( \frac{b-1}{(x+1)^{\frac{1}{s}} - 1} - a - s \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \begin{cases} (b-1)/x & \text{si } b \neq 1, \\ -(a+s)/s & \text{si } b = 1. \end{cases}$$

Ainsi  $f_{a,b,s}$  n'est pas log-convexe pour  $b > 1$  et le Lemme A.6 entraîne alors que  $f_{a,b,s}$  n'est pas complètement monotone. Ceci démontre la partie « seulement si ». Observons que si  $b \leq 1$ , alors la fonction  $(\log f_{a,b,s})'$  est croissante donc  $f_{a,b,s}$  est une densité log-convexe. En particulier  $f_{a,b,s}$  est la densité d'une loi infiniment divisible d'après le Théorème 1.23. En revanche, il n'est pas évident a priori de prouver directement que la fonction  $f_{a,b,s}$  est complètement monotone dans ce cas.

La stratégie consiste à prouver que la loi de  $-\log(\mathbf{B}_{a,b})$  est un mélange de la loi exponentielle. Notons  $h_{a,b}$  la densité de  $-\log(\mathbf{B}_{a,b})$ . La densité de  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s} - 1 = e^{-s \log(\mathbf{B}_{a,b})} - 1$  s'exprime en fonction de  $h_{a,b}$  de la manière suivante :

$$f_{a,b,s}(x) = \frac{1}{s(x+1)} \times h_{a,b} \left( \frac{\log(x+1)}{s} \right).$$

Donc par différents résultats de l'annexe A, nous voyons que

$$h_{a,b} \text{ complètement monotone} \implies \forall s > 0, f_{a,b,s} \text{ complètement monotone.}$$

La fonction  $h_{a,b}$  est complètement monotone si et seulement si sa transformée de Laplace  $\mathcal{L}h_{a,b}$  est une fonction de Stieltjes. On calcule

$$\mathcal{L}h_{a,b}(\lambda) = \mathbb{E}(\mathbf{B}_{a,b}^\lambda) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b)} \times \frac{\Gamma(\lambda+a)}{\Gamma(\lambda+a+b)}.$$

#### 1<sup>re</sup> méthode : avec le Lemme C.1

Nous savons par le Lemme C.1 que lorsque  $0 \leq b \leq 1$ , la fonction

$$\lambda \mapsto \frac{\Gamma(\lambda+b)}{\Gamma(\lambda)}$$

est une fonction de Bernstein complète, donc la fonction

$$\lambda \mapsto \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+b)}$$

est une fonction de Stieltjes comme inverse d'une fonction de Bernstein complète – voir le Théorème A.18. Donc  $\mathcal{L}h_{a,b}$  est une fonction de Stieltjes.

**2<sup>e</sup> méthode : avec la formule de Malmsten**

La formule de Malmsten permet d'écrire :

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b)} \times \frac{\Gamma(\lambda+a)}{\Gamma(\lambda+a+b)} = \exp\left(-\int_0^\infty (1-e^{-\lambda x}) \frac{e^{-ax} - e^{-(a+b)x}}{x(1-e^{-x})} dx\right). \quad (4.4)$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{e^{-ax} - e^{-(a+b)x}}{x(1-e^{-x})} &= \frac{e^{-ax}(1-e^{-bx})}{x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-(n+a)x} - e^{-(n+a+b)x}) \\ &= \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-xt} \sum_{n=0}^{\infty} (\delta_{n+a}(dt) - \delta_{n+a+b}(dt)) \\ &= \int_0^\infty e^{-xt} \#\{n \in \mathbb{N} / a+n \leq t < a+b+n\} dt \end{aligned} \quad (4.5)$$

où la dernière égalité est obtenue après une intégration par parties. En combinant les formules (4.4) et (4.5) on obtient

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b)} \times \frac{\Gamma(\lambda+a)}{\Gamma(\lambda+a+b)} = \exp\left(-\int_0^\infty \frac{\lambda}{t(\lambda+t)} \#\{n \in \mathbb{N} / a+n \leq t < a+b+n\} dt\right).$$

Par le Théorème A.23, nous voyons que la fonction  $\mathcal{L}h_{a,b}$  est une fonction de Stieltjes si et seulement si la fonction

$$t \mapsto \#\{n \in \mathbb{N} / a+n \leq t < a+b+n\}$$

est à valeurs dans  $[0, 1]$ . Il est évident que ceci est vrai si et seulement si  $b \leq 1$ .

**Remarque sur la démonstration**

La clé de cette démonstration est l'implication suivante :

$$X \sim \text{ME} \implies e^X - 1 \sim \text{ME}.$$

L'implication réciproque est fautive : soit  $\mathbf{L}$  une variable exponentielle de paramètre 1. Alors  $X = \log(\mathbf{L} + 1) \sim e^{1-e^x+x} dx$  et il est très facile de voir que  $X \not\sim \text{ME}$ , quand bien même  $\mathbf{L} = e^X - 1 \sim \text{ME}$ .

**4.1.2 Démonstration du Théorème 4.2**

Introduisons la fonction

$$g_{a,b,s} : x \mapsto \frac{s\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \left(\frac{s}{x}\right)^{b-1} f_{a,b,s}(x)$$

où  $f_{a,b,s}$  est la densité de la variable aléatoire  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s} - 1$  définie par (4.3). Nous avons

$$g_{a,b,s}(x) = \frac{1}{(x+1)^{(a+s)/s}} \times \left(\frac{s}{x}\right)^{b-1} \left(1 - \frac{1}{(x+1)^{1/s}}\right)^{b-1}. \quad (4.6)$$

On voit facilement que  $g_{a,b,s}(0+) = 1$ . Il s'ensuit par le Théorème 1.28 que  $f_{a,b,s}$  est HCM si et seulement si la fonction

$$G_{a,b,s} = -\log g_{a,b,s}$$

est une fonction de Thorin-Bernstein, autrement dit, par la Proposition A.22, si et seulement si  $G'_{a,b,s}$  est une fonction de Stieltjes. Un calcul à partir de (4.6) donne

$$\begin{aligned} G'_{a,b,s}(x) &= \frac{a+s}{s(x+1)} + (b-1) \left( \frac{1}{x} + \frac{s^{-1}(x+1)^{-1-1/s}}{1-(x+1)^{-1/s}} \right) \\ &= \frac{a+s}{s(x+1)} + (b-1) \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{s(x+1)((x+1)^{1/s}-1)} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Si  $b = 1$ ,

$$G'_{a,1,s}(x) = \frac{a+s}{s(x+1)} = \int_0^\infty \frac{1}{x+y} \frac{a+s}{s} \delta_1(dy)$$

donc  $G'_{a,1,s}$  est une fonction de Stieltjes. Et si  $s = 1$ ,

$$G'_{a,b,1}(x) = \frac{a+b}{x+1}$$

donc  $G'_{a,b,1}$  est aussi une fonction de Stieltjes. Ces deux cas peuvent également se vérifier en travaillant directement sur  $f_{a,b,s}$  puisque

$$f_{a,1,s}(x) = \frac{a}{s}(x+1)^{-1-a/s} \quad \text{et} \quad f_{a,b,1}(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{x^{b-1}}{(x+1)^{a+b}}.$$

Nous supposons désormais que  $b \neq 1$  et  $s \neq 1$ . De l'expression de  $G'_{a,b,s}$  obtenue en (4.7), nous déduisons que  $G'_{a,b,s}$  se prolonge méromorphiquement sur  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ . Puis, remarquons que si  $s < 1/2$ , alors  $G'_{a,b,s}$  a au moins deux pôles :  $e^{\pm i2\pi s} - 1$ .  $G'_{a,b,s}$  ne peut donc pas être une fonction de Stieltjes puisqu'une fonction de Stieltjes se prolonge toujours analytiquement à  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . Par contre, si  $s \geq 1/2$ , alors  $G'_{a,b,s}$  se prolonge analytiquement sur  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$  avec

$$G'_{a,b,s}(0) = \frac{a+s}{s} + \frac{(b-1)(s+1)}{2s}.$$

Nous allons regarder si  $G'_{a,b,s}$  vérifie le critère de Pick du Théorème A.9, c'est-à-dire vérifier si  $\forall x \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ ,

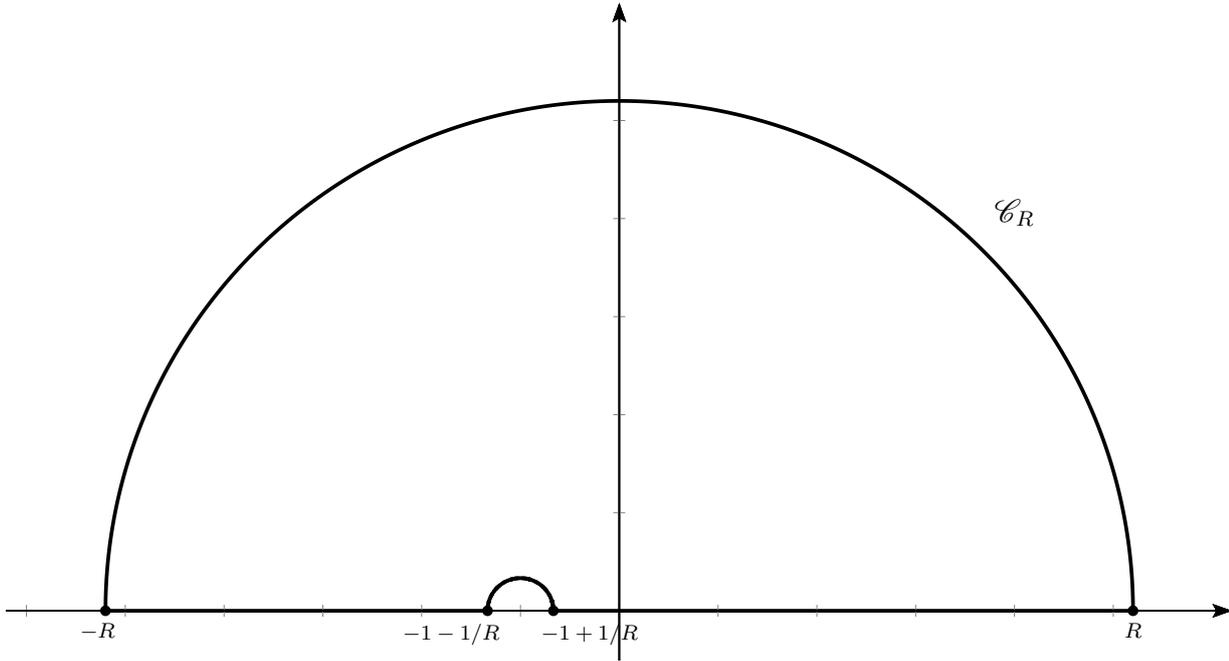
$$\operatorname{Im}(x) > 0 \implies \operatorname{Im}(G'_{a,b,s}(x)) \leq 0.$$

Pour  $x = re^{i\theta} - 1$  avec  $r > 0$  et  $\theta \in (0, \pi)$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(G'_{a,b,s}(x)) &= -\frac{(a+s)\sin(\theta)}{sr} \\ &\quad + (1-b) \left( \frac{r\sin(\theta)}{|re^{i\theta}-1|^2} + \frac{\sin(\theta)}{sr|r^{1/s}e^{i\theta/s}-1|^2} - \frac{\sin((1+1/s)\theta)}{sr^{1-1/s}|r^{1/s}e^{i\theta/s}-1|^2} \right). \end{aligned}$$

Faisons tendre  $r \rightarrow 0$  et  $\theta \rightarrow \theta_0 \in [0, \pi)$ , nous obtenons

$$\operatorname{Im}(G'_{a,b,s}(x)) = \frac{(1-(a+b+s))\sin(\theta)}{sr} + o(\sin(\theta)r^{-1}), \quad (4.8)$$

FIGURE 4.5 – Le contour  $\mathcal{C}_R$ 

ce qui montre la nécessité de la condition  $a + b + s \geq 1$ . Faisons tendre  $r \rightarrow 0$  et  $\theta \rightarrow \pi$ , nous obtenons

$$\operatorname{Im}(G'_{a,b,s}(x)) = \frac{(1-b)\sin(\pi/s)}{sr^{1-1/s}} + \frac{(1-(a+b+s))\sin(\theta)}{sr} + o(\sin(\theta)r^{-1}), \quad (4.9)$$

ce qui montre la nécessité de la condition  $(b-1)\sin(\pi/s) \geq 0$ . Tout ceci démontre la nécessité des conditions (1), (2) et (3) du Théorème 4.2.

Il reste à prouver que la fonction  $G'_{a,b,s}$  est une transformée de Stieltjes si (1) ou (3) est vérifiée (nous avons déjà démontré la suffisance de la condition (2)). Notons, pour un entier  $R \geq 2$ ,  $\mathcal{C}_R$  le contour défini par la figure 4.5 et  $\mathcal{D}_R$  le domaine délimité par la courbe  $\mathcal{C}_R$ . La fonction  $\operatorname{Im}(G'_{a,b,s})$  est une fonction harmonique comme partie imaginaire d'une fonction holomorphe. De plus, elle se prolonge continûment à  $\mathcal{D}_R$ . Supposons qu'il existe  $x_0 \in \{x \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(x) > 0\}$  tel que  $\operatorname{Im}(G_{a,b,s}(x_0)) > 0$ . Alors  $x_0 \in \mathcal{D}_R$  pour un  $R$  suffisamment grand. Par le principe du maximum, il existe  $x_R \in \mathcal{C}_R$  tel que

$$\operatorname{Im}(G'_{a,b,s}(x_R)) \geq \operatorname{Im}(G'_{a,b,s}(x_0)) > 0.$$

Comme  $G_{a,b,s}(x) \rightarrow 0$  lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ , un argument de compacité permet de supposer que  $x_R \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} x_\infty \in \mathbb{R}$ . Notons  $l = x_\infty + 1$ . Nécessairement  $l \leq 0$  puisque  $G'_{a,b,s}$  est réelle sur  $(-1, +\infty)$ . Si  $l < 0$ , un calcul montre que

$$\operatorname{Im}(G'_{a,b,s}(x_R)) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \frac{(1-b)\sin(\pi/s)(-l)^{-1+1/s}}{s|(-l)^{1/s}e^{i\pi/s} - 1|^2}.$$

Cette limite est négative si la condition (1) ou (3) est vérifiée. Ceci entraîne que  $l = 0$ . En écrivant  $x_R = \rho_R e^{i\theta_R} - 1$ ,  $\rho_R \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$  et une fois de plus, un argument de compacité

permet de supposer que  $\theta_R \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \theta_\infty \in [0, \pi]$ . Les estimations (4.8) et (4.9) que l'on avait obtenues pour la partie « seulement si » de la preuve contredisent alors l'hypothèse  $\text{Im}(G_{a,b,s}(x_0)) > 0$ .  $\square$

### 4.1.3 Démonstration du Théorème 4.3

Comme pour le Théorème 3.2, la démonstration repose sur le Théorème 2.2. On calcule les moments entiers négatifs de  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$  :

$$\mathbb{E} \left( (\mathbf{B}_{a,b}^{-s})^{-n} \right) = \mathbb{E} (\mathbf{B}_{a,b}^{sn}) = \frac{\Gamma(a+sn)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+sn)} = m \frac{\Psi(1) \times \cdots \times \Psi(n-1)}{(n-1)!}$$

avec

$$m = \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+s)}, \quad \Psi(u) = \frac{u\Gamma(a+s+su)\Gamma(a+b+su)}{\Gamma(a+b+s+su)\Gamma(a+su)}$$

et  $m = \Psi'(0+)$ . Ainsi, la loi de  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$  s'exprime comme celle d'un élément de  $\mathcal{E}_-$  si et seulement si la fonction  $\Psi$  est l'exposant de Laplace d'un processus de Lévy spectralement négatif avec moyenne positive. Sans perte de généralité, nous pouvons changer l'expression de la fonction  $\Psi$  en

$$\Psi(u) = u \times \frac{\Gamma(a+s+u)\Gamma(a+b+u)}{\Gamma(a+b+s+u)\Gamma(a+u)}. \quad (4.10)$$

Remarquons que cette expression est symétrique en  $b$  et  $s$ . En utilisant la formule sommatoire de Gauss (C.3), nous obtenons les deux transformations

$$\Psi(u) = u \times {}_2F_1(b, -s; a+b+u; 1) = u \times {}_2F_1(s, -b; a+s+u; 1),$$

où  ${}_2F_1(\lambda, \mu; \nu; \cdot)$  est une fonction hypergéométrique standard, c'est-à-dire la fonction analytique sur  $\{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$  définie par

$${}_2F_1(\lambda, \mu; \nu; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n (\mu)_n}{(\nu)_n n!} z^n$$

via le symbole de Pochhammer :  $(x)_0 = 1$  et  $(x)_n = x(x+1) \cdots (x+n-1)$  si  $n \geq 1$  (par exemple  $(1)_n = n!$ ) – voir la section C.5. Ces deux transformations entraînent que

$$\Psi(u) = u - bsu \sum_{n \geq 1} \frac{(1+b)_{n-1} (1-s)_{n-1}}{(a+b+u)_n n!} \quad (4.11)$$

$$= u - bsu \sum_{n \geq 1} \frac{(1+s)_{n-1} (1-b)_{n-1}}{(a+s+u)_n n!}. \quad (4.12)$$

Pour tout entier  $n \geq 0$ , une décomposition en éléments simples donne

$$\frac{n!}{(x)_{n+1}} = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{x+k},$$

ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{(n-1)!}{(a+b+u)_n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{(-1)^k}{a+b+k+u} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k \int_0^\infty e^{-(a+b+k+u)x} dx \\
&= \int_0^\infty e^{-(a+b+u)x} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k e^{-kx} \right) dx \\
&= \int_0^\infty e^{-(a+b+u)x} (1 - e^{-x})^{n-1} dx.
\end{aligned}$$

En combinant avec (4.11) et en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
\Psi(u) &= u - bsu \sum_{n \geq 1} \left( \frac{(1+b)_{n-1} (1-s)_{n-1}}{n!(n-1)!} \int_0^\infty e^{-(a+b+u)x} (1 - e^{-x})^{n-1} dx \right) \\
&= u - bsu \int_0^\infty e^{-(a+b+u)x} \left( \sum_{n \geq 1} \frac{(1+b)_{n-1} (1-s)_{n-1}}{n!(n-1)!} (1 - e^{-x})^{n-1} \right) dx \\
&= u - u \int_0^\infty e^{-ux} \rho_{a,b,s}(x) dx
\end{aligned}$$

où  $\rho_{a,b,s}$  désigne la fonction définie par

$$\rho_{a,b,s}(x) = bse^{-(a+b)x} {}_2F_1(1+b, 1-s; 2; 1 - e^{-x}).$$

L'utilisation du théorème de Fubini-Tonelli est justifiée bien que tous les termes ne soient pas tous de même signe, car ils sont positifs dès que  $n > s$ . De la même façon, nous tirons de l'équation (4.12), l'égalité

$$\Psi(u) = u - u \int_0^\infty e^{-ux} \rho_{a,s,b}(x) dx$$

qui nous permet de constater que  $\rho_{a,b,s} = \rho_{a,s,b}$ , par injectivité de la transformée de Laplace. Cette dernière égalité, en accord avec la symétrie initiale en  $b$  et  $s$  de notre problème, peut aussi être obtenue par une formule de Kummer sur les fonctions hypergéométriques – voir la formule (C.4). En effet,

$${}_2F_1(\lambda, \mu; \nu; z) = (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; z)$$

donc

$$\begin{aligned}
\rho_{a,b,s}(x) &= bse^{-(a+b)x} {}_2F_1(1+b, 1-s; 2; 1 - e^{-x}) \\
&= bse^{-(a+b)x} e^{(b-s)x} {}_2F_1(1-b, 1+s; 2; 1 - e^{-x}) = \rho_{a,s,b}(x).
\end{aligned}$$

Désormais, nous pouvons donc supposer sans perte de généralité que  $s \geq b$ . Si  $s > b$ , il vient une nouvelle fois par la formule sommatoire de Gauss que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} {}_2F_1(1+b, 1-s; 2; 1 - e^{-x}) = \frac{\Gamma(s-b)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1-b)}$$

où il faut lire  $1/\infty = 0$  lorsque  $b$  est un entier  $\geq 1$ . De plus, cette formule s'étend par continuité au cas où  $s = b \in \mathbb{N}$ , la limite étant alors

$$\frac{(-1)^b}{b}.$$

Enfin si  $s = b \notin \mathbb{N}$ , la formule asymptotique (2) page 74 dans [27] donne

$${}_2F_1(1+b, 1-b; 2; 1-e^{-x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\Gamma(1+b)\Gamma(1-b)}.$$

Dans tous les cas, nous en déduisons que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \rho_{a,b,s}(x) = 0$ .  $\rho_{a,b,s}$  étant évidemment une fonction  $C^\infty$ , une intégration par parties entraîne que  $\forall u \geq 0$ ,

$$\Psi(u) = u + \int_0^\infty (1 - e^{-ux}) \rho'_{a,b,s}(x) dx = u - \int_{-\infty}^0 (e^{ux} - 1) \rho'_{a,b,s}(-x) dx.$$

Il est maintenant clair que  $\Psi$  est l'exposant de Laplace d'un processus de Lévy spectralement négatif si et seulement si  $\rho'_{a,b,s}$  est une fonction négative sur  $\mathbb{R}_+$ .

Nous allons dans un premier temps prouver la nécessité de la condition annoncée dans le théorème. Nous commençons par calculer  $\rho'_{a,b,s}(0)$  :

$$\rho_{a,b,s}(x) = bse^{-(a+b)x} \sum_{n \geq 1} \frac{(1+b)_{n-1} (1-s)_{n-1}}{n!(n-1)!} (1-e^{-x})^{n-1}$$

donc

$$\rho'_{a,b,s}(0) = -bs(a+b) + bs \frac{(1+b)(1-s)}{2} = -\frac{bs}{2}(2a+b+bs+s-1).$$

Ainsi la condition  $2a+b+bs+s \geq 1$  est une condition nécessaire.

Voici deux théorèmes qui vont nous permettre de caractériser le signe de  $\rho'_{a,b,s}$ . Le premier est tiré de (18) page 587 dans [39] – voir également la section 7 dans [54]. Le second théorème est le point (2) du Théorème 1.3 dans [2].

**Théorème 4.6** (Klein) *Supposons que  $1 - \nu < 0$ . Le nombre de zéros de la fonction hypergéométrique  $x \mapsto {}_2F_1(\lambda, \mu; \nu; x)$  sur  $(0, 1)$  (ou sur  $(0, 1]$  si  ${}_2F_1(\lambda, \mu; \nu; \cdot)$  se prolonge par continuité en 1) est égal à*

$$\left\lfloor \frac{|\lambda - \mu| - |\nu - 1| - |\nu - \lambda - \mu| + 1}{2} \right\rfloor$$

avec  $\lfloor \cdot \rfloor$  la partie entière (par défaut) et  $\lfloor x \rfloor = 0$  pour  $x \leq 0$ .

**Théorème 4.7** (Anderson, Vanamamurthy et Vuorinen) *Supposons que  $\lambda, \mu, \nu > 0$  et que  $(\nu - \lambda)(\nu - \mu) > 0$ . Alors la fonction  $x \mapsto {}_2F_1(\lambda, \mu; \nu; 1 - e^{-x})$  est log-concave.*

La discussion ci-dessus et le théorème de Klein entraînent que la fonction

$$x \mapsto {}_2F_1(1+b, 1-s; 2; 1-e^{-x})$$

s'annule au moins  $\lceil b \rceil - 1$  fois (si  $s \notin \mathbb{N}$  et  $b \in \mathbb{N}^*$ ,  ${}_2F_1(1+b, 1-s; 2; 1) = 0$ ) – ici,  $\lceil \cdot \rceil$  désigne la partie entière par excès. Comme  $\rho_{a,b,s}(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , nous voyons que si  $b \wedge s = b > 1$ , alors la fonction  $\rho'_{a,b,s}$  prend des valeurs positives. Ceci achève donc la démonstration de la partie « seulement si ».

Nous supposons désormais que  $b \leq 1 \leq 2a + b + bs + s$  (on rappelle que les rôles de  $b$  et  $s$  sont symétriques dans notre étude et que l'on a supposé que  $b \wedge s = b$ ). Si  $b = 1$ , alors  $\forall x > 0$ ,  ${}_2F_1(1 + s, 0; 2; 1 - e^{-x}) = 1$  et la fonction  $\rho_{a,1,s}$  est ainsi définie par

$$\rho_{a,1,s}(x) = se^{-(a+b)x}.$$

On en déduit que  $\rho'_{a,1,s} \leq 0$ .

Lorsque  $b, s < 1$ , nous avons  $(s+1)(1-b) > 0$  et  $1-s > 0$ , nous pouvons donc appliquer le Théorème 4.7 et en déduire que la fonction  $\rho_{a,b,s}$  est log-concave. En particulier,  $\rho_{a,b,s}$  est décroissante car, par hypothèse  $\rho'_{a,b,s}(0) \leq 0$ . Enfin, si  $b < 1 \leq s$ , il suffit de montrer que la fonction

$$\kappa_{a,b,s} : z \mapsto {}_2F_1(1 + b, 1 - s; 2; z)$$

est décroissante sur  $(0, 1)$ . Si  $s = 1$ , la fonction  $\kappa_{a,b,1}$  est constante égale à 1. Et si  $s > 1$ , sa dérivée est définie par

$$\kappa'_{a,b,1}(z) = \frac{(1+b)(1-s)}{2} {}_2F_1(2 + b, 2 - s; 3; z).$$

En appliquant une nouvelle fois le Théorème 4.6, nous voyons que la fonction

$$z \mapsto {}_2F_1(2 + b, 2 - s; 3; z)$$

ne s'annule pas sur  $(0, 1)$ . Et comme

$$\frac{(1+b)(1-s)}{2} {}_2F_1(2 + b, 2 - s; 3; 0) = \frac{(1+b)(1-s)}{2} < 0,$$

on déduit que  $\kappa'_{a,b,1} \leq 0$ . □

#### 4.1.4 Démonstration du Corollaire 4.4

Les Théorèmes 4.1, 4.2 et 4.3 permettent de démontrer que  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$  a une loi infiniment divisible quelles que soient les valeurs de  $a, b, s > 0$ . En effet, on peut par exemple utiliser le Théorème 4.1 lorsque  $b \leq 1$ , puis le Théorème 4.3 si  $b > 1$  et  $s \leq 1$  (la condition  $2a + b + bs + s \geq 1$  est automatiquement vérifiée). Enfin, on peut appliquer le Théorème 4.2 si  $b > 1$  et  $s > 1$ .

De plus, en combinant les Théorèmes 4.2 et 4.3 nous voyons que la loi est auto-décomposable si  $2a + b + bs + s \geq 1$ . Il reste donc à prouver que la loi n'est pas auto-décomposable lorsque  $2a + b + bs + s < 1$ . Supposons le contraire, il existe alors une fonction décroissante  $k_{a,b,s}$  telle que

$$\Phi(\lambda) = \mathbb{E} \left( e^{-\lambda(\mathbf{B}_{a,b}^{-s}-1)} \right) = \exp \left( - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \frac{k_{a,b,s}(x)}{x} dx \right).$$

Nous réutilisons les notations de la section 4.1.2 – voir (4.6) : soit  $g_{a,b,s}$  la fonction définie par

$$g_{a,b,s}(x) = \frac{s\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \left(\frac{x}{s}\right)^{1-b} f_{a,b,s}(x) = \frac{1}{(x+1)^{1+a/s}} \left(\frac{s}{x} - \frac{s}{x(x+1)^{1/s}}\right)^{b-1}$$

où  $f_{a,b,s}$  désigne la densité de  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s} - 1$ . Nous avons vu que  $g_{a,b,s}(0+) = 1$ . Plus précisément

$$\begin{aligned} g_{a,b,s}(x) &= \left[ 1 - \left( 1 + \frac{a}{s} \right) x + o(x) \right] \times \left[ \frac{s}{x} - \frac{s}{x} \left( 1 - \frac{x}{s} + \frac{(1+s)x^2}{2s^2} + o(x^2) \right) \right]^{b-1} \\ &= \left[ 1 - \frac{(s+a)x}{s} + o(x) \right] \times \left[ 1 - \frac{(b-1)(1+s)x}{2s} + o(x) \right] \\ &= 1 - c_{a,b,s} x + o(x) \end{aligned}$$

lorsque  $x \rightarrow 0+$  avec  $c_{a,b,s} = (2a + b + bs + s - 1)/2s$ . Donc  $\forall \alpha > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda x} x^\alpha g_{a,b,s}(x) dx &= \frac{1}{\lambda^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha g_{a,b,s}(x/\lambda) dx \\ &= \frac{1}{\lambda^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha dx - \frac{1}{\lambda^{\alpha+2}} \int_0^\infty e^{-x} (c_{a,b,s} + \varepsilon(x/\lambda)) x^{\alpha+1} dx \end{aligned}$$

pour une certaine fonction  $x \mapsto \varepsilon(x)$  qui tend vers 0 lorsque  $x \rightarrow 0+$ . En utilisant le théorème de convergence dominée (la fonction  $\varepsilon$  est explicite), nous obtenons

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^\alpha g_{a,b,s}(x) dx = \frac{1}{\lambda^{\alpha+1}} \left( \Gamma(\alpha + 1) - \frac{c_{a,b,s} \Gamma(\alpha + 2)}{\lambda} + o(\lambda^{-1}) \right).$$

Alors, d'une part

$$\begin{aligned} -\frac{\Phi'(\lambda)}{\Phi(\lambda)} &= \frac{\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^b g_{a,b,s}(x) dx}{\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{b-1} g_{a,b,s}(x) dx} = \frac{b}{\lambda} \times \frac{1 - \frac{c_{a,b,s}(b+1)}{\lambda} + o(\lambda^{-1})}{1 - \frac{c_{a,b,s}b}{\lambda} + o(\lambda^{-1})} \\ &= \frac{b}{\lambda} \left( 1 - \frac{c_{a,b,s}}{\lambda} + o(\lambda^{-1}) \right) \end{aligned}$$

lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$ . D'autre part,

$$-\frac{\Phi'(\lambda)}{\Phi(\lambda)} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} k_{a,b,s}(x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-x} k_{a,b,s}(x/\lambda) dx$$

donc

$$\int_0^\infty e^{-x} k_{a,b,s}(x/\lambda) dx = b \left( 1 - \frac{c_{a,b,s}}{\lambda} + o(\lambda^{-1}) \right).$$

Par le théorème de convergence monotone (rappelons que  $k_{a,b,s}$  est supposée décroissante), nous voyons que  $k(0+) = b < +\infty$ . Puis, en écrivant

$$\int_0^\infty x e^{-x} (b - k_{a,b,s}(x/\lambda)) \frac{\lambda}{x} dx = bc_{a,b,s} + o(1) \quad \text{lorsque } \lambda \rightarrow +\infty,$$

nous voyons que si la fonction  $k_{a,b,s}$  est décroissante alors le terme de gauche est positif quelle que soit la valeur de  $\lambda > 0$ . La fonction  $k_{a,b,s}$  est donc une fonction décroissante seulement si  $c_{a,b,s} \geq 0$ , c'est-à-dire, seulement si  $2a + b + bs + s \geq 1$ .  $\square$

### 4.1.5 Démonstration du Théorème 4.5

Puisque l'ensemble des mesures de probabilités GGC est stable pour la convergence en loi, il suffit, au vu de la formule (4.2), de montrer que pour tout  $a > 0$  et pour tout  $b$  dans un ensemble non borné, la loi de  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$  est GGC. Nous allons voir que cette loi est GGC lorsque que  $b$  est entier. Plus précisément, nous allons montrer une fois de plus à l'aide de la formule de Malmsten que  $-\log(\mathbf{B}_{a,b}) \sim \text{GGC}$  si et seulement si  $b$  est un entier. D'après le Corollaire C.5 on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( e^{-\lambda(-\log(\mathbf{B}_{a,b}))} \right) &= \mathbb{E} (\mathbf{B}_{a,b}^\lambda) = \frac{\Gamma(a+\lambda)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+\lambda)} \\ &= \exp \left( - \int_0^\infty (1-e^{-\lambda x}) \frac{e^{-ax} - e^{-(a+b)x}}{x(1-e^{-x})} dx \right). \end{aligned}$$

Ainsi  $-\log(\mathbf{B}_{a,b}) \sim \text{GGC}$  si et seulement si la fonction

$$x \mapsto \frac{e^{-ax} - e^{-(a+b)x}}{1 - e^{-x}}$$

est complètement monotone. On peut écrire

$$\frac{e^{-ax} - e^{-(a+b)x}}{1 - e^{-x}} = e^{-ax}(1 - e^{-bx}) \sum_{n \geq 0} e^{-nx} = \int_0^\infty e^{-xt} \mu_{a,b}(dt)$$

avec  $\mu_{a,b} = \sum_{n \geq 0} (\delta_{a+n} - \delta_{a+b+n})$ . On voit facilement que  $\mu_{a,b}$  est une mesure positive si et seulement si  $b$  est un entier. La démonstration s'achève en appliquant le Théorème 1.26 (plus précisément son corollaire).  $\square$

## 4.2 Remarques et compléments

### 4.2.1 À propos de la propriété GGC de $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$

#### 4.2.1.1 Masse de Thorin et complète monotonie

**Théorème 4.8** (Section 4.1 [15]) *Soit  $f$  une densité GGC ayant 0 pour extrémité (i.e.  $a = 0$  dans (1.12)) et soit  $\nu$  sa mesure de Thorin. On a,*

$$\int_{(0,+\infty)} \nu(dy) = \sup \left\{ \alpha > 0 : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^{\alpha-1}} = 0 \right\}.$$

*Supposons que  $\int_{(0,+\infty)} \nu(dy) = \beta < +\infty$ , alors  $f \sim \text{M}\Gamma_\beta$ , c'est-à-dire, il existe une fonction complètement monotone  $g$  telle que  $\forall x > 0$ ,  $f(x) = x^{\beta-1}g(x)$ .*

Par exemple, soit  $\Gamma_a \sim \Gamma(a)^{-1}x^{a-1}e^{-x}dx$  une variable gamma de paramètre  $a$ . Le théorème entraîne donc que la masse de Thorin est égale à  $a$ . Observons que l'on peut calculer la masse de Thorin directement en calculant la transformée de Laplace

$$\mathbb{E} (e^{-\lambda\Gamma_a}) = \frac{1}{(1+\lambda)^a} = \exp \left( -a \int_0^\infty \log \left( 1 + \frac{\lambda}{y} \right) \delta_1(dy) \right),$$

donc  $\Gamma_a$  a bien pour masse de Thorin  $a$ . De plus, on a bien sûr  $\Gamma_a \sim \text{M}\Gamma_a$ .

### 4.2.1.2 À propos de la propriété GGC de $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$

Contrairement aux puissances négatives d'une variable gamma, certaines puissances négatives d'une variable bêta ont une loi qui n'est pas auto-décomposable, en particulier qui n'est pas GGC. Il existe également des paramètres  $a, b, s$  tels que la loi de  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$  est auto-décomposable mais n'est pas GGC. En effet, puisque  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s} \geq 1$ ,  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s} \sim \text{GGC} \Leftrightarrow \mathbf{B}_{a,b}^{-s} - 1 \sim \text{GGC}$ . Supposons que  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s} \sim \text{GGC}$ . La densité  $f_{a,b,s}$  de  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s} - 1$  est équivalente au voisinage de 0 à

$$f_{a,b,s}(x) \underset{x \rightarrow 0+}{\sim} \frac{\Gamma(a+b)}{s\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(\frac{x}{s}\right)^{b-1}.$$

Donc par le Théorème 4.8, ou par la démonstration du Corollaire 4.4, la masse de Thorin vaut  $b$ . La fonction  $g_{a,b,s}$  définie par (4.6) est alors complètement monotone. En particulier, la fonction  $\log(g_{a,b,s})$  est log-convexe d'après le Lemme A.6. Ce qui revient à dire que la fonction  $G_{a,b,s} = -\log(g_{a,b,s})$  est concave. Un développement limité au voisinage de  $0+$  à partir de l'expression (4.7) de  $G'_{a,b,s}$  donne :

$$\begin{aligned} G'_{a,b,s}(x) &= \frac{a+s}{s(x+1)} + (b-1) \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{s(x+1)((x+1)^{1/s} - 1)} \right) \\ &= \frac{a+s}{s(x+1)} + \frac{b-1}{x} \left( 1 - \frac{1}{1 + (1+1/s)x/2 + (-1+1/s)(1+1/s)x^2/6 + o(x^2)} \right) \\ &= C_1 + C_2 x + o(x) \end{aligned}$$

avec

$$C_1 = \frac{b}{2} \left( \frac{1}{s} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1-2a}{s} - 1 \right) \quad \text{et} \quad C_2 = - \left( 1 + \frac{a}{s} + \frac{b-1}{12} \left( 1 + \frac{1}{s} \right) \left( \frac{1}{s} + 5 \right) \right).$$

Le coefficient  $C_2$  est négatif dès que  $b \vee s \geq 1$  est supérieur à 1. Mais pour tout  $a > 0$ , il existe des valeurs de  $b$  et  $s$  telles que  $C_2 > 0$ . Dans ce cas, la fonction  $G'_{a,b,s}$  est croissante dans un voisinage de  $0+$  et  $g_{a,b,s}$  ne peut donc pas être log-convexe. Remarquons que ces valeurs peuvent être telles que  $2a + b + bs + s \geq 1$ . En effet, si  $a \geq 1/2$ , il suffit de choisir  $b \in (0, 1)$  et de faire tendre  $s \rightarrow 0+$ . Si  $a \in (0, 1/2)$ , posons  $b = 1 - 2a$ , alors  $b \in (0, 1)$  et la condition  $2a + b + bs + s \geq 1$  est automatiquement vérifiée quelle que soit la valeur de  $s > 0$ . Alors, en faisant tendre  $s \rightarrow 0+$ ,  $C_2 \rightarrow +\infty$ .

Pour  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$ , nous avons réussi à caractériser : la divisibilité infinie, la complète monotonie et le caractère HCM de la densité, le fait d'être distribué comme la perpétuité d'un processus de Lévy spectralement négatif, et l'auto-décomposabilité. Cependant, il ne semble pas aisé de caractériser la propriété GGC de  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$ .

### 4.2.2 À propos du processus de Lévy associé à $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$

Sous les hypothèses du Théorème 4.3,  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$  a la loi de la perpétuité d'un certain processus de Poisson composé avec dérive unitaire et sauts négatifs. Plus précisément,

$$\mathbf{B}_{a,b}^{-s} \stackrel{d}{=} \int_0^\infty e^{-(t-N_t^{a,b,s})} dt \quad (4.13)$$

où  $(N_t^{a,b,s})_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson sans dérive ayant pour mesure de Lévy

$$\nu_{a,b,s}(dx) = -s^{-2} \rho'_{a,b,s}(x/s) dx$$

sur  $\mathbb{R}_+^*$ . En effet, en réutilisant la notation de la section 4.1.3, l'exposant de Laplace du processus de Lévy est la fonction définie pour  $u \geq 0$  par

$$\begin{aligned} \frac{\Psi(su)}{s} &= u + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^0 (e^{sux} - 1)(-\rho'_{a,b,s}(-x))dx \\ &= u + \int_{-\infty}^0 (e^{ux} - 1) \frac{-\rho'_{a,b,s}(-x/s)}{s^2} dx. \end{aligned}$$

De plus la mesure  $\nu_{a,b,s}$  est une mesure finie car

$$\nu_{a,b,s}(\mathbb{R}_+^*) = -\frac{1}{s^2} \int_0^\infty \rho'_{a,b,s}(x/s)dx = \frac{\rho_{a,b,s}(0+) - \rho_{a,b,s}(+\infty)}{s} = b.$$

Si  $s = 1$ , nous avons

$$\nu_{a,b,1}(dx) = b(a+b)e^{-(a+b)x}dx$$

qui est une petite extension de l'exemple 4 page 36 dans [9]. Lorsque  $b = 1$ , nous avons

$$\nu_{a,1,s}(dx) = (1+a/s)e^{-(1+a/s)x}dx,$$

ce qui permet, en posant  $a = 1$ , de voir que  $\mathbf{B}_{1,1}^{-s} \stackrel{d}{=} U^{-s}$  ( $U \sim \text{Unif}[0,1]$ ) a la loi de la perpétuité d'un processus de Poisson composé spectralement négatif avec dérive unitaire. Notons que  $\nu_{a,1,s}$  est toujours une mesure de probabilité alors que  $\nu_{a,b,1}$  en est une uniquement lorsque  $b = 1$ .

Lorsque  $b$  ou  $s$  est un entier, la série hypergéométrique définissant  $\rho_{a,b,s}$  est un polynôme de Jacobi et la mesure de Lévy  $\nu_{a,b,s}$  prend une forme plus simple. Pour tout  $n \geq 2$ , quelques calculs utilisant la formule 10.8 (16) dans [27] montrent que la densité de  $\nu_{a,n,s}$  est définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{a+k}{s}\right) c_{k,n,s} e^{-(1+(a+k)/s)x}$$

avec

$$c_{k,n,s} = \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^{n-1} \left(1 - \frac{s}{p-k}\right).$$

En regardant le nombre de racines du polynôme de Jacobi, il est également possible de montrer que cette densité est bien positive si et seulement si  $s \leq 1$ . De manière analogue, la densité de  $\nu_{a,b,n}$  est définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$\sum_{k=0}^{n-1} bn^{-2}(a+b+k) c_{k,n,b} e^{-(a+b+k)x/n}.$$

Ces deux exemples expriment la loi de la perpétuité d'un processus de Poisson composé avec dérive unitaire et mesure de Lévy hyper-exponentielle sur  $\mathbb{R}_-$ .

Un changement de variable dans (4.13) donne pour tous  $b \geq 1$  et  $s \leq 1$  :

$$b^{-s} \mathbf{B}_{a,b}^{-s} \stackrel{d}{=} \int_0^\infty e^{-(b^s t - N_{b^s t}^{a,b,s})} dt$$

qui est la perpétuité d'un processus de Lévy spectralement négatif ayant pour exposant de Laplace

$$\Psi_{a,b,s}(u) = b^s u \left(1 - s^{-1} \int_0^\infty e^{-ux} \rho_{a,b,s}(s^{-1}x) dx\right), \quad u \geq 0.$$

Si  $s = 1$  et  $b \rightarrow +\infty$  nous obtenons  $\Psi_{a,b,1}(u) \rightarrow u(a+u)$ . En combinant ceci avec la convergence en loi (4.2), nous retrouvons le résultat de Dufresne [26]. Si  $s < 1$  et  $b \rightarrow +\infty$ , nous pouvons retrouver le processus de Lévy à variation infinie correspondant à  $\mathbf{\Gamma}_a^{-s}$  – voir le chapitre 3. En effet,

$$\Psi_{a,b,s}(u) = b^s \left(1 - \int_0^\infty \rho_{a,b,s}(x) dx\right) u + s^{-1} u \int_0^\infty (1 - e^{-ux}) b^s \rho_{a,b,s}(s^{-1}x) dx,$$

d'une part la formule 2.3.2 (14) page 77 dans [27] entraîne que

$$s^{-1} u \int_0^\infty (1 - e^{-ux}) b^s \rho_{a,b,s}(s^{-1}x) dx \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} \frac{u}{\Gamma(1-s)} \int_0^\infty (1 - e^{-ux}) \frac{e^{-(1+a/s)x}}{(1 - e^{-x/s})^{1+s}} dx$$

qui après une intégration par parties se transforme en

$$\int_{-\infty}^0 (e^{ux} - 1 - ux) \frac{e^{1+a/s}(s + e^{x/s} + a(1 - e^{x/s}))}{s\Gamma(1-s)(1 - e^{x/s})^{2+s}} dx.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} b^s \left(1 - \int_0^\infty \rho_{a,b,s}(x) dx\right) &= b^s \left(1 - bs \int_0^1 (1-z)^{a+b-1} {}_2F_1(1+b, 1-s; 2; z) dz\right) \\ &= (a+b-1)b^s \int_0^1 (1-z)^{a+b-2} {}_2F_1(b, -s; 1; z) dz \\ &= (a+b-1)b^s \int_0^1 (1-z)^{a+s-1} {}_2F_1(1+s, 1-b; 1; z) dz \quad (*) \\ &= \frac{(a+b-1)b^s}{a+s} {}_2F_1(1+s, 1-b; a+s+1; 1) \quad (**) \\ &= \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(a+b)b^s}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+s)}, \end{aligned}$$

où l'égalité (\*) provient de la formule 2.9 (2) page 105 et (\*\*) de 2.4 (2) page 78 dans [27]. La dernière égalité est issue de la formule sommatoire de Gauss. Cette dernière égalité peut également être démontrée à partir de la preuve du Théorème 4.3 dans la section 4.1.3. Ainsi, nous voyons que

$$\Psi_{a,b,s}(u) \rightarrow \left(\frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(a)}\right) u + \int_{-\infty}^0 (e^{ux} - 1 - ux) \frac{e^{(1+a/s)x}(s + e^{x/s} + a(1 - e^{x/s}))}{s\Gamma(1-s)(1 - e^{x/s})^{2+s}} dx,$$

la partie droite est précisément l'exposant de Laplace apparaissant dans la démonstration du Théorème 3.2.

Lorsque les conditions du Théorème 4.3 ne sont pas remplies, c'est-à-dire lorsque  $\rho'_{a,b,s}$  prend des valeurs positives, la fonction  $u \mapsto \Psi(iu)$  (où  $\Psi$  est définie par (4.10)) n'est plus l'exposant de Lévy-Khintchine d'un processus de Lévy. Par le Théorème 2.2, cela montre que  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$  n'est plus distribué comme la perpétuité d'un processus de Lévy avec ou sans sauts positifs et/ou négatifs avec des moments exponentiels finis. Nous pensons que  $\mathbf{B}_{a,b}^{-s}$  n'est plus la perpétuité d'aucun processus de Lévy. Par ailleurs, rappelons qu'il arrive que la perpétuité d'un processus de Lévy avec sauts positifs soit infiniment divisible. Par exemple nous avons vu dans le paragraphe 2.2.3.1 que pour tous  $a > 0$  et  $b > 1$ ,

$$\mathbf{B}_{a,b}^{-1} \stackrel{d}{=} 1 + \int_0^\infty e^{-(M_t^{a,b}-t)} dt$$

où  $(M_t^{a,b})_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson composé sans dérive ayant pour mesure de Lévy  $(a+b-1)(b-1)e^{-(b-1)x}dx$  sur  $\mathbb{R}_+$  ( $M^{a,b} = N^{a+b-1, b-1}$  avec les notations du paragraphe 2.2.3.1).

### 4.2.3 Autres remarques

La démonstration du Théorème 4.3 montre que pour tous  $a, b, s > 0$ , la fonction

$$\begin{aligned} \lambda \mapsto \frac{\Gamma(a+b+\lambda)\Gamma(a+s+\lambda)}{\Gamma(a+\lambda)\Gamma(a+b+s+\lambda)} &= \left(1 - \int_0^\infty \rho_{a,b,s}(x)dx\right) + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x})\rho_{a,b,s}(x)dx \\ &= \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+s)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+s)} + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x})\rho_{a,b,s}(x)dx \end{aligned}$$

est une fonction de Bernstein sans partie linéaire et avec coefficient de meurtre  $> 0$  si et seulement si la fonction  $\rho_{a,b,s}$  est une fonction positive. Or, une nouvelle application du Théorème 4.6 montre que c'est le cas si et seulement si  $b \wedge s \leq 1$ . Ainsi la fonction

$$\lambda \mapsto \frac{\Gamma(a+\lambda)\Gamma(a+b+s+\lambda)}{\Gamma(a+b+\lambda)\Gamma(a+s+\lambda)}$$

est une fonction complètement monotone comme inverse d'une fonction de Bernstein (si  $b \wedge s \leq 1$ ). D'après la formule sommatoire de Gauss (C.3), on a  $\forall \lambda > 0$ ,

$$\frac{\Gamma(a+\lambda)\Gamma(a+b+s+\lambda)}{\Gamma(a+b+\lambda)\Gamma(a+s+\lambda)} = {}_2F_1(b, s; a+b+s+\lambda; 1) = \sum_{n \geq 0} \frac{(b)_n (s)_n}{(a+b+s+\lambda)_n n!},$$

donc

$$\lambda \mapsto \frac{\Gamma(a+\lambda)\Gamma(a+b+s+\lambda)}{\Gamma(a+b+\lambda)\Gamma(a+s+\lambda)}$$

est complètement monotone quelles que soient les valeurs de  $a, b, s > 0$ .

Les variables aléatoires du type

$$\left(\mathbf{B}_{a,b}^{-1} - 1\right)^s \stackrel{d}{=} \left(\frac{\mathbf{\Gamma}_b}{\mathbf{\Gamma}_a}\right)^s, \quad a, b, s > 0,$$

(où l'on suppose que  $\mathbf{\Gamma}_a$  et  $\mathbf{\Gamma}_b$  sont des variables indépendantes) apparaissent dans la littérature comme variables bêta généralisées de deuxième espèce (GB2). Elles ont pour densité

$$x \mapsto \frac{\Gamma(a+b)}{s\Gamma(a)\Gamma(b)} (x^{1/s} + 1)^{-(a+b)} x^{-1+b/s}, \quad x > 0.$$

Il est facile de voir que ces densités sont HCM (en particulier infiniment divisibles) si et seulement si  $s \geq 1$ . Notons au passage que cela contraste avec le Corollaire 5.5 qui établit que  $(\mathbf{\Gamma}_a \mathbf{\Gamma}_b)^s$  est HCM lorsque  $|s| \geq 1/2$  et  $|a-b| \leq 1/2$ . Il est aussi clair que les variables GB2 n'ont pas de moments exponentiels négatifs et ne peuvent donc pas appartenir à  $\mathcal{E}_-$ . Il serait intéressant de voir pour quelles valeurs de  $a, b, s$ , ces lois GB2 sont infiniment divisibles. Nous donnons une réponse partielle dans la proposition suivante :

**Proposition 4.9**  $(\mathbf{\Gamma}_b/\mathbf{\Gamma}_a)^s \sim \text{MF}_2$  (en particulier  $(\mathbf{\Gamma}_b/\mathbf{\Gamma}_a)^s \sim \text{ID}$ ) lorsque  $b \leq 1/2 \leq s \leq b = 1 - a$ .

*Démonstration.* Il faut démontrer que la fonction

$$x \mapsto \frac{x^{b/s-2}}{x^{1/s} + 1}$$

est complètement monotone lorsque la condition est vérifiée. On va s'appuyer sur le fait que la fonction définie par

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \int_0^\infty e^{-xt}(1 - \cos(t))dt$$

est une transformée de Laplace donc complètement monotone. Alors, pour tout  $s \geq 1/2$ , la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^{1/2s}(x^{1/s} + 1)}$$

l'est également comme composée d'une fonction complètement monotone et d'une fonction de Bernstein. On écrit alors

$$\frac{x^{b/s-2}}{x^{1/s} + 1} = \frac{1}{x^{1/2s}(x^{1/s} + 1)} \times \frac{1}{x^{2-(2b+1)/2s}}$$

et l'on voit que la densité est complètement monotone si  $2 - (2b+1)/2s \geq 0$ , ce qui revient à  $s \geq (2b+1)/4$ . Cette dernière condition est tout le temps vérifiée lorsque  $b \leq 1/2$  (dans ce cas  $(2b+1)/4 \leq 1/2$ ).  $\square$

Remarquons qu'un tel raisonnement est sans espoir lorsque  $s < 1/2$ . En effet, dans ce cas, la densité ne se prolonge pas analytiquement à  $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > 0\}$ . Enfin, caractériser la complète monotonie des fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{x^a(x^b + 1)^c}$$

en les trois paramètres  $a, b, c$  semble assez compliqué.

# Chapitre 5

## Propriété HCM et la loi de Cauchy

### 5.1 Introduction et notations

La loi de Cauchy centrée de paramètre  $a > 0$ , que l'on note  $\mathbf{C}_a$ , est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction  $g_a$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g_a(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}.$$

Un petit calcul montre que  $\mathbf{C}_a * \mathbf{C}_b = \mathbf{C}_{a+b}$ , et que si  $C \sim \mathbf{C}_1$ , alors  $aC \sim \mathbf{C}_a$  : la loi de Cauchy est 1-stable. Pour  $\alpha \in (0, 1)$ , considérons une variable aléatoire strictement  $\alpha$ -stable positive  $\mathbf{Z}_\alpha$ , c'est-à-dire, telle que  $\mathbb{E}(e^{-\lambda \mathbf{Z}_\alpha}) = e^{-\lambda^\alpha}$  – voir la section 1.3.1. Considérons également  $\tilde{\mathbf{Z}}_\alpha$  une copie indépendante de  $\mathbf{Z}_\alpha$ . L'objet d'étude de ce chapitre est la variable

$$T_\alpha = \mathbf{Z}_\alpha / \tilde{\mathbf{Z}}_\alpha.$$

Bien que la densité de  $\mathbf{Z}_\alpha$  n'ait pas de forme explicite (excepté dans le cas  $\alpha = 1/2$ ), celle de  $T_\alpha^\alpha$  s'exprime comme celle d'une transformation affine d'une variable de Cauchy, conditionnée à être positive :

**Proposition 5.1** *Soit  $\alpha \in (0, 1)$ . La densité de  $T_\alpha^\alpha$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par*

$$\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha(x^2 + 2\cos(\pi\alpha)x + 1)}.$$

Ce calcul est attribué à Lamperti – voir l'exercice 4.21 dans [24] – et nous en donnerons la preuve dans la section 5.4.

Notons  $f_{\alpha,\gamma}$  la fonction définie sur  $(0, \infty)$  par

$$f_{\alpha,\gamma}(x) = \frac{1}{x^{2\gamma} + 2\cos(\pi\alpha)x^\gamma + 1},$$

alors  $T_\alpha^\alpha \sim \sin(\pi\alpha)/(\pi\alpha) \times f_{\alpha,1}$ . En écrivant

$$\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} f_{\alpha,1}(x) = \frac{1}{\pi\alpha \sin(\pi\alpha)} \times \frac{1}{\left(\frac{x+\cos(\pi\alpha)}{\sin(\pi\alpha)}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\alpha \sin(\pi\alpha)} \times g_1\left(\frac{x + \cos(\pi\alpha)}{\sin(\pi\alpha)}\right) \quad (5.1)$$

nous voyons que  $T_\alpha^\alpha$  a la même loi que la transformation affine  $\sin(\pi\alpha) \times C - \cos(\pi\alpha)$  conditionnée à être positive.

Dans [13], Bondesson prouve que la variable  $|C| \stackrel{d}{=} C \mid C > 0$  a une loi infiniment divisible. Diédhiou raffine ce résultat dans [25] en prouvant que cette loi est auto-décomposable. Le Théorème 1.24, à propos de la divisibilité infinie des mélanges  $\Gamma_2$ , permet de démontrer ce résultat très facilement comme nous le verrons dans la Proposition 5.30. Nous montrerons que cela permet même de démontrer la divisibilité infinie de  $T_\alpha^\alpha$  pour tout  $\alpha \in (0, 1/2]$ . Par contre, il est facile de voir que  $T_\alpha^\alpha$  n'a jamais une loi GGC et donc que sa densité n'est jamais HCM – voir la Proposition 5.32. Mais la question se pose pour les puissances  $T_\alpha^\delta$ . Voici le théorème principal de ce chapitre :

**Théorème 5.2** *La variable aléatoire  $T_\alpha^\delta$  a une densité HCM si et seulement si  $\alpha \leq 1/2$  et  $|\delta| \geq \alpha/(1 - \alpha)$ .*

**Corollaire 5.3** *La variable aléatoire  $T_\alpha$  a une densité HCM si et seulement si  $\alpha \leq 1/2$ .*

Nous retrouvons ici la partie facile de la conjecture de Bondesson :  $\mathbf{Z}_\alpha$  est HCM seulement si  $\alpha \leq 1/2$ . En effet, dans le cas contraire, la stabilité de la classe HCM par le quotient de variables indépendantes ferait apparaître une contradiction – voir le Corollaire B.7. Par ailleurs, le Théorème 5.2 démontre la partie facile de la conjecture renforcée – voir le paragraphe 1.3.5.

Soient  $n \geq 2$  et  $\mathbf{Z}_{1/n}$  une variable strictement  $1/n$ -stable. Alors

$$\mathbf{Z}_{1/n}^{-1} \stackrel{d}{=} n^n \times \Gamma_{1/n} \times \cdots \times \Gamma_{(n-1)/n} \quad (5.2)$$

où  $\Gamma_{1/n}, \dots, \Gamma_{(n-1)/n}$  désignent  $n - 1$  variables gamma indépendantes de paramètres respectifs  $1/n, \dots, (n - 1)/n$  – voir l'exemple 5.6.2 dans [15]. Le caractère HCM évident de toutes les densités gamma, et la stabilité par produit de variables indépendantes des densités HCM, entraînent que les densités strictement  $\alpha$ -stables sont HCM lorsque  $\alpha = 1/n$  pour  $n \geq 2$ . La factorisation (5.2) appliquée à  $n = 3$  se lit  $\mathbf{Z}_{1/3}^{-1} \stackrel{d}{=} 27 \times \Gamma_{1/3} \times \Gamma_{2/3}$ . Un calcul détaillé au Lemme 5.8 permet d'exprimer la densité de  $\Gamma_{1/3} \times \Gamma_{2/3}$  à l'aide d'une fonction de Bessel modifiée. Plus précisément, la densité de  $2 \times \sqrt{\Gamma_{1/3} \times \Gamma_{2/3}}$  est, à une constante multiplicative près, une fonction de Bessel modifiée de paramètre  $1/3$ . La fonction de Bessel modifiée  $K_\nu$  apparaissait déjà dans l'expression de la transformée de Laplace de  $\Gamma_\nu^{-1}$  et Grosswald a prouvé que  $x \mapsto K_\nu(\sqrt{x})$  est HCM quelle que soit la valeur de  $\nu \in \mathbb{R}$ . Nous montrons la proposition suivante :

**Proposition 5.4** *La fonction de Bessel modifiée  $K_\nu$  est HCM si et seulement si  $|\nu| \leq 1/2$ .*

Lorsque  $|\nu| \leq 1/2$ , ce résultat est plus fort que celui de Grosswald, bien qu'ici, l'argument ne permette pas de déterminer la mesure de Lévy de la transformée de Laplace sous-jacente. L'apparition des fonctions  $K_\nu$  dans la densité de  $\sqrt{\Gamma_t \Gamma_s}$  permet d'énoncer le corollaire suivant :

**Corollaire 5.5** *Soient  $\Gamma_t$  et  $\Gamma_s$  deux variables gamma indépendantes de paramètres respectifs  $t$  et  $s$ . Alors, la densité de  $\sqrt{\Gamma_t \Gamma_s}$  est HCM si et seulement si  $|t - s| \leq 1/2$ .*

Une conséquence de ce corollaire est la divisibilité infinie de  $\sqrt{\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2}$  lorsque  $\mathbf{L}_1$  et  $\mathbf{L}_2$  sont deux variables exponentielles indépendantes. Rappelons que  $\sqrt{\mathbf{L}_1}$  (ou  $\sqrt{\Gamma_t}$ ) n'a pas une loi infiniment divisible car ses queues de distributions sont trop légères – voir le Théorème 1.11. Ce résultat est quelque peu surprenant. En effet, bien que  $\Gamma_t^{-\delta}$  ait une loi GGC quels que soient  $t > 0$  et  $\delta > 0$ , la densité de  $(\Gamma_t/\Gamma_s)^\delta \stackrel{d}{=} (\mathbf{B}_{s,t}^{-1} - 1)^\delta \stackrel{d}{=} (\mathbf{B}_{s,t}^{(2)})^\delta$

n'est pas HCM lorsque  $\delta < 1$  – voir le paragraphe 4.2.3. Le Corollaire 5.5, combiné avec la formule (5.2) dans le cas  $n = 3$ , permet d'énoncer le résultat suivant :

**Corollaire 5.6** *La densité de  $\sqrt{\mathbf{Z}_{1/3}}$  est HCM.*

Ce corollaire et le Théorème 5.2 amènent à penser que la conjecture de Bondesson à propos des densités stables pourrait être renforcée de la manière suivante :  $\mathbf{Z}_\alpha^\delta \sim \text{HCM}$  si et seulement si  $\alpha \in (0, 1/2]$  et  $|\delta| \geq \alpha/(1 - \alpha)$ . Le Théorème 5.2 permet d'ores et déjà d'établir la partie « seulement si » de cette conjecture.

## 5.2 Démonstration du Théorème 5.2

### 5.2.1 La démonstration

Rappelons que la densité de  $T_\alpha^\alpha = (\mathbf{Z}_\alpha/\tilde{\mathbf{Z}}_\alpha)^\alpha$  est définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} \times \frac{1}{x^2 + 2\cos(\pi\alpha)x + 1}.$$

Ainsi, la densité de  $T_\alpha^{\alpha/\gamma}$  est définie par

$$\frac{\gamma \sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} \times \frac{x^{\gamma-1}}{x^{2\gamma} + 2\cos(\pi\alpha)x^\gamma + 1} = \frac{\gamma \sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} \times x^{\gamma-1} \times f_{\alpha,\gamma}(x)$$

avec  $f_{\alpha,\gamma}(x) = (x^{2\gamma} + 2\cos(\pi\alpha)x^\gamma + 1)^{-1}$ . Cette densité est HCM si et seulement si  $f_{\alpha,\gamma}$  est HCM. Nous devons donc prouver que  $f_{\alpha,\gamma}$  est HCM si et seulement si  $\alpha \leq 1/2$  et  $|\gamma| \leq 1 - \alpha$ . Puisque  $f_{\alpha,\gamma} \sim \text{HCM} \Leftrightarrow f_{\alpha,-\gamma} \sim \text{HCM}$ , nous supposons que  $\gamma$  est positif.

**Proposition 5.7** *Soient  $\alpha \in [0, 1]$  et  $\gamma \geq 0$ . La fonction  $f_{\alpha,\gamma}$  est HCM si et seulement si  $\alpha \leq 1/2$  et  $\gamma \leq 1 - \alpha$ .*

*Démonstration.* La nécessité de la condition  $\alpha \leq 1/2$  provient du Théorème B.5 car la fonction  $f_{\alpha,\gamma}$  est alors croissante dans un voisinage de 0. Nous supposons donc désormais que  $\alpha \leq 1/2$ . Le fait qu'une fonction HCM se prolonge analytiquement à  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  entraîne la nécessité de la condition  $\gamma \leq 1 - \alpha$ . En effet, remarquons dans un premier temps que le dénominateur de la fonction  $f_{\alpha,\gamma}$  se prolonge toujours analytiquement à  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . Ainsi, la fonction se prolonge analytiquement sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  si et seulement si son dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire, si et seulement si la fonction

$$z \mapsto z^{2\gamma} + 2\cos(\pi\alpha)z^\gamma + 1$$

ne s'annule pas sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . Les racines de la fonction polynomiale

$$z \mapsto z^2 + 2\cos(\pi\alpha)z + 1$$

sont  $e^{i\pi(1-\alpha)}$  et  $e^{-i\pi(1-\alpha)}$ . La fonction définie par  $z^{2\gamma} + 2\cos(\pi\alpha)z^\gamma + 1$  s'annule donc (au moins deux fois) sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  si et seulement si  $\gamma > 1 - \alpha$ . Dans ce cas,  $e^{i\pi(1-\alpha)/\gamma}$  et  $e^{-i\pi(1-\alpha)/\gamma}$  sont deux zéros. La nécessité de la condition  $\gamma \leq 1 - \alpha$  est donc démontrée.

Les cas  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 1/2$  se démontrent facilement. En effet, si  $\alpha = 1/2$  alors  $f_{1/2,1/2}(x) = 1/(x+1)$ , donc  $f_{1/2,1/2}$  est clairement une fonction HCM. Si  $\alpha = 0$ , alors

$f_{0,1}(x) = 1/(x+1)^2$ , donc  $f_{0,1}$  est aussi une fonction HCM. Il reste donc à montrer que la fonction

$$f_{\alpha,1-\alpha} : x \mapsto \frac{1}{x^{2(1-\alpha)} + 2 \cos(\pi\alpha)x^{1-\alpha} + 1}$$

est HCM pour  $\alpha \in (0, 1/2)$ . Nous allons en fait montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit (par exemple  $\varepsilon < 1/2 - \alpha$ ), la fonction

$$f_{\alpha,1-\alpha-\varepsilon} : x \mapsto \frac{1}{x^{2(1-\alpha-\varepsilon)} + 2 \cos(\pi\alpha)x^{1-\alpha-\varepsilon} + 1}$$

est HCM. Un passage à la limite en faisant tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$  et la Proposition B.2 nous donneront la propriété HCM de la fonction  $f_{\alpha,1-\alpha}$ . Pour parvenir à prouver cette propriété, nous allons utiliser le même argument que dans la démonstration du Théorème 4.2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $(0, +\infty)$  par

$$g(x) = \log \left( x^{2(1-\alpha-\varepsilon)} + 2 \cos(\pi\alpha)x^{1-\alpha-\varepsilon} + 1 \right).$$

Il faut montrer que  $g$  est une fonction de Thorin-Bernstein. Par la Proposition A.22, ceci est équivalent à ce que  $g'$  soit une fonction de Stieltjes. Il est clair que les fonctions  $g$  et  $g'$  se prolongent analytiquement à  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . Nous allons utiliser le critère de Pick du Théorème A.9, qui consiste à tester si la fonction  $h$ , définie sur  $\mathbb{C}_+ \setminus \mathbb{R}$  par

$$h(z) = \operatorname{Im}(g'(z)),$$

est de signe négatif. Ici,  $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ . Il paraît un peu compliqué de montrer par un calcul direct que  $h(z)$  est négatif lorsque  $\operatorname{Im}(z) > 0$ . En effet, posons  $\beta = 1 - \alpha - \varepsilon$ ,  $c = \cos(\pi\alpha)$  et  $z = \rho^{1/\beta} e^{i\theta}$ , alors,

$$\begin{aligned} h(z) &= 2\beta \times \operatorname{Im} \left( \frac{z^{2\beta-1} + cz^{\beta-1}}{z^{2\beta} + 2cz^\beta + 1} \right) \\ &= \frac{2\beta\rho^{1-1/\beta}}{|z^{2\beta} + 2cz^\beta + 1|^2} \times \operatorname{Im} \left[ \rho^3 \times e^{-i\theta} + \rho^2 \times (ce^{-i\theta(1+\beta)} + 2ce^{-i\theta(1-\beta)}) \right. \\ &\quad \left. + \rho \times (2c^2e^{-i\theta} + e^{i\theta(2\beta-1)}) + ce^{-i\theta(1-\beta)} \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Afin de rendre ce problème moins calculatoire, appliquons le principe du maximum (ici il s'agirait plutôt du principe du minimum) à la fonction harmonique  $h$  :

- (1)  $h(z) \rightarrow 0$  uniformément lorsque  $|z| \rightarrow \infty$ .
- (2) Comme  $0 < \beta < 1$ ,  $0 < \theta < \pi$  et  $c > 0$ ,

$$\limsup_{z \rightarrow 0} h(z) = 2\beta \times \limsup_{z \rightarrow 0} \operatorname{Im}(z^{2\beta-1} + cz^{\beta-1}) \leq 0.$$

- (3) Enfin, en utilisant la formule (5.3), nous voyons que pour  $\rho > 0$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -\rho^{1/\beta}} h(z) &= -A \cos(\pi\alpha) \sin(\pi\beta) \times \left( \rho^2 + \frac{2 \cos(\pi\beta)}{\cos(\pi\alpha)} \rho + 1 \right) \\ &= -A \cos(\pi\alpha) \sin(\pi\beta) \times \underbrace{\left( \rho^2 - \frac{2 \cos(\pi(\alpha + \varepsilon))}{\cos(\pi\alpha)} \rho + 1 \right)}_{\geq 0 \text{ car } \alpha < \alpha + \varepsilon < 1/2} \leq 0 \end{aligned}$$

où

$$A = \frac{2\beta\rho^{1-1/\beta}}{|\rho^{2\beta}e^{i2\beta} + 2c\rho^\beta e^{i\beta} + 1|^2} \geq 0.$$

Ainsi,  $h$  est une fonction négative.  $\square$

Sur la Figure 5.1, on donne deux représentations graphiques de la fonction  $-h$  le long des lignes  $\{\text{Im}(z) = 1\}$  et  $\{\text{Im}(z) = 1/10\}$ , pour  $\alpha = 1/5$  et  $\varepsilon = 1/10$ .

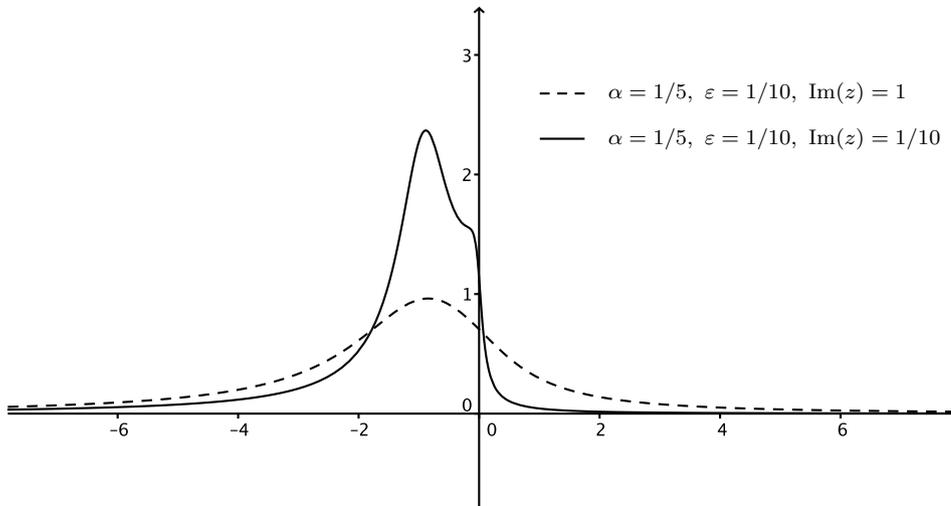


FIGURE 5.1 – Représentations de  $-h$  le long des lignes  $\{\text{Im}(z) = c\}$ ,  $c \in \{1/10, 1\}$

### 5.2.2 Remarques sur la démonstration

- Le caractère HCM de la fonction  $f_{\alpha,\gamma}$  pour  $\alpha, \gamma \leq 1/2$  est facile puisque pour tous  $u, v > 0$ ,

$$f_{\alpha,\gamma}(uv)f_{\alpha,\gamma}(u/v) = \frac{1}{A + Bw_\gamma + Cw_{2\gamma}}$$

avec  $A = u^{4\gamma} + 4\cos^2(\pi\alpha)u^{2\gamma} + 1$ ,  $B = 2\cos(\pi\alpha)(u^{3\gamma} + u^\gamma)$ ,  $C = u^{2\gamma}$ , et  $w_t = v^t + v^{-t}$ . De la Proposition B.3, nous déduisons que  $f_{\alpha,\gamma}$  est HCM dès que  $\alpha$  et  $\gamma$  sont  $\leq 1/2$ . Par contre, la fonction au dénominateur n'est plus une fonction de Bernstein en  $w$  si  $\gamma$  ou  $\alpha$  est  $> 1/2$ .

- Comme nous l'avions vu dans l'introduction de ce chapitre, le Corollaire 5.5 établit que  $\sqrt{\Gamma_{1/3}\Gamma_{2/3}} \sim \text{HCM}$ . Par la formule (5.2), nous voyons donc que  $\sqrt{\mathbf{Z}_{1/3}} \sim \text{HCM}$ . En particulier  $\sqrt{T_{1/3}} \sim \text{HCM}$  et c'est ce que dit le Théorème 5.2.

- Ce théorème établit que la fonction  $x \mapsto \log(x^{2\gamma} + 2\cos(\pi\alpha)x^\gamma + 1)$  est une fonction de Thorin-Bernstein si et seulement si  $\alpha \in [0, 1/2]$  et  $\gamma \in [0, 1 - \alpha]$ . En d'autres termes, la fonction

$$x \mapsto \frac{x^{2\gamma} + 2\cos(\pi\alpha)x^\gamma + 1}{x^{2\gamma-1} + \cos(\pi\alpha)x^{\gamma-1}}$$

est une fonction de Bernstein complète, c'est-à-dire, une fonction de Nevanlinna-Pick, si et seulement si  $\alpha \in [0, 1/2]$  et  $\gamma \in [0, 1 - \alpha]$ .

### 5.3 Propriété HCM de $K_\nu$

#### 5.3.1 Démonstration de la Proposition 5.4

Pour  $\nu \in \mathbb{R}$ , la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce,  $K_\nu$ , est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$K_\nu(\lambda) = \int_0^\infty \cosh(\nu x) e^{-\lambda \cosh(x)} dx.$$

Comme  $K_\nu = K_{-\nu}$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $\nu \geq 0$ . La formule 9.6.23 dans [1] permet d'écrire pour  $\nu > -1/2$ ,

$$K_\nu(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}(\lambda/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1/2)} \times \int_1^\infty \frac{e^{-\lambda y}}{(y^2 - 1)^{1/2-\nu}} dy.$$

On obtient le un changement de variable  $y = x + 1$

$$K_\nu(\lambda) = C_\lambda \lambda^\nu e^{-\lambda} \times \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{(x(x+2))^{1/2-\nu}} dx$$

pour une certaine constante  $C_\nu > 0$ . Pour  $\nu \leq 1/2$ , la fonction  $x \mapsto 1/(x(x+2))^{1/2-\nu}$  est HCM. En particulier, cette fonction est la densité d'une mesure GGC. Par le Théorème B.5, sa transformée de Laplace est HCM, donc  $K_\nu$  est HCM.

Montrons que  $K_\nu$  n'est pas HCM lorsque  $\nu > 1/2$ . L'argument repose sur les Théorèmes 1.28 et 4.8, il a déjà été mentionné dans la section 4.2.1. Supposons que  $K_\nu$  est HCM, alors la fonction  $y \mapsto 1/(y^2 - 1)^{1/2-\nu}$  est alors la densité d'une mesure GGC sur  $(1, +\infty)$ . Donc  $x \mapsto 1/(x(x+2))^{1/2-\nu}$  est la densité d'une mesure GGC sur  $(0, +\infty)$ . Ainsi, la fonction

$$x \mapsto e^{-x} (x(x+2))^{\nu-1/2}$$

est proportionnelle à la densité d'une mesure de probabilité GGC ayant pour masse de Thorin  $\nu + 1/2$ . Ce qui entraîne la complète monotonie de la fonction

$$x \mapsto e^{-x} (x+2)^{\nu-1/2}.$$

Ceci est absurde par le Lemme A.7. □

#### 5.3.2 Démonstration du Corollaire 5.5

**Lemme 5.8** *La densité de  $\sqrt{\Gamma_t \Gamma_s}$  est donnée par*

$$x \mapsto \frac{4x^{t+s-1}}{\Gamma(t)\Gamma(s)} K_{t-s}(2x).$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \mathbb{P}(\sqrt{\Gamma_t \Gamma_s} \leq x) &= \frac{d}{dx} \int_0^\infty \mathbb{P}(\Gamma_t \leq x^2/u) \frac{u^{s-1} e^{-u}}{\Gamma(s)} du \\
&= \int_0^\infty \frac{2x}{u} \times \frac{(x^2/u)^{t-1} e^{-x^2/u}}{\Gamma(t)} \times \frac{u^{s-1} e^{-u}}{\Gamma(s)} du \\
&= \frac{2x^{2t-1}}{\Gamma(t)\Gamma(s)} \int_0^\infty u^{s-t-1} e^{-u-x^2/u} du \\
&= \frac{2x^{t+s-1}}{\Gamma(t)\Gamma(s)} \int_0^\infty v^{s-t-1} e^{-x(v+v^{-1})} dv \\
&= \frac{4x^{t+s-1}}{\Gamma(t)\Gamma(s)} \int_0^\infty \cosh((t-s)y) e^{-2x \cosh(y)} dy. \quad \square
\end{aligned}$$

Ainsi,  $\sqrt{\Gamma_t \Gamma_s} \sim \text{HCM}$  si et seulement si  $x \mapsto K_{t-s}(x)$  est HCM. Par la Proposition 5.4, ceci est vrai si et seulement si  $|t-s| \leq 1/2$ .  $\square$

## 5.4 À propos de la densité de $T_\alpha$

Ce chapitre étant en grande partie dédié à l'étude de la densité de  $T_\alpha^\delta$ , il paraît naturel d'expliquer la provenance de son expression. Dans cette partie, nous démontrons la Proposition 5.1. La démarche suit celle de l'exercice 4.21 dans [24]. Nous commençons par un lemme qui lie les lois stables et la loi exponentielle :

**Lemme 5.9** *Soient  $\mathbf{L}$  une variable exponentielle de paramètre 1,  $\mathbf{Z}_\alpha$  et  $\mathbf{Z}_\beta$  deux variables strictement stables de paramètres respectifs  $\alpha$  et  $\beta$ . On suppose que toutes ces variables sont indépendantes. Alors*

$$\frac{\mathbf{L}^{1/\alpha}}{\mathbf{Z}_\beta} \stackrel{d}{=} \frac{\mathbf{L}^{1/\beta}}{\mathbf{Z}_\alpha}.$$

*Démonstration.* Ce résultat repose sur un calcul des moments fractionnaires qui utilise la Proposition C.6 :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \frac{\mathbf{L}^{1/\alpha}}{\mathbf{Z}_\beta} \right)^s \right] = \mathbb{E} [\mathbf{L}^{\alpha/s} \mathbf{Z}_\beta^{-s}] = \frac{\Gamma(1+s/\alpha)\Gamma(1+s/\beta)}{\Gamma(1+s)} = \mathbb{E} [\mathbf{L}^{\beta/s} \mathbf{Z}_\alpha^{-s}]. \quad \square$$

Dans le cas  $\beta = 1$  cette égalité en loi se lit  $\mathbf{L}^{1/\alpha} \stackrel{d}{=} \mathbf{L}/\mathbf{Z}_\alpha$  – voir [47] Théorème 1 et [34]. Le lemme suivant est une conséquence directe de cette égalité :

**Lemme 5.10** *Soit  $\alpha \in (0, 1]$ . On a pour tout  $s > 0$ ,*

$$\mathbb{E} \left( \frac{1}{1+sT_\alpha} \right) = \frac{1}{1+s^\alpha}.$$

*Démonstration.* D'une part  $\mathbb{E} \left( \frac{1}{1+sT_\alpha} \right) = \mathbb{E} (e^{-sT_\alpha \mathbf{L}})$ . D'autre part,

$$\mathbb{E} (e^{-sT_\alpha \mathbf{L}}) = \mathbb{E} (e^{-s\mathbf{Z}_\alpha \mathbf{L}/\tilde{\mathbf{Z}}_\alpha}) = \mathbb{E} (e^{-s\mathbf{Z}_\alpha \mathbf{L}^{1/\alpha}}) = \mathbb{E} (e^{-s^\alpha \mathbf{L}}) = \frac{1}{1+s^\alpha}. \quad \square$$

La formule qui fait tout fonctionner est l'objet de la proposition suivante :

**Proposition 5.11**  $\forall \alpha \in (0, 1), \forall s \in \mathbb{R},$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{isx} \frac{\sin(\pi\alpha)}{\cosh(x) + \cos(\pi\alpha)} dx = \frac{\sinh(\pi\alpha s)}{\sinh(\pi s)}.$$

*Démonstration.* Lorsque  $s > 0$ , cette intégrale se déduit en intégrant la fonction méromorphe définie par

$$e^{isz} \frac{\sin(\pi\alpha)}{\cosh(z) + \cos(\pi\alpha)}$$

sur le rectangle d'extrémités  $-R, R, R + iR, -R + iR$ , et de faire tendre  $R \rightarrow +\infty$ . Le calcul des résidus de cette fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}_+$ , dont les pôles décrivent l'ensemble  $\{z_k = i\pi(1 - \alpha + 2k\pi)\}_{k \geq 0} \cup \{\tilde{z}_k = i\pi(\alpha - 1 + 2k\pi)\}_{k \geq 1}$ , donne

$$\text{Res}(z_k) = -ie^{-s\pi(1-\alpha+2k)} \quad \text{et} \quad \text{Res}(\tilde{z}_k) = ie^{-s\pi(\alpha-1+2k)}.$$

On en déduit alors le résultat annoncé en calculant les sommes  $\sum_{k=0}^{\infty} \text{Res}(z_k)$  et  $\sum_{k=1}^{\infty} \text{Res}(\tilde{z}_k)$ . Pour étendre la formule à  $s \leq 0$ , on peut par exemple, utiliser le fait que l'intégrale à paramètre  $s$  est holomorphe sur  $\{s \in \mathbb{C} / \text{Im}(s) < 1\}$ .  $\square$

**Corollaire 5.12**  $\forall \alpha \in (0, 1),$

$$\log(T_\alpha) \sim \frac{\sin(\pi\alpha)}{2\pi(\cosh(\alpha x) + \cos(\pi\alpha))} dx \quad \text{et} \quad T_\alpha^\alpha \sim \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha(x^2 + 2\cos(\pi\alpha)x + 1)} dx.$$

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser la formule des compléments :  $\forall s \in \mathbb{R},$

$$\mathbb{E}(T_\alpha^{i\alpha s}) = \frac{\Gamma(1 - is)\Gamma(1 + is)}{\Gamma(1 - i\alpha s)\Gamma(1 + i\alpha s)} = \frac{\sin(i\pi\alpha s)}{\sin(i\pi s)} = \frac{\sinh(\pi\alpha s)}{\sinh(\pi s)}. \quad \square$$

**Remarque :** La formule (1.11) avec  $\alpha = 1$  et  $\rho \in (0, 1)$  établit que

$$\mathbf{Z}_{1,\rho}^+ \stackrel{d}{=} \left( \frac{\tilde{\mathbf{Z}}_\rho}{\mathbf{Z}_\rho} \right)^\rho$$

où  $\mathbf{Z}_{1,\rho}$  est une variable de Cauchy normalisée par

$$\mathbb{E}(e^{iu\mathbf{Z}_{1,\rho}}) = \exp(-iu \cos(\pi\rho) - |u| \sin(\pi\rho)).$$

Autrement dit,  $\mathbf{Z}_{1,\rho} \stackrel{d}{=} \sin(\pi\rho) \times C - \cos(\pi\rho)$  où  $C \sim \mathbf{C}_1$  est une variable de Cauchy standard.

## 5.5 Liens avec la fonction de Mittag-Leffler

### 5.5.1 La loi de Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler peut être vue comme une généralisation de la fonction exponentielle. Elle a été introduite par Gösta Mittag-Leffler en 1903, puis étudiée ensuite par de nombreux auteurs, notamment dans le cadre du calcul fractionnaire.

**Définition 5.13** Pour  $\alpha, \beta > 0$ , la fonction  $E_{\alpha, \beta}$  est définie par

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)}.$$

Lorsque  $\beta = 1$  nous noterons simplement  $E_{\alpha} = E_{\alpha, 1}$ . Si de plus  $\alpha = 1$ , alors remarquons que  $E_1 = \exp$ . Cette fonction apparaît naturellement dans l'expression de la transformée de Laplace de  $\mathbf{Z}_{\alpha}^{-\alpha}$  et de  $T_{\alpha}$  :

**Proposition 5.14**

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda \mathbf{Z}_{\alpha}^{-\alpha}}\right) = E_{\alpha}(-\lambda) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left(e^{-\lambda T_{\alpha}}\right) = E_{\alpha}(-\lambda^{\alpha}).$$

*Démonstration.* On calcule

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda \mathbf{Z}_{\alpha}^{-\alpha}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \mathbb{E}\left(\mathbf{Z}_{\alpha}^{-n\alpha}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n\alpha)} = E_{\alpha}(-\lambda).$$

L'autre égalité est une conséquence de la première puisque

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda T_{\alpha}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda \mathbf{Z}_{\alpha} / \bar{\mathbf{Z}}_{\alpha}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda^{\alpha} \mathbf{Z}_{\alpha}^{-\alpha}}\right) \quad \square$$

En corollaire, nous voyons que la fonction  $E_{\alpha}$  est croissante sur  $(-\infty, 0]$ . Elle donc est croissante sur  $\mathbb{R}$  puisqu'elle est évidemment croissante sur  $[0, +\infty)$ . De plus,  $E_{\alpha}(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow -\infty$ . De la proposition précédente, du Théorème 5.2 et de la Proposition 5.32 que nous verrons un peu plus loin, nous déduisons :

**Corollaire 5.15** La fonction  $\lambda \mapsto E_{\alpha}(-\lambda)$  est complètement monotone (sur  $(0, +\infty)$ ). La fonction  $\lambda \mapsto E_{\alpha}(-\lambda^{\alpha})$  est HCM si et seulement si  $\alpha \leq 1/2$ .

Nous venons de voir deux lois qui sont reliées à la fonction de Mittag-Leffler : celle de  $\mathbf{Z}_{\alpha}^{-\alpha}$  et celle de  $T_{\alpha}$ . Nous allons nous intéresser à une troisième loi, parfois (et improprement) dénommée « loi de Mittag-Leffler » qui a été introduite par Pillai [43] : soit  $F_{\alpha}$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_{+}$  par  $F_{\alpha}(x) = 1 - E_{\alpha}(-x^{\alpha})$ . Par le fait que  $E_{\alpha}(0) = 1$  et par ce qui précède, nous voyons que  $F_{\alpha}$  est une fonction de répartition sur  $\mathbb{R}_{+}$ .

**Définition 5.16** La loi de probabilité définie par  $F_{\alpha}$  est appelée loi de Mittag-Leffler de paramètre  $\alpha$ .

La fonction de répartition  $F_{\alpha}$  est une fonction de Bernstein. Soit  $M_{\alpha} \sim F_{\alpha}$  une variable de Mittag-Leffler de paramètre  $\alpha$ . Sa densité  $f_{M_{\alpha}}$  est définie sur  $\mathbb{R}_{+}$  par

$$f_{M_{\alpha}}(x) = \frac{d}{dx}(1 - E_{\alpha}(-x^{\alpha})) = \alpha x^{\alpha-1} E'_{\alpha}(-x^{\alpha})$$

est complètement monotone. Donc  $M_{\alpha} \sim \text{ME}$ . Sa transformée de Laplace est explicite :

**Proposition 5.17** La loi de Mittag-Leffler est GGC. Plus précisément,

$$\forall \lambda \geq 0, \quad \mathbb{E}\left(e^{-\lambda M_{\alpha}}\right) = \frac{1}{1 + \lambda^{\alpha}} = \exp\left(-\int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda x}) \alpha E_{\alpha}(-x^{\alpha}) \frac{dx}{x}\right).$$

Comme  $\alpha E_{\alpha}(-0^{\alpha}) = \alpha$ , nous déduisons que sa masse de Thorin vaut  $\alpha$ . En particulier,  $M_{\alpha} \sim \text{M}\Gamma_{\alpha} \subset \text{ME}$  (cela se lit aussi sur la densité qui se factorise par  $x^{\alpha-1}$ ). La preuve de cette proposition repose sur les deux lemmes suivants.

**Lemme 5.18**

$$\forall \lambda \geq 0, \int_0^\infty e^{-\lambda x} E_\alpha(-x^\alpha) dx = \frac{\lambda^{\alpha-1}}{1 + \lambda^\alpha}.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda x} E_\alpha(-x^\alpha) dx &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathbb{E}(e^{-\lambda T_\alpha}) dx = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda(x+T_\alpha)} dx\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{\lambda + T_\alpha}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{\lambda^{-1}}{1 + \lambda^{-1}T_\alpha}\right) = \frac{\lambda^{-1}}{1 + \lambda^{-\alpha}} \quad \text{par le Lemme 5.10} \\ &= \frac{\lambda^{\alpha-1}}{1 + \lambda^\alpha}. \quad \square \end{aligned}$$

**Lemme 5.19** *La fonction  $\lambda \mapsto \log(1 + \lambda^\alpha)$  est une fonction de Thorin-Bernstein. Plus précisément,  $\forall \lambda \geq 0$ ,*

$$\log(1 + \lambda^\alpha) = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \alpha E_\alpha(-x^\alpha) \frac{dx}{x} = \int_0^\infty \log\left(1 + \frac{\lambda}{x}\right) \frac{\alpha \sin(\pi\alpha) x^{\alpha-1}}{\pi(x^{2\alpha} + 2 \cos(\pi\alpha)x^\alpha + 1)} dx.$$

*Démonstration.*  $\lambda \mapsto \log(1 + \lambda^\alpha)$  est une fonction de Bernstein comme composée de deux fonctions de Bernstein. La première égalité est alors une conséquence du lemme précédent qui établit que

$$\frac{d}{d\lambda}(\log(1 + \lambda^\alpha)) = \alpha \int_0^\infty e^{-\lambda x} E_\alpha(-x^\alpha) \frac{dx}{x}.$$

Pour la deuxième égalité, il suffit d'invoquer le fait que  $\mathbb{E}(e^{-\lambda T_\alpha}) = E_\alpha(-\lambda^\alpha)$ , de se « souvenir » de la densité de  $T_\alpha$  et d'utiliser la représentation (A.2) des fonctions de Thorin-Bernstein.  $\square$

Une application de la Proposition A.21 aux fonctions  $\lambda \mapsto \lambda^\alpha$  et  $\lambda \mapsto \log(1 + \lambda)$  nous permettrait de prouver directement que la fonction  $\lambda \mapsto \log(1 + \lambda^\alpha)$  est une fonction de Thorin-Bernstein. Cependant, elle ne nous donnait aucune information, ni sur la mesure de Bernstein, ni sur la mesure de Thorin.

*Démonstration de la Proposition 5.17.* Une intégration par parties donne

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda M_\alpha}) = \mathbb{E}\left(\int_{M_\alpha}^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx\right) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} F_\alpha(x) dx.$$

Or,  $F_\alpha(x) = 1 - E_\alpha(-x^\alpha)$ , donc par le Lemme 5.18,

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda M_\alpha}) = 1 - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x} E_\alpha(-x^\alpha) dx = 1 - \frac{\lambda^\alpha}{1 + \lambda^\alpha} = \frac{1}{1 + \lambda^\alpha}.$$

Le Lemme 5.19 donne la formule de Lévy-Khintchine annoncée. Il y a alors une multitude de façons de voir que la loi de Mittag-Leffler est GGC, on peut par exemple invoquer le fait que

- la fonction  $\lambda \mapsto \log(1 + \lambda^\alpha)$  est Thorin-Bernstein,
- la fonction  $\lambda \mapsto E_\alpha(-\lambda)$  est complètement monotone donc  $\lambda \mapsto E_\alpha(-\lambda^\alpha)$  aussi,
- la fonction  $\lambda \mapsto E_\alpha(-\lambda^\alpha)$  est HCM décroissante donc complètement monotone.  $\square$

La Proposition 5.17 permet d'écrire de « jolies » factorisations de la variable  $M_\alpha$  :

**Corollaire 5.20** (de la Proposition 5.17) *Supposons que  $\mathbf{L}$  est une variable exponentielle de paramètre 1, indépendante de  $T_\alpha$  et de  $\mathbf{Z}_\alpha$ . Alors*

$$M_\alpha \stackrel{d}{=} T_\alpha \times \mathbf{L} \stackrel{d}{=} \mathbf{Z}_\alpha \times \mathbf{L}^{1/\alpha}.$$

*Démonstration.* C'est une conséquence de la démonstration du Lemme 5.10.  $\square$

Ainsi par le Théorème 5.2, nous voyons que  $M_\alpha$  a une densité HCM si  $\alpha \leq 1/2$ . Cette condition est aussi nécessaire :

**Proposition 5.21** (Simon & Jedidi) *La densité de Mittag-Leffler de paramètre  $\alpha$  est HCM si et seulement si  $\alpha \leq 1/2$ .*

*Démonstration.* Par ce qui précède, il suffit de montrer que la densité n'est pas HCM lorsque  $\alpha > 1/2$ . De l'égalité en loi  $M_\alpha \stackrel{d}{=} T_\alpha \times \mathbf{L}$ , nous déduisons que  $\forall z > 0$ ,

$$f_{M_\alpha}(z) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^{2\alpha} + 2\cos(\pi\alpha)x^\alpha + 1} e^{-zx} dx = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty x^\alpha f_{\alpha,\alpha}(x) e^{-zx} dx.$$

Les arguments ci-dessous reposent sur le Théorèmes 1.28 et 4.8. Supposons que  $f_{M_\alpha}$  soit HCM pour un certain  $\alpha \in (1/2, 1)$ . Cela signifie que  $f_{M_\alpha}$  est la transformée de Laplace d'une mesure GGC. C'est-à-dire, la mesure dont la densité est définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $x^\alpha f_{\alpha,\alpha}(x)$  est GGC. La mesure  $x^\alpha f_{\alpha,\alpha}(x)e^{-x}dx$  est donc, à une constante multiplicative près, une mesure de probabilité GGC ayant une masse de Thorin égale à  $\alpha + 1$ . Nous en déduisons que  $f_{\alpha,\alpha}$  est complètement monotone. Ceci est absurde si  $\alpha > 1/2$  puisque l'on voit aisément que  $f_{\alpha,\alpha}$  est alors croissante dans un voisinage de 0.  $\square$

Les mêmes arguments fonctionnent lorsque  $\alpha \leq 1/2$ . Le fait que  $f_{\alpha,\alpha}$  soit dans ce cas HCM, permet de retrouver le caractère HCM de  $M_\alpha$ .

Les résultats ci-dessus étaient déjà connus et sont pour la plupart dus à Jedidi et Simon [35]. Le Théorème 5.2, combiné avec le Théorème 4.5 à propos du caractère GGC de  $\Gamma_t^{-\alpha}$ , entraîne la proposition suivante :

**Proposition 5.22**  $M_\alpha^{-\delta} \sim \text{GGC}$  si  $\alpha \leq 1/2$  et  $\delta \geq \alpha/(1 - \alpha)$ .

*Démonstration.* Le Théorème 5.2 établit que si  $\alpha \leq 1/2$  et  $\delta \geq \alpha/(1 - \alpha)$ , alors  $T_\alpha^{-\delta} \sim \text{HCM}$  et en particulier,  $T_\alpha^{-\delta} \sim \text{GGC}$ . Le Théorème 4.5 entraîne que  $\mathbf{L}^{-\delta} \sim \text{GGC}$  quel que soit  $\delta \geq 0$ . Nous pourrions conclure en appliquant le Théorème 1.26, mais ici le Corollaire B.8 suffit.  $\square$

## 5.5.2 Une autre loi de Mittag-Leffler

Nous allons discuter d'une autre loi de probabilité reliée à la fonction de Mittag-Leffler. Pour tout  $\alpha \in (1, 2]$ , la fonction

$$x \mapsto E_\alpha(x) - \alpha x^{(\alpha-1)/\alpha} E'_\alpha(x)$$

est complètement monotone. Plus précisément, cette fonction peut être exprimée comme la transformée de Laplace du temps de passage au dessus de 1 (notons le  $\tau_1$ ) du processus de Lévy  $\alpha$ -stable spectralement positif  $X^{(\alpha)}$  normalisé par  $\mathbb{E}\left(e^{-\lambda X_t^{(\alpha)}}\right) = e^{t\lambda^\alpha}$  (c'est une conséquence de la factorisation de Wiener-Hopf – voir par exemple [7] section VII.1). Dans [48], l'auteur améliore cette propriété en :

**Théorème 5.23** (Simon) *Pour tout  $\alpha \in [1, 2]$ , la fonction  $D_\alpha$  définie par*

$$D_\alpha(x) = E_\alpha(x^\alpha) - \alpha x^{\alpha-1} E'_\alpha(x^\alpha)$$

*est complètement monotone. Sa mesure de Bernstein est donnée par*

$$\mu_\alpha(du) = -\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \times \frac{u^{\alpha-1}(1+u)}{u^{2\alpha} - 2\cos(\pi\alpha)u^\alpha + 1} du.$$

La fonction  $D_\alpha$  n'est pas une fonction de Stieltjes puisque sa densité de Bernstein est croissante dans un voisinage de 0. Si l'on pose  $\beta = \alpha - 1$ , la densité de la mesure de Bernstein  $\mu_\alpha$  s'écrit alors

$$\frac{\sin(\pi\beta)}{\pi} \times \frac{u^\beta(1+u)}{u^{2(\beta+1)} + 2\cos(\pi\beta)u^{\beta+1} + 1} = \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi} u^\beta(1+u) f_{\beta, \beta+1}(u).$$

**Théorème 5.24** (Simon) *Pour tout  $\alpha \in (1, 2]$ , la fonction  $D_\alpha$  est une densité de probabilité dont la transformée de Laplace est :*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} D_\alpha(x) dx = \begin{cases} \frac{\lambda^{\alpha-1} - 1}{\lambda^{\alpha-1}} & \text{si } \lambda \neq 1 \\ \frac{\alpha-1}{\alpha} & \text{si } \lambda = 1. \end{cases}$$

Des éléments de démonstration de ces deux théorèmes sont donnés dans la section 5.5.3. On pourrait donner à cette loi, le nom de loi de Mittag-Leffler de deuxième espèce de paramètre  $\alpha$ , bien que cette terminologie soit tout à fait personnelle.

**Théorème 5.25** *La loi de Mittag-Leffler de deuxième espèce est GGC mais non HCM.*

*Démonstration.* Soit  $\varphi$  la fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  définie par

$$\varphi(z) = -\log\left(\frac{z^{\alpha-1} - 1}{z^\alpha - 1}\right)$$

si  $z \neq 1$  et par  $\varphi(1) = -\log((\alpha-1)/\alpha)$ . Nous allons, comme dans la démonstration des Théorèmes 4.2 et 5.2, prouver que  $\varphi$  est une fonction de Thorin-Bernstein en montrant que  $\varphi'$  est une transformée de Stieltjes. On calcule

$$\varphi'(z) = \frac{\alpha z^{\alpha-1}}{z^\alpha - 1} - \frac{(\alpha-1)z^{\alpha-2}}{z^{\alpha-1} - 1}.$$

Donc

$$\limsup_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \text{Im}(z) > 0}} \text{Im}(\varphi'(z)) = \limsup_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \text{Im}(z) > 0}} \text{Im}((\alpha-1)z^{\alpha-2}) = (\alpha-1) = \limsup_{\substack{r \rightarrow 0, r > 0 \\ \theta \in (0, 1)}} r^{\alpha-2} \sin(\pi(\alpha-2)\theta) = 0$$

et

$$\begin{aligned} \varphi'(-x^+) &= e^{i\pi\alpha} x^{\alpha-2} \left( \frac{\alpha-1}{x^{\alpha-1} e^{i\pi\alpha} + 1} - \frac{\alpha x}{x^\alpha e^{i\pi\alpha} - 1} \right) \\ &= x^{\alpha-2} \frac{-x^\alpha e^{i2\pi\alpha} - (\alpha-1)e^{i\pi\alpha} - \alpha x e^{i\pi\alpha}}{x^{2\alpha-1} e^{i2\pi\alpha} + (x^\alpha - x^{\alpha-1}) e^{i\pi\alpha} - 1}. \end{aligned}$$

Après quelques simplifications, on voit que

$$\operatorname{Im}(\varphi'(-x^+)) = \sin(\pi\alpha)x^{\alpha-2} \times A(x) / B(x)$$

avec

$$A(x) = (\alpha - 1)x^{2\alpha} + \alpha x^{2\alpha-1} + 2 \cos(\pi\alpha)x^\alpha + \alpha x + \alpha - 1,$$

et

$$B(x) = \left| x^{2\alpha-1}e^{i2\pi\alpha} + (x^\alpha - x^{\alpha-1})e^{i\pi\alpha} - 1 \right|^2 \geq 0.$$

Comme  $\sin(\pi\alpha) < 0$  lorsque  $\alpha \in (1, 2)$ , il reste à vérifier que  $A$  est une fonction positive. On calcule

$$\begin{aligned} A'(x) &= \alpha \left[ 2(\alpha - 1)x^{2\alpha-1} + (2\alpha - 1)x^{2\alpha-2} + 2 \cos(\pi\alpha)x^{\alpha-1} + 1 \right] \\ &\geq \alpha \left[ x^{2\alpha-2} - 2x^{\alpha-1} + 1 \right] = \alpha \left[ x^{\alpha-1} - 1 \right]^2 \geq 0. \end{aligned}$$

$A$  est donc une fonction croissante et  $A(0) = \alpha - 1 \geq 0$ .  $A$  est donc une fonction positive. On en déduit que  $\varphi'$  est une fonction de Stieltjes, puis que  $\varphi$  est une fonction de Thorin-Bernstein. Ceci prouve que la loi de Mittag-Leffler de deuxième espèce est GGC.

Supposons maintenant qu'elle ait une densité HCM. C'est-à-dire, supposons que  $D_\alpha$  soit une fonction HCM. Les mêmes arguments que ceux employés dans la Proposition 5.21 entraînent que la mesure de probabilité  $\mu_\alpha$  est GGC, et donc que la fonction

$$u \mapsto \frac{(1+u)}{u^{2\alpha} - 2 \cos(\pi\alpha)u^\alpha + 1}$$

est complètement monotone. Il est facile de voir que cette fonction est croissante dans un voisinage de  $0+$ , elle ne peut donc pas être complètement monotone.  $\square$

**Remarques :** • Le théorème précédent montre que  $\forall \alpha \in [1, 2]$ , la fonction définie par

$$\frac{\lambda^{\alpha-1} - 1}{\lambda^\alpha - 1} \quad \text{si } \lambda \neq 1 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha - 1}{\alpha} \quad \text{si } \lambda = 1$$

est une fonction HCM. Notons au passage que nous savions déjà que cette fonction est de Stieltjes. Cela montre que  $\forall \alpha \in [1, 2]$ ,  $\forall c > 0$  (le cas  $c = 0$  est vraiment trivial), la fonction définie par

$$\frac{\lambda^{\alpha-1} - c^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha - c^\alpha} = \frac{1}{c} \frac{\left(\frac{\lambda}{c}\right)^{\alpha-1} - 1}{\left(\frac{\lambda}{c}\right)^\alpha - 1} \quad \text{si } \lambda \neq c \quad \text{et} \quad \frac{\alpha - 1}{\alpha c} \quad \text{si } \lambda = c$$

est HCM.

• La fonction  $D_\alpha$  n'est pas HCM. Il se pourrait que la fonction  $x \mapsto D_\alpha(x^{1/\alpha})$  soit HCM, cela signifierait que  $\tau_1 \sim \text{GGC}$ . Cela donnerait un exemple de temps de passage au dessus de 1 d'un processus de Lévy spectralement positif qui soit infiniment divisible.

• Le Théorème 5.7.1 dans [15] établit que,  $\forall \alpha \in (0, 1)$ ,  $\forall \lambda \geq 0$ ,  $\lambda \neq 1$ ,

$$\mathbb{E} \left( \exp \left( -\lambda \frac{\mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{\Gamma}_{1-\alpha}}{\mathbf{\Gamma}_\alpha} \right) \right) = \frac{1 - \lambda^\alpha}{1 - \lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left( \exp \left( -\frac{\mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{\Gamma}_{1-\alpha}}{\mathbf{\Gamma}_\alpha} \right) \right) = \alpha \quad \text{si } \lambda = 1$$

où  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_\alpha$  et  $\Gamma_{1-\alpha}$  sont des variables gamma supposées indépendantes. Ainsi, la fonction définie ci-dessus est HCM quel que soit  $\alpha \in (0, 1)$  (c'est aussi une fonction de Stieltjes puisqu'il y a  $\Gamma_1$  (ou  $\Gamma_{1-\alpha}$ ) en facteur). On pourrait facilement démontrer cette propriété en suivant la même démarche que celle du Théorème 5.25. Une perspective naturelle serait d'essayer de caractériser le caractère HCM, le caractère Stieltjes, ou la complète monotonie de fonctions du type

$$\lambda \mapsto \frac{\lambda^a - 1}{\lambda^b - 1}.$$

Les techniques utilisées pourraient être les mêmes que celles des Théorèmes 4.2 et 5.25 mais les calculs commencent à devenir assez compliqués.

### 5.5.3 La mesure de Bernstein et la transformée de Laplace de $D_\alpha$

Dans toute cette partie, pour  $r \geq 0$ ,  $\mathcal{H}_r$  désigne un chemin de Hankel contournant le cercle centré en l'origine et de rayon  $r$ . Le Théorème C.8 nous permet d'exprimer  $\forall n \geq 0$ ,

$$\frac{1}{\Gamma(1+n\alpha)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{H}_0} \xi^{-1-n\alpha} e^\xi d\xi.$$

En sommant termes à termes, nous obtenons  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{H}_{|z|^{1/\alpha}}} \frac{\xi^{\alpha-1} e^\xi}{\xi^\alpha - z} d\xi.$$

De façon similaire, nous obtenons le même type de relation pour la dérivée de  $E_\alpha$  :

$$\forall z \in \mathbb{C}, E'_\alpha(z) = \frac{1}{2i\pi\alpha} \int_{\mathcal{H}_{|z|^{1/\alpha}}} \frac{e^\xi}{\xi^\alpha - z} d\xi.$$

Nous obtenons alors la formule suivante :

$$\forall x \geq 0, D_\alpha(x) = E_\alpha(x^\alpha) - \alpha x^{\alpha-1} E'_\alpha(x^\alpha) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{H}_x} e^\xi \frac{\xi^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}}{\xi^\alpha - x^\alpha} d\xi.$$

L'intégrande se prolongeant à  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ , on peut donc lever la condition  $|\xi| > x$  pour ce chemin de Henkel puis déformer le chemin en le chemin limite «  $(-\infty, 0] \cup [0, -\infty)$  » parcouru dans le sens trigonométrique. Le calcul de cette intégrale donne l'expression de la mesure de Bernstein  $\mu_\alpha$  citée précédemment.

D'autre part, en appliquant la formule de Cauchy à la fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$

$$\xi \mapsto e^\xi \frac{\xi^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}}{\xi^\alpha - x^\alpha},$$

nous voyons (après un changement de variable) que,  $\forall x \geq 0$ ,

$$D_\alpha(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(\xi)=0} e^{x\xi} \frac{\xi^{\alpha-1} - 1}{\xi^\alpha - 1} d\xi = \mathcal{L}^{-1} \left( \lambda \mapsto \frac{\lambda^{\alpha-1} - 1}{\lambda^\alpha - 1} \right) (x).$$

La deuxième égalité étant une conséquence du Théorème A.30.

## 5.6 Remarques et compléments

### 5.6.1 Le cas $\alpha = 1/2$

Lorsque  $\alpha = 1/2$ , il est trivial que  $T_{1/2} = \mathbf{Z}_{1/2}/\tilde{\mathbf{Z}}_{1/2} \stackrel{d}{=} \Gamma_{1/2}/\tilde{\Gamma}_{1/2}$  a une densité HCM (les variables  $\Gamma_{1/2}$  et  $\tilde{\Gamma}_{1/2}$  sont supposées indépendantes). Le Corollaire 5.5 nous permet de voir que la densité de

$$\sqrt{T_{1/2}\tilde{T}_{1/2}} \stackrel{d}{=} \left( \frac{\Gamma_{1/2}^{(1)}\Gamma_{1/2}^{(2)}}{\Gamma_{1/2}^{(3)}\Gamma_{1/2}^{(4)}} \right)^{1/2}$$

est HCM (les variables  $\Gamma_{1/2}^{(i)}$  sont supposées être indépendantes). Cette propriété est moins évidente que la propriété HCM de la densité de  $T_{1/2}$ .

### 5.6.2 Retour sur la propriété HCM de $K_\nu$

La Proposition 5.4 nous dit que  $K_\nu$  est HCM si et seulement si  $|\nu| \leq 1/2$ . Nous donnons ici une autre preuve :

- La formule (79) page 98 dans [28] établit que  $\forall \nu \in (-1/2, 1/2), \forall x, y > 0$ ,

$$K_\nu(x)K_\nu(y) = 2 \cos(\nu\pi) \int_0^\infty K_{2\nu}(2\sqrt{xy} \sinh(t)) e^{-(x+y) \cosh(t)} dt.$$

Ainsi  $\forall u, v > 0$ ,

$$K_\nu(uv)K_\nu(u/v) = 2 \cos(\nu\pi) \int_0^\infty \underbrace{K_{2\nu}(2u \sinh(t)) e^{-uv \cosh(t)}}_{\text{CM en } w = v + 1/v} dt.$$

La Proposition A.5 entraîne alors que pour tout  $u > 0$ ,  $w \mapsto K_\nu(uw)K_\nu(u/w)$  est une fonction complètement monotone, c'est-à-dire, que la fonction  $K_\nu$  est HCM lorsque  $\nu \in (-1/2, 1/2)$ . La propriété HCM de  $K_{\pm 1/2}$  peut être démontrée de deux façons :

- Stabilité de la classe HCM par passage à la limite :  $\lim_{\nu \rightarrow 1/2} K_\nu(x) = K_{\pm 1/2}(x)$ , ceci quel que soit  $x \in \mathbb{R}$ ;
- La formule (40) page 10 dans [28] établit que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$K_{n+1/2}(z) = \left( \frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} e^{-z} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!} \frac{1}{(2z)^k}.$$

Si  $n = 0$ ,  $K_{1/2} : x \mapsto (\pi/2)^{1/2} x^{-1/2} e^{-x}$  est une fonction HCM.

- Le fait que  $\Gamma_\nu^{-1}$  ait une densité HCM (en particulier GGC) quel que soit  $\nu > 0$ , entraîne que, pour tout  $\nu \in \mathbb{R}$ , la fonction  $x \mapsto K_\nu(\sqrt{x})$  est HCM. En effet, la transformée de Laplace de  $\Gamma_\nu^{-1}$  s'exprime à l'aide d'une fonction de Bessel modifiée :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-\lambda/\Gamma_\nu}) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\lambda/x-x} dx = \frac{\lambda^{\nu/2}}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\sqrt{\lambda}(x+x^{-1})} dx \\ &= \frac{2\lambda^{\nu/2}}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \cosh(\nu x) e^{-2\sqrt{\lambda} \cosh(x)} dx = \frac{2\lambda^{\nu/2}}{\Gamma(\nu)} K_\nu(2\sqrt{\lambda}). \end{aligned}$$

Ainsi,  $K_\nu$  est HCM si et seulement si la fonction  $G_\nu : \lambda \mapsto \mathbb{E}(e^{-\lambda^2/\Gamma_\nu})$  est HCM. Cette dernière fonction étant décroissante, elle dans ce cas complètement monotone. Il existe donc une mesure positive (de probabilité)  $\mu$  sur  $(0, +\infty)$  telle que

$$G_\nu(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mu(dx).$$

D'une part,

$$G_\nu(\sqrt{\lambda}) = \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda}x} \mu(dx) = \int_0^\infty \mathbb{E}\left(e^{-\lambda \mathbf{Z}_x^{(1/2)}}\right) \mu(dx) = \int_0^\infty e^{-\lambda y} \int_0^\infty f_{\mathbf{Z}_x^{(1/2)}}(y) \mu(dx) dy,$$

où  $(Z_t^{(1/2)})_{t \geq 0}$  désigne un subordonateur strictement 1/2-stable, et  $f_{\mathbf{Z}_x^{(1/2)}}$  sa densité au temps  $x$ . Par auto-similarité,  $\mathbf{Z}_x^{(1/2)} \stackrel{d}{=} x^2 \mathbf{Z}_1^{(1/2)}$ , donc  $f_{\mathbf{Z}_x^{(1/2)}}(y) = x^{-2} f_{\mathbf{Z}_1^{(1/2)}}(y/x^2)$ . De plus,  $\mathbf{Z}_1^{(1/2)} \stackrel{d}{=} 1/(4\Gamma_{1/2})$ , donc

$$f_{\mathbf{Z}_1^{(1/2)}}(z) = \frac{z^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}} e^{-1/4z} \quad \text{et} \quad f_{\mathbf{Z}_x^{(1/2)}}(y) = \frac{x}{2\sqrt{\pi} y^{3/2}} e^{-x^2/4y}.$$

D'autre part,

$$G_\nu(\sqrt{\lambda}) = \mathbb{E}(e^{-\lambda/\Gamma_\nu}) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty e^{-\lambda/y} y^{\nu-1} e^{-y} dy = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty e^{-\lambda y} \frac{e^{-y}}{y^{\nu+1}} dy,$$

Par unicité de la transformée de Laplace, nous obtenons l'égalité

$$\int_0^\infty f_{\mathbf{Z}_x^{(1/2)}}(y) \mu(dx) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \frac{e^{-y}}{y^{\nu+1}}.$$

C'est-à-dire,

$$\frac{\Gamma(\nu)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x e^{-zx^2/4} \mu(dx) = z^{\nu-1/2} e^{-z}.$$

Le membre de gauche est complètement monotone en  $z$ , alors que celui de droite l'est seulement lorsque  $\nu \leq 1/2$ . Cela prouve la nécessité de la condition  $\nu \leq 1/2$ .

### 5.6.3 Une généralisation de la Proposition 5.7

Il est possible de compléter la Proposition 5.7 en remplaçant la constante  $\cos(\pi\alpha)$  par une constante quelconque  $c \in \mathbb{R}$  :

**Proposition 5.26** 1. Soient  $c > 1$  et  $\gamma \geq 0$ . La fonction  $x \mapsto 1/(x^{2\gamma} + 2cx^\gamma + 1)$  est HCM si et seulement si  $\gamma \leq 1$ .

2. Lorsque  $c < 0$ , la fonction  $x \mapsto 1/(x^{2\gamma} + 2cx^\gamma + 1)$  n'est pas HCM.

Notons  $\gamma_{\max} = \sup\{\gamma \geq 0 / x \mapsto 1/(x^{2\gamma} + 2cx^\gamma + 1) \text{ est HCM}\}$ . Nous avons représenté sur la figure 5.2 le graphique de  $\gamma_{\max}$  en fonction de  $c$ .

*Démonstration.* Soit  $c > 1$ . La fonction polynomiale  $x \mapsto x^2 + 2cx + 1$  a deux racines simples négatives. Le même argument que dans la démonstration du Théorème 5.2 nous permet de voir la nécessité de la condition  $\gamma \leq 1$ . Enfin, si  $\gamma \leq 1$ , la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^{2\gamma} + 2cx^\gamma + 1} = \frac{1}{x^\gamma + x_1} \times \frac{1}{x^\gamma + x_2} \quad (x_1, x_2 > 0)$$

est une fonction HCM comme produit de deux fonctions HCM.  $\square$

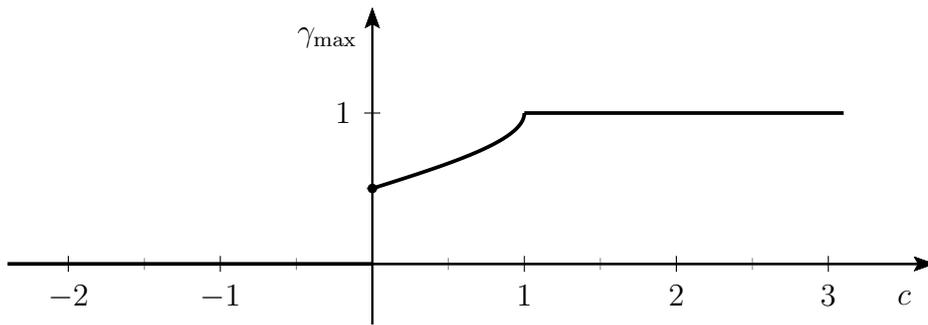


FIGURE 5.2 – Puissance maximale  $\gamma$  en fonction du paramètre  $c$

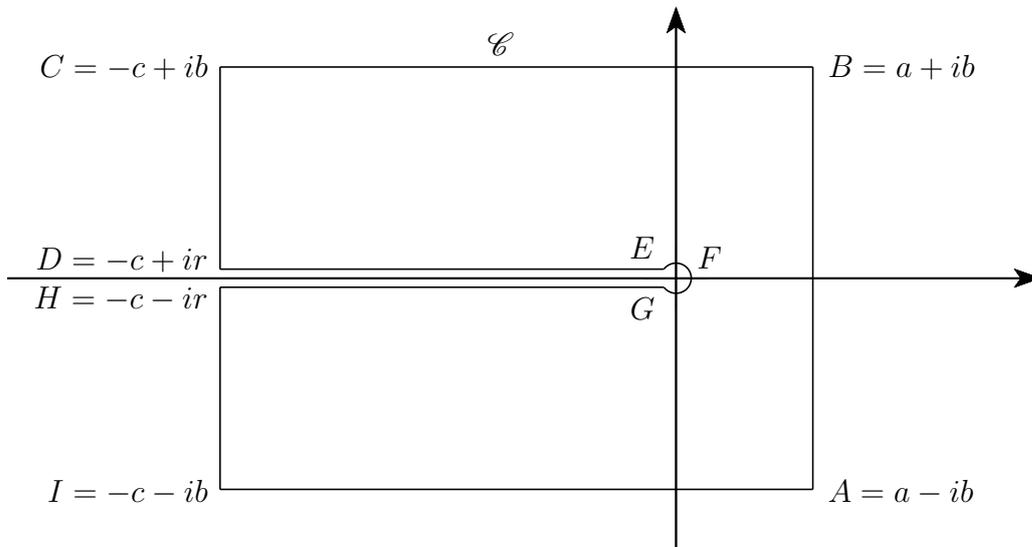


FIGURE 5.3 – Le contour  $\mathcal{C}$

### 5.6.4 Complète monotonie de la fonction $f_{\alpha,\gamma}$

**Corollaire 5.27** Soit  $\alpha \in [0, 1/2]$ . La fonction  $x \mapsto 1/(x^{2\gamma} + 2 \cos(\pi\alpha)x^\gamma + 1)$  est complètement monotone si  $0 \leq \gamma \leq 1 - \alpha$ .

*Démonstration.* Par le Théorème B.5, on sait qu’une fonction HCM décroissante est complètement monotone. Le théorème principal entraîne donc la complète monotonie de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^{2(1-\alpha)} + 2 \cos(\pi\alpha)x^{1-\alpha} + 1}.$$

La composée d’une fonction complètement monotone et d’une fonction de Bernstein étant complètement monotone, le corollaire est démontré.  $\square$

Il est possible de démontrer directement la complète monotonie de la fonction  $f_{\alpha,\gamma}$  en utilisant le théorème d’inversion de Laplace – Théorème A.30. Soit  $\mathcal{C}$  le contour défini par la figure 5.3 où  $F = r$  et où  $E$  et  $G$  sont sur le cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$ . Nous allons montrer que pour tous  $\alpha \in (0, 1/2)$  et  $\gamma \in (1/2, 1 - \alpha)$ ,  $f_{\alpha,\gamma}$  est complètement monotone. Nous devons vérifier si, pour un nombre  $a > 0$ , la fonction

$$\mathcal{L}^{-1}f_{\alpha,\gamma} : \lambda \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Re}(z)=a} e^{\lambda z} f_{\alpha,\gamma}(z) dz \tag{5.4}$$

est positive sur  $\mathbb{R}_+$ . Notons que cette fonction est nécessairement une fonction réelle. Nous avons déjà vu que comme  $\gamma < 1 - \alpha$ , la fonction  $f_{\alpha,\gamma}$  se prolonge analytiquement à  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . Et pour  $x > 0$ , on notera

$$f(-x^+) = \lim_{\substack{z \rightarrow -x \\ \text{Im}(z) > 0}} f_{\alpha,\gamma}(z) = \frac{1}{x^{2\gamma} e^{i2\gamma\pi} + 2 \cos(\pi\alpha) x^\gamma e^{i\pi\gamma} + 1},$$

et

$$f(-x^-) = \lim_{\substack{z \rightarrow -x \\ \text{Im}(z) < 0}} f_{\alpha,\gamma}(z) = \frac{1}{x^{2\gamma} e^{-i2\gamma\pi} + 2 \cos(\pi\alpha) x^\gamma e^{-i\pi\gamma} + 1} = \overline{f(-x^+)}.$$

Le théorème de Cauchy entraîne que  $\int_{\mathcal{C}} e^{\lambda z} f(z) dz = 0$ . Faisons tendre  $r \rightarrow 0$ ,  $b \rightarrow +\infty$  et  $c \rightarrow +\infty$  : comme  $f(z) \rightarrow 0$  uniformément lorsque  $|z| \rightarrow +\infty$ , on a

$$\int_{[BC] \cup [CD] \cup \widehat{EFG} \cup [HI] \cup [IA]} e^{\lambda z} f_{\alpha,\gamma}(z) dz \rightarrow 0.$$

On en tire

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} f_{\alpha,\gamma}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-\lambda x} (\overline{f_{\alpha,\gamma}(-x^+)} - f_{\alpha,\gamma}(-x^+)) dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \text{Im}(f_{\alpha,\gamma}(-x^+)) dx. \end{aligned}$$

On calcule  $\text{Im}(f_{\alpha,\gamma}(-x^+))$  :

$$\text{Im}(f_{\alpha,\gamma}(-x^+)) = -\frac{2x^\gamma \sin(\gamma\pi)}{|x^{2\gamma} e^{i2\gamma\pi} + 2 \cos(\pi\alpha) x^\gamma e^{i\pi\gamma} + 1|^2} \times (x^\gamma \cos(\pi\gamma) + \cos(\pi\alpha))$$

où le dénominateur ne s'annule pas, et où  $\cos(\gamma\pi) < 0$  puisque  $\gamma \in (1/2, 1 - \alpha)$ . Ainsi, il existe un nombre  $x_0 > 0$  tel que la fonction  $x \mapsto \text{Im}(f(-x^+))$  est négative sur  $(0, x_0)$ , puis positive sur  $(x_0, +\infty)$  ( $x_0 = (-\cos(\alpha\pi)/\cos(\gamma\pi))^{1/\gamma}$ ). Enfin, observons que  $\mathcal{L}^{-1} f_{\alpha,\gamma}(0) = 0$ . En effet, l'intégrale ne dépendant pas de  $a > 0$ , il suffit de faire tendre  $a \rightarrow +\infty$  dans (5.4). La positivité de  $\mathcal{L}^{-1} f_{\alpha,\gamma}(\lambda)$ , lorsque  $\lambda > 0$ , provient alors d'une application du lemme suivant :

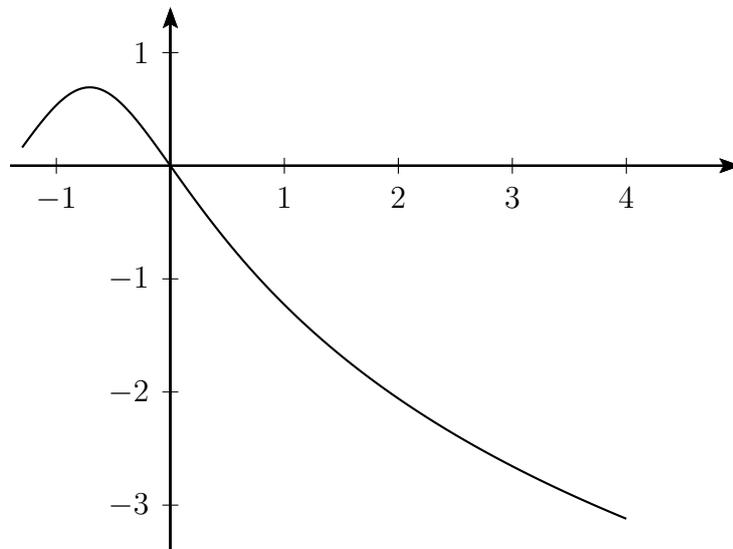
**Lemme 5.28** *Soit une fonction  $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  intégrable, et supposons qu'il existe un nombre  $x_0 > 0$  tel que :  $h$  soit positive sur  $(0, x_0)$  et négative sur  $(x_0, +\infty)$ . Alors,*

$$\int_0^\infty h(x) dx \leq 0 \iff \forall \lambda \geq 0, \int_0^\infty e^{-\lambda x} h(x) dx \leq 0.$$

*Démonstration.* Supposons que  $\int_0^\infty h(x) dx \leq 0$ . Alors  $\forall \lambda \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda x} h(x) dx &= \int_0^{x_0} e^{-\lambda x} h(x) dx + \int_{x_0}^\infty e^{-\lambda x} h(x) dx \\ &\leq \int_0^{x_0} e^{-\lambda x_0} h(x) dx + \int_{x_0}^\infty e^{-\lambda x_0} h(x) dx = e^{-\lambda x_0} \int_0^\infty h(x) dx \leq 0. \quad \square \end{aligned}$$

Lorsque  $\gamma \leq 1/2$ , la complète monotonie de la fonction ci-dessus est évidente car la fonction  $x \mapsto x^{2\gamma} + 2 \cos(\pi\alpha) x^\gamma + 1$  est une fonction de Bernstein. La fonction est donc complètement monotone. Il serait intéressant de caractériser l'exposant maximal  $\gamma_{\max}$  tel que la fonction  $f_{\alpha,\gamma}$  soit complètement monotone, comme on l'a fait pour la propriété HCM. Le Corollaire 5.27 entraîne que  $\gamma_{\max} \geq 1 - \alpha$ . Il est assez facile de voir que  $\gamma_{\max} < 1$  lorsque  $\alpha \neq 0$  :

FIGURE 5.4 – Représentation graphique de  $\log(f_{1/4,1})$ 

**Proposition 5.29** Soit  $\alpha \in (0, 1]$ . La fonction  $f_{\alpha,1} : x \mapsto 1/(x^2 + 2 \cos(\pi\alpha)x + 1)$  n'est pas complètement monotone.

Cette proposition établit que  $T_\alpha^\alpha \not\sim \text{ME}$ . De plus, nous verrons dans la section suivante que cela entraîne que la loi de  $T_\alpha^\alpha$  n'est pas GGC.

*Démonstration.* La fonction  $f : x \mapsto 1/(x^2 + 2 \cos(\pi\alpha)x + 1)$  se prolonge méromorphiquement sur  $\mathbb{C}$ , ses deux pôles sont  $e^{i\pi(1-\alpha)}$  et  $e^{-i\pi(1-\alpha)}$ . Plus précisément,

$$f(z) = \frac{1}{2i \sin(\pi\alpha)} \left( \frac{1}{z - e^{i\pi(1-\alpha)}} - \frac{1}{z - e^{-i\pi(1-\alpha)}} \right).$$

Il est ainsi facile de calculer la transformée de Laplace inverse de  $f$  en utilisant la formule des résidus :

$$\mathcal{L}^{-1}f(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\text{Re}(z)=a} e^{\lambda z} f(z) dz = \frac{e^{-\lambda \cos(\pi\alpha)} \sin(\lambda \sin(\pi\alpha))}{\sin(\pi\alpha)},$$

ceci quel que soit  $a > 0$ .  $\mathcal{L}^{-1}f$  n'est donc pas une fonction positive, et  $f$  n'est donc pas complètement monotone.  $\square$

Ici, il n'est pas possible d'utiliser le Lemme A.6 pour démontrer cette proposition. En effet, il est facile de vérifier que la fonction  $f : x \mapsto 1/(x^2 + 2 \cos(\pi\alpha)x + 1)$  est log-convexe sur  $(0, +\infty)$  si et seulement si  $\alpha \leq 1/4$  (voir la représentation graphique de  $\log(f)$  pour  $\alpha = 1/4$  sur la figure 5.4). Le Lemme A.7 permet d'affirmer que la fonction  $x \mapsto e^{-ax}/(x^2 + 2 \cos(\pi\alpha)x + 1)$  n'est jamais complètement monotone lorsque  $\alpha \in (0, 1/2]$ . Caractériser la complète monotonie de  $f_{\alpha,\gamma}$  semble compliqué. Des calculs numériques laissent penser qu'il existe des valeurs de  $\gamma > 1 - \alpha$  telles que  $f_{\alpha,\gamma}$  soit complètement monotone. En effet, comme pour la preuve alternative du Corollaire 5.27 et celle de la

Proposition 5.29, nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}f_{\alpha,\gamma}(\lambda) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(z)=a} e^{\lambda z} f_{\alpha,\gamma}(z) dz \\ &= \frac{\operatorname{Im}(z_1^{1-\gamma} e^{\lambda z_1})}{\gamma \sin(\pi\alpha)} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \operatorname{Im}(f_{\alpha,\gamma}(-x^+)) dx.\end{aligned}$$

Ici,  $z_1 = e^{i\pi(1-\alpha)/\gamma}$  et  $z_2 = e^{i\pi(1-\alpha)/\gamma}$  sont les deux pôles de  $f_{\alpha,\gamma}$  sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . Déterminer le signe de cette dernière expression ne semble malheureusement pas facile, excepté pour  $\lambda = 0$  où l'on sait déjà (après avoir fait tendre  $a \rightarrow +\infty$ ) que  $\mathcal{L}^{-1}f_{\alpha,\gamma}(0) = 0$ . Sur les

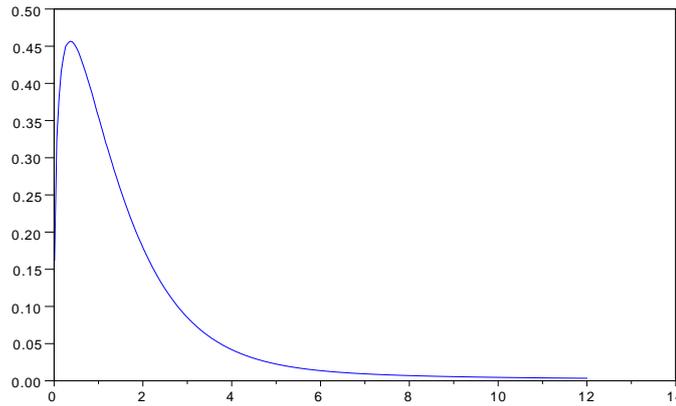


FIGURE 5.5 – Densité de la mesure de Bernstein de  $f_{\frac{1}{3}, \frac{7}{10}}$

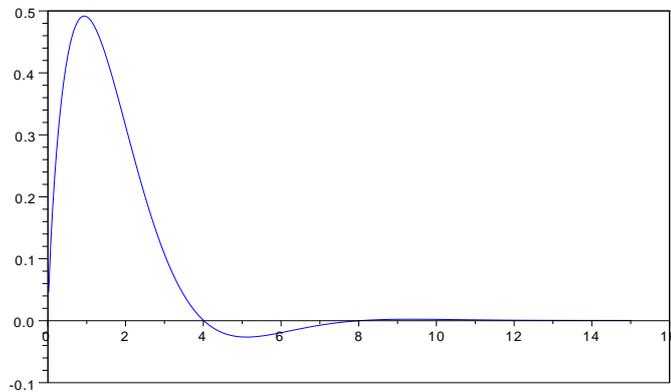


FIGURE 5.6 – Densité de la mesure de Bernstein de  $f_{\frac{1}{3}, \frac{9}{10}}$

figures 5.5 et 5.6, nous avons représenté les densités des mesures de Bernstein de  $f_{\frac{1}{3}, \frac{7}{10}}$  et de  $f_{\frac{1}{3}, \frac{9}{10}}$ . Bien que  $\frac{7}{10} > \frac{2}{3}$  ( $\frac{2}{3}$  est l'exposant maximal pour la propriété HCM), la mesure de Bernstein de  $f_{\frac{1}{3}, \frac{7}{10}}$  semble positive alors que celle de  $f_{\frac{1}{3}, \frac{9}{10}}$  semble prendre des valeurs négatives.

Par ailleurs, rappelons que la fonction  $x \mapsto x^{-\alpha} f_{\alpha, 1-\alpha}(x)$  est, à une constante multiplicative près, la densité de  $(\mathbf{Z}_\alpha / \tilde{\mathbf{Z}}_\alpha)^{\alpha/(1-\alpha)}$ . On en déduit que la loi de cette variable est un mélange de la loi gamma de paramètre  $1-\alpha$ . Cela signifie que nous avons la décomposition

$$\left( \frac{\mathbf{Z}_\alpha}{\tilde{\mathbf{Z}}_\alpha} \right)^{\alpha/(1-\alpha)} \stackrel{d}{=} \Gamma_{1-\alpha} \times Y_\alpha$$

pour une certaine variable aléatoire  $Y_\alpha$  indépendante de  $\Gamma_{1-\alpha}$ . Plus généralement, la fonction  $f_{\alpha,t}$  est complètement monotone si et seulement si la loi de  $(\mathbf{Z}_\alpha/\tilde{\mathbf{Z}}_\alpha)^{\alpha/t}$  est un mélange de la loi gamma de paramètre  $t$ , ce qui signifie que la fonction

$$s \mapsto \frac{\Gamma\left(1 - \frac{s}{t}\right) \Gamma\left(1 + \frac{s}{t}\right) \Gamma(t)}{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha s}{t}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha s}{t}\right) \Gamma(t+s)}$$

est la transformée de Mellin d'une certaine loi probabilité sur  $\mathbb{R}_+$ . Cependant il semble difficile de prouver directement ce type de propriété bien que cette fonction soit du même type que celles étudiées par Janson dans [33].

### 5.6.5 Lien avec la factorisation de Kanter

La factorisation de Kanter pour les lois  $\alpha$ -stables,  $\alpha \in (0, 1)$  – voir le Corollaire 4.1 dans [36], se lit

$$\mathbf{Z}_\alpha^{-\alpha/(1-\alpha)} \stackrel{d}{=} \mathbf{L} \times b_\alpha^{1/(1-\alpha)}(U)$$

avec  $U \sim \text{Unif}(0, \pi)$ ,  $\mathbf{L}$  une variable exponentielle indépendante de la variable  $U$ , et pour  $u \in (0, \pi)$ ,

$$b_\alpha(u) = \frac{\sin(u)}{\sin^\alpha(\alpha u) \sin^\beta(\beta u)}$$

avec  $\beta = 1 - \alpha$ . La loi de  $\mathbf{Z}_\alpha^{-\alpha/(1-\alpha)}$  est donc un mélange de la loi exponentielle (elle est en particulier infiniment divisible). La densité de la variable  $\mathbf{Z}_\alpha^{-\alpha/(1-\alpha)}$  est donc une fonction complètement monotone. En particulier, la densité de la variable  $T_\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}$  est complètement monotone. Cela signifie que la fonction définie par

$$\frac{x^{-\alpha}}{x^{2(1-\alpha)} + 2 \cos(\pi\alpha)x^{1-\alpha} + 1}$$

est complètement monotone. Lorsque  $\alpha \leq 1/2$ , le Corollaire 5.27 nous autorise même à supprimer le  $x^{-\alpha}$  au numérateur.

Puisque la variable  $b_\alpha^{1/(1-\alpha)}(U)$  est à support compact, la loi de  $\mathbf{Z}_\alpha^{-\delta}$  ne peut être infiniment divisible si  $\delta < \alpha/(1-\alpha)$  (conséquence du Théorème 1.11). Et si  $\delta \geq \alpha/(1-\alpha)$ , alors  $\mathbf{Z}_\alpha^{-\delta}$  a une densité complètement monotone donc infiniment divisible. Lorsque  $\alpha \leq 1/2$ , la Proposition 1 dans [35] permet de raffiner la divisibilité infinie en auto-décomposabilité. Enfin, les mêmes auteurs démontrent que la loi est GGC si  $\alpha \in (0, 1/4]$  et si  $\delta \geq 4\alpha$ .

### 5.6.6 Divisibilité infinie de $T_\alpha^\delta$

Nous avons vu que la densité de  $T_\alpha^\alpha$  n'est jamais HCM. Cependant,  $T_\alpha^\delta$  est infiniment divisible dès que  $\delta \geq \alpha$  et  $\alpha \leq 1/2$  :

**Proposition 5.30** *Soit  $\alpha \leq 1/2$ , alors la loi de  $T_\alpha^\alpha$  est un mélange de la loi gamma de paramètre 2, en particulier infiniment divisible.*

*Démonstration.* Nous devons montrer que la densité de  $T_\alpha^\alpha$  se factorise en  $x \times g(x)$  où  $g$  une fonction complètement monotone. Ceci revient à montrer que la fonction  $x \mapsto f_{\alpha,1}(x)/x$

est complètement monotone. En utilisant la formule (5.1), nous voyons qu'il suffit de montrer que la fonction

$$h : x \mapsto \frac{1}{x(x^2 + 1)}$$

est complètement monotone. Or, un calcul classique montre que

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \int_0^\infty e^{-xy} \sin(y) dy$$

et une intégration par parties que

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \int_0^\infty e^{-xy} (1 - \cos(y)) dy.$$

Ainsi,  $h$  est une fonction complètement monotone.  $\square$

**Corollaire 5.31** *Si  $\alpha \leq 1/2$  et  $|\delta| \geq \alpha$ , alors  $T_\alpha^\delta \sim \text{MG}_2$ . En particulier,  $T_\alpha^\delta$  est infiniment divisible.*

*Démonstration.* C'est un fait assez général : si  $X \sim \text{MG}_2$ , il existe une fonction complètement monotone  $f$  telle que  $X \sim xf(x)dx$ . Alors pour tout  $c \geq 1$ ,

$$X^c \sim x^{1/c} f(x^{1/c}) c^{-1} x^{1/c-1} dx = x \times \underbrace{c^{-1} f(x^{1/c}) x^{-2(1-1/c)}}_{g(x)} dx.$$

Or  $g$  est une fonction complètement monotone car :

- $x \mapsto x^{1/c}$  est une fonction de Bernstein donc  $x \mapsto f(x^{1/c})$  est une fonction complètement monotone ;
- $1 - 1/c \geq 0$  donc  $x \mapsto x^{-2(1-1/c)}$  est complètement monotone ;
- Le produit de deux fonctions complètement monotones est complètement monotone.

Donc  $T_\alpha^{c\alpha} \sim \text{MG}_2$  lorsque  $c \geq 1$ . Enfin, rappelons que  $T_\alpha \stackrel{d}{=} T_\alpha^{-1}$ .  $\square$

### 5.6.7 Caractère GGC de $T_\alpha^\delta$

Nous savons que la loi de  $T_\alpha^\delta$  est infiniment divisible dès que  $\alpha \leq 1/2$  et  $\delta \geq \alpha$ . Par ailleurs,  $T_{1/2}^{1/2} \stackrel{d}{=} |C|$  (où  $C \sim \mathbf{C}_1$  est une variable de Cauchy centrée standard) est auto-décomposable – voir [25]. Il est très tentant de supposer, au vu des démonstrations proposées par Bondesson pour la divisibilité infinie [13], et Diédhiou pour l'auto-décomposabilité [25], que  $T_\alpha^\alpha$  est aussi auto-décomposable lorsque  $\alpha \leq 1/2$ . Par contre, il est inutile d'espérer prouver le caractère GGC :

**Proposition 5.32**  $T_\alpha^\delta \sim \text{GGC} \implies f_{\alpha, \alpha/\delta}$  complètement monotone.

*Démonstration.* L'argument repose encore une fois sur le Théorème 4.8.  $\square$

Pour  $\alpha \neq 0$ , nous savons que  $f_{\alpha, 1}$  n'est pas complètement monotone. Ainsi, nous en déduisons que  $T_\alpha^\alpha \not\sim \text{GGC}$ . De façon analogue, pour tous  $\delta \in \mathbb{R}^*$  et  $\alpha \in (1/2, 1)$ ,  $T_\alpha^\delta \not\sim \text{GGC}$ .

# Chapitre 6

## Propriété HCM et les lois stables positives

### 6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons une réponse positive à une question de Bondesson à propos des lois stables – voir la section 1.3.5. Désignons par  $f_\alpha$  la densité stable de paramètre  $\alpha$ .

**Théorème 6.1** *La fonction  $f_\alpha$  est HCM si et seulement si  $\alpha \leq 1/2$ .*

### 6.2 Démonstration du théorème

**Lemme 6.2** *La densité du produit*

$$\Gamma_c \times \mathbf{B}_{a_1, b_1} \times \cdots \times \mathbf{B}_{a_n, b_n}$$

*est HCM quels que soient  $n \geq 1$ ,  $a_i, b_i > 0$  et  $c < \min(a_i)$ .*

*Démonstration.* Notons  $f$  et  $g$  les densités respectives de  $\mathbf{B}_{a_1, b_1} \times \cdots \times \mathbf{B}_{a_n, b_n}$  et de  $\Gamma_c \times \mathbf{B}_{a_1, b_1} \times \cdots \times \mathbf{B}_{a_n, b_n}$ . Nous exprimons la densité  $g$  en fonction de la densité  $f$  :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{d}{dx} \mathbb{P}(\Gamma_c \times \mathbf{B}_{a_1, b_1} \times \cdots \times \mathbf{B}_{a_n, b_n} \leq x) \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^1 \mathbb{P}(\Gamma_c \leq x/y) f(y) dy \\ &= \int_0^1 \frac{x^{c-1}}{\Gamma(c)} e^{-x/y} y^{-c} f(y) dy \\ &= \frac{x^{c-1} e^{-x}}{\Gamma(c)} \int_0^\infty e^{-xz} (z+1)^{c-2} f((z+1)^{-1}) dz \quad \text{avec } y = (z+1)^{-1}. \end{aligned}$$

Afin de démontrer ce lemme, il suffit de montrer que la fonction

$$H : x \mapsto \int_0^\infty e^{-xz} (z+1)^{c-2} f((z+1)^{-1}) dz$$

est HCM. La fonction  $H$  est la transformée de Laplace de la fonction

$$h : z \mapsto (z + 1)^{c-2} f((z + 1)^{-1}),$$

donc  $H$  est HCM si et seulement si la fonction  $h$  est la densité d'une mesure GGC. Puisque  $c < \min(a_i)$ , la fonction  $y \mapsto y^{-c} f(y)$  est à une constante de normalisation près la densité de  $\mathbf{B}_{a_1-c, b_1} \times \cdots \times \mathbf{B}_{a_n-c, b_n}$ . En effet, comparons les transformées de Mellin : nous avons pour tout  $s \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 y^s y^{-c} f(y) dy &= \mathbb{E} \left( (\mathbf{B}_{a_1, b_1} \times \cdots \times \mathbf{B}_{a_n, b_n})^{s-c} \right) \\ &= \frac{\Gamma(a_1 - c + s) \Gamma(a_1 + b_1)}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_1 + b_1 - c + s)} \times \cdots \times \frac{\Gamma(a_n - c + s) \Gamma(a_n + b_n)}{\Gamma(a_n) \Gamma(a_n + b_n - c + s)} \\ &= A \times \mathbb{E} \left( (\mathbf{B}_{a_1-c, b_1} \times \cdots \times \mathbf{B}_{a_n-c, b_n})^s \right) \end{aligned}$$

avec

$$A = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(a_i + b_i) \Gamma(a_i - c)}{\Gamma(a_i) \Gamma(a_i + b_i - c)}.$$

Donc  $h$  est à une constante multiplicative près la densité de  $\mathbf{B}_{a_1-c, b_1}^{-1} \times \cdots \times \mathbf{B}_{a_n-c, b_n}^{-1} - 1$ . Or, comme nous l'avons déjà vu dans le chapitre 4, la densité de  $\mathbf{B}_{a_i-c, b_i}^{-1} - 1$ , qui est définie par

$$\frac{\Gamma(a_i + b_i - c)}{\Gamma(a_i - c) \Gamma(b_i)} \times \frac{x^{b_i-1}}{(1+x)^{a_i+b_i-c}},$$

est HCM. En particulier  $\mathbf{B}_{a_i-c, b_i}^{-1} \sim \text{GGC}$ . Par le résultat principal de [16] – voir le Théorème 1.26, la loi de  $\prod_{i=1}^n \mathbf{B}_{a_i-c, b_i}^{-1}$ , et donc celle de  $\prod_{i=1}^n \mathbf{B}_{a_i-c, b_i}^{-1} - 1$  sont GGC. On en déduit que  $h$  est la densité d'une mesure GGC, et donc que  $H = \mathcal{L}h$  est HCM.  $\square$

**Lemme 6.3** *Pour tout  $\alpha \in (0, 1)$ , nous avons la factorisation*

$$\mathbf{Z}_\alpha^{-1} \stackrel{d}{=} e^{\gamma(1-\alpha^{-1})} \times \prod_{n=0}^{\infty} \left( e^{\psi(1+n\alpha) - \psi(\alpha+n\alpha)} \mathbf{B}_{\alpha+n\alpha, 1-\alpha} \right)$$

où la convergence du produit infini est presque sûre,  $\gamma$  désigne la constante d'Euler et  $\psi$  la fonction digamma.

*Démonstration.* La démonstration repose sur la formule de Malmsten – Proposition C.3 : pour tous  $a, s > 0$ ,

$$\frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(a)} = \exp \left( \psi(a)s + \int_{-\infty}^0 (e^{sx} - 1 - sx) \frac{e^{ax}}{|x|(1-e^x)} dx \right).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \mathbf{Z}_\alpha^{-s} \right) &= \frac{\Gamma(1+s/\alpha)}{\Gamma(1+s)} \\ &= \exp \left( \gamma(1-\alpha^{-1})s + \int_{-\infty}^0 (e^{sx} - 1 - sx) \frac{e^{\alpha x} (1 - e^{(1-\alpha)x})}{|x|(1-e^x)(1-e^{\alpha x})} dx \right) \\ &= \exp \left( \gamma(1-\alpha^{-1})s + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^0 (e^{sx} - 1 - sx) \frac{e^{(\alpha+n\alpha)x} (1 - e^{(1-\alpha)x})}{|x|(1-e^x)} dx \right). \end{aligned}$$

Toujours grâce la formule de Malmsten, plus précisément par le Corollaire C.5, on a

$$\mathbb{E}(\mathbf{B}_{\alpha+n\alpha,1-\alpha}^s) = \frac{\Gamma(\alpha+n\alpha+s)\Gamma(1+n\alpha)}{\Gamma(\alpha+n\alpha)\Gamma(1+n\alpha+s)} = \exp\left(\int_{-\infty}^0 (e^{sx}-1) \frac{e^{(\alpha+n\alpha)x}(1-e^{(1-\alpha)x})}{|x|(1-e^x)} dx\right).$$

Nous avons déjà utilisé cette équation dans la démonstration des Théorèmes 4.1 et 4.5. Ainsi,

$$\mathbb{E}(\log(\mathbf{B}_{\alpha+n\alpha,1-\alpha})) = -\int_{-\infty}^0 \frac{e^{(\alpha+n\alpha)x}(1-e^{(1-\alpha)x})}{1-e^x} dx = \psi(\alpha+n\alpha) - \psi(1+n\alpha),$$

voir par exemple la formule (C.1) pour la dernière égalité. Finalement, considérons la martingale définie pour  $n \in \mathbb{N}$  par

$$X_n = \sum_{i=0}^n \left( \log(\mathbf{B}_{\alpha+i\alpha,1-\alpha}) - \mathbb{E}(\log(\mathbf{B}_{\alpha+i\alpha,1-\alpha})) \right)$$

où tous les termes de la somme sont supposés indépendants. Par le théorème de convergence des martingales, puisque les variances sont uniformément bornées par

$$\int_{-\infty}^0 \frac{|x|e^{\alpha x}(1-e^{(1-\alpha)x})}{(1-e^x)(1-e^{\alpha x})} dx < +\infty,$$

on déduit qu'elle converge presque sûrement. Ainsi, par identification des transformées de Mellin, on obtient

$$\mathbf{Z}_\alpha^{-1} \stackrel{d}{=} e^{\gamma(1-\alpha^{-1})} \times \left( \lim_{n \rightarrow \infty} e^{X_n} \right) \stackrel{d}{=} e^{\gamma(1-\alpha^{-1})} \times \prod_{n=0}^{\infty} \left( e^{\psi(1+n\alpha)-\psi(\alpha+n\alpha)} \mathbf{B}_{\alpha+n\alpha,1-\alpha} \right). \quad \square$$

**Lemme 6.4** *Pour tous  $a, b > 0$ , nous avons la factorisation*

$$\Gamma_a \stackrel{d}{=} e^{\psi(a)} \times \prod_{n=0}^{\infty} \left( e^{\psi(a+1+nb)-\psi(a+nb)} \mathbf{B}_{a+nb,b} \right)$$

où la convergence du produit infini est presque sûre,  $\psi$  désigne la fonction digamma.

*Démonstration.* La démonstration est très similaire à celle du Lemme 6.3. Par la formule de Malmsten, on écrit

$$\mathbb{E}(\Gamma_a^s) = \frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(a)} = \exp\left(\psi(a)s + \int_{-\infty}^0 (e^{sx}-1-sx) \frac{e^{ax}}{|x|(1-e^x)} dx\right),$$

puis

$$\mathbb{E}(\mathbf{B}_{a+nb,b}^s) = \frac{\Gamma(a+nb+s)\Gamma(a+(n+1)b)}{\Gamma(a+nb)\Gamma(a+(n+1)b+s)} = \exp\left(\int_{-\infty}^0 (e^{sx}-1) \frac{e^{(a+nb)x}(1-e^{bx})}{|x|(1-e^x)} dx\right).$$

Alors,  $\forall x < 0$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{(a+nb)x}(1-e^{bx})}{|x|(1-e^{-x})} = \frac{e^{ax}}{|x|(1-e^x)}$$

et le reste de la démonstration est identique à celle du Lemme 6.3.  $\square$

Nous avons maintenant tous les éléments pour prouver le théorème principal.

*Démonstration du Théorème 6.1.* La partie « seulement si » de la démonstration a été démontrée à plusieurs reprises. C'est par exemple une conséquence du Corollaire 5.3. Nous savons aussi que  $\mathbf{Z}_{1/2} \sim \text{HCM}$  puisque  $\mathbf{Z}_{1/2} \stackrel{d}{=} (4\Gamma_{1/2})^{-1}$ . Nous avons donc juste à démontrer que la densité  $f_\alpha$  de  $\mathbf{Z}_\alpha$  est HCM lorsque  $\alpha < 1/2$ . Ou, de manière équivalente, démontrer pour  $\alpha < 1/2$ ,  $\mathbf{Z}_\alpha^{-1} \sim \text{HCM}$ . En combinant la factorisation élémentaire (qui peut se vérifier en calculant les moments fractionnaires)

$$\mathbf{B}_{a,b+c} \stackrel{d}{=} \mathbf{B}_{a,b} \times \mathbf{B}_{a+b,c}, \quad (6.1)$$

avec le Lemme 6.3, nous voyons que

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_\alpha^{-1} &\stackrel{d}{=} e^{\gamma(1-\alpha^{-1})} \times \prod_{n=0}^{\infty} \left( e^{\psi(1+n\alpha)-\psi(\alpha+n\alpha)} \mathbf{B}_{\alpha+n\alpha,1-\alpha} \right) \\ &\stackrel{d}{=} e^{\gamma(1-\alpha^{-1})} \times \prod_{n=0}^{\infty} \left( e^{\psi(1+n\alpha)-\psi(\alpha+n\alpha)} \times \mathbf{B}_{\alpha+n\alpha,\alpha} \times \mathbf{B}_{2\alpha+n\alpha,1-2\alpha} \right) \\ &= e^{\gamma(1-\alpha^{-1})} \times \left( \prod_{n=0}^{\infty} e^{\psi(2+n\alpha)-\psi(\alpha+n\alpha)} \mathbf{B}_{\alpha+n\alpha,\alpha} \right) \times \left( \prod_{n=0}^{\infty} e^{\psi(1+n\alpha)-\psi(2\alpha+n\alpha)} \mathbf{B}_{2\alpha+n\alpha,1-2\alpha} \right) \end{aligned}$$

où la convergence des produits infinis est presque sûre. Le Lemme 6.4 permet d'identifier la loi du premier terme et d'obtenir la factorisation

$$\mathbf{Z}_\alpha^{-1} \stackrel{d}{=} e^{\gamma(1-\alpha^{-1})-\psi(\alpha)} \times \Gamma_\alpha \times \left( \prod_{n=0}^{\infty} e^{\psi(1+n\alpha)-\psi(2\alpha+n\alpha)} \mathbf{B}_{2\alpha+n\alpha,1-2\alpha} \right),$$

où encore une fois, la convergence du produit infini est presque sûre. Ceci montre que  $\mathbf{Z}_\alpha^{-1}$  a la même loi que la limite presque sûre de

$$\mathcal{K}_n \times \Gamma_\alpha \times \mathbf{B}_{2\alpha,1-2\alpha} \times \cdots \times \mathbf{B}_{2\alpha+n\alpha,1-2\alpha}$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ . La classe des fonctions HCM étant stable pour la convergence en loi des variables aléatoires, le Lemme 6.2 permet de conclure la preuve.  $\square$

## 6.3 Remarques et compléments

### 6.3.1 Lien avec la factorisation en produit de variables gamma

Le produit infini obtenu au Lemme 6.3 peut être vu comme une généralisation de la factorisation

$$\mathbf{Z}_{1/n}^{-1} \stackrel{d}{=} \Gamma_{1/n} \times \cdots \times \Gamma_{(n-1)/n}.$$

Une combinaison des Lemmes 6.3 et 6.4 montre par exemple que

$$\mathbf{Z}_{1/2}^{-1} \stackrel{d}{=} e^{-\gamma} \times \prod_{n=0}^{\infty} \left( e^{\psi(1+n/2)-\psi((n+1)/2)} \mathbf{B}_{\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}} \right) \stackrel{d}{=} e^{-\gamma-\psi(1/2)} \Gamma_{1/2} = 4\Gamma_{1/2}$$

où la dernière est une conséquence de (C.1). De manière analogue, les Lemmes 6.3 et 6.4 combinés avec la factorisation élémentaire (6.1) montrent que

$$\mathbf{Z}_{1/n}^{-1} \stackrel{d}{=} e^{-(n-1)\gamma - \psi(\frac{1}{n}) - \dots - \psi(\frac{n-1}{n})} \times \Gamma_{1/n} \times \dots \times \Gamma_{(n-1)/n} = n^n \times \Gamma_{1/n} \times \dots \times \Gamma_{(n-1)/n}.$$

Une telle factorisation n'est possible que lorsque  $\alpha = 1/n$  pour un certain entier  $n \geq 1$ . En effet, par la démonstration du Théorème 4.5, nous savons que  $\log(\Gamma_a)$  a une loi EGGC. Donc, lorsqu'une telle factorisation est possible, la loi de  $\log(\mathbf{Z}_\alpha)$  a aussi une loi EGGC. Cependant il est assez facile de voir que ça n'est pas le cas lorsque  $\alpha \neq 1/n$  pour tout  $n \geq 1$  : soit

$$\Phi(\lambda) = \mathbb{E}(e^{-\lambda \log(\mathbf{Z}_\alpha)}) = \mathbb{E}(\mathbf{Z}_\alpha^{-\lambda}) = \frac{\Gamma(1 + \lambda/\alpha)}{\Gamma(1 + \lambda)}.$$

Alors par la formule 6.3.16 dans [1] page 259,

$$-\frac{\Phi'(\lambda)}{\Phi(\lambda)} = \psi(1 + \lambda) - \frac{1}{\alpha} \psi(1 + \lambda/\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \gamma + \sum_{k \geq 1} \left( \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{k} + \frac{1}{\alpha k + \lambda} - \frac{1}{k + \lambda} \right).$$

Quelques simplifications donnent

$$\text{Im} \left( -\frac{\Phi'(\lambda)}{\Phi(\lambda)} \right) = \text{Im}(\lambda) \times \sum_{k \geq 1} \left( \frac{1}{|k + \lambda|^2} - \frac{1}{|\alpha k + \lambda|^2} \right).$$

Si  $\alpha$  n'est pas l'inverse d'un entier, alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\forall k \geq 1$ ,  $|\alpha k - 1| \geq \varepsilon$ . En faisant tendre  $\lambda \rightarrow 1$ , on voit que  $\text{Im}(-\Phi'(\lambda)/\Phi(\lambda))$  prend des valeurs positives. Observons qu'il était également possible d'utiliser la formule de Malmsten pour démontrer ceci.

### 6.3.2 Extension pour les puissances

Notre résultat montre que la densité de  $\mathbf{Z}_\alpha^\delta$  est HCM dès que  $\alpha \leq 1/2$  et  $|\delta| \geq 1$ . Rappelons que cette densité n'est jamais HCM lorsque  $\alpha > 1/2$  parce qu'elle n'est même pas hyperboliquement monotone – voir le théorème principal de [49], ou parce que le quotient  $T_\alpha = \mathbf{Z}_\alpha / \tilde{\mathbf{Z}}_\alpha$  (où  $\tilde{\mathbf{Z}}_\alpha$  est une copie indépendante de  $\mathbf{Z}_\alpha$ ) n'est pas HCM d'après le Théorème 5.2. Il reste à déterminer la puissance minimale  $\delta_{\min} \geq 0$  qui rend la densité de  $\mathbf{Z}_\alpha^\delta$  HCM (lorsque  $\alpha \leq 1/2$ ). Nous savons par le Théorème 5.2 que  $\delta_{\min} \geq \alpha/(1 - \alpha)$ . Enfin, le Corollaire 5.6 établit que  $\delta_{\min} = 1/2$  lorsque  $\alpha = 1/3$ .

La factorisation

$$\mathbf{Z}_\alpha^{-\alpha} \stackrel{d}{=} e^{\gamma(\alpha-1)} \times \prod_{n=0}^{\infty} \left( e^{\psi(1+n/\alpha) - \psi((n+1)/\alpha)} \mathbf{B}_{1+n/\alpha, -1+1/\alpha} \right)$$

obtenue de façon similaire aux Lemmes 6.3 et 6.4 permet à l'aide des Théorèmes 4.2 et 1.26 de montrer la proposition suivante :

**Proposition 6.5**  $\mathbf{Z}_\alpha^\delta \sim \text{GGC}$  si l'une des quatre conditions suivantes est vérifiée :

- (1)  $\alpha = \delta \in (0, 1)$  ;
- (2)  $\alpha = 1/2$  et  $\delta > 0$  ;
- (3)  $\alpha \in (0, 1/2)$  et  $\delta > \alpha$  ;
- (4)  $\alpha \in (1/2, 2/3]$  et  $\delta \in [\alpha/2, \alpha)$ .

Lorsque  $\alpha = 1/2$ , on retrouve le caractère GGC de la loi de  $\Gamma_{1/2}^{-\delta}$  du Théorème 4.5 en utilisant l'égalité en loi  $\mathbf{Z}_{1/2} \stackrel{d}{=} (4\Gamma_{1/2})^{-1}$ . Bien entendu, pour  $\alpha \in (0, 1/2]$ ,  $\mathbf{Z}_\alpha^\delta \sim \text{GGC}$  dès que  $|\delta| \geq 1$  puisque sa densité est HCM par le théorème principal de ce chapitre. Enfin, rappelons que  $\forall \alpha \in (0, 1]$ ,  $\mathbf{Z}_\alpha \sim \text{GGC}$  car la fonction  $\lambda \mapsto \lambda^\alpha$  est Thorin-Bernstein – voir la Proposition A.27.

# Annexe A

## Fonctions complètement monotones et fonctions de Bernstein

Dans ce chapitre nous faisons un rapide survol de la théorie des fonctions complètement monotones et des fonctions de Bernstein en suivant les premiers chapitres de [46].

### A.1 Fonctions complètement monotones et fonctions de Stieltjes

#### A.1.1 Fonctions complètement monotones

**Définition A.1** Une fonction  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  est dite complètement monotone si elle est  $C^\infty$  et si  $\forall n \geq 0$ ,

$$(-1)^n f^{(n)} \geq 0.$$

Il est par exemple aisé de vérifier (le calcul des dérivées est explicite) que la fonction  $\lambda \mapsto \lambda^{-a}$  est complètement monotone si et seulement si  $a \geq 0$ . De même avec la fonction  $\lambda \mapsto e^{-a\lambda}$ . Cette dernière fonction est le prototype de la fonction complètement monotone – voir le Théorème A.3. Définissons maintenant la transformée de Laplace d’une mesure sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Définition A.2** Soit  $\mu$  une mesure sur  $\mathbb{R}_+$ . La transformée de Laplace de  $\mu$  est la fonction définie sur  $(0, +\infty)$  par

$$\mathcal{L}\mu(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mu(dx). \tag{A.1}$$

Lorsque que la mesure  $\mu$  a une densité  $h$ , nous noterons  $\mathcal{L}h = \mathcal{L}\mu$  la transformée de Laplace de  $\mu(dx) = h(x)dx$ .

Il est bien sûr nécessaire que l’intégrale dans (A.1) soit convergente. Nous parlerons en général de la transformée de Laplace d’une mesure positive, dans ce cas  $\mathcal{L}\mu(\lambda)$  a toujours un sens ( $\mathcal{L}\mu(\lambda) = +\infty$  éventuellement). Il est évident que la transformée de Laplace d’une mesure positive est  $C^\infty$  sur son domaine de convergence. Si  $\mathcal{L}\mu < +\infty$  sur  $(0, +\infty)$ , on voit alors facilement que  $\mathcal{L}\mu$  est complètement monotone. Enfin, lorsque  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathcal{L}\mu(\lambda) < +\infty$ , nous noterons cette limite  $\mathcal{L}\mu(0)$ .

**Théorème A.3** (Bernstein) *Soit  $f$  une fonction complètement monotone. Il existe une unique mesure positive  $\mu$  sur  $\mathbb{R}_+$  telle que*

$$f = \mathcal{L}\mu.$$

*Réciproquement, dès que pour une certaine mesure positive  $\mu$ ,  $\forall \lambda > 0$   $\mathcal{L}\mu(\lambda) < +\infty$ , la fonction  $\mathcal{L}\mu$  est complètement monotone.*

Avec les notations du théorème précédent, on dira que  $\mu$  est la *mesure de Bernstein* associée à la fonction complètement monotone  $f$ .

**Proposition A.4** *L'ensemble des fonctions complètement monotone est stable par addition, par multiplication et par limite simple.*

La multiplication correspond à la convolution (additive) : si  $\mu$  et  $\nu$  sont deux mesures positives sur  $\mathbb{R}_+$ , alors  $\mathcal{L}\mu \times \mathcal{L}\nu = \mathcal{L}(\mu * \nu)$ . La limite simple correspond à la convergence en loi (théorème de Lévy) :  $\mu_n \rightarrow \mu$  étroitement si et seulement si  $\mathcal{L}\mu_n \rightarrow \mathcal{L}\mu$  simplement.

**Proposition A.5** *Soient  $(E, \mathcal{A}, m)$  un espace mesuré et  $f : (0, +\infty) \times X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction tels que*

- (1)  $\lambda \mapsto f(\lambda, x)$  est complètement monotone pour presque tout  $x$  ;
- (2)  $\forall \lambda \in (0, +\infty)$ ,  $x \mapsto f(\lambda, x)$  est intégrable.

*Alors la fonction  $F : \lambda \mapsto \int_E f(\lambda, x) m(dx)$  est complètement monotone.*

*Démonstration.* Si l'on montre que la fonction  $F$  est  $C^1$  et que

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \int_E f(\lambda, x) m(dx) \right) = \int_E \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) m(dx),$$

alors il suffira d'itérer la procédure en l'appliquant à  $-F'$ , puis à  $F''$ , etc. On calcule pour  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ ,

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_E \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) m(dx) d\lambda = \int_E (f(\lambda_2, x) - f(\lambda_1, x)) m(dx) \geq - \int_E f(\lambda_1, x) m(dx) > -\infty$$

où la première intégrale a un sens et où l'utilisation du théorème de Fubini est justifiée puisque  $\partial f / \partial \lambda \leq 0$ . Ceci montre que pour presque tout (et donc pour tout)  $\lambda \in (0, +\infty)$

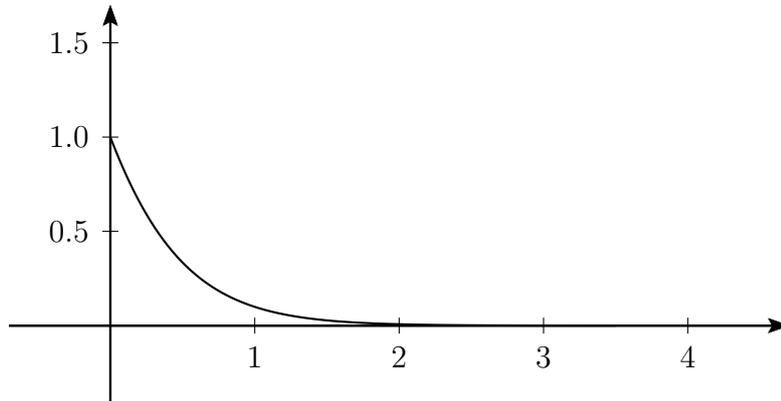
$$\int_E \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) m(dx) > -\infty.$$

Ceci montre en particulier que  $F$  est  $C^1$  et que  $F' \leq 0$ . □

**Lemme A.6** *Une fonction complètement monotone est log-convexe.*

*Démonstration.* Ce lemme est une application de l'inégalité de Hölder. Soit  $f$  une fonction complètement monotone. Par le Théorème A.3, il existe une mesure positive  $\mu$  telle que  $f = \mathcal{L}\mu$ . Ainsi, pour  $\alpha \in [0, 1]$  et  $x, y \in (0, \infty)$ ,

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= \int_0^\infty e^{-\alpha xt} e^{-(1-\alpha)yt} \mu(dt) \\ &\leq \left( \int_0^\infty e^{-xt} \mu(dt) \right)^\alpha \left( \int_0^\infty e^{-yt} \mu(dt) \right)^{1-\alpha} = f(x)^\alpha f(y)^{1-\alpha}. \end{aligned} \quad \square$$

FIGURE A.1 – Représentation graphique de la fonction  $x \mapsto (1+x)e^{-3x}$ 

**Lemme A.7** Soient une fonction  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  et un nombre  $a > 0$  tels que :

- (1) La fonction  $\lambda \mapsto e^{-a\lambda}f(\lambda)$  est complètement monotone ;
- (2) Il existe  $b > 0$  tel que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda)/\lambda^b = 0$ .

Alors  $f$  est complètement monotone.

*Démonstration.* Soit  $g : \lambda \mapsto e^{-a\lambda}f(\lambda)$ . La fonction  $g$  étant complètement monotone, d'après le Théorème A.3 il existe une mesure positive  $\mu$  sur  $[0, +\infty)$  telle que  $g = \mathcal{L}\mu$ . Ainsi,

$$f(\lambda) = \int_{-a}^{+\infty} e^{-\lambda x} \mu_a(dx)$$

où  $\mu_a$  est la mesure translatée de  $+a$  de la mesure  $\mu$ , c'est-à-dire,  $\mu_a$  est définie par  $\mu_a(E) = \mu(E - a)$ . La condition (2) entraîne que  $\mu_a([-a, 0)) = 0$ , ainsi la fonction  $f$  est complètement monotone.  $\square$

Ces lemmes élémentaires sont cependant utiles, par exemple pour montrer qu'une fonction n'est pas complètement monotone. Ainsi, il n'existe aucun nombre  $a > 0$  tel que la fonction  $\lambda \mapsto (1+\lambda)e^{-a\lambda}$  soit complètement monotone puisque la fonction  $\lambda \mapsto -a\lambda + \log(1+\lambda)$  n'est pas convexe. Pourtant, il aurait été tentant de supposer le contraire pour  $a = 3$  au vu de sa représentation graphique (voir figure A.1).

### A.1.2 Fonctions de Stieltjes

**Définition A.8** Une fonction positive  $f$  est dite de Stieltjes s'il existe  $b \geq 0$  et une mesure positive  $\sigma$  sur  $\mathbb{R}_+$  tels que pour tout  $\lambda \geq 0$ ,

$$f(\lambda) = b + \int_0^{\infty} \frac{\sigma(dy)}{\lambda + y}.$$

La mesure  $\sigma$  est appelée mesure de Stieltjes associée à la fonction  $f$ . Remarquons qu'elle doit vérifier la condition d'intégrabilité  $\int_{[0, +\infty)} (1 \wedge y^{-1}) \sigma(dy) < +\infty$ . Un calcul simple permet de voir que toute fonction de Stieltjes  $f$  est de la forme  $f = \mathcal{L}(b\delta_0) + \mathcal{L}(\mathcal{L}\sigma)$ , où  $b$  et  $\sigma$  sont définis ci-dessus.

Il est très facile de voir qu'une fonction de Stieltjes se prolonge analytiquement sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  et qu'elle vérifie une inégalité de type Pick :

$$\operatorname{Im}(z) \geq 0 \implies \operatorname{Im}(f(z)) \leq 0.$$

On dit alors que  $-f$  est une fonction de Nevanlinna-Pick ou encore « opérateur monotone ». Cette dernière propriété est caractérisante :

**Théorème A.9** *Soit  $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe telle que  $\operatorname{Im}(f) \leq 0$  sur l'ensemble  $\{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(z) > 0\}$  et telle que  $f(\lambda) \in \mathbb{R}_+$  si  $\lambda \in (0, +\infty)$ . Alors  $f$  est une fonction de Stieltjes.*

Ce théorème est à la base des démonstrations des Théorèmes 4.2, 5.2 et 5.25. Il est facile de voir que l'ensemble des fonctions de Stieltjes est stable par addition et par la multiplication par un réel positif. Mais contrairement à l'ensemble des fonctions complètement monotones, l'ensemble des fonctions de Stieltjes n'est pas stable par multiplication. En effet,  $\lambda \mapsto 1/\lambda^2$  n'est pas Stieltjes (elle ne vérifie pas l'inégalité de Pick ci-dessus) alors qu'elle est le carré de la fonction de Stieltjes  $\lambda \mapsto 1/\lambda$ . Enfin, par une conséquence immédiate du Théorème A.9, la limite simple de fonctions de Stieltjes reste de Stieltjes :

**Proposition A.10** *L'ensemble des fonctions de Stieltjes est stable pour la limite simple.*

## A.2 Fonctions de Bernstein

### A.2.1 Fonctions de Bernstein générales

**Définition A.11** Une fonction  $f$  est dite de Bernstein si elle  $C^\infty$ , positive et si  $f'$  est complètement monotone.

**Proposition A.12** *Une fonction  $f$  est de Bernstein si et seulement s'il existe  $a, b \geq 0$  et une mesure  $\mu$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  telle que  $\forall \lambda \geq 0$ ,*

$$f(\lambda) = a + b\lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x})\mu(dx).$$

*La mesure  $\mu$  vérifie la condition d'intégrabilité  $\int_0^\infty (1 \wedge x)\mu(dx) < +\infty$ . Le triplet  $(a, b, \mu)$  est unique.*

**Proposition A.13** *La classe des fonctions de Bernstein est stable par addition, par multiplication par un scalaire positif et par limite simple.*

**Proposition A.14** *Soit  $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $\varphi$  est une fonction de Bernstein ;
- (2) Pour toute fonction complètement monotone  $f$ ,  $f \circ \varphi$  est complètement monotone ;
- (3) Pour tout  $t \geq 0$ ,  $\lambda \mapsto e^{-t\varphi(\lambda)}$  est complètement monotone.

En particulier, si  $f$  est une fonction complètement monotone et  $g$  une fonction de Bernstein, alors  $f \circ g$  est complètement monotone.

**Corollaire A.15** *Une mesure de probabilité  $\mathfrak{p}$  sur  $\mathbb{R}_+$  est infiniment divisible si et seulement si  $\varphi = -\log(\mathcal{L}\mathfrak{p})$  est une fonction de Bernstein.*

On retrouve alors la formule de Lévy-Khintchine dans le cas positif : une mesure de probabilité  $\mathbf{p}$  sur  $\mathbb{R}_+$  est infiniment divisible si et seulement s'il existe un (unique) couple  $(b, \mu)$  tel que pour tout  $\lambda \geq 0$ ,

$$\mathcal{L}\mathbf{p}(\lambda) = \exp\left(-b\lambda - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x})\mu(dx)\right).$$

Le fait que  $\mathbf{p}$  soit une mesure de probabilité implique que  $\mathcal{L}\mathbf{p}(0) = 1$ . Ainsi, le nombre  $a$  de la Proposition A.12 est égal à 0. En revanche, si  $\mathbf{q}$  est une sous-probabilité (i.e. une mesure positive de masse  $\leq 1$ ), alors  $\mathbf{q}$  est infiniment divisible si et seulement si  $\mathcal{L}\mathbf{q}$  se met sous la forme

$$\mathcal{L}\mathbf{q}(\lambda) = \exp\left(-a - b\lambda - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x})\mu(dx)\right).$$

Cela revient à considérer la mesure de probabilité  $\mathbf{p}$  sur  $[0, +\infty]$  définie par

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mathbf{p}(A) = \mathbf{q}(A) \quad \text{et} \quad \mathbf{p}(\{+\infty\}) = 1 - \mathbf{q}(\mathbb{R}_+).$$

Nous voyons ainsi que  $\mathcal{L}\mathbf{p} = \mathcal{L}\mathbf{q}$  (où  $\mathcal{L}\mathbf{p}$  est définie par (A.1)). Le coefficient  $a$  est appelé coefficient de meurtre.

## A.2.2 Fonctions de Bernstein complètes

**Définition A.16** Une fonction de Bernstein  $f$  est dite complète si la mesure de Bernstein  $\mu$  admet une densité complètement monotone  $m$ . Notant  $\kappa$  la mesure de Bernstein de la densité  $m$ ,  $f$  admet alors la représentation

$$f(\lambda) = a + b\lambda + \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda + y} \frac{\kappa(dy)}{y}.$$

La mesure  $\sigma(dy) = y^{-1}\kappa(dy)$  est appelée mesure de Stieltjes associée à la fonction  $f$ , par un léger abus de notation (stricto sensu,  $a\delta_0 + \sigma$  est la mesure de Stieltjes de la fonction de Stieltjes  $\lambda \mapsto f(\lambda)/\lambda$ ).

On appelle  $\sigma$  mesure de Stieltjes car  $\sigma$  est la mesure de Stieltjes de la fonction  $\lambda \mapsto f(\lambda)/\lambda$ . Les fonctions de Bernstein complètes sont aussi caractérisées par un critère de type Pick. Voici l'analogie du Théorème A.9 :

**Théorème A.17** Soit  $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe telle que  $\text{Im}(f) \geq 0$  sur l'ensemble  $\{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) > 0\}$  et telle que  $f(\lambda) \in \mathbb{R}_+$  si  $\lambda \in (0, +\infty)$ . Alors  $f$  est une fonction de Bernstein complète.

**Théorème A.18** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction qui ne s'annule pas sur  $(0, +\infty)$ . Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $f$  est une fonction de Bernstein complète ;
- (2)  $\lambda \mapsto f(\lambda)/\lambda$  est une fonction de Stieltjes ;
- (3)  $\lambda \mapsto \lambda/f(\lambda)$  est une fonction de Bernstein complète ;
- (4)  $1/f$  est une fonction de Stieltjes.

### A.2.3 Fonctions de Thorin-Bernstein

**Définition A.19** Une fonction de Bernstein est dite de Thorin-Bernstein s'il existe une fonction complètement monotone  $m$  telle que la mesure de Bernstein  $\mu$  s'écrit

$$\mu(dx) = \frac{m(x)}{x} dx.$$

**Remarque :** Si la fonction  $m$  est complètement monotone, alors  $x \mapsto m(x)/x$  l'est aussi. Une fonction de Thorin-Bernstein est donc une fonction de Bernstein complète.

**Proposition A.20** Une fonction de Thorin-Bernstein  $f$  est de la forme

$$f(\lambda) = a + b\lambda + \int_0^\infty \log\left(1 + \frac{\lambda}{y}\right) \nu(dy)$$

où  $a, b \geq 0$ , la mesure  $\nu$  est appelée mesure de Thorin, elle vérifie les conditions d'intégrabilité

$$\int_0^1 -\log(y) \nu(dy) < +\infty \quad \text{et} \quad \int_1^\infty \frac{\nu(dy)}{y} < +\infty.$$

La formule suivante (qui se démontre en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli puis en calculant une intégrale dite de Frullani) est importante :

$$\int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \left( \int_0^\infty e^{-xy} \nu(dy) \right) \frac{dx}{x} = \int_0^\infty \log\left(1 + \frac{\lambda}{y}\right) \nu(dy). \quad (\text{A.2})$$

**Proposition A.21** Soit  $f$  une fonction de Thorin-Bernstein. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $f'/f$  est une fonction de Stieltjes ;
- (2) Pour toute fonction de Thorin-Bernstein  $g$ ,  $g \circ f$  est une fonction de Thorin-Bernstein.

En particulier, pour toute fonction de Thorin-Bernstein  $f$  et pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\lambda \mapsto f(\lambda^\alpha)$  est une fonction de Thorin-Bernstein.

Nous énonçons enfin la proposition qui, combinée avec le Théorème A.9, est à l'origine du critère de Pick des lois GGC utilisé dans les démonstrations des Théorèmes 4.2, 5.2 et 5.25.

**Proposition A.22** Une fonction  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est de Thorin-Bernstein si et seulement si  $f \geq 0$  et  $f'$  est une fonction de Stieltjes.

### A.2.4 Logarithme d'une fonction de Bernstein complète

**Théorème A.23** Une fonction  $f$  est une fonction de Bernstein complète si et seulement s'il existe une constante  $a \in \mathbb{R}$  et une fonction mesurable  $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$  tels que  $\forall \lambda \geq 0$ ,

$$f(\lambda) = \exp\left(a + \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{\lambda+t}\right) \eta(t) dt\right). \quad (\text{A.3})$$

Cette représentation est unique.

Supposons que l'on ait une fonction  $f$  admettant une représentation du type (A.3) où la fonction  $\eta$  prend des valeurs en dehors de l'intervalle  $[0, 1]$  sur un ensemble de mesure non nulle. En étudiant la partie imaginaire de l'exposant de  $f$ , on peut montrer que dans ce cas, sa partie imaginaire ne reste pas confinée dans l'ensemble  $[0, \pi]$  sur  $\{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) > 0\}$ . La fonction  $f$  n'est donc pas une fonction de Bernstein complète. D'autre part, lorsque  $\int_0^1 t^{-1} \eta(t) dt < +\infty$ , on peut changer la constante  $a$  et écrire

$$f(\lambda) = \exp \left( a + \int_0^\infty \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{\lambda + t} \right) \eta(t) dt \right) = \exp \left( a + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \left( \int_0^\infty e^{-tx} \eta(t) dt \right) dx \right).$$

Et une nouvelle fois, l'appartenance de  $\eta(t) \in [0, 1]$  caractérise l'appartenance de  $f$  à l'ensemble des fonctions de Bernstein complètes.

**Corollaire A.24**  $\text{ME} \subset \text{ID}$

*Démonstration.* Si  $\mathbf{p} \in \text{ME}$ , alors  $\mathcal{L}\mathbf{p}$  est une fonction de Stieltjes non nulle. Ainsi,  $1/\mathcal{L}\mathbf{p}$  est une fonction de Bernstein complète. Le Théorème A.23 exhibe l'exposant de Laplace de  $\mathbf{p}$  qui est une fonction de Bernstein complète. En particulier,  $\mathbf{p}$  est infiniment divisible.  $\square$

### A.3 La fonction $\lambda \mapsto \lambda^\alpha$

Il est très facile de constater que  $\forall \alpha \geq 0$ ,  $x \mapsto x^{-\alpha}$  est complètement monotone et que  $x \mapsto x^\alpha$  est une fonction de Bernstein (et même de Thorin-Bernstein) si et seulement si  $\alpha \in [0, 1]$ . Dans cette section, nous donnons les mesures de Bernstein, de Stieltjes et de Thorin associées. Le point de départ est l'égalité

$$1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx, \quad \forall \lambda > 0.$$

Nous avons donc démontré la proposition suivante :

**Proposition A.25** *Pour tout  $\alpha > 0$ , la fonction  $\lambda \mapsto \lambda^{-\alpha}$  est complètement monotone. Sa mesure de Bernstein est  $\mu(dx) = \Gamma(\alpha)^{-1} x^{\alpha-1} dx$ . C'est-à-dire,  $\forall \lambda > 0$ ,*

$$\frac{1}{\lambda^\alpha} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dx. \quad (\text{A.4})$$

Lorsque  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $1 - \alpha \in (0, 1)$ , on peut réécrire la mesure de Bernstein ci-dessus :

$$\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dx = \left( \int_0^\infty e^{-xt} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} dt \right) dx$$

et l'on voit que  $\lambda \mapsto \lambda^{-\alpha}$  est une fonction de Stieltjes lorsque  $\alpha \in (0, 1)$ . Le Théorème A.9 montre qu'elle n'est pas une fonction de Stieltjes lorsque  $\alpha > 1$ .

**Proposition A.26** *La fonction  $\lambda \mapsto \lambda^{-\alpha}$  est une fonction de Stieltjes si et seulement si  $\alpha \in [0, 1]$ . Sa mesure de Stieltjes est  $\sigma(dt) = (\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha))^{-1} t^{-\alpha} dt$ . C'est-à-dire,  $\forall \lambda > 0$ ,*

$$\frac{1}{\lambda^\alpha} = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda + t} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} dt = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda + t} \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi t^\alpha} dt. \quad (\text{A.5})$$

La fonction  $\lambda \mapsto \lambda^\alpha$  n'est pas une fonction de Bernstein lorsque  $\alpha > 1$  puisqu'elle n'est, dans ce cas, pas concave. Lorsque  $\alpha \in (0, 1)$ , comme  $\lambda \mapsto \frac{d\lambda^\alpha}{d\lambda} = \alpha\lambda^{\alpha-1}$  est une fonction de Stieltjes, la fonction  $\lambda \mapsto \lambda^\alpha$  est une fonction de Thorin-Bernstein, en particulier Bernstein complète. La mesure de Thorin s'obtient en intégrant entre 0 et  $\lambda$  la fonction  $\lambda \mapsto \alpha\lambda^{\alpha-1}$  dans la formule (A.5) :

**Proposition A.27** *La fonction  $\lambda \mapsto \lambda^\alpha$  est une fonction de Bernstein si et seulement si  $\alpha \in [0, 1]$ . Elle est dans ce cas Thorin-Bernstein avec pour mesure de Thorin  $\nu(dt) = \alpha \sin(\pi\alpha)\pi^{-1}t^{\alpha-1}dt$ . C'est-à-dire,  $\forall \lambda \geq 0$ ,*

$$\lambda^\alpha = \int_0^\infty \log\left(1 + \frac{\lambda}{t}\right) \frac{\alpha \sin(\pi\alpha)}{\pi t^{1-\alpha}} dt. \quad (\text{A.6})$$

Le même type de calculs nous permet d'exprimer les mesures de Bernstein et de Stieltjes :

**Proposition A.28** *La mesure de Bernstein (respectivement la mesure de Stieltjes) de la fonction  $\lambda \mapsto \lambda^\alpha$  est  $\mu(dx) = \alpha\Gamma(1-\alpha)^{-1}x^{-(\alpha+1)}dx$  (respectivement  $\sigma(dt) = \pi^{-1}\sin(\pi\alpha)t^{\alpha-1}$ ). C'est-à-dire,  $\forall \lambda \geq 0$ ,*

$$\lambda^\alpha = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)x^{\alpha+1}} dx = \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda+t} \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi t^{1-\alpha}} dt. \quad (\text{A.7})$$

## A.4 Inversions de Laplace et inversion de Stieltjes

**Théorème A.29** (Inversion de Stieltjes) *Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . Alors  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ ,*

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{1}{z+t} \sigma(dt)$$

où  $\sigma$  est la mesure limite (au sens faible) définie par

$$\sigma(dt) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im}(f(-t + i\varepsilon)) dt.$$

Ainsi, pour montrer qu'une fonction holomorphe sur le plan fendu  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  est de Stieltjes, on est ramené à montrer que la mesure  $\sigma$  obtenue par inversion est bien positive.

**Théorème A.30** (Inversion de Laplace) *Soit  $f$  une fonction holomorphe sur l'ensemble  $E = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > 0\}$  telle que  $\forall a > 0$ ,  $t \mapsto f(a + it)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Alors  $\forall z \in E$ ,*

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zx} m(x) dx$$

où  $m$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$m(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re}(\zeta)=a} e^{x\zeta} f(\zeta) d\zeta.$$

De même, pour montrer qu'une fonction holomorphe sur le plan fendu  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$  est complètement monotone, on est ramené à montrer que la fonction  $m$  obtenue par inversion de Laplace est bien positive. L'inversion de Laplace est plus compliquée que l'inversion de Stieltjes et il est en général plus difficile de montrer qu'une fonction donnée est complètement monotone que de montrer qu'elle est de Stieltjes.

# Annexe B

## Monotonie complète hyperbolique

### B.1 Fonctions HCM

L'étude des fonctions hyperboliquement complètement monotones prend une place importante dans ce manuscrit. Nous en donnons ici quelques propriétés que l'on trouve dans [15].

**Définition B.1** Une fonction  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  est dite hyperboliquement complètement monotone (HCM) si pour tout  $u > 0$ , la fonction définie implicitement par

$$w \mapsto f(uv)f(u/v) \tag{B.1}$$

où  $w = v + v^{-1}$ , est complètement monotone.

La fonction  $v \mapsto w = v + v^{-1}$  prend ses valeurs dans  $[2, +\infty)$  et, pour tout  $w > 2$ ,  $w$  a deux antécédents inverses l'un de l'autre,  $v = 1$  étant l'unique antécédent de  $w = 2$ .

Commençons par énoncer des propriétés directement héritées des fonctions complètement monotones :

**Proposition B.2** ([15] page 68) *Ici,  $f, f_1, f_2 \dots$  désignent des fonctions HCM.*

- (1) *Pour tout  $c \geq 0$ ,  $x \mapsto f(cx)$  est HCM;*
- (2)  *$f_1 \times f_2 \times \dots \times f_n$  est HCM;*
- (3) *Si  $f_n \rightarrow g$  simplement, alors  $g$  est une fonction HCM;*
- (4) *Pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) > 0$ , excepté si  $f = 0$ ;*
- (5) *Il existe  $c \in \mathbb{R}$  et  $a \geq 0$  tels que  $\forall x > 0$ ,  $f(x) \leq ax^c$ .*

**Proposition B.3** *La fonction  $w \mapsto w_\alpha = v^\alpha + v^{-\alpha}$  est une fonction de Bernstein si et seulement si  $\alpha \in [-1, 1]$ . Et elle est alors de Thorin-Bernstein.*

*Démonstration.* Par symétrie on peut supposer que  $\alpha \geq 0$ . Si  $\alpha > 1$ ,  $\forall w \geq 2$ ,

$$w_\alpha = \left( \frac{w + \sqrt{w^2 - 4}}{2} \right)^\alpha + \left( \frac{w - \sqrt{w^2 - 4}}{2} \right)^\alpha \geq \frac{w^\alpha}{2^\alpha}.$$

La fonction  $w \mapsto w_\alpha$  n'est donc pas une fonction de Bernstein.

D'autre part, pour  $\alpha \in [0, 1]$ , la formule (A.6) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} w_\alpha &= \int_0^\infty \left[ \log \left( 1 + \frac{v}{y} \right) + \log \left( 1 + \frac{1}{vy} \right) \right] \frac{\alpha \sin(\pi\alpha)}{\pi t^{1-\alpha}} dt \\ &= \int_0^\infty \underbrace{\log \left( 1 + \frac{1}{y^2} + \frac{w}{y} \right)}_{\text{fonction de Thorin-Bernstein en } w} \frac{\alpha \sin(\pi\alpha)}{\pi t^{1-\alpha}} dt. \quad \square \end{aligned}$$

Remarquons que pour toute fonction de Thorin-Bernstein  $\varphi$ , la fonction  $w \mapsto \varphi(v) + \varphi(v^{-1})$  est une fonction de Thorin-Bernstein. On pourrait se poser la question si cette propriété reste vraie lorsque  $\varphi$  est seulement Bernstein ou Bernstein complète. La réponse est non : par exemple, si  $\varphi(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda+1/2}$  alors

$$\varphi(v) + \varphi(v^{-1}) = \frac{4+w}{5/2+w} = 1 + \frac{3/2+w}{5/2+w}$$

n'est pas une fonction de Bernstein en  $w$  (ici c'est une fonction de Stieltjes) alors que  $\varphi$  est Bernstein complète.

**Corollaire B.4** *Soit  $f$  une fonction HCM. Alors  $\forall \alpha \in [-1, 1]$ ,  $x \mapsto f(x^\alpha)$  est HCM. En particulier,  $f$  est HCM si et seulement si  $x \mapsto f(1/x)$  est HCM.*

Les propriétés suivantes sont moins faciles à démontrer que celles de la Proposition B.2.

**Théorème B.5** ([15] page 68) *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions HCM.*

- (1) *Si  $\forall x > 0$ ,  $h(x) = \int_0^\infty f(y)g(xy)dy < +\infty$ , alors, la fonction  $h$  est HCM;*
- (2) *Pour tout  $p > 0$ , la fonction  $x \mapsto (f(x))^p$  est HCM;*
- (3)  *$f(0+) > 0$  si et seulement si  $f$  est complètement monotone;*
- (4) *Si  $f(0+) > 0$ , alors  $\forall \delta \geq 0$ ,  $x \mapsto f(x + \delta)$  est HCM.*

## B.2 Densités HCM

Regardons maintenant la propriété HCM du point de vue des variables aléatoires.

**Corollaire B.6** (de la Proposition B.3) *Soit  $X$  une variable aléatoire positive dont la densité est HCM. Alors pour tout  $|\alpha| \geq 1$ , la densité de  $X^\alpha$  est HCM.*

**Corollaire B.7** (du Théorème B.5) *Soient  $X$  et  $Y$  deux variables indépendantes à densités HCM. Alors  $1/X$ ,  $XY$  et  $X/Y$  ont des densités HCM.*

**Corollaire B.8** *Soient  $X \sim \text{HCM}$  et  $Y \sim \text{GGC}$  deux variables indépendantes. Alors,  $X \times Y \sim \text{GGC}$ .*

*Démonstration.* C'est une conséquence directe du Théorème B.5 (1) puisque

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda XY}) = \int_0^\infty f(x)\Phi(\lambda x)dx$$

où  $\Phi$  désigne la transformée de Laplace de  $Y$ . Or  $\Phi$  est une fonction HCM. □

# Annexe C

## Formulaire sur la fonction gamma

### C.1 Une fonction importante

Le lemme ci-dessous est un résultat simple mais il joue un rôle important dans cette thèse.

**Lemme C.1** *Soit  $a$  un nombre positif. La fonction  $h$  définie sur  $(0, +\infty)$  par*

$$h(\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda + a)}{\Gamma(\lambda)}$$

*est une fonction de Bernstein complète si et seulement si  $a \leq 1$ . Si  $a > 1$  la fonction n'est pas une fonction de Bernstein.*

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\lambda + a)}{\Gamma(\lambda)} &= \frac{\lambda \Gamma(\lambda + a) \Gamma(1 - a)}{\Gamma(\lambda + 1) \Gamma(1 - a)} = \frac{\lambda B(\lambda + a, 1 - a)}{\Gamma(1 - a)} \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(1 - a)} \int_0^\infty e^{-(\lambda+a)x} (1 - e^{-x})^{-a} dx \\ &= \frac{a}{\Gamma(1 - a)} \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \frac{e^{-ax}}{(1 - e^{-x})^{a+1}} dx. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que la fonction  $x \mapsto e^{-ax} \times (1 - e^{-x})^{-(a+1)}$  est complètement monotone. En effet,  $x \mapsto 1 - e^{-x}$  est une fonction de Bernstein,  $x \mapsto x^{-(\alpha+1)}$  est complètement monotone, ainsi  $x \mapsto (1 - e^{-x})^{-(a+1)}$  – voir la Proposition A.14.  $\square$

Le lemme précédent implique que pour tout  $a \in [0, 1]$ , la fonction

$$1/h : \lambda \mapsto \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda + a)}$$

est une fonction de Stieltjes – voir le Théorème A.18 – en particulier, complètement monotone. Lorsque  $a > 1$ , la fonction n'est plus de Stieltjes mais reste complètement monotone :

**Lemme C.2** Soit  $a$  un nombre positif. La fonction  $g$  définie sur  $(0, +\infty)$  par

$$g(\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda + a)}$$

est complètement monotone.

*Démonstration.* Nous allons faire le même type de calcul que pour le lemme précédent :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda + a)} &= \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(a)}{\Gamma(\lambda + a)\Gamma(a)} = \frac{B(\lambda, a)}{\Gamma(a)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-\lambda x} (1 - e^{-x})^{a-1} dx. \end{aligned} \quad \square$$

## C.2 Une formule de Malmsten

La formule de Malmsten ci-dessous – voir par exemple [27], (1) page 21 – joue un rôle majeur dans une partie des résultats de cette thèse. Nous en donnons ici une preuve probabiliste.

**Proposition C.3** (Formule de Malmsten)

$$\Gamma(1 + \lambda) = \exp\left(-\gamma\lambda - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x} - \lambda x) \frac{dx}{x(e^x - 1)}\right)$$

où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler.

On en déduit les deux corollaires suivant :

**Corollaire C.4** Soit  $a \in (0, +\infty)$ , alors

$$\frac{\Gamma(a + \lambda)}{\Gamma(a)} = \exp\left(-c_a\lambda - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x} - \lambda x) \frac{e^{-ax}}{x(1 - e^{-x})} dx\right)$$

avec

$$c_a = \gamma + \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx.$$

Introduisons la fonction digamma que l'on note  $\psi$  et qui est définie par

$$\psi(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \log(\Gamma(\lambda)).$$

Alors nous voyons que la constante  $c_a$  de la formule ci-dessus est égale à  $-\psi(a)$ , et donc que  $c_1 = \gamma = -\psi(1)$ . En particulier,  $\forall a, b > 0$ ,

$$\psi(b) - \psi(a) = - \int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{1 - e^{-x}} dx. \quad (\text{C.1})$$

**Corollaire C.5**

$$\frac{\Gamma(a + \lambda)}{\Gamma(b + \lambda)} = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} \times \exp\left(- \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x(1 - e^{-x})} dx\right).$$

**Remarque :** Soient  $\mathbf{B}_{a,b}$  une variable bêta de paramètre  $(a, b)$  et  $Y_{a,b} = -\log(\mathbf{B}_{a,b})$ . Le Corollaire C.5 nous permet de prouver que  $Y_{a,b}$  est infiniment divisible et d'exhiber son exposant de Laplace :

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda Y_{a,b}}) = \mathbb{E}(\mathbf{B}_{a,b}^\lambda) = \frac{\Gamma(a+\lambda)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+\lambda)} = \exp\left(-\int_0^\infty (1-e^{-\lambda x}) \frac{e^{-ax}(1-e^{-bx})}{x(1-e^{-x})} dx\right).$$

De plus, il est possible de montrer que pour tous  $a, b > 0$ , la fonction

$$m_{a,b} : x \mapsto \frac{e^{-ax}(1-e^{-bx})}{1-e^{-x}}$$

est décroissante sur  $(0, +\infty)$  si et seulement si  $2a + b \geq 1$ . Autrement dit,  $Y_{a,b}$  est auto-décomposable si et seulement si  $2a + b \geq 1$ . Enfin, nous avons vu dans la démonstration du Théorème 4.5 que la fonction  $m_{a,b}$  est complètement monotone si et seulement si  $b$  est un entier, c'est-à-dire,  $Y_{a,b} \sim \text{GGC}$  si et seulement si  $b \in \mathbb{N}^*$ .

*Démonstration de la Proposition C.3.* Soit  $(\mathbf{L}_k)_{k \geq 1}$  une suite i.i.d. de variables aléatoires exponentielles de paramètres 1 et considérons, pour  $n \in \mathbb{N}$ , les variables

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{L}_k}{k} \quad \text{et} \quad M_n = \max(\mathbf{L}_k)_{1 \leq k \leq n}.$$

D'une part,  $\mathbb{P}(M_n \leq x) = (1 - e^{-x})^n$ , donc

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda M_n}) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{d}{dx} (1 - e^{-x})^n dx = n \int_0^\infty e^{-(1+\lambda)x} (1 - e^{-x})^{n-1} dx = n \text{B}(1 + \lambda, n).$$

D'autre part,

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda S_n}) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{-\lambda L_k/k}) = \prod_{k=1}^n \frac{k}{k + \lambda} = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(n+1+\lambda)} = n \text{B}(1 + \lambda, n).$$

Ainsi, nous voyons que  $S_n$  et  $M_n$  ont la même loi. La transformée de Laplace de  $S_n$  peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-\lambda S_n}) &= \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{k}} = \exp\left(-\int_0^\infty \log\left(1 + \frac{\lambda}{y}\right) \nu_n(dy)\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \frac{e^{-x}(1 - e^{-nx})}{x(1 - e^{-x})} dx\right) \end{aligned}$$

où  $\nu_n$  est la mesure définie par  $\nu_n(dy) = \sum_{k=1}^n \delta_k(dy)$  (le passage de la première à la seconde ligne vient de (A.2)). Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-\lambda(S_n - \log(n))}) &= \exp\left(\lambda \log(n) - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \frac{e^{-x}(1 - e^{-nx})}{x(1 - e^{-x})} dx\right) \\ &= \exp\left(a_n \lambda - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x} - \lambda x) \frac{e^{-x}(1 - e^{-nx})}{x(1 - e^{-x})} dx\right) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

avec  $a_n = \log(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\gamma$  où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler. En utilisant le théorème de convergence dominée dans (C.2), nous voyons que

$$\mathbb{E} \left( e^{-\lambda(S_n - \log(n))} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp \left( -\gamma\lambda - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x} - \lambda x) \frac{e^{-x}}{x(1 - e^{-x})} dx \right).$$

Ainsi,  $(S_n - \log(n))_{n \geq 1}$  et  $(M_n - \log(n))_{n \geq 1}$  convergent en loi. Déterminons la limite de  $(M_n - \log(n))_{n \geq 1}$  :

$$\mathbb{P}(M_n - \log(n) \leq x) = \left( 1 - \frac{e^{-x}}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-e^{-x}}.$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi de Gumbel, c'est-à-dire la loi de  $-\log(\mathbf{L}_1)$ . La transformée de Laplace de la loi de Gumbel se calcule directement :

$$\mathbb{E} \left( e^{-\lambda(-\log(L_1))} \right) = \mathbb{E} (L_1^\lambda) = \Gamma(1 + \lambda).$$

Donc, en combinant cette formule avec (C.2), nous obtenons l'égalité annoncée.  $\square$

*Démonstration du Corollaire C.4.* Pour tout  $a > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (1 - e^{-(a-1+\lambda)x} - (a-1+\lambda)x) \frac{e^{-x}}{x(1 - e^{-x})} dx &= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x} - \lambda x) \frac{e^{-ax}}{x(1 - e^{-x})} dx \\ &+ \int_0^\infty (1 - e^{-(a-1)x} - (a-1)x) \frac{e^{-x}}{x(1 - e^{-x})} dx + \lambda \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\Gamma(a + \lambda)}{\Gamma(a)} = \exp \left[ - \left( \gamma + \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx \right) \lambda - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x} - \lambda x) \frac{e^{-ax}}{x(1 - e^{-x})} dx \right]. \quad \square$$

### C.3 Moments fractionnaires d'une loi stable

**Proposition C.6** Soient  $\alpha \in (0, 1]$  et  $\mathbf{Z}_\alpha$  une variable aléatoire positive  $\alpha$ -stable. Ses moments fractionnaires sont donnés par :

$$\mathbb{E} (\mathbf{Z}_\alpha^s) = \frac{\Gamma(1 - s/\alpha)}{\Gamma(1 - s)}, \quad s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) < \alpha.$$

*Démonstration.* Pour  $s > 0$ , on voit par le théorème de Fubini-Tonelli, par un changement de variable et par la Proposition A.25 que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (\mathbf{Z}_\alpha^{-s}) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty x^{s-1} \mathbb{E} (e^{-x\mathbf{Z}_\alpha}) dx = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x^\alpha} dx \\ &= \frac{1}{\alpha\Gamma(s)} \int_0^\infty x^{s/\alpha-1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(s/\alpha)}{\alpha\Gamma(s)} = \frac{\Gamma(1 + s/\alpha)}{\Gamma(1 + s)}. \end{aligned}$$

La formule annoncée vient par prolongement analytique.  $\square$

## C.4 Représentation de la fonction $1/\Gamma$

La fonction  $\Gamma$  se prolonge méromorphiquement à  $\mathbb{C}$  tout entier, ses pôles étant placés aux entiers strictement négatifs. Il est facile de voir que cette fonction ne s'annule pas. Ainsi, la fonction  $1/\Gamma$  se prolonge en une fonction entière.

**Définition C.7** (chemin de Hankel) On dit que  $\mathcal{H}$  est un chemin de Hankel s'il existe une paramétrisation de  $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \\ t &\longmapsto \zeta(t) \end{aligned}$$

telle que  $\operatorname{Re}(\zeta(t)) \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} -\infty$ ,  $\operatorname{Im}(\zeta(t)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0+$  et  $\operatorname{Im}(\zeta(t)) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0-$ .

**Théorème C.8** Soit  $\mathcal{H}$  un chemin de Hankel. Alors  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{H}} \xi^{-z} e^{\xi} d\xi$$

avec les notations  $1/\Gamma(-n) = 0$  ( $n \geq 1$ ) et  $\xi^{-z} = e^{-z \log(\xi)}$  où  $\log$  est la détermination principale du logarithme.

Ce théorème se prouve en déformant le chemin de Hankel initiale en le chemin limite «  $(-\infty, 0] \cup [0, -\infty)$  » parcouru dans le sens trigonométrique.

## C.5 La formule sommatoire de Gauss et les fonctions hypergéométriques

**Définition C.9** (Symbole de Pochhammer) Pour tout nombre complexe  $z$ , on note

$$(z)_0 = 1 \quad \text{et} \quad (z)_n = z(z+1) \cdots (z+n-1).$$

**Définition C.10** (Fonction hypergéométrique) Pour tous  $a, b, c \in \mathbb{C}$ , on définit la fonction hypergéométrique  ${}_2F_1(a, b; c; \cdot)$  par

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n.$$

Le comportement de la suite  $\left( \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} \right)_{n \geq 0}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  est polynomial, donc le rayon de convergence de la fonction hypergéométrique  ${}_2F_1(a, b; c; \cdot)$  vaut 1.

La proposition suivante se démontre en développant l'intégrande en série entière puis en intégrant termes à termes – voir [27], (10) page 59.

**Proposition C.11** (formule intégrale d'Euler)  $\forall c > b > 0$ ,

$$B(b, c-b) {}_2F_1(a, b; c; z) = \int_0^1 x^{b-1} (1-x)^{c-b-1} (1-zx)^{-a} dx.$$

**Remarque :** Dans cette formule, la symétrie en  $a$  et  $b$  n'est pas aussi évidente que dans celle de la Définition C.10.

En faisant tendre  $z \rightarrow 1-$ , nous obtenons la formule sommatoire de Gauss qui établit que pour  $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(a + b)$ ,

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)}. \quad (\text{C.3})$$

Nous pouvons également déduire à partir de la Proposition C.11 les formules de Kummer suivantes – voir [27], (22) et (23) page 64 :

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= (1 - z)^{-a} {}_2F_1(a, c - b; c; z/(z - 1)) \\ &= (1 - z)^{-b} {}_2F_1(c - a, b; c; z/(z - 1)) \\ &= (1 - z)^{c-a-b} {}_2F_1(c - a, c - b; c; z). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

# Bibliographie

- [1] M. ABRAMOWITZ et I. A. STEGUN : *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55 de *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*. For sale by the Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964.
- [2] G. D. ANDERSON, M. K. VAMANAMURTHY et M. VUORINEN : Generalized convexity and inequalities. *J. Math. Anal. Appl.*, 335(2):1294–1308, 2007.
- [3] I. BAILLEUL : Une preuve simple d'un résultat de Dufresne. *In Séminaire de probabilités XLI*, volume 1934 de *Lecture Notes in Math.*, pages 203–213. Springer, Berlin, 2008.
- [4] O. BARNDORFF-NIELSEN, P. BLAESILD et C. HALGREEN : First hitting time models for the generalized inverse Gaussian distribution. *Stochastic Processes Appl.*, 7(1):49–54, 1978.
- [5] C. BERG : Moment problems and polynomial approximation. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, (Special issue):9–32, 1996. 100 ans après Th.-J. Stieltjes.
- [6] C. BERG et A. J. DURÁN : A transformation from Hausdorff to Stieltjes moment sequences. *Ark. Mat.*, 42(2):239–257, 2004.
- [7] J. BERTOIN : *Lévy processes*, volume 121 de *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [8] J. BERTOIN, A. LINDNER et R. MALLER : On continuity properties of the law of integrals of Lévy processes. *In Séminaire de probabilités XLI*, volume 1934 de *Lecture Notes in Math.*, pages 137–159. Springer, Berlin, 2008.
- [9] J. BERTOIN et M. YOR : On the entire moments of self-similar Markov processes and exponential functionals of Lévy processes. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 11(1):33–45, 2002.
- [10] J. BERTOIN et M. YOR : Exponential functionals of Lévy processes. *Probab. Surv.*, 2:191–212, 2005.
- [11] N. H. BINGHAM, C. M. GOLDIE et J. L. TEUGELS : *Regular variation*, volume 27 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [12] L. BONDESSON : On infinite divisibility of powers of a gamma variable. *Scand. Actuar. J.*, (1):48–61, 1978.
- [13] L. BONDESSON : On the infinite divisibility of the half-Cauchy and other decreasing densities and probability functions on the nonnegative line. *Scand. Actuar. J.*, (3-4):225–247, 1987.

- [14] L. BONDESSON : Generalized gamma convolutions and complete monotonicity. *Probab. Theory Related Fields*, 85(2):181–194, 1990.
- [15] L. BONDESSON : *Generalized gamma convolutions and related classes of distributions and densities*, volume 76 de *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [16] L. BONDESSON : A class of probability distributions that is closed with respect to addition as well as multiplication of independent random variables. *Journal of Theoretical Probability*, pages 1–19, 2013.
- [17] P. BOSCH : HCM property and the half-Cauchy distribution. To appear in *Probability and Mathematical Statistics*, 2014.
- [18] P. BOSCH et T. SIMON : On the self-decomposability of the Fréchet distribution. *Indag. Math. (N.S.)*, 24(3):626–636, 2013.
- [19] P. BOSCH et T. SIMON : On the infinite divisibility of inverse Beta distributions. To appear in *Bernoulli*, 2014.
- [20] P. BOSCH et T. SIMON : A proof of Bondesson’s conjecture on stable densities. To appear in *Arxiv för Matematik*, 2014.
- [21] J.-P. BOUCHAUD, A. COMTET, A. GEORGES et P. LE DOUSSAL : Classical diffusion of a particle in a one-dimensional random force field. *Ann. Physics*, 201(2):285–341, 1990.
- [22] P. CARMONA, F. PETIT et M. YOR : On the distribution and asymptotic results for exponential functionals of Lévy processes. In *Exponential functionals and principal values related to Brownian motion*, Bibl. Rev. Mat. Iberoamericana, pages 73–130. Rev. Mat. Iberoamericana, Madrid, 1997.
- [23] L. CHAUMONT et J. C. PARDO : The lower envelope of positive self-similar Markov processes. *Electron. J. Probab.*, 11:no. 49, 1321–1341, 2006.
- [24] L. CHAUMONT et M. YOR : *Exercises in probability*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, second édition, 2012. A guided tour from measure theory to random processes, via conditioning.
- [25] A. DIÉDHILOU : On the self-decomposability of the half-Cauchy distribution. *J. Math. Anal. Appl.*, 220(1):42–64, 1998.
- [26] D. DUFRESNE : The distribution of a perpetuity, with applications to risk theory and pension funding. *Scand. Actuar. J.*, (1-2):39–79, 1990.
- [27] A. ERDÉLYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER et F. G. TRICOMI : *Higher transcendental functions. Vol. I*. Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, Fla., 1981. Based on notes left by Harry Bateman, With a preface by Mina Rees, With a foreword by E. C. Watson, Reprint of the 1953 original.
- [28] A. ERDÉLYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER et F. G. TRICOMI : *Higher transcendental functions. Vol. II*. Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, Fla., 1981. Based on notes left by Harry Bateman, Reprint of the 1953 original.
- [29] H. K. GJESSING et J. PAULSEN : Present value distributions with applications to ruin theory and stochastic equations. *Stochastic Process. Appl.*, 71(1):123–144, 1997.

- [30] B. V. GNEDENKO et A. N. KOLMOGOROV : *Limit distributions for sums of independent random variables*. Translated from the Russian, annotated, and revised by K. L. Chung. With appendices by J. L. Doob and P. L. Hsu. Revised edition. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills., Ont., 1968.
- [31] C. GOLDIE : A class of infinitely divisible random variables. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 63:1141–1143, 1967.
- [32] E. GROSSWALD : The Student  $t$ -distribution of any degree of freedom is infinitely divisible. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 36(2):103–109, 1976.
- [33] S. JANSON : Moments of gamma type and the Brownian supremum process area. *Probab. Surv.*, 7:1–52, 2010.
- [34] W. JEDIDI : Stable processes, mixing and distributional properties. I. *Teor. Veroyatn. Primen.*, 52(4):736–751, 2007.
- [35] W. JEDIDI et T. SIMON : Further examples of GGC and HCM densities. *Bernoulli*, 19(5A):1818–1838, 2013.
- [36] M. KANTER : Stable densities under change of scale and total variation inequalities. *Ann. Probability*, 3(4):697–707, 1975.
- [37] J. KENT : Some probabilistic properties of Bessel functions. *Ann. Probab.*, 6(5):760–770, 1978.
- [38] A. A. KILBAS, H. M. SRIVASTAVA et J. J. TRUJILLO : *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204 de *North-Holland Mathematics Studies*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.
- [39] F. KLEIN : Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. *Math. Ann.*, 37(4):573–590, 1890.
- [40] J. LAMPERTI : Semi-stable Markov processes. I. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 22:205–225, 1972.
- [41] J. C. PARDO, P. PATIE et M. SAVOV : A Wiener-Hopf type factorization for the exponential functional of Lévy processes. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 86(3):930–956, 2012.
- [42] P. PATIE : A refined factorization of the exponential law. *Bernoulli*, 17(2):814–826, 2011.
- [43] R. N. PILLAI : On Mittag-Leffler functions and related distributions. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 42(1):157–161, 1990.
- [44] K. SATO : Subordination and self-decomposability. *Statist. Probab. Lett.*, 54(3):317–324, 2001.
- [45] K. SATO : *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, volume 68 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013. Translated from the 1990 Japanese original, Revised edition of the 1999 English translation.
- [46] R. L. SCHILLING, R. SONG et Z. VONDRAČEK : *Bernstein functions*, volume 37 de *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2010. Theory and applications.
- [47] D. N. SHANBHAG et M. SREEHARI : An extension of Goldie’s result and further results in infinite divisibility. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 47(1):19–25, 1979.

- 
- [48] T. SIMON : Fonctions de Mittag-Leffler et processus de Lévy stables sans sauts négatifs. *Expo. Math.*, 28(3):290–298, 2010.
- [49] T. SIMON : Multiplicative strong unimodality for positive stable laws. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 139(7):2587–2595, 2011.
- [50] T. SIMON : Comparing Fréchet and positive stable laws. *Electron. J. Probab.*, 19:no. 16, 25, 2014.
- [51] F. W. STEUTEL : Some recent results in infinite divisibility. *Stochastic Processes Appl.*, 1:125–143, 1973.
- [52] F. W. STEUTEL et K. van HARN : *Infinite divisibility of probability distributions on the real line*, volume 259 de *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 2004.
- [53] O. THORIN : Proof of a conjecture of L. Bondesson concerning infinite divisibility of powers of a gamma variable. *Scand. Actuar. J.*, (3):151–164, 1978.
- [54] E. B. VAN VLECK : A determination of the number of real and imaginary roots of the hypergeometric series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 3(1):110–131, 1902.
- [55] M. YOR : A note about Selberg’s integrals in relation with the beta-gamma algebra. *In Advances in mathematical finance*, Appl. Numer. Harmon. Anal., pages 49–58. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2007.
- [56] V. M. ZOLOTAREV : *One-dimensional stable distributions*, volume 65 de *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1986. Translated from the Russian by H. H. McFaden, Translation edited by Ben Silver.