Numéro d'ordre : 42061

Université Lille 1 - Laboratoire Paul Painlevé

École Doctorale des Sciences pour l'Ingénieur (Lille)

THÈSE DE DOCTORAT

discipline : Mathématiques

présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur par :

BETINA Adel

Structure locale des variétés p-adiques de Hecke-Hilbert aux points classiques de poids 1.

---

sous la direction du professeur **Mladen DIMITROV**

Rapporteurs

Benoît Stroh	Université Paris 13.
Vinayak Vatsal	University of British Columbia (Canada).

Soutenue le 21 juin 2016 devant le jury composé de

Denis Benois	Université de Bordeaux.
Mladen Dimitrov	Université Lille 1.
Valery Gritsenko	Université Lille 1.
Andrei Jorza	University of Notre Dame (USA).
Ariane Mézard	Université Pierre et Marie Curie.
Benoît Stroh	Université Paris 13.

Université de Lille 1 SCIENCES ET TECHNOLOGIES

Laboratoire Paul Painlevé

Remerciements. Je tiens à remercier le professeur Mladen Dimitrov pour m'avoir proposé ce sujet et pour toute son aide. Je suis honoré d'avoir travaillé sous sa direction. Il a été toujours présent pour me soutenir et me conseiller au cours de cette thèse.

Je remercie Benoît Stroh d'avoir accepté d'être rapporteur et de faire partie du jury de cette thèse et je remercie aussi Vinayak Vatsal d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse. Je remercie Denis Benois,Valery Gritsenko, Andrei Jorza et Ariane Mézard pour avoir accepté de faire partie du jury.

Durant la préparation ce cette thèse à l'université Lille 1, j'ai trouvé de très bonnes conditions de travail au sein du laboratoire Paul Painlevé. Je suis redevable au programme PROFAS qui m'a permis d'obtenir une bourse. Je remercie le Labex CEMPI, ainsi que les membres du laboratoire Paul Painlevé et de l'UFR de mathématiques, en particulier Pierre Dèbes et Benoit Fresse, pour leur accueil.

Au sein du laboratoire Paul Painlevé, j'ai connu des enseignant-chercheurs sympathiques ayant contribué à ce qu'il y ait une ambiance de travail agréable au sein du labos, je pense notamment à : Niels Borne, Lorenzo Ramero, Pierre Dèbes, Raf Cluckers, Dimitri Markouchevitch, Razvan Litcanu et Michel Emsalem.

J'aimerai remercier Henri Darmon, Ralph Greenberg, Victor Rotger et Vinayak Vatsal pour les discussions enrichissantes que j'ai eu avec eux.

J'aimerai remercier aussi mes collègues : Amjed Ghabra, Hassan Jolany et tous les autres que je n'ai pas pu citer. Je remercie aussi Daniel Barrera et Emmanuel Lecouturier pour toutes les discussions qu'on a eu.

Finalement, j'aimerais remercier ma famille, qui m'a énormément appuyée tout au long de mes études et de ma vie.

Résumé. On montre que la variété de Hecke associée aux formes de Hilbert sur un corps totalement réel F est lisse aux points correspondant à certaines séries thêta de poids 1 et on donne aussi un critère pour que le morphisme de poids soit étale en ces points. Lorsque les séries thêta sont à multiplication réelle, on construit des formes surconvergentes propres généralisée qui ne sont pas classiques et l'on exprime leurs coefficients de Fourier à l'aide de logarithmes p-adiques de nombres algébriques.

Si $F = \mathbb{Q}$, on complète les résultats de Bellaïche-Dimitrov aux points où la courbe de Coleman-Mazur est lisse mais pas étale au dessus de l'espace des poids en donnant un critère précis pour que l'indice de ramification soit égale à 2.

Notre approche utilise la théorie des déformations et pseudo-déformations galoisiennes.

Abstract. We show that the Eigenvariety attached to Hilbert modular forms over a totally real field F is smooth at the points corresponding to certain classical weight one theta series and we give a precise criterion for etaleness over the weight space at those points. In the case where the theta series has real multiplication, we construct a non-classical overconvergent generalised eigenform and compute its Fourier coefficients in terms of p-adic logarithms of algebraic numbers.

When $F = \mathbb{Q}$, we complete the work of Bellaïche-Dimitrov at the points where the Eigencurve is smooth but not etale over the weight space by giving a precise criterion for the ramification index to be 2.

Our approach uses deformations and pseudo-deformations of Galois representations.

Table des matières

Introduction

Les formes modulaires de Hilbert de poids 1 correspondent dans le programme de Langlands à des représentations impaires de dimension deux des groupes de Galois des corps totalement réels. Une direction de cette correspondance a été démontré par Deligne-Serre [**21**], Rogawski-Tunnell [**51**] et Ohta [**47**], et la méthode est basée sur des congruences avec des formes modulaires de poids strictement plus grand que 1. L'autre direction a été démontré par Langland [**46**], Buzzard-Taylor [**11**] et [**12**], Kassaei-Sasaki-Tian [**41**] et [**42**] sous certaines hypothèses, et la preuve a été achevé par Pilloni-Stroh dans [**49**].

On s'intéresse à la question suivante : combien de familles p-adiques se spécialisent en une forme classique de Hilbert de poids 1. Géométriquement, cette question est équivalente à la description de la structure locale des variété de Hecke-Hilbert au point correspondant à cette forme de poids 1. Sous certaines hypothèses, on donne une réponse à cette question en utilisant la théorie des déformations galoisiennes de Mazur et quelques outils cohomologiques de la théorie du corps des classes.

En général, on n'a pas beaucoup de résultats sur la géométrie des variétés de Hecke-Hilbert. Par exemple, on ne sait pas si elles ont un nombre fini de composantes ou si elles sont propres sur l'espace des poids (voir [**52**]). Lorsque $F = \mathbb{Q}$, Diao et Liu ont montré dans [**23**] que la courbe de Coleman-Mazur est propre sur l'espace des poids. On sait aussi que la courbe de Coleman-Mazur est lisse en la plupart des points classiques [**9**],[**53**], [**15**], [**18**] et [**7**], bien qu'il existe des points associés à des formes propres classiques et irrégulières en p pour lesquels la courbe de Hecke n'est pas lisse [**26**].

Soit $\mathcal{C}$ la courbe de Coleman-Mazur de niveau modéré N induite par les opérateurs de Hecke U_p et $T_\ell, <\ell>$ pour $\ell \nmid Np$. Il existe un morphisme localement fini plat κ de $\mathcal{C}$ vers l'espace poids $\mathcal{W}$ appelé morphisme poids.

Soient f une forme classique de poids 1 de niveau modéré N ordinaire en p, $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ la représentation galoisienne d'image finie associée à f par Deligne et Serre [**21**, Théorème 4.1]. Le choix d'un plongement $\iota_p : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ induit une injection $G_{\mathbb{Q}_p} \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}}$. Puisque l'image de ρ est finie alors $\rho_{|G_{\mathbb{Q}_p}} = \psi' \oplus \psi''$, où $\psi' : G_{\mathbb{Q}_p} \to \bar{\mathbb{Q}}_p^\times$ (resp. $\psi'' : G_{\mathbb{Q}_p} \to \bar{\mathbb{Q}}_p^\times$) est un caractère (resp. un caractère non-ramifié).

Soient $\mathcal{T}$ le complété de l'anneau local de $\mathcal{C}$ au point x associé à f et Λ le complété de l'anneau local de $\mathcal{W}$ au poids $\kappa(x)$. Le morphisme κ induit un morphisme fini et plat $\kappa^\# : \Lambda \to \mathcal{T}$ d'anneaux locaux.

On va supposer dans le reste de ce travail que f satisfait la condition suivante de régularité en p :

$$\psi' \neq \psi'' \qquad (\mathbf{Reg}_p)\,.$$

Soit $\mathfrak{C}$ la catégorie des $\bar{\mathbb{Q}}_p$-algèbres complètes noethériennes locales de corps résiduel $\bar{\mathbb{Q}}_p$ dont les morphismes sont les homomorphismes d'anneaux locaux induisant l'identité sur les corps résiduels. Soit $(\mathcal{R}^{ord}, \rho^{ord})$ le couple qui représente les déformations p-ordinaires de (ρ, ψ'') (voir [**9**, §2]). Bellaïche et Dimitrov ont montré dans [**9**, 5.1, 6.1, 6.2] le résultat suivant :

THÉORÈME. [**9**, 1.1] *Supposons que ρ satisfait* $(\mathbf{Reg}_p)$. *Alors :*

(i) Il existe une déformation p-ordinaire $\rho_{\mathcal{T}} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{T})$ de ρ.

(ii) L'anneau local $\mathcal{R}^{ord}$ est de valuation discrète et la déformation $\rho_{\mathcal{T}}$ induit un isomorphisme de Λ-algèbres $\mathcal{R}^{ord} \simeq \mathcal{T}$.

(iii) Le morphisme $\kappa^{\#} : \Lambda \to \mathcal{T}$ est ramifié si, est seulement si, f est à multiplication réelle par un corps quadratique réel dans lequel p est décomposé.

Le cas où $\mathcal{C}$ est ramifiée sur $\mathcal{W}$ au point x (voir (iii) ci-dessus) a été étudié par Cho et Vatsal dans [**15**] sous certaines hypothèses supplémentaires. Greenberg et Vatsal ont annoncé aussi un résultat similaire à celui de Bellaïche et Dimitrov sous l'hypothèse que la représentation adjointe est régulière en p.

Darmon, Lauder et Rotger ont trouvé une application au théorème ci-dessus à une variante de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer et ont conjecturé une relation entre les intégrales p-adiques itérées, le logarithme p-adique d'une unité de Stark de H et les points globaux d'une courbe elliptique E sur un corps de nombres [**19**].

Soit M un corps quadratique réel dans lequel p est décomposé, $\epsilon_M : G_{\mathbb{Q}}/G_M \to \{-1, 1\}$ le caractère non trivial et σ un générateur de $\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q})$. On dit que f est à multiplication réelle par M si $\rho \simeq \rho \otimes \epsilon_M$. D'après la proposition [**33**, 3.1], il existe un caractère $\psi : G_M \to \bar{\mathbb{Q}}_p^{\times}$ tel que $\rho \simeq \mathrm{Ind}_M^{\mathbb{Q}} \psi$. Le plongement ι_p induit une place canonique v de M au dessus de p, on note v^{σ} l'autre place. L'hypothèse que ρ est p-régulière implique que $\psi_{|G_{M_v}} \neq \psi^{\sigma}_{|G_{M_v}}$. De plus, p est décomposé dans M, donc $G_{M_v} = G_{\mathbb{Q}_p}$, $\psi_{|G_{M_v}} = \psi'$ et $\psi^{\sigma}_{|G_{M_v}} = \psi''$.

Puisque $\rho \simeq \rho \otimes \epsilon_M$ (i.e $\rho = \mathrm{Ind}_M^{\mathbb{Q}} \psi$), l'application donnée par $\rho^{ord} \to \rho^{ord} \otimes \epsilon_M$ induit une involution $\tau : \mathcal{R}^{ord} \to \mathcal{R}^{ord}$. On note par $\mathcal{R}_{\tau=1}$ le sous anneau de $\mathcal{R}^{ord}$ fixé par τ.

Dans §2, on introduit un anneau $\mathcal{R}^{ps}$ qui représente les pseudo-déformations de la représentation réductible $\rho_{|G_M}$ à valeurs dans les objets de $\mathfrak{C}$ vérifiant certaines conditions locales en p et avec une trace invariante sous l'action de $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ (voir Définition §3.12). On note $\mathcal{R}^{ps}_{red}$ le quotient de $\mathcal{R}^{ps}$ par son nilradical.

THÉORÈME 0.1. *Supposons que f satisfait* $(\mathbf{Reg}_p)$, *alors il existe un isomorphisme d'anneaux locaux $\mathcal{R}_{\tau=1} \simeq \mathcal{R}^{ps}_{red}$ et $\mathcal{R}^{ps}_{red}$ est de valuation discrète.*

Cho-Vatsal ont montré le Théorème 0.1 en supposant que $p \geq 3$, $\mathrm{ad}\,\rho$ est régulière en p et la représentation résiduelle de ρ satisfait les hypothèses des théorèmes de Taylor-Wiles [**62**] et Wiles [**65**].

Soient $H \subset \bar{\mathbb{Q}}$ le corps de nombres fixé par $\ker(\mathrm{ad}\,\rho)$, $H'_{\infty,v}$ (resp. H'_{∞,v^σ}) la pro-p extension abélienne maximale de H non ramifiée en dehors des premiers au dessus de v (resp. v^σ) et $H_{\infty,v}$ (resp. H_{∞,v^σ}) le sous-corps fixé par le sous groupe de torsion de $\mathrm{Gal}(H'_{\infty,v}/H)$ (resp. $\mathrm{Gal}(H'_{\infty,v^\sigma}/H)$). Il est connu que $H_{\infty,v}$ et H_{∞,v^σ} sont des $\mathbb{Z}_p^s$-extensions.

Soient H_∞ le compositum de $H_{\infty,v}$ et de H_{∞,v^σ}, L_∞ la p-extension abélienne maximale non ramifée de H_∞ et X_∞ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L_\infty/H_\infty)$.

Il est connu que $\mathrm{Gal}(H_\infty/H) \simeq \mathbb{Z}_p^r$ agit par conjugaison sur X_∞, et donc X_∞ a une structure de $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(H_\infty/H)]]$-module. Dans [**58**], Serre a montré qu'il existe un isomorphisme canonique entre $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(H_\infty/H)]]$ et $\Lambda_r = \mathbb{Z}_p[[T_1, T_2, ...T_r]]$ qui envoie les générateurs topologiques τ_i de $\mathrm{Gal}(H_\infty/H)$ vers $T_i + 1$. Dans [**32**, §1], Greenberg a montré que X_∞ est toujours un module de type fini et de torsion sur Λ_r.

Soient F'' l'extension maximale non ramifiée de H contenue dans H_∞ (F''/H est finie) et L_0 le sous-corps de L_∞ fixé par $(T_1, .., T_r)X_\infty$.

Hypothèse. On suppose que L_0 est une extension abélienne de F''. (**G**)

Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(H_\infty/F'')$ peut être exprimé comme un produit de groupes d'inérties en les places au dessus de p de $\mathrm{Gal}(H_\infty/H)$ et puisque l'extension L_∞/H_∞ est non ramifiée, l'hypothèse (**G**) est vraie quand la projection $\mathrm{Gal}(L_\infty/F'') \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(H_\infty/F'')$ admet une section.

THÉORÈME 0.2. *On supposons que :*

(i) X_∞ *satisfait* (**G**).

(ii) f *satisfait* ($\mathbf{Reg}_p$).

Alors l'indice de ramification de $\mathcal{C}$ *sur* $\mathcal{W}$ *au point associé à* f *est égal à* 2.

On suppose maintenant que le caractère ψ est non ramifié en dehors de la place v. Soient $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de l'algèbre de Hecke p-ordinaire $h_{\mathbb{Q}} = h_{\mathbb{Q}}(Np^\infty)$ associé à la représentation résiduelle de ρ, $h_M = h_M(p^\infty)$ l'algèbre de Hecke p-ordinaire des formes modulaires de Hilbert sur M et ω l'involution d'Atkin-Lehner de $h_{\mathbb{Q},\mathfrak{m}}$(voir [**36**]). Doi, Hida and Ishii ont construit dans [**33**] un morphisme de changement de base

$$\beta : h_M \to h_{\mathbb{Q}}.$$

Ils ont construit aussi une action du groupe $\Delta = \mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q})$ sur h_M donnée par $\sigma(T_q) = T_{q^\sigma}$. Soit $\mathfrak{y}$ l'image inverse de $\mathfrak{m}$ par le morphisme β. Ils ont conjecturé sous certaines hypothèses que

$$h_{M,\mathfrak{y}}/(\Delta - 1)h_{M,\mathfrak{y}} \simeq h_{\mathbb{Q},\mathfrak{m}}^{\omega=1},$$

où $h_{\mathbb{Q},\mathfrak{m}}^{\omega=1}$ est le sous-anneau de $h_{\mathbb{Q},\mathfrak{m}}$ fixé par l'involution w (voir [**33**, 3.8]).

Soient $\mathfrak{n} = \beta^{-1}(\mathfrak{p}_f)$ l'idéal premier de hauteur 1 de h_M, $\mathcal{H}$ la complétion du localisé de h_M par $\mathfrak{n}$ et $\mathcal{H}_\Delta$ le quotient de $\mathcal{H}$ par l'idéal engendré par les éléments de la forme $\Delta(a) - a$ et $\mathcal{H}_\Delta^{red}$ le quotient de $\mathcal{H}_\Delta$ par le nilradical.

Après une extension par scalaires, on peut supposer que $\mathcal{H}_\Delta^{red}$ est une $\bar{\mathbb{Q}}_p$-algèbre. Soit $\mathcal{T}_{\tau=1}$ le sous anneau de $\mathcal{T}$ fixé par τ via l'identification $\mathcal{R}^{ord} \simeq \mathcal{T}$.

Théorème 0.3. *On suppose que f satisfait* ($\mathbf{Reg}_p$), *alors le morphisme β induit un isomorphisme $\beta_f : \mathcal{H}_\Delta^{red} \simeq \mathcal{T}_{\tau=1}$.*

La deuxième partie de cette thèse généralise le théorème [**9**, 1.1] aux formes modulaires de Hilbert de poids 1.

On fixe un nombre premier p, un corps de nombres totalement réel F de degré n sur $\mathbb{Q}$, $\mathfrak{n}$ un idéal de l'anneau des entiers $\mathfrak{o}$ de F tel que $\mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n}) \geq 5$ et I_F un ensemble de n plongements complexes de $\bar{\mathbb{Q}}$ dans $\bar{\mathbb{Q}}$ qui prolongent les plongements distincts de F dans $\bar{\mathbb{Q}}$. Soit $\mathcal{E}$ la variété de Hecke-Hilbert de niveau modéré $\mathfrak{n}$ associée à F introduite par F.Andreatta, A.Iovita et V.Pilloni dans [**1**]. Il existe un morphisme localement fini $\kappa : \mathcal{E} \to \mathcal{W}_F$ appelé le morphisme poids, où $\mathcal{W}_F$ est la variété rigide sur $\mathbb{Q}_p$ qui représente les morphismes $\mathbb{Z}_p^\times \times \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}}^F \mathbb{G}_m(\mathbb{Z}_p) \to \mathbb{G}_m$. D'autre part, Kisin et Lai ont construit dans [**44**] la courbe de Hecke de poids parallèle de niveau modéré $\mathfrak{n}$ étendant la construction de Coleman-Mazur de la courbe de Hecke [**18**], on note $\mathcal{C}_F$ sa partie cuspidale. On peut identifier $\mathcal{C}_F$ avec la sous-variété fermée de $\mathcal{E}$ donné par l'équation $v = 0$ où (w, v) sont les poids de $\mathcal{E}$, et on peut identifier aussi le lieu ordinaire de $\mathcal{C}_F$ et les points du lieu quasi-ordinaire de $\mathcal{E}$ de poids parallèle. Dans le cas où $F = \mathbb{Q}$ la courbe $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ correspond à la partie cuspidale de la courbe de Coleman-Mazur $\mathcal{C}$.

Soit f une forme modulaire de Hilbert cuspidale sur F, de poids 1, propre, de niveau modéré $\mathfrak{n}$ et de pente finie dans le cas où p divise le niveau de f. Soit $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ la représentation galoisienne d'image finie associée à f par Rogawski-Tunnell [**51**]. Puisque l'image de ρ est finie alors pour tout premier $\mathfrak{p}_i$ de F au dessus de p, la restriction de ρ au groupe de décomposition $G_{F_{\mathfrak{p}_i}}$ est la somme de deux caractères $\psi_i' \oplus \psi_i''$ dans l'un est non-ramifié. On dit que f est régulière en p si pour tout premier $\mathfrak{p}_i$ de F au dessus de p, la condition $\psi_i' \neq \psi_i''$ est vérifiée.

Pour déformer p-adiquement f, on doit choisir une p-stabilisation de f de pente finie et qui est une forme modulaire de Hilbert, propre, de poids 1 et de niveau modéré $\mathfrak{n}$ ayant les mêmes valeurs propres de f en dehors de p et telle que ses valeurs propres pour les opérateurs $\{U_{\mathfrak{p}_i}\}_{\mathfrak{p}_i|p}$ sont non nulles (voir [**64**, §1.2]). Une p-stabilisation de f est ordinaire en p et elle définit un point du lieu quasi-ordinaire de la variété de Hecke $\mathcal{E}$ et qui appartient même au lieu ordinaire de $\mathcal{C}_F$ (car f est de poids parallèle et d'image finie).

Soit f une p-stabilisation d'une série thêta $\theta(\psi)$ de poids 1 et de niveau modéré $\mathfrak{n}$, où $\psi : G_M \to \bar{\mathbb{Q}}_p^\times$ est un caractère d'ordre fini et M une extension quadratique de F. La forme modulaire f définit un point $x \in \mathcal{E}$ (même $x \in \mathcal{C}_F$) et on note respectivement $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^{ord}$ les complétés des anneaux locaux de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}_F$ en x et Λ le complété de l'anneau local de $\mathcal{W}_F$ en $\kappa(x)$.

Soit $\mathfrak{m}_\Lambda$ l'idéal maximal de Λ et $\mathcal{T}' = \mathcal{T}/m_\Lambda\mathcal{T}$ l'anneau local de la fibre de $\kappa(x)$ en x. Notons que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}/\mathfrak{m}_\Lambda\mathcal{T}$ est un anneau artinien, puisque κ est localement fini.

Soit S_p (resp. S^p) l'ensemble des premiers de F au-dessus de p qui se décomposent dans M (resp. qui sont inertes ou qui se ramifient dans M). Pour tout premier $\mathfrak{p}_i$ de F au dessus de p on note e_i l'indice de ramification de $\mathfrak{p}_i$ et f_i le degré d'inertie de $\mathfrak{p}_i$ (on a $\sum_{\mathfrak{p}_i|p} e_i f_i = [F:\mathbb{Q}] = n$).

Théorème 0.4. *Supposons que f est p-régulière, M est totalement réel et que la conjecture de Leopoldt est vraie pour M, alors :*

(i) la variété $\mathcal{E}$ est toujours lisse au point x et la dimension de l'espace tangent de la fibre $\mathcal{T}'$ de $\kappa(x)$ en x est égale à $\sum_{\mathfrak{p}_i \in S_p} e_i.f_i$.

(ii) la dimension de l'espace tangent de $\mathcal{T}^{ord}$ est égal à $\max\{1, \sum_{\mathfrak{p}_i \in S_p} f_i.e_i\}$.

Lorsque $F = \mathbb{Q}$, le théorème ci-dessus a été démontré par Bellaïche et Dimitrov [**9**] et aussi par Cho-Vatsal [**15**] sous certaines hypothèses supplémentaires.

Remarque : Nous avons appris récemment que S.V.Deo a annoncé un résultat similaire au théorème 0.4 dans [**22**] en utilisant une méthode différente pour calculer les dimensions des espaces tangents de nos problèmes de déformation. Il a annoncé un résultat similaire au théorème 0.7 sous l'hypothèse que la conjecture de *Schanuel*[1] est vraie pour le corps fixé de ad ρ.

Soit $S_1^\dagger(\mathfrak{n},\chi)[[f]]$ l'espace généralisé de f dans l'espace des formes modulaires surconvergentes de poids 1. D'après les hypothèses du Théorème 0.4 et si S_p est non vide, il existe un morphisme surjectif $\pi : \mathcal{T}' \twoheadrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p[\epsilon]$ de noyau I_π. Ainsi, I_π annule un sous-espace $S_1^\dagger(\mathfrak{n},\chi)[I_\pi]$ de $S_1^\dagger(\mathfrak{n},\chi)[[f]]$ de dimension 2, et ce sous-espace contient une forme non-classique. Suivant les définitions de [**19**], une forme surconvergente $f^\dagger$ dans $S_1^\dagger(\mathfrak{n},\chi)[I_\pi]$ qui n'est pas un multiple de f est appelée une forme généralisée attachée à f, et on dit qu'elle est normalisée si son premier coefficient de Fourier $a_\mathfrak{o}(f^\dagger)$ est nul.

Pour n'importe quel idéal principal $\mathfrak{q}$ de F, on notera respectivement $a_\mathfrak{q}(f^\dagger)$ et $a_\mathfrak{q}(f)$ les coefficients de Fourier de $f^\dagger$ et de f. Fixons un plongement $\iota_p : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ et notons $\log_p$ la détermination standard du logarithme p-adique sur $\bar{\mathbb{Q}}_p^\times$. Soient $\sigma \in G_F$ un automorphisme non trivial sur M, H le corps de nombres fixé par $\ker \psi/\psi^\sigma$, $\ell \nmid \mathfrak{n}p$ un premier de F inerte dans M et λ un premier de H au dessus de ℓ. Choisissons u_λ dans $\mathcal{O}_H[1/\lambda]^\times \otimes \mathbb{Q}$ une λ-unité de H de λ-valuation égale à 1.

1. La conjecture de Schanuel implique la conjecture de Leopoldt.

Soient $\sigma_\lambda \in \mathrm{Gal}(H_\lambda/F_\ell) \subset \mathrm{Gal}(H/F)$ le Frobenius en ℓ attaché à la place première λ et I'_F le sous-ensemble de I_F constitué par les plongements de $\bar{\mathbb{Q}}$ qui induisent les places premières de H au dessus de p apparaissant dans S_p suivant le diagramme (9) de §2.

Le théorème suivant est une généralisation du théorème [**19**, 1.1].

Théorème 0.5. *On suppose que :*

(i) M est un corps totalement réel et la conjecture de Leopoldt est vérifiée par M.

(ii) l'ensemble S_p n'est pas vide et p est relativement premier au niveau de $\theta(\psi)$.

(iii) $\theta(\psi)$ est p-régulière.

Soit f une p-stabilisation de $\theta(\psi)$ telle que $\psi^\sigma(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}_i})$ est la valeur propre de l'opérateur $U_{\mathfrak{p}_i}$ quand $\mathfrak{p}_i \in S_p$. Alors, on peut choisir un morphisme $\pi : \mathcal{T}' \twoheadrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p[\epsilon]$ tel que pour tout $\ell \nmid \mathfrak{n}p$,

$$a_\ell(f^\dagger) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \text{ se décompose dans } M; \\ \psi(\sigma\sigma_\lambda)\sum_{g'_i \in I'_F}\sum_{h \in \mathrm{Gal}(H/M)} \psi/\psi^\sigma(h).\log_p(g_i \circ h(u_\lambda)) & \text{si } \ell \text{ est inerte dans } M. \end{cases}$$

Les théorèmes suivant décrivent la structure locale de $\mathcal{E}$ au point x lorsque M n'est pas totalement réel.

Théorème 0.6. *Soient K un corps quadratique imaginaire dans lequel p est décomposé, $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ non trivial sur K et $\xi : G_K \to \bar{\mathbb{Q}}_p^\times$ un caractère d'ordre fini tel que ξ/ξ^σ est d'ordre paire. On suppose que :*

(i) M est l'extension biquadratique de $\mathbb{Q}$ contenue dans le corps de nombres fixé par $\ker(\xi/\xi^\sigma)$ et F est le sous-corps quadratique réel de M.

(ii) $\psi = \xi_{|G_M}$, $\psi_{|G_{M_{v_i}}} \neq \psi^\sigma_{|G_{M_{v_i}}}$ pour toute place première v_i de M au dessus de p et $(\psi/\psi^\sigma)^2$ est non trivial.

Alors le morphisme $\kappa : \mathcal{E} \to \mathcal{W}_F$ est étale au point associé à une p-stabilization f de $\theta(\xi_{|G_M})$.

Théorème 0.7. *On suppose que :*

(i) ψ est le relèvement de Teichimüller d'un caractère $\overline{\psi} : G_M \to \mathbb{F}_p^\times$, $(\psi/\psi^\sigma)^2$ est non trivial et $p \geq 3$.

(ii) Tout premier $\mathfrak{q}$ de F qui divise le conducteur de $\bar{\psi}$ se décompose dans M et $\bar{\psi}$ est ramifié sur un facteur de $\mathfrak{q}$ et non ramifié sur l'autre.

(iii) La restriction de $\bar{\rho} = \mathrm{Ind}_M^F \bar{\psi}$ à $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F(\sqrt{(-1)^{(p-1)/2}p}))$ est absolument irréductible et $\bar{\rho}$ est p-distinguée.

(iv) p est non ramifié dans M, S^p est vide et M a au moins un plongement réel.

Alors $\mathcal{E}$ est ramifiée sur l'espace des poids $\mathcal{W}_F$ au point x.

Organisation du texte. Cette thèse est composée de trois chapitres dont le premier est un rappel sur les formes modulaires géométriques, les variétés de Hecke-Hilbert et la courbe de Coleman-Mazur.

Dans le chapitre 2, on étudie la structure locale des variétés de Hecke-Hilbert aux points correspondant à des séries de thêta de poids 1 et on démontre les théorèmes 0.4, 0.5, 0.6 et 0.7.

Enfin, dans le chapitre 3, on étudie la structure locale de la courbe de Coleman-Mazur aux points correspondant à des formes classiques à multiplication réelle par un corps quadratique réel dans lequel p est décomposé et on démontre les théorèmes 0.1, 0.2 et 0.3.

CHAPITRE 1

FORMES MODULAIRES GÉOMÉTRIQUES

1. Courbes modulaires et formes modulaires surconvegentes

Soient $|.|_p$ une valeur absolue p-adique non triviale sur la complétion $\mathbb{C}_p$ de $\bar{\mathbb{Q}}_p$ pour la topologie p-adique, $N \geq 5$ un entier premier avec p et $Y_1(N)$ la courbe lisse sur $\mathbb{Z}_p$ qui représente le foncteur qui envoie un $\mathbb{Z}_p$-schéma S sur l'ensemble des classes d'isomorphismes de (E, P) où E est une courbe elliptique sur S et $P \in E(S)$ est un point de torsion d'ordre N. Il existe une courbe elliptique universelle E^{univ} sur $Y_1(N)$. Soient X la compactification minimale de $Y_1(N)$ et D le diviseur $X \setminus Y_1(N)$. On peut voir X comme l'espace de modules des courbes elliptiques généralisées.

Soient $E \to X$ le schéma semi-abélien universel, $e : X \to E$ la section identité et $\omega = e^*(\Omega^1_{E/X})$ le faisceau conormal en la section identité de E/X. Le faisceau ω est inversible et si $p > 3$, il exists une section E_{p-1} de $\omega^{\otimes p-1}$ qui se réduit $\mod p$ sur l'invariant de Hasse.

Soient $X^{rig} = X[1/p]$ la variété analytique rigide associée au schéma propre et plat X sur $\mathbb{Z}_p$, x un point fermé de $X[1/p]$ et K_x le corps résiduel en x. Le corps K_x est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, donc la valuation p-adique de $\mathbb{Q}_p$ s'étend de manière unique à K_x. On note R_x l'anneau des entiers de K_x ; puisque X est propre sur $\mathbb{Z}_p$, le critère valuatif de propreté implique que le morphisme $\mathrm{Spec}(K_x) \to X$ correspondant à x se relève en un morphisme $f_x : \mathrm{Spec}(R_x) \to X$.

Ainsi, $f_x^*(\omega^{\otimes p-1})$ est générée par une section t et si $p > 3$, alors $f_x^*(E_{p-1}) = a.t$ où $a \in R_x$. On pose $|E_{p-1}(x)|_p = |a(x)|_p$; par construction, la fonction qui associe à $x \in X(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ la valeur $|E_{p-1}(x)|_p$ est indépendante du choix de t. D'autre part, il existe un recouvrement affine fini d'ouverts $\mathfrak{U}$ de X tel que la restriction de ω à $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$ est triviale. Pour chaque $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}$, soit $t_{\mathcal{U}}$ un générateur de $\omega_{|\mathcal{U}}$ et supposons que $(E_{p-1})_{|\mathcal{U}} = a_{\mathcal{U}} t_{\mathcal{U}}$, où $a_{\mathcal{U}} \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U})$. Soit $\mathcal{U}^{rig}$ la fibre générique du complété formel de $\mathcal{U}$ le long de sa fibre spéciale. Alors $\mathcal{U}^{rig}$ est un affinoïde et on sait que $X^{\geq v} \cap \mathcal{U}^{rig} = \{x \in \mathcal{U}^{rig} : |a_{\mathcal{U}}(x)|_p \geq v\}$ est un affinoïde. Ainsi, pour chaque $v > 0$ tel que $v \in |\mathbb{C}_p|$, il est existe un unique espace rigide $X^{>v}$ dont les points sont les points fermés $x \in X[1/p]$ qui vérifient $|E_{p-1}(x)|_p > v$ et qui a pour recouvrement admissible $\{X^{\geq r} \mid r \in |\mathbb{C}_p|, r > v\}$ (pour plus de détails, voir [**16**]). Puisque le schéma X est lisse sur $\mathbb{Z}_p$ et que la réduction de $E_{p-1} \mod p$ s'annule sur les points correspondant aux courbes elliptiques supersingulières en p, l'espace rigide $X^{>v} = \{x \in X^{rig} \mid |E_{p-1}(x)|_p > v\}$ est le complément d'une réunion finie de disques fermés.

Si $p \leq 3$, on peut définir les voisinages surconvergents du lieu ordinaire de X^{rig} de la manière suivante :

Soit x un point supersingulier de la fibre spéciale $X_{\mathbb{F}}$ de X et $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$ le complété de l'anneau local de X en x. Puisque X est lisse sur $\mathbb{Z}_p$, alors $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$ est non-canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}_p[[T_x]]$ pour un paramètre T_x. Le choix d'un paramètre T_x correspond au choix d'un isomorphism d'espaces rigides t_x : $\operatorname{Spec}\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}(\bar{\mathbb{Q}}_p) \simeq B(0,1)$ où $B(0,1)$ est le disque unité de $\mathbb{Q}_p$. Pour $v < 1$, on note par $X^{\geq v}$ le complémentaire de l'union finie $\bigcup_{x \in S(X_{\mathbb{F}})} t_x^{-1}(B(0,v))$ dans X^{rig} où $S(X_{\mathbb{F}})$ désigne l'ensemble fini des points supersinguliers de $X_{\mathbb{F}}$. On remarque que les $\mathbb{Z}_p$-automorphismes de $\mathbb{Z}_p[[T_x]]$ envoient T_x vers $b.p + \mu T_x$, où $b \in \mathbb{Z}_p$ et $\mu \in \mathbb{Z}_p[[T_x]]^\times$, ainsi pour $v > 1/p$, $X^{\geq v}$ ne dépend pas du choix du paramètre T_x (voir [**11**] pour plus de détails).

Définition 1.1. *Pour une $\mathbb{Z}_p$-algèbre R, une forme modulaire de poids k, de niveau N et à coefficients dans R est un élément de $\mathrm{H}^0(X \times_{\mathbb{Z}_p} R, \omega^{\otimes k})$.*

On note $M_k(\Gamma_1(N), R)$ le R-module des formes modulaires de poids k, de niveau N et à coefficients dans R.

On remarque que si $N \leq 4$, le foncteur $Y_1(N)$ n'est plus représentable par un schéma, et dans ce cas on peut travailler avec $X_1(M)$ (i.e le compactifié de $Y_1(M)$) tel que $N \mid M$ et $M \geq 5$. Ainsi, une forme modulaire de poids k et de niveau $\Gamma_1(N)$ est un élément $\Gamma_1(N)$-invariant de $\mathrm{H}^0(X_1(M), \omega^{\otimes k})$.

Il existe un morphisme $\iota_\infty : \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_p((q))) \to Y_1(N)$ correspondant à la courbe de Tate $(\mathrm{Tate}(q), \iota_{can})$, où l'injection $\mu_N \hookrightarrow \mathbb{G}_m$ induit ι_{can}. Le morphisme ι_∞ s'étend en un morphisme $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_p[[q]]) \to X$ à la pointe $\infty \in X$, et l'évaluation de toute forme modulaire f sur la courbe de Tate avec sa différentielle canonique donne le développement de Fourier $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n q^n$.

Définition 1.2. *Pour v comme ci-dessus et K un corps p-adique, une forme modulaire v-surconvergente à coefficients dans K, de poids k et de niveau $\Gamma_1(N)$ est un élément de $M_k^{\geq v}(N,K) = \mathrm{H}^0(X^{\geq v} \times_{\mathbb{Z}_p} K, \omega^{\otimes k})$. La réunion $M_k^\dagger(N,K) = \varinjlim_{v \to 1^-} \mathrm{H}^0(X^{\geq v} \times_{\mathbb{Z}_p} K, \omega^{\otimes k})$ est l'espace des formes modulaires surconvergentes de poids k et de niveau $\Gamma_1(N)$ à coefficients dans K.*

La pointe $\infty \in X^{rig}$ est contenu dans le lieu $X^{\geq v}$ pour tout v. On note $S_k^{\dagger}(N,K)$ le sous-espace de formes modulaire surconvergentes dont les développements de Fourier ont un terme constant nul (i.e $a_0 = 0$).

Soit $g \in M_k(\Gamma_1(N), A)$, l'opérateur de Hecke T_ℓ pour un premier ℓ qui ne divise pas N est donné par

$$T_\ell(g)((E,\omega,P)) = \ell^{k-1} \sum_{C \subset E[\ell]} g((E/C, \overset{\vee *}{\pi}(\omega), (P+C)/C)),$$

où $\overset{\vee}{\pi}$ est le dual de la projection $\pi : E \to E/C$ et C parcourt les $(\ell+1)$ sous-schémas en groupes finis plats de $E[\ell]$ d'ordre ℓ.

Théorème 1.3. [**16**, Coleman] *Une forme surconvergente propre de poids k, de niveau $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p)$ et qui est propre pour l'opérateur U_p, est une forme modulaire classique si la pente de U_p est strictement inférieure à $k-1$. Dans le cas où le la pente est exactement $k-1$, elle est classique sauf si elle est dans l'image de l'opérateur $\Theta(k-1)$.*

Coleman démontre le théorème ci-dessus en utilisant la théorie de Hodge pour la cohomologie de Rham de la courbes modulaire X.

2. Familles p-adiques de pentes finie

Considérons la tour d'Igusa qui est le revêtement pro-étale du lieu ordinaire de $X[1/p]$ donnée par la limite projective des duaux des sous-groupes canoniques d'échelon n. Les formes modulaires p-adique peuvent être vues comme des fonctions sur le $\mathbb{Z}_p^\times$-torseur de la trivialisation de la tour d'Igusa. Les fonctions homogènes de poids k pour l'action de $\mathbb{Z}_p^\times$ sont les formes modulaires p-adiques de poids k. Ainsi, nous obtenons un espace de dimension infinie qui se fibre au dessus de l'espace des poids, et l'existence du sous groupe canonique sur le lieu ordinaire, nous permet de plonger l'espace des formes modulaires dans l'espace des formes modulaires p-adiques. Pour étudier les familles de pente finie, V.Pilloni étend dans [**48**] la construction précédente à un voisinage strict du lieu ordinaire dans le but d'appliquer la théorie spectrale de Coleman-Mazur [**18**] qui a été axiomatisée par Buzzard [**10**] à l'opérateur complètement continue U_p. En effet, il construit dans [**1**] un faisceau quasi-cohérent surconvergent sur l'espace de poids $\mathcal{W}$, en associant à tout ouvert admissible $\mathcal{U}$ de $\mathcal{W}$ un $\mathrm{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}})$-Module $M^{\dagger,\kappa^{\mathcal{U}}}(N)$ qui est une limite inductive de modules de Banach projectifs $M^{\dagger,\kappa^{\mathcal{U}}}(N)(v)$ tel que pour tout poids entier $k \in \mathcal{U}$, la spécialisation de $M^{\dagger,\kappa^{\mathcal{U}}}(N)$ au poids k est isomorphe à l'espace des formes modulaires surconvergentes de poids k.

Coleman et Mazur ont construit d'une autre façon dans [**18**] le faisceau $M^{\dagger,\kappa^{\mathcal{U}}}(N)$ en utilisant des congruences avec la famille d'Eisenstein.

Soit $\mathcal{C}$ la courbe de Hecke p-adique de niveau modéré N induite par les opérateurs de Hecke U_p et $T_\ell, <\ell>$ pour $\ell \nmid Np$. Rappelons que $\mathcal{C}$ est réduite et qu'il existe un morphisme $\kappa : \mathcal{C} \to \mathcal{W}$ plat et localement fini, appelé le morphisme poids, où $\mathcal{W}$ est la variété rigide sur $\mathbb{Q}_p$ qui représente les morphismes $\mathbb{Z}_p^\times \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{G}_m$. La courbe $\mathcal{C}$ a été introduite par Coleman-Mazur lorsque le niveau modéré est 1 (voir [**18**]), par Buzzard et Chenevier pour tout niveau modéré (voir [**10**] et [**14**] pour plus de détails).

Par construction de $\mathcal{C}$, il existe un morphisme $\mathbb{Z}[T_l, U_p]_{\ell \nmid Np} \to \mathcal{O}_{\mathcal{C}}^{rig}(\mathcal{C})$ qui permet de voir les éléments de $\mathbb{Z}[T_l, U_p]_{\ell \nmid Np}$ comme sections globales de $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}^{rig}$, bornées par 1 sur $\mathcal{C}$. Par conséquent, l'application " système de valeurs propres" $\mathcal{C}(\bar{\mathbb{Q}}_p) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[T_l, U_p]_{\ell \nmid Np}, \bar{\mathbb{Q}}_p)$ est injective et induit une correspondance bijective entre l'ensemble des $\mathbb{C}_p$-points de $\mathcal{C}$ de poids k et l'ensemble des formes modulaires surconvergentes, propres, normalisées, avec des coefficients de Fourier dans $\mathbb{C}_p$, du niveau modéré N, de poids k et de pente finie.

Si L est un corps de nombres et S un ensemble de *places premières* de L, on note par $G_{L,S}$ le groupe de Galois de l'extension maximale de L non ramifiée en dehors de S.

En outre, puisque l'image de $\mathbb{Z}[T_l, U_p]_{\ell \nmid Np}$ est relativement compacte dans $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}^{rig}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}^{rig}(\mathcal{C})$ est réduit, alors il existe un pseudo-caractère $\mathrm{Ps} : G_{\mathbb{Q},Np} \to \mathcal{O}_{\mathcal{C}}^{rig}(\mathcal{C})$ de dimension 2, de sorte que $\mathrm{Ps}(\mathrm{Frob}_\ell) = T_\ell$.

Le morphisme $\kappa : \mathcal{C} \to \mathcal{W}_{\mathbb{Q}}$ est étale aux points classiques p-réguliers, non-critiques et de poids ≥ 2. Cela découle de la semi-simplicité de l'action de l'algèbre de Hecke et du fait que la multiplicité de l'opérateur U_p est exactement 1 (voir [**18**, 7.6.2], [**16**], [**34**, 1.4] et [**53**]). Mais ce résultat n'est pas vrai pour les points classiques de poids 1 (Pour plus de détails, voir [**9**, 1.1] et [**26**, 7.4]).

Le lieu de $\mathcal{C}^{ord} \subset \mathcal{C}$ où $|U_p| = 1$ est ouvert et fermé dans $\mathcal{C}$ et est appelé le lieu ordinaire de $\mathcal{C}$. Il est connu que le lieu ordinaire $\mathcal{C}^{ord}$ est isomorphe à la fibre générique de l'algèbre de Hecke p-ordinaire.

La courbe de Hecke $\mathcal{C}$ joue un role important dans la démonstration de Kisin de certains cas de la conjecture de Fontaine-Mazur [**53**]. Kisin montre que toute forme propre surconvergente g admet une période cristalline telle que le Frobenius agit par la valeur propre de g pour l'opérateur U_p. Ce résultat a été prouvé par un étude approfondie d'un espace analytique rigide X_g qui classifie des représentations cristallines. En effet, on pense que X_g coïncide avec $\mathcal{C}$.

3. Formes modulaires de Hilbert

Soient $\mathfrak{c}$ un idéal fractionnaire de $\mathfrak{o}$, E un corps p-adique, $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de E et $X(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})$ le schéma modulaire de Hilbert sur $\mathcal{O}$, tel que ses S-points classifient les quadruplés $(A, \iota, \psi, \lambda)$ où $A \to S$ une variété abélienne de dimension relative $[F : \mathbb{Q}]$ sur S, ι une injection $\mathfrak{o} \subset \mathrm{End}_S(A)$, Ψ une immersion fermée $\mu_{\mathfrak{n}} \otimes \mathfrak{d}_F^{-1} \hookrightarrow A$ compatible avec l'action de $\mathfrak{o}$ (où $\mathfrak{d}_F$ est la différente de F), et λ est définie comme suit : si $P \subset \mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}}(A, A^\vee)$ est le faisceau pour la topologie étale sur S des $\mathfrak{o}$-morphismes linéaires symétriques de A vers son dual $A^\vee$ et si $P_+ \subset P$ est le cône des polarisations, alors λ est un isomorphisme pour la topologie étale $\lambda : (P, P_+) \simeq (\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_+)$ de $\mathfrak{o}$-module inversible. La polarisation λ est induite par un isomorphisme $\mathfrak{o}$-linéaire $A \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{c} \simeq A^\vee$ (pour plus de détails voir [**56**]).

Soient $\overline{X}^*(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})$ (resp. $\overline{X}(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})$) la compactification minimale de la variété $X(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})$ (resp. une compactification toroïdale, voir [**56**] et [**27**]) et $\pi : A(\mathfrak{c}) \to X(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})$ le schéma abélien universel de $X(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})$ qui est muni de la section identité $e : X(\mathfrak{n}, \mathfrak{c}) \to A(\mathfrak{c})$. Le schéma abélien $A(\mathfrak{c})$ s'étend à un schéma semi-abélien $A^{ver}(\mathfrak{c})$ sur $\overline{X}(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})$.

Soit ω le faisceau conormal de l'identité de $A(\mathfrak{c})$, qui s'étend à un faisceau sur $\overline{X}(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})$ et qu'on notera aussi ω. Le faisceau ω est un $\mathcal{O}_{\overline{X}^R(\mathfrak{n},\mathfrak{c})} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{o}$-module libre de rang 1 sur l'ouvert de Rapoport $\overline{X}^R(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})$ (i.e $\omega = \oplus_{g \in I_F} \omega_g$). Le complémentaire du lieu de Rapoport est un fermé de codimension 2 dans la fibre spéciale de $X(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})$.

Pour $k := \sum_{g \in I_F} k_g \in \mathbb{Z}[I_F]$, ω^k est le faisceau inversible $\otimes_{g \in I_F} \omega_g^{\otimes k_g}$. Si $t = \sum_{g \in I_F} 1 \in \mathbb{Z}[I_F]$, le faisceau ω^t n'est que $\wedge^n \omega$.

On note $\Delta_{\mathfrak{n}}$ le groupe fini $\mathfrak{o}_+^\times / \{\epsilon \in \mathfrak{o}^\times | \epsilon - 1 \in \mathfrak{n}\}^2$ qui agit sur la schéma modulaire de Hilbert $X(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})$ par

$$[\epsilon] : (A, \iota, \Psi, \lambda)/S \to (A, \iota, \Psi, \epsilon\lambda)/S$$

Définition 1.4. *Soient $X^R(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})$ le lieu de Rapoport de $X(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})$ et $k := \sum_{g \in I_F} k_g \in \mathbb{Z}[I_F]$ un poids tel que les k_g ont la même parité. On choisit $\upsilon_g \in \mathbb{Z}$ pour tout $g \in I_F$ et $w \in \mathbb{Z}$ tels que $k_g = 2\upsilon_g + w$ pour tout $g \in I_F$.*

Une forme modulaire de poids $(w := \sum_{g \in I_F} w, \upsilon := \sum_{g \in I_F} \upsilon_g)$ est un élément de

$$M_k(\mathfrak{n}, E) = \bigoplus_{\mathfrak{c} \in CL_F^+} \mathrm{H}^0(X^R(\mathfrak{n}, \mathfrak{c}) \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}} \operatorname{Spec} E, \omega^k)^{\Delta_{\mathfrak{n}}}.$$

Soit B une $\mathcal{O}$-algèbre, le principe de Koecher [**56**] et [**27**, 8.3] implique que la restriction naturelle

$\mathrm{H}^0(\overline{X_1^R}(\mathfrak{n}, \mathfrak{c}) \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}} \operatorname{Spec}(B), \omega^{\otimes k}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{H}^0(X_1^R(\mathfrak{n}, \mathfrak{c}) \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}} \operatorname{Spec}(B), \omega^{\otimes k})$ est un isomorphisme.

Définition 1.5. *Soit $k := \sum_{g \in I_F} k_g \in \mathbb{Z}[I_F]$ un poids tel que les k_g ont la même parité. On choisit $\upsilon_g \in \mathbb{Z}$ pour tout $g \in I_F$ et $w \in \mathbb{Z}$ tels que $k_g = 2\upsilon_g + w$ pour tout $g \in I_F$.*

Une forme modulaire de poids (w, υ) est cuspidale si elle appartient à

$$\bigoplus_{\mathfrak{c} \in CL_F^+} \mathrm{H}^0(\overline{X^R}(\mathfrak{n}, \mathfrak{c}) \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}} \operatorname{Spec} E, \omega^k(-D))$$

et on note $S_k(\mathfrak{n}, E)$ le E-espace vectoriel des formes modulaires cuspidales de poids (w, υ).

L'action de $\Delta_{\mathfrak{n}}$ se prolonge d'une manière unique à la compactification minimale $\overline{X}^*(\mathfrak{n},\mathfrak{c})$ (voir [**27**]).

On note $X^R(\mathfrak{n})$ (resp. $\overline{X}^*(\mathfrak{n})$) l'union disjointe $\coprod_{\mathfrak{c}\in \mathrm{CL}_{\mathrm{F}}^+} X^R(\mathfrak{n},\mathfrak{c})$ (resp. $\coprod_{\mathfrak{c}\in \mathrm{CL}_{\mathrm{F}}^+} \overline{X}^*(\mathfrak{n},\mathfrak{c})$).

Sous l'hypothèse [**25**, (2)], l'action du groupe fini $\Delta_{\mathfrak{n}}$ sur $\overline{X}^*(\mathfrak{n},\mathfrak{c})$ (resp. $X(\mathfrak{n},\mathfrak{c})$) est propre et discontinue. On note respectivement $\overline{X_1}^*(\mathfrak{n},\mathfrak{c})$, $X_1(\mathfrak{n},\mathfrak{c})$ et $X_1^R(\mathfrak{n},\mathfrak{c})$ les quotients de $\overline{X}^*(\mathfrak{n},\mathfrak{c})$, $X(\mathfrak{n},\mathfrak{c})$ et $X^R(\mathfrak{n},\mathfrak{c})$ par $\Delta_{\mathfrak{n}}$. Le schéma $\overline{X_1}^*(\mathfrak{n},\mathfrak{c})$ est projectif, normal et plat sur $\mathcal{O}$, contient $X_1(\mathfrak{n},\mathfrak{c})$ comme ouvert et son complémentaire est fini sur $\mathcal{O}$. Le faisceau inversible $\omega^t = \wedge^n\omega$ s'étend à un faisceau ample sur $\overline{X}^*(\mathfrak{n},\mathfrak{c})$ et qu'on notera ω^1 et descend en un faisceau ample $\underline{\omega}$ sur $\overline{X}_1^*(\mathfrak{n},\mathfrak{c})$ (voir [**25**]).

D'après [**27**, §13], le complété de l'anneau locale de $\overline{X}^*(\mathfrak{n},\mathfrak{c}) \times_{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}} \mathrm{Spec}(B)$ le long de la pointe $\infty(\mathfrak{c})$ est donné par

$$M_\infty(\mathfrak{c};B) = \{\sum_{\xi\in\mathfrak{c}_+\cup\{0\}} a_\xi q^\xi | a^\xi \in B \text{ et } a_{\epsilon\xi} = a_\xi,\ \forall\epsilon\in\mathfrak{o}_+^\times\}$$

L'évaluation $f_{\mathfrak{c}}$ de toute forme modulaire de Hilbert f sur les pointes $\infty(\mathfrak{c})$ où $\mathfrak{c}$ parcourt les éléments de CL_F^+ détermine son développement de Fourrier. Après une modification des coefficients de son développement de Fourrier, on obtient son développement adélique et ses coefficients de Fourier notés $T_{\mathfrak{q}}(f)$ où $\mathfrak{q}$ est un idéal de $\mathfrak{o}$ (voir [**60**]).

4. Opérateurs de Hecke

On suppose par simplicité dans cette section que tout les poids $k \in \mathbb{Z}[I_F]$ sont parallèles (i.e $\upsilon = 0$) et que l'hypothèse [**25**, (2)] est vraie. On note $\overline{X}_E^*(\mathfrak{n},\mathfrak{c})$ la compactification minimale de la variété $X(\mathfrak{n},\mathfrak{c})_E = X(\mathfrak{n},\mathfrak{c}) \times E$ et $\overline{X_1}^*(\mathfrak{n},\mathfrak{c})_E$ la compactification minimale de $X_1(\mathfrak{n},\mathfrak{c})_E = X_1(\mathfrak{n},\mathfrak{c}) \times E$. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier avec $\mathfrak{n}$. Considérons l'automorphisme $<\mathfrak{q}>$ de $\coprod_{\mathfrak{c}\in\mathrm{CL}_F^+} X_E(\mathfrak{n},\mathfrak{c}) = X_E(\mathfrak{n})$ qui envoie (A,Ψ,λ) sur $(A\otimes\mathfrak{q},\Psi',\lambda')$, où Ψ' est le composé de Ψ avec l'inverse de l'isomorphisme canonique $(A\otimes\mathfrak{q})[\mathfrak{n}] \simeq A[\mathfrak{n}]$ induit par $\iota_{\mathfrak{q}} : A\otimes\mathfrak{q} \to A$ et λ' est la $\mathfrak{c}\mathfrak{q}^{-2}$ polarisation sur $A\otimes_{\mathfrak{o}}\mathfrak{q}$

$$(A\otimes_{\mathfrak{o}}\mathfrak{q})\otimes_{\mathfrak{o}}\mathfrak{c}\mathfrak{q}^{-2} \xrightarrow{\lambda} A^\vee\otimes\mathfrak{q}^{-1} \xrightarrow{\iota_{\mathfrak{q}}^\vee} (A\otimes\mathfrak{q})^\vee$$

L'action de $\Delta_{\mathfrak{n}}$ commute avec l'automorphisme $<\mathfrak{q}>$, donc $<\mathfrak{q}>$ descend en un automorphisme de $\coprod_{\mathfrak{c}\in\mathrm{CL}_F^+} X_1(\mathfrak{n},\mathfrak{c})_E = X_1(\mathfrak{n})_E$ qui se prolonge de manière unique à un automorphisme de $\overline{X_1}^*(\mathfrak{n})_E = \coprod_{\mathfrak{c}\in\mathrm{CL}_F^+} \overline{X}_1^*(\mathfrak{n},\mathfrak{c})_E$ (voir [**25**, 3.1].

De plus, $<\mathfrak{q}>$ induit un morphisme $\mathcal{O}$-linéaire de modules

$$\mathrm{H}^0(\overline{X_1}^*(\mathfrak{n},\mathfrak{c}\mathfrak{q}^{-1})_E, \underline{\omega}^{\otimes k}) \to \mathrm{H}^0(\overline{X_1}^*(\mathfrak{n},\mathfrak{c}\mathfrak{q})_E, \underline{\omega}^{\otimes k}).$$

Soient Y le schéma modulaire de Hilbert de niveau $\Gamma_1(\mathfrak{n}) \cap \Gamma_0(\mathfrak{q})$ et $\overline{Y}^*$ sa compactification minimale sur E. Il est connu que $\overline{Y}^*$ est muni de deux morphismes surjectifs finis π_1, π_2 : $\overline{Y}^* \to \overline{X_1}^*(\mathfrak{n})_E$, correspondant respectivement aux morphismes oubli et le quotient. D'après la proposition [**44**, 1.10], π_2 factorise π_1 via un automorphisme de $\overline{X_1}^*(\mathfrak{n})_E$.

L'opérateur $T(\mathfrak{q})^\vee$ considéré dans [**24**, §2], qui est un endomorphisme $\mathcal{O}$-linéaire de $\mathrm{H}^0(\overline{X_1}^*(\mathfrak{n})_E, \underline{\omega}^{\otimes k})$ est défini comme étant la composition des trois applications suivantes :

(i) L'inclusion provenant du morphisme adjonction :

$$\mathrm{H}^0(\overline{X}_1^*(\mathfrak{n})_E, \underline{\omega}^{\otimes k}) \to \mathrm{H}^0(\overline{X}_1^*(\mathfrak{n})_E, \pi_{2*}\pi_2^*\underline{\omega}^{\otimes k}) = \mathrm{H}^0(\overline{Y}^*, \pi_2^*\underline{\omega}^{\otimes k})$$

(ii) Le morphisme

$$\mathrm{H}^0(\overline{Y}^*, \pi_2^*\underline{\omega}^{\otimes k}) \to \mathrm{H}^0(\overline{Y}^*, \pi_1^*\underline{\omega}^{\otimes k})$$

induit par un morphisme de faisceaux $\pi_2^*\underline{\omega}^{\otimes k} \to \pi_1^*\underline{\omega}^{\otimes k}$ (Voir [**44**, §1.11.1]).

(iii) Le morphisme

$$\mathrm{H}^0(\overline{Y}^*, \pi_1^*\underline{\omega}^{\otimes k}) = \mathrm{H}^0(\overline{X}_1^*(\mathfrak{n})_E, \pi_{1*}\pi_1^*\underline{\omega}^{\otimes k}) \to \mathrm{H}^0(\overline{X}_1^*(\mathfrak{n})_E, \underline{\omega}^{\otimes k}),$$

induit par la trace relative $\pi_{1*}\pi_1^*\underline{\omega}^{\otimes k} \to \underline{\omega}^{\otimes k}$ du morphisme fini π_1 et la multiplication par $(\mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}\mathfrak{q})^{-1}$.

On note $T_\mathfrak{q}$ l'opérateur de Hecke défini par $T_\mathfrak{q}^\vee \circ <\mathfrak{q}>$. Les opérateurs de Hecke commutent entre eux et commutent aussi avec l'opérateur Diamond.

On peut aussi définir les opérateurs de Hecke $T_\mathfrak{q}$ et les opérateurs Diamond dans le cas où le poids n'est pas parallèle (voir [**1**]).

Soit $f \in S_k(\mathfrak{n}, \psi', E)$, alors pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{o}$, l'opérateur de Hecke $T_\mathfrak{q}$ agit sur les coefficient de Fourier de f comme suit (voir [**25**]) :

$$a(\mathfrak{r}, T_\mathfrak{q}(f)) = a(\mathfrak{q}\mathfrak{r}, f) + \psi'(\mathfrak{q})\mathrm{N}_\mathbb{Q}^F(\mathfrak{q})^{k-1}a(\mathfrak{r}/\mathfrak{q}, f) \tag{1}$$

5. Familles p-adiques de Hilbert

Soient r le nombre de premiers de F au dessus de p et $\{h_{\mathfrak{p}_i} \mid 1 \leq i \leq r\}$ les invariants partiels de Hasse et $\overline{X}^{rig}(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})$ la fibre générique analytique rigide associée au complété formel de $\overline{X}(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})$ le long de sa fibre spéciale.

Si $v = (v_i)_{\mathfrak{p}_i|p} \in \mathbb{Q}^r$ où $0 \leq v_i \leq 1$, on note $\overline{X}(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})(v)$ le voisinage du lieu ordinaire définit par $|h_{\mathfrak{p}_i}|_p \leq p^{v_i}$.

DÉFINITION 1.6. *Pour v comme ci-dessus, nous appelons un élément de* $M_k^\dagger(\mathfrak{n}, E)(v) = \bigoplus_{\mathfrak{c} \in CL_F^+} \mathrm{H}^0(\overline{X}(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})(v), \omega^\kappa)^{\Delta_\mathfrak{n}}$ *une forme modulaire v-surconvergente de poids κ et de niveau $\mathfrak{n}$, et* $\varinjlim_{v \to 0^+} \bigoplus_{\mathfrak{c} \in CL_F^+} \mathrm{H}^0(\overline{X}(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})(v), \omega^\kappa)^{\Delta_\mathfrak{n}} = M_k^\dagger(\mathfrak{n}, E)$ *est l'espace des formes modulaires surconvergentes de poids k et de niveau $\mathfrak{n}$.*

Une forme v-surconvergente de poids κ et de niveau $\mathfrak{n}$ est dite cuspidale si elle appartient à $\bigoplus_{\mathfrak{c} \in CL_F^+} \mathrm{H}^0(\overline{X}(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})(v), \omega^\kappa(-D))$.

Les formes modulaires p-adiques de Hilbert peuvent être vues comme des fonctions sur les $\mathbb{Z}_p^\times \times \mathrm{Res}_\mathbb{Q}^F \mathbb{G}_m(\mathbb{Z}_p)$-torseurs de la trivialisation de la tour d'Igusa qui est le pro-revêtement étale du lieu ordinaire du schéma modulaire de Hilbert donné par la limite projective des duaux des sous-groupes canoniques d'échelon n. Les fonctions homogènes de poids (w, v) pour l'action de $\mathbb{Z}_p^\times \times \mathrm{Res}_\mathbb{Q}^F \mathbb{G}_m(\mathbb{Z}_p)$ sont les formes modulaires p-adiques de Hilbert de poids (w, v). Donc, on obtient un espace de dimension infinie qui se fibre sur l'espace des poids, et grâce à l'existence du sous-groupe canonique sur le lieu ordinaire, on peut plonger l'espace des formes modulaires de Hilbert dans l'espace des formes modulaires p-adiques de Hilbert.

Pour étudier les familles p-adiques de pente finie, V.Pilloni, F.Andreatta et A.Iouvita ont prolongé la construction précédente à un voisinage surconvergent strict du lieu ordinaire dans le but d'appliquer la théorie spectrale de Coleman-Mazur à l'opérateur complètement continue U_p. Plus précisément, ils ont construit dans [**1**] un faisceau quasi-cohérent surconvergent sur l'espace des poids en associant pour tout ouvert admissible $\mathcal{U}$ de $\mathcal{W}_F$, un $\mathrm{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_\mathcal{U})$-module $S^{\dagger, \kappa^\mathcal{U}}(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})$ qui est une limite inductive de modules de Banach $S^{\dagger, \kappa^\mathcal{U}}(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})(v)$ telle que pour tout poids $k \in \mathcal{U}$, la spécialisation de $S^{\dagger, \kappa^\mathcal{U}}(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})^{\Delta_\mathfrak{n}}$ au poids k est isomorphe à l'espace des formes modulaires surconvergentes cuspidales de poids k et de niveau $\mathfrak{n}$.

La surjectivité de la spécialisation et la projectivité du module de Banach $S^{\dagger, \kappa^\mathcal{U}}(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})(v)$ ont été prouvé par un étude approfondie de la descente de la compactification toroïdale du schéma modulaire de Hilbert à la compactification minimale (le lieu ordinaire de la compactification minimale est un affinoïde). D'autre part, ils montrent que les opérateurs de Hecke T_ℓ, S_ℓ et U_p^{oc} sont continues sur l'espace de Fréchet $\oplus_{\mathfrak{c} \in CL_F^+} S^{\dagger, \kappa^\mathcal{U}}(\mathfrak{n}, \mathfrak{c})^{\Delta_\mathfrak{n}}$, où $\mathcal{U}$ est un affinoide de $\mathcal{W}_F$. Ils montrent aussi que U_p^{oc} est un opérateur complètement continue (ici U_p^{oc} est la normalisation de $U_p^{cl} = \prod_{\mathfrak{P}_i | p} U_{\mathfrak{p}_i}^{e_i}$).

En utilisant la machinerie des variétés de Hecke de Buzzard [**10**], ils ont obtenu la variété de Hecke-Hilbert désirée $\mathcal{E}$.

D'après [**10**] et [**1**], la variété de Hecke $\mathcal{E}$ est équidimensionnelle de dimension $[F : \mathbb{Q}] + 1$, réduite et équipée d'un morphisme localement fini surjectif $\kappa : \mathcal{E} \to \mathcal{W}_F$ appelé le morphisme poids, où $\mathcal{W}$ est l'espace rigide sur $\mathbb{Q}_p$ représentant les morphismes $\mathbb{Z}_p^\times \times \mathrm{Res}_\mathbb{Q}^F \mathbb{G}_m(\mathbb{Z}_p) \to \mathbb{G}_m$. Par construction de $\mathcal{E}$, il existe un morphisme $\mathbb{Z}[(T_\ell)_{\ell \nmid p\mathfrak{n}}, U_p] \to \mathcal{O}_\mathcal{E}^{rig}(\mathcal{E})$ tel que les éléments de $\mathbb{Z}[(T_\ell)_{\ell \nmid p\mathfrak{n}}, U_p]$ peuvent être vus comme sections globales dans $\mathcal{O}_\mathcal{E}^{rig}$ bornées par 1 sur $\mathcal{E}$, l'application canonique " système de valeurs propres " $\mathcal{E}(\mathbb{C}_p) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[(T_\ell)_{\ell \nmid p\mathfrak{n}}, U_p], \mathbb{C}_p)$ est injective et induit une correspondance bijective entre l'ensemble de $\mathbb{C}_p$-points de $\mathcal{E}$ de poids (w, υ) et l'ensemble des formes modulaires cuspidales surconvergentes de Hilbert propres de niveau modéré $\mathfrak{n}$, de poids (w, υ), avec des coefficients de Fourier dans $\mathbb{C}_p$ et de pente finie. Puisque l'image de $\mathbb{Z}[(T_\ell)_{\ell \nmid p\mathfrak{n}}, U_p]$ dans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{rig}(\mathcal{E})$ est relativement compacte et que la $\mathbb{Q}_p$-algèbre $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{rig}(\mathcal{E})$ est réduite, il existe un pseudo-caractère continue :

$$\mathrm{Ps}_{\mathcal{E}} : G_{F,\mathfrak{n}p} \to \mathcal{O}(\mathcal{E}) \tag{2}$$

qui envoie Frob_ℓ vers T_ℓ pour tout $\ell \nmid \mathfrak{n}p$ (voir [**1**, §5] and [**3**] pour plus de détails).

D'après le théorème [**50**, 1.1], le morphisme poids $\kappa : \mathcal{E} \to \mathcal{W}$ est étale en les points *non critiques*[1] *p-réguliers*[2] correspondant aux formes modulaires surconvergentes de poids classiques.

D'autre part, Kisin et Lai ont construits dans [**44**] la courbe de Hecke-Hilbert $\mathcal{C}_F$ de poids parallèle de niveau modéré $\mathfrak{n}$ en étendant la construction de Coleman-Mazur de la courbe de Hecke [**18**]. On peut identifier $\mathcal{C}_F$ avec le sous-espace fermé de $\mathcal{E}$ donné par l'équation $\upsilon = 0$. Selon les travaux de [**44**], il existe un morphisme localement fini surjectif $\kappa : \mathcal{C}_F \to \mathcal{W}_{F,\upsilon=0}$, où $\mathcal{W}_{F,\upsilon=0}$ est la sous-variété fermé de $\mathcal{W}_F$ définie par l'équation $\upsilon = 0$ (κ est la restriction de w à $\mathcal{C}_F$). Notons que $\mathcal{T}'$ est aussi l'anneau local en x de la fibre $\kappa^{-1}(\kappa(x))$.

Le lieu $\mathcal{E}^{n.ord}$ de $\mathcal{E}$ où $|U_p|_p = 1$ est ouvert et fermé dans $\mathcal{E}$ et est appelé le lieu quasi-ordinaire. Il est connu que le lieu quasi-ordinaire $\mathcal{E}^{n.ord}$ est isomorphe à la fibre générique de l'algèbre de Hecke quasi-ordinaire en p.

1. Satisfait le condition de petite pente du Théorème [**50**, 1.1].
2. Cette condition est conjucturée pour les formes nouvelles de poids classique et de pente finie.

CHAPITRE 2

VARIÉTÉS DE HECKE-HILBERT AUX POINTS CLASSIQUES DE POIDS 1

Dans ce chapitre, on fixe un corps totalement réel F de degré n sur $\mathbb{Q}$ et un corps p-adique E. On note respectivement $\mathfrak{o}$ et $\mathcal{O}$ les anneaux des entiers de F et de E. Soient M une extension quadratique de F, $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F)$ non trivial sur M, $\mathbb{F}$ le cops résiduel de $\mathcal{O}$, $\mathfrak{n}$ un idéal de $\mathfrak{o}$ premier avec p et I_F un ensemble formé par n plongements complexes de $\bar{\mathbb{Q}}$ dans $\bar{\mathbb{Q}}$ qui prolongent les plongements distincts de F dans $\bar{\mathbb{Q}}$.

On note ε_M le caractère non trivial de l'extension quadratique M/F et Δ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(M/F)$ et on fixe un plongement $E \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$, une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ de $\mathbb{Q}$ et c la conjugaison complexe du groupe de Galois absolu $G_{\mathbb{Q}}$.

Soient $\psi : G_M \to \mathcal{O}^\times$ un caractère d'ordre fini, ψ^σ le caractère G_M définie par $\psi^\sigma(g) = \psi(\sigma^{-1} g \sigma)$, $\psi_\heartsuit$ le caractère ψ/ψ^σ et $\mathfrak{b}$ le conducteur de ψ. Ainsi, on peut voir ψ comme un caractère sur le groupe des idèles $\psi : M^\times \backslash M_{\mathbb{A}}^\times \to \mathcal{O}^\times$ (où $M_{\mathbb{A}}^\times$ est le groupe des idèles de M).

On suppose que pour toute place τ de F qui reste réelle sur M, ψ est trivial sur l'une des places de M au dessus de τ et non trivial sur l'autre. Soit $\mathfrak{n}$ la partie de $\mathrm{N}_{M/F}(\mathfrak{b}).\Delta_{M/F}$ qui est première à p. D'après un théorème de Weil, il existe une série de thêta $\theta(\psi)$ de niveau modéré $\mathfrak{n}$ telle que $L(s, \theta(\psi)) = L(s, \psi)$.

Soient α_i et β_i les racines du polynôme $X^2 - \mathrm{Tr}\,\rho(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}_i})X + \det \rho(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}_i})$. On dit que $\theta(\psi)$ est régulière en p si $\alpha_i \neq \beta_i$ pour tout $\mathfrak{p}_i \mid p$.

Soit $\rho = \mathrm{Ind}_M^F \psi$ la représentation p-adique associée à $\theta(\psi)$.

Pour déformer p-adiquement $\theta(\psi)$, il faut choisir une *p-stabilisation*[1] f de $\theta(\psi)$ de pente finie. Toute p-stabilisation f de $\theta(\psi)$ ordinaire en p définit un point x de la variété de Hecke $\mathcal{E}$, de plus x appartient à $\mathcal{C}_F$.

Les systèmes de valeurs propres de f correspondent à un point $x \in \mathcal{E}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$, de plus x se trouve sur lieu quasi-ordinaire $\mathcal{E}^{n.ord}$ de $\mathcal{E}$.

On va expliquer maintenant les principales idées derrière la preuve des théorèmes §0.4 et §0.6. Dans le §1.1, nous introduisons deux problèmes de déformation de ρ représentables par les anneaux locaux $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^{ord}$ tels que $\mathcal{R}$ s'envoie surjectivement sur $\mathcal{T}$ par la proposition 2.18. Le calcul de l'espace tangent de $\mathcal{R}$ représente une partie importante de la preuve. Nous montrons dans les théorèmes 2.12 et 2.14 que la dimension de l'espace tangent de $\mathcal{R}$ est toujours $[F:\mathbb{Q}]+1$ et donc la surjection ci-dessus est un isomorphisme d'anneaux locaux réguliers et on a $\mathcal{R}^{ord} \simeq \mathcal{T}^{ord}$. L'étude de l'algèbre $\mathcal{T}'$ donne un critère précis pour que κ soit étale en x. L'espace tangent de $\mathcal{R}$ est interprété comme un sous-espace de $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{ad}\,\rho)$ qui satisfait certaines conditions locales pour les premiers de F au dessus de p, mais vu que ρ est d'image finie, par inflation-restriction, l'espace tangent peut être vu comme un sous-espace de $(\mathrm{Hom}(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p) \otimes \mathrm{ad}\,\rho)^{\mathrm{Gal}(H/F)}$, où H est une extension galoisienne finie de F. Pour calculer la dimension de cet espace tangent, il suffit de déterminer la dimension du $\psi_\heartsuit$-espace propre à l'intérieur de $\mathrm{Hom}(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p)$. En effet, sa dimension peut être facilement bornée par la théorie du corps de classe, et quand M est un corps totalement réel, l'on constate le phénomène suivant : le corps H est CM et le $\psi_\heartsuit$-espace propre à l'intérieur des unités globales est trivial 2.9. Ainsi, nous pouvons construire une base de l'espace tangent de $\mathcal{T}'$ en termes de logarithme p-adique. D'autre part, lorsque M n'est ni totalement réel, ni totalement complexe, on montre que $\mathcal{R}_{\min} \simeq \mathcal{T}$ en utilisant un résultat de Fujiwara [**30**].

1. Déformations galoisiennes

On introduit dans cette section trois problèmes de déformations de ρ qu'on notera $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^{ord}$ et $\mathcal{D}^{ord}_{\det\rho}$ et on déterminera leurs espaces tangents respectifs dans la section 3.

1.1. Problèmes de déformations.

L'image projective de ρ est diédrale et contient un élément d'ordre 2 qu'on notera σ. Soit (e_1, e_2) une base de $\bar{\mathbb{Q}}_p^2$ dans laquelle $\rho_{|G_M} = \psi \oplus \psi^\sigma$. Après une renormalisation de (e_1, e_2), on peut supposer que $\rho(\sigma) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{Q}})$.

Le choix du groupe de décomposition en chaque place $\mathfrak{p}_i$ de F au dessus de p induit une place première canonique v_i de M parmi les places premières de M au dessus de $\mathfrak{p}_i$ et nous permet de voir $G_{M_{v_i}} \subset G_{F_{\mathfrak{p}_i}}$ comme un sous-groupe de décomposition de G_M en v_i. Puisque

1. Une p-stabilisation est une forme modulaires nouvelle sauf peut être en les premiers de F qui divisent p et qui est propre pour les opérateurs $U_{\mathfrak{p}_i}$.

f est p-régulière et ρ d'image finie, ρ est *ordinaire* en chaque $\mathfrak{p}_i$ de F au dessus p dans le sens où la restriction de ρ à $G_{F_{\mathfrak{p}_i}}$ est l'extension d'un caractère non ramifié ψ_i'' par un caractère ψ_i' tel que $\psi_i''(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}_i}) = \alpha_i$, où α_i est la valeur propre de f pour $U_{\mathfrak{p}_i}$. Maintenant, on choisit une base $\{e'_{i,1}, e'_{i,2}\}$ de $\bar{\mathbb{Q}}_p^2$ dans laquelle $\rho_{|G_{F_{\mathfrak{p}_i}}} = \psi_i' \oplus \psi_i''$. Si les deux caractères ψ_i' et ψ_i'' sont non ramifiés, on privilégiera ψ_i'', de sorte que la base $\{e'_{i,1}, e'_{i,2}\}$ soit unique à un scalaire près. Dans le cas où $\mathfrak{p}_i$ se décompose dans M, on a $(e'_{i,1}, e'_{i,2}) = (e_1, e_2)$ où $\psi^\sigma(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}_i}) = \alpha_{\mathfrak{p}_i}$, sinon $\psi(\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}_i}) = \alpha_{\mathfrak{p}_i}$ et $(e'_{i,2}, e'_{i,1}) = (e_1, e_2)$.

Soient A un anneau dans la catégorie $\mathfrak{C}$ et $\rho_A : G_F \to \mathrm{GL}_2(A)$ une déformation de ρ, on dit que ρ_A est quasi-ordinaire (resp. ordinaire) en p si, et seulement si, pour tout $\mathfrak{p}_i \mid p$, on a $(\rho_A)_{|G_{F_{\mathfrak{p}_i}}} \simeq \begin{pmatrix} \psi'_{i,A} & * \\ 0 & \psi''_{i,A} \end{pmatrix}$, où $\psi''_{i,A}$ est un caractère (resp. un caractère non ramifié) qui relève ψ_i''. On considère le foncteur de déformation $\mathcal{D}^{ord} : \mathfrak{C} \to \mathrm{SETS}$ (resp. $\mathcal{D}$), donné par les classes d'équivalences strictes des déformations de ρ qui sont ordinaires en p (resp. quasi-ordinaire en p). Puisque la représentation $\rho = \mathrm{Ind}_M^F \psi$ est absolument irréductible, p-ordinaire et p-regulière, les critères de Schlesinger impliquent que $\mathcal{D}^{ord}$ (resp. $\mathcal{D}$) est représentable par le 2-uplet $(\mathcal{R}^{ord}, \rho_{\mathcal{R}^{ord}})$ (resp. $(\mathcal{R}, \rho_{\mathcal{R}})$), où $\rho_{\mathcal{R}^{ord}}$ (resp. $\rho_{\mathcal{R}}$) est la déformation universelle p-ordinaire (resp. quasi-ordinaire en p) de ρ. Soit $\mathcal{D}^{ord}_{\det\rho}$ le sous-foncteur de $\mathcal{D}^{ord}$ qui consiste en les deformations de determinant fixé.

1.2. Espaces tangents.

On note $t_{\mathcal{D}^{ord}}$ (resp. $t_{\mathcal{D}}$) l'espace tangent de $\mathcal{D}^{ord}$ (resp. $\mathcal{D}$) et $t^0_{\mathcal{D}^{ord}}$ l'espace tangent de $\mathcal{D}^{ord}_{\det\rho}$.

Il existe une décomposition

$$(\mathrm{ad}\,\rho)_{|G_{F_{\mathfrak{p}_i}}} = \psi_i'/\psi_i' \oplus \psi_i'/\psi_i'' \oplus \psi_i''/\psi_i' \oplus \psi_i''/\psi_i''$$

Le choix de la base $(e'_{i,1}, e'_{i,2})$ de $\bar{\mathbb{Q}}_p^2$ identifie $\mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}_p}(\bar{\mathbb{Q}}_p^2)$ avec $M_2(\bar{\mathbb{Q}}_p)$; puisque ρ est p-ordinaire pour tout premier $\mathfrak{p}_i$ de F, on a une application naturelle $G_{F_{\mathfrak{p}_i}}$-équivariante :

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}\,\rho &\overset{C'_{i,*},D'_{i,*}}{\longrightarrow} \psi_i''/\psi_i' \oplus \psi_i''/\psi_i'' \\ \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) &\mapsto (c', d') \end{aligned} \tag{3}$$

Par un argument standard de la théorie de la déformation, on a le résultat suivant (voir [**9**, Lemme 2.3]).

Lemme 2.1.

(i) $t_{\mathcal{D}^{ord}} = \ker\left(\mathrm{H}^1(F, \mathrm{ad}\,\rho) \overset{(C_i^*,D_i^*)}{\to} \prod_{\mathfrak{p}_i|p}(\mathrm{H}^1(F_{\mathfrak{p}_i}, \psi_i''/\psi_i') \oplus \mathrm{H}^1(I_{\mathfrak{p}_i}, \psi_i''/\psi_i''))\right)$

(ii) $t^0_{\mathcal{D}^{ord}} = \ker\left(\mathrm{H}^1(F, \mathrm{ad}^0\,\rho) \overset{(C_i^*,D_i^*)}{\to} \prod_{\mathfrak{p}_i|p}(\mathrm{H}^1(F_{\mathfrak{p}_i}, \psi_i''/\psi_i') \oplus \mathrm{H}^1(I_{\mathfrak{p}_i}, \psi_i''/\psi_i''))\right)$

(iii) $t_{\mathcal{D}} = \ker\left(\mathrm{H}^1(F, \mathrm{ad}\,\rho) \overset{C_i^*}{\to} \prod_{\mathfrak{p}_i|p}(\mathrm{H}^1(F_{\mathfrak{p}_i}, \psi_i''/\psi_i'))\right)$

1.3. La suite exacte inflation-restriction appliquée à $t_{\mathcal{D}}$.

On note $H \subset \bar{\mathbb{Q}}$ le corps de nombres totalement complexe fixé par $\ker(\mathrm{ad}\,\rho)$. Le groupe $G' = \mathrm{Gal}(H/F)$ est naturellement isomorphe à l'image projective de ρ qui est un groupe diédral. Pour tout $\mathfrak{p}_i$ de F au dessus de p, on note w_i la place canonique de H au dessus de $\mathfrak{p}_i$ induite par ι_p.

Lemme 2.2. [**9**, Lemme 2.4] *Soient L une corps de nombres et ρ une représentation de G_L dans un $\bar{\mathbb{Q}}_p$-espace vectoriel de dimension finie.*

(i) Soit Σ un ensemble de places de L et supposons que pour tout $v \in \Sigma$ il existe un quotient ρ_v de $\rho_{|G_{L_v}}$. Soit H un extension galoisienne finie de L, pour tout $v \in \Sigma$, on choisit une place $w(v)$ de H au dessus de v. Alors

$$\ker\left(\mathrm{H}^1(L, \rho) \to \prod_{v\in\Sigma} \mathrm{H}^1(L_v, \rho_v)\right) \simeq \ker\left(\mathrm{H}^1(H, \rho)^{\mathrm{Gal}(H/L)} \to \prod_{v\in\Sigma} \mathrm{H}^1(H_{w(v)}, \rho_v)\right).$$

(ii) Si on suppose que ρ est d'image finie, alors le morphisme naturel

$$\mathrm{H}^1(L, \rho) \to \prod_{v|p} \mathrm{H}^1(I_v, \rho)$$

est injectif.

En utilisant la base $\{e_1, e_2\}$ définie ci-dessus, on peut voir les éléments de $\mathrm{H}^1(F, \mathrm{ad}\,\rho)$ comme des 1-co-cycles

$$\begin{aligned} G_F &\to M_2(\bar{\mathbb{Q}}_p) \\ g &\mapsto \left(\begin{smallmatrix} a(g) & b(g) \\ c(g) & d(g) \end{smallmatrix}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Puisque ρ est irréductible, $\psi^\sigma \neq \psi$ et $\ker(\psi^\sigma/\psi)$ définit une extension cyclique H de M. Ainsi, on a la décomposition suivante $\bar{\mathbb{Q}}_p[G_F]$-modules :

$$\mathrm{ad}\,\rho \simeq 1 \oplus \mathrm{ad}^0\,\rho \simeq 1 \oplus \mathrm{ad}^0(\mathrm{Ind}_M^F\,\psi) \simeq 1 \oplus \epsilon_M \oplus \mathrm{Ind}_M^F(\psi_\heartsuit), \tag{5}$$

Par inflation-restriction on a aussi

$$\mathrm{H}^1(F, \mathrm{ad}\,\rho) = \mathrm{H}^1(M, \mathrm{ad}\,\rho)^{\mathrm{Gal}(M/F)}.$$

D'autre part, on a la décomposition suivante

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^1(M, \mathrm{ad}\,\rho) &\simeq \mathrm{H}^1(M, \psi/\psi) \oplus \mathrm{H}^1(M, \psi_\heartsuit) \oplus \mathrm{H}^1(M, \psi_\heartsuit^{-1}) \oplus \mathrm{H}^1(M, \psi^\sigma/\psi^\sigma), \\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) &\mapsto (a, b, c, d), \end{aligned} \tag{6}$$

où l'action du groupe $\mathrm{Gal}(M/F)$ échange a et d et aussi b et c.

En combinant le lemme 2.1 et le lemme 2.2, on obtient :

Corollaire 2.3. *Dans la base* (e_1, e_2)*, on a :*

(i) $t_{\mathcal{D}^{ord}} \simeq \ker\left(\mathrm{H}^1(M, \mathrm{ad}\,\rho)^{\mathrm{Gal}(M/F)} \overset{(C_i^*, D_i^*)}{\to} \prod_{\mathfrak{p}_i|p} \mathrm{H}^1(M_{v_i}, \psi_i''/\psi_i') \prod_{\mathfrak{p}_i|p} \mathrm{H}^1(I_{v_i}, \psi_i''/\psi_i'')\right)$

(ii) Si $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in t_{\mathcal{D}} \subset \mathrm{H}^1(M, \mathrm{ad}\,\rho)^{\mathrm{Gal}(M/F)}$*, alors* $a = d^\sigma$ *et* $b = c^\sigma$*.*

L'action naturelle à gauche de $\mathrm{Gal}(H/F)$ sur G_H induit une action à droite donnée par $x \to g^{-1}(x)$ pour laquelle $\mathrm{H}^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)$ est un $\bar{\mathbb{Q}}_p[\mathrm{Gal}(H/F)]$-module à gauche.

On a $\mathrm{H}^1(H, \mathrm{ad}\,\rho) = \mathrm{H}^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_p} \mathrm{ad}\,\rho$ (puisque $\mathrm{ad}\,\rho(G_H) = 1$).

Un élément de $\mathrm{H}^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_p} \mathrm{ad}\,\rho$ peut être écrit comme une matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$, où a, b, c et d sont des éléments de $\mathrm{Hom}(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p)$ et l'action naturelle à gauche de $\mathrm{Gal}(H/F)$ sur $\mathrm{H}^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_p} \mathrm{ad}\,\rho$ est donnée par

$$g.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \rho(g)\begin{pmatrix} g.a & g.b \\ g.c & g.d\end{pmatrix}\rho(g)^{-1}.$$

Ainsi, l'inflation restriction appliquée à l'extension galoisienne finie H/F induit l'isomorphisme suivant :

$$\mathrm{H}^1(F, \mathrm{ad}\,\rho) \simeq \left(\mathrm{Hom}(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p) \otimes \mathrm{ad}\,\rho\right)^{G'}.$$

Corollaire 2.4. *Dans la base* (e_1, e_2)*, on a :*

$t_{\mathcal{D}} \simeq \ker\left(\left(\mathrm{Hom}(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p) \otimes \mathrm{ad}\,\rho\right)^{G'} \overset{(C_i^*)}{\to} \prod_{w_i, \mathfrak{p}_i|p} \mathrm{H}^1(H_{w_i}, \bar{\mathbb{Q}}_p))\right)$

Démonstration. Le résultat découle des lemmes 2.1 et 2.2

□

2. Application de la théorie des corps de classes

2.1. Rappel sur les unités locales et globales.

Si G est un groupe fini, on notera par $\widehat{G}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de G sur $\bar{\mathbb{Q}}$.

Soient $\mathcal{O}_H$ l'anneau des entiers de H, M_p la p-extension abélienne maximale non ramifiée en dehors de p de H et $\mathcal{O}_{H_w}$ l'anneau des entiers de la complétion H par rapport à w, où w est la place de H au dessus de p. Soit H'' le p-Hilbert de H, alors la théorie du corps de classes implique que

$$\mathrm{Gal}(M_p/H'') \simeq \text{la } p\text{-partie de } (\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times/\bar{\mathcal{O}}_H^\times \simeq U_p^1/\bar{\mathcal{O}}_H^\times,$$

où $U_p^1 = \prod_{w|p} U_w^1$ et U_w^1 sont les unités de $\mathcal{O}_{H_w}$ qui sont $\equiv 1 \pmod p$. Ainsi, on a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p) \longrightarrow \mathrm{Hom}\left((\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}\left(\mathcal{O}_H^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p\right), \tag{7}$$

telle que la première application est le dual de la réciprocité d'Artin et la seconde est la restriction à $\mathcal{O}_H^\times$ par rapport à l'inclusion diagonale $\mathcal{O}_H^\times \hookrightarrow (\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times$.

Tout morphisme continu pour la topologie p-adique de $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{H,w}^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p)$ est donné par

$$u \mapsto \sum_{g_w \in J_w} h_{g_w} g_w(\log_p(u)) = \sum_{g_w \in J_w} h_{g_w} \log_p(g_w(u)), \tag{8}$$

où h_{g_w} est un élément de $\bar{\mathbb{Q}}_p$, J_w est l'ensemble des plongements de H_w dans $\bar{\mathbb{Q}}_p$, et $\log_p$ est logarithme p-adique définie sur $\bar{\mathbb{Q}}_p^\times$.

On note J_H l'ensemble des plongements de H dans $\bar{\mathbb{Q}}$. Les deux plongements $\iota_p : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ et $H \subset \bar{\mathbb{Q}}$ définissent une partition $J_H = \coprod_{w|p} J_w$ provenant du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \bar{\mathbb{Q}} \arrow[r, hook, "\iota_p"] & \bar{\mathbb{Q}}_p \\ H \arrow[u, hook, "g"] \arrow[r, hook] & H_w. \arrow[u, hook, "g_w"'] \end{tikzcd} \tag{9}$$

Dans l'introduction, on avait fixé des plongements complexes $g_1, ..., g_n$ de $\bar{\mathbb{Q}}$ dans $\bar{\mathbb{Q}}$ qui relèvent les plongements de F dans $\bar{\mathbb{Q}}$ et tels que g_1 est le plongement qui identifie F avec un sous-corps de $\mathbb{R}$. Donc on obtient la partition suivante :

$$J_H = \{g_i \circ g | 1 \leq i \leq n, g \in \mathrm{Gal}(H/F)\} = \coprod_{1 \leq i \leq n} g_i. \mathrm{Gal}(H/F) \tag{10}$$

Ainsi, les éléments définis par

$\left(u \otimes 1 \mapsto \log_p\left(\iota_p \circ g_i \circ g(u)\right)\right)$ pour $1 \leq i \leq n$ et $g \in \mathrm{Gal}(H/F)$ forment une base du $\bar{\mathbb{Q}}_p$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}\left((\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p\right)$. On a une action naturelle à gauche de $\mathrm{Gal}(H/F)$ sur $\mathrm{Hom}\left((\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p\right)$ donnée par $g'. \log_p\left(\iota_p \circ g_i \circ g \otimes 1\right) = \log_p\left(\iota_p \circ g_i \circ g' g \otimes 1\right)$.

Par conséquent, il existe un isomorphisme canonique de $G' = \mathrm{Gal}(H/F)$-modules à gauche :

$$\begin{gathered} \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \bar{\mathbb{Q}}_p[G'] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\left((\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p\right) \\ \left(\sum_{g \in G'} a_{i,g} g\right)_{1 \leq i \leq n} \mapsto \left(u \otimes 1 \mapsto \sum_{\substack{g \in G' \\ 1 \leq i \leq n}} a_{i,g} \log_p\left(\iota_p \circ g_i \circ g^{-1}(u)\right)\right). \end{gathered} \tag{11}$$

On a les conjugaisons complexes suivantes : $\tau_1, ..., \tau_n \in G_F$ telles que τ_i est la conjugaison complexe attachée à g_i (i.e τ_i est conjuguée à la conjugaison complexe c de $G_{\mathbb{Q}}$ par g_i et $c = \tau_1$). Puisque ρ est impaire, alors $\det \rho(\tau_i) = -1$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Soit $\{\sigma_j^i\}_{1 \leq j \leq n'}$ un ensemble de représentants de toutes les classes d'équivalence du quotient de l'ensemble $\{g_i \circ g | g \in \mathrm{Gal}(H/F), 1 \leq i \leq n\}$ par la relation d'équivalence

$$c \circ h \sim h, \text{ où } h \in g_i G'.$$

D'après la preuve de Minkowski du théorème des unités de Dirichlet, il existe un plongement $\mathcal{O}_H^\times/\mu \hookrightarrow \mathbb{R}^{nn'}$ donné par $a \to (\log |\sigma_j^i(a)|)_{1 \leq j \leq n', 1 \leq i \leq n}$, où μ est le sous-groupe de torsion de $\mathcal{O}_H^\times$.

D'autre part, on a $g_i(\tau_i(x)) = \overline{(g_i(x))}$ et donc le G'-ensemble $\{\sigma_j^i\}_{1 \leq j \leq n'}$ peut être vu comme la permutation des classes à droite du groupe $\mathrm{Gal}(H/F)$ suivant le sous-groupe $\{1, \tau_i\}$.

Ainsi, on obtient la décomposition suivante de G'-modules :

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_H^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p) \simeq \Big(\bigoplus_{\substack{\pi \neq 1 \\ \pi \in \widehat{G'}}} \pi^{\alpha_\pi}\Big) \oplus 1^{n-1} \text{ et } \mathrm{Hom}\left((\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p\right) \simeq \bigoplus_{\pi \in \widehat{G'}} \pi^{n \dim \pi}$$

où π parcourt l'ensemble des caractères de $G' = \mathrm{Gal}(H/F)$, $\alpha_\pi = \sum_{i=1}^{n} \dim \pi^{+\tau_i}$ et les $\pi^{+\tau_i}$, $\pi^{-\tau_i}$ sont respectivement les espaces propres associés à l'action de la conjugaison complexe $\tau_i \in G'$ pour les valeurs propres $+1$ et -1.

D'autre part, on la décomposition suivante de G'-modules :

$$\mathrm{Hom}(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p) \simeq \bigoplus_{\pi \in \widehat{G'}} \pi^{m_\pi}.$$

En utilisant la suite exacte (7), on obtient une borne de m_π :

Lemme 2.5. *On a $m_1 \geq 1$ et pour $\pi \neq 1$, on a $\sum_{i=1}^{n} \dim \pi^{-\tau_i} \leq m_\pi$ avec égalité si la conjecture de Leopoldt est vraie pour H.*

2.2. Une minoration de $\dim t^0_{\mathcal{D}^{ord}}$ sous l'hypothèse $S^p = \varnothing$.

L'inflation-restriction induit l'isomorphisme suivant

$$\mathrm{H}^1(M, \psi_\heartsuit^{-1}) \simeq \mathrm{H}^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit^{-1}] \tag{12}$$

où $V[\psi_\heartsuit^{-1}]$ est le $\psi_\heartsuit^{-1}$-sous-espace propre de la $\mathrm{Gal}(H/M)$-représentation V.

En généralisant les techniques de [**9**], on obtient la proposition suivante :

Proposition 2.6. *Supposons que M a $2r$ plongements complexes et le caractère $\psi_\heartsuit^2$ est non trivial. Alors :*

$$2[F:\mathbb{Q}]-r \leq \dim \mathrm{H}^1(M, \psi_{\heartsuit}^{-1}).$$

DÉMONSTRATION. Puisque le caractère $\psi_{\heartsuit}^2$ est non trivial, $\pi = \mathrm{Ind}_M^F(\psi_{\heartsuit}^{-1})$ est irréductible, alors :

$$\dim \mathrm{H}^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_{\heartsuit}^{-1}] = \dim \mathrm{Hom}_{G'}\left(\pi, \mathrm{H}^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)\right) = m_\pi.$$

On note $(\tau_{i_k})_{1\leq k\leq r}$ (resp.$(\tau_{i'_l})$) les conjugaisons complexes de G_F qui se prolongent en plongements complexes (resp. réels) de M dans $\bar{\mathbb{Q}}$. On voit que $\det(\pi)(\tau_{i_k}) = -1$, $\det(\pi)(\tau_{i'_l}) = 1$, $\dim \pi^{-\tau_{i_k}} = 1$ et $\dim \pi^{-\tau_{i'_l}} = 2$.

D'après le lemme 2.5, on a $2[F:\mathbb{Q}]-r \leq m_\pi$, et on conclut par l'isomorphisme (12).

□

Dans cette sous-section, sous l'hypothèse que S^p est vide et $\psi_{\heartsuit}^2 \neq 1$ (i.e $\mathrm{Ind}_M^F(\psi_{\heartsuit})$ est irréductible), on montre que $t^0_{\mathcal{D}^{ord}}$ est non trivial dès que M a un plongement réel.

LEMME 2.7. *On a toujours* $\dim \mathrm{H}^1(M_{v_i}, \psi_{\heartsuit}^{-1}) = e_i.f_i$.

DÉMONSTRATION. La p-régularité de ρ implique que $\mathrm{H}^0(M_{v_i}, \psi_{\heartsuit}^{-1}) = 0$. D'après la dualité locale de Tate,

$$\mathrm{H}^2(M_{v_i}, \psi_{\heartsuit}^{-1}) \simeq \mathrm{H}^0(M_{v_i}, \psi_{\heartsuit}^{-1}(1))^\vee = 0.$$

Finalement, la formule de Tate de la caractéristique d'Euler locale implique

$$\dim \mathrm{H}^1(M_{v_i}, \psi_{\heartsuit}^{-1}) = [F_{\mathfrak{p}_i}:\mathbb{Q}_p] = e_i.f_i.$$

□

On note par $I \subset S_p$ (resp. $I' \subset S_p$) l'ensemble des premiers $\mathfrak{p}_i$ tels que $\psi^\sigma(\mathrm{Frob}_{v_i}) = \alpha_i$ (resp. $\psi(\mathrm{Frob}_{v_i}) = \alpha_i$) où $U_{\mathfrak{p}_i}.f = \alpha_i f$.

PROPOSITION 2.8. *On suppose que :*

(i) Le corps M a $2r$ plongements complexes.

(ii) L'ensemble S^p est vide.

(iii) Le caractère $\psi_{\heartsuit}^2$ est non trivial.

Alors $\dim t^0_{\mathcal{D}^{ord}} \geq [F:\mathbb{Q}]-r$.

DÉMONSTRATION. Soit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ un 1-cocycle de $t^0_{\mathcal{D}^{ord}}$ dans la base (e_1, e_2). D'après le corollaire 2.3, on a $a = d^\sigma$. De plus, la condition $a+d=0$ implique que d est partout non ramifié. Donc $a=d=0$ d'après le lemme 2.2.

Puisque S^p est vide et $S_p = I \bigsqcup I'$, le corollaire 2.4 implique que c (resp. b) est non ramifié en $\mathfrak{p}_i \in I$ (resp. $\mathfrak{p}_i \in I'$) et puisque σ échange b et c, on obtient l'isomorphisme suivant

$$t^0_{\mathcal{D}^{ord}} \simeq \ker\left(\mathrm{H}^1(M, \psi_\heartsuit^{-1}) \overset{(C_i^*)}{\to} \prod_{\mathfrak{p}_i \in I} \mathrm{H}^1(M_{v_i}, \psi_\heartsuit^{-1}) \prod_{\mathfrak{p}_i \in I'} \mathrm{H}^1(M_{v_i^\sigma}, \psi_\heartsuit^{-1})\right) \tag{13}$$

D'après les lemmes 2.6 et 2.7, on a la minoration suivante

$$\dim t^0_{\mathcal{D}^{ord}} \geq [F : \mathbb{Q}] - r.$$

□

3. Calcul de la dimension des espaces tangents de $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^{ord}$ et $\mathcal{D}^{ord}_{\det\rho}$

Dans cette section, on calcule les dimensions des espaces tangents des foncteurs $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^{ord}$ et $\mathcal{D}^{ord}_{\det\rho}$ dans le cas où M est totalement réel ou totalement complexe sous certaines conditions sur ρ pour ce dernier cas.

3.1. Le cas où M est totalement réel.

On suppose dans cette sous-section que M est totalement réel et on considère la condition suivante sur M :

- $(\mathbf{L}_M)$ la conjecture de Leopoldt est vraie pour M.

Puisque $\det\rho(\tau_i) = -1$ pour tout $1 \leq i \leq n$ (i.e ρ est totalement impaire), alors $\psi_\heartsuit^{-1}(\tau_i) = -1$ pour les conjugaisons complexes $(\tau_i)_{\{1\leq i\leq n\}}$ de G_F.

En conséquence, les conjugaisons complexes $(\tau_i)_{\{1\leq i\leq n\}}$ définissent le même élément c du groupe $\mathrm{Gal}(H/M)$ et c est dans le centre de $\mathrm{Gal}(H/F)$. Ainsi, le sous-corps H_+ de H fixé par c est totalement réel et H est un corps CM.

En généralisant les techniques de [**15**, théorème 3.1], on obtient la proposition suivante.

Proposition 2.9.

(i) Il existe un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(\prod_{w|p} U_w^1/\bar{\mathcal{O}}_H^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit^{-1}] \simeq \mathrm{H}^1(M, \psi_\heartsuit^{-1}).$$

(ii) La projection canonique $\prod_{w|p} U_w^1 \twoheadrightarrow \prod_{w|p} U_w^1/\bar{\mathcal{O}}_H^\times$ induit un isomorphisme entre les $\psi_\heartsuit^{-1}$-espaces propres

$$\mathrm{Hom}(\prod_{w|p} U_w^1, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit^{-1}] \simeq \mathrm{Hom}(\prod_{w|p} U_w^1/\bar{\mathcal{O}}_H^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit^{-1}].$$

Démonstration.

(i)D'après la suite exacte (7) et l'isomorphisme (12), on a

$$\mathrm{H}^1(M,\psi_\heartsuit^{-1}) \simeq \mathrm{Hom}(\prod_{w|p} U_w^1/\bar{\mathcal{O}}_H^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit^{-1}].$$

(ii)Soit ϱ un élément de $\mathrm{Hom}(\prod_{w|p} U_w^1, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit^{-1}]$. Pour tout g dans $\prod_{w|p} U_w^1$, on a :

$$\begin{aligned}\varrho(g) &= \psi_\heartsuit^{-1}(c)\varrho(c(g)) \\ &= -\varrho(c(g))\end{aligned} \tag{14}$$

De plus, H est un corps CM et donc le groupe quotient $\mathcal{O}_H^\times/\mathcal{O}_{H_+}^\times$ est d'ordre fini ($H_+ = H^c \subset \mathbb{R}$). Maintenant, on peut voir que la relation (14) implique que $\forall x \in \mathcal{O}_{H_+}^\times$, $\varrho(x) = -\varrho(c(x)) = -\varrho(x)$, donc ϱ se factorise sur $\mathcal{O}_{H_+}^\times$ et puisque le groupe $\mathcal{O}_H^\times/\mathcal{O}_{H_+}^\times$ est d'ordre fini, ϱ se factorise sur $\mathcal{O}_H^\times$. De là, on obtient l'isomorphisme voulu.

□

Remarque 2.10. *La base (e_1,e_2) telle que $\rho_{|G_M} = \psi \oplus \psi^\sigma$ est définie à des scalaires près $\big(i.e\ (e_1,e_2) \sim (\mu e_1, \mu' e_2)$ où $(\mu,\mu') \in (\bar{\mathbb{Q}}^\times)^2\big)$. Si $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{H}^1(M, \mathrm{ad}\,\rho)^{\mathrm{Gal}(M/F)}$ dans la base (e_1,e_2), alors un changement de la base (e_1,e_2) à des scalaires près ne modifiera pas a et d et modifiera c et b par des scalaires près.*

Si $\mathfrak{p}_i$ est inerte ou ramifié dans M, alors par ordinarité en p, ψ est non ramifié en v_i et $\psi_{|G_{M_{v_i}}} = \psi^\sigma_{|G_{M_{v_i}}}$. Il en découle que v_i se décompose complètement dans H et que ψ_i''/ψ_i' est le caractère quadratique de $\mathrm{Gal}(M_{v_i}/F_{\mathfrak{p}_i})$. Ainsi, si $\mathfrak{p}_i \in S^p$, en normalisant la base (e_1,e_2) de sorte que $\rho(\sigma_0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{smallmatrix}\right)$, où σ_0 est un élément fixé, non trivial du groupe $\mathrm{Gal}(H_{w_i}/F_{\mathfrak{p}_i})$. On notera que $\rho(\sigma_0)$ est diagonal dans la base (e_1+e_2, e_1-e_2). Donc on peut supposer que $(e_1+e_2, e_1-e_2) = (e'_{i,1}, e'_{i,2})$ (voir [**9**, §4]). En effet, avec les notations de la section §1.1, un calcul direct montre que le morphisme de la relation (3) est donné dans la base (e_1,e_2) par

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{(C_i^*,D_i^*)} (\frac{a-c+b-d}{2}, \frac{a-c-b+d}{2})$$

De plus σ_0 échange $b_{|G_M}$ et $c_{|G_M}$. Ainsi, si $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in t_{\mathcal{D}^{ord}}$, alors

$$\begin{gathered} c_{v_i}^{\sigma_0} - a_{v_i}^{\sigma_0} = c_{v_i} - a_{v_i} \\ \text{et } a_{v_i}^{\sigma_0} + a_{v_i} - c_{v_i}^{\sigma_0} - c_{v_i} \text{ est non ramifié,} \end{gathered} \tag{15}$$

où $c_{v_i} = i(c)$ et $a_{v_i} = j(a)$, où i et j sont les restrictions suivantes :

$$c \in \mathrm{H}^1(M,\psi_\heartsuit^{-1}) \xrightarrow{i} \mathrm{im}\left(\mathrm{H}^1(M_{v_i},\bar{\mathbb{Q}}_p) \to \mathrm{H}^1(I_{v_i},\bar{\mathbb{Q}}_p)\right) \xleftarrow{j} \mathrm{H}^1(M,\bar{\mathbb{Q}}_p) \ni a. \tag{16}$$

Pour calculer $t^0_{\mathcal{D}^{ord}}$, on doit rajouter la condition $a+d=0$ qui est équivalente à $d^\sigma = -d$.

Proposition 2.11. *Avec les notations ci-dessus, on a :*

(i) Si $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in t_{\mathcal{D}} \subset \mathrm{H}^1(M, \operatorname{ad}\rho)^{\mathrm{Gal}(M/F)}$*, alors* $a = a^{\sigma}$.

(ii) Soit $\mathfrak{p}_i$ *un premier de* F *qui est inerte ou ramifié dans* M*, alors* $c_{v_i} = c_{v_i}^{\sigma_0}$.

(iii) Soient $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in t^0_{\mathcal{D}^{ord}} \subset \mathrm{H}^1(M, \operatorname{ad}^0\rho)^{\mathrm{Gal}(M/F)}$ *et* $\mathfrak{p}_i$ *un premier de* F *qui est inerte ou ramifié dans* M*, alors* c_{v_i} *et* a_{v_i} *sont non ramifiés.*

Démonstration. (i) L'hypothèse $(\mathbf{L}_M)$ implique que $M.\mathbb{Q}_\infty$ est l'unique $\mathbb{Z}_p$-extension de M et donc $a = a^\sigma$.

(ii) Il découle de la proposition 2.4, de (i) et de (15) que $c_{v_i} = c_{v_i}^{\sigma_0}$.

(iii) L'énoncé (i) implique que $d = 0$, par conséquent, (ii) et (15) impliquent que c_{v_i} est trivial. $\square$

Théorème 2.12. *On suppose que* M *est totalement réel, alors :*

(i) La dimension de $t_{\mathcal{D}}$ *est* $[F : \mathbb{Q}] + 1$ *et la dimension de* $t_{\mathcal{D}^{ord}}$ *est* $\max\{1, \sum_{\mathfrak{p}_i \in S_p} f_i.e_i\}$.

(ii) On a l'isomorphisme suivant

$$t^0_{\mathcal{D}^{ord}} \simeq \operatorname{Hom}(\prod_{w|v_i^\sigma, \mathfrak{p}_i \in I} U^1_w \prod_{w|v_i, \mathfrak{p}_i \in I'} U^1_w, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit^{-1}], \tag{17}$$

et $\dim t^0_{\mathcal{D}^{ord}} = \sum_{\mathfrak{p}_i \in S_p} f_i.e_i$.

Démonstration. i) Soit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ un élément de $t_{\mathcal{D}} \subset \mathrm{H}^1(F, \operatorname{ad}\rho)^{\mathrm{Gal}(H/F)}$. D'après la décomposition (6) et le corollaire 2.3, il suffit de déterminer la dimension des espaces vectoriels où vivent d et c.

La décomposition (6) implique que $d \in \operatorname{Hom}(G_M, \bar{\mathbb{Q}}_p)$ et puisque la condition $(\mathbf{L}_M)$ est vérifiée, alors $\dim \operatorname{Hom}(G_M, \bar{\mathbb{Q}}_p) = 1$.

D'autre part, σ échange b et c et échange aussi v_i^σ et v_i quand $\mathfrak{p}_i \in S_p = I' \bigsqcup I$. D'après l'isomorphisme (11), les propositions 2.4, 2.9, 2.11 et le fait que $\mathrm{Gal}(H/M)$ permute les places de H au dessus de v_i, on a :

(18)

$$c \in \operatorname{Hom}(\prod_{w|v_i^\sigma, \mathfrak{p}_i \in I} U^1_w \prod_{w|v_i, \mathfrak{p}_i \in I'} U^1_w, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit^{-1}] \oplus (\operatorname{Hom}(\prod_{w|v_i, \mathfrak{p}_i \in S^p} U^1_w, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit^{-1}])^{\mathrm{Gal}(M_{v_i}/F_{\mathfrak{p}_i})}$$

$$\dim \operatorname{Hom}(\prod_{w|v_i^\sigma, \mathfrak{p}_i \in I} U^1_w \prod_{w|v_i, \mathfrak{p}_i \in I'} U^1_w, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit^{-1}] \oplus (\operatorname{Hom}(\prod_{w|v_i, \mathfrak{p}_i \in S^p} U^1_w, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit^{-1}])^{\mathrm{Gal}(M_{v_i}/F_{\mathfrak{p}_i})} = [F : \mathbb{Q}]$$

Donc, $\dim t_{\mathcal{D}} = [F : \mathbb{Q}] + 1$.

Si on suppose de plus que $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in t_{\mathcal{D}^{ord}}$, on doit ajouter la condition supplémentaire (15) quand $\mathfrak{p}_i \in S^p$ et d_{v_i} est non ramifié quand $\mathfrak{p}_i \in S_p$. On procède cas par cas :

Si $S_p \neq \varnothing$, alors d est non ramifié en une place de M au dessus de p et il en découle que d est trivial (puisque on a supposé la condition $(\mathbf{L}_M)$). Ainsi, la proposition 2.11 et a relation

(15) impliquent que c_{v_i} est trivial quand $\mathfrak{p}_i \in S^p$. Donc, (18) implique que $\dim t_{\mathcal{D}^{ord}} = |I'_F| = \sum_{\mathfrak{p}_i \in S_p} f_i.e_i$.

Si S_p est vide, les relations (15) et $d \in \mathrm{Hom}(G_M, \bar{\mathbb{Q}})$ impliquent que $\dim t_{\mathcal{D}^{ord}} = 1$.

ii) Finalement, si on suppose que $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in t^0_{\mathcal{D}^{ord}}$, alors les relations (18) et (15) et la proposition 2.11 impliquent l'isomorphisme désiré et donc $\dim t^0_{\mathcal{D}^{ord}} = |I'_F| = \sum_{\mathfrak{p}_i \in S_p} f_i.e_i$.

□

Sans la condition $(\mathbf{L}_M)$ et si S^p est vide, les mêmes arguments de la preuve du Théorème 2.12 impliquent que $\dim t_{\mathcal{D}} = [F : \mathbb{Q}] + 1 + \delta_M$, où δ_M est la défection de Leopoldt de M en p.

3.2. Le cas où H est Galois et diédral sur $\mathbb{Q}$.

On a sous les hypothèses du Théorème 0.6 le diagramme suivant

(19)
$$\begin{tikzcd}
 & H \arrow[d, dash] & \\
 & F.K = M \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
K \arrow[dr, dash] & & F \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(H/\mathbb{Q})$ est diédral et les extensions M/F, M/K et $K/\mathbb{Q}$ sont quadratiques (K est imaginaire).

La restriction $\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ induit un isomorphisme $\mathrm{Gal}(M/F) \simeq \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ et donc l'ensemble S^p est vide (puisque p se décompose dans K).

On note G le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(H/\mathbb{Q})$. Avec les notations utilisées dans la relation (11), tout élément de $\mathrm{Hom}((\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p)$ est de la forme

$$u \otimes 1 \mapsto \sum_{g \in G} h_g \log_p(g^{-1}(u \otimes 1))$$

pour $h_g \in \bar{\mathbb{Q}}_p$. De plus, la G-représentation régulière $\bar{\mathbb{Q}}_p[G] = \mathrm{Hom}\big((\mathbb{Z}_p \otimes \mathcal{O}_H)^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p\big)$ est isomorphe à $\bigoplus_{\pi \in \widehat{G}} \pi^{\dim_\pi}$, où π parcourt l'ensemble des caractères du groupe G.

D'autre part, On a la décomposition suivante de G-modules :

(20)
$$\mathrm{H}^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p) \simeq \bigoplus_{\pi} \pi^{m_\pi},$$

où π parcourt l'ensemble des caractères de G. D'après la preuve de Minkowski du théorème des unités de Dirichlet, il existe un isomorphisme de G-modules

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_H^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p) \simeq \bigoplus_{\pi\in\widehat{G}} \pi^{\dim\pi^+},$$

où π^+ et π^- sont les sous-espaces propres pour l'action de la conjugaison complexe $c \in G$.

Lemme 2.13. *Avec les notations ci-dessus, on a :*

(i) $m_\pi = \dim\pi^-$ *pour* $\pi \neq 1$ *et* $m_1 = 1$.

(ii) $\dim\pi \leq 2$ *pour tout caractère* π *de* G*. De plus, si* $\dim\pi = 2$*, alors* $\pi = \mathrm{Ind}_K^{\mathbb{Q}}\psi$*, où* $\psi : G_K \to \bar{\mathbb{Q}}_p^\times$ *est un caractère.*

Démonstration. (i) Puisque K est un corps quadratique imaginaire et H est une extension abélienne de K, la conjecture de Leopoldt est vraie pour H d'après Ax-Baker-Brumer [**8**]. Par conséquent, le dernier morphisme de la suite exacte (7) est surjectif et donc $m_\pi = \dim\pi^-$.

(ii) L'assertion découle immédiatement du fait que G est un groupe diédral. □

Théorème 2.14. *On a :*

(i) $\dim \mathrm{H}^1(M, \psi_\heartsuit^{-1}) = [F : \mathbb{Q}]$.

(ii) $\ker\left(\mathrm{H}^1(M, \psi_\heartsuit^{-1}) \to \underset{\mathfrak{p}_i|p}{\oplus} \mathrm{H}^1(M_{v_i}, \psi_\heartsuit^{-1}))\right)$ *est trivial.*

Démonstration.

(i) Nos hypothèses impliquent que $\mathrm{Gal}(H/K)$ est cyclique et que $\mathrm{Gal}(H/M)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(H/K)$ d'indice égal à $[F : \mathbb{Q}]$ (où $[F : \mathbb{Q}] = 2$), donc il existe 2 caractères $(\psi_i)_{1\leq i\leq 2} : G_K \to \bar{\mathbb{Q}}_p$ qui prolonge $\psi_\heartsuit^{-1}$ à $\mathrm{Gal}(H/K)$. De plus, le lemme 2.13 implique que $(\mathrm{Ind}_K^{\mathbb{Q}}\psi_i)_{\{1\leq i\leq 2\}}$ sont les représentations de $\mathrm{Gal}(H/\mathbb{Q})$ qui prolonge la $\mathrm{Gal}(H/F)$-représentation $\mathrm{Ind}_M^F \psi_\heartsuit^{-1}$ à $\mathrm{Gal}(H/\mathbb{Q})$.

Puisque $\det \mathrm{Ind}_K^{\mathbb{Q}}\psi_i(c) = -1$, le lemme 2.13 implique que la représentation irréductible $\mathrm{Ind}_{\mathbb{Q}}^K \psi_i$ apparait avec une multiplicité égale à 1 dans la décomposition de G-modules (20). Par conséquent, la multiplicité de $\mathrm{Ind}_M^F \psi_\heartsuit^{-1}$ dans la $\mathrm{Gal}(H/F)$-représentation $\mathrm{H}^1(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p)$ est égale à 2, et puisque $\pi' = \mathrm{Ind}_M^F(\psi_\heartsuit^{-1})$ est irréductible, alors

$$\dim \mathrm{H}^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit^{-1}] = \dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(H/F)}\left(\pi', \mathrm{H}^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)\right) = 2$$

Ainsi, le résultat désiré découle de l'isomorphisme (12).

(ii) D'après le lemme 2.13

$$\dim \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_K^{\mathbb{Q}}\psi_i, \mathrm{H}^1(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p)) = \dim \mathrm{H}^1(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_i] = 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq 2$$

Maintenant, pour tout $1 \leq i \leq 2$, choisissant un générateur f_i de $\mathrm{H}^1(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_i]$. On peut voir que les 1-cocycles $(f_i)_{1\leq i\leq 2}$ sont des éléments du groupe de cohomologie $\mathrm{H}^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_{\heartsuit}^{-1}]$ (puisque ψ_i prolonge $\psi_{\heartsuit}^{-1}$ à $\mathrm{Gal}(H/K)$).

D'autre part, puisque $f_i \in \mathrm{Hom}((\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p)$, alors f_i est de la forme suivante :

$$u \otimes 1 \mapsto \sum_{g \in \mathrm{Gal}(H/\mathbb{Q})} a_g^i \log_p(g^{-1}(u)).$$

Puisque f_i est un élément de ψ_i-espace propre $\mathrm{Hom}((\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p)$, alors :

$$a_g^i = \psi_i^{-1}(g) a_1^i \text{ et } a_{cg}^i = \psi_i^{-1}(g) a_c^i \text{ pour tout } g \in \mathrm{Gal}(H/K)$$

Soit w_0 (resp. v) la place première de H (resp. K) au dessus de p induite par ι_p. Si l'image de f_i dans $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{H_{w_0}}^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p)$ est triviale, par la preuve de Minkowski du théorème des unités de Dirichlet, on sait que tout élément de $\mathrm{Hom}(\prod_{w|v^\sigma} \mathcal{O}_{H,w}^\times, \bar{\mathbb{Q}}_p)$ qui est trivial sur les unités globales doit se factoriser à travers la norme, donc f_i n'appartient pas au ψ_i-espace propre. Par conséquent l'espace vectoriel

$$\ker(\mathrm{H}^1(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_i] \to \mathrm{H}^1(G_{H_{w_0}}, \bar{\mathbb{Q}}_p))$$

est trivial et de là en déduit que a_1^i et a_c^i sont non nuls, puisque σ échange les groupes de décomposition $G_{H_{w_0}}$ et $G_{H_{\sigma(w_0)}}$ $(\sigma = c)$.

Si t_0 est un générateur du groupe cyclique $\mathrm{Gal}(H/K)$ et n' le cardinal de $\mathrm{Gal}(H/K)$, alors pour tout $1 \leq i \leq 2$ on a

$$f_i = a_1^i \sum_{0 \leq j \leq n'-1} \psi_i^{-1}(t_o^j) \log_p(t_0^{-j}(.)) + a_c^i \sum_{0 \leq j \leq n'-1} \psi_i^{-1}(t_o^j) \log_p(t_0^{-j} c(.)).$$

Par conséquent, en écrivant les 1-cocycles $\{f_i\}_{1\leq i \leq 2}$ dans la base $\{\log_p(g^{-1}(.))_{g\in G}\}$, on peut extraire une sous-matrice de Vandermonde $A = (\psi_i^{-1}(t_0^{j-1}))_{\{1\leq i,j \leq 2\}}$. Puisque $\psi_i \neq \psi_j$ pour $i \neq j$, $\det A \neq 0$. Donc, les 1-cocycles $\{f_i\}_{\{1\leq i \leq 2\}}$ forment une base de $\mathrm{H}^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_{\heartsuit}^{-1}]$ et puisque a_1^i et a_c^i sont non nuls, on ne peut pas trouver une combinaison linéaire des f_i $(1 \leq i \leq 2)$ qui est triviale sur tous les groupes de décomposition de G_H aux places $\{w_i\}_{\mathfrak{p}_i \in S_p}$, donc le $\bar{\mathbb{Q}}_p$-espace vectoriel

$$\ker\left(\mathrm{Hom}(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_{\heartsuit}^{-1}] \to \bigoplus_{\mathfrak{p}_i | p} \mathrm{Hom}(G_{H_{w_i}}, \bar{\mathbb{Q}}_p)\right)$$

est trivial. Finalement, on peut conclure grâce au lemme 2.2.

□

COROLLAIRE 2.15. *Sous les hypothèses du Théorème 0.6, on a :*

(i) L'espace vectoriel $t^0_{\mathcal{D}^{ord}}$ est trivial.

(ii) La dimension de l'espace tangent $t_{\mathcal{D}}$ est $[F : \mathbb{Q}] + 1$.

DÉMONSTRATION.

(i) L'assertion découle immédiatement de la relation (13) et du Théorème 2.14.

(ii) D'après l'assertion (i), il existe un isomorphisme $t_{\mathcal{D}} \simeq \mathrm{Hom}(G_M, \bar{\mathbb{Q}}_p)$. D'autre part, puisque M est une extension totalement complexe de $\mathbb{Q}$ de degré $2[F:\mathbb{Q}]$ et que la conjecture de Leopoldt est vraie pour H, M possède trois $\mathbb{Z}_p$-extensions indépendantes et $\dim \mathrm{Hom}(G_M, \bar{\mathbb{Q}}_p) = [F:\mathbb{Q}] + 1$.

□

4. Preuves des isomorphismes $\mathcal{R} \simeq \mathcal{T}$

On va démontrer dans cette section le théorème 0.4, le théorème 0.6 et le théorème 0.7.

La variété de Hecke-Hilbert $\mathcal{E}$ est équidimensionelle de dimension $[F:\mathbb{Q}]+1$, donc $\mathcal{E}$ est lisse en x si, et seulement, si l'espace tangent de $\mathcal{T}$ est de dimension $[F:\mathbb{Q}]+1$. De plus, le morphisme κ est étale en x si, et seulement, si l'anneau local $\mathcal{T}'$ de la fibre de $\kappa(x)$ en x est isomorphe à $\bar{\mathbb{Q}}_p$.

4.1. Le lieu quasi-ordinaire de la variété de Hecke-Hilbert $\mathcal{E}$.

Dans la proposition suivante, on reproduit les mêmes arguments que ceux de la proposition [**9**, 6.1] pour montrer qu'on a une déformation quasi-ordinaire de ρ en p à valeurs dans $\mathcal{T}$.

PROPOSITION 2.16.

(i) Il existe une représentation continue

$$\rho_{\mathcal{T}} : G_{F,\mathfrak{n}p} \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{T}),$$

telle que $\mathrm{Tr}\,\rho_{\mathcal{T}}(\mathrm{Frob}_\ell) = T_\ell$ *pout tout* $\ell \nmid \mathfrak{n}p$. *La réduction de* $\rho_{\mathcal{T}}$ *modulo* $\mathfrak{m}_{\mathcal{T}}$ *est isomorphe à* ρ.

(ii) La déformation $\rho_{\mathcal{T}}$ *est quasi-ordinaire en* p.

DÉMONSTRATION.

(i)Même preuve que la proposition [**9**, 6.1].

(ii)D'après [**14**, 6.3.6], il existe un ouvert admissible (affinoïde) de Ω de $\mathcal{E}$ contenant x tel que l'application $z \to |U_p(z)|_p$ est constante et égale à 1 sur $\Omega(\mathbb{C}_p)$, où $w(\Omega)$ est un ouvert admissible (affinoïde) de $\mathcal{W}_F$, $\kappa : \Omega \to w(\Omega)$ est fini et de restriction surjective sur chaque composante irréductible de Ω. Puisque le lieu quasi-ordinaire $\mathcal{E}^{n.ord}$ de $\mathcal{E}$ est la fibre générique de l'algèbre de Hecke quasi-ordinaire en p induite par les opérateurs de Hecke T_ℓ et $U_{\mathfrak{p}_i}$ où $\mathfrak{p}_i \mid p$ et $\ell \nmid p\mathfrak{n}$ et que l'anneau $\mathcal{T}$ est equidimensionel, alors idéaux minimaux de $\mathcal{T}$ correspondent aux familles de Hida quasi-ordinaires en p.

Soient $V_{\mathcal{T}}$ le $\mathcal{T}$-module de rang 2 sur lequel G_F agit par $\rho_{\mathcal{T}}$ et la famille des corps $(K_i)_{1 \leq i \leq r}$ obtenus par la localisation de $\mathcal{T}$ en ses idéaux minimaux et posons $V_i = V \otimes_{\mathcal{T}} K_i$ $(1 \leq i \leq r)$.

V_i est un $K_i[G_{F,\mathfrak{n}p}]$-module et est la représentation galoisienne d'une famille de Hida quasi-ordinaire en p qui se spécialise en f. D'après un résultat de [**35**], pour tout $\mathfrak{p}_k \mid p$ il existe une suite exacte courte de $K_i[G_{F_{\mathfrak{p}_k}}]$-modules :

$$0 \to V_i^+ \to V_i \to V_i^- \to 0,$$

où V_i^- est une droite sur laquelle $G_{F_{\mathfrak{p}_k}}$ agit par le caractère $\delta_{\mathfrak{p}_k}$ qui envoie $[y, F_{\mathfrak{p}_k}]$ sur l'opérateur de Hecke $T(y)$, où $[., F_{\mathfrak{p}_k}] : \widehat{F_{\mathfrak{p}_k}^\times} \to G_{F_{\mathfrak{p}_k}}^{ab}$ est le symbol local d'Artin. Puisque ρ est p-régulière et $\delta_{\mathfrak{p}_k}$ relève le caractère ψ_k'', on peut conclure par la proposition [**9**, 6.1] que $\rho_{\mathcal{T}}$ est quasi-ordinaire en p.

$\square$

4.2. Surjection de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{T}$.

D'après la proposition 2.16, la représentation $\rho_{\mathcal{T}}$ induit un morphisme local continu de $\bar{\mathbb{Q}}_p$-algèbres

$$\mathcal{R} \to \mathcal{T}. \tag{21}$$

Soit A un anneau local Artinien d'idéal maximal $\mathfrak{m}_A$ et de corps résiduel $A/\mathfrak{m}_A = \bar{\mathbb{Q}}_p$. Toute déformation de $\det(\rho)$ (resp. $(\det\rho, (\psi_i'')_{\mathfrak{p}_i|p})$) à valeurs dans $A^\times$ est équivalente à un morphisme continu de $G_{F,\mathfrak{n}p}$ (resp. $G_{F,\mathfrak{n}p} \times (\mathfrak{o} \otimes \mathbb{Z}_p)^\times$) vers $1 + \mathfrak{m}_A$.

D'un autre coté, la restriction de la déformation universelle $\rho_{\mathcal{R}}$ à $G_{F_{\mathfrak{p}_i}}$ pour tout $\mathfrak{p}_i \mid p$ est une extension d'un caractère $\psi_{i,\mathcal{R}}''$ qui relève ψ_i'' par un caractère $\psi_{i,\mathcal{R}}'$ qui relève ψ_i'. D'après la théorie du corps de classes et puisque $1 + \mathfrak{m}_A$ ne contient pas d'élément d'ordre fini, l'anneau universel qui représente les déformations de $\det\rho$ (resp. $\det\rho \times (\psi_i'')_{\{\mathfrak{p}_i|p\}}$) est donné par $\bar{\mathbb{Q}}_p[[1+p\mathbb{Z}_p]]$ (resp. $\bar{\mathbb{Q}}_p[[T_1, T_2, ..., T_{n+1}]]$). De plus, $\mathcal{R}^{ord}$ (resp. $\mathcal{R}$) a une structure de $\bar{\mathbb{Q}}_p[[1 + p\mathbb{Z}_p]]$-algèbre (resp. $\bar{\mathbb{Q}}_p[[T_1, T_2, ..., T_{n+1}]]$-algèbre) donnée par la déformation $\det\rho_{\mathcal{R}^{ord}}$ (resp. $(\det\rho_{\mathcal{R}}, (\psi_{i,\mathcal{R}}'')_{\{\mathfrak{p}_i|p\}})$) de $\det\rho$ (resp. $(\det\rho, (\psi_i'')_{\mathfrak{p}_i|p})$).

L'action de Λ sur l'anneau $\mathcal{T}$ donnée par le morphisme poids κ est compatible avec l'action induite par les caractères $\det\rho_{\mathcal{T}}$ et ceux donnés par l'image de $\psi_{i,\mathcal{R}}''$ via le morphisme (21) (voir [**35**]). Ainsi, le morphisme (21) est Λ-linéaire et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \bar{\mathbb{Q}}_p[[T_1, T_2, ..., T_{n+1}]] \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{R} \arrow[d] \\ \Lambda \arrow[r] & \mathcal{T}. \end{tikzcd}$$

Lemme 2.17. *Le morphisme naturel $\bar{\mathbb{Q}}_p[[T_1, T_2, ..., T_{n+1}]] \to \Lambda$ est un isomorphisme.*

Démonstration.

Puisque l'anneau Λ est équidimensionnel de dimension $n+1$, la surjection

$$\bar{\mathbb{Q}}_p[[T_1, T_2, ..., T_{n+1}]] \to \Lambda$$

est un isomorphisme d'anneaux réguliers. □

Proposition 2.18. *Le morphisme (21) est surjectif.*

Démonstration.

Puisque $\mathcal{T}$ est topologiquement engendré sur Λ par $U_\mathfrak{p}$ pour tout $\mathfrak{p} \mid p$ et T_ℓ pour $\ell \nmid \mathfrak{n}p$, il suffit de montrer que ces éléments sont dans l'image de $\mathcal{R}$ via le morphisme (21).

Pour $\ell \nmid \mathfrak{n}p$, $T_\ell = \mathrm{Tr}\,\rho_\mathcal{T}(\mathrm{Frob}_\ell)$ est l'image de la trace de $\rho_\mathcal{R}(\mathrm{Frob}_\ell)$.

D'autre part, la restriction de $\rho_\mathcal{R}$ à $G_{F_{\mathfrak{p}_i}}$ pour tout $\mathfrak{p}_i \mid p$ est une extension du $\psi''_{i,\mathcal{R}}$ par le caractère $\psi'_{i,\mathcal{R}}$, où l'image du caractère $\psi_{i,\mathcal{R}''}$ dans $\mathcal{T}$ est le caractère $\delta_{\mathfrak{p}_i}$ qui envoie $[y, F_{\mathfrak{p}_i}]$ sur l'opérateur de Hecke $T(y)$ où $[., F_{\mathfrak{p}_i}] : \widehat{F_{\mathfrak{p}_i}^\times} \to G_{F_{\mathfrak{p}_i}}^{ab}$ est le symbol d'Artin. Ainsi, $U_{\mathfrak{p}_i} = [\pi_{\mathfrak{p}_i}, F_{\mathfrak{p}_i}]$ est dans l'image du morphisme (21) pour une certaine uniformisante $\pi_{\mathfrak{p}_i}$ du corps complet $F_{\mathfrak{p}_i}$. □

D'après la proposition 2.17, $\mathit{\Lambda}$ représente le problème de déformation de $(\det\rho, (\psi''_i)_{\mathfrak{p}_i|p})$ aux éléments inversibles d'une $\bar{\mathbb{Q}}_p$-algèbre artinienne A. Donc, le functeur oubli des déformations de $(\det\rho, (\psi''_i)_{\mathfrak{p}_i|p})$ aux déformations $\det\rho$ induit la surjection suivante :

$$\mathit{\Lambda} \twoheadrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p[[1 + p\mathbb{Z}_p]].$$

Le noyau $\mathcal{I}^{aug}$ de la surjection ci-dessus est appelé l'idéal d'augmentation.

On rappelle que $\mathcal{T}^{ord}$ est le quotient de $\mathcal{T}$ obtenu par l'equation $\upsilon = 0$, donc $\mathcal{T}^{ord} = \mathcal{T}/\mathcal{I}^{aug}\mathcal{T}$. En utilisant le même argument, on obtient l'isomorphisme suivant :

$$\mathcal{R}/\mathcal{I}^{aug}\mathcal{R} \simeq \mathcal{R}^{ord} \tag{22}$$

On note $\mathcal{R}'$ le quotient de $\mathcal{R}$ par l'idéal engendré par l'image de l'idéal maximal de $\mathit{\Lambda}$.

Il est facile de voir que $\mathcal{R}'$ est le plus grand quotient p-ordinaire de $\mathcal{R}$ dans lequel ρ peut être déformée avec un déterminant constant. Ainsi, l'anneau local $\mathcal{R}'$ représente $\mathcal{D}^{ord}_{\det\rho}$.

4.3. Démonstration du Théorème 0.4 et du Théorème 0.6.

Théorème 2.19. *Sous les hypothèses du Théorème 0.4 ou du Théorème 0.6, le morphisme (21) est un isomorphisme d'anneaux réguliers.*

Démonstration.

Le corollaire 2.15 et le théorème 2.12 impliquent que $\dim t_\mathcal{D} = [F : \mathbb{Q}]+1$, donc la dimension de l'espace tangent de $\mathcal{R}$ est $[F : \mathbb{Q}] + 1$. D'autre part, $\mathcal{T}$ est equidimensionel de dimension $[F : \mathbb{Q}] + 1$ et par consequent, la proposition 2.18 implique que (21) est un isomorphisme d'anneaux locaux réguliers de dimension $[F : \mathbb{Q}] + 1$.

□

L'isomorphisme d'anneaux locaux $\mathcal{R} \simeq \mathcal{T}$ et (22) impliquent qu'il existe des isomorphismes $\mathcal{R}^{ord} \simeq \mathcal{T}^{ord}$ et $\mathcal{R}' \simeq \mathcal{T}'$. Ainsi, on peut conclure grâce au théorème 2.12 dans le cas où M est totalement réel. Dans le cas où M est totalement complexe, le corollaire 2.15 implique que $\mathcal{T}' \simeq \bar{\mathbb{Q}}_p$ et donc κ est étale en x, ce qui achève notre démonstration.

4.4. $\mathcal{R}_{\min} = \mathcal{T}$ dans la cas où l'extension M/F n'est pas totalement réel.

Soient $h^{n,ord}(\mathfrak{n}, \mathcal{O})$ le quotient de l'algèbre de Hecke quasi-ordinaire en p nouveau en $\mathfrak{n}$ construit par Hida dans [**39**] et h' *la sous-algèbre de Hecke*[2] de $h^{n,ord}(\mathfrak{n}, \mathcal{O})$ engendrée sur l'algèbre d'Iwasawa par les opérateurs de Hecke $\{U_\mathfrak{p}, T_\ell, <\ell>\}_{\mathfrak{p}|p, \ell\nmid\mathfrak{n}p}$. Il est connu que le lieu quasi-ordinaire de $\mathcal{E}^{n.ord}$ de $\mathcal{E}$ est la fibre générique de l'algèbre de Hecke h'. Puisque f est ordinaire en p, il existe un unique morphisme $\varphi_\theta^{n,ord} : h' \to \mathcal{O}$ qui envoie T_ℓ sur $\operatorname{Tr}\rho(\mathrm{Frob}_\ell)$ pour tout $\ell \nmid \mathfrak{n}p$.

On note $\mathcal{P}_\theta^{n,ord}$ l'idéal premier $\ker \varphi_\theta^{n,ord}$ et $\mathcal{H}$ le complété de l'anneau local de $\operatorname{Spec} h'$ en $\mathcal{P}^{n,ord}$. Après une extension par des scalaires, on peut supposer que $\mathcal{H}$ contient $\bar{\mathbb{Q}}_p$.

Soit $\mathfrak{C}_\mathcal{O}$ la catégorie des $\mathcal{O}$-algèbres locales complètes noethériennes de corps résiduel $\mathbb{F}$ et dont les morphismes sont les homomorphismes locaux d'anneaux locaux qui induisent l'identité sur les corps résiduels.

On a les conditions suivantes :

- $(\mathbf{AI}_F)$ La restriction $\bar{\rho}$ à $G_{F(\sqrt{(-1)^{(p-1)/2}p})}$ est absolument irréductible.
- $(\mathbf{LD}_p)$ F est linéairement disjointe de $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ sur $\mathbb{Q}$ et $\mu_p(F_\mathfrak{p}) = \{1\}$ pour tout $\mathfrak{p} \mid p$, où ζ_p est une racine p-ième de l'unité et $\mu_p(F_\mathfrak{p})$ est l'ensemble des racines p-ième de l'unité de $F_\mathfrak{p}$.

La condition $(\mathbf{LD}_p)$ est plus faible que la condition : p est non ramifié dans F.

On suppose dans cette sous-section que la représentation résiduelle $\rho \otimes \mathbb{F} = \bar{\rho} = \operatorname{Ind}_M^F \bar{\psi}$ est absolument irréductible, minimale au sens de Fujiwara [**30**], p-distinguée et l'ordre de ψ est premier avec p. D'après les critère de Schlesinger, le fonctor $\mathcal{D}_{\bar{\rho}}$ des déformations de $\bar{\rho}$ qui sont minimales et non ramifiés en dehors de $\mathfrak{n}p$ et quasi-ordinaires en p à valeurs dans les objets de la catégorie $\mathfrak{C}_\mathcal{O}$ est représentable par le couple $(\mathcal{R}_{\bar{\rho}}^{\min}, \rho_{\mathbb{F}}^{n,ord})$.

D'autre part, on note $h^{n,ord}$ la composante locale $h^{n,ord}(\mathfrak{n}, \mathcal{O})$ correspondant à $\bar{\rho}$ ($h^{n,ord}(\mathfrak{n}, \mathcal{O})$ est semi-local) et $\rho_{h^{n,ord}} : G_{F,S} \to \mathrm{GL}_2(h^{n,ord})$ la déformation quasi-ordinaire en p de $\bar{\rho}$ construite par Hida dans [**39**] qui envoie Frob_ℓ vers T_ℓ pour $\ell \nmid \mathfrak{n}p$. Sous les hypothèses $(\mathbf{AI}_F)$ et $(\mathbf{LD}_p)$, le théorème de Fujiwara's [**30**] appliqué à la représentation résiduelle $\bar{\rho}$ nous dit que $\mathcal{R}_{\bar{\rho}}^{\min} \simeq h^{n,ord}$.

Pour tout premier $\mathfrak{q}$ de F divisant $\mathfrak{n}$, on note $a_\mathfrak{q}$ la valeur propre de f pour l'opérateur de Hecke $U_\mathfrak{q}$. Soit $\mathcal{D}_{\min}$ le sous-foncteur de $\mathcal{D}$ qui consiste en les déformations ρ_A qui sont minimales, dans le sens où pour tout $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{n}$ tel que $a_\mathfrak{q} \neq 0$, l'espace des $I_\mathfrak{q}$-invariants dans ρ_A

2. On a omit les operateurs $U_\mathfrak{q}$ pour $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{n}$.

est un A-module libre de rang 1. Le foncteur $\mathcal{D}_{\min}$ est représentable par $(\mathcal{R}_{\min}, \rho_{\mathcal{R}_{\min}})$. Puisque la représentation ρ est une déformation de $\bar{\rho}$, donc $\mathcal{D}_{\min}$ est la fibre générique du foncteur $\mathcal{D}_{\bar{\rho}}$ (voir [**43**, 2.3.5]). Ainsi, il existe un isomorphisme (après une extension par des scalaires) entre $\mathcal{R}_{\min}$ et la complétion de la localisation de $\mathcal{R}_{\bar{\rho}}^{\min}$ par l'idéal premier de hauteur 1 donné par le noyau du morphisme $\mathcal{R}_{\bar{\rho}}^{\min} \to \mathcal{O}$ qui induit la déformation ρ de $\bar{\rho}$. De plus, la déformation $\rho_{\mathcal{R}_{\min}}$ est le tiré-en-avant de $\rho_{\mathbb{F}}^{n,ord}$ par le morphisme de localisation $\mathcal{R}_{\bar{\rho}}^{\min} \to \mathcal{R}_{\min}$.

LEMME 2.20. *Avec les notations ci-dessus, on a :*

(i) Il existe un isomorphisme $(\mathcal{H}, \rho_{\mathcal{H}}) \simeq (\mathcal{R}_{\min}, \rho_{\mathcal{R}_{\min}})$.

(ii) Il existe un isomorphisme $\mathcal{H} \simeq \mathcal{T}$.

(iii) L'application canonique $\operatorname{Spec} h^{n,ord}(\mathfrak{n}, \mathcal{O}) \to \operatorname{Spec} h'$ *induit un isomorphisme sur les complétés des anneaux locaux aux points associés à* f.

DÉMONSTRATION. (i) D'après Nyssen [**54**] et Rouquier [**57**], $\mathcal{R}_{\min}$ est engendré sur Λ par la trace de $\rho_{\mathcal{R}_{\min}}$. Donc, l'isomorphisme découle immédiatement de l'isomorphisme $\mathcal{R}_{\bar{\rho}}^{\min} \simeq h^{n,ord}$, du fait que le foncteur $\mathcal{D}_{\min}$ est la fibre générique du foncteur $\mathcal{D}_{\bar{\rho}}$ et du lemme [**43**, 2.3.5].

(ii) D'après la construction de la variété p-adique rigide $\mathcal{E}$, il existe un isomorphisme de variétés analytiques rigides $\mathcal{E}^{n.ord} \simeq (\operatorname{Spec} h')^{rig}$ induisant un isomorphisme naturel sur les complétés des anneaux locaux en tout point.

(iii) Puisque $\bar{\rho}$ est minimale, $U_{\mathfrak{q}} \in \mathcal{H}$ pour tout $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{n}$. □

4.5. Preuve du Théorèmes 0.7.

Soit $\mathcal{D}_{\min}^{ord}$ le sous-foncteur de $\mathcal{D}_{\min}$ qui consiste en les déformations ρ_A qui sont ordinaires en p. Le foncteur $\mathcal{D}_{\min}^{ord}$ est représentable par $\mathcal{R}_{\min}^{ord}$.

On a l'isomorphisme suivant :

$$\mathcal{R}_{\min}/\mathcal{I}^{aug}\mathcal{R}_{\min} \simeq \mathcal{R}_{\min}^{ord} \tag{23}$$

On note $\mathcal{R}'_{\min}$ pour le quotient de $\mathcal{R}_{\min}$ par l'idéal engendré par l'image de l'idéal maximal de Λ.

Il est facile de voir que $\mathcal{R}'_{\min}$ est le plus grand quotient p-ordinaire de $\mathcal{R}_{\min}$ dans lequel ρ peut être déformée avec un déterminant constant. Ainsi, l'anneau local $\mathcal{R}'_{\min}$ représente le sous-foncteur $\mathcal{D}_{\det\rho}^{ord}$ qui consiste en les déformations qui sont minimales.

D'après le théorème 2.20, on a un isomorphisme entre $\mathcal{R}_{\min} \simeq \mathcal{T}$. De plus, (23) impliquent qu'il existe des isomorphismes entre $\mathcal{R}_{\min}^{ord} \simeq \mathcal{T}^{ord}$ et $\mathcal{R}'_{\min} \simeq \mathcal{T}'$. Dans nos calculs de l'espace tangent du foncteur $\mathcal{D}$, la condition minimale en $\mathfrak{q} \mid \mathfrak{n}$ est toujours vraie pour les 1-cocycles, puisque n'importe quel élément de $\operatorname{Hom}(G_H, \bar{\mathbb{Q}}_p)$ est non ramifié en dehors de p et ρ est d'image finie. Ainsi, les espaces tangents de $\mathcal{R}'$ et de $\mathcal{R}'_{\min}$ sont égaux et donc l'espace tangent de $\mathcal{R}'_{\min}$ est non trivial d'après la proposition 2.8, ce qui achève notre démonstration.

4.6. La courbe de Hecke-Hilbert parallèle $\mathcal{C}_F$ au point x.

La courbe de Hecke-Hilbert parallèle $\mathcal{C}_F$ est équidimensionelle de dimension 1, donc $\mathcal{C}_F$ est lisse en x si, et seulement, si l'espace tangent de $\mathcal{T}^{ord}$ est de dimension 1. De plus, le morphism κ est étale en x si, et seulement, si l'anneau local $\mathcal{T}'$ de la fibre de $\kappa(x)$ en x est isomorphe à $\bar{\mathbb{Q}}_p$.

Corollaire 2.21. *On a :*

(i) Sous les hypothèses du théorème 0.7 et si M a au plus $2([F:\mathbb{Q}]-2)$ plongements complexes, alors f est un point singulier de la courbe de Hecke-Hilbert $\mathcal{C}_F$.

(ii) Supposons que M est totalement réel, la conjecture de Leopoldt est vraie pour M et $\#S_p \geq 2$, alors f est un point singulier de la courbe de Hecke-Hilbert $\mathcal{C}_F$.

Démonstration.

(i) Puisque $\mathcal{R}^{ord}_{\min} \simeq \mathcal{T}^{ord}$, la proposition 2.8 implique que la dimension de l'espace tangent de $\mathcal{T}^{ord}$ est au moins 2, or la dimension de Krull de $\mathcal{T}^{ord}$ est 1.

(ii) Même argument que dans (i) combiné avec le théorème 2.12.

$\square$

5. Preuve du Théorème 0.5

On démontre le Théorème 0.5 dans cette section en utilisant les techniques de [**19**]. L'existence du *sous-groupe canonique*[3] sur la variété de Hilbert induit l'injection suivante

$$\jmath : S_1(\mathfrak{n}p,\chi)[f] \hookrightarrow S_1^{\dagger}(\mathfrak{n},\chi)[[f]],$$

où $S_1^{\dagger}(\mathfrak{n},\chi)[[f]]$ est l'espace propre généralisé associé à f dans l'espace des formes surconvergentes de poids 1. En utilisant le même argument que celui dans la démonstration de la proposition [**19**, 1.2], l'inclusion $\jmath$ est un isomorphisme si, et seulement si, $\mathcal{E}$ est étale sur $\mathcal{W}_F$ en x.

Sous les hypothèses du Théorème 0.4 et si de plus S_p est non vide, alors il existe un morphisme surjectif $\pi : \mathcal{T}' \to \bar{\mathbb{Q}}_p[\epsilon]$ de noyau I_π. I_π annule un sous-espace $S_1^{\dagger}(\mathfrak{n},\chi)[I_\pi]$ de dimension 2 de $S_1^{\dagger}(\mathfrak{n},\chi)[[f]] = \mathrm{Hom}_{\bar{\mathbb{Q}}_p}(\mathcal{T}',\bar{\mathbb{Q}}_p)$ et ce sous-espace contient une forme propre généralisée normalisée $f^{\dagger}$.

Pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de F, on note respectivement $a_{\mathfrak{q}}(f^{\dagger})$ et $a_{\mathfrak{q}}(f)$ les coefficients de Fourier de $f^{\dagger}$ et f. D'autre part, avec le même argument utilisé dans [**19**], l'opérateur de Hecke $T_{\mathfrak{q}}$ où $\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{n}p$ agit sur $f^{\dagger}$ de la manière suivante

$$T_{\mathfrak{q}} f^{\dagger} = a_{\mathfrak{q}}(f) f^{\dagger} + a_{\mathfrak{q}}(f^{\dagger}) f \tag{24}$$

3. L'existence du sous-groupe canonique induit une section de la surjection canonique de la projection naturelle $\overline{X}^{rig}(\mathfrak{n},\Gamma_1(p^n),\mathfrak{c}) \to \overline{X}^{rig}(\mathfrak{n},\mathfrak{c})$ sur un voisinage strict du lieu ordinaire de $\overline{X}^{rig}(\mathfrak{n},\mathfrak{c})$ et l'injection $\jmath$ est juste le tiré-en-arrière du faisceau conormal ω le long de cette section.

On rappelle que H est le corps fixé par $\ker \psi_\heartsuit$ et que $G'' = \mathrm{Gal}(H/M)$. Soit $\ell \nmid \mathfrak{n}p$ un premier de F qui est inerte dans M, alors le premier de M au dessus de ℓ se décompose complètement dans H (puisque ρ est non ramifié en ℓ). On note Σ_ℓ l'ensemble des premiers de H au dessus de ℓ. Puisque l'extension H/M est galoisienne, G'' agit sur Σ_ℓ. Soient $\lambda \in \Sigma_\ell$ et $u_\lambda \in \mathcal{O}_H[1/\lambda]^\times \otimes \mathbb{Q}$ une λ-unité de H de λ-valuation égale à 1. u_λ est défini à une unité près et l'élément

$$u(\psi_\heartsuit, \lambda, g_i) = \sum_{h \in G''} \psi_\heartsuit(h) \otimes g_i \circ h(u_\lambda) \in \bar{\mathbb{Q}} \otimes g_i(\mathcal{O}_H)[1/\ell]^\times \text{ où } g_i \in I'_F \tag{25}$$

est indépendant du choix de u_λ, puisque H est CM (car M est totalement réel) et donc on n'a pas d'unité de $\bar{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{O}_H^\times$ dans le $\psi_\heartsuit$-sous-espace propre.

Soit e_2 un vecteur propre de $\bar{\mathbb{Q}}_p^2$ pour ψ^σ et $e_1 = \rho(\sigma)e_2$. Dans la base (e_1, e_2), on a

$$\rho_{|G_M} = \begin{pmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \psi^\sigma \end{pmatrix} \qquad \rho_{|G_F \setminus G_M} = \begin{pmatrix} 0 & \eta' \\ \eta & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

où η et η' sont des fonctions de $G_F \setminus G_M$ à valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}$ définies par $\eta(h) = \psi(\sigma h)$ et $\eta'(h) := \psi(h\sigma^{-1})$.

Soient $\sigma_\lambda \in \mathrm{Gal}(H_\lambda/F_\ell) \subset \mathrm{Gal}(H/F)$ le Frobenius en ℓ attaché à la place première λ et H_ψ le corps de nombres fixé par ψ ($H \subset H_\psi$). D'après la relation [**19**, (13)], $\eta(\sigma_\lambda)$ ne dépend pas du choix du premier de H_ψ au dessus de λ.

On a la relation suivante (voir [**19**, (13)])

$$\begin{aligned} &\forall g \in \mathrm{Gal}(H/M),\ \eta(\sigma_{g(\lambda)}) = \psi(\sigma\sigma_{g(\lambda)}) = \psi(\sigma g^{-1}\sigma_\lambda g) = \psi_\heartsuit(g)\psi(\sigma\sigma_\lambda) = \psi_\heartsuit(g)\eta(\sigma_\lambda) \\ &\forall g \in \mathrm{Gal}(H/M),\ u(\psi_\heartsuit, g(\lambda), g_i) = \psi_\heartsuit^{-1}(g)u(\psi_\heartsuit, \lambda, g_i) \end{aligned} \tag{27}$$

D'après la relation (27), l'élément

$$u(\psi_\heartsuit, \ell, g_i) = \psi(\sigma\sigma_\lambda) \otimes u(\psi_\heartsuit, \lambda, g_i) \in \bar{\mathbb{Q}} \otimes g_i(\mathcal{O}_H)[1/\ell]^\times \tag{28}$$

dépend uniquement de ℓ et non du choix du premier $\lambda \in \Sigma_\ell$.

D'après l'isomorphisme (17), le morphisme $\Psi' : (\mathcal{O}_H \otimes \mathbb{Z}_p)^\times \to \bar{\mathbb{Q}}_p$ défini par

$$\left(u \otimes 1 \mapsto \sum_{\substack{g \in G'' \\ g_i \in I'_F}} \psi_\heartsuit(g) \log_p \left(\iota_p \circ g_i \circ g(u) \right) \right)$$

est associé à un unique élément de l'espace tangent de $\mathcal{T}'$ (i.e $\Psi' = b_{|G_H} = c^\sigma_{|G_H} \in \mathrm{H}^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi_\heartsuit]$) et donne aussi un unique morphisme surjectif $\pi : \mathcal{T}' \to \bar{\mathbb{Q}}_p[\epsilon]$ associé à Ψ' qui induit une déformation $\tilde{\rho} : G_F \to \mathrm{GL}_2(\bar{\mathbb{Q}}_p[\epsilon])$ de déterminant égal à $\det \rho$.

D'après l'isomorphisme (12), on peut étendre Ψ' à un 1-cocylces de $\mathrm{H}^1(G_M, \psi_\heartsuit)$ d'une manière unique (à co-bords près), donc la déformation $\tilde{\rho}$ est de la forme suivante :

$$\tilde{\rho}_{|G_M} = \begin{pmatrix} \psi & \psi^{\sigma}\Psi'.\epsilon \\ \psi\Psi.\epsilon & \psi^{\sigma} \end{pmatrix} \qquad \rho_{|G_F \setminus G_M} = \begin{pmatrix} d_1.\epsilon & \eta' \\ \eta & d_2.\epsilon \end{pmatrix} \tag{29}$$

H.Darmon, A.Lauder and V.Rotger ont montré dans [**19**] les propositions suivantes.

LEMME 2.22. [**19**, 2.1] *La fonction Ψ (resp. Ψ') appartient au groupe de cohomologie $\mathrm{H}^1(M, \psi_{\heartsuit}^{-1})$ (resp. $\mathrm{H}^1(M, \psi_{\heartsuit})$). De plus, on a les relations suivantes après restriction des fonctions ci-dessus à G_H :*

$$\Psi'(h) = \frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} \Psi(\tau h \tau^{-1}), \tag{30}$$

où $\tau \in G_F \setminus G_M$.

LEMME 2.23. [**19**, 2.2] *Pour tout premier ℓ de F inerte dans M et pour tout $\lambda \in \Sigma_\ell$, on a*

$$\Psi'(\mathrm{Frob}_\lambda) = \sum_{g_i \in I'_F} \log_p(u(\psi_{\heartsuit}, \lambda, g_i)).$$

La déformation $\tilde{\rho}$ est la représentation galoisienne associée à une forme modulaire propre surconvergente de poids 1 notée $\tilde{f} = f + f^{\dagger}\varepsilon$ à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}_p[\epsilon]$. La forme modulaire $f^{\dagger}$ est une forme propre généralisée et normalisée comme dans l'introduction et ses coefficients de Fourier peuvent être interprétés de la manière suivante :

$$\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}(\mathrm{Frob}_\ell)) = a_\ell(f) + a_\ell(f^{\dagger})\varepsilon, \tag{31}$$

où $\ell \nmid \mathfrak{n}p$.

Soit $\ell \nmid \mathfrak{n}p$ un premier de F qui se décompose dans M, alors $\mathrm{Frob}_\ell \in G_M$ et donc $\mathrm{Tr}(\tilde{\rho})(\mathrm{Frob}_\ell) = a_\ell(f)$. Ainsi, on a démontré la première partie du Théorème 0.5.

Maintenant, soit $\ell \nmid \mathfrak{n}p$ un premier de F qui est inerte dans M. On fixe un plongement $\iota_\ell : \bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ qui induit un plongement du groupe de décomposition G_{F_ℓ} dans G_F. Si Frob_ℓ est un Frobenius de G_F en ℓ alors Frob_ℓ^2 est le Frobenius de G_M associé au premier de M au dessus de ℓ. Soit $\lambda \in \Sigma_\ell$ la place première canonique de H au dessus de ℓ induite par ι_ℓ ($\sigma_\lambda = \mathrm{Frob}_\ell$).

D'après les relations (29) et (31),

$$\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}(\mathrm{Frob}_\ell)) = (d_1(\mathrm{Frob}_\ell) + d_2(\mathrm{Frob}_\ell))\epsilon = a_\ell(f^{\dagger})\epsilon, \tag{32}$$

D'autre part, en utilisant (29), un calcul direct de $\tilde{\rho}(\mathrm{Frob}_\ell^2)$ induit

$$\begin{pmatrix} * & \psi^{\sigma}(\mathrm{Frob}_\ell^2)\Psi'(\mathrm{Frob}_\ell^2)\epsilon \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \eta'(\mathrm{Frob}_\ell)(d_1(\mathrm{Frob}_\ell) + d_2(\mathrm{Frob}_\ell))\epsilon \\ * & * \end{pmatrix} \tag{33}$$

Donc, $\psi^{\sigma}(\mathrm{Frob}_\ell^2)\Psi'(\mathrm{Frob}_\ell^2) = \eta'(\mathrm{Frob}_\ell)(d_1(\mathrm{Frob}_\ell) + d_2(\mathrm{Frob}_\ell))$.

Finalement, il découle de la relation (31) et de la proposition [**19**, 2.2] que

$$a_\ell(f^\dagger) = \eta(\text{Frob}_\ell)\Psi'(\text{Frob}_\ell^2) = \eta(\lambda)\Psi'(\text{Frob}_\lambda) = \eta(\lambda)\log_p u(\psi_\heartsuit, \lambda) = \log_p u(\psi_\heartsuit, \ell)$$

où $u(\psi_\heartsuit, \lambda) = \sum_{g_i \in I'_F} u(\psi_\heartsuit, \lambda, g_i)$ et $u(\psi_\heartsuit, \ell) = \sum_{g_i \in I'_F} u(\psi_\heartsuit, \ell, g_i)$.

6. La variété de Hecke-Hilbert pleine $\mathcal{E}^{\text{full}}$

Soit $\mathcal{E}^{\text{full}}$ la variété analytique rigide de Hecke-Hilbert de niveau modéré $\mathfrak{n}$ induite par les opérateurs de Hecke T_ℓ pour $\ell \nmid \mathfrak{n}p$ et U_ℓ pour $\ell \mid \mathfrak{n}p$. Elle est munie d'un morphisme localement fini surjectif $\mathcal{E}^{\text{full}} \to \mathcal{E}$ compatible avec κ et qui n'est pas injectif quand $N_{\mathbb{Q}}^F(\mathfrak{n}) > 1$. Après avoir composé le pseudo caractère (2) avec le morphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\text{full}}}$, on obtient un pseudo-caractère de dimension 2

$$\text{Ps}^{\text{full}} : G_{F,\mathfrak{n}p} \to \mathcal{O}(\mathcal{E}^{\text{full}}).$$

D'après la construction de $\mathcal{E}^{\text{full}}$, il existe une bijection entre $\mathcal{E}^{\text{full}}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ et les systèmes de valeurs propres $T_\ell(x)$ ($\ell \nmid \mathfrak{n}p$) et $U_\ell(x)$ ($\ell \mid \mathfrak{n}p$) apparaissant dans l'espace des formes modulaires surconvergentes cuspidales de pente fini et de poids donné par κ .

Soient $\mathcal{T}^{\text{full}}$ le complété de l'anneau local de $\mathcal{E}^{\text{full}}$ au point x associé à f, $\mathfrak{m}_{\mathcal{T}}^{\text{full}}$ l'idéal maximal de $\mathcal{T}^{\text{full}}$ et $\mathcal{T}'^{\text{full}} := \mathcal{T}^{\text{full}}/m_\Lambda \mathcal{T}^{\text{full}}$ l'anneau local de la fibre de $\kappa(x)$ en x. Le morphisme $\mathcal{E}^{\text{full}} \to \mathcal{E}$ induit un morphisme $\mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\text{full}}$ et donc il existe une représentation continue

$$\rho_{\mathcal{T}}^{\text{full}} : G_{F,\mathfrak{p}p} \to \text{GL}_2(\mathcal{T}^{\text{full}}),$$

telle que $\text{Tr}\, \rho_{\mathcal{T}}^{\text{full}}(\text{Frob}_\ell) = T_\ell$ pour tout $\ell \nmid \mathfrak{n}p$. La représentation $\rho_{\mathcal{T}}^{\text{full}}$ est quasi-ordinaire en p et sa réduction modulo $\mathfrak{m}_{\mathcal{T}}^{\text{full}}$ est isomorphe à ρ.

Il est connu que l'ouvert fermé $\mathcal{E}^{\text{full},0}$ de $\mathcal{E}^{\text{full}}$ défini par $|U_p| = 1$ est la fibre générique de $h^{n,ord}(\mathfrak{n}, \mathcal{O})$ (i.e $\mathcal{E}^{\text{full},0}(\mathbb{C}_p) = \text{Sp}\, h^{n,ord}(\mathfrak{n}, \mathcal{O})[1/p](\mathbb{C}_p)$).

On note V le $\mathcal{T}^{\text{full}}$-module libre de rang 2 sur lequel G_F agit par $\rho_{\mathcal{T}}^{\text{full}}$.

On utilise un argument similaire à celui utilisé dans [**9**, 7.1] pour démontrer la proposition suivante.

Proposition 2.24. *Soit ℓ un premier de F qui divise $\mathfrak{n}$. Alors $\rho_{\mathcal{T}}^{\text{full}}(I_\ell)$ est d'image finie et on a*

(i) Si $a_\ell \neq 0$, alors V^{I_ℓ} est libre, de rang 1 sur $\mathcal{T}^{\text{full}}$, est une somme directe dans V et $\rho_{\mathcal{T}}^{\text{full}}(\text{Frob}_\ell)$ agit sur V^{I_ℓ} par multiplication par U_ℓ.

(ii) Si $a_\ell = 0$, alors $V^{I_\ell} = 0$ et $U_\ell = 0$ dans $\mathcal{T}^{\text{full}}$.

Démonstration.

Même preuve que celle de [**9**, 7.1] combinée avec le théorème de monodromie en famille de Grothendieck (voir [**3**, Lemma 7.8.14]) et [**61**, Théorème §1]. □

D'après la proposition 2.24, la déformation $\rho_{\mathcal{T}}^{\mathrm{full}}$ définit un point du foncteur $\mathcal{D}_{\min}$ et donc il existe un morphisme de $\bar{\mathbb{Q}}_p$-algèbres

$$\pi : \mathcal{R}_{\min} \to \mathcal{T}^{\mathrm{full}}$$

PROPOSITION 2.25. *Le morphisme $\mathcal{R}_{\min} \to \mathcal{T}^{\mathrm{full}}$ est surjectif et le plongement naturel $\mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{T}^{\mathrm{full}}$ est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Même argument que celui utilisé dans la proposition [**9**, 7.2]. □

CHAPITRE 3

LA COURBE DE COLEMAN-MAZUR AUX POINTS CLASSIQUES RM

On va démontrer dans ce chapitre les théorèmes 0.1, 0.2 et 0.3.

Notre approche pour démontrer les théorèmes 0.1 et 0.2 est inspirée par l'article de Cho-Vatsal [**15**] combinée avec les résultats de [**9**]. Plus précisément, on montre que l'indice de ramification de $\mathcal{R}_{\tau=1} \hookrightarrow \mathcal{R}$ est égale à 2 et que l'anneau $\mathcal{R}_{\tau=1}$ est de valuation discrète. Dans la section §3, on montre que $\mathcal{R}_{\tau=1}$ est isomorphe à $\mathcal{R}^{ps}_{red}$ et sous l'hypothèse (**G**), on montre que $\mathcal{R}_{\tau=1} = \Lambda$. Par conséquent, l'indice de ramification de κ est exactement 2, puisque $\mathcal{R} \simeq \mathcal{T}$.

Dans ce chapitre, on va garder les mêmes notations que celles du chapitre précédant et on suppose de plus que $F = \mathbb{Q}$.

1. Quelques propriétés de $\mathcal{R}^{ord}$ et $\mathcal{R}_{\tau=1}$

On rappelle que $\mathcal{D}^{ord} : \mathfrak{C} \to$ SETS est le foncteur donné par les classes d'équivalences strictes des déformations de (ρ, ψ'') ordinaires en p et que $\mathcal{D}^{ord}$ est représentable par $(\mathcal{R}^{ord}, \rho^{ord})$.

1.1. Involution τ de $\mathcal{D}^{ord}$ et $\mathcal{R}_{\tau=1}$. L'image projective de ρ est diédrale et donc elle contient un élément d'ordre 2 qu'on notera σ. Soit (e_1, e_2) une base de $\bar{\mathbb{Q}}^2$ telle que $\rho_{|G_M} = \psi \oplus \psi^\sigma$. Après renormalisation de (e_1, e_2), on peut supposer $\rho(\sigma) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ dans $\mathrm{PGL}_2(\bar{\mathbb{Q}})$.

Pour tout anneau commutatif A, on notera par M_A le A-module libre $A \oplus A$.

On va exhiber dans le lemme suivant une base de $M_{\mathcal{R}^{ord}}$ telle que les éléments de la diagonale de la réalisation de ρ^{ord} dans cette base dépendent seulement de la trace $\mathrm{Tr}\,\rho^{ord}$. L'existence de cette base est cruciale pour la section §2.

LEMME 3.1. *Soit γ_0 un élément fixé de G_{M_v} qui relève* Frob_v $\left(\iota_p : G_{M_v} \xrightarrow{\simeq} G_{\mathbb{Q}_p}\right)$ *tel que $\psi(\gamma_0) \neq \psi^\sigma(\gamma_0)$, alors il existe une base $\mathfrak{B}^{ord}_{\mathcal{R}}$ de $M_{\mathcal{R}}$ telle que $\rho^{ord}(\gamma_0) = \left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$ et $\rho^{ord}_{|G_{M_v}} = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$ dans cette base.*

DÉMONSTRATION. Soit K le corps des fractions de $\mathcal{R}^{ord}$ ($\mathcal{R}^{ord}$ est de valuation discrète). Puisque $\mathcal{R}^{ord}$ est Hensélien (même complet) et $\psi(\gamma_0) \neq \psi^\sigma(\gamma_0)$, il existe une base de $M_{\mathcal{R}^{ord}} \otimes K$ telle que $\rho^{ord} \otimes K(\gamma_0) = \left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$ et $\rho^{ord}_{|G_{M_v}} \otimes K = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$ dans cette base et puisque $\mathcal{R}^{ord}$ est un anneau de valuation discrète, on peut trouver une base de $M_{\mathcal{R}^{ord}}$ qui satisfait les conditions désirées.

□

REMARQUE 3.2. *Puisque $\psi(\gamma_0) \neq \psi^\sigma(\gamma_0)$, toute base qui satisfait les hypothèses du lemme 3.1 est obtenue par conjugaison de la base choisie par une matrice diagonale. Cette conjugaison ne change pas $a(g), d(g)$ et le produit $b(g).c(g)$, où $\rho^{ord}(g) = \begin{pmatrix} a(g) & b(g) \\ c(g) & d(g) \end{pmatrix}$.*

On rappelle que σ est un générateur de $\Delta = \mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q})$ et ϵ_M est le caractère quadratique de Δ. On peut voir que $N\rho \otimes \epsilon_M N = \rho$, où $N = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ dans la base (e_1, e_2).

DÉFINITION 3.3. *Soit $g \to \begin{pmatrix} \tilde{a}(g) & \tilde{b}(g) \\ \tilde{c}(g) & \tilde{d}(g) \end{pmatrix}$ la réalisation de ρ^{ord} dans une base $\mathfrak{B}^{ord}_{\mathcal{R}}$ qui satisfait les hypothèses du lemme 3.1. Soit $\tilde{N}$ l'automorphisme de $\mathrm{End}_{\mathcal{R}^{ord}}(M_{\mathcal{R}^{ord}})$ donné par $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ dans la base $\mathfrak{B}^{ord}_{\mathcal{R}^{ord}}$, alors $\rho^{ord} \to \tilde{N}(\rho^{ord} \otimes \epsilon_M)\tilde{N}$ induit un automorphisme $\mathfrak{t}$ du foncteur de déformation $\mathcal{D}^{ord}$ et aussi un automorphisme $\tau : \mathcal{R}^{ord} \to \mathcal{R}^{ord}$ avec $\tau^2 = 1$.*

Puisque $\mathrm{Tr}\,\mathfrak{t}(\rho^{ord}) = \mathrm{Tr}(\rho^{ord} \otimes \epsilon_M)$, alors les théorème de Nyssen [**54**] et Rouquier [**57**] impliquent que l'involution τ est indépendante du choix de la base de $M_{\mathcal{R}^{ord}}$ dans laquelle $\tilde{N} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Soit A un anneau de la catégorie $\mathfrak{C}$, alors une déformation $\varphi_A : G_{\mathbb{Q},Np} \to A^\times$ de $\det(\rho^{ord})$ est équivalente à un morphisme continu $G_{\mathbb{Q},Np} \to 1 + \mathfrak{m}_A$. Par la théorie du corps de classes, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(G^{ab}_{\mathbb{Q}_{Np}}, 1 + \mathfrak{m}_A) \simeq \mathrm{Hom}((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \times \mathbb{Z}_p^\times, 1 + \mathfrak{m}_A) = \mathrm{Hom}(1 + q\mathbb{Z}_p, 1 + \mathfrak{m}_A),$$

où $q = p$ si $p > 2$ et $q = 4$ si $p = 2$.

Puisque $1 + \mathfrak{m}_A$ ne contient pas d'élément d'ordre fini $\Lambda \simeq \bar{\mathbb{Q}}_p[[1 + q\mathbb{Z}_p]]$, donc toute déformation de $\det \rho$ à valeurs dans A est obtenue via un unique morphisme $\Lambda \to A$. Puisque $\mathcal{R}^{ord} \simeq \mathcal{T}$, on notera aussi $\kappa^\# : \Lambda \to \mathcal{R}^{ord}$ le morphisme induit par la déformation $\det \rho^{ord}$ de $\det \rho$.

LEMME 3.4. *On note $\mathcal{R}_{\tau=1}$ le sous-anneau de $\mathcal{R}^{ord}$ fixé par τ. On a* *(i) L'involution τ est un automorphisme de Λ-algèbres.*

(ii) L'anneau $\mathcal{R}_{\tau=1}$ est un objet de la catégorie $\mathfrak{C}$ de dimension de Krull égale à 1.

(iii) L'anneau $\mathcal{R}_{\tau=1}$ est de valuation discrète. Notons L son corps des fractions.

(iv) Si K désigne le corps des fractions de $\mathcal{R}^{ord}$, alors L est égal à l'ensemble des éléments de K fixé par τ.

(v) L'involution $\tau : \mathcal{R}^{ord} \to \mathcal{R}^{ord}$ est non triviale et l'injection $\iota : \mathcal{R}_{\tau=1} \to \mathcal{R}^{ord}$ est d'indice égale à 2.

Démonstration.

(i) Puisque $\det(\rho^{ord}) = \det(\tilde{N}\rho^{ord} \otimes \epsilon_M \tilde{N})$, $\tau \circ \kappa^{\#} = \kappa^{\#}$.

(ii) Puisque $\kappa^{\#} : \Lambda \to \mathcal{T}$ est un morphism fini et $\mathcal{R}^{ord} \simeq \mathcal{T}$, $\mathcal{R}_{\tau=1}$ est fini sur Λ. Le fait que Λ est Hensélien et dimension de Krull égale à 1(il est même complet), implique que $\mathcal{R}_{\tau=1}$ est un produit fini d'anneaux locaux et sa dimension de Krull est égal à 1. Comme l'anneau $\mathcal{R}_{\tau=1}$ est intègre ($\mathcal{R}_{\tau=1} \subset \mathcal{R}^{ord}$), $\mathcal{R}_{\tau=1}$ est complet, local et de dimension de Krull égal à 1.

(iii) Puisque $\mathcal{R}_{\tau=1}$ est intègre, noethérien et dimension de Krull égale à 1, il suffit de montrer qu'il est intégralement clos. Soit α un élément du corps des fractions de $\mathcal{R}_{\tau=1}$ tel que α est entier sur $\mathcal{R}_{\tau=1}$. Posons $\alpha = x/y$, où $x \in \mathcal{R}_{\tau=1}$ et $y \in \mathcal{R}_{\tau=1} - \{0\}$. Puisque $\mathcal{R}_{\tau=1}$ est un sous-anneau de $\mathcal{R}^{ord}$, α est entier sur $\mathcal{R}^{ord}$. Ainsi $\alpha \in \mathcal{R}^{ord}$ puisque l'anneau $\mathcal{R}^{ord}$ est de valuation discrète. Comme $\tau(\alpha) = \tau(x)/\tau(y) = x/y = \alpha$, $\tau(\alpha) = \alpha$ et donc $\alpha \in \mathcal{R}_{\tau=1}$.

(iv) Soit $a \in K$ tel que $\tau(a) = a$. Puisque $\mathcal{R}^{ord}$ est de valuation discrète, $a \in \mathcal{R}^{ord}$ ou $a^{-1} \in \mathcal{R}^{ord}$, donc $a \in \mathcal{R}_{\tau=1}$ ou $a^{-1} \in \mathcal{R}_{\tau=1}$, donc $a \in L$.

(v) On suppose que τ est trivial, donc $\rho^{ord} \simeq \rho^{ord} \otimes \epsilon_M$. D'après la proposition [**33**, 3.1], $\rho^{ord} \simeq \operatorname{Ind}_M^{\mathbb{Q}} \psi^{ord}$, où $\psi^{ord} : G_M \to (\mathcal{R}^{ord})^{\times}$ est un caractère. Puisque $\mathcal{R}^{ord} \simeq \mathcal{T}$, ρ^{ord} est la représentation galoisienne associée à une famille de Hida primitive contenant f. Ainsi, ρ^{ord} est diédrale et RM, donc toute spécialisation en un poids $k \geq 2$ est une forme modulaire classique de poids $k \geq 2$ qui est à multiplication réelle par le corps quadratique M. Comme il n'existe pas de forme de poids plus grand que 2 à multiplication réelle par un corps quadratique réel, on a contradiction. Donc, τ n'est pas trivial. Puisque $L = K^{\tau=1}$ et $\tau^2 = 1$, K/L est une extension de degré 2. $\square$

On note $\nu_{\mathcal{R}^{ord}}$ la valuation de $\mathcal{R}^{ord}$, H le corps fixé de $\operatorname{ad}\rho$ et w_0 la place de H au dessus p induite par ι_p. Dans le lemme 3.16, on a besoin d'exhiber un générateur de $\mathfrak{m}_{\mathcal{R}_{\tau=1}}$ parmi les coefficients de la matrice de ρ^{ord} et dans la lemme 3.17, on a besoin d'estimer la borne inférieure de l'ensemble $\nu_{\mathcal{R}^{ord}}(\tilde{b}(G_{H_{w_0^{\sigma}}}))$.

Si W est une représentation d'un groupe G et $\{G_i\}_{i \in I}$ sont des sous groupes de G, on notera par :

$$\mathrm{H}^i(G, W)_{G_i} = \ker\left(\mathrm{H}^i(G, W) \to \bigoplus_{i \in I} \mathrm{H}^i(G_i, W)\right).$$

PROPOSITION 3.5. *Soit* $g \to \begin{pmatrix} \tilde{a}(g) & \tilde{b}(g) \\ \tilde{c}(g) & \tilde{d}(g) \end{pmatrix}$ *la réalisation de la déformation universelle* ρ^{ord} *dans la base* $\mathfrak{B}^{ord}_{\mathcal{R}}$ *qui relève* (e_1, e_2), *alors :*

(i) Il existe deux éléments $g_0, h_0 \in G_M$ *tels que l'ordre de* $\tilde{b}(g_0)$ *et de* $\tilde{c}(h_0)$ *dans l'anneau de valuation discrète* $\mathcal{R}^{ord}$ *est égal à* 1 *et si* w_0^σ *est la place de* H *au dessus de* v^σ *induite par le plongement* ι_p, *l'image de* $G_{H_{w_0^\sigma}}$ *par* $\tilde{b}$ *est contenue dans* $\mathfrak{m}^2_{\mathcal{R}^{ord}}$.

(ii) On a $\dim \mathrm{H}^1(M, \psi^\sigma/\psi)_{G_{M_v}} = 1$.

DÉMONSTRATION.

(i) Soit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ un élément de $\mathrm{H}^1(G_{\mathbb{Q}}, \mathrm{ad}\,\rho)$, d'après le lemme [**9**, 2.3] et le fait que $G_{\mathbb{Q}_p} = G_{M_v}$, la restriction de c (resp. d) à $G_{\mathbb{Q}_p}$ (resp. à I_p) donne l'isomorphisme suivant :

$$t_{\mathcal{D}^{ord}} = \ker\left(\mathrm{H}^1(G_{\mathbb{Q}}, \mathrm{ad}\,\rho) \to \mathrm{H}^1(G_{\mathbb{Q}_p}, \psi^\sigma/\psi) \oplus \mathrm{H}^1(I_p, \bar{\mathbb{Q}}_p)\right) \qquad (1)$$

On a la décomposition suivante de $\mathrm{ad}\,\rho$:

$$\mathrm{ad}\,\rho \simeq 1 \oplus \epsilon_M \oplus \mathrm{Ind}_M^{\mathbb{Q}}(\psi/\psi^\sigma)$$

donnée par

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

qui induit la décomposition :

$$\mathrm{H}^1(G_M, \mathrm{ad}\,\rho) \simeq \mathrm{H}^1(G_M, \psi/\psi) \oplus \mathrm{H}^1(G_M, \psi/\psi^\sigma) \oplus \mathrm{H}^1(G_M, \psi^\sigma/\psi) \oplus \mathrm{H}^1(G_M, \psi^\sigma/\psi^\sigma) \qquad (2)$$

donnée par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \to (a, b, c, d)$, où l'action de $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q})$ échange a et d et échange b et c (i.e $b = c^\sigma$ et $d = a^\sigma$). En appliquant l'inflation-restriction à l'isomorphisme (1), la relation (2) et la proposition [**9**, 4.2] impliquent que $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in t_{\mathcal{D}}$ si, et seulement si, $a = d = 0$, $b = c^\sigma$ et $c \in \mathrm{H}^1(M, \psi^\sigma/\psi)_{G_{M_v}}$. D'après [**9**, Theorem §2.2], $\dim t_{\mathcal{D}} = 1$, donc c n'est pas trivial et par suite b aussi n'est pas trivial, puisque $b = c^\sigma$.

En outre, $c_{|G_M} = b^\sigma_{|G_M}$, donc $b_{|G_M} \in \mathrm{H}^1(M, \psi/\psi^\sigma)_{G_{M_{v^\sigma}}}$. L'inflation-restriction induit que $b_{|G_H} \in \mathrm{H}^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)^{\mathrm{Gal}(H/M)}_{G_{H_{w_0^\sigma}}}$.

Soit ρ_ϵ la déformation de ρ qui provient de la composition de la projection canonique $\mathcal{R}^{ord} \twoheadrightarrow \mathcal{R}^{ord}/\mathfrak{m}^2_{\mathcal{R}^{ord}}$ avec ρ^{ord}. Puisque la dimension de $t_{\mathcal{D}}$ est 1, $\mathcal{R}^{ord}$ est de valuation discrète (voir [**9**, 6.2]) et $\mathcal{R}^{ord}/\mathfrak{m}^2_{\mathcal{R}^{ord}}$ est isomorphe aux nombres duaux $\bar{\mathbb{Q}}_p[\epsilon]$. Ainsi $\rho_\epsilon \in \mathcal{D}(\bar{\mathbb{Q}}_p[\epsilon])$.

De là, en déduit que $\rho_\epsilon(g) = (1 + \epsilon\rho_1(g))\rho(g)$, où $\rho_1 = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ est un générateur de $t_{\mathcal{D}}$. Soit $g \to \begin{pmatrix} a'(g) & b'(g) \\ c'(g) & d'(g) \end{pmatrix}$ la réalisation de ρ_ϵ par une matrice. Puisque $\rho_{|G_M}$ est diagonale, $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $b_{|G_{H_{w_0^\sigma}}} = 0$, alors $b' \neq 0$, $c' \neq 0$ et $b'_{|G_{H_{w_0^\sigma}}} = 0$, ainsi $\tilde{b} \neq 0$, $\tilde{c} \neq 0$ modulo $\mathfrak{m}^2_{\mathcal{R}^{ord}}$. De plus, $G_H = \ker(\mathrm{ad}\,\rho)$, donc $\tilde{b}_{|G_{H_{w_0^\sigma}}} = 0$ modulo $\mathfrak{m}^2_{\mathcal{R}^{ord}}$.

(ii) C'est un cas particulier du théorème 2.12 (ici $F = \mathbb{Q}$). □

1.2. Critère pour étendre une G_M-représentation à $G_{\mathbb{Q}}$. Dans cette sous-section, on donne une condition suffisante pour prolonger une représentation $\rho_K : G_M \to \mathrm{GL}_2(K)$ à $G_{\mathbb{Q}}$, cette condition sera cruciale dans la preuve du Théorème 0.1.

Définition 3.6. *Soient K un anneau et $\rho_K : G_M \to \mathrm{GL}_n(K)$ une représentation, on écrira $\rho_K^t(g)$ au lieu de $\rho_K(tgt^{-1})$, où t est un élément de $G_{\mathbb{Q}}$ non trivial sur M.*

Considérons la condition suivante :

$$(C) \qquad \textit{Pour tout } t \in G_{\mathbb{Q}}, \textit{ il existe } r(t) \in GL_n(K) \textit{ tel que } \rho_K = r(t)^{-1}\rho_K^t r(t).$$

Proposition 3.7. *Soit $\rho_K : G_M \to \mathrm{GL}_n(K)$ une représentation, où K est un anneau. On suppose que les matrices scalaires de $M_n(K)$ sont les seules à commuter avec l'image de ρ_K et que ρ_K satisfait la condition (C). On a :*

(i) Pour $G_{\mathbb{Q}} = G_M \bigsqcup G_M.t$ où t est un élément fixé de $G_{\mathbb{Q}}$ non trivial sur M, alors on peut choisir r de sorte que les conditions suivantes sont vérifiées

$$\forall h \in G_M,\ r(ht) = \rho_K(h)r(t) \text{ et } r(h) = \rho_K(h).$$

(ii) La fonction $\varrho : G_{\mathbb{Q}} \times G_{\mathbb{Q}} \to K^\times$ définie par $\varrho(t', t) = r(t')r(t)r^{-1}(t't)$ est un élément de $\mathrm{H}^2(G_{\mathbb{Q}}, K^\times)$ pour l'action triviale de $G_{\mathbb{Q}}$ sur $K^\times$. De plus, ϱ se factorise à travers le groupe $\Delta = \mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q})$.

(iii) Si la classe de cohomologie de $\varrho \in \mathrm{H}^2(\Delta, K^\times)$ est nulle, alors il existe une représentation $r : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K)$ qui prolonge ρ_K et si r' est un autre prolongement de ρ_K, alors $r' = r \otimes \epsilon_M$.

Démonstration. Voir [**37**, A 1.1]. □

Corollaire 3.8.

(i) Soit $\rho_K : G_M \to \mathrm{GL}_n(K)$ une représentation où K est corps. Si ρ_K satisfait les hypothèses que celles du lemme 3.7, alors il existe une extension finie L/K et une représentation $\rho_L : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(L)$ qui prolonge ρ_K.

(ii) Soit A un anneau de la catégorie $\mathfrak{C}$ et $\psi_A : G_M \to A^\times$ un caractère invariant par l'action de tout t dans $G_{\mathbb{Q}}$, alors il existe un caractère $\psi'_A : G_{\mathbb{Q}} \to A^\times$ qui prolonge ψ_A.

Démonstration.

(i) Il existe un isomorphisme fonctoriel $\mathrm{H}^2(\Delta, K^\times) \simeq K^\times/(K^\times)^2$. Soient $x \in K^\times$ correspondant à la classe de cohomologie de $[\varrho]$ dans $\mathrm{H}^2(\Delta, K^\times)$ et L une extension finie de K contenant $\sqrt{x}$, alors la classe de cohomologie de $[\varrho]$ dans $\mathrm{H}^2(\Delta, L^\times)$ est triviale. Donc, on peut conclure avec la proposition 3.7.

(ii) Le corps résiduel de A est $\bar{\mathbb{Q}}_p$ qui est algébriquement clos. Le lemme de Hensel implique que le groupe $\mathrm{H}^2(\Delta, A^\times) = A^\times/(A^\times)^2$ est trivial, donc le résultat désiré découle de la proposition 3.7. □

2. Pseudo-déformation et l'anneau $\mathcal{R}^{ps}$

2.1. Pseudo-caractère et pseudo-déformation. Wiles a été le premier à introduire la notion de pseudo-représentation (voir [**64**], pp $563-564$), mais dans sa définition, il impose la présence de la conjugaison complexe $c \in G_{\mathbb{Q}}$ qui force la pseudo-représentation à ne dépendre que de sa trace, mais nous, nous allons remplacer c par γ_0 qui est un relèvement fixé du Frobenius Frob_v en v dans G_{M_v}. Nous allons montrer dans le lemme 3.11 qu'une pseudo-représentation ne dépend que de sa trace.

DÉFINITION 3.9. *Soient A un anneau de la catégorie $\mathfrak{C}$ et γ_0 un relèvement fixé du Frobenius* Frob_v *en v dans le groupe de décomposition G_{M_v} tel que $\psi(\gamma_0) \neq \psi^{\sigma}(\gamma_0)$.*

Soient $\tilde{a}, \tilde{d} : G_M \to A$, $\tilde{x} : G_M \times G_M \to A$ trois fonctions vérifiant les conditions suivantes pour tout $g, h, t, s, w, n \in G_M$, on a :

1) $\tilde{a}(st) = \tilde{a}(s).\tilde{a}(t) + \tilde{x}(s,t)$
2) $\tilde{d}(st) = \tilde{d}(s).\tilde{d}(t) + \tilde{x}(t,s)$
3) $\tilde{x}(s,t).\tilde{x}(w,n) = \tilde{x}(s,n).\tilde{x}(w,t)$
4) $\tilde{x}(st,wn) = \tilde{a}.(s).\tilde{a}(n).\tilde{x}(t,w) + \tilde{a}(n).\tilde{d}(t).\tilde{x}(s,w) + \tilde{a}(s).\tilde{d}(w).\tilde{x}(t,n) + \tilde{d}(t).\tilde{d}(w).\tilde{x}(s,n)$
5) $\tilde{a}(1) = \tilde{d}(1) = 1$ *et* $\tilde{x}(h,1) = \tilde{x}(g,1) = 0.$
6) $\tilde{x}(\gamma_0, g) = \tilde{x}(h, \gamma_0) = 0.$

*On dit que $\pi_A = (\tilde{a}, \tilde{d}, \tilde{x})$ est un pseudo-caractère (voir [**64**, 2.2.3]). La trace et le déterminant de π_A sont les fonctions $\mathrm{Tr}(\pi_A)(g) = \tilde{a}(g) + \tilde{d}(g)$ et $\det \pi_A(g) = \tilde{a}(g)\tilde{d}(g) - \tilde{x}(g,g)$.*

DÉFINITION 3.10. *Soit $\pi = (\psi, \psi^{\sigma}, 0)$ un pseudo-caractère associé à la représentation $\rho_{|G_M}$. Soient A un anneau dans la catégorie $\mathfrak{C}$ et $\pi_A = (\tilde{a}_A, \tilde{d}_A, \tilde{x}_A)$ une pseudo-représentation continue à valeurs dans A, on dit que π_A est une pseudo-déformation si, et seulement si, π_A* $\bmod \mathfrak{m}_A = \pi$.

L'article [**59**] est une référence concernant les pseudo-déformations.

LEMME 3.11.

(i) Soient A un objet de $\mathfrak{C}$ et $\pi_A = (\tilde{a}_A, \tilde{d}_A, \tilde{x}_A)$ une pseudo-déformation, alors π_A dépend seulement de la trace $\mathrm{Tr}\,\pi_A$ et du déterminant $\det \pi_A$ via les formules suivantes :

$$\tilde{a}_A(g) = \frac{\mathrm{Tr}\,\pi_A(\gamma_0 g) - \lambda_2 \,\mathrm{Tr}\,\pi_A(g)}{\lambda_1 - \lambda_2} \qquad (34)$$
$$\tilde{d}_A(g) = \frac{\mathrm{Tr}\,\pi_A(\gamma_0 g) - \lambda_1 \,\mathrm{Tr}\,\pi_A(g)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

où $\lambda_1 = \tilde{a}(\gamma_0)$ et $\lambda_2 = \tilde{d}(\gamma_0)$ sont les racines du polynôme $X^2 - \mathrm{Tr}\,\pi_A(\gamma_0)X + \det \pi_A(\gamma_0)$.

(ii) Si A est un domaine, alors π_A dépend seulement de sa trace (i.e $\det \pi_A$ dépend de $\mathrm{Tr}\,\pi_A$).

DÉMONSTRATION.

(i) Puisque $\tilde{x}(\gamma_0, \gamma_0) = 0$ et $\det \pi_A(\gamma_0) = \tilde{a}(\gamma_0)\tilde{d}(\gamma_0)$, alors $\tilde{a}(\gamma_0)$ et $\tilde{d}(\gamma_0)$ sont des racines du polynôme

$$X^2 - \operatorname{Tr} \pi_A(\gamma_0) X + \det \pi_A(\gamma_0) \tag{35}$$

Par hypothèse, $\psi(\gamma_0) \neq \psi^\sigma(\gamma_0)$, donc le lemme de Hensel implique que $\tilde{a}(\gamma_0)$ et $\tilde{d}(\gamma_0)$ sont les uniques solutions de (35). Par conséquent, la relation (34) découle directement des relations qui définissent une pseudo-déformation.

(ii)Soient K le corps des fractions de A et $\bar{K}$ sa cloture algébrique. La fonction $\operatorname{Tr} \pi_A : G_M \to K$ est un pseudo-caractère. D'après le théorème [**61**, 1.1], il existe une représentation galoisienne semi-simple $\rho_K : G_M \to \mathrm{GL}_2(\bar{K})$ telle que $\operatorname{Tr} \rho_K = \operatorname{Tr} \pi_A$ et $\det \rho_K = \det \pi_A$. □

2.2. Pseudo-déformation ordinaire en v. Dans cette section, on introduit un sous-foncteur du foncteur pseudo-déformation de π et on montre qu'il est représentable par un objet de la catégorie $\mathfrak{C}$.

DÉFINITION 3.12. *Soit* $\mathfrak{G} : \mathfrak{C} \to \mathrm{Set}$ *le foncteur des pseudo-déformations* $\pi_A = (\tilde{a}_A, \tilde{d}_A, \tilde{x}_A)$ *de* π *qui vérifient les conditions suivantes :*

(i) Pour $h \in G_{M_v}$ *et* $h' \in G_M$ *on a* $\tilde{x}_A(h', h) = 0$.

(ii) $\tilde{d}_A(g) = 1$ *si* $g \in I_v$.

(iii) $\operatorname{Tr} \pi_A(t^{-1}gt) = \operatorname{Tr} \pi_A(g)$ *pour* $t \in G_{\mathbb{Q}}$ *et* $g \in G_M$.

PROPOSITION 3.13.

(i) Soit $\pi'_\epsilon = (a', d', x')$ *un élément de* $\mathfrak{G}(\bar{\mathbb{Q}}_p[\epsilon])$, *alors pour tout* $h \in G_M$, $\frac{x'(h,.)}{\psi^\sigma(h)\psi(.)}$ *(resp.* $\frac{x'(.,h)}{\psi^\sigma(.)\psi(h)}$*) est un élément de* $\mathrm{Z}^1(M, \psi^\sigma/\psi)$ *(resp.* $\mathrm{Z}^1(M, \psi/\psi^\sigma)$*).*

(ii) Le foncteur $\mathfrak{G}$ *est représentable par* $(\mathcal{R}^{ps}, \pi^{ps})$.

(iii) Le déterminant $\det \pi^{ps}$ *est invariant par l'action de* σ.

DÉMONSTRATION.

(i) L'assertion découle immédiatement des relations qui définissent une pseudo-déformation.

(ii) On vérifie que le foncteur $\mathfrak{G}$ satisfait les critères de Schlesinger et le seul critère non trivial est la finitude de la dimension de l'espace tangent $t_{\mathfrak{G}}$ de $\mathfrak{G}$. Puisque $\mathrm{H}^1(M, \psi/\psi^\sigma)$ est de dimension finie, on peut conclure en utilisant le même argument que celui déjà utilisé dans la démonstration du lemme [**59**, 2.10].

(iii)Un calcul direct montre que

$$\operatorname{Tr} \pi^{ps}(g^2) = (\operatorname{Tr} \pi^{ps}(g))^2 - 2 \det \pi^{ps}(g),$$

donc l'assertion découle du fait que $\forall t \in G_{\mathbb{Q}}, \forall g \in G_M$, on a $\operatorname{Tr} \pi^{ps}(t^{-1}gt) = \operatorname{Tr} \pi^{ps}(g)$.

□

LEMME 3.14. *Il existe un morphisme naturel $\Lambda \longrightarrow \mathcal{R}^{ps}$ induit par la déformation* $\det \pi^{ps}$ *de* $\det \pi$.

DÉMONSTRATION. D'après le (iii) du lemme 3.13 et le corollaire 3.8, on peut prolonger $\det \pi^{ps}$ en un caractère $\varphi : G_{\mathbb{Q},Np}^{ab} \to (\mathcal{R}^{ps})^\times$ de sorte que sa réduction $\mod \mathfrak{m}_{\mathcal{R}^{ps}}$ soit égale à $\det \rho$. Donc, il existe un unique morphisme $\Lambda \longrightarrow \mathcal{R}^{ps}$ qui envoie la déformation universelle de $\det \rho$ sur φ.

□

3. L'isomorphisme $\mathcal{R}_{red}^{ps} \simeq \mathcal{R}_{\tau=1}$

LEMME 3.15. *Soit* $g \to \begin{pmatrix} \tilde{a}_g & \tilde{b}_g \\ \tilde{c}_g & \tilde{d}_g \end{pmatrix}$ *la réalisation de* ρ^{ord} *dans la base* $\mathfrak{B}^{ord}_{\mathcal{R}^{ord}} = \{v_1, v_2\}$ *(voir le lemme 3.1), alors :*

(i) Le triplet $\pi_{\mathcal{R}_{\tau=1}} = (\tilde{a}_{|G_M}, \tilde{d}_{|G_M}, \tilde{b}_{|G_M}\tilde{c}_{|G_M})$ *est une pseudo-déformation de* π.

(ii) Il existe un unique morphisme $g : \mathcal{R}^{ps} \to \mathcal{R}_{\tau=1}$ *qui induit la pseudo-déformation* $\pi_{\mathcal{R}_{\tau=1}}$.

DÉMONSTRATION.

(i) L'assertion découle des relations qui définissent les pseudo-déformations.

(ii) Puisque la représentation $\rho^{ord}_{|G_M}$ est ordinaire en v, il existe un unique morphisme g : $\mathcal{R}^{ps} \to \mathcal{R}$ tel que $g \circ \pi^{ps} = \pi_{\mathcal{R}_{\tau=1}}$.

De plus, l'action de τ sur $\mathrm{Tr}\,\rho^{ord}$ (resp. sur $\det \rho^{ord}$) est donnée par

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,\rho^{ord} &\to \mathrm{Tr}(\rho^{ord} \otimes \epsilon_M) \\ \det \rho^{ord} &\to \det(\rho^{ord} \otimes \epsilon_M) \end{aligned} \tag{36}$$

donc τ agit trivialement sur $\mathrm{Tr}\,\rho^{ord}_{|G_M}$ (resp. sur $\det \rho^{ord}$).

Puisque $\mathcal{R}_{\tau=1}$ est hensélien (il est même complet), $\psi(\gamma_0) \neq \psi^\sigma(\gamma_0)$ et $\mathrm{Tr}\,\rho^{ord}(\gamma_0)$ et $\det \rho^{ord}(\gamma_0)$ sont des éléments de $\mathcal{R}_{\tau=1}$ ($\gamma_0 \in G_{M_v} \subset G_M$), donc les valeurs propres λ_1 et λ_2 de $\rho^{ord}(\gamma_0)$ sont dans $\mathcal{R}_{\tau=1}$.

Ainsi, un calcul direct montre que $\tilde{a}(g) = \frac{\mathrm{Tr}\,\rho^{ord}(\gamma_0 g) - \lambda_2 \mathrm{Tr}\,\rho^{ord}(g)}{\lambda_1 - \lambda_2}$, $\tilde{d}(g) = \frac{\mathrm{Tr}\,\rho^{ord}(\gamma_0 g) - \lambda_1 \mathrm{Tr}\,\rho^{ord}(g)}{\lambda_2 - \lambda_1}$ et $\tilde{a}(gh) = \tilde{a}(g)\tilde{a}(h) + \tilde{x}(g,h)$. Par conséquent, $\tau(\tilde{a}_{|G_M}) = \tilde{a}_{|G_M}$, $\tau(\tilde{d}_{|G_M}) = \tilde{d}_{|G_M}$ et $\tau(\tilde{b}_{|G_M}.\tilde{c}_{|G_M}) = \tilde{b}_{|G_M}.\tilde{c}_{|G_M}$, donc g se factorise à travers $\mathcal{R}_{\tau=1}$. □

LEMME 3.16.
Le morphisme $g : \mathcal{R}^{ps} \to \mathcal{R}_{\tau=1}$ *est surjectif.*

DÉMONSTRATION.

D'après le lemme 3.5, il existe g_0, h_0 dans G_M tels l'ordre de $\tilde{b}(g_0)$ et de $\tilde{c}(h_0)$ dans l'anneau de valuation discrète $\mathcal{R}^{ord}$ est 1, ainsi $\tilde{x}(g_0, h_0) = \tilde{b}(g_0)\tilde{c}(h_0)$ est d'ordre 2 dans $\mathcal{R}^{ord}$. Comme $\mathcal{R}_{\tau=1}$ est de valuation discrète et l'injection $\iota : \mathcal{R}_{\tau=1} \hookrightarrow \mathcal{R}^{ord}$ est ramifiée, d'indice égal à 2, alors $\tilde{b}(g_0)\tilde{c}(h_0) = \tilde{x}(g_0, h_0)$ est d'ordre égal à 1 dans l'anneau de valuation discrète $\mathcal{R}_{\tau=1}$;

puisque $\mathcal{R}^{ps}$ représente le foncteur $\mathfrak{G}$, $\tilde{x}(g_0, h_0)$ est contenu dans l'image de l'ideal maximal de $\mathcal{R}^{ps}$ par le morphisme g.

On note $\mathcal{B}$ l'image du morphisme g, donc $\mathcal{B}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{R}_{\tau=1}$. On note aussi ν_τ la valuation de l'anneau $\mathcal{R}_{\tau=1}$ et $\mathfrak{m}_\mathcal{B}$ l'idéal maximal de $\mathcal{B}$. Il découle de ce qui précède que $\mathfrak{m}_\mathcal{B}$ contient une uniformisante de $\mathcal{R}_{\tau=1}$. Notons $\mathfrak{a}$ l'idéal $\mathfrak{m}_\mathcal{B}\mathcal{R}_{\tau=1}$, alors $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_{\mathcal{R}_{\tau=1}}$ car $\mathfrak{m}_\mathcal{B}$ contient une uniformisante de $\mathcal{R}_{\tau=1}$.

D'après le lemme 3.14, l'anneau $\mathcal{R}^{ps}$ a une structure de Λ-algèbre et vu que $\det \pi_{\mathcal{R}_{\tau=1}} = g \circ \det \pi^{ps}$, g est un morphisme de Λ-algèbres. Puisque $\mathcal{R}_{\tau=1}$ est un Λ-module de type fini, le morphisme $g : \mathcal{R}^{ps} \to \mathcal{R}_{\tau=1}$ est fini.

En appliquant le lemme de Nakayama au $\mathcal{R}^{ps}$-module $\mathcal{R}_{\tau=1}$, on déduit que 1 est un générateur de $\mathcal{R}_{\tau=1}$ vu comme $\mathcal{R}^{ps}$-module. Donc, le morphisme g est surjectif.

□

Démonstration du théoréme 0.1.

On va montrer que la surjection $g : \mathcal{R}^{ps} \to \mathcal{R}_{\tau=1}$ induit un isomorphisme $\mathcal{R}^{ps}/\mathfrak{N} \simeq \mathcal{R}_{\tau=1}$, où $\mathfrak{N}$ est le nilradical de $\mathcal{R}^{ps}$. Si $\mathfrak{L}$ est le noyau de g, l'assertion du théorème est équivalente à $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{N}$ (i.e $\operatorname{Spec} \mathcal{R}_{\tau=1} = \operatorname{Spec} \mathcal{R}^{ps}$).

Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{R}^{ps}$, $\pi'' : \mathcal{R}^{ps} \twoheadrightarrow \mathcal{R}^{ps}/\mathfrak{p}$ la surjection canonique, K le corps des fractions de $\mathcal{R}^{ps}/\mathfrak{p}$ et $\pi_\mathfrak{p} = (\tilde{a}_\mathfrak{p}, \tilde{d}_\mathfrak{p}, \tilde{x}_\mathfrak{p})$ la pseudo-déformation induite par la composition $\pi'' \circ \pi^{ps}$.

Si $\tilde{x}_\mathfrak{p} = 0$, alors $\rho_K(g) = \left(\begin{smallmatrix} \tilde{a}_\mathfrak{p}(g) & 0 \\ 0 & \tilde{d}_\mathfrak{p}(g) \end{smallmatrix}\right)$ est l'unique représentation semi-simple associée à $\pi_\mathfrak{p}$.

Par hypothèse, $\mathrm{Tr}(\rho_K) = \mathrm{Tr}(\rho_K^\sigma)$, ainsi, $\tilde{a}_\mathfrak{p}^\sigma = \tilde{d}_\mathfrak{p}$ (puisque l'action de σ permute ψ et ψ^σ et $\psi \neq \psi^\sigma$). Donc, $\mathrm{Ind}_M^\mathbb{Q} \tilde{a}_\mathfrak{p}$ est une représentation qui prolonge ρ_K à $G_\mathbb{Q}$.

S'il existe $g_1, h_1 \in G_M$ tels que $\tilde{x}_\mathfrak{p}(g_1, h_1) \neq 0$, alors la proposition [**64**, 2.2.1] implique qu'il existe une représentation galoisienne $\rho_K : g \to \left(\begin{smallmatrix} \tilde{a}_\mathfrak{p}(g) & \tilde{x}_\mathfrak{p}(g,h_1)/\tilde{x}_\mathfrak{p}(g_1,h_1) \\ \tilde{x}_\mathfrak{p}(g_1,g) & \tilde{d}_\mathfrak{p}(g) \end{smallmatrix}\right)$ telle que $\mathrm{Tr}\, \rho_K = \mathrm{Tr}\, \pi_\mathfrak{p}$.

Comme $\rho_K(\gamma_0)$ est diagonale et possède deux valeurs propres distinctes et que $\tilde{x}_\mathfrak{p}(g_1, h_1) \neq 0$, alors ρ_K est absolument irréductible. De plus, la trace $\mathrm{Tr}\, \pi_A$ est invariante par l'action de σ (i.e $\mathrm{Tr}\, \pi_A = \mathrm{Tr}\, \rho_K = \mathrm{Tr}\, \rho_K^\sigma$), donc [**61**, Theorem §1] implique qu'il existe un isomorphisme $\rho_K \otimes \overline{K} \simeq \rho_K^\sigma \otimes \overline{K}$.

Ainsi, il existe L' est une extension finie de K et un élément $r(\sigma) \in \mathrm{GL}_2(L')$ tels que $r(\sigma)\rho_K r^{-1}(\sigma) = \rho_K^\sigma$. Par conséquent, la représentation ρ_K vérifie les hypothèses du corollaire 3.8 et donc il existe une extension finie L/L' et une représentation $\rho_L : G_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(L)$ qui prolonge ρ_K.

Soit $\mathcal{A}$ la cloture entière de $\mathcal{R}^{ps}/\mathfrak{p}$ dans L. Puisque $\mathcal{R}^{ps}/\mathfrak{p}$ est un anneau de Nagata (il est même complet), $\mathcal{A}$ est intègre et fini sur $\mathcal{R}^{ps}/\mathfrak{p}$; avec le même argument que celui utilisé dans le (ii) du lemme 3.4, on déduit que $\mathcal{A} \in \mathfrak{C}$. De plus, $\mathrm{Tr}\, \rho_L(\sigma^2) = (\mathrm{Tr}\, \rho_L(\sigma))^2 - 2 \det \rho_L(\sigma)$, donc

$\mathrm{Tr}(\rho_L(G_{\mathbb{Q}})) \subset \mathcal{A}$. Ainsi, $\mathrm{Tr}\,\rho_L : G_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{A}$ est un pseudo-caractère continu tel que la réduction modulo $\mathfrak{m}_{\mathcal{A}}$ de sa restriction à G_M est égale à $\mathrm{Tr}\,\rho_{|G_M}$.

D'après la proposition 3.7, la restriction de ρ à G_M se prolonge de manière unique à $G_{\mathbb{Q}}$ puisque $\rho \simeq \rho \otimes \epsilon_M$, donc [**61**, Théorème1] implique que la réduction de $\mathrm{Tr}\,\rho_L \mod \mathfrak{m}_{\mathcal{A}}$ est égale à $\mathrm{Tr}(\rho)$.

D'après les théorèmes de Nyssen [**54**] et Rouquier [**57**], il existe une déformation

$$\rho_{\mathcal{A}} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{A})$$

de ρ telle que $\mathrm{Tr}\,\rho_{\mathcal{A}} = \mathrm{Tr}\,\rho_L$. De plus, on a $G_{M_v} = G_{\mathbb{Q}_p}$ (puisque p se décompose dans M) et par construction, $(\rho_K)_{|G_{\mathbb{Q}_p}} \simeq (\rho_{\mathcal{A}} \otimes L)_{|G_{\mathbb{Q}_p}} \simeq \left(\begin{smallmatrix} \psi_1' & * \\ 0 & \psi_2' \end{smallmatrix}\right)$ où $\psi_2' : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathcal{A}^\times$ est un caractère non ramifié qui relève $\psi^{\sigma}_{|G_{M_v}}$ (i.e $\psi_2' = (\tilde{d}_{\mathfrak{p}})_{|G_{\mathbb{Q}_p}}$), donc le même argument que celui utilisé dans la proposition [**9**, 5.1] implique que la déformation $\rho_{\mathcal{A}}$ est ordinaire en p. Ainsi, il existe un unique morphisme $h : \mathcal{R}^{ord} \to \mathcal{A}$ qui induit $\rho_{\mathcal{A}}$.

Considérant le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}^{ps} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi''"] & \mathcal{R}_{\tau=1} \arrow[r, hook, "\iota"] & \mathcal{R}^{ord} \arrow[dl, "h"] \\
\mathcal{R}^{ps}/\mathfrak{p} \arrow[r, hook] & \mathcal{A} &
\end{tikzcd}$$

Les morphismes $h \circ \iota \circ g$ et π'' induisent deux pseudo-déformations de π ayant la même trace et le même déterminant et grâce au lemme 3.11, on sait qu'une pseudo-déformation ne dépend que de sa trace et de son déterminant, donc $h \circ \iota \circ g = \pi''$. Par consequent, le diagramme ci-dessus est commutatif. Ainsi, on a l'inclusion $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{p}$, ce qui implique que l'idéal $\mathfrak{L}$ est contenu dans le nilradical de $\mathcal{R}^{ps}$.

4. Indice de ramification de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{W}$ au point associé á f

4.1. Espace tangent de $\mathcal{R}_{\tau=1}$. On va démontrer que $\mathcal{R}_{\tau=1} \simeq \Lambda$, ce qui est équivaut à dire que $\mathcal{R}_{\tau=1}/(\mathfrak{m}_{\Lambda}, \mathfrak{m}^2_{\mathcal{R}_{\tau=1}})$ est trivial.

On note $t_{\mathcal{R}_{\tau=1}}$ l'espace tangent de $\mathcal{R}_{\tau=1}$. Puisque $\mathcal{R}_{\tau=1}$ est de valuation discrète (voir §3.4), la dimension de $t_{\mathcal{R}_{\tau=1}}$ est égale à 1.

Notons $t'_{\mathcal{R}_{\tau=1}}$ le sous-espace de $t_{\mathcal{R}_{\tau=1}}$ formé par les pseudo-deformations de déterminant égal à $\det \pi$. Il découle du théorème 0.1 que $t'_{\mathcal{R}_{\tau=1}} \hookrightarrow t_{\mathcal{R}_{\tau=1}} \hookrightarrow \mathfrak{G}(\bar{\mathbb{Q}}_p[\epsilon])$. On peut ainsi voir que l'espace tangent de $\mathcal{R}_{\tau=1}/(\mathfrak{m}_{\Lambda}, \mathfrak{m}^2_{\mathcal{R}_{\tau=1}})$ est isomorphe à $t'_{\mathcal{R}_{\tau=1}}$.

On introduit dans le lemme suivant une représentation $\rho_{\tau=1} : G_M \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{R}_\tau)$ conjuguée à $\rho^{ord}_{|G_M}$ par une matrice à coefficients dans le corps des fractions de $\mathcal{R}^{ord}$ ($\mathrm{Tr}\,\rho_{\tau=1} = \pi_{\mathcal{R}_{\tau=1}}$).

Lemme 3.17.

(i) Il existe une représentation $\rho_{\tau=1} : G_M \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{R}_{\tau=1})$ telle que la pseudo-représentation associée à $\rho_{\tau=1}$ est $\pi_{\mathcal{R}_{\tau=1}}$.

(ii) La représentation résiduelle de $\rho_{\tau=1} \mod \mathfrak{m}_{\mathcal{R}_{\tau=1}}$ a la forme suivante

$$\tilde{\rho}(g) = \begin{pmatrix} \psi & \eta \\ 0 & \psi^\sigma \end{pmatrix} \text{ où } \eta/\psi^\sigma \in \mathrm{H}^1(M, \psi/\psi^\sigma)_{G_{M_{v^\sigma}}}.$$

(iii) Il existe une base (e'_1, e'_2) de $M_{\bar{\mathbb{Q}}_p}$ telle que $\tilde{\rho}_{|G_{M_{v^\sigma}}}$ se décompose. De plus, $\rho_{\tau=1}$ est ordinaire en v^σ et la droite stabilisée par $G_{M_{v^\sigma}}$ relève la droite engendrée par e'_2.

Démonstration.

(i) D'après la proposition 3.5, il existe $g_0, h_0 \in G_M$ tels que l'ordre de $\tilde{b}(g_0)$ et de $\tilde{c}(h_0)$ dans l'anneau de valuation discrète $\mathcal{R}^{ord}$ est 1. Le lemme [**64**, 2.2.1] implique que $\rho_{\tau=1}(g) = \begin{pmatrix} \tilde{a}(g) & \tilde{x}(g,h_0)/\tilde{x}(g_0,h_0) \\ \tilde{x}(g_0,g) & \tilde{d}(g) \end{pmatrix}$ est une représentation de G_M. Puisque $\tilde{b}(G_M) \subset \mathfrak{m}_{\mathcal{R}^{ord}}$ et que l'ordre de $\tilde{b}(g_0)$ dans $\mathcal{R}^{ord}$ est 1, donc l'ordre de $\frac{\tilde{x}(g,h_0)}{\tilde{x}(g_0,h_0)} = \frac{\tilde{b}(g)}{\tilde{b}(g_0)}$ dans $\mathrm{Frac}(\mathcal{R}^{ord})$ est positif. Par suite, $\frac{\tilde{x}(g,h_0)}{\tilde{x}(g_0,h_0)} = \frac{\tilde{b}(g)}{\tilde{b}(g_0)}$ est un élément de $\mathcal{R}^{ord}$.

Comme $\frac{\tilde{x}(g,h_0)}{\tilde{x}(g_0,h_0)}$ est invariant par τ, il a appartient à $\mathcal{R}_{\tau=1}$.

(ii) Puisque $g \in G_M$ et $\tilde{x}(g_0, g) \in \mathfrak{m}_{\mathcal{R}_{\tau=1}}$, alors la représentation résiduelle de $\rho_{\tau=1}$ est de la forme $g \to \begin{pmatrix} \psi(g) & \eta(g) \\ 0 & \psi^\sigma(g) \end{pmatrix}$, où $\eta/\psi^\sigma \in \mathrm{H}^1(M, \psi/\psi^\sigma)$. D'après le (ii) du lemme 3.5, $\tilde{b}(G_{H_{w_0^\sigma}}) \subset \mathfrak{m}^2_{\mathcal{R}^{ord}}$, donc pour tout $g \in G_{H_{w_0^\sigma}}$, $\frac{\tilde{x}(g,h_0)}{\tilde{x}(g_0,h_0)} = \frac{\tilde{b}(g)}{\tilde{b}(g_0)} \in \mathfrak{m}^{ord}_{\mathcal{R}}$.

De plus, $\frac{\tilde{x}(g,h_0)}{\tilde{x}(g_0,h_0)} = \frac{\tilde{b}(g)}{\tilde{b}(g_0)}$ est invariant par τ, donc il appartient à $\mathfrak{m}_{\mathcal{R}_{\tau=1}}$. donc, $\eta/\psi^\sigma_{|G_{H_{w_0^\sigma}}} = 0$, ainsi $\eta/\psi^\sigma_{|G_H} \in \mathrm{H}^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)^{\mathrm{Gal}(H/M)}_{G_{H_{w_0^\sigma}}}$.

En outre, l'inflation-restriction induit l'isomorphisme suivant

$$\mathrm{H}^1(H, \bar{\mathbb{Q}}_p)[\psi/\psi^\sigma]_{G_{H_{w_0^\sigma}}} \simeq \mathrm{H}^1(M, \psi/\psi^\sigma)_{G_{M_{v^\sigma}}}.$$

Ainsi $\eta/\psi^\sigma \in \mathrm{H}^1(M, \psi/\psi^\sigma)_{G_{M_{v^\sigma}}}$.

(iii) On remarque que $\rho_{\tau=1}$ est conjuguée à $\rho^{ord}_{|G_M}$ par la matrice $\begin{pmatrix} 1/\tilde{b}(g_0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc la représentation $\rho_{\tau=1} \otimes K$ est ordinaire en v^σ.

De plus, la représentation $\tilde{\rho}_{|G_{M_{v^\sigma}}}$ se décompose puisque $\eta/\psi^\sigma \in \mathrm{H}^1(M, \psi/\psi^\sigma)_{G_{M_{v^\sigma}}}$. Ainsi, $\mathcal{R}_{\tau=1}$ contient les valeurs propres de $\rho_{\tau=1}(\sigma^{-1}\gamma_0\sigma)$ et $\rho_{\tau=1} \otimes L$ est ordinaire en v^σ. En utilisant le même argument que celui utilisé dans la démonstration de la proposition [**9**, 5.1], on déduit que $\rho_{\tau=1}$ est ordinaire en v^σ. □

Remarque 3.18. *Soit $\pi_\epsilon = (\tilde{a}_\epsilon, \tilde{d}_\epsilon, \epsilon x)$ un élément de $t_{\mathcal{R}_{\tau=1}}$. Le (iii) de la proposition 3.17 implique que pour tout $g \in G_M$, la fonction $x(., g)$ est triviale sur tous les groupes de décomposition G_{H_w}, où $w \mid v^\sigma$ (puisque $\eta_{|G_{H_{w_0^\sigma}}} = 0$).*

Puisque tout morphisme de G_H à valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}_p$ non ramifié en dehors de v (resp. v^σ) se factorise à travers $\mathrm{Gal}(M_v/H)$ (resp. $\mathrm{Gal}(M_{v^\sigma}/H)$), alors le morphisme

$$(\frac{x(g,.)}{\psi^\sigma(g)\psi(.)})_{|G_H} \left(resp.\ (\frac{x(.,g)}{\psi^\sigma(.)\psi(g)})_{|G_H}\right)$$

est trivial sur $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/M_v)$ $\big($resp. $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/M_{v^\sigma})\big)$, hors $\bar{\mathbb{Q}}_p$ est sans torsion, donc $x(.,*)$ est triviale quand l'une de ses composantes $\in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/H_\infty)$.

Le but du lemme suivant est d'étudier l'ordinarité des éléments de $t_{\mathcal{R}_{\tau=1}}$ en les premiers de H au dessus de v^σ.

Lemme 3.19. *Soient $\alpha : \mathcal{R}_{\tau=1} \twoheadrightarrow \mathcal{R}_{\tau=1}/\mathfrak{m}^2_{\mathcal{R}_{\tau=1}}$ la projection canonique, $\pi'_\epsilon = (a', d', x')$ la pseudo-déformation obtenue par la composition $\alpha \circ \pi_{\mathcal{R}_{\tau=1}}$ et w' une place de H au dessus v^σ, alors pour tout h' dans $I_{w'} \cap \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/H_\infty)$, $a'(h') = 1$.*

Démonstration.

Soit ρ^τ_ϵ la représentation obtenue en composant $\alpha \circ \rho_{\tau=1}$. Notons $\rho^\tau_\epsilon(g) = \begin{pmatrix} a'(g) & b'(g) \\ c'(g) & d'(g) \end{pmatrix}$ la réalisation dans la base (u_1, u_2) de $M_{\bar{\mathbb{Q}}_p[\epsilon]}$ induite par le tiré en avant via α. Remarquons que $b'(g) = \alpha(\tilde{x}(g, h_0)/\tilde{x}(g_0, h_0))$ et $x'(g_0, g) = c'(g)$. Soit h un élément de $I_{w_0^\sigma} \cap \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/H_\infty)$, alors le (iii) du lemme 3.17 implique que $\tilde{\rho}_{|G_{F_{v^\sigma}}} = \psi \oplus \psi^\sigma$ dans la base (e'_1, e'_2) de $M_{\bar{\mathbb{Q}}_p}$ et donc ρ^τ_ϵ est ordinaire en v^σ dans la base (u_1, v_2) de $M_{\bar{\mathbb{Q}}_p[\epsilon]}$ qui relève (e'_1, e'_2).

Plus précisément, si $\begin{pmatrix} a''(h) & b''(h) \\ c''(h) & d''(h) \end{pmatrix}$ est la réalisation de ρ^τ_ϵ dans (u_1, v_2), alors $a''(h) = 1$ et $b''(h) = 0$. D'après la remarque 3.18, $c'(h) = 0$; ainsi après avoir écrit la représentation $\rho_{\tau=1}$ dans (u_1, v_2), on obtient $a''(h) = 1 = a'(h)$.

Maintenant, si w' est une autre place au dessus de v^σ telle que $g(w_0^\sigma) = w'$ pour un certain $g \in \mathrm{Gal}(H/M)$, on peut appliquer le même argument que ci-dessus pour la base $(u_1, (\rho^\tau_\epsilon)^{-1}(g)v_2)$.

□

Lemme 3.20. *Soit w une place de H au dessus de v et $\pi'_\epsilon = (a', d', x')$ un élément de $t_{\mathcal{R}_{\tau=1}}$, alors pour tout g dans $\mathrm{Gal}(H_\infty/M)$ et tout h' dans $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/H_\infty)$, $d'(gh'g^{-1}) = d'(h')$ et d' est triviale sur $I_w \cap \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/H_\infty)$.*

Démonstration.

(i) Posons $h = gh'g^{-1}$. Puisque $x'(.,.)$ est trivial quand une des ses composantes appartient à $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/H_\infty)$ (voir la remarque 3.18), on a :

$$d'(h) = d'(gh'g^{-1}) = d'(g)d'(h'g^{-1}) + x'(h'g^{-1}, g) \tag{37}$$

$$= d'(g)d'(h')d'(g^{-1}) + \psi(h')x'(g^{-1}, g) \tag{38}$$

Comme $d'(gg^{-1}) = 1 = d'(g)d'(g^{-1}) + x'(g^{-1}, g)$, $x' \in (\epsilon)$ et $\psi(h') = \psi^\sigma(h')$, alors $d'(h) = d'(h')(1 - x'(g^{-1}, g)) + \psi(h')x'(g^{-1}, g) = d'(h')$.

Le groupe $\mathrm{Gal}(H/M)$ agit transitivement sur les places de H au dessus de v (puisque l'extension H/M est galoisienne), donc on peut conclure avec le relation ci-dessus et le fait que $d'_{|I_{w_0}} = 1$ (i.e π'_ϵ est ordinaire en v).

$\square$

Corollaire 3.21. *Avec les notations ci-dessus, on a*

(i) Il existe une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_{\mathcal{R}^{ps}_{red}}/\mathfrak{m}^2_{\mathcal{R}^{ps}_{red}}, \bar{\mathbb{Q}}_p) \xrightarrow{u} \mathrm{H}^1(M, \psi^\sigma/\psi)_{|M_v} \otimes \mathrm{H}^1(M, \psi/\psi^\sigma)_{|M_{v^\sigma}} \xrightarrow{h} \mathrm{Ext}^2_{G_M}(\psi,\psi)_{|I_v} \oplus \mathrm{Ext}^2_{G_M}(\psi^\sigma,\psi^\sigma)_{|I_{v^\sigma}}$$

où u est la projection $(\tilde{a}_\epsilon, \tilde{d}_\epsilon, \epsilon x) \to \frac{x(g_0,.)}{\psi^\sigma(g_0)\psi(.)} \otimes \frac{x(.,h_0)}{\psi^\sigma(.)\psi(h_0)}$ et h le produit de Yoneda défini à l'aide de l'identification $\mathrm{H}^1(M, \psi/\psi^\sigma) \simeq \mathrm{Ext}^1_{G_M}(\psi, \psi^\sigma)$ et $\mathrm{Ext}^2_{G_M}(\psi^\sigma, \psi^\sigma)_{|I_{v^\sigma}}$ $\big($resp. $\mathrm{Ext}^2_{G_M}(\psi^\sigma, \psi^\sigma)_{|I_{v^\sigma}}\big)$ les extensions qui sont triviales en I_{v^σ} (resp. I_v).

(ii) u est un isomorphisme.

Démonstration.

Puisque $\mathcal{R}^{ps}_{red}$ est de valuation discrète, alors $\dim \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_{\mathcal{R}^{ps}_{red}}/\mathfrak{m}^2_{\mathcal{R}^{ps}_{red}}, \bar{\mathbb{Q}}_p) = 1$ et d'après le lemme 3.16, la fonction x n'est pas triviale.

De plus, le lemme 3.5 implique que $\dim \mathrm{H}^1(M, \psi/\psi^\sigma)_{|G_{M_v}} \otimes \mathrm{H}^1(M, \psi^\sigma/\psi)_{|G_{M_{v^\sigma}}} = 1$, donc u est un isomorphisme et si on pose $\tilde{a}_\epsilon = \psi + \epsilon a$ et $\tilde{d}_\epsilon = \psi^\sigma + \epsilon d$, alors $x(g,g') = a(gg') - \psi(g')a(g) - \psi(g)a(g')$ et $x(g',g) = d(gg') - \psi^\sigma(g')d(g) - \psi^\sigma(g)a(g')$, donc l'image de x par h est un 2-cobord. $\square$

La suite exacte du lemme ci-dessus est similaire à la suite exacte de la proposition [**55**, 5.7.3].

4.2. Espace tangent de $\mathcal{R}_{\tau=1}/\mathfrak{m}_\Lambda$ et preuve du Théorème 0.2.

Soit $\pi_\epsilon = (\tilde{a}_\epsilon, \tilde{d}_\epsilon, \tilde{x}_\epsilon)$ la pseudo-déformation induite par la projection canonique

$$\pi' : \mathcal{R}_{\tau=1} \twoheadrightarrow \mathcal{R}_{\tau=1}/(\mathfrak{m}_\Lambda, \mathfrak{m}^2_{\mathcal{R}_{\tau=1}}).$$

On sait que $\tilde{x}_\epsilon$ est trivial sur $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/H_\infty)$ (voir la remarque 3.18). Ainsi, sur $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/H_\infty)$, la pseudo-déformation π_ϵ est égale à $(\tilde{a}_\epsilon, \tilde{d}_\epsilon, 0)$, où $\tilde{a}_\epsilon$, $\tilde{d}_\epsilon$ sont des caractères sur $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/H_\infty)$. On note N_∞ l'extension de H_∞ fixée par la restriction de $\tilde{a}_\epsilon \oplus \tilde{d}_\epsilon$ à $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/H_\infty)$.

Théorème 3.22. *Avec les notations ci-dessus, on a :*

(i) N_∞ est une p-extension non ramifée abélienne de H_∞ telle que l'action par conjugaison de $\mathrm{Gal}(H_\infty/M)$ sur $\mathrm{Gal}(N_\infty/H_\infty)$ est triviale.

(ii) Si X_∞ satisfait l'hypothèse $(\mathbf{G})$, la pseudo-déformation $\pi_\epsilon = (\tilde{a}_\epsilon, \tilde{d}_\epsilon, \tilde{x}_\epsilon)$ est triviale.

(iii) Le morphisme $\kappa^{\#} : \Lambda \to \mathcal{R}_{\tau=1}$ est un isomorphisme.

Démonstration.

(i) Soient $g \in \mathrm{Gal}(H_\infty/M)$ et $h \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/H_\infty)$, puisque $\det \pi_\epsilon = \det \pi$ et la fonction $\tilde{x}_\epsilon$ est triviale quand une de ses composantes appartient à $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/H_\infty)$, le lemme 3.20 implique que $\tilde{a}_\epsilon(ghg^{-1}) = \tilde{a}_\epsilon(h)$ et $\tilde{d}_\epsilon(ghg^{-1}) = \tilde{d}_\epsilon(h)$. Donc, l'action $\mathrm{Gal}(H_\infty/M)$ sur les caractères $(\tilde{a}_\epsilon)_{|\,\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/H_\infty)}$, $(\tilde{d}_\epsilon)_{|\,\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/H_\infty)}$ est triviale ; par suite, l'action du groupe $\mathrm{Gal}(H_\infty/M)$ sur $\mathrm{Gal}(N_\infty/H_\infty)$ est triviale.

De plus, les lemmes 3.19 et 3.20 impliquent qu'au moins une des fonctions $\tilde{a}_\epsilon$ ou $\tilde{d}_\epsilon$ est triviale sur $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/H_\infty) \cap I_w$ pour toute place w de H au dessus de p, et puisque $\det \pi_\epsilon = \det \pi$, il en découle que les fonctions $\tilde{a}_\epsilon$ et $\tilde{d}_\epsilon$ sont triviales sur $I_w \cap \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/H_\infty)$ pour toute place w de H au dessus de p, donc l'extension N_∞/H_∞ est non ramifiée en p.

En outre, la proposition [**9**, 7.1] implique que pour tout nombre premier $\ell \nmid p$, l'image de $I_\ell \cap \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/H_\infty)$ par $\tilde{a}_\epsilon$ est finie (donc triviale). Donc, l'extension N_∞/H_∞ est non ramifiée.

(ii) Puisque l'extension N_∞/H_∞ est non ramifiée, N_∞ est un sous-corps de L_∞ et comme $\mathrm{Gal}(H_\infty/H)$ agit trivialement sur $\mathrm{Gal}(N_\infty/H_\infty)$, N_∞ est contenu dans le sous-corps L_0 de L_∞ fixé par le sous-module $(T_1, ...T_r)X_\infty$ de X_∞. Par hypothèse, L_0 est une extension abélienne de F'', donc N_∞ est une extension abélienne de F''. Par conséquent, $(\pi_\epsilon)_{|\,\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F'')}$ se factorise à travers $\mathrm{Gal}(N_\infty/F'')$ qui est un groupe abélien. Ainsi, $\tilde{a}_\epsilon(gh) = \tilde{a}_\epsilon(hg)$ ce qui implique que $\tilde{x}_\epsilon$ est bilinéaire, symétrique et trivial si l'une de ses composantes appartient à un groupe d'inertie I_w (où w est une place de H au dessus de p).

D'après la théorie du corps des classes, on peut exprimer le groupe $\mathrm{Gal}(H_\infty/F'')$ comme produit de groupes d'inerties en les places au dessus de p, donc la fonction $\tilde{x}_\epsilon$ est triviale sur $\mathrm{Gal}(H_\infty/F'')$. Puisque F'' est fini sur H, on déduit que $\tilde{x}_\epsilon$ est triviale sur G_H et donc les lemmes 3.5 et 3.13 impliquent que $\tilde{x}_\epsilon$ est triviale. Ainsi, la pseudo-déformation π_ϵ est triviale (car $\mathcal{R}_{\tau=1}$ est de valuation discrète).

(iii)Puisque l'espace tangent de $\mathcal{R}_{\tau=1}/\mathfrak{m}_\Lambda$ est trivial, $\kappa^{\#}$ est un isomorphisme. □

5. Lieu ordinaire de la courbe $\mathcal{C}$ et algèbre de Hecke

Soient $h_{\mathbb{Q}}$ l'algèbre de Hecke p-ordinaire introduite par Hida dans [**34**] et $\mathfrak{p}_f$ l'idéal premier de hauteur 1 de $h_{\mathbb{Q}}$ qui correspond à f. On note $h_{\mathbb{Q},\mathfrak{p}_f}$ la complétion de la localisation de $h_{\mathbb{Q}}$ par $\mathfrak{p}_f$ via l'idéal maximal. Soit $h'_{\mathbb{Q}}$ la sous-algèbre de Hecke de $h_{\mathbb{Q}}$ engendrée par les opérateurs U_p, T_ℓ et $< \ell >$ pour $\ell \nmid Np$.

Proposition 3.23. *Il existe un isomorphisme entre $\mathcal{T}$ et $h_{\mathbb{Q},\mathfrak{p}_f}$.*

Démonstration.

f correspond à un point $x \in \mathcal{C}^{ord,0}$, où $\mathcal{C}^{ord,0}$ est le lieu parabolique du lieu ordinaire de $\mathcal{C}^{ord}$ ($\mathcal{C}^{ord,0}$ est un fermé de Zariski de $\mathcal{C}^{ord}$). Il est connu que $h'_{\mathbb{Q}}$ est un modèle formel de $\mathcal{C}^{ord,0}$

(i.e $\mathcal{C}^{ord,0} = \mathrm{Sp}\, h'_{\mathbb{Q}}[1/p]$). On note $h'_{\mathbb{Q},\mathfrak{p}_f}$ la complétion de la localisation de $h'_{\mathbb{Q}}$ par $\mathfrak{p}_f \cap h'_{\mathbb{Q}}$ via l'idéal maximal. D'après les résultats de [**29**, §7], il existe un isomorphisme $h'_{\mathbb{Q},\mathfrak{p}_f} \simeq \mathcal{T}$ et un isomorphisme $h'_{\mathbb{Q},\mathfrak{p}_f} \simeq h_{\mathbb{Q},\mathfrak{p}_f}$.

□

5.1. Démonstration du Théorème 0.3. La représentation ρ associée à f est diédrale, donc l'involution ω fixe l'idéal premier $\mathfrak{p}_f$ de hauteur 1 de $h_{\mathbb{Q},\mathfrak{m}}$ associé à f. D'après [**33**, §3],[**36**, §2] et l'identification $\mathcal{R}^{ord} \simeq \mathcal{T}$, l'action de ω sur $\mathcal{T}$ coïncide avec l'involution τ.

Hida a construit dans [**34**] un pseudo-caractère $\mathrm{Ps}_{h_{\mathbb{Q}}} : G_{\mathbb{Q},Np} \to h_{\mathbb{Q}}$ qui envoie Frob_ℓ sur T_ℓ pour tout premier $\ell \nmid Np$. Il est connu que pour tout premier $q \nmid Np$ de M, le morphisme changement de base $\beta : h_M \to h_{\mathbb{Q}}$ envoie T_q sur $\mathrm{Ps}_{h_{\mathbb{Q}}}(\mathrm{Frob}_q)$. Soit $\mathfrak{n} = \beta^{-1}(\mathfrak{p}_f)$, après localisation, le morphisme β induit un morphisme d'anneaux locaux $\beta_f : \mathcal{H} \to \mathcal{T}$ et il est facile de voir que les valeurs de β_f sont dans $\mathcal{T}_{\tau=1}$, où $\mathcal{T}_{\tau=1}$ est le sous-anneau de $\mathcal{T}$ fixé par τ.

De plus, Hida a construit dans [**39**] un pseudo-caractère $\mathrm{Ps}_{h_M} : G_M \to h_M$ de dimension 2 tel que $\mathrm{Ps}_{h_M}(\mathrm{Frob}_q) = T_q$ pour tout premier q de M qui ne divise pas p. Après composition avec le morphisme localisation $h_M \to \mathcal{H}$, on obtient un pseudo-caractère $\mathrm{Ps}_{\mathcal{H}} : G_M \to \mathcal{H}$ de dimension 2 qui relève $\psi \oplus \psi^\sigma$; mais puisque $\beta(\mathrm{Ps}_{h_M}) = (\mathrm{Ps}_{h_{\mathbb{Q}}})_{|G_M}$, alors $\beta_f(\mathrm{Ps}_{\mathcal{H}}) = \mathrm{Tr}(\rho_{\mathcal{T}})_{|G_M}$.

Soit S le corps des fractions totales de l'anneau réduit $\mathcal{H} \subset S$, alors $S = \prod \mathcal{H}_{\mathfrak{p}_i}$, où $\mathfrak{p}_i$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers minimaux de $\mathcal{H}$. Il est connu que chaque $\mathfrak{p}_i$ correspond à une famille de Hida qui se spécialise en la forme modulaire qui a pour représentation $\rho_{|G_M}$.

D'après un résultat de Wiles [**64**], il existe une unique représentation galoisienne

$$\rho_S : G_M \to \mathrm{GL}_2(S)$$

ordinaire en v et v^σ telle que $\mathrm{Tr}(\rho_S) = \mathrm{Ps}_{\mathcal{H}}$. Puisque $\psi(\gamma_0) \neq \psi^\sigma(\gamma_0)$, le lemme de Hensel implique que les valeurs propres de $\rho_S(\gamma_0)$ sont distinctes, donc il existe une base de M_S dans laquelle $\rho_S(\gamma_0)$ est diagonale et $(\rho_S)_{|G_{M_v}}$ est triangulaire supérieure. Donc, le lemme 3.11 implique que les coefficients de la réalisation de ρ_S dans cette base induit une pseudo-déformation $\pi_{\mathcal{H}} = (a, d, bc) : G_M \to \mathcal{H}$ de π ordinaire en v.

On peut voir que l'action de $\Delta = \mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q})$ fixe $\mathfrak{n}$. On note $\mathcal{H}_\Delta^{red}$ le quotient de $\mathcal{H}_\Delta$ par le nilradical et $\pi_{\mathcal{H}_\Delta^{red}}$ le tiré vers l'avant de $\pi_{\mathcal{H}}$ par la projection canonique $\mathcal{H} \twoheadrightarrow \mathcal{H}_\Delta^{red}$. Alors, la trace $\pi_{\mathcal{H}_\Delta^{red}}$ est invariante par l'action de Δ et $\pi_{\mathcal{H}_\Delta^{red}}$ est un point de $\mathfrak{G}(\mathcal{H}_\Delta^{red})$, donc il existe un unique morphisme $h : \mathcal{R}_{red}^{ps} \to \mathcal{H}_\Delta^{red}$ qui induit la pseudo-déformation $\pi_{\mathcal{H}_\Delta^{red}}$.

Par construction, $h(\mathrm{Tr}\, \pi^{ps}(\mathrm{Frob}_q)) = T_q$ pour $q \nmid p$, donc le morphisme h est surjectif puisque les générateurs topologiques $\{T_q\}_{q \nmid p}$, U_v et U_{v^σ} de $\mathcal{H}_\Delta$ sur Λ sont dans l'image du morphisme h ($\psi_{|G_{M_v}} \neq \psi^\sigma_{|G_{M_v}}$ implique $U_v, U_{v^\sigma} \in \mathrm{im}\, h$).

D'après le théorème 0.1, on a les isomorphismes $\mathcal{T}_{\tau=1} \simeq \mathcal{R}_{\tau=1} \simeq \mathcal{R}_{red}^{ps}$ et d'après le lemme 3.11, $\mathcal{R}^{ps}$ est topologiquement engendré sur Λ par $\mathrm{Tr}\, \pi^{ps}(\mathrm{Frob}_q)$ pour tout premier q de M.

Donc, le morphisme $\beta_f : \mathcal{H} \to \mathcal{T}_{\tau=1}$ est surjectif (β_f envoie T_q sur $\operatorname{Tr} \rho_{\mathcal{T}}(\mathrm{Frob}_q)$) et puisque la trace de $(\rho_{\mathcal{T}})_{|G_M}$ est invariante par l'action de σ, β_f se factorise à travers $\mathcal{H}_{\Delta}$, donc la dimension de Krull de $\mathcal{H}_{\Delta}$ est ≥ 1. De plus, la dimension de Krull de h_M est 2 ; par suite, après localisation et complétion par l'idéal premier $\mathfrak{n}$ de hauteur 1, on déduit que la dimension de Krull de $\mathcal{H}$ est égale à 1, donc $\mathcal{H}_{\Delta}$ est de dimension 1.

Il découle de 0.1 que l'espace tangent $\mathcal{R}^{ps}_{red}$ est de dimension 1 et puisque $\mathcal{H}^{red}_{\Delta}$ est equidimensionel de dimension 1, la surjection $h : \mathcal{R}^{ps}_{red} \twoheadrightarrow \mathcal{H}^{red}_{\Delta}$ est un isomorphisme d'anneaux locaux réguliers de dimension 1.

Bibliographie

[1] F. Andreatta and A. Iovita and V. Pilloni, *p-adique families of Hilbert modular forms*, to appear in Astérisque.

[2] B. Balasubramanyam, E. Ghate and V. Vatsal, *On local Galois representations associated to ordinary Hilbert modular forms*, Manuscripta Mathematica 142 (2013), no. 3-4, 513-524

[3] J. Bellaïche and G. Chenevier, *Families of Galois representations and Selmer groups*, Astérisque, Soc. Math. France, Paris, 2009.

[4] J. Bellaïche, *Critical p-adique L-functions*, Invent. Math., 189 (2012), pp. 1–60.

[5] J. Bellaïche, *Non smooth classique points on eigenvarieties*, Duke Math. J. 145.(2008), n°1, 71–90.

[6] J. Bellaïche, *Eigenvarieties and p-adique L-functions*, book in preparation.

[7] J. Bellaïche and G. Chenevier, *Lissité de la courbe de Hecke de* GL_2 *aux points Eisenstein critiques*, J. Inst. Math. Jussieu 5 (2006), n°2, 333–349.

[8] A. Brumer, *On the units of algebraic number fields*, Mathematika, 14 (1967), pp. 121–124.

[9] J. Bellaïche and M. Dimitrov, *On the eigencurve at classique weight one points*, Duke Math.J. 165.(2016), n°2, 245-266.

[10] K. Buzzard, *Eigenvarieties*, in L-functions and Galois representations, vol. 320 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, pp. 59–120.

[11] K. Buzzard, *Analytic continuation of overconvergent eigenforms*, Jour. Am.Math. Soc. 16, n. 1, p. 29 –55, 2002.

[12] K. Buzzard and R. Taylor, *Companion forms and weight* 1 *forms*, Annals of Math. 149, 1999.

[13] H. Carayol, *Formes modulaires et reprèsentation Galoisienne à valeurs dans un anneau local compact*, Contemporary Math,165 (1994),213-237.

[14] G. Chenevier, *Familles p-adiques de formes automorphes pour* GL_n, J. Reine Angew. Math., 570 (2004), pp. 143–217.

[15] S. Cho and V. Vatsal, *Deformations of induced Galois representations*, J. Reine Angew. Math., 556 (2003), pp. 79–98.

[16] R. Coleman, *classique and overconvergent modular forms*, Invent. Math. 124 (1996), 215-241.

[17] R. Coleman, p-adique Banach spaces and families of modular forms, Invent. Math. 127(1997), 417-479

[18] R. Coleman and B. Mazur, *The Eigencurve*, in Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996), vol. 254 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, pp. 1–113.

[19] H. Darmon, A. Lauder and V. Rotger, *Stark points and p-adique iterated integrals attached to modular forms of weight one*, Forum of Mathematics, Pi (2015), Vol. 3, e8, 95 pages.

[20] H. Darmon, A. Lauder and V. Rotger, *Overconvergent generalised eigenforms of weight one and class fields of real quadratic field*, Advances in Mathematics 283 (2015),130–142.

[21] P. Deligne and J.-P. Serre, *Formes modulaires de poids* 1, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4),7 (1974), pp. 507–530.

[22] S. V. DEO, *On the eigenvariety of Hilbert modular form at classique parallel weight one point with dihedral projective image*. Preprint.

[23] H. Diao et R. Liu, *The Eigencurve is Proper*, Duke Math.J. 165, Number 7 (2016), 1381-1395.

[24] M. Dimitrov, *Galois representations modulo p and cohomology of Hilbert modular varieties*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 38, Issue 4 (2005), pp. 505–551.

[25] M. Dimitrov and G.Wiese, *Unramifiedness of Galois representations attached to weight one Hilbert modular eigenforms mod p*. Preprint.

[26] M. Dimitrov and E. Ghate, *On classique weight one forms in Hida families*, J. Théor. Nombres Bordeaux, 24 (2012), pp. 639–660.

[27] M. Dimitrov, *Compactifications arithmétiques des variétés de Hilbert et formes modulaires de Hilbert pour* $\Gamma_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$, In Geometric Aspects of Dwork Theory, 527-554, Walter de Gruyter, (2004).

[28] M. Dimitrov, *On Ihara's lemma for Hilbert modular varieties*. Composition Mathematica, 145 (2009), 1114–1146.

[29] M. Dimitrov, *On the local structure of ordinary Hecke algebras at classique weight one points* . In Automorphic Forms and Galois Representations vol.2 (Durham, 2011), 1-16, London Math. Soc. Lecture Note Series 415, Cambridge Univ. Press, (2014).

[30] K. Fujiwara, *Deformation ring and Hecke algebra in the totally real case*, arXiv.

[31] E. Ghate and V.Vatsal. *On the local behaviour of ordinary* Λ*-adic representations*. Annales de l'Institut Fourier 54.7 (2004) : 2143-2162.

[32] R. Greenberg, *The Iwasawa invariant of* Γ*-extensions of a fixed number field*. Am .J. Math. 95, 204-2014 (1973).

[33] H. Hida K Doi H. Ishii, *Discriminant of Hecke fields and twisted adjoint L-values for* GL(2). Invent. math. 134, 547- 577 (1998)

[34] H. Hida, *Galois representations into* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ *attached to ordinary cusp forms*, Invent. Math., 85 (1986), pp. 545–613.

[35] H. Hida, *Nearly ordinary Hecke algebra and Galois representation of several variables*, Proc. JAMI inaugural conference, Supplement to Amer. J.Math(1989). 115-134.

[36] H. Hida, *Global quadratic units and Hecke algebras*, Documenta Math. 3 (1998), 273–285.

[37] H. Hida, *On Selmer group of adjoint modular form representation*, Sém. Théorie des Nombres de Paris, 1993-44, LMS Lecture notes series 235, 89-132 (1996)

[38] H. Hida, *On p-adique Hecke algebras for* GL_2 *over totally real fields*, Ann. of Math. 128 (1988), 295–384.

[39] H. Hida, *On nearly ordinary Hecke algebras for* $\mathrm{GL}(2)$ *over totally real fields*, Advanced Studies in Pure Math. 17 (1989), 139-169.

[40] H. Hida, *Non-abelian base change for totally real fields*, Pacific journal of Mathematics. Vol.181, No,3,(1997).

[41] P. Kassaei, *Modularity lifting in parallel weight one*, J. Amer. Math. Soc. 26 (2013), no. 1, 199–225

[42] P. Kassaei, S. Sasaki, Y. Tian, *modularity lifting results in parallel weight one and applications to the Artin conjecture : the tamely ramified case.* Forum of Mathematics, Sigma / Volume 2 / 2014, e18 (58 pages).

[43] M. Kisin, *Moduli of finite flat group schemes and modularity*, Ann. of Math. 170 (2009), 10851180.

[44] M. Kisin K.F. Lai, *Overconvergent Hilbert modular forms*, Amer. J. Math. 127 (2005), no. 4, 735–783.

[45] M. Kisin, *Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture*, Invent. Math. 153 (2003), 373-454

[46] R. Langlands, *On the functional equation of the Artin L-functions*, mimeographed notes, Yale University 1965.

[47] M. Ohta, *Hilbert modular forms of weight one and Galois representations, Automorphic forms of several variables*(Katata, 1983), Progr. Math., 46, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1984, pp. 333-352.

[48] V. Pilloni, *Formes modulaires surconvergentes*, Annales de l'institut Fourier (2013).

[49] V. Pilloni B. Stroh, *Surconvergence, ramification et modularité*, à paraitre dans Astérisque.

[50] S. Bijakowski V. Pilloni B. Stroh, *Surconvergence et classicité : le cas Hilbert*, à paraitre dans Annals of Maths.

[51] J. Rogawski J. Tunnell,*On Artin L-functions associated to Hilbert modular forms of weight one*, Inventiones Mathematicae. 74 (1983), n°1, 1-42.

[52] S. Hattori, *On a properness of the Hilbert eigenvariety at integral weights : the case of quadratic residue fields.* Preprint.

[53] M. Kisin, *Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture*, Invent. Math.,153 (2003),pp.373-454.

[54] L. Nyssen, *Pseudo-représentations*, Math. Ann., 306 (1996), pp. 257–283.

[55] P. Wake, C. Erickson, *Pseudo-modularity and Iwasawa Theory*, Preprint.

[56] M. Rapoport, *Compactification de l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal*, Compositio Math., 36 (1978), pp. 255–335.

[57] R. Rouquier, *Caractérisation des caractères et pseudo-caractères*, J. Algebra, 180 (1996), pp. 571–586.

[58] J.P. Serre, *Classes des corps cyclotomiques (d'après K.Iwasawa)*, sém. Bourbaki exposé 174 (1958) in Sém. Bourbaki vol.5 Soc. de France (1995), 83-93.

[59] C.M. Skinner, A. Wiles, *Residually reducible representations and modular forms*, Inst. Hautes Ét. Sci. Publ. Math. 89 (2000), 5–126.

[60] G. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms*, Duke Math. J. 45 (1978), no. 3, pp. 637–679.

[61] R. Taylor, *Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight*, Duke math J. 63 (1991), p 281-332.

[62] R. Taylor, A. Wiles, *Ring theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. Math. 142(1995),265-280.

[63] E. Urban, *Eigenvarieties*, Ann. of Math. 174 (2011), 1685-1784.

[64] A. Wiles, *On ordinary λ-adique representations associated to modular forms*, Invent. Math., 94 (1988), pp. 529–573.

[65] A. Wiles, *Modular elliptique curves and Fermat's last theorem.* Ann. Math. 141 (1995), 443–551.