

Numéro d'ordre : 41974

UNIVERSITÉ LILLE 1 - SCIENCES ET TECHNOLOGIES
UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

École doctorale ED Régionale SPI 72

Unité de recherche Laboratoire de Mécanique de Lille CNRS/UMR 8107

Thèse présentée par **Abdoulaye GUEYE**

Soutenue le **11 décembre 2015**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université Lille 1 - Sciences et Technologies et
de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Discipline **Mécanique**

Spécialité **Mécanique des Fluides**

Titre de la thèse

**Modélisation et simulations
numériques des écoulements et
instabilités thermiques de fluides
non-Newtonien en milieu poreux.**

Thèse dirigée par Gilmar MOMPEAN Directeur
Aboubaker Chedikh BEYE co-directeur

Composition du jury

<i>Rapporteurs</i>	Hassen BEJI Cheikh MBOW	professeur à l'UPJV d'Amiens MCF HDR à l'UCAD
<i>Examineurs</i>	Gilmar MOMPEAN Aboubaker Chedikh BEYE	professeur à l'Université Lille 1 - Polytech-Lille professeur à l'AIMS Sénégal
<i>Invités</i>	Mouhamed Najib OUARAZI Ben Hamed HEYKEL	professeur à l'Université de Lille 1 MCF à l'UPJV d'Amiens
<i>Directeurs de thèse</i>	Gilmar MOMPEAN Aboubaker Chedikh BEYE	professeur à l'Université de Lille 1 - Polytech-Lille professeur à l'AIMS Sénégal

**UNIVERSITÉ LILLE 1 - SCIENCES ET TECHNOLOGIES
UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR**

École doctorale ED Régionale SPI 72

Unité de recherche Laboratoire de Mécanique de Lille CNRS/UMR 8107

Thèse présentée par **Abdoulaye GUEYE**
Soutenue le **11 décembre 2015**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université Lille 1 - Sciences et Technologies et
de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Discipline **Mécanique**
Spécialité **Mécanique des Fluides**

Titre de la thèse

**Modélisation et simulations
numériques des écoulements et
instabilités thermiques de fluides
non-Newtonien en milieu poreux.**

Thèse dirigée par Gilmar MOMPEAN Directeur
Aboubaker Chedikh BEYE co-directeur

Composition du jury

<i>Rapporteurs</i>	Hassen BEJI Cheikh MBOW	professeur à l'UPJV d'Amiens MCF HDR à l'UCAD
<i>Examineurs</i>	Gilmar MOMPEAN Aboubaker Chedikh BEYE	professeur à l'Université Lille 1 - Polytech-Lille professeur à l'AIMS Sénégal
<i>Invités</i>	Mouhamed Najib OUARAZI Ben Hamed HEYKEL	professeur à l'Université de Lille 1 MCF à l'UPJV d'Amiens
<i>Directeurs de thèse</i>	Gilmar MOMPEAN Aboubaker Chedikh BEYE	professeur à l'Université de Lille 1 - Polytech-Lille professeur à l'AIMS Sénégal

**UNIVERSITÉ LILLE 1 - SCIENCES ET TECHNOLOGIES
UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR**

Doctoral School ED Régionale SPI 72

University Department **Laboratoire de Mécanique de Lille CNRS/UMR 8107**

Thesis defended by **Abdoulaye GUEYE**

Defended on **11th December, 2015**

In order to become Doctor from Université Lille 1 - Sciences et Technologies and from
Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Academic Field **Mechanics**

Speciality **Fluids Mechanics**

Thesis Title

**Modeling and numerical simulation
of flow and thermal instabilities of
non-Newtonian fluids in porous
media.**

Thesis supervised by Gilmar MOMPEAN Supervisor
Aboubaker Chedikh BEYE Co-Supervisor

Committee members

<i>Referees</i>	Hassen BEJI Cheikh MBOW	Professor at UPJV d'Amiens HDR Lecturer at UCAD
<i>Examiners</i>	Gilmar MOMPEAN Aboubaker Chedikh BEYE	Professor at Université Lille 1 - Polytech-Lille Professor at AIMS Sénégal
<i>Guests</i>	Mouhamed Najib OUARZAZI Ben Hamed HEYKEL	Professor at Université de Lille 1 Lecturer at UPJV d'Amiens
<i>Supervisors</i>	Gilmar MOMPEAN Aboubaker Chedikh BEYE	Professor at Université de Lille 1 - Polytech-Lille Professor at AIMS Sénégal

L'Université Lille 1 - Sciences et Technologies et l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar n'entendent donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses : ces opinions devront être considérées comme propres à leurs auteurs.

Mots clés : milieux poreux, simulation numérique, instabilité thermique, loi de darcy, convection naturelle, fluide non-newtonien.

Keywords: porous media, numerical simulation, thermal instability, darcy's law, natural convection, non-newtonian fluid.

Cette thèse a été préparée au

**Laboratoire de Mécanique de Lille CNRS/UMR
8107**

Av. Paul Langevin
Cité Scientifique
59650 Villeneuve d'Ascq
France

☎ (33)(0)3 20 33 71 52

📠 (33)(0)3 20 33 71 53

✉ lml@univ-lille1.fr

Site <http://www-lml.univ-lille1.fr/>



**Laboratoire
Mécanique
Lille**



Université
de Lille



ARTS
ET MÉTIERS
ParisTech

*Au nom de Dieu clément et miséricordieux
Ce travail fruit de dur labeur est dédié à ma famille*

*En tête mon défunt père qui a semé et entretenu
la plante que je suis et qui n'a pas eu le temps de voir les fruits de celle-ci,*

*A ma mère, source de tendresse, de patience et de générosité qui a toujours
été mon dernier rempart, ses prières me donnent l'énergie et la force pour avancer,*

*A ma douce et tendre épouse que j'aime tant, qui a su remplir mon coeur de bonheur. Tu as su
me comprendre, m'écouter, m'ouvrir ton coeur. Tu as su simplement m'accepter telle que je
suis...*

A mon grand frère Babacar et mes soeurs, ainsi que leurs enfants,

A Mon oncle Famara Massaly,

A Tous mes proches et amis,

Et à toute personne qui a participé de près ou de loin à la réussite de ce travail.

Remerciements

Ce travail a été effectué en cotutelle entre l'Université de Lille 1 - Sciences et Technologies en France au sein du laboratoire de mécanique de Lille sous la direction de Monsieur Gilmar MOMPEAN et du laboratoire de mécanique des fluides et applications de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar au Sénégal sous la direction de Monsieur Aboubaker Chédikh BEYE grâce au financement de Erasmus Mundus ACP II.

Je remercie Dieu le Tout Puissant de m'avoir donné la santé, l'aide et la volonté pour réaliser ce modeste travail.

Je souhaite remercier en premier lieu les rapporteurs Hassen BEJI et Cheikh MBOW pour avoir jugé mon travail. Je suis bien conscient de l'effort et du temps que cela leur demande et d'avoir pris le temps de faire le rapport de ce travail.

J'aimerais remercier particulièrement mes directeurs de thèse :

Monsieur Gilmar MOMPEAN, professeur au laboratoire de Mécanique de Lille, de m'avoir accueillie au laboratoire et permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions. Je le remercie sincèrement pour sa disponibilité, ses conseils et précieuses remarques qui ont permis l'aboutissement de ce travail. J'ai agréablement aimé travailler avec lui et je le remercie fortement pour l'apport scientifique qu'il m'a fourni. Il n'a guère économiser un effort pour me conseiller.

Monsieur Aboubaker Chédikh BEYE, professeur à l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar, qui n'a jamais épargné un effort pour m'aider sur tous les plans. C'est un homme que j'admire beaucoup et qui était toujours proche de moi dans ma formation chercheur, et qui par sa sagesse et sa compétence a semé en moi l'amour de la science. J'ai toujours trouvé le personnage de père, d'ami, de collègue et de facilitateur des difficultés courantes que je trouve que ce soit au travail ou ailleurs. Je le remercie pour sa disponibilité, son aide, sa patience, pour toutes les connaissances scientifiques qu'il a su me transmettre et surtout pour sa confiance.

Je tiens également à remercier Monsieur Mouhamed Najib OUARZAZI, professeur au laboratoire de mécanique de Lille pour son encadrement, son soutien continu et sa confiance. Sa passion et son dynamisme ont été contagieux. Je le suis reconnaissant pour le temps qu'il m'a accordé, sa patience et ses qualités pédagogiques et scientifiques. J'ai beaucoup appris et pris grand plaisir à travailler à ses côtés. Ses attentes et son niveau d'exigence m'ont motivé à me dépasser. Tu restera pour moi un modèle pour aborder la recherche et encadrer un sujet et le thésard qui le porte. Ces quelques lignes ne peuvent témoigner de toute ma gratitude et de mon amitié.

Je suis extrêmement reconnaissant à Monsieur Ben Hamed HAYKEL, maître de conférence au laboratoire des technologies innovantes d'Amiens pour sa forte contribution avec le code de calcul numérique de la convection naturelle. Je tiens à le remercier pour sa disponibilité, son aide. Qu'il me soit permis de lui exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements.

Je tiens à remercier l'ensemble des doctorant(e)s Ramzi, Anselmo, Nassim, Tibisay,

Zhou et Lais que j'ai côtoyés au laboratoire de mécanique de Lille et aussi Oumar Ngor Thiam, Malomar, Ndiack Faye, Bachir, Cheikh, Oumar Gueye côté du Sénégal qui, aux diverses circonstances, m'ont apporté leur aide dans le déroulement de ce travail. Je ne saurais oublier Ramon mon ami, mon petit frère et mon collègue. Je suis heureux de leur témoigner ici toute ma reconnaissance et ma sympathie.

Le soutien psychologique sans faille, bien que subjective à l'égard de la valeur de mon travail, est à mettre au crédit de ma chère épouse et de ma mère. Mes frères, mes soeurs, mes amis, compagnons de fortune ou d'infortune selon les jours, ne sont jamais écartés de ces expressions de gratitude et de reconnaissance.

MODÉLISATION ET SIMULATIONS NUMÉRIQUES DES ÉCOULEMENTS ET INSTABILITÉS THERMIQUES DE FLUIDES NON-NEWTONIEN EN MILIEU POREUX.**Résumé**

Ce travail de thèse sur les milieux poreux est axé sur deux parties. La première concerne l'étude numérique de l'écoulement d'un fluide Newtonien ou non-Newtonien au sein d'un système fluide/poreux. L'approche à un seul domaine qui consiste à écrire l'équation de Navier-Stokes incluant le terme de Darcy-Brinkman-Forchheimer est adoptée dans cette étude. La relation entre le gradient de pression et la vitesse débitante linéaire dans le cas de Darcy où le fluide est Newtonien, est obtenue. Cette relation est étendue dans le cas non-Darcy où le fluide est non Newtonien. L'influence des nombres de Darcy et de Forchheimer sur la structure de l'écoulement est montrée. Dans la seconde partie, une étude de stabilité linéaire et numérique de la convection naturelle de fluides viscoélastiques saturant une couche poreuse horizontale chauffée par un flux constant est réalisée. Une étude d'instabilité primaire et secondaire nous a permis de montrer que pour un fluide Newtonien, la convection monocellulaire perd sa stabilité au profit des rouleaux longitudinaux. Dans le cas des fluides viscoélastiques, on trouve que l'élasticité du fluide induit la sélection des rouleaux transversaux propagatifs. Une solution numérique basée sur un schéma aux différences finies est venue conforter ces résultats analytiques.

Mots clés : milieux poreux, simulation numérique, instabilité thermique, loi de darcy, convection naturelle, fluide non-newtonien.

MODELING AND NUMERICAL SIMULATION OF FLOW AND THERMAL INSTABILITIES OF NON-NEWTONIAN FLUIDS IN POROUS MEDIA.**Abstract**

The present thesis on porous media concentrates in two parts. The first concerns the numerical study of the flow of a Newtonian or a non-Newtonian fluid within a fluid/porous system. The approach of a single domain, which consists of/in writing the Navier-Stokes equation including the Darcy-Brinkham-Forchheimer term, is chosen in this study. The linear relation between the pressure gradient and the bulk velocity in the Darcy case, for which the fluid is Newtonian, is obtained. This relation is extended to the non-Darcy case, for which the fluid is non-Newtonian. The influence of Darcy and Forchheimer numbers on the structure of the flow is presented. In the second part, linear stability and numerical analysis of the natural convection of viscoelastic fluids saturating a horizontal porous layer heated by a constant flux is performed. A primary and secondary instability study allowed to show that, for a Newtonian fluid, the unicellular convection loses its stability to the benefit of longitudinal rolls. In the case of viscoelastic fluids, the elasticity of the fluid leads to the selection of propagation transverse rolls. A numerical solution based on a finite difference scheme has reinforced these analytical results.

Keywords: porous media, numerical simulation, thermal instability, darcy's law, natural convection, non-newtonian fluid.

Symboles

Symboles	Description	Unités	Pages
$(\rho c)_f$	capacité thermique du fluide	$\text{J K}^{-1} \text{m}^{-3}$	71
$(\rho c)_s$	capacité thermique de la matrice solide	$\text{J K}^{-1} \text{m}^{-3}$	71
$\langle \mathbf{u}_f \rangle$	vitesse moyenne de phase	m s^{-1}	28
$\langle \mathbf{u}_f \rangle^f$	vitesse moyenne de phase intrinsèque	m s^{-1}	28
A	rapport de forme suivant l'axe x de la couche poreuse	–	74
a	rapport de forme suivant l'axe y de la couche poreuse	–	74
A_{fs}	interface fluide-solide	m^2	28
α_f	coefficient d'expansion thermique	K^{-1}	70
C_0	constante dépendant de la forme des grains	–	6
D	tenseur des taux de déformations	s^{-1}	12
d	diamètre moyen des pores	m	7
D_{th}	coefficient de diffusivité thermique	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	72
Da	nombre de Darcy	–	76
d_g	diamètre des particules constituant le milieu poreux	m	6
$\dot{\gamma}$	taux de cisaillement	s^{-1}	9, 10
$\dot{\gamma}_{mp}$	taux de cisaillement du milieu poreux	s^{-1}	16
∇P	gradient de pression	Pa m^{-1}	13
ϵ	paramètre de la perturbation		80, 102
\vec{g}	accélération de la pesanteur	m s^{-2}	14
Γ	rapport des viscosités (Newtonienne sur Newtonienne + polymérique)	–	79
H	hauteur entre les deux plaques	m	74
h	hauteur du milieu poreux	m	13
h_f	épaisseur de la couche fluide	m	25
h_m	épaisseur de la couche poreuse	m	25
K	perméabilité intrinsèque du milieu poreux	m^2	6
l	taille du Volume Élémentaire Représentatif	m	7
L^{**}	taille caractéristique du milieu	m	7
Λ	constante de temps	–	10
$\bar{\lambda}_1$	temps de relaxation	s	12

Symboles	Description	Unités	Pages
$\bar{\lambda}_2$	temps de retard	s	12
λ_f	conductivité thermique	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$	69
λ_f^*	coefficients de conductivité thermique équivalente	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$	71
m	coefficient de consistance du fluide	Pa s^n	10
μ	viscosité dynamique du fluide	Pa s	9
μ_0	viscosité à cisaillement nul	Pa s	10
μ_a	viscosité dynamique apparente du fluide	Pa s	10
μ_{eff}	viscosité équivalente	Pa s	15
μ_∞	viscosité à cisaillement infini	Pa s	10
μ_{mp}	viscosité du milieu poreux	Pa s	16
μ_p	viscosité plastique	Pa s	11
\mathbf{n}_{fs}	vecteur normal unitaire dirigé de f vers s		28
Nu	nombre de Nusselt	–	76
ν	viscosité cinématique du fluide	m^2/s	15
\overline{Nu}	nombre de Nusselt moyen	–	76
ω	fréquence de l'onde	s^{-1}	80, 102
p_f	champ de pression à l'échelle microscopique	Pa	27
ϕ	porosité du milieu poreux	–	5
Pr	nombre de Prandlt	–	76
Pr_D	nombre de Prandlt-Darcy	–	76
Ψ	fonction de courant	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	133
Q	débit volumique	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$	13
Ra	nombre de Rayleigh de filtration	–	75
Re	nombre de Reynolds	–	15
S	section droite du milieu poreux	m^2	13
T	température	K	70
τ	contrainte de cisaillement	Pa	9, 13
τ_c	contrainte seuil	Pa	10
τ_p	tenseur des contraintes du polymère	Pa	13
τ_s	tenseur des contraintes du solvant	Pa	13
\mathbf{u}_f	champ de vitesse à l'échelle microscopique	m s^{-1}	27
\tilde{u}_f	fluctuation de la vitesse	m s^{-1}	30
v	vitesse débitante	m s^{-1}	13
v_p	vitesse dans les pores	m s^{-1}	14

Sommaire

Remerciements	xv
Résumé	xvii
Symboles	xxi
Sommaire	xxiii
Liste des tableaux	xxv
Table des figures	xxvii
Introduction générale	1
1 Généralités	5
I Etude numérique de l'écoulement de fluides Newtonien et non Newtonien	17
Synthèse bibliographique	19
2 Modélisation mathématique de l'écoulement	25
3 Traitement numérique	35
4 Résultats	51
Conclusion	61
II Convection naturelle dans un milieu poreux saturé par un fluide non Newtonien	63
Synthèse bibliographique	65
5 Formulation mathématique de la convection naturelle	69
6 Stabilité linéaire de l'état de conduction	79
7 Bifurcation de Hopf	101

Conclusion	117
Conclusion générale et perspectives	119
Bibliographie	123
A Méthode des différences finies	133
Table des matières	139

Liste des tableaux

1.1	Porosité de quelques matériaux.	6
1.2	Perméabilité de quelques matériaux.	7
2.1	Expression des différents termes de l'équation 2.36	34
3.1	Effet du maillage	48
3.2	Coefficient A et B de la loi d'écoulement affine.	49
6.1	Comparaison des résultats numériques obtenus par la présente étude avec ceux obtenus par Kimura et al [17] avec $A = 4$	92
6.2	Comparaison des résultats analytiques et numériques obtenus par la présente étude.	95
7.1	Variation de Ra_c , ω_c et k_c en fonction de Γ pour un fluide viscoélastique et un pour $\lambda_1 = 0.1$ et $N = 30$	106
7.2	Variation de Ra_c , ω_c et k_c en fonction de Γ pour un fluide viscoélastique et pour un $\Gamma = 0.75$ et $N = 30$	106
7.3	Variation de la valeur du nombre de Rayleigh critique et de la fréquence critique pour un fluide viscoélastique en fonction de Γ pour $\lambda_1 = 0.5$	111
7.4	Variation de la valeur du nombre de Rayleigh critique et de la fréquence critique pour un fluide viscoélastique en fonction du temps de relaxation λ_1 pour un $\Gamma = 0.75$	111
7.5	Évolution des valeurs maximales de la fonction de courant, de la température, de la vitesse et du transfert de chaleur moyen en fonction du nombre de Rayleigh pour un fluide viscoélastique de paramètres $\Gamma = 0.75$ et $\lambda_1 = 0.50$ pour un rapport de forme $A = 10$	112
7.6	Évolution des valeurs maximales de la fonction de courant, de la température, de la vitesse et du transfert de chaleur moyen en fonction du rapport des viscosités Γ après la bifurcation $Ra = 500$ et pour $\lambda_1 = 0.50$	114
7.7	Évolution des valeurs maximales de la fonction de courant, de la température, de la vitesse et du transfert de chaleur moyen en fonction du temps de relaxation λ_1 après la bifurcation $Ra = 500$ et pour $\Gamma = 0.75$	114

Table des figures

1.1	Illustration de la taille (l) du Volume Élémentaire Représentatif entre celle du milieu poreux à l'échelle macroscopique (L^{**}) et à l'échelle des pores (d) [20].	8
1.2	Comportements typiques de fluides non Newtoniens couramment rencontrés	9
2.1	Configuration géométrique du problème étudié.	26
3.1	Domaine complètement couvert.	36
3.2	Maillage typique uniforme suivant x et z	37
3.3	Maillage entrelacé (bilan pour u_e).	39
3.4	Bilan pour u_w ($u_{(i,k)}$ notation indicielle).	41
3.5	Volume de contrôle centré sur le nœud de pression.	41
3.6	Volume de contrôle centré sur la composante de vitesse u_w	42
3.7	Résultats numériques réalisés avec l'eau.	49
4.1	Lignes de courant de l'écoulement dans le canal plan ($K = 10^{-6}$).	51
4.2	Lignes de courant de l'écoulement dans le canal plan ($K = 10^{-4}$).	52
4.3	Champ de vitesse et champ de pression de l'écoulement dans le canal ($K = 10^{-6}$).	52
4.4	Champ de vitesse et champ de pression de l'écoulement dans le canal ($K = 10^{-4}$).	53
4.5	Profil vertical de la vitesse horizontale à quelques positions axiales arbitrairement choisies.	53
4.6	Profil vertical de la vitesse horizontale pour une position donnée avec différente valeur du coefficient de Forchheimer.	54
4.7	Contours de vitesse pour un écoulement Newtonien dans un milieu poreux de perméabilité $K = 1.10^{-5}m^2$	54
4.8	Contours de vitesse pour un écoulement Newtonien dans un milieu poreux de perméabilité $K = 1.10^{-3}m^2$	54
4.9	Influence du nombre de Darcy sur la vitesse axiale pour un fluide Newtonien.	55
4.10	Évolution du gradient de pression en fonction de la vitesse débitante pour un fluide en loi de puissance d'exposant $n=0.5$	56
4.11	Évolution du gradient de pression en fonction de la vitesse débitante pour un fluide en loi de puissance d'exposant $n=0.7$	57
4.12	Évolution du gradient de pression en fonction de la vitesse débitante pour un fluide en loi de puissance d'exposant $n=1.2$	58
4.13	Lignes de courant de l'écoulement non Newtonien ($n=1.5$) dans le canal plan.	58

4.14	Lignes de courant de l'écoulement non Newtonien ($n=0.5$) dans le canal plan.	59
4.15	Influence du nombre de Darcy pour un écoulement de fluide en loi de puissance avec $n=1.5$	59
4.16	Influence du nombre de Darcy pour un écoulement de fluide en loi de puissance avec $n=0.5$	60
5.1	Configuration du domaine physique : milieu poreux saturé d'un fluide viscoélastique.	69
6.1	Région dans le plan (Γ, λ_1) où le déclenchement de l'instabilité se produit en mode stationnaire ou oscillatoire.	85
6.2	Courbe de stabilité marginale dans le cas des rouleaux transversaux avec $N = 5$:6.2a régime stationnaire ; 6.2b régime oscillatoire.	85
6.3	Dépendance du nombre de Rayleigh critique 6.3a et de la fréquence critique 6.3b pour les instabilités stationnaire et oscillatoire en fonction de λ_1 pour différentes valeurs de Γ dans le cas des rouleaux transversaux avec $N = 5$	86
6.4	Influence du rapport de forme a sur le nombre de Rayleigh pour les rouleaux longitudinaux : 6.4a les structures stationnaires et 6.4b dans le cas des structures oscillatoires.	86
6.5	Influence du rapport de forme a sur le nombre de Rayleigh pour les rouleaux longitudinaux dans le cas des structures oscillatoires.	87
6.6	Configuration du domaine physique : milieu poreux saturé d'un fluide viscoélastique.	87
6.7	Evolution vers le régime monocellulaire ($Ra=100, A=10$, (1) fluide Newtonien et (2) fluide viscoélastique $\Gamma = 0.75$ et $\lambda = 0.1$) :(a) $t=40$, (b) $t=100$, (c) $t=180$, (d) $t=220$	91
6.8	Influence du nombre de Ra sur les lignes de courant et les isothermes : (6.8a) $Ra=60$ ($Nu = 2.9866$);(6.8b) $Ra=150$ ($Nu = 4.2855$);(6.8c) $Ra=400$ ($Nu = 5.1105$).	93
6.9	Influence du nombre de Rayleigh Ra sur la distribution de la température $T(z)$	94
6.10	Influence du nombre de Rayleigh Ra sur la distribution de la fonction de courant $\psi(z)$	95
6.11	Influence du nombre de Rayleigh Ra sur la distribution de la vitesse horizontale $u(z)$	96
6.12	L'évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh	96
6.13	L'évolution de la fonction de courant en fonction du nombre de Rayleigh.	97
6.14	Evolution temporelle du nombre de Nusselt pour différent nombre de Rayleigh dans le cas d'une couche poreuse de rapport de forme $A=10$ saturé d'un fluide Oldroyd-B ($\Gamma = 0.50, \lambda_1 = 0.50$).	97
6.15	Convection thermique d'un fluide non-Newtonien (Oldroyd-B : $\Gamma = 0.75$ et $\lambda_1 = 0.1$) saturant une couche poreuse de rapport de forme $A=10$ avec $Ra=100$	98
6.16	Evolution temporelle du nombre de Nusselt pour différent Γ à un $Ra = 100$ dans le cas d'une couche poreuse de rapport de forme $A=10$ saturé d'un fluide Oldroyd-B avec $\lambda_1 = 0.50$	99

6.17	Evolution temporelle du nombre de Nusselt pour différent λ_1 à un $Ra = 100$ dans le cas d'une couche poreuse de rapport de forme $A=10$ saturée d'un fluide Oldroyd-B avec $\Gamma = 0.75$	99
7.1	Nombre de Ra en fonction du rapport de forme a suivant la direction y et pour différents nombres de rouleaux longitudinaux L ($L = 1, L = 2, L = 3$) dans le cas d'un fluide Newtonien (figure 7.1a) et $L = 1$ dans le cas viscoélastique (figure 7.1b).	103
7.2	Courbe marginale de stabilité de la convection monocellulaire.	104
7.3	Courbe marginale de stabilité de la convection monocellulaire d'un fluide viscoélastique.	105
7.4	Courbe marginale de stabilité de la convection monocellulaire d'un fluide viscoélastique.	105
7.5	Evolution de la différence entre le nombre Nusselt et de sa moyenne par rapport au temps (7.5a) et sa transformée de Fourier rapide (F.F.T) 7.5b pour une cavité poreuse saturée par un fluide Newtonien avec $Ra = 650$ et $A = 8$	107
7.6	Evolution de la différence entre le nombre Nusselt et de sa moyenne par rapport au temps (7.6a) et sa transformée de Fourier rapide (F.F.T) (7.6b) pour une cavité poreuse saturée par un fluide Newtonien avec $Ra = 750$ et $A = 4$	107
7.7	Influence du nombre de Rayleigh sur les lignes de courants et les isothermes : (7.7a) $Ra=65$, (7.7b) $Ra=300$ et (7.7c) $Ra=500$ pour fluide viscoélastique de paramètres $\Gamma = 0.75$ et $\lambda_1 = 0.50$ et avec un rapport de forme $A=10$	109
7.8	Évolution du nombre de Nusselt en fonction du temps dans le cas d'une couche poreuse de rapport de forme $A = 10$ saturée par un fluide viscoélastique de paramètre $\Gamma = 0.75$ et $\lambda_1 = 0.50$: (7.8a) $Ra = 300$; (7.8b) $Ra = 397$	110
7.9	Évolution du nombre de Nusselt en fonction du temps (7.9a) et sa transformée de Fourier rapide (F.F.T) (7.9b) dans le cas d'une couche poreuse de rapport de forme $A = 10$ saturée par un fluide viscoélastique de paramètre $\Gamma = 0.75$ et $\lambda_1 = 0.50$ avec un $Ra = 398$	110
7.10	L'influence du nombre de Rayleigh avant et après la bifurcation sur la distribution de la fonction de courant (a), de la température (b) et de la vitesse horizontale (c) pour un fluide viscoélastique $\Gamma = 0.75$, $\lambda_1 = 0.50$ et avec un rapport de forme $A=10$	113
7.11	L'influence de Γ sur la distribution de la fonction de courant (7.11 a), de la température (7.11 b) et de la vitesse horizontale (7.11 c) avant la bifurcation $Ra=100$ et après la bifurcation $Ra = 500$	115
7.12	L'influence du temps de relaxation λ_1 sur la distribution de la fonction de courant (7.12 a), de la température (7.12 b) et de la vitesse horizontale (7.12 c) avant la bifurcation $Ra=65$ et après la bifurcation $Ra = 500$	116

Introduction générale

L'écoulement macroscopique de fluide et la convection naturelle dans une couche poreuse ont fait l'objet de plusieurs études tant expérimentales que numériques durant des décennies. L'intérêt porté dans cette étude est dû à sa présence dans de nombreuses applications académique, environnementale et industrielle. La présence de fluides non Newtoniens dans ce milieu poreux valorise cette étude car, dans la nature ou dans l'industrie, la plupart des fluides rencontrés n'obéissent pas à la loi classique d'un fluide Newtonien. On peut citer les études des systèmes hydrogéologiques, l'exploitation des réservoirs d'hydrocarbure, la dispersion de polluants, le stockage d'énergie géothermie, le risque sismique induit, etc.

Les milieux poreux présentent des structures géométriques particulières où le fluide et la matrice solide sont intimement liés et couplés. Son domaine d'étude regroupe essentiellement la mécanique du solide et des fluides. La compréhension de l'écoulement du fluide et du transfert de chaleur à travers ces milieux, est d'une importance capitale dans les nombreux domaines cités plus haut. Ce problème peut être approché en appliquant la loi de Darcy. Cette loi est cependant soumise à des domaines de validité dont les plus restrictifs sont que le fluide doit être Newtonien et s'écouler en régime laminaire [18].

L'écoulement de fluide Newtonien dans une configuration couche fluide et poreuse superposées, est bien traité dans la littérature. Cette configuration illustre bien l'expérience de Henry Darcy [50]. Un des objectifs de cette étude sera de reprendre cette expérience par la simulation numérique et l'étendre au cas non Newtonien.

La méthode des volumes finis sera utilisée dans cette partie. Elle est intensivement employée dans les mécanismes d'écoulement des fluides, la météorologie, l'électromagnétisme, la simulation de dispositif semi-conducteur, les modèles des processus biologiques et beaucoup d'autres secteurs de technologie régis par les systèmes conservateurs qui peuvent être écrits sous la forme intégrale d'un volume de contrôle. Les avantages primaires de cette méthode sont la robustesse numérique, l'applicabilité sur les mailles non structurées très générales et les propriétés locales intrinsèques de conservation des arrangements résultants [98].

Le problème de Horton-Rogers-Lapwood a été largement étudié en raison de son importance dans de nombreux problèmes naturels et industriels. Ce problème est

l'équivalent de celui de Rayleigh-Bénard en milieu poreux. Il a été étudié par Horton et Rodgers [36] pour la première fois. Il a connu son évolution avec l'arrivée de Lapwood [37].

Si les mécanismes de la convection naturelle semblent actuellement relativement bien maîtrisés dans le cas des fluides Newtoniens, peu de travaux ont porté sur la convection naturelle dans les fluides à comportement rhéologique non Newtonien.

Récemment Kimura et al [17] ont étudié la convection naturelle dans une couche horizontale poreuse chauffée par le bas et refroidie par le haut. Un excellent accord entre les résultats analytique et numérique est obtenu. Ces auteurs montrent par une analyse de stabilité linéaire que la recirculation unicellulaire de l'écoulement reste stable avec l'augmentation du rapport de forme de la cavité. Le nombre de Rayleigh critique qui provoque une transition de l'écoulement unicellulaire à un écoulement oscillatoire est donné.

Nous allons nous inspirer des travaux de Kimura dans la seconde partie de notre étude et aller beaucoup plus loin en utilisant un fluide complexe. Certes dans la littérature des fluides non Newtoniens sont utilisés dans certains cas, mais le plus souvent avec une loi de comportement simple. Le manque de travaux dans ce domaine peut être expliqué par la difficulté à appréhender physiquement les mouvements convectifs dans ces types de fluides et à les modéliser mathématiquement. Vu la complexité de ces fluides, la nécessité d'approfondir la physique de la convection au sein des fluides non Newtonien est donc indispensable.

Le présent document est organisé de la manière suivante :

Nous présentons des généralités sur le phénomène physique étudié, avec une synthèse bibliographique des contributions scientifiques se rapportant à l'écoulement de fluide et de la convection naturelle dans le premier chapitre.

Ce premier chapitre va chapeauter les deux parties de l'étude qui seront présentées comme suit :

Dans la première partie nous traitons la simulation numérique de l'écoulement d'un fluide non Newtonien. Elle est composée de trois chapitres :

Dans le deuxième chapitre , nous allons présenter le modèle physique choisi, les équations gouvernantes qui régissent le mouvement du fluide dans la phase fluide et la phase poreuse.

Le troisième chapitre aborde la présentation de la méthode des volumes finis et sa mise en œuvre pour la discrétisation des équations du problème.

Nous rassemblons dans le quatrième chapitre les principaux résultats numériques de cette étude et leurs interprétations.

Dans la deuxième partie de l'étude nous allons aborder la convection naturelle dans le milieu poreux. Elle est composée de trois chapitres :

Nous proposons une formulation mathématique du problème dans le cinquième

chapitre en mettant en évidence l'état de base, ainsi que les paramètres caractéristiques du problème des instabilités thermiques des fluides viscoélastiques saturant le milieu poreux.

Puis dans le sixième chapitre, on expose l'étude de stabilité linéaire de l'état de conduction et la caractérisation de la convection monocellulaire. L'analyse et l'interprétation des résultats mettra fin à ce chapitre.

Le septième chapitre aborde la bifurcation de Hopf, la transition entre convection monocellulaire et convection multicellulaire. La méthode des différences finies est utilisée avec un algorithme du code de calcul développé en utilisant le langage fortran. L'analyse et l'interprétation des résultats obtenus par la solution numérique bidimensionnelle sera présentée pour le cas Newtonien et non Newtonien.

Enfin, une conclusion générale des résultats qui met en évidence les points majeurs de ce travail est synthétisé avec l'annonce de certaines perspectives.

Généralités

Pour bien comprendre le phénomène physique qui est traité dans cette étude, on propose dans ce chapitre des définitions sur les milieux poreux, les fluides complexes, le mécanisme de l'écoulement en milieu poreux et une synthèse des travaux scientifiques se rapportant à l'écoulement des fluides en milieu poreux.

1.1 Définition et caractérisation d'un milieu poreux

Un milieu poreux peut être défini d'après [16] comme une matrice solide comportant des vides à travers desquels un fluide ou plusieurs fluides peuvent y circuler. Ces espaces vides appelés pores peuvent être connectés ou non. On les rencontre dans la nature comme dans l'industrie. Ils peuvent s'agir d'empilement de billes, de panneaux de fibre de verre, de béton, de roche, de gisement de pétrole, de sable, etc. Il est caractérisé principalement par deux propriétés macroscopiques liées entre elles et qui sont la *porosité* et la *perméabilité*.

1.1.1 Porosité

La porosité ϕ est définie comme étant le rapport du volume des vides occupé par les pores, sur le volume total soit :

$$\phi = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume total}}.$$

Il caractérise l'importance des vides qu'il contient et est un concept indépendant de la forme et des connexions entre les vides dont seuls les volumes sont considérés.

Des mesures expérimentales faites par Kaviani [24] donnent dans le tableau (1.1) quelques valeurs de la porosité pour différents matériaux.

Matériaux	Porosité
Matériau mousseux	0,98
Fibre de verre	0,88 - 0,93
Fil à tisser	0,68 - 0,76
Grains de silice	0,65
Poudre d'ardoise noire	0,57 - 0,66
Cuir	0,56 - 0,59
Catalyseur	0,45
Granulé de pierres	0,44 - 0,45
Terre	0,43 - 0,54
Sable	0,37 - 0,50
Sphère bien empilée	0,36 - 0,43
Filtre de cigarettes	0,17 - 0,49
Briques	0,12 - 0,34
Poudre de cuivre	0,09 - 0,34
Pierre à chaud, Dolomite	0,04 - 0,10
Houille	0,02 - 0,07

TABLEAU 1.1 – Porosité de quelques matériaux.

1.1.2 Perméabilité

La perméabilité intrinsèque K est la capacité du milieu poreux à laisser passer le ou les fluides à l'intérieur des pores. Elle ne dépend que de la géométrie, de la matrice solide, en particulier de la porosité et de la tortuosité. Ainsi le milieu est d'autant plus perméable que les pores sont connectés entre eux. On représente dans le tableau (1.2) issu des travaux de Sheidegger [25] la perméabilité de quelques matériaux poreux.

Il est possible d'évaluer la perméabilité K grâce à des géométries particulières du milieu, par l'intermédiaire de porosité ϕ et d'une dimension caractéristique de la matrice solide à l'échelle du pore. La relation de Kozeny - Carman (1937), donne une estimation de la perméabilité K pour un milieu poreux non consolidé constitué d'éléments identiques de géométrie simple :

$$K = \frac{d_g^2 \phi^3}{36C_0(1 - \phi)^2}, \quad (1.1)$$

où d_g désigne une dimension caractéristique des éléments constituant la matrice poreuse et C_0 une constante dépendant de la forme des grains ($3.6 < C_0 < 5$).

Ergun [26], établit une expression semblable à l'équation de Kozeny-Carman en considérant l'écoulement unidirectionnel d'un fluide incompressible au sein d'une colonne poreuse constituée de particules sphériques, de diamètre d_g , et soumise à un

Matrice	Perméabilité m^2
Fibre de verre	$2,4 \times 10^{-11} - 5,1 \times 10^{-11}$
Fils à tisser	$3,8 \times 10^{-9} - 1,0 \times 10^{-8}$
Poudre d'ardoise noire	$4,9 \times 10^{-14} - 1,2 \times 10^{-13}$
Cuir	$9,5 \times 10^{-14} - 1,2 \times 10^{-13}$
Terre	$2,9 \times 10^{-13} - 1,4 \times 10^{-11}$
Sable	$2,0 \times 10^{-11} - 1,8 \times 10^{-10}$
Cheveux artificiels	$8,3 \times 10^{-10} - 1,2 \times 10^{-9}$
Cigarettes	$1,1 \times 10^{-9}$
Briques	$4,8 \times 10^{-15} - 2,2 \times 10^{-13}$
Plaque de liège	$3,3 \times 10^{-10} - 1,5 \times 10^{-9}$
Pierre à chaud, Dolomite	$2,0 \times 10^{-15} - 4,5 \times 10^{-14}$

TABLEAU 1.2 – Perméabilité de quelques matériaux.

gradient de pression :

$$K = \frac{d_g^2 \phi^3}{180(1 - \phi)^2}. \quad (1.2)$$

L'équation (1.2) correspond celle de (1.1) avec une valeur de $C_0 = 5$ de la loi de Kozeney-Carman.

1.1.3 Volume Élémentaire Représentatif *VER*

En général l'échelle du pore d varie de $0,05 \mu\text{m}$ pour les nano-pores, à $0,5 \text{ mm}$ pour les macro-pores [20]. Cependant, la distribution des pores et des grains est généralement très irrégulière. A cette échelle, la pression et la vitesse varient donc très irrégulièrement d'un point à l'autre du domaine. On est donc amené à effectuer une moyenne spatiale de ces grandeurs. Cette moyenne s'effectue sur de nombreux pores par l'intermédiaire d'un *Volume Élémentaire Représentatif (VER)* (voir figure (1.1)) du milieu.

Le *VER* doit être suffisamment grand pour que des propriétés globales moyennes puissent être définies sans que les fluctuations d'un pore à l'autre ne soient significatives (la taille l du *VER* doit être suffisamment grande devant la taille du pore d). Le *VER* doit cependant être suffisamment petit pour que les variations d'un paramètre dans le domaine d'étude puissent être représentées par des fonctions continues (la taille l du *VER* doit être suffisamment petite à la taille caractéristique du milieu L^*). Marsily [21] et surtout Bear [22] fournissent une discussion détaillée de ce concept ainsi que des méthodes utilisées pour dériver les propriétés moyennes des milieux poreux.

On obtient alors les grandeurs caractéristiques de la vitesse et de la pression en les moyennant sur le *VER*. Ce qui permet une représentation du point dans un nouveau

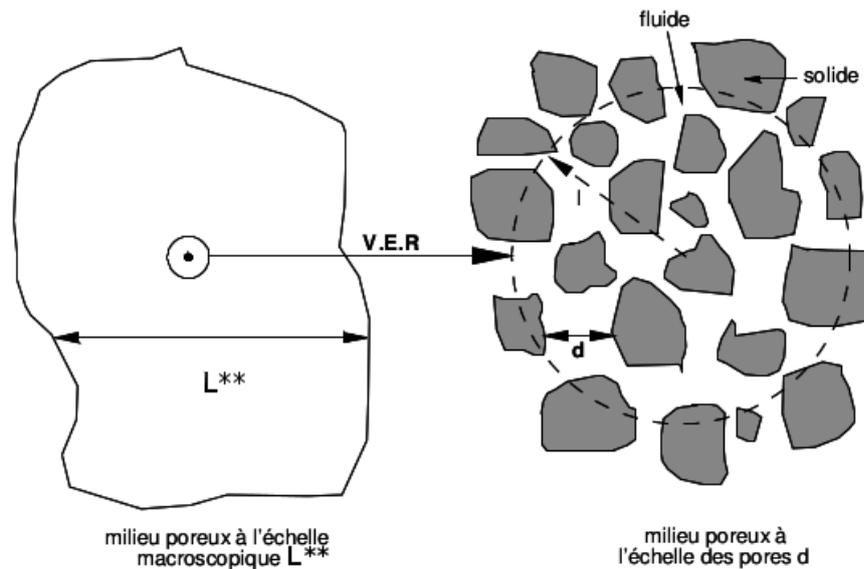


FIGURE 1.1 – Illustration de la taille (l) du Volume Élémentaire Représentatif entre celle du milieu poreux à l'échelle macroscopique (L^{**}) et à l'échelle des pores (d) [20].

milieu continu fictif par changement d'échelle qui sera équivalent au domaine poreux étudié mais à l'échelle macroscopique.

Il existe cependant d'autres procédures de changement d'échelle, comme la méthode plus récente *d'homogénéisation* (Sanchez-Palencia [23]). Cette méthode qui repose essentiellement sur des développements asymptotiques de la vitesse et de la pression à l'échelle du pore, puis à une application d'un opérateur moyen d'intégration pour passer à l'échelle macroscopique, a permis de justifier les termes supplémentaires des lois de quantité de mouvement. En outre nous avons les méthodes *probabilistiques* ou *stochastiques* qui reposent sur l'idée suivante : en raison de son irrégularité et de l'impossibilité pratique de connaître en détail sa géométrie fine, le milieu poreux est considéré comme aléatoire.

1.2 Comportement des fluides sous cisaillement

On rencontre de plus en plus des matériaux au comportement intermédiaire entre celui d'un solide élastique et d'un liquide. Mettre à la disposition de la communauté scientifique des modèles mathématiques capables de transcrire leurs comportements complexes, est l'objectif fixé par la rhéologie. Ces matériaux sont communément appelés fluides complexes ou non Newtoniens.

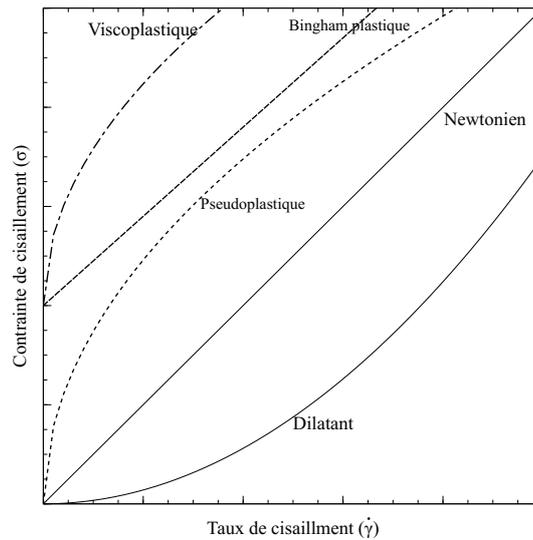


FIGURE 1.2 – Comportements typiques de fluides non Newtoniens couramment rencontrés

1.2.1 Fluide Newtonien

Pour un fluide Newtonien, il existe une proportionnalité directe entre contrainte et gradient de vitesse :

$$\tau = \mu \dot{\gamma}, \quad (1.3)$$

le coefficient de proportionnalité μ est la viscosité du fluide et est indépendante du temps et du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ et τ est la contrainte de cisaillement.

Dès que l'on s'écarte de cette indépendance de la viscosité vis-à-vis du cisaillement et du temps, on fait face à des fluides non Newtoniens. Dans ce cas général la loi constitutive s'écrit $\tau = f(\dot{\gamma})$ où f est une fonction à déterminer.

Dans la partie suivante, nous décrivons les comportements les plus fréquemment rencontrés dans le domaine des fluides non Newtoniens.

1.2.2 Fluide non Newtonien

Un fluide non Newtonien est défini par le fait que sa viscosité n'est pas constante et peut être dépendante de paramètres liés à l'écoulement ou encore du temps. Nous répertorions dans cette partie la plupart des comportements rencontrés lorsque l'on manipule ces matériaux. On distingue alors :

Les fluides rhéofluidifiants

Ils s'écoulent plus facilement avec l'augmentation du taux de cisaillement. On peut citer par exemple le sang, les encres ou encore certaines solutions de polymères

dilués. De nombreux modèles ont été développés pour rendre compte de l'écoulement rhéofluidifiant d'un fluide, donnant autant de modèles phénoménologiques pour la viscosité [15]. L'allure de la courbe d'écoulement est représentée sur la figure (1.2).

Une loi empirique très utilisée pour la variation de la viscosité avec le gradient de vitesse $\dot{\gamma}$ est la **loi de puissance**, proposée par Ostwald en 1925 :

$$\tau = m\dot{\gamma}^n \text{ soit } \mu_a = m\dot{\gamma}^{n-1}, \quad (1.4)$$

où μ_a viscosité dynamique apparente, m est un coefficient appelé consistance du fluide et $n < 1$ un exposant qui traduit l'écart avec le comportement Newtonien. Bien que ce modèle permette de résoudre un grand nombre de problèmes d'écoulement, il faut garder à l'esprit qu'il décrit assez mal le comportement à bas et haut taux de cisaillement et que les paramètres m et n n'ont pas d'interprétation physique claire.

En réalité, un fluide rhéofluidifiant ne l'est que pour une certaine gamme de taux de cisaillement. Pour les faibles cisaillements ainsi que ceux élevés, on observe un comportement Newtonien avec l'apparition éventuelle de plateau de viscosité. Pour prendre en compte ce plateau de viscosité à cisaillement nul et infini, Carreau-Yasuda propose un autre modèle plus sophistiqué que le modèle loi de puissance :

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = \left[1 + (\Lambda \dot{\gamma})^\zeta \right]^{\frac{n-1}{\zeta}}, \quad (1.5)$$

où μ_0 et μ_∞ , sont respectivement la viscosité à cisaillement nul et infini, Λ est une constante de temps, n une constante et ζ un paramètre qui décrit la transition entre le comportement à faible cisaillement et la région en loi de puissance.

Fluides rhéoépaississants

Ce sont des fluides dont la viscosité croît avec le taux de cisaillement. Le rhéoépaississement est beaucoup plus rarement observé que la rhéofluidification [15]. Toutefois certaines suspensions concentrées (amidon de maïs par exemple) et le sable mouillé ont un comportement rhéoépaississant. Un fluide peut être rhéoépaississant pour une certaine gamme de taux de cisaillement, et rhéofluidifiant voire Newtonien pour d'autres gammes [28]. L'allure de la courbe d'écoulement est représentée sur la figure (1.2).

On utilise une loi en puissance pour les représenter (cf Eq. (1.4)) avec un exposant $n > 1$, qui est d'autant plus grand que le matériau s'écarte du comportement Newtonien.

Fluides à seuil

Par ailleurs certains fluides complexes ne s'écoulent que lorsque la contrainte qui leur est appliquée dépasse une valeur seuil τ_c . Ainsi tant que $\tau \leq \tau_c$ le fluide ne s'écoule

pas mais se déforme de manière élastique. Une fois cette valeur dépassée, le matériau se mettra en écoulement et présentera éventuellement un caractère rhéofluidifiant (ou rhéoépaississant). On peut citer en exemple dans cette catégorie les pâtes dentifrices, la mayonnaise, les mousses alimentaires ou encore les boues de forage utilisées pour prévenir la sédimentation des déblais remontés lors de forage de puits pétroliers [15].

Plusieurs modèles existent pour décrire le comportement rhéologique d'un fluide à seuil. La représentation la plus simple est le modèle de Bingham (1922) qui donne la relation suivante en contrainte et taux de cisaillement :

$$\tau = \tau_c + \mu_p \dot{\gamma}, \quad (1.6)$$

où τ_c est la contrainte seuil et μ_p la viscosité plastique. L'allure de la courbe d'écoulement est représentée sur la figure (1.2). Le matériau ne commence qu'à s'écouler qu'au-delà du seuil et présente ensuite un comportement Newtonien.

Le modèle rhéologique le plus courant et le plus efficace pour décrire la loi de comportement de ces fluides est le modèle de Herschel- Bulkley. En cisaillement simple, il s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau < \tau_c &\implies \dot{\gamma} = 0 \\ \tau \geq \tau_c &\implies \tau = \tau_c + m\dot{\gamma}^n, \end{aligned} \quad (1.7)$$

où m est un facteur de consistance s'exprimant en $Pa.s^n$ et n l'indice de structure du fluide.

Les fluides à seuil sont des fluides qui ne présentent pas d'effet thixotrope, de migration de phase, etc.

Thixotropie

Il existe des fluides dont la viscosité diminue au cours du temps sous un cisaillement constant : ce sont les fluides thixotropes dont font partie par exemple le ketchup et le yaourt. Là encore ce phénomène peut s'expliquer par une modification de la structure interne du fluide sous cisaillement avec une cinétique comparable au temps d'observation. Ici le comportement du fluide dépend de son histoire et il peut apparaître des phénomènes d'hystérésis rendant son étude particulièrement complexe.

Viscoélastiques et modèle de type Oldroyd

Un fluide viscoélastique soumis à une déformation donnée présente une réponse intermédiaire entre celle d'un solide élastique, et celle d'un fluide visqueux pour lequel la contrainte est proportionnelle à la vitesse de déformation. Cette réponse va dépendre en partie du rapport entre le temps de la sollicitation et le temps caractéristique (appelé aussi temps de relaxation) du matériau viscoélastique. Si le temps de sollicitation

est petit devant le temps caractéristique du matériau, les composantes du matériau n'ont pas le temps de se déformer et on observe une réponse élastique. Si le temps de sollicitation est grand devant le temps caractéristique, la réponse sera de type visqueux [14].

Plusieurs approches existent afin de modéliser le comportement des fluides visco-élastiques. Ces approches proposent une représentation assimilant le comportement viscoélastique à une association de ressort (contribution élastique) et d'amortisseur (contribution visqueuse), contributions montées en parallèle ou en série afin d'obtenir la représentation la plus proche possible du comportement dynamique du fluide.

Ces modèles analogiques sont des moyens efficaces pour construire une loi de comportement et constituent la base des modèles actuels. Un des modèles les plus présents dans la littérature est celui développé par James Garner Oldroyd [125] aussi appelé modèle d'Oldroyd-B.

Modèle d'Oldroyd-B

Oldroyd a introduit plusieurs modèles, des modèles à six et à huit constantes pour décrire le comportement viscoélastique des fluides. Nous allons décrire un modèle viscolélastique ; le modèle d'Oldroyd-B :

$$\tau + \bar{\lambda}_1 \frac{D}{Dt} \tau = 2\mu_0 (D + \bar{\lambda}_2 \frac{D}{Dt} D). \quad (1.8)$$

La dérivée invariante D/Dt s'écrivant :

$$\frac{D}{Dt} \tau = \frac{\partial}{\partial t} \tau + (\vec{v} \cdot \nabla) \tau - (\nabla \vec{v}) \cdot \tau - \tau \cdot (\nabla \vec{v})^T. \quad (1.9)$$

$D = d_{ij}$ défini par $d_{ij} = (1/2)(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$ représente le tenseur taux de déformations, μ_0 n'est autre que la viscosité statique, $\bar{\lambda}_1$ ($\bar{\lambda}_1 > 0$) est le temps de relaxation qui représente le temps que le tenseur des contraintes a besoin pour réagir au changement de déformation dans le système. Le temps de retard $\bar{\lambda}_2$ ($\bar{\lambda}_2 > 0$) , représente le temps nécessaire à la déformation de se propager.

Le temps de retard $\bar{\lambda}_2$ permet de distinguer la partie élastique de la partie visqueuse du fluide : il est compris entre 0 et $\bar{\lambda}_1$. Si $\bar{\lambda}_2$ est proche de 0 alors le fluide est très élastique et inversement si $\bar{\lambda}_2$ est proche de $\bar{\lambda}_1$ alors le fluide est plutôt Newtonien.

Le cas $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = 0$ correspond à un fluide purement visqueux, tandis que le cas $\bar{\lambda}_2 = 0, \bar{\lambda}_1 > 0$, correspond au cas d'un fluide purement élastique (modèle de Maxwell).

Comme exemple, nous pouvons citer le fluide de Boger qui est constitué d'eau (1,6 %) , de sirop (98,3%) et de polyacrylamide (0,1%). Les temps de relaxation et de retard sont respectivement $\bar{\lambda}_1 = 2,54s$ et $\bar{\lambda}_2 = 1,94s$.

Comme les fluides viscoélastiques sont généralement composés d'un solvant et d'un polymère il est d'usage de décomposer le tenseur des contraintes τ de la manière suivante

$$\tau = \tau_s + \tau_p. \quad (1.10)$$

Ainsi le tenseur des contraintes τ_s représente la contribution du solvant soit $\tau_s = 2\mu_s D$, tandis que la contribution du polymère τ_p est transmise respectivement par la viscosité des solvants et des polymères μ_s et μ_p . Les temps de relaxation et de retardation sont liés par la relation :

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{\mu_s}{\mu_s + \mu_p} \bar{\lambda}_1. \quad (1.11)$$

Pour de faibles variations de la vitesse, la relation 1.8 devient :

$$(1 + \bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial t})\tau = 2\mu_0(1 + \bar{\lambda}_2 \frac{\partial}{\partial t})D. \quad (1.12)$$

1.3 Ecoulement en milieu poreux saturé

1.3.1 Loi de Darcy et ses extensions pour les fluides Newtoniens

En 1856, en étudiant le réseau public de la ville de Dijon, Henry Darcy formula une loi empirique pour décrire l'écoulement d'eau à travers un cylindre rempli de sable d'axe vertical : la loi de Darcy [50]. Cette relation empirique donne la dépendance du flux massique Q d'un fluide Newtonien s'écoulant à travers un milieu poreux homogène et isotrope par rapport aux paramètres de l'expérience qui sont :

- la section droite du milieu poreux S
- la hauteur du milieu poreux h
- la différence de charge hydraulique $\nabla P = \frac{P_1 - P_2}{h}$ entre les extrémités inférieure et supérieure de la colonne.

$$Q = k.S\nabla P, \quad (1.13)$$

ou encore

$$v = k.\nabla P, \quad (1.14)$$

où $v = \frac{Q}{S}$, v est appelée vitesse débitante.

Cette relation est linéaire et exprime la proportionnalité qui existe entre le débit par unité de surface Q/S résultant de la différence de charge ∇P auquel est soumis le milieu [51].

Le coefficient de proportionnalité k est appelé conductivité hydraulique. Il se réfère à la facilité qu'a le fluide à traverser le milieu poreux. Ce coefficient dépend à la fois des

propriétés du fluide, par le biais de sa viscosité dynamique μ , et du milieu poreux par l'intermédiaire de paramètres tels que la distribution de taille des grains, la forme ou encore la taille des particules. Il peut être exprimé comme :

$$k = \frac{K}{\mu}, \quad (1.15)$$

où K est définie comme la perméabilité intrinsèque du milieu poreux et est exprimée en m^2 ou encore en *Darcy* ($1\text{Darcy} = 10^{-12}m^2$).

Il est important de noter que la vitesse moyenne du fluide dans les pores v_p est plus élevée que la vitesse débitante v_d car seule une partie du volume total du matériau y est disponible pour l'écoulement :

$$v_p = \frac{v}{\phi}. \quad (1.16)$$

La forme générale de la loi de Darcy (1.14) pour un écoulement tridimensionnel s'obtient en rassemblant les écoulements dus aux gradients de pression sur chaque coordonnée. Le rôle de la gravité peut être ajouté et on obtient alors l'équation vectorielle :

$$\vec{v} = -k.(g\vec{r}adP - \rho\vec{g}), \quad (1.17)$$

où \vec{g} est le vecteur accélération de la pesanteur.

Comme il a été indiqué dans l'introduction, la loi de Darcy, largement utilisée est soumise à des domaines de validités [18], donc insuffisante pour des études des cas les plus réalistes. Certaines de ses insuffisances font qu'elle ne peut pas traduire l'influence de la nature du fluide sur l'écoulement notamment près des parois. En effet, avec ce modèle, la condition de non glissement aux parois est retenue quel que soit le fluide considéré. Cette équation ne tient pas compte non plus d'éventuels effets inertiels.

Formulation de Brinkman

Dans le cadre du calcul de la force visqueuse exercée par un fluide sur des particules sphériques composant un milieu poreux, Brinkman (1947) a étendu la loi de Darcy en introduisant un terme équivalent au terme de diffusion visqueuse dans la loi de Stokes

$$\vec{\nabla}P = -\frac{\mu}{K}\vec{v} + \mu_{eff}\vec{\nabla}^2v. \quad (1.18)$$

Cette loi empirique est connue sous le nom de la formulation de Darcy-Brinkman. Le premier terme de droite de l'équation (1.18) est le terme de Darcy et le deuxième est appelé le terme de Brinkman.

Brinkman justifie cette loi empirique par le fait que, pour les faibles valeurs de la perméabilité K , l'équation (1.18) dégénère en loi de Darcy, équation (1.14), et lorsque

la perméabilité tend vers l'infini, on retrouve l'équation de Stokes. La difficulté dans l'utilisation de ce modèle réside dans l'évaluation de la viscosité équivalente μ_{eff} .

Formulation de Forchheimer

L'équation de Darcy décrit bien l'écoulement à faible intensité. Par contre, lorsque la vitesse devient de plus en plus importante, l'effet inertiel, non linéaire devient non négligeable et l'équation de Darcy ne nous permet plus de décrire l'écoulement. Pour pallier ce problème Ward [52] propose l'équation suivante :

$$\vec{\nabla}P = -\frac{\mu}{K}\vec{v} + bK^{-1/2}\rho_f|\vec{v}|v. \quad (1.19)$$

Le premier terme du second membre est le terme de Darcy et le second terme est connu sous le nom de terme de Forchheimer, b étant une constante adimensionnelle. Cette étude [52] montre parfaitement bien que pour des vitesses relativement faibles, le terme de Darcy s'impose, l'équation de Darcy constitue alors une bonne approximation de l'équation de Darcy-Forchheimer. En revanche, pour des vitesses d'écoulement assez élevées, le terme convectif de Forchheimer prédomine. Le rapport de ces deux termes représente à une constante près le nombre de Reynolds Re à l'échelle du pore.

$$Re_p = \frac{vK^{1/2}}{\nu}, \quad (1.20)$$

avec ν la viscosité cinématique.

Terme convectif

Une extension de l'équation de Darcy a été proposé par Wooding [53]. Il introduit un terme convectif par analogie avec les équations de Navier-Stokes.

$$\frac{\rho}{\phi^2}(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}P - \frac{\mu}{k}\vec{v}. \quad (1.21)$$

Le terme de gauche de l'équation (1.21) est le terme de convection qui tient compte des effets inertiels quand les vitesses sont importantes.

Vafai et Tien [54], Lauriat et Prasad [55] et Lage [56] montrent grâce aux travaux théoriques et numériques, que le terme de convection ne tient pas compte des déviations de sources par rapport au terme de Darcy. Ils concluent alors sur la nécessité d'ajouter le terme de Forchheimer pour tenir compte des effets inertiels. Il a été aussi montré que la simple équation de Darcy était insuffisante pour décrire un écoulement en milieu poreux, en particulier l'influence de la viscosité du fluide dans la zone pariétale [13].

1.3.2 Loi de Darcy et ses extensions pour les fluides non-Newtoniens

Lors de la modélisation de l'écoulement laminaire en milieu poreux avec des fluides non-Newtoniens, on s'attend effectivement à une modification de la loi de Darcy. À l'état stationnaire, le modèle de fluide Newtonien généralisé peut être adopté. Ce modèle s'appuie sur l'hypothèse que les mêmes équations utilisées pour l'écoulement Newtonien, peuvent être appliquées également pour l'écoulement des fluides non-Newtoniens, à condition de remplacer la viscosité μ par la « viscosité du milieu poreux », μ_{mp} , qui dépend à la fois des caractéristiques moyennes du milieu poreux et des propriétés du fluide [57].

La viscosité apparente étant fonction du taux de cisaillement, la viscosité du milieu poreux est également liée à ce qu'on appelle « le taux de cisaillement du milieu poreux », $\dot{\gamma}_{mp}$, définie comme le taux de cisaillement moyenne du fluide en écoulement à travers les pores [58], [59]. La loi de Darcy, pour un fluide non-Newtonien devient alors :

$$\nabla P = \frac{\mu_{mp}(\dot{\gamma}_{mp})}{K} v, \quad (1.22)$$

où $\dot{\gamma}_{mp}$ est égale au rapport de la valeur absolue de la vitesse débitante et d'une longueur caractéristique, comme indiqué dans [60] par la relation suivante :

$$\dot{\gamma}_{mp} = \alpha \frac{|v|}{\sqrt{K\phi}}, \quad (1.23)$$

où α est appelé facteur de décalage qui, d'un point de vue physique, contient des informations sur les effets de la géométrie des pores. α varie entre 1 et 15 [61]. Contrairement à K , le facteur de décalage α n'est pas une propriété intrinsèque du milieu poreux, par conséquent il doit être déterminé pour chaque milieu fluide et poreux à partir d'essais d'écoulement en laboratoire ou de simulations de l'écoulement au niveau des pores [62].

Dans le cas d'un écoulement de fluide non-Newtonien de faible intensité, l'équation (1.19) devient :

$$\vec{\nabla} P = -\frac{\mu_{mp}(\dot{\gamma}_{mp})}{k} \vec{v} + bk^{-1/2} \rho_f |\vec{v}| v. \quad (1.24)$$

D'après la littérature, il est possible d'émettre l'hypothèse que la non-linéarité est due à des phénomènes d'inertie, et par conséquent, ne dépend pas des propriétés du fluide visqueux [63].

Première partie

Etude numérique de l'écoulement de fluides Newtonien et non Newtonien

Synthèse bibliographique

Le processus d'écoulement en milieu poreux est d'une importance capitale pour un large domaine d'applications d'ingénierie allant de la conservation de l'énergie à la fabrication de matériaux composites de pointe. La loi de Darcy permet de simuler de nombreuses applications, mais ce sont ses extensions à des cas plus généraux qui sont particulièrement étudiées et analysées de nos jours.

Des observations expérimentales ont permis d'établir que la proportionnalité entre le gradient de pression et la vitesse du fluide n'est plus valable pour des débits élevés dans les milieux poreux. Des relations empiriques telles que l'équation de Forchheimer ont été proposées pour tenir compte des effets non linéaires.

Hassanizadeh et Gray [66] ont recensé l'ensemble de ces relations non linéaires, basées sur les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus et ont pu identifier la source de la non linéarité dans les équations. Il est montré que, dès le début de la non linéarité (qui apparaît pour des nombres de Reynolds variant autour de 10), les forces de viscosité et d'inertie macroscopique sont négligeables devant les forces visqueuses microscopiques.

Pour déterminer les coefficients de perméabilité et d'inertie, Wei Zhong et al [68] ont utilisé la méthode de charge avec une pression différentielle dans une enceinte isothermique. La validité de leurs travaux est vérifiée à l'aide d'une série de mesure sur les caractéristiques du débit dans un milieu poreux constitué de métal fritté. Une vitesse limite de $0,1 \text{ m s}^{-1}$ entre les régimes de Darcy et quasi-Forchheimer est obtenue dans cette étude.

Un modèle numérique, basé sur la résolution directe des équations de Navier-Stokes, est proposé par Komiwes et al. [69], pour calculer les pertes de charge d'un fluide visqueux incompressible à travers un empilement de particules sphériques. Les simulations effectuées pour différents volumes de matériaux granulaires permettent de retrouver la loi de perte de charge d'Ergun pour des nombres de Reynolds ($Re \leq 20$). Ces études montrent que le volume élémentaire représentatif est de l'ordre de grandeur du diamètre des particules.

Des simulations numériques pour une large gamme des nombres de Reynolds ont été réalisées pour l'écoulement d'un fluide Newtonien incompressible à travers un milieu poreux périodique en deux et trois dimensions. En analysant les schémas

d'écoulement en 2D, Fourar et al [70], démontrent l'existence de trois étapes d'évolution de la structure d'écoulement correspondant au régime de Darcy, transitoire et de forte inertie. Ce dernier conduit à la formation de tourbillons avec des tailles et formes variant en fonction du nombre de Reynolds.

Pour le régime de Darcy, correspondant aux faibles nombres de Reynolds, Fourar et al.[70] montrent que la traînée de pression est deux fois plus importante que celle visqueuse pour l'écoulement en 2D. Ils montrent également que l'écoulement en 3D réduit de manière significative la zone de transition entre le régime de Darcy des régimes à forte inertie. Par conséquent l'équation de Forchheimer conduit à une bonne description de l'écoulement 3D dans le régime non-Darcy.

Cimolin et al [72] considèrent la modélisation et la simulation numérique des écoulements de fluides incompressibles dans les régions partiellement occupées par les milieux poreux. La principale motivation de leur étude vient d'un problème industriel spécifique de ventilation interne pour les casques de moto. Les auteurs se sont concentrés uniquement sur l'aspect de la dynamique des fluides de l'écoulement d'air, pour étudier les approches possibles de modélisation pour la description du système physique, ce qui représente une étape préliminaire vers un modèle plus complexe en tenant compte de la chaleur et des phénomènes liés à la transpiration.

Les travaux cités ci-dessus traitent le cas où nous avons un seul milieu(fluide dans le poreux).

La dynamique des fluides dans le régime de d'écoulement libre (phase fluide) est exprimée par les équations de Stokes pour un écoulement rampant, laminaire et sans effets d'inertie. L'écoulement visqueux, laminaire, incompressible dans un milieu poreux avec une très petite porosité, est parfaitement représenté par l'équation de Darcy [73].

Un nombre important de travaux de recherche sont cités dans la littérature s'adressant aux concepts physiques complexes à l'origine des écoulements couplés. L'accent est mis principalement, pour la plupart des travaux, à l'étude du phénomène inter-faciale ayant lieu sur la frontière milieu fluide/milieu poreux. Dans le régime d'écoulement en milieu fluide, la contrainte imposée sur le fluide visqueux est supportée par le fluide lui-même. Toutefois, lorsque le fluide se rapproche de la frontière et commence à pénétrer dans la matrice poreuse, la contrainte imposée à la viscosité du fluide est transférée dans la matrice poreuse rigide. Cela justifie l'application de l'équation de Darcy comme une condition limite pour le régime d'écoulement de fluide libre à l'interface fluide / poreux. Depuis, les régimes d'écoulement se distinguent au niveau macroscopique. La continuité transversale au niveau de l'interface des entités physiques associées à ces deux régimes tels que la vitesse et la pression est encore un sujet d'actualité.

Mathématiquement, l'obstacle principal à la modélisation du comportement de l'écoulement dans le domaine milieu fluide couplé au milieu poreux, est la formulation

des équations de l'écoulement du fluide, représentant à la fois le régime d'écoulement libre et poreuse avec des conditions à l'interface convenablement choisies. La difficulté secondaire dans la modélisation de l'écoulement Stokes / Darcy est associée à l'ordre des équations différentielles partielles qui leur sont associées provoquant l'incompatibilité des conditions aux limites nécessaires.

Pour contourner ces problèmes, la plupart des algorithmes de résolution disponibles jusqu'à nos jours sont basés sur deux concepts à savoir les conditions de glissement et de non glissement à l'interface. Le premier concept utilise l'équation de Brinkman [74] pour décrire l'écoulement au niveau de l'interface fluide/poreux. L'équation de Brinkman représente la formation d'une couche limite hydrodynamique dans le milieu poreux adjacent à l'interface libre/poreux. De même cette équation est du même ordre que l'équation de Stokes, la liaison directe de ces deux équations assure la continuité des champs de grandeurs dans les deux régions à travers l'interface. Toutefois, en raison de la formation de la couche limite, l'équation de Brinkman est uniquement applicable dans le cas des milieux poreux de grande perméabilité [75], [76].

Beavers et Joseph [73] proposent une formulation à deux domaines : les équations de Navier-Stokes dans le domaine fluide et l'équation de Darcy dans le milieu poreux. Le problème de la condition de glissement à l'interface du domaine fluide et du milieu poreux est surmonté en exprimant la continuité de la contrainte tangentielle qui fait intervenir un coefficient de frottement, la perméabilité du milieu poreux, la vitesse du fluide et la vitesse de filtration dans le milieu poreux. Dans ce modèle, les conditions aux limites appropriées à l'interface, seront choisies selon l'ordre de l'équation du mouvement écrite pour le milieu poreux (Darcy, Darcy-Brinkman)[77].

La validité de cette condition de glissement à l'interface est largement soutenue et modifiée par plusieurs auteurs (Jones [78], Neale et al [79], Haber et Mauri [80]).

Se basant sur les travaux de Beavers et Joseph, plusieurs publications scientifiques ont vu le jour traitant spécifiquement les conditions de l'interface fluide/poreux. Alazmi et Vafai [82] ont mentionné l'existence de cinq types de conditions à l'interface entre le milieu poreux et la couche de fluide adjacente. Une analyse systématique des écarts entre les différentes conditions aux limites a été établie avec les modèles à convergence et divergence.

Récemment, Deng et Martinez [83] ont considéré comme système couplé, l'écoulement visqueux d'un fluide Newtonien au-dessus et dans le milieu poreux à l'aide des équations de Navier-Stokes et de Darcy étendue par Brinkman y compris les termes d'inertie. Le phénomène d'interface est représenté par la contrainte proposée par Ochoa-Tapia et Whitaker [123].

Les références citées précédemment concernent principalement l'approche du problème à deux domaines dans lequel l'écoulement dans le milieu fluide et poreux couplé sont considérés comme deux domaines différents présentant des caractéristiques d'écou-

lement distincts. Dans une approche à domaine unique, la couche poreuse est supposée être un pseudo-fluide. L'écoulement dans le milieu fluide combiné avec l'écoulement en milieu poreux sont considérés comme un domaine d'écoulement unique.

Cette seconde approche consiste à écrire une seule équation pour tout le domaine (Navier-Stokes incluant le terme de Darcy). La contribution de la diffusion visqueuse dans le milieu poreux est naturellement prise en compte.

Dans cette formulation, la transition de la région fluide vers la région poreuse est accomplie par la variation spatiale de la porosité et de la perméabilité [84], ou d'autres propriétés effectives. Ainsi, comme le milieu poreux considéré est homogène jusqu'au bord, lorsqu'on passe d'une région à l'autre, la porosité et la perméabilité changent de façon discontinue. Dans la zone fluide la perméabilité tend vers l'infini et le terme de Darcy devient négligeable devant le terme de diffusion visqueuse et le terme d'advection et on retrouve l'équation de Navier-Stokes. Sur le reste du domaine où la perméabilité est faible, l'équation de conservation de la quantité du mouvement se traduit par l'équation de Darcy corrigé éventuellement par les termes de Brinkman et Forchheimer.

Nassehi [85] a développé un schéma numérique par éléments finis pour le système Navier-Stokes/Darcy rencontré dans la filtration membranaire à écoulement transversal. Le lien direct entre les équations de Navier-Stokes et de Darcy est obtenu en imposant l'équation de Darcy comme condition au limite effective à la sortie d'écoulement en milieu fluide.

L'équation de Brinkman contient des termes de Laplace et c'est du même ordre que l'équation de Stokes. Par conséquent, grâce à l'utilisation de cette équation à l'interface fluide / poreux et dans la matrice poreuse, les conditions aux limites dans les deux équations de Stokes et de Darcy deviennent compatibles. Cependant, des études théoriques effectuées par Lundgren [86], Kim et Russell [75] ont souligné que l'application de l'équation de Brinkman est limitée uniquement au domaine de grande porosité où les courbures des lignes de courant dans la masse poreuse, milieu adjacent à l'interface sont généralement plus grand que le diamètre des pores.

L'écoulement des fluides non-Newtonien en milieu poreux, à grands ou faibles nombres de Reynolds, est souvent rencontré dans l'industrie chimique, pharmaceutique et alimentaire, ainsi que dans l'ingénierie du pétrole et les eaux souterraines, et dans beaucoup d'autres applications industrielles.

En vertu de la plupart des conditions d'exploitation généralement explorées, la dépendance de la chute de pression en fonction du débit est non-linéaire et le développement de modèles capables de décrire précisément cette dépendance, en conjonction avec des comportements rhéologiques non-linéaires est d'une grande importance.

Une revue de la littérature montre que l'écoulement des fluides Newtoniens dans le milieu poreux a été largement étudié dans le passé. D'un autre côté, l'écoulement à

travers le milieu poreux par un fluide non-Newtonien a relativement fait l'objet de peu d'études, surtout numérique.

Chevalier et al [87], ont mesuré la chute de pression et le débit, sur une grande gamme de vitesse, d'un fluide à seuil bien contrôlé à travers un milieu poreux composé d'empilement de bille en verres ayant différentes tailles. L'analyse détaillée des données, a permis d'extraire une expression générale liant la chute de pression et le débit en fonction des caractéristiques du fluide et celles du milieu poreux. Cette loi générale a une forme similaire au modèle de Herschel-Bulkley qui décrit le comportement rhéologique du fluide, elle s'écrit comme la somme d'un terme de pression critique et d'un terme dépendant de la vitesse d'écoulement.

Dans ces conditions, l'analyse des phénomènes de transport dans une configuration fluide-poreux a fait l'objet d'une attention particulière au cours des dernières décennies (Niels et Bejan [88]).

Modélisation mathématique de l'écoulement

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous décrivons et nous formulons le modèle physique, les hypothèses simplificatrices ainsi que les conditions aux limites appropriées.

2.2 Configuration étudiée

La configuration géométrique du problème étudié est représentée sur la figure (2.1). En supposant que la troisième direction (direction normale à la figure) est grande devant les autres dimensions du milieu, on peut considérer le problème comme bidimensionnel. Le système est constitué d'une couche poreuse horizontale d'épaisseur h_m et d'une couche fluide d'épaisseur h_f . On peut noter h la longueur totale de la cavité ($h = h_m + h_f$). Les parois horizontales sont maintenues adiabatique et imperméable. Le fluide s'écoule horizontalement avec une vitesse v_1 et une pression P_1 en $x = 0$ et ressort avec une vitesse v_2 avec une pression P_2 en $x = h$. Le milieu poreux est saturé par le même fluide qui occupe le reste de la cavité.

2.3 Hypothèses simplificatrices

Les hypothèses simplificatrices retenues dans notre étude sont les suivantes :

- L'écoulement est incompressible.
- L'écoulement du fluide au sein de la cavité est laminaire et bidimensionnel.
- On suppose que la matrice poreuse est isotrope, homogène, immobile et en équilibre thermodynamique avec le fluide.
- Les propriétés thermophysiques du fluide sont constantes.

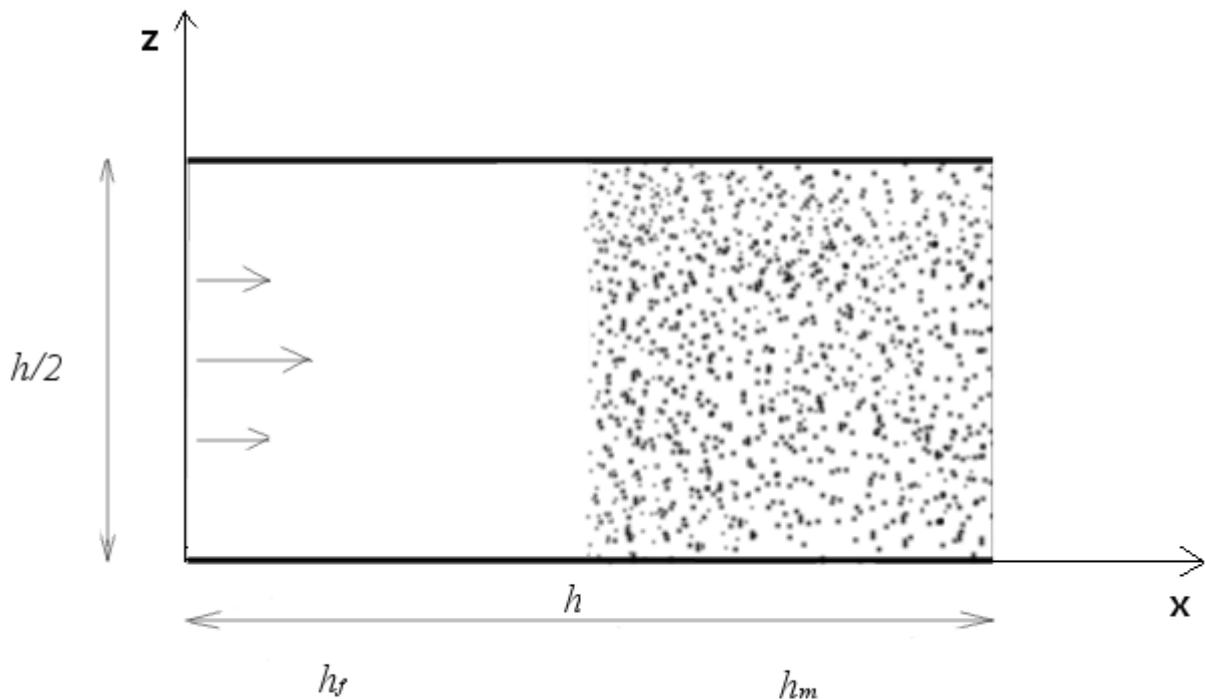


FIGURE 2.1 – Configuration géométrique du problème étudié.

2.4 Equations du problème

Les équations de Navier Stokes à l'échelle du pore restent valables, mais leur résolution est difficile, vu la complexité géométrique du milieu poreux. Ces considérations imposent l'utilisation d'une méthode d'homogénéisation dite méthode des prises de moyennes qui consiste à intégrer les équations de conservation locales sur un volume élémentaire représentatif (*V.E.R*), qui doit être suffisamment grand en comparaison avec l'échelle du pore pour que le milieu poreux soit assimilé à un milieu continu où la résolution des équations de conservation macroscopique ainsi obtenues devient possible.

Les difficultés qui se posent dans le cas des milieux composés, se situent au niveau de l'écriture des équations de conservation qui décrivent l'écoulement et les transferts dans les deux milieux, ainsi que l'établissement des conditions limites au niveau de l'interface fluide/poreux.

L'approche à un seul domaine présente l'avantage de simplifier la procédure numérique, puisque les conditions limites à l'interface ne sont pas écrites explicitement. De plus, ce modèle est capable de prendre en compte les variations spatiales des propriétés plus facilement que les modèles à deux domaines. Dans notre travail, nous adopterons donc l'approche à un seul domaine : équations de Navier-Stokes incluant les termes de

Darcy, Brinkman et Forchheimer.

2.4.1 Équations de conservation

Les équations qui régissent l'écoulement en milieu poreux saturé, cas que nous considérons dans notre étude, sont : les équations de conservation et les équations constitutives. La description détaillée de ces équations est disponible dans des ouvrages de références sur la mécanique des fluides et des phénomènes de transport (voir Crochet et al. [89] ; Bird et al.[58]).

Les équations de conservation sont les suivantes :

Conservation de la masse

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_f = 0. \quad (2.1)$$

Conservation de la Quantité de Mouvement

$$\rho_f \frac{d\mathbf{u}_f}{dt} = \nabla \cdot (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_f) + \rho_f \mathbf{g}, \quad (2.2)$$

où les notations suivantes ont été adoptées : \mathbf{u}_f désigne le champ de vitesse, p_f la pression, ρ_f la masse volumique, \mathbf{g} un champ gravitationnel, $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u}_f \cdot \nabla$ est la dérivée matérielle, \mathbf{I} le tenseur identité.

Équation constitutive

En utilisant le modèle de la loi en puissance de Ostwald, l'expression de la

$$\boldsymbol{\tau}_f = m \dot{\boldsymbol{\gamma}}^n \quad (2.3)$$

avec $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \sqrt{2\{\mathbf{D}^2\}}$ désignant le taux de cisaillement généralisé ($\{\cdot\}$ est l'opérateur trace), m l'indice de consistance, n le coefficient de rhéo-fluidification ; le tenseur \mathbf{D} est le tenseur symétrique des taux de déformation :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_f + \nabla \mathbf{u}_f^T), \quad (2.4)$$

2.4.2 Équation à l'échelle macroscopique

La méthode de prise de moyenne volumique est basée sur la définition d'un opérateur de moyenne volumique qui, appliquée aux équations de transport gouvernant le phénomène à l'échelle microscopique, permet de dériver les équations de transport de

ce même phénomène à l'échelle macroscopique. Pour un système constitué de milieu poreux, dont cette étude fait l'objet, l'échelle de longueur macroscopique est désigné par L (voir figure (1.1)). Les détails du volume élémentaire représentatif sont présentés sur cette même figure, dans laquelle l est utilisé en tant que la longueur caractéristique du volume V . Ces règles sont présentées dans de nombreux travaux (Slattery [90]; Whitaker [91]).

Pour obtenir les équations macroscopiques, nous commencerons par les équations microscopiques définies en un point de l'espace et de les intégrer dans le *Volume Élémentaire Représentatif*. Il existe deux manières d'obtenir les équations macroscopiques. Les équations microscopiques peuvent être réparties sur la région fluide, ce qui donne des équations macroscopiques valables sur un espace discontinu ; ou on répartit les équations microscopiques sur l'ensemble de la région, ce qui donne des équations macroscopiques valables sur un espace continu.

Conservation de la masse

En partant de l'équation (2.1), on applique le théorème de la moyenne volumique (Whitaker [91], Slattery [90]) et en tenant compte des conditions suivantes :

- (i) la matrice solide est rigide ;
- (ii) ϕ_α est indépendante du temps et de la position de telle sorte que la fraction volumique de chaque phase reste constante ;
- (iii) la vitesse est nulle à l'interface solide-fluide.

On obtient l'équation suivante :

$$\frac{1}{V} \int_{V_f} \nabla \cdot \mathbf{u}_f dV = \langle \nabla \cdot \mathbf{u}_f \rangle = 0, \quad (2.5)$$

La prise de moyenne volumique n'est pas une opération évidente, notamment en ce qui concerne la moyenne d'une dérivée. En effet, la moyenne d'un gradient (opérateur au sens large de la dérivée) est dans la plupart des cas différente de la moyenne. Le théorème de prise de moyenne volumique nous permet de relier ces deux opérations :

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u}_f \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_f \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \mathbf{n}_{fs} \cdot \mathbf{u}_f dA = 0, \quad (2.6)$$

où A_{fs} est la frontière, à l'intérieur de V , entre la phase fluide f et la phase solide s et \mathbf{n}_{fs} est le vecteur normal unitaire à cette frontière, dirigé de f vers s . La vitesse moyenne de phase $\langle \mathbf{u}_f \rangle$ est liée à la vitesse intrinsèque de phase $\langle \mathbf{u}_f \rangle^f$ par la relation :

$$\langle \mathbf{u}_f \rangle = \phi_f \langle \mathbf{u}_f \rangle^f \quad (2.7)$$

A l'interface fluide-solide A_{fs} , la vitesse \mathbf{u}_f (hypothèse (ii)) est nulle. En tenant compte

de cette condition et de la relation (2.7), l'équation (2.6) se simplifie à :

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{u}_f \rangle = \nabla \cdot (\phi_f \langle \mathbf{u}_f \rangle^f) = 0. \quad (2.8)$$

Conservation de la Quantité de Mouvement

La moyenne de l'équation de Navier-Stokes peut être exprimée sous la forme :

$$\langle \rho_f \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} \rangle + \langle \rho_f \mathbf{u}_f \cdot \nabla \mathbf{u}_f \rangle = - \langle \nabla p_f \rangle + \langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_f \rangle + \langle \rho_f \mathbf{g} \rangle. \quad (2.9)$$

Le fluide considéré dans cette étude étant incompressible, sa variation dans l'espace macroscopique peut être négligée. L'équation précédente pourra être réécrite de la manière suivante :

$$\rho_f \left(\langle \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} \rangle + \langle \nabla \cdot (\mathbf{u}_f \mathbf{u}_f) \rangle \right) = - \langle \nabla p_f \rangle + \langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_f \rangle + \rho_f \phi_f \mathbf{g}, \quad (2.10)$$

sachant que $\langle \rho_f \mathbf{g} \rangle = \phi_f \langle \rho_f \rangle^f \mathbf{g}$ dans le terme gravitationnel avec $\langle \rho_f \rangle^f = \rho_f$. Étant donné que le volume de la phase f dans le *Volume Élémentaire Représentatif* est indépendant du temps, la dérivée partielle par rapport au temps et l'intégral volumique peuvent être permutés comme suit :

$$\langle \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_f} \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_f} \mathbf{u}_f dV = \frac{\partial \langle \mathbf{u}_f \rangle}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Le théorème de la moyenne (voir chapitre (2.6)) peut être utilisé pour exprimer le terme convectif :

$$\langle \nabla \cdot (\mathbf{u}_f \mathbf{u}_f) \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_f \mathbf{u}_f \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \mathbf{n}_{fs} \cdot \mathbf{u}_f \mathbf{u}_f dA, \quad (2.12)$$

\mathbf{n}_{fs} étant un vecteur unitaire sortant de l'interface fluide/solide du milieu fluide vers le milieu solide, et d'après la condition (iii), l'équation précédente devient :

$$\langle \nabla \cdot (\mathbf{u}_f \mathbf{u}_f) \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_f \mathbf{u}_f \rangle. \quad (2.13)$$

Après application des théorèmes de la moyenne volumique avec les conditions énoncées dans la section précédente, sur les termes $\langle \nabla p_f \rangle$ et $\langle \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_f \rangle$, la moyenne de l'équation du mouvement (2.2) devient :

$$\begin{aligned} \rho_f \frac{\partial \langle \mathbf{u}_f \rangle}{\partial t} + \rho_f \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_f \mathbf{u}_f \rangle &= -\nabla \langle p_f \rangle + \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau}_f \rangle + \rho_f \phi_f \mathbf{g} \\ &\quad - \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} p_f \cdot \mathbf{n}_{fs} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \boldsymbol{\tau}_f \cdot \mathbf{n}_{fs} dA. \end{aligned} \quad (2.14)$$

En utilisant la décomposition de Gray [92], puis en appliquant la règle du produit de la différenciation au premier, au deuxième et au quatrième termes sur la partie droite de l'équation (2.14) et en injectant l'équation (2.8), on obtient la forme générale de l'équation macroscopique :

$$\begin{aligned} \phi_f \rho_f \left(\frac{\partial \langle \mathbf{u}_f \rangle^f}{\partial t} + \langle \mathbf{u}_f \rangle^f \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_f \rangle^f \right) &= -\phi_f \nabla \langle p_f \rangle^f + \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau}_f \rangle \\ &\quad + \phi_f \rho_f \mathbf{g} - \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} p_f \cdot \mathbf{n}_{fs} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \boldsymbol{\tau}_f \cdot \mathbf{n}_{fs} dA \\ &\quad - \rho_f \nabla \cdot \langle \tilde{u}_f \tilde{u}_f \rangle. \end{aligned} \quad (2.15)$$

On note l'apparition des fluctuations de la vitesse \tilde{u}_f dû à la décomposition de Gray [92]. Les cinq premiers termes de l'équation (2.15) ressemblent de près à l'équation dynamique à l'échelle microscopique. Les autres termes à droite, ne figurant pas sur l'équation de mouvement à l'échelle microscopique, contiennent toutes les informations sur l'influence du milieu poreux traversé par le fluide. Le quatrième et cinquième termes du côté droit de l'équation (2.15) sont des intégrales de surface qui expriment la force par unité de volume que le fluide exerce sur les parois des pores. Le sixième terme représente la dispersion hydrodynamique de la vitesse moyenne, et est négligeable devant les autres termes.

Analyse des quatrième et cinquième termes

Posons :

$$B = -\frac{1}{V} \int_{A_{fs}} p_f \cdot \mathbf{n}_{fs} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \boldsymbol{\tau}_f \cdot \mathbf{n}_{fs} dA. \quad (2.16)$$

Ils représentent la force totale de traînée due à la présence de la particule solide. La difficulté est de relier ces termes aux variables macroscopiques appropriées et aux propriétés structurales de la matrice solide. Slattery [93] fait l'analyse dimensionnelle en notant la difficulté dans l'écriture de ces termes de résistance de Darcy. Il suggère :

$$B = \frac{\phi \mu}{d^2 k_s} \langle u \rangle. \quad (2.17)$$

Pour les matrices fixes, d est une longueur caractéristique (niveau des pores) et k_s est sans dimension et est fonction de la porosité seulement. Pour modéliser ces termes nous nous appuyons sur les travaux de Hsu et Cheng [94]. Dans cette approche, nous considérons le milieu poreux comme un assemblage de particules solides sphériques. Ainsi le fluide traverse la matrice poreuse (composée de sphères avec des interactions négligeables) avec un vecteur vitesse macroscopique $\langle \mathbf{u}_f \rangle^f$, l'équation (2.16) peut être exprimée de la façon suivante :

$$B = \frac{ND^{(n)}}{V}, \quad (2.18)$$

où N est le nombre de sphère de diamètre d_p contenu dans le volume V , et :

$$D^{(n)} = -\frac{1}{V} \int_{A_{fs}} p_f^{(n)} \cdot \mathbf{n}_{fs} dA + \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} \tau_f^{(n)} \cdot \mathbf{n}_{fs} dA, \quad (2.19)$$

représente la force de traînée sur la nième sphère. Dans l'équation (2.19) $p_f^{(n)}$ et $\tau_f^{(n)}$ sont la pression et la tension des contraintes locales dans le champ de l'écoulement autour de la nième sphère.

L'expression générale de la force de traînée sur une sphère pour les fluides en loi de puissance peut être écrite comme :

$$D^{(n)} = C_D \frac{\pi d_p^2 \rho}{4} \frac{\rho}{2} |\langle \mathbf{u}_f \rangle^f|^2 \hat{\mathbf{i}}_v, \quad (2.20)$$

où C_D est le coefficient de traînée et $\hat{\mathbf{i}}_v = (\langle \mathbf{u}_f \rangle^f / |\langle \mathbf{u}_f \rangle^f|)$ est un vecteur unitaire dans la direction de $\langle \mathbf{u}_f \rangle^f$.

Pour l'écoulement en loi de puissance de Ostwald-de Waele à faible nombre de Reynolds, Chhabra [95] a présenté l'expression de C_D .

$$C_D = \frac{24Y}{Re'} \left(1 + \frac{3}{16} Re' \right), \quad (2.21)$$

où Y est un facteur de correction, qui mesure la déviation de la force de traînée de celle donnée par Stokes, et Re' , le nombre de Reynolds, qui est défini comme :

$$Re' = \frac{\rho |\langle \mathbf{u}_f \rangle^f|^{2-n} d_p^n}{m \phi_f^{2-n}}. \quad (2.22)$$

Plusieurs études ont montré que, pour les fluides en loi de puissance, Y est simplement une fonction de l'indice de comportement en écoulement n . Kawase et Ulbrecht

[96] ont donné l'expression suivante de Y :

$$Y = 3^{(3n-3)/2} \left[\frac{-22n^2 + 29n + 2}{n(n+2)(2n+1)} \right]. \quad (2.23)$$

En utilisant une méthode de perturbation standard, Kawase et Moo-Young [97] arrivent à l'expression suivante :

$$Y = 3^{(3n-3)/2} \left[\frac{-7n^2 - 4n + 26}{5n(n+2)} \right]. \quad (2.24)$$

Les équations (2.23) et (2.24) confirment le comportement attendu à savoir la limite de $Y(1) = 1$. L'utilisation de l'équation (2.21) et de l'expression précédente de Re' dans l'équation (2.20), nous donne :

$$D^{(n)} = 3\pi d_p^2 Y \left(\frac{m | \langle \mathbf{u}_f \rangle |^n}{d_p^n \phi_f^n} + \frac{3\rho_f}{16\phi_f^2} | \langle \mathbf{u}_f \rangle |^2 \right) \hat{\mathbf{i}}_v. \quad (2.25)$$

En substituant l'équation (2.25) dans l'équation (2.18) on obtient :

$$B = 18\phi_s Y \left(\frac{m | \langle \mathbf{u}_f \rangle |^n}{d_p^{n+1} \phi_f^n} + \frac{3\rho_f}{16d_p \phi_f^2} | \langle \mathbf{u}_f \rangle |^2 \right) \hat{\mathbf{i}}_v, \quad (2.26)$$

où

$$\phi_s = [N(4/3)\pi R^3]/V.$$

Invoquant la définition de $\hat{\mathbf{i}}_v$, et après quelques réarrangement algébriques, l'équation (2.26) s'écrit :

$$B = \frac{\phi_f m Y}{K} | \langle \mathbf{u}_f \rangle |^{n-1} \langle \mathbf{u}_f \rangle + \frac{F \phi_f \rho_f Y}{K^{1/(n+1)}} | \langle \mathbf{u}_f \rangle | \langle \mathbf{u}_f \rangle, \quad (2.27)$$

où

$$F = \frac{27}{8(150)^{1/(n+1)}} \cdot \frac{(1 - \phi_f)^{(n-1)/(n+1)}}{\phi_f^{n/(n+1)}}, \quad (2.28)$$

et

$$K = \frac{d_p^{n+1} \phi_f^{n+2}}{150(1 - \phi_f)^2}, \quad (2.29)$$

K est la perméabilité modifiée du milieu poreux pour les fluides en loi de puissance. Pour $n = 1$ (fluide Newtonien), l'équation (2.29) donne la relation de Kozeny-Karman.

Conservation de la Quantité de Mouvement après intégration dans le volume moyenne

En utilisant les équations (2.27) dans l'équation (2.15), on obtient :

$$\begin{aligned}
\rho_f \phi_f \left(\frac{\partial \langle \mathbf{u}_f \rangle^f}{\partial t} + \langle \mathbf{u}_f \rangle^f \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_f \rangle^f \right) &= -\phi_f \nabla \langle p_f \rangle^f + \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau}_f \rangle \\
&+ \phi_f \rho_f \mathbf{g} - \frac{\phi_f m Y}{K} |\langle \mathbf{u}_f \rangle|^{n-1} \langle \mathbf{u}_f \rangle \\
&- \frac{F \phi_f \rho_f Y}{K^{1/(n+1)}} |\langle \mathbf{u}_f \rangle| \langle \mathbf{u}_f \rangle.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Pour compléter l'analyse, la relation $\nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau}_f \rangle$ doit être développée. Le modèle de fluide considéré dans l'étude est donné par l'équation (2.3). En appliquant la moyenne volume on obtient :

$$\langle \boldsymbol{\tau} \rangle = m \langle \dot{\gamma}^n \rangle. \tag{2.31}$$

En utilisant l'équation (2.31) dans l'équation (2.30), on obtient l'équation de la quantité de mouvement pour les fluides en loi de puissance dans le milieu poreux.

$$\begin{aligned}
\rho_f \phi_f \left(\frac{\partial \langle \mathbf{u}_f \rangle^f}{\partial t} + \langle \mathbf{u}_f \rangle^f \nabla \cdot \langle \mathbf{u}_f \rangle^f \right) &= -\phi_f \nabla \langle p_f \rangle^f + \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau} \rangle \\
&+ \phi_f \rho_f \mathbf{g} - \frac{\phi_f m Y}{K} |\langle \mathbf{u}_f \rangle|^{n-1} \langle \mathbf{u}_f \rangle \\
&- \frac{F \phi_f \rho_f Y}{K^{1/(n+1)}} |\langle \mathbf{u}_f \rangle| \langle \mathbf{u}_f \rangle.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Rappelons que $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$, nous pouvons en déduire que :

$$\langle \mathbf{D} \rangle^f = \frac{1}{2}(\nabla \langle \mathbf{u} \rangle^f + (\nabla \langle \mathbf{u} \rangle^f)^T). \tag{2.33}$$

Après simplification de l'écriture de l'équation macroscopique en posant $\mathbf{u}_f = \langle \mathbf{u}_f \rangle = \langle \mathbf{u}_f \rangle^f \phi_f$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\rho_f \phi_f \left(\frac{1}{\phi_f} \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} + \frac{1}{\phi_f^2} \mathbf{u}_f \nabla \cdot \mathbf{u}_f \right) &= -\phi_f \nabla \langle p \rangle^f + \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau} \rangle \\
&+ \phi_f \rho_f \mathbf{g} - \frac{\phi m Y}{K} |\mathbf{u}_f|^{n-1} \langle \mathbf{u}_f \rangle \\
&- \frac{F \phi \rho_f Y}{K^{1/(n+1)}} |\mathbf{u}_f| \mathbf{u}_f.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

En multipliant l'équation (2.34) par $1/\rho_f$ et après développement, on obtient l'équation suivante :

Équation	Φ	\mathbf{J}_Φ	\mathbf{S}_Φ
Masse	1	0	0
Qmvt	u_f ou v_f	$\frac{\phi_f}{\rho_f} \langle P \delta_{ij} \rangle^f - \langle \tau_{ij} \rangle$	$\phi_f \mathbf{g} - \frac{\phi_f m Y}{K \rho_f} \mathbf{u}_f ^{n-1} \mathbf{u}_f - \frac{F \phi_f Y}{K^{1/(n+1)}} \mathbf{u}_f \mathbf{u}_f$

TABLEAU 2.1 – Expression des différents termes de l'équation 2.36

$$\frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} + \frac{1}{\phi_f} \mathbf{u}_f \nabla \cdot \mathbf{u}_f = -\frac{\phi_f}{\rho_f} \nabla \langle p \rangle^f + \frac{1}{\rho_f} \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\tau} \rangle + \phi_f \mathbf{g} - \frac{\phi_f m Y}{K \rho_f} |\mathbf{u}_f|^{n-1} \mathbf{u}_f - \frac{F \phi_f Y}{K^{1/(n+1)}} |\mathbf{u}_f| \mathbf{u}_f. \quad (2.35)$$

L'ensemble de ces équations peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{\phi_f} \nabla \cdot \Phi \mathbf{v}_f + \nabla \cdot \mathbf{J}_\Phi = \mathbf{S}_\Phi. \quad (2.36)$$

2.5 Conclusion

Après avoir posé les équations dynamiques, nous allons modéliser numériquement le problème. Pour cela la méthode des volumes finis a été sélectionnée pour la discrétisation des équations. Les questions relatives à la technique de résolution, au traitement des interfaces ainsi que la validation du code de calcul sont abordées dans le chapitre suivant.

Traitement numérique

3.1 Introduction

La méthode des volumes finis est une classe des arrangements de discrétisation qui ont été fortement couronnés de succès en rapprochant la solution d'une grande variété de systèmes des lois de conservation[98],[99]. Son principe est de fractionner le domaine physique en un nombre de volumes (volumes finis), ensuite d'intégrer les équations de conservation dans chaque volume. Le résultat de cette intégration, est l'obtention des équations algébriques (équations discrétisées).

Puis le théorème de Gauss est utilisé pour transformer certaines intégrales de volume en intégrales de surface. Toutes les grandeurs scalaires sont traitées au centre du volume, les vitesses sont localisées au centre des faces du volume, ce choix constitue le principe du maillage entrelacé [101]. Les équations de bilan sont discrétisées en temps sous forme semi-implicite. Cette méthode, utilisée dans le code de calcul, est dérivée de la méthode SOLA développée par Hirt, Nichols et Romero [102].

3.2 Discrétisation spatiale

Les équations à discrétiser sont les équations de bilan pour les grandeurs vectorielles et scalaires.

Les équations vectorielles sont :

- conservation de la masse
- quantité de mouvement

On projette les équations vectorielles sur un repère fixe, ce qui nous ramène au transport de quantité scalaires. On considère un volume de contrôle v de frontière a régulière, on note \mathbf{n} la normale extérieure en un point de a et $d\sigma$ l'élément de surface sur a . Le volume v est invariable dans le temps.

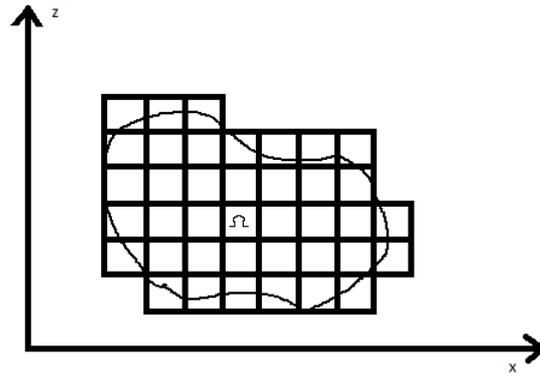


FIGURE 3.1 – Domaine complètement couvert.

Intégrons l'équation générale de transport (2.36) sur le volume de contrôle

$$\int_v \frac{\partial \Phi}{\partial t} dv + \int_v \nabla \cdot \mathbf{v} \Phi dv + \int_v \nabla \cdot \mathbf{J}_\Phi dv = \int_v \mathbf{S}_\Phi dv. \quad (3.1)$$

Le théorème de Gauss s'écrit pour un vecteur \mathbf{a} quelconque

$$\int_v \nabla \mathbf{a} dv = \int_a \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (3.2)$$

Après application du théorème de Gauss et permutation sur le premier terme de la dérivation en temps et de l'intégration sur le volume de contrôle v , l'équation (3.1) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_v \Phi dv + \int_a \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_a \mathbf{J}_\Phi \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_v \mathbf{S}_\Phi dv. \quad (3.3)$$

L'équation (3.3) donne le bilan sur un volume fini de la grandeur Φ . Cette équation est la base de la discrétisation spatiale de la méthode des volumes finis.

3.2.1 Localisation des variables : maillage entrelacé

Pour le cas bidimensionnel invariant par translation, dans un repère cartésien, la figure (3.1) montre que le domaine de calcul est entièrement recouvert par l'ensemble des pavés :

On considère que l'écoulement a une épaisseur L , dans la direction d'invariance. Afin de transformer les intégrales de l'équation (3.3) en sommes algébriques, en premier lieu on utilise un volume de contrôle pour l'expression des bilans de grandeurs scalaires. Le cas de l'équation de mouvement est examiné plus loin.

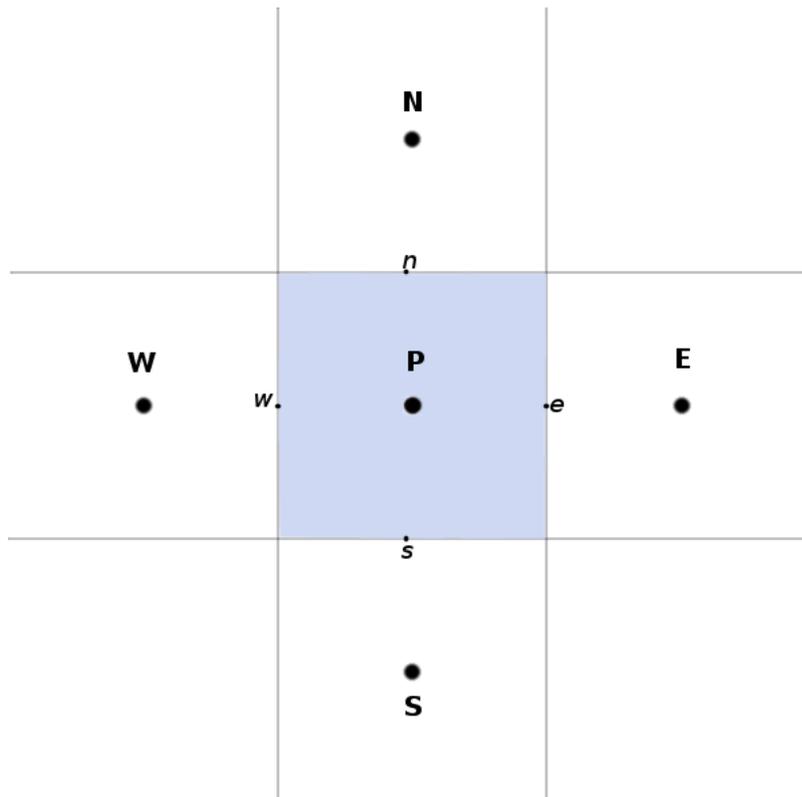


FIGURE 3.2 – Maillage typique uniforme suivant x et z .

Considérons un pavé du maillage (voir la figure (3.2)) où i est l'indice de discrétisation suivant l'axe des " x ", k l'indice de discrétisation suivant l'axe des " z ". C'est le maillage obtenu par la discrétisation du domaine physique dans les deux directions, horizontale et verticale, afin d'obtenir un grand nombre de volumes finis. Le volume est séparé de ces voisins par deux faces pour chaque direction. Sauf pour les volumes finis qui se trouvent sur les limites, qui peuvent avoir moins de faces. Dans les nœuds de ce maillage seront stockées les valeurs des quantités scalaires telles que la pression. Aux centres des volumes finis, sont placés les points intérieurs du maillage et les points limites sont centrés aux faces limites.

En coordonnées cartésiennes les volumes de contrôle sont limités par trois plans perpendiculaires aux axes : $x = cte$, $y = cte$ et $z = cte$. En coordonnées axisymétriques ils sont limités par deux plans perpendiculaires à l'axe oz , deux cylindres co-axiaux à oz , deux plans passant par oz avec $\theta = cte$.

Ce volume de contrôle est utilisé pour l'expression des bilans des grandeurs scalaires.

3.2.2 Équations de conservation pour un scalaire

Pour les intégrales de volume de l'équation (3.3), on va faire une approche utilisant le théorème de la moyenne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \Phi dv \approx v \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (3.4)$$

$$\int_V S_\Phi dv \approx S_\Phi v. \quad (3.5)$$

Les intégrales de surface portant sur le contour du volume de contrôle correspondent aux échanges par diffusion et convection entre le volume de contrôle et les volumes adjacents.

L'échange par diffusion s'écrit :

$$DIFF(\Phi) = \int_a \mathbf{J}_\Phi \cdot \mathbf{n} d\sigma = \sum_{n=1}^4 a_n (\mathbf{J}_\Phi \cdot \mathbf{n})_n, \quad (3.6)$$

où la somme n porte sur les 4 faces e, n, w, s et a_n est la surface de chacune des quatre faces qui délimite le volume de contrôle. Le flux \mathbf{J}_Φ étant fourni par la loi du gradient.

$$DIFF(\Phi) = a_e (\mathbf{J}_{\Phi_e} \cdot \mathbf{n})_e + a_w (\mathbf{J}_{\Phi_w} \cdot \mathbf{n})_w + a_n (\mathbf{J}_{\Phi_n} \cdot \mathbf{n})_n + a_s (\mathbf{J}_{\Phi_s} \cdot \mathbf{n})_s. \quad (3.7)$$

En développant et en utilisant les notations indicielles de la figure (3.4) le flux de diffusion total s'écrit :

$$DIFF(\Phi) = (J_{\Phi_{(i+1,k)}}^{Est} - J_{\Phi_{(i,k)}}^{Ouest}) L \Delta z_k + (J_{\Phi_{(i,k+1)}}^{Nord} - J_{\Phi_{(i,k)}}^{Sud}) L \Delta x_i. \quad (3.8)$$

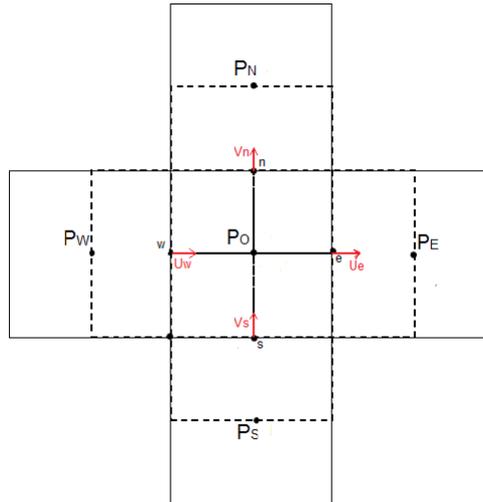
où $J_{\Phi_{(m)}}^p$ représente les termes J_Φ sur la face p et à la position m sur le volume de contrôle avec L la profondeur du volume de contrôle (suivant la direction z).

L'échange par convection :

$$CONV(\Phi) = \int_a \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \sum_{n=1}^4 a_n \Phi_n (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_n. \quad (3.9)$$

représentant la sommation des flux convectés évalués aux centres des surfaces du volume de contrôle. Les vitesses sont localisées aux centres des faces ; ce choix constitue le principe du maillage entrelacé [12]. La figure (3.3) illustre ce maillage. Le flux de convection total s'écrit :

$$CONV(\Phi) = a_e \Phi_e u_e - a_w \Phi_w u_w + a_n \Phi_n v_n - a_s \Phi_s v_s. \quad (3.10)$$

FIGURE 3.3 – Maillage entrelacé (bilan pour u_e).

En faisant le développement, le flux de convection total s'écrit :

$$\begin{aligned} CONV(\Phi) = & \left(\Phi_{(i+1,k)}^{Est} u_{(i+1,k)} - \Phi_{(i,k)}^{ouest} u_{(i,k)} \right) L \Delta z_k + \\ & \left(\Phi_{(i,k+1)}^{nord} v_{(i,k+1)} - \Phi_{(i,k)}^{sud} v_{(i,k)} \right) L \Delta x_i. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Le traitement des termes convectifs Φu_i de l'équation (3.11) est présenté ci-après.

3.2.3 Schéma numérique pour le terme convectif

Pour calculer la valeur de Φ_e par exemple, on pourrait choisir une discrétisation du type centré[12] :

$$\Phi_e = \frac{1}{2}(\Phi_E + \Phi_O). \quad (3.12)$$

Ce type de discrétisation, où l'on suppose une variation linéaire de Φ entre les points E et O, peut amener à une valeur de Φ non réaliste quand on travaille avec les grands nombres de Reynolds (Patankar [99]). Pour contourner ce type de difficulté, on peut utiliser le schéma Upwind[12].

$$u_e \cdot \Phi_e = u_e \times \begin{cases} \rightarrow \Phi_O & \text{si } u_e > 0 \\ \rightarrow \Phi_E & \text{si } u_e < 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

— Face Est

$$u_{(i+1,k)} \cdot \Phi_{(i+1,k)} = u_{(i+1,k)} \times \begin{cases} \rightarrow \Phi_{(i+\frac{1}{2},k)} & \text{si } u_{(i+1,k)} > 0 \\ \rightarrow \Phi_{(i+\frac{3}{2},k)} & \text{si } u_{(i+1,k)} < 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

— Face Ouest

$$u_{(i,k)} \cdot \Phi_{(i,k)} = u_{(i,k)} \times \begin{cases} \rightarrow \Phi_{(i-\frac{1}{2},k)} & \text{si } u_{(i,k)} > 0 \\ \rightarrow \Phi_{(i+\frac{1}{2},k)} & \text{si } u_{(i,k)} < 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

— Face Nord

$$v_{(i,k+1)} \cdot \Phi_{(i,k+1)} = v_{(i,k+1)} \times \begin{cases} \rightarrow \Phi_{(i,k+\frac{1}{2})} & \text{si } v_{(i,k+1)} > 0 \\ \rightarrow \Phi_{(i,k+\frac{3}{2})} & \text{si } v_{(i,k+1)} < 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

— Face Sud

$$v_{(i,k)} \cdot \Phi_{(i,k)} = v_{(i,k)} \times \begin{cases} \rightarrow \Phi_{(i,k-\frac{1}{2})} & \text{si } v_{(i,k)} > 0 \\ \rightarrow \Phi_{(i,k+\frac{1}{2})} & \text{si } v_{(i,k)} < 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

3.2.4 Équation de la quantité de mouvement

Le calcul de chaque composante de la vitesse intervenant dans l'équation (3.9) nécessite l'intégration de l'équation de quantité de mouvement (projection correspondant).

Les termes de convection et diffusion après projection s'obtiennent de façon identique à ceux de l'équation de conservation pour un scalaire.

Le terme de pression est traité différemment. Pour la face ouest, par exemple dans le bilan pour u_w , on écrit :

$$- \int_a P \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} d\sigma \approx (a_w P_W - a_o P_O). \quad (3.18)$$

Les nœuds de force de pression sont les mêmes que ceux des grandeurs scalaires, ceci permet une bonne estimation de la force de pression dans l'équation de la quantité de mouvement.

La figure (3.4) montre un maillage, pour le bilan de la composante de vitesse u_w

- Conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse (2.1) est intégrée sur un volume de contrôle centré sur le nœud de pression (figure 3.5). En utilisant le théorème de Gauss, l'équation de conservation de la masse peut s'écrire :

$$\mathbf{u}_e \Delta z L - \mathbf{u}_w \Delta z L + \mathbf{v}_n \Delta x L - \mathbf{v}_s \Delta x L = 0. \quad (3.19)$$

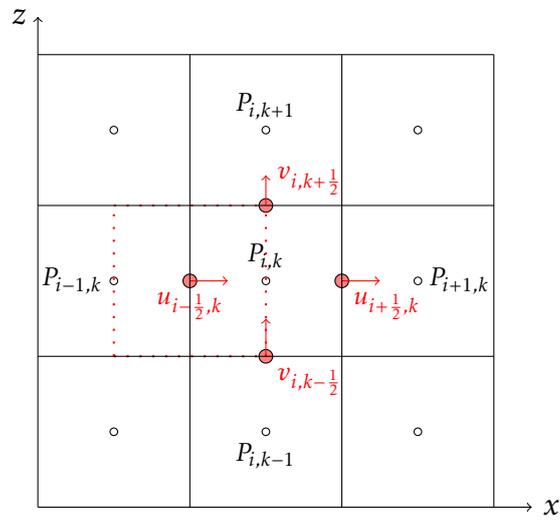


FIGURE 3.4 – Bilan pour u_w ($u_{(i,k)}$ notation indicielle).

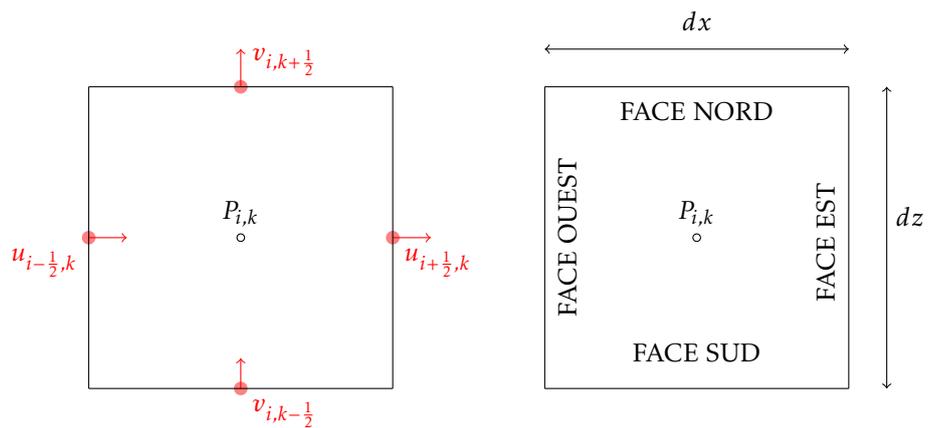


FIGURE 3.5 – Volume de contrôle centré sur le nœud de pression.

Après simplification et factorisation on obtient l'équation suivante :

$$L\Delta x(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) + L\Delta z(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_w) = 0. \quad (3.20)$$

En notation indicielle nous avons :

$$L\Delta x_{(i)}(\mathbf{v}_{(i,k+1)} - \mathbf{v}_{(i,k)}) + L\Delta z_{(k)}(\mathbf{u}_{(i+1,k)} - \mathbf{u}_{(i,k)}) = 0. \quad (3.21)$$

- Conservation de la quantité de mouvement

Les équations de quantité de mouvement sont intégrés sur un volume de contrôle centré sur la composante de vitesse considérée (Figure 3.6).

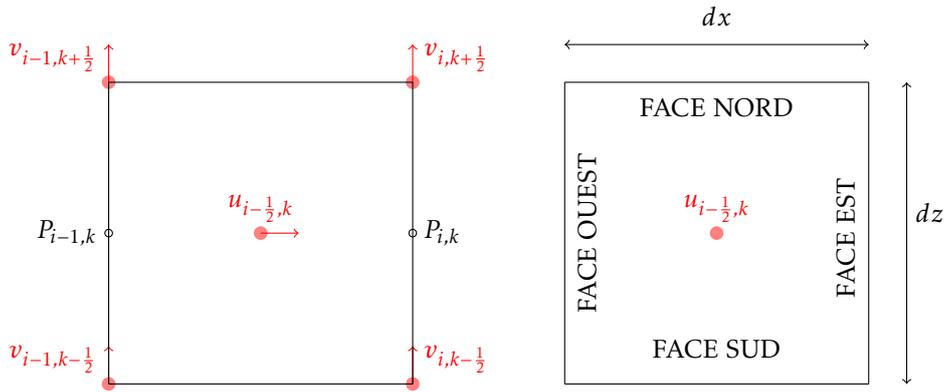


FIGURE 3.6 – Volume de contrôle centré sur la composante de vitesse u_w .

- Pour la composante $u_{(i,k)}$ (face Ouest) :

$$\begin{aligned} L\Delta x p_{(i-1)} \Delta z_{(k)} \frac{\partial u_{(i,k)}}{\partial t} + FLUX(u_{(i,k)}) = & -L\Delta z_{(k)} \frac{\phi_{(i,k)}}{\rho_f} (P_{(i,k)} - P_{(i-1,k)}) \\ & + \phi_{(i,k)} g_x L\Delta x p_{(i-1)} \Delta z_{(k)} \\ & - \frac{\phi_{(i,k)} m Y}{K_{(i,k)} \rho_f} |u_{(i,k)}|^{n-1} u_{(i,k)} L\Delta x p_{(i-1)} \Delta z_{(k)} \\ & - \frac{F \phi_{(i,k)} Y}{K_{(i,k)}^{1/(n+1)}} |u_{(i,k)}| u_{(i,k)} L\Delta x p_{(i-1)} \Delta z_{(k)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

- Pour la composante $v_{(i,k)}$ (face sud)

$$\begin{aligned}
L\Delta x_{(i)}\Delta z p_{(k-1)} \frac{\partial v_{(i,k)}}{\partial t} + FLUX(v_{(i,k)}) = & -L\Delta x_{(i)} \frac{\phi_{(i,k)}}{\rho_f} \left(P_{(i,k)} - P_{(i,k-1)} \right) \\
& - \phi_{i,k} g_z L\Delta x_{(i)} \Delta z p_{(k-1)} \\
& - \frac{\phi_{(i,k)} m Y}{K_{(i,k)} \rho_f} |v_{(i,k)}|^{n-1} v_{(i,k)} L\Delta x_{(i)} \Delta z p_{(k-1)} \\
& - \frac{F \phi_{(i,k)} Y}{K_{(i,k)}^{1/(n+1)}} |v_{(i,k)}| v_{(i,k)} L\Delta x_{(i)} \Delta z p_{(k-1)}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

où les termes $FLUX$ représentent la somme des termes convectifs et diffusifs ($FLUX = CONV + DIFF$). Nous allons expliciter pour des raisons de clarté, ci-dessous la discrétisation de ces termes.

Le terme convectif est discrétisé en utilisant le schéma QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for the Convective Kinematics), proposé par Leonard [122].

Remarque : Les approximations faites sont précisées à l'ordre 2 dans le cas d'un maillage régulier (Dimension Δx_i et Δz_k constantes sur tout le domaine).

$$\begin{aligned}
CONV(u_{(i,k)}) = & + \frac{1}{2\phi_{(i,k)}} \left[(u_{(i+1,k)} + u_{(i,k)}) u_{(i+\frac{1}{2},k)} \right] L\Delta z_{(k)} \\
& - \frac{1}{2\phi_{(i,k)}} \left[(u_{(i-1,k)} + u_{(i,k)}) u_{(i-\frac{1}{2},k)} \right] L\Delta z_{(k)} \\
& + \frac{1}{2\phi_{(i,k)}} \left[(v_{(i-1,k+1)} + v_{(i,k+1)}) u_{(i,k+\frac{1}{2})} \right] L\Delta x p_{(i-1)} \\
& - \frac{1}{2\phi_{(i,k)}} \left[(v_{(i-1,k)} + v_{(i,k)}) u_{(i,k-\frac{1}{2})} \right] L\Delta x p_{(i-1)}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
CONV(v_{(i,k)}) = & + \frac{1}{2\phi_{(i,k)}} \left[(v_{(i,k+1)} + v_{(i,k)}) v_{(i,k+\frac{1}{2})} \right] L\Delta x_{(i)} \\
& - \frac{1}{2\phi_{(i,k)}} \left[(v_{(i,k-1)} + v_{(i,k)}) v_{(i,k-\frac{1}{2})} \right] L\Delta x_{(i)} \\
& + \frac{1}{2\phi_{(i,k)}} \left[(u_{(i+1,k-1)} + u_{(i+1,k)}) v_{(i+\frac{1}{2},k)} \right] L\Delta z p_{(k-1)} \\
& - \frac{1}{2\phi_{(i,k)}} \left[(u_{(i,k-1)} + u_{(i,k)}) v_{(i-\frac{1}{2},k)} \right] L\Delta z p_{(k-1)}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Cette discrétisation améliore la précision offerte par le schéma Upwind au premier ordre. En effet, le schéma QUICK est basé sur une moyenne du schéma Upwind au

second ordre et sur les interpolations centrales des variables.

- Le terme diffusif est discrétisé comme suit :

$$\begin{aligned} DIFF(u_{(i,k)}) = & \eta_s \left(-\frac{u_{(i+1,k)} - u_{(i,k)}}{\Delta x_{(i)}} L\Delta z_{(k)} + \frac{u_{(i,k)} - u_{(i-1,k)}}{\Delta x_{(i-1)}} L\Delta z_{(k)} \right) + \\ & \eta_s \left(-\frac{v_{(i,k+1)} - v_{(i-1,k+1)}}{\Delta x p_{(i-1)}} L\Delta x p_{(i-1)} + \frac{v_{(i,k)} - v_{(i-1,k)}}{\Delta x p_{(i-1)}} L\Delta x p_{(i-1)} \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} DIFF(v_{(i,k)}) = & \eta_s \left(-\frac{v_{(i,k+1)} - v_{(i,k)}}{\Delta z_{(k)}} L\Delta x_{(i)} + \frac{v_{(i,k)} - v_{(i,k-1)}}{\Delta z_{(k-1)}} L\Delta x_{(i)} \right) + \\ & \eta_s \left(-\frac{u_{(i+1,k)} - u_{(i+1,k-1)}}{\Delta z p_{(k-1)}} L\Delta z p_{(k-1)} + \frac{u_{(i,k)} - u_{(i,k-1)}}{\Delta z p_{(k-1)}} L\Delta z p_{(k-1)} \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.3 Discrétisation temporelle

On notera $(\alpha + 1)$ l'indice du temps t et (α) l'indice du temps précédent $t - \Delta t$. La dérivée par rapport au temps de la variable Φ au temps (α) s'écrit :

$$\frac{\partial \Phi^{(\alpha)}}{\partial t} = \frac{\Phi^{(\alpha+1)} - \Phi^{(\alpha)}}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 0(\Delta t). \quad (3.28)$$

La discrétisation en temps utilisée est du premier ordre et ne conserve que le terme :

$$\frac{\Phi^{(\alpha+1)} - \Phi^{(\alpha)}}{\Delta t} \quad (3.29)$$

La discrétisation des équations de mouvement est semi-implicite :

— Conservation de la masse

$$L\Delta x_{(i)}(v_{(i,k+1)}^{(\alpha+1)} - v_{(i,k)}^{(\alpha+1)}) + L\Delta z_{(k)}(u_{(i+1,k)}^{(\alpha+1)} - u_{(i,k)}^{(\alpha+1)}) = 0. \quad (3.30)$$

— Conservation de la quantité de mouvement

Composante $u_{(i,k)}$

$$\begin{aligned}
& \frac{L\Delta x p_{(i-1)}\Delta z_{(k)}}{\Delta t} \left(u_{(i,k)}^{(\alpha+1)} - u_{(i,k)}^{(\alpha)} \right) + FLUX(u_{(i,k)})^{(\alpha)} = + \\
& L\Delta z_{(k)} \frac{\phi_{(i,k)}}{\rho_f} \left(P_{(i-1,k)}^{(\alpha+1)} - P_{(i,k)}^{(\alpha+1)} \right) + \phi_{(i,k)} g_x L\Delta x p_{(i-1)}\Delta z_{(k)} \\
& - \frac{\phi_{(i,k)} m Y}{K_{(i,k)} \rho_f} |u_{(i,k)}^\alpha|^{n-1} u_{(i,k)}^\alpha L\Delta x p_{(i-1)}\Delta z_{(k)} \\
& - \frac{F\phi_{(i,k)} Y}{K_{(i,k)}^{1/(n+1)}} |u_{(i,k)}^\alpha| u_{(i,k)}^\alpha L\Delta x p_{(i-1)}\Delta z_{(k)}. \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Composante $v_{(i,k)}$

$$\begin{aligned}
& \frac{L\Delta x_{(i)}\Delta z p_{(k-1)}}{\Delta t} \left(v_{(i,k)}^{(\alpha+1)} - v_{(i,k)}^{(\alpha)} \right) + FLUX(v_{(i,k)})^{(\alpha)} = + \\
& L\Delta x_{(i)} \frac{\phi_{(i,k)}}{\rho_f} \left(P_{(i,k-1)}^{(\alpha+1)} - P_{(i,k)}^{(\alpha+1)} \right) - \phi_{i,k} g_z L\Delta x_{(i)}\Delta z p_{(k-1)} \\
& - \frac{\phi_{(i,k)} m Y}{K_{(i,k)} \rho_f} |v_{(i,k)}^\alpha|^{n-1} v_{(i,k)}^\alpha L\Delta x_{(i)}\Delta z p_{(k-1)} \\
& - \frac{F\phi_{(i,k)} Y}{K_{(i,k)}^{1/(n+1)}} |v_{(i,k)}^\alpha| v_{(i,k)}^\alpha L\Delta x_{(i)}\Delta z p_{(k-1)}. \tag{3.32}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$u_{(i,k)}^{(\alpha+1)} = \Delta t \left[\frac{\phi_{(i,k)}}{\rho_f \Delta x p_{(i-1)}} \left(P_{(i-1,k)}^{(\alpha+1)} - P_{(i,k)}^{(\alpha+1)} \right) + A_{u_{(i,k)}}^{(\alpha)} \right]. \tag{3.33}$$

$$v_{(i,k)}^{(\alpha+1)} = \Delta t \left[\frac{\phi_{(i,k)}}{\rho_f \Delta z p_{(k-1)}} \left(P_{(i,k-1)}^{(\alpha+1)} - P_{(i,k)}^{(\alpha+1)} \right) + A_{v_{(i,k)}}^{(\alpha)} \right]. \tag{3.34}$$

avec

$$\begin{aligned}
A_{u_{(i,k)}}^{(\alpha)} &= u_{(i,k)}^{(\alpha)} / \Delta t + \phi_{(i,k)} g_x - \frac{\phi_{(i,k)} m Y}{K_{(i,k)} \rho_f} |u_{(i,k)}^\alpha|^{n-1} u_{(i,k)}^\alpha \\
& - \frac{F\phi_{(i,k)} Y}{K_{(i,k)}^{1/(n+1)}} |u_{(i,k)}^\alpha| u_{(i,k)}^\alpha - \frac{1}{L\Delta x p_{(i-1)}\Delta z_{(k)}} FLUX(u_{(i,k)})^{(\alpha)}. \tag{3.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{v_{(i,k)}^{(\alpha)}} &= v_{(i,k)}^{(\alpha)} / \Delta t - \phi_{i,k} g_z - \frac{\phi_{(i,k)} m Y}{K_{(i,k)} \rho_f} |v_{(i,k)}^\alpha|^{n-1} v_{(i,k)}^\alpha \\
&\quad - \frac{F \phi_{(i,k)} Y}{K_{(i,k)}^{1/(n+1)}} |v_{(i,k)}^\alpha| v_{(i,k)}^\alpha - \frac{1}{L \Delta x_{(i)} \Delta z p_{(k-1)}} FLUX(v_{(i,k)})^{(\alpha)}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

3.3.1 Méthode de résolution

La méthode de résolution adoptée est celle de Harlow et Welch [100], qui consiste à exprimer la vitesse $V^{(\alpha+1)}$ en fonction de $P^{(\alpha+1)}$ à partir des équations (3.33), (3.34) et de reporter ces expressions dans l'équation de conservation de la masse (3.30). On obtient ainsi une équation de Poisson à résoudre pour la pression, où la variable P apparaît seul à l'état $(\alpha + 1)$. En remplaçant ce nouveau champ de pression à l'instant $(\alpha + 1)$ dans les équations (3.33), (3.34), on obtient un champ de vitesse à l'instant $(\alpha + 1)$ satisfaisant l'équation de continuité. Ce procédé de résolution est détaillé ci-dessous.

En reportant les flux massiques (3.33), (3.34) dans l'équation de la conservation de la masse (3.30) et en les multipliant par $\frac{\Delta t}{\Delta x \Delta z}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
AW_f P_{(i-1,k)}^{(\alpha+1)} + AE_f P_{(i+1,k)}^{(\alpha+1)} + AN_f P_{(i,k+1)}^{(\alpha+1)} + AS_f P_{(i,k-1)}^{(\alpha+1)} \\
- [AW_f + AE_f + AN_f + AS_f] P_{(i,k)}^{(\alpha+1)} = B_f^{(\alpha)}.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

où

$$\begin{aligned}
AW_f &= \phi_{(i,k)} \frac{\Delta z_{(k)}}{\Delta x p_{(i-1)}} ; \quad AE_f = \phi_{(i+1,k)} \frac{\Delta z_{(k)}}{\Delta x p_{(i)}} \\
AS_f &= \phi_{(i,k)} \frac{\Delta x_{(i)}}{\Delta z p_{(k-1)}} ; \quad AN_f = \phi_{(i,k+1)} \frac{\Delta x_{(i)}}{\Delta z p_{(k)}} \\
B_f^{(\alpha)} &= \frac{\Delta x_{(i)}}{\Delta t} (A_{v_{(i,k)}^{(\alpha)}} - A_{v_{(i,k+1)}^{(\alpha)}}) + \frac{\Delta z_{(k)}}{\Delta t} (A_{u_{(i,k)}^{(\alpha)}} - A_{u_{(i+1,k)}^{(\alpha)}}).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Nous sommes donc amenés à résoudre un système linéaire de type $AP^{(\alpha+1)} = Q^{(\alpha)}$ à chaque pas de temps. La résolution de ce système nous donne la pression à l'instant $(\alpha + 1)$ puis le champ de vitesse incompressible à l'instant $(\alpha + 1)$ via les relations (3.33), (3.34). On remarque que la matrice A dépend uniquement des données géométriques inhérentes au maillage et de la matrice poreuse. Elle est donc écrite une seule fois au début du calcul. Afin de résoudre le système linéaire (3.37), la méthode de Cholesky est utilisée. La matrice A étant définie positive et symétrique, elle est donc décomposée en un produit

$$A = MM^T, \tag{3.39}$$

où M est une matrice triangulaire inférieure (c'est-à-dire tous les éléments au-dessus de

la diagonale sont nuls), et M^T désigne sa transposée. On résout ensuite à chaque pas de temps les systèmes $My = Q^\alpha$ puis $M^T p^{(\alpha+1)} = y$. La matrice M étant symétrique, on utilise un algorithme de montée et de descente.

Le choix du pas de temps est fait en appliquant la condition de stabilité dite CFL (Courant Friedrich-Lewy). Il est important de souligner que cette condition n'est pas suffisante pour garantir une stabilité numérique aux schémas à cause des termes fortement non linéaires dans les équations du mouvement. Il peut cependant nous donner une idée sur le choix des temps de temps. La limite pour le pas de temps de convection Δt_c peut être définie comme :

$$\Delta t_c = \frac{1}{\max\left[\frac{|U|}{\Delta x} + \frac{|V|}{\Delta z}\right]}. \quad (3.40)$$

Concernant le pas de temps de diffusion Δt_d , la limite est donnée par la condition de Patankar [99] :

$$\Delta t_d = \frac{1}{2\nu \max\left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2}\right]}. \quad (3.41)$$

Pour ces calculs, le pas de temps Δt a été limité à une valeur satisfaisant la condition de CFL suivante :

$$CFL_{max} \leq \frac{1}{\frac{1}{\Delta t_c} + \frac{1}{\Delta t_d}}. \quad (3.42)$$

3.4 Validation du code

L'objectif du travail décrit ci-dessus est de valider la capacité de notre code à fournir des résultats fiables. Pour cela nous testons dans un premier temps sa réponse à un fluide Newtonien avant de passer au cas non-Newtonien.

3.4.1 Résultats prédits par la loi de Darcy

Nous comparons ici les résultats numériques obtenus avec notre code aux résultats théoriques attendus pour l'écoulement de l'eau ($\rho = 1 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ et $\mu = 1,002 \times 10^{-3} \text{ Pas}$ à 20°C) à travers un milieu poreux constitué de particules de diamètre $d = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$, de hauteur $0,5 \text{ m}$ et de porosité $\phi = 0,5$.

Maillage	21*61	41*61	61*61	81*61
ΔP (Pa m ⁻¹)	945,52	945,51	945,51	945,51
v_d (m s ⁻¹)	$0,250\ 03 \times 10^{-2}$			

TABLEAU 3.1 – Effet du maillage

La loi de Darcy s'exprime selon :

$$\Delta P = \frac{\mu}{K} V, \quad (3.43)$$

où μ est la viscosité dynamique de l'eau et K la perméabilité du milieu poreux. Dans ce cas précis d'un empilement de sphères, nous calculons la perméabilité grâce à la formule de Kozeny-Carman (voir l'équation 1.2) :

$$K = 2,777 \times 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ pour } d = 1 \times 10^{-3} \text{ m et } \phi = 0,5.$$

Nous obtenons alors l'expression numérique de la loi d'écoulement de l'eau à travers notre milieu poreux :

$$\Delta P = 3,608 \times 10^5 V. \quad (3.44)$$

3.4.2 Résultats numériques

Le tableau (3.1) illustre l'influence du maillage sur la précision des résultats obtenus pour les valeurs de la vitesse débitante et du gradient de pression. On observe que l'influence du maillage sur les résultats obtenus devient négligeable à partir d'un maillage de (41*61), que nous allons considérer pour la suite des calculs.

Un essai d'injection à débit imposé a été mené avec le code de calcul numérique[12] développé en (Fortran 90) dans une configuration fluide/poreux. La figure (3.7) représente les résultats de cet essai.

Les points noirs représentent les données obtenues. La relation entre la vitesse débitante et gradient de pression peut être modélisée par une équation du type :

$$\Delta P = A + B.V, \quad (3.45)$$

dont les valeurs A et B sont données dans le tableau (3.2)

Dans le cas des résultats obtenus, A est un terme parasite qui peut être négligé. En outre, nous observons un très bon accord entre la valeur B obtenue et la valeur théorique avec une erreur relative égale à 1,64%.

Cette étude valide le fait que notre code de calcul puisse être utilisé pour l'étude de l'écoulement de fluide en milieu poreux.

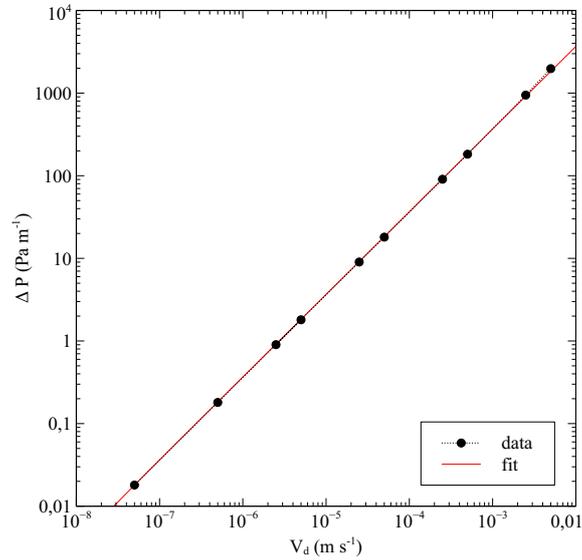


FIGURE 3.7 – Résultats numériques réalisés avec l'eau.

	résultats
$A(\text{Pa m}^{-1})$	-0,000 341 613
$B(\text{Pa s m}^{-2})$	366 734

TABLEAU 3.2 – Coefficient A et B de la loi d'écoulement affine décrivant l'écoulement de l'eau dans le milieu poreux.

Résultats

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats obtenus avec le code de calcul développé, présenté dans les chapitres précédents. Nous verrons en premier lieu l'analyse des résultats numériques obtenus dans le cas d'une cavité poreuse saturée par un fluide Newtonien. La deuxième partie est consacrée pour l'analyse des résultats obtenus dans le cas d'une cavité saturée par un fluide non-Newtonien.

4.2 Écoulement Newtonien

4.2.1 Champ d'écoulement

L'écoulement laminaire est représenté par les lignes de courant illustrées sur les figures (4.1) et (4.2). On observe sur les figures (4.3) et (4.4), le développement classique de l'écoulement dans un canal plan au sein de chaque phase du domaine. L'écoulement est de Poiseuille avec un profil parabolique à l'entrée, il se développe axialement pour devenir uniforme avec une chute axiale de la pression.

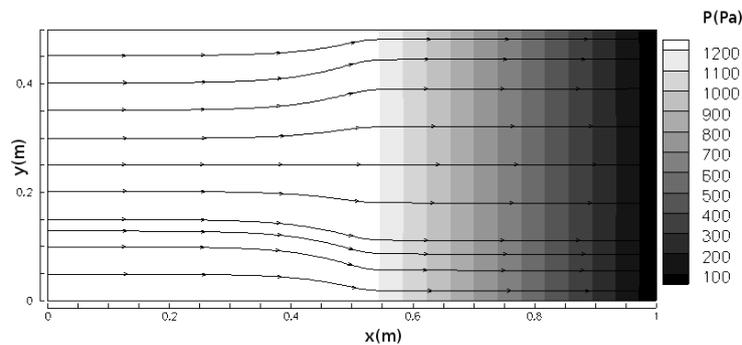


FIGURE 4.1 – Lignes de courant de l'écoulement dans le canal plan ($K = 10^{-6}$).

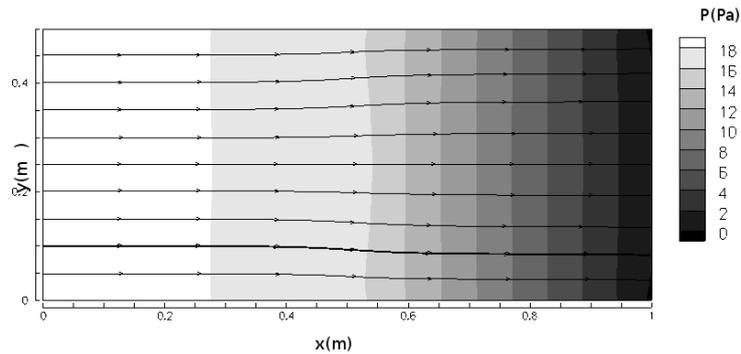


FIGURE 4.2 – Lignes de courant de l'écoulement dans le canal plan ($K = 10^{-4}$).

Rappelons que le milieu d'écoulement est non homogène : une partie contient que du fluide et l'autre partie contient le fluide et le milieu poreux. A l'entrée, l'écoulement est parabolique. Mais le long de son développement dans la deuxième partie, il rencontre la face amont de la zone de transfert. Cette rencontre modifie le développement de l'écoulement. Une fois dans la zone de transfert, l'écoulement commence à se développer dans le milieu poreux. Alors, l'écoulement est nécessairement modifié.

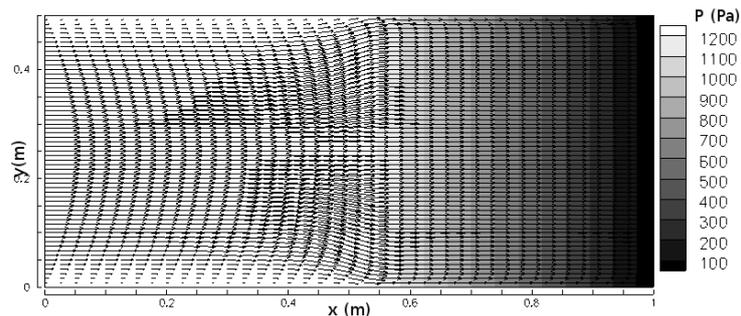


FIGURE 4.3 – Champ de vitesse et champ de pression de l'écoulement dans le canal ($K = 10^{-6}$).

Les lignes de courant subissent des déviations aux limites de la zone de transfert. Ces déviations sont dues à l'équation de continuité. La vitesse horizontale u varie axialement à l'entrée de la zone de transfert et cette variation est compensée par un gradient transversal de la vitesse verticale entraînant une déviation des lignes de courant.

Sur la figure (4.5), on a tracé le profil vertical de la vitesse horizontale à quelques positions axiales arbitrairement choisies. Sur cette figure, la variation spatiale de la vitesse le long du canal est très bien illustrée. Elle se développe dans la première zone du canal sous la forme d'un profil parabolique. A l'approche de l'interface, le profil parabolique diminue. Il continue à diminuer dans le milieu poreux. Dans ce dernier, le profil de vitesse est aplati.

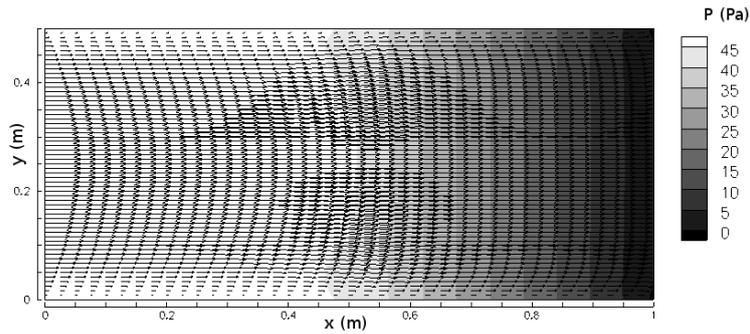


FIGURE 4.4 – Champ de vitesse et champ de pression de l'écoulement dans le canal ($K = 10^{-4}$).

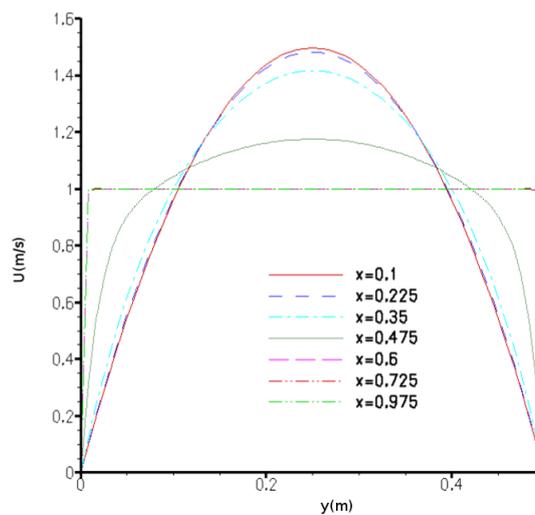


FIGURE 4.5 – Profil vertical de la vitesse horizontale à quelques positions axiales arbitrairement choisies.

Dans ce milieu, la variation verticale de la vitesse horizontale près des parois est due au terme de Brinkman ; mais l'aplatissement du profil de la vitesse, loin des parois, est dû au terme de Forchheimer (4.6).

4.2.2 Influence de la perméabilité

La perméabilité traduit la facilité à l'écoulement du fluide dans le milieu poreux. Plus la perméabilité est grande, plus le fluide s'écoule facilement dans le milieu poreux. Les figures (4.7) et (4.8) montrent bien cette affirmation. Sur ces figures on remarque bien que, plus la perméabilité est grande, plus le fluide s'écoule facilement dans le milieu poreux avec l'augmentation de l'amplitude des vitesses aux bords des parois à la sortie du milieu poreux.

L'augmentation de l'amplitude d'infiltration du fluide croît en plus avec une perméabilité plus élevée.

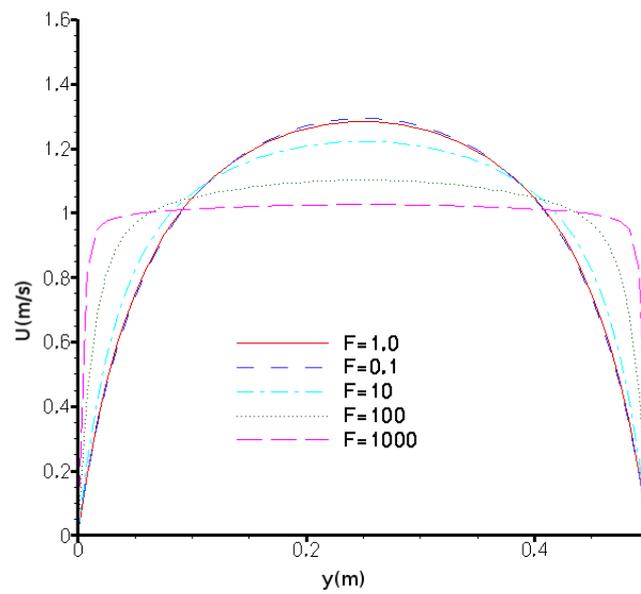


FIGURE 4.6 – Profil vertical de la vitesse horizontale pour une position donnée avec différente valeur du coefficient de Forchheimer.

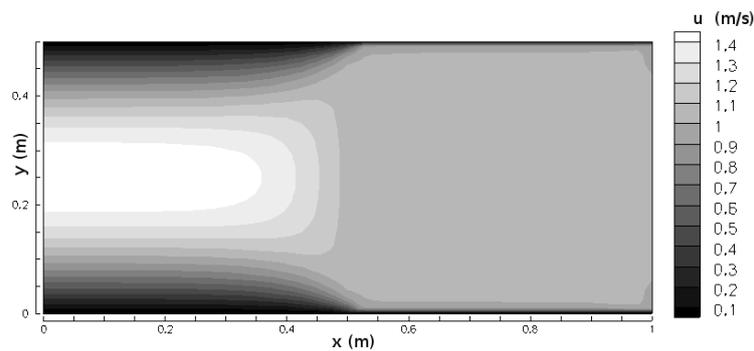


FIGURE 4.7 – Contours de vitesse pour un écoulement Newtonien dans un milieu poreux de perméabilité $K = 1.10^{-5} m^2$.

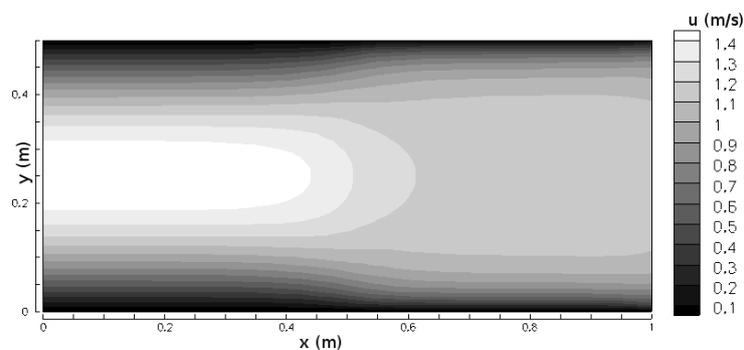


FIGURE 4.8 – Contours de vitesse pour un écoulement Newtonien dans un milieu poreux de perméabilité $K = 1.10^{-3} m^2$.

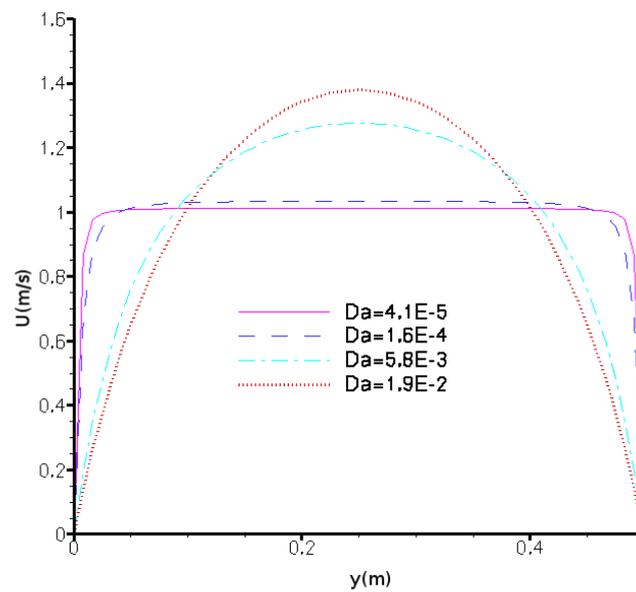


FIGURE 4.9 – Influence du nombre de Darcy sur la vitesse axiale pour un fluide Newtonien.

4.2.3 Influence du nombre de Darcy

Sur la figure (4.9) nous avons mis en évidence l'influence du nombre de Darcy sur la structure de l'écoulement. Les résultats obtenus sont en accord avec l'étude de Zhou et al [124]. En diminuant le nombre de Darcy, le profil de vitesse devient de plus en plus plat.

4.3 Écoulement non-Newtonien

L'étude de l'écoulement de fluide non-newtonien dans le milieu poreux constitue le cœur de notre travail. Notre objectif est de bien comprendre l'influence du fluide sur la structure de l'écoulement. De même la relation entre le gradient de pression et la vitesse débitante sera étudiée dans cette partie pour différent comportement non-Newtonien.

4.3.1 Modèle loi en puissance

Dans cette partie nous allons étudier l'écoulement d'un fluide non-Newtonien décrit par le modèle de loi en puissance, dans le milieu poreux.

Nous présentons sur les figures (4.10), (4.11) et (4.12) les différentes corrélations donnant le gradient de pression ΔP en fonction de la vitesse débitante V obtenues à partir de l'étude numérique. On constate que les gradients de pression pour une vitesse débitante donnée sont beaucoup plus importants avec l'augmentation de l'indice de la

loi en puissance du fluide.

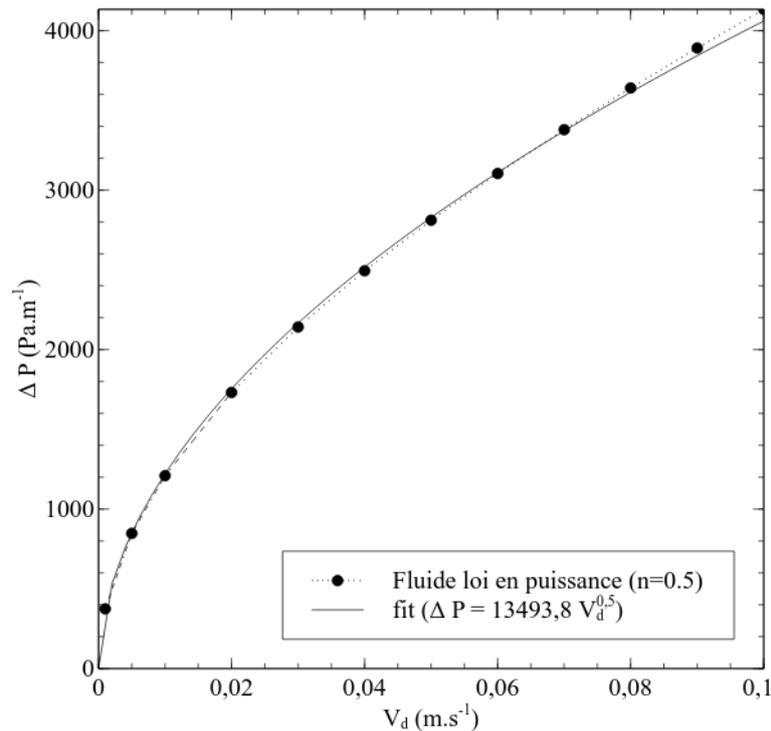


FIGURE 4.10 – Évolution du gradient de pression en fonction de la vitesse débitante pour un fluide en loi de puissance d'exposant $n=0.5$.

Une relation non linéaire est obtenue entre le gradient de pression et la vitesse débitante comme prédit dans la littérature. Avec ces résultats numériques, on obtient la relation suivante :

$$\Delta P = \frac{A}{K(n)} V^n, \quad (4.1)$$

où K est défini dans l'équation 2.29, dépendant de l'indice n .

Le coefficient A n'est rien d'autre que la viscosité apparente du fluide. Nous retrouvons donc la loi de Darcy modifiée pour le fluide non Newtonien.

On constate que pour les trois fluides, l'équation du modèle prédit des chutes de pression avec un écart inférieur à 5.2% dans le cas du fluide non Newtonien d'indice $n = 0.5$, un écart correspondant à 7.4% pour le fluide à $n = 0.7$ et le dernier cas correspondant à $n = 1.5$, un écart de 8.5%. Ces résultats nous permettent de conclure sur la fiabilité de notre code de calcul.

Dans cette étude, nous nous intéressons beaucoup aussi à la compréhension de la structure de l'écoulement dans le milieu poreux.

Sur les figures (4.13) et (4.14) notons aussi, qu'on observe une différence dans la chute de pression dans le cas non Newtonien d'indice $n=1.5$, qui donne une perméabilité beaucoup plus importante par rapport au cas Newtonien.

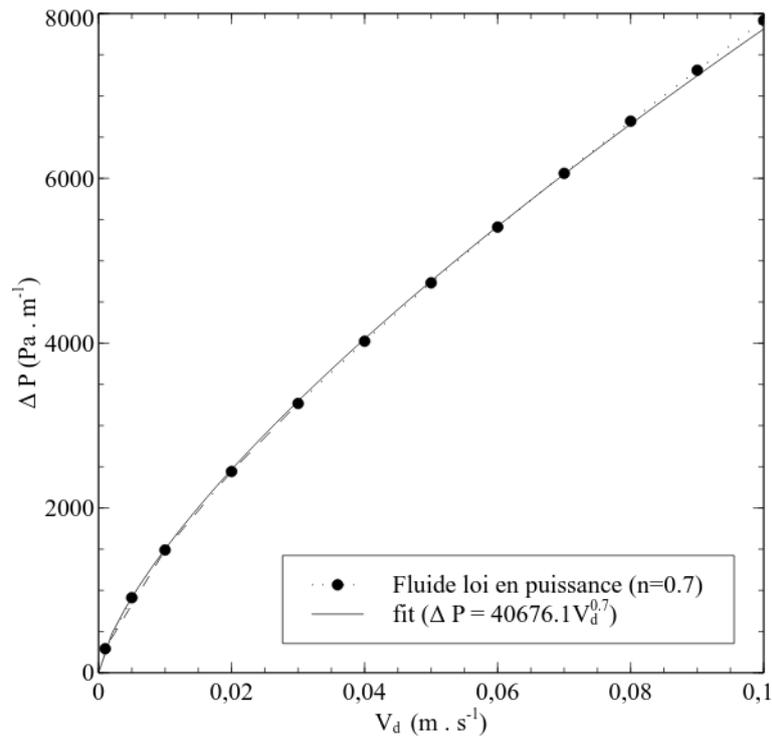


FIGURE 4.11 – Évolution du gradient de pression en fonction de la vitesse débitante pour un fluide en loi de puissance d'exposant $n=0.7$.

L'influence du nombre de Darcy dans le cas de l'écoulement non Newtonien est également étudié (4.15). Pour un même diamètre des grains et de porosité, nous obtenons un nombre de Darcy différent. Ce qui est dû à la dépendance de la perméabilité à l'indice de la loi en puissance.

Notons que l'aplatissement du profil de vitesse est plus important dans le cas Newtonien. Le nombre de Darcy a une influence moins importante sur les fluides rhéoépaississants.

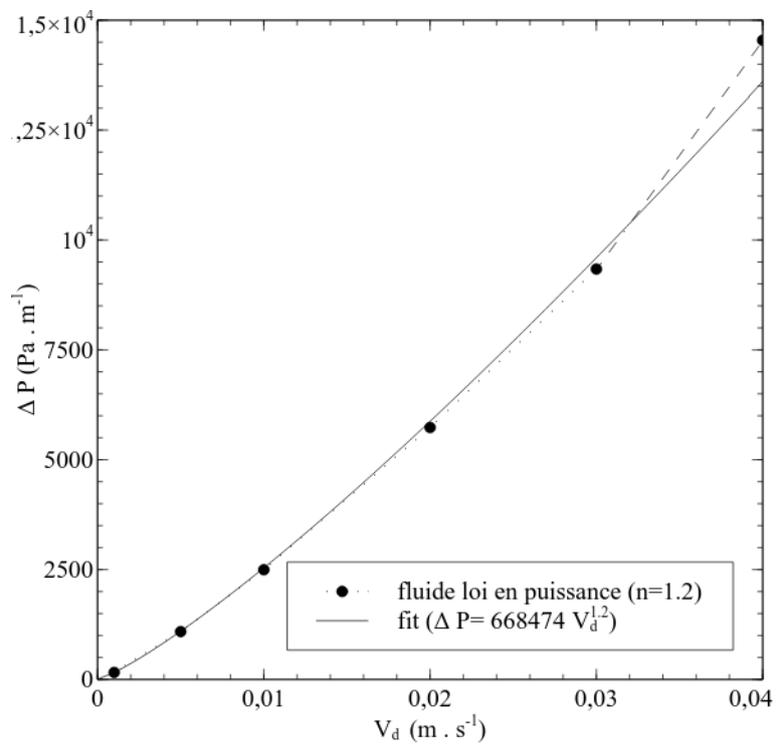


FIGURE 4.12 – Évolution du gradient de pression en fonction de la vitesse débitante pour un fluide en loi de puissance d'exposant $n=1.2$.

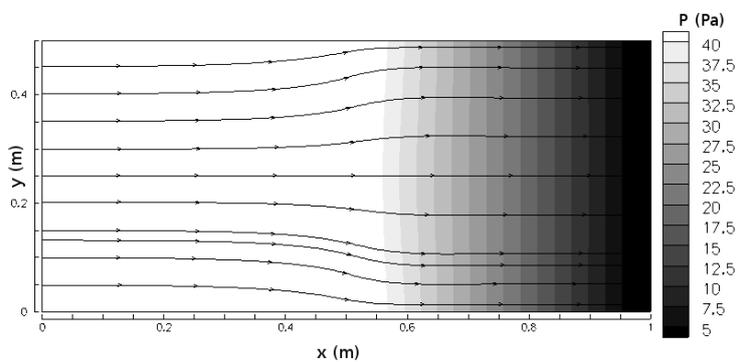


FIGURE 4.13 – Lignes de courant de l'écoulement non Newtonien ($n=1.5$) dans le canal plan.

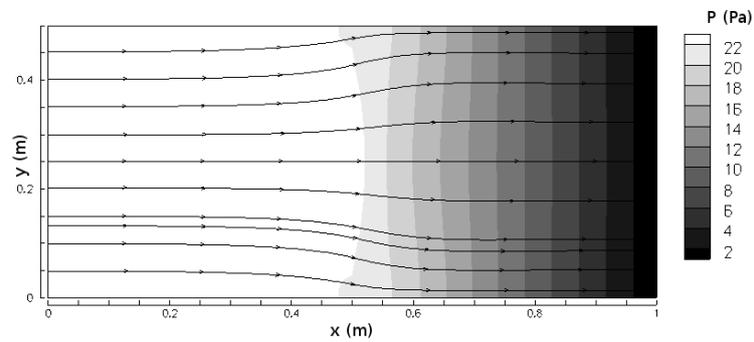


FIGURE 4.14 – Lignes de courant de l'écoulement non Newtonien ($n=0.5$) dans le canal plan.

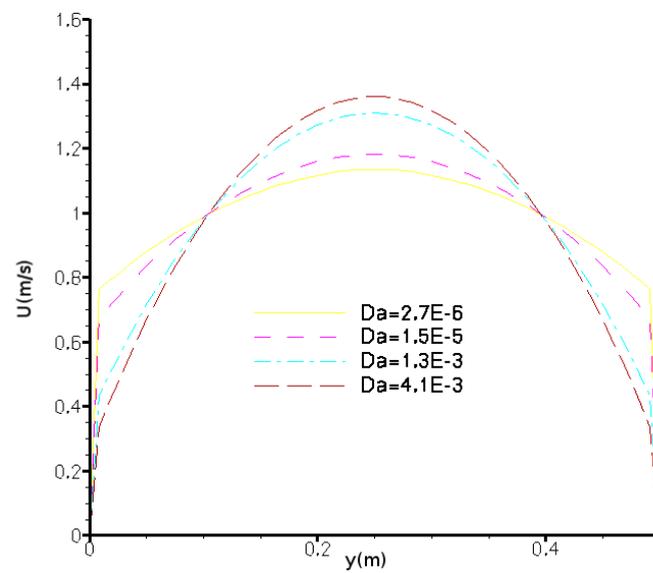


FIGURE 4.15 – Influence du nombre de Darcy pour un écoulement de fluide en loi de puissance avec $n=1.5$.

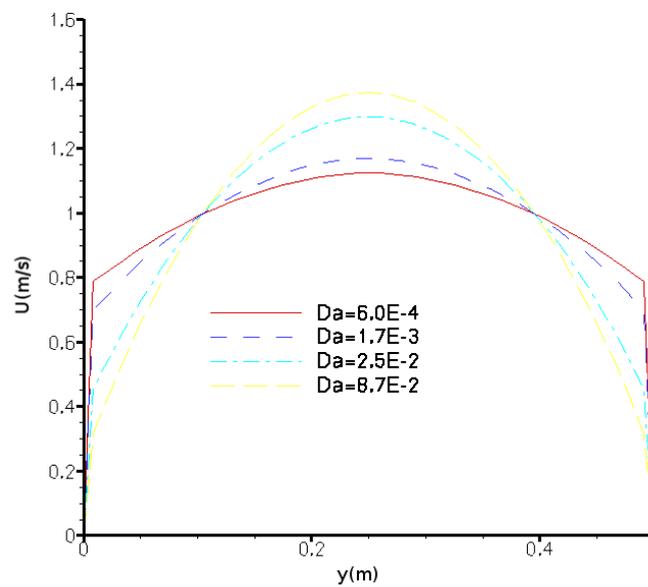


FIGURE 4.16 – Influence du nombre de Darcy pour un écoulement de fluide en loi de puissance avec $n=0.5$.

Conclusion

La simulation numérique de l'écoulement de fluide dans un canal partiellement rempli d'une matière poreuse isotrope et homogène a fait l'objet de cette première partie de notre étude. Pour cela, nous avons considéré, d'une part, un écoulement de fluide Newtonien et, d'autre part, un fluide en loi de puissance dans un canal divisé en deux parties égales. La première partie ne contient que du fluide alors que la deuxième partie contient le fluide en écoulement dans le milieu poreux saturé. Les parois sont considérées adiabatiques et imperméables. Ce problème bidimensionnel est modélisé par les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement moyennés dans un *Volume Élémentaire Représentatif*. Elles sont résolues par la méthode des volumes finis, avec une discrétisation des termes convectifs et non linéaires. Les termes diffusifs et de pression sont temporellement implicites.

L'écoulement développé est de Poiseuille, la pression chute axialement. Puis à la traversée du milieu poreux, on trouve que l'écoulement n'est plus de Poiseuille. La matière poreuse produit une résistance à l'écoulement, sous forme d'une perte de pression.

L'influence du nombre de Darcy sur la structure de l'écoulement et sur le profil de vitesse est montré. L'aplatissement du profil de vitesse est moins important dans le cas des fluides rhéoépaississants que les fluides Newtoniens. Nous avons aussi mis en évidence l'influence du terme de Forchheimer sur l'aplatissement du profil de vitesse.

La relation non linéaire entre le gradient de pression et la vitesse débitante pour les fluides en loi de puissance est obtenue dans notre étude. L'extension de la loi de Darcy est obtenue pour ces fluides, où la perméabilité dépend de l'indice n .

Deuxième partie

Convection naturelle dans un milieu poreux saturé par un fluide non Newtonien

Synthèse bibliographique

Des décennies après les premières expériences de Bénard [39], l'étude de la convection naturelle fait toujours l'objet de recherches soutenues et de nouvelles découvertes. En effet, ces phénomènes convectifs sont importants dans la dynamique des océans, celle de l'atmosphère où encore à l'intérieur des étoiles et des planètes (Busse, [40], [41]; Getling, [42]). En plus de leurs applications industrielles nombreuses, ils constituent des exemples fondamentaux d'organisation spatio-temporelle loin de l'équilibre. Si les problèmes de convection dans les fluides constituent toujours un sujet d'intense activité scientifique, il en va de même pour la convection naturelle dans les milieux poreux. Les premières contributions sur le sujet remontent au milieu des années 40 avec les travaux de Horton et Rogers [36] et ceux de Lapwood [37]. Ces auteurs ont analysé la stabilité d'un milieu poreux saturé de fluide et chauffé par le bas, ce qui constitue une analogie du problème de Rayleigh.

Nield [9], [10], publie les premiers travaux portant sur l'étude analytique et numérique de la convection naturelle dans des enceintes de formes rectangulaires et cylindriques. L'auteur prédit des nombres de Rayleigh critique marquant la naissance des mouvements convectifs, pour diverses conditions aux limites thermiques et solutales.

D. S. Riley et K. H. Winters [8] se sont intéressés aux mécanismes d'échange modale en convection naturelle dans une cavité rectangulaire poreuse saturée par un fluide, chauffé par le bas avec des parois verticales adiabatiques. Ils ont axé leurs études sur deux aspects principaux à savoir l'existence de multiples solutions stables et l'influence du rapport de forme sur la solution. L'analyse de stabilité linéaire leur a permis de déterminer le gradient de température critique. Les auteurs ont montré que les bifurcations secondaires dues à des échanges modaux se produisent avec la variation du rapport de forme. Ce processus provoque un changement brusque de régime d'écoulement privilégié à certaines valeurs critiques de rapport de forme, aussi un diagramme de stabilité a été obtenu pour une variation de rapport de forme entre 0.5 à 2.

En 1995, S. Kimura et al [17] étudient la convection naturelle dans une cavité horizontale poreuse saturée par un fluide Newtonien, chauffée par le bas et refroidie par le haut par un flux constant. L'analyse de stabilité linéaire de cette configuration met en évidence l'existence d'un écoulement monocellulaire. Grace à l'approximation

d'écoulement parallèle, les auteurs montrent que les rouleaux longitudinaux sont les plus instables et se développent au delà de la valeur critique du nombre de Rayleigh $Ra_c = 311.11$. Les rouleaux transversaux ne peuvent apparaître qu'au delà de $Ra_c = 506$. Ces valeurs critiques ont été déterminées pour une configuration de rapport de forme A infini. Afin d'apprécier l'effet d'un rapport de forme A fini, Kimura et al [17] ont conduit des simulations numériques bidimensionnelles en focalisant l'étude sur l'émergence de rouleaux transversaux. Les résultats numériques montrent que la transition d'un écoulement monocellulaire stationnaire à un écoulement multicellulaire oscillatoire se produit pour $630 < Ra_c < 650$ pour un rapport de forme $A=8$ et $730 < Ra_c < 750$ pour un rapport de forme $A=4$.

Une revue de la littérature montre que la convection naturelle dans une configuration poreuse saturée par un fluide Newtonien a été largement étudiée dans le passé contrairement aux fluides non Newtonien.

H. T. Chen and C. K. Chen [7] furent les premiers à mener une étude de la convection naturelle dans une cavité poreuse saturée par un fluide non Newtonien. Le fluide est modélisé par la loi en puissance avec une configuration horizontale chauffée par un flux uniforme. Depuis ces travaux, deux grands types de configuration sont considérés dans la majorité des publications disponibles dans la littérature. Il s'agit d'écoulements entre des plaques horizontales ou verticales soumises à différentes conditions aux limites thermiques. Une revue complète à propos de ce sujet a été publiée par Yih [6].

En utilisant le modèle de type loi en puissance proposé par Pascal [5], Amari et al [4] proposent l'étude de la convection naturelle de ce fluide au sein d'une cavité poreuse. La configuration de cette couche est horizontale et chauffée par le bas ou par les côtés, par un flux de chaleur constant. Le problème a été résolu analytiquement dans la limite d'une couche mince en utilisant la loi de Darcy modifiée. Les auteurs montrent la sensibilité du transfert de chaleur à l'indice de la loi en puissance n .

Par ailleurs, les applications liées aux écoulements des fluides viscoélastiques sont nombreuses et variées de telle sorte que leur modélisation a suscité un vif intérêt de la communauté scientifique. L'objectif était, et reste encore, d'arriver à une meilleure compréhension des phénomènes viscoélastiques. Les physico-chimistes ont élaboré plusieurs modèles rhéologiques permettant de bien représenter le comportement de ces fluides. De leur côté, les numériciens ont développé des méthodes plus ou moins efficaces pour résoudre numériquement les équations liées à ces modèles.

Le cas de la convection des fluides viscoélastiques, dont les applications sont nombreuses notamment dans le cas des industries pétrolières, a été très peu étudié par la communauté scientifique. Mais depuis une dizaine d'années, l'intérêt suscité par ce problème est de plus en plus grandissant. En effet, la compréhension de la convection naturelle dans un milieu poreux saturé par un fluide non-Newtonien a de grandes importances dans les réservoirs pétroliers, en géophysique etc. Les performances d'un

réservoir dépendent dans une large mesure de la nature physique du pétrole brut présent dans le réservoir. Le brut léger est un fluide Newtonien. Alors que le brut lourd est un fluide non-Newtonien. En outre, le sable pétrolier contenant du brut cireux à des hauteurs peu profondes du réservoir pétrolier est considéré comme un fluide viscoélastique.

Dans une étude récente menée par Kim et al. [47], l'apparition des structures bifurquées a été étudiée grâce à une analyse linéaire et faiblement non linéaire. En utilisant le modèle de Darcy-Oldroyd, il a été montré que ces structures peuvent être stationnaires ou oscillatoires suivant les valeurs prises par le temps de relaxation et de retardation associés à l'élasticité du fluide. Lorsque la convection est de nature stationnaire, ces auteurs ont montré que le transfert de chaleur demeure insensible à l'élasticité du fluide et se comporte comme pour un fluide Newtonien. Dans le cas où le système est le siège d'une bifurcation de Hopf, leur étude non linéaire s'est focalisée sur les ondes fixes et le transfert de chaleur associé à ces ondes sans se soucier de leur stabilité. Leur investigation a été étendue par Zhang et al. [49] en utilisant comme équation du mouvement le modèle de Darcy-Brinkman-Oldroyd.

L'étude théorique des instabilités de fluides viscoélastiques pouvant naître et se développer en milieu poreux chauffé par le bas a été menée par Gérémio et al [3], Hirata et al [1]. La formulation mathématique des équations de ce problème repose sur la loi phénoménologique de Darcy, généralisée aux fluides viscoélastiques de type Oldroyd-B. L'étude temporelle de stabilité linéaire montre que la nature stationnaire ou oscillatoire des structures thermo-convectives bifurquées dépend, en plus du nombre de Rayleigh, des temps de relaxation et de retard associés à l'élasticité du fluide. Lorsque le système est le siège d'instabilité oscillatoire, les auteurs montrent qu'en régime non linéaire, l'évolution spatio-temporelle de l'amplitude des structures convectives est gouvernée par un système de deux équations couplées de type Ginzburg-Landau complexes qui prévoit la formation d'ondes progressives ou celle d'ondes fixes. Une analyse de stabilité révèle que les ondes progressives sont stables, contrairement aux ondes fixes qui demeurent instables indépendamment des valeurs prises par les nombres sans dimension du problème. Le nombre de Nusselt associé à ces ondes progressives stables est ensuite évalué et l'influence de l'élasticité du fluide sur le transfert de chaleur moyen a été discutée par ces auteurs.

Malheureusement jusqu'à ce jour nous n'avons pas pu rencontré une étude expérimentale sur la convection naturelle de fluides viscoélastiques saturant un milieu poreux. Cependant, dans le cas d'un milieu fluide, la convection naturelle est documentée par des données expérimentales très peu abondantes. L'étude expérimentale de Kolodner [2] constitue une documentation complète sur le sujet.

Ce résumé très bref des travaux analytiques, numériques et expérimentaux récents traitant de la convection naturelle des fluides non Newtoniens et en particulier

des fluides viscoélastiques permet la mise en perspective des points majeurs de cette deuxième partie de la thèse.

Formulation mathématique de la convection naturelle de fluides viscoélastiques saturant un milieu poreux

5.1 Modélisation du problème

On considère un milieu poreux (voir 5.1) d'épaisseur H , saturé par un fluide viscoélastique. On impose un flux de chaleur sur les parois inférieure et supérieure. Le milieu poreux est dans le champ gravitationnel \vec{g} .

Le fluide a une viscosité cinématique ν_f , une viscosité dynamique μ_f une masse volumique ρ_f et une conductivité thermique λ_f .

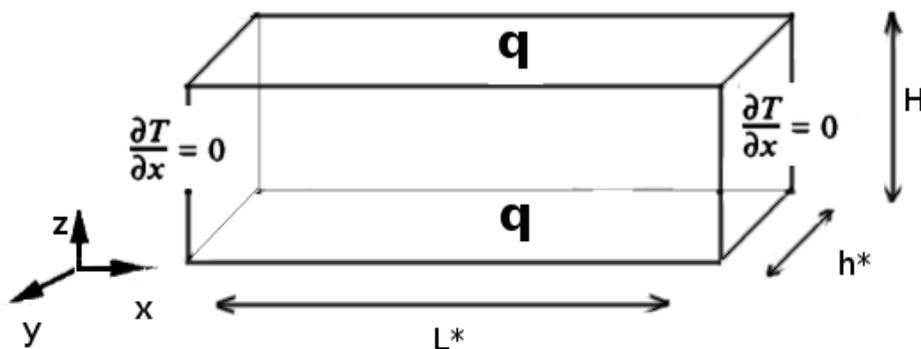


FIGURE 5.1 – Configuration du domaine physique : milieu poreux saturé d'un fluide viscoélastique.

5.1.1 Equation de conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse la plus générale s'écrit sous la forme suivante :

$$\phi \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \text{div}(\rho_f \vec{v}) = 0.$$

En première approximation la densité s'écrit comme fonction linéaire de la température :

$$\rho_f = \rho_0(1 - \alpha_f(T - T_0)),$$

α_f est le coefficient d'expansion thermique, T la température en un point donné et T_0 une température de référence par exemple la température de la plaque du bas dans le cas de notre étude. Dans les gaz et les liquides, le coefficient d'expansion thermique α_f est très petit. Nous adoptons donc l'hypothèse Oberbeck-Boussinesq [29] pour la densité du fluide qui montre que les variations de densité sont négligeables, excepté dans le terme gravitationnel $\rho_f \vec{g}$ où elles rendent compte de la poussée d'Archimède qui est la cause de la convection thermique. L'équation de conservation de la masse s'écrit alors :

$$\text{div} \vec{v} = 0. \quad (5.1)$$

5.1.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement

Loi de Darcy pour les fluides viscoélastiques

Comme dans le cas d'un fluide Newtonien, l'équation du mouvement pour un fluide viscoélastique saturant un milieu poreux s'obtient grâce à la théorie d'homogénéisation [64]. Cette équation prend la forme d'une loi de Darcy (1.17) généralisée et s'écrit sous la forme :

$$(1 + \bar{\lambda}_2 \frac{\partial}{\partial t}) \vec{v} = -\frac{K}{\mu_f} (1 + \bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial t}) (\nabla P + \rho_f g \vec{e}_z). \quad (5.2)$$

Dans cette réécriture de la loi de Darcy pour les fluides viscoélastiques, on peut immédiatement remarquer que pour le cas particulier $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = 0$, l'équation (5.2) correspond à la loi de Darcy habituellement utilisée pour un fluide Newtonien.

L'équation de Darcy généralisée (5.2) aux fluides viscoélastiques néglige les effets d'inertie du fluide. Or, P. Vadasz [65] a souligné l'importance de ces effets lorsqu'on s'intéresse au phénomène de propagation d'onde en milieu poreux. En effet, l'étude de stabilité linéaire et faiblement non-linéaire de la convection naturelle en milieu poreux soumis à une rotation uniforme autour de son axe vertical mené par P. Vadasz [65], montre que la prise en compte du terme instationnaire d'inertie peut induire une convection oscillante, qui n'est pas prévue lorsque ce terme d'inertie est négligé. Pour

un fluide viscoélastique pur, un terme instationnaire est rajouté à l'équation (5.2) qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{\rho_0 K}{\phi \mu_f} \left(1 + \bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(1 + \bar{\lambda}_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \vec{v} = -\frac{K}{\mu_f} \left(1 + \bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) (\nabla P + \rho_f g \vec{e}_z). \quad (5.3)$$

5.1.3 Equation de conservation de l'énergie

La convection en milieu poreux favorise le transfert de chaleur entre la paroi chaude et la paroi froide. Ce transfert est assuré à la fois par la phase fluide et la phase solide. Or ces deux phases ne possèdent ni la même capacité thermique (respectivement $(\rho c)_f$ et $(\rho c)_s$), ni la même conductivité thermique (respectivement λ_f et λ_s). Pour cette raison et dans le but de tenir compte du transfert de chaleur lié à la présence des deux phases, Combarous et Bories [30] avaient proposé un modèle de deux équations d'énergie décrivant l'évolution de la température des deux phases :

$$\phi(\rho c)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + \phi(\rho c)_f \vec{v} \cdot \nabla T_f = \text{div}[\lambda_f^* \nabla T_f] - h(T_f - T_s), \quad (5.4)$$

$$(1 - \phi)(\rho c)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \text{div}[\lambda_s^* \nabla T_s] - h(T_s - T_f), \quad (5.5)$$

avec $T_{f,s}$ désignant la température, moyennée sur un *V.E.R.*, les indices f, s désignant la partie fluide et la matrice solide. Les scalaires λ_f^* et λ_s^* sont des coefficients de conductivité thermique équivalente et dépendent des coefficients de conductivité thermique propre λ_f et λ_s et de la porosité ϕ . Ils dépendent aussi entre autres paramètres :

- pour λ_f^* , de la dispersion hydrodynamique due à la présence du squelette solide.
- pour λ_s^* de l'état de division de la phase solide.

Le coefficient de transfert entre les deux phases, h , dépend par analyse dimensionnelle :

- des caractéristiques thermiques de la phase fluide et de la matrice solide (conductivité et chaleur volumique)
- de la porosité ϕ
- une dimension caractéristique du milieu poreux par exemple \sqrt{K} avec K la perméabilité ou alors la taille d'un pore, d'un grain, d'une fibre.

Le transfert de chaleur d'une phase à l'autre est explicité à l'aide du coefficient de transfert h , qui peut être déterminé expérimentalement de manière indirecte [31].

Lorsque l'on suppose l'équilibre thermique entre la phase fluide et la matrice solide on a alors $T_f = T_s$. Sa justification repose sur la comparaison des temps caractéristiques de mise à l'équilibre thermique du milieu poreux. Sa validité a été systématiquement étudiée dans [32]. Pour les modèles variant entre $10^{-2} < \frac{\lambda_s}{\lambda_f} < 10^3$, on observe qu'au cours d'un processus transitoire, l'écart maximal entre les températures moyennes

adimensionnées de chaque phase est de l'ordre de 10%. On en déduit par sommation terme à terme des équations (5.4) et (5.5), le modèle de transfert de chaleur le plus couramment utilisé pour les milieux poreux (équation de transport-diffusion) :

$$(\rho c)^* \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f \vec{v} \cdot \nabla T = \text{div}[\lambda^* \nabla T], \quad (5.6)$$

avec T la température équivalente du milieu poreux,

$$(\rho c)^* = \phi(\rho c)_f + (1 - \phi)(\rho c)_s, \quad (5.7)$$

la chaleur spécifique volumique équivalente (car additivité des enthalpies donc des chaleurs spécifiques volumiques) et

$$\lambda^* = \lambda_f^* + \lambda_s^*. \quad (5.8)$$

Généralement λ^* est mesuré expérimentalement mais il dépend de la température. On le prendra constant dans la suite. On peut quand même en donner une approximation assez simple. Parmi les modèles les plus usuels [31], on distingue :

- les modèles séries λ^\perp , définis par un milieu constitué de strates de solide et de fluide perpendiculaires au transfert de chaleur qui donnent :

$$\lambda^\perp = \phi \lambda_f + (1 - \phi) \lambda_s.$$

- les modèles parallèles λ^\parallel , définis par un milieu constitué de strates solides et de fluides parallèles au transfert de chaleur qui donnent :

$$\frac{1}{\lambda^\parallel} = \frac{\phi}{\lambda_f} + \frac{1 - \phi}{\lambda_s}.$$

Ces approximations permettent d'encadrer λ^* :

$$\lambda^\perp < \lambda^* < \lambda^\parallel.$$

Si λ^* ne varie pas spatialement, on peut écrire :

$$\frac{(\rho c)^*}{(\rho c)_f} \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = D_{th} \Delta T, \quad (5.9)$$

avec $D_{th} = \frac{\lambda^*}{(\rho c)_f}$ le coefficient de diffusivité thermique équivalente.

5.1.4 Conditions aux frontières

Les équations de base décrites précédemment sont résolues en tenant compte des conditions aux frontières spécifiques à notre problème. On impose les conditions aux limites suivantes :

Conditions aux frontières thermiques : la condition thermique sur les parois actives sont exprimées par le biais de la loi de Fourier, à savoir :

$$z = 0, H \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{q}{\lambda^*}; \quad x = 0, L^* \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad y = 0, h^* \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

Conditions aux frontières hydrodynamiques : pour la vitesse, on utilise l'équation de Darcy pour les fluides viscoélastiques avec les conditions d'imperméabilité à la frontière

$$z = 0, H \quad \vec{w} \cdot \vec{n} = 0; \quad x = 0, L^* \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = 0; \quad y = 0, h^* \quad \vec{v} \cdot \vec{n} = 0,$$

avec \vec{n} la normale aux parois concernées.

5.2 Adimensionnement et conditions aux limites

5.2.1 Equations adimensionnées

Toutes les grandeurs physiques du problème peuvent être exprimées à l'aide de quatre grandeurs fondamentales : la longueur [m], la masse [kg], la température [K] et le temps [s]. Or les phénomènes physiques sont indépendants du choix de l'unité, ils dépendent donc de nombres sans dimension. D'autre part, cette analyse va orienter tout notre travail, en mettant par exemple en évidence un petit paramètre qui suggère un développement asymptotique. Pour cela, on va adimensionner toutes les grandeurs par les échelles de références suivantes :

— Longueur :

$$x^* = \frac{x}{H}; \quad y^* = \frac{y}{H}; \quad z^* = \frac{z}{H}.$$

— Temps :

$$t^* = \frac{t}{H^2 \frac{(\rho c)^*}{\lambda^*}} = \frac{t}{t_0} \quad ; \quad \lambda_1^* = \frac{\bar{\lambda}_1}{t_0} \quad \text{et} \quad \lambda_2^* = \frac{\bar{\lambda}_2}{t_0} \quad \text{avec} \quad t_0 = \frac{H^2 (\rho c)^*}{\lambda^*}.$$

— Température :

$$T^* = \frac{T - T_0}{\frac{qH}{\lambda^*}}.$$

— Vitesse de filtration :

$$\vec{v}^* = \frac{\vec{v}}{\frac{\lambda^*}{H(\rho c)_f}}.$$

— Pression :

$$P^* = \frac{P + \rho_0 g z}{\frac{\lambda^* \mu_f}{K(\rho c)_f}}.$$

La longueur de référence représente la hauteur H sur laquelle se développe principalement le phénomène de convection.

Le temps de référence représente le temps de diffusion thermique équivalent sur une surface H^2 .

La température au sein du milieu est comprise entre la température de la plaque du haut et celle du bas, créée par le flux de chaleur, alors la différence de température qH/λ^* est prise comme référence.

En milieu poreux, la vitesse de filtration de référence est basée sur le temps caractéristique de diffusion thermique D_{th} et la longueur caractéristique H où seule la partie fluide est en mouvement d'où le terme $(\rho c)_f$ et non $(\rho c)^*$.

Au regard de la loi de Darcy pour les fluides viscoélastiques, on construit la pression de référence et la longueur de référence.

Par souci de simplification, dans la suite de ce document, on ôte les étoiles aux grandeurs adimensionnées. Les équations du problème deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \vec{v} = 0, \\ \frac{Da}{\phi Pr} (1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}) \vec{v} = (1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}) (-\nabla P + Ra T \vec{e}_z), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \nabla^2 T. \end{array} \right. \quad (5.10)$$

En prenant deux fois le rotationnel de l'équation de conservation de la quantité de mouvement après avoir négligé le premier terme et en tenant compte de l'équation de continuité, on obtient en projetant sur l'axe vertical z :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + \Gamma \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}) \vec{\nabla}^2 w - (1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}) Ra [\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}] = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) T - \vec{\nabla}^2 T = 0. \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Les conditions aux limites associées deviennent :

Pour la vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} w = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = 1, \\ u = 0 \quad \text{en} \quad x = \pm \frac{A}{2} \quad \text{avec} \quad A = \frac{L^*}{H}, \\ v = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \quad \text{et} \quad a \quad \text{avec} \quad a = \frac{h^*}{H}. \end{array} \right. \quad (5.12)$$

avec A le rapport de forme de la cavité suivant la direction x et a le rapport de forme suivant la direction y .

Pour la température :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial z} = -1 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = 1, \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad x = \pm \frac{A}{2}, \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \quad \text{et} \quad z = a. \end{array} \right. \quad (5.13)$$

Ces équations font intervenir les nombres sans dimension suivants :

Nombre de Rayleigh de filtration : Le nombre de Rayleigh caractérise les effets convectifs au sein d'un fluide. Il est défini par :

$$Ra = \frac{\alpha_f g K H}{\nu_f \lambda^*} \frac{q H}{\lambda^*} (\rho c)_f.$$

En effet, en convection naturelle, les effets stabilisants se traduisent par la diffusion thermique du fluide en mouvement où le temps caractéristique lors d'un trajet H d'une particule est $H^2 \frac{(\rho c)_f}{\lambda^*}$. Les effets stabilisants sont également dus à la viscosité où le temps caractéristique associé est $\frac{K}{\nu_f}$. De ce fait, le temps caractéristique de stabilisation est $t_{stabilisation}^2 = H^2 \frac{(\rho c)_f K}{\lambda^* \nu_f}$. Les effets destabilisant proviennent de la poussée d'Archimède par variation de la densité, le temps de relaxation associé est donc $t_{destabilisation}^2 = \frac{H}{\alpha_f g \left(\frac{q H}{\lambda^*}\right)}$. Le nombre de Rayleigh est donc le rapport des deux temps :

$$Ra = \frac{t_{stabilisation}^2}{t_{destabilisation}^2}.$$

Coefficient de relaxation λ_1 : Ce coefficient représente le comportement élastique du fluide, il est défini comme suit :

$$\lambda_1 = \frac{\bar{\lambda}_1}{(\lambda^*/(\rho c)^* H^2)},$$

où $(\lambda^*/(\rho c)^* H^2)$ est le temps de diffusion thermique verticale. Dans le cas du modèle de type Oldroyd-B et dans toute la suite de notre travail, nous aurons toujours :

$$0 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1.$$

Coefficient de retard λ_2 : Il représente également le comportement élastique du

fluide, il s'écrit de façon explicite :

$$\lambda_2 = \frac{\bar{\lambda}_2}{(\lambda^*/(\rho c)^*H^2)}.$$

Le nombre de Prandlt-Darcy : Cette grandeur est définie par :

$$Pr_D = \frac{\phi Pr}{Da}.$$

— Nombre de Prandtl

$$Pr = \frac{\nu}{D_{th}}.$$

La diffusivité thermique D_{th} et la viscosité cinématique ν ayant même dimension, leur rapport définit une grandeur sans dimension Pr appelée nombre de Prandtl. Pr permet d'évaluer l'efficacité relative du transport de chaleur et de quantité de mouvement.

— Nombre de Darcy

Le nombre de Darcy Da est caractéristique de la facilité qu'a un fluide à traverser un milieu poreux.

$$Da = \frac{K}{H^2}.$$

5.3 Transfert de chaleur

L'étude du transfert de chaleur dans la cavité soumise à un flux constant nécessite la détermination du nombre de Nusselt Nu . Dans la présente étude, nous allons nous intéresser particulièrement au calcul du taux de transfert de chaleur à une position x donnée. Il est défini par l'expression suivante :

$$Nu(x) = \frac{q}{\lambda^* \Delta T / H} = \frac{1}{T(x, 0) - T(x, 1)}. \quad (5.14)$$

La valeur moyenne du nombre de Nusselt \overline{Nu} sur les parois actives est définie par :

$$\overline{Nu} = \frac{1}{A} \int_0^A Nu(x) dx. \quad (5.15)$$

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une modélisation mathématique du problème basée sur l'équation de Darcy généralisée aux fluides viscoélastiques. Par ailleurs, les paramètres adimensionnés pertinents du problème ont été déterminés.

Ce problème admet une solution dite solution de conduction. A partir des équations développées précédemment, il est possible d'étudier la stabilité de l'état de conduction en fonction des paramètres adimensionnés du problème.

Stabilité linéaire de l'état de conduction et caractérisation de la convection monocellulaire

Ce chapitre est consacré à l'étude des instabilités qui apparaissent lorsque l'état de base se destabilise. Pour cela, il faut étudier l'évolution au cours du temps d'une perturbation infinitésimale, qui peut simuler, par exemple, le bruit inhérent aux situations réelles. La solution de base est dite instable lorsque cette perturbation s'amplifie asymptotiquement dans le temps, cependant dans le cas contraire on parle d'un état de base stable. Deux approches de stabilité linéaire sont alors possibles, temporelles et spatio-temporelles.

6.1 Formulation du problème de stabilité de l'état de conduction

L'analyse linéaire qui correspond à l'étude de l'évolution d'une perturbation infinitésimale, donne une condition suffisante d'instabilité ; l'état étudié est linéairement stable ou instable. En effet, même si un état peut être stable vis-à-vis d'une perturbation infinitésimale, il ne l'est peut être pas à l'égard d'une perturbation d'amplitude finie (analyse non linéaire). Néanmoins l'analyse linéaire permet d'obtenir les seuils d'instabilités primaires, les nombres d'ondes et les fréquences des structures bifurquées. Pour le problème de la convection des fluides viscoléastiques, le système (5.11) avec les conditions aux limites (5.12) - (5.13), dépend de trois paramètres :

- le nombre de Rayleigh Ra
- Le coefficient de relaxation λ_1
- Du rapport $\Gamma = \lambda_2/\lambda_1$

Une solution stationnaire simple du système (5.11) avec les conditions aux limites (5.12) et (5.13) peut être trouvée et ce quel que soit Ra , λ_1 , Γ , c'est la solution de conduction définie par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = w_0 = 0, \\ T_B(z) = T_0 = -z. \end{cases} \quad (6.1)$$

En superposant des petites perturbations de la vitesse u_0, v_0 et w_0 , de la température T_0 à la solution de base, on peut écrire :

$$\begin{cases} u = u_0 + \epsilon u_1(x, y, z, t), \\ v = v_0 + \epsilon v_1(x, y, z, t), \\ w = w_0 + \epsilon w_1(x, y, z, t), \\ T = T_0 + \epsilon T_1(x, y, z, t). \end{cases} \quad (6.2)$$

Le système est limité suivant y et z et considéré comme infini, homogène et isotrope dans la direction x avec des conditions aux limites qui sont indépendantes de x et t . Dans ces conditions, on peut chercher les u, v, w, T sous la forme de mode de Fourier suivant x et oscillant dans le temps à la fréquence ω . Les solutions des perturbations dans (6.2) sont recherchées sous la forme :

$$\begin{cases} u_1 = e^{(ikx - i\omega t)} \cos\left(\frac{L\pi}{a}y\right) \tilde{u}(z) + C.C, \\ v_1 = e^{(ikx - i\omega t)} \sin\left(\frac{L\pi}{a}y\right) \tilde{v}(z) + C.C, \\ w_1 = e^{(ikx - i\omega t)} \cos\left(\frac{L\pi}{a}y\right) \tilde{w}(z) + C.C, \\ T_1 = e^{(ikx - i\omega t)} \cos\left(\frac{L\pi}{a}y\right) \tilde{T}(z) + C.C. \end{cases} \quad (6.3)$$

avec

$$\tilde{T}(z) = \sum_{n=1}^N \theta_n \cos[(n-1)\pi z] \quad \text{et} \quad \tilde{w}(z) = \sum_{n=1}^N w_n \sin(n\pi z). \quad (6.4)$$

Où $C.C$ est le complexe conjugué, θ_n et w_n sont les amplitudes des perturbations, k est le nombre d'onde dans la direction de ox , alors que L est un entier. Le cas $L = 0$ correspond à des rouleaux transversaux (d'axe perpendiculaire à la direction de ox) et $k = 0$ caractérise les structures convectives prenant la forme de L rouleaux longitudinaux (d'axe parallèle à ox). Lorsque $k \neq 0$ et $L \neq 0$, on obtient un mode complètement tridimensionnel.

En injectant la forme de la perturbation (6.3) dans le système obtenu avec (6.2) dans (5.11), cela conduit après linéarisation à un système vérifié par les perturbations :

$$\begin{cases} (1 - i\omega\Gamma\lambda_1)(D^2 - k^2 - \frac{L^2\pi^2}{a^2})\tilde{w} + Ra(1 - i\omega\lambda_1)(k^2 + \frac{L^2\pi^2}{a^2})\tilde{T} = 0, \\ -i\omega\tilde{T} - \tilde{w} - (D^2 - k^2 - \frac{L^2\pi^2}{a^2})\tilde{T} = 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

avec $D = \frac{d}{dz}$.

Le problème aux valeurs propres (6.5) est résolu numériquement en utilisant le développement (6.4) jusqu'à un ordre N , suffisamment grand pour assurer la convergence. Ceci étant, le problème peut être résolu analytiquement pour $N=1$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -(1 - i\omega\Gamma\lambda_1)(\pi^2 + k^2 + \frac{L^2\pi^2}{a^2})\sin(\pi z)w_1 + Ra(1 - i\omega\lambda_1)(k^2 + \frac{L^2\pi^2}{a^2})\theta_1 = 0, \\ -i\omega\theta_1 - w_1\sin(\pi z) + (k^2 + \frac{L^2\pi^2}{a^2})\theta_1 = 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

On multiplie la première équation du système (6.6) par $\sin(\pi z)$ et la seconde par 1 et on les intègre de 0 à 1. Après intégration on obtient :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(1 - i\omega\Gamma\lambda_1)(\pi^2 + k^2 + \frac{L^2\pi^2}{a^2}) & \frac{2}{\pi} Ra(k^2 + \frac{L^2\pi^2}{a^2})(1 - i\omega\lambda_1) \\ -\frac{2}{\pi} & (k^2 + \frac{L^2\pi^2}{a^2} - i\omega) \end{bmatrix}}_{\kappa} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}}_{\kappa_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Le système (6.7) admet une solution non triviale ($\kappa_1 \neq 0$) si et seulement si $\det(\kappa) = 0$. Cela conduit à une relation de dispersion reliant k et ω qui s'écrit :

$$\begin{aligned} -(1 - i\omega\Gamma\lambda_1)(\pi^2 + k^2 + \frac{L^2\pi^2}{a^2})(k^2 + \frac{L^2\pi^2}{a^2} - i\omega) \\ + \frac{8}{\pi^2} Ra(k^2 + \frac{L^2\pi^2}{a^2})(1 - i\omega\lambda_1) = 0, \end{aligned} \quad (6.8)$$

En toute généralité $k = k_r + ik_i \in \mathbb{C}$ et $\omega = \omega_r + i\omega_i \in \mathbb{C}$, avec l'interprétation suivante :

1. $\Re(k) = k_r$: nombre d'onde,
 $-\Im(k) = -k_i$: taux de croissance spatiale (à un temps fixé t , lorsque $k_i < 0$ l'instabilité s'amplifie dans l'espace pour $x > 0$ sinon elle s'amortit).
2. $\Re(\omega) = \omega_r$: fréquence de l'onde,
 $\Im(\omega) = \omega_i$: taux de croissance temporelle (à une position fixée. Lorsque $\omega_i > 0$ l'instabilité s'amplifie sinon elle s'amortit).

Deux approches de stabilité linéaire peuvent être adopter. Lorsque la perturbation est supposée être étendue dans tout le système, une approche temporelle est suffisante. En revanche, la réponse du système à une perturbation localisée nécessite une analyse

spatio-temporelle.

Comme l'écoulement n'est pas tout le temps instable, on s'intéresse pour l'instant à la naissance des premiers modes déstabilisant la solution de conduction. Pour cela, dans la suite du travail on va s'intéresser à l'approche temporelle de la stabilité primaire. Elle consiste à étudier l'évolution temporelle de la perturbation en supposant :

$$k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \omega \in \mathbb{C}.$$

Lorsque la perturbation n'est ni amplifiée, ni atténuée, nous sommes dans les conditions de stabilité marginale qui sont atteintes pour :

$$\omega_i = 0.$$

Dans ce cas ω_r contrôle le reste de la dépendance temporelle :

- $\omega_r = 0$, une instabilité stationnaire s'installe.
- $\omega_r \neq 0$, le comportement oscillatoire apparaît.

6.1.1 Stabilité vis-à-vis des rouleaux transversaux $L=0$

Caractéristiques linéaires de l'instabilité stationnaire

On peut dès lors calculer les seuils critiques du nombre de Rayleigh Ra et du nombre d'onde k . En tenant compte du fait que nous sommes au seuil marginal ($\omega_i = 0$) et que $\omega_r = 0$, on injecte ces deux conditions dans la relation de dispersion (6.8). Il nous vient automatiquement :

$$Ra^s = \frac{\pi^2}{8}(\pi^2 + k^2). \quad (6.9)$$

On notera toutefois que le seul paramètre de contrôle est ici le nombre de Rayleigh Ra^s lequel dépend exclusivement de k . On remarque que le Ra^s ne dépend pas du coefficient de relaxation λ_1 et de Γ .

Pour déterminer le mode qui se déstabilise en premier (mode le plus instable), on doit calculer le nombre d'onde qui minimise le paramètre de contrôle Ra^s . La valeur du nombre d'onde critique est obtenue en imposant :

$$\frac{\partial Ra^s}{\partial k} = 0 \quad \implies \quad k_c^s = 0, \quad (6.10)$$

ce qui donne :

$$Ra_c^s = \frac{\pi^4}{8} = 12.176 \quad \text{et} \quad k_c^s = 0.$$

Au premier mode ($N = 1$), nous venons de trouver un nombre de Rayleigh critique qui est approximativement égale à 12, résultat trouvé par Nield (1968) [10].

Caractéristiques linéaires de l'instabilité oscillatoire

La valeur du nombre de Rayleigh Ra dans le cas de l'instabilité oscillatoire est obtenue en posant $\omega_r \neq 0$ dans la relation de dispersion (6.8). On sépare la partie réelle de la partie imaginaire de l'équation de dispersion. On a :

$$\begin{cases} -k^2(k^2 + \pi^2) + \frac{8}{\pi^2} Ra^{osc} k^2 + \omega^2 \lambda_2(k^2 + \pi^2) = 0, \\ -i \omega(-(k^2 + \pi^2) - \lambda_2 k^2(k^2 + \pi^2) + \frac{8}{\pi^2} k^2 Ra^{osc} \lambda_1) = 0. \end{cases} \quad (6.11)$$

La première équation du système (6.11) conduit à :

$$Ra^{osc} = \frac{\pi^2}{8 \lambda_1 k^2} [(k^2 + \pi^2) + \lambda_2 k^2(k^2 + \pi^2)].$$

La valeur du nombre d'onde critique est obtenue en imposant :

$$\frac{\partial Ra^{osc}}{\partial k} = 0 \quad \Longrightarrow \quad k_c^4 = \frac{\pi^2}{\lambda_1 \Gamma} \quad (6.12)$$

$$Ra_c^{osc} = \frac{\pi^2}{8 \lambda_1} (1 + \pi \sqrt{\lambda_1 \Gamma})^2. \quad (6.13)$$

Restons toujours avec le système (6.11) qui donne à partir de ces deux équations :

$$\omega^2 \lambda_2 (k^2 + \pi^2) = k^2 (k^2 + \pi^2) - \frac{(k^2 + \pi^2) + \lambda_2 k^2 (k^2 + \pi^2)}{\lambda_1}, \quad (6.14)$$

après réarrangement et sachant que $0 < \lambda_2 < \lambda_1$:

$$\omega^2 = \frac{1}{\lambda_1^2 \Gamma} [k^2 (\lambda_1 - \lambda_1 \Gamma) - 1] > 0. \quad (6.15)$$

Le mode avec une fréquence ω^+ (ω^-) correspond à une onde progressive descendante (montante).

$$\Longrightarrow k^2 (\lambda_1 - \lambda_1 \Gamma) - 1 > 0 \Longrightarrow k^2 > \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_1 \Gamma} \quad (6.16)$$

$$k_c^2 = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1 \Gamma}} > \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_1 \Gamma}, \quad (6.17)$$

$$\Longrightarrow \pi > \frac{\sqrt{\lambda_1 \Gamma}}{\lambda_1 - \lambda_1 \Gamma}, \quad (6.18)$$

$$\Longrightarrow \pi^2 \lambda_1^2 (1 - \Gamma)^2 - \lambda_1 \Gamma > 0, \quad (6.19)$$

or $\lambda_1 > 0$, on peut diviser par λ_1

$$\implies \pi^2 \lambda_1 (1 - \Gamma)^2 - \Gamma > 0, \quad (6.20)$$

On obtient alors la condition d'existence d'une instabilité oscillatoire :

$$\lambda_1 > \frac{\Gamma}{\pi^2 (1 - \Gamma)^2} = \lambda_1^*. \quad (6.21)$$

Supposons qu'elle soit vérifiée. Pour que l'instabilité oscillatoire se déclenche en premier, il faut en plus de l'existence que $Ra_c^{osc} < Ra_c^s$. C'est-à-dire

$$\frac{\pi^2}{8 \lambda_1} (1 + \pi \sqrt{\lambda_1 \Gamma})^2 < \frac{\pi^4}{8} \implies \lambda_1 > \frac{1}{\pi^2 (1 - \sqrt{\Gamma})^2} = \lambda_1^{**}. \quad (6.22)$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'instabilité oscillatoire se manifeste avant l'instabilité stationnaire est :

$$\lambda_1 > \sup(\lambda_1^*, \lambda_1^{**}). \quad (6.23)$$

L'opération $\pi^2 \lambda_1^* - \pi^2 \lambda_1^{**}$, donne une équation du second degré dont la différence est négative quel que soit Γ , montrant ainsi que $\lambda_1^{**} > \lambda_1^*$. Ainsi l'instabilité oscillatoire se manifeste avant l'instabilité stationnaire (voir figure (6.1)) si :

$$\lambda_1 > \lambda_1^{**} = \frac{1}{\pi^2 (1 - \sqrt{\Gamma})^2}. \quad (6.24)$$

La courbe de la figure (6.1) représente, dans le plan (Γ, λ_1) , la frontière qui sépare la zone des paramètres où l'instabilité est stationnaire de celle où elle est oscillatoire. Cette figure montre bien que l'étendue de la région où se produit une bifurcation de Hopf est moins large que celle où le système observe une transition vers une instabilité stationnaire.

Pour le mode $N = 5$, le nombre de Rayleigh converge vers $Ra = 12.009$.

Nous avons représenté sur la figure (6.3a), les deux seuils Ra_c^{osc} et Ra_c^s en fonction du temps de relaxation λ_1 pour différentes valeurs de Γ . Le résultat très important dans cette courbe concerne principalement l'effet déstabilisant du temps de relaxation λ_1 et l'effet stabilisant de Γ . La figure (6.3b) illustre la dépendance de la fréquence critique vis-à-vis de λ_1 pour différentes valeurs de Γ .

6.1.2 Stabilité vis-à-vis des rouleaux longitudinaux $k=0$

La figure (6.4) montre l'influence du rapport de forme a suivant l'axe y sur le nombre de Rayleigh critique pour différents nombres de rouleaux longitudinaux (L). On note que l'augmentation des nombres de rouleaux stabilise le système et que l'augmentation

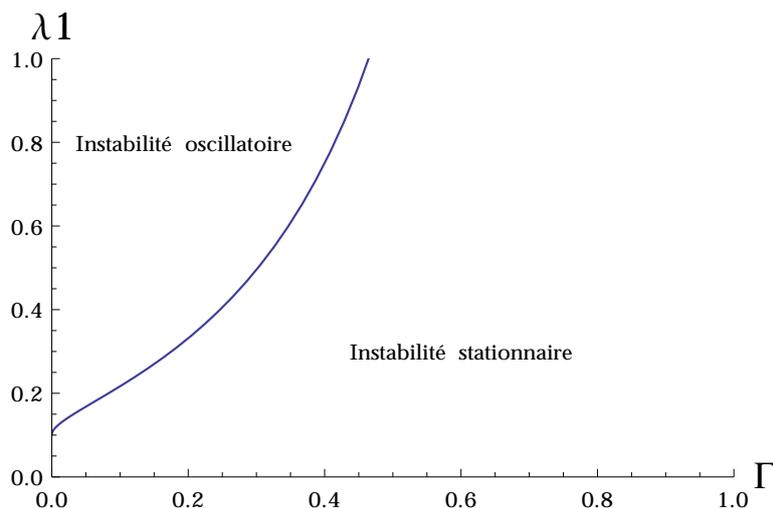


FIGURE 6.1 – Région dans le plan (Γ, λ_1) où le déclenchement de l'instabilité se produit en mode stationnaire ou oscillatoire.

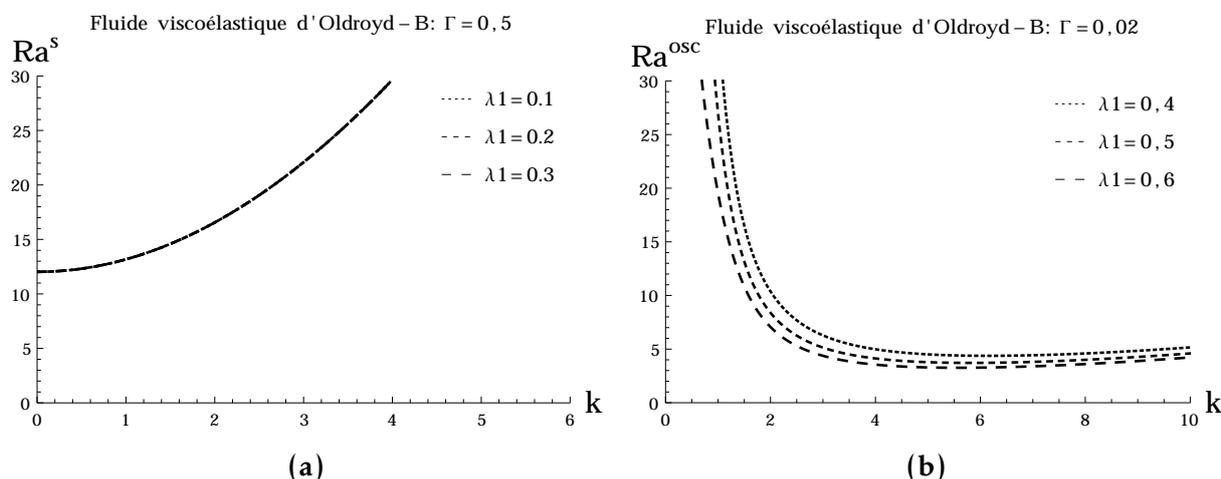


FIGURE 6.2 – Courbe de stabilité marginale dans le cas des rouleaux transversaux avec $N = 5$: 6.2a régime stationnaire ; 6.2b régime oscillatoire.

du rapport de forme a déstabilise le système avec un Rayleigh critique qui tend vers 12 quand le rapport de forme a tend vers l'infini. Ce résultat est en bon accord avec les travaux de Nield (1968) [10]. La figure (6.5a) confirme les résultats sur le rôle joué par le temps de relaxation. En effet, les seuils d'apparition des structures oscillatoires sont inférieurs à 12, valeur seuil pour le cas des structures stationnaires. On retrouve bien que le temps de relaxation joue un rôle déstabilisant dans le système, et que le rapport Γ joue un rôle stabilisant (voir figure (6.5b)).

L'étude d'instabilité primaire effectuée dans cette partie, montre que sur un large domaine dans le plan (Γ, λ_1) que l'on désigne par régime de fluide faiblement viscoélastique, une instabilité stationnaire domine le mode de convection. Cette instabilité est à grande longueur d'onde, c'est-à-dire à nombre d'onde critique nul. Dans ce cas on peut utiliser l'approximation d'écoulement parallèle et trouver la solution convective non

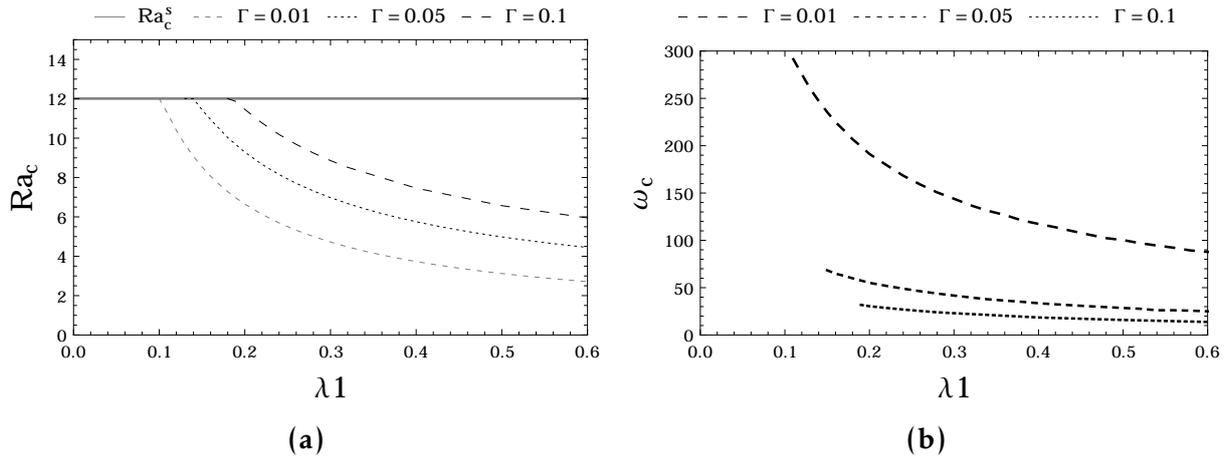


FIGURE 6.3 – Dépendance du nombre de Rayleigh critique 6.3a et de la fréquence critique 6.3b pour les instabilités stationnaire et oscillatoire en fonction de λ_1 pour différentes valeurs de Γ dans le cas des rouleaux transversaux avec $N = 5$.

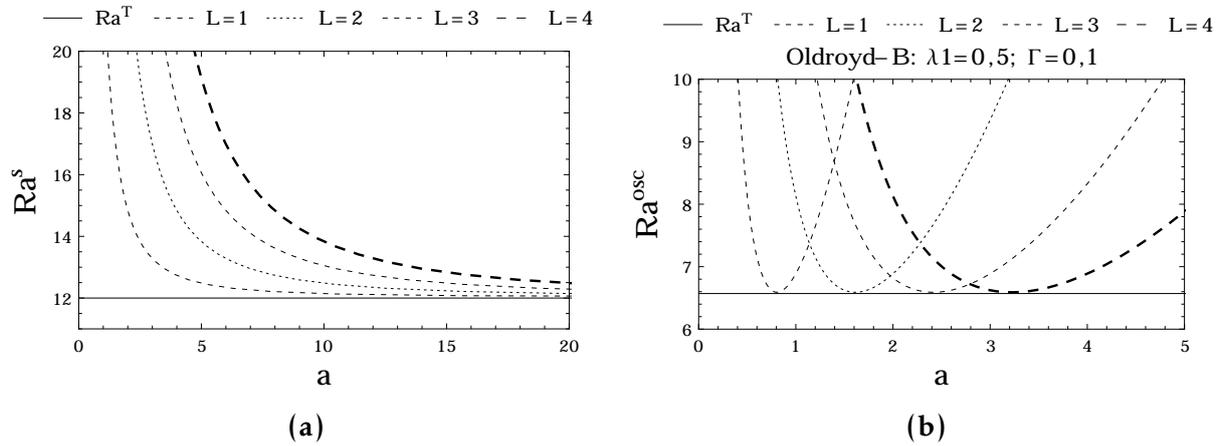


FIGURE 6.4 – Influence du rapport de forme a sur le nombre de Rayleigh pour les rouleaux longitudinaux : 6.4a les structures stationnaires et 6.4b dans le cas des structures oscillatoires.

linéaire. Dans la suite du travail, nous allons déterminer analytiquement cette solution non linéaire et étudier ensuite sa stabilité.

6.2 Convection monocellulaire

6.2.1 Approximation d'écoulement parallèle

Lorsque la couche poreuse présente un grand rapport de forme ($L^* \gg H$, voir figure (6.6)), la vitesse au centre de la cavité devient parallèle à l'axe des x . Autrement dit, la vitesse devient fonction de la coordonnée z seulement. Elle s'écrit alors :

$$u(x, z) = u(z) = u_0. \quad (6.25)$$

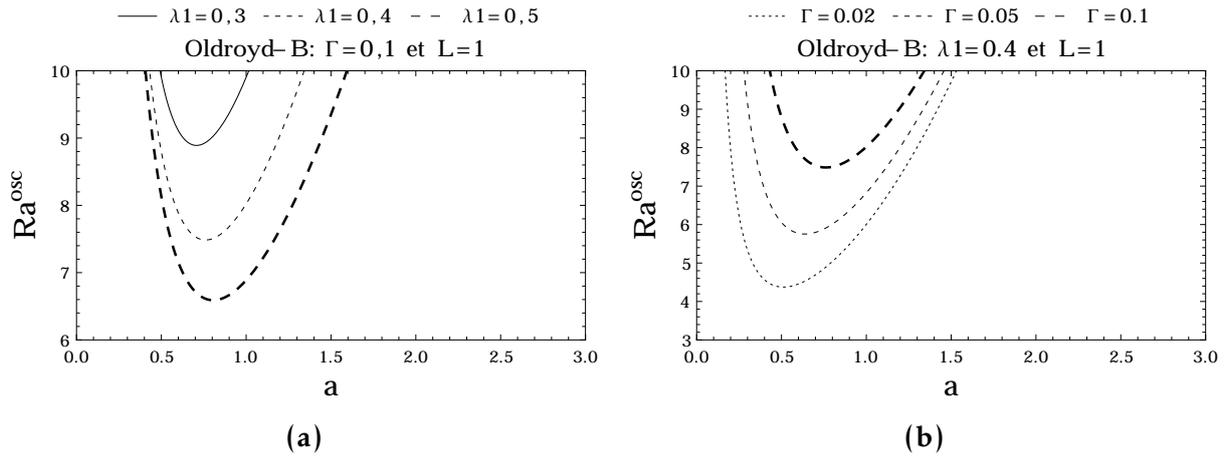


FIGURE 6.5 – Influence du rapport de forme a sur le nombre de Rayleigh pour les rouleaux longitudinaux dans le cas des structures oscillatoires.



FIGURE 6.6 – Configuration du domaine physique : milieu poreux saturé d'un fluide viscoélastique.

Le profil de la température devient la somme d'un terme définissant une variation linéaire en x et d'une fonction dépendante de z :

$$T(x, z) = T_0 = C_T x + \Theta(z). \quad (6.26)$$

L'amplitude de la convection est proportionnelle à C_T .

L'équation de la quantité de mouvement du système (5.10) suivant les composantes de la vitesse dans la zone où se déroule l'instabilité stationnaire s'écrivent :

$$u = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad (6.27)$$

$$w = -\frac{\partial P}{\partial z} + RaT. \quad (6.28)$$

En faisant la différence des équations obtenues après la dérivée de (6.27) par rapport

à z et celle de (6.28) par rapport à x , on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = -Ra \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (6.29)$$

Injectons l'expression (6.26) dans l'équation (6.29), on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -RaC_T. \quad (6.30)$$

En substituant (6.26) dans l'équation de l'énergie du système (5.10), cette dernière prend la forme :

$$\frac{d^2\Theta}{dz^2} = C_T u. \quad (6.31)$$

L'intégration de l'équation (6.30) donne :

$$u(z) = -RaC_T z + \mathcal{A}. \quad (6.32)$$

En remplaçant l'équation (6.32) dans (6.31) et après intégration, on obtient :

$$\frac{d\Theta}{dz} = -\frac{1}{2}RaC_T^2 z^2 + \mathcal{A}C_T z + \mathcal{B}. \quad (6.33)$$

En tenant compte des conditions aux frontières pour la température, on trouve :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}RaC_T$$

$$\mathcal{B} = -1,$$

d'où

$$u(z) = \frac{1}{2}RaC_T(1 - 2z), \quad (6.34)$$

$$\frac{d\Theta}{dz} = \frac{1}{2}RaC_T^2(z - z^2) - 1. \quad (6.35)$$

La condition $\Theta(z)$ nulle en $z = \frac{1}{2}$, nous permet de trouver l'expression :

$$\Theta(z) = \frac{1}{2}RaC_T^2\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{1}{12}\right) - z + \frac{1}{2}. \quad (6.36)$$

La température (6.26) devient alors égale à :

$$T(x, z) = C_T x + \frac{1}{2}RaC_T^2\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{1}{12}\right) - z + \frac{1}{2}. \quad (6.37)$$

Evaluation de C_T

La constante C_T définie comme étant le gradient de température horizontal, peut être déterminée en intégrant l'équation d'énergie sur le volume de contrôle montré sur la figure (6.6), tout en tenant compte des conditions aux frontières. L'intégration de l'équation de l'énergie dans le système (5.10) sur le volume de contrôle conduit après manipulation à l'expression suivante :

$$\int_0^1 \frac{\partial T}{\partial x} dz = \int_0^1 u T dz. \quad (6.38)$$

En substituant l'expression de la vitesse $u(z)$ et de la température $T(x,z)$ dans l'équation (6.38), on obtient :

$$C_T = \frac{1}{2} Ra C_T \int_0^1 [x(1-2z) + \frac{1}{2} Ra C_T^2 (\frac{1}{2} z^2 - \frac{4}{3} z^3 + \frac{2}{3} z^4) - (z - z^2)] dz. \quad (6.39)$$

Après calcul de cette intégrale, on tire l'expression de C_T :

$$C_T = \sqrt{\frac{10}{Ra} (1 - \frac{12}{Ra})}. \quad (6.40)$$

Lorsque le nombre de Rayleigh est supérieur à 12, on a naissance de la convection. Le seuil critique du déclenchement de la convection est égale à 12, résultat identique à celui de Nield (1968) [10] déterminé par une analyse de stabilité linéaire.

6.3 Transfert de chaleur

L'expression du Nombre de Nusselt (5.14), s'écrit avec le champ de température (6.37) :

$$Nu(x) = \frac{q}{\lambda^* \Delta T / H} = \frac{1}{T(x,0) - T(x,1)}. \quad (6.41)$$

Avec :

$$\begin{cases} T(x,0) = -\frac{Ra C_T^2}{24} + \frac{1}{2} \\ T(x,1) = \frac{Ra C_T^2}{24} - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (6.42)$$

En substituant l'équation (6.42) dans l'équation (6.41), le taux de transfert de chaleur Nu peut s'écrire :

$$Nu = \frac{1}{\frac{10}{Ra} + \frac{1}{6}}. \quad (6.43)$$

6.4 Comparaison avec la simulation numérique

Nous allons utiliser la méthode des différences finies pour discrétiser les équations qui gouvernent le problème (cf. annexe A). Le système physique est discrétisé en utilisant un maillage uniforme suivant les deux directions de l'espace en un nombre fini de points appelés noeuds. Chaque noeud est identifié par un couple d'indice (i, k) pour étudier le problème bidimensionnel. On pourra calculer alors sur chaque noeud les valeurs de la température et de la vitesse ou fonction de courant, en résolvant les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \vec{V} = 0, \\ (1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}) \vec{V} = (1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}) (-\nabla P + Ra T \vec{e}_z), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T = \nabla^2 T. \end{array} \right. \quad (6.44)$$

L'équation de la quantité de mouvement est résolue par la méthode S.O.R (Successive Over Relaxation), proposée par Frankel [11]. L'équation de l'énergie, est discrétisée avec un schéma centré de deuxième ordre et résolue par la méthode des directions alternées avec l'algorithme de Thomas. Pour chaque pas de temps, la méthode implicite aux directions alternées ADI donne lieu à un système matriciel tridiagonal à résoudre.

6.4.1 Etablissement d'écoulement de la convection monocellulaire

En utilisant les équations (6.44), on obtient l'établissement de la convection monocellulaire pour des nombres de Rayleigh supérieur à 12. Les lignes de courant sont parallèles à l'axe des x et la vitesse u ne dépend que de z comme prévu dans la partie analytique. La figure (6.7) montre l'évolution au cours du temps, des champs de vitesse et de température. Il faut souligner que la vitesse est nulle à l'état initiale. Pour des nombres de Rayleigh inférieure à 12, nous avons l'état de conduction. Quand le nombre de Rayleigh augmente, des rouleaux se forment ayant comme hauteur, la dimension verticale de la couche poreuse. Ces rouleaux fusionnent pour former progressivement des rouleaux allongés horizontalement jusqu'à la formation d'une structure convective monocellulaire. Notons que le fluide viscoélastique atteint beaucoup plus rapidement la configuration monocellulaire que le fluide Newtonien.

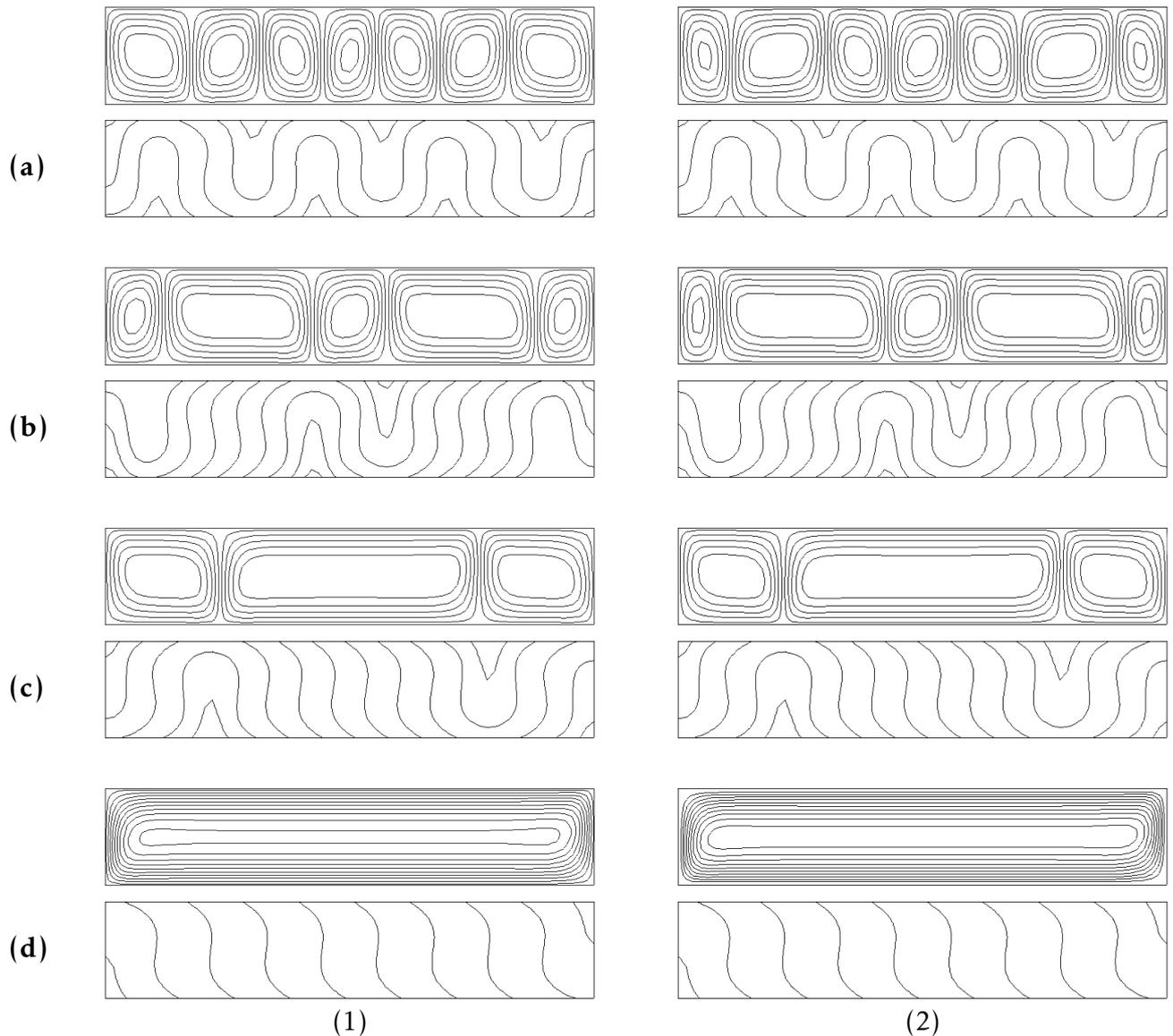


FIGURE 6.7 – Evolution vers le régime monocellulaire ($Ra=100$, $A=10$, (1) fluide Newtonien et (2) fluide viscoélastique $\Gamma = 0.75$ et $\lambda = 0.1$): (a) $t=40$, (b) $t=100$, (c) $t=180$, (d) $t=220$.

6.4.2 Validation du code numérique

Les résultats de Kimura et al [17] obtenus pour une cavité poreuse rectangulaire de rapport de forme $A = 4$, soumis à un flux de chaleur constant et saturé par un fluide Newtonien, ont été utilisés comme référence pour valider le code numérique. Les résultats numériques obtenus dans notre étude de même que les résultats de Kimura et al [17] sont regroupés dans le tableau (6.1) pour différents nombres de Rayleigh ($Ra = 100, 200, 400, 500, 600, 700$). La comparaison entre les résultats du tableau (6.1) montre des erreurs variant entre 0.5% et 1% pour la fonction de courant maximum et entre 0.6% et 5% pour le nombre de Nusselt. Ces résultats montrent une bonne concordance.

Ra	Présente étude Numerique		Kimura et al (1995) [17]	
	Nu	ψ_{max}	Nu	ψ_{max}
100	3.5661	3.7342	3.544	3.756
200	4.2258	5.4215	4.367	5.467
400	4.7260	7.7212	4.946	7.828
500	4.8491	8.6517	5.086	8.764
600	5.0154	9.5214	5.188	9.600
700	5.0361	10.2674	5.266	10.360

TABLEAU 6.1 – Comparaison des résultats numériques obtenus par la présente étude avec ceux obtenus par Kimura et al [17] avec $A = 4$.

6.4.3 Influence du nombre de Rayleigh sur la convection monocellulaire et comparaison avec la solution analytique

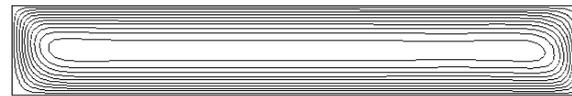
On montre une série de fonction de courant et des isothermes sur la figure (6.8) aux différents nombres de Rayleigh (60, 150, 400). La structure de l'écoulement des lignes de courant ψ est quasi identique dans ces trois cas représentés. Les rouleaux observés au cours du temps se réorganisent pour donner un écoulement monocellulaire parallèle dans la région centrale de la cavité. On peut remarquer aussi que l'intensité de l'écoulement ψ_{max} croît avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.

Les isothermes montrent une différence qualitative très nette pour les différents nombres de Rayleigh. Ces isothermes deviennent plus tordues au fur à mesure que le nombre de Rayleigh augmente.

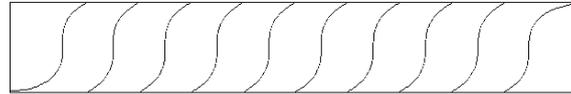
Les figures (6.9), (6.10) et (6.11) illustrent respectivement l'influence du nombre de Rayleigh, sur les distributions des profils de la température T , de la fonction de courant ψ et de la vitesse horizontale u , obtenues en fonction des différents nombres de Rayleigh ($Ra=65, 100, 300$). Les résultats montrent une bonne concordance entre les solutions numériques et analytiques.

La distribution de la température T , présentée dans la figure (6.9) montre l'atténuation de la température avec l'axe horizontal de la couche poreuse et avec l'augmentation du nombre de Rayleigh Ra . Ces résultats peuvent être expliqués par le mouvement convectif à l'intérieur de la cavité comme on peut observer que les profils de température ont des pentes constantes aux parois, dues aux conditions imposées aux frontières. Ces profils de températures montrent un point d'inflexion à $z = 1/2$. Ils deviennent plus tordus avec l'augmentation du nombre de Rayleigh Ra . Kimura et al [17] ont rapporté la même observation.

La figure (6.10) illustre que l'écoulement est renforcé au centre de la couche poreuse avec une valeur maximale de la fonction de courant ψ . On peut remarquer aussi que l'intensité de l'écoulement croît avec l'augmentation du nombre de Rayleigh Ra . La

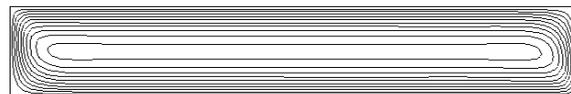


$$\psi_{max} = 2.7363$$



$$T_{max} = 2.5742, \quad T_{min} = -1.5925$$

(a)

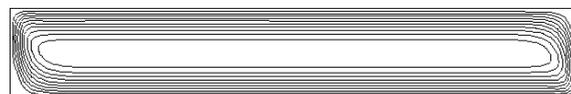


$$\psi_{max} = 4.6395$$



$$T_{max} = 1.9339, \quad T_{min} = -0.9321$$

(b)



$$\psi_{max} = 7.7589$$



$$T_{max} = 1.4328, \quad T_{min} = -0.4342$$

(c)

FIGURE 6.8 – Influence du nombre de Ra sur les lignes de courant et les isothermes : (6.8a) Ra=60 ($Nu = 2.9866$); (6.8b) Ra=150 ($Nu = 4.2855$); (6.8c) Ra=400 ($Nu = 5.1105$).

même observation est faite dans la discussion de la figure (6.8).

Rappelons que le milieu poreux est modélisé par la loi de Darcy généralisée. La condition de glissement du fluide sur les parois est imposée. Dans la figure (6.11) on observe cette condition avec le profil linéaire de la vitesse horizontale u dont la valeur absolue est maximale aux parois horizontales. On remarque aussi que la vitesse horizontale u croît avec l'augmentation de nombre de Rayleigh Ra .

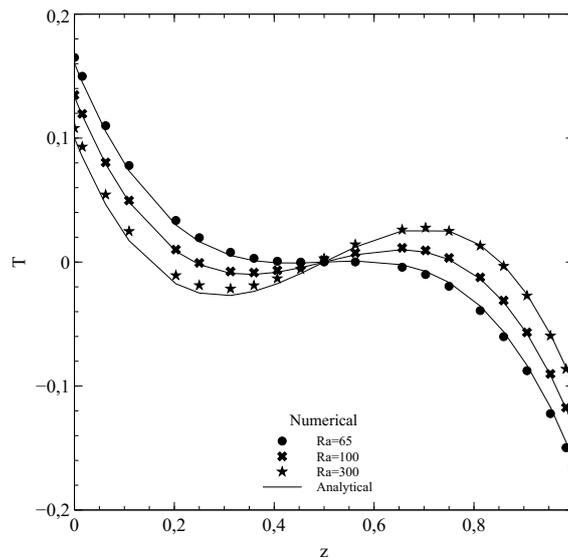


FIGURE 6.9 – Influence du nombre de Rayleigh Ra sur la distribution de la température $T(z)$

On représente sur la figure (6.12) la variation du taux de transfert de chaleur Nu en fonction du nombre de Rayleigh Ra . Lorsque le régime permanent est atteint, une très bonne concordance entre les solutions analytique et numérique est observée. Un léger écart entre le nombre de Nusselt analytique et numérique est observé pour des valeurs élevées du nombre de Rayleigh. Le nombre de Nusselt commence à croître à partir de $Ra_{cr1} = 12$, valeur critique de la naissance de l'instabilité primaire et retrouvé par Kimura et al [17]. Pour des valeurs élevées du nombre de Rayleigh, le nombre de Nusselt tend vers une valeur asymptotique. Ce comportement s'explique par le fait que la variation de température entre les parois horizontales devient presque constante.

L'évolution de l'intensité du flux ψ en fonction du nombre de Rayleigh Ra en régime permanent est représenté sur la figure (6.13). Un excellent accord entre les solutions analytique et numérique est observée. On remarque aussi que l'intensité du flux croît avec le nombre de Rayleigh. Cette augmentation commence avec la valeur de Rayleigh qui caractérise le début du mouvement convectif à l'intérieur de la cavité, ou encore le seuil de la convection. Au-dessous de cette valeur de Rayleigh critique ($Ra_{cr1} < 12$), l'intensité du courant à l'intérieur de la couche poreuse est nulle et le fluide est au repos. On a affaire à un régime de conduction pure.

Le code développé pour résoudre les équations régissant le problème a été validé en prenant comme référence nos résultats analytiques et certaines études numériques disponibles dans la littérature. Les résultats de Kimura et al [17] obtenus pour une cavité poreuse rectangulaire de rapport de forme $A = 4$, soumis à un flux de chaleur constant et saturé par un fluide Newtonien, ont été utilisés comme référence pour valider le code numérique. Les résultats analytiques et numériques obtenus dans notre étude de même que les résultats numériques de Kimura et al [17] sont regroupés dans les tableaux

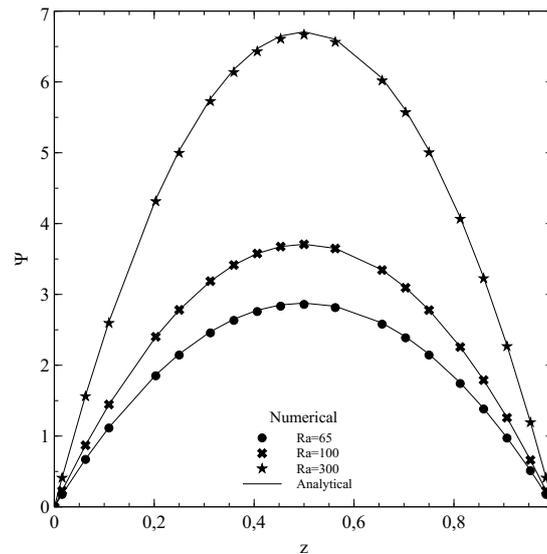


FIGURE 6.10 – Influence du nombre de Rayleigh Ra sur la distribution de la fonction de courant $\psi(z)$

(6.1) et (6.2) pour différents nombres de Rayleigh ($Ra = 100, 200, 400, 500, 600, 700$). La comparaison des valeurs du nombre de Nusselt analytique et numérique dans le tableau (6.2) présente des erreurs variant entre 5 et 10%. Cet écart est justifié par le rapport de forme qui est supposé infini dans le cas analytique alors qu'il est égal à 4 dans le cas numérique. Par contre pour les fonctions de courant maximum un écart variant de 0.5 à 1% est noté.

Ra	Présente étude Analytique		Présente étude Numerique	
	Nu	ψ_{max}	Nu	ψ_{max}
100	3.7500	3.7081	3.5661	3.7342
200	4.6153	5.41987	4.2258	5.4215
400	5.2173	7.78621	4.7260	7.7212
500	5.3571	8.73212	4.8491	8.6517
600	5.4545	9.58514	5.0154	9.5214
700	5.5263	10.3682	5.0361	10.2674

TABLEAU 6.2 – Comparaison des résultats analytiques et numériques obtenus par la présente étude.

La figure (6.15) montre l'évolution du nombre de Nu en fonction du temps pour un nombre de rayleigh égal à 100 et pour $\lambda_1 = 0.10$ et $\Gamma = 0.75$. On peut voir que lorsque le temps est inférieure à 398, le nombre de Nusselt varie entre 3.45 et 3.75 et tend vers une valeur constante à des temps plus élevés.

L'influence du nombre de Rayleigh pour l'établissement de la convection monocellulaire est bien confirmée sur les figures (6.14) et (6.15b). L'augmentation du nombre de Rayleigh accélère l'installation de la convection monocellulaire.

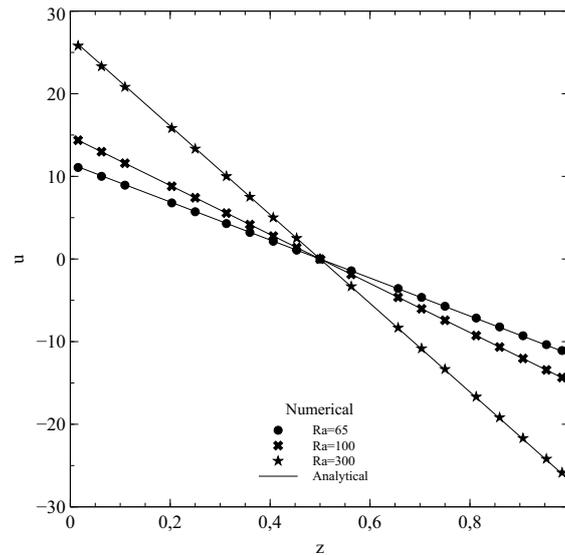


FIGURE 6.11 – Influence du nombre de Rayleigh Ra sur la distribution de la vitesse horizontale $u(z)$.

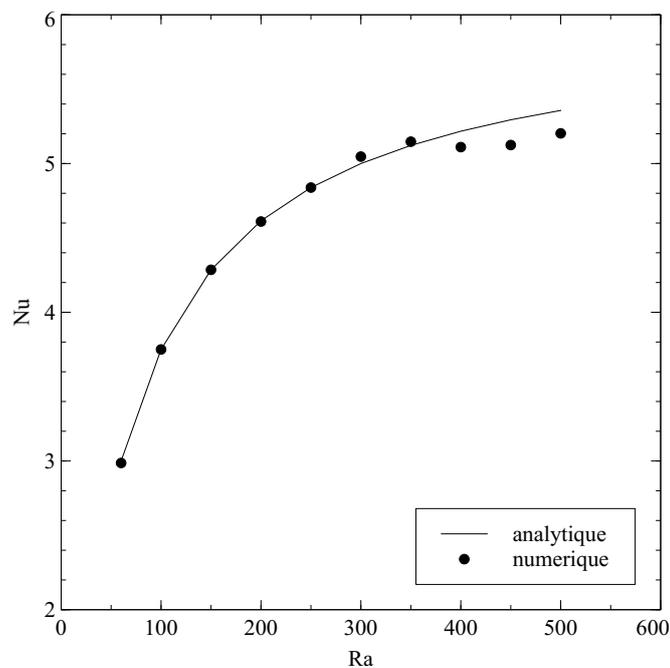


FIGURE 6.12 – L'évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh

6.4.4 Influence des paramètres rhéologiques du fluide viscoélastique

L'effet du rapport Γ qui est égal au rapport du temps de retardation λ_2 et du temps de relaxation λ_1 est illustré sur la figure (6.16) pour un $Ra = 100$. Le même nombre de Nusselt est obtenu dans les trois cas ($\Gamma = 0.45$, $\Gamma = 0.60$ et $\Gamma = 0.70$ pour $\lambda_1 = 0.50$) une fois le régime monocellulaire établi. Dans ce cas étudié, l'influence du rapport Γ sur les valeurs maximales de l'intensité du flux ψ_{max} , de la température T et de la vitesse horizontale u est négligeable. Cependant l'établissement du régime monocellulaire

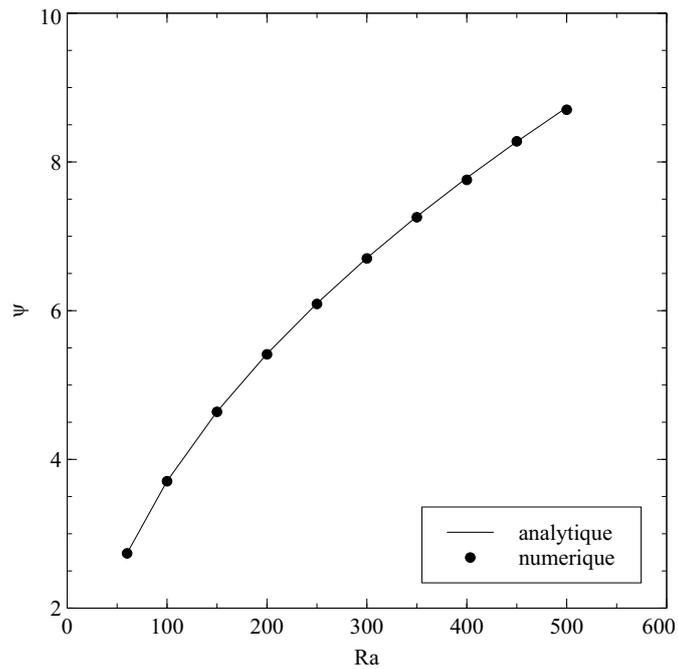


FIGURE 6.13 – L'évolution de la fonction de courant en fonction du nombre de Rayleigh.

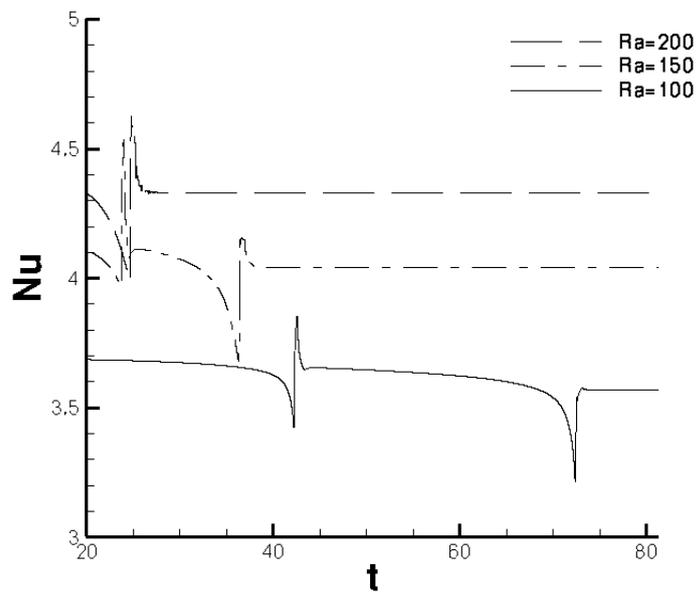
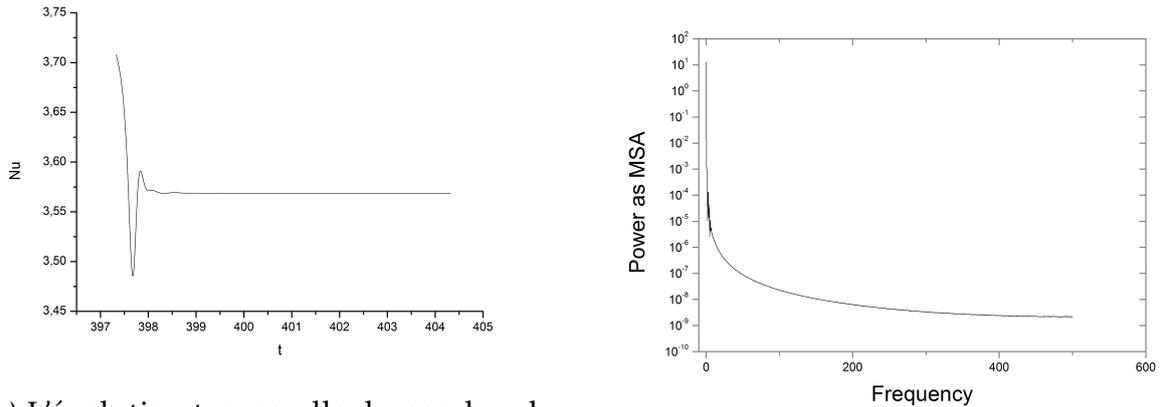


FIGURE 6.14 – Evolution temporelle du nombre de Nusselt pour différent nombre de Rayleigh dans le cas d'une couche poreuse de rapport de forme $A=10$ saturé d'un fluide Oldroyd-B ($\Gamma = 0.50$, $\lambda_1 = 0.50$).



(a) L'évolution temporelle du nombre de Nusselt

(b) Power spectrum du nombre de Nusselt

FIGURE 6.15 – Convection thermique d'un fluide non-Newtonien (Oldroyd-B : $\Gamma = 0.75$ et $\lambda_1 = 0.1$) saturant une couche poreuse de rapport de forme $A=10$ avec $Ra=100$.

prend beaucoup plus de temps avec la diminution de Γ comme le montre la figure (6.16)

L'effet du temp de relaxation λ_1 est aussi étudié dans cette partie. Le même constat que dans le cas de l'influence de Γ est observé sur la figure (6.17). Une fois l'établissement de la convection monocellulaire, le nombre de Nusselt reste sensiblement identique pour ces trois cas. Par contre l'établissement de la convection monocellulaire prend beaucoup plus de temps avec l'augmentation de λ_1 .

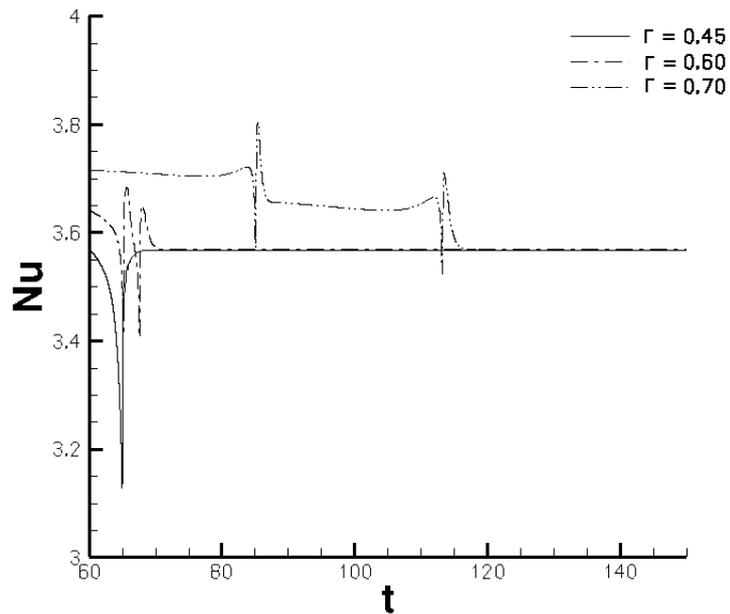


FIGURE 6.16 – Evolution temporelle du nombre de Nusselt pour différent Γ à un $Ra = 100$ dans le cas d'une couche poreuse de rapport de forme $A=10$ saturé d'un fluide Oldroyd-B avec $\lambda_1 = 0.50$.

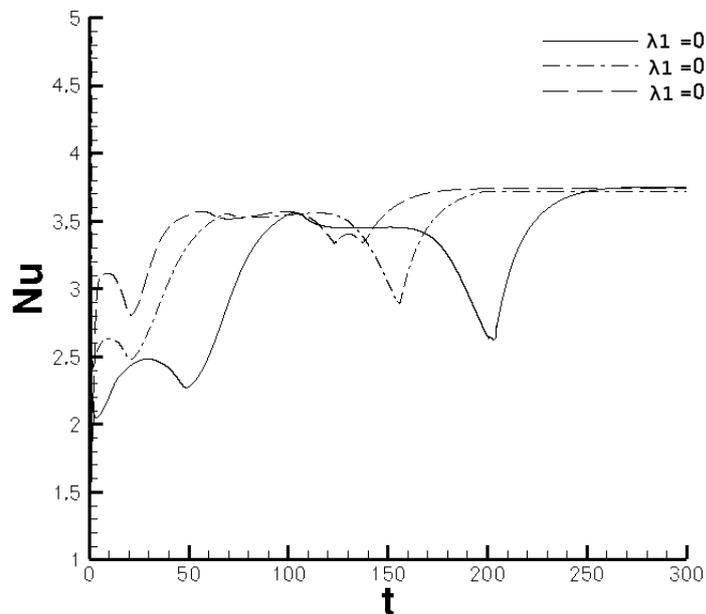


FIGURE 6.17 – Evolution temporelle du nombre de Nusselt pour différent λ_1 à un $Ra = 100$ dans le cas d'une couche poreuse de rapport de forme $A=10$ saturée d'un fluide Oldroyd-B avec $\Gamma = 0.75$.

Bifurcation de Hopf : Transition entre convection monocellulaire et convection multicellulaire

7.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier le problème de stabilité de la solution monocellulaire. Pour cela, il faut étudier comme dans le chapitre précédent l'évolution au cours du temps d'une perturbation infinitésimale, de la solution convective monocellulaire.

7.2 Formulation du problème de stabilité de la convection monocellulaire

La solution de convection monocellulaire a été déterminée au chapitre précédent et s'écrit,

$$\begin{cases} u_0 = u_0(z), \\ v_0 = w_0 = 0, \\ T_B(x, y, z) = C_T x + \Theta(z). \end{cases} \quad (7.1)$$

où

$$C_T = \sqrt{\frac{10}{Ra} \left(1 - \frac{12}{Ra}\right)}. \quad (7.2)$$

$$\Theta(z) = \frac{1}{2} Ra C_T^2 \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{1}{12} \right) - z + \frac{1}{2}. \quad (7.3)$$

$$u(z) = \frac{1}{2}RaC_T(1 - 2z), \quad (7.4)$$

En superposant des petites perturbations à la solution de base, on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u_0(z) + \epsilon u_1(x, y, z, t), \\ v = v_0 + \epsilon v_1(x, y, z, t), \\ w = w_0 + \epsilon w_1(x, y, z, t), \\ T = C_T x + \Theta(z) + \epsilon T_1(x, y, z, t). \end{array} \right. \quad (7.5)$$

Le système est limité suivant y et z et considéré comme infini, homogène et isotrope dans la direction x avec des conditions aux limites qui sont indépendantes de x et t . Dans ces conditions, on peut chercher les perturbations sous la forme de mode de Fourier suivant x et oscillant dans le temps à la fréquence ω ,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = e^{(ikx - i\omega t)} \cos\left(\frac{L\pi}{a}y\right) \tilde{u}(z) + C.C., \\ v_1 = e^{(ikx - i\omega t)} \sin\left(\frac{L\pi}{a}y\right) \tilde{v}(z) + C.C., \\ w_1 = e^{(ikx - i\omega t)} \cos\left(\frac{L\pi}{a}y\right) \tilde{w}(z) + C.C., \\ T_1 = e^{(ikx - i\omega t)} \cos\left(\frac{L\pi}{a}y\right) \tilde{T}(z) + C.C. \end{array} \right. \quad (7.6)$$

avec

$$\tilde{T}(z) = \sum_{n=1}^N \theta_n \cos[(n-1)\pi z] \quad \text{et} \quad \tilde{w}(z) = \sum_{n=1}^N w_n \sin(n\pi z), \quad (7.7)$$

où $C.C$ est le complexe conjugué, θ_n et w_n sont les amplitudes des perturbations, k est le nombre d'onde dans la direction de l'écoulement, alors que L est un entier. Le cas $L = 0$ correspond à des rouleaux transversaux (d'axe perpendiculaire à la direction de l'écoulement moyen) et $k = 0$ caractérise les structures convectives prenant la forme de L rouleaux longitudinaux (d'axe parallèle à la direction de l'écoulement). Lorsque $k \neq 0$ et $L \neq 0$, on obtient un mode complètement tridimensionnel.

En injectant la forme de la perturbation (7.6) dans le système (5.11) linéarisé on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - i\omega\Gamma\lambda_1)(D^2 - k^2 - \frac{L^2\pi^2}{a^2})\tilde{w} + Ra(1 - i\omega\lambda_1)(k^2 + \frac{L^2\pi^2}{a^2})\tilde{T} = 0, \\ -i\omega\tilde{T} + \tilde{w}DT_0 + ik\tilde{T}u_0 - (D^2 - k^2 - \frac{L^2\pi^2}{a^2})\tilde{T} = 0. \end{array} \right. \quad (7.8)$$

avec $D = \frac{d}{dz}$.

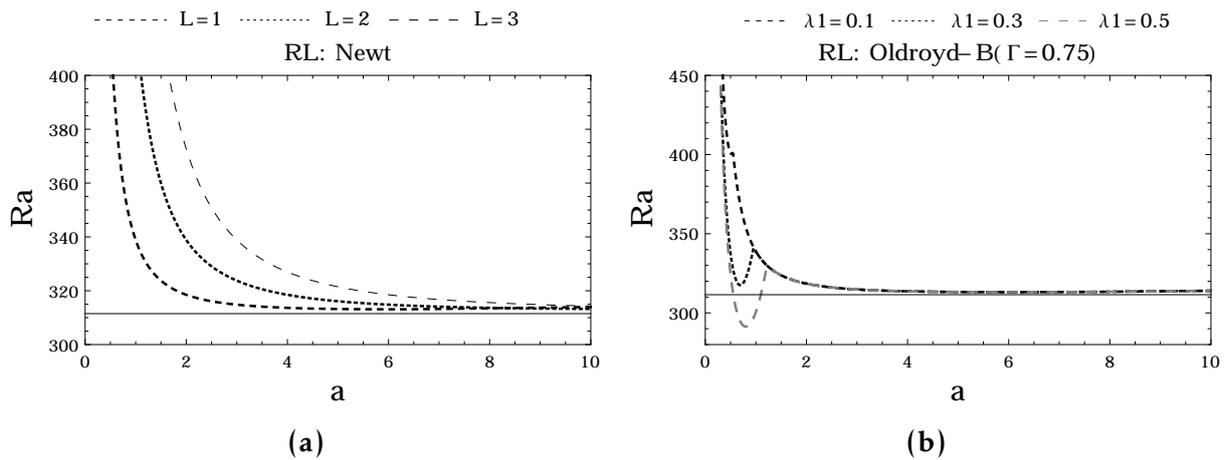


FIGURE 7.1 – Nombre de Ra en fonction du rapport de forme a suivant la direction y et pour différents nombres de rouleaux longitudinaux L ($L = 1, L = 2, L = 3$) dans le cas d'un fluide Newtonien (figure 7.1a) et $L = 1$ dans le cas viscoélastique (figure 7.1b).

7.3 Résolution du problème aux valeurs propres.

7.3.1 Stabilité de la convection monocellulaire vis-à-vis des rouleaux longitudinaux $k=0$

Cas Newtonien

On suppose dans un premier temps que $k = 0$. On s'intéresse donc aux rouleaux dont les axes sont parallèles à la direction principale de l'écoulement. Nous avons résolu le système (7.8) en utilisant (7.7) avec $N = 30$ qui assure une très bonne convergence. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure (7.1a). Quand le rapport de forme a suivant la direction y tend vers l'infini ($a \rightarrow \infty$), le nombre de Rayleigh converge asymptotiquement vers 311.53. Pour un rapport de forme a fini, la figure (7.1a) montre que le nombre de Rayleigh critique croît avec le nombre de rouleaux longitudinaux L , i.e. le mode le plus instable pour $k = 0$ correspondant à une structure longitudinale monocellulaire $L = 1$.

Cas viscoélastique

La même tendance trouvée avec le fluide Newtonien est obtenue avec le fluide viscoélastique (figure 7.1b) quand le rapport de forme a suivant la direction y tend vers l'infini. On note que pour des rapports de forme très petits, le temps de relaxation joue un rôle destabilisant contrairement au cas Newtonien. Le mode le plus instable correspond à un rouleau $L = 1$.

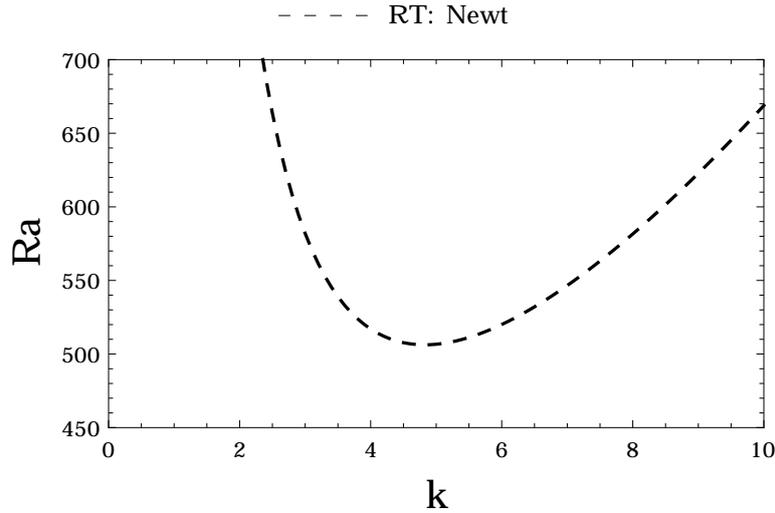


FIGURE 7.2 – Courbe marginale de stabilité de la convection monocellulaire.

7.3.2 Stabilité de la convection monocellulaire vis-à-vis des rouleaux transversaux $L=0$

On s'intéresse ici aux rouleaux dont les axes sont perpendiculaires à la direction de l'écoulement. Le système (7.8) est résolu en utilisant (7.7) et en supposant $L = 0$. Le mode $N = 30$ assure une très bonne convergence.

Cas Newtonien

La courbe neutre de stabilité pour un fluide Newtonien est représentée sur la figure (7.2). Cette courbe montre que le seuil de l'instabilité secondaire sous la forme de rouleaux transversaux est $Ra_c \simeq 506.27$ avec un nombre d'onde critique $k_c \simeq 4.8$. Ce seuil est supérieur à celui correspondant aux rouleaux longitudinaux ($Ra_c = 311.53$). Nous concluons donc que pour les fluides Newtoniens, la destabilisation de la convection monocellulaire se fait plutôt au profit d'un régime de convection organisée en rouleaux longitudinaux que de rouleaux transversaux.

Cas viscoélastique

La courbe neutre de stabilité (7.3) montre le rôle stabilisant de Γ . Plus la valeur de Γ augmente plus le seuil augmente. Ce rôle est bien montré dans le tableau (7.1) où le temps de relaxation est fixé à $\lambda_1 = 0.1$ et on fait varier Γ . Dans ce tableau on note bien la croissance de la fréquence critique ω_c et du nombre d'onde critique k_c en fonction de Γ . La courbe neutre de stabilité (7.4) montre contrairement au premier cas étudié le rôle destabilisant du temps de relaxation λ_1 . Pour un rapport des viscosités fixe, l'augmentation de λ_1 entraîne la diminution du nombre de Rayleigh critique. Le tableau

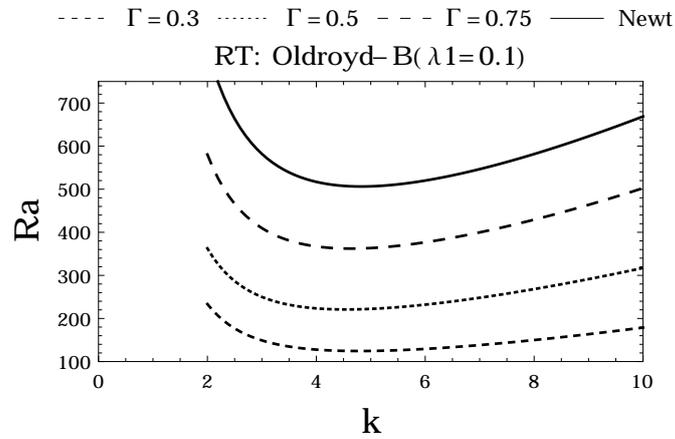


FIGURE 7.3 – Courbe marginale de stabilité de la convection monocellulaire d'un fluide viscoélastique.

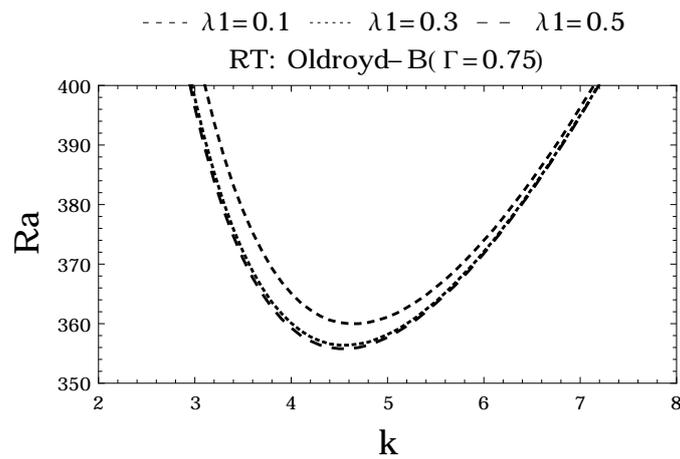


FIGURE 7.4 – Courbe marginale de stabilité de la convection monocellulaire d'un fluide viscoélastique.

(7.2) vient appuyer le résultat avec le nombre d'onde critique k_c et la fréquence critique ω_c qui décroît avec l'augmentation de λ_1 .

Nous concluons donc pour les fluides viscoélastiques, la destabilisation de la convection monocellulaire se fait plutôt au profit d'un régime de convection organisée en rouleaux transversaux que de rouleaux longitudinaux quand $\Gamma \rightarrow 0$.

Γ	Ra_c	ω_c	k_c
0.45	191.92	89.000	4.595
0.50	217.30	92.819	4.585
0.55	243.57	96.878	4.585
0.60	270.60	101.259	4.600
0.65	298.31	105.978	4.630
0.70	326.58	110.611	4.655
0.75	355.40	115.251	4.680

TABLEAU 7.1 – Variation de Ra_c , ω_c et k_c en fonction de Γ pour un fluide viscoélastique et un pour $\lambda_1 = 0.1$ et $N = 30$.

λ_1	Ra_c	ω_c	k_c
0.1	355.40	115.251	4.680
0.2	352.63	112.359	4.610
0.3	351.84	111.683	4.585
0.4	351.48	111.294	4.475
0.5	351.27	111.084	4.570
0.6	351.13	111.021	4.570
0.7	351.03	110.860	4.565

TABLEAU 7.2 – Variation de Ra_c , ω_c et k_c en fonction de Γ pour un fluide viscoélastique et pour un $\Gamma = 0.75$ et $N = 30$.

7.4 Comparaison avec la simulation numérique

7.4.1 Fluides Newtoniens

L'analyse de stabilité linéaire de l'écoulement de convection monocellulaire indique un nombre de Rayleigh critique $Ra_{cr2} = 506.27$, au-delà duquel une bifurcation de Hopf se produit, donnant naissance à un écoulement multicellulaire oscillant. La fréquence critique d'oscillations de ces structures correspond à $\omega_{cr2} = 138.24$ (i.e $f_{cr2} = \frac{138,24}{2\pi}$). Le nombre de Rayleigh critique et la fréquence critique associés à la bifurcation de Hopf sont en bon accord avec les résultats obtenus par Kimura et al [17], à savoir $Ra_{cr2} = 506.07$ et $\omega_{cr2} = 138.92$ (i.e $f_{cr2} = 22.11$), respectivement. Contrairement à l'analyse de

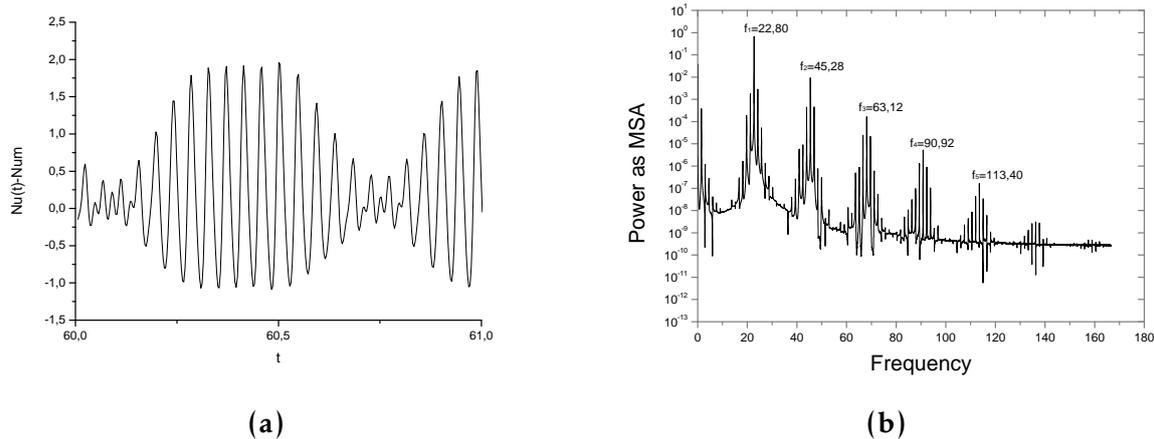


FIGURE 7.5 – Evolution de la différence entre le nombre Nusselt et de sa moyenne par rapport au temps (7.5a) et sa transformée de Fourier rapide (F.F.T) 7.5b pour une cavité poreuse saturée par un fluide Newtonien avec $Ra = 650$ et $A = 8$.

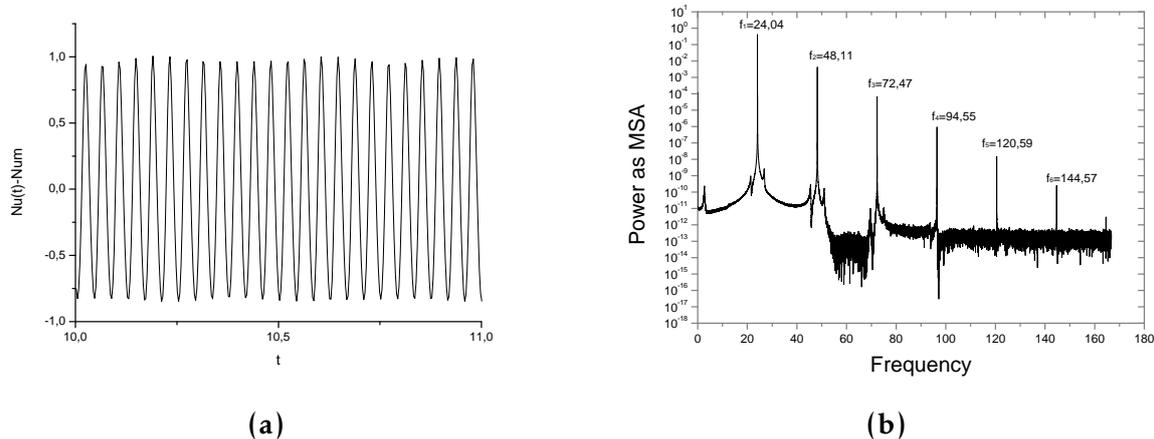


FIGURE 7.6 – Evolution de la différence entre le nombre Nusselt et de sa moyenne par rapport au temps (7.6a) et sa transformée de Fourier rapide (F.F.T) (7.6b) pour une cavité poreuse saturée par un fluide Newtonien avec $Ra = 750$ et $A = 4$.

stabilité linéaire de l'écoulement monocellulaire, les simulations numériques conduites dans cette partie de la thèse considèrent un rapport de forme A fini de la cavité poreuse.

Dans le but d'identifier la bifurcation de Hopf, nous avons déterminé le transfert de chaleur en évaluant le nombre de Nusselt pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh et pour des rapports de forme $A = 4$, $A = 8$ et $A = 10$. Une fois l'évolution au cours du temps du nombre de Nusselt est obtenue numériquement, on applique la transformée de Fourier rapide (F.F.T.) pour évaluer éventuellement les fréquences d'oscillations des structures convectives. Les simulations numérique montrent l'absence de toute instabilité secondaire pour des valeurs de Rayleigh inférieures au seuil $Ra_{cr2} = 506.27$ déterminé par l'analyse de stabilité de l'écoulement monocellulaire stationnaire. En augmentant graduellement la valeur du nombre de Rayleigh au delà de $Ra_{cr2} =$

506.27, les résultats numériques obtenus montrent qu'une bifurcation de Hopf se produit, donnant naissance à un régime de convection multicellulaire oscillatoire. Le nombre de Rayleigh pour lequel la bifurcation de Hopf est observée dépend fortement du rapport de forme A . Bien que c'est difficile de cerner avec exactitude le nombre de Rayleigh critique pour un rapport de forme donné, on a observé que ces valeurs critiques passent de 630 pour $A = 10$ à 650 pour $A = 8$ et à 750 pour $A = 4$. Il semble donc plausible de suggérer, pour des calculs avec des rapports de forme élevés, que Ra_{cr2} devrait approcher la valeur de 506.

L'évolution de la différence entre le nombre de Nusselt et de sa valeur moyenne est illustrée sur la figure (7.5a). La transformée de Fourier rapide, appliquée au nombre de Nu montre que le spectre des fréquences présente un pic à $f = 22.3$ et des pics associés à ses harmoniques comme le montre la figure (7.5b). Le même comportement est observé sur la figure (7.6) pour un rapport de forme $A = 4$.

Le cas Newtonien étant validé, nous allons passer à l'étude du cas non Newtonien.

7.5 Cas d'une couche poreuse saturée par un fluide viscoélastique

Dans cette partie nous allons étudier l'influence des paramètres rhéologiques sur le déclenchement de la convection multicellulaire et faire la comparaison avec la théorie de stabilité linéaire. Le comportement des champs de vitesse, de température et de transfert de chaleur moyen avant et après la bifurcation de Hopf sera étudié en deuxième lieu. Et enfin nous allons clore cette partie en regardant l'influence des paramètres rhéologiques sur le comportement des champs de vitesse, de température et de transfert de chaleur moyen.

7.5.1 Influence des paramètres rhéologiques sur la naissance de la convection multicellulaire et comparaison avec la théorie de stabilité linéaire.

Avant d'énoncer les résultats généraux, il est judicieux d'illustrer, à travers un jeu de paramètres rhéologiques fixés, la méthode utilisée pour détecter numériquement la bifurcation de Hopf. On fixe donc $\lambda_1 = 0.5$ et $\Gamma = 0.75$ et on fait varier le nombre de Rayleigh Ra . Pour ce jeu de paramètres, la théorie de stabilité prévoit une bifurcation de Hopf pour $Ra_{cr2} = 351.27$.

Dans ce but on a fait trois simulation numérique à $Ra = 65$, $Ra = 300$ et $Ra = 500$ et on a pu obtenir les lignes de courants et les isothermes. La figure (7.7) illustre les résultats. Après un temps transitoire les figures (7.7a) et (7.7b) montrent bien le comportement

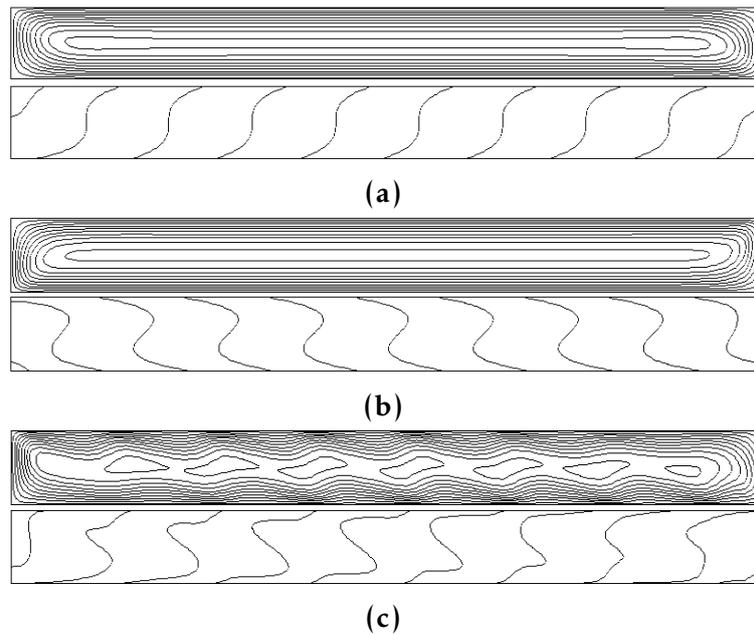


FIGURE 7.7 – Influence du nombre de Rayleigh sur les lignes de courants et les isothermes : (7.7a) $Ra=65$, (7.7b) $Ra=300$ et (7.7c) $Ra=500$ pour fluide viscoélastique de paramètres $\Gamma = 0.75$ et $\lambda_1 = 0.50$ et avec un rapport de forme $A=10$.

asymptotique qui est un écoulement monocellulaire. Pour un nombre de Rayleigh $Ra = 500$ supérieur au nombre de Rayleigh critique analytique, le régime oscillatoire multicellulaire s'installe. La figure (7.7c) illustre parfaitement bien ce résultat.

Pour trouver le seuil numériquement, on va affiner les choses en prenant des nombres de Rayleigh Ra plutôt voisine de $Ra_{cr2} = 351.27$. L'illustration avec le comportement du nombre de Nusselt pour $Ra = 300$, $Ra = 397$ et $Ra = 398$ est très claire sur les figures (7.8) et (7.9). Après un temps transitoire, les figures (7.8a) et (7.8b) montrent bien que le régime oscillatoire n'est pas encore atteint. Le comportement asymptotique du nombre de Nusselt indique un écoulement monocellulaire. L'augmentation du nombre de Rayleigh nous permet de trouver un $Ra = Ra_{cr2} = 398$ au-delà duquel une bifurcation de Hopf se produit, donnant naissance à un écoulement multicellulaire oscillant. Ce résultat est bien illustré avec l'oscillation du nombre de Nusselt sur la figure (7.9a). La transformée de Fourier rapide, appliquée au nombre de Nu montre que le spectre des fréquences présente un pic à $f = 14.51$ et des pics associés à ses harmoniques comme le montre la figure (7.9b).

Cette exemple nous a permis d'illustrer la méthode avec laquelle on a détecté les seuils pour d'autres couples (Γ, λ_1) . Avec cette méthode on fixe dans un premier temps la valeur de $\lambda_1 = 0.50$ et on fait varier le rapport des viscosités Γ . On constate que le nombre de Rayleigh critique augmente avec le rapport des viscosités comme montré sur le tableau (7.3). Le résultat très important qu'on peut en conclure est donc l'effet stabilisant du rapport des viscosités. Le résultat prévu par l'analyse de stabilité linéaire

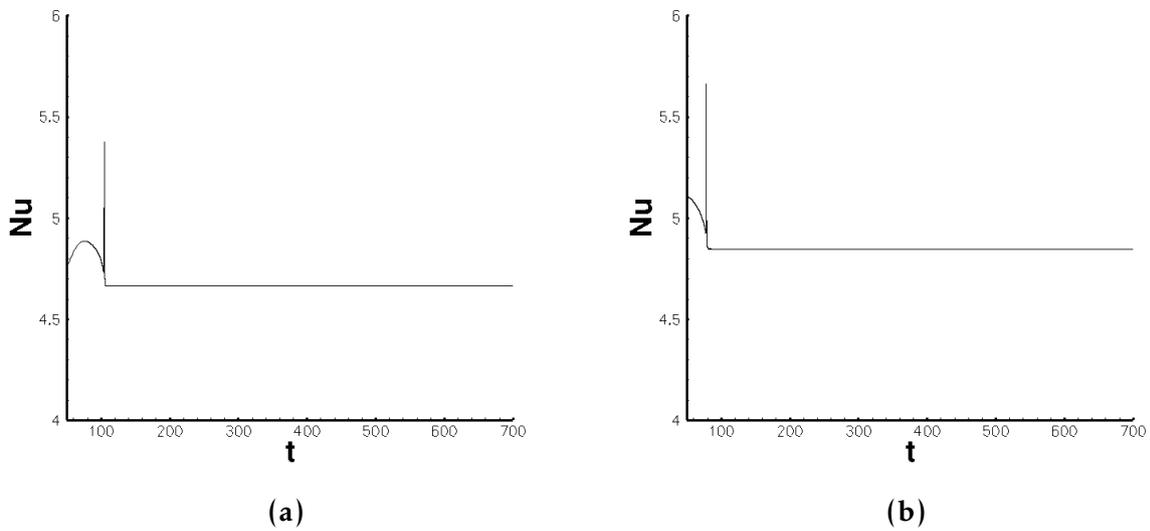


FIGURE 7.8 – Évolution du nombre de Nusselt en fonction du temps dans le cas d'une couche poreuse de rapport de forme $A = 10$ saturée par un fluide viscoélastique de paramètre $\Gamma = 0.75$ et $\lambda_1 = 0.50$: (7.8a) $Ra = 300$; (7.8b) $Ra = 397$

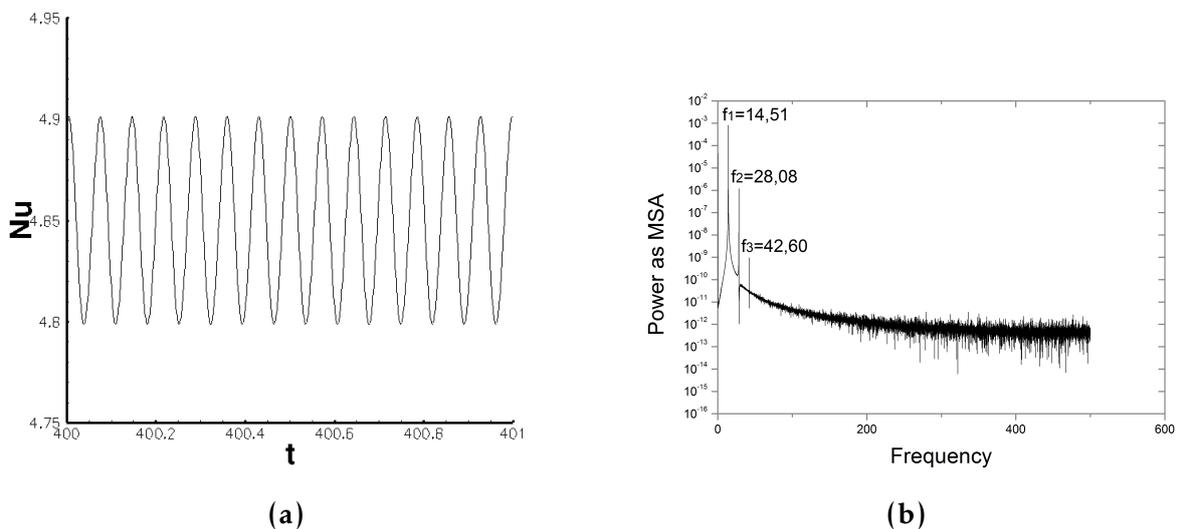


FIGURE 7.9 – Évolution du nombre de Nusselt en fonction du temps (7.9a) et sa transformée de Fourier rapide (F.F.T) (7.9b) dans le cas d'une couche poreuse de rapport de forme $A = 10$ saturée par un fluide viscoélastique de paramètre $\Gamma = 0.75$ et $\lambda_1 = 0.50$ avec un $Ra = 398$.

$\lambda_1 = 0.5$	Ra_{cr2}		$f r_{cr}$	
Γ	Analytique	Numérique	Analytique	Numérique
0.75	351.27	398.00	17.79	14.51
0.65	291.20	326.00	15.64	11.92
0.60	261.51	290.00	14.57	11.13
0.55	232.00	254.00	13.49	9.91
0.50	202.62	218.00	12.26	9.13

TABLEAU 7.3 – Variation de la valeur du nombre de Rayleigh critique et de la fréquence critique pour un fluide viscoélastique en fonction de Γ pour $\lambda_1 = 0.5$

$\Gamma = 0.75$	Ra_{cr2}		$f r_{cr}$	
λ_1	Analytique	Numérique	Analytique	Numérique
0.5	351.27	398.00	17.79	14.51
0.4	351.48	399.00	17.80	14.52
0.3	351.85	399.00	17.83	14.52
0.2	352.64	402.00	17.88	14.52
0.1	355.40	405.00	18.42	15.57

TABLEAU 7.4 – Variation de la valeur du nombre de Rayleigh critique et de la fréquence critique pour un fluide viscoélastique en fonction du temps de relaxation λ_1 pour un $\Gamma = 0.75$

est vérifié. La comparaison entre les résultats analytique et numérique sur le tableau (7.3) montre une différence entre les nombres de Rayleigh critique et les fréquences critique. Cette différence peut être expliquée par le rapport de forme considéré comme étant infini dans la théorie de stabilité et fini dans le cas numérique avec un rapport $A = 10$. Afin de regarder l'influence du temps de relaxation λ_1 , on fixe le rapport des viscosités $\Gamma = 0.75$. Les résultats sont reportés sur tableau (7.4). L'augmentation du temps de relaxation entraîne une diminution du nombre de Rayleigh critique et donc l'effet destabilisateur de λ_1 prévu par la stabilité linéaire est aussi vérifié. La différence des résultats analytique et numérique observée sur le tableau (7.4) est due au rapport de forme comme expliqué plus haut.

7.5.2 Comportement des champs de vitesse, de température et de transfert de chaleur moyen avant et après la bifurcation de Hopf

La figure (7.10) illustre l'influence du nombre de Rayleigh, sur les distributions des profils de la fonction de courant, de la température et de la vitesse horizontale. Ces résultats sont obtenus en faisant la simulation numérique du fluide viscoélastique de paramètres $\Gamma = 0.75$ et $\lambda_1 = 0.5$ dont le nombre de Rayleigh critique est égal à 398.

Nous avons choisis trois nombres de Rayleigh avant la bifurcation à savoir $Ra=100$, $Ra=200$ et $Ra=300$ et trois après la bifurcation, $Ra=500$, $Ra=600$ et $Ra=700$. Concernant les résultats obtenus avant la bifurcation, on observe une belle symétrie des profils de la fonction de courant, de la température et de la vitesse. La figure (7.10a) avant la bifurcation montre un écoulement renforcé au centre de la couche poreuse avec une valeur maximale de la fonction de courant.

Ra	ψ_{max}	T_{max}	U_{max}	\overline{Nu}
100	3.6754	0.14136	14.2422	3.5388
200	5.3728	0.11788	20.8197	3.7219
300	6.6507	0.11000	25.7716	4.4588
500	8.5628	0.08312	48.6304	5.3619
600	9.0993	0.12562	53.3947	5.6631
700	10.1154	0.07454	45.4954	5.9338

TABLEAU 7.5 – Évolution des valeurs maximales de la fonction de courant, de la température, de la vitesse et du transfert de chaleur moyen en fonction du nombre de Rayleigh pour un fluide viscoélastique de paramètres $\Gamma = 0.75$ et $\lambda_1 = 0.50$ pour un rapport de forme $A = 10$.

L'intensité du flux ψ_{max} augmente de 3.6754 à 10.1154, la vitesse maximale, en valeur absolue U_{max} , augmente elle aussi de 14.2422 à 45.4954 avec l'accroissement du nombre de Rayleigh de 100 à 700 ; par contre la température maximale, en valeur absolue, chute de 0.14136 à 0.07454 comme indiqué sur le tableau (7.5). La figure (7.10c) montre que la variation de la vitesse horizontale u garde sa linéarité en fonction de z avant la bifurcation. Après la bifurcation on perd toute symétrie au niveau des profils de la fonction de courant, de la température et de la vitesse horizontale. L'atténuation de la température avec l'axe horizontale de la couche poreuse avec l'augmentation du nombre de Rayleigh obtenu avant la bifurcation n'est plus valable après la bifurcation où l'on voit (7.10b) la température passer de 0.08312 à 0.07454 en passant par 0.12562 quand le nombre de Rayleigh passe de 500 à 700. La figure (7.10c) montre le profil de la vitesse horizontale qui perd sa linéarité. La vitesse maximale, en valeur absolue U_{max} , décroît de 48.6304 à 45.4954 en passant par 53.3947 avec l'accroissement du nombre de Rayleigh de 500 à 700. On représente aussi sur le tableau (7.5) la variation de transfert de chaleur moyen en fonction de nombre de Rayleigh avant et après la bifurcation. On note une augmentation régulière du transfert de chaleur moyen avec le nombre de Rayleigh.

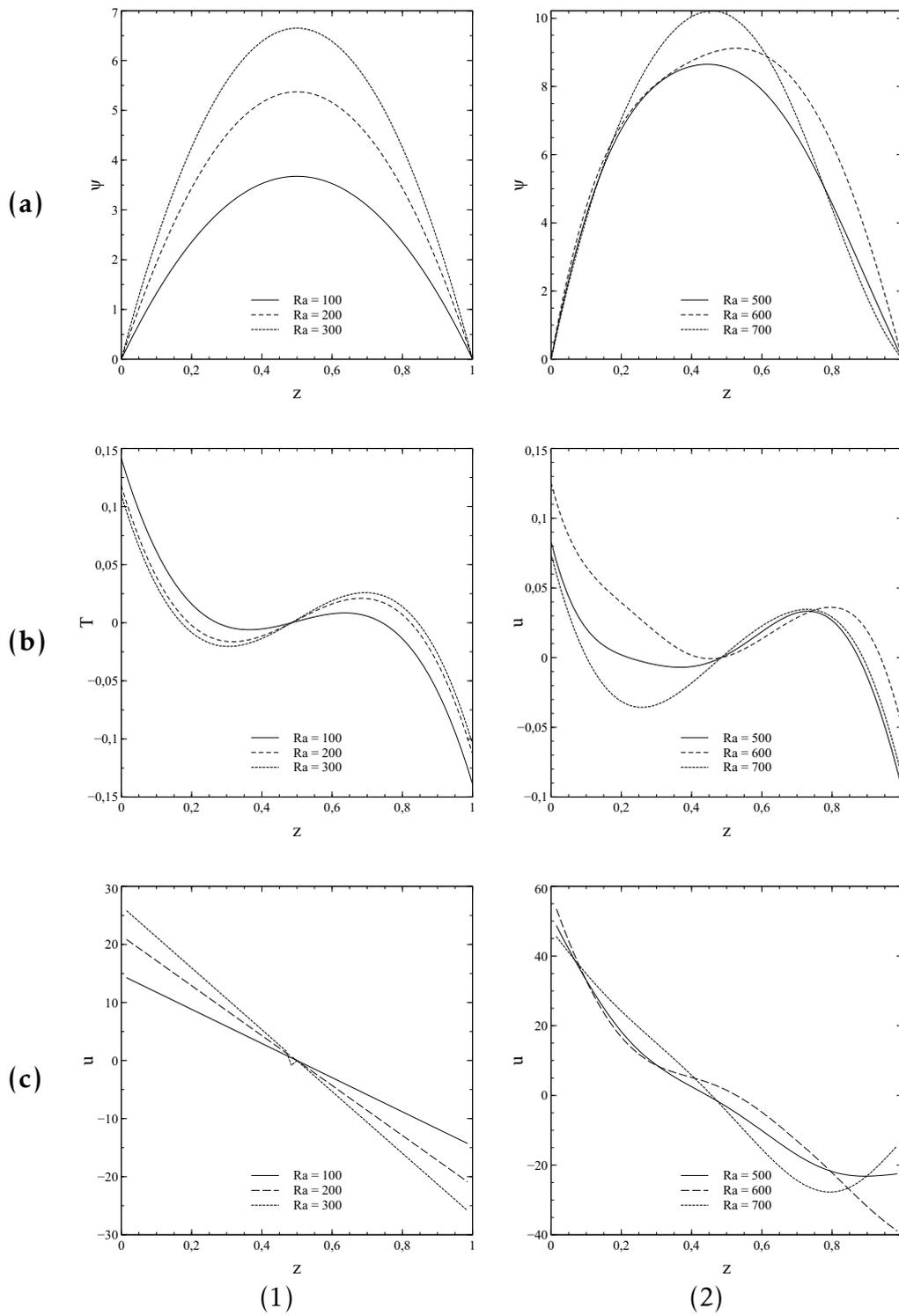


FIGURE 7.10 – L'influence du nombre de Rayleigh avant et après la bifurcation sur la distribution de la fonction de courant (a), de la température (b) et de la vitesse horizontale (c) pour un fluide viscoélastique $\Gamma = 0.75$, $\lambda_1 = 0.50$ et avec un rapport de forme $A=10$.

7.5.3 Influence des paramètres rhéologiques sur le comportement des champs de vitesse, de température et de transfert de chaleur moyen.

Dans cette partie, on étudie l'influence des paramètres rhéologiques Γ et λ_1 sur le comportement des champs de vitesse, de température. Dans les deux cas on note sur les figures (7.11) et (7.12) que avant la bifurcation ni Γ , ni λ_1 n'ont aucun effet sur le comportement des champs. Le régime est stationnaire. Ce résultat numérique vérifie bien la théorie de stabilité linéaire. Après la bifurcation, l'influence de Γ et de λ_1 sur le comportement des champs de vitesse, de température devient significative. Cependant le comportement des champs est difficile à interpréter. On peut noter au niveau du tableau (7.6) où le temps de relaxation est fixé que l'augmentation du rapport Γ entraîne l'augmentation de la valeur maximale du flux. Un comportement inverse du flux est observé sur le tableau (7.7) où le rapport Γ est fixé. L'augmentation du temps de relaxation λ_1 entraîne une diminution de la valeur maximale du flux. Par contre l'évolution des valeurs maximales de la température, de la vitesse et du transfert de chaleur moyen n'est pas régulier dans les deux cas (7.6) et (7.7).

Γ	ψ_{max}	T_{max}	U_{max}	\overline{Nu}
0.55	8.0788	0.1103	21.9448	5.4182
0.65	8.4819	0.7525	53.9380	5.5001
0.75	8.5628	0.0831	48.6304	5.3619

TABLEAU 7.6 – Évolution des valeurs maximales de la fonction de courant, de la température, de la vitesse et du transfert de chaleur moyen en fonction du rapport des viscosités Γ après la bifurcation $Ra = 500$ et pour $\lambda_1 = 0.50$.

λ_1	ψ_{max}	T_{max}	U_{max}	\overline{Nu}
0.10	9.2382	0.06174	40.8308	5.3752
0.30	8.0788	0.11039	21.9448	5.4182
0.50	8.5628	0.08312	48.6304	5.3619

TABLEAU 7.7 – Évolution des valeurs maximales de la fonction de courant, de la température, de la vitesse et du transfert de chaleur moyen en fonction du temps de relaxation λ_1 après la bifurcation $Ra = 500$ et pour $\Gamma = 0.75$.

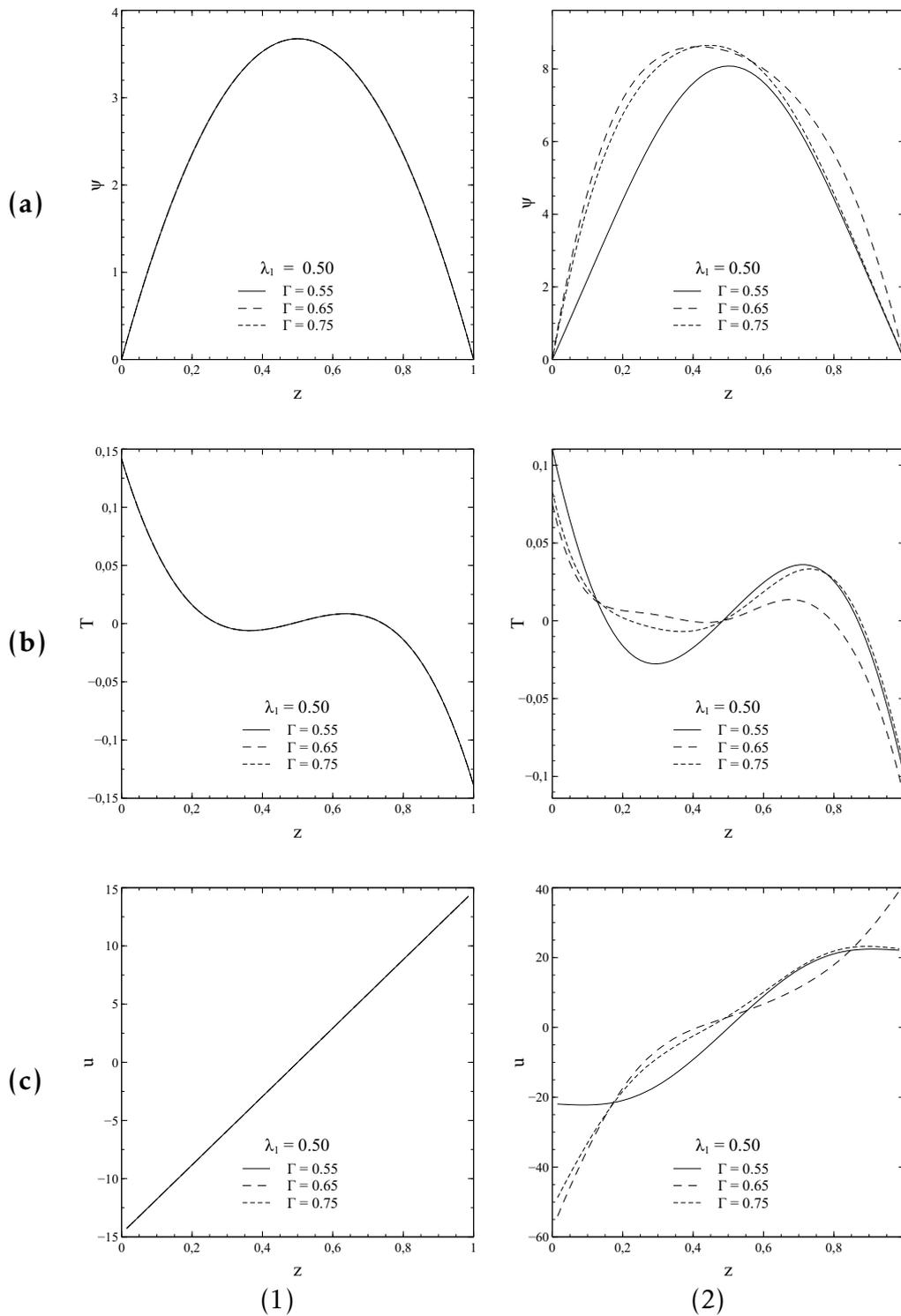


FIGURE 7.11 – L'influence de Γ sur la distribution de la fonction de courant (7.11 a), de la température (7.11 b) et de la vitesse horizontale (7.11 c) avant la bifurcation $Ra=100$ et après la bifurcation $Ra = 500$.

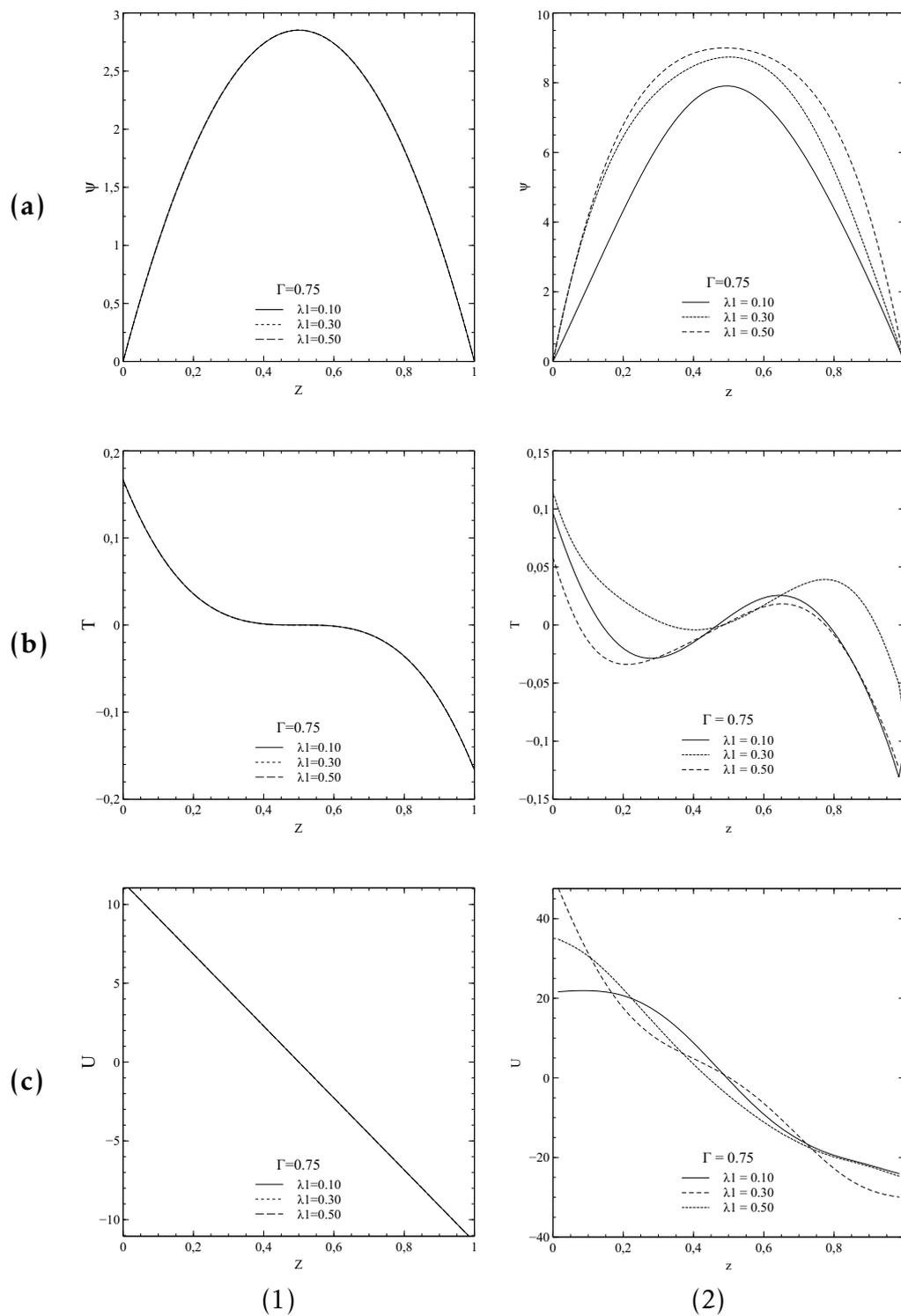


FIGURE 7.12 – L'influence du temps de relaxation λ_1 sur la distribution de la fonction de courant (7.12 a), de la température (7.12 b) et de la vitesse horizontale (7.12 c) avant la bifurcation $Ra=65$ et après la bifurcation $Ra = 500$.

Conclusion

Dans cette deuxième partie de la thèse, le problème de la convection naturelle au sein d'un fluide Newtonien ou d'un fluide viscoléastique a été étudié analytiquement et numériquement. Il s'agit d'une couche poreuse horizontale chauffée par le bas par un flux de chaleur constant. L'influence du nombre de Rayleigh, du temps de relaxation λ_1 , du rapport des viscosités Γ et du rapport de forme du massif poreux A sur l'apparition de motifs des rouleaux transversaux et des rouleaux longitudinaux de convection et sur l'intensité de transfert de chaleur a été discutée.

L'étude d'instabilité primaire effectuée montre l'effet déstabilisant du temps de relaxation λ_1 et l'effet stabilisant du rapport des viscosités Γ et que sur un large domaine dans le plan (Γ, λ_1) que l'on désigne par régime de fluide faiblement viscoélastique, une instabilité stationnaire domine le mode de convection. Cette instabilité est à grande longueur d'onde, c'est à dire à nombre d'onde critique nul. Dans ce cas on peut utiliser l'approximation d'écoulement parallèle et trouver la solution convective non linéaire. Il convient donc de ces structures convectives pleinement développées. Les résultats montrent que pour un fluide Newtonien, la convection monocellulaire perd sa stabilité au profit de rouleaux longitudinaux. Dans le cas des fluides viscoélastiques, le seuil d'apparition des rouleaux longitudinaux est indépendant des paramètres viscoléastiques Γ et λ_1 et est alors identique au cas d'un fluide Newtonien. Cependant, on trouve que l'élasticité du fluide induit la sélection des rouleaux transversaux propagatifs.

Nous avons aussi étudié le problème de stabilité de la solution monocellulaire. L'étude de stabilité de la convection monocellulaire vis-à-vis des rouleaux longitudinaux montre que dans le cas Newtonien, le nombre de Rayleigh converge asymptotiquement vers $Ra_c = 311.53$ quand le rapport de forme a suivant la direction y tend vers l'infini. Pour un rapport de forme a fini, le nombre de Rayleigh critique croit avec le nombre de rouleaux longitudinaux. Concernant les fluides viscoélastiques, on note que pour des rapports de forme a très petits, le temps de relaxation joue un rôle déstabilisant contrairement au cas Newtonien.

L'étude de stabilité de la convection monocellulaire vis-à-vis des rouleaux transversaux montre que le seuil d'instabilité secondaire sous la forme de rouleaux transversaux est $Ra_c = 506.27$ avec un nombre d'onde critique $k_c = 4.8$. Nous concluons donc que pour les fluides Newtoniens, la déstabilisation de la convection monocellulaire se fait

plutôt au profit d'un régime de convection organisée en rouleaux longitudinaux que de rouleaux transversaux. Pour les fluides viscoélastiques, la destabilisation de la convection monocellulaire se fait plutôt au profit d'un régime de convection organisée en rouleaux transversaux que de rouleaux longitudinaux quand le rapport des viscosités Γ tend vers 0.

Une solution numérique basée sur un schéma aux différences finies est venue conforter ces résultats analytiques. Le code développé a été validé en prenant comme référence nos résultats analytiques et certaines études numériques disponibles dans la littérature. Les résultats obtenus sont présentés sous forme de profils de fonction de courant, de température, de vitesse horizontale et des spectres de fréquences du nombre de Nusselt dans le cas oscillatoire.

Conclusion générale et perspectives

Les résultats obtenus au cours de ce travail sont synthétisés et une extension possible de ces travaux est suggérée dans cette section.

Dans la première partie de la thèse, nous avons traité la simulation numérique de l'écoulement de fluides Newtonien et non Newtonien dans un canal partiellement rempli d'une matière poreuse isotrope et homogène. La première moitié du canal ne contient que du fluide alors que la deuxième partie est composée du fluide et de la matrice poreuse. Les parois sont considérées comme adiabatiques et imperméables. Ce problème bidimensionnel est modélisé par les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement moyennés dans un *Volume Élémentaire Représentatif*. Elles sont résolues par la méthode des volumes finis, avec une discrétisation des termes convectifs et non linéaires. Les termes diffusifs et de pression sont temporellement implicites.

Un code de calcul en Fortran permettant de varier les paramètres du fluide et celles du milieu poreux est développé. La méthode utilisée est celle des volumes finis. Les équations de conservation sont intégrées dans le volume de contrôle, puis le théorème de Gauss est utilisé pour transformer certaines intégrales de volume en intégrales de surface. Toutes les grandeurs scalaires sont traitées au centre du volume, les vitesses sont localisées au centre des faces du volume, ce choix constitue le principe du maillage entrelacé. La difficulté du problème émerge d'un fort couplage entre la géométrie du milieu poreux et le caractère non-newtonien du fluide considéré

L'écoulement développé est de Poiseuille, la pression chute axialement. Puis à la traversée du milieu poreux, on trouve que l'écoulement n'est plus de Poiseuille. La matrice poreuse produit une résistance à l'écoulement, sous forme d'une perte de pression. L'influence du nombre de Darcy sur la structure de l'écoulement et sur le profil de vitesse est montrée. L'aplatissement du profil de vitesse est moins important dans le cas des fluides rhéoépaississants que les fluides Newtoniens. Nous avons aussi mis en évidence l'influence du terme de Forchheimer sur l'aplatissement du profil de vitesse. La relation non linéaire entre le gradient de pression et la vitesse débitante pour les fluides en loi de puissance est obtenue. L'extension de la loi de Darcy est donnée pour ces fluides, où la perméabilité dépend de l'indice n .

La deuxième partie de la thèse porte sur une étude analytique et numérique de

la convection naturelle de fluides viscoélastiques saturant une couche poreuse horizontale chauffée par un flux constant. La formulation mathématique des équations de ce problème repose sur la loi phénoménologique de Darcy généralisée à un fluide viscoélastique vérifiant l'approximation de Boussinesq. Cette formulation introduit deux paramètres supplémentaires liés à la viscoélasticité, à savoir le temps de relaxation λ_1 et le rapport Γ entre la viscosité du solvant et la viscosité totale de la solution polymérique.

L'analyse de stabilité linéaire conduite dans ce travail montre que l'état de convection perd sa stabilité au profit de structures convectives dont la nature dépend du degré de l'élasticité du fluide viscoélastique. En régime faiblement viscoélastique, ces structures convectives ont un caractère stationnaire où le mode le plus amplifié est caractérisé par une grande longueur d'ondes, et se comporte comme pour un fluide Newtonien. Cependant, on montre qu'en régime fortement viscoélastique, la convection est oscillatoire avec un nombre d'onde non nul et se présente sous la forme d'ondes progressives.

En régime faiblement viscoélastique, et vu que la première instabilité prédite par l'analyse linéaire admet un nombre d'onde nul, l'utilisation de l'approximation d'écoulement parallèle permet de déterminer l'amplitude de la convection monocellulaire dans le domaine non linéaire. Il convient donc d'étudier la stabilité secondaire de ces structures convectives pleinement développées. Les résultats montrent que pour un fluide Newtonien, la convection monocellulaire perd sa stabilité au profit de rouleaux longitudinaux (dont l'axe est parallèle à l'écoulement de base). Le nombre de Rayleigh critique à partir duquel se produit cette déstabilisation est déterminé et est en excellent accord avec la valeur trouvée dans [17]. Dans le cas des fluides viscoélastiques, le seuil d'apparition des rouleaux longitudinaux est indépendant des paramètres viscoélastiques λ_1 et Γ et est alors identique au cas d'un fluide Newtonien. Cependant, on trouve que l'élasticité du fluide induit la sélection des rouleaux transversaux (dont l'axe est perpendiculaire au sens de l'écoulement principal) propagatifs. L'influence des paramètres viscoélastiques sur le seuil d'apparition de ces rouleaux transversaux propagatifs comme une instabilité secondaire est déterminée.

Une solution numérique basée sur un schéma aux différences finies traite le cas d'un fluide Newtonien et d'un fluide viscoélastique. Les résultats obtenus sont présentés sous forme de profils de fonction de courant, de température, de vitesse horizontale et des spectres de fréquences du nombre de Nusselt dans le cas oscillatoire. L'influence du rapport de forme, du nombre de Rayleigh et des paramètres rhéologiques a été discutée. Les effets de ces paramètres sur le transfert de chaleur par convection, déterminés par la méthode numérique, ont été comparés avec les résultats analytiques et un bon accord entre les deux est observé.

Des questions intéressantes peuvent donner lieu à des approfondissements de cette

partie de la thèse. Une perspective intéressante de cette thèse est de considérer une configuration bicouche, comme traité dans la première partie et de déterminer la nature des bifurcations et le transfert de chaleur qui en résulte. Une autre perspective non moins intéressante est le prolongement de la présente étude au régime fortement viscoélastique.

Bibliographie

- [1] S. C. HIRATA et al. « Convective and absolute instabilities in Rayleigh–Bénard–Poiseuille mixed convection for viscoelastic fluids ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 765 (2015), p. 167–210 (cf. p. 67).
- [2] P. KOLODNER. « Oscillatory convection in viscoelastic DNA suspensions ». In : *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 75.2 (1998), p. 167–192 (cf. p. 67).
- [3] E. G. ELLA et M. N. OUARZAZI. « Convection naturelle et transfert de chaleur de fluides viscoélastiques en milieu poreux. » In : () (cf. p. 67).
- [4] B. AMARI, P. VASSEUR et E. BILGEN. « Natural convection of non-Newtonian fluids in a horizontal porous layer ». In : *Wärme-und Stoffübertragung* 29.3 (1994), p. 185–193 (cf. p. 66).
- [5] H. PASCAL. « Rheological behaviour effect of non-newtonian fluids on steady and unsteady flow through a porous medium ». In : *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 7.3 (1983), p. 289–303 (cf. p. 66).
- [6] K. A. YIH. « Uniform lateral mass flux effect on natural convection of non-Newtonian fluids over a cone in porous media ». In : *International communications in heat and mass transfer* 25.7 (1998), p. 959–968 (cf. p. 66).
- [7] H.T. CHEN et C. K. CHEN. « Free convection flow of non-Newtonian fluids along a vertical plate embedded in a porous medium ». In : *Journal of heat transfer* 110.1 (1988), p. 257–260 (cf. p. 66).
- [8] D. S. RILEY et K. H. WINTERS. « Modal exchange mechanisms in Lapwood convection ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 204 (1989), p. 325–358 (cf. p. 65).
- [9] D. A. NIELD. « The thermohaline Rayleigh-Jeffreys problem ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 29.03 (1967), p. 545–558 (cf. p. 65).
- [10] D. A. NIELD. « Onset of thermohaline convection in a porous medium ». In : *Water Resources Research* 4.3 (1968), p. 553–560 (cf. p. 65, 82, 85, 89).
- [11] S. P. FRANKEL. « Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations ». In : *Mathematical Tables and Other Aids to Computation* (1950), p. 65–75 (cf. p. 90).
- [12] G. MOMPEAN. « Modélisation des écoulements turbulents avec transferts thermiques en convection mixte ». Thèse. L'École Centrale de Lyon, 1989 (cf. p. 38, 39, 48).
- [13] R. YOUNSI. « Simulation numérique du transfert de chaleur et de masse en milieux fluides et poreux ». Thèse. Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne, 2002 (cf. p. 15).

- [14] G. ELLA ENY. « Instabilités thermiques et thermodiffusives de fluides visco-élastiques saturant un milieu poreux ». Thèse. Université Lille 1 - Sciences et Technologies, 2011 (cf. p. 12).
- [15] C. RIGAL. « Comportement de fluides complexes sous écoulement : Approche expérimentale par résonance magnétique nucléaire et techniques optiques et simulations numériques ». Thèse. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2012 (cf. p. 10, 11).
- [16] A. DJEBLI. « Convection naturelle bidiffusive dans une enceinte rectangulaire remplie d'une matière poreuse ». In : () (cf. p. 5).
- [17] S. KIMURA, M. VYNNYCKY et F. ALAVYOON. « Unicellular natural circulation in a shallow horizontal porous layer heated from below by a constant flux ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 294 (1995), p. 231–257 (cf. p. 2, 65, 66, 91, 92, 94, 106, 120).
- [18] J. BEAR. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Dover, 1972 (cf. p. 1, 14).
- [19] L. J. GINSON et M. F. ASHBY. « Cellular Solids, Structure and Properties ». In : *Oxford, New York : Pergamon Press* (1988).
- [20] A. DELACHE. « Etude analytique et numérique des instabilités spatio-temporelles des écoulements de convection mixte en milieu poreux : comparaison avec l'expérience ». Thèse de doct. Université des Sciences et Technologie de Lille, 2005 (cf. p. 7, 8).
- [21] G. MARSILY. « Quantitative hydrogeology-Groubdwater hydrology for engineers ». In : *Academic Press, San Diego* (1986) (cf. p. 7).
- [22] J. BEAR. « Dynamics of fluids in porous media ». In : *Drover Publications, Inc., New York* (1972) (cf. p. 7).
- [23] E. SANCHEZ-PALENCIA. « Non homogeneous media and vibration theory ». In : *Lecture Notes in Physics* 127 (1980) (cf. p. 8).
- [24] M. KAVIANY. « Principles of heat transfer in porous media ». In : *Springer* (1995) (cf. p. 5).
- [25] E. SCHEIDEGGER. *The Physics of flow through porous media*. 3^e éd. University of Toronto Press, 1974 (cf. p. 6).
- [26] S. ERGUN. « Fluid flow through packed columns ». In : *Chem. Eng. Progr.* 48 (1988), p. 88–94 (cf. p. 6).
- [27] A. LINDNER. « L'instabilité de Saffman-Taylor dans les fluides complexes : relation entre les propriétés rhéologiques et la formation de motifs ». Thèse de doct. Université Paris VI, 2000.
- [28] H. A. BARNES. « Shear-thickening ("dilatancy") in suspensions of nonaggregating solid particles dispersed in newtonian liquids ». In : *Journal of Rheology* 33 (1989), p. 329 (cf. p. 10).
- [29] P. A. BOIS. *Introduction à la mécanique théorique des fluides*. Ellipses, 2000 (cf. p. 70).
- [30] M. COMBARNOUS et S. BORIES. « Modelisation de la Convection Naturelle au sein d'une Couche Poreuse Horizontale a l'aide d'un Coefficient de Transfert Solide-Fluide ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 17.4 (1974), p. 505–515 (cf. p. 71).

- [31] D. A. NIELD et A. BEJAN. *Convection in porous media*. Springer, 2006 (cf. p. 71, 72).
- [32] M. QUINTARD et S. WHITAKER. « One-and two-equation models for transient diffusion processes in two-phase systems ». In : *Advances in heat transfer* 23 (1993), p. 369–464 (cf. p. 71).
- [33] S. CHANDRASEKHAR. *Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability* : S. Chandrasekhar. Oxford University, 1961.
- [34] P. COLINET, J. C. LEGROS et M. G. VELARDE. *Front Matter*. Wiley Online Library, 2001.
- [35] D. A. NIELD et A. BEJAN. « Convection in Porous Media, Springer, New York, 1999 ». In : () .
- [36] C. W. HORTON et F. T. ROGERS JR. « Convection currents in a porous medium ». In : *Journal of Applied Physics* 16.6 (1945), p. 367–370 (cf. p. 2, 65).
- [37] E. R. LAPWOOD. « Convection of a fluid in a porous medium ». In : *Proceedings of the Cambridge* (1948) (cf. p. 2, 65).
- [38] E. ISTASSE. « Étude des instabilités de Rayleigh-Bénard dans un milieu poreux fracturé ». Travail de fin d'étude. Université Libre de Bruxelles, 1997.
- [39] H. BENARD. « Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide.-Méthodes optiques d'observation et d'enregistrement ». In : *J. Phys. Theor. Appl.* 10.1 (1901), p. 254–266 (cf. p. 65).
- [40] F. H. BUSSE. « Non-linear properties of thermal convection ». In : *Reports on Progress in Physics* 41.12 (1978), p. 1929 (cf. p. 65).
- [41] F. H. BUSSE. « Fundamentals of thermal convection ». In : *Mantle Convection : Plate Tectonics and Global Dynamics* 4 (1989), p. 23–95 (cf. p. 65).
- [42] A. V. GETLING. *Rayleigh-Bénard Convection*. World Scientific, 1998 (cf. p. 65).
- [43] E. L. KOSCHMIEDER et S. G. PALLAS. « Heat transfer through a shallow, horizontal convecting fluid layer ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 17.9 (1974), p. 991–1002.
- [44] S. A. BORIES et M. A. COMBARNOUS. « Natural convection in a sloping porous layer ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 57.01 (1973), p. 63–79.
- [45] K. ECKERT, M. BESTEHORN et A. THESS. « Square cells in surface-tension-driven Bénard convection : experiment and theory ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 356 (1998), p. 155–197.
- [46] E. BODENSCHATZ, W. PESCH et G. AHLERS. « Recent developments in Rayleigh-Bénard convection ». In : *Annual review of fluid mechanics* 32.1 (2000), p. 709–778.
- [47] M.C. KIM et al. « Thermal instability of viscoelastic fluids in porous media ». In : *International journal of heat and mass transfer* 46.26 (2003), p. 5065–5072 (cf. p. 67).
- [48] C. FU, Z. ZHANG et W. TAN. « Numerical simulation of thermal convection of a viscoelastic fluid in a porous square box heated from below ». In : *Physics of Fluids (1994-present)* 19.10 (2007), p. 104107.

- [49] Z. ZHANG, C. FU et W. TAN. « Linear and nonlinear stability analyses of thermal convection for Oldroyd-B fluids in porous media heated from below ». In : *Physics of Fluids (1994-present)* 20.8 (2008), p. 084103 (cf. p. 67).
- [50] H. DARCY. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon : exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau*. Victor Dalmont, 1856 (cf. p. 1, 13).
- [51] C. M. MARLE. « Henry Darcy et les écoulements de fluides en milieu poreux ». In : *Oil and Gas Science Technology* 61 (2006), p. 599–609 (cf. p. 13).
- [52] J. C. WARD. « Turbulent flow in porous media ». In : *J. Hyd. Div. ASCE* 90 (1964), p. 1–12 (cf. p. 15).
- [53] R. A. WOODING. « Steady state free thermal convection of liquide in a saturated permeable medium ». In : *J. Fluid Mech.* 2 (1957), p. 273–285 (cf. p. 15).
- [54] K. VAFAI et C. L. TIEN. « Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media ». In : *Int. J. Heat Mass Transfer* 24 (1981), p. 195–203 (cf. p. 15).
- [55] G. LAURIAT et V. PRASSAD. « Natural convection in vertical porous cavity : Numerical study for Brinkman - extended Darcy formulation ». In : *ASME J. Heat Transfer* 109 (1987), p. 688–696 (cf. p. 15).
- [56] J. L. LAGE. « Effect of the convective inertia term on Bénard convection in a porous medium ». In : *Num. Heat Transfer* 22 (1992), p. 469–485 (cf. p. 15).
- [57] K. S. SORBIE, P. J. CLIFFORD et E. R. W. JONES. « The Rheology of Pseudoplastic Fluids in Porous Media Using Network Modeling ». In : *Journal of Colloid and Interface Science* 130.2 (1989), p. 508–534 (cf. p. 16).
- [58] R. B. BIRD, W. E. STEWART et E. N. LIGHTFOOT. *Transport Phenomena*. 2^e éd. Wiley, New York, 2002 (cf. p. 16, 27).
- [59] C. T. KEVIN et A. N. HISHAM. « Water-soluble hydrophobically associating polymers for improved oil recovery : A literature review ». In : *Journal of Petroleum Science and Engineering* 19.3-4 (1998), p. 265–280 (cf. p. 16).
- [60] P. C. PERRIN et al. « Experimental and modeling study of Newtonian and non-Newtonian fluid flow in pore network micromodels ». In : *Journal Colloid Interface Science* 295.2 (2006), p. 542–550 (cf. p. 16).
- [61] X. LOPEZ, P. H. VALVATNE et M. J. BLUNT. « Predictive network modeling of single-phase non-Newtonian flow in porous media ». In : *Journal Colloid Interface Science* 264.1 (2003), p. 256–265 (cf. p. 16).
- [62] T. TOSCO, D. L. MARCHISIO et F. LINCE. « Eextension of the Darcy-Forchheimer Law for Shear-Thinning Fluids and Validation via Pore-Scale Flow Simulations ». In : *Transport Porous Media* 91 (2013), p. 1–20 (cf. p. 16).
- [63] R. E. HAYES et al. « Modelling the Flow of Power Law Fluids in a Packed Bed Ussing a Volume-Averaged Equation of Motion ». In : *Transport in Porous Media* 23 (1996), p. 175–196 (cf. p. 16).
- [64] B. KHUZHAYOROV, J. L. AURIAULT et P. ROYER. « Derivative of macroscopic filtration law for transient linear viscoelastic fluid flow in porous media ». In : *International Journal of Engineering Science* 38 (2000), p. 487–505 (cf. p. 70).

- [65] P. VADASZ. « Coriolis effect on gravity-driven convection in a rotating porous layer heated from below ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 376 (1998), p. 351–375 (cf. p. 70).
- [66] S. M. HASSANIZADEH et W. G. GRAY. « High Velocity Flow in Porous Media ». In : *Transport in Porous Media* 2 (1987), p. 521–531 (cf. p. 19).
- [67] N. M. KONSTANTINOS, N. E. P. IOANNIS et A. T. VASSILIOS. « Experimental investigation of inertial flow processes in porous media ». In : *Journal of Hydrology* 374 (2009), p. 242–254.
- [68] W. ZHONG et al. « Determination of flow rate characteristics of porous media using charge method ». In : *Flow Measurement and Instrumentation* 22 (2011), p. 201–207 (cf. p. 19).
- [69] H. J. HERRMANN et al. « Sur le volume élémentaire représentatif de la loi de perte de charge d'Ergun ». In : *Oil & Gas Science and Technology* 54.5 (1999), p. 577–585 (cf. p. 19).
- [70] M. FOURAR et al. « On the non-linear behavior of a laminar single-phase flow through two and three-dimensional porous media ». In : *Advances in Water Resources* 27 (2004), p. 669–667 (cf. p. 20).
- [71] A. AHARMOUCH et B. AMAZIANE. « Development and evaluation of numerical model for steady state interface and/or free surface groundwater flow ». In : *Journal of Hydrology* 434-435 (2012), p. 110–120.
- [72] F. CIMOLIN et M. DISCACCIATI. « Navier-Stokes/Forchheimer models for filtration through porous media ». In : *Applied Numerical Mathematics* 72 (2013), p. 205–224 (cf. p. 20).
- [73] G. S. BEAVERS et D. D. JOSEPH. « Boundary conditions at a naturally permeable wall ». In : *J. Fluid Mech.* 30 (1967), p. 197–207 (cf. p. 20, 21).
- [74] H. C. BRINKMAN. « Calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense array of particles ». In : *Applied Scientific Research* A1 (1947), p. 27–34 (cf. p. 21).
- [75] S. KIM et W. B. RUSSEL. « Modelling of porous media by renormalization of the Stokes equations ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 154 (1985), p. 269–286 (cf. p. 21, 22).
- [76] B. V. K. SATYA SAI, K. N. SITARAMU et P. A. ASWATHANARAYANA. « Finite element analysis of heat transfer by natural convection in porous media in vertical enclosures ». In : *International Journal Numerical Methods Heat Fluid Flow* 7 (1997), p. 367–400 (cf. p. 21).
- [77] M. CARR et B. STRAUGHAN. « Penetrative convection in a fluid overlying a porous layer ». In : *Advances in Water Res.* 26 (2003), p. 263–276 (cf. p. 21).
- [78] I. P. JONES. « Low Reynolds number flow past a porous spherical shell ». In : *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 73 (01 1973), p. 231–238 (cf. p. 21).
- [79] G. NEALE, N. EPSTEIN et W. NADER. « Creeping flow relative to permeable spheres ». In : *Chemical Engineering Science* 28 (10 1973), p. 1865–1874 (cf. p. 21).

- [80] S. HABER et R. MAURI. « Boundary conditions for darcy's flow through porous media ». In : *International Journal of Multiphase Flow* 9 (5 1983), p. 561–574 (cf. p. 21).
- [81] G. NEALE et W. NADER. « Practical significance of brinkman's extension of darcy's law : Coupled parallel flows within a channel and a bounding porous medium ». In : *The Canadian Journal of Chemical Engineering* 52 (4 1974), p. 475–478.
- [82] B. ALAZMI et K. VAFAI. « Analysis of fluid flow and heat transfer interfacial conditions between a porous medium and a fluid layer ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 44 (2001), p. 1735–1749 (cf. p. 21).
- [83] C. DENG et D. M. MARTINEZ. « Viscous flow in a channel partially filled with porous medium and with wall suction ». In : *Chemical Engineering Science* 60.2 (2005), p. 329–336 (cf. p. 21).
- [84] P. LEBRETON, J. P. CALTAGIRONE et E. ARQUIS. « Natural convection in a square cavity thin porous layers on its vertical walls ». In : *J. Heat Transfer* 113 (1991), p. 892–898 (cf. p. 22).
- [85] V. NASSEHI. « Modelling of combined Navier-Stokes and Darcy flows in crossflow membrane filtration ». In : *Chemical Engineering Science* 53 (6 1998), p. 1253–1265 (cf. p. 22).
- [86] T. S. LUNDGREN. « Slow flow through stationary random beds and suspensions of spheres ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 51 (02 1972), p. 273–299 (cf. p. 22).
- [87] T. CHEVALIER et al. « Darcy's law for yield stress fluid flowing through a porous medium ». In : *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 195 (2013), p. 57–66 (cf. p. 23).
- [88] D. A. NIELD et A. BEJAN. *Convection in Porous Media*. New York : Springer-Verlag, 2006 (cf. p. 23).
- [89] M. J. CROCHET, A. R. DAVIES et K. WALTERS. *Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow*. Sous la dir. d'ELSEVIER. Elsevier, 1984 (cf. p. 27).
- [90] J. C. SLATTERY. *Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua*. Sous la dir. de MCGRAW-HILL. New York : McGraw-Hill, 1972 (cf. p. 28).
- [91] S. WHITAKER. « Advances in Theory of Fluid Motion in Porous Media ». In : *Industrial and Engineering Chemistry* 61 (1969), p. 14–28 (cf. p. 28).
- [92] W. G. GRAY. « A derivative of the equations for multi-phase transport ». In : *Chemical Engineering Science* 30 (1975), p. 229–233 (cf. p. 30).
- [93] J. C. SLATTERY. « Single-Phase Flow through Porous Media ». In : *AIChEJ* 15 (1969), p. 866–872 (cf. p. 30).
- [94] C. T. HSU et P. CHENG. « Thermal dispersion in a porous medium ». In : *Int. J. heat Mass Transfer* 33 (1990), p. 1587–1597 (cf. p. 31).
- [95] R. P. CHHABRA. *Bubbles, Drops, and Particles in Non-Newtonian Fluids*. 2^e éd. London : CRC Press, In., 1993 (cf. p. 31).
- [96] Y. KAWASE et J. ULBRECHT. « Newtonian fluid sphere with rigid or mobile interface in a shear thinning liquid drag and mass transfer ». In : *Chem. Engng. Commun.* 8 (1981), p. 213–228 (cf. p. 32).

- [97] Y. KAWASE et M. MOO-YOUNG. « Approximate solution of power-law fluid past a particle at low Reynolds number ». In : *Journal Non-Newtonian Fluid Mech.* 21 (1986), p. 167–175 (cf. p. 32).
- [98] T. BARTH et M. OHLBERGER. « Finite volume methods : foundation and analysis ». In : *Encyclopedia of Computational Mechanics* (2004). Sous la dir. d'Erwin STEIN, René de BORST et Thomas J. R. HUGHES, p. 1–57 (cf. p. 1, 35).
- [99] S. V. PATANKER. *Numerical Heat transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation, 1980 (cf. p. 35, 39, 47).
- [100] F. H. HARLOW et J. E. WELCH. « Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface ». In : *Physics Fluids* 8 (1965), p. 2182–2189 (cf. p. 46).
- [101] G. MOMPEAN et M. DEVILLE. « Unsteady finite volume simulation of Oldroyd-B fluid through a three-dimensional planar contraction ». In : *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 72 (1997), p. 253–279 (cf. p. 35).
- [102] C. W. HIRT, B. D. NICHOLS et N. C. ROMERO. *SOLA : A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows*. Report LA - 5852. Los Alamos Scientific Laboratory, 1975 (cf. p. 35).
- [103] D. K. GARTLING, C. E. HICKOX et R. C. GIVLER. « Simulation of coupled viscous and porous flow problems ». In : *International Journal of Computational Fluid Dynamics* 7.2 (1996), p. 23–48.
- [104] R. J. WAKEMAN et E. S. TARLETON. « Filtration : Equipement Selection Modelling and Process Simulation ». In : *Elsevier Science Limited, Oxford, UK* (1993).
- [105] W. G. GRAY et K. O'NEILL. « On the general equations for flow in porous media and their reduction to Darcy's law ». In : *Water Resources Research* 12 (1976), p. 148–154.
- [106] R. B. BIRD, R. C. ARMSTRONG et O. HASSAGER. *Dynamics of polymeric liquids*. Sous la dir. de John WILEY et SONS. T. 1. New York : John Wiley et Sons, 1987.
- [107] A. ERN, I. MOZOLEVSKI et L. SCHUH. « Accurate velocity reconstruction for Discontinuous Galerkin approximations of two-phase porous media flows ». In : *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I* 347 (2009), p. 551–554.
- [108] C. BECKERMANN, R. VISKANTA et S. RAMADHYANI. « Natural convection in vertical enclosures containing simultaneously fluid and porous layers ». In : *J. Fluid Mech.* 186 (1988), p. 257–284.
- [109] G. AMBERG et G. M. HOMSY. « Nonlinear analysis of buoyant convection in binary solidification with application to channel formation ». In : *J. Fluid Mech.* 252 (1993), p. 79–98.
- [110] F. CHEN, J. W. LU et T. L. YANG. « Convective instability in ammonium chloride solution directionally solidified from below ». In : *J. Fluid Mech* 276 (1994), p. 163–187.
- [111] D. M. ANDERSON et M. G. WORSTER. « Weakly nonlinear analysis of convection in mushy layers during the solidification of binary alloys ». In : *J. Fluid Mech* 302 (1995), p. 307–331.
- [112] C. A. CHUNG et F. CHEN. « Onset of plume convection in mushy layers ». In : *J. Fluid Mech.* 408 (2000), p. 53–82.

- [113] M. LEBARS et M. G. WORSTER. « Solidification of a binary alloy : finite-element, single-domain simulation and new benchmark solutions ». In : *J. Comp. Physics* 216.1 (2006b), p. 247–263.
- [114] M. G. WORSTER. « Instabilities of the liquid and mushy regions during solidification of alloys ». In : *J. Fluid Mech* 237 (1992), p. 649–669.
- [115] E. ARQUIS et J. P. CALTAGIRONE. « Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d’une interface milieu fluide-milieu poreux : application à la convection naturelle ». In : *C. R. Acad. Sci. Paris* 299 (1984).
- [116] P. LEBRETRON, J. P. CALTAGIRONE et E. ARQUIS. « Natural convection in a square cavity with thin porous layers in its vertical walls ». In : *Journal Heat Transfer* 113 (1991), p. 892–898.
- [117] D. C BLEST et al. « Curing simulation of thermoset composites ». In : *Composites : Part A* 30 (1999b), p. 1289–1309.
- [118] D. C BLEST et al. « Curing simulation by autoclave resin infusion ». In : *Composites Science and Technology* 59 (1999a), p. 2297–2313.
- [119] C. FELDER, C. OLTEAN et M. BUÈS. « Infiltration d’une solution saline dans un milieu poreux hétérogène en présence d’un gradient hydraulique ». In : *XV Congrès Français de Mécanique*. Nancy, 3-7 Septembre. 2001.
- [120] H. J. ZHANG et al. « Solute transport in nearly saturated porous media under landfill clay liners : A finite deformation approach ». In : *Journal of Hydrology* 479 (2013), p. 189–199.
- [121] J. SHANG, C. LIU et Z. WANG. « Transport and retention of engineered nanoporous particles in porous media : Effects of concentration and flow dynamics ». In : *Colloids and Surfaces A : Physicochem. Eng. Aspects* 417 (2013), p. 89–98.
- [122] B. P. LEONARD. « A stable accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation ». In : *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering* 19 (1979), p. 59–98 (cf. p. 43).
- [123] J. A. OCHOA-TAPIA et S. WHITAKER. « Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid-I. Theoretical development ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 38 (14 sept. 1995), p. 2635–2646 (cf. p. 21).
- [124] X. ZHOU et M. YU. « The structural flow in pipe containing porous medium saturated with power-law fluid ». In : *Journal of Hydrodynamics* (2012) (cf. p. 55).
- [125] J. G. OLDROYD. « On the formulation of rheological equations of state ». In : *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. T. 200. 1063. The Royal Society. 1950, p. 523–541 (cf. p. 12).
- [126] C. J. HAWTHORN, K. P. WEBER et R. E. SCHOLTEN. « Littrow Configuration Tunable External Cavity Diode Laser with Fixed Direction Output Beam ». In : *Review of Scientific Instruments* 72.12 (déc. 2001), p. 4477–4479. URL : <http://link.aip.org/link/?RSI/72/4477/1>.
- [127] A. S. ARNOLD, J. S. WILSON et M. G. BOSHIER. « A Simple Extended-Cavity Diode Laser ». In : *Review of Scientific Instruments* 69.3 (mar. 1998), p. 1236–1239. URL : <http://link.aip.org/link/?RSI/69/1236/1>.

-
- [128] Carl E. WIEMAN et Leo HOLLBERG. « Using Diode Lasers for Atomic Physics ». In : *Review of Scientific Instruments* 62.1 (jan. 1991), p. 1–20. URL : <http://link.aip.org/link/?RSI/62/1/1>.

Méthode des différences finies

A.1 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement

Reprenons l'équation 6.29 en utilisant la fonction de courant.

$$(1 + \lambda_1 \Gamma \frac{\partial}{\partial t}) \Omega = -Ra(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (\text{A.1})$$

où Ω est la vorticité définie par :

$$\Omega = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} = -\nabla^2 \Psi. \quad (\text{A.2})$$

La méthode S.O.R donne directement la valeur de la fonction de courant Ψ à l'instant $(n+1)$ au noeud considéré. Les dérivées partielles du premier et du deuxième ordre sont approximées selon les schémas suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2})_{i,k} = \frac{\Psi_{i+1,k} + \Psi_{i-1,k} - 2\Psi_{i,k}}{\Delta x^2}, \\ (\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2})_{i,k} = \frac{\Psi_{i,k+1} + \Psi_{i,k-1} - 2\Psi_{i,k}}{\Delta z^2}. \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

Conditions aux frontières hydrodynamiques

La condition d'imperméabilité imposée sur les frontières de la cavité se traduit par :

$$\begin{array}{ll} x \pm \frac{A}{2} & \Psi = 0 \\ z = 0; a & \Psi = 0. \end{array}$$

A.2 Discrétisation de l'équation d'énergie

L'équation d'énergie du système 5.10 peut se réécrire de la manière suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(wT)}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (\text{A.4})$$

La méthode des directions alternées consiste à diviser le pas de temps Δt en deux étapes, dans la première étape on avance avec $\Delta t/2$ et on résout le système de façon implicite suivant x et explicite suivant z , dans la deuxième étape on avance avec $\Delta t/2$ et on résout le système de façon explicite suivant x et implicite suivant z , ce qui revient à faire ce qui suit :

A.3 Implicite suivant x et explicite suivant z

Les termes suivants x vont être pris au temps $n + 1/2$ et ceux suivants z vont être pris au temps n . On prend un demi pas de temps $\Delta t/2$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_{(i,k)}^{n+1/2} - T_{(i,k)}^n}{\Delta t/2}. \quad (\text{A.5})$$

— les termes suivants x

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(uT)}{\partial x} \approx \frac{u_{(i+1,k)}^{n+1/2} T_{(i+1,k)}^{n+1/2} - u_{(i-1,k)}^{n+1/2} T_{(i-1,k)}^{n+1/2}}{2\Delta x}, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{(i+1,k)}^{n+1/2} + T_{(i-1,k)}^{n+1/2} - 2T_{(i,k)}^{n+1/2}}{\Delta x^2}. \end{array} \right. \quad (\text{A.6})$$

— les termes suivants z

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(wT)}{\partial z} \approx \frac{w_{(i,k+1)}^n T_{(i,k+1)}^n - w_{(i,k-1)}^n T_{(i,k-1)}^n}{2\Delta z}, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \approx \frac{T_{(i,k+1)}^n + T_{(i,k-1)}^n - 2T_{(i,k)}^n}{\Delta z^2}. \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

On remplace maintenant tous les termes dans l'équation d'énergie ce qui donne après réaménagement :

$$A(i)T_{(i-1,k)}^{n+1/2} + B(i)T_{(i,k)}^{n+1/2} + C(i)T_{(i+1,k)}^{n+1/2} = D(i), \quad (\text{A.8})$$

avec

$$A(i) = -\frac{1}{\Delta x^2} - \frac{1}{2\Delta x} u_{(i-1,k)}^{n+1/2},$$

$$B(i) = 2\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta t}\right),$$

$$C(i) = -\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{2\Delta x} u_{(i+1,k)}^{n+1/2},$$

$$D(i) = \left[\frac{1}{\Delta z^2} + \frac{1}{2\Delta x} w_{(i,k-1)}^n \right] T_{(i,k-1)}^n + 2 \left(-\frac{1}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta t} \right) T_{(i,k)}^n + \left[\frac{1}{\Delta z^2} - \frac{1}{2\Delta x} w_{(i,k+1)}^n \right] T_{(i,k+1)}^n.$$

Si on discrétise dans la direction x en NX intervalles Δx on aura NX + 1 points. L'application de notre système de $i = 2$ à $i = NX$, nous permet d'avoir un système d'équation tri-diagonale. Pour résoudre ce système on peut utiliser l'algorithme de Thomas. Dans notre cas il faut donc éliminer le A(2) et le C(NX), pour avoir un système qui peut se résoudre avec Thomas. Pour cela, si on a une condition aux limites de type Neumann (flux constant) on discrétise la condition aux limites et on remplace, par exemple :

$\frac{\partial T}{\partial x} = q$ en différences finies on a :

$$T(1, k) = \frac{4}{3}T(2, k) - \frac{1}{3}T(3, k) - \frac{2}{3}\Delta x q \text{ (décentré en avant 2nd ordre)}$$

$$T(Nx + 1, k) = \frac{4}{3}T(Nx, k) - \frac{1}{3}T(Nx - 1, k) + \frac{2}{3}\Delta x q \text{ (décentré en arrière 2nd ordre)}$$

1. pour $i=2$ on a :

$$A(2)T(1, k) + B(2)T(2, k) + C(2)T(3, k) = D(2).$$

On remplace $T(1, k)$ par sa valeur et après ré-arrangement on obtient :

$$\underbrace{\phantom{[A(2) - \frac{4}{3}A(2)]T(1, k)}}_{\text{nouveau A(2)}} + \underbrace{[B(2) + \frac{4}{3}A(2)]T(2, k)}_{\text{nouveau B(2)}} + \underbrace{[C(2) - \frac{1}{3}A(2)]T(3, k)}_{\text{nouveau C(2)}} = \underbrace{D(2) + \frac{2}{3}A(2)\Delta x q}_{\text{nouveau D(2)}}.$$

2. pour $i=Nx$ on a :

$$A(Nx)T(Nx - 1, k) + B(Nx)T(Nx, k) + C(Nx)T(Nx + 1, k) = D(Nx).$$

On remplace $T(Nx + 1, k)$ par sa valeur et après ré-arrangement on obtient :

$$\underbrace{[A(Nx) - \frac{1}{3}C(Nx)]T(Nx - 1, k)}_{\text{nouveau A(Nx)}} + \underbrace{[B(Nx) + \frac{4}{3}C(Nx)]T(Nx, k)}_{\text{nouveau B(Nx)}} + \underbrace{}_{\text{nouveau C(Nx)}} = \underbrace{D(Nx) - \frac{2}{3}C(Nx)\Delta x q}_{\text{nouveau D(2)}}. \quad (\text{A.9})$$

A.3.1 Explicite suivant x et implicite suivant z

Les termes suivant x vont être pris au temps n et ceux suivant z au temps $n + 1/2$

— les termes suivants x

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(uT)}{\partial x} \approx \frac{u_{(i+1,k)}^n T_{(i+1,k)}^n - u_{(i-1,k)}^n T_{(i-1,k)}^n}{2\Delta x}, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{(i+1,k)}^n + T_{(i-1,k)}^n - 2T_{(i,k)}^n}{\Delta x^2}. \end{array} \right. \quad (\text{A.10})$$

— les termes suivants z

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(wT)}{\partial z} \approx \frac{w_{(i,k+1)}^{n+1/2} T_{(i,k+1)}^{n+1/2} - w_{(i,k-1)}^{n+1/2} T_{(i,k-1)}^{n+1/2}}{2\Delta z}, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \approx \frac{T_{(i,k+1)}^{n+1/2} + T_{(i,k-1)}^{n+1/2} - 2T_{(i,k)}^{n+1/2}}{\Delta z^2}. \end{array} \right. \quad (\text{A.11})$$

En suivant la même procédure décrit dans A.3 on trouve :

$$A(j)T_{(i,k+1)}^{n+1/2} + B(j)T_{(i,k)}^{n+1/2} + C(j)T_{(i,k-1)}^{n+1/2} = D(j), \quad (\text{A.12})$$

avec

$$A(j) = -\frac{1}{\Delta z^2} - \frac{1}{2\Delta z} w_{(i,k+1)}^{n+1/2},$$

$$B(j) = 2\left(\frac{1}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta t}\right),$$

$$C(j) = -\frac{1}{\Delta z^2} + \frac{1}{2\Delta z} w_{(i,k-1)}^{n+1/2},$$

$$D(j) = \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{2\Delta x} u_{(i-1,k)}^n\right] T_{(i-1,k)}^n + 2\left(-\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta t}\right) T_{(i,k)}^n + \left[\frac{1}{\Delta x^2} - \frac{1}{2\Delta x} u_{(i+1,k)}^n\right] T_{(i+1,k)}^n.$$

Pour une condition de type Neumann on obtient :

1. pour $i=2$ on a :

$$A(2)T(i, 1) + B(2)T(i, 2) + C(2)T(i, 3) = D(2).$$

On remplace $T(i, 1)$ par sa valeur et après ré-arrangement on obtient :

$$\underbrace{\phantom{[A(2) - \frac{1}{3}C(2)]T(i, 1)}}_{\text{nouveau } A(2)} + \underbrace{[B(2) + \frac{4}{3}A(2)]T(i, 2)}_{\text{nouveau } B(2)} + \underbrace{[C(2) - \frac{1}{3}A(2)]T(i, 3)}_{\text{nouveau } C(2)} = \underbrace{D(2) + \frac{2}{3}A(2)\Delta z q}_{\text{nouveau } D(2)}.$$

2. pour $i=Nz$ on a :

$$A(Nz)T(i, Nz - 1) + B(Nz)T(i, Nz) + C(Nz)T(i, Nz + 1) = D(Nz).$$

On remplace $T(i, Nz + 1)$ par sa valeur et après ré-arrangement on obtient :

$$\underbrace{[A(Nz) - \frac{1}{3}C(Nz)]T(i, Nz - 1)}_{\text{nouveau } A(Nz)} + \underbrace{[B(Nz) + \frac{4}{3}C(Nz)]T(i, Nz)}_{\text{nouveau } B(Nz)} + \underbrace{\phantom{[C(Nz) - \frac{1}{3}A(Nz)]T(i, Nz + 1)}}_{\text{nouveau } C(Nz)} = \underbrace{D(Nz) - \frac{2}{3}C(Nz)\Delta z q}_{\text{nouveau } D(2)} \quad (\text{A.13})$$

Table des matières

Remerciements	xv
Résumé	xvii
Symboles	xxi
Sommaire	xxiii
Liste des tableaux	xxv
Table des figures	xxvii
Introduction générale	1
1 Généralités	5
1.1 Définition et caractérisation d'un milieu poreux	5
1.1.1 Porosité	5
1.1.2 Perméabilité	6
1.1.3 Volume Élémentaire Représentatif <i>VER</i>	7
1.2 Comportement des fluides sous cisaillement	8
1.2.1 Fluide Newtonien	9
1.2.2 Fluide non Newtonien	9
1.3 Écoulement en milieu poreux saturé	13
1.3.1 Loi de de Darcy et ses extensions pour les fluides Newtoniens .	13
1.3.2 Loi de Darcy et ses extensions pour les fluides non-Newtoniens	16
 I Etude numérique de l'écoulement de fluides Newtonien et non Newtonien	 17
Synthèse bibliographique	19
2 Modélisation mathématique de l'écoulement	25
2.1 Introduction	25
2.2 Configuration étudiée	25
2.3 Hypothèses simplificatrices	25
2.4 Equations du problème	26
2.4.1 Équations de conservation	27
2.4.2 Équation à l'échelle macroscopique	27
2.5 Conclusion	34

3	Traitement numérique	35
3.1	Introduction	35
3.2	Discrétisation spatiale	35
3.2.1	Localisation des variables : maillage entrelacé	36
3.2.2	Équations de conservation pour un scalaire	38
3.2.3	Schéma numérique pour le terme convectif	39
3.2.4	Équation de la quantité de mouvement	40
3.3	Discrétisation temporelle	44
3.3.1	Méthode de résolution	46
3.4	Validation du code	47
3.4.1	Résultats prédits par la loi de Darcy	47
3.4.2	Résultats numériques	48
4	Résultats	51
4.1	Introduction	51
4.2	Écoulement Newtonien	51
4.2.1	Champ d'écoulement	51
4.2.2	Influence de la perméabilité	53
4.2.3	Influence du nombre de Darcy	55
4.3	Écoulement non-Newtonien	55
4.3.1	Modèle loi en puissance	55
	Conclusion	61
II Convection naturelle dans un milieu poreux saturé par un fluide non Newtonien		63
	Synthèse bibliographique	65
5	Formulation mathématique de la convection naturelle	69
5.1	Modélisation du problème	69
5.1.1	Equation de conservation de la masse	70
5.1.2	Equation de conservation de la quantité de mouvement	70
5.1.3	Equation de conservation de l'énergie	71
5.1.4	Conditions aux frontières	73
5.2	Adimensionnement et conditions aux limites	73
5.2.1	Equations adimensionnées	73
5.3	Transfert de chaleur	76
5.4	Conclusion	76
6	Stabilité linéaire de l'état de conduction	79
6.1	Formulation du problème de stabilité de l'état de conduction	79
6.1.1	Stabilité vis-à-vis des rouleaux transversaux $L=0$	82
6.1.2	Stabilité vis-à-vis des rouleaux longitudinaux $k=0$	84
6.2	Convection monocellulaire	86
6.2.1	Approximation d'écoulement parallèle	86
6.3	Transfert de chaleur	89
6.4	Comparaison avec la simulation numérique	90

Conditions aux frontières hydrodynamiques	141
6.4.1 Etablissement d'écoulement de la convection monocellulaire .	90
6.4.2 Validation du code numérique	91
6.4.3 Influence du nombre de Rayleigh sur la convection monocellulaire	92
6.4.4 Influence des paramètres rhéologiques du fluide viscoélastique	96
7 Bifurcation de Hopf	101
7.1 Introduction	101
7.2 Formulation du problème de stabilité de la convection monocellulaire	101
7.3 Résolution du problème aux valeurs propres.	103
7.3.1 Stabilité de la convection monocellulaire vis-à-vis des rouleaux longitudinaux $k=0$	103
7.3.2 Stabilité de la convection monocellulaire vis-à-vis des rouleaux transversaux $L=0$	104
7.4 Comparaison avec la simulation numérique	106
7.4.1 Fluides Newtoniens	106
7.5 Cas d'une couche poreuse saturée par un fluide viscoélastique	108
7.5.1 Influence des paramètres rhéologiques	108
7.5.2 Comportement des champs de vitesse, de température et de trans- fert de chaleur moyen	111
7.5.3 Influence des paramètres rhéologiques	114
Conclusion	117
Conclusion générale et perspectives	119
Bibliographie	123
A Méthode des différences finies	133
A.1 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement	133
A.2 Discrétisation de l'équation d'énergie	133
A.3 Implicite suivant x et explicite suivant z	134
A.3.1 Explicite suivant x et implicite suivant z	135
Table des matières	139

Résumé

Ce travail de thèse sur les milieux poreux est axé sur deux parties. La première concerne l'étude numérique de l'écoulement d'un fluide Newtonien ou non-Newtonien au sein d'un système fluide/poreux. L'approche à un seul domaine qui consiste à écrire l'équation de Navier-Stokes incluant le terme de Darcy-Brinkman-Forchheimer est adoptée dans cette étude. La relation entre le gradient de pression et la vitesse débitante linéaire dans le cas de Darcy où le fluide est Newtonien, est obtenue. Cette relation est étendue dans le cas non-Darcy où le fluide est non Newtonien. L'influence des nombres de Darcy et de Forchheimer sur la structure de l'écoulement est montrée. Dans la seconde partie, une étude de stabilité linéaire et numérique de la convection naturelle de fluides viscoélastiques saturant une couche poreuse horizontale chauffée par un flux constant est réalisée. Une étude d'instabilité primaire et secondaire nous a permis de montrer que pour un fluide Newtonien, la convection monocellulaire perd sa stabilité au profit des rouleaux longitudinaux. Dans le cas des fluides viscoélastiques, on trouve que l'élasticité du fluide induit la sélection des rouleaux transversaux propagatifs. Une solution numérique basée sur un schéma aux différences finies est venue conforter ces résultats analytiques.

Mots clés : milieux poreux, simulation numérique, instabilité thermique, loi de darcy, convection naturelle, fluide non-newtonien.

Abstract

The present thesis on porous media concentrates in two parts. The first concerns the numerical study of the flow of a Newtonian or a non-Newtonian fluid within a fluid/porous system. The approach of a single domain, which consists of/in writing the Navier-Stokes equation including the Darcy-Brinkham-Forchheimer term, is chosen in this study. The linear relation between the pressure gradient and the bulk velocity in the Darcy case, for which the fluid is Newtonian, is obtained. This relation is extended to the non-Darcy case, for which the fluid is non-Newtonian. The influence of Darcy and Forchheimer numbers on the structure of the flow is presented. In the second part, linear stability and numerical analysis of the natural convection of viscoelastic fluids saturating a horizontal porous layer heated by a constant flux is performed. A primary and secondary instability study allowed to show that, for a Newtonian fluid, the unicellular convection loses its stability to the benefit of longitudinal rolls. In the case of viscoelastic fluids, the elasticity of the fluid leads to the selection of propagation transverse rolls. A numerical solution based on a finite difference scheme has reinforced these analytical results.

Keywords: porous media, numerical simulation, thermal instability, darcy's law, natural convection, non-newtonian fluid.
