Université Lille 1 - Sciences et Technologies

École Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur - Lille Nord de France

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

présentée par

Barnabé CROIZAT

Gaston Darboux : naissance d'un mathématicien, genèse d'un professeur, chronique d'un rédacteur

---

Dirigée par Rossana TAZZIOLI

Soutenue le 8 Novembre 2016 devant le jury composé de :

M. Philippe NABONNAND .... *Université de Lorraine*
M. Tom ARCHIBALD .... *Simon Fraser University*
M^me^ Rossana TAZZIOLI .... *Université Lille 1*
M^me^ Hélène GISPERT .... *Université Paris Sud*
M. Patrick POPESCU-PAMPU .... *Université Lille 1*
M. Guillaume JOUVE .... *Université d'Artois*

Laboratoire de rattachement :

Laboratoire Paul Painlevé

UFR de Mathématiques
Laboratoire Paul Painlevé
UMR CNRS 8524
Université de Sciences et Technologie de Lille
Cité Scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq.

À mon grand-père...

Remerciements

Tout d'abord, je remercie le lecteur d'avoir l'indulgence de me pardonner les fautes et imperfections que comporte mon travail. Puis un saut temporel du futur au passé me permet d'exprimer ma gratitude envers le principal intéressé, Gaston Darboux. Son tempérament et la richesse de ses mathématiques m'ont souvent amusé, parfois fait obstacle, toujours passionné. J'aurais aimé avoir la chance de le voir et de lui parler, mais d'une certaine manière j'ai l'impression de l'avoir déjà fait.

Venons-en à présent à des remerciements plus conventionnels mais non moins importants. Pour commencer, je veux témoigner ma reconnaissance envers tous les professeurs qui ont accompagné mes études et nourri mes passions. Parmi eux, je remercie particulièrement Philippe à Mont-Saint-Aignan pour son jazz, puis pour leurs mathématiques Olivier et Alain à Rouen, Gabriel, Claudine, Benoît, Claire et Cyril autour de Paris, et Antoine à Montréal.

Mes recherches n'auraient pas été possibles sans l'aide et la bienveillance des équipes de nombreuses bibliothèques et centres d'archives. Merci à Nadine, Hélène et Catherine à Lille, Florence à Paris, Sri, Jenny, Maria et Michael à Djursholm (que je remercie également pour m'avoir offert une publicité photographique en ligne), ainsi qu'aux membres des bibliothèques de Giessen et de Münster.

Mes années de travail au sein du Laboratoire Paul Painlevé ont été difficiles (car c'est pure folie que de vouloir effectuer une thèse d'histoire des sciences en trois ans) mais surtout heureuses. Il me sera difficile de remercier toutes les personnes qui ont contribué à ce bonheur du quotidien et je m'en excuse. Merci à David et Marie, à Sabine, Carine, Aurore, Frédérique et les Christelles, Véronique et Anaïs, qui m'ont vu un peu, puis beaucoup, passionnément et enfin plus beaucoup du tout ! Merci à Dominique, Joëlle et tout leur petit microcosme bienheureux pour nos parenthèses journalières.

Mais bien sûr, si le doctorat est une heureuse période, c'est avant tout grâce aux doctorants eux-mêmes. J'embrasse virtuellement et fort chaleureusement toute la communauté des doctorants : Oguzhan mon grand frère et Anto ma petite sœur, Gaia, Roberta, Min, Oussama, Clément, Emilie, Stefana, Florian, Mernaz, Michael, mais aussi Ali, Bilel et Antoine dont on pardonnera l'égarement disciplinaire, ainsi que Fatma qu'il n'est je pense pas complètement faux d'inclure dans cette liste. C'étaient des doctorants, ce sont des amis.

En élargissant la géographie de ma gratitude, j'en viens à remercier le cercle des doctorants en histoire des mathématiques qui ont souvent égayé de trop longs séminaires. Merci à Thierry, Jenny, Isabelle, Chiara, Dalia, ainsi que ces petits rigolos de Yannick, François, Simon et Samson. Mais que seraient les élèves sans les maîtres ? Dès mes premiers jours en tant que doctorant dans un domaine qui m'était alors complètement étranger, j'ai découvert la chaleureuse congrégation des historien(ne)s des mathématiques et eu la chance de m'y sentir rapidement adopté. Je remercie avec l'intensité qu'il se doit Philippe, Hélène, Tom, Norbert & Norbert, Frédéric, Jeanne, Livia, Clara Silvia, Christophe, June, Caroline, Sloan et tous les autres. Enfin bien sûr, je remercie Patrick, Guillaume, et une nouvelle fois

Hélène, Tom et Philippe pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'accepter de constituer un jury qui a fière allure. Merci particulièrement à Patrick qui fut mon seul véritable relecteur.

Pour finir, j'aimerais exprimer plusieurs remerciements plus personnels qui me tiennent à cœur. Je tiens à remercier énormément ma grande famille, des confins du Sud du Mas des Oiseaux à l'Ouest inconnu de l'Ecole du Village. Au centre de ce royaume qui me porte chaque jour, ce n'est pas simplement ma gratitude mais également tout mon amour que je veux irradier par écrit sur la Gabinie Occidentale ainsi que sur la Catovie Subaorientale. Un merci affectueux aux Marrazzo, à Papy, Mamie, à Meumeu, Théo, Agnès, aux Phan, et à mon papa que j'aime. Une pensée aussi à Gautier, Maman et Papy.

Un grand merci à mes amis d'enfance (ou presque) rassemblés dans une confrérie du Lot qui aura entendu parler de Bolzano un peu plus que de raison. Charles, Pec, Anton, merci d'avoir de temps en temps ouvert les écoutilles à quelques lamentations darballesques ou autre épopée focale. J'ai aussi un songe remerciant envers Tel, Maké et Bibi : Bent vous aime et pense à vous.

Mon travail de thèse a été riche, porté par de la curiosité, des échanges, des idées en pagaille comme dirait Mamie. Il a été large, diversifié et passionnant. Tout ceci, je le dois à Rossana qui a été bien plus qu'une directrice de thèse formidable. Aimante, enthousiaste et bienveillante, j'ai été animé dans mon travail par le désir de bien faire dans le but de la remercier de son aide, son soutien, son attention quasi maternelle. Merci beaucoup Rossana. J'en profite également pour remercier dans ces mêmes termes affectueux Anouk qui aura été de fait une co-directrice non moins exceptionnelle.

Enfin, qui de mieux pour la fin que la meilleure ? Au vu de ce qui vient d'être dit, une thèse ça a l'air merveilleux. Mais en fait, ça signifie aussi de longues soirées (nuits ?) au laboratoire, des découragements passagers à répétition, des interminables périodes de recherches infructueuses, des déboires intermédiaires et un contre-la-montre final stressant et impossible. Je n'aurais pas pu faire cette thèse sans toi, et pour ce travail comme pour bien d'autres choses, une vie de remerciements ne suffirait pas. Merci de ton amour, de ta tolérance et de ta générosité. Tu m'as épaulé quand Darboux m'esseulait, tu m'as donné confiance quand Darboux me faisait perdre espoir, tu m'as fait rire quand Darboux me rendait triste. Merci pour tout ça et pour tout le reste. Merci, Cécile.

Résumé

Résumé

Gaston Darboux (1842-1917) est un mathématicien français né à Nîmes, dont la seconde partie de carrière est connue pour ses travaux et son enseignement de Géométrie. Avec une méthodologie inspirée des approches biographiques modernes, nous reconstruisons le parcours de la première partie de sa vie pour comprendre le mathématicien et le professeur qu'il devient en 1878. Nous commençons par présenter son parcours atypique d'étudiant qui se termine à l'Ecole Normale. Puis, pour cerner son identité mathématique, nous étudions la théorie des focales, méconnue, ainsi que la théorie des surfaces orthogonales et celle des cyclides où Darboux joue un rôle important.

Nous nous penchons ensuite sur la réception immédiate de ces travaux, mais également dans un second temps sur la naissance d'un journal scientifique intitulé "*Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*", dont Darboux devient le rédacteur en chef dès sa création en 1869. Une analyse particulière est alors consacrée à ce journal, qui montre la force des influences mutuelles entre le rédacteur et son périodique. En suivant les dynamiques de son cheminement intellectuel, notre enquête bascule dès lors sur les mathématiques du théorème des bornes, en Analyse, et de la théorie des solutions singulières des équations différentielles. Pour finir, nous examinons la réception de ces nouveaux travaux, ce qui nous offre les clefs d'interprétation de son parcours et des facettes de ses multiples identités lorsque sa trajectoire institutionnelle le fait se tourner à nouveau vers la Géométrie en 1878.

Mots-clefs

Gaston Darboux, géométrie, surfaces cyclides, surfaces orthogonales, focales, Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, solutions singulières des équations différentielles, théorème des bornes, histoire des mathématiques au XIX$^{\text{ème}}$ siècle.

Gaston Darboux : birth of a mathematician, genesis of a professor, chronicles of an editor

Abstract

Gaston Darboux (1842-1917) was a French mathematician born in Nîmes and the later part of his career is well known for his mathematical and educational contributions in the field of Geometry. Using a methodology close to the modern biographical approaches, we reconstruct the earlier part of his life in order to understand the mathematician and educator he later became in 1878. We start with a presentation of the unconventional academic path he followed as a student, ending in the Ecole Normale. To define his mathematical identity, we study the largely unknown theory of focals, as well as the theory of orthogonal and cyclide surfaces, where Darboux plays a major role.

We subsequently focus on the immediate reception of these works as well as on the birth of a scientific journal entitled "*Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*", for which Darboux became chief editor as of the journal's creation in 1869. A focused analysis of this periodical is then carried out, underlining the significance of the mutual influences between the journal and its editor. By following the dynamics in the development of his mathematical ideas, our enquiry turns next to the mathematics of the extreme value theorem in analysis, and to the theory of singular solutions of differential equations. Lastly, we consider the reception of these new works, which provides us with the key to interpreting the development of his mathematics and the different aspects of his multiple identities at the time when his institutional engagements lead him back once again, in 1878, to the study of Geometry.

Keywords

Gaston Darboux, geometry, cyclides, orthogonal surfaces, focals, Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, singular solutions of differential equations, extreme value theorem, history of mathematics in the nineteenth century.

Les mathématiques, cela n'est que trop certain, emploient un langage et des formules dont l'étude exige un apprentissage long et difficile. Ces obstacles qui se dressent au seuil même des études mathématiques isolent quelquefois et chagrinent les géomètres. Mais je dois dire que nous avons des compensations. Quelques-uns nous admirent de confiance, et naguère un de nos meilleurs écrivains parlait avec une éloquence, une netteté et une propriété dans les termes, qui ont excité mon admiration, de ce monde du nombre et de la forme dans lequel nous sommes seuls, dit-il, à pénétrer. Oui, les géomètres se meuvent avec joie dans cet univers des formes et des nombres et, ce qu'il y a de mieux, c'est qu'ils y pénètrent sans effort. Il ne leur faut pour cela ni appareil coûteux, ni expérience longtemps poursuivie. L'observation seule de chaque jour, la réflexion persévérante et tenace et, si l'esprit est faible, un crayon et une feuille de papier y suffisent pleinement. Je compterais toujours, pour ma part, au nombre des heures les plus douces, les plus heureuses de ma vie, celles où j'ai pu saisir dans l'espace et étudier sans trêve quelques-uns de ces êtres géométriques qui flottent en quelque sorte autour de nous.

Gaston Darboux (57 ans),
28 Juin 1900.

Table des matières

Table des figures

Première partie

Visées, méthodes et références : quelques propos introductifs

> *Il n'existe aucune méthode de l'histoire parce que l'histoire n'a aucune exigence ; du moment qu'on raconte des choses vraies, elle est satisfaite.*
>
> Paul Veyne

Gaston Darboux, spécialiste de la géométrie infinitésimale, titulaire de la chaire de Géométrie Supérieure de la Sorbonne. Voilà le portrait qui ressort d'un premier survol des travaux et des fonctions de ce mathématicien né à Nîmes en 1842. Voilà la figure qui peut apparaître à la lecture des nécrologies écrites parfois à la hâte durant une période où la Grande Guerre fait rage, si l'on ne se réfère pas aux quelques travaux historiques à son égard. Rétrospectivement, la vie et l'œuvre de Darboux sont en effet dominées par les trente-sept années de son enseignement d'une Géométrie dite supérieure, mais sur laquelle il exerce alors une influence telle, que l'historienne Hélène Gispert la renommera *Géométrie infinitésimale française à la Darboux*[1]. Mais avant 1878 et sa prise en charge des cours d'une chaire qui appartenait alors encore à Michel Chasles, qui était Gaston Darboux ? Qu'est-ce qui a forgé le professeur et le géomètre qu'il devient en 1878 ? Si "*la vie est une intégrale*", comme aime à le dire mon grand-père, quels sont à partir de 1842 les événements infinitésimaux dont la somme nous fera comprendre ce dont se compose le Gaston Darboux de 1878 ?

En recherchant la réponse à ces questions, nous ne voulons pas faire de notre travail une biographie scientifique au sens strict pour une raison simple : le non respect de l'unité de temps correspondant à la vie, entière, du scientifique étudié. Pourtant, il nous est impossible de nous départir des approches biographiques modernes, telles qu'on les retrouve exposées dans [**Nabonnand Rollet 2012**], qui devient ainsi l'une de nos références principales. Philippe Nabonnand et Laurent Rollet nous expliquent ainsi que : "*la difficulté et l'intérêt d'une biographie historique seront de reconstruire les identités d'un acteur en suivant ses trajectoires dans différents champs (disciplinaires, professionnels, académiques, politiques, ...) qui apparaissent pertinents*" ([**Nabonnand Rollet 2012**, 13]). Par ailleurs, ils soulignent avec Giovanni Levi que la biographie peut se faire, à partir des contextes, pour expliquer des trajectoires individuelles.

Expliquer les trajectoires de Gaston Darboux dans les différents champs où il intervient et reconstruire les différentes facettes de ses identités depuis son enfance jusqu'à sa prise de pouvoir sur la Géométrie française : tels sont les objectifs amibitieux que nous avons choisis pour notre travail de doctorat. Nous ne décrirons donc pas *qui est* le maître géomètre des années 1880 en recherchant à en avoir une vue d'ensemble, mais plutôt *qui il était* et donc ce qui explique qu'il le soit ensuite devenu. La présence des deux termes de *genèse* et de *naissance* dans notre titre reflète ainsi déjà notre volonté de retourner aux racines pour construire des portraits dynamiques et précisément en comprendre les dynamiques. Nous ne poursuivrons ainsi pas l'établissement d'une image rétrospective statique de Gaston Darboux, mais nous essaierons de le voir évoluer pour ainsi dire sous nos yeux, et de parcourir à ses côtés son cheminement intellectuel.

Pour décrire l'identité scientifique de Darboux, nous serons particulièrement attentifs à la nature des problèmes qu'il décide d'aborder, à sa manière de les approcher et aux méthodes mathématiques qu'il y emploie. Il sera par ailleurs crucial, pour rendre intelligible son cheminement intellectuel, de superposer son identité scientifique à son parcours

1. Voir [**Gispert 1991**, 17].

institutionnel, et spécifiquement à son rôle de rédacteur d'un journal de recension : le "*Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*". Cette facette de son identité sociale s'avérera centrale pour décrypter les méandres de son parcours.

Se pose alors naturellement la question des approches biographiques à adopter pour décrypter l'identité scientifique et le cheminement intellectuel de notre héros. Nous avons ainsi adapté à notre étude différentes approches biographiques, dont nous avons évalué les points forts et les points faibles relativement à l'enquête que nous envisagions. Pour commencer, la diversité des identités ainsi que la diversité des sources, rappelées par Philippe Nabonnand et Laurent Rollet, auront une large place et une importance considérable dans nos enquêtes :

> Les biographies, et c'est un de leur intérêt, permettent d'enrichir nos connaissances des pratiques scientifiques et sont, par la nature de leur objet, susceptibles d'approches méthodologiquement diverses. Un certain nombre d'identités (sociale, disciplinaire, professionnelle) des scientifiques et leur imbrication sont ainsi reconstruites à partir des travaux biographiques qui fonctionnent comme autant d'études de cas. Il paraît difficile d'envisager une biographie intellectuelle sans envisager sa formation, ses investissements dans des institutions, ou ses relations avec les éditeurs. Le biographe convoque de nouvelles sources qui vont à la fois enrichir la reconstitution du champ scientifique dans lequel celui-ci intervient [...] et ajouter des facettes à la reconstruction du personnage scientifique.
>
> [**Nabonnand Rollet 2012**, 18]

Il s'agit ainsi de reconstruire et de comprendre les liens et leur dynamique des identités de Gaston Darboux en tant que mathématicien, en tant que professeur, et en tant que rédacteur, mais aussi par exemple en tant qu'étudiant ou encore en tant que normalien. Nous mettrons ainsi l'accent sur sa formation, institutionnelle certes, en tant qu'élève puis qu'étudiant, mais également sur sa propre formation à la recherche par la recherche. Caractériser le mathématicien naissant à travers l'étudiant nous permettra ensuite de bien cerner les dynamiques qui viendront modifier ses intérêts et ses mathématiques. Mais par ailleurs, les interactions entre son identité sociale de rédacteur et son identité scientifique seront extrêmement riches, complexes, et constitueront l'une des clefs de voûte de la reconstitution du parcours de Darboux.

Pour appréhender le difficile et intéressant cas d'Evariste Galois, Caroline Ehrhardt a proposé d'exploiter au mieux les approches biographiques pour des analyses dont la motivation première n'est pas la biographie mais une enquête connexe. Pour étudier la réception de l'œuvre de Galois, l'historienne a ainsi mis en place une approche qui nous a guidés dans notre propre étude :

> Doit-on [...] renoncer à s'intéresser à Galois en tant qu'individu ? Nous voudrions défendre ici l'idée qu'une telle entreprise, pour peu qu'elle soit nourrie des avancées méthodologiques récentes en la matière, présente un double intérêt. D'une part, aborder la réception du travail de Galois par une approche biographique a une véritable portée heuristique en histoire des mathématiques, parce qu'elle permet de porter un autre regard sur Galois et les mathématiques de son temps, et en particulier de reconstituer le sens que pouvaient avoir ses travaux pour ses contemporains.

> [...] Au cours de l'étude que nous avons consacrée à la réception et à la postérité de Galois et de ses travaux, notre objectif n'était pas d'écrire la vie de Galois. La biographie ne constitua[i]t pas l'objet de l'enquête [...] En revanche, l'outil biographique apparaissait comme un moyen tout aussi adapté qu'indispensable pour répondre à [notre] interrogation.
>
> [**Ehrhardt 2012**, 99]

Les propos et les méthodes de Caroline Ehrhardt nous ont beaucoup inspirés. Tout d'abord, ils nous ont libérés quant à la possible utilisation des approches biographiques sans pour autant devoir rentrer dans le cadre vaste, codifié et apeurant de la biographie scientifique. Ensuite, les méthodes de l'historienne nous ont fourni de précieuses clefs pour retrouver la réception des travaux de notre héros. Il ne s'agit bien sûr pas de faire de Darboux un héros romantique, mais au contraire d'expliquer ses idées en les contextualisant ce qui leur rendra leur sens et leur portée originels. Mais surtout, les propos de Caroline Ehrhardt nous ont pleinement fait réaliser que, pour envisager une étude telle que la nôtre où l'enjeu réside dans la compréhension des dynamiques du personnage, c'est la réception immédiate de ses travaux qui devait occuper une position centrale. Cette réception reconstitue en effet l'image fidèle du scientifique dans son milieu, débarrassée des *a priori* que l'historien possède lui-même sur la réception et l'impact de ces mêmes travaux à long terme. Elle joue un rôle prépondérant dans les choix du scientifique, choix de carrière, choix scientifiques, stratégies de publication, mais aussi dans ses relations sociales. Bref, c'est un puissant moteur pour retracer les identités du héros, les identités qu'il se donne lui-même et celles que lui attribuent ses contemporains. L'étude des réceptions immédiates des recherches de Gaston Darboux accompagnera ainsi nos analyses pour nous permettre de rendre intelligible son cheminement intellectuel. Ceci donnera par exemple des pistes pour replacer et comprendre ses quelques travaux d'analyse auxquels l'historiographie a récemment fait la part belle [2]. Mais de manière générale, cet outil nous sera essentiel pour tous les domaines de sa production. Pour parvenir à mener à bien cette étude, nous utiliserons de nombreuses correspondances dont certaines seront directes, où Darboux sera acteur, mais d'autres transversales où il n'interviendra qu'à travers les mentions faites envers lui par les acteurs de l'échange.

La description de l'identité mathématique évolutive de Gaston Darboux se heurte par ailleurs au problème de la sélection de ses travaux et à la manière de les appréhender. Comment en effet percevoir ce qui le singularise ou au contraire en quoi son travail s'insère dans une continuité, du point de vue des sujets, des méthodes, des rapprochements entre domaines ? En tentant d'analyser le cas de la biographie d'Emile Borel, Hélène Gispert a apporté à cette problématique une solution via une *stratégie par morceaux choisis* :

> plutôt que de chercher à tout dire, dégager quelques temps forts de la vie [du héros] et chercher non à raconter mais à analyser par ces coups de projecteur sur ces temps en quoi [le scientifique] est témoin ou révélateur de l'évolution des idées et des milieux scientifiques [...]
>
> Ne voulant pas sacrifier ce qui est une des richesses à exploiter dans la biographie de Borel qui a vécu et construit sa vie dans tant d'engagements mathématiques, intellectuels, politiques simultanés, la stratégie d'écriture par morceaux choisis m'apparaît on ne peut plus opportune.

2. Votre notre partie [Chap.7,1].

> Le parti pris de rompre avec la contrainte du récit linéaire en structurant la biographie autour de temps forts pourrait en effet permettre de négocier la multiplicité des dimensions [...]
>
> [**Gispert 2012**, 175]

Pour décrire, comprendre et voir évoluer l'identité mathématique de Darboux, nous transposerons cette proposition de travail de l'historienne en adoptant de manière analogue une stratégie par morceaux choisis mathématiques, et non chronologiques. Une des difficultés principales résidera dès lors dans les choix des ouvrages, des théories, des théorèmes, des objets ou des notions à analyser pour faire ressortir pertinemment le portrait des mathématiques du nîmois au sein des différentes unités de temps et de science. Dans un premier temps, nous avons toujours pris en compte l'ensemble de ses travaux sur la période d'étude considérée. Ensuite nous avons retracé d'une part les influences sur ces travaux, les sources d'inspiration, puis les influences de ces travaux, leur impact. Les correspondances ainsi que la littérature mathématique nous y ont servi de guide. Les sélections opérées devront alors conserver la représentativité des centres d'intérêt de Darboux (à quelle recherche s'adonne-t-il ?), de ses approches (comment l'aborde-t-il, d'un point de vue non technique ?) et de ses méthodes (comment s'y prend-il, d'un point de vue technique ?). Nous ne perdrons pas de vue notre volonté globale de pister les réceptions immédiates de ses travaux pour bien comprendre son parcours. Il s'agira alors de s'assurer de disposer du matériel - publications, rapports, lettres ou autres archives - permettant de mener à bien l'étude de ces réceptions.

Pour certaines parties, notre travail comportera quelques fragments d'une biographie de Gaston Darboux. Un retour à la biographie nous permettra en effet d'éclairer certains de ses choix, certains aspects de son parcours. Dans d'autres parties, notre investigation sera tournée vers une biographie sélective des travaux scientifiques de Darboux, représentative au sens des motivations que nous venons de détailler. Le but ne sera pas d'inscrire ceci dans une biographie du scientifique mais d'offrir les outils pour comprendre ses identités, et les clefs d'interprétation correctes de son cheminement. Il reste alors une dernière barrière à outrepasser, et non des moindres. Reconstruire l'identité mathématique de Gaston Darboux, dans la singularité de sa création et de son apport personnalisé comme l'explique [**Paty 2013**], doit permettre de comprendre sa rationalité et les processus qui président à sa création de connaissances scientifiques. Mais comment évaluer correctement ses travaux, leur différence si elle existe, leur originalité ou l'absence de celle-ci, comment donner une interprétation à ses mathématiques si celles-ci constituent seules l'objet de notre analyse ? Ceci reviendrait à vouloir résoudre les jeux d'échelles de Karen Parshall entre l'arbre et la forêt en ne prenant en compte que l'arbre [3]. Cette problématique est venue s'ajouter à un important problème technique de notre travail. En effet, une grande partie des travaux de Darboux comportent des mathématiques, des notions, des objets, des dénominations, qui sont soit tombés en désuétude, soit ont tellement évolué depuis qu'ils nous sont apparus comme inconnus. C'est ainsi le cas de bon nombre d'objets géométriques comme les surfaces cyclides ou plus généralement les surfaces anallagmatiques, les développables focales, et quelques outils de la théorie des équations différentielles. Il est d'ailleurs remarquable que les notions et théories d'analyse n'aient pas subi le même sort, ce qui peut expliquer

3. Voir [**Parshall 1999**] et la discussion menée par [**Gispert 2012**, 171-172].

que les études historiques, relatives à Darboux et à cette période, aient jusqu'alors privilégié ce domaine. Pour pallier cette difficulté, il nous a fallu reprendre en amont ces notions, ces théories, ces théorèmes, au fil de leur évolution jusqu'à Darboux, pour parvenir à les comprendre comme lui. Ce qui était auparavant un obstacle se muait alors, après cette phase de découverte ou de redécouverte scientifique, en un avantage considérable : nous avions acquis la capacité d'appréhender les mathématiques en nous mettant à la place de Darboux, ce qui nous permettait du même coup d'en cerner très précisément les apports.

Cette méthode de travail nous semble une méthodologie d'écriture bien adaptée. Nous nous proposons ainsi d'inscrire l'étude ciblée des travaux mathématiques de Darboux au cœur des biographies des objets, des notions et des théories qui apparaissent fondamentaux dans sa recherche. Dans le même ordre d'idées, Lorraine Daston avait étudié la pertinence de l'écriture des biographies des objets scientifiques ([**Daston 2000**]). Il s'agira pour nous de replacer ce type de biographie dans notre approche biographique globale dont elles constitueront de véritables études de cas. Pour ne pas succomber aux "*dangers de la synthèse*" [4] qui guettent l'historien à la recherche d'une vision de l'évolution globale des idées, notre méthodologie présente certes l'inconvénient de la longueur. Plutôt que d'étudier d'emblée tel mémoire, nous nous mouvrons au fil de la théorie qu'il aborde, voire d'une notion ou d'un objet qu'il fait intervenir. Mais elle présente par ailleurs selon nous un double avantage : tout d'abord, elle offre au lecteur une formation scientifique accélérée spécifique aux mathématiques qu'il s'agit d'étudier chez Darboux. Si ce bénéfice pédagogique n'était pas un objectif en soi, il paraît en fait indispensable pour faire percevoir avec justesse son identité scientifique. Mais surtout, notre méthodologie permet de réaliser progressivement l'effort de compréhension intellectuelle qui est nécessaire à l'empathie que nous rechercherons pour comprendre le cheminement intellectuel de Gaston Darboux. Ceci nécessitera de ne pas cantonner notre analyse à la littérature mathématique française, mais au contraire d'y intégrer la littérature européenne et donc des travaux des mathématiciens allemands, anglais ou italiens. La largeur transnationale de notre corpus est, en outre, imposée dans une autre mesure par notre méthodologie d'étude de la réception immédiate des travaux de Darboux, laquelle nécessite en effet d'embrasser un large spectre de la production mathématique.

Notre méthodologie s'apparente ainsi à une quête de "*l'empathie pour l'œuvre scientifique de l'auteur*", prônée par l'historien Robert Locqueneux comme une véritable méthode en histoire des sciences, et qui nous guidera dans la sélection et la construction des histoires de nos objets d'études [5]. L'empathie comme méthode nous permettra de faire ressortir la personnalité scientifique du héros, d'en traduire la singularité, et de nous permettre de nous rapprocher au maximum d'une compréhension de la manière dont il pense. L'accès à cette empathie sera le fruit de notre approche par *micro-biographies mathématiques choisies*. Alexandre Koyré envisageait ainsi le travail général de l'historien des sciences :

> c'est l'historien qui, en re-faisant et en re-suivant l'évolution de la science, saisit les théories du passé à leur naissance et vit, avec elles, l'élan créateur de la pensée.
>
> [**Koyré 1961**, 258]

4. Voir [**Locqueneux 2013**, 197-198].
5. Voir [**Locqueneux 2013**]. Plus généralement, voir [**Rey 2013a**] pour les discussions sur les méthodes générales en histoire des sciences dont nous nous sommes inspirés.

Koyré s'interrogeait alors sur la valeur de la *vérité* de la reconstitution du passé. Mais en transposant son approche à notre travail, on peut y retrouver notre proposition méthodologique. Pour saisir *l'élan créateur de la pensée* de notre héros, nous *saisirons les théories du passé à leur naissance* pour *vivre avec elles* jusqu'à pouvoir correctement y inscrire et y comprendre les pensées de Darboux qu'elles rencontreront. Ainsi, si mon papy a raison et que la vie de Gaston Darboux est véritablement une intégrale[6], c'est alors en en interprétant les aspects mathématiques comme une intégrale double que nous pisterons les facettes de son identité scientifique.

Il ressortira de notre travail la très forte diversité des recherches mathématiques que Gaston Darboux entreprendra sur la période 1864-1878. Les origines des déclenchements de ces recherches seront d'ailleurs aussi très diverses, tout comme la réception des travaux qu'elles engendreront et ainsi l'impact sur le parcours de leur auteur. Pourtant la personnalité scientifique de Darboux possède par ailleurs une unité remarquable dans son approche à la mathématique et dans les méthodes qu'il y emploie.

Darboux est un géomètre de formation et de cœur. Il n'attendra pas la fin de ses études pour se distinguer dans ce domaine qui l'attire naturellement. Mais très tôt, sa recherche est caractérisée par la mixité des méthodes qu'il emploie et une volonté de chercher de nouveaux points de vue à des problèmes parfois déjà résolus pour faire ressortir des rapprochements entre des domaines différents. L'unité de son approche à la Science résidera dans son regard critique : il s'efforcera ainsi toujours de remettre en question la validité des propositions, les énoncés pourtant considérés comme acquis. Cette capacité à douter sans cesse sera son moteur pour chercher à expliquer différemment, avec de nouveaux points de vue. C'est là la racine des nombreux rapprochements entre des problèmes distincts qu'il parviendra à effectuer. En analyse, ce doute se traduira surtout par la quête d'une rigueur avant-gardiste.

Le parcours de Gaston Darboux est en certains points marqué par le favoritisme dont il bénéficie de la part d'une catégorie des élites mathématiques françaises de l'époque. Aimé de ses maîtres et symbole de l'éclat nouveau de l'Ecole Normale au début des années 1860 (Chapitre 1), Darboux obtient certains privilèges de la part des académiciens dont il reçoit la protection. Mais si son travail de thèse lui octroie le soutien du milieu mathématique national, c'est surtout la diversité de ses travaux qui lui vaut rapidement une certaine renommée européenne. Le Gaston Darboux de la fin des années 1860 est en effet déjà pour ses contemporains le géomètre pluridisciplinaire qui participe au développement de la théorie géométrique des focales (Chapitre 2), qui fait naître celle des surfaces cyclides (Chapitre 3), mais aussi celui qui travaille sur la géométrie des fonctions elliptiques ou encore la géométrie des systèmes de sphères en utilisant l'algèbre de la théorie des invariants. Tous ces travaux reçoivent alors une réception immédiate excellente, en France et à l'étranger (Chapitre 4).

La méthodologie d'ensemble que nous avons adoptée dans notre travail trouve donc déjà son application avec l'étude de la théorie projective des focales du Chapitre 2, et celle

6. Ceci ne serait qu'un juste retour des choses car, nous le verrons, Darboux s'est attaché à bien construire la notion même d'intégrale.

de la théorie des surfaces orthogonales et des cyclides du Chapitre 3. Par ailleurs, l'emploi de cette méthodologie s'y révèle fécond pour aborder plusieurs problématiques qui ne sont certes pas au centre de notre recherche mais auxquelles nous nous sommes heurtés, parfois avec insistance. C'est ainsi le cas des problématiques liées au vocabulaire scientifique, dont nous pouvons mesurer l'importance mais aussi les significations. Cette méthodologie s'est aussi avérée propice à différentes enquêtes intéressantes relatives à la diffusion du savoir. A plusieurs reprises, nous avons ainsi repéré des spécificités ou des anomalies dans la transmission des connaissances sur des échelles de temps restreintes. Nous proposons alors certains outils, certaines grilles de lecture, pour mener à bien ponctuellement l'étude de ces problématiques qui sont venues pimenter notre travail.

L'une des conséquences les plus importantes des très bonnes réceptions des premiers travaux de Gaston Darboux, en terme d'incidence sur son parcours, est la création fin 1869 du "*Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*". Michel Chasles, son ancien directeur de thèse, crée en effet ce journal et y place Darboux à la tête de la rédaction (Chapitre 5).

Dans ce Chapitre 5, nous avons retranscrit notre méthodologie d'ensemble à l'Histoire des Institutions pour analyser la création et le lancement du Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques. Revenir à la genèse du Bulletin nous y a permis de comprendre les motivations et les rôles des différents acteurs, d'en suivre les dynamiques, mais également de clarifier la place occupée par l'Ecole Pratique des Hautes Etudes dans cette histoire.

Le nouveau Bulletin des Sciences, journal de recension établi pour accélérer la diffusion des mathématiques dans une France parfois scientifiquement isolée, vient bouleverser toutes les identités de Gaston Darboux. Il se forge en effet une identité sociale de rédacteur qui accroît sa stature internationale de scientifique et le place au cœur du grand réseau des savants européens. Mais son activité de rédacteur du Bulletin influe aussi sur son identité mathématique de par les échanges qu'elle suscite, et l'immersion dans les différents champs mathématiques que son travail de recension provoque (Chapitre 6). Darboux élargit ses centres d'intérêt scientifiques, et réoriente ses recherches vers de nouvelles thématiques : la théorie des équations différentielles d'une part, mais aussi la théorie des fonctions et de l'intégration où il s'inspire directement des travaux des mathématiciens allemands recensés pour son journal.

Notre travail sur le Bulletin des Sciences du Chapitre 6 a suggéré l'hétérogénéité des influences qui pouvaient exister entre un journal scientifique et ses rédacteurs. Si notre enquête ne porte que sur le rédacteur en chef Gaston Darboux, de telles analyses pourraient s'avérer enrichissantes pour les autres collaborateurs du journal, et plus largement pour d'autres périodiques scientifiques. Nous avons tâché d'envisager quelques pistes pour traiter ces problématiques passionnantes au sein de notre investigation.

Durant les années 1870, le cheminement intellectuel de Gaston Darboux est donc très riche et mouvementé. La couleur de sa production mathématique y reflète la variété changeante de ses intérêts scientifiques. Ses travaux de cette époque sur les fondements de l'analyse et sur diverses questions liées aux équations différentielles continuent cependant de caractériser le même portrait scientifique au-delà de la nature de sa recherche : esprit d'un éternel critique, mixité des méthodes et diversification des approches pour favoriser des rapprochements entre les domaines. En reprenant notre méthodologie, nous aborderons ainsi dans le chapitre 7 le théorème des bornes atteintes ainsi que la théorie des solutions singulières des équations différentielles. Nous rejoindrons dans ce chapitre les quelques points - travaux ou échanges - qui ont déjà fait l'objet d'enquêtes historiques [7].

Dans ces études, nous retrouvons encore certaines problématiques ayant trait au vocabulaire scientifique, ainsi qu'à la diffusion erratique des savoirs mathématiques. Notre méthode de travail nous apparaît ainsi comme jouant le rôle de révélateur de ce type d'enquête. Nous pouvons alors reprendre en les réévaluant les grilles de lecture proposées pour les cas d'étude rencontrés au sein des chapitres précédents.

Contrairement à la décennie précédente (1860-70), la réception immédiate des travaux de Gaston Darboux est loin d'être alors unanimement bonne. Sa production semble ainsi toujours arriver soit trop tôt soit trop tard pour que ses contemporains ne l'apprécient et ne puissent l'exploiter à court terme (section [Chap.7,3]). Ce contexte donne de la force à sa trajectoire institutionnelle qui change en 1878 lorsque Darboux s'installe à la Sorbonne sur le trône de l'enseignement de la Géométrie. Ceci entraîne en effet un second revirement dans le cheminement intellectuel de notre héros qui recentre fortement ses intérêts sur son premier amour, la Géométrie. Sa personnalité scientifique et son parcours complexe, avec ses réussites, ses découvertes, mais aussi ses déceptions et ses déboires, font alors de Gaston Darboux le professeur, le géomètre et le rédacteur que nous cherchions à découvrir.

Certaines annexes nous permettront enfin de compléter et d'illustrer en certains points le cœur de notre travail de thèse. Les premières annexes (1, 2, 3, 4 et 5) apporteront des suppléments d'information sous forme graphique. L'annexe 6 nous éclairera sur l'enseignement de Gaston Darboux. L'annexe 7, relatant avec une perspective nouvelle un épisode marquant de la diffusion des géométries non-euclidiennes en France, précisera l'une des influences du Bulletin des Sciences sur le nîmois. Elle soulignera également son attitude diplomatique envers son maître Joseph Bertrand. Pour finir, l'annexe 8 apportera des repères historiques qui faciliteront la lecture de notre travail. Mais elle dévoilera aussi la perception qu'a Darboux des événements historiques du début des années 1870 et son attitude internationaliste.

---

7. Voir notamment [**Gispert 1983**], [**Gispert 1987**] et [**Henry Nabonnand 2016**]. Nous présenterons plus de références au cours de notre travail.

Deuxième partie

L'éveil d'un naturel géomètre (1864-1873)

Les doctrines de la pure Géométrie offrent souvent, et dans une foule de questions, cette voie simple et naturelle qui, pénétrant jusqu'à l'origine des vérités, met à nu la chaîne mystérieuse qui les unit entre elles, et les fait connaître individuellement de la manière la plus lumineuse et la plus complète.

Michel Chasles

Les travaux de géométrie effectués par Darboux entre 1864 et 1873 sont presque exclusivement des prolongements et des extensions des recherches effectuées durant son doctorat (1864-1866). Son manuscrit de thèse proprement dit, [**Darboux 1866**], est - comme son nom le souligne d'ailleurs [8] - entièrement dédié à la théorie des surfaces orthogonales. Darboux y traite d'une part des problèmes généraux liés à cette théorie comme l'extension des célèbres théorèmes de Dupin ou de Lamé, souvent considérés comme les points de départ de cette théorie, ou encore la formation générale de l'équation aux dérivées partielles dont dépend la formation de systèmes de surfaces orthogonales. Mais d'autre part Darboux effectue une étude en profondeur d'un système de surfaces orthogonales nouveau composé de surfaces du quatrième ordre qu'il proposera de nommer les *cyclides*. Nous verrons dans le troisième chapitre de cette partie (Chap.3) les influences de Lamé sur ce travail, les origines de la découverte de ce nouveau système triple orthogonal, ainsi que le formidable intérêt qu'il offrira toute sa vie à Darboux en tant qu'objet privilégié pour ses recherches et pour ses enseignements de géométrie. En effet, comme l'affirmera plus tard son élève Emile Picard, la thèse de Darboux "*traite de questions dont il s'occupera toute sa vie*" ([**Picard 1917**, XII]).

Le prolongement des études liées à son travail de thèse prend une forme bien définitive avec la publication du mémoire "*sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, et sur la théorie des imaginaires*" ([**Darboux 1873a**]). Cet "*ouvrage d'une grande richesse, ce beau livre plein d'idées et de faits*" - toujours pour ne citer que Picard - contient, outre les chapitres consacrés aux surfaces cyclides et à leurs analogues planes, une première partie dédiée à la notion de foyers et de focales des courbes et des surfaces. Une analyse des communications effectuées par Darboux durant ses années d'études à l'Ecole Normale montre par ailleurs l'intérêt que le géomètre gardois porte à la bonne définition et à l'utilisation de cette notion. Tout comme les surfaces cyclides, les surfaces bien particulières que Darboux relie à cette notion constituent une porte ouverte vers des recherches géométriques variées, mêlant les géométries imaginaire, métrique, infinitésimale et projective. Source féconde de recherches pour Darboux, l'étude de cette notion constitue un outil de choix pour appréhender et comprendre de nombreux travaux du jeune géomètre durant la période 1864-1873 ; elle sera ainsi l'objet de notre deuxième chapitre (Chap.2). Cela nous permettra par ailleurs de bénéficier d'une riche entrée en matière en nous donnant les moyens d'aborder les outils et les méthodes nécessaires à l'analyse du travail de thèse de Darboux centré sur les surfaces orthogonales. Enfin, l'étude de la notion de foyer et de focale offre un attrait d'autant plus grand qu'elle manque encore dans son ensemble, selon nous, d'une historiographie appropriée. C'est, outre que cela nous donne les armes pour

8. La thèse (principale) de Darboux est intitulée : "*Sur les surfaces orthogonales*".

détacher les influences et les apports de Darboux, la seconde raison pour laquelle nous donnerons à ce deuxième chapitre, centré sur cette étude, une forme développée.

Cette partie consacrée à *l'éveil du géomètre* Gaston Darboux nous permet ainsi d'exploiter largement la méthodologie que nous nous sommes proposés d'adopter dans notre travail : reconstruire l'identité scientifique et le cheminement intellectuel de Darboux en suivant les trajectoires des objets et des notions qu'il aura contribué à faire naître ou à développer, ceci dans le but de se rapprocher d'une connaissance meilleure de sa singularité créative et de ses centres d'intérêt profonds. Le deuxième chapitre (2) dressera en ce sens le portrait de la théorie projective méconnue des focales, où Darboux n'apparaît certes qu'en "fin de parcours". Cependant, ses apports et ensuite son usage des outils mathématiques reliés à cette théorie sont significatifs et pertinents pour appréhender la différence de ses travaux. Le troisième chapitre suivra le fil de la théorie des surfaces cyclides de Darboux (3), dans sa genèse et son développement, et nous mènera avec leur auteur aux théories intimement connectées liées aux surfaces orthogonales qu'il parcourra amplement pour ses études doctorales. Les sujets que nous étudions doivent faire ressortir une idée principale : à l'aube de sa longue carrière mathématique, Gaston Darboux est avant tout un *géomètre*. Dans "*la valeur de la Science*", Poincaré distingue analystes et géomètres par les méthodes employées pour résoudre un problème ([**Poincaré 1905**]). Nous l'entendons ici dans un sens différent, qui centre l'attention sur la nature du problème et non sur celle de la méthode. Les méthodes de Darboux sont en effet très diverses, certaines de ses approches tout à fait transversales, mais la Géométrie reste son centre d'intérêt premier et ainsi pourrait-on dire naturel. Elie Cartan soulignera ainsi la "*prédilection pour la Géométrie*" de Darboux, prédilection "*révélée de bonne heure*" pour un domaine "*qui l'attirait naturellement*" ([**Darboux 1933**, 13]). Pourtant, avec l'élargissement du cadre temporel de notre étude, on s'aperçoit qu'à partir de la fin de l'année 1869 le géomètre semble véritablement devenir un mathématicien pluridisciplinaire. De premières pistes nous permettront de souligner cela, avant que les prochains chapitres ne viennent asseoir plus franchement cette impression et expliquer par le parcours personnel, scientifique et institutionnel de notre héros la diversification de ses mathématiques.

L'inscription des premiers travaux de Darboux et l'appréhension de ses divers parcours nécessitent de replacer ces travaux dans le contexte qui aura présidé à leur création. Aussi le premier chapitre de cette partie (Chap.1) sera-t-il dédié à une courte biographie de Gaston Darboux. Cette biographie ne sera que partielle puisque, ne devant replacer son parcours qu'en parallèle de ses premiers travaux, elle prendra fin avec ses études à l'Ecole Normale Supérieure. La compréhension du contexte de l'arrivée du jeune élève à Paris en Octobre 1861 pour la poursuite de ses études est en effet particulièrement importante pour pouvoir suivre pertinemment sa trajectoire institutionnelle ultérieure.

CHAPITRE 1

Gaston Darboux à l'Ecole Normale Supérieure : une surprise, un symbole, une réussite

Tout commença par l'heureuse rencontre des enfants de deux familles de Nîmes, dans le Gard, durant la première moitié du XIXème siècle : la famille Darboux, et la famille Gourdoux. Par trois fois, durant la décennie 1840, ces deux familles seront réunies pour célébrer autant de mariages : en 1841, 1843 et 1844[1]. C'est de la première de ces unions que naîtra notre héros : Jean-Gaston Darboux.

Le 17 Septembre 1841, le premier des trois mariages unit Alix Gourdoux et François Darboux. François, fils du boucher Jacques Darboux, est né à Nîmes le *28 Fructidor de l'an 10* dans le calendrier républicain, ce qui correspond au 19 Septembre 1800. Alix quant à elle est presque onze ans plus jeune que son mari : née le 26 Mai 1811, elle est la fille de Marie Donnarel et du cultivateur François Gourdoux. Les jeunes époux s'installent dans une petite maison, enclavée dans la cathédrale Notre-Dame-et-Saint-Castor de Nîmes dont elle constitue l'ancienne chapelle, qui est située au n.2 de la rue Saint-Castor[2]. Ils y installent un magasin de mercerie qu'ils tiennent ensemble. François était "*un homme instruit, aimant la lecture mais ayant, semble-t-il, peu de goût pour le commerce*" ([**Picard 1917**, IV]). Il semble que ce soit plus Alix, "*l'âme de la maison*", qui s'occupe des affaires et des comptes du petit commerce. "*A cette époque, la rue Saint-Castor reliant les deux places*[3] *était le matin et jusqu'à midi, remplie de marchands et d'acheteurs, aussi la mercerie ne chômait guère*" ([**Darboux 1933**, 36]).

Le 8 Février 1843, le frère de François (également prénommé François Darboux) se marie avec Catherine Gourdoux, la sœur d'Alix. Puis le 22 Avril 1844, c'est la sœur de François, Françoise Darboux, qui épouse Joseph Gourdoux. Les premiers enfants issus de ces unions seront les deux fils d'Alix et de François :

- Jean-Gaston, qui naît le 14 Août 1842
- Jean-Louis, né le 15 Mai 1844[4].

1. Voir les registres des mariages de [**Archives Gard**].
2. Cette rue de Nîmes n'a pas changé de nom jusqu'à aujourd'hui.
3. Il s'agit ici très probablement de la *place aux herbes* et de la *place des esclafidous*, situées de part et d'autre de la cathédrale de Nîmes.
4. Voir le registre des naissances de [**Archives Gard**], ou encore les dossiers de la base Léonore [**Archives Léonore**]. Une plaque commémorative est apposée sur la façade de la maison natale de (Jean-)Gaston Darboux, au 2 rue Saint-Castor. Elle y a été déposée en Octobre 1933.

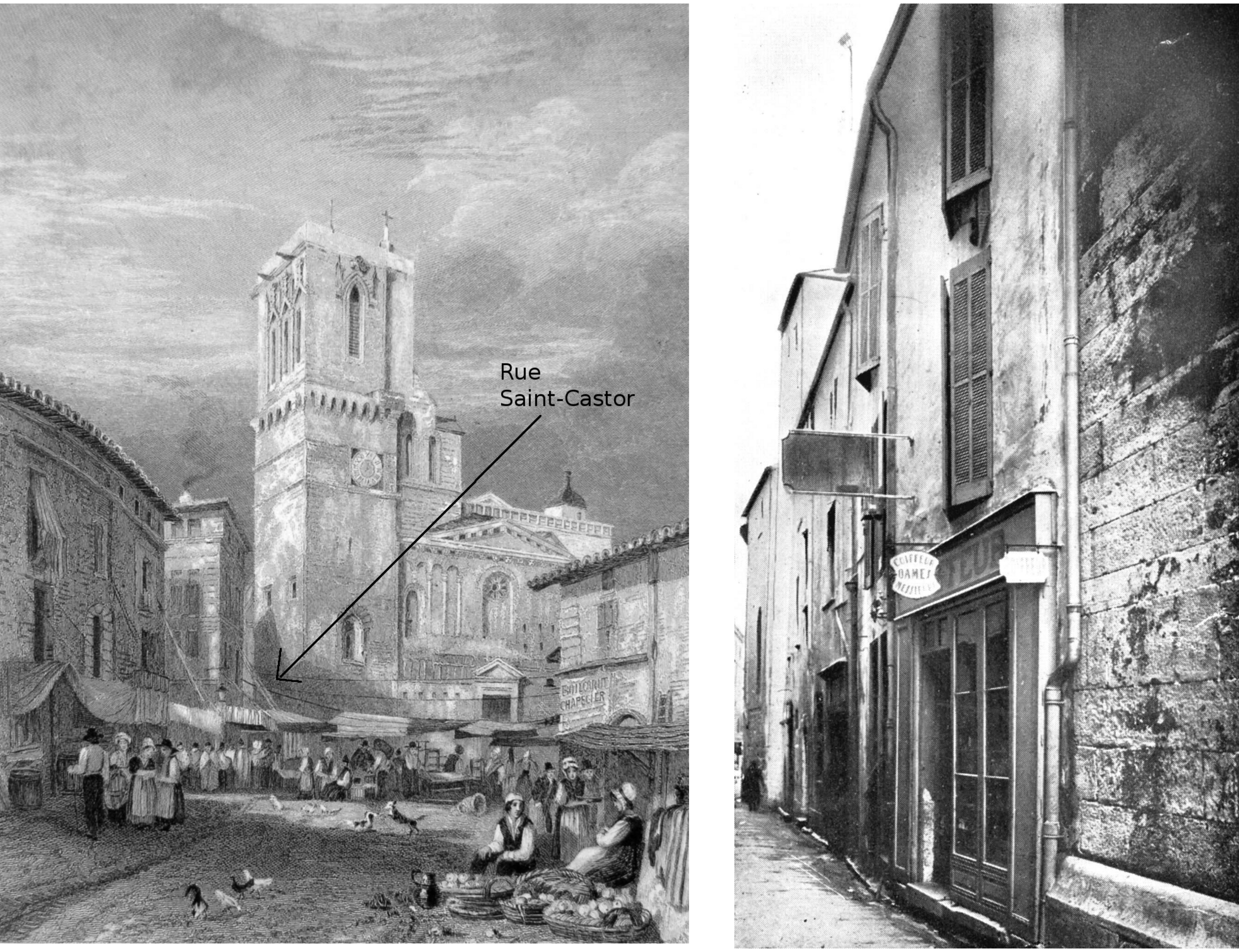


FIGURE 1. A gauche : gravure de la place aux herbes devant la cathédrale de Nîmes (1801). A droite : photographie de la maison natale de Gaston Darboux au 2 rue Saint-Castor à Nîmes, prise autour de 1930 [5]

5. Cette photographie accompagne le livret originel [**Darboux 1933**] qui a été retrouvé par l'historien spécialiste de la ville de Nîmes, Georges Mathon. Nous profitons de cette occasion pour le remercier chaleureusement de l'aide qu'il a bien voulu nous apporter quant aux éléments biographiques de l'enfance nîmoise de Gaston Darboux. La gravure de gauche est d'ailleurs issue de son site sur l'histoire nîmoise, `nemausensis.com`. Quant à la photographie de droite, elle est prise juste avant la pose de la plaque commémorative sur la maison natale de Gaston Darboux. L'ancienne mercerie des Darboux est alors devenue le salon de coiffure *Simone*. Encore aujourd'hui, un salon de coiffure se trouve à cette adresse.

1. Enfance nîmoise

C'est à 1h du matin, le 14 Août 1842, que naît Jean-Gaston Darboux. Il sera presque toujours appelé Gaston, tout comme son petit frère sera appelé Louis et non Jean-Louis. Du fait de l'heure nocturne proche de minuit de sa naissance, Gaston Darboux hésitera lui-même durant toute sa vie sur la date exacte de sa naissance entre le 13 et le 14 Août. On retrouve la trace de cette hésitation sur les nombreux documents officiels le concernant, lesquels mentionnent le plus souvent à tort la date du 13 Août (par exemple [**Archives Léonore**, Dossier J.G. Darboux] [6]).

Alors que Gaston Darboux était encore enfant, Nîmes comptait 6 écoles primaires de garçons qui regroupaient au total un peu plus de 2000 élèves. Quatre d'entre elles étaient des écoles catholiques (alors appelées "*écoles des Frères de la doctrine chrétienne*"), regroupant en moyenne 1700 élèves. Une seule école était une école protestante, et la dernière était une très petite école israélite qui ne comptait généralement guère plus d'une trentaine d'élèves. La famille Darboux est une famille protestante, aussi Gaston et Louis furent inscrits, à partir de la fin des années 1840, dans l'école protestante dite "*Ecoles mutuelles gratuites*" de la rue Pavée de Nîmes. Les quelque 300 élèves y avaient alors pour instituteurs MM. Lavagne, Barral et Floris [7] qui assuraient les cinq niveaux, allant de la classe de 11ème à la classe de 7ème.

Le premier drame de la vie de Gaston et Louis intervient en 1849 lorsque leur père François meurt le 14 Décembre. Les deux enfants n'ont alors que 7 et 5 ans. C'est donc, après 1849, "*maman Darboux, qui avait un cerveau bien organisé et qui était très active, [qui] fit marcher son commerce et veilla sur l'instruction de ses enfants*" ([**Darboux 1933**, 36]). Ayant été friand de littérature, François Darboux "*laissait quelques livres qui firent les délices de l'enfance et de la jeunesse de son fils aîné*" ([**Lebon 1910**]). Mais ce dont Gaston se rappellera en fait toute sa vie, souvenir qui représentera toujours pour lui une source d'angoisse, ce sera l'association entre la mauvaise santé de son père et le fait que celui-ci avait souvent mal au yeux. Il le confiera en 1873 à l'un de ses amis et alors son correspondant épistolaire le plus prolifique, le mathématicien Jules Hoüel [8] :

> J'ai les yeux fatigués, et comme mon père a eu toute sa vie mal aux yeux, j'ai toujours peur que ma vue se gâte et au moindre bobo je suis plongé dans un profond chagrin. J'espère du reste que ce ne sera rien ... [9]

6. On peut également retrouver dans de nombreuses notices biographiques de Gaston Darboux la date de naissance erronée du 13 Août 1842, comme c'est le cas dans [**Lebon 1910**].

7. Voir l'"*Annuaire du Gard*", de l'année 1853, pp.329-332.

8. Nous reviendrons largement sur Hoüel dans la suite de notre travail. Pour en avoir une biographie complète, on consultera [**Henry Nabonnand 2016**] ou encore [**Plantade 2012**].

9. Tout comme Gaston Darboux, le mathématicien norvégien Sophus Lie se plaindra de sa vue fragile. En correspondance avec Darboux depuis 1871, Lie n'écrit plus à Darboux entre Avril et Décembre 1872. Il explique ensuite : "*si vous n'avez pas reçu de nouvelles de ma part, c'est que j'ai été dans l'incapacité de travailler. La santé de mes yeux a commencé à se dégrader en Avril. Pendant 5 mois je n'ai pas pu écrire, et mon humeur était telle que je ne pensais pas non plus aux Mathématiques. En Septembre j'ai fait le voyage de retour en Allemagne [depuis la Norvège] et j'y ai regagné la santé, bien que je dois encore faire*

Lettre datée du 1er Décembre 1873 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

L'éducation donnée par Alix ainsi que certains de ses traits de caractères et de ses talents cachés semblent par ailleurs avoir été répercutés sur ses deux fils. Emile Picard, qui s'il sera proche de Gaston Darboux aura également connu sa mère Alix, en rapportera le témoignage suivant :

> Intelligente et autoritaire, elle [Alix] sut très bien conduire ses affaires. Elle avait une facilité prodigieuse pour le calcul. "Je ne crois pas, nous dit un de ses neveux, qu'elle eût des livres de commerce, mais elle avait dans la tête tous les chiffres nécessaires, et elle conserva jusqu'à plus de quatre-vingt ans une mémoire étonnante pour les nombres". Peut-être la facilité de sa mère pour les opérations arithmétiques eut-elle quelque influence sur le talent mathématique de Darboux, exemple, entre bien d'autres, d'une certaine ressemblance intellectuelle entre une mère et son fils.
>
> [**Picard 1917**, V]

Malgré le témoignage de Picard, cette "*ressemblance intellectuelle*" - et avant tout mathématique - ne sembla pas se manifester avant quelque temps chez les enfants Gaston et Louis : lorsqu'ils entrent au Lycée de Nîmes dans les années 1850, rien ne laisse encore présager pour l'un d'entre eux un quelconque avenir scientifique radieux.

2. Les premières études avant l'E.N.S. : la révélation en fin d'études secondaires

2.1. Le Lycée de Nîmes (1853-1859).

C'est en Octobre 1853 que Gaston Darboux effectue sa rentrée au Lycée (alors nouvellement dit *Impérial*) de Nîmes. Durant la première moitié du XIXème siècle, le parcours traditionnel du lycée s'effectuait en 6 ans : on y entrait dans la classe de 6ème, puis on effectuait successivement les classes de 5ème, 4ème, 3ème, puis la classe de réthorique et pour finir la classe de philosophie. Le baccalauréat était alors double mais progressif : l'obtention du baccalauréat ès lettres précédait nécessairement, d'au moins une année, le passage du baccalauréat ès sciences.

Mais en 1852, le Ministre de l'Instruction Publique Hippolyte Fortoul - homme fort du début du Second Empire - bouleverse ce parcours en instaurant le "*régime de bifurcation*" : les deux baccalauréats spécialisés deviennent symétriques, et les élèves doivent donc choisir entre le *baccalauréat ès lettres* et le *baccalauréat ès sciences*. Fortoul, qui souhaite "*ne pas prolonger des débats stériles sur la prééminence des lettres ou des sciences*" ([**Hulin 1982**, 218]), place la bifurcation au milieu des études de lycée : c'est à la fin de la classe de 4ème que les élèves feront le choix entre la filière des sciences et celle des lettres. Cette réforme

attention à mes yeux", [**Archives épistolaires Lie**]. Fin 1872, Lie est néanmoins également accaparé par ses fiançailles, comme il ne le confiera que l'année suivante dans sa correspondance.

n'aura qu'une courte durée de vie, elle sera en effet d'abord progressivement adoucie à partir de la fin des années 1850, avant d'être complètement supprimée en 1864 [10].

Gaston Darboux choisira en 1856 la filière scientifique des études secondaires. Avec ce parcours, l'enseignement du latin est allégé. L'apprentissage d'une langue vivante reste tout de même au programme, et Darboux choisira l'allemand [11]. A la rentrée de 1855, son petit frère Louis le rejoint au Lycée qui était à cette époque situé Boulevard Amiral Courbet à Nîmes, et dont l'entrée s'effectuait côté Grand'rue [12]. Louis est encore bien loin de s'en douter, mais il en deviendra, quelques décennies plus tard, d'abord professeur de mathématiques durant une vingtaine d'années (1873-1893), puis Proviseur pendant presque dix ans (1893-1902) [13].

Gaston et Louis sont demi-pensionnaires au Lycée. Comme le rappelle Picard, "*la vie était dure alors dans les collèges* [14]*. Les deux frères [...] arrivaient le matin à six heures et ne sortaient qu'à huit heures du soir*". En outre, "*les jeunes Darboux étaient très attachés à leur mère et l'aidaient le soir dans son commerce à leur retour du Lycée*" ([**Picard 1917**, V]). Gaston et Louis ne menaient alors leurs études qu'en dilettante : ils n'obtenaient pas de bons résultats et étaient loin d'être des élèves sérieux. "*Il ne faut pas conclure [...] qu'ils étaient dépourvus d'intelligence, non, mais ils étudiaient ce qui leur faisait plaisir et s'occupaient peu des cours des professeurs*" ([**Darboux 1933**, 37]). Leurs résultats n'étant du reste pas non plus exécrables, le proviseur ne pouvait pas les renvoyer du Lycée en raison de leur statut de demi-pensionnaires. Aussi il convoqua leur mère Alix pour la persuader de les en retirer d'elle-même, et lui dit :

> Madame, vos enfants ne font pas de progrès. Ils n'arriveront à rien, retirez-les du Lycée et prenez-les avec vous dans votre commerce.

Alix, "*douée d'une intelligence peu commune*", ne fit pas confiance au Proviseur. Au contraire, elle pressentait chez ses enfants "*d'heureuses dispositions pour les travaux intellectuels*" ([**Lebon 1910**]). Clairvoyante et confiante dans l'intelligence de ses fils, elle continuera au contraire de les encourager dans la poursuite de leurs études scientifiques.

De nombreuses notices biographiques sur Gaston Darboux font état d'une *révélation* mathématique lors de sa seconde année de Mathématiques Spéciales, en 1860-61 [15]. Bien que justifiée, cette présentation occulte le fait que dès la fin du Lycée Gaston Darboux commence à présenter quelques dispositions particulières pour les mathématiques, et avant tout pour la Géométrie. Lors de sa dernière année de Lycée (1858-59), Darboux suit les cours de mathématiques du professeur Jean-Charles Dupain, normalien de la promotion 1848 agrégé en 1851. Il est alors en classe de philosophie, qui vient d'être renommée *classe de logique*. Darboux suit régulièrement les questions proposées dans le journal des "*Nouvelles Annales de Mathématiques*" [16], et en Mars 1859 il remarque la question suivante posée

10. Pour plus de renseignements sur la réforme de la bifurcation de Fortoul, voir [**Hulin 1982**].
11. Le choix de l'unique langue vivante était cantonné à l'allemand ou l'anglais.
12. En 1885, le Lycée déménage du Boulevard de l'Amiral Courbet et s'installe Boulevard Victor Hugo. Aujourd'hui ce lycée - toujours à cet emplacement - est devenu le lycée professionnel Alphonse Daudet.
13. Voir [**Archives Léonore**].
14. Aucune distinction de niveau scolaire n'existe alors entre les dénominations de collège et de lycée.
15. Voyez les différents discours de [**Darboux 1933**], ou encore [**Picard 1917**].
16. A propos des "*Nouvelles Annales*", voir [**Gerini Verdier 2014**, 184], ainsi que la base de données réalisée par le groupe d'historiens dirigé par Hélène Gispert, Philippe Nabonnand et Laurent Rollet : http://nouvelles-annales-poincare.univ-lorraine.fr/.

par Justin Bourget [17], professeur à Clermont-Ferrand : "*Lorsque dans un tétraèdre deux hauteurs se rencontrent, [montrer que] les deux autres hauteurs se rencontrent aussi*" [18]. Darboux en propose une courte réponse au professeur Dupain, qui l'envoie ensuite à Paris aux rédacteurs (Terquem et Gerono) du journal. Publiée en Juin 1859, il s'agira de la première communication officielle publiée de Gaston Darboux ([**Darboux 1859**]). Dans le tétraèdre étudié par le jeune lycéen nîmois, les deux points de rencontre des couples de hauteurs concourantes ne sont pas nécessairement identiques. Lorsque c'est le cas, le tétraèdre sera baptisé *orthocentrique*, et nous verrons dans la partie 4.2 que 13 ans après cette première communication en tant que lycéen, Darboux marquera de son empreinte les études liées à cette configuration tétraédrique particulière. Il est ainsi remarquable que sa toute première publication ait plus tard une résonance dans un de ses mémoires. Pouvait-on déjà apercevoir un géomètre en puissance, encore pourtant presque au stade de son développement embryonnaire ?

2.2. Charles Berger : plus qu'un professeur, un modèle (1859-1861).

Quelques semaines après la publication de sa solution, le 22 Juillet 1859, Gaston Darboux est reçu *bachelier ès sciences* alors qu'il n'a pas encore 17 ans. Sa volonté est claire : il veut poursuivre des études scientifiques et tenter d'accéder à l'une des deux prestigieuses grandes écoles, l'Ecole Normale Supérieure ou l'Ecole Polytechnique. Cependant, les classes de Mathématiques Spéciales [19] préparant les candidats à ces grandes écoles étaient encore rares en province, et le Lycée de Nîmes n'en était pas pourvu. Darboux doit alors s'éloigner - un peu - de sa ville natale et partir pour Montpellier, où le Lycée offre cette formation.

Le professeur de Mathématiques de la classe de Spéciales héraultaise est à cette époque Charles Hippolyte Berger. Berger, natif d'Autun en Saône-et-Loire en 1820, a étudié quelques années à Dijon avant d'intégrer l'Ecole Normale Supérieure en 1843. Au sein de cette jolie promotion 1843, il est notamment le camarade de Jules Hoüel et de Louis Pasteur. Berger obtiendra en 1847 l'agrégation de mathématiques (avec le 3ème rang pour 9 reçus), et ne deviendra docteur qu'en 1863, au cœur de sa carrière de professeur. Il commencera par enseigner à Bastia et à Pau avant d'arriver dans la classe de Mathématiques Supérieures de Montpellier en 1849. Il y finira d'ailleurs sa carrière en tant que Proviseur.

La classe de Berger compte 32 élèves à la rentrée d'Octobre 1859. Si Darboux est déjà "*un très bon élève*" au début de cette première année ([**Darboux 1933**, 37]), il en est probablement devenu l'un des meilleurs à la fin. Ses mathématiques progressent vite, mais c'est surtout le goût de l'enseignement qu'il découvre auprès de son maître Charles Berger qu'il adore. Ses deux années à Montpellier sont pour lui extrêmement heureuses et vont faire naître en lui l'envie profonde de devenir professeur à son tour. Lors de son Jubilé Scientifique, en 1912, Gaston Darboux se remémorera :

17. Justin Bourget sera peu de temps plus tard le rédacteur de ces mêmes "*Nouvelles Annales*". Résidant à Paris, il deviendra ami avec Darboux au tournant des années 1870 dont il habitera à proximité, tout à côté du Jardin du Luxembourg.

18. Voir les "*Nouvelles Annales*", tome 18 (1859), Mars 1859, p.118.

19. Les deux années de préparation furent appelées *classes de mathématiques supérieures* durant quelques années autour de 1850, mais après 1852 elles sont rebaptisées par Fortoul *mathématiques spéciales*. La distinction moderne entre la première (dite *supérieures*) et la seconde année (*spéciales*) n'existait pas encore.

> j'avais rencontré de si braves gens, de si bons maîtres au cours de mes études dans les lycées [que] je désirais les imiter. Mon rêve était de revoir la pure lumière du Midi, de succéder à mon cher professeur Berger dans la chaire de Mathématiques Spéciales du Lycée de Montpellier où s'étaient écoulées deux des années les plus heureuses de ma vie.
>
> Ce rêve, je n'ai pas pu le réaliser. C'est mon frère Louis qui, par sa vie presque toute entière passée au Lycée de Nîmes, a acquitté ma dette envers l'enseignement secondaire et envers mon pays natal.
>
> [**Darboux 1912**, 485]

Au moment de passer les épreuves écrites en Juillet 1860, Gaston n'a pas encore 18 ans. Il passe donc les examens de l'Ecole Polytechnique, mais n'est pas autorisé à effectuer celles de l'Ecole Normale du fait de son jeune âge. Admissible à Polytechnique, il décidera de ne pas prendre part aux examens oraux et rentrera à Nîmes dès le début du mois d'Août. On pourrait déjà y voir, rétrospectivement, la volonté de ne pas intégrer cette Ecole qui est pourtant la plus prestigieuse. Mais, nous le verrons, le choix d'école sera tout de même fort difficile pour lui l'année suivante.

A la vue des résultats des Concours Généraux de l'été 1860, on voit que Gaston Darboux est déjà devenu un excellent élève très complet : il reçoit le 2ème prix de mathématiques, mais également le 1er accessit d'excellence ainsi que des accessits en français et en physique et chimie. Pourtant, c'est véritablement durant sa deuxième année de Mathématiques Spéciales que "*sa supériorité apparut d'une manière éclatante*" ([**Picard 1917**, V]). Darboux juge le programme de mathématiques de la classe de Spéciales "*insuffisant*", et obtient de Charles Berger l'achat de nouvelles revues et de livres supplémentaires pour "*compléter ses études*". Cette année-là, l'élève Darboux travaille comme un forcené. Un de ses camarades d'alors en dépeindra un portrait presque alarmiste :

> C'était un travailleur acharné, dont l'ardeur utilisait souvent pour ses études jusqu'aux récréations, et faisait même craindre pour sa santé.
>
> Citation reprise dans [**Picard 1917**, V]

Darboux publie deux nouvelles solutions à des questions posées dans les *Nouvelles Annales*, l'une sur une question d'algèbre relative à la rationalité des racines d'un polynôme ([**Darboux 1861a**]), l'autre sur la discussion de la forme géométrique d'une équation polaire ([**Darboux 1861b**]). Cette-dernière fait suite à une question de Terquem, posée l'année précédente, et qui n'ayant pas reçu de réponse avait été classée par le rédacteur parmi les "*questions non-résolues*". Dans sa solution, le talent de géomètre de Darboux apparaît très nettement : il répond à la question proposée par deux différentes méthodes qui dévoilent déjà une grande dextérité dans l'appréhension des problèmes de la Géométrie en combinant des approches synthétiques et analytiques. Il se permet même d'y souligner l'erreur commise l'année précédente par Terquem, qui en posant la question avait affirmé l'existence d'une singularité pour la surface étudiée : l'élève de Montpellier démontre qu'il n'en est rien ([**Darboux 1861b**, 460]).

La relation entre Berger et Darboux s'intensifie encore en seconde année, et le maître acquiert une "*haute estime*" de l'élève. Reconnaissant à la fois l'éclosion du talent mathématique et l'éveil du goût de l'enseignement chez Darboux, Berger lui laisse régulièrement sa place au tableau durant l'année scolaire 1860-61. C'est ce que raconte Josias Paut, l'ancien maire de Nîmes :

> En 2ème année, Darboux se présenta comme un élève extraordinaire, tellement que souvent en entrant en classe, le professeur disait à Darboux "Passez au tableau, et faites-nous la leçon sur tel sujet". La leçon était faite aussitôt et bien faite.
>
> [**Darboux 1933**, 37]

Durant l'été 1861, Gaston Darboux passe les concours de l'Ecole Polytechnique et de l'Ecole Normale. Les examens se déroulaient alors d'une manière bien différente que celle qu'on connaît aujourd'hui. Les premiers examens étaient ceux de Polytechnique. Des épreuves écrites étaient effectuées dans les lycées de chacune des classes de Mathématiques Spéciales, puis elles y étaient accompagnées un peu plus tard de plusieurs examens oraux devant un jury d'examinateurs. Les examinateurs de l'Ecole Polytechnique se déplaçaient ainsi, après en avoir fini avec les lycées parisiens, dans la douzaine d'établissements de province situées dans les chefs-lieux des différentes académies et qui comportaient une classe de Spéciales. C'est ce qui était appelé "*la tournée*" des examinateurs, et qui était rendue possible par le nombre relativement restreint des candidats aux concours. A l'issue des examens oraux dans les lycées, les examinateurs emportaient avec eux les copies des candidats de province qu'ils ramèneraient à Paris à l'issue de leur tournée pour y être *éventuellement* corrigées (fin Août ou début Septembre pour l'Ecole Polytechnique). En effet, l'admissibilité n'était alors prononcée que sur la base des résultats des examens oraux ayant eu lieu pendant la tournée dans les différents lycées. Ainsi, à la mi-Août lorsque les résultats d'admissibilité étaient annoncés dans le *Journal Général de l'Instruction Publique*, seules les copies des candidats déclarés admissibles étaient corrigées. Les admissibles devaient alors par ailleurs se rendre à Paris le mois suivant pour y subir les derniers examens oraux qui décideraient finalement de leur admission, les résultats étant ajoutés aux premiers oraux ainsi qu'aux épreuves écrites. Les résultats finaux étaient généralement annoncés dans le courant du mois d'Octobre.

Par ailleurs, le calendrier des épreuves de l'Ecole Normale était sensiblement identique mais décalé d'environ un mois par rapport à celui de Polytechnique : les épreuves d'admissibilité avaient ainsi lieu début Août, et les derniers oraux d'admission à Paris à la mi-Octobre [20].

A la fin du mois de Juillet 1861, à l'issue des compositions écrites, les examinateurs d'admissibilité de Polytechnique arrivent donc à Montpellier à l'occasion de leur classique *tournée* en province. Charles Berger, qui rencontre tous les ans ces jurys, a alors une complète confiance en la réussite de son élève Gaston Darboux, et il ne s'en cache pas :

> [L]orsque les examinateurs de Polytechnique passèrent à Montpellier pour l'oral, le professeur Berger, après les formules de politesse habituelles, leur dit « Vous savez, Messieurs, cette année le premier de Polytechnique ne sera pas de Paris ; il sera de Montpellier et ce sera Darboux ».
>
> [**Darboux 1933**, 37]

On peut penser que l'assurance de Berger incita les examinateurs à être d'autant plus sévères et rigoureux lors des examens de Gaston Darboux. Ce n'est que durant le mois

20. Pour plus de renseignements sur les concours et la préparation aux grandes écoles au XIXème siècle, on consultera [**Belhoste 2001a**].

d'Août, après les épreuves écrites et orales d'admissibilité de l'Ecole Normale, que ce-dernier peut enfin rentrer à Nîmes. Il y retrouve son frère Louis, qui vient tout juste d'être reçu bachelier ès sciences et s'apprête à remplacer son aîné dans la classe de Spéciales du professeur Berger à Montpellier. Plusieurs semaines plus tard, le Jeudi 19 Septembre, Darboux se prépare à partir pour Paris pour y passer l'examen d'admission de l'Ecole Polytechnique où il a été déclaré admissible. Il apprend alors que, sur les 116 inscrits à l'entrée à l'Ecole Normale (en *section des sciences*[21]), il vient d'être classé parmi les 42 candidats admissibles à l'Ecole Normale[22]. S'il l'ignore, il est en fait classé premier parmi les admissibles[23]. L'examen d'admission doit d'ailleurs se tenir à la rue d'Ulm le Mardi 15 Octobre, jour même des résultats finaux de Polytechnique.

C'est donc le jour de son examen d'admission à l'Ecole Normale que la prédiction pleine d'assurance de son maître Berger se réalise : Gaston Darboux est reçu premier à l'Ecole Polytechnique. Quelques jours plus tard, le Vendredi 18 Octobre 1861, les examinateurs de l'École Normale se sont accordés sur la liste et l'ordre des candidats qu'ils vont officiellement déclarer reçus la semaine suivante au Ministère de l'Instruction Publique. Louis Pasteur, alors Directeur des Études à l'École Normale, sait donc que le premier reçu de son Ecole, Gaston Darboux, a également été reçu premier à l'École Polytechnique dans le courant de la semaine. Il comprend alors que c'est la première fois dans l'histoire des concours des deux Écoles qu'une telle situation se présente.

2.3. Octobre 1861 : X vs E.N.S., le rôle déterminant de Pasteur.

Louis Pasteur naît en Décembre 1822 à Dole dans le Jura. Après avoir étudié au Collège d'Artois puis au Lycée royal de Besançon, il gagne Paris pour se préparer aux concours des grandes écoles à l'Institution Barbet. Ses études ne sont pas brillantes (il s'y reprend à deux fois pour obtenir le baccalauréat ès sciences), mais il parvient à accomplir son objectif principal en intégrant l'Ecole Normale Supérieure en 1843. Il racontera en effet plus tard : "*Lorsque j'étais élève du collège d'Artois, les mots 'Ecole normale' rayonnaient déjà magiquement devant mon esprit*" ([**Ecole Normale 1895**, 477]).

Après avoir effectué une thèse soutenue en 1847, Pasteur part enseigner à Dijon puis à Strasbourg, avant d'être en 1854 le premier doyen de la toute nouvelle Faculté des Sciences de Lille. En 1857, le Ministère de l'Instruction Publique dirigé par Gustave Rouland bouleverse la direction de l'Ecole Normale Supérieure : l'écrivain et homme politique Désiré Nisard en est nommé Directeur, tandis que Louis Pasteur devient son bras droit en tant qu'"*administrateur chargé de la direction des études scientifiques*". Le duo Nisard-Pasteur va diriger l'Ecole durant dix ans, jusqu'à ce que l'*affaire Sainte-Beuve* n'oblige Victor Duruy, à contre-cœur, à en renouveler la direction[24].

21. Ces chiffres ne prennent pas en compte la *section des lettres*.
22. Voir le *Journal Général de l'Instruction Publique*, Année 1861 (Volume 30), N.76, Samedi 21 Septembre 1861.
23. Darboux compte 340 points d'admissibilité, le second en compte 283.
24. A propos de l'affaire Sainte-Beuve, voir [**Geslot 2009**].

FIGURE 2. Louis Pasteur

L'action de Pasteur à l'Ecole Normale est fondamentale : elle va contribuer à rétablir l'attractivité de l'Ecole, mettant ainsi à mal le monopole de la prestigieuse Ecole Polytechnique pour les études scientifiques. Ceci a déjà été largement étudié et documenté, notamment par [**Hulin 1982**] et [**Zwerling 1980**] [25]. Renforçant les statuts privilégiés des normaliens pour l'agrégation, consolidant le statut d'agrégé-préparateur, développant l'enseignement propre à l'Ecole Normale alors très dépendante des cours de la Faculté des Sciences de Paris (la Sorbonne), défendant le rôle des sciences appliquées et l'importance des travaux de laboratoire dans la formation des jeunes scientifiques, Pasteur "*se bat absolument sur tous les terrains*" comme l'a montré Nicole Hulin. S'il rencontre souvent l'adhésion du Ministère de l'Instruction Publique, et particulièrement celui du Ministre Victor Duruy, une lettre de Darboux montre que Pasteur bénéficie d'un levier d'action jusqu'alors resté méconnu : son prestige auprès du très influent homme politique - et premier Président de la République en 1871 - Adolphe Thiers.

> Que vous avez été maladroit. Il fallait choisir un homme aussi carré et plus désintéressé que Bert, et à priori sympathique [au] Conseil. Pasteur fait votre affaire, ou Briot, mais la situation scientifique de Pasteur est meilleure et puis cela aurait augmenté le crédit énorme dont Pasteur jouit auprès de Thiers et dont il a usé (ne le dîtes à personne) pour essayer de faire supprimer le monopole de l'Ecole Polytechnique. [26]
>
> Lettre datée du 12 Mai 1873 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

25. L'action de Pasteur est particulièrement mise en lumière du fait du succès qu'elle va rencontrer. Mais [**Zwerling 1980**] rappelle également à bon endroit qu'avant lui, le Baron Thénard (le vrai père du statut d'agrégé-préparateur) et le chimiste Jean-Baptiste Dumas avait déjà nourri les mêmes ambitions, avec cependant moins d'impact dans le cadre clivé de la formation scientifique française.

26. Cette lettre fait référence à un vote qui se tiendra le Vendredi 23 Mai 1873. Ce vote désigne le représentant des Facultés des Sciences destiné à siéger au sein de la section permanente du Conseil Supérieur de l'Instruction Publique, section dont Napoléon III avait supprimé l'existence et qui est rétablie sous la présidence de Thiers (Loi du 25 Mars 1873). C'est le doyen de la Sorbonne Milne-Edwards qui sera élu.

En Octobre 1861, avec la situation inédite de Gaston Darboux - classé premier sur les deux listes d'admission de Polytechnique et de l'E.N.S. - Pasteur entrevoit une opportunité d'établir un précédent qui servirait sa cause. Le choix de Darboux, s'il était en faveur de son Ecole, pourrait ainsi ébrécher la domination de Polytechnique quant au choix des meilleurs jeunes scientifiques français. Ainsi, comme le rappelle Emile Borel, au début des années 1860 "*si l'Ecole Normale était la première école littéraire de la France, l'École Polytechnique était la première école scientifique*" ([**Darboux 1933**, 25]). Par ailleurs, au-delà du simple prestige de l'Ecole Polytechnique, les débouchés offerts aux polytechniciens leurs promettaient à la sortie une position confortable, y compris financièrement, avec laquelle l'Ecole Normale ne pouvait rivaliser. C'est ce décalage que l'historien Ernest Lavisse (normalien de la promotion 1862 [27]) résumera en quelques mots :

> Renoncer au chapeau et à l'épée de Polytechnique, renoncer au double galon d'or et au manteau dont un pan était rejeté sur l'épaule, préférer aux espérances brillantes qu'offrait la carrière des Mines ou des Ponts, le titre de professeur et la modestie des fonctions d'enseignement, je crois que [en 1861] cela ne s'était pas encore vu.
>
> [**Darboux 1933**, 21]

Emile Picard résume le sentiment qui anime alors Pasteur : "*Pasteur n'aimait pas l'Ecole Polytechnique. Il lui reprochait de vouloir accaparer l'enseignement supérieur*" ([**Picard 1917**, VII]). Pour tenter d'attirer le jeune candidat Darboux, Pasteur peut compter sur l'appui de son ancien camarade Charles Berger qui était son professeur. Aussi le célèbre chimiste écrit-il, probablement à plusieurs reprises à partir du mois d'Août, à Berger pour faire vanter à son élève les mérites de leur école formatrice, en mettant l'accent sur la formation à l'enseignement et la préparation à une carrière scientifique. En dépit de l'insistance de Berger et de Pasteur, "*Darboux remerciait des conseils, mais ne décidait rien*" ([**Darboux 1933**, 38]).

Le Samedi 19 Octobre 1861, Pasteur s'inquiète de l'absence de réponse de Darboux. Il écrit une longue lettre au Directeur de l'Ecole, Désiré Nisard, dans laquelle il propose pour emporter l'adhésion du candidat de lui allouer quelques mesures exceptionnelles :

> C'est un succès unique que celui de M. Darboux dans l'histoire des concours des deux Ecoles. Quel sera son choix ? Il a le goût de l'enseignement et veut embrasser la carrière des sciences. J'ai employé tous mes soins dans ces deux derniers mois pour qu'il soit maintenu dans ces bonnes dispositions, en assurant M. Berger, son professeur, que si M. Darboux entrait à l'Ecole Normale, les plus vives sympathies l'y suivraient et ne l'abandonneraient pas à sa sortie. Mais je sais que, du côté de l'École polytechnique, les plus actives sollicitations l'environnent chaque jour. Et malheureusement, si nous pouvons, en toute sincérité, affirmer qu'un sujet d'une aussi rare distinction, ayant le goût de l'enseignement, est mieux placé à l'École normale et qu'il y fera des progrès incomparablement plus rapides, nous ne pouvons nous dissimuler que certaines carrières de l'École polytechnique offrent aux jeunes gens et à leurs familles un éclat que n'ont pas les modestes fonctions de l'enseignement.

27. Pour les Ecoles Polytechnique et Normale, l'année de la promotion correspond à l'année d'entrée dans l'école. Il n'en va pas de même, généralement, pour les autres écoles.

> Quoi qu'il en soit, essayons de l'emporter, dans cette occasion, sur notre rivale.
>
> Lettre datée du 19 Octobre 1861 de Louis Pasteur à Désiré Nisard, citée dans [**Hulin 1982**] et [**Picard 1917**]

Pasteur propose à Nisard dans la suite de la lettre d'autoriser Darboux à suivre un cours extérieur à l'Ecole, à la Sorbonne ou au Collège de France, dès sa première année. Cela n'était alors possible aux normaliens qu'à partir de la troisième année. Pour donner à cette mesure un poids encore plus fort, il ajoute : "*Je voudrais même y ajouter un attrait de plus. Ne jugeriez-vous pas opportun de la faire agréer par Son Excellence M. le Ministre et qu'elle fût consacrée par une lettre ostensible pour ce jeune homme, lettre qui pourrait renfermer en outre un mot gracieux de S.E. ... M. Darboux aurait dès aujourd'hui la preuve que la bienveillance de M. le Ministre lui sera acquise dans tout le cours de sa carrière universitaire*".

Nisard approuvant les idées de Pasteur, celui-ci écrit au Ministre Rouland et détaille sa proposition. Il conclut en affirmant : "*Ce que j'ai appris de M. Darboux me porte à penser qu'il n'est pas moins distingué par les qualités du cœur que par celles de l'intelligence. Il saura reconnaître ce haut témoignage d'intérêt*". Pasteur reçoit le soutien de Rouland, qui écrit à Darboux le Mercredi 23 Octobre. Le Ministre lui assure alors que sa carrière scientifique sera placée sous les meilleures auspices, ce que Pasteur lui avait suggéré d'écrire.

En dépit de tous ces témoignages d'intérêt, lorsque les résultats d'admission de l'Ecole Normale sont publiés le Vendredi 25 Octobre 1861 dans le *Bulletin administratif de l'Instruction Publique*, Gaston Darboux n'a toujours pas fait son choix. Pourtant plus tard, quand il racontera lui-même cette période, il présentera sa décision comme ayant été naturelle et omettra toujours de rappeler sa longue indécision.

La rentrée est alors prévue pour le Lundi 4 Novembre, et ce n'est que trois jours auparavant qu'il fait connaître son choix, d'abord à Alix, sa mère, puis ensuite de manière formelle. Selon ses propres mots, "*ayant du goût pour l'enseignement, il me sembla naturel de préférer l'Ecole où l'on se préparait précisément à l'enseignement*" ([**Darboux 1933**], 21]) : Gaston Darboux choisit donc l'École Normale Supérieure.

Informée de son choix, Alix effectue le voyage de Nîmes à Paris. Elle met un point d'honneur à aller présenter elle-même son fils aîné à Louis Pasteur, lors de la séance de rentrée du Lundi 4 Novembre 1861 à la rue d'Ulm. "*Ce fut pour la bonne maman un sujet de grande satisfaction*" ([**Darboux 1933**], 38]). La rencontre entre le savant Pasteur et sa maman restera gravée dans la mémoire du tout nouveau normalien, et en 1910, presque un demi-siècle plus tard, il rappellera avec émotion dans un de ses discours : "*pour ma part, s'il m'est permis d'évoquer un souvenir personnel, je n'oublierai jamais l'accueil plein de bonté qu'il [Pasteur] fit à ma vieille mère, venue à Paris pour me consacrer en quelque sorte à l'enseignement*" [28]. Bien que cela s'effectuera dans un anonymat tout autre, Alix Darboux aura la même fierté deux ans plus tard lorsque son deuxième fils connaîtra la même réussite : certes moins brillamment que son aîné, Louis intégrera également l'Ecole Normale en 1863.

28. Extrait du discours prononcé par Gaston Darboux le 5 Juin 1910 à l'Ecole Normale lors de la remise d'un monument élevé à la mémoire de Louis Pasteur, [**Darboux 1912**, 417-420].

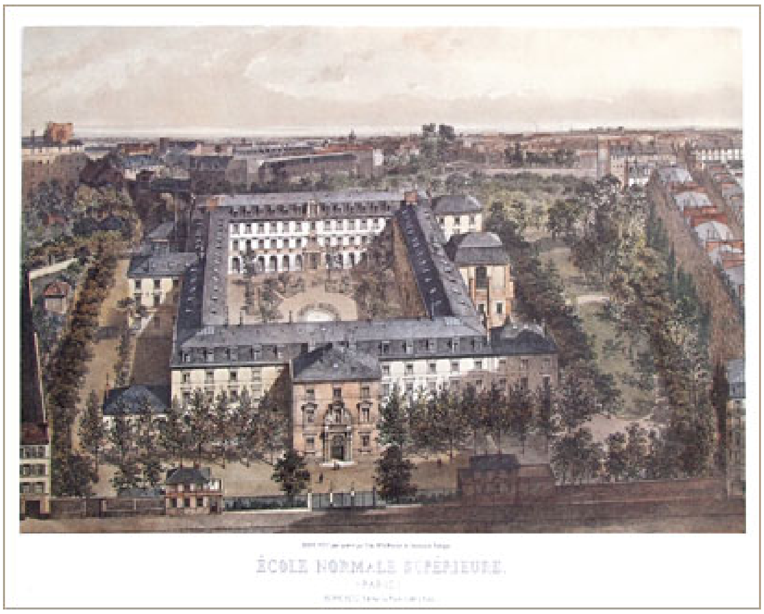


FIGURE 3. Gravure ancienne de l'Ecole Normale

Le choix de Darboux fit grand bruit et fut très diversement jugé, bien que le principal intéressé restât toujours indifférent aux débats dont il était au centre. Beaucoup ne comprenaient pas comment et pourquoi le jeune élève avait pu renoncer à la prestigieuse Polytechnique, le choix leur ayant paru être sans appel : "*sa famille et les Nîmois paraissaient d'avance heureux de voir sur les boulevards ce grand et beau garçon en costume, l'épée au côté, le chapeau claque*" ([**Darboux 1933**, 38]). Au contraire, les partisans de l'Ecole Normale se félicitaient et s'enorgueillissaient du choix effectué par Darboux. Le Directeur Nisard écrivit au lendemain de la rentrée au Ministre Rouland une lettre qui fut publiée, et qui suscita quelques réactions humoristiques [29] :

> Vous savez d'ailleurs, Monsieur le Ministre, que, sur huit candidats admis à la fois à l'École polytechnique et à l'École normale dans la section des sciences, cinq, contrairement à des précédents presque invariables, ont opté pour l'École. Dans ce nombre figure le premier des deux listes de promotion, jeune homme du plus rare savoir et de la plus haute espérance : c'est, dans nos annales domestiques, le premier exemple d'une conquête de ce genre.
>
> Ces succès, Monsieur le Ministre, touchent d'autant plus ceux à qui vous avez confié la direction de l'École que, par l'éclat nouveau qu'ils jettent sur son enseignement, ils répondent à ce que vous avez déjà fait pour elle et à ce que vous avez de libérales pensées pour son avenir.
>
> Lettre datée du 5 Novembre 1861 de Désiré Nisard à S.E. le Ministre Rouland, Journal Général de l'Instruction Publique, Année 1861, N.90, Samedi 9 Novembre 1861

29. Voir en réaction l'article du journaliste Jean-Jacques Weiss qui raillera ironiquement la surprise de Nisard suite au choix de Darboux : "*Journal des Débats*", Numéro du 20 Novembre 1861.

Suite au succès rencontré par Darboux aux concours de 1861, son bien-aimé professeur Charles Berger "*fut décoré à titre exceptionnel*" [30]. Quelques années plus tard, en 1864, c'est encore en écho à ce succès que la ville de Nîmes obtiendra la création dans son Lycée d'une classe de Mathématiques Spéciales [31]. Surtout, le caractère symbolique du choix de Darboux tant espéré par Pasteur fera son effet : après ce choix, l'Ecole Normale devient de plus en plus convoitée, en particulier par les meilleurs candidats [32]. Pour Emile Borel [33], "*[le] choix judicieux [de Darboux] détermina rapidement une orientation nouvelle de la jeunesse scientifique française. Grâce à son exemple, grâce aux brillants élèves qu'il forma, grâce à son prestige personnel, l'Ecole Normale a pris, au XXème siècle, dans la science française, la place que l'Ecole Polytechnique y avait occupée pendant presque tout le XIXème siècle*" ([**Darboux 1933**, 26]).

Le choix d'intégrer l'Ecole Normale Supérieure de Gaston Darboux doit ainsi être relié à deux acteurs principaux : le premier est bien sûr Pasteur, qui a véritablement *recruté* Darboux pour promouvoir l'Ecole Normale à travers lui. Le second, moins connu et pourtant encore plus déterminant, est Charles Berger : c'est grâce à l'influence de ce maître que Darboux acquiert la vocation de l'enseignement, qui le mènera à considérer l'Ecole Normale comme un "*choix naturel*" pourtant si difficile à effectuer. Berger aura su faire naître cette vocation et la nourrir, tout en veillant à développer les études mathématiques de son élève particulièrement doué. Berger, comme Pasteur, aura également joué un rôle important dans les derniers jours qui ont précédé le choix du jeune nîmois. C'est surtout pour ressembler à son professeur, pour prendre un jour sa place à Montpellier, que Darboux opte pour les études à l'Ecole Normale en 1861. Il se montrera d'ailleurs particulièrement affecté par la mort de Charles Berger quelques années plus tard, en 1869, et écrira :

> J'avoue que sa perte m'a été particulièrement sensible, car je lui étais vivement attaché et je crois qu'il avait aussi de l'affection pour moi.
>
> Lettre non datée (Novembre 1869) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

30. Voir [**Picard 1917**, VI].
31. Cependant, c'est la ville de Nîmes qui devra en rémunérer le professeur ! Voir [**Darboux 1933**, 38].
32. On pourra consulter le graphe donné par Nicole Hulin représentant l'évolution des rangs d'entrée des classés premier et dixième à l'Ecole Normale Supérieure sur la période 1865-1913 : [**Hulin 1986**, 74].
33. Emile Borel sera le camarade de classe et l'ami du fils aîné de Gaston Darboux, Jean-Gaston, à la fin des années 1880 au Lycée Louis-le-Grand. Durant son année de Mathématiques Spéciales 1888/89, il fut même - comme l'a rappelé [**Gispert 2012**, 168] - hébergé dans l'appartement des Darboux, qui habitaient alors au 5ème et dernier étage du 36 rue Gay-Lussac. Borel lui-même reconnaîtra que l'influence de Gaston Darboux fut importante dans son choix en faveur de l'Ecole Normale (promotion 1889) ; il se retrouva d'ailleurs dans la même situation que lui, classé premier à l'entrée des deux Écoles Polytechnique et Normale. Par l'intermédiaire de Darboux, Borel rencontra également Picard, qui joua un rôle encore plus important que Darboux dans sa carrière scientifique. Le jeune Borel paraissait si proche de la famille Darboux que Marguerite Appell - sa future épouse, encore appelée *Camille Marbo* - racontera : "*la rumeur publique fiançait Borel avec [Lucie Darboux], la fille du mathématicien Darboux*" (Camille Marbo, *A travers deux siècles*, p.61). Plus tard, Borel témoignera de sa "*reconnaissance à l'égard de mon maître Gaston Darboux, qui fut si accueillant à ma jeunesse, et qui ne cessa de suivre son ancien élève avec la sympathie active que n'oublieront jamais ceux qui l'ont éprouvée*" ([**Darboux 1933**, 28]).

Il prendra alors en charge avec Hoüel la vente de la bibliothèque privée de son ancien maître [34], et pendant plusieurs années, en retournant à Nîmes, il passera par Montpellier pour rendre visite à sa veuve Mme Berger.

3. Les études à l'Ecole Normale (1861-1866)

3.1. Les trois années "classiques" 1861-1864.

Fraîchement débarqué à la rue d'Ulm, Gaston Darboux ne s'intéresse pas au débat que vient de provoquer son choix. Il est pourtant conscient d'avoir suscité sinon une polémique, du moins de vives réactions, et concédera volontiers : "*ce choix fit sensation, je dois l'avouer*" [35]. Plutôt réservé, il préfère profiter des loisirs nouveaux qui lui sont offerts par sa nouvelle vie d'étudiant parisien. Tentons par quelques témoignages de dresser un portrait fidèle du Gaston Darboux élève normalien :

> Il était d'une stature dépassant la moyenne, et son visage pâle, encadré de longs cheveux plats, évoquait un peu le masque de Bonaparte jeune.
>
> [...]
>
> Il était d'une grande modestie, et un peu timide dans ce milieu parisien si nouveau pour lui. Dès son entrée à l'Ecole, il passe à la bibliothèque une partie de ses récréations, et sa principale distraction est d'aller entendre les concerts, que des camarades artistes donnent dans les salles de conférences. Il aimait la musique ; doué d'une excellente mémoire musicale, il pouvait redire encore dans sa vieillesse les chants du mois de Marie, qu'il avait entendus de son lit d'enfant le soir avant de s'endormir.
>
> [...]
>
> Je le vois encore, avec son air très jeune. Son aspect était froid, et rien en lui, sauf la prononciation de quelques mots, n'indiquait qu'il fût originaire du Midi de la France.
>
> [**Picard 1917**]

> De taille élevée, d'aspect sévère et froid, M. Darboux intimide ceux qui l'abordent pour la première fois. Heureusement cette impression s'efface vite après quelques minutes d'entretien. On reconnaît alors qu'il est bienveillant et que sous une écorce rude il cache un cœur généreux.
>
> [**Lebon 1910**]

34. La vente aux enchères des livres du professeur Berger se tiendra à Montpellier lors de la dernière semaine du mois de Juillet 1872. Darboux, Chasles et Hoüel en profiteront pour acheter plusieurs ouvrages, Hoüel seul étant sur place au moment de la vente. Grâce à Chasles, Darboux aura obtenu qu'un budget de $1,200$ francs soit consacré pour cette vente à la Bibliothèque du "*Bulletin des Sciences*".

35. Discours de Darboux lors de son Jubilé Scientifique (Janvier 1912), extrait rapporté par Vessiot dans [**Darboux 1933**, 21].

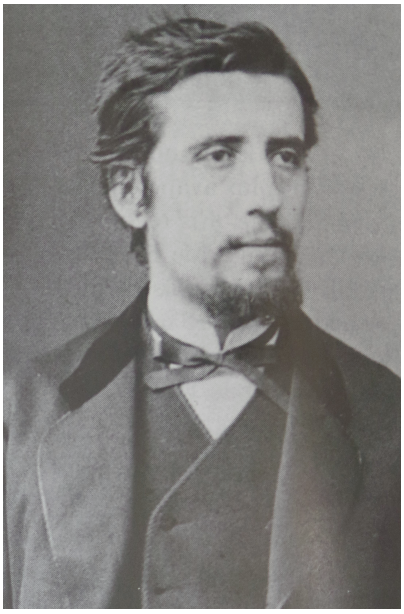


FIGURE 4. Gaston Darboux (photo datant des années 1870)

Lorsqu'il arrive à l'Ecole Normale en Novembre 1861, celle-ci compte deux chaires de mathématiques qui sont alors occupées par Joseph Bertrand et Charles Briot. Ces-derniers y seront donc les premiers maîtres de Gaston Darboux. Cependant, en 1862, Joseph Bertrand quitte l'Ecole Normale pour se consacrer aux cours de Physique Mathématique du Collège de France où il remplace Biot. C'est Victor Puiseux qui succède alors à Bertrand à la rue d'Ulm. En outre, dans le même temps, Louis Pasteur obtient du Ministre Rouland la création d'une troisième chaire de mathématiques. Quarante ans plus tard, Darboux racontera :

> En 1862, et sur initiative de Pasteur, qui voulait accroître l'éclat de l'enseignement mathématique à l'Ecole Normale, une nouvelle maîtrise de conférence fut créée dans cette école et confiée à [Charles] Hermite, qui devait l'occuper pendant sept ans. J'ai été un des premiers à recueillir son enseignement.
>
> [**Darboux 1912**, 146]

Les autres professeurs de Darboux à l'Ecole Normale sont Emile Verdet, qui assure les conférences de Physique, et Henri Sainte-Claire Deville qui effectue les cours de Chimie. Darboux suit également quelques "*cours annexes*" : le cours d'Allemand du professeur Adler-Mesnard, le cours de Dessin de Desains (remplacé par Leloir en 1862), et les cours d'Histoire Naturelle des professeurs Dalimier et Delesse [36].

36. Voir [**Ecole Normale 1895**], ou encore [**Decaillot-Laulagnet 1999**] pour des renseignements complémentaires sur les conférences de l'Ecole Normale au début des années 1860.

FIGURE 5. Les maîtres de Darboux à l'Ecole Normale Supérieure [37]

Dès sa première année à l'Ecole Normale, Darboux retrouve une relation privilégiée avec l'un de ses maîtres, relation qui se rapproche de celle qu'il avait auparavant à Montpellier avec Berger. C'est cette fois avec Joseph Bertrand que le jeune étudiant noue des liens particuliers. Picard se rappellera ainsi que "*de tous les maîtres de Darboux, Bertrand eut sur lui le plus d'influence*", et Lebon soulignera "*l'amitié de ce géomètre [Bertrand] pour Darboux*" [38]. Aussi lorsque Bertrand doit quitter l'Ecole l'année suivante, Darboux profitera de son statut exceptionnel pour continuer à suivre les cours de son maître, non

37. Montage réalisé à partir des gravures de l'ouvrage [**Ecole Normale 1895**]. Jean-Claude Bouquet ne deviendra maître de conférences à l'Ecole Normale qu'en 1868. A propos de l'histoire de l'Ecole Normale et de sa création durant la première République, voir [**Dhombres 1992**].

38. Voir [**Picard 1917**, IX] et [**Lebon 1910**].

plus dans l'enceinte de l'Ecole mais cette fois sur les bancs du Collège de France. Ces cours de Physique Mathématique dispensés par Bertrand auront une influence certaine sur les mathématiques de Darboux. Par ailleurs, ce-dernier continuera d'assister très longtemps aux conférences du Collège de France de Bertrand : jusqu'en 1877 (au moins), Darboux retournera sur ces bancs à midi deux fois par semaine - généralement le mardi et le vendredi - pour y apprendre dira-t-il de "*l'homme que j'ai beaucoup aimé et profondément admiré, mon illustre maître Joseph Bertrand*" [39] ([**Darboux 1912**, 1]).

Si son rapport avec Bertrand est tout particulier, Darboux "*conquit aussi l'estime et la bienveillance d'autres savants, notamment de Bouquet, de Briot, de Chasles et de Serret*" ([**Lebon 1910**]). Même au-delà des mathématiques, "*Henri Sainte-Claire Deville vante son intelligence. En Physique, Verdet le note comme faisant preuve d'une rare aptitude pour la Physique mathématique*" ([**Picard 1917**, IX]). Tout au long de sa scolarité à l'E.N.S., Gaston Darboux reste classé premier de sa division. Unanimement apprécié par ses maîtres, il bénéficie également du soutien et de la protection de Pasteur, soucieux du bon déroulement des études de celui qui joue pour lui le rôle du symbole de la revalorisation de l'Institution qu'est l'Ecole Normale. Cette protection transparaît surtout en 1863 lors de "*l'affaire des haricots*" [40].

Le 22 Janvier 1863, une insurrection éclate dans une Pologne alors occupée par la Russie tzariste. Cette insurrection, qui mobilise polonais et lituaniens, est très durement réprimée par les forces russes, qui s'allient pour l'occasion aux forces prussiennes. Cependant, politiquement la France de Napoléon III soutient la Russie du Tzar Alexandre II : c'est un précieux allié sur l'échiquier européen, surtout dans le contexte de montée en puissance militaire de la Prusse (voir l'annexe historique 8). Informée des événements par la presse, l'opinion publique française prend fait et cause pour les polonais, dont les émeutes sont écrasées de manière sanglante. De nombreuses manifestations de soutien à la Pologne ont ainsi lieu à Paris durant le mois de Février 1863, et une souscription publique sans précédent est lancée pour venir en aide financièrement aux polonais. Cette mobilisation aboutira au versement de 250 000 francs or à la Pologne quelques semaines plus tard [41].

Une partie des élèves de l'Ecole Normale participe au mouvement de mobilisation de Février 1863, au nombre desquels il faut compter Gaston Darboux. A la suite d'une manifestation houleuse sur les boulevards parisiens, Darboux est arrêté, aux côtés de huit de ses camarades normaliens. Les neuf étudiants sont alors placés durant quelques heures au poste de police. En réaction, Pasteur - dont "*la sévérité à la tête de l'ENS est proverbiale*" ([**Decaillot-Laulagnet 1999**]) - veut naturellement mettre en place des sanctions. Mais il hésite à punir individuellement les neuf élèves : cela le mettrait dans l'obligation soit de sanctionner Darboux, ce qu'il se refuse de faire, soit d'afficher le traitement de faveur qu'il réserve à son protégé. En accord avec le Ministre Rouland, il finit par décider d'interdire à tous les élèves de l'Ecole de participer à quelque manifestation que ce soit. Loin d'instaurer l'apaisement, avec cette décision la tension continue alors de monter entre l'administration

39. Darboux écrira dans son *Eloge historique* de son maître Bertrand : "*C'était surtout au Collège de France qu'il était merveilleux. On y allait pour s'instruire, sans doute, mais on goûtait en même temps le plaisir délicat d'entendre son exposition*" ([**Darboux 1912**, 35]).

40. Voir également [**Decaillot-Laulagnet 1999**] pour plus d'informations sur l'affaire des haricots à l'ENS de 1863.

41. Pour plus d'information sur l'histoire de l'insurrection polonaise de 1863, on lira `http://www.beskid.com/insurrection.html`.

et les élèves, et les sanctions disciplinaires deviennent de plus en plus importantes [42]. Un élément inattendu vient alors cristalliser toutes les tensions accumulées entre les normaliens et leur administrateur Pasteur : le ragoût aux haricots servi tous les lundis à la cantine de l'Ecole Normale.

Les élèves se plaignent de ce "*ragoût exécrable*" et demandent le changement des menus, ce que Pasteur voit comme un caprice qu'il refuse tout net. Les normaliens entament alors une *grève du refectoire*, qui vaut à deux des élèves les plus actifs d'être menacés d'exclusion de l'Ecole par Pasteur. Devant cette menace, les élèves lancent alors un mouvement de démission collectif, ce que Pasteur jugera être "*un acte d'insubordination*" ([**Pasteur 1939**, 193]). Une lettre de démission circule alors parmi les normaliens. Lorsque la lettre parvient à l'administration de l'Ecole, elle a été signée par plus de la moitié des élèves. Ceux-ci sont ainsi classés soit comme des démissionnaires, soit comme des abstentionnistes. C'est là que Pasteur intervient encore en faveur de Gaston Darboux : pour lui éviter toute sanction future tout en préservant les apparences, Pasteur fait inscrire sur la liste l'élève Darboux comme étant "*en congé*". Il le garde ainsi de toute répercussion négative, venant soit de l'administration de l'Ecole, soit des élèves eux-mêmes.

Pour finir, il faudra une venue "*diplomatique*" du Ministre Gustave Rouland en personne à l'Ecole Normale pour que l'affaire dite des haricots prenne fin. S'il condamnera d'un côté les "*gamineries*" des élèves, il prendra d'un autre côté acte de leur témoignage de sympathie envers les polonais et les ramènera à leur "*dignité d'élève de l'ENS*". Certaines sanctions seront levées, mais les élèves normaliens s'étant inscrits comme démissionnaires sur la fameuse lettre seront privés de toute sortie de l'enceinte de l'Ecole durant deux semaines. Il va sans dire que cette affaire ne contribuera pas à desserrer la forte étreinte disciplinaire exercée par Pasteur sur la vie des pensionnaires de l'établissement de la rue d'Ulm.

Parmi les camarades de Darboux à l'ENS, ceux dont il semble être le plus proche sont, dans sa promotion, Charles André, Jules Violle et Edouard Lucas. Dans la promotion 1860, Gaston Darboux lie également quelques liens d'amitié avec Désiré André, ainsi qu'avec Ernest Lavisse de la promotion (littéraire) 1862 qui sera l'un de ses meilleurs amis tout au long de sa vie. L'année suivante, avec la promotion 1863 de son jeune frère Louis, les Darboux deviendront aussi proches de Félix Tisserand. On retrouvera d'ailleurs plus tard plusieurs de ces camarades normaliens impliqués dans la rédaction du "*Bulletin des Sciences*" dont Darboux aura la charge (voir [Chap.6,1.3]).

Durant sa deuxième année d'étude, Darboux commence déjà à entreprendre des recherches personnelles. Nous verrons en [Chap.3,1] que celles-ci sont liées à la Géométrie plane des ovales de Descartes, et dans l'espace aux liens entre le tore et les courbes du quatrième ordre [43]. Mais c'est surtout durant sa troisième année (1863-64) que les recherches personnelles de Darboux sur les surfaces orthogonales vont intéresser certains de ses maîtres, à commencer par Joseph-Alfred Serret et Joseph Bertrand. Cette année-là, l'étudiant nîmois qui a obtenu brillamment les deux licences de mathématiques et de physique à l'été 1863 est en pleine préparation de l'agrégation de mathématiques [44]. C'est

42. Pasteur ira jusqu'à faire sanctionner les élèves qu'on entendrait entonner *La Marseillaise*.

43. Voir [**Darboux 1864a**] et [**Darboux 1864b**].

44. Le Ministre Fortoul avait réuni les agrégations à l'image des baccalauréats : il n'en existait plus que deux, l'une pour les sciences et l'autre pour les lettres. En 1858, avec notamment l'intervention en ce sens de Pasteur, Rouland rétablit la spécialisation des agrégations.

en marge de sa préparation à l'agrégation que Darboux rédige en Mai 1864 un mémoire sur les surfaces orthogonales qu'il présentera à Serret en Juin. Ce-dernier en effectuera la présentation à l'Académie des Sciences le 1er Août 1864 [45], et un extrait en sera inséré aux Comptes-Rendus.

Ce premier vrai mémoire de recherche constitue pour Pasteur "*la révélation*" qu'il espérait tant chez celui qui n'était encore qu'un étudiant très prometteur. Pasteur évoquera ainsi dans une lettre au nouveau Ministre de l'Instruction Publique Victor Duruy ce "*travail très remarquable présenté à l'Académie des Sciences*", qui s'ajoute aux "*diverses notes qu'il a remises à MM. Les maîtres de conférences dans le courant de l'année sur divers sujets, à l'étude desquels il a pu se livrer sans cesser de tenir le premier rang dans sa division, malgré les préoccupations de la préparation au concours de l'agrégation*" [46]. En terminant ses trois années d'études à l'Ecole Normale, Darboux sera logiquement classé le 20 Septembre 1864, 23 ans après son maître Bertrand, au premier rang de l'agrégation de mathématiques.

3.2. L'agrégé-préparateur et sa thèse 1864-1866.

En 1864, la fin du cycle d'études de trois ans de Gaston Darboux à l'Ecole Normale coïncide pour Pasteur avec la montée en puissance de son processus de renversement du monopole de l'Ecole Polytechnique. Durant les trois années 1861-1864, Pasteur a déjà accompli beaucoup pour redorer le blason de la section scientifique normalienne. En 1862, la création d'une nouvelle chaire de Mathématiques que vient occuper Charles Hermite est déjà significative. Ensuite, en 1863, il profite du changement de Ministre [47] à l'Instruction Publique pour tenter de redonner vie à un projet qui le tient à cœur : la publication d'un recueil spécifique à l'Ecole Normale [48].

En 1859, Pasteur avait déjà envisagé la création d'une publication pour son Ecole, et avait envoyé un rapport en ce sens à l'Inspecteur général du Ministre Rouland. Dans ce rapport, il attirait l'attention sur "*l'utilité de la fondation d'un recueil destiné à réunir dans l'ordre des sciences les travaux des anciens élèves de l'École. [...] Il pourrait être appelé : Annales scientifiques de l'École Normale*". Bien entendu, on y retrouvait la marque de l'éternelle rivalité avec Polytechnique : "*L'École Polytechnique n'avait que quelques mois d'existence lorsque parurent, en 1795, les premiers cahiers de son journal*". Selon lui, la faiblesse de la publication de sa rivale polytechnicienne tient dans ce qu'elle "*ne renferme depuis un grand nombre d'années que des travaux sur les mathématiques. Le recueil de l'École Normale offrirait un intérêt plus général*" ([**Pasteur 1939**, 172]). Rouland ne donnera pas suite à ce projet. Mais en 1863 les choses ont changé : contrairement à son prédécesseur, Duruy est un ancien élève de l'Ecole Normale. En outre, et notamment en vertu du très médiatisé choix opéré par Darboux deux ans plus tôt, la notoriété de l'Ecole

45. [**Darboux 1864c**].
46. Voir [**Darboux 1912**, 459-462].
47. En Juin 1863, Victor Duruy remplace Gustave Rouland. Voir la biographie de Duruy : [**Geslot 2009**].
48. Voir la demande écrite de Pasteur : *Sur l'utilité d'un recueil ayant pour titre : Annales Scientifiques de l'Ecole Normale*, [**Pasteur 1939**, 174].

commence à se faire plus grande. Aussi en 1863 Duruy accepte-t-il la création des "*Annales Scientifiques de l'École Normale*", qui seront publiées à partir de 1864 [49].

Ce nouveau recueil sera un outil puissant pour faire rayonner les recherches des maîtres de l'École Normale (comme Puiseux, Hermite ou Verdet), mais il donnera également le moyen de publier les travaux des élèves normaliens eux-mêmes. Le premier numéro de 1864 contient ainsi un article de Pasteur sur la fermentation, mais également les travaux de thèse de ses trois préparateurs Gernez, Van Tieghem et Mascart. Darboux a probablement tenté - en vain - de persuader Pasteur de spécialiser encore plus le contenu des "*Annales*", craignant que la diversité des sujets des mémoires ne nuise à sa portée. C'est ce que Hoüel mettra en avant en 1870, et que Darboux ne pourra qu'approuver :

> Ce que vous me dîtes de ce recueil est malheureusement trop vrai. J'aurais voulu qu'on le consacrât uniquement aux Mathématiques, ou du moins qu'on le séparât en deux parties. Mais M. Pasteur étant président il n'y a rien à faire.
>
> Lettre non datée (Janvier 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

En parallèle, Pasteur obtient en 1864 la création d'une nouvelle bibliothèque pour l'École Normale, située plus près des laboratoires et exclusivement réservée aux contenus scientifiques. L'École Normale ne possédait en effet alors qu'une seule bibliothèque qui contenait à la fois les collections littéraires et scientifiques. Cette nouvelle bibliothèque, baptisée alors *Bibliothèque des Sciences* (aujourd'hui dite de *Mathématique et d'Informatique*) est ainsi ouverte à la rentrée de 1864 [50].

Darboux est partie prenante du renouveau de l'Ecole Normale dans la formation des élites scientifiques, et logiquement Pasteur ne veut pas le voir quitter l'Ecole Normale en 1864. Il écrit au Ministre Duruy durant l'été :

> Élève hors ligne : travail, conduite, distinction d'esprit, de caractère, de tenue ; rien ne laisse à désirer. Ce jeune homme se placera rapidement au nombre de nos mathématiciens les plus éminents. L'esprit d'invention était la seule qualité dont il fallait attendre la révélation chez ce jeune homme. Or il en a témoigné récemment par un travail très remarquable présenté à l'Académie et par diverses Notes [...] Il faut absolument qu'il reste à Paris.
>
> [**Darboux 1912**, 459-462]

Dans sa lettre, Pasteur propose au Ministre une solution pour conserver Darboux encore quelque temps au sein de l'Ecole Normale. En 1858, le père de la micro-biologie avait

49. Pasteur profitera de la tribune qui lui est offerte par l'Avertissement du premier Tome des "*Annales Scientifiques*" pour mettre en lumière le rayonnement nouveau de l'École Normale et son rôle incontournable dans la formation des élites scientifiques françaises. Il y écrit : "*[L]es études scientifiques y ont accompli des progrès considérables dans l'intervalle de ces vingt-cinq dernières années. [...] Aussi a-t-on vu l'École Normale attirer peu à peu à elle, dans l'ordre des sciences, comme elle en avait toujours eu le privilège dans l'ordre des lettres, une jeunesse d'élite, qui, après avoir été nourrie des fortes études de l'École, a porté dans toute la France, dans les lycées, dans les facultés, et jusque dans les premiers établissements de Paris, des professeurs, joignant à la pratique consommée de l'enseignement l'autorité du savant. Ce progrès des travaux scientifiques auxquels l'École Normale donne l'impulsion grandira de jour en jour*"... Les polytechniciens apprécieront.

50. Voir la section intitulée "*La Bibliothèque de l'École*", [**Ecole Normale 1895**, 447-453].

"*fortifié l'institution des agrégés-préparateurs*" ([**Hulin 1986**, 77]). Ce statut, qui s'accompagne alors d'une rémunération de 1,500 fr [51], permettait à des élèves normaliens, à l'issue de leur scolarité, de rester à l'École en bénéficiant d'un emploi du temps allégé adapté à la poursuite de leurs études personnelles. Ils pouvaient ainsi continuer à évoluer dans l'environnement scientifique privilégié de l'École, et "*servaient de modèle pour les étudiants plus jeunes qui pouvaient être attirés par la recherche*" ([**Zwerling 1980**, 41]). Mais les premiers agrégés-préparateurs n'étaient en réalité dans un premier temps que des biologistes et des physiciens qui travaillaient avec Pasteur dans son nouveau laboratoire de la rue d'Ulm. Ce que Pasteur propose à Duruy, c'est de créer un nouveau poste d'agrégé-préparateur pour les sciences mathématiques, dont pourrait immédiatement bénéficier Darboux. Favorisée par le départ en 1864 des deux préparateurs Gernez et Mascart, Duruy accepte cette demande : Gaston Darboux devient ainsi le premier agrégé-préparateur de Mathématiques. Il pourra profiter de ce statut privilégié pour effectuer des études doctorales à l'Ecole Normale entre 1864 et 1866 dans les meilleures conditions.

L'ouverture de ce statut coïncide avec la création de la Bibliothèque des Sciences : Pasteur en profite pour en accroître la légitimité, et désigne ainsi l'agrégé-préparateur Darboux comme étant en outre "*sous-bibliothécaire de la Bibliothèque des Sciences*". Il en sera ensuite ainsi pendant plusieurs décennies : on nommera systématiquement l'agrégé-préparateur de Mathématiques comme étant le sous-bibliothécaire de cette nouvelle bibliothèque scientifique [52].

Les premières recherches personnelles effectuées par Darboux durant l'année 1863-64 au sujet des surfaces orthogonales sont susceptibles de nombreux prolongements, nous le verrons largement dans le chapitre 3. C'est donc la suite de ses premières recherches que Darboux va effectuer dans sa thèse. Chasles en sera le directeur, mais c'est surtout des deux autres membres de son futur jury, Serret et Bouquet, dont les travaux ont alors été en rapport avec les thèmes proches de la Physique mathématique abordés dans sa thèse, que le doctorant normalien pourra s'aider.

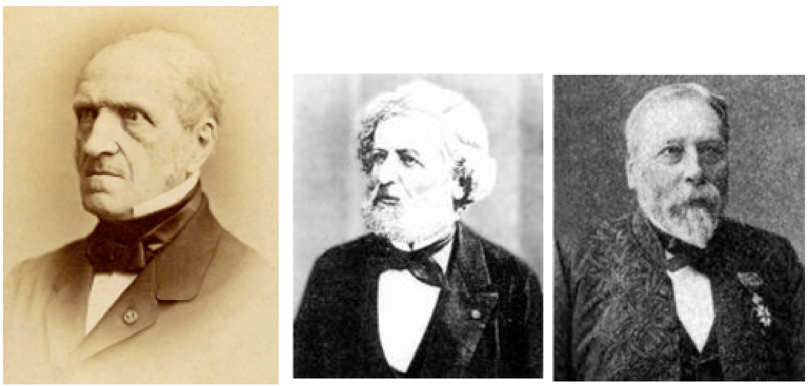
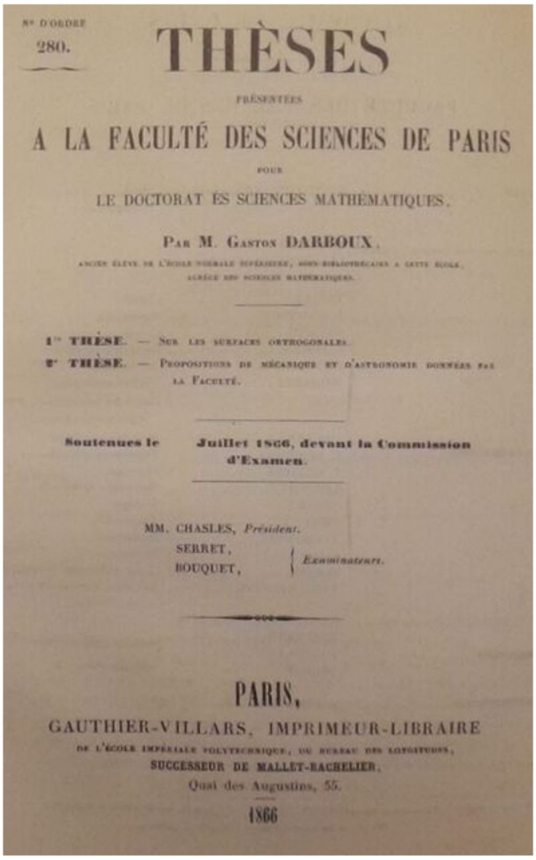


FIGURE 6. Les membres du jury de thèse de Darboux : de gauche à droite Chasles, Bouquet, Serret.

51. [**Zwerling 1980**, 49].

52. On peut consulter la liste des agrégés-préparateurs de mathématiques, et donc des sous-bibliothécaires des sciences, jusqu'à 1895 dans [**Ecole Normale 1895**, 663]. La Bibliothèque des Lettres comptait en 1864 également deux sous-bibliothécaires.

En Janvier 1865, le mémoire qu'il avait remis à Serret pour présentation à l'Académie des Sciences quelques mois plus tôt est imprimé dans le second volume des "*Annales Scientifiques*" de Pasteur ([Darboux 1865]). Ses recherches ont alors déjà bien progressé lorsque Darboux est chargé pour quelques mois de remplacer le professeur Antoine Amiot, malade, dans la classe de Mathématiques Spéciales du Lycée Saint-Louis. Il les poursuit et les termine durant l'année 1865-66. Après la validation en Mai 1866 du contenu de son manuscrit, il obtient son impression le 6 Juin 1866 par le doyen de la Sorbonne Henri Milne-Edwards. C'est finalement le 14 Juillet 1866 que Darboux soutient sa thèse en Sorbonne. Sa thèse "*Sur les surfaces orthogonales*" est bien connue, mais la règle alors en vigueur dans le cadre du doctorat obligeait le candidat à présenter deux thèses pour être reçu docteur ès sciences. Darboux ne déroge pas à la règle, et en guise de seconde thèse il répond à "*5 propositions de mécanique et d'astronomie données par la Faculté*".



N° D'ORDRE 280.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR

LE DOCTORAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. GASTON DARBOUX,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, SOUS-BIBLIOTHÉCAIRE A CETTE ÉCOLE, AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

1re THÈSE. — SUR LES SURFACES ORTHOGONALES.

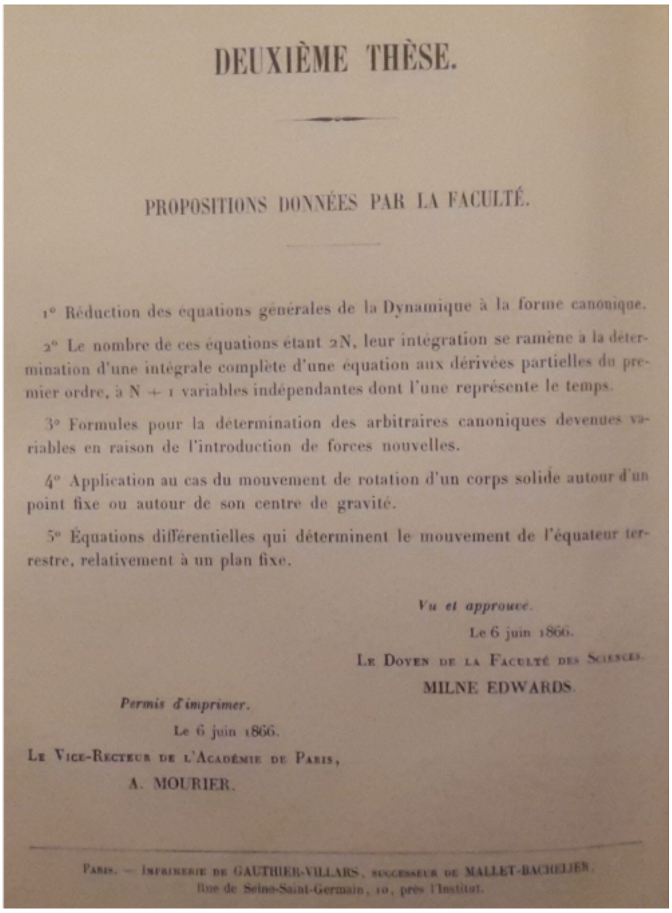
2e THÈSE. — PROPOSITIONS DE MÉCANIQUE ET D'ASTRONOMIE DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le Juillet 1866, devant la Commission d'Examen.

MM. CHASLES, *Président.*
SERRET, BOUQUET, *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1866



DEUXIÈME THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

1° Réduction des équations générales de la Dynamique à la forme canonique.

2° Le nombre de ces équations étant 2N, leur intégration se ramène à la détermination d'une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, à N + 1 variables indépendantes dont l'une représente le temps.

3° Formules pour la détermination des arbitraires canoniques devenues variables en raison de l'introduction de forces nouvelles.

4° Application au cas du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe ou autour de son centre de gravité.

5° Équations différentielles qui déterminent le mouvement de l'équateur terrestre, relativement à un plan fixe.

Vu et approuvé.
Le 6 juin 1866.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer.
Le 6 juin 1866.
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
A. MOURIER.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

FIGURE 7. Page de garde du manuscrit original de thèse de Gaston Darboux (à gauche) et deuxième thèse - en une unique page - (à droite) [53]

53. Un exemplaire, probablement tiré des "*Annales Scientifiques*", a été conservé par Gösta Mittag-Leffler. On y trouve la très rare page qui témoigne de la seconde thèse de Darboux.

Darboux "*soutint brillamment*" sa thèse, et fut reçu docteur "*avec toutes les félicitations du jury*" [54]. Il clôt ainsi ses cinq années d'études au sein de l'Ecole Normale sous l'ère Pasteur, au cours desquelles il aura côtoyé la communauté des mathématiciens français de premier rang. Malgré son jeune âge, grâce aux liens avec ses maîtres et, nous le verrons, au succès de ses travaux, il ne tardera pas à être considéré comme l'un des membres à part entière de cette communauté. Il écrit à Pasteur, à l'occasion de son départ :

> Je n'ai qu'à me féliciter d'être venu à l'École Normale et j'ai à vous remercier des excellents conseils que vous m'avez donnés il y a 5 ans. Je vais quitter l'École mais je n'oublierai pas que j'y ai passé sous votre direction 5 années très heureuses et j'espère que vous voudrez bien me permettre de venir vous voir de temps et temps et de conserver avec l'école de très bonnes relations.
>
> Lettre datée du 12 Septembre 1866 de Gaston Darboux à Louis Pasteur, [**Pasteur 1900**, 365]

S'il quitte administrativement l'Ecole Normale, physiquement Darboux ne s'en éloigne guère : il s'installe dans un petit appartement au n°48 de la rue d'Assas, dans le 6ème arrondissement de Paris, capitale qu'il ne quittera plus. Son frère Louis le rejoindra rue d'Assas en 1867, à sa sortie de l'Ecole Normale, puis ils y habiteront avec les deux sœurs beauvaisiennes Clara-Maria et Amélie-Cœlina (souvent appelée *Célina*) Carbonnier. Célina Carbonnier épousera Gaston Darboux en Juillet 1872 à Beauvais, au cours d'un mariage effectué dans un grand secret. Cette union viendra légitimer leur fils alors âgé de deux ans, Jean-Gaston. Louis s'était alors déjà uni à Clara-Maria l'année précédente [55].

Un épilogue normalien. En accord avec les propos d'Emile Borel que nous avons rapportés dans la section 2.3, Ernest Vessiot aimera rappeler "*l'élan des normaliens vers les recherches mathématiques dont [l']entrée à l'Ecole [de Darboux] avait été le signal, [et] qui ne s'est plus ralenti depuis. Ainsi s'est fondée une école mathématique normalienne dont nous sommes fiers à bon droit. C'est à Pasteur et à Darboux qu'il faut en rapporter l'honneur*" ([**Darboux 1933**, 22]).

Le simple choix effectué par Darboux d'intégrer l'ENS et non l'Ecole Polytechnique, conjugué aux efforts de Pasteur dont nous avons décrit plus haut les multiples aboutissements, ont contribué à donner à l'Ecole Normale Supérieure un prestige et un rôle nouveau dans la formation des élites scientifiques françaises. Cette tendance se poursuivra tout au long de la fin du XIXème siècle, ce qui a été étudié en profondeur par [**Hulin 1986**] et [**Zwerling 1980**]. Suivant le principe des vases communicants, à partir des années 1860 "*l'influence de l'Ecole Polytechnique va rapidement diminuer jusqu'à être presque négligeable [pour le milieu mathématique français] après 1914*" [56]. L'action de Darboux en faveur de la promotion de son école formatrice ne s'arrête pas à ses cinq années d'études.

54. Voir [**Lebon 1910**] et [**Darboux 1933**].
55. Voir [**Archives Oise**] pour les mariages Darboux - Carbonnier, et [**Archives Paris**] pour la naissance de Jean-Gaston Darboux le 11 Septembre 1870.
56. Citation de [**Belhoste 2001b**, 17], qui rappelle l'exception du cas d'Henri Poincaré (X 1873). Voir également [**Gispert 1996b**] à propos du renversement d'influence à partir des années 1860 entre l'Ecole Polytechnique et l'Ecole Normale Supérieure, et le lien avec le paysage mathématique français de 1860.

Il contribue tout d'abord grandement au rayonnement des "*Annales Scientifiques*" où il publie sa thèse en 1866 ([**Darboux 1866**]), et où il insère 8 mémoires entre 1865 et 1872. C'est à cette date qu'il réintègre l'Ecole Normale, mais à présent dans le costume du maître de conférences - et non plus habillé de l'unique chemise blanche, du "*haut de forme aux reflets amortis*" et de "*l'habit à queue qui faisai[en]t reconnaître [les élèves normaliens] sur le boulevard Saint-Michel*" à cette époque [57]. Entre temps, il a rencontré en tant que professeur de la classe de Mathématiques Spéciales du Lycée Louis-le-Grand un grand succès : en 1870, 16 de ses 21 élèves sont déclarés admissibles après leurs premières sessions d'examens. Cette réussite se prolongera encore l'année suivante, comme en témoignera son élève Lucien Lévy [58].

Le professeur Darboux restera à l'Ecole Normale jusqu'en 1881. Jules Tannery, qui lui succédera, décrira en 1895 l'impact de Darboux sur le développement et le prestige scientifique de l'Ecole :

> [Darboux est] le plus illustre de ceux qui ont passé par les mains de M. Bertrand [..] Comment ne pas rappeler que la section mathématique a brillé d'un éclat incomparable pendant que M. Darboux la dirigeait [59] ; qu'il a eu successivement comme élèves M. Appell, M. Picard, M. Goursat, pour ne citer que des noms déjà illustres, que depuis il n'a cessé, non plus que M. Hermite, de soutenir, d'encourager, d'aider ceux qui passent dans cette maison dont il est la gloire.
>
> [**Ecole Normale 1895**, 390-394]

Sur la période 1852-1856, un seul des étudiants ayant eu à choisir entre Normale et Polytechnique avait opté pour la première. Ils seront 39 sur la période 1868-1879 ([**Zwerling 1980**, 48]). La part de normaliens consacrant leur carrière à la recherche plutôt qu'à l'enseignement au lycée va dans le même temps considérablement augmenter [60], et la prédominance polytechnicienne dans les institutions scientifiques sera en conséquence bientôt renversée (à l'Académie des Sciences par exemple, ou encore au sein de la *Société Mathématique de France* comme l'a montré [**Gispert 1996a**]).

Toute sa vie, Darboux aura contribué activement à promouvoir son Ecole Normale. Cela influencera jusqu'à son rôle de rédacteur du "*Bulletin des Sciences*" qui, nous le verrons, sera partie prenante de cette promotion. Même passivement - et c'est ce qu'évoquait Emile Borel - grâce à "*son prestige personnel*", Darboux a incarné profondément "*l'émergence de l'Ecole Normale Supérieure*" [61] dans la formation et le rayonnement des élites scientifiques, ce que Pasteur avait tant désiré. Avec le temps, Darboux aura nettement dépassé les premières espérances de son chimiste d'administrateur.

57. Propos vestimentaires de Gaston Darboux (sur la chemise) et de Léon Charve (ENS 1869), également rapportés en partie dans [**Decaillot-Laulagnet 1999**].
58. Voir le témoignage de L. Lévy dans l'annexe 6. A propos des chiffres de 1870, voir la lettre non datée (de Juillet 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, reproduite dans [**Gispert 1987**, 142].
59. La "*direction*" de Darboux n'est qu'informelle : tous les maîtres de conférences de la section mathématique normalienne ont le même statut.
60. Elle passe de 24% pour 1840-1856, à 72% pour les *années Pasteur* 1857-1867 ([**Zwerling 1980**, 43]).
61. Il s'agit du titre de l'article [**Zwerling 1980**].

FIGURE 8. Quelques portraits de Gaston Darboux

CHAPITRE 2

Foyers et focales des courbes et des surfaces : évolution de la notion et apports de Darboux

Parmi les premiers travaux publiés par Darboux durant ses études, tous intimement reliés à son travail de doctorat, une notion est fréquemment redéfinie et employée : la notion de *foyer* pour les courbes et - surtout - pour les surfaces. Pour les surfaces, Darboux parle plutôt de *focale*, mais il semble que cette notion n'ait alors pas encore été clairement définie dans le cadre des surfaces les plus générales. Ainsi lorsqu'il présente, par l'intermédiaire de Joseph-Alfred Serret, sa première note à l'Académie des Sciences le 1er Août 1864 à propos d'une nouvelle famille de surfaces orthogonales [1], le jeune Darboux (qui a à peine 22 ans) prend-il le soin de bien préciser : "*ces surfaces admettent pour enveloppe une surface développable du genre de celles qui sont comprises dans l'équation* $[1+p^2+q^2=0]$. *On peut exprimer ce résultat d'une autre manière en disant que les surfaces sont homofocales*" ([**Darboux 1864c**, 240-241]).

Quelques mois plus tard, en Janvier 1865, le premier mémoire du géomètre nîmois paraît dans les "*Annales Scientifiques de l'Ecole Normale*". Toujours dédié à la théorie des surfaces orthogonales [2], Darboux fait remarquer dans son introduction :

> je fais voir de même [que E. E. Kummer] que des surfaces orthogonales sont toujours *homofocales*. Il est nécessaire d'adopter pour cela une définition des focales et des foyers d'une surface qui est l'extension naturelle de la définition des foyers dans les courbes.
>
> [**Darboux 1865**, 55]

Il n'existe pas d'historiographie récente relative à la notion de focale. On ne saurait en effet trouver des traces de cette notion que dans la célèbre "*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*" dans les articles de [**Castelnuovo Enriques 1908**] et de [**Meyer 1930**]. Mais ces éléments ne sont que trop parcellaires et ne reflètent en rien l'évolution progressive de la notion de focale. Par ailleurs, l'ouvrage du mathématicien italien Gino Loria sur la naissance des théories géométriques, [**Loria 1896**], ne permet pas non plus de rendre compte de l'histoire de la notion de focale des surfaces puisque l'on n'y trouve, à bien y regarder, que des fragments de l'émergence de cette notion dans l'espace

1. Nous discuterons en [Chap.3,1.1] la notion de système triple orthogonal pour les surfaces de $\mathbb{R}^3$, et dans la suite du chapitre les apports de Darboux dans ce domaine. La nouvelle famille dont il s'agit est, bien sûr, formée par ce qui deviendra connu sous le nom de *cyclides*.

2. Il s'agit en fait d'une seconde version du mémoire que Darboux avait remis à J-A Serret quelques mois plus tôt et qui avait donné naissance à la communication dans les *Comptes-Rendus* de l'Académie [**Darboux 1864c**].

pour les surfaces du second degré. Par conséquent pour mieux comprendre le rôle de Darboux dans l'évolution de cette notion, les outils et les propriétés qui s'y rapportent, nous devons remonter à la notion de foyer des courbes planes dont elle constitue l'extension naturelle.

A en croire Darboux, "*on ne connaissait les foyers que dans les courbes du second degré, quand Plücker donna de ces points une définition qui s'étend à toutes les courbes*" ([**Darboux 1873a**, 9]). Ce serait donc grâce au mathématicien allemand Julius Plücker que la notion de foyers des courbes aurait, durant la première moitié du XIXème siècle, été généralisée aux courbes de degré quelconque, après n'avoir été longtemps utilisée que pour les courbes du second degré, c'est-à-dire les coniques. Mais Plücker a-t-il lui-même donné l'extension de cette notion ou n'a-t-il développé que les outils pour le faire ? La citation de Darboux ne permet en effet pas de trancher ceci. Par ailleurs, de quels outils s'agit-il et dans quelle mesure ces outils sont-ils réutilisés par la suite par Darboux concernant les surfaces ? Il est d'autant plus délicat de répondre à ces questions qu'on ne trouve dans aucun des 5 ouvrages majeurs de Plücker [3] une véritable définition des foyers concernant les courbes quelconques. Felix Klein ne mentionnera à propos des mathématiques de son maître rien au sujet de ses (éventuelles) recherches liées à la notion de foyer ([**Klein 1926**]). En outre, aucune référence précise n'est faite ultérieurement par les mathématiciens à cette époque en lien avec une potentielle définition générale qui aurait pu orienter nos recherches. Enfin, là encore l'historiographie récente peine à fixer l'histoire de la notion de foyer. Il faut donc aussi en revenir à l'"*Encyklopädie*" du début du XXème siècle ou aux travaux de Gino Loria ([**Loria 1896**] et [**Loria 1948**]) pour obtenir quelque source à ce sujet. En dépit de certains renseignements bibliographiques précieux, cela reste insuffisant pour évaluer précisément le cheminement des idées et les apports mathématiques successifs permettant de retracer une véritable histoire des foyers des courbes planes.

On peut ainsi trouver dans l'ancien ouvrage du mathématicien anglais William Rouse Ball une mention relative aux foyers et à Plücker ; mais celle-ci se situe dans un paragraphe dédié à un autre mathématicien : Jean-Victor Poncelet !

> Les principales propriétés des coniques que Poncelet découvrit au moyen de l'homologie sont celles-ci : les foyers d'une conique peuvent être considérés comme des cercles de rayon nul ayant un double contact avec la conique, définition qui a permis à Plücker de généraliser la notion de foyer [...]
>
> [**Rouse Ball 1906**, §57]

On doit en revanche à l'historien américain Carl Boyer d'avoir exprimé une idée plus précise du travail de Plücker relatif aux foyers et de certains des outils mathématiques impliqués dans cette recherche :

> dans des articles et des ouvrages ultérieurs [à 1831] Plücker a étendu son travail pour inclure les coordonnées cartésiennes imaginaires et les coordonnées homogènes. Il devenait alors trivial de justifier le théorème de Poncelet stipulant que tous les cercles ont en commun deux points imaginaires à l'infini [...] Plücker montra également que les foyers des coniques ont la propriété que les tangentes imaginaires à la courbe issues de ces

3. Il s'agit, comme nous le verrons et comme le listera l'élève de Plücker Felix Klein ([**Klein 1926**, 121]), des ouvrages [**Plücker 1831**], [**Plücker 1835**], [**Plücker 1839**], [**Plücker 1846**] et enfin [**Plücker 1868**].

> points passent par ces deux mêmes points circulaires ; il définit ainsi le foyer d'une courbe plane d'une degré quelconque comme possédant cette propriété.
>
> [**Boyer 1968**, 582]

Si cela reste bien incomplet, on peut tout de même constater que l'extension de la notion de foyer des courbes et les propriétés s'y rapportant apparaissent intimement liées au développement de la géométrie projective et à l'introduction des imaginaires dans la première partie du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Pourtant l'historiographie récente relative à la géométrie projective ([**Gray 2007**] et [**Nabonnand 2006**]) n'a pas fait mention de cette notion : l'attention dédiée à Poncelet et à Plücker a été relative à d'autres problématiques telles que la dualité, la théorie des polaires réciproques ou encore les formules de Plücker en lien avec le paradoxe de Cramer. Plus récemment, les études consacrées à Plücker par Jemma Lorenat ([**Lorenat 2015**] et [**Lorenat 2016**]) se sont focalisées sur les tout premiers travaux de Plücker et leur comparaison avec ceux de Gergonne ou de Steiner, mettant souvent en relief l'opposition entre les géométries synthétique et analytique. Seule la recherche datant de l'entre-deux-guerres de Loria ([**Loria 1948**]) donne, nous y reviendrons, une idée plus précise sur le rôle de Plücker dans la définition des foyers des courbes en lien avec l'évolution des systèmes de coordonnées sur laquelle cette recherche est centrée.

L'absence de contenu historiographique relatif à la théorie des foyers, et plus encore des focales, relève-t-elle d'un manquement des historiens ou reflète-t-elle plutôt le peu d'importance accordée par les mathématiciens eux-mêmes à cette notion ? Certains acteurs ont-il été oubliés, notamment dans la transposition tardive de cette notion à la théorie des surfaces ? Quels sont les liens qui existent entre l'évolution de la géométrie projective et celle de la notion de foyer ? Enfin comment a été rendue possible l'extension de cette notion aux surfaces, d'un certain degré tout d'abord puis de tout degré ensuite ? Nous espérons apporter ci-dessous quelques éléments de réponse, en présentant les origines et les développements successifs de cette notion, depuis son rôle dans la théorie des coniques jusqu'à son apparition dans celle des surfaces générales. Ceci sera le sujet des sections 1 à 5.2. Nous aurons notamment l'occasion d'y aborder la question du "*style*" et des "*écoles de recherche*" avec [**Mancosu 2010**] et [**Parshall 2004**].

Les sections ultérieures seront concentrées sur certaines difficultés historiographiques spécifiques à ce sujet (6) et les travaux géométriques de Darboux, aux multiples facettes, liés à cette notion (7). Les difficultés historiographiques que nous soulignerons sont à relier à l'importance du vocabulaire dans le langage scientifique, du fait des nombreux problèmes liés aux lexiques qui se présentent au sein de notre étude. Une attention toute particulière sera réservée à la place de l'ambiguïté dans le vocabulaire mathématique, ce que nous traiterons à l'aide des outils théoriques de la logique linguistique développés par [**Pinkal 1995**].

Cette analyse des métamorphoses de la théorie (projective) des foyers constitue une voie d'entrée idéale dans l'étude des travaux de Gaston Darboux. Révélatrice de la place prédominante de la géométrie dans ses premières recherches mais également paradoxalement de la mixité des méthodes employées dans ce domaine, elle nous permet par ailleurs d'aborder certains points mathématiques précis qui seront bien utiles par la suite. Mais avant tout, cette partie dégage déjà largement les contours de l'identité scientifique de Darboux ainsi que les premiers méandres de son cheminement personnel et intellectuel. La diversité des géométries progressivement abordées par Darboux est en effet le reflet d'une diversité croissante des intérêts scientifiques de celui-ci. D'abord envisagées comme un lien synthétique entre les géométries de Chasles et de Plücker, nous verrons que les mathématiques du jeune normalien se développent rapidement jusqu'à s'affranchir des différentes frontières entre les domaines de la géométrie.

1. Quoi de neuf depuis les Grecs ? La révolution de Poncelet

L'apparition de la notion de foyer est naturellement liée à l'étude des courbes planes que l'on nomme *coniques* ou *section coniques*, mais que les anciens Grecs dénommaient *lieux solides* ("*locis solidis*"). Cette dénomination vient de ce que le lieu géométrique représenté par la conique apparaissait naturellement comme résultant de l'intersection d'un cône, droit, et d'un plan [4]. Selon la position du plan sécant, on obtient ainsi trois différentes formes géométriques : 1) les paraboles, 2) les ellipses (dans lesquelles on inclut le cercle) et 3) les hyperboles.

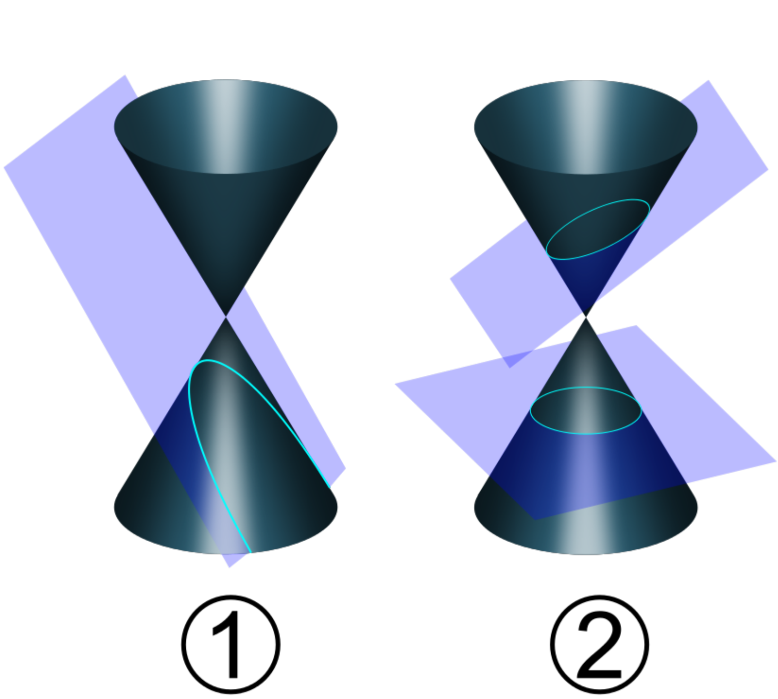


FIGURE 1. Les trois coniques dans le cône. La parabole est obtenue par une section parallèle à un plan tangent du cône. [5]

4. C'est pour cette raison que la dénomination "section conique" sera presque exclusivement utilisée jusqu'au milieu du XIXème siècle.

L'étude des coniques remonte, selon [**Chasles 1837a**], à Platon et à ses disciples, les plus célèbres pour leurs études sur les coniques étant Menechme, Aristée puis Apollonius et quelques siècles plus tard Pappus. Le "*Traité des coniques*" d'Apollonius de Perge, daté du IIème siècle avant J-C, est généralement reconnu comme un des principaux ouvrages des géomètres grecs relativement aux coniques [6]. Apollonius y définit ce qu'il nomme les "*points d'application*" ("*Puncta ex applicatione facta*") comme les deux points du grand axe de l'ellipse (ou de l'axe transverse de l'hyperbole) qui divisent cet axe "*en deux segments dont le produit est égal au carré du demi-axe conjugué*" ([**Chasles 1837a**, 285]). Il s'agit ainsi d'une définition essentiellement métrique permettant de relier entre elles les différentes longueurs caractéristiques de la conique : longueurs des demi-axes et écart des foyers au centre. Aussi cette définition n'est-elle pas reliée au mode de génération de la conique elle-même par section plane du cône. Il est néanmoins frappant de constater que l'appellation de "*points d'application*" sera entièrement justifiée presque deux millénaires plus tard lorsque, liant les coniques avec les trajectoires des planètes du système solaire, Kepler et Newton montreront que ces points bien singuliers, nos foyers, seront nécessairement les lieux des centres de la force centrale s'exerçant sur les planètes, soit en d'autres termes l'emplacement du Soleil [7].

Il faut attendre les travaux de Pappus d'Alexandrie, au IVème siècle de notre ère, pour que le foyer ne joue plus le rôle de propriété de la conique mais qu'il participe de sa génération. La description d'une conique devient alors possible dans le plan à partir de trois éléments : un point - le foyer F -, une droite - la directrice (D) -, et une valeur positive - l'excentricité e. La conique est alors décrite par l'ensemble des points M dont le rapport des distances à F et à (D) est constamment dans la proportion e, soit :

$$\text{Conique} = \{ \text{ points } M, \ \frac{d(M,F)}{d(M,(D))} = e \ \}$$

Dès que l'excentricité diffère de l'unité (ce cas correspondant au cas particulier de la parabole), on obtient par symétrie l'existence d'un second foyer F', lui-même associé à une nouvelle directrice (D'). Ces coniques (telles que $e \neq 1$) sont appelées *coniques à centre*, leur centre pouvant être défini comme le milieu du segment reliant les deux foyers. L'axe (FF') est alors un axe de symétrie de la conique qui prend le nom d'*axe focal*. La connaissance des deux foyers d'une conique à centre permet de se débarrasser de la directrice pour décrire le lieu géométrie uniquement par les distances aux deux foyers : c'est la définition dite *bifocale*.

– l'ellipse de demi-grand axe $a > 0$ est l'ensemble des points M satisfaisant à la relation :

$$MF + MF' = 2a$$

– l'hyperbole de demi-axe transverse $a > 0$ est l'ensemble des points M tels que :

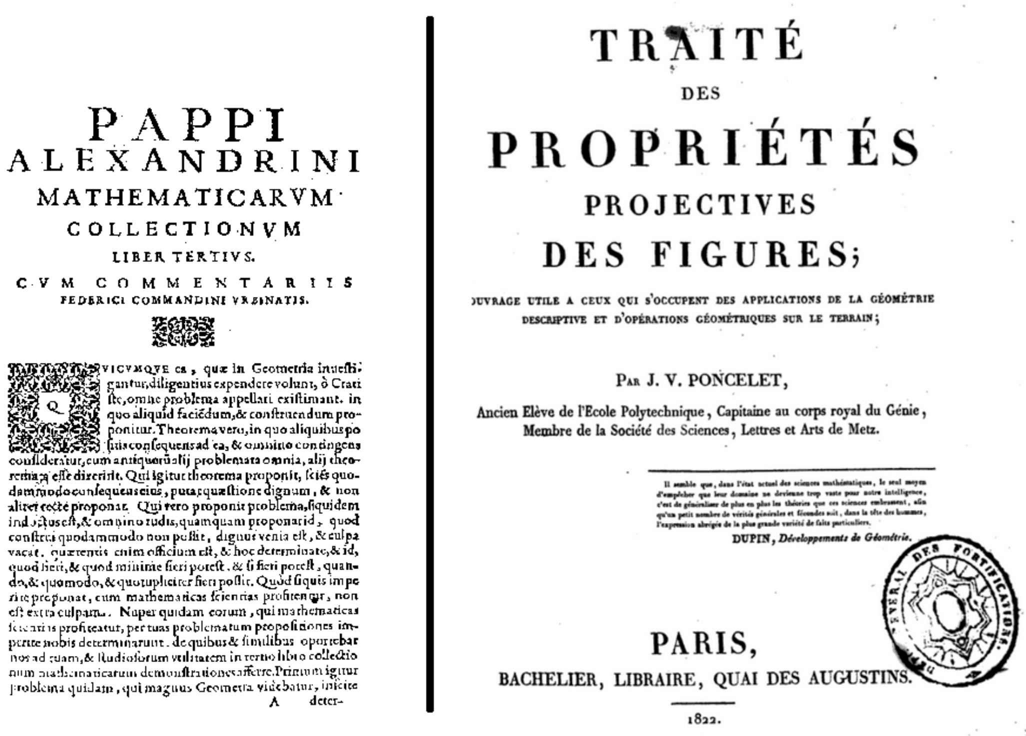
$$MF - MF' = \pm 2a$$

5. Crédits image : Pbroks13, Wikimedia Commons.

6. A propos du Traité d'Apollonius, on pourra consulter [**Decorps-Foulquier 2015**]. Sur les oeuvres générales d'Apollonius et de Pappus, le lecteur pourra se reporter sur les travaux de Paul Ver Eecke.

7. On pourra consulter [**Feynman 1980**] pour un bref rappel des découvertes de Kepler et de Newton en lien avec les trajectoires elliptiques et la loi des aires.

On comprend que l'étude des propriétés des foyers est longtemps restée décorrélée de la considération des coniques dans le cône. Il faudra en fait attendre les années 1820 pour que Quételet, Dandelin et Chasles parviennent à de jolis résultats dans ce domaine [8].


PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICARVM
COLLECTIONVM
LIBER TERTIVS.
CVM COMMENTARIIS
FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS.

QVICVMQVE ea, quæ in Geometria inuestigantur, diligentius expendere volunt, ò Crati ste, omne problema appellari existimant, in quo aliquid faciẽdum, & construendum proponitur. Theorema vero, in quo aliquibus positis consequens ad ea, & omnino contingens consideratur, cum antiquorũ alij problemata omnia, alij theoremata esse dixerint. Qui igitur theorema proponit, sciẽs quodammodo consequens eius, putat quæstione dignum, & non aliter recte proponat. Qui vero proponit problema, siquidem indoctus est, & omnino rudis, quamquam proponat id, quod construi quodammodo non possit, dignus venia est, & culpa vacat. quærentis enim officium est, & hoc determinate, & id, quod fieri, & quod minime fieri potest. & si fieri potest, quando, & quomodo, & quotupliciter fieri possit. Quod siquis imperite proponat, cum mathematicas scientias profiteatur, non est extra culpam. Nuper quidam eorum, qui mathematicas scientias profiteatur, per tuas problematum propositiones imperite nobis determinarunt. de quibus & similibus oportebat nos ad tuam, & studiosorum vtilitatem in tertio libro collectionum mathematicarum demonstrationes afferre. Primum igitur problema quidam, qui magnus Geometra videbatur, inscite
A deter-

TRAITÉ
DES
PROPRIÉTÉS
PROJECTIVES
DES FIGURES;
OUVRAGE UTILE A CEUX QUI S'OCCUPENT DES APPLICATIONS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE ET D'OPÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES SUR LE TERRAIN;

PAR J. V. PONCELET,
Ancien Elève de l'Ecole Polytechnique, Capitaine au corps royal du Génie, Membre de la Société des Sciences, Lettres et Arts de Metz.

Il semble que, dans l'état actuel des sciences mathématiques, le seul moyen d'empêcher que leur domaine ne devienne trop vaste pour notre intelligence, c'est de généraliser de plus en plus les théories que ces sciences embrassent, afin qu'un petit nombre de vérités générales et fécondes soit, dans la tête des hommes, l'expression abrégée de la plus grande variété de faits particuliers.
DUPIN, *Développements de Géométrie.*

PARIS,
BACHELIER, LIBRAIRE, QUAI DES AUGUSTINS.
1822.

FIGURE 2. La première page du "Traité" de Poncelet (à droite) parait un millénaire et demi après celle des "Synagogè" de Pappus (à gauche)

Au début du XIXème siècle, un mathématicien français va développer une nouvelle théorie des coniques - et ainsi faire évoluer la notion de foyer s'y rapportant - grâce aux outils naissants de la géométrie projective qu'il emploie : Jean-Victor Poncelet [9]. Originaire de Metz où il naît en 1788, Poncelet étudie à l'Ecole Polytechnique entre 1807 et 1812 avant de combattre dans les rangs des armées napoléoniennes. Ce n'est qu'après 1815 que le messin se fera un nom parmi les mathématiciens avec surtout la parution de son important "*Traité des propriétés projectives des figures*" [**Poncelet 1822**] qui deviendra incontournable pour les études de géométrie projective.

Entre Pappus et Poncelet, c'est-à-dire un laps de temps de presque 1 500 ans, de très nombreuses propriétés et définitions des foyers des coniques sont mises au jour. Ces propriétés sont le plus souvent métriques ou angulaires, et liées à la génération de la courbe même par la construction de ses points ou de ses tangentes. Dans son "*Traité*" de 1822,

8. Nous mentionnerons ces résultats nouveaux dans la section 4.1. On peut rappeler que l'étude même des coniques considérées dans le cône a été notamment entreprise par Desargues dès le début du XVIIème siècle, mais ces travaux n'amenèrent pas de nouvelles propriétés relatives aux foyers.

9. Pour plus de détails sur les travaux de Poncelet dans le domaine de la géométrie projective et plus particulièrement sur les "*figures homologiques*", voir [**Nabonnand 2006**].

Poncelet utilise ainsi une définition des foyers d'une conique à centre liée à l'enveloppe de ses tangentes et à la considération du cercle principal. Ce-dernier est le cercle de même centre que la conique et de rayon le demi-grand axe (ou demi-axe transverse) de la conique : il est donc tangent à la conique en ses deux sommets, sommets que Poncelet note T et T'. La construction proposée est alors la suivante :

> AB étant une tangente quelconque de la section conique, terminée à la circonférence du cercle [principal], soit inscrit à ce cercle le triangle ABC, dont le côté AC passe par le centre O commun aux deux courbes, l'autre côté BC rencontrera [l'axe (TT')] en un point F, qui demeurera invariable quelle que soit la tangente AB [...]
>
> [**Poncelet 1822**, 257]

Le point F est alors un foyer de la conique, et on voit qu'il est par construction situé sur l'axe TT' qui devient l'axe focal. Par ailleurs, puisque la considération d'une même tangente AB conduit à la formation de deux triangles inscrits selon que l'on fait porter l'angle droit sur B (comme dans la citation ci-dessus) ou sur A, la construction proposée amène naturellement à l'existence de deux foyers situés symétriquement sur l'axe focal par rapport au centre O. Enfin, Poncelet remarque que cette construction des foyers persiste si l'angle $\widehat{ABC}$ est contraint de prendre une valeur fixée quelconque, autre que 90°, pourvu que l'on remplace le cercle principal par un cercle concentrique de rayon convenablement choisi.

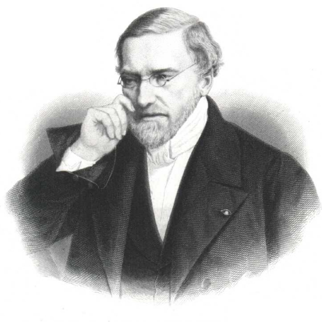


FIGURE 3. Jean-Victor Poncelet

L'ambition de Poncelet dans son *Traité* n'est néanmoins nullement une étude systématique des sections coniques, et encore moins des foyers de celles-ci. Par cet ouvrage, le géomètre messin s'intéresse en fait à des propriétés d'un genre nouveau : les *propriétés projectives*. Il s'agit des propriétés qui se conservent lorsqu'on effectue la "*projection centrale*" des figures : on considère ainsi désormais une figure plane comme immergée dans l'espace possédant 3 dimensions et résultant de l'intersection d'un plan et de droites issues d'un même point de l'espace, c'est-à-dire faisant partie d'un même *faisceau*. En faisant varier la position du plan, on obtient alors différentes figures mais qui sont liées par le fait d'être toutes des projections d'une même figure : pour Poncelet, ce sont des "*figures homographiques*". D'un point de vue projectif, on peut dire qu'il s'agit en fait d'une seule et même figure.

Son *Traité* est également l'occasion pour Poncelet de développer son "*principe de continuité*" [10]. Celui-ci affirme que "*les relations appartenant à une certaine figure demeurent, dans leur forme explicite, applicables à toutes les situations possibles de cette figure*" (citation de Poncelet reprise dans [**Nabonnand 2006**, 46]). Le point de vue projectif et le principe de continuité amènent naturellement Poncelet à travailler à la fois avec des éléments à l'infini et avec des relations imaginaires, qu'il nommera "*idéales*". Aussi par exemple deux droites parallèles du plan auront toujours un point en commun situé à l'infini : ces deux droites sont en effet obtenues par le principe de continuité via un déplacement continu de deux droites sécantes, qui ont donc bien un point de concours. A mesure que leur position s'approche du parallélisme, le point d'intersection fuit vers l'infini. On obtient ainsi dans le plan une droite de points situés à l'infini, et de même dans l'espace avec un plan à l'infini. La construction du pôle d'une droite relativement à une conique dans la théorie des polaires réciproques [11] nécessite par ailleurs de considérer la droite comme une sécante à la conique. Que cette sécante soit *réelle* ou *idéale*, la construction proposée persistera sans modification aucune.

Avec des notations modernes, on voit que Poncelet plonge tout à fait le plan $\mathbb{R}^2$ dans son complété projectif complexe $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. S'il considère des contacts (intersections et tangences) idéaux, Poncelet se garde néanmoins d'employer des *notations* complexes : ses considérations ne sont résolument pas analytiques et aucun système de coordonnées n'est utilisé. D'ailleurs, hormis l'écriture d'un petit nombre de relations portant sur des distances, le traité [**Poncelet 1822**] ne comporte presque aucune équation. Le fait de s'intéresser aux propriétés projectives simplifie grandement l'exposition de la théorie des coniques : en effet ces courbes sont par nature le résultat des différentes projections que l'on réalise à partir du faisceau des droites qui forment les arêtes d'un même cône du second degré. Puisqu'il existe toujours une section plane du cône qui est circulaire [12], toutes les propriétés projectives des coniques peuvent se déduire de la simple étude du cercle. C'est ainsi le cercle qui est au coeur de l'étude des sections coniques d'un point de vue projectif faite par Poncelet.

L'apport spécifique de Poncelet à la notion de foyer des coniques provient de son étude des contacts des sections coniques ayant un foyer commun. Cet apport s'appuie également largement sur son principe de continuité, ainsi que sur le rôle central joué par les cercles en vertu de ce qui précède.

Dans un premier temps, Poncelet s'attarde sur la théorie du contact de sections coniques quelconques ([**Poncelet 1822**, 171-174]). Il commence par définir les notions relatives à *l'homologie* liant deux sections coniques (voir [**Nabonnand 2006**, 77]). Puis il remarque les propriétés homologiques existant entre deux coniques possédant "*un double contact S, S'*", c'est-à-dire deux coniques tangentes en deux points S et S' :

> [...] les deux points S, S' et les tangentes qui leur correspondent seront toujours des centres et des axes d'homologie conjugués par rapport aux deux courbes ; [...] le point de concours P de ces tangentes, qui sont les

10. Pour plus de détails sur le principe de continuité de Poncelet, voir [**Nabonnand 2006**, 44-55] et [**Gray 2007**, 17-22]

11. Nous reviendrons à plusieurs reprises sur cette théorie fondamentale. Nous pouvons indiquer au lecteur curieux de se reporter à [**Nabonnand 2006**, 58-72] et [**Gray 2007**, 53-62] pour découvrir les ressorts de cette théorie.

12. Nous verrons dans la suite qu'il existe en fait, en général, deux différentes séries de sections d'un cône formant des circonférences.

> seules qui puissent alors appartenir à ces courbes, sera à la fois le pôle et le centre d'homologie conjugué à la sécante commune de contact SS'.
>
> [**Poncelet 1822**, 173]

Plus loin, Poncelet relie ces remarques sur les doubles contacts des coniques avec la configuration particulière de deux coniques possédant un foyer commun. Grâce à une propriété mise en évidence par Philippe De La Hire plus de cent ans auparavant, Poncelet note que toute sécante à une conique passant par un foyer possède son pôle sur la droite perpendiculaire à la sécante et issue du même foyer [13]. Cette propriété permet de montrer que le foyer commun à deux sections coniques n'est autre que le centre d'homologie lié à ces deux coniques. Grâce aux propriétés soulignées plus tôt dans le cadre des doubles contacts, on a donc la caractérisation essentielle suivante :

> Le foyer commun au système de deux sections coniques, tracées sur un même plan, est pour elles un centre d'homologie ou de projection ; c'est-à-dire un point de concours (ici nécessairement idéal) des tangentes communes aux deux courbes.
>
> [**Poncelet 1822**, 261]

Il ne reste plus alors à Poncelet qu'à exploiter complètement cette propriété en considérant une conique comme systématiquement couplée à une seconde conique possédant avec elle un foyer commun : le cercle (de rayon quelconque) centré en ce foyer. Ledit foyer devient alors le "*centre d'homologie ou de projection*" de la conique et du cercle et est par conséquent le lieu de rencontre des tangentes, imaginaires, communes aux deux courbes. Et Poncelet de conclure en invoquant son *principe de continuité* :

> Tel est donc le caractère du foyer des sections coniques ; et ce caractère se conserve, comme on voit, en vertu du principe de continuité, même quand on suppose le cercle infiniment petit [14] ; auquel cas l'une des sécantes, qui lui est commune avec la section conique, se confond évidemment avec la polaire focale de cette section conique.
>
> [**Poncelet 1822**, 263]

Bien que non formulé dans ces termes précis, Poncelet considère donc bien les foyers des sections coniques comme des cercles infiniment petits doublement tangents à la conique. Les tangentes en question sont imaginaires, et l'axe de l'homologie de la conique et de son foyer - considéré comme un cercle infiniment petit - correspond à la sécante de contact. Cette sécante coïncide alors avec la *polaire focale*, soit la directrice liée à ce foyer. On voit ainsi dans quelle mesure on peut caractériser, en accord avec William Rouse Ball, le travail de Poncelet sur les propriétés des coniques au moyen de l'homologie. Ce sont les propriétés projectives des coniques et le principe de continuité qui ont permis à Poncelet de considérer les foyers comme "*des cercles de rayon nul ayant un double contact avec la conique*".

---

13. Cette importante remarque ([**Poncelet 1822**, 260]) revient à affirmer que deux droites issues d'un foyer de la conique sont conjuguées par rapport à cette conique si et seulement si elles sont orthogonales. Ceci caractérise en fait les foyers : il s'agit des points où les faisceaux de directions conjuguées sont tous orthogonaux ([**Dingeldey 1903**, 51-56]). Nous reviendrons ultérieurement en 2 sur cette propriété fondamentale qui sera retrouvée différemment et exploitée par Plücker dans ses ouvrages de 1831 et 1835.

14. Notons que Poncelet ne conçoit bien sûr pas aussi clairement le *cercle infiniment petit* que le lecteur moderne qui l'identifiera immédiatement avec un couple de droites conjuguées. Comme l'explique Jeremy Gray, Poncelet ne donnera jamais une explication rigoureuse du principe de continuité et des paradoxes apparents auquel il semble alors mener [**Gray 2007**, 18].

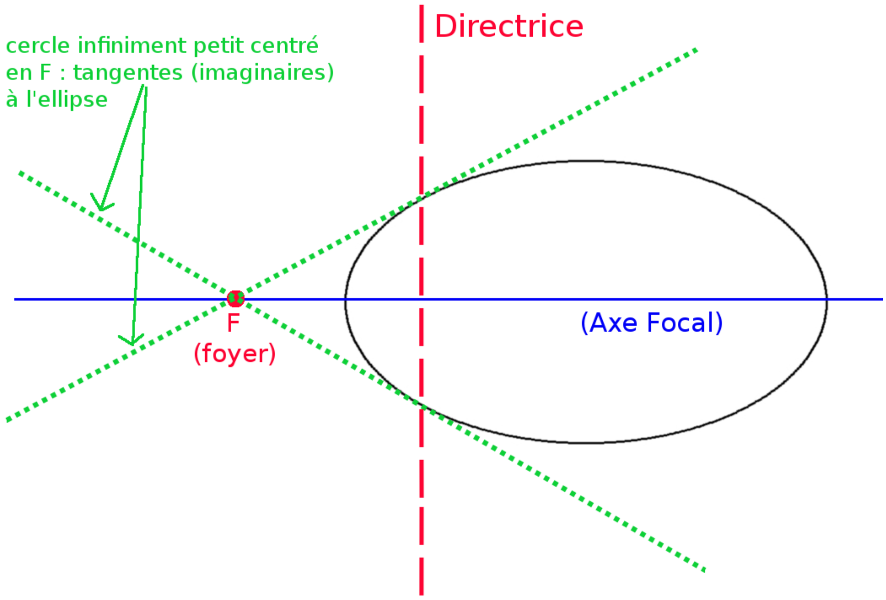


FIGURE 4. Un foyer F de l'ellipse représenté comme cercle infiniment petit doublement tangent à l'ellipse. La sécante de contact des tangentes (ou polaire focale) correspond à la directrice liée à ce foyer [15].

2. Les différents travaux de Julius Plücker liés aux courbes planes

Julius Plücker est loin d'avoir été passé sous silence dans les travaux des historiens des mathématiques. Loria et Coolidge soulignent tous deux son rôle dans l'extension des systèmes de coordonnées linéaires avec les coordonnées trilinéaires et les coordonnées tangentielles ([**Coolidge 1963**, 141-155], [**Loria 1948**, 242-249]). L'américain rappelle également son rôle dans l'utilisation des notations abrégées ([**Coolidge 1963**, 141-155]). Boyer rajoute à cela la "*reconnaissance du principe de dualité*" en lien avec la théorie des polaires réciproques, l'explication du paradoxe de Cramer par les *formules de Plücker* [16] pour les courbes algébriques, ainsi que la compréhension de la ligne droite comme élément de l'espace (qui devient réglé) décrit par 4 paramètres ([**Boyer 1968**, 578-585]). Enfin Gray donne une courte biographie de Plücker et insiste précisément sur sa résolution du paradoxe de Cramer (dit "*Duality Paradox*") ainsi que sur ses constructions de courbes planes spéciales, et tout particulièrement la quartique (courbe d'ordre 4) possédant 28 tangentes doubles réelles ([**Gray 2007**, 155-171]). Néanmoins son rôle dans l'extension de la notion

15. Pour visualiser la situation géométrique, le foyer de l'ellipse a été représenté en-dehors de la conique. En réalité (et le mot est mal choisi), le foyer se situe à l'intérieur de l'ellipse de sorte que les deux tangentes qui forment le cercle de rayon nul sont imaginaires. La sécante de contact (polaire focale) reste quant à elle bien réelle : c'est la droite directrice liée au foyer.

16. Les formules de Plücker sont des équations permettant de relier la classe et le degré d'une courbe algébrique plane en fonction des singularités de cette courbe (points doubles ou de rebroussement) et/ou de celles de sa courbe duale (points d'inflexion et tangentes multiples).

de foyer aux courbes planes de degré quelconque n'est pas étudié dans les travaux récents puisque seuls Loria et [**Dingeldey 1903**] (dans l'"*Encyklopädie*") en font mention. Nous avons donné plus haut une première raison à cela en soulignant le fait curieux que cette extension ne se trouvait de manière explicite dans aucun de ses grands traités.

Julius Plücker naît à Elberfeld - qui sera rattachée à Wuppertal en 1929 - en 1801. Après des études effectuées notamment à Berlin, Paris et Bonn, c'est dans cette-dernière qu'il commence son activité d'enseignement et de recherche comme *Privatdozent* à partir de 1825. Excepté un court passage à Halle au début des années 1830, il y restera toute sa vie. Les recherches mathématiques de Plücker ne trouvent pas toujours une bonne réception à Berlin, en particulier à cause de l'influence de Jakob Steiner et Leopold Crelle, si bien que le professeur de Bonn se tournera vers la physique dans les années 1840. Ce n'est qu'à la fin de sa vie que Plücker reviendra à ses premières amours, ce qui permettra à son jeune étudiant Félix Klein de poursuivre certains de ses ultimes travaux [17].

FIGURE 5. Julius Plücker

2.1. Les "développements analytico-géométriques" de 1831.

Dans son premier grand ouvrage, [**Plücker 1831**] [18], Plücker - alors professeur à Bonn - développe une géométrie projective analytique liant les apports de Poncelet à la puissance analytique des *coordonnées homogènes* que Möbius venait alors à peine de dévoiler ([**Möbius 1827**]). Sa compréhension de la dualité (ou réciprocité) entre les phénomènes

17. Pour plus de détails sur la vie et les mathématiques de Julius Plücker, on consultera les belles pages que lui a consacré Felix Klein dans [**Klein 1926**, 118-130]. Le lecteur pourra néanmoins constater qu'aucune mention n'y est faite en lien avec la notion de foyer des courbes.

18. Il s'agit ici du second tome des "*Développements analytico-géométriques*" de Plücker, le premier, sorti en 1828, ne faisant pas intervenir l'étude des foyers des sections coniques. Entre la parution du premier tome et l'écriture du second, les mathématiques de Plücker subissent deux changements majeurs : elles s'enrichissent des coordonnées homogènes en 1829 et, à la fin de la même année, le mathématicien allemand découvre le "*Traité*" de Poncelet ([**Loria 1948**, 243]).

ponctuels et les phénomènes tangentiels, ajoutée à l'utilisation habile des coordonnées homogènes, l'amène à effectuer une présentation nouvelle de la théorie des sections coniques [19].

Les trois premières pages du livre de Plücker [**Plücker 1831**, 1-3] sont consacrées à la description d'"*un nouveau moyen de représenter les courbes par des équations*" [20], c'est-à-dire la description des courbes par des équations tangentielles homogènes. L'équation $Ay + Bx + C = 0$ représente une infinité de points - dont les coordonnées sont rapportés à deux axes fixés $x = 0$ et $y = 0$ - situés sur une même ligne droite lorsqu'on considère le triplet (A, B, C) fixé. Mais si l'on considère (x, y) fixé, les triplets (A, B, C) représentent de manière duale une infinité de droites passant toutes par le point (x, y) : c'est ce qu'on appelle un *faisceau* de droites. On peut alors, en prenant comme coordonnées homogènes les triplets (u, v, w) [21] en lieu et place de (A, B, C), considérer la description des courbes au moyen des équations que l'on dira *homogènes tangentielles* du type

$$F(u, v, w) = 0$$

C'est ce que décrit Plücker :

> Ainsi chaque triplet de valeurs de u, v et w vérifiant cette équation correspond à une ligne droite. On obtient une infinité de telles lignes droites qui se succèdent évidemment les unes aux autres et qui enveloppent ainsi une courbe continue [22].
>
> [**Plücker 1831**, 2]

La description d'une courbe peut ainsi se faire comme l'enveloppe de ses tangentes, et non plus uniquement comme trajectoire des points qui la décrivent. Plücker nomme - d'après Gergonne - le degré de l'équation tangentielle d'une courbe la "*classe*" de cette courbe. Puisque, dans le plan, les coniques peuvent être à la fois considérées comme les courbes de degré 2 et comme les courbes de classe 2 - et ce en vertu des fameuses formules de Plücker -, le géomètre allemand étudie ces courbes par leurs équations tangentielles, c'est-à-dire en tant que courbes de deuxième classe. Son objectif est alors de donner la forme la plus simple (nous dirions "*canonique*") des équations tangentielles des coniques, et c'est cette recherche qui va le mener au rôle particulier joué par les foyers.

L'étude particulière des "*lieux géométriques de deuxième classe*" est précédée, dans le travail de Plücker, par quelques explications concernant les liens entre les coordonnées tangentielles homogènes (w, v, u) et les repères cartésiens orthogonaux traditionnels (O, x, y).

19. Darboux dira, en 1904, à propos des méthodes de géométrie analytique employées par le géomètre allemand : "*en créant les coordonnées tangentielles et les coordonnées homogènes, Plücker avait paru épuiser tout ce que pouvaient fournir à l'analyse la méthode des projections et celle des polaires réciproques*" ([**Darboux 1904**, 21]).

20. Il s'agit de l'intitulé du paragraphe d'introduction du traité : "*Ueber eine neue Art, Curven durch Gleichungen darzustellen*". Il s'agit également, presque mot pour mot, du titre d'un mémoire que Plücker a fait paraître dans le Tome 6 (1830) du "*Journal für die reine und angewandte Mathematik*".

21. En fait, Plücker préfèrera dans la suite écrire les triplets en commençant par w, c'est-à-dire sous la forme (w, v, u).

22. "*[...] die unmittelbar auf einander folgen und also eine stetige Curve umhüllen*", [**Plücker 1831**, 2]. Plücker prend bien entendu pour acquis la continuité de la fonction F, et par conséquent l'existence de l'enveloppe. Nous aurons l'occasion de revenir sur la considération de l'existence des enveloppes ultérieurement dans la section 7 et en particulier sur les objections faites par Darboux quant à leur existence, en lien avec la continuité des fonctions. Ces objections prendront ensuite toute leur ampleur dans le cadre du travail du nîmois relatif à la théorie des solutions singulières [Chap.7,2].

L'écriture d'une droite sous la forme $uy + vx + w = 0$ permet d'interpréter la signification des coordonnées tangentielles comme propriétés de la droite $\mathcal{D}$ considérée dans le repère cartésien. En faisant disparaître x, on constate que le rapport $-\dfrac{w}{u}$ correspond à l'ordonnée à l'origine de la droite, et en chassant y on voit que la valeur $-\dfrac{w}{v}$ traduit l'abscisse de l'intersection avec l'axe éponyme. On (re)trouve ainsi la signification du quotient $-\dfrac{v}{u}$ comme coefficient directeur de la droite, soit encore comme valeur de la tangente de l'angle $\alpha = (\widehat{(Ox), \mathcal{D}})$ que forme la droite avec l'axe des abscisses. Plücker remarque également que les droites passant par l'origine du repère seront caractérisées par l'équation $w = 0$. Un changement d'origine du repère effectué sans modifier la direction des axes - soit une translation du repère sans rotation - pour placer une nouvelle origine en un point $M(x', y')$ contribue par ailleurs à changer w en $w - x'v - y'$ [23].

Enfin, Plücker étudie l'angle formé par deux droites que nous nommerons $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de coordonnées respectives (w, v, u) et (w', v', u'), considérées dans un repère non nécessairement orthogonal $(O, (Ox), (Oy))$ ([**Plücker 1831**, 9]). En notant les angles β, α et α' les angles formés avec l'axe (Ox) respectivement par les droites (Oy), $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (voir figure 6), on obtient dans un premier temps en considérant les coefficients directeurs :

$$-\frac{v}{u} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta - \alpha)} \qquad \text{et} \qquad -\frac{v'}{u'} = \frac{\sin(\alpha')}{\sin(\beta - \alpha')}$$

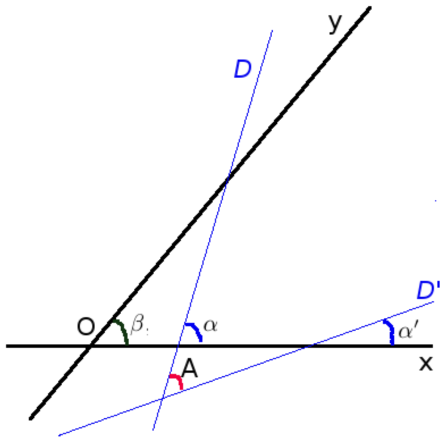


Figure 6. Configuration de la recherche de l'angle formé par deux droites quelconques dans un repère non orthogonal

La tangente de l'angle recherché $A = \alpha' - \alpha = (\widehat{\mathcal{D}, \mathcal{D}'})$ peut alors être exprimée grâce à formule d'addition des tangentes. Mais lorsque les axes sont orthogonaux (soit lorsque $\beta = \frac{\pi}{2}$) cette formule se simplifie considérablement et devient :

$$\tan(A) = \frac{u'v - uv'}{uu' + vv'}$$

23. Ce résultat est obtenu par *déshomogénéisation* en posant $u = 1$.

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont alors orthogonales lorsque $uu' + vv' = 0$, ce qui correspond à l'orthogonalité de leurs deux normales.

L'étude de la mise sous forme canonique de l'équation tangentielle des coniques, menant à la considération de leurs foyers, est menée par Plücker dans [**Plücker 1831**, 56-67]. La forme la plus générale de cette équation est, puisque les coniques sont les courbes de deuxième classe, de la forme :

$$Aw^2 + 2Bvw + Cv^2 + 2Duw + 2Euv + Fu^2 = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

Dans un premier temps, Plücker cherche à déterminer quels sont les changements d'origine du repère qui permettent de se débarrasser du terme rectangle uv dans l'équation $(\mathcal{E})$. Il arrive à déterminer que les origines (x', y') de ces repères sont exactement situées sur une hyperbole $(\mathcal{H}_1)$ [24] de même centre que la conique représentée par $(\mathcal{E})$. Dans un quelconque de ces repères, centrés en un point de $(\mathcal{H}_1)$, l'équation de la conique devient alors :

$$A'w^2 + 2B'vw + C'v^2 + 2D'uw + F'u^2 = 0 \qquad (\mathcal{E}')$$

Plücker remarque alors que les tangentes à la conique menées depuis le centre du repère - c'est-à-dire telles que $w = 0$ - sont deux droites [25] dont les rapports $\frac{v}{u}$ sont solutions de l'équation $(\frac{v}{u})^2 = -\frac{F'}{C'}$. Cela correspond à une propriété projective fondamentale du système de quatre droites formé par les deux axes orthogonaux du repère, disons $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, et les deux tangentes à la conique disons $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$: il s'agit d'un système de quatre droites harmoniques [26]. On peut comprendre cette harmonicité en considérant le faisceau des droites passant par le centre du repère comme paramétrées par le rapport $\frac{v}{u}$. En notant λ une racine carrée (éventuellement complexe) de $-\frac{F'}{C'}$, le système des quatre droites s'écrit en effet comme :

$$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) = (0, \infty, \lambda, -\lambda)$$

Ceci correspond bien à "*un système de quatre harmoniques*" ("*ein System von vier Harmonicalen*", [**Plücker 1831**, 58]) [27]. La propriété d'harmonicité des tangentes passant par le centre du repère avec les axes - nécessairement orthogonaux - de celui-ci caractérise en fait la forme des équations de type $(\mathcal{E}')$ où le terme rectangle en uv n'apparaît pas, ce que Plücker utilisera dans la suite sans l'avoir fait remarquer.

Dans un second temps, Plücker cherche à encore simplifier la forme de l'équation $(\mathcal{E}')$ pour tenter de la ramener sous la forme d'un "*cercle tangentiel*", c'est-à-dire sous une forme $(u - u')^2 + (v - v')^2 = M$. Ceci est permis dans un premier temps par l'absence du terme rectangle uv et on voit dans un second temps, par l'absence de la coordonnée w dans

24. L'équation de cette hyperbole est $(\mathcal{H}_1) : (x - \frac{B}{A})(y - \frac{D}{A}) = \frac{BD-AE}{A^2}$, [**Plücker 1831**, 57].

25. Puisque les coniques sont de classe 2, on pourra en général mener à partir de tout point exactement deux tangentes à cette conique.

26. En géométrie affine, l'harmonicité de quatre points alignés A, B, C, D équivaut à l'égalité : $\dfrac{CA}{CB} = -\dfrac{DA}{DB}$, où les mesures sont algébriques (donc signées). Comme nous le détaillerons plus loin en 4.3, l'harmonicité de droites concourantes revient à l'harmonicité des points décrits par leurs rencontres avec une transversale.

27. Notons que Plücker ne parle pas du *rapport anharmonique* des quatre droites, puisque cet outil sera introduit par Chasles dans [**Chasles 1837a**]. L'écriture du système paramétré par le rapport $\frac{u}{v}$ permettra néanmoins au lecteur familier avec la notion de rapport anharmonique de voir que la valeur de celui-ci est bien -1. Voir 4.3 pour une courte introduction à cette notion.

l'équation, que c'est elle qui sera utilisée pour "déshomogénéiser" l'équation. Pour effectuer cette simplification, le géomètre de Bonn remarque ([Plücker 1831, 59]) que l'équation $(\mathcal{E}')$ de la conique peut, en utilisant une mise sous forme canonique, se mettre sous la forme suivante :

$$C'(v+\frac{B'}{C'}w)^2+F'(u+\frac{D'}{F'}w)^2=(\frac{B'^2}{C'}+\frac{D'^2}{F'}-A)w^2$$

On remarque alors que la forme recherchée du cercle tangentiel ne sera obtenue qu'à la condition d'avoir $C'=F'$. Il suffira en effet alors de poser $v'=-\frac{B'}{C'}$ et $u'=-\frac{D'}{F'}$ pour obtenir cette équation de cercle. La traduction de la contrainte $C'=F'$ en fonction de l'origine du repère (x',y') amène ainsi Plücker à l'équation d'une seconde hyperbole $(\mathcal{H}_2)$ [28], de même centre que l'hyperbole $(\mathcal{H}_1)$ et que la conique étudiée.

La possibilité de mettre l'équation générale de la conique $(\mathcal{E})$ sous la forme de celle d'un cercle tangentiel revient donc à rechercher les points (x'',y''), centres des repères orthogonaux qui satisfont à la fois la condition de disparition du terme rectangle uv et l'égalité des coefficients C' et F'. Ces points sont ainsi géométriquement à l'intersection des deux hyperboles $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$. L'argument géométrique consistant à considérer les positions relatives bien particulières des axes aurait suffi pour conclure à l'existence de deux couples de points, le premier réel et le second imaginaire. Mais cette approche synthétique, qui aurait été digne de Poncelet, ne ressemble guère au style de Plücker qui va en effet sans surprise préférer une approche analytique. Notant P et Q des quantités dépendant des paramètres (A,B,C,D,E,F) de la conique, il détermine que les points d'intersection sont donnés par les équations :

$$\begin{cases} x''^2 &= \dfrac{-P\pm Q}{2A^2} \\[2ex] y''^2 &= \dfrac{P\pm Q}{2A^2} \end{cases}$$

Il est alors aisé de reconnaître l'existence de quatre points, deux réels (α,β) et (α',β') ainsi que deux imaginaires conjugués (α'',β'') et (α''',β'''), le centre de la conique étant le milieu des deux segments formés d'une part par les deux points réels et d'autre part par les imaginaires. Enfin, puisque l'axe formé par les points réels fait avec l'axe des abscisses un angle θ_1 dont la tangente est $\tan(\theta_1)=\dfrac{\alpha}{\beta}$ et que celui formé par les points imaginaires fait avec ce même axe un second angle θ_2 dont la tangente $\dfrac{\alpha''}{\beta''}$ a la propriété d'être égale à $\tan(\theta_2)=\dfrac{\alpha''}{\beta''}=\dfrac{-1}{\tan(\theta_1)}$, les deux axes formés par les quatre points ont la propriété d'être orthogonaux ([Plücker 1831, 61]).

Il paraît alors naturel que ces quatre points mis en évidence par Plücker ci-dessus constitueront les foyers de la conique. Néanmoins, il reste au géomètre allemand à prouver

28. L'équation de cette seconde hyperbole est $(\mathcal{H}_2)$: $(y-\frac{D}{A})^2-(x-\frac{B}{A})^2=\frac{(C-F)A-(B^2-D^2)}{A^2}$, [Plücker 1831, 59]. Cette seconde hyperbole, bien que de même centre que la première, possède en revanche des axes qui sont les bissectrices (intérieures et extérieures) des axes de $(\mathcal{H}_1)$, ce que Plücker exprime bien en affirmant que "*tous les systèmes de diamètres conjugués [de $(\mathcal{H}_2)$] sont parallèles aux axes [de $(\mathcal{H}_1)$]*" ([Plücker 1831, 59]).

l'indépendance du lieu de ces quatre points par rotation des axes des repères orthogonaux considérés :

> Nous avons prouvé dans ce qui précède que, lorsque l'on considère deux axes orthogonaux quelconques comme système de coordonnées, il existe toujours quatre points, dont deux sont réels, possédant la propriété suivante : prenant l'un quelconque (réel) de ces points comme origine des coordonnées, l'équation générale de la courbe de deuxième classe prendra la forme de l'équation d'un cercle. La question naturelle qui s'offre alors à nous est de savoir si lorsque nous changeons la direction des deux axes orthogonaux la position de ces quatre points restera inchangée ou variera en suivant un certain lieu géométrique. [29]
>
> [**Plücker 1831**, 61]

Pour prouver l'indépendance des quatre lieux déterminés précédemment par rotation des axes, Plücker commence par remarquer qu'il suffit de montrer qu'une telle rotation ne va, pour ces quatre points, pas affecter l'opération d'élimination du terme rectangle uv : ce seront alors des points qui appartiendront à toutes les hyperboles $(\mathcal{H}_1)_w$ quelle que soit la position angulaire w des axes. Il affirme ensuite que ceci équivaut à conserver la propriété d'harmonicité des deux tangentes issues du centre des repères avec les deux axes orthogonaux de ces repères [30]. Il faut alors étudier la conservation de l'harmonicité des systèmes axes/tangentes $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ par rotation des axes. Pour effectuer cette étude, reposant essentiellement sur des considérations angulaires, Plücker revient au système de coordonnées cartésien traditionnel : en considérant un choix d'axes initial $(\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0)$ fixé, les deux tangentes à la conique issues du centre du repère sont alors décrites par les équations :

$$\mathcal{T}_1 : y = \tan(\alpha)x \qquad \text{et} \qquad \mathcal{T}_2 : y = \tan(\alpha')x$$

L'harmonicité du système $(\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ revient alors simplement à l'équation $\tan(\alpha)+\tan(\alpha') = 0$. Après rotation des axes d'un angle w, les équations des deux tangentes deviennent :

$$\mathcal{T}_1 : y = \tan(\alpha - w)x \qquad \text{et} \qquad \mathcal{T}_2 : y = \tan(\alpha' - w)x$$

L'harmonicité du système revient alors à vérifier l'équation $\tan(\alpha - w) + \tan(\alpha' - w) = 0$ qui après développement donne :

$$2\tan(w)[\tan(\alpha)\tan(\alpha') - 1] = 0 \;\Leftrightarrow\; \tan(\alpha)^2 = -1$$

Les tangentes qui conviennent seront donc celles dont l'équation cartésienne est donnée par $y = \tan(\alpha)\,x = \pm i\,x$ [31]. Ces droites, dont le coefficient directeur vaut $\pm i$, ont comme le remarque Plücker la propriété de former avec tous les axes un seul et même angle :

29. "*Wir haben in dem Vorstehenden nachgewiesen, dass, wenn man irgend zwei rechtwinklige Coordinaten-Axen beliebig annimmt, sich immer solche vier Puncte, von denen zwei reell sind, bestimmen lassen, welche die Eigenschaft besitzen, dass, wenn man in einem beliebigen dieser (reellen) Puncte den Anfangspunct der Coordinaten verlegt, die allgemeine Gleichung der Curven zweiter Classe die Form der Kreis-Gleichung erhält. Es bietet sich uns hier die natürliche Frage dar, ob, wenn wir die Richtung der beiden rechtwinkligen Coordinaten-Axen beliebig ändern, die in Rede stehenden vier Puncte immer dieselben bleiben oder aud irgend einem geometrischen Orte fortrücken*", [**Plücker 1831**, 61].

30. C'est à cette étape que Plücker utilise - sans le souligner - que la division harmonique des axes par les deux tangentes issues du centre équivaut à la nullité du terme en uv dans l'équation tangentielle.

31. Plücker n'emploie pas le symbole i pour désigner le complexe de carré -1, il utilise la notation $\sqrt{-1}$.

celui dont la tangente vaut $\pm i$. Cette propriété leur vaudra plus tard le nom de *droites isotropes*[32].

Il reste à Plücker pour clôturer son étude la tâche de montrer que les centres des repères d'où l'on peut mener de telles tangentes isotropes à la conique caractérisent en effet bien les quatre points mis en évidence précédemment ([**Plücker 1831**, 62-63]). Ceci revient à déterminer les centres de ces repères sont des points où l'équation tangentielle de la conique prend la forme de l'équation du cercle. En repassant dans le système de coordonnées tangentielles homogènes, l'équation de ces tangentes est $w = 0, \dfrac{v}{u} = \pm i$. Etant tangentes à la conique, ces valeurs des triplets (w, v, u) doivent vérifier l'équation tangentielle générale $(\mathcal{E})$. La substitution effective de ces valeurs dans $(\mathcal{E})$ amène à l'équation $-C+2E(\pm i)+F = 0$. La partie imaginaire donne alors $E = 0$, puis la partie réelle $C = F$: on obtient en effet bien les deux conditions caractérisant la possibilité d'écrire l'équation tangentielle homogène de la conique comme une équation de cercle.

C'est ainsi que Plücker définit une première fois les foyers ("*Brennpuncte*") des coniques : il s'agit des deux points réels, qui pris comme origine des coordonnées permettent de donner "*à l'équation générale des courbes du deuxième ordre, quelle que soit la direction des axes pourvu qu'ils restent orthogonaux, la forme d'une équation de cercle*"([**Plücker 1831**, 62]). Il met ainsi de côté les deux foyers imaginaires. Mais, après avoir remarqué que la réalité des quatre foyers caractérise les cercles et discuté la réalité de l'expression analytique générale des foyers, Plücker revient sur la définition des foyers pour "*en mettre en avant le côté géométrique*". Il donne deux nouvelles définitions de ces points, dont aucune n'exclut cette fois les deux points imaginaires :

> - Les foyers d'une courbe de deuxième classe [...] sont les points qui ont la propriété suivante : les deux tangentes (imaginaires) à la courbe passant par ces points forment avec deux droites quelconques se coupant perpendiculairement en ces points un système de quatre [droites] harmoniques.[33]
>
> - Les foyers d'une courbe de deuxième classe sont les points qui possèdent la propriété suivante : chaque droite imaginaire passant par ces points est une tangente (imaginaire) à la courbe.[34]
>
> [**Plücker 1831**, 64]

La dernière définition pourrait laisser penser que les tangentes, imaginaires, passant par les foyers sont en nombre infini. Mais ceci n'est dû qu'à un choix malheureux du

32. Plücker prouve en bas de page [**Plücker 1831**, 64] l'isotropie (invariance des angles de rencontre avec un axe quelconque) des droites dont la tangente de l'angle prend la valeur $\pm i$ par la formule d'addition des tangentes. Ces droites jouissent en outre de la propriété particulière de posséder tous leurs points à une distance nulle. Pour plus de simplicité, nous utiliserons la dénomination de *droite isotrope* qui ne sera pourtant pas introduite avant 1870 et qui sera partie prenante d'une certaine forme de compétition lexicale : nous étudierons cela en 6.3.

33. "*Die Brennpuncte einer Curve zweiter Classe [...] sind solche, welche die Eigenschaft haben, dass die, durch jeden derselben gehenden, beiden (imaginären) Tangente der Curve und irgend zwei in demselben sich rechtwinklig schneidende gerade Linien vier Harmonicalen bilden*", [**Plücker 1831**, 64].

34. "*Die Brennpuncte einer Curve zweiter Classe sind solche Puncte, welche die Eigenschaft haben, dass jede durch dieselben gehende imaginäre Linie eine (imaginäre) Tangente der Curve ist*", [**Plücker 1831**, 64].

vocabulaire : Plücker rappelle en effet en bas de page que ces tangentes forment avec tout axe un angle ψ identiquement caractérisé par $\tan(\psi) = \pm\sqrt{-1} = \pm i$. Ce qu'il entend ainsi par droite "*imaginaire*" est donc une droite de coefficient directeur $\tan(\psi) = \pm\sqrt{-1}$: une droite isotrope. Avec ces deux définitions, conjuguées aux calculs qui les ont précédées, Julius Plücker est ainsi le premier mathématicien à noter que les coniques possèdent deux foyers imaginaires, situés sur leurs petits axes, et qui viennent s'ajouter aux deux foyers réels bien connus.

Dans la suite du traité, Plücker ne va exploiter parmi les propriétés liées aux foyers des coniques que celle de rendre l'équation tangentielle homogène sous la forme de l'équation de cercle :

$$(u - u')^2 + (v - v')^2 = k^2$$

Il identifiera en particulier la droite représentée par $(u', v', w' = 1)$ comme la directrice de la conique en tant que droite polaire du centre (qui est ici un foyer), et étudiera l'orthogonalité des systèmes de diamètres conjugués selon que l'on se place dans ces repères ou dans le repère replacé au centre de la conique ([**Plücker 1831**, 71-85]) : la mise sous forme canonique de l'équation d'une conique comme équation tangentielle de cercle permet ainsi d'obtenir à nouveau la propriété de De La Hire d'orthogonalité des diamètres conjugués issus du foyer.

Pour conclure quant à cet ouvrage de 1831, on doit remarquer que si Plücker cite à plusieurs reprises Poncelet dont il a lu le "*Traité*" en 1829, il s'agit soit de justifier la paternité d'un théorème en se référant à [**Poncelet 1822**], soit de se rapporter au travail du géomètre français relatif à la théorie des polaires réciproques. En dépit de ce qu'affirme Rouse Ball, le lien entre Plücker et Poncelet dans l'évolution de la notion de foyer est loin d'être évident : le premier ne considère ainsi jamais les foyers des coniques comme des points-cercles doublement tangents, ce que le second avait pourtant caractérisé. La méthode de Plücker est centrée sur la recherche de la mise en équation la plus simple via les coordonnées tangentielles. Elle est donc purement *analytique*. Ce n'est que dans un second temps que les propriétés projectives des foyers des coniques liées à l'harmonicité des tangentes avec le système d'axes apparaissent. Certes la propriété d'orthogonalité des sécantes passant par les foyers avec leur conjuguée, propriété que Poncelet utilisait en l'attribuant à De La Hire, a pu inspirer Plücker dans la mesure où elle est intimement liée, par dualité, à la possibilité d'obtenir l'équation tangentielle du cercle où tous les systèmes de diamètres conjugués sont bien orthogonaux. Mais rien ne permet de supporter plus loin cette hypothétique filiation tant les buts et les méthodes des deux géomètres sont distincts. En outre, Plücker ne fait pas le lien entre le caractère isotrope des tangentes issues des foyers - c'est-à-dire la valeur $\sqrt{-1}$ de la tangente trigonométrique de ces droites - et leur passage par les "*points cycliques*", points à l'infini communs à tous les cercles que Poncelet avait introduits ([**Poncelet 1822**, 48]) sans les nommer de la sorte.

2.2. 1833 : L'extension de la définition des "foyers" à toutes les courbes algébriques planes.

Quelques mois après la parution de ses "*développements analytico-géométriques*", Plücker va donner dans un court article (8 pages) la généralisation de la notion de foyer. Cet article, intitulé "*Sur les points qui correspondent, pour les courbes d'un ordre plus élevé* *que le deuxième, aux foyers des coniques*", paraîtra en 1833 dans le *Journal de Crelle* ([**Plücker 1833**]).

Des trois définitions que Plücker avait données pour les foyers des coniques - mise sous forme canonique de l'équation tangentielle, harmonicité des tangentes avec deux axes orthogonaux et tangence des droites imaginaires de coefficient $\tan(\psi) = \sqrt{-1}$ - seule la dernière peut être généralisée immédiatement à toute courbe plane. Les propriétés que le professeur de Bonn va mettre en avant avec sa définition générale des foyers seront les propriétés angulaires des tangentes issues de ces points. Plücker va ainsi s'attacher à montrer comment, géométriquement, les foyers peuvent être obtenus comme intersections de deux courbes particulières représentant les lieux des points d'où toutes les tangentes menées à la courbe font, avec un axe fixé, des angles dont la somme est constante.

Après avoir rappelé qu'il a été amené à la considération des foyers des coniques en recherchant les lieux des centres de repère permettant de simplifier l'écriture de l'équation tangentielle, Plücker souligne le "*fait analytique apparemment paradoxal*" que si les tangentes menées depuis les foyers font avec un axe fixé un angle ψ, alors l'ajout de tout angle ϕ ne change pas la valeur de la tangente : on retrouve toujours

$$\tan(\phi + \psi) = \pm\sqrt{-1} = \tan(\psi)$$

Cette relation, indépendante de l'angle ψ, traduit l'isotropie de la tangente. Il donne ensuite la définition générale des foyers d'une courbe algébrique plane :

> Dans le plan d'une courbe algébrique donnée quelconque, un point tel que deux tangentes à la courbe issues de ce point forment avec une ligne droite quelconque deux angles dont les deux tangentes trigonométriques sont $\pm\sqrt{-1}$ s'appelle un foyer de la courbe. [35]
>
> [**Plücker 1833**, 85]

Pour Plücker néanmoins, cette définition très "*imaginaire*" nécessite d'être interprétée (ou réinterprétée) géométriquement "*pour éviter le caractère imaginaire de l'énoncé [de la définition des foyers], nous pouvons les décrire géométriquement de plusieurs manières*" [36]. Pour répondre à ce besoin d'interprétation géométrique, Plücker considère une courbe de classe n, dont l'équation tangentielle [37] est écrite, dans un repère orthogonal, sous la forme :

$$\Omega' + A'v^n + B'v^{n-1} + C'v^{n-2} + ... + M'v + N' = 0$$

Le facteur Ω' regroupant les termes contenant les puissances non-nulles de w, il s'annule pour les tangentes passant par l'origine. Cette origine est un foyer dès que, parmi ces tangentes passant à l'origine, deux font avec l'axe des abscisses un angle θ tel que $\tan(\theta) = \pm\sqrt{-1}$. Ceci revient alors à dire que l'équation tangentielle ci-dessus doit être vérifiée pour $(w = 0, v = \pm\sqrt{-1})$. En séparant les parties réelles et imaginaires, cela donne les deux équations suivantes :

35. "*Derjenige Punct in der Ebene irgend einer gegebenen algebraischen Curve, welcher die Eigenschaft hat, dass zwei durch denselben gehende Tangenten der Curve mit einer beliebigen geraden Linie Winkel bilden, deren trigonometrischen Tangente* $\pm\sqrt{-1}$ *sind, heisst ein Brennpunct der Curve*", [**Plücker 1833**, 85].

36. "*Um das Imaginäre in der Aussage derselben zu vermeiden, können wir dieselbe auf mehrfache Weise geometrisch umschreiben.*", [**Plücker 1833**, 85].

37. Il s'agit d'une équation tangentielle déshomogénéisée : on considère les triplets $(w, v, u = 1)$.

$$\begin{cases} A' - C' + E' - ... &= 0 \qquad \mathcal{R}_1 \\ B' - D' + F' - ... &= 0 \qquad \mathcal{R}_2 \end{cases}$$

En notant alors $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ les angles formés par les tangentes avec l'axe des abscisses, des relations dues - selon Plücker - à Johann Bernouilli, sur les n tangentes $\tan(\theta_i)$ permettent d'exprimer la tangente de la somme des angles, $\tan(\sum_1^n \theta_i)$ comme quotient des quantités $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. Ces deux relations transcrivent ainsi les deux relations angulaires suivantes[38] :

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + ... + \theta_n &= 0 \qquad \mathcal{A}_1 \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + ... + \theta_n &= \dfrac{\pi}{2} \qquad \mathcal{A}_2 \end{cases}$$

En considérant alors les courbes formées par les deux relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ comme fonction de l'origine du repère (x, y), on obtient deux courbes de degré n. Ces courbes représentent géométriquement les lieux à partir desquels on peut mener des tangentes à la courbe originelle - dont on cherche les foyers - telles que ces tangentes forment des angles avec l'axe des abscisses dont la somme vaut 0 pour l'une des courbes et $\frac{\pi}{2}$ pour l'autre. Les foyers recherchés, solutions simultanées de $\mathcal{R}_1$ et de $\mathcal{R}_2$, se situent à l'intersection de ces deux courbes de degré n. On peut ainsi en conclure qu'"*une courbe de classe n possède, en général, n^2 foyers*" ([**Plücker 1833**, 90]). Cependant Plücker préfère souligner qu'on peut obtenir géométriquement les foyers en ne considérant que l'une des deux courbes liées aux relations angulaires des tangentes. En vertu de l'isotropie des tangentes[39] menées depuis les foyers, les relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ restent identiquement vérifiées lorsqu'on effectue une rotation quelconque des axes du repère. En considérant une seule relation angulaire $\mathcal{A}$ et la courbe $\mathcal{R}$ associée, effectuer une rotation du repère d'un angle w aboutit à une nouvelle courbe représentant la nouvelle relation $\mathcal{R}(w)$. Puisque la position des foyers ne dépend pas, par isotropie des tangentes, de l'orientation des axes du repère, les n^2 foyers seront alors exactement obtenus comme les points appartenant à l'ensemble des courbes liées à $\mathcal{R}(w)$ en faisant varier w. En particulier, l'existence des foyers étant acquise, il suffit de considérer les points communs à uniquement deux de ces courbes correspondant à deux valeurs distinctes de w.

Dans la dernière partie de l'article, Plücker note qu'il existe des cas particuliers où une courbe de classe n possède moins de n^2 foyers. Il souligne que cela "*dépend, exprimé géométriquement, du nombre de tangentes que l'on peut mener à la courbe parallèlement à une droite donnée*" ([**Plücker 1833**, 90]). Ainsi une courbe de classe 2 peut avoir 4 foyers ou un seul, une courbe de classe 3 peut en avoir 9, 4 ou 1. Pour illustrer ceci, le géomètre de Bonn effectue pour finir l'analyse détaillée du cas général des courbes de classe 3, donnant explicitement les relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ décrivant deux courbes cubiques et expliquant en

38. Selon la parité de n, la classe de la courbe considérée, $\mathcal{R}_1$ correspondra tantôt à $\mathcal{A}_1$, tantôt à $\mathcal{A}_2$; de même pour $\mathcal{R}_2$ qui correspondrait alors respectivement à $\mathcal{A}_2$ ou à $\mathcal{A}_1$. Le passage d'une relation angulaire à l'autre peut également s'obtenir lorsqu'on ne considère plus les angles des droites comme formés à partir de l'axe des abscisses mais à partir de celui des ordonnées ([**Plücker 1833**, 87-88]). Plücker prend bien soin de distinguer dans les énoncés les cas de parité et d'imparité de la classe de la courbe n. Par souci de simplicité mais sans perte de généralité nous menons l'étude de ses raisonnements sans effectuer cette distinction systématique.

39. C'est le "*fait analytique apparemment paradoxal*" remarqué par Plücker au début de l'article.

fonction de la nullité de certains coefficients le cas où le nombre de foyers est réduit à 4, puis à la simple unité.

Ce court mémoire de Plücker donne donc raison à [**Darboux 1873a**] et à [**Loria 1948**, 245] : Julius Plücker est bien le premier à avoir donné une définition générale des foyers pour les courbes planes, cette définition par intersection des tangentes isotropes correspondant en outre à l'énoncé moderne que nous avons conservé. Ce point doit ici être particulièrement souligné car il semble avoir progressivement été perdu de vue dans l'historiographie moderne. Si la définition des foyers utilise - toujours sans les nommer - les points cycliques [40], Plücker insiste sur leur sens géométrique via l'invariance de certaines relations angulaires. Il semble ce-faisant vouloir justifier une définition qui lui semble au premier abord trop "*imaginaire*".

On peut pourtant dire que cet article de 1833 de Julius Plücker ne sera pas vraiment remarqué par la communauté des mathématiciens : on ne relève en effet alors à ce sujet aucune discussion ni aucune autre publication faisant suite à la parution de l'article de Plücker. On ne trouvera en outre dans les travaux ultérieurs des mathématiciens des quelques décennies suivantes, ceux de Plücker y compris, aucune référence précise renvoyant à ce mémoire. Il faudra par ailleurs attendre 15 ans pour obtenir enfin un écho à ce travail qui reprendra la définition générale des foyers de Plücker par les tangentes isotropes. On ne la retrouve ainsi en Allemagne qu'à partir d'un article de Kummer de 1847 sur les courbes orthogonales ([**Kummer 1847**]). Puis il faut attendre 1852 et le "*Traité sur les courbes planes de degré quelconque*" de l'irlandais George Salmon ([**Salmon 1852**]) pour lui assurer une véritable diffusion. Enfin, en France c'est le tout jeune Edmond Laguerre qui en 1853 reprendra la définition de Plücker et montrera comment déterminer analytiquement les foyers des courbes planes dans un repère non orthogonal ([**Laguerre 1853**]). Nous reviendrons sur les travaux de Kummer et de Salmon dans la suite en 3. On peut néanmoins souligner que ces recherches utiliseront l'outil développé par Plücker que constitue la notion élargie de foyer à toute courbe algébrique plane, et que pourtant aucune référence ne pointera précisément au mémoire de ce-dernier de 1833. Si cette publication n'était ainsi pas explicitement citée, son contenu était alors devenu connu : la circulation de ce savoir mathématique apparaît ainsi décorrélée, au moins dans un premier temps, des bibliographies des publications s'y rapportant.

Deux raisons peuvent être invoquées pour expliquer le manque de citation de l'article de Plücker. La première concerne le problème de la diffusion de ce travail. En effet, 1833 fut l'année qui a suivi la disparition de deux grands journaux mathématiques permettant de relayer les publications scientifiques : les "*Annales de Gergonne*" et surtout le "*Bulletin de Férussac*" que nous évoquerons ultérieurement dans la partie [Chap.5,2.3]. Ce-dernier périodique permettait à ses lecteurs d'avoir accès à des comptes-rendus sur les différents ouvrages et mémoires de mathématiques ayant été récemment publiés. Aussi en 1833, seuls les lecteurs du "*Journal de Crelle*" dans lequel a paru l'article de Plücker étaient à même de connaître ce mémoire. Ajoutons en outre que celui-ci est rédigé en allemand - alors qu'une bonne partie des mémoires écrits à cette époque par Plücker l'étaient en français. Ceci aura pu bloquer sa lecture pour les mathématiciens non-germanistes comme Michel

40. On peut en effet dire que les foyers sont décrits comme les intersections des tangentes menées à la courbe depuis les points cycliques, points de coordonnées homogènes $(1, \pm i, 0)$.

Chasles, qui sera pourtant plus tard - de manière tout à fait paradoxale ! - le premier à donner la référence précise du mémoire de 1833 de Julius Plücker [41].

Au-delà du problème de diffusion, Salmon mettra plus tard l'accent sur la seconde raison ayant entravé l'impact du mémoire de 1833 de Plücker. L'auteur de la définition générale des foyers, en dépit de l'interprétation géométrique liée aux angles des tangentes qui l'accompagne, ne suggère en effet pas que l'étude des foyers des courbes - autres que les coniques - puisse être un domaine fécond. Ainsi, aucun lien n'est fait par Plücker avec d'éventuelles propriétés des courbes, nouvelles ou déjà connues, et aucun commentaire du géomètre d'outre-Rhin n'incite à des recherches en ce sens. C'est ce que Salmon décrira en bas de page dans son *Traité* :

> M. Plücker, dans un des premiers volumes du Journal de Crelle [42], a donné la définition des foyers des courbes de degré quelconque que j'ai employée dans cette section. Il n'a pas, en revanche, à ma connaissance recherché les propriétés de ces points. [...] J'ai proposé au Dr Hart [43] de se joindre à moi pour examiner leurs propriétés, pour les courbes d'ordre 3 et 4. [...] Nul doute que beaucoup d'importantes propriétés des foyers des courbes de degré quelconque restent toujours à découvrir.
>
> [**Salmon 1852**, 128]

Il peut par ailleurs paraître surprenant que Plücker n'ait pas donné à nouveau, dans ses ouvrages ultérieurs, sa définition des foyers des courbes planes ou qu'il n'ait simplement pas mentionné son propre mémoire [**Plücker 1833**]. Nous allons voir que ceci est principalement le fait de son abandon du système des coordonnées tangentielles [44] et de ses nouvelles motivations concernant l'étude des courbes : en décrire les singularités (en lien avec ses formules de dualité) [45] et les comportements asymptotiques. Nous allons ainsi étudier les deux traités ultérieurs de géométrie dans le plan de 1835 et 1839 du professeur de Bonn pour en faire ressortir la place qu'il réserve aux foyers des courbes au regard de la définition élargie dont il est l'auteur.

2.3. Le "système de géométrie analytique" de 1835.

41. Chasles donne dans son "*Traité sur les coniques*" de 1865 la référence précise vers la définition élargie des foyers des courbes planes de 1833 de Plücker par les tangentes isotropes dans une note de bas de page [**Chasles 1865**, 162]. Il est néanmoins probable que Chasles n'ait pas pu lire ce mémoire et en ait eu connaissance indirectement, soit par Gaston Darboux, soit par l'irlandais George Salmon auquel il fait également référence - nous verrons pourquoi en 3.2.

42. C'est la référence la plus précise que l'on puisse trouver à l'endroit de l'article [**Plücker 1833**] pour la définition générale plane des foyers chez les mathématiciens du XIXème siècle avant le "*Traité*" de Chasles de 1865 où l'on n'aurait *a priori* pas pensé la trouver.

43. Le mathématicien irlandais Andrew Searle Hart était le collègue de Salmon au Trinity College de Dublin.

44. Ainsi que le remarque Jérémy Gray, "*quand il en vint à écrire ses ouvrages majeurs des années 1830, il [Plücker] cessa d'utiliser non seulement les coordonnées homogènes, mais également les idées géométriques qu'elles apportent quant à l'appréhension de la ligne à l'infini*" ([**Gray 2007**, 161]). Nous verrons cependant que les coordonnées homogènes tangentielles seront à nouveau utilisées pour son ouvrage de géométrie dans l'espace en 1846 [**Plücker 1846**] en 4.6.

45. On pourra consulter [**Gray 2007**, 167-170] pour plus de détails sur les courbes et leurs singularités étudiées par Plücker.

Dans son ouvrage de 1835, Plücker délaisse les coordonnées tangentielles. Il leur préfère, pour effectuer une étude des courbes de degré 2 et 3 (coniques et cubiques), un système nouveau fortement inspiré des *coordonnées barycentriques* de Möbius ([**Möbius 1827**]). En cherchant les systèmes les plus généraux représentant les lignes droites par des équations du premier degré, Plücker aboutit à la considération de trois droites non-parallèles p, q, r définies par les équations :

$$\begin{aligned} \pi(y + ax + b) &:= p = 0 \\ \chi(y + a'x + b') &:= q = 0 \\ \rho(y + a''x + b'') &:= r = 0 \end{aligned}$$ [**Plücker 1835**, 5]

On peut alors représenter tout point M du plan par trois valeurs, (p, q, r) représentant la distance du point à chacune des trois droites [46]. Plücker appelle ce système de coordonnées les "*coordonnées linéaires de points*" - et de lignes - ("*lineare Punct-Coordinaten*"). La distance doit être comptée algébriquement, de sorte que les points de l'intérieur du triangle formé par les trois droites p, q, r auront des coordonnées positives. Enfin ce système de coordonnées linéaires (comme nous l'appellerons dorénavant d'après Coolidge) peut être considéré en un certain sens comme homogène [47] puisque les équations des droites p, q, r sont définies à une constante multiplicative près : dans une équation homogène en ces variables, on pourra ainsi déshomogénéiser en changeant (p, q, r) en $(\frac{p}{r}, \frac{q}{r}, 1)$, ce qui reviendra à poser $r = 1$. Plücker aurait obtenu un vrai système de coordonnées homogènes, à savoir les *coordonnées trilinéaires*, s'il avait déterminé les coordonnées comme étant prises proportionnelles aux distances p, q, r. Malgré ce que [**Loria 1948**, 245] affirme, Plücker ne franchit pas ce pas : ses *coordonnées linéaires* ne sont donc pas, en toute rigueur, les *coordonnées trilinéaires*.

Anticipant l'étude des coniques, le géomètre allemand va s'attacher, pour employer un langage moderne, à "polariser" l'expression quadratique $p \cdot q$. Il s'agit en fait d'exprimer ce produit comme somme de deux carrés, soit de trouver deux coordonnées linéaires (u, v) telles que $p \cdot q = \lambda(u^2 + v^2)$. Dans un second temps, il trouvera les propriétés, notamment angulaires, reliant les quatre droites p, q, u et v [48] ainsi que le passage réciproque (la "dépolarisation") [49] de (u, v) à (p, q). Nous verrons comment ces résultats s'appliquent à l'étude des coniques effectuée par Plücker grâce à son système de coordonnées linéaires, et

46. En réalité, Plücker remarque que le système le plus général est donné par la considération des longueurs algébriques des segments issus du point M allant couper les trois droites p, q, r avec trois angles donnés ([**Plücker 1835**, 6]). Lorsque les trois angles sont droits, on obtient bien les distances aux trois droites. Plücker ajoute par ailleurs à tort que ce système de coordonnées correspond au système des coordonnées barycentriques de Möbius, comme l'a fait remarquer [**Coolidge 1963**, 151].

47. On ne saurait considérer ce système de coordonnées linéaires comme homogène en toute généralité puisque (p, q, r) et $(\lambda p, \lambda q, \lambda r)$ ne représentent généralement pas le même point.

48. Nous utiliserons ici un abus de notation pour alléger la présentation : au sens strict, les droites sont définies par $p = 0$, $q = 0$, $u = 0$ et $v = 0$. Cet abus consistant à identifier la coordonnée linéaire avec la droite résultant de son égalité à zéro ne nuira pas à la compréhension du travail de Plücker.

49. Le procédé de dépolarisation est notamment utilisé dans l'étude des surfaces pour transformer une forme fondamentale écrite sous forme diagonale en une forme fondamentale écrite uniquement à l'aide du terme rectangle : ces coordonnées curvilignes sont alors les "*coordonnées symétriques*", voir [**Bour 1861**, 4-5] ou 7.3.

mèneront à la considération des foyers des coniques via l'étude des systèmes de directions conjuguées.

Le but du processus de dépolarisation est de pouvoir interpréter géométriquement les droites p et q lorsque celles-ci sont des solutions complexes conjuguées d'une équation quadratique. Grâce à la conjugaison de ces deux quantités, Plücker recherche u et v sous la forme :

$$\alpha \in \mathbb{C}, \quad \text{et} \quad \begin{cases} p &= (1+i\alpha)(u-iv) \\ q &= (1-i\alpha)(u+iv) \end{cases}$$

Il obtient alors les relations entre p, q et u, v suivantes :

$$\begin{cases} p+q &= 2(u+\alpha v) \\ pq &= (1+\alpha^2)(u^2+v^2) \end{cases} \qquad \text{[Plücker 1835, 20]}$$

Pour obtenir indépendamment u et v en fonction de p et q, le géomètre pose $\lambda := \dfrac{1+i\alpha}{1-i\alpha}$ [50] ce qui permet d'obtenir symétriquement les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes :

$$\begin{cases} u &= \dfrac{1}{2(1+i\alpha)}(p+\lambda q) \\ v &= \dfrac{-1}{2(1+i\alpha)}(p-\lambda q) \end{cases}$$

Ceci permet de voir la conjugaison formée par le système (p, q, u, v) : les droites $u = 0$ et $v = 0$ sont les droites $p + \lambda q = 0$ et $p - \lambda q = 0$. Par conséquent ces droites forment un faisceau (elles sont concourantes) et représentent en outre un système de quatre droites harmoniques[51]. Cela vaut par ailleurs pour toutes les valeurs de λ : aussi les "*paires de droites*" $(u(\lambda), v(\lambda))$ forment ce que Plücker nomme "*une involution de paires de lignes*" ("*eine Involution Linien-Paaren*", [**Plücker 1835**, 22]). C'est en vertu de ce caractère involutif que Plücker montrera ([**Plücker 1835**, 28-30]) que l'on peut réciproquement obtenir les droites initiales p, q comme formant un système harmonique à l'aide des droites u, v et d'un coefficient a (qui dépend de α, donc de λ) de manière à exprimer ces droites comme :

$$\begin{cases} p = 0 & \Leftrightarrow u - iav = 0 \\ q = 0 & \Leftrightarrow u + iav = 0 \end{cases}$$

Plücker se penche alors sur les relations existant entre les angles formés respectivement par les droites initiales p, q et les droites obtenues u, v. Il adopte les notations angulaires suivantes :

$$\widehat{(p,q)} = \eta \quad , \quad \widehat{(u,v)} = w$$

On peut alors obtenir dans la base (u, v) la relation permettant de déterminer l'angle η en fonction des deux angles égaux $\widehat{(p,u)}$ et $\widehat{(u,q)}$ dont la tangente vaut identiquement

50. En réalité, Plücker pose à tort la quantité inverse pour définir λ ([**Plücker 1835**, 22]).

51. Le *rapport anharmonique* (ou birapport) des quatre droites vaut -1 : aussi forment-elles un système harmonique. C'est ce qu'indique, d'un point de vue affine, l'écriture même de u et v en fonction de p et $\pm\lambda q$.

$\dfrac{-1}{ia}$:

$$\frac{\tan(\eta)}{\sin(w)} = \tan(\widehat{(p,u)} + \widehat{(u,q)}) = \frac{\frac{-1}{ia} + \frac{-1}{ia}}{1 - (\frac{-1}{ia})^2} = \frac{-2ia}{1+a^2}$$

d'où l'écriture de [**Plücker 1835**, 23] : $\boxed{\pm i \tan(\eta) = \dfrac{2a}{1+a^2}\sin(w)}$

On peut ainsi, η étant fixé, déterminer l'angle w fait par les axes u et v. *A priori* comme le fait remarquer Plücker, les angles w ne sont pas droits, et le géomètre allemand de s'interroger sur l'angle que peuvent former les axes (u, v) le plus éloigné (en valeur absolue) de l'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Il note cet angle θ. Puisque $\tan(\eta)$ est fixée, w et θ sont liés par la relation :

$$\frac{2a(w)}{1+a(w)^2}\sin(w) = \frac{2a(\theta)}{1+a(\theta)^2}\sin(\theta)$$

Le minimum de $\sin(\theta)$ est donc atteint en rendant maximum - en valeur absolue - le quotient $\dfrac{2a(\theta)}{1+a(\theta)^2}$, soit lorsque $a(\theta) = \pm 1$. Dans ce cas, on obtient alors que $\tan(\eta) = \pm i \sin(\theta)$. Mais le cas auquel Plücker fait particulièrement attention est le cas $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Si un tel cas existe, alors le coefficient a reste constamment égal à l'unité en valeur absolue et l'angle w reste quant à lui constamment égal à $\dfrac{\pi}{2}$. Cela signifie que tous les couples de droites (u, v), conjugués à (p, q), sont orthogonaux. Dans ce cas, la relation entre les angles η et w devient indépendante de ce-dernier et laisse place à la relation caractérisant cette situation, et qui rappelle bien entendu la relation angulaire des tangentes isotropes :

$$\tan(\eta) = \pm i$$

Le lien entre les considérations qui précèdent et l'étude des coniques repose sur la forme canonique de l'équation de ces-dernières dans le système de coordonnées linéaires. Plücker démontre en effet ([**Plücker 1835**, 87-89]) que les coniques peuvent être dans ce système représentées par l'équation homogène :

$$pq + \mu r^2 = 0$$

Les droites p et q représentent alors deux tangentes à la conique, et r leur sécante de contact [52].

52. Ce triangle est un *triangle autopolaire* puisque les pôles des points de contacts ne sont autres que les tangentes associées qui forment par construction les côtés du triangle de départ.

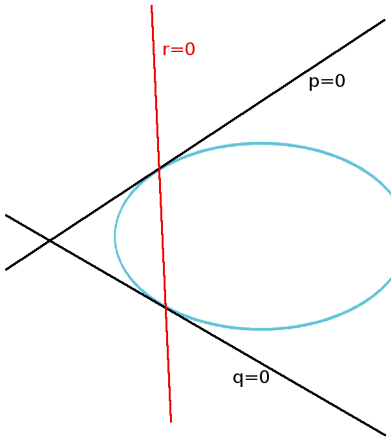


FIGURE 7. Les trois droites (deux tangentes et la sécante de contact) utilisées dans la définition des coordonnées linéaires donnent l'équation de l'ellipse (bleu) suivante : $pq + \mu r^2 = 0$

Lorsqu'on déshomogénéise l'équation (soit $r = 1$) et qu'on utilise les résultats de polarisation pour exprimer le produit pq, on obtient l'équation :

$$(1 + \alpha^2)(u^2 + v^2) + \mu = 0$$ [53]

Sous cette forme, Plücker remarque la signification des droites u et v : ce sont les directions de *deux diamètres conjugués* par rapport à la conique ("*zwei zugeordnete Durchmesser*" [**Plücker 1835**, 93]). En effet, on obtient bien deux valeurs opposées pour v lorsqu'on pose $u = 0$ (et réciproquement), ce qui signifie que toutes les cordes menées parallèlement à v sont coupées en leur milieu par u (et réciproquement). On retrouve par ailleurs le fait que l'équation de la conique prend la forme de celle du cercle lorsque le repère est formé de deux diamètres conjugués, non nécessairement orthogonaux. Cette équation est la forme déshomogénéisée de l'équation de la conique déterminée par les trois axes d'un triangle autopolaire [54].

En faisant varier le coefficient α et en réutilisant les notations angulaires précédentes, Plücker forme l'équation de la conique dans les systèmes linéaires des diamètres conjugués (u, v) :

$$\frac{\sin(w)}{a\sin(\theta)}(u^2 + a^2v^2) = C^2$$

w représente l'angle formé par deux diamètres conjugués et θ l'angle formé par deux de ces diamètres le plus éloigné de $\frac{\pi}{2}$. Le géomètre allemand pose alors la question suivante : "*y a-t-il ou peut-il y avoir dans le plan d'une conique donnée, de tels points tels que l'angle θ soit droit ? En effet dans le cas où nous obtiendrions une réponse positive, d'après les remarques du numéro 37*[55] *s'ensuit d'un point de vue analytique ce résultat extrêmement*

53. Plücker prend soin de distinguer les cas de positivité et de négativité des facteurs α^2 et v^2, c'est-à-dire d'effectuer à part une étude pour les ellipses et une pour les hyperboles.

54. Voir [**Coolidge 1963**, 151].

55. Ce numéro correspond au paragraphe où Plücker étudie les valeurs particulières de a et $\tan(\eta)$ dans le cas particulier $\theta = \frac{\pi}{2}$.

curieux que toutes les lignes droites imaginaires issues d'un tel point seraient à considérer comme tangentes à la courbe"[56]. Ce sont de tels points que Plücker définit alors comme étant les foyers de la conique. Remarquons une nouvelle fois le choix peu heureux du vocabulaire : les droites que Plücker désignent par "*lignes droites imaginaires*" sont en fait les droites de coefficients directeurs $\pm\sqrt{-1}$.

Dans un premier temps le professeur de Bonn se contente de remarquer que de tels points ne sauraient être en nombre infini en dénombrant les contraintes portant sur l'existence de ces points et en comparant avec le nombre de constantes comprises dans l'équation d'une conique : c'est l'un des tout premiers exemples du "*principe de la numération des constantes*" de Plücker qui deviendra célèbre. De la condition d'orthogonalité des axes u et v, ainsi que de celle d'égalité du paramètre $a(\theta)$ à l'unité[57] résultent trois équations, ce qui réduit ainsi le nombre de constantes de trois. Or l'équation générale des coniques comporte huit constantes, mais cinq de ces constantes sont nécessaires pour mettre cette équation sous la forme canonique $pq + \mu = 0$. Finalement, la détermination des foyers fait intervenir huit équations à partir de huit constantes, ce dont Plücker déduit que de tels points "*ne peuvent se présenter qu'en nombre limité*"[58].

Plücker va par la suite effectuer la détermination précise du nombre des foyers pour les cas de l'hyperbole, de l'ellipse et de la parabole en effectuant les transformations nécessaires dans le système de coordonnées linéaires. Cependant, dans une longue note de bas de page ([**Plücker 1835**, 103-104]), il va détailler le calcul général explicite de l'expression de $\sin(\theta)$ dans le système classique de coordonnées cartésiennes. La conique (à centre) étant écrite via l'équation cartésienne $A^2y^2 \pm B^2x^2 = \pm A^2B^2$, Plücker donne l'expression de la tangente $\tan(\eta)$ de l'angle formé par les axes linéaires (p, q) puis en déduit celle relative à l'angle minimum θ des axes (u, v) :

$$\sin^2(\theta) = -\frac{4(A^2y^2 \pm B^2x^2 \pm A^2B^2)}{(y^2 + x^2 - [A^2 \pm B^2])^2} \qquad (\mathcal{O}_\theta)$$

Lorsque la valeur de θ est fixée, Plücker remarque que cette équation du quatrième ordre correspond à celle d'un *ovale*, "*qui a la même forme que la lemniscate (ou le chiffre 8)*". Mais les foyers correspondent à un angle $\theta = \frac{\pi}{2}$, soit à l'unité du carré du sinus. Dans ce cas, l'équation de l'ovale dégénère - en posant $E^2 = A^2 - B^2$ - en la suivante :

$$\left(y^2 + (x-E)^2\right)\left(y^2 + (x+E)^2\right) = 0$$

Plücker obtient ainsi les foyers de la conique par leurs coordonnées cartésiennes classiques comme "*un système de deux points*" situés sur l'axe des abscisses : l'axe focal. On peut remarquer qu'il exclut à nouveau la considération des foyers imaginaires. Mais il décrit le comportement géométrique des ovales $(\mathcal{O}_\theta)$ à mesure que θ s'approche de l'angle droit : "*les courbes en forme de lemniscate se changent en deux ovales disjointes, chacun*

56. "*die Frage nemlich, ob es in der Ebene eines gegebenen Kegelschnittes solche Puncte gibt oder geben kann, für welche der Winkel θ ein rechter ist. Denn für den Fall, dass wir eine bejahenden Antwort auf diese Frage erhielten, folgt aus den Bemerkungen der 37. Nummer das, in analytischer Rücksicht, höchst merkwürdige Resultat, dass alsdann jede durch einen solchen Punct gehenden imaginäre gerade Linie als eine Tangente der Curve anzusehen ist.*" [**Plücker 1835**, 102].

57. Plücker mentionne que c'est λ qui doit être égal à l'unité, ce qui néanmoins est équivalent ([**Plücker 1835**, 102]).

58. "*nur eine beschränkte Anzahl von Puncten der fraglichen Art*", [**Plücker 1835**, 103].

entourant un des deux foyers, devenant de plus en plus petits jusqu'à ce que, épousant toujours plus la forme du cercle, ces ovales se réduisent ponctuellement aux seuls foyers" [59]. On voit ici que, contrairement à l'étude effectuée dans [**Plücker 1831**], Julius Plücker effectue ici le rapprochement entre les foyers en tant que points, et des cercles de rayon nul. En revanche il n'est nullement question de tangence : seule compte l'inclinaison angulaire extrême des diamètres conjugués.

Finalement, on ne retrouve qu'en [**Plücker 1835**, 114] la possibilité d'atteindre une équation de cercle lorsque l'équation de la conique, dans les coordonnées linéaires, se fait grâce à trois droites formant un triangle autopolaire. Plücker utilise pour la première et la dernière fois de son ouvrage la caractérisation des foyers d'une conique par la possibilité de mener une tangente de coefficient angulaire ξ tel que $\tan(\xi) = \pm\sqrt{-1}$. En utilisant alors la forme particulière de l'équation dans le repère centré en un foyer, et en adoptant comme nouvelles coordonnées $([u],[v])$ les inverses des longueurs formées par les intersections de deux tangentes, liées à deux diamètres conjugués orthogonaux, sur ces-mêmes diamètres [60], on obtient la forme familière :

$$([u] - u')^2 + ([v] - v')^2 = k^2$$

Bien entendu, les nouvelles coordonnées $([u],[v])$ ne sont plus des coordonnées linéaires ; aussi Plücker ne s'appesantit nullement sur l'étude de cette nouvelle forme. Il se contente de rappeler que c'est précisément la recherche de cette équation (de cercle) qui l'avait guidée dans son ouvrage précédent et avait motivé sa définition des foyers.

Dans la suite de l'ouvrage de Plücker, l'analyse relative aux foyers reste cantonnée à l'étude des coniques et concerne la détermination des directrices liées aux foyers, la forme autopolaire de l'équation des coniques, le cas particulier de la parabole et surtout les propriétés angulaires des systèmes de diamètres conjugués. On peut donc conclure quant au rôle des foyers dans cet ouvrage de 1835 en comparant avec celui de 1831. Dans [**Plücker 1831**], les foyers des coniques apparaissent essentiels pour mettre les équations sous forme canonique dans les systèmes de coordonnées homogènes tangentielles. Dans [**Plücker 1835**], l'étude des coniques est en revanche centrée sur les propriétés angulaires et harmoniques des systèmes de diamètres conjugués, en lien avec l'adoption du système de coordonnées linéaires. Les foyers émergent alors de la recherche particulière des systèmes de diamètres conjugués orthogonaux. Bien qu'il existe un fondement théorique commun à ces deux recherches, à savoir le théorème de De La Hire de perpendicularité des polaires [61] des sécantes issues des foyers, il n'y a pas de similarité entre les deux études de 1831 et de 1835 du géomètre allemand.

Ce qu'il est important de souligner est le fait que Plücker ne réutilise pas directement la définition des foyers qu'il avait donnée dans [**Plücker 1833**]. Certes il retrouve ce "*résultat extrêmement curieux*" que les droites imaginaires issues des foyers sont tangentes à la courbe, mais cela intervient logiquement après avoir donné une autre définition des

---

59. "*der Lemniscaten-förmigen Curve immer näher rückt, dann, durch diese hindurchgehend, in zwei abgesonderte Ovale sich auflöset, deren jedes um einen der beiden Brennpuncte sich zieht, und die immer kleiner werden, bis sie, der Kreisform sich nähernd, sich zuletzt auf die beiden Brennpuncte selbst reduciren*", [**Plücker 1835**, 104].

60. Puisque l'équation de la conique est écrite sous la forme $M^2p^2 + N^2q^2 = M^2N^2$, cela revient en fait à prendre pour paramètres $[u] = \frac{1}{p}, [v] = \frac{1}{q}$ (voir [**Plücker 1835**, 112-113]).

61. Il s'agit en toute rigueur de la droite issue du foyer passant par le pôle de la sécante, et non d'une *polaire*.

foyers. Pour le professeur de Bonn, les foyers ne sont plus caractérisés par les tangentes isotropes mais par l'orthogonalité des systèmes de diamètres conjugués, dont l'étude est naturellement amenée par le choix des coordonnées linéaires. Ainsi, c'est l'abandon des deux systèmes de coordonnées tangentielles et cartésiennes qui est à l'origine de la perte de généralité de la notion de foyer : comment justifier en effet le choix d'un nouveau système de coordonnées si l'exposition d'une notion si importante - dans l'étude des coniques - que celle des foyers nécessite de s'en débarrasser aussitôt ?

Si les coordonnées linéaires permettent de retrouver d'une nouvelle manière les foyers des coniques par la conjugaison des diamètres, elles ne permettent en revanche pas de considérer les foyers des courbes cubiques - du 3ème degré - ou de tout autre ordre supérieur. C'est donc logiquement que Plücker ne fera pas intervenir la notion de foyer dans la seconde moitié de son ouvrage consacrée aux cubiques, alors que l'exemple même qu'il avait donné dans son article [**Plücker 1833**] suite à l'extension de la notion de foyer était précisément une étude, certes rapide, des foyers de cette catégorie de courbes. Pour Plücker, l'abandon des coordonnées tangentielles va ainsi de pair avec l'abandon de sa volonté d'étendre la notion de foyer.

2.4. La "théorie des courbes algébriques" de 1839.

Dans le dernier de ses ouvrages centrés sur l'étude des courbes planes, [**Plücker 1839**], les objectifs de Plücker sont avant tout l'analyse des comportements asymptotiques des courbes ainsi que l'étude des points singuliers (rebroussements et points doubles) et des tangentes singulières (tangentes doubles et inflexions). Les deux chapitres dont l'ouvrage se compose sont ainsi logiquement consacrés respectivement aux branches infinies et aux singularités. Ce dernier chapitre fait évidemment appel aux formules de Plücker permettant de décrire le nombre de singularités des courbes en considérant les propriétés de leurs duales. Par ailleurs, les courbes faisant l'objet d'une attention spécifique ne sont plus les coniques mais les cubiques et les quartiques. C'est ainsi aux cas des degrés 3 et 4 que correspondent les analyses méthodiques données par le géomètre de Bonn tant pour les branches asymptotiques que pour les singularités. Il y consacrera notamment ses analyses des configurations de réalité ou d'imaginarité de certaines singularités comme par exemple la réalité des 28 tangentes doubles d'une quartique ([**Plücker 1839**, 228-253]).

Le point central concernant cet ouvrage est l'absence totale de la notion de foyer. Cette absence s'explique par la persistance de l'usage des coordonnées linéaires pour l'écriture des équations de courbes. Ce système de coordonnées présente en effet de nombreux avantages pour les études envisagées par le géomètre allemand : la forme même des équations des courbes permet de distinguer leurs comportements asymptotiques[62], et les singularités peuvent être obtenues analytiquement en considérant les dérivations partielles des équations de courbes[63]. Les foyers des courbes sont ainsi devenus à la fois un outil dont Plücker n'a plus l'utilité dans l'optique de ces nouvelles études sur les courbes, mais en outre - comme c'était déjà le cas pour [**Plücker 1835**] - une notion dont la définition est inadaptée au système de coordonnées linéaires. Le fait que l'étude ne soit plus centrée sur

62. On pourra en particulier consulter le magnifique résumé des 152 équations possibles pour les courbes du 4ème ordre en fonction de la nature de leurs branches infinies effectuées en [**Plücker 1839**, 136-149]. Certaines configurations sont néanmoins comptées doubles car il en existe "uniquement" 146.

63. Pour plus de détails, on consultera [**Gray 2007**, 155-170].

les coniques, seules courbes pour lesquelles Plücker employait la notion de foyers dans ses deux ouvrages précédents, permet également de comprendre la disparition de cette notion.

L'étude de la contribution de Julius Plücker au développement de la notion de foyer pour les coniques et les courbes planes en général doit ici prendre fin puisque, dans le cadre du plan, cette notion est absente des deux ouvrages ultérieurs du géomètre [**Plücker 1847**] et [**Plücker 1868**] qui portent sur la géométrie dans l'espace. S'il a bien donné la définition générale des foyers des courbes planes comme intersections des tangentes isotropes à la courbe dans son article de 1833, Plücker n'a en revanche jamais exploité cette notion dans un cadre autre que celui des courbes du second degré, où cette notion était déjà largement utilisée. Il est vrai que dans le contexte de l'étude des coniques, Plücker a élargi la définition de foyer grâce aux outils de la géométrie projective imaginaire : le foyer est devenu dans son traitement intimement lié à l'*imaginarité* (nous dirions l'isotropie) des tangentes. Mais il reste avant tout le lieu privilégié des centres de repères permettant d'exprimer les équations et les propriétés des coniques de la manière la plus simple possible : c'est d'une part le lieu où les équations tangentielles s'apparentent à des équations de cercle (en coordonnées tangentielles homogènes) sous forme de l'équation de cercle via les coordonnées tangentielles homogènes, c'est d'autre part celui où les systèmes de diamètres conjugués sont orthogonaux (via les coordonnées linéaires). Tout rapproche l'étude des coniques, ramenée du point de vue des systèmes de coordonnées en l'un de leurs foyers, de l'étude du cercle, ce qui apparente le travail de Plücker à l'approche de Poncelet. Pour autant, Plücker ne considère jamais le foyer comme un cercle de rayon infiniment petit doublement tangent à la conique, ce qui caractérisait l'apport du français.

En dépit de sa définition générale des foyers, Plücker n'a donc pas "*recherché les propriétés de ces points*" comme l'écrit Salmon, ou peut-être les a-t-il cherchées en vain. Toujours est-il que cette notion lui apparaît - outre pour la considération des coniques - comme peu ou pas utile, et en outre inadaptée aux coordonnées linéaires. Aussi après 1835 Plücker ne reviendra-t-il plus sur la notion de foyer des courbes.

3. Réutiliser la notion générale de foyer pour servir la recherche de nouvelles propriétés

FIGURE 8. Ernst Eduard Kummer (à gauche) et George Salmon (à droite)

La redécouverte de la définition générale des foyers "*à la Plücker*" et son utilisation va venir de la découverte des propriétés des courbes se rapportant à cette notion dorénavant élargie. Comme nous l'avons mentionné en 2, cela sera à mettre au crédit des deux mathématiciens Ernst Kummer, en 1847, et George Salmon au début des années 1850.

3.1. 1847 : les "courbes orthogonales planes" de Kummer.

Né en 1810 à Sorau en Prusse, Ernst Eduard Kummer effectua ses études à l'université de Halle jusqu'en 1831. Son premier mariage en 1840 en fit le cousin par alliance du musicien Félix Mendelssohn. Il enseignera les mathématiques dans les Universités de Breslau à partir de 1842, puis de Berlin après 1855. Sa haute estime de Karl Weierstrass jouera un grand rôle dans la nomination de ce-dernier à l'Université de Berlin à ses côtés en 1856.

En 1847, Kummer publie un court article ([**Kummer 1847**]) dans lequel il parvient à donner les équations aux dérivées partielles générales dont dépend le problème des systèmes de courbes (planes) orthogonales. S'il ne peut en exprimer la solution la plus complète, Kummer exhibe néanmoins une grande classe de nouvelles solutions. Enfin il montre dans la dernière section de son article une "*propriété générale*" ("*eine allgemeine Eigenschaft*") des systèmes de courbes orthogonales qu'il étudie : leur caractère *homofocal.*

Nous allons donner quelques éléments des différentes méthodes employées par Kummer pour aboutir à de nouveaux systèmes de courbes orthogonales car cette analyse nous permettra non-seulement de comprendre l'utilisation de la notion de foyer dans la seconde partie de l'article, mais elle préfigurera également l'étude générale de la notion plus large de surfaces orthogonales que nous effectuerons plus loin au chapitre 3.

Kummer s'attache à la recherche des *systèmes doubles orthogonaux compris dans une même équation*, c'est-à-dire aux familles de courbes dépendant d'un unique paramètre, α, selon l'équation $f(x, y, \alpha) = 0$.

Pour que ces courbes forment un système double orthogonal [64], il faut d'une part que l'équation donnée par f soit du second degré en α, et ce pour que par un point donné du plan passent exactement deux courbes du système. Il faut d'autre part que ces deux courbes se coupent en ce point à angle droit. Cela signifie que les deux valeurs de α déterminées précédemment, α_1 et α_2, doivent correspondre à deux valeurs pour les coefficients directeurs $\frac{dy}{dx}$ dont le produit vaut -1 :

$$\left(\frac{dy}{dx}(\alpha_1)\right)\left(\frac{dy}{dx}(\alpha_2)\right) = -1$$

Les tangentes aux deux courbes au point d'intersection sont alors perpendiculaires.

Le point de départ de Kummer est d'écrire l'équation du système $f(x, y, \alpha) = 0$ sous la forme : $\alpha^2 + 2\alpha z(x, y) - z_1^2(x, y) = 0$

Il exprime alors les différentielles des fonctions z et z_1 via :

$$\begin{cases} dz & = pdx + qdy \\ dz_1 & = p_1dx + q_1dy \end{cases}$$

Le géomètre de Breslau peut alors exprimer la condition d'orthogonalité formulée par le produit des coefficients directeurs, mais cette fois en fonction des nouvelles variables (z, p, q, z_1, p_1, q_1) :

$$z_1(p^2 + q^2 - p_1^2 - q_1^2) - 2z(pp_1 + qq_1) = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

Kummer remarque que l'intégration complète de cette équation "*ne se laisse pas mener ou au moins ne se laisse pas exprimer sous une unique forme*" [65]. Néanmoins l'atout de cette mise en équation est de vérifier que l'on peut trouver une infinité de systèmes solutions - qui n'en seront toujours que des solutions particulières - en annulant simultanément les deux parenthèses de $(\mathcal{E})$, soit en résolvant le système :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} p^2 + q^2 - p_1^2 - q_1^2 & = 0 \\ pp_1 + qq_1 & = 0 \end{cases}$$

Or l'intégration complète de ce système se simplifie et est connue lorsqu'on considère les dérivées partielles du second ordre. Kummer parvient alors à une première classe étendue de solution dépendant de deux fonctions arbitraires [66] qu'il note f et F :

64. Kummer ne donne pas explicitement ce nom de système double orthogonal. Nous introduisons ce vocabulaire pour être cohérent avec l'étude des *systèmes triples orthogonaux* qui sera menée pour les surfaces et qui elle, en revanche, sera appelée explicitement ainsi par les acteurs (voir Chap.3).

65. "*lässt sich entweder gar nicht, oder doch sicherlich nur in einer Form ausführen*", [**Kummer 1847**, 7].

66. Le lecteur moderne dirait tout de même des fonctions f et F qu'elles ne sont pas tout à fait arbitraires mais plutôt *holomorphes*.

$$\begin{cases} z &= f(x+iy) + f(x-iy) - iF(x+iy) + iF(x-iy) \\ z_1 &= if(x+iy) - if(x-iy) + F(x+iy) + F(x-iy) \end{cases}$$

En particulier en prenant $f(x+iy) = \frac{1}{2}(x+iy)$ et $F = 0$, Kummer note qu'on obtient le système de paraboles homofocales[67]. Bien que cette classe de solution soit très étendue, elle ne contient pas le système orthogonal des coniques homofocales bien connu (depuis Leibniz si l'on en croit Kummer). Pour obtenir celles-ci, le géomètre allemand a recours à une extension de sa méthode : il reprend les mêmes considérations avec pour nouvelles variables indépendantes z_1 et une nouvelle variable z_2. La variable z est alors exprimée comme fonction de z_1 et z_2. Une nouvelle fois, l'équation générale obtenue échappe à une résolution complète, mais une nouvelle classe de solutions est obtenue en considérant un cas particulier qui autorise et facilite sa résolution. Ce cas est donné par la relation $2z = 1 - z_1 - z_2$. Ainsi z et z_2 ne sont-elles pas interchangeables, et la nouvelle méthode de Kummer étend ainsi bien la précédente.

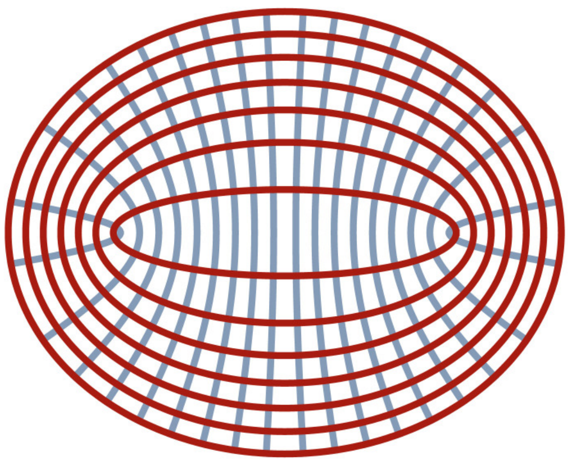


FIGURE 9. Le système double orthogonal formé d'ellipses et d'hyperboles homofocales.

On obtient pour z_1 et z_2 les mêmes expressions générales - dépendant de deux fonctions - que précédemment pour respectivement z et z_1 . Néanmoins les systèmes de courbes auxquelles ces solutions se rapportent sont dorénavant :

$$\frac{z_1^2}{\alpha} + \frac{z_2^2}{\alpha + 1} = 1$$

67. Ces paraboles sont donc comprises dans l'équation $f(x, y, \alpha) = \alpha^2 - 2\alpha x - y^2 = 0$, [**Kummer 1847**, 8]. Kummer donne également l'exemple de puissances (non-nécessairement entières) de $(x + iy)$ pour f et F, lesquelles donnent naissance à des courbes s'exprimant aisément en coordonnées polaires.

Le même choix particulier $f(x+iy) = \frac{1}{2}(x+iy)$ et $F = 0$ correspond alors au système formé par les coniques (ellipses et hyperboles) homofocales [68].

Le reste de la première partie de l'article de Kummer, dédié à la recherche de nouveaux systèmes doubles orthogonaux, consiste tout d'abord en une seconde extension de la méthode de recherche en utilisant la technique de variation de la constante. Puis Kummer discute la généralité de sa méthode, prouvant que toute équation donnée d'un système double orthogonal peut mener par changement de variables à l'équation :

$$u_1(p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2) - 2u(p_1p_2 + q_1q_2) = 0$$

Cela justifie pour Kummer la possibilité de remplacer dans toute équation de système double x par z_1 et y par z_2 pour se ramener aux cas généraux analysés dans l'article. Cela montre en outre, ce que le géomètre allemand ne souligne en revanche pas, que tout système double orthogonal compris dans une unique équation comprend, comme sous-système particulier, un des deux cas qu'il vient d'expliciter.

Les deux dernière pages de l'article de Kummer, [**Kummer 1847**, 11-12], sont consacrées à la preuve de la "*propriété générale*" propre aux systèmes doubles de courbes orthogonales dépendant d'une unique équation. Selon Kummer, il s'agit de :

> [...] prouver que tout système [double orthogonal compris dans une unique équation] possède toujours un certain nombre de foyers qui sont communs à toutes les courbes du système. Il est bien connu que Plücker a le premier donné une définition générale pour les foyers d'une courbe d'ordre quelconque, ceux-ci étant ainsi les points du plan d'une courbe desquels on peut tirer deux tangentes à la courbe formant avec l'axe des abscisses (et donc avec tout axe donné) un angle dont les tangentes trigonométriques prennent les valeurs $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$. [69]
>
> [**Kummer 1847**, 11]

On voit d'abord que la définition générale des foyers que Kummer retire des travaux de Plücker est bien l'intersection des tangentes isotropes à une courbe. On peut également remarquer que le théorème que Kummer va démontrer ne stipule pas que toutes les courbes ont exactement les mêmes foyers (ce qui est pourtant vrai). Il s'agit uniquement de montrer qu'il existe certains points qui font partie de l'ensemble des foyers de toutes les courbes d'un système double orthogonal.

La preuve de Kummer est basée sur la considération de l'enveloppe [70] des courbes du système $(\mathcal{S}) : \alpha^2 + 2\alpha z - z_1^2 = 0$. Bien entendu, comme le remarque le géomètre allemand,

68. L'équation de ce système est alors :

$$f(x, y, \alpha) = \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha + 1} - 1 = 0$$

Le lecteur pourra s'assurer que les foyers réels de ces courbes sont les deux points $(0, \pm 1)$

69. "*nachweisen, dass sie [die Systeme] immer eine bestimmte Anzahl von Brennpuncten haben, welche allen Curven eines Systems gemeinsam sind. Bekanntlich hat Plücker zuerst eine allgemeine Definition für die Brennpuncte der Curven beliebiger Ordnungen gegeben, welcher zufolge sie diejenigen Puncte in der Ebene einer Curve sind, von denen aus sich zwei imaginäre Tangenten an die Curve ziehen lassen, welche mit der Abscissenaxe (also mit einer beliebigen Graden) Winkel bilden, deren trigonometrischen Tangenten die Werthe* $+\sqrt{-1}$ *und* $-\sqrt{-1}$ *haben.*"

70. L'enveloppe d'une famille de courbes planes est constituée des points d'intersection des courbes infiniment proches de cette famille. Il s'agit d'une courbe tangente à chaque courbe de la famille. Pour plus

cette enveloppe est imaginaire, néanmoins elle comporte certains points réels qui sont en fait ses points doubles. Kummer va alors montrer que toutes les tangentes à l'enveloppe imaginaire du système sont isotropes. Les points doubles de cette enveloppe seront alors des points d'intersection des tangentes isotropes à toutes les courbes du système, donc des *foyers* de ces courbes.

L'enveloppe du système $(\mathcal{S})$ est obtenue en éliminant le paramètre α grâce à l'équation même du système et sa dérivée prise par rapport à α. Kummer trouve cette enveloppe comme répondant à l'équation $z^2 + z_1^2 = 0$. Les points réels (doubles) de cette enveloppe sont ainsi les points d'intersection des deux courbes $z = 0$ et $z_1 = 0$. Par ailleurs, il détermine le coefficient directeur en un point de l'enveloppe du système de courbes en considérant deux différentes courbes pour les paramètres α et β puis en faisant β tendre vers α. Puisque les deux courbes sont orthogonales, les produits des coefficients directeurs sont, aux points de rencontre des deux courbes (éventuellement idéaux), constamment égaux à -1 :

$$\left(\frac{dy}{dx}(\alpha)\right)\left(\frac{dy}{dx}(\beta)\right) = -1$$

Mais lorsque β tend vers α, ces deux différents coefficients directeurs coïncident, ce qui donne alors

$$\left(\frac{dy}{dx}(\alpha)\right)^2 = -1 \quad \text{soit} \quad \frac{dy}{dx}(\alpha) = \pm\sqrt{-1}$$

Toutes les tangentes de l'enveloppe d'un système double de courbes orthogonales sont ainsi isotropes. Ceci permet à Kummer de conclure qu'en menant en particulier les deux tangentes à l'enveloppe en l'un de ses points doubles, ces tangentes sont isotropes et sont également des tangentes à la courbe du système de paramètre α. Ces points doubles, intersections des tangentes isotropes, sont donc des foyers de la courbe correspondant à ce paramètre. Mais puisque ce résultat ne dépend pas de la valeur de α, il vaut pour toutes les courbes du système : les points définis par $z = z_1 = 0$ sont ainsi des foyers communs à toutes les courbes du système double orthogonal $(\mathcal{S})$ ([**Kummer 1847**, 12]).

On remarque que chez Kummer la considération de l'enveloppe des courbes du système et de ses points doubles joue un rôle central dans la définition et les propriétés des foyers. Prenons du recul (ou plutôt de l'avance sur la suite de la section) et analysons en détail comment la démarche de Kummer pourrait être généralisée, bien plus que ne le conçoit alors le géomètre allemand. Cela nous permettra de comprendre l'influence que ce travail aura dans les années 1860.

Pour chacune des courbes du système, l'enveloppe globale est en fait une courbe imaginaire qui lui est circonscrite et dont toutes les tangentes passent par les points cycliques. Les foyers d'une courbe sont alors ici les points doubles des courbes qui lui sont circonscrites et dont les tangentes passent par les points cycliques. Qu'un ensemble de courbes possèdent les mêmes foyers revient alors à pouvoir circonscrire à toutes ces courbes une seule et même courbe dont les tangentes possèdent cette propriété d'isotropie : c'est bien le cas pour un système double orthogonal dépendant d'une seule équation, et c'est là de fait le cœur de la démonstration de Kummer. Nous verrons en 5 comment cette manière d'appréhender des courbes homofocales sera reprise et élargie aux surfaces par Chasles en

de détails sur l'émergence de cette notion, son usage, sa définition et son application aux surfaces, voir la section [Chap.7,2].

1860. Nous analyserons également ce travail de Kummer et comment la définition sous-jacente des foyers comme points doubles inspirera Darboux quelques années plus tard (5.2 et 7.1).

3.2. 1852 : le "Traité sur les courbes planes" de Salmon.

Les traités du mathématicien irlandais George Salmon vont, au tournant des années 1850, contribuer largement à diffuser les idées de Poncelet et de Plücker concernant la notion de foyer. Natif de Dublin en 1819, Salmon fit ses études au Trinity College de Dublin à partir de 1833. Il y restera ensuite toute sa vie en tant que professeur de mathématiques et de théologie.

Déjà en 1848 dans son premier "*Traité des sections coniques*" ([**Salmon 1848**]), Salmon reprend les apports des deux mathématiciens Poncelet et Plücker pour traiter le cas des courbes coniques. On trouve en effet comme chez Poncelet le rôle fondamental des foyers dans l'étude des contacts des coniques, menant à la considération de ces points comme "*des cercles infiniment petits touchant la conique en deux points imaginaires situés sur la directrice*" ([**Salmon 1848**, 217]). Mais on retrouve également la définition donnée par Plücker en 1833 des foyers grâce aux tangentes isotropes, Salmon parlant de ces-dernières - à la différence de Plücker - en utilisant la notion de *points cycliques* (mais sans la nommer ainsi) [71]. La définition des foyers devient alors pour Salmon :

> Par chacun des deux points imaginaires à l'infini appartenant à tout cercle [les points cycliques], traçons deux tangentes à la conique ; ces tangentes formeront un quadrilatère dont deux sommets seront réels, les foyers de la courbe, les deux autres sommets pouvant être considérés comme des foyers imaginaires de la courbe. [72]
>
> [**Salmon 1848**, 237]

On peut noter que Salmon n'écarte pas la considération des foyers imaginaires comme l'avait fait Plücker puis Kummer à sa suite. Cette définition projective, dont l'irlandais note qu'elle s'applique aux courbes en général et non uniquement aux coniques, sera utilisée dans la suite du traité pour exprimer plusieurs propriétés projectives des coniques ([**Salmon 1848**, 310-311]). Remarquons enfin que s'il cite les travaux de Poncelet et Chasles, s'il utilise en outre parfois le système de coordonnées linéaires, Salmon ne cite pas les travaux de Plücker relatifs à la notion de foyer dans ce traité.

Pour que Salmon fasse explicitement référence aux travaux de Plücker sur les foyers, il faut se pencher sur son Traité de 1852 sur les courbes algébriques de degré quelconque. Dans cet ouvrage, non seulement Salmon redonne la définition des foyers de Plücker par les tangentes isotropes, mais surtout il accorde à cette notion une section entière ([**Salmon 1852**, 119-128]), et il affirme être persuadé qu' "*on trouvera que chaque point qui possède une relation spéciale avec une courbe sera soit un point singulier de la courbe, soit un foyer de celle-ci*" [73]. Le professeur du *Trinity College* de Dublin va ainsi s'attacher à montrer les

71. Voir plus de détails à ce sujet dans [**Nabonnand 2006**, 66] ou dans notre partie 6.3.
72. "*Through each of the two imaginary points at infinity on any circle draw two tangents to the conic; these tangents will form a quadrilateral, two of whose vertices will be real and the foci of the curve, the other two may be considered as imaginary foci of the curve*", [**Salmon 1848**, 237].
73. "*we believe that it will be found that every point which has any special relation to any curve will be found either to be a singular point of the curve, or a focus ot if.*", [**Salmon 1852**, 119].

apports de la notion de foyer pour découvrir ou redécouvrir des propriétés des courbes, en particulier celles du 3ème et du 4ème ordre.

Salmon est le premier à remarquer explicitement que le nombre de foyers d'une courbe est directement lié à sa classe et à son comportement à l'infini : Plücker n'avait considéré en 1833 que la classe de la courbe, et il n'en avait déduit que le nombre maximum de foyers. Salmon effectue quant à lui une étude méthodique : il affirme d'abord comme le géomètre allemand qu'en général une courbe de classe n admet n^2 foyers dont n sont réels. Mais il poursuit en ajoutant que si la courbe est tangente à la droite de l'infini, comme c'est par exemple le cas de la parabole [74], un des foyers réels est rejeté à l'infini et le nombre de foyers "*finis*" réels devient $n-1$. Si la courbe passe elle-même par les points cycliques, certains foyers vont coïncider. Leur nombre dépendra alors de la nature des points cycliques : si les points cycliques sont des points ordinaires (comme pour le cercle), deux foyers réels se rassemblent en un même point et leur nombre devient $n-1$. Si les points cycliques sont des points doubles, alors deux foyers sont rejetés à l'infini et sont en outre des foyers doubles : le nombre de foyers réels finis est passé de n à $n-4$. Si enfin les points cycliques sont des points de rebroussement, "*la tangente en un rebroussement compte triple*" ([**Salmon 1852**, 123]) ce qui porte le nombre de foyers réels à $n-3$. Salmon utilise ainsi les méthodes de dénombrement des singularités utilisées par Plücker dans ses formules éponymes, et applique celles-ci à la recherche du nombre de foyers des courbes. Il effectue ensuite trois études de cas où, tirant profit de la détermination du nombre de foyers, il utilise ces points pour dresser un classement des courbes du quatrième ordre et écrire l'équation de celles-ci d'une nouvelle manière. Les trois cas qu'il étudie sont les ovales de Descartes, les quartiques bicirculaires et les ovales de Cassini ([**Salmon 1852**, 123-128]). Réservant l'analyse des ovales de Descartes pour la section [Chap.3,1.2], nous allons ici nous intéresser au traitement des courbes quartiques bicirculaires.

Les *quartiques bicirculaires* sont pour Salmon les courbes représentée par une équation linéaire homogène entre les distances d'un point M à trois points du plan $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$. Notant $\sqrt{A}$ l'expression de la distance à $\mathcal{A}$ (soit en coordonnées cartésiennes le radical $\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}$), et de même pour $\sqrt{B}$ et $\sqrt{C}$, l'équation d'une quartique bicirculaire est alors :

$$l\sqrt{A}+m\sqrt{B}+n\sqrt{C}=0 \;\;,\;\; (l,m,n)\in\mathbb{R}^3$$

En passant deux fois l'expression au carré, Salmon vérifie qu'il s'agit bien d'une courbe du 4ème degré : une quartique. Il remarque alors que, conservant son écriture en notations abrégés, une factorisation adaptée permet de mettre l'équation sous la forme :

$$l^2A(l^2A-2m^2B-2n^2C)+(m^2B-n^2C)^2=0$$

Ceci montre que "*les deux droites imaginaires représentées par A sont tangentes à la courbe*" et que par conséquent leur point de rencontre $\mathcal{A}$ est un foyer de cette courbe [75]. Par symétrie, il en va de même pour les points $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$: on a donc trois foyers de la quartique. Bien que Salmon ne le souligne pas, ce résultat se généralise immédiatement à toutes les

74. L'équation homogonène de la parabole étant $YT-X^2=0$, le long de la droite de l'infini $T=0$ on obtient bien $X=0$ comme racine double, donc comme un point de tangence.

75. Les deux tangentes isotropes s'écrivent $y-y_A=\pm i(x-x_A)$; leur produit correspond exactement à l'équation $A=0$. Elles sont par ailleurs bien tangentes à la courbe puisque $A=0$ laisse place dans l'équation de celle-ci à deux racines doubles (les lieux de la tangence) qui sont les solutions de $m^2B-n^2C=0$. Salmon ne détaille néanmoins pas ces calculs ([**Salmon 1852**, 123-125]).

courbes définies par une relation affine, homogène ou non, entre les distances à des points fixés $\mathcal{A}_i$ du plan. Ainsi, les courbes définies par l'équation $\sum_i l_i A_i = k$ admettront en particulier les points $\mathcal{A}_i$ pour foyers. Ces courbes seront appelées *polyzomales* après Arthur Cayley [76]. On retrouve ainsi en particulier au regard des coniques définies par les équations $MF \pm MF' = \pm 2a$ le fait que les points F et F' soient bien les foyers de ces ellipses et des hyperboles. On voit ainsi comment la méthode de Salmon permet de déduire efficacement la position des foyers des courbes uniquement via l'écriture de l'équation de celles-ci, pourvu que cette équation soit exprimée à l'aide de distances à des points fixés.

Le mathématicien irlandais donne ensuite l'écriture cartésienne de la quartique bicirculaire en remplaçant A par $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2$, et de même pour B et C. Il trouve alors l'expression qui deviendra classique :

$$(x^2+y^2)^2 + u_1(x^2+y^2) + u_2 = 0 \qquad \text{[Salmon 1852, 125]}$$

Dans cette équation, u_1 est un polynôme du premier degré que l'on peut, sans perte de généralité, supposer homogène, et u_2 est un polynôme du second degré [77]. Cette écriture caractérise les quartiques bicirculaires comme étant les courbes du quatrième ordre admettant les points cycliques - racines à l'infini de (x^2+y^2) - pour points doubles, ainsi que le met clairement en avant Salmon. Il s'attache ensuite à la recherche du nombre de foyers (réels finis) de ces courbes. Étant de la huitième classe et admettant les points cycliques comme points doubles, deux foyers doubles sont rejetés à l'infini et par conséquent le nombre de foyers dans le plan est égal à $8-2\times 2=4$. Ayant déjà déterminé que les trois points $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ étaient des foyers de par la forme initiale de l'équation de la quartique, il conjecture que "*le quatrième foyer [$\mathcal{D}$] possède la même propriété que les autres, c'est–à-dire que l'équation de la courbe puisse également s'écrire sous la forme* $l\sqrt{A}+m\sqrt{B}+n\sqrt{D}=0$" [78]

Le professeur de Dublin démontre alors qu'il en est effectivement ainsi et explicite les relations qui relient les quatre foyers $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$. Connaissant trois foyers, ces relations permettront alors d'en déterminer le quatrième. Il existe donc en général quatre différentes écritures de l'équation des quartiques bicirculaires sous la forme *polyzomales*, en fonction des distances à trois des quatre foyers. Lorsque trois des foyers ne sont pas alignés, alors Salmon démontre que les quatre foyers $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont *cocycliques*. Si en revanche $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sont alignés, il montre alors que $\mathcal{D}$ appartiendra également à la droite qu'ils formeront. Le cas particulier où, par la relation métrique liant les quatre foyers, $\mathcal{D}$ est rejeté à l'infini, correspondra à l'obtention des ovales de Descartes.

La connaissance des foyers permet ainsi d'effectuer un classement des quartiques bicirculaires : celles qui admettent un foyer triple à l'infini et trois foyers dans le plan (réels finis) sont des ovales de Descartes. Celles qui admettent deux foyers triples (et deux simples) dans le plan seront des ovales de Cassini. Les quartiques bicirculaires les plus générales

---

76. Cayley a publié en 1868 une étude très étendue de ces courbes auxquelles il donne le nom de polyzomales, [Cayley 1868a]. La définition de Cayley est même encore plus large puisque dans l'équation $\sqrt{U}+\sqrt{V}+...=0$ définissant la courbe, U, V etc... peuvent être des polynômes en (x,y).

77. Les ovales de Cassini sont comprises dans la classe des ovales obtenus en faisant disparaître les termes du troisième degré, c'est-à-dire en faisant $u_1=0$.

78. "*it is natural to conjecture [...] that the fourth focus possesses the same property as the others; or that the equation of the curve may be also thrown into the form* $l\sqrt{A}+m\sqrt{B}+n\sqrt{D}=0$", [Salmon 1852, 125].

seront celles qui admettront quatre foyers simples dans le plan, deux foyers doubles étant alors à l'infini.

On voit ainsi comment George Salmon tire profit de sa dextérité des traitements des singularités des courbes en l'appliquant à la notion de foyers. La détermination des foyers des courbes et la nature de ces foyers (multiplicité, position finie ou à l'infini) lui permet de d'opérer une classification nouvelle des courbes du quatrième degré. Mais puisqu'il a également rapproché les foyers d'une courbe de la forme particulière de l'écriture de son équation traduisant une relation entre les distances à des points fixes - lesquels seront alors des foyers de la courbe - cela lui permet en outre de trouver de nouvelles formes pour écrire ces équations. C'est ainsi que, comme nous le verrons dans notre étude des ovales de Descartes en [Chap.3,1.2], le géomètre irlandais retrouve par cette analyse ce que Chasles avait énoncé en se basant sur une construction purement géométrique ([**Chasles 1837a**, 352]), à savoir l'existence d'un troisième foyer pour les ovales de Descartes. De même, la possibilité d'écrire l'équation des quartiques bicirculaires sous quatre différentes formes suggère également aux géomètres de nouvelles symétries dans les constructions géométriques de ces courbes comme enveloppes de cercles.

L'étude et l'utilisation des propriétés focales des courbes devient donc dans ce Traité de Salmon utile et féconde pour l'analyse des courbes algébriques. Ce Traité - comme l'ensemble des traités de géométrie de Salmon - connaîtra un réel succès [79] tant en Angleterre qu'à l'étranger, ce qui diffusera largement tant la définition projective générale des foyers de Plücker que l'apport substantiel que cette notion amène quant à l'étude des courbes. A partir des années 1850, le mémoire de Plücker de 1833 contenant la définition générale des foyers, après être resté un temps dans l'ombre, sera devenu "*le célèbre travail sur les foyers des courbes*" du géomètre allemand ([**Siebeck 1864**, 175]).

4. Extension de la notion aux surfaces du second degré : les *focales*, points de vue de Chasles et Plücker avant 1860

4.1. Deux mathématiciens belges et le renouveau de la considération des coniques "dans le cône".

Dans les années 1820, l'étude des coniques *dans le cône*, c'est-à-dire en les considérant dans l'espace sur un cône à l'intersection de celui-ci et d'un plan, va subir un regain d'intérêt suite aux travaux de deux amis mathématiciens belges : Adolphe Quételet et Pierre Dandelin. Quételet et Dandelin sont des amis d'enfance : ils sont camarades de classe dans le lycée français de Gand au tout début des années 1810. Si Quételet est né à Gand en 1796, Dandelin, de deux ans son aîné, y a passé son enfance après être né près de Paris. Après ses études, Quételet commence à enseigner les mathématiques toujours

79. A propos de l'influence de Salmon et de ses traités, on consultera [**Gow 1997**]. Le "*Traité sur les courbes planes*" [**Salmon 1852**] sera traduit en français et en allemand et particulièrement apprécié par Félix Klein. Il sera réédité en 1873 et en 1878. Darboux écrira dans le "*Bulletin*" à l'occasion de la recension de la seconde édition (1873) : "*cet excellent Ouvrage de l'illustre géomètre anglais était devenu presque introuvable. [...] M. Salmon est resté fidèle à la méthode qu'il a toujours suivie. Il a su inspirer le goût des recherches, et donner une idée très exacte de l'état actuel de la Géométrie des courbes planes*" (*Bulletin des Sciences M. et A.*, tome 5, Novembre 1873 pp.193-195).

au lycée de Gand. Il prépare en parallèle son doctorat qu'il obtient en 1819. Il passera ensuite sa vie à Bruxelles d'où il dirigera notamment sa "*Correspondance mathématique et physique*" de 1825 à 1839.

Dandelin entre lui à l'Ecole Polytechnique en 1813 mais n'y termine pas ses études et revient à Gand aux côtés de Quételet dès 1815. Il enseignera à partir de 1825 à l'Université de Liège, puis à Namur après 1835. Il retrouvera son ami Quételet à Bruxelles en 1843 où il sera nommé colonel du génie.

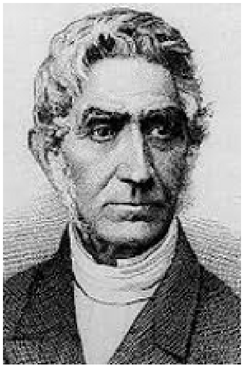


FIGURE 10. Adolphe Quételet (à gauche) et Pierre Dandelin (à droite)

C'est Quételet qui le premier s'intéresse aux coniques dans le cône lors de ses études de doctorat à l'Université de Gand. Sa dissertation, [**Quételet 1819**], rédigée en latin, est en effet centrée sur l'étude d'une courbe obtenue grâce à des sections continues bien particulières d'un même cône de révolution. Considérons avec Quételet S le sommet du cône, et SX son axe. Prenons alors un point A quelconque sur le cône : la section du cône par le plan orthogonal à SX et passant par A est un cercle dont le centre O est le projeté orthogonal de A sur SX. Quételet étudie alors la tangente à ce cercle au point A et fait tourner les plans de section du cône autour de cette tangente : il obtient ainsi tous les plans passant par A et étant perpendiculaires au plan ASX. La courbe qui intéresse alors le jeune doctorant belge est le lieu des foyers des différentes coniques obtenues grâce aux sections du cône par l'ensemble de ces plans. Il appelle cette courbe la "*courbe focale*" ("*curva focali*"). Quételet analyse alors différentes propriétés de cette courbe qui est en fait une cubique plane située dans le plan ASX [80]. Le point double de cette courbe correspond à la première section envisagée où, la conique étant un cercle, les deux foyers coïncident. Quételet s'attarde en particulier sur l'asymptote que possède sa *focale* : il montre qu'il s'agit de l'arête génératrice du cône diamétralement opposée à l'arête SA.

Après son doctorat, Quételet continue d'explorer les propriétés des coniques en les étudiant dans le cône. Il s'intéresse particulièrement aux relations liant les distances des foyers et des sommets des coniques au sommet du cône, ainsi qu'au rôle de l'angle des plans des sections notamment sur l'excentricité de la conique obtenue. Il met ainsi au jour de nouvelles propriétés dans un mémoire qu'il publie quelques années plus tard dans

80. La focale de Quételet n'est en fait rien d'autre qu'une strophoïde oblique, comme le remarque justement [**Godeaux 1928**], ce que le jeune auteur belge ne semble alors pas avoir aperçu.

les "*Mémoires de l'Académie de Bruxelles*", [**Quételet 1822**]. Dans son introduction, il remarque :

> [Q]uand on considère [une] même section [conique] sur le cône droit [et non dans le plan], alors le nombre des choses auxquelles il faut avoir égard se trouve augmenté [...] je doute qu'on ait jamais remarqué la relation qui existe dans les sections coniques entre la distance des deux foyers et les distances du sommet du cône aux deux extrémités du grand axe.
>
> [**Quételet 1822**, 124]

Le mathématicien belge va en effet montrer que la différence des distances reliant le sommet du cône O aux deux extrémités du grand axe d'une ellipse S et S' équivaut toujours à la distance entre les deux foyers de l'ellipse F et F', soit :
$|OS - OS'| = FF'$.

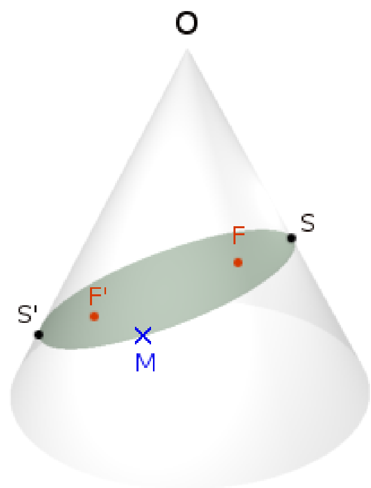


FIGURE 11. Configuration des énoncés des théorèmes de Quételet

Exploitant toujours les relations des distances au somment du cône, Quételet démontre alors dans un second théorème, "*résultat remarquable*" selon lui, que pour tout point M de l'ellipse prise dans le cône, la différence entre les distances le reliant au sommet du cône et à un foyer de l'ellipse est constante : $OM - FM = k$ [**Quételet 1822**, 129].

Pierre Dandelin va utiliser ce dernier résultat de Quételet pour trouver, en 1825, la première caractérisation des foyers en considérant les coniques dans le cône : ces points si particuliers sont obtenus comme lieux de tangence de deux sphères inscrites dans le cône avec le plan de la section. C'est l'élégant *théorème de Dandelin* :

> Toute section plane faite dans un cône droit est une ellipse ou une hyperbole dont les foyers sont les points de contact du plan coupant avec deux sphères inscrites au cône. Dans le cas particulier où une seule sphère inscrite peut toucher le plan coupant, la section est une parabole et le point de contact de cette sphère en est le foyer.

[**Dandelin 1825**, 392]

Ces deux sphères inscrites dans le cône seront appelées les *sphères de Dandelin*. Dans le cas de l'hyperbole, les sphères de Dandelin sont de part et d'autre du sommet du cône mais restent du même côté du plan de section. Pour l'ellipse, les deux sphères sont situées du même côté du cône, mais de part et d'autre du plan.

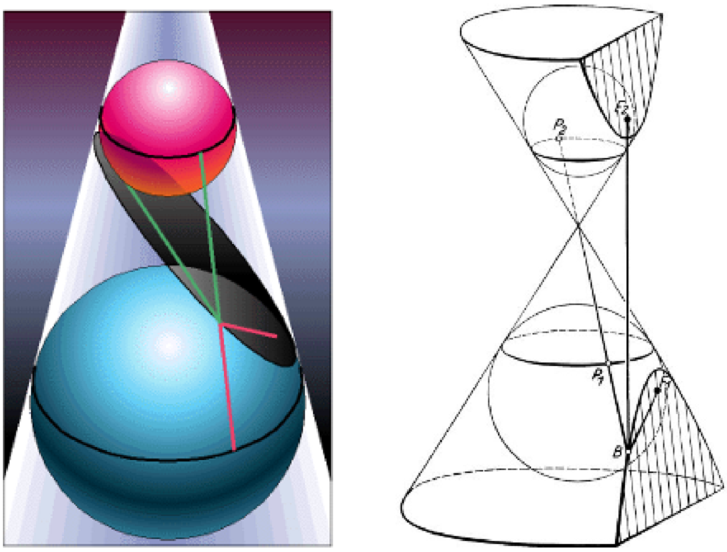


FIGURE 12. Les sphères de Dandelin dans le cas d'une ellipse (à gauche) et d'une hyperbole (à droite)

Les recherches de Quételet et de Dandelin remettent ainsi au premier plan la considération du cône dans l'espace pour étudier les propriétés des coniques [81]. Surtout, le théorème de Dandelin permet (enfin) d'envisager la notion de foyer dans l'espace. Les travaux de Magnus relatifs aux coniques sphériques, que nous étudions ci-après, vont donner une suite à cette première approche spatiale des foyers des courbes. Certes, les propriétés étudiées par les deux mathématiciens belges sont avant tout des propriétés métriques, des relations de distance qui varient en fonction de la section étudiée. Cependant elles donnent une approche globale des propriétés des coniques liées aux sections d'un même cône, et c'est en cela qu'elles favorisent les études systématiques des cônes que va par ailleurs entreprendre Michel Chasles à leur suite en y ajoutant les outils de la géométrie projective (voir 4.3).

4.2. 1825 : la découverte des lignes focales des cônes par Magnus.

Les travaux relatifs aux *focales* des surfaces du second degré que Michel Chasles va publier dans les années 1830 font tous suite à un très court article du mathématicien allemand Ludwig Immanuel Magnus. Né à Berlin en 1790, Magnus travaille dans la première partie de sa vie dans des banques berlinoises avant d'étudier puis d'enseigner les mathématiques

81. On peut remarquer notamment les divers "*théorèmes géométriques*" donnés en partie à ce sujet par Steiner dans le premier volume du "*Journal für die reine und angewandte Mathematik*" de Crelle à Berlin en 1826 ([**Steiner 1826**]) : nous y reviendrons dans 4.4.

de 1816 à 1834. Il est le cousin d'Heinrich Gustav Magnus, physicien dont le nom reste associé à l'effet de la rotation des corps solides sur leurs trajectoires.

L'article de 6 pages du mathématicien berlinois, [**Magnus 1825**], écrit en français, paraît en 1825 dans les "*Annales de Gergonne*". Il se concentre sur deux droites aux propriétés bien particulières relatives aux hyperboloïdes à une nappe et aux cônes du second degré. En considérant l'hyperboloïde à une nappe défini par :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (\mathcal{H})$$

Magnus, supposant être dans le cas $a > b$, définit les deux droites suivantes - que nous noterons $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ - dans le plan $y = 0$:

$$x\sqrt{b^2 + c^2} \pm z\sqrt{a^2 - b^2} = 0 \qquad (\mathcal{F}, \mathcal{F}')$$

Ces deux droites sont dans l'intérieur de l'hyperboloïde et passent par son centre : Magnus les nomme "*les lignes focales*". Elles coïncident toutes deux avec l'axe z lorsque l'hyperboloïde est de révolution. La propriété qui justifie pour Magnus l'intérêt de ces droites est liée aux angles formés par ces deux droites avec les génératrices de l'hyperboloïde [82]. Évaluant les sinus et cosinus de ces angles, il détermine la proposition suivante :

> La somme ou la différence des deux angles que fait la droite génératrice de l'hyperboloïde à une nappe dans toutes ses positions, avec les deux lignes focales de cette surface est constante [...]
>
> [**Magnus 1825**, 35]

Or, ainsi que le remarque le mathématicien allemand, ces définitions et propriétés subsistent lorsqu'on ne considère plus l'hyperboloïde $(\mathcal{H})$ mais le cône du second degré $(\mathcal{C})$ issu de sa dégénérescence :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (\mathcal{C})$$

La définition des lignes focales $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ ne change pas, et le théorème devient alors même plus précis :

> La somme ou la différence des angles que fait la droite génératrice de la surface conique du second ordre, dans chacune de ses situations [i.e. les *arêtes* du cône], avec les deux lignes focales de cette surface est constante et égale à l'angle des deux droites qui résultent de la section de cette surface par le plan des lignes focales. [83]
>
> [**Magnus 1825**, 36]

Cette propriété angulaire forte est ce qui pousse Magnus à nommer ces deux lignes "*focales*". En effet, elle est très similaire à la propriété angulaire des foyers des coniques planes stipulant que la somme des deux angles formés en tout point M de la conique par la tangente (MT) et les cordes menées aux foyers (MF) et (MF') est constante. Celle-ci s'annule en effet pour l'hyperbole, et vaut deux angles droits pour l'ellipse.

82. Rappelons que l'hyperboloïde à une nappe est une surface réglée engendrée (de deux manières différentes) par la rotation d'une droite, une *génératrice*, autour d'un axe.

83. Selon la présentation de Magnus, le plan des lignes focales $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ est le plan $y = 0$.

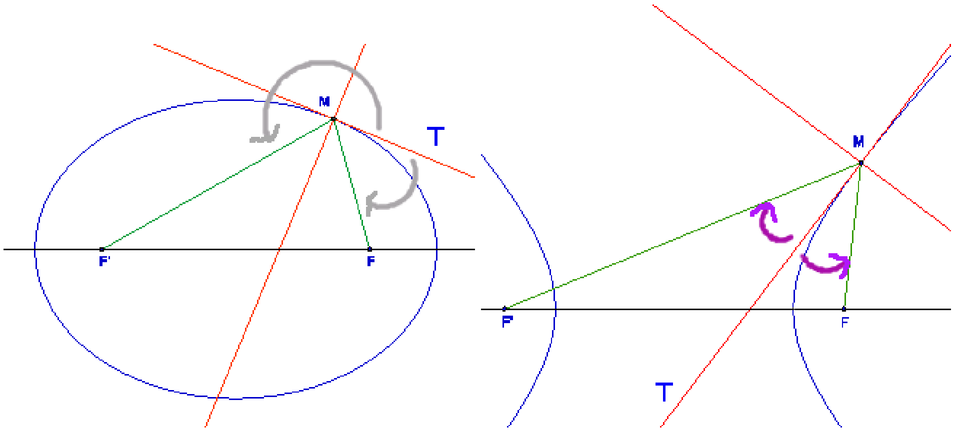


FIGURE 13. $\widehat{TMF} + \widehat{TMF'} = \pi$ pour l'ellipse (à gauche) et $\widehat{TMF} + \widehat{TMF'} = 0$ pour l'hyperbole (à droite)

Fort de cette propriété, Ludwig Magnus utilise ces lignes focales pour définir des courbes d'un genre nouveau : des "*coniques sphériques*"[84]. Ces courbes, qui ne sont pas planes, résultent de l'intersection d'une sphère et d'un cône du second degré ayant pour sommet le centre de la sphère. Ce sont grâce à ces courbes, ellipses et hyperboles sphériques, que l'analogie entre les deux lignes focales du cône et les foyers des coniques planes se réalise pleinement selon Magnus.

En considérant une ellipse sphérique comme l'intersection d'une sphère $\mathcal{S}$ et d'un cône $\mathcal{C}$, le mathématicien allemand définit les *foyers* de l'ellipse sphérique F, F' comme étant les points de rencontre de la sphère $\mathcal{S}$ et des deux droites focales du cône $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$. Dans le plan, la relation métrique caractérisant les foyers d'une ellipse était la constance de la somme des distances aux foyers : $MF + MF' = 2a$. Il en va de même pour l'ellipse sphérique : en nommant *rayons vecteurs* les arcs de grands cercles reliant les points de l'ellipse aux deux foyers F, F', Magnus obtient :

> La somme des deux rayons vecteurs des différen[t]s points d'une ellipse sphérique est constante et égale à la longueur du diamètre[85] de cette courbe qui contient ses deux foyers.
>
> [**Magnus 1825**, 36]

84. Magnus lui-même reconnaît dans son article que ces courbes avaient déjà été rencontrées par le géomètre allemand Fuss, mais n'ayant point été obtenues comme l'intersection entre une sphère et un cône. Elles émergeaient de la considération de *triangles sphériques*.

85. Le diamètre est ici à comprendre comme la portion d'arc de grand cercle sur laquelle se trouve les deux foyers F et F', et délimitée par l'intersection avec l'ellipse sphérique (donc le cône $\mathcal{C}$).

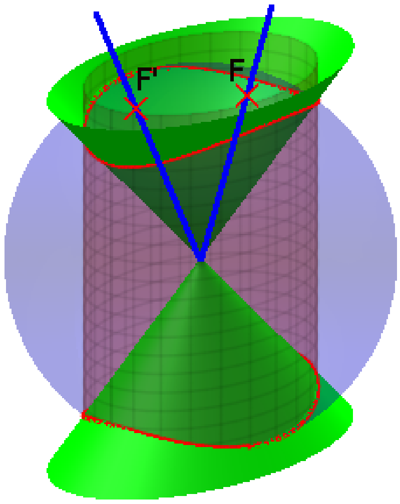


FIGURE 14. Une ellipse sphérique (en rouge) et ses foyers obtenus à l'intersection de la sphère (en mauve) et des deux lignes focales du cône (en bleu marine)

Il en va de même lorsque l'on considère, à partir de la même configuration, l'*hyperbole sphérique* située de part et d'autre du sommet du cône [86]. Ses foyers résultant des intersections avec la sphère d'une droite focale d'un côté du cône et de la seconde droite focale de l'autre côté, l'analogie avec les coniques planes est identique : c'est alors la différence des rayons vecteurs menés aux foyers qui est constante.

Cette courte contribution de Magnus, très rarement mentionnée dans l'historiographie puisqu'on ne la trouve qu'évoquée de manière imprécise dans [**Loria 1896**, 93], est remarquable à plusieurs titres. D'abord, ce travail augure l'extension de la notion de foyer à l'espace [87]. Il préfigure également l'étude des relations angulaires caractérisant les lignes focales des cônes du second degré. Enfin il marque la véritable éclosion du domaine des coniques sphériques, dont les recherches seront entre autres développées ensuite par Chasles ([**Chasles 1831**]). Pourtant les considérations du géomètre allemand restent purement analytique et ne se voient pas attribuer de sens géométrique. L'apparition des lignes focales des cônes est posée *a priori* comme un fait analytique dont Magnus vérifie dans un second temps les propriétés : ces lignes ne sont ainsi pas obtenues comme le résultat d'un raisonnement préliminaire, qu'il soit géométrique ou analytique. Quel sens géométrique peut-on bien donner à ce couple de lignes ? Cette question reste en 1825 ouverte. Surtout, Magnus ne fait pas le lien entre ces lignes focales et les foyers des coniques (planes) obtenues par intersections planes du cône. La construction des coniques sphériques permet

86. Si l'on détermine le plan perpendiculaire à l'axe du cône et passant par son sommet, alors les deux branches de l'hyperbole sphérique seront situées de part et d'autre de ce plan. Au contraire, l'ellipse sphérique reste du même côté de ce plan.

87. Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, Adolphe Quételet avait déjà envisagée une construction spatiale liée aux foyers quelques années plus tôt. Mais la *focale* de son doctorat ne constituait pas une extension de la notion de foyer. A notre connaissance, la *focale de Quételet* n'aura d'ailleurs pas suscité de travaux ultérieurs.

d'opérer ce rapprochement entre lignes focales des cônes et foyers, mais ce lien ne repose que sur l'étude de ces courbes gauches [88] nouvelles.

C'est Chasles qui, non content d'exprimer ces limites de l'article de Magnus, aura à cœur d'en apporter des réponses. Il va en effet montrer de plusieurs manières comment les propriétés géométriques intrinsèques des cônes doivent mener directement à la considération des lignes focales. Il fera le lien avec les foyers des sections coniques planes, et surtout avec la possibilité d'opérer des sections circulaires dans les cônes de deux manières différentes.

4.3. Généraliser les propriétés projectives liées aux foyers des coniques pour les surfaces du second degré : les lignes focales et les coniques excentriques de Chasles.

Né à Epernon dans l'Eure-et-Loir en 1793, et d'abord prénommé Floréal à sa naissance, Michel Chasles fait ses études à Chartres puis à Paris avant de rentrer à l'Ecole Polytechnique en 1812. A la sortie de l'Ecole, Chasles bénéficie grâce à l'aisance financière de son père d'une position d'agent de change à Paris. S'il continue à se tenir au courant des progrès des sciences mathématiques, il faut attendre la fin des années 1820 pour que Chasles commence à publier ses propres travaux. Il se fait surtout connaître grâce à son "*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*" ([**Chasles 1837a**]) qui remporte un Prix à l'Académie de Bruxelles. Il n'enseignera qu'à partir de 1841, d'abord à l'Ecole Polytechnique, puis après 1846 à la Sorbonne où la chaire de Géométrie Supérieure lui sera spécialement ouverte sur mesure. Il y sera suppléé régulièrement par Pierre-Ossian Bonnet à partir de 1868, puis par Gaston Darboux après 1878. Atteint d'une paralysie intestinale, Chasles mourra en Décembre 1880 d'une "*imprudence*" selon Darboux, qui raconte :

> Pauvre père Chasles. Je m'étais habitué à le regarder comme devant vivre longtemps. Et de fait il est mort d'une imprudence. Il avait une paralysie intestinale qui l'obligeait à des soins continuels. Il paraît qu'il a été à Versailles sans déjeuner, et qu'il a pris une grande quantité de pâte de guimauve. Il s'est formé une boule qui a déterminé une obstruction des intestins. Gosselin voulait lui faire une opération qui l'aurait sauvé. Il n'a pas voulu. [...] Il est resté huit jours seulement alité. J'espère que j'aurais sa succession à la Sorbonne. [89]
>
> Lettre datée du 27 Décembre 1880 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Une bonne appréhension des apports de Chasles [90], en particulier pour les notions de foyer et de focale, repose avant toute chose sur deux points spécifiques qui caractérisent les travaux géométriques de ce polytechnicien. Le premier est, comme l'a justement énoncé

88. Une courbe est dite *gauche* lorsqu'elle n'est pas contenue dans un plan. Jusqu'à la fin du XIXème siècle, ces courbes étaient également appelées *courbes à double courbure*, la seconde courbure étant la *torsion* dont l'effet est de faire échapper la courbe à son plan osculateur.

89. En effet, Gaston Darboux succèdera bien à Michel Chasles à la chaire de Géométrie Supérieure de la Sorbonne. De sa création en 1846 jusqu'à la Première Guerre Mondiale, cette chaire n'aura connu que deux titulaires.

90. Voir le portrait de Chasles en figure 15.

Philippe Nabonnand, sa volonté de "*fonder les méthodes géométriques sur quelques principes généraux*" ([**Nabonnand 2006**, 161]). Nous allons retrouver cette volonté tant dans ses travaux sur les cônes du second degré que dans ceux, ultérieurs, sur les *focales* des surfaces du second degré. Dans ce courant de pensée, il s'inscrit dans la continuité des idées de Charles Dupin [91] qui affirmait, alors que Chasles était encore élève polytechnicien : "*il semble que dans l'état actuel des sciences mathématiques, le seul moyen d'empêcher que leur domaine ne devienne trop vaste pour notre intelligence, c'est de généraliser de plus en plus les théories que ces sciences embrassent, afin qu'un petit nombre de vérités générales et fécondes soit dans la tête des hommes, l'expression abrégée de la plus grande variété de faits particuliers*" ([**Dupin 1813**, 265]).

Le second point que l'on peut souligner est le rôle qu'occupe selon Michel Chasles la Géométrie vis-à-vis de l'Analyse. Ainsi qu'il l'explique dans son célèbre "*Aperçu historique*" de 1837, si l'Analyse a le "*privilège de négliger les propositions intermédiaires*" pour parvenir à faire progresser rapidement les théories mathématiques, ceci peut se révéler en être un "*côté faible*". En négligeant ces "*vérités intermédiaires*", l'Analyse perd de vue la manière d'échafauder des théories compréhensibles et intelligibles à défaut d'être cohérentes. "*Car est-ce assez*", demande-t-il, "*dans l'étude philosophique et approfondie d'une science, de savoir qu'une chose est vraie, si l'on ignore comment et pourquoi elle l'est, et quelle place elle occupe dans l'ordre des vérités auquel elle appartient ?*" ([**Chasles 1837a**, 114]). Au contraire, la Géométrie doit permettre de "*rencontrer les vraies routes de la vérité définitive*" : on doit pouvoir comprendre des propriétés vraies pourquoi elles le sont, leur attribuer une origine sinon naturelle du moins logique.

FIGURE 15. Michel Chasles

On comprend ainsi pourquoi l'article de Magnus fait vertement réagir Chasles : la découverte et les propriétés des lignes focales des cônes n'y reposent que sur un fait analytique sans interprétation ou origine géométrique. Tout dans les approches et les méthodes

91. Pour plus de détails sur le géomètre Charles Dupin, voir plus loin la notice en [Chap.3,3.1].

semblent ainsi opposer l'allemand et le français [92]. Les *styles* au sens d'Anne-Lise Rey - "*l'interface entre la singularité de l'élaboration interne et la spécificité de la diffusion adressée*" ([**Rey 2013b**, 90]) - de Chasles et de Magnus, plus que différents, sont presque radicalement opposés. Dans un long mémoire publié en 1829 centré sur les propriétés des cônes du second degré, [**Chasles 1829**], le géomètre français ne se prive pas de souligner cette différence :

> [Certaines] propriétés des cônes du second degré [...] ont déjà été données par M. Magnus, qui les a démontrées par l'analise [sic]. La marche que nous suivons est entièrement différente de celle de M. Magnus, qui a tout de suite posé les équations des lignes focales, sans indiquer comment il y a été conduit. Nous rappellerons que ces lignes se sont offertes à nous par une autre propriété qui leur est également particulière, et qui les caractérise. Elles jouissent d'un grand nombre d'autres propriétés remarquables.
>
> [**Chasles 1829**, 41]

Dans ce mémoire, Chasles fait entièrement reposer l'étude des cônes du second degré sur la théorie des polaires réciproques dans l'espace. Cette théorie propose des constructions qui, à partir d'une surface du second degré dite *auxiliaire* (qui sera souvent la sphère), font correspondre à un point un plan - son plan *polaire* - et réciproquement. Une droite correspond par ailleurs à une droite, et cette théorie représente ainsi un support géométrique au principe de dualité [93]. Le principe général du mémoire de Chasles est ainsi l'obtention du cône du second degré comme la surface polaire d'une conique plane.

Lorsque la conique plane est un cercle, alors la droite reliant le sommet du cône au centre de la sphère *auxiliaire* possède une propriété bien particulière : tout plan lui étant perpendiculaire coupe le cône suivant une conique dont un foyer se situe sur cette droite. C'est ce qui doit ainsi motiver pour Chasles l'appellation de "*ligne focale*" :

> Nous appellerons ligne *focale* d'un cône cette droite qui jouit de la propriété que tout plan qui lui est perpendiculaire coupe le cône suivant une conique dont un des foyers se trouve sur cette droite.
>
> [**Chasles 1829**, 9]

Cette définition, qui coïncide avec la définition analytique de Magnus comme Chasles le montrera plus loin, relie clairement le rôle de ces droites focales ($\mathcal{F}$) dans le cône aux foyers des coniques planes : elles représentent toujours le lieu d'un des foyers de ces courbes formées dans le cône par les plans qui leurs sont orthogonaux.

---

92. On pourrait également voir ici des traits caractéristiques des *écoles* de Paris et de Berlin dans le sens de Karen Parshall ([**Parshall 2004**], voir également 4.5 à propos des mathématiciens irlandais du Trinity College de Dublin). Il est néanmoins difficile de justifier ceci tant la formation autonome de Magnus ne permet en rien de le rattacher à quelque groupe que ce soit. Ce qui en revanche est ici manifeste est la différence des *styles* mathématiques de Chasles et Magnus. Le travail [**Rey 2013b**] présente une discussion générale du style en sciences et en histoire des sciences. A propos de la définition et de l'existence de différents *styles* spécifiquement dans le domaine des mathématiques, on consultera [**Mancosu 2010**].

93. A propos de la dualité et des polaires réciproques, sujet aussi vaste qu'intéressant, rappelons que l'on pourra consulter [**Nabonnand 2006**, 58-73] ou [**Gray 2007**, 53-56]. Ces deux références sont relatives à la théorie dans le plan, mais l'extension à l'espace ne présente alors que peu de difficultés. Le lecteur curieux pourra également lire la présentation rapide effectuée par Chasles lui-même dans [**Chasles 1829**, 6-7].

Chasles va alors montrer que tout cône du second degré possède exactement deux lignes focales, et que celles-ci coïncident lorsque le cône est de révolution. Dans la première partie du mémoire, le géomètre français étudie le cas de deux cônes ayant une ligne focale en commun. Il démontre alors que cela caractérise les cônes se coupant suivant des courbes planes. Puis dans la seconde partie, il relie les lignes focales aux propriétés de Quételet et de Dandelin relatives aux surfaces inscrites dans les cônes. Le théorème de Dandelin caractérisait les foyers des coniques par la tangence de deux sphères inscrites dans un cône droit. Chasles exhibe un lien différent en montrant que "*dans tout cône du second degré on peut inscrire une infinité de surfaces de révolution du second degré ; leurs foyers sont tous sur les deux lignes focales du cône*" ([**Chasles 1829**, 34]). En particulier, toutes les sphères inscrites dans un cône (qui est ainsi un cône droit, voir la figure 20) et donc entre autres les sphères de Dandelin auront leur centre sur la ligne focale double de ce cône. Si c'est un ellipsoïde de révolution qui y est inscrit, alors les deux lignes focales relieront exactement le sommet du cône aux deux foyers de la section principale de l'ellipsoïde. Enfin, dans une section ultérieure consacrée aux propriétés générales des cônes du second degré, Chasles retrouve et étend - après Magnus - les propriétés angulaires des lignes focales des cônes avec les arêtes et les plans tangents ([**Chasles 1829**, 40-44]).

Bien sûr nous ne pouvons - ni ne devrions - détailler toutes les propriétés que Chasles exprime en lien avec les lignes focales des cônes. Nous ajouterons seulement qu'il souligne, en lien avec les surfaces orthogonales, que deux cônes sécants ayant les deux mêmes lignes focales se coupent orthogonalement ([**Chasles 1829**, 52]). Ce qu'il convient de souligner est que si Chasles élargit largement le nombre des propriétés liées aux focales du cône, ces propriétés ne sont pas des propriétés de géométrie projective : elles ne concernent pas des éléments laissés invariants par une transformation projective[94]. Elles sont toutes rattachées à la construction du cône par polaire réciproque d'une conique. Chasles ne donne par ailleurs aucune extension de la notion de focale aux surfaces du second degré : en dehors du cône, il ne s'intéresse d'ailleurs dans son mémoire qu'aux seules surfaces de révolution.

L'année suivante, Chasles publie un nouveau mémoire "*sur les propriétés générales des cônes du second degré*" [**Chasles 1830**]. Cela peut paraître surprenant puisque le mémoire de 1829 était déjà largement consacré à l'étude des cônes. Mais en 1830, le principe général sur lequel s'appuie l'étude du géomètre eurélien a changé : il ne s'agit plus de la construction par polaire réciproque d'une conique, mais d'une propriété liée aux sections circulaires. Ce nouveau principe est énoncé dans l'introduction du mémoire :

> Dans tout cône du second degré, il existe trois axe conjugués rectangulaires ; et deux séries de sections circulaires situées dans des plans parallèles à deux plans fixes.
>
> [**Chasles 1830**, 1-2]

La notion de droites et de plans "*conjugués*" reste liée à la théorie des polaires réciproques. Mais cette théorie est devenue secondaire : la principale propriété des cônes

94. Cette définition d'une *propriété projective* est directement empruntée à Poncelet, comme l'a mis en évidence [**Nabonnand 2006**, 55]. Chasles basera à partir de son "*Aperçu historique*" de 1837 les propriétés projectives sur la notion de "*rapport anharmonique*" (notre "birapport") et sa conservation ([**Chasles 1837a**, 695-696].

est d'être coupés, de deux manières différentes, par des plans selon des cercles [95]. Chasles nomme ces deux séries de plans les "*plans cycliques*" du cône. Leur lien avec les lignes focales va provenir de la considération des *cônes supplémentaires*. A partir d'un cône du second degré, on peut construire l'ensemble des droites passant par son sommet et perpendiculaires à ses plans tangents. Ces droites sont des arêtes d'un autre cône du second degré : les deux cônes sont alors dits supplémentaires. Cette supplémentarité est le support d'une certaine forme de dualité entre les deux cônes. En effet, ainsi que le note Chasles, à une arête (respectivement un plan tangent) d'un cône correspond un plan tangent (respectivement une arête) du supplémentaire. Cette dualité est particulièrement bien adaptée aux polaires réciproques lorsque les surfaces *auxiliaires* sont justement les cônes eux-mêmes. Les droites et plans polaires par rapport au premier cône correspondent ainsi aux plans et droites polaires par rapport à son supplémentaire.

Chasles démontre alors la propriété fondamentale suivante ([**Chasles 1830**, 12-13]) : les deux lignes perpendiculaires aux plans cycliques d'un cône sont les lignes focales du cône supplémentaire. N'ayant pas encore défini dans ce mémoire les lignes focales, il utilise dans sa démonstration la propriété des foyers des coniques utilisée par De La Hire et Poncelet : toute sécante passant par un foyer possède son pôle sur la perpendiculaire à cette sécante en ce point. Les perpendiculaires aux plans cycliques d'un cône possèdent alors la propriété caractérisant les lignes focales pour le cône supplémentaire, à savoir que toute section leur étant perpendiculaire fait naître une conique dont la droite en question contient un foyer. Aussi l'existence des deux lignes focales du cône est-elle intimement liée à la possibilité d'effectuer de deux manières différentes des sections circulaires d'un cône du second degré.

La dualité existant entre les lignes focales et les plans cycliques permet alors à Chasles de reprendre en grande partie le catalogue des propriétés des lignes focales de son mémoire précédent [96], d'en expliciter les énoncés à l'aide des plans cycliques par dualité, et d'en donner de nouvelles preuves.

Ayant érigé comme nouveau principe pour l'étude des cônes du second degré l'existence de deux séries de *plans cycliques*, Chasles retrouve dans son second mémoire de 1830 les propriétés des lignes focales grâce à la considération dualistique du cône supplémentaire. Néanmoins, si ces lignes sont bien reliées aux foyers des coniques planes *a posteriori* en considérant les sections leur étant perpendiculaires - ainsi que par la similarité des propriétés angulaires s'y rattachant -, les lignes focales ne sont nullement obtenues de la même manière que les foyers des courbes planes ou en particulier des coniques. Les éléments permettant de relier les notions de lignes focales dans le cône et de foyer dans les coniques ne surviennent, tant pour Magnus que pour Chasles, que dans un second temps, après que la définition des lignes focales a été donnée d'une manière indépendante. Le lien entre la

95. Cette propriété n'est pas nouvelle. Chasles l'attribue à Descartes ; nous l'avons également retrouvée notamment dans des applications géométriques des traités sur les fonctions elliptiques d'Adrien-Marie Legendre datant des années 1810-1820.

96. Chasles ajoute de nouvelles propriétés relatives aux droites focales des cônes, en particulier sur les perpendiculaires des points des focales abaissées sur des plans tangents. Ces nouvelles propriétés ne sont néanmoins pas pertinentes dans le cadre de notre étude.

définition même des foyers et de ces lignes focales reste donc encore entièrement à découvrir : c'est ce à quoi Chasles va parvenir en 1837 en considérant les propriétés projectives qui caractérisent ces deux notions pour les objets (courbes et surfaces) du second degré.

C'est dans son célèbre "*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*" de 1837 que Chasles va étendre la notion de *focale* non plus aux seuls cônes mais à toutes les surfaces du second degré. Cet ouvrage, [**Chasles 1837a**], primé par l'Académie de Bruxelles en 1830 mais largement enrichi par son auteur jusqu'à sa parution définitive, contribue surtout à asseoir les méthodes et les théorèmes de la géométrie projective sur la notion essentielle de *rapport anharmonique*.

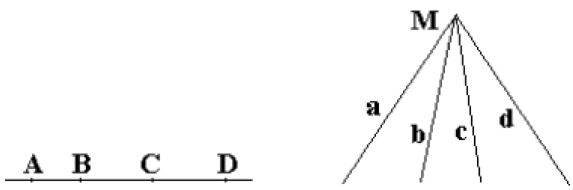


FIGURE 16. Configurations planes pour l'emploi du rapport anharmonique de quatre éléments

Quatre points A, B, C, D alignés auront ainsi un rapport anharmonique donné par l'expression numérique signée :

$$(A, B, C, D) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

On dira alors que C et D sont conjugués harmoniques par rapport à A et B (ou qu'ils divisent harmoniquement le segment $[AB]$) lorsque $(A, B, C, D) = -1$. Ce rapport peut par ailleurs être défini pour un faisceau de quatre droites en considérant soit les points donnés par une cinquième droite sécante quelconque, soit par les sinus des angles au point de concours M. Notons enfin que dans un système de coordonnées homogènes, si 4 éléments f_1, f_2, f_3, f_4 sont tels que $f_3 = f_1 + \lambda f_2$ et $f_4 = f_1 - \lambda f_2$, alors ce système est harmonique : $(f_1, f_2, f_3, f_4) = -1$ [97].

C'est dans la note XXXI de son ouvrage [**Chasles 1837a**, 384-399] intitulée "*propriétés nouvelles des surfaces du second degré, analogues à celles des foyers dans les coniques*" que Chasles va introduire complètement la notion de focale pour les surfaces du second degré par analogie avec les propriétés projectives des foyers pour les courbes du second degré. Le géomètre français commence par rappeler la propriété projective qui caractérise selon lui les foyers des coniques :

> La tangente et la normale, menées par chaque point d'une conique, vont rencontrer chacun des deux axes principaux de la courbe en deux points, qui sont conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes ; ces deux points fixes sont réels sur le premier axe de la courbe ; ce sont les deux *foyers*, et ils sont imaginaires sur le second axe.

97. Nous avons vu en 2 que Plücker utilisait cette méthode dans son système de coordonnées linéaires dans [**Plücker 1835**] pour étudier la division harmonique formée par les systèmes de diamètres conjugués. Pour plus de détails sur Chasles et le rapport anharmonique, notamment dans la définition des applications *homographiques*, on consultera [**Nabonnand 2006**, 166-174].

[Chasles 1837a, 384]

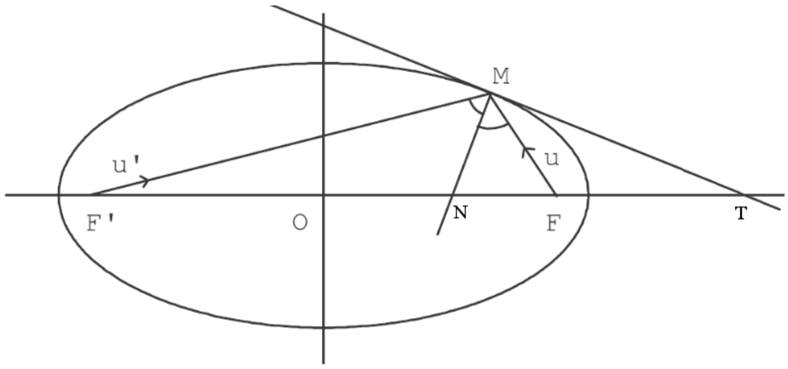


FIGURE 17. Le rapport anharmonique (F', F, N, T) vaut -1 : N et T sont conjugués harmoniques par rapport aux foyers F et F' de l'ellipse.

Cette propriété n'est qu'une traduction dans les termes de la géométrie projective de la propriété suivante : *normale et tangente sont en tout point les bissectrices intérieures et extérieures de l'angle formé par les deux cordes menant aux foyers d'une conique.* Il suffit en effet de considérer la section du faisceau issu de M par l'un des deux axes. Chasles énonce alors l'extension aux surfaces du second degré de cette propriété projective :

> La normale et le plan tangent, menés en un point quelconque d'une surface du second degré, rencontrent chacun des trois plans diamétraux principaux de la surface en un point et suivant une droite. Ce point est toujours le pôle de la droite, par rapport à une certaine conique située dans le plan principal :
>
> Sur le plan du grand axe et du moyen axe de la surface cette conique est une ellipse ;
>
> Sur le plan du grand et du petit axe, elle est une hyperbole ;
>
> Et sur le plan du moyen et du petit axe, elle est toujours imaginaire.

[Chasles 1837a, 384]

Ces trois coniques, dont une est imaginaire, sont considérées par Chasles comme les analogues des lignes focales du cône en vertu d'une propriété qu'il énonce un peu plus loin : le plan normal en un point d'une de ces coniques (soit le plan orthogonal au vecteur tangent de la conique) coupe la surface suivant une conique qui a l'un de ses foyers en ce point. Cela "*établit parfaitement l'analogie qui a lieu*" entre ces coniques et les lignes focales des cônes ([Chasles 1837a, 391]). Les trois coniques sont par ailleurs liées entre elles par le fait que les sommets (respectivement les foyers) de l'une sont les foyers (respectivement les sommets) des autres. Aussi, comme le remarque Chasles, en vertu de ce lien la donnée de l'une seulement des trois coniques suffit à déterminer entièrement le système des trois courbes.

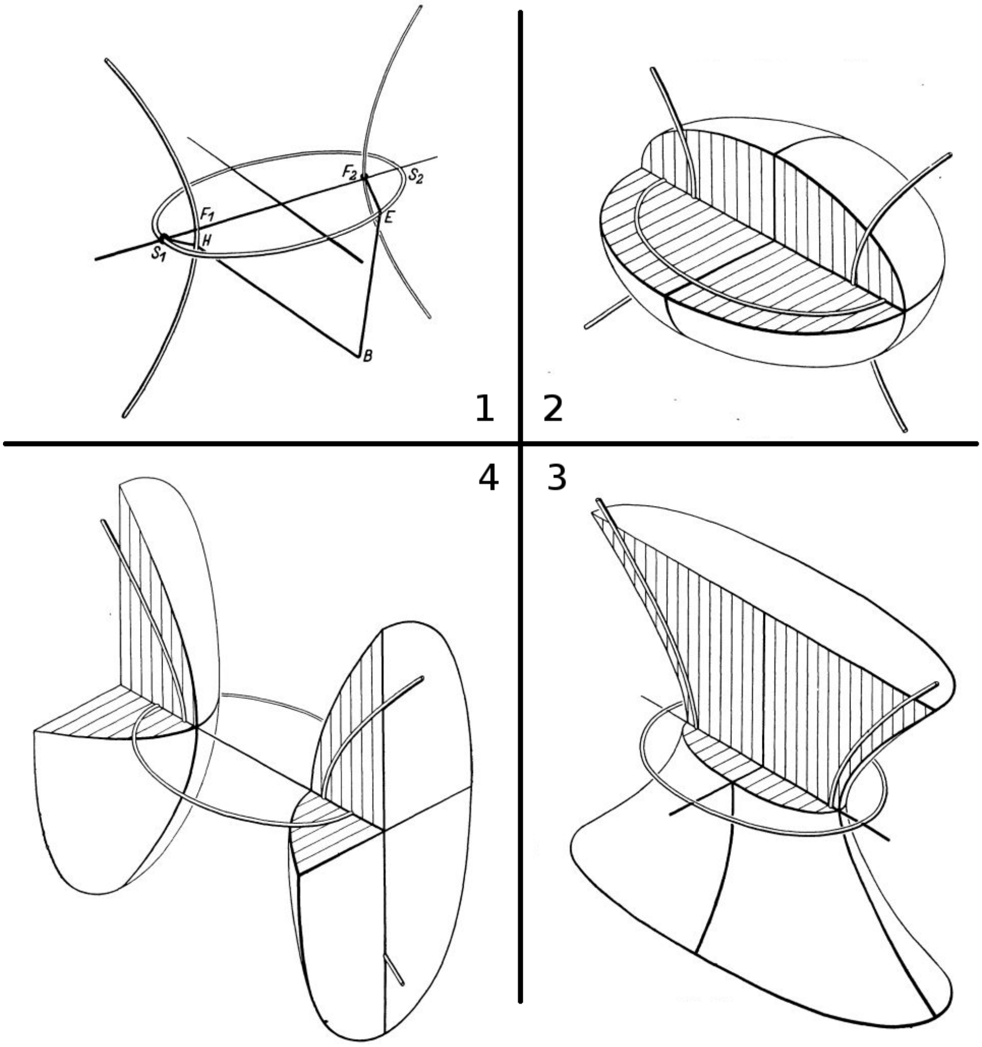


FIGURE 18. Les deux coniques excentriques réelles (1) communes à l'ellipsoïde (2) et aux hyperboloïdes à une (3) et à deux nappes (4) [**Hilbert Cohn-Vossen 1932**, 18-19]

Dans ses deux mémoires sur les lignes focales des cônes, Chasles s'était bien gardé de donner les équations analytiques de ces lignes : au contraire, son objectif était leur mise en évidence d'un point de vue strictement géométrique. Néanmoins, "*pour fixer les idées*", il exhibe en 1837 les équations des trois coniques jouant pour lui un rôle si particulier. Choisissant le cas particulier d'un ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, il donne les équations des "*trois coniques en question*" :

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1$$
$$\frac{x^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{c^2-b^2}=1$$
$$\frac{y^2}{b^2-a^2}+\frac{z^2}{c^2-a^2}=1$$ [98] [**Chasles 1837a**, 385]

Si le polytechnicien ne le souligne pas, ces équations restent en fait valables pour toute surface du second degré quitte à remplacer certains des coefficients a^2, b^2, c^2 par leurs opposés. Par ailleurs, ces équations englobent bien comme cas particuliers pour les cônes l'équation donnée par Magnus pour les lignes focales [99]. Chasles va proposer deux différents noms pour ces triplets de coniques : les "*coniques excentriques*" ou les "*coniques focales*". Il choisira dans la suite de la Note de ne conserver que la première des deux appellations [100].

Chasles étudie dans un premier temps les propriétés des coniques excentriques elles-mêmes, puis dans un second temps s'attache aux énoncés relatifs aux surfaces du second degré ayant les mêmes coniques excentriques (surfaces qu'il ne tardera pas à nommer *homofocales* comme nous le faisons toujours). Plusieurs de ces propriétés ont trait à l'orthogonalité, réelle ou apparente, des surfaces et des coniques excentriques, ainsi qu'aux liens existant avec les théorèmes du mathématicien James Ivory concernant les *points correspondants* [101]. En particulier, le géomètre français note qu'étant donnée une conique excentrique - ce qui revient à se donner les trois coniques d'après le lien entre sommets et foyers - on peut faire passer par tout point de l'espace exactement trois surfaces du second degré ayant cette courbe pour conique excentrique. Ces surfaces, dont l'une est un ellipsoïde, la deuxième un hyperboloïde à une nappe et la troisième un hyperboloïde à deux nappes, ont alors la propriété particulière de "*se couper deux à deux à angle droit*" : elles forment ainsi un système orthogonal. Par ailleurs, il ajoute que deux surfaces du second degré quelconques ayant les mêmes coniques excentriques "*paraissent se couper à angle droit, de quelque point de l'espace qu'on les regarde*" [102], c'est-à-dire que leurs contours apparents sont partout orthogonaux.

Les remarques de Chasles ayant trait à l'orthogonalité et au nombre de surfaces homofocales passant en un même point sont très liées au travail sur la distribution de la chaleur dans les corps solides effectuées par son compatriote Gabriel Lamé. Ces recherches sur les surfaces isothermes et orthogonales sont en effet en grande partie publiées la même année ([**Lamé 1837**]) ; nous les étudierons ultérieurement dans [Chap.3,2]. Mais pour le géomètre français, la propriété la plus importante concerne une analogie existant entre les systèmes de

98. Voir dans l'annexe 1 une représentation graphique des coniques excentriques de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde à une nappe.

99. Il suffit en effet pour voir cela de considérer le cône comme la dégénérescence d'un hyperboloïde. Dans l'équation de la surface, comme dans les équations des coniques excentriques, les seconds membres deviennent alors nuls : les trois coniques dégénèrent ainsi en deux droites, mais pour deux des trois coniques ces droites sont imaginaires : leurs points réels se réduisent au seul sommet du cône. L'ensemble des deux lignes focales (réelles) du cône constitue ainsi la seule conique excentrique réelle non réduite à un point.

100. Nous verrons les raisons de ce choix ultérieurement dans 6.1.

101. Ces travaux sont liés au problème général de l'attraction des ellipsoïdes.

102. Darboux dira dans un discours sur la géométrie infinitésimale en 1908 que ce théorème d'orthogonalité des contours apparents des quadriques homofocales constitue selon lui "*un des théorèmes les plus élégants*" de Chasles, [**Darboux 1908**, 108].

coniques homofocales et les surfaces du second degré ayant mêmes coniques excentriques. Chasles remarque que, dans le *Traité* de 1822 de Poncelet, deux coniques ayant mêmes foyers étaient considérées comme inscrites dans un même quadrilatère, imaginaire, dont les foyers représentaient deux des sommets (opposés), les deux autres sommets en étant les points cycliques. Il énonce alors que cette considération doit être étendue aux surfaces du second degré, une surface développable se substituant dans l'espace au quadrilatère dans le plan :

> Plusieurs surfaces, qui ont les mêmes coniques excentriques, peuvent être considérées comme étant toutes inscrites à une même surface développable.
>
> Cette surface est imaginaire ; et cependant deux de ses lignes de striction [103] sont réelles : ce sont les deux coniques excentriques communes aux surfaces ; les deux autres lignes de striction sont imaginaires : l'une est la troisième conique excentrique [imaginaire] des surfaces , l'autre est à l'infini.
>
> [**Chasles 1837a**, 397]

Pour Chasles, il s'agit là du théorème "*le plus fécond et le plus important de toute la théorie des surfaces décrites des mêmes foyers*". Pourtant en dépit de cette importance, il ne donne aucun détail concernant cette surface développable dans laquelle sont inscrites ces surfaces du second degré. Si on pouvait s'attendre, de par le style synthétique de Chasles, à ce qu'il n'explicite pas la forme de l'équation de cette développable, en revanche il est plus suprenant qu'il ne cherche pas à élucider ce qu'il désigne par la ligne de striction à l'infini de la développable. En fait, ce résultat représente déjà une généralisation conséquente d'un théorème que Poncelet avait énoncé en 1829. Poncelet y caractérisait alors les lignes de striction d'une surface développable circonscrite à deux surfaces du second degré comme étant les seules sections planes du second ordre de la développable, c'est-à-dire des coniques ([**Poncelet 1829**]). En lien avec cet énoncé, Chasles montre ainsi que dans le cas d'un nombre quelconque de quadriques ayant les mêmes coniques excentriques, on peut toujours circonscrire à ces surfaces une seule et même développable, et que les coniques excentriques sont alors exactement les lignes de striction de cette développable qui n'ont pas été rejetées à l'infini. Néanmoins, en l'absence de démonstrations et de plus de détails sur cette développable circonscrite commune, notamment sur la quatrième ligne de striction imaginaire située à l'infini, ce théorème de Chasles ne retiendra alors pas particulièrement l'attention des mathématiciens. Aussi lorsque Cayley étudie par exemple en 1850 les surfaces développables enveloppes de deux surfaces du second degré [104] ([**Cayley 1850**]), le géomètre anglais ne se penche-t-il pas sur le cas particulier des développables circonscrites à deux surfaces possédant les mêmes coniques excentriques. La liste de références bibliographiques dressées par Gino Loria relative aux travaux sur les surfaces circonscrites à deux

103. Les lignes de striction d'une surface sont, pour Poncelet, Chasles ou encore Darboux, les lignes de pénétration de la surface dans elle-même, ou autrement dit des différentes nappes de la surface entre elles. On les appellera plus communément à partir de la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle les *lignes doubles* ("*nodes*" en anglais) de la surface. Il s'agit du vocabulaire donné par Poncelet en 1829 dans [**Poncelet 1829**]. Remarquons que ce vocable est bien différent du sens moderne de la ligne de striction qui est, quant à lui, en rapport avec la paramétrisation des surfaces réglées.

104. Cayley donne en 1850 l'expression générale de ces enveloppes, et montre qu'il s'agit de surfaces de la quatrième classe. Dans son "*Aperçu*", Chasles énonce également que ces développables sont en général des surfaces d'ordre 8 ([**Chasles 1837a**, 250]).

quadriques en atteste également ([**Loria 1896**, 105]). Il faudra en fait attendre 40 ans pour que Cayley revienne sur ce travail et étudie ce cas particulier, explicitant alors l'équation de la développable suggérée par Chasles dans son "*Aperçu*" un demi-siècle plus tôt ([**Cayley 1890**]). Entre temps, les géomètres français auront en fait précisé les propriétés de ces développables particulières, comme nous le verrons dans la section 5.

4.4. A la recherche des cônes circonscrits de révolution : une deuxième approche des foyers pour les surfaces du second degré.

Dans la Note de son "*Aperçu*" définissant les coniques excentriques, Chasles remarque que de nombreuses propriétés relient ces courbes aux cônes circonscrits aux surfaces du second degré. Par exemple, il souligne que deux cônes de même sommet circonscrits à des surfaces ayant les mêmes coniques excentriques possèdent les mêmes lignes focales [105]. Surtout, il fait remarquer que les coniques excentriques ont déjà été mises en évidence avant 1837 par deux mathématiciens en recherchant la solution d'un problème bien particulier :

> [L]es deux coniques excentriques [réelles] d'une surface du second degré [ont] déjà été trouvées depuis longtemps [...] par MM. Steiner et Bobillier comme le lieu des sommets des cônes de révolution qu'on peut circonscrire à une surface du second degré.
>
> Mais, dans les diverses recherches de ces géomètres, rien n'avait pu faire soupçonner, croyons-nous, l'analogie que nous avons montrée entre les propriétés des courbes en question, considérées par rapport à la surface à laquelle elles appartiennent, et les propriétés des foyers dans les coniques.
>
> [**Chasles 1837a**, 390]

Les deux travaux auxquels Chasles fait ici référence datent de 1826 et 1827. Le premier est effectué par le mathématicien suisse - résidant alors à Berlin - Jakob Steiner. Steiner, "*l'homme qui est généralement considéré comme le plus grand géomètre des temps modernes, comme l'était Apollonius chez les Anciens*" pour l'historien Boyer [106], profite de la création à Berlin du recueil de Crelle "*Journal für die reine und angewandte Mathematik*" en 1826 pour insérer dans le premier tome "*quelques théorèmes de géométrie*" [107] ([**Steiner 1826**]). Ces théorèmes généraux sont en grande partie consacrées aux intersections des cônes de degré quelconque, mais le géomètre suisse s'attarde sur le cas particulier des cônes du second degré. Il énonce un théorème qui deviendra central dans l'étude des surfaces du second degré stipulant que deux quadriques se coupant selon une courbe plane se coupent également selon une seconde courbe plane ([**Steiner 1826**, 44]). Puis, particularisant cet énoncé au cas du cône et transformant l'intersection en une tangence, il en déduit que par tout point hors d'une surface du second degré on peut mener un cône circonscrit du second degré à la surface. La courbe de contact sera alors une conique plane ([**Steiner 1826**, 44]).

105. L'énoncé de Chasles est moins clair que celui que nous donnons, qui est dû à [**Darboux 1873a**, 179] et qui généralise la propriété à des surfaces quelconques.

106. "*the man who generally is regarded as the greatest geometer of medern times, as Apollonius was of ancient times*", [**Boyer 1968**, 574]. On pourra également consulter [**Lorenat 2016**] ou encore [**Coolidge 1963**, 96-100] pour plus de détails sur le grand géomètre Jakob Steiner.

107. Il s'agit du nom de l'article de Steiner : "Einige geometrische Sätze".

C'est un peu plus loin que Steiner s'interroge sur la possibilité pour le cône circonscrit à une surface du second degré de devenir un cône droit ("*ein grader Kegel*"), c'est-à-dire de révolution. Il énonce alors, sans démonstration, le résultat suivant :

> Le lieu des sommets des cônes droits du second degré, qui sont tangents à une surface du second degré selon une courbe plane, est une courbe plane du second degré. Par exemple, si la surface donnée est un ellipsoïde, alors le lieu des sommets de ces cônes droits est une hyperbole. [108]
>
> [**Steiner 1826**, 47]

Steiner donne même l'équation de cette hyperbole : en appelant a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde, cette hyperbole se situe "*dans le plan* (AC) *du plus petit* (C) *et du plus grand* (A) *axe de l'ellipsoïde*", soit dans le plan $y = 0$. L'équation donnée par le géomètre suisse est alors :

$$(a^2 - b^2)z^2 - (b^2 - c^2)x^2 = -(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)$$

On reconnaît bien la forme que Chasles donnera à l'une des trois coniques excentriques sous réserve que l'on divise le tout par le second membre. Steiner note deux "*merkwürdige*" (remarquables) propriétés relatives aux quatre points d'intersection de l'ellipsoïde et de cette hyperbole que Chasles nommera 11 ans plus tard excentrique : les plans tangents à l'ellipsoïde en ces quatre points sont parallèles à deux plans qui intersectent l'ellipsoïde suivant des cercles, qu'on pourrait ainsi appeler les *plans cycliques* de la surface. Ensuite, il remarque que ces quatre points d'intersection sont précisément d'après la définition de Monge les *ombilics* de l'ellipsoïde [109]. En fait, ces deux propriétés coïncident puisqu'on peut montrer que les ombilics sont précisément les points de contact des plans tangents parallèles aux sections circulaires.

Ce mémoire de Steiner constitue une véritable liste de théorèmes de géométrie, et ainsi en accord avec cette vue d'ensemble le géomètre helvète ne s'attarde pas plus longtemps sur les propriétés de cônes de révolution circonscrits aux surfaces du second ordre. Il n'y reviendra plus dans la suite de son travail. Aussi peut-on conclure que cette propriété géométrique de circonscription des cônes droits aux surfaces du second degré, bien que remarquable, n'est énoncée qu'*en passant* par Steiner qui ne lui accorde pas une importance particulière. Par ailleurs, ces propriétés géométriques ne sont à aucun moment reliées de près ou de loin à la notion de foyer des coniques : on peut ainsi légitimement donner raison à Chasles quand il affirme que Steiner n'a pas reconnu l'analogie entre les sommets des cônes droits circonscrits aux quadriques et les foyers des coniques. Remarquons en outre que Steiner ne détermine en fait qu'une seule des trois coniques excentriques : il s'agit de celle pour laquelle la construction des cônes circonscrits est une construction géométrique réelle, l'hyperbole excentrique pour l'ellipsoïde ou - bien que Steiner ne la donne pas - l'ellipse excentrique pour l'hyperboloïde. Malgré cela, il revient à ce court énoncé de Steiner le mérite de suggérer la fécondité de l'étude des cônes circonscrits de révolution pour compléter l'analyse des surfaces du second degré. Certes Chasles ne lit-il

108. "*Der Ort des Scheitels eines graden Kegels vom zweiten Grade, welcher ine der Größe und Lage nach gegebene Fläche vom zweiten Grade in einer ebenen Curve berührt : ist eine ebene Curve vom zweiten Grade. Ist z.B. die gegebene Fläche ein Ellipsoïd, so ist der Ort des Scheitels [...] eine Hyperbel*", [**Steiner 1826**, 47].

109. Les ombilics d'une surface sont définis comme les points de cette surface où les deux courbures principales sont égales, voir [**Monge 1809**, 121].

pas l'allemand, mais il lira en Janvier 1827 le compte-rendu qu'Antoine Cournot donnera de cet article dans le "*Bulletin de Férussac*"[110].

"*L'histoire de la géométrie au XIXème siècle est remplie de cas de redécouvertes indépendantes, et Steiner est impliqué dans bon nombre d'entre elles*". Cette sentence de [**Boyer 1968**, 575] s'applique tout à fait à notre étude, puisque quelques mois après la parution des théorèmes géométriques de Steiner, le mathématicien français Etienne Bobillier va redécouvrir indépendamment ces résultats. Né en 1798 à Lons-le-Saunier dans le Jura, Bobillier effectue des études littéraires mais son parcours s'oriente vers les sciences mathématiques lorsqu'il voit son frère aîné réussir à intégrer l'Ecole Polytechnique en 1813. Rattrapant alors son retard dans les classes de mathématiques supérieures, il parvient à égaler son frère en 1817. Tout comme Dandelin, Bobillier ne terminera pas le cursus classique des études de Polytechnique et deviendra dès 1818 professeur de mathématiques à l'Ecole des Arts et Métiers de Châlons. Il y enseignera jusqu'en 1830 où il partira enseigner à Angers.

Que la découverte des résultats du natif du Jura soit indépendante de celle de Steiner ne fait aucun doute puisque Bobillier, alors professeur à Châlons-sur-Marne, est de son propre aveu tout à fait isolé des circulations mathématiques[111]. Il semble que ce soit dans un premier temps grâce à ses échanges avec Quételet - puis plus tard avec Poncelet - que Bobillier ait pu communiquer ses résultats et se tenir un minimum au courant des travaux effectués par ailleurs. En 1826, Bobillier parvient à trouver l'ensemble des cônes de révolution passant par une conique fixée dans l'espace. Transmettant ses résultats à Quételet, il apprend de celui-ci que ce résultat n'est pas nouveau et avait entre autres déjà été déterminé par Quételet lui-même. Il a alors l'idée d'étendre sa recherche en remplaçant la conique par une surface du second ordre, et ainsi d'en rechercher les cônes circonscrits de révolution.

Les résultats de Bobillier sont publiés par Quételet dans sa "*Correspondance mathématique*" ([**Bobillier 1827**]). Ses développements sont nettement plus détaillés que ceux de Steiner - qu'il ne connaît pas - et que ceux donnés plus tard par Chasles. Le professeur de Châlons considère lui aussi le cas générique de l'ellipsoïde :

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + b^2a^2z^2 - a^2b^2c^2 = 0$$

Grâce à un lemme de géométrie, il remarque pour écourter ses calculs que les axes des cônes de révolution circonscrits à l'ellipsoïde se situent nécessairement dans "*l'un des plans principaux de la surface*". Il en va ainsi de mêmes des sommets. Explicitant les calculs dans le cas où la recherche se cantonne au plan $z = 0$, il dégage alors la même expression que celle de Steiner. Par symétrie, des recherches similaires dans les deux autres plans principaux $x = 0$ et $y = 0$ donneront des résultats analogues. Du point de vue analytique, la conclusion de Bobillier est l'obtention de trois coniques : "*l'une des coniques est imaginaire, l'autre est une ellipse qui lui est intérieure, enfin la dernière, qui répond seule à la question, est une hyperbole perpendiculaire à l'axe moyen*" ([**Bobillier 1827**, 161]). La

110. Ce compte-rendu est contenu dans le tome VII (1827) pp.2-4 de la section mathématiques de ce Bulletin, dont nous donnerons plus de détail (Chap.5,2.3). On peut le lire en ligne : `http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=njp.32101071982332;view=1up;seq=10`.

111. Bobillier écrit à Adolphe Quételet : "*l'isolement où je me trouve, le manque de communication, l'impossibilité où je suis de me procurer tous les ouvrages nouveaux dans une ville dépourvue de ressources sous ce rapport*", [**Bobillier 1827**, 157].

réponse au problème géométrique de construction des cônes circonscrits de révolution ne réside ainsi que dans l'une des trois coniques obtenues. Mais cela n'empêche pas le géomètre châlonnais de considérer les propriétés de l'ensemble de ces trois coniques. Il note ainsi que ces coniques ont pour foyers les foyers de l'une des sections principales de la surface et pour sommets les foyers des deux autres sections principales, induisant ainsi la symétrie des rôles joués par les foyers et les sommets des trois coniques que Chasles remettra en évidence ([**Chasles 1837a**, 385]). Il remarque par ailleurs que ces résultats aboutissent à des propriétés remarquables concernant les sections circulaires des surfaces du second degré en faisant usage de la théorie des polaires réciproques. Enfin, il détermine que non content d'être les lieux des sommets des cônes circonscrits de révolution à la quadrique, les trois coniques sont également les enveloppes des axes de ces mêmes cônes ([**Bobillier 1827**, 162]).

Les résultats obtenus en 1827 par Bobillier sont donc plus complets que ceux de Steiner sous différents aspects : les trois coniques sont prises en compte par le français, bien que pouvant être imaginaires ou ne donnant pas une résolution géométrique effective du problème initial. D'autre part de nouvelles propriétés sont signalées par Bobillier. Surtout, en lien avec la manière dont Chasles introduira dix ans plus tard les coniques excentriques, il est remarquable que Bobillier introduise la théorie des polaires réciproques pour développer de nouvelles propriétés ayant trait à ces coniques. L'approche de Chasles sera en effet basée entièrement sur la considération des propriétés singulières des polaires réciproques de ces coniques vis-à-vis de la quadrique dont elles sont issues. Bobillier ne relie pas explicitement dans son mémoire les propriétés des trois coniques qu'il met en évidence aux propriétés des foyers des coniques. Néanmoins il ne fait aucun doute qu'il avait pressenti cette analogie lorsqu'on prend en compte le titre qu'il a donné à son travail : "*Sur les foyers dans les surfaces du second ordre*".

On peut conclure de cela que si la remarque faite par Chasles dans laquelle il s'auto-attribue la découverte de l'analogie entre les foyers des coniques et les coniques excentriques des quadriques paraît légitime au regard de la contribution de Steiner, elle ne l'est plus tout à fait concernant le travail d'Etienne Bobillier. Ces deux géomètres ont été des précurseurs de la considération des coniques excentriques pour les surfaces du second degré par leurs recherches des cônes de révolution leur étant circonscrits. Le travail du mathématicien de Châlons, plus poussé et suggérant l'emploi fécond des polaires réciproques, a vraisemblablement inspiré les recherches ultérieures de Chasles plus que celui-ci ne voudra bien l'admettre finalement dans son "*Aperçu historique*".

A partir de 1843, le mathématicien normand Benjamin Amiot va en France effectuer des recherches avec une approche différente de celle de Chasles que nous détaillerons dans la prochaine partie 4.5. Parvenu à une considération nouvelle des coniques excentriques, il présente son travail à l'Académie des Sciences. C'est en réaction à cette présentation, et pour mieux montrer comment les travaux d'Amiot sont en fait rattachés aux siens, que Chasles présente dans une courte communication qui sera insérée aux "*Comptes-rendus*" comment le point de départ du normand revient exactement à rechercher "*les sphères de rayons nuls et jouissant de cette propriété, que l'intersection de chaque sphère et de la surface soit plane*". Or ces points caractérisent les cônes de révolution circonscrits à la surface : "*donc, les points de l'espace qui jouent le rôle de foyers par rapport à une surface du second degré sont les sommets des cônes de révolution qu'on peut circonscrire à la surface*" ([**Chasles 1843**, 832]). Chasles n'a alors aucune peine à établir que ces points forment, selon sa définition, les deux coniques excentriques réelles de la surface. Lors de la séance suivante, Amiot réagit à la communication de Chasles, et énonce en particulier :

> M. Chasles démontre que [c]es courbes [les coniques excentriques] sont les lieux des sommets des cônes de révolution circonscrits à la surface [...]
>
> [**Amiot 1843a**, 939]

Chasles ne fera pas de communication ultérieure, si bien qu'à la lecture des "*Comptes-rendus*" de l'Académie des Sciences, ce qui n'était au départ pour Chasles qu'une remarque de second plan paraît devenir le fondement même de son approche. En 1837, les coniques excentriques apparaissent en vertu de l'analogie de leurs propriétés relativement à la structure projective des quadriques et Chasles remarque de manière annexe que ces courbes sont d'après Steiner et Bobillier les sommets des cônes droits circonscrits. Au contraire, un lecteur des "*Comptes-rendus*" de 1843 comprendra - à tort - que Chasles fait naître les coniques excentriques de la recherche des lieux des sommets des cônes de révolution circonscrits à une quadrique. Cela explique en particulier pourquoi de nombreuses références seront faites par les mathématiciens étrangers à Chasles en évoquant cette propriété caractéristique des cônes circonscrits [112]. On peut à cette occasion constater le fort impact des "*Comptes-rendus*" hebdomadaires de l'Académie parisienne dans la circulation du savoir mathématique. On voit également la facilité avec laquelle l'attribution des différents théorèmes peut fluctuer et être fixée *a posteriori* par des relectures et des communications aux visées diverses et variées. En Allemagne, la propriété des coniques focales d'être le lieu des sommets des cônes droits circonscrits aux quadriques sera en revanche généralement attribuée à Plücker, en vertu de ce que nous verrons dans 4.6.

4.5. Trois Irlandais et un Normand pour redéfinir les focales via la génération des quadriques.

Nous avons étudié en 4.1 l'apport des deux mathématiciens originaires de Gand, Quételet et Dandelin, et avons caractérisé les fortes interactions entre leurs travaux ainsi que leur point commun d'appréhender les études planes par des sections d'éléments géométriques dans l'espace. Dans la présente partie, nous allons de même nous pencher sur les recherches de trois mathématiciens irlandais, amis et professeurs au sein du même établissement. Là encore, nous le verrons, les influences réciproques sont très fortes et les similarités de leurs productions mathématiques sont incontournables. Si cela n'était en rien notre volonté, nous pouvons ici constater que le fil conducteur que constitue la notion de focale des surfaces nous fait évoluer au sein de différents groupes de mathématiciens dont les contours se distinguent clairement de par leurs méthodes, leurs interactions mais aussi la simultanéité de leurs productions. Sous ce point de vue, on pourrait voir émerger différentes "*écoles de recherche*", mais il convient de rappeler que les travaux d'Ivor Grattan-Guinness, de Karen Hunger Parshall et de David Rowe ont montré quelle précaution était nécessaire pour évoquer cette notion d'"*école*" en histoire des mathématiques ([**Grattan-Guinness 1997**], [**Parshall 2004**], [**Rowe 2003**]). Notre présentation, distinguant d'abord les mathématiciens belges (1820), puis les irlandais de Dublin (1840) et enfin plus tard les mathématiciens de Paris (1860), s'appuie ainsi avant tout sur les différentes approches de la notion même

112. On pourra par exemple regarder la référence faite à Chasles par Townsend en 1848 [**Townsend 1848**, 106]

de focale des surfaces, ainsi que bien entendu sur la chronologie des publications s'y rapportant.

Pour revenir à notre étude, nous avons vu précédemment (en 4.3) que Chasles avait introduit les coniques excentriques comme extension naturelle des foyers des coniques pour les surfaces du second degré en lien avec leurs propriétés projectives, et plus précisément avec la structure projective bien particulière de ces surfaces. Néanmoins nous venons de remarquer que ces courbes pouvaient également émerger d'une approche différente provenant à l'origine de Steiner et Bobillier, et qu'on pourrait croire à tort émaner aussi de Chasles lui-même, liée à la circonscription de cônes de révolution. Ces deux approches sont ainsi des propriétés géométriques, mais non purement métriques, qui supposent que la surface du second degré préexiste à l'étude qu'on en effectue. Elles caractérisent, une fois une quadrique donnée, des lieux géométriques jouissant de propriétés particulières. Ces deux approches non métriques ne font ainsi pas appel à la génération de la surface mais uniquement à la description de ses attributs. Dans les années 1840, une troisième approche apparaît pour faire naître la surface à partir de ses focales, alors que jusqu'alors c'était les focales qui naissaient de la surface.

Ainsi qu'il a été souligné dans la section 1, il a fallu attendre les travaux de Pappus d'Alexandrie pour que, dans le plan, les foyers des coniques soient reliés à la génération de ces courbes du second ordre, en considérant des propriétés métriques - à savoir la constance des ratios de distances à ces points et à une droite fixe. Pour les surfaces du même ordre, ce pas est franchi par le trio de mathématiciens irlandais James MacCullagh, George Salmon et Richard Townsend, et simultanément et indépendamment par le français Benjamin Amiot.

FIGURE 19. James MacCullagh

James MacCullagh, l'aîné des trois irlandais, est né près de Plumbridge en 1809. Ayant travaillé tout autant en optique qu'en géométrie, il enseignera au Trinity College de Dublin à partir de 1835. George Salmon est alors - depuis 1833 -un étudiant brillant en mathématiques dans ce même établissement, et il en deviendra professeur en 1841 aux côtés de MacCullagh. Enfin, Richard Townsend, né à Baltimore (en Irlande dans le comté de Cork), intègre lui aussi le Trinity College irlandais mais en 1837 seulement. Sa position académique dans le College de Dublin à partir de 1845 complète alors le trio qu'il forme désormais avec MacCullagh et Salmon. On peut en outre ajouter à ce trio les deux frères jumeaux William et Michael Roberts, grands amis de MacCullagh, pour former ce que Lützen a appelé "*l'école de Dublin*" ([**Lützen 1990**, 132]) [113].

MacCullagh, qui apparaît avoir été encouragé directement en ce sens par le mathématicien allemand Carl Jacobi à en croire les propos de son ami [**Townsend 1848**], s'intéresse ainsi à cette nouvelle conception. A l'image des considérations de Pappus, il recherche si la génération d'une quadrique peut s'opérer de manière analogue, c'est-à-dire être considérée comme l'ensemble des points respectant une condition de distance entre un point fixe (un foyer pour les coniques) et une droite fixe (la directrice). Il aboutit en 1843 au résultat suivant : les quadriques peuvent être décrites d'une infinité de manière comme ensemble des points dont la distance à un point fixe F - un foyer - est proportionnelle à la distance à une droite directrice fixe ($\mathcal{D}$), pourvu que cette dernière distance soit calculée parallèlement à un plan oblique qu'il nomme *plan directeur* ("*directive plane*") [114]. Le professeur irlandais détermine alors qu'il existe trois droites directrices possibles, menant à la description de la même surface. Pour chacune des trois directrices correspondent une infinité de foyers possibles, mais qui sont situés dans chacun des plans principaux et dont les lieux sont des coniques : il les appelle alors les *courbes focales* ("*focal curves*"). Il s'agit bien entendu des mêmes courbes que les coniques excentriques données par Chasles (et Bobillier), seules deux d'entre elles seront ainsi réelles. En France, Benjamin Amiot arrive simultanément à ces mêmes résultats avec la même philosophie, en recherchant la génération des quadriques à partir de ratios fixes de distances à un foyer ([**Amiot 1843b**]). La seule distinction est que le français recherche les distances des points de la surface à deux plans fixés (qu'il nomme lui aussi les "*plans directeurs*") là où l'irlandais la recherche par rapport à une droite et via un plan. MacCullagh va néanmoins, au-delà ce nouveau rôle des coniques *focales* pour la génération des surfaces, redécouvrir certaines de leurs propriétés géométriques. Il montre tout d'abord que les *plans directeurs* qui sont liés à ses focales généralisent la notion de *plan cyclique* des cônes de Chasles puisque ces plans intersectent la quadrique suivant des cercles [115] [**MacCullagh 1843**, 450]. Ce-faisant, il retrouve et élargit la propriété géométrique énoncée par Steiner en 1826 et établit ainsi que les plans directeurs de la génération des quadriques sont les plans cycliques de ces surfaces. Ensuite, il propose de renommer les coniques focales qui sont réelles les *focales ombilicales* ("*umbilicar focals*") : il retrouve en effet - toujours sans mentionner Steiner - que ces coniques intersectent exactement la surface quadrique en ses ombilics [116].

Quelques années plus tard, poursuivant les travaux de MacCullagh et les recherches à ce sujet de Salmon non publiées, Richard Townsend publie en 1848 un mémoire sur les focales des quadriques, [**Townsend 1848**]. Synthétisant les travaux de Chasles puis les apports de MacCullagh, montrant les liens entre les différentes conceptions des focales, apportant de nouvelles propriétés en incorporant les preuves de Salmon, ce mémoire est

113. On peut consulter en ligne les "*400 ans de Mathématiques*" au Trinity College de Dublin de T.D.Spearman : `https://www.maths.tcd.ie/about/400Hist/17.php`.

114. "*I have sought for such a method, and I have found that (with certain analogous exceptions) every surface of the second order may be regarded as the locus of a point whose distance from a given point bears a constant ration to its distance from a given line, provided the latter distance be measured parallel to a given plane; this plane being, in general, oblique to the right line*" [**MacCullagh 1843**, 448].

115. MacCullagh montre que, dans certains cas, la section peut dégénérer en une droite : lorsque le ratio entre la distance au foyer et la distance à la directrice vaut 1.

116. MacCullagh énonce : "*A focal which is not modular may be called umbilicar, because it intersects the surface in the umbilics*" [**MacCullagh 1843**, 458].

remarquable à bien des égards. En particulier, il établit clairement les équivalences entre toutes les différentes approches de la notion de foyers et de focales pour les surfaces du second degré. Mais en outre, il fait apparaître pour la première fois clairement le fait que ces foyers des surfaces étendent la conception du foyer due à Poncelet.

Poncelet avait ainsi envisagé les foyers des coniques comme des cercles de rayon nuls doublement tangents à la conique dans son "*Traité des propriétés projectives*" de 1822. Richard Townsend considère tout d'abord le cas des surfaces de révolution :

> un foyer d'une surface de révolution est évidemment la limite évanescente d'une sphère, qui a non seulement un double contact avec elle, mais qui en plus est inscrite dans celle-ci, le plan du double contact imaginaire étant le plan directeur de la surface correspondant à ce foyer. [117]
>
> [**Townsend 1848**, 101]

Il reste alors à Townsend à relier cette approche avec le cas particulier des sommets des cônes circonscrits à une surface du second degré quelconque. En considérant "*le cas général d'une sphère de double contact*" avec la surface, il existe deux cônes circonscrits à la fois à la sphère et à la surface. Puisqu'une sphère y est inscrite, ces cônes sont donc de révolution. Mais ces propriétés de double contact restent vraies "*dans le cas limite et évanescent de cette sphère*". Dans ce cas, "*les deux cônes se réunissent et n'en forment qu'un avec un foyer pour sommet, le plan passant par le foyer et la directrice correspondante est alors le plan polaire du sommet de ce cône par rapport à la sphère infiniment petite*" [118]. En particulier, cette polarité par rapport à une sphère permet d'obtenir l'orthogonalité de l'axe du cône circonscrit et de la directrice associée au foyer situé au sommet du cône.

On peut ainsi remarquer que l'approche de Townsend est très proche de celle de Poncelet : le principe de continuité joue un rôle central dans les travaux des deux mathématiciens, et les foyers des quadriques sont considérés par l'irlandais comme des points-sphères doublement tangents à la surface ce qui est analogue à ce qu'étaient les foyers des coniques planes pour le français. Comme Poncelet, Townsend utilise les polaires réciproques pour obtenir des propriétés concernant la directrice associée à un foyer. Pour les coniques, la directrice devenait la polaire focale ; ici l'orthogonalité de la directrice et de l'axe du cône, ajoutée à la propriété des courbes focales d'être l'enveloppe des axes de ces-mêmes cônes, permet à Townsend de conclure que la directrice n'est autre que la tangente à la courbe focale menée au foyer que l'on considère ([**Townsend 1848**, 103]).

Il est intéressant de remarquer que Townsend, dont le style très synthétique est caractérisé par l'absence totale d'équations ou même simplement de symboles, présente en bas de page une idée de la démonstration *analytique ingénieuse* ("*ingenious analytical solution*") qu'il doit à Salmon concernant la considération des foyers comme sphères doublement tangentes à la quadrique. Cette même démonstration sera reprise d'une manière plus claire par l'allemand Wilhelm Fiedler en 1862 ([**Fiedler 1862**]).

117. "*a focus of an umbilicar surface of revolution is obviously the evanscent limit to a sphere, not only having double contact with, but actually inscribed in the surface, the plane of imaginary double contact being the dirigent plane of the surface corresponding to that focus*" [**Townsend 1848**, 101].

118. "*therefore in the limiting and evanescent state of that sphere, when the two cones come together and coincide in one with its vertex at a focus, the plane passing through that focus and its corresponding directrix will be the polar plane with respect to the infinitely small sphere of the vertex of that cone*" [**Townsend 1848**, 102].

Considérons avec Fiedler et Salmon une sphère $K = 0$ et deux plans $A = 0$, $B = 0$. L'ensemble des points dont le produit des distances aux deux plans $MA \cdot MB$ est dans un rapport constant avec le carré de la tangente menée à la sphère MK^2 est une surface du second degré (d'après Amiot et MacCullagh), que nous noterons $\mathcal{S}$, caractérisée par l'équation en notation abrégée :

$$K - \lambda AB = 0$$

Lorsque les plans A et B coïncident, cette surface et tangente à la sphère le long du cercle d'intersection de la sphère $K = 0$ et du plan $A = 0$. Mais puisque ce résultat est indépendant du rayon de la sphère, il doit subsister lorsque celui-ci tend vers 0. Dans ce cas, ce point limite, sphère de rayon nulle, devient doublement tangent à la surface : c'en est un *foyer*. On peut ainsi dire avec Fiedler que "*les points en question sont les centres de sphères inscrites de rayons nuls qui interceptent la surface suivant des courbes planes*"[119]. Or lorsque deux surfaces du second degré se coupent suivant des courbes planes, elles sont toutes deux simultanément inscrites dans deux différents cônes[120]. Ces cônes sont donc circonscrits à la surface $\mathcal{S}$ ainsi qu'à la sphère $K = 0$: ce sont ainsi des cônes de révolution. Par ailleurs, puisque la sphère est de rayon nul elle représente nécessairement le sommet des deux cônes dans lesquels elle est inscrite.

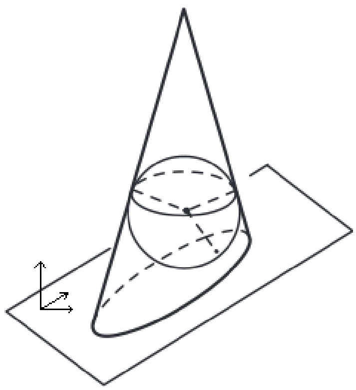


FIGURE 20. Un cône circonscrit à une sphère est un cône de révolution

Finalement, nous devons souligner que cette démonstration analytique permet de relier entre elles toutes les différentes approches des foyers des quadriques allant des propriétés projectives aux relations métriques en passant par les propriétés de géométrie de contact. Étant considérés comme les points permettant la génération de la surface par une relation métrique avec une directrice ou deux plans fixes (pour Amiot et MacCullagh), ils peuvent être également vus comme le lieu des sphères de rayon nul doublement tangents à la surface (pour Salmon et Townsend), ou encore comme les sommets des cônes droits circonscrits à la surface. Nous allons voir dans la prochaine partie (4.6) que c'est cette dernière conception,

119. "*Die fraglichen Punkte sind Centra von mit dem Halbmesser Null beschriebenen Kugeln, welche die Oberfläche in ebenen Curven schneiden*", [**Fiedler 1862**, 299].

120. Ce résultat géométrique est dû à [**Steiner 1826**]. [**Cayley 1850**] démontrera plus tard exactement que la surface développable circonscrite à deux surfaces du second degré est de la quatrième classe, [**Chasles 1837a**] ayant ajouté entre temps qu'elle était du huitième ordre. Dans le cas étudié ici, c'est précisément cette surface qui dégénère en deux cônes du second degré.

dont l'idée remonte à Steiner et Bobillier et dont fait usage Fiedler en 1862, qui va être utilisée par Julius Plücker dans son traité de "*Géométrie de l'espace*" en 1846. La paternité de l'extension de la notion de foyer de Poncelet aux surfaces du second degré comme point-sphère doublement tangent appartient ainsi à Townsend. Sans surprise, c'est également pour cette approche que George Salmon optera plus tard dans son exposition des focales des surfaces du second degré au sein de son "*Traité de géométrie analytique à trois dimensions*" ([**Salmon 1862**, 99-157]).

4.6. La "*géométrie de l'espace*" de Plücker (1846) : les focales des surfaces du second degré s'imposent comme sommets des cônes de révolution circonscrits.

En 1846, Julius Plücker - toujours professeur à Bonn mais en sciences physiques et non plus en mathématiques - publie un important traité sur la géométrie dans l'espace [**Plücker 1846**]. Dans cet ouvrage, il fait à nouveau usage des coordonnées homogènes, ponctuelles et tangentielles, pour étudier les courbes planes et gauches (dites à doubles courbures, soit "*doppelte Krümmung Curve*") ainsi que les contacts entre courbes et surfaces. Surtout, la seconde partie du travail du géomètre allemand est consacrée à une étude très complète et à une classification des "*surfaces du second ordre et des surfaces de la seconde classe*", c'est-à-dire des quadriques.

Un regard porté au sommaire de l'ouvrage nous montre qu'une sous-section de la partie consacrée aux quadriques est intitulée "*les trois courbes focales*" ("*die drei Focal-Curven*"), et que cette sous-section se situe au sein d'une section dédiée à l'analyse des cônes de révolution circonscrits à une surface du second ordre. Parmi les différentes approches de l'extension de la notion de foyer à ces surfaces, Plücker choisit ainsi d'adopter celle des "*lieux géométriques des sommets de tous les cônes de révolution qui sont circonscrits à la surface donnée*"[121]. Loin d'effectuer des liens entre les différentes approches comme le fera Townsend deux ans plus tard, le mathématicien allemand n'envisagera jamais un foyer d'une surface comme une sphère nulle doublement tangente, tout comme - ainsi que nous l'avons vu dans 2 - il n'a jamais considéré explicitement les foyers des courbes planes comme des points-cercles doublement tangents à ladite courbe. De même, il ne fera pas allusion à la génération des quadriques à partir des relations de distance aux foyers. En revanche, nous allons analyser quelles propriétés il met particulièrement en avant, en lien avec ses définitions projectives des foyers et avec les propriétés déjà exhibées par Chasles. Nous pourrons également caractériser les apports de Plücker liés à la fécondité des coordonnées homogènes tangentielles, ce qui l'avait mené à la conception générale des foyers dans le plan en 1833.

Dans un premier temps, Plücker détaille les relations algébriques qui caractérisent une surface du second degré, $\Omega = 0$, et une sphère, $\Sigma = 0$, inscrites dans un même cône $c_1 = 0$. Ce cône sera ainsi de révolution. A l'aide d'une propriété qu'il ne prouvera qu'en fin d'ouvrage ([**Plücker 1846**, 327-329]), cette condition sur la surface et la sphère implique l'existence d'un second cône $c_2 = 0$: les cônes de révolution circonscrits apparaissent toujours par paires. Il montre alors que les deux cônes circonscrits sont tangents à la

121. "*der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller der gegebenen Fläche umschriebenen Rotations-Kegel*" [**Plücker 1846**, 250].

surface $\Omega = 0$ en deux coniques planes s_1, s_2, contenues dans des plans $p_1 = 0$ et $p_2 = 0$ tels que :

$$\begin{cases} \lambda\Omega - \mu\Sigma & = p_1 p_2 \\ \lambda + \mu & = -1 \end{cases}$$

Plücker introduit ensuite la forme canonique de l'écriture des surfaces quadriques, considérées comme les surfaces générales de deuxième classe, en coordonnées tangentielles homogènes :

$$\Omega = At^2 + A'u^2 + A''v^2 - w^2 = 0 \qquad \text{[Plücker 1846, 249]}$$

L'équation d'une sphère de centre (x_m, y_m, z_m) et de rayon r devient par ailleurs en coordonnées homogènes tangentielles :

$$\Sigma = (x_m t + y_m u + z_m v + w)^2 - r^2(t^2 + u^2 + v^2) = 0$$

En remplaçant ces expressions dans le système décrivant la possibilité de circonscrire à ces deux surfaces deux cônes, il parvient à écrire un système liant les coefficients de la surface A, A', A'', les deux paramètres λ et μ, ainsi que le rayon r. Tirant ensuite profit du fait que l'équation traduisant la courbe d'intersection des cônes et de la surfaces soit contrainte de représenter une courbe plane, le géomètre allemand aboutit finalement à trois différents ensembles de solutions. Chaque ensemble est représentée par une des trois équations suivantes :

$$\begin{cases} \lambda A'' + \mu r^2 & = 0 \\ \lambda A' + \mu r^2 & = 0 \\ \lambda A + \mu r^2 & = 0 \end{cases}$$

Mais en remplaçant chacune de ces trois valeurs dans les équations du système, Plücker parvient à réécrire ces trois ensembles comme autant d'équations tangentielles homogènes de courbes situées dans les trois plans principaux de la surface quadrique $\Omega = 0$:

$$\begin{cases} (A - A'')t^2 + (A' - A'')u^2 & = w^2 \\ (A - A')t^2 + (A'' - A')v^2 & = w^2 \\ (A' - A)u^2 + (A'' - A)v^2 & = w^2 \end{cases} \qquad \text{[Plücker 1846, 250]}$$

Le natif d'Elberfeld montre en fait que ces trois courbes peuvent être considérées de manière duale soit comme l'ensemble des sommets des cônes de révolution circonscrits à la surface, soit également comme l'enveloppe des axes de ces mêmes cônes, retrouvant ainsi le résultat obtenu d'abord par Bobillier 15 ans plus tôt. Ces courbes sont naturellement les coniques excentriques données par Chasles 9 ans plus tôt et retrouvées entre temps différemment par MacCullagh et Amiot. On peut remarquer que les géomètres français Chasles, Amiot et Bobillier donnaient les équations sous leur forme cartésienne ponctuelle déshomogénéisée, alors que Plücker utilise quant à lui les coordonnées tangentielles homogènes. Mais dans tout son ouvrage, il ne fera pas une seule fois référence aux travaux de Chasles, d'Amiot, ni d'ailleurs à ceux des mathématiciens irlandais. Il va pourtant, tout comme ces-derniers, baptiser ces courbes autrement que par l'épithète *excentrique* :

> Les courbes représentées par [ces] équations s'appellent les courbes focales de la surface de deuxième classe donnée. Elles sont des coniques

> réelles ou imaginaires, qui se situent dans les trois plans principaux de la surface et dont les centres sont identiquement le centre de la surface.[122]
>
> [**Plücker 1846**, 251]

Non content de retrouver analytiquement les *courbes focales* en considérant les cônes de révolution circonscrits, conformément à ce que Chasles avait énoncé en 1843, Plücker retrouve alors plusieurs des propriétés que le géomètre français avait également exhibées : il montre que les sections de la surface par des plans orthogonaux aux courbes focales sont des coniques dont les foyers se situent sur les focales en question ([**Plücker 1846**, 295]). Il énonce également la propriété de conjugaison des traces des normales et des plans tangents sur les trois plans principaux, propriété projective qui avait servi à définir ces courbes pour Chasles. Faisant dégénérer l'hyperboloïde en un cône, le géomètre allemand retrouve la définition des lignes focales des cônes. Il prouve pour finir que "*trois surfaces homofocales passant par le même point se coupent en ce point à angle droit*"[123].

Plücker enrichit par ailleurs les travaux de Chasles de nombreuses nouvelles propriétés. Il utilise ainsi par exemple les relations angulaires liées aux plans cycliques et aux lignes focales des cônes pour exposer une équation polaire simplifiée des cônes du second degré ([**Plücker 1846**, 298-305]). Il énonce, sans mentionner ni MacCullagh ni Steiner, que l'intersection de la quadrique et des deux courbes focales réelles donne exactement les quatre ombilics de la quadrique[124]. Enfin, il retrouve le théorème de Dandelin (voir 4.1) - qu'il attribue d'ailleurs à Quételet - en considérant le cas où la surface dégénère en une courbe plane ([**Plücker 1846**, 328]).

Il faut néanmoins attendre un des tout derniers énoncés de l'ouvrage de Julius Plücker pour trouver une propriété projective liée aux coniques focales analogue à celles qui caractérisaient l'apport du mathématicien allemand à la notion plane de foyer : les propriétés angulaires en relation avec les éléments projectifs à l'infini. Il s'intéresse en effet à la formation des plans tangents à plusieurs surfaces homofocales et aux lieux de la tangence. Dans un premier temps, Plücker contraint les plans tangents à passer par un foyer ("*Brennpunct*") F, c'est-à-dire un point d'une courbe focale, ainsi qu'à contenir une droite contenue dans le plan $\mathcal{P}$ de cette courbe focale. Les similarités avec les propriétés des tangentes isotropes des coniques planes apparaissent alors lorsque la droite du plan n'est plus laissée quelconque mais devient précisément la tangente à la conique focale en F :

> Quand cette droite est en particulier une tangente à la courbe focale, on trouve alors le résultat remarquable que tout plan (imaginaire) passant par une telle droite est un plan tangent à la surface. Chaque tangente aux deux courbes focales réelles et chacun des plans imaginaires les contenant se comportent donc pour les surfaces de deuxième classe de manière absolument analogue aux deux foyers et aux tangentes qui en sont issues pour les courbes de la deuxième classe. Tout couple de plans perpendiculaires passant par une tangente d'une courbe focale forment avec les deux

122. "*Die durch die[se] Gleichungen dargestellten Curven heissen die Focal-Curven der gegebenen Fläche zweiter Classe. Sie sind reelle oder imaginäre Kegelschnitte, welche in den drei Hauptschnitten dieser Fläche liegen, mit deren Mittelpunct ihr gemeinschaftlicher Mittelpunct zusammenfällt*", [**Plücker 1846**, 251].

123. "*drei homofocale Flächen, die durch denselben Punkt gehen, in diesem Puncte sich rechtwinklig schneiden* [**Plücker 1846**, 332].

124. Plücker appelle ces points les "*Kreispuncte*" ; ils seront appelés plus tard couramment "*Nabelpunkte*".

plans tangents en question quatre plans harmoniques, ce dont résultent plusieurs théorèmes[125]

[**Plücker 1846**, 332-333]

On retrouve le rôle particulier des tangentes aux courbes focales, dont Townsend montrera deux ans plus tard qu'elles sont en fait les directrices dans la génération métrique "*à la Pappus*" des quadriques. Notons par ailleurs que, comme dans le cas des droites, ce que Plücker entend par "*plans imaginaires*" sont les deux plans passant par la tangente donnée et faisant avec le plan principal contenant la courbe focale un angle θ tel que $\tan(\theta) = \pm\sqrt{-1}$. Dans une note de bas de page, Plücker explique ceci, exactement à l'image de son explication concernant les tangentes isotropes dans [**Plücker 1831**]. En écrivant l'équation de la surface quadrique sous sa forme tangentielle déshomogénéisée $\alpha^2t^2 + \beta^2u^2 + \gamma^2v^2 = 1$, il considère tout d'abord les plans tangents passant par une droite quelconque du plan XY :

$$z = 0, \quad t'x + u'y + 1 = 0$$

Il existe alors deux plans tangents à la surface quadrique, qui sont déterminés par l'angle η qu'ils forment avec le plan XY par la relation : $\tan(\eta)^2 = -\dfrac{\gamma^2(t'^2 + u'^2)}{\alpha^2t'^2 + \beta^2u'^2 - 1}$. Lorsque la droite est tangente à la conique focale située dans le plan XY, son équation devient alors

$$z = 0, \quad (\alpha^2 - \gamma^2)t^2 + (\beta^2 - \gamma^2)u^2 = 1$$

Or cette relation exprime exactement l'égalité des numérateur et dénominateur du quotient donnant la tangente de η. L'angle formé par les plans tangents avec le plan principal XY est donc donné par

$$\tan^2(\eta) = -1 \;\Leftrightarrow\; \tan(\eta) = \pm\sqrt{-1}$$

Ces plans tangents ont donc la même propriété que les droites tangentes issues des foyers des coniques dans le plan : ils coupent tout autre plan passant par la même tangente à la conique focale suivant le même angle. L'intersection de ces deux plans tangents par un plan perpendiculaire à cette tangente décrit deux droites isotropes dans ces plans : Laguerre les appellera en conséquence des "*plans isotropes*" (voir [**Laguerre 1872**, 15] et plus loin notre discussion sur le vocabulaire 6.3). Puisque par un point et une droite donnés passent exactement deux plans isotropes, on obtient que les deux plans isotropes (dits *imaginaires* pour Plücker) passant par toute tangente à une conique focale relative à une surface de la deuxième classe sont des plans tangents à cette surface. Tout couple de plans perpendiculaires passant par une de ces tangentes étant écrit sous la forme $(\mathcal{P}_1 = 0, \mathcal{P}_2 = 0)$, ces plans isotropes s'écriront comme $(\mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2 = 0, \mathcal{P}_1 - i\mathcal{P}_2 = 0)$, ce qui formera ainsi bien un système de 4 plans harmoniques. On voit ainsi comment les coniques focales, grâce à la considération de leurs tangentes, et les plans isotropes constituent pour

125. "*Wenn diese gerade Linie insbesondere eine Tangente der Focal-Curve ist, so tritt uns das bemerkenswerthe Resultat entgegen, dass alsdann jede (imaginäre) Ebene, die durch eine solche gerade Linie geht, eine Tangential-Ebene der Fläche ist. Es steht also jede Tangente der beiden reellen Focal-Curven rücksichtlich solcher Ebenen, die durch dieselbe gelegt werden, zur Fläche in ganz analog Beziehung, wie die beiden Brennpuncte, rücksichtlich der durch dieselben geraden Linien, zur Curve zweiter Classe*" [**Plücker 1846**, 332-333].

Plücker l'extension naturelle aux quadriques des foyers et des tangentes isotropes pour les coniques.

Le travail de Plücker relatif aux focales des surfaces du deuxième ordre est ainsi, vis-à-vis des travaux de Chasles, très comparable à celui du géomètre allemand relatif aux foyers des coniques vis-à-vis de Poncelet. Pour les courbes planes, Plücker ne s'intéressait ainsi pas à la structure projective des coniques mais aux traitements qu'il pouvait en faire à l'aide des outils analytiques de la géométrie projective. Au contraire, l'étude des propriétés des structures projectives des coniques était au centre du travail de Poncelet. Cette-même étude est pareillement au cœur des recherches de Chasles pour les surfaces du second degré, alors que là encore ce n'est pas la structure géométrique mais les propriétés obtenues grâce aux outils analytiques de la géométrie projective qui priment dans les analyses du professeur de Bonn. Grâce à l'emploi crucial des coordonnées tangentielles homogènes, il parvient à effectuer le rapprochement entre les foyers des coniques et les focales des quadriques en étudiant le comportement de leurs éléments tangents (droites et plans) en ces points particuliers. Si Plücker, dans le cadre de l'étude des courbes, avait poursuivi ses travaux pour finalement faire passer ces propriétés d'isotropie des tangentes à l'état de définition même de la notion - ce qui lui avait permis d'étendre celle-ci à toutes les courbes planes - il n'en va pas de même pour l'étude des surfaces. La considération des similarités entre coniques et quadriques se cantonne à ce que nous venons d'en décrire, non seulement dans cet ouvrage [**Plücker 1846**], mais également pour le reste de ses travaux. A partir de 1847, les travaux du professeur de physique de l'Université de Bonn délaissent en effet le cadre des mathématiques pour rentrer dans ceux des sciences physiques.

Entre la première exposition systématique des coniques focales par Chasles en 1837 et le début de la décennie 1860, la manière d'appréhender et d'exposer la notion de focale, extension aux surfaces du second degré de la notion de foyer, a ainsi été extrêmement enrichie. Née en lien avec la structure projective des quadriques chez Chasles, elle se développe ensuite indépendamment chez les mathématiciens irlandais - et en France avec Amiot - dans les années 1840 pour décrire la génération de ces surfaces *à la manière de Pappus* à partir de relations métriques à des objets fixes (points, droites). Après Chasles, l'irlandais Townsend montre par ailleurs que les foyers des surfaces du second degré étendent la conception plane de Poncelet en considérant ces lieux comme des sphères de rayon nul doublement tangentes à la surface. En Allemagne, Plücker retrouve quant à lui ces focales à l'image des travaux précurseurs de Bobillier en considérant l'étude des cônes de révolution circonscrits à la surface, une approche rappelée par Chasles dans les "*Comptes-rendus*" de 1843. Cette définition est *a priori* décorrélée des méthodes qui avaient caractérisé le travail de généralisation de Plücker de la notion de foyer dans le plan. Néanmoins, grâce à l'emploi des coordonnées homogènes tangentielles, le mathématicien allemand parvient tout de même à montrer le lien entre ces focales et les foyers des coniques en employant comme approche l'étude des propriétés de tangence spécifiques à ces lieux géométriques.

Ayant mis au jour ce qu'on appellera bientôt l'*isotropie* (voir 6.3) des plans tangents menés aux surfaces du second degré depuis les coniques focales, Plücker ne fait cependant pas le lien avec la proposition de Chasles stipulant l'inscription des surfaces homofocales dans une même développable. Cette ultime étape sera la voie vers la généralisation définitive de la notion de *focale* aux surfaces quelconques, ce que nous analyserons ci-après en 5.

5. Exploiter les surfaces développables circonscrites : les ultimes extensions de Chasles et de Darboux

5.1. 1860 : Chasles et le rôle majeur du "cercle imaginaire à l'infini".

Au Printemps 1860, Michel Chasles va publier dans les "*Comptes-rendus*" de l'Académie une série de trois communications ([Chasles 1860a] et [Chasles 1860b] en deux parties) apportant des conceptions nouvelles pour les théories des coniques sphériques et des surfaces du second degré. L'originalité de son approche réside essentiellement dans le rôle prépondérant d'un élément à l'infini de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$. Cet élément est la généralisation à l'espace de la notion de *point cyclique* de Poncelet dans le plan.

Dans sa communication de Mars 1860 sur les coniques sphériques, Chasles introduit ainsi ce qu'il appelle le "*cercle imaginaire situé à l'infini*". Il considère dans un premier temps un cercle imaginaire, c'est-à-dire un cercle dont le rayon serait donné par $R\sqrt{-1}$, puis ajoute :

> Si l'on conçoit un cône qui ait pour sommet le point S, et pour base le cercle imaginaire, ce sera le cône asymptote d'une sphère, de rayon quelconque, ayant son centre en S.
>
> Par conséquent, *la courbe d'intersection de la sphère par le cône sera le cercle imaginaire situé à l'infini.*
>
> [Chasles 1860a, 624]

Donnons ici quelques détails analytiques que Chasles n'expose pas [126]. Pour une surface du second degré écrite canoniquement $Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = Hw^2$ dans le système de coordonnées homogènes $(x : y : z : w)$, le cône asymptote de la surface est défini par $Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = 0$. Il peut être défini comme l'ensemble des droites asymptotes à la surface passant par son centre, et c'est ainsi que cette notion de *cône asymptote* est apparue dans un premier temps pour l'étude des hyperboloïdes. D'un point de vue projectif, on constate que la quadrique et son cône asymptote coïncident à l'infini, soit lorsque l'on impose $w = 0$.

Le cas particulier envisagé notamment par Chasles lorsqu'il parle de *cercle à l'infini* est celui où les surfaces sont des sphères. Une sphère de centre (x_0, y_0, z_0) et de rayon R s'écrira en effet toujours : $(x - wx_0)^2 + (y - wy_0)^2 + (z - wz_0)^2 = R^2w^2$. Par conséquent, les cônes asymptotes s'écriront tous comme : $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Mais cela signifie ainsi que l'intersection de ce cône, dit *cône asymptote de la sphère*, et du plan de l'infini $w = 0$ sera un cercle qui sera inclus dans toutes les sphères de l'espace ! Ce "*cercle imaginaire situé à l'infini*" généralise ainsi bien à l'espace la notion de point cyclique. Son expression analytique est donnée par :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \ , \quad w = 0$$

126. Nous remercions à cette occasion François Lê et Patrick Popescu-Pampu pour les discussions instructives ayant permis notre familiarisation avec certains objets de la géométrie projective et certaines appellations singulières.

Analysons à présent le rôle de ce nouvel élément projectif dans le travail de Chasles. C'est dans la définition des foyers des coniques sphériques qu'intervient de manière prépondérante ce cercle imaginaire :

> Les centres, les arcs cycliques et les foyers d'une conique sphérique [...] sont susceptibles d'autres définitions qui dérivent de la considération du cercle imaginaire situé à l'infini. Ainsi l'on peut dire que [...] les foyers de la conique sont les points de concours (toujours réels) des arcs tangents communs à la conique et au cercle ; ou si l'on veut, sont les sommets réels du quadrilatère (imaginaire) circonscrit à la conique et au cercle.
>
> [**Chasles 1860a**, 625]

Cette propriété s'inspire largement de la conception qu'avait Poncelet des coniques planes homofocales, c'est-à-dire la propriété de ces courbes d'être inscrites dans un même quadrilatère idéal. Il en va ainsi de même pour les coniques sphériques en leur circonscrivant un même quadrilatère, circonscrit en outre au cercle de l'infini. Écartant la considération des foyers imaginaires, Chasles obtient ainsi les foyers comme sommets réels de ce quadrilatère. Dès lors, la propriété qui caractérise une famille de coniques sphériques homofocales devient la possibilité de les inscrire dans un même quadrilatère circonscrit au cercle de l'infini. Il adopte à cette occasion une notation nouvelle, $\boxed{UA}$, pour désigner le quadrilatère circonscrit aux deux coniques U et A.

Dans la suite de ce court mémoire, le géomètre français va regrouper de nombreuses propriétés des coniques sphériques dans quatre théorèmes grâce à cette nouvelle approche impliquant les contacts au cercle imaginaire de l'infini. Il affirme alors :

> C'est la considération de ce cercle imaginaire [situé à l'infini] qui conduit aux plus belles propriétés des coniques homofocales, et surtout à celles dont les démonstrations présenteraient souvent le plus de difficultés par d'autres voies.
>
> [**Chasles 1860a**, 626]

Il s'agit ainsi d'un puissant outil pour l'approche synthétique de Chasles dont découlent de nombreuses propriétés angulaires et de contacts des coniques sphériques. En 1831, nous avons vu (voir 4.3) que l'étude des coniques sphériques avait été la passerelle pour Chasles entre ses travaux de géométrie plane et ses travaux de géométrie dans l'espace, en lien avec la notion de foyer. Il en va de même ici quant à l'apport de la notion de cercle imaginaire de l'infini pour les focales : la considération des coniques sphériques n'est encore qu'un prélude à l'analyse des surfaces du second degré.

Il ne faudra donc qu'une poignée de semaines pour que le polytechnicien présente une théorie renouvelée des focales des surfaces du second degré. Une fois encore, c'est un résultat de Poncelet qui inspire Chasles dans ses investigations. Il s'agit du théorème de 1829 caractérisant les lignes de striction de la développable circonscrite à deux surfaces du second degré, dont on a vu dans 4.3 qu'il avait déjà inspiré Chasles en 1837. Poncelet énonçait que les lignes de striction de la développable étaient quatre coniques, résultant des seules sections planes du second degré de la développable (qui est du 8$^{\text{ème}}$ ordre). Chasles avait ajouté dans son "*Aperçu*" que dans le cas de plusieurs surfaces homofocales (ayant mêmes coniques excentriques), on pouvait toujours circonscrire une même développable dont trois des quatre lignes de striction étaient précisément les coniques excentriques. Il avait ajouté sans plus de détails que la quatrième ligne de striction était imaginaire et à l'infini. Il ne restait plus alors qu'à identifier celle-ci avec le cercle imaginaire de l'infini.

En Juin 1860, Chasles présente dans son mémoire [**Chasles 1860b**] ce résultat à l'Académie, sur lequel il refonde entièrement sa théorie des quadriques homofocales [127] : pour Chasles, un nouveau principe général va naturellement de pair avec la constitution d'une nouvelle théorie. Rappelant le théorème de Poncelet, il remarque pour commencer que lorsqu'une des deux surfaces du second degré dégénère en une conique (plane), le résultat subsiste et la conique en question est une des quatre lignes de striction de la développable circonscrite ([**Chasles 1860b**, 1056]). Les coniques peuvent ainsi être considérées, ce que le géomètre met en évidence, comme des surfaces du second degré "*infiniment aplaties*". Il souligne par ailleurs que l'imaginarité de la surface développable circonscrite n'implique en rien l'imaginarité de ses lignes de striction.

Dans la section qu'il intitule "*surfaces homofocales*", le géomètre français rappelle la propriété du cercle imaginaire à l'infini qu'il se propose de noter C_i. En considérant alors une surface du second degré A quelconque, il introduit la surface développable circonscrite à A et à C_i qu'il note $\boxed{AC_i}$. Il remarque alors que toute autre surface du second ordre B inscrite dans cette développable $\boxed{AC_i}$ sera d'une part concentrique à A, mais en outre que A et B "*se coupent partout à angle droit*" ([**Chasles 1860b**, 1058]). Selon Chasles, ces arguments sont suffisants pour conclure : il affirme donc qu'"*on reconnaît, à cette dernière propriété, les surfaces homofocales*".

On constate que Chasles appuie toujours sa théorie sur la définition des focales donnée par lui en 1837 : il n'a pas pour objectif en 1860 de *redéfinir les focales* des quadriques, mais uniquement de *caractériser les surfaces homofocales*. S'il va bien remarquer plus loin que les deux coniques excentriques réelles de la quadrique A sont exactement les lignes de striction réelles de la développable circonscrite $\boxed{AC_i}$, il n'érigera néanmoins pas cela comme fondement de la notion de focale ([**Chasles 1860b**, 1059]). Aussi la preuve de Chasles relative aux surfaces homofocales manque-t-elle de rigueur puisqu'elle identifie surfaces orthogonales et surfaces homofocales. Elle s'appuie vraisemblablement implicitement sur les travaux de Lamé (que nous analyserons ultérieurement au chapitre 3) et que Chasles citera quelques lignes plus loin. En effet, si Chasles a bien montré en 1837 que des surfaces du second degré homofocales formaient un système (triple) de surfaces orthogonales, en revanche nul théorème ne permet, en 1860, de déduire en toute rigueur de manière aussi générale qu'une famille de surfaces orthogonales est homofocale [128]. Par conséquent, sans modification de la définition même des focales des surfaces du second degré, l'argumentation présentée par Chasles doit être regardée comme insuffisante. Heureusement, si la preuve paraît peu sûre, la validité du résultat subsistera :

> Un système de surfaces homofocales est simplement un système de surfaces inscrites dans une même développable ; système qui ne se distingue de tout autre, qu'en ce que cette développable a pour une de ses lignes de striction un cercle imaginaire situé à l'infini.

127. Remarquons qu'en 1860, Chasles n'a toujours pas tout à fait adopté la terminologie de *focales* : il continue à évoquer les deux adjectifs *focales* et *excentriques*. Nous nous rapporterons à 6 pour plus de détails sur l'évolution des terminologies.

128. Nous verrons en 7.1 comment Darboux répondra par la positive à cette hypothèse implicite faite par Chasles dans le cas où les surfaces sont issues d'une seule et même équation.

> Cette définition des surfaces homofocales est la plus concise, la plus nette et la plus féconde.
>
> [**Chasles 1860b**, 1058]

A l'instar de son travail précédent relatif aux coniques sphériques, Chasles va à l'aide de cette nouvelle approche des quadriques homofocales énoncer quatre grands théorèmes généraux desquels découlent les nombreuses propriétés propres à ces surfaces. Partisan d'un échafaudage des théories mathématiques sur la base de peu de grands principes fondateurs, il ne manque pas d'apprécier comment la considération du cercle de l'infini lui permet de synthétiser de manière éclatante la théorie des surfaces du second degré homofocales : "*ces quatre théorèmes généraux offrent un exemple bien remarquable de l'enchaînement qui existe entre toutes les parties d'une théorie, et de la possibilité souvent de les ramener toutes à un principe unique et très simple*" ([**Chasles 1860b**, 1060]).

Dans la suite de son travail, Chasles détaille les quatre grands théorèmes sur lesquels repose désormais sa théorie des quadriques homofocales. Il énonce pour finir comme cas particuliers certaines conséquences de ces énoncés généraux, retrouvant notamment les propriétés relatives aux cônes de révolution circonscrits aux quadriques et à la considération des sphères de rayon infiniment petit ([**Chasles 1860b**, 1110-1111]). Il est remarquable de noter que le géomètre français pressent que sa définition des surfaces homofocales du second degré peut être étendue aux surfaces d'un ordre quelconque, puisque la "*proposition fondamentale*" sur laquelle est érigée la théorie peut en effet concerner des surfaces d'un ordre arbitraire. Néanmoins, tant par le titre de sa communication ("*Résumé d'une théorie des surfaces du second ordre homofocales*") que par les exemples et les cas particuliers des propriétés qu'il choisit de traiter, le géomètre se garde bien d'effectuer ce pas de généralisation à un ordre quelconque.

L'entrave à cette généralisation réside dans le fait surprenant que Chasles propose dans son travail, grâce à l'apport de l'outil projectif *'cercle imaginaire à l'infini C_i'* une théorie nouvelle des surfaces - du second ordre - homofocales, sans pour autant proposer à proprement parler une théorie nouvelle adaptée des focales. S'il définit ainsi le caractère homofocal par l'inscription dans une même développable circonscrite à C_i, Chasles ne propose pas de nouvelle caractérisation des focales. Il se contente d'observer que ses coniques excentriques sont alors les lignes de striction réelles de ladite développable.

Des remarques similaires sont à souligner dans l'ouvrage de Salmon qui paraîtra deux ans plus tard [**Salmon 1862**]. Nous avons souligné que le mathématicien irlandais adoptait, dans son exposition des focales des surfaces du second degré, la conception du foyer comme sphère de rayon nul doublement tangente à la quadrique. Néanmoins, lorsqu'il étudie plus loin la famille de quadriques homofocales :

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda^2}=1$$

Salmon ajoute :

> Puisque le cône circonscrit mené depuis tout point d'une conique focale est de révolution, ce qui signifie qu'il a un double contact avec le cercle imaginaire à l'infini, il s'ensuit que par tout point d'une conique focale on peut mener deux plans imaginaires qui seront tangents à toutes les surfaces homofocales, et l'on voit ainsi géométriquement l'existence de cette

> développable dont les plans tangents touchent toutes les surfaces homofocales. De plus nous pouvons voir qu'il s'agit de la même développable générée par les plans tangents aux surfaces passant par les tangentes au cercle imaginaire de l'infini. [...] Le cercle imaginaire de l'infini et les coniques focales sont tous des lignes doubles de cette [développable]. [129]
>
> [**Salmon 1862**, 157]

La conception de Salmon des focales des quadriques est ainsi remarquablement exhaustive : elles peuvent être définies comme des sphères de rayon nul doublement tangentes ou comme lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits. Des quadriques homofocales sont, pour lui comme pour Chasles, toutes inscrites dans une même développable constituée grâce aux plans tangents aux surfaces et au cercle de l'infini. Ce-dernier est ainsi, par conséquent, inscrit lui-même dans cette développable. Les coniques focales des quadriques sont en outre, avec le cercle de l'infini, les lignes doubles de cette développable. Pour autant, tout comme pour Chasles, l'exposition de Salmon se cantonne aux surfaces du second degré et surtout ne redéfinit pas les focales elles-mêmes à partir de la notion de développable circonscrite au cercle de l'infini : celle-ci reste l'outil caractérisant le caractère *homofocal* des surfaces.

5.2. 1864-1873 : Darboux et la définition générale des focales des surfaces quelconques.

Durant le Printemps 1864, Gaston Darboux - qui n'est encore qu'élève de 3ème année de l'Ecole Normale Supérieure et prépare le concours de l'agrégation - effectue des recherches personnelles centrées sur un nouveau système de surfaces orthogonales que nous aurons l'occasion d'analyser en profondeur plus loin (voir [Chap.3,1]). S'il s'inspire des travaux de Chasles relatifs aux coniques focales des surfaces du second degré, c'est surtout en collaboration avec Joseph-Alfred Serret que Darboux travaille alors. C'est en effet à Serret que le jeune étudiant transmet les résultats écrits de ses premières recherches, et en Juin 1864 il lui transmettra son tout premier mémoire. Après avoir fait l'objet d'une communication à l'Académie par Serret lui-même le 1er Août 1864 ([**Darboux 1864c**]), ce mémoire sera publié en Janvier 1865 dans le second volume des "*Annales Scientifiques de l'Ecole Normale*" de Pasteur ([**Darboux 1865**]).

129. "*Since the tangent cone from any point on a focal conic is one of revolution ; that is to say, one which has double contact with the imaginary circle at infinity, it follows that through any point on a focal conic can be drawn two imaginary planes which will touch every confocal surface, and we thus see geomtrically the existence of this developpable, the tangent planes to which touch all the confocals. And we can also see that it is the same as the developpable generated by the tangent planes to the surface which pass through the tangents to the imaginary circle at infinity. [...] The imaginary circle at infinity and the focal conics are all double lines on this surface*" [**Salmon 1862**, 157].

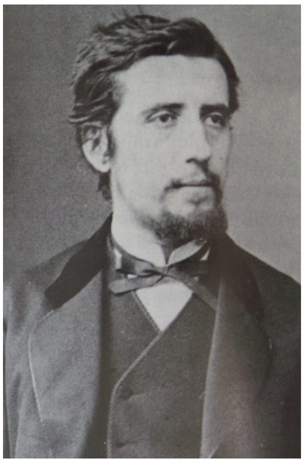


FIGURE 21. Gaston Darboux

Les surfaces étudiées par Darboux ne sont plus du second ordre mais du quatrième, aussi l'étude de leurs propriétés focales ne peut-elle pas reposer sur les définitions données jusqu'alors qui ne concernent que les quadriques. Darboux envisage par ailleurs d'étendre aux surfaces le théorème de Kummer montrant le caractère homofocal des systèmes doubles de courbes orthogonales planes (voir 3.1). Comme le jeune nîmois le fait remarquer dans l'introduction de son mémoire, il lui est donc "*nécessaire d'adopter pour cela une définition des focales et des foyers d'une surface qui est l'extension naturelle de la définition des foyers dans les courbes*" ([**Darboux 1865**, 55]). Il rappelle la définition des foyers données par Plücker en l'exprimant avec son vocabulaire : les foyers des courbes sont aux intersections des tangentes à la courbe "*parallèles aux asymptotes du cercle*", ce que nous avons appelé isotropes. D'après cela, la généralisation de la notion de focale se fait naturellement en considérant les "*asymptotes de la sphère*" :

> De même, dans l'espace, on mènera les plans tangents parallèles à ceux du cône asymptote de la sphère. On formera ainsi une surface développable circonscrite à la proposée ; sur chacune des génératrices de cette surface, il y aura un point réel. Le lieu de ces points se composera d'une ou de plusieurs courbes. Ces courbes seront appelées *focales* de la surface. Ce sont elles qui répondent aux foyers des courbes planes. Ce sont des lignes doubles de la surface développable. En effet, par chacun de leurs points réels il passe deux génératrices imaginaires conjuguées. On peut appeler foyer de la surface tout point des focales, et alors un foyer pourra être défini [comme] un point-sphère ayant un double contact avec la surface.
>
> [**Darboux 1865**, 58]

Les plans "*parallèles à ceux du cône asymptote de la sphère*" sont ce que Plücker appelait les plans "*imaginaires*" et que Chasles et Salmon utilisaient pour définir les surfaces homofocales du second ordre : ce sont les plans isotropes. D'un point de vue analytique, ce que Darboux énonce sous une forme particulière au début de son mémoire [130], ces plans

130. Darboux considère que les plans et généralement les surfaces s'expriment de manière résolue en la variable z, c'est à dire s'expriment comme $z + f(x, y) = 0$. Aussi ses énoncés diffèrent-ils légèrement, dans la forme de leur présentation, de ceux que nous exposons.

sont ceux dont l'équation cartésienne $Ax+By+Cz = D$ satisfait en outre la relation d'isotropie $A^2 + B^2 + C^2 = 0$. Les surfaces développables circonscrites à une surface et dont les plans tangents sont "*parallèles à ceux du cône asymptote de la sphère*" sont ainsi les développables déjà envisagées par Chasles qui sont circonscrites au cercle de l'infini, cercle que Darboux notera simplement (C). Les génératrices de ces développables, soit les lignes le long desquelles elles épousent leurs plans tangents, sont précisément les droites isotropes, c'est-à-dire les droites qui rencontrent le cercle (C). Les focales d'une surface quelconque S sont alors entièrement définies par Darboux comme les lignes doubles de la développable $\boxed{SC}$ circonscrite à S et au cercle de l'infini. Le jeune géomètre remarque en particulier que la propriété relative aux tangentes des focales, remarquée notamment par Plücker pour les surfaces du second ordre, trouve ainsi son extension naturelle : "*par chaque tangente de la focale on peut mener deux plans tangents communs à la surface et au cercle de l'infini*" ([**Darboux 1873a**, 9]). Ce sont bien les deux plans isotropes dont Plücker avait remarqué qu'ils formaient, avec tout couple de plans orthogonaux - passant par la même tangente -, un système de quatre plans harmoniques (voir 4.6). Enfin, il ajoutera dans un mémoire ultérieur publié en 1873 et qui rassemblera alors ses travaux de géométrie :

> Enfin, la définition des focales étant tangentielle (c'est-à-dire n'employant que les plans tangents), les focales d'une courbe quelconque se déterminent comme celles des surfaces [...] On voit que les différentes lignes doubles d'une développable [circonscrite au cercle de l'infini] sont les focales les unes des autres.
>
> [**Darboux 1873a**, 19]

En particulier, les coniques excentriques de Chasles sont focales les unes des autres, et sont homofocales aux surfaces du second degré desquelles elles sont déduites. Pour le cas du second degré, Chasles avait déjà énoncé différemment cette propriété en soulignant que les coniques excentriques pouvaient être "*considérées comme des surfaces infiniment aplaties*" ([**Chasles 1837a**, 397]).

On peut noter que la définition des focales des surfaces donnée par Darboux est, après les deux mémoires de 1860 de Chasles sur les courbes et surfaces homofocales, une définition qui paraît naturelle. S'il revient à Darboux le mérite d'avoir bien compris et énoncé cette définition des focales dans toute sa généralité, il semble en revanche que cette notion ait de fait été utilisée par les géomètres français depuis la redéfinition des surfaces homofocales de Chasles en 1860. Aussi Darboux remarque-t-il en marge que "*les définitions précédentes ne sont sans doute pas nouvelles ; cependant, comme je ne les ai vues nulle part, j'ai cru devoir les donner avec quelque développement*" ([**Darboux 1865**, 59]). Ceci est également confirmé par une note de 1864 du géomètre français Théodore Moutard. Étudiant la même famille de surfaces du quatrième ordre que Darboux, il met en évidence leurs "*lignes focales*" comme les courbes "*faisant partie du lieu des centres des sphères de rayon nul, doublement tangentes à la surface, ou, ce qui revient au même, comme une ligne double de la développable circonscrite à la surface et au cercle de l'infini*" ([**Moutard 1864b**, 243]).

On voit que l'apport de Darboux quant à la définition des focales des surfaces doit être relativisé : en 1864-65, le jeune élève normalien ne fait qu'expliciter une définition qui semble alors être devenue communément acceptée. On peut néanmoins souligner une différence fondamentale séparant les travaux de Chasles de ceux de son jeune disciple concernant la place des imaginaires en Géométrie. Il est vrai que Chasles introduit les imaginaires dans ses travaux de Géométrie, en particulier dans son Traité [**Chasles 1852**]. Cependant, les quantités imaginaires qui interviennent doivent pour Chasles toujours pouvoir être interprétées par des quantités réelles : ceci est fait "*en associant à chacun d[e ces éléments imaginaires] l'élément imaginaire conjugué et définissant ensuite l'ensemble de ces deux éléments par des fonctions symétriques, nécessairement réelles*" ([**Darboux 1917**, 2]). C'est également ce que Philippe Nabonnand a exprimé en remarquant que pour Chasles "*les objets imaginaires n'interviennent pas explicitement dans les démonstrations mais toujours par le biais d'éléments toujours réels*" ([**Nabonnand 2006**, 165]). Cette méthode d'appréhension des imaginaires peut dans une certaine mesure constituer une entrave pour Chasles : devant être assis sur des interprétations réelles, ils ne constituent ni un outil ni un objet d'étude à part entière. Cela peut expliquer dans une certaine mesure pourquoi le polytechnicien ne redéfinit pas les focales à l'aide des développables circonscrites au cercle de l'infini, ces surfaces étant (presque) entièrement imaginaires. Il préférera à la place faire figurer au centre de son étude les surfaces homofocales, qui sont quant à elles bien réelles, et ceci même si la propriété principale s'y rattachant doit faire intervenir une surface circonscrite imaginaire.

Bien que largement influencé par les travaux de Chasles, Darboux ne considère pas comme son aîné l'introduction des imaginaires en Géométrie comme devant reposer sur des interprétations réelles. Au contraire, l'étude des objets imaginaires est au centre des travaux de Darboux. Ceux-ci sont alors dénués de toute tentative de représentation réelle ou de rattachement à des propriétés réelles. Il annonce ainsi dans le mémoire écrit en 1869 - mais qui ne paraîtra qu'en 1873 - synthétisant l'ensemble des travaux inspirés par son travail de thèse :

> Quelques propriétés relatives aux imaginaires se présentaient naturellement dans l'étude que j'avais entreprise ; il m'a paru qu'il y aurait avantage à les développer avec la généralité qu'elles comportent.
>
> [**Darboux 1873a**, x]

C'est ainsi que Darboux consacre toute la première partie de cet important mémoire à l'étude des propriétés du cercle imaginaire de l'infini, des droites (isotropes) qui le rencontrent et des surfaces développables formées de ces droites qui servent à définir les focales. Darboux a ainsi fixé la définition générale de la notion de *focale* étendue aux surfaces d'un ordre quelconque. Mais sa contribution majeure réside dans l'analyse fort complète des caractères spécifiques de cette notion et des qualités propres aux outils de géométrie imaginaire s'y rattachant. Nous étudierons une grande partie de ces propriétés générales dans la dernière section de ce chapitre (7), puis nous aurons l'occasion plus loin (dans le chapitre [Chap.3]) d'analyser leurs applications au système de surfaces orthogonales découvert, quasi-simultanément [131], par Darboux et Moutard. Aussi, en guise de préliminaire à la section ci-dessous consacrée au vocabulaire des objets mathématiques (section 6), nous nous contenterons ici de remarquer que Darboux propose d'entériner la terminologie des notions liées aux focales des surfaces. Après Chasles, Darboux nomme le cercle situé à l'infini commun à toutes les sphères de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ le *cercle de l'infini*. Il est tout de même remarquable que l'épithète *imaginaire* ait disparu : pour Darboux, la distinction entre éléments réels et éléments imaginaires de la Géométrie n'a pas (ou n'a plus) lieu d'être. Les surfaces développables formées de génératrices tangentes à ce cercle sont appelées par le géomètre

131. Les deux communications se rapportant au système des *cyclides* orthogonales dont il s'agit ont été toutes deux faites dans la séance du 1er Août 1864 [**Darboux 1864c**] et [**Moutard 1864b**].

nîmois des *développables focales*. A une surface inscrite dans une développable focale on associera les lignes doubles de cette-dernière "qu'on appellera *les focales de la surface*" ([Darboux 1873a, 9]). Nous allons voir que des termes employés par Darboux, seul le terme *focale* - déjà unanimement adopté en 1860 hormis Chasles - perdurera. Les autres appellations changeront sous l'influence d'un autre géomètre français faisant également la part belle aux imaginaires dans la Géométrie : Edmond Nicolas Laguerre.

6. Significations multiples des termes 'focale' et 'foyer', variations des appellations : une difficulté pour les acteurs et les historiens

Retracer l'évolution de la notion de *foyer* et de *focale* pour pouvoir ensuite mettre en avant le travail de Darboux s'y rapportant est une étape nécessaire pour l'historien à plusieurs titres : elle est tout d'abord requise pour bien maîtriser les aspects mathématiques de cette question. Cela a d'autant plus de poids ici que la notion de *focale* des surfaces, extension des *foyers* des courbes, a de nos jours presque totalement disparu des domaines de recherche et d'enseignement de la géométrie, excepté peut-être pour les quadriques. De ce point de vue, le suivi de cette évolution est particulièrement enrichissant de par la manière dont les outils et les méthodes projectives et analytiques y sont greffées progressivement pour enrichir et développer la conception de cette notion. Elle met en évidence l'apport incontournable des imaginaires, d'abord dans l'étude des rapports des figures planes entre elles chez Poncelet, puis dans le traitement analytique plan et spatial des relations de tangences chez Plücker, enfin dans la généralisation dans l'espace des objets de la géométrie classique et projective comme les enveloppes et le cercle à l'infini chez Chasles et encore plus fortement chez Darboux. Parcourir le cheminement de cette notion permet en outre tantôt de distinguer les singularités des apports qui lui sont procurés, tantôt de souligner les buts et les méthodes communs aux différents acteurs de cette petite épopée géométrique. Ayant comme toile de fond l'évolution globale de la notion, il est alors à la fois plus aisé et plus pertinent d'y mettre en relief ce qui caractérise l'approche de Darboux qui nous intéresse bien sûr plus particulièrement. Ensuite, cette histoire de l'extension de la notion de foyer était d'une certaine manière rendue nécessaire par le manque de contenu historiographique s'y rapportant. Elle aurait en effet été écourtée, comme c'est le cas pour d'autres sections de notre travail, par la possibilité de se référer à des travaux historiques préexistants. Enfin, un trait bien singulier de cette histoire de *focales* réside dans la compréhension précise du vocabulaire employé par les acteurs et utilisé pour décrire les outils et les objets mathématiques. Jusqu'à présent, nous avons tenté - sans nécessairement y être parvenu - de masquer cette profonde difficulté : nous allons ici au contraire la développer.

Le point le plus évident relatif au vocabulaire est l'intervention au sein de l'évolution de la notion de mathématiciens de plusieurs nations : France, Irlande, Prusse et Grande-Bretagne[132]. Se pose ainsi le problème de la compréhension et de la traduction des termes usités par des acteurs ne parlant et n'écrivant pas tous dans la même langue. Mais ce

132. Les évolutions significatives de la notion de focale que nous avons tenté de retracer ne font pas intervenir de géomètres italiens. On ne trouve ainsi pas de référence pointant vers le travail des mathématiciens transalpins. Néanmoins il se pourrait qu'une étude plus approfondie des publications italiennes fasse émerger des contributions qui nous auraient échappées. Nous retrouverons par ailleurs la trace de

problème n'est nullement spécifique à notre étude. En revanche, nous avons pu constater le flou qui règne autour de l'emploi de l'adjectif *focal* avant que celui-ci ne se banalise dans les années 1840. Pour comprendre cela, nous allons ainsi nous pencher pour commencer (en 6.1) sur le sens du mot "*focal*" depuis la dissertation de Quételet (1819) jusqu'aux traités de Plücker et de Salmon (1846-1862). Le problème que nous aborderons ensuite est lié à la polysémie de l'épithète "*focal*" dans plusieurs langues, y compris le français. Nous avons en effet mentionné que la notion de focales des surfaces telle que nous l'avons analysée avait été jusqu'à présent progressivement écartée des recherches mathématiques. Pourtant, une recherche rapide permet de se rendre compte que les termes "focales des surfaces" (ou "*focals of a surface*") se rapportent de nos jours pour les mathématiciens à un autre domaine de la géométrie - encore bien connu actuellement - qui n'a à première vue pas de lien direct avec la notion sur laquelle nous nous sommes concentrés. Nous discuterons ainsi cette polysémie en 6.2, mettant en évidence la séparation de ces deux domaines de géométrie et l'origine scientifique de leur racine sémantique commune. Enfin nous verrons, comme un épilogue à notre développement de la notion originelle de foyer des coniques, la fixation de la terminologie des objets qui y ont trait, en soulignant en particulier le rôle de Darboux (6.3).

Ces problèmes généraux de vocabulaire pour désigner des objets ou des notions, dont nous n'abordons ci-dessous que des cas particuliers, ne sont pas spécifiques aux mathématiques. Si Henri Poincaré a évoqué "*l'importance des mots en mathématiques*", ses discussions sont restées cantonnées à la force synthétique du langage, et donc bien éloignées de la problématique du vague et de l'indéfini ([**Poincaré 1905**, 29])[133]. En revanche le philosophe Chaïm Perelman, voulant appuyer la place de la réthorique dans la science, a plus tard soulevé la question : "*peut-on dire que le langage scientifique soit réellement exempté de toute ambiguïté ?*" ([**Perelman 1992**, 175]). Dans sa réponse - négative - il définit l'ambiguïté par opposition à l'univoque, une notion étant qualifiée d'univoque "*si son champ d'application est entièrement déterminé*". Le *vague* de la science provient ainsi selon le philosophe du caractère dynamique de celle-ci qui la rend imprévisible. Cette lecture ne convient donc pas à notre étude car la dimension d'évolution temporelle n'y apparaît pas comme cruciale : ce n'est en effet pas l'écoulement du temps qui y provoque la naissance de l'ambiguïté. L'historien Robert Locqueneux a par ailleurs évoqué une question connexe : la "*diversité des sens [que les mots] peuvent prendre à une même époque*" ([**Locqueneux 2013**, 196]). Mais cette évocation, pourtant pertinente au premier abord, n'est faite que dans le cadre de la discussion du danger que représentent les anachronismes pour les historiens, et ne trouve pas de développement complémentaire adapté à notre cas.

Pour trouver une discussion appropriée à notre problématique du vocabulaire et du lexique scientifique, nous nous penchons donc sur le domaine de la linguistique pure. Dans ce contexte, les problématiques liées à la polysémie et à l'ambiguïté ont bien été abordées, et ont notamment été développées dans l'ouvrage de Manfred Pinkal [**Pinkal 1995**]. S'il n'est donc pas dédié au vocabulaire scientifique, ce travail de sémantique formelle permet néanmoins de bien appréhender la place du vague et de l'indéfini dans le langage. L'auteur étaye cette question et en explique la présence naturelle. Surtout, il en donne une grille

la notion projective de focale des surfaces dans des écrits des italiens Gino Loria, Guido Castelnuovo et Federigo Enriques qui rendront possible notre analyse polysémique de la partie 6.2.

133. Poincaré cite notamment le physicien autrichien Ernst Mach qui affirmait : "*on ne saurait croire combien un mot bien choisi peut économiser de pensée*", [**Poincaré 1905**, 29].

de lecture grâce à sa théorie logique des strates de précision [134]. Lorsque l'ensemble des sens possibles d'une expression - que Pinkal nomme le *spectre d'interprétation* - n'est pas réduit à un seul élément, la *precisification* proposée par le linguiste permet de structurer les relations entre l'ensemble des sens possibles et l'ensemble des contextes possibles. La levée de l'ambiguïté de l'expression est effectuée progressivement en introduisant graduellement des propositions auxquelles on apporte une réponse définitive parmi les trois possibles : Vrai, Faux ou Indéfini. Ce schéma de *precisification* ("*precisification pattern*") réduit méthodiquement le spectre des interprétations possibles jusqu'à atteindre la levée de l'ambiguïté, ce que Pinkal nomme "*l'évalution définitive*" ([**Pinkal 1995**, 46-48]). En particulier, ce sont les caractères discret ou continu du spectre d'interprétation qui distingue dans la théorie de Pinkal la notion de vague de celle d'ambiguë, distinction qu'on ne retrouvait pas chez Perelman [135]. C'est à la lumière de cette logique linguistique que nous aborderons ci-dessous notre problématique de polysémie.

6.1. Sens du mot "focal" en lien avec les foyers des coniques et les cônes.

Nous avons vu précédemment que l'adjectif "focal" apparaît dans les années 1820 dans les travaux de Michel Chasles et de Ludwig Magnus lorsque la notion de foyer des coniques est étendue dans l'espace aux cônes du second degré. C'est Magnus qui, dans le mémoire de 1825 qu'il écrit en français, donne cette appellation à deux lignes inscrites dans le cône. Cette dénomination est justifiée par Magnus "*à raison des propriétés qu['il] démontre leur appartenir*" ([**Magnus 1825**, 36]), et qui sont des propriétés angulaires en lien avec les arêtes du cône, analogues à celles relatives aux cordes menées aux foyers chez les coniques. Aussi dans ses travaux de 1829-1830, Chasles qui reprend les considérations analytiques de Magnus en leur donnant de nouveaux fondements géométriques réutilise logiquement le nom de "*lignes focales*" pour les cônes.

Pourtant en 1837 dans son "*Aperçu historique*", alors même qu'il généralise aux surfaces du second degré la notion de lignes focales des cônes, Chasles se refuse à employer l'adjectif "focal" pour décrire les coniques jouant, pour la structure projective d'une quadrique, le rôle des foyers pour celle d'une conique. L'origine de cette retenue provient de l'utilisation déjà faite par Quételet en 1819 dans son doctorat du terme "focale" - en tant que nom féminin - pour décrire un autre objet mathématique. Avant l'apparition des lignes focales, Quételet avait donc décidé d'appeler "*courbe focale*" une courbe liée à un cône du second degré et un quelconque de ses points. Bien sûr, cette courbe est très liée à la notion de foyer puisqu'elle regroupe les foyers de sections bien particulières du cône. Mais ce qui importera une quinzaine d'années plus tard est que ce qu'on appelle désormais *la focale de Quételet* ne correspond pas à ce que Magnus puis Chasles ont appelé les lignes focales des cônes. Pour ces lignes, Chasles n'a pas choisi cette dénomination : il l'a reprise après Magnus. Mais pour les surfaces du second degré il doit opérer un choix : les trois courbes jouant le rôle

134. La théorie de Manfred Pinkal est appelée "*Pinkal's Precisification Logic*". Le terme même de "*precisification*" nous paraît difficile à traduire en français : il désigne *un processus rendant toujours plus précis*, et ne doit ainsi pas être confondu avec le simple nom de *précision*. C'est pour cela que nous continuerons à employer le terme anglais sans le déguiser en français.

135. Nous tenons à remercier Anouk Barberousse pour son aide précieuse relative à la problématique du vocabulaire scientifique que nous avons rencontrée et pour avoir pris le temps de nous faire connaître le beau travail de Manfred Pinkal.

des foyers pour les quadriques peuvent être selon lui appelées "*les coniques excentriques, ou les coniques focales de la surface*". Néanmoins dans la suite il opte à contrecœur pour le terme "*conique excentrique*" et motive sa résolution :

> J'emploierai la première de ces deux expressions [conique excentrique], quoique j'eusse préféré la seconde [conique focale], à cause de sa plus parfaite analogie avec les foyers des coniques et les lignes focales des cônes. Mais le nom de focale ayant été donné par M. Quételet à une courbe du troisième degré [...] je ne puis me servir ici de ce mot pour désigner d'autres lignes courbes.
>
> [**Chasles 1837a**, 386]

Néanmoins, dans la suite de cette remarque Chasles propose de renommer autrement les focales de Quételet pour laisser libre cours à la dénomination de "coniques focales" pour les surfaces du second degré. La courbe mise en évidence par Quételet ne changera pas de nom, en dépit de l'appel du géomètre français. Pourtant l'appellation de "coniques focales" va s'imposer en français pour deux raisons principales : la concurrence faite par le normand Amiot aux travaux de Chasles, et la cohérence avec les terminologies allemandes et anglaises.

Nous avons vu en 4.6 qu'en 1843, Benjamin Amiot avait présenté un mémoire devant l'Académie de Paris comportant une approche nouvelle des foyers des surfaces du second degré ([**Amiot 1843b**]). Dans ce travail, et probablement pour en souligner la différence d'approche avec la note de Chasles de 1837 qui avait introduit les "coniques excentriques", Amiot baptise les courbes lieu des foyers des quadriques dans les plans principaux les "*focales*". Il s'attribue dans les "*Comptes-rendus*" la fixation de cette appellation, parlant ainsi des "*courbes auxquelles j'ai donné le nom de focales*" ([**Amiot 1843a**, 939]). A cette époque, Chasles hésite toujours entre les deux appellations et mentionne presque systématiquement les deux noms : "*je les ai appelées focales ou coniques excentriques des surfaces du second degré*" ([**Chasles 1843**, 833]). Poncelet lui-même, dans ses commentaires relatifs au débat qui prend forme entre Chasles et Amiot, parle pareillement des "*focales ou coniques excentriques*" [136]. Le second mémoire d'Amiot en 1845 renforce l'usage de la terminologie de "focales" par son titre même : "*Mémoire sur diverses propriétés des surfaces du deuxième ordre déduites de la théorie des focales*" ([**Amiot 1845**]).

On peut par ailleurs remarquer que l'adjectif employé, y compris par Chasles, pour désigner des courbes ou des surfaces ayant les mêmes foyers est toujours "*homofocales*". L'emploi même de ce terme pointe ainsi naturellement vers l'adoption de la terminologie de "focale" plutôt que de celle d'"excentrique". Chasles persistera pourtant dans son double usage : en 1860, il parle encore "*[d]es coniques focales, ou excentriques des surfaces*" du second degré ([**Chasles 1860b**, 1059]). Mais il est alors le seul à conserver cette double dénomination, et l'extension donnée par Darboux et Moutard aux surfaces quelconques en 1864 sonnera le glas de la "conique excentrique". Remarquons que de nos jours, la terminologie de "*coniques de Chasles*" existe bel et bien ; mais elle ne fait pas référence

136. Voir la réaction de Poncelet dans les "*Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*", dans la séance du 22 Mai 1843, pp.1109-1112.

aux courbes focales : elle désigne d'après un résultat de 1864 obtenu par Chasles les 3264 coniques tangentes à 5 coniques planes données [137].

L'adoption par les mathématiciens français de l'adjectif "focal" pour étendre la notion de foyer des coniques peut légitimement être rapprochée de l'emploi unanime de cet adjectif dans les mathématiques irlandaises et allemandes. Plücker parle en effet bien en 1846 des trois "*Focal-Curven*" (courbes focales) des quadriques, en accord avec les deux "*Focal-Linien*" (lignes focales) des cônes. Les points qui composent ces lignes et courbes focales, que les mathématiciens français appellent "foyers", sont par ailleurs des "*Brennpuncte*" (foyers) : la terminologie pour les points reste dans toutes les langues la même dans l'espace que celle préexistante dans le plan. Il en va en effet ainsi également pour l'anglais : MacCullagh et Salmon parlent ainsi des "*focal curves*" (courbes focales) ou plus simplement des "*focals*" (focales) des surfaces, mais les points de ces courbes restent des "*foci*" (foyers). On voit donc que le terme de "focal" en français était, en considérant son utilisation naturelle et immédiate en anglais et en allemand, favorisé dans une large mesure face à celui de "excentrique" d'abord utilisé par Chasles. D'ailleurs, il semble qu'à la lecture de l'"*Aperçu*" de ce-dernier, les mathématiciens étrangers n'aient pas même relevé la présence du terme "excentrique". Aussi en 1847, Plücker écrira à propos des trois coniques rassemblant les foyers des surfaces du second degré cette remarque un peu surprenante : "*M. Chasles a donné le nom très propre de focales à ces courbes*" ([**Plücker 1847**, 100]).

6.2. Polysémie de l'épithète "focal" et du nom "foyer" dans les langues française, anglaise et allemande.

Une grande difficulté liée à l'établissement d'une historiographie de la notion de *focales* des surfaces provient de la dualité du sens qu'on peut attribuer à l'adjectif "focal", ainsi qu'au nom de "foyer", pour les objets mathématiques. Ceci peut en effet à la fois troubler la compréhension pour l'historien des travaux mathématiques effectués par les auteurs, mais peut même parfois mener à des contresens dans l'interprétation des énoncés et des propriétés. Elle rend par ailleurs extrêmement délicat voire impossible l'établissement systématique d'un corpus d'ouvrages et de mémoires lié à cette thématique sans parvenir pour chacun des travaux à une compréhension globale permettant d'attribuer tel ou tel sens à la notion de "focale". Enfin, ce problème de polysémie est d'autant plus important qu'il concerne à la fois les termes de "foyers" et de "focales", et qu'il n'est pas singulier à la langue française mais est encore présent en anglais, en allemand, ou encore en italien.

Caroline Ehrhardt a étudié un problème qui se rapproche de notre étude en développant l'évolution de la signification du mot de "*groupe*" dans les mathématiques du XIXème siècle ([**Ehrhardt 2011a**] [138]). Dans son travail, l'historienne constate les significatives différences entre les approches de Galois, Cayley et Dedekind de la notion de *groupe*. Cependant dans cette enquête si les mathématiques qui se cachent derrière cette appellation évoluent bien avec le temps et les acteurs, à aucun moment le nom de *groupe* ne revêt, pour un même acteur, deux significations bien distinctes : il n'y a pas *d'ambiguïté* - selon la grille de lecture de Pinkal - pour deux raisons, la première tenant à la dynamique de la sémantique dans le temps, la seconde à l'appréhension du terme de *groupe* dans les

137. Voir à ce sujet l'article d'Etienne Ghys http://images.math.cnrs.fr/Trois-mille-deux-cent-soixante.html.

138. Voir également l'article [**Ehrhardt 2010a**].

sémantiques de différents langages. C'est ce qui rend ici notre étude singulière, puisque les *foyers* et les *focales* peuvent prendre quant à eux deux sens véritablement différents pour un même mathématicien (même langue) au même moment (même temporalité) : ce n'est ainsi pas à une variation de la sémantique, dans le temps et les langages, mais bien à une véritable *polysémie* que nous avons affaire.

L'origine de la polysémie du nom "foyer", qui permet de comprendre par filiation celle du terme "focal", provient de la dualité des situations envisagées dans le domaine de l'optique géométrique par rapport à une courbe ou une surface. Par définition, un *foyer* est un lieu de convergence de rayons lumineux, et c'est en lien avec la transposition des objets géométriques dans des phénomènes d'optique que cette dénomination s'est naturellement imposée aux mathématiques. Cependant on constate que la définition du foyer ne précise pas le rôle que doit jouer, dans l'expérience d'optique, la courbe ou la surface dont on souhaiterait pouvoir déterminer les foyers. De fait, il existe deux expériences d'optique bien distinctes et tout autant valables l'une que l'autre susceptibles de définir les foyers d'une même courbe (ou d'une même surface) : la première expérience consiste à considérer l'objet géométrique (courbe ou surface) comme un miroir, alors que dans la seconde l'objet géométrique révèle la géométrie de l'incidence des rayons lumineux, c'est le lieu d'un front d'onde. Les deux définitions des foyers qui en découlent sont alors bien différentes.

Détaillons d'abord le premier cas, et prenons pour commencer une conique $\mathcal{C}$ dans un plan. La conique joue, dans notre première expérience, le rôle d'un miroir : la lumière vient se réfléchir dessus. Les foyers sont alors caractérisés par la propriété suivante : si une source de lumière ponctuelle est placée en l'un des foyers, alors après réflexion sur la conique, les rayons viendront se focaliser sur l'autre foyer. Autrement dit, les rayons émanés d'un des foyers de la conique se réunissent après avoir été réfléchis par la conique sur l'autre foyer. Dans le cas de l'ellipse, cette réunion des rayons lumineux sur le second foyer est réelle : le foyer est dit réel (voir ci-dessous la figure 22). Dans le cas de l'hyperbole, les rayons réfléchis ne le sont que *dans la direction* du second foyer : la réunion des rayons en le second foyer est dite virtuelle.

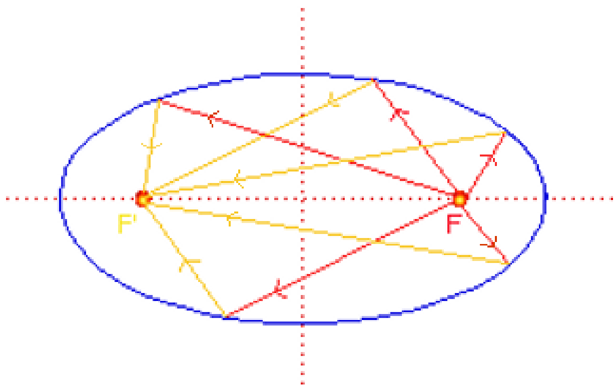


FIGURE 22. Issus d'un foyer F de l'ellipse (rayons rouges), les rayons se focalisent après réflexion (rayons jaunes) sur le second foyer F'

En 1847, quelques mois après avoir publié sa "*géométrie de l'espace*", Julius Plücker publie un court mémoire en français montrant que cette expérience d'optique géométrique plane trouve une extension naturelle dans l'espace pour les surfaces du second degré avec les coniques focales.

> Tous les rayons qui, en partant de points de l'une des deux focales réelles d'une surface quelconque du second degré, vont couper [rencontrer] cette surface, sont réfléchis par elle de manière qu'ils se réunissent de nouveau sur la même focale, ou bien qu'ils se propagent comme émanés directement de cette courbe.
>
> [**Plücker 1847**, 100]

On voit ici que Plücker effectue la distinction entre les foyers réels et virtuels dans son énoncé. Aussi, si l'on considère désormais une quadrique comme un miroir, les rayons lumineux issus d'un point d'une de ses coniques focales viendront se focaliser après réflexion sur la même conique focale (de manière réelle ou virtuelle). Si la source devient non plus ponctuelle mais la focale elle-même, c'est-à-dire si les rayons lumineux sont issus de tous les points de cette courbe, alors "*l'apparition sera la même, mais plus intense*" : la focale entière devient plus lumineuse.

Ces considérations d'optique géométrique justifient ainsi tout à fait la dénomination de "foyer" et de "focale" pour les coniques et les quadriques : ce sont les lieux de focalisation de la lumière dans l'expérience où l'objet mathématique joue le rôle de miroir. Il s'agit bien là de la notion mathématique que nous avons traitée au cours de cette section. Cependant, il existe une seconde manière de considérer l'objet mathématique dans une expérience d'optique géométrique. Celle-ci consiste à regarder la courbe (ou la surface) comme le lieu d'un *front d'onde* : cela signifie que les rayons lumineux se propagent, en tout point de cette courbe (ou de cette surface), exactement perpendiculairement à celle-ci. Dans le cas des surfaces, on appelle celle-ci la *surface d'onde*.

Prenons le cas d'une courbe plane. Dans ce cas, les rayons lumineux enveloppent une seconde courbe : les lieux où deux rayons lumineux infiniment voisins viennent se rencontrer. Il s'agit donc, pour la courbe considérée, de l'enveloppe de toutes ses normales. La figure 23 représente cette situation dans le cas d'une ellipse.

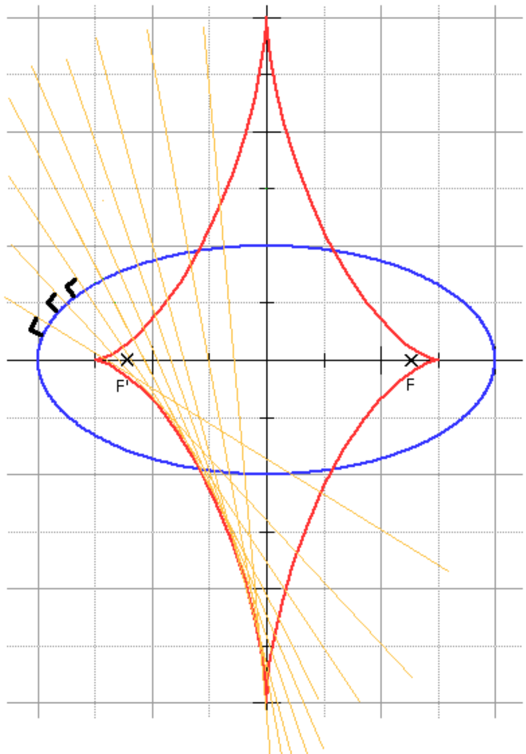


FIGURE 23. Les rayons lumineux (en jaune) sont perpendiculaires à l'ellipse (bleu). Ils enveloppent une seconde courbe (rouge) : la développée de l'ellipse.

Les points de la courbe rouge sont les lieux où, dans cette configuration, les rayons lumineux se focalisent : ils pourraient ainsi légitimement être appelés également des foyers. Néanmoins, le néerlandais Christiaan Huygens donnera au XVIIème siècle à cette courbe le nom de *développée*. La *développée* d'une courbe plane est donc l'enveloppe de ses normales ou en d'autres termes le lieu des centres de courbure de la courbe originelle [139]. Dans notre seconde expérience d'optique, elle est par ailleurs le lieu où les rayons lumineux issus perpendiculairement à la courbe d'origine se focalisent.

La terminologie de *foyer* étant très ancienne, on peut comprendre que Huygens n'ait pas donné ce nom à l'enveloppe des normales. Cependant, il n'en va pas de même dans l'espace où les *focales* ne sont définies, par Chasles, Plücker et Darboux entre autres, que dans le courant du XIXème siècle : la transposition de la notion de développée aux surfaces va ainsi venir emprunter cette terminologie naissante. C'est à Gaspard Monge que l'on doit cette extension de la notion de développée d'Huygens : dans son "*Mémoire sur la théorie des déblais et remblais*" ([**Monge 1781**]) puis dans ses célèbres "*Applications de l'Analyse à la Géométrie*" ([**Monge 1809**]), le mathématicien français montre que l'ensemble des droites normales à une surface donnée (soit nos rayons lumineux dans notre seconde expérience

139. Il s'agit, comme nous l'avons signalé précédemment, de la définition donnée par [**Monge 1781**]. Pour plus de détails sur la théorie des enveloppes, voir [Chap.7,2.2].

d'optique) sont susceptibles d'être assemblées de deux différentes façons de manière à avoir une *enveloppe*[140].

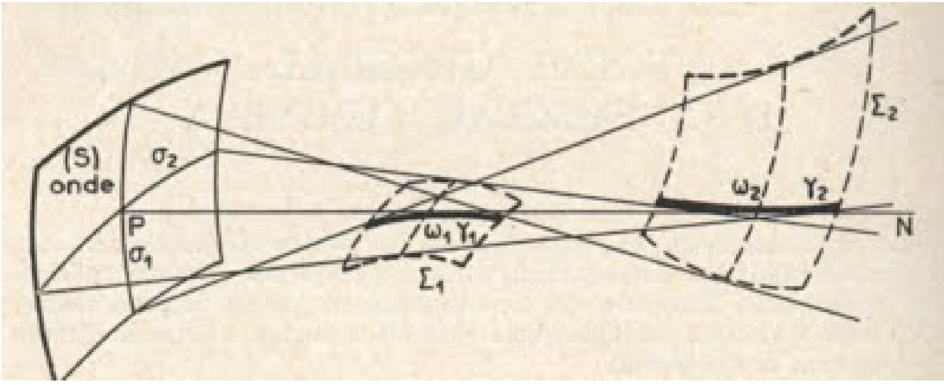


FIGURE 24. Sur la surface (d'onde) S, les deux familles de normales issues de σ_1 et σ_2 possèdent une enveloppe.

Monge montre que, partant d'un point P d'une surface S, il existe deux directions perpendiculaires σ_1 et σ_2 le long desquelles les normales possèdent des enveloppes. Ces deux directions correspondent aux seules normales, "*infiniment proches*" de la normale au point P, et "*qui soi[en]t avec elle dans un même plan*" ([**Monge 1781**, 687]). Il appelle ces assemblages de normales les *développables normales* (de nos jours appelées *normalies*), et les deux séries de lignes orthogonales qu'elles découpent sur la surface S les *lignes de courbure*. Les deux séries de développables normales possèdent ainsi chacune une enveloppe (Σ_1 et Σ_2 sur les figures ci-dessus et ci-dessous), qu'elles épousent le long de leurs arêtes de rebroussement respectives. C'est ce que Monge appelle "*les deux nappes des centres de courbure*" de la surface S ([**Monge 1809**, 133-139]).

Si l'on considère à nouveau la situation d'optique géométrique dont S est un front d'onde, c'est-à-dire que les normales à S sont pensées comme des rayons lumineux, alors ces deux nappes Σ_1 et Σ_2 seront précisément les endroits où les rayons se focaliseront puisque chacune de ces nappes regroupe les lieux où des rayons infiniment voisins se rencontrent[141]. Mais la dénomination choisie par Monge ne transcrit pas cette propriété optique : elle lui préfère la propriété mathématique intrinsèque de courbure de la surface. Les nappes (ou surfaces) des centres de courbure de Monge constituent donc l'extension aux surfaces de la notion de développée des courbes de Huygens.

140. Pour plus de détails sur la vie et les travaux mathématiques de Monge relatifs aux lignes de courbures et aux surfaces des centres de courbure, voir plus loin notre travail sur la théorie des enveloppes [Chap.7,2.2]. Le lecteur curieux et impatient pourra néanmoins consulter les articles [**Ghys 2011**] et [**Ghys 2012**]. Selon Monge, une famille de normales possède une enveloppe si la surface réglée qu'elles constituent est développable, c'est-à-dire construite comme les tangentes à une même courbe que l'on appellera son *arête de rebroussement*.

141. On pourra lire une description de cette situation physique (plus précisément d'optique géométrique) et de son extension pour les hypersurfaces de $\mathbb{R}^n$ dans [**Uribe-Vargas 2005**, 290,297].

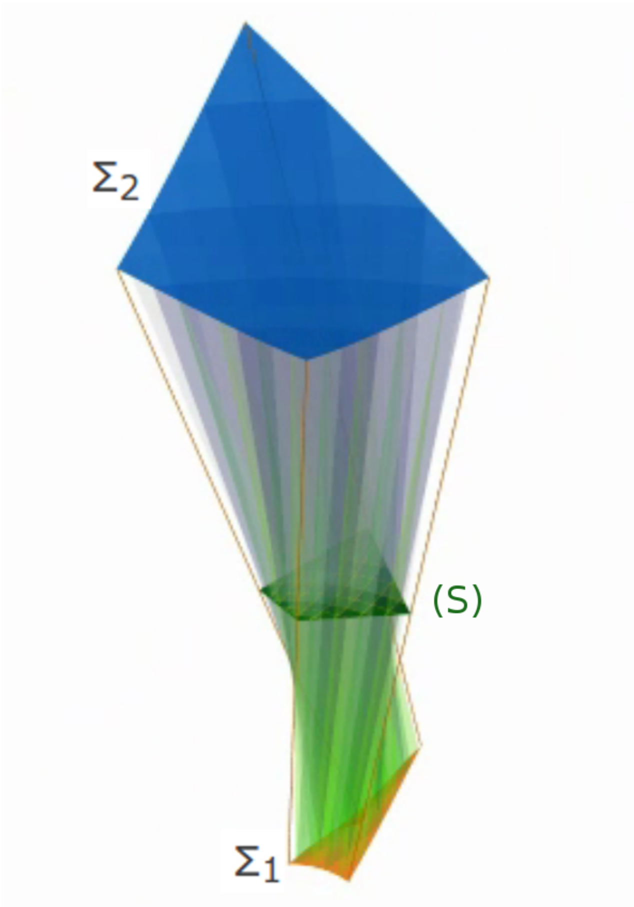


FIGURE 25. Les normales de la surface S enveloppent Σ_1 et Σ_2, les nappes des centres de courbure. Sur S, les normales découpent les lignes de courbure. [142]

Jusqu'ici on peut noter que le champ lexical du *foyer* n'intervient pas lorsqu'on considère l'objet géométrique (courbe ou surface) comme décrivant les normales aux rayons incidents : les choix de terminologie de Huygens et de Monge sont bien distincts des "foyers" et des "focales". Cela va en revanche être modifié lorsque l'attention des mathématiciens va progressivement se déplacer, passant de l'analyse de la surface elle-même pour finalement aboutir à l'étude des normales, indépendamment de la surface d'origine. Les travaux de Monge suggèrent en effet d'étudier les familles de droites à deux paramètres, dont l'ensemble des normales à une surface forme un parfait exemple. Ces familles sont appelées *congruences linéaires* (ou encore *complexes de droites à deux paramètres*). L'étude des

142. Nous remercions Etienne Ghys pour avoir autorisé la diffusion de cette image, empruntée à son travail [**Ghys 2012**].

congruences va être reprise par de nombreux mathématiciens après Monge, et en particulier par Malus, Hamilton, Plücker puis Kummer [143]. Puisque ce n'est plus une surface qui est au centre de l'étude mathématique mais un ensemble de droites de l'espace, le parallèle avec l'optique géométrique est encore plus immédiat : c'est pourquoi le vocabulaire pour étudier ces objets va être choisi sans avoir égard au vocabulaire préexistant pour l'étude des courbes et des surfaces. C'est en particulier William Hamilton [144] qui va contribuer à fixer le vocabulaire spécifique à l'étude des congruences dans son mémoire [**Hamilton 1830**], qui sera repris, traduit en allemand et étendu en 1860 par Kummer ([**Kummer 1860**]). Or les travaux d'Hamilton sont résolument tournés vers l'optique : son mémoire s'appelle en effet "*Systèmes de rayons*" ("*Systems of rays*") et non "systèmes de droites". C'est là que le champ lexical des foyers et des focales va apparaître, en lien avec les congruences, ce qui donnera plusieurs sens aux mots "foyers" et "focales".

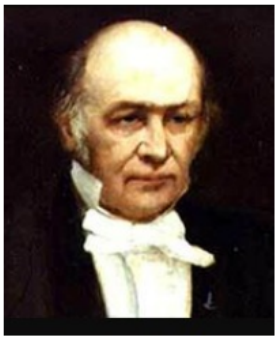


FIGURE 26. William Rowan Hamilton (à gauche) et Gaspard Monge (à droite).

Considérant un rayon lumineux (une droite de la congruence), Hamilton [145] appelle "*virtual foci*" (*foyers virtuels*) les lieux situés sur ce rayon où celui-ci est coupé par des rayons infiniment proches. Le théorème central de l'étude des congruences linéaires est qu'il existe une condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence soit en fait exactement l'ensemble des normales à une certaine surface ; on appelle alors une telle congruence une *congruence normale* [146]. Cette condition peut s'exprimer en disant que les rayons de cette

143. Sur les congruences linéaires au début du XIXème siècle, voir [**Kolmogorov Yushkevich 1996**, 25-28] et [**Rowe 1989**, 216-217]. Ces travaux ne mentionnent pas la polysémie du vocabulaire sur laquelle nous nous concentrons ici.

144. Né en 1805 à Dublin où il passera l'intégralité de sa vie, William Rowan Hamilton étudie au Trinity College de Dublin à partir de 1823. Doué en mathématiques et en optique, il devient professeur d'astronomie dans ce même College avant même d'y avoir entièrement terminé ses études. Il résidera alors dans l'Observatoire de Dunsink, au Nord-Ouest de Dublin. Lützen écrit d'Hamilton qu'il est "*le plus grand des mathématiciens de Dublin*" ([**Lützen 1990**, 134]) et que Joseph Liouville l'admirait tellement qu'il lui faisait spontanément et gratuitement envoyer à Dublin les exemplaires de son "*Journal de mathématiques pures et appliquées*". Coolidge est non moins dithyrambique au sujet de Hamilton, "*l'extraordinaire génie irlandais*" ([**Coolidge 1963**, 257]).

145. Pour consulter précisément le vocable d'Hamilton et ses travaux, voir [**Hamilton 1830**] et [**Hamilton 2000**].

146. Voir [**Coolidge 1963**, 383-387]. Il ne s'agit pas de l'unique condition nécessaire et suffisante : Darboux en donnera plusieurs autres dans son chapitre "*Droites normales à une surface*" ([**Darboux 1889**,

congruence sont tous doublement tangents à une autre surface ([**Kummer 1860**, 206]) [147]. Dans ce cas, l'ensemble des "*foci*" (*foyers*) des rayons se situent sur les deux nappes de cette surface auxquels les rayons sont tangents : ces deux nappes sont alors appelées "*focal surfaces*" (*surfaces focales*) de la congruence normale. Les foyers de chacun des rayons sont donc situés sur les deux surfaces focales que ces rayons enveloppent. On comprend ainsi que les deux surfaces focales Σ_1 et Σ_2 ne sont autres que les nappes des centres de courbure de la surface (S) dont la congruence représente les normales. La surface (S) ne fait au départ pas partie de l'étude d'Hamilton : *a priori* les surfaces Σ_1 et Σ_2 sont dite focales pour la *congruence*, et non pour (S). Mais progressivement, au cours du XIXème siècle, l'association sera faite entre la congruence et la surface qui lui est en tout point orthogonale et dont la congruence décrit les normales, si bien que les surfaces focales - que ce soit d'une congruence ou d'une surface - deviendront ce que Monge avait dans un premier temps appelé les nappes des centres de courbure.

On peut ainsi constater que le champ sémantique des foyers et des focales des surfaces mêle dès lors deux notions qui sont pourtant tout à fait distinctes. Ce dont nous avons retracé l'évolution dans le présent chapitre de cette thèse est l'extension de la notion de foyer des coniques (qui est, elle, définie sans confusion possible) : ce sont les foyers de Plücker et les focales de Chasles et de Darboux. Ces-dernières sont appelées "*focals*" ou "*focal curves*" par les mathématiciens anglophones (voir par exemple [**Townsend 1848**]), ou encore "*linee focali*" par les mathématiciens italiens ([**Loria 1896**, 98]). Ces lieux peuvent être intimement reliés aux propriétés projectives des courbes et des surfaces, et la situation physique qui caractérise à l'origine leur appellation en optique géométrique considère la surface comme réfléchissante : c'est un miroir.

En revanche, l'extension aux surfaces de la notion de développée des courbes a donné, après Monge par l'intermédiaire de l'étude des congruences, naissance aux mêmes termes : on peut dire que ce sont les foyers de Hamilton, les focales de Kummer. Ce sont pour les anglophones les "*focal surfaces*", pour les italiens les "*superficie focali*" ([**Loria 1896**, 219]). Ces lieux géométriques sont quant à eux liés aux propriétés des enveloppes des normales des surfaces, et la situation physique qui explique cette dénomination vient de la considération en optique d'une surface comme surface d'onde.

Il existe, en général, une distinction majeure entre les deux "focales" d'une surface : les focales au sens de Darboux sont des courbes, elles sont obtenues comme lignes doubles d'une autre surface (imaginaire). Au contraire, dans le cas général les focales au sens de Hamilton et Kummer sont des surfaces. On retrouve ici le trait spécifique souligné par le linguiste Pinkal pour l'ambiguïté des adjectifs ([**Pinkal 1995**, 43-45]). Ce-dernier souligne en effet que le schéma suffisant de *precisification* peut souvent se résumer à l'ajout de noms communs dans l'expression étudiée. Ainsi dans l'expression (E) : "(F) *est une focale de la surface* (S)", la seule proposition $(E1)$: "(F) est une courbe focale de la surface (S)" peut permettre *en général* de conclure. L'affirmative pour $(E1)$ répondrait à la notion projective des focales développée par Chasles et Darboux, la négative pourrait répondre à l'extension

Chap.XII, Livre IV]), en particulier celle bien connue portant sur l'orthogonalité des familles de développables.

147. On pourra trouver dans [**Knörrer 1986**, 131-133] le lien effectué par Kummer, grâce à la théorie des congruences rectilignes et de leurs *surfaces focales*, entre la surface qui porte désormais son nom et la surface des ondes de Fresnel.

de la notion de développée de Monge, Hamilton et Kummer. Pourtant la validité de ce schéma de *precisification* doit être remise en cause.

Tout d'abord, il se peut que les focales au sens de Hamilton soient également des courbes. C'est le cas par exemple des cyclides de Dupin, surfaces dont les deux "*surfaces focales*" sont en fait des cercles, donc des courbes (voir [**Dupin 1822**] ou [**Berger Gostiaux 1992**, 487]). Ajoutons également que la "*surface focale*" de la sphère, toujours dans le sens d'enveloppe des normales, se réduit à un point : son centre, qui est en outre aussi le seul foyer réel au sens projectif de Darboux [148]. Ainsi $(E1)$ peut être vraie sans aboutir à une évaluation définitive. Par ailleurs, nous devons souligner que l'intrication des dénominations - et donc l'ambiguïté des expressions s'y rapportant - est encore plus profonde lorsque c'est l'élément ponctuel qui est considéré : dans les deux approches, les points de ces courbes et surfaces dites focales sont identiquement appelés des "*foyers*" pour Darboux, des "*foci*" pour Salmon, des "*Brennpuncten*" pour Kummer, des "*fuoci*" pour Loria. Dans ce cas, le schéma de *precisification* proposé doit être profondément modifié. Nous allons présenter un second schéma, complet, adapté à ce cas d'étude. Soit l'expression (E) : "*F est un foyer de la surface* (S)". Adoptons alors d'après Manfred Pinkal le schéma complet de strates de précisions progressives :
$(E1)$: La science considérée est la mathématique.
$(E2)$: Le domaine est la géométrie dans l'espace.
$(E3)$: L'objet regroupant tous les foyers de (S) est qualifié de *focal*.
$(E4)$: Les focales de (S) sont des courbes.
$(E5)$: Foyers et focales sont liés à la notion projective de tangence isotrope.

On constate que l'ambiguïté est ici tenace. En effet, on répond à $(E1)$, $(E2)$ et $(E3)$ par l'affirmative, puis nous avons vu que $(E4)$ doit être, sans contextualisation permettant d'affiner la connaissance de la surface (S), considérée comme indéfinie. Seule l'ultime proposition contextuelle $(E5)$ permet de s'absoudre de l'ambiguïté du spectre d'interprétation - qui ici se résume pourtant à une simple alternative [149] - et de relier celle-ci à la définition de Darboux. On obtiendrait bien sûr la seconde interprétation en évaluant l'expression (E) avec la définition du *foyer* de Monge, Hamilton et Kummer originellement liée aux congruences de normales, grâce au même schéma de *precisification* si la dernière proposition $(E5)$ venait à être évaluée comme fausse.

Si la polysémie relative aux foyers est présente à la fois en français, en anglais, en italien et en allemand, la langue allemande présente seule dès le XIXème siècle une distinction nette entre les focales au sens de Darboux et celles au sens de Hamilton. C'est pour cela que nous lui réservons ci-dessous une considération particulière.

148. Dans le cas de la sphère, les plans tangents isotropes à la surface sont les plans tangents du cône isotrope. Le seul point double, foyer réel, est ainsi le sommet du cône, soit le centre de la sphère. Toutes les lignes focales ont fui à l'infini et sont parties coïncider avec le cercle de l'infini.

149. Notre affirmation peut être remise en cause : le spectre d'interprétation peut en effet ne pas être réduit à une alternative. En 1871, le mathématicien irlandais John Casey nommait ainsi "*focales*" des anallagmatiques de degré 4 (donc des cyclides de Darboux), les surfaces quadriques qui en sont les *déférentes* selon le vocable de La Gournerie (voyez [**Casey 1871**, 592]). On retrouve l'usage de cette dénomination plus tard dans l'*Encyklopädie* ([**Meyer 1930**, 1619]). Néanmoins, selon notre schéma de *precisification* la proposition $(E3)$ doit être évaluée comme négative puisque les quadriques focales de Casey ne regroupent pas l'ensemble des foyers des anallagmatiques. Aussi après trois étapes le spectre d'interprétation redevient-il bien l'alternative sur laquelle nous nous sommes concentrés. Les notions d'anallagmatiques, de déférentes et de cyclides seront présentées dans la suite en 7.2 et [Chap.3,1].

Nous avons vu qu'en français, les foyers sont au XIXème siècle à la fois les points des courbes focales - au sens de Plücker, Chasles et Darboux - ainsi que les éléments des deux surfaces focales, anciennement nappes des centres de courbure. De nos jours, si la notion projective de courbe focale est grandement tombée dans l'oubli (exception faite dans une certaine mesure des quadriques), les surfaces focales d'une surface donnée sont également appelées en français *surfaces caustiques*, *caustiques*, ou même *développées*. Le vocabulaire anglais correspond exactement au français : les "*foci*" (foyers) sont à la fois pour les contemporains d'Hamilton les points des "*focal curves*" de Chasles et Darboux, mais également les points des "*focal surfaces*" d'Hamilton. Cette dernière notion est aussi appelée *caustics*.

Dans la langue allemande, on peut constater la distinction des dénominations des focales, dans les travaux de Plücker et de Kummer par exemple, ou plus simplement dans le dictionnaire français-allemand de vocabulaire mathématique de 1900 de Félix Müller [150] [**Müller 1900**], cet outil étant d'ailleurs bien pratique à l'historien. A la suite du mémoire de géométrie dans l'espace de Plücker ([**Plücker 1846**]), l'extension de la notion de foyer des coniques sera toujours appelée "*die Fokal-Curven einer Fläche*" (*les courbes focales d'une surface*) : le préfixe "fokal-" est donc emprunté au français et à l'anglais. On peut ainsi trouver dans le dictionnaire de Müller en 1900 la définition suivante :

> **focale d'une surface** (ligne double de la développable circonscrite à cette surface et au cercle ombilical de l'infini) (DARBOUX)
> *Fokale einer Fläche*
>
> [**Müller 1900**, 51]

Mais dans le vocabulaire des congruences, et donc naturellement par transposition pour les focales des surfaces regroupant les centres de courbure, ces surfaces sont identiquement appelées par les compatriotes de Kummer des "*Brennfläche*" - que l'on serait donc bien inspiré de traduire en français par "surfaces caustiques". Les lignes de courbure sont d'ailleurs dénommées en conséquence les "*Brennlinien*" de la surface. Aussi seule la langue allemande permet de distinguer clairement par l'existence de deux dénominations distinctes les deux sens de la notion de *focale* : l'ambiguïté a alors disparu.

Pourtant, même cette distinction peut être mise à mal par le fait que les points de ces deux objets, "*Fokale*" et "*Brennfläche*", sont dans les deux cas toujours appelés des "*Brennpunkten*" (*foyers*). Dans le dictionnaire de Müller, l'adjectif français *focal* présente ainsi trois traductions : "*fokal, Brennpunkt-, Brenn-*". Le premier doit être rattaché aux (courbes) focales de Darboux et le dernier aux (surfaces) focales de Hamilton ; mais le terme intermédiaire leur est commun. Par conséquent, on trouve plus loin dans les traductions en français des termes allemands la traduction de "*Brennpunktencurve*" par "*courbe focale*", et celle de "*Brennpunktenfläche*" par "*surface focale*" ([**Müller 1900**, 151]). En remettant au centre du choix lexical l'objet ponctuel - le foyer - qui est commun aux deux notions, on perd ainsi dans la langue allemande la distinction qui avait été rendue possible par l'emploi des deux préfixes distincts *Fokal-* et *Brenn-*.

Les mêmes conclusions peuvent être tirées à partir de l'observation de la célèbre *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* [151]. C'est dans la deuxième partie du troisième

150. Nous verrons plus en avant dans la section [Chap.5,4] que Müller était un mathématicien allemand, co-fondateur du "*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*" à la fin de l'année 1869.

151. Souvent appelée la *Klein-Molk Encyclopedia*, cette encyclopédie a fait l'objet d'une étude comparée d'Hélène Gispert ([**Gispert 2001**]) relative à ses éditions française et allemande.

volume de l'encyclopédie entreprise par les mathématiciens allemands Felix Klein, Heinrich Weber et Wilhelm Meyer que l'on peut trouver les notions de géométrie relatives aux courbes et aux surfaces focales. Les "*Brennfläche*" sont alors bien les surfaces focales d'une congruence ("*Brennfläche einer Kongruenz*", p.1175) et ainsi Meyer traite-t-il la surface de Kummer "*en tant que surface focale d'une congruence quadratique*" ("*als Brennfläche einer quadratischen Kongruenz*" [**Meyer 1930**, 1724]). En revanche, les "*Focalkurve*" sont bien définies d'après l'extension donnée par Darboux de la notion de foyer des coniques :

> **Courbe focale [FokalCurve]** Les lignes doubles de chaque surface développable focale [circonscrite à une surface donnée] s'appellent d'après Darboux les *courbes focales* de la surface donnée. [152]
>
> [**Castelnuovo Enriques 1908**, 672]

Mais là encore, les "*Brennpunkte*" (foyers) regroupent tout autant les points des "*Brennfläche*" que ceux des "*FokalCurve*". Meyer rappelle ainsi que "*il existe sur chaque droite de la congruence deux foyers [Brennpunkte] dont les lieux forment les deux nappes des surfaces focales [zweimantlige Brennfläche]*" ([**Meyer 1930**, 1724]). Les deux auteurs italiens, quant à eux, ajoutent - en allemand - que "*chaque point des courbes focales [FokalCurve] est un foyer [Brennpunkt] de la surface, c'est-à-dire le centre d'une sphère de rayon nul qui est doublement tangente à la surface*" ([**Castelnuovo Enriques 1908**, 672]). Ainsi la langue allemande présente-t-elle ce dédoublement singulier : lorsque le lexique est centré sur l'objet géométrique dans son intégralité (la surface *Brennfläche*, la courbe *FokalCurve*), l'ambiguïté est inexistante. En revanche, lorsque le lexique est lié à l'objet ponctuel (le foyer *Brennpunkt*) alors cette ambiguïté réapparaît et est tout aussi tenace que celle que présentent l'anglais, le français et l'italien.

Le nom "*foyer*" ainsi que l'adjectif "*focal*" ont ainsi, dans le vocabulaire mathématique courant de la fin du XIXème siècle un champ sémantique double. Ils peuvent se rapporter à la notion projective issue de l'extension des foyers des coniques après les travaux de Plücker et de Chasles, mais peuvent tout aussi bien désigner les objets liés à l'extension de la notion de développée des courbes et intimement rattachés aux études sur les congruences de Hamilton et Kummer. Si la langue allemande présente la richesse lexicale particulière à même de distinguer la polysémie du nom *focale*, l'ambiguïté persiste lorsque les appellations sont rattachées à la notion ponctuelle de *foyer* dans l'espace. Les langues française, anglaise et italienne quant à elles ne permettent pas de distinguer le sens de ces termes autrement que par le contexte, et requièrent des "*précisions contextuelles logiques*" avancées - pour reprendre les termes de Pinkal : l'ambiguïté des interprétations n'est ainsi que peu évidente à lever.

Cette polysémie des termes mathématiques a pu constituer une difficulté pour les acteurs du XIXème siècle ayant eu affaire aux deux différentes notions regroupées sous le même lexique. C'est notamment le cas de Darboux qui, après avoir étendu et largement utilisé la notion de focales des surfaces à l'aide des lignes doubles des développables circonscrites aux surfaces (voir 5.2 et 7), effectuera dans ses leçons de Géométrie à la Sorbonne une étude générale de la notion de congruences. Dans le livre IV de ses "*Leçons*"

152. "***Fokalkurve***. *Die Ebenen, welche gleichzeitig eine Fläche und den absoluten Kreis berühren, bilden eine (Fokal)developpable, welche der Fläche längs einer Krümmungslinie umschrieben ist. Die Doppelkurve jener abwickelbaren Fläche (außer dem absoluten Kreis) heißt die* Fokalkurve *der gegebenen Fläche nach Darboux.*" [**Castelnuovo Enriques 1908**, 672].

([Darboux 1889, 1-358]), on peut remarquer que Darboux utilise bien le terme de "*surface focale*" mais qu'il prend toujours soin d'ajouter ensuite "*de la congruence*" pour éviter à ses auditeurs la confusion avec les focales des surfaces dont il fut l'auteur de la définition générale. C'est dans cette même optique de clarté que Darboux n'appellera jamais "*foyers*" les points des surfaces focales des congruences : il les nommera systématiquement les "*points focaux*" (voir par exemple [Darboux 1889, 11]). Il conservera également logiquement le vocabulaire de Monge en parlant de "*la surface des centres de courbure*" ([Darboux 1894, Chap.VII]) lorsque l'étude viendra à porter non plus sur les congruences mais sur les surfaces elles-mêmes. Comme nous l'avons mentionné plus haut, ces précisions établissant une distinction nette entre les deux sens du mot "focale" disparaîtront peu à peu, malgré les efforts de Darboux : les *points focaux* deviendront ainsi des *foyers*, et les *surfaces focales* seront rattachées aussi bien aux congruences qu'aux surfaces elles-mêmes.

Le double sens des mots "focales" et "foyers" constitue surtout une difficulté pour l'historien : il rend plus délicat la compréhension des travaux mathématiques et celle de l'évolution des idées liées à ces deux notions qui gravitent autour de la même appellation. Pour les travaux de la seconde moitié du XIXème siècle, il lui est ainsi impossible d'interpréter correctement et de classifier le matériel de ses études uniquement à l'aide d'un titre ou de la présence d'une terminologie. Comprendre correctement les travaux des mathématiciens relatifs aux "focales" nécessite ainsi de replacer chaque travail dans le contexte de sa création, ou de s'en approprier le contenu scientifique suffisamment pour pouvoir en distinguer très clairement le sens. Un paragraphe d'un mémoire intitulé par exemple "*propriétés focales*" ("*focal properties*" en anglais, ou encore "*Eigenschaften der Brennpuncten*" en allemand) peut ainsi *a priori* sans une analyse profonde être relié à l'un ou l'autre des deux sens des foyers et des focales. Ce fait est d'autant plus remarquable qu'il est relativement rarement rencontré par les historiens des sciences. Le dictionnaire Larousse énonce ainsi de manière révélatrice que "*la monosémie caractérise surtout les vocabulaires scientifiques et techniques*".

Il va sans dire que nous nous sommes heurtés, au cours de notre travail, à cette difficulté. Le voile n'aura en fait été levé qu'en nous appropriant profondément les mathématiques liées aux deux différentes notions pour pouvoir raisonnablement effectuer des distinctions dans les travaux étudiés. Cette remarque met en particulier en relief le danger d'effectuer à ce sujet des études basées sur des statistiques, ou même l'établissement systématique par informatique de corpus pour des études historiques : la dualité du champ sémantique des foyers mettrait en effet à mal la pertinence de ces méthodes.

6.3. Fixer la terminologie des objets : Laguerre vs Darboux, la guerre des mots.

Le paragraphe précédent a mis en lumière la difficulté représentée par la double interprétation mathématique d'un même terme. Néanmoins historiens et mathématiciens peuvent également être confrontés au problème dual : il s'agit de l'existence de plusieurs termes, plusieurs adjectifs ou noms, pour désigner la même notion ou le même objet mathématique. Ainsi, par exemple, la polysémie du nom "focale" a fait en sorte que ce que Monge nommait autrefois les *nappes des centres de courbure* sont appelées de nos jours indifféremment *surfaces focales*, *(surfaces) caustiques* ou *développées*. De la polysémie d'un terme sont nés plusieurs synonymes [153] pour pallier aux possibles confusions. Nous allons ici nous intéresser particulièrement aux différentes terminologies apparaissant relativement aux objets mathématiques en lien l'évolution des outils de la géométrie imaginaire durant les années 1860-70. Nous mettrons ainsi en relief l'existence d'une sorte de lutte invisible entre Gaston Darboux et Edmond Laguerre dont l'enjeu est de fixer l'appellation des éléments nouveaux de la géométrie. Les différents synonymes d'un même objet persisteront alors jusqu'à ce qu'une des appellations s'impose et soit généralement acceptée et utilisée par la communauté des mathématiciens.

Ce problème a été également évoqué par l'historienne Pauline Romera-Lebret dans son étude de la diffusion des connaissances de la "*nouvelle géométrie du triangle*" dans les journaux mathématiques au cœur des années 1880 ([**Romera-Lebret 2014**, 210-213]). Soulevant ce qu'elle nomme le "*problème de la multiplicité des appellations*", son étude porte sur la réalisation de cette problématique et les solutions apportées par les acteurs eux-mêmes. Un de ses acteurs, le mathématicien Gaston Longchamps, évoque une "*confusion des termes malheureusement inévitable dans une science créée par des auteurs si nombreux, écrivant en des lieux si divers*" [154]. Notre enquête ne fait ici intervenir que les deux personnages de Darboux et de Laguerre, qui résident et publient tous deux à Paris simultanément. Au contraire de la *nouvelle géométrie du triangle* pour laquelle l'étude terminologique d'un tiers acteur, Emile Vigarié, contribuera à fixer un socle de vocabulaire commun, nous verrons dans quelle mesure Laguerre dominera face à Darboux le duel de l'entérinement du nouveau lexique français de la géométrie projective.

Entre 1864 et la fin des années 1870, Gaston Darboux et Edmond Laguerre proposent de nommer différemment, chacun de sa propre manière, les objets nouveaux de la géométrie projective imaginaire dont la plupart sont liés à la définition des focales [155] des surfaces. Darboux propose en effet de nombreuses nouvelles dénominations dans son premier mémoire [**Darboux 1865**] et surtout plus tard dans son ouvrage [**Darboux 1873a**]. Mais dans le même temps, Laguerre publie deux mémoires [**Laguerre 1870**] et [**Laguerre 1872**], centrés sur l'utilisation des imaginaires en géométrie, où d'autres dénominations sont mises en avant. Nous allons dans un premier temps détailler les appellations données par Darboux.

153. Nous emploierons ici la notion de *synonymie* qui nous paraît spécialement bien adaptée à notre étude. Pour apporter quelques précisions linguistiques, nous pouvons souligner que les deux autres notions d'*homosémie* et d'*isosémie* - qu'on aurait éventuellement pu faire intervenir ici car elles sont également relatives à un accord sémantique - font toutes deux intervenir la répétition ou la reprise partielle de sèmes. C'est pour cela que nous privilégierons ici la *synonymie*. Pour plus de détails, le lecteur curieux se penchera sur les travaux de Jean-Claude Choul et de Bernard Pottier.

154. Extrait de la citation de Longchamps de [**Romera-Lebret 2014**, 211]. Originaire d'Alençon, Gaston Albert Gohierre de Longchamps fut le camarade de promotion du petit frère de Gaston Darboux, Jean-Louis, à l'Ecole Normale Supérieure (promotion 1863).

155. Désormais, sauf s'il est fait mention du contraire, nous entendrons par 'focales d'une surface' les lignes doubles de la développable circonscrite à la surface et au cercle de l'infini, c'est-à-dire la définition générale issue de l'extension de la notion de foyer chez les coniques planes.

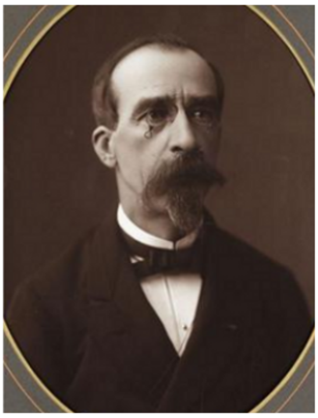


FIGURE 27. Gaston Darboux (à gauche) et Edmond Laguerre (à droite). [156]

Pour Darboux en 1873, l'appellation de *points cycliques* n'existe pas encore. Ces deux points du plan sont systématiquement notés I et J, et sont désignés par "*les points à l'infini sur le cercle*" ([**Darboux 1873a**, 2]). Il en va de même pour les *droites isotropes* que le nîmois appellera "*droites ayant* $+i$ *et* $-i$ *pour coefficients angulaires*", ou plus simplement "*droites passant par les deux points* I *et* J". En 1865, Darboux nommait ces droites les "*parallèles aux asymptotes du cercle*".

Dans l'espace, l'extension de la notion de *points cycliques* de Poncelet devient un cercle commun (C) à toutes les sphères. Darboux appelle dans un premier temps d'après Chasles cet objet "*le cercle imaginaire à l'infini*" ([**Darboux 1865**, 55]), mais il devient rapidement juste "*le cercle de l'infini*" ([**Darboux 1873a**, 9]). Le plan isotrope constitue l'extension de la notion de droite isotrope dans l'espace projectif complexe. Pour désigner les droites et les plans isotropes, Darboux a recours à l'utilisation du "*cône asymptote de la sphère*" : ce sont en fait les cônes dont l'équation dans un repère centré en leur sommet est donnée par $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. On peut encore dire qu'il s'agit des "*cônes ayant* (C) *pour base*" ([**Darboux 1873a**, 8]) ainsi que nous l'avons vu en 5.1. A l'aide de ce cône de référence, les dénominations sont simplifiées pour Darboux : les droites isotropes sont les "*génératrices*" du cône, et les plans isotropes sont donc les plans "*parallèles au cône asymptote de la sphère*" ([**Darboux 1865**, 56]). Le géomètre nîmois les désigne également couramment sous le nom de "*plans tangents au cercle de l'infini*".

Ces objets de la géométrie imaginaire dans l'espace permettent à Darboux d'introduire les focales des surfaces en considérant une classe particulière de surfaces imaginaires. Ces surfaces sont construites comme les enveloppes d'une famille de plans isotropes ([**Darboux 1873a**, 7-9]). Ce sont ainsi des surfaces développables, et les focales d'une surface seront définies comme les lignes doubles d'une de ces développables lui étant circonscrite. Darboux nomme ces surfaces développables [157] : les "*développables focales*". Elles

156. Crédits image : arago-france.com, Institut de France, portraits d'Eugène Piroux.
157. La section suivante, 7, sera consacrée à l'analyse de ces surfaces développables dites *focales* par Darboux.

sont au centre des études menées dans la première partie du "*Mémoire sur une classe remarquable de courbes et de surfaces*" de 1873 : tous leurs plans tangents sont tangents au cercle de l'infini, et toutes leurs génératrices coupent ce cercle aux points de tangence.

FIGURE 28. Edmond Nicolas Laguerre

Originaire de Bar-le-Duc dans les Vosges où il naît en 1834, Edmond Laguerre entre à l'Ecole Polytechnique en 1853. Un de ses articles alors qu'il était encore en préparation pour le concours d'entrée lui vaut alors déjà une certaine renommée. Laguerre se consacre ensuite pendant une dizaine d'années à une carrière militaire. Revenu à l'Ecole Polytechnique en tant que tuteur au milieu des années 1860, il reprend alors pleinement ses activités mathématiques et ses travaux recommencent à être publiés. Tout comme ses premières recherches, Laguerre s'intéresse surtout à l'emploi des imaginaires en géométrie, mais ses travaux en analyse lui assureront ensuite une chaire de physique mathématique dans les années 1880. Il deviendra membre de l'Académie des Sciences en 1885, l'année suivant l'élection de Darboux dans cette même Académie.

Edmond Laguerre, comme Darboux, n'emploie jusqu'en 1872 pas non plus le terme de "*points cycliques*". Il lui préfère le nom d'"*ombilics du plan*" ([**Laguerre 1870**, 166]), un vocabulaire nouveau qu'il propose d'introduire à partir de 1865 dans ses communications[158]. La justification de cette dénomination est selon lui apportée par l'analogie existant entre ces points et les ombilics à l'infini des surfaces du second degré. Un apport incontournable de Laguerre au vocabulaire des objets mathématiques reste l'introduction de l'adjectif "*isotrope*". Pour plus de clarté dans notre exposition, nous avons déjà fait usage de ce terme pour décrire les mathématiques de Plücker, Chasles et Darboux notamment. Il s'agissait ainsi d'un anachronisme : c'est en 1870 que Laguerre apporte ce vocable pour désigner les droites passant par les "ombilics du plan" I et J :

> Il était nécessaire, vu l'importance des droites remarquables que je viens de mentionner, de leur donner un nom spécial, bref et expressif. L'expression de droite *isotrope*, n'ayant pas encore de signification en Géométrie, m'a paru convenable pour atteindre ce but.
>
> [**Laguerre 1870**, 165]

158. Laguerre propose le nom d'"ombilics du plan" dans une note insérée aux "*Comptes-rendus*" en 1865 : [**Laguerre 1865**].

Cet adjectif, alors déjà utilisé par les physiciens, caractérise une invariance par changement de direction. Les droites *isotropes* ont en effet, comme Plücker l'avait déjà fait remarquer en 1831, la propriété de former avec toutes les droites du plan un seul et même angle : celui dont la tangente trigonométrique vaut $\pm\sqrt{-1}$. C'est ce que Laguerre exprime, différemment, en évoquant que leur équation ne varie pas lorsqu'on effectue une rotation des axes du repère. Les points I et J sont alors pour Laguerre les points de rencontre des droites isotropes avec la droite de l'infini.

En ce qui concerne les éléments de géométrie imaginaire dans l'espace, le capitaine d'artillerie Laguerre commence comme Darboux par introduire les cônes. Il désigne par "*cône isotrope*" l'union des droites isotropes issues d'un même point, cône que Darboux caractérisait comme étant asymptote des sphères centrées en ce point. Laguerre poursuit en remarquant que tous les cônes isotropes ont en commun une conique qui résulte de leur intersection avec le plan de l'infini. Il appelle cette conique "*l'ombilicale*" ([**Laguerre 1872**, 15]) : il s'agit des éléments communs à toutes les sphères, ce qui coïncide bien avec le "*cercle à l'infini*" de Darboux. Les plans tangents à l'ombilicale sont logiquement appelés ensuite les "*plans isotropes*".

Pour définir les focales des courbes et des surfaces dans l'espace, Laguerre utilise le même principe que Darboux : circonscrire une surface dont les plans tangents ont des génératrices rencontrant le cercle de l'infini, et en observer les lignes doubles. Dans le vocabulaire de Laguerre, cela donne en fait :

> Parmi l'infinité de surfaces dérivées d'une courbe gauche G, se trouve en particulier la *développable isotrope* circonscrite à cette courbe : j'entends par là la surface développable circonscrite à la fois à l'ombilicale et à la courbe donnée. Tous les plans qui lui sont tangents sont, par conséquent, des plans isotropes [...]
>
> [**Laguerre 1872**, 241]

Les focales de la courbe G seront ainsi les lignes double de cette *développable isotrope*, et il en ira de même pour une surface. Aussi vis-à-vis de Darboux Laguerre remplace-t-il l'adjectif "focal" par celui d'"isotrope".

On constate que Laguerre et Darboux se livrent véritablement à la fin des années 1860 et au début des années 1870 à une guerre des mots pour fixer le vocabulaire des éléments de la géométrie imaginaire. D'une part, il leur était alors nécessaire de bien définir ces objets pour ancrer la considération pleine et entière des imaginaires en Géométrie. Nous avons remarqué (voir 5.2) que Chasles n'avait qu'à moitié franchi ce pas puisqu'il rattachait toujours les imaginaires à des éléments réels. Darboux rappellera plus tard combien la considération des imaginaires en Géométrie n'était dans les années 1860 pas unanimement acceptée :

> Il m'est arrivé dans ma jeunesse de rencontrer quelques professeurs attardés qui levaient les bras au ciel quand on s'aventurait à leur parler du cercle imaginaire de l'infini. Ces temps sont passés et personne ne conteste plus l'importance des notions sur les imaginaires introduites dans la géométrie des éléments finis [...]
>
> [**Darboux 1908**, 110]

Il en allait donc de l'intérêt commun de Laguerre et de Darboux d'asseoir dans leurs travaux de Géométrie les définitions et le rôle des imaginaires. Mais il y avait en outre une véritable forme de compétition : lorsqu'il finit d'écrire son mémoire en Juin 1869, Darboux a alors intitulé celui-ci "*Mémoire sur une classe de courbes et de surfaces*" [159]. Mais après la guerre de 1870, lorsque sa publication redevient d'actualité auprès de Gauthier-Villars, Darboux fait rajouter dans le titre la mention supplémentaire "*et sur la théorie des imaginaires*". Entre-temps, Laguerre avait en effet publié ses deux mémoires intitulés "*Sur l'emploi des imaginaires en géométrie*". On peut ajouter d'ailleurs qu'à cette époque, Darboux avait une piètre opinion de son compatriote polytechnicien : il percevait ce-dernier comme un "*esprit confus, tellement orgueilleux qu'il en est puant, prenant en pitié toute la création, il suspend depuis plusieurs années sur notre tête une nouvelle théorie des imaginaires destinée à révolutionner la science*" [160]. Il est loin d'être impossible que l'animosité de Darboux envers Laguerre soit intimement reliée à cette fameuse "théorie des imaginaires" de ce-dernier, qui vient faire concurrence à la présentation qu'en fait Darboux. Par ailleurs, cette phrase de Darboux évoque également le fait que son concurrent Laguerre travaillait sur sa série de mémoires, voués à présenter sa théorie des imaginaires, au moins depuis 1867. Cela est confirmé par l'anecdote qui suit, racontée à Rome par Darboux en 1908.

Ayant écrit la partie de son travail sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie dans l'espace, Laguerre montre son travail à Poncelet. La première phrase de son travail était la suivante : "*On sait que tous les cercles du plan peuvent être considérés comme passant par deux points à l'infini*". Darboux raconte alors que "*son ami*" Laguerre "*se fit vertement reprendre par Poncelet. « On sait, oui l'on sait, mais vous auriez bien dû dire qui vous a appris cela »*" ([**Darboux 1908**, 111]). Laguerre modifiera en conséquence son introduction dans la forme finale qu'il présente à la Société Philomathique de Paris en Avril 1870, puis qui sera imprimée dans les "*Nouvelles Annales*" après la guerre. On y trouve la formulation suivante :

> On sait, depuis les travaux de Poncelet, que tous les cercles tracés dans un même plan passent par deux points fixes imaginaires [...]
>
> [**Laguerre 1872**, 14]

La datation du travail de Laguerre est rendue possible par le fait que Poncelet mourra en Décembre 1867 : la première rédaction du mémoire du polytechnicien est ainsi antérieure à cette date.

Darboux et Laguerre ont tous deux enseigné la géométrie des imaginaires autour des années 1870. Laguerre a profité des cours publics libres mis en place par Victor Duruy pour donner, durant l'année scolaire 1869-70, des cours de Géométrie supérieure dans la salle Gerson, dans une annexe de la Sorbonne [161]. Il était par ailleurs répétiteur à l'Ecole Polytechnique, ce qui ne lui attirait pas la sympathie de Darboux. Ce-dernier a par ailleurs été maître de conférences à l'Ecole Normale entre 1872 et 1881. Outre ses conférences régulières de Calcul Différentiel et Intégral, Darboux y a donné - au moins durant les

159. C'est en particulier ce nom qui est évoqué lors de la présentation que fait Darboux du mémoire à l'Académie des Sciences, le 7 Juin 1869 ([**Darboux 1869b**]).

160. Lettre de Gaston Darboux à Jules Hoüel non-datée de 1870, reproduite dans [**Gispert 1987**, 140].

161. L'historien Christian Amalvi écrit qu'à partir de 1868, accompagnant la création de l'Ecole Pratique des Hautes Etudes, "*dans une annexe de la Sorbonne, la salle Gerson, des cours libres sont confiés à de jeunes docteurs [...] essai d'acclimatation, sans lendemain, de l'institution allemande des privat docent*" (*Les lieux de l'histoire*, Christian Amalvi, Paris (Armand Colin), 2005, Section 33).

quatre premières années - des cours de Géométrie analytique, introduisant ainsi les imaginaires avec son propre vocabulaire [162]. Les deux mathématiciens, autant Darboux que Laguerre, ont ainsi diffusé leur vocabulaire pour les éléments imaginaires de la Géométrie dans leur enseignement. Les leçons de Laguerre ont été en partie publiées ([**Laguerre 1870**], [**Laguerre 1872**]), et Darboux a développé son introduction des imaginaires dans la première partie de son mémoire [**Darboux 1873a**]. Il est pourtant frappant de constater que, de tous les objets de géométrie imaginaire que nous avons évoqués dont l'appellation diffère entre les deux géomètres, pas un seul n'a conservé le nom qui lui aura donné Darboux. C'est exclusivement Laguerre qui a contribué à fixer le nom de ces objets, et ce sont ses dénominations que nous utilisons toujours aujourd'hui : droites, plans et cônes isotropes, ombilicale et développables isotropes.

Darboux va rapidement adopter l'adjectif *isotrope*, et calquer son vocabulaire sur celui de Laguerre : dès le début de ses cours de Géométrie à la Sorbonne en 1878, la définition des focales se fait ainsi grâce aux *développables isotropes* - et non plus *focales*. En revanche, jamais il ne consentira à troquer le nom de son *cercle de l'infini* pour *l'ombilicale* du polytechnicien. Son tout dernier ouvrage, signé un mois à peine avant sa mort, en atteste toujours [**Darboux 1917**]. Mais malgré cela, c'est bien le lexique de Laguerre qui s'impose aux générations ultérieures de mathématiciens, comme peuvent en attester les cours que Laurent Schwartz reçut de son grand-oncle par alliance Jacques Hadamard :

> Jacques Hadamard dit simplement [...] les points cycliques d'un plan sont les intersections de ses cercles avec la droite de l'infini, d'où les droites isotropes et, dans l'espace, les cônes isotropes ou sphères de rayon nul, les plans isotropes, ainsi que la conique ombilicale, merveille imaginaire.
>
> [**Schwartz 1997**, 51]

Notons par ailleurs pour être complet que le nom de "*points cycliques*" a été utilisé et banalisé en France durant la deuxième moitié des années 1870 [163]. Par ailleurs, c'étaient pourtant les terminologies de Darboux qui avaient été adoptées à l'étranger à la fin du XIXème siècle et au début du XXème siècle puisque c'est son ouvrage de 1873 "*Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces*" qui servait de référence pour la notion de *courbes focales* des surfaces. Nous le constatons en particulier dans l'"*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*" à la lecture des articles [**Meyer 1930**] et [**Castelnuovo Enriques 1908**], écrits par des mathématiciens allemands et italiens, où les focales sont comme chez Darboux liées à la notion de surface développable focale.

Il est vrai que les travaux de Darboux contenant la terminologie lui étant propre ont été publiés dans un mémoire qui est moins accessible que la publication des leçons de Laguerre. [**Darboux 1873a**] est ainsi un mémoire dont les lecteurs se réduisent à un cercle assez fermé de mathématiciens à même d'en appréhender le contenu de haut niveau. Il est par ailleurs publié non dans une revue mais comme un ouvrage indépendant. Au contraire, [**Laguerre 1870**] est un ensemble de leçons pouvant toucher un public bien plus large, et dont la publication dans un recueil connu et bien diffusé (les "*Nouvelles Annales*") en a favorisé la transmission. Cela permet de donner une explication raisonnable de la prédominance du vocabulaire choisi par Laguerre sur celui de Darboux. Pourtant on peut remarquer que la terminologie chère à Darboux de "*cercle de l'infini*" a perduré : on la retrouve par

162. On pourra trouver des informations se rapportant à ces deux cours de Laguerre et de Darboux en bas de page du mémoire [**Laguerre 1870**] ainsi que dans la préface de [**Darboux 1917**].

163. La première apparition de cette terminologie dans les "*Comptes-rendus*" date de 1876.

exemple chez Coolidge en 1916 qui parle de "*circle at infinity*" ([**Coolidge 1916**]). On voit également, dans une moindre mesure, que Müller dans son dictionnaire de 1900 donnera les deux synonymes : "**ombilicale** *(conique imaginaire à l'infini)*" ([**Müller 1900**, 84]). Si de nos jours l'ombilicale s'est imposée dans le vocabulaire mathématique, le nom donné originellement par Darboux et Chasles a ainsi longtemps persisté à ses côtés. Cela incite à penser que la terminologie de Laguerre s'est en fait imposée pour une seconde raison : le choix de l'adjectif "*isotrope*" était particulièrement judicieux pour les objets imaginaires de la géométrie. Droites, plans et cônes isotropes sont en effet caractérisés par l'invariance de leurs propriétés angulaires dans toutes les directions. C'est ainsi parce que cette dénomination est naturellement apparue comme toute indiquée, parfaitement adaptée, que les objets *isotropes* de Laguerre se sont imposés dans le vocabulaire mathématique. Leur adoption rapide par Darboux, pourtant *a priori* réfractaire, ne peut qu'en attester.

7. Utilisation des focales des surfaces par Darboux dans les travaux liés à sa thèse

Cette section, centrée sur certains travaux effectués par Darboux entre 1865 et 1873, nous permet d'étudier par le biais de la théorie des focales la diversité des recherches du géomètre. Pertinente dans le cadre des géométries métriques, projectives et infinitésimales, son usage des focales (et des *développables* éponymes) révèle les rapprochements qu'il effectue entre des domaines de la géométrie très divers : les systèmes orthogonaux (7.1), la transformation géométrique nommée *inversion* (7.2) et les propriétés infinitésimales spécifiques des focales (7.3). De par l'évolution de ses méthodes, ainsi que la richesse des applications qu'il traite, nous soulignerons une première fois ici l'extension des centres d'intérêt de Darboux après 1870. Par ailleurs, une caractéristique de sa jeune *identité scientifique* sera mise en évidence via le problème des surfaces applicables : ne pas laisser un "*fait de calcul*" - une vérité analytique - sans interprétation géométrique sous-jacente. Le cheminement intellectuel de Darboux, bouleversé par la rédaction du *Bulletin des Sciences* fin 1869 et largement influencé par le cours des recherches des mathématiciens allemands, l'amènera par ailleurs à se construire une forte identité réciproque : ne pas laisser une interprétation géométrique sous-tendre une vérité analytique. Mais nous reviendrons sur cela dans les prochains chapitres.

7.1. Extension du théorème de Kummer : l'intrication entre focales et systèmes orthogonaux.

Dans l'introduction de son tout premier mémoire [**Darboux 1865**, 55], Darboux motive l'extension de la notion de focale à toutes les surfaces par la possibilité d'étendre le théorème de Kummer relatif aux "*propriétés focales des courbes orthogonales*". Nous avons étudié le théorème de Kummer en 3.1 : le géomètre allemand prouvait en toute rigueur que toutes les courbes d'un système double orthogonal compris dans une seule équation possédaient des foyers communs. Fort de sa définition des focales des surfaces, Darboux va montrer qu'un résultat plus précis peut être explicité pour les systèmes de surfaces triples orthogonales.

Darboux commence par rappeler qu'un système triple orthogonal compris dans une seule équation est, par définition, un ensemble de trois familles de surfaces orthogonales comprises dans l'équation :

$$f(x, y, z, \lambda) = 0$$

Il appellera un tel système "*un système orthogonal à la fois triple et un*" ([**Darboux 1866**, 98]) [164]. Cette équation est du troisième degré en λ puisque "*le degré de l'équation en λ détermine le nombre de ces surfaces qui passent par un point de l'espace*" ([**Darboux 1865**, 57]). Il va alors montrer qu'un tel système triple orthogonal est un système *homofocal*, c'est-à-dire que les surfaces dont il se compose ont exactement les mêmes focales. On voit que cela étend le théorème de Kummer en transposant le problème des courbes aux surfaces, mais également qu'il précise ce théorème dans le sens suivant : Kummer montrait en 1847 que le système de courbes admettait un certain nombre de foyers en commun. Ici, Darboux montre que la conclusion est plus forte : toutes les focales des surfaces sont communes.

La démonstration que Darboux donne en Janvier 1865 est extrêmement analogue à celle de Kummer : en notant XYZ, $X'Y'Z'$, et $X''Y''Z''$ les coordonnées des normales [165] des trois surfaces S, S', S'' du système en un même point de l'espace, l'orthogonalité des surfaces est traduite par les relations :

$$\begin{cases} XX' + YY' + ZZ' &= 0 \\ XX'' + YY'' + ZZ'' &= 0 \\ X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'' &= 0 \end{cases}$$

L'enveloppe du système est imaginaire, et en tout point de cette enveloppe le plan tangent coïncident avec les plans tangents des surfaces du système. En considérant les deux surfaces S et S', l'égalité des plans tangents - avec celui de l'enveloppe - équivaut à l'égalité des normales, soit : $(XYZ) = (X'Y'Z')$. Mais alors, en remplaçant dans la première relation d'orthogonalité, on trouve que les coordonnées du plan tangent de l'enveloppe satisfont la relation :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$$

Cela signifie que le plan tangent de l'enveloppe est un plan isotrope, ou comme l'exprime alors Darboux : "*quand on a un système de surfaces orthogonales [triple et un], ce système a pour enveloppe une surface développable dont les génératrices sont parallèles à celles du cône asymptote de la sphère [...] toutes ces surfaces sont homofocales, c'est-à-dire ont les mêmes focales*" [**Darboux 1865**, 58-59].

Ce théorème, que Darboux va reprendre en 1869 (dans le mémoire [**Darboux 1873a**] publié 4 ans plus tard) avec une démonstration plus géométrique, explicite le lien très fort qui existe entre les systèmes orthogonaux et les développables focales (ou isotropes) et donc indirectement entre ces systèmes et la notion de focale des surfaces. Pour une surface quelconque, les focales sont définies en cherchant la développable focale de cette surface qui lui est circonscrite. Dans le cas des systèmes (doubles - ou triples- et uns) orthogonaux, il se passe la chose suivante : c'est l'enveloppe du système elle-même qui est

164. Il convient de remarquer que la dénomination de "système triple orthogonal" évolue chez Darboux : dans son mémoire de 1865, ce nom stipule en particulier l'expression des surfaces du système dans une unique équation. Mais à partir de 1866 et de son travail de thèse, un "système triple orthogonal" n'est plus contraint d'être représenté par une unique équation, cette propriété caractérise dès lors les "systèmes orthogonaux (à la fois) triples et uns".

165. Comme le note Darboux, il s'agit des "*coefficients angulaires des normales*" ([**Darboux 1865**, 57]).

une développable focale ! Par conséquent, toutes les surfaces du système sont inscrites dans la même développable focale, et admettent les mêmes focales, à savoir les lignes doubles de leur enveloppe. On voit ainsi comment l'étude des systèmes orthogonaux, de courbes et de surfaces, mène à la considération bien particulière des développables focales : il s'agissait dans ce cas précis de l'enveloppe des systèmes, et cela incite à définir de manière générale les focales à l'aide des surfaces imaginaires de ce type.

La manière dont il présente ce même résultat dans son mémoire de 1873 montre bien que la pensée de Darboux a suivi ce cheminement :

> Soient d'abord deux systèmes orthogonaux représentés par une équation unique
> $$f(x, y, z, \lambda) = 0$$
> du second degré en λ. L'enveloppe commune de ces deux systèmes est une surface évidemment imaginaire, mais qui est dans tous les cas une développable focale. [...] Alors toutes les surfaces sont homofocales.
>
> [**Darboux 1873a**, 20-21]

La démonstration donnée par Darboux en 1865 de l'extension aux surfaces du théorème de Kummer, montrant qu'un système triple orthogonal compris dans une unique équation est homofocal, est ainsi très analytique. En revanche, les propriétés étudiées en lien avec ce même théorème en 1869 sont à la fois plus géométriques et plus précises. Il est intéressant de souligner trois différences majeures entre les deux mémoires :
- l'intervention du cercle de l'infini pour définir la perpendicularité
- la considération des lignes de courbure pour passer d'un système double à un système triple
- la rigueur analytique sous-jacente à l'utilisation de la théorie des enveloppes.

Pour commencer, il est remarquable que dans son mémoire "*Sur une classe remarquable etc.*" de 1869 Darboux utilise la théorie des polaires réciproques en lien avec le cercle de l'infini pour définir les relations de perpendicularité. Ceci est directement inspiré de Laguerre qui, en 1853, montra par la formule qui porte toujours son nom que l'angle de deux droites pouvait être évaluée par un rapport anharmonique portant sur celles-ci et les deux droites isotropes issues de leur intersection. Mais dans le cas particulier de la perpendicularité, il n'est pas nécessaire d'invoquer un rapport anharmonique car celui-ci ne devient que la traduction d'une relation de conjugaison : les rapports prennent donc la valeur -1. En effet, de même que deux droites du plan sont perpendiculaires si leurs points de rencontre respectifs avec la droite de l'infini sont conjugués par rapport aux points cycliques, dans l'espace deux plans sont perpendiculaires dès que les droites formées par leur intersection avec le plan de l'infini sont conjuguées par rapport à (C) [166], le cercle de l'infini. L'orthogonalité d'un plan et d'une droite revient alors simplement à dire que la trace de ce plan est, à l'infini, la polaire du point de rencontre de la droite et du plan de l'infini.

Darboux utilise ces approches projectives des relations d'orthogonalité pour simplifier sa démonstration du théorème étendant celui de Kummer aux systèmes triples orthogonaux. Le plan tangent en tout point de l'enveloppe du système possède cette propriété géométrique bien particulière d'être orthogonal à lui-même, propriété qui ne peut être

166. Rappelons que deux droites sont dites *conjuguées* par rapport à une conique si le pôle de l'une appartient à l'autre.

comprise dans la géométrie des éléments réels. En effet, il est à la fois tangent à une surface S du système triple et à une seconde surface S' perpendiculaire à la première. Cela signifie que la polaire du point à l'infini de la normale au plan tangent coïncide avec la trace de ce plan sur le plan de l'infini. Or cette situation caractérise les droites qui sont tangentes à ce cercle [167], et Darboux d'en conclure que la trace de tout plan tangent de l'enveloppe du système "*est tangente au cercle* (C). *L'enveloppe, ayant tous ses plans tangents au cercle de l'infini [i.e. isotropes] sera donc une développable focale*" ([**Darboux 1873a**, 20]). On verra dans la suite que ces définitions projectives de l'orthogonalité lui serviront encore dans l'étude de certaines lignes particulières des surfaces, les lignes de courbure et les géodésiques (voir 7.3).

Grâce au développement précédent, Darboux montre donc que l'enveloppe d'un système orthogonal triple et un S_3 défini par l'équation de degré 3 en λ : $f_3(x, y, z, \lambda) = 0$ est une développable focale. Cela achève de démontrer l'extension du théorème de Kummer, puisque les surfaces du système triple sont alors homofocales : leurs focales sont les lignes de double de l'enveloppe du système, qui est en particulier une développable focale dans laquelle toutes ces surfaces sont inscrites ([**Darboux 1873a**, 21]). Bien entendu, ces propriétés qui reposent sur la considération de l'enveloppe des systèmes de surfaces "*ne s'étendent pas à un système quelconque de surfaces orthogonales. Il faut que les trois systèmes ne soient pas donnés par des surfaces distinctes. Toutes les surfaces doivent être comprises dans une même équation*", comme c'était le cas pour les "*propriétés focales [des courbes planes orthogonales] reconnues par M. Kummer*" ([**Darboux 1864c**, 241]).

Mais en réalité, la propriété focale obtenue par Darboux ne repose que sur la considération d'un système double : en effet l'isotropie des plans tangents de l'enveloppe n'est obtenue que grâce à l'existence de deux surfaces orthogonales S et S' passant au point de tangence considéré. Cela signifie que l'enveloppe d'un système de surfaces double orthogonal S_2 défini par une unique équation de degré 2 en λ : $f_2(x, y, z, \lambda) = 0$ est encore une développable focale, que nous appellerons Δ_2. Le jeune géomètre nîmois se penche alors sur le problème de la complétion de ce système double et un pour en faire système triple orthogonal. Il s'agit ainsi d'adjoindre au système initial S_2, système orthogonal double et un, un second système de surface S_1, donné par une équation $g(x, y, z, \lambda) = 0$ de degré 1 en λ, de sorte qu'en chaque point de l'espace le triplet de surfaces formé par les deux surfaces tirées de S_2 et la surface tirée de S_1 soit orthogonal. La réunion $S_2 \cup S_1$ est alors un système triple orthogonal. Déjà en 1866 dans sa thèse, Darboux avait déterminé exactement la faisabilité de ce procédé en étendant un célèbre théorème de Charles Dupin datant de 1813 (ce que nous verrons ultérieurement dans [Chap.3,3.3]).

167. On pourra consulter le cours de Géométrie projective en ligne de Robert Rolland pour une première approche des relations de contact en lien avec la théorie des polaires réciproques, http://www.irem.univ-mrs.fr/IMG/pdf/projective.pdf.

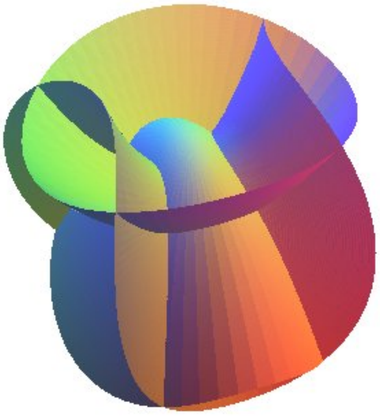


FIGURE 29. Un système double orthogonal formé de paraboloïdes hyperboliques homofocaux [168]

Il parvient à déterminer les relations géométriques entre l'enveloppe du système double Δ_2 et les surfaces du système juxtaposé S_1. En considérant une surface Σ de l'ensemble S_1 coupant l'enveloppe Δ_2, Darboux s'intéresse à leur courbe d'intersection. Puisque Σ est orthogonal aux surfaces dont Δ_2 est l'enveloppe, la tangente à la courbe d'intersection est en tout point perpendiculaire à Δ_2. Mais la géométrie bien particulière de cette développable fait qu'elle contient ses propres normales, lesquelles sont ses "*génératrices rectilignes*" : des droites isotropes. Aussi l'intersection $\Delta_2 \cap \Sigma$ est-elle exclusivement formée par un ensemble de droites, un nombre fini de génératrices de Δ_2. Il peut néanmoins arriver que l'intersection contienne l'arête de rebroussement de la développable, courbe à laquelle toutes les génératrices isotropes sont tangentes, et ainsi que le remarque Darboux ceci constitue la seule exception possible d'une intersection non rectiligne. Cela permet par ailleurs au jeune géomètre de donner, dès 1865, une preuve géométrique de l'impossibilité de former des systèmes orthogonaux triples et uns en partant d'une surface quelconque. En effet il remarque que, dans le cours de la démonstration précédente, il vient de prouver le point suivant :

> Toute surface d['un] système [orthogonal triple et un] contient des droites, et le lieu de ces droites forme l'enveloppe du système. [...] On voit bien d'après cela pourquoi une surface quelconque ne peut faire partie d'un [tel] système triple orthogonal. Ainsi il n'y aura pas de système orthogonal [triple et un] formé de surfaces des ondes [169], car on ne peut placer aucune droite sur ces surfaces.
>
> [**Darboux 1865**, 59-60]

Le géomètre nîmois montre encore que les droites isotropes résultant de l'intersection de Δ_2 et de Σ sont liées à la courbure de cette-dernière. De même que son extension du théorème de Dupin repose essentiellement, comme nous le verrons par la suite, sur

168. Crédits image : *mathcurve.com*.

169. A propos de la surface des ondes (encore appelée surface de l'onde ou surface de Fresnel), on consultera mathcurve.com/surfaces/ondes/ondes.shtml. Pour le lien avec les complexes de droites et la surface de Kummer, voir [**Knörrer 1986**].

la considération des lignes de courbures, Darboux affirme que ces intersections rectilignes révèlent en fait l'enveloppe des lignes de courbure de Σ. Cette enveloppe - nécessairement constituée de droites isotropes en vertu du théorème de Kummer - est en effet tangente, en tous les points où elle rencontre Δ_2, aux normales de cette développable. Une fois encore, en remarquant que ces normales coïncident avec les génératrices, Darboux parvient au résultat suivant :

> Quand on a trois systèmes de surfaces orthogonales, et que les deux premiers sont compris dans une seule équation [...] leur enveloppe est une développable [focale] coupée suivant des droites par les surfaces du troisième système. Ces droites sont évidemment, sur chaque surface du troisième système, des enveloppes des lignes de courbure de cette surface.
>
> [**Darboux 1873a**, 21]

Il convient ici de souligner comment les extensions et les précisions du théorème de Kummer, c'est-à-dire l'analyse des propriétés focales des systèmes orthogonaux, ont guidé Darboux vers des considérations de géométrie infinitésimale. L'étude d'un système orthogonal composé d'un système double et d'une troisième série l'amène ainsi à s'intéresser aux lignes de courbures des surfaces de la série. Pourtant, de la géométrie infinitésimale des surfaces (recherche des lignes de courbure, des géodésiques et des lignes asymptotiques) Darboux n'emploie ici aucune des méthodes analytiques générales : c'est l'approche des cas particuliers impliquant le cercle de l'infini qui l'amène à des résultats géométriques sans l'aide des résolutions analytiques. Nous développerons ce point dans la partie 7.3.

Remarquons pour finir que dans le mémoire publié en 1873, Darboux émet explicitement des réserves quant à l'obtention de résultats géométriques basés sur la théorie des enveloppes. Rigoureux dans son appréhension en analyse de la théorie des fonctions et de la notion de continuité, il fait le lien avec la méthode géométrique des enveloppes, tant utilisée depuis Monge, et rappelle dès qu'il en a l'opportunité que cette méthode est soumise à des conditions : selon lui, l'existence des enveloppes ne doit en aucun cas être considérée comme une évidence. Aussi lorsqu'il parle de l'enveloppe des lignes de courbure d'une surface, il prend soin d'ajouter dans un premier temps "*(quand les lignes de courbure ont une enveloppe)*", avant de rappeler plus résolument ensuite : "*il ne faut pas oublier [...] que généralement il n'y a pas d'enveloppe pour le système des 2 lignes de courbure*" ([**Darboux 1873a**, 24]). Finalement, on trouve dans la conclusion de son extension du théorème de Kummer, un paragraphe dans lequel Darboux évoque la "*valeur*" à accorder aux principes géométriques reposant sur les enveloppes en lien avec l'analyse. Il y justifie par ailleurs de continuer de conserver, dans sa propre exposition, de tels raisonnements :

> Ces propositions sont naturellement sujettes à beaucoup d'exceptions, comme toutes celles qui sont fondées sur la théorie des enveloppes et de la continuité. Aussi ne faut-il pas leur donner une valeur absolue, et, si nous les avons exposées, c'est que le procédé de démonstration qui les donne nous a paru susceptible d'être employé dans les cas où elles sont en défaut, et conduit alors, pour chaque cas particulier, à des remarques rigoureuses et précises. Nous les vérifierons pour un système orthogonal remarquable dans la suite de ce travail. On peut dès à présent reconnaître qu'elles sont exactes pour les surfaces du second degré.
>
> [**Darboux 1873a**, 22]

Darboux fait ainsi preuve d'une clairvoyance qui mérite d'être mise en valeur à propos des limites de validité des raisonnements employés par les géomètres reposant sur des arguments de continuité. Cependant, l'emploi des propriétés qu'il utilise en lien avec ce principe trouvent selon lui une double justification : elles sont d'une part vérifiées pour la "*classe remarquable de courbes et de surfaces*" à laquelle est dédié son travail, et d'autre part leur étude se révélerait intéressante et féconde y compris dans les situations où la méthode des enveloppes cesse d'être valide. Cette capacité naturelle dont fait preuve Darboux à remettre en question l'assise rigoureuse de principes, de géométrie ou d'analyse, pourtant alors largement acceptés sera particulièrement fructueuse dans son approche des bases du calcul différentiel et intégral ou encore dans la théorie des intégrales singulières des équations aux dérivées partielles. Nous reviendrons plus loin sur ces sujets dans les parties [Chap.7,1 & 2].

7.2. Études des propriétés de l'inversion (ou transformation par rayons vecteurs réciproques) de Thomson.

Dans son premier mémoire de 1865 ou dans son ouvrage publié en 1873, Darboux relie l'étude des focales et des propriétés des éléments isotropes avec une transformation géométrique particulière : l'inversion par rapport à une sphère. Cette transformation, déjà utilisée par Steiner et Plücker pendant la première moitié du XIXème siècle, est devenue la source de nombreuses études après que le jeune physicien de Glasgow William Thomson - futur Lord Kelvin - en a fait mention dans ses lettres à Joseph Liouville durant les années 1845-1846. Liouville, qui publia certaines de ces lettres dans son "*Journal*", aperçut la fécondité de cette application et parvint grâce à elle à de nombreux résultats entre 1846 et 1850. Son théorème le plus célèbre reste l'obtention de toutes les applications conformes de $\mathbb{R}^3$ comme composées d'inversions et de similitudes [170], mais on lui doit également le résultat que la composition d'inversions est encore une inversion.

170. Pour plus de détails sur l'inversion et les travaux de Thomson et de Liouville s'y rapportant, voir [**Lützen 1990**, 727-739]. Notons que d'un point de vue moderne, la composition d'un nombre impair d'inversions renverse l'orientation de l'espace.

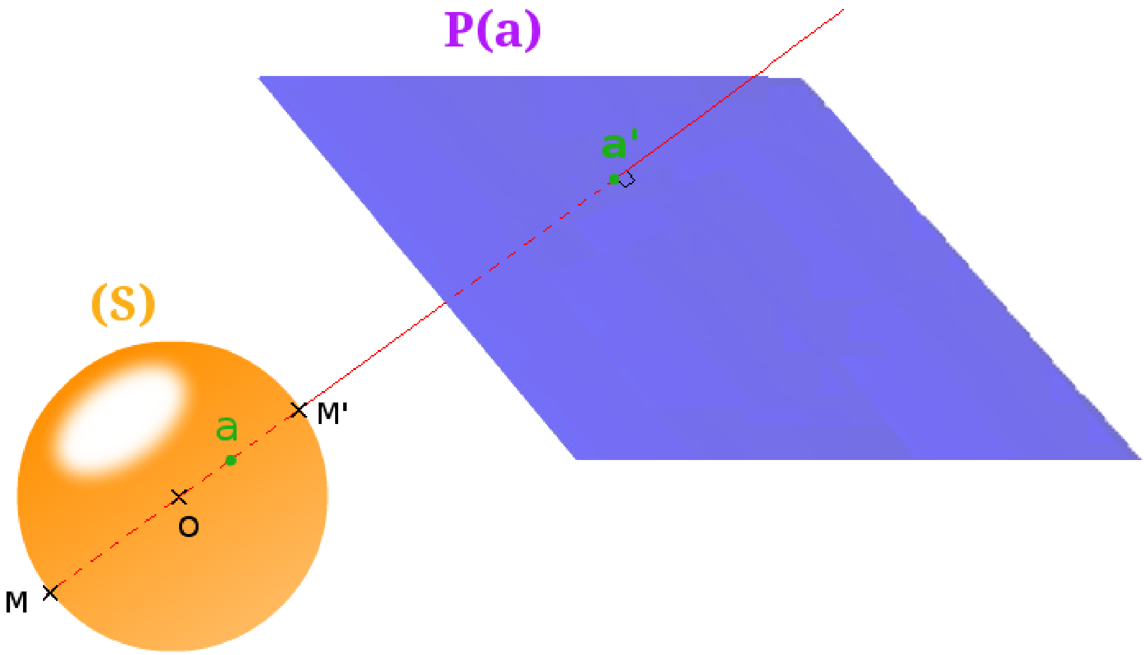


FIGURE 30. L'image du point a par l'inversion de sphère principale S est la point a'. Le plan polaire de a, par rapport à la même sphère, est le plan $P(a)$ passant par a' et orthogonal à (Oa).

L'inversion, que Thomson avait appelée à l'origine "*principe des images électriques*", est en revanche dénommée par Liouville *transformation par rayons vecteurs réciproques*. Transformation birationnelle, elle associe à un point un autre point, et ne doit ainsi pas être confondue avec la transformation par *polaire* réciproque qui est une transformation duale associant à un point un plan, son plan polaire. L'inversion est définie par rapport à une sphère (S) dite principale, directrice, ou encore sphère d'inversion. Si (S) est de centre O et de rayon R, en considérant un point a de $\mathbb{R}^3$ on peut définir son image a' comme le point de la demi-droite $[Oa)$ tel que $Oa \cdot Oa' = R^2$. Le lien avec la transformation polaire est alors le suivant : le plan polaire du point a, $P(a)$, est le plan perpendiculaire à (Oa) passant par a' (voir ce plan en bleu dans la figure 30).

Les propriétés principales de l'inversion sont de transformer les sphères ne passant pas par le centre d'inversion O en des sphères de même nature. Les sphères passant par O sont quant à elles transformées en des plans ne passant pas par O. Les droites sont généralement transformées en des cercles, exceptées celles qui sont issues de O qui sont invariantes par inversion. Plus globalement, les points situés sur la sphère d'inversion (S) sont invariants, et un point situé à l'extérieur sera envoyé par inversion sur un point situé à l'intérieur de (S). Enfin, les réciproques de toutes ces propriétés sont vraies puisque l'inversion est une "*transformation involutive*" d'après "*une heureuse expression de M. [Abel] Transon*" ([**Darboux 1873a**, 5]).

Au début des années 1860, ce sont les deux polytechniciens Théodore Moutard (X 1844) et Amédée Mannheim (X 1848) - voir figure 31 - qui vont effectuer de nouveaux travaux sur la transformation par rayons vecteurs réciproques. Ils travaillent alors ensemble à une réédition des "*Applications d'Analyse à la Géométrie*" de Poncelet qui sera publiée en deux tomes en 1862 et 1864. Moutard, né dans le Haut-Rhin en 1827, est examinateur à l'Ecole Polytechnique et sera à partir de 1875 professeur à l'Ecole des mines. Mannheim, quatre ans plus jeune, est lui natif de Paris. Comme Laguerre, il se consacre une dizaine d'années à une carrière militaire avant de rejoindre son Ecole formatrice comme répétiteur et examinateur au côté de son ami Moutard. Mais Mannheim restera toute sa vie à l'Ecole Polytechnique où il enseignera surtout la géométrie descriptive.

Moutard et Mannheim utilisent l'inversion pour examiner une surface particulière : la cyclide de Dupin. C'est Mannheim qui dans un mémoire de 1860 montre comment cette cyclide peut être obtenue à partir d'un tore par des transformations par rayons vecteurs réciproques ([**Mannheim 1860**]). Il retrouve ainsi bon nombre des propriétés de ces surfaces en les ramenant à la seule étude du tore. Nous avons déjà mentionné que la cyclide de Dupin était la surface obtenue lorsque l'on astreint les nappes des centres de courbure (les fameuses *surfaces focales* ou *caustiques*) à devenir des courbes[171]. Mais une seconde manière de générer la cyclide de Dupin, celle étudiée à l'origine par le Baron Charles Dupin (dans [**Dupin 1813**]), est de considérer l'enveloppe d'une série de sphères devant respecter une condition de tangence à trois sphères fixées. Cela incitera Moutard à s'intéresser plus particulièrement à la transformation par rayons vecteurs réciproques des surfaces obtenues comme enveloppes de sphères. Recherchant parmi ces surfaces celles qui sont invariantes par une inversion convenablement choisie, Moutard remplace la condition de tangence par une condition d'orthogonalité à une sphère fixe : en effet, les seules sphères invariantes par l'inversion de sphère (S) sont précisément celles qui sont orthogonales à (S). Il donnera alors en 1864 à ces surfaces invariantes par une inversion le nom - "*curieux*" selon Coolidge - d'*anallagmatiques* (voir ses deux communications [**Moutard 1864a**] et [**Moutard 1864b**]).

Figure 31. Le trio d'amis polytechniciens (de gauche à droite) Edmond Bour (X 1850), Amédée Mannheim (X 1848) et Théodore Moutard (X 1844).

171. Voir [**Berger Gostiaux 1992**, 445] ou [**Mannheim 1860**, 74].

A la suite des travaux de Mannheim et de Moutard (qu'il n'apprécie guère [172]) Darboux s'intéresse aux propriétés de la transformation par rayons vecteurs réciproques et en particulier au comportement des focales des surfaces en lien avec cette transformation. Sa définition de l'inversion est projective, ce en quoi elle diffère de celle que nous avons énoncée précédemment. En considérant un point a, la sécante (Oa) coupe la sphère d'inversion en deux points M et M' - lesquels définissent un diamètre de (S). L'image de a par inversion, a', sera alors définie comme étant le *conjugué harmonique* de a par rapport au segment MM', soit en terme de rapport anharmonique de Chasles $(M, M', a, a') = -1$. C'est cette définition que Darboux donne de la transformation par rayons vecteurs réciproques dans son ouvrage [**Darboux 1873a**, 4-5]. Cela lui permet en effet d'étudier le comportement des objets projectifs complexes de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$, spécifiquement ceux liés au cercle de l'infini.

Dans l'espace projectif, Darboux remarque que l'inversion perd son caractère birationnel : au pôle O correspondent en effet tous les points du plan de l'infini. De même, il remarquait en 1865 que lorsqu'on la transforme par rayons vecteurs réciproques, une surface développable "*n'est pas transformée en surface développable [puisque] les droites se transforment en cercles*" ([**Darboux 1865**, 60]). Néanmoins, la compatibilité de la notion de focales des surfaces avec l'inversion que Darboux va exhiber vient des propriétés particulières des éléments isotropes, touchant le cercle de l'infini. Plus spécifiquement, le géomètre nîmois prouve que des droites isotropes se transforment toujours par inversion en des droites isotropes. Dans son mémoire de 1865, Darboux sous-tend sa démonstration sur le calcul analytique de l'image du cône asymptote d'une sphère (donc isotrope). En notant ce cône $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0$, son image par une inversion sera donnée par le second cône de même nature $(x-a')^2 + (y-b')^2 + (z-c')^2 = 0$. Il en conclut alors que "*les génératrices du premier cône deviennent les génératrices du second cône*" ([**Darboux 1865**, 60]). Dans le mémoire qu'il écrit en 1869, aucune considération ne repose sur l'analyse. Darboux commence par mettre en relief l'asymétrie existant entre les antécédents et les images de la transformation pour les cas particuliers du pôle O, le centre de la sphère d'inversion (S), et du cercle de l'infini (C). Un point du cône asymptote de la sphère d'inversion (que l'on peut considérer comme la sphère de rayon nul centrée au pôle O) a en effet pour image un point du cercle de l'infini. Mais la réciproque n'est pas exacte puisqu'à un point du cercle de l'infini a' correspondent tous les points de la droite isotrope Oa' : n'importe lequel de ces points est en effet le conjugué harmonique de a' puisque la droite Oa' coupe alors la sphère en le seul point a'. Ces remarques permettent à Darboux de se pencher sur la transformée d'une droite isotrope quelconque $D(a)$, coupant le cercle de l'infini au point a. Celle-ci est en fait transformée en un couple de droites : la première est la droite isotrope (Oa), image du point a. La seconde sera déterminée par l'image des intersections m et b de $D(a)$ respectivement avec la sphère d'inversion et le cône asymptote. Cette seconde droite passe ainsi par l'image de b qui est, puisque b est sur le cône asymptote, sur le cercle de l'infini. Finalement, cela signifie que les deux droites images de la droite isotrope $D(a)$ sont bien des droites isotropes ([**Darboux 1873a**, 7]).

172. Plein de dédain envers les polytechniciens, Darboux écrira à Hoüel en 1870 que Laguerre "*remplace Bour dans le trio Bour Mannheim Moutard*". Quelques jours plus tôt, Darboux avait appris que Mannheim avait tenté de ne pas faire renouveler les fonctions d'examinateur de Charles Briot : "*C'est Mannheim qui a levé ce lièvre-là. Il ne l'emportera pas au paradis*" ([**Gispert 1987**, 127-140]). Au fil des années, Darboux apprendra à apprécier Laguerre qui deviendra finalement vraiment l'un de ses amis, mais son inimitié envers Moutard et surtout Mannheim restera elle toujours intacte.

Darboux a ainsi bien obtenu grâce aux droites isotropes que "*les surfaces réglées formées de ces droites se transforment en surfaces réglées*" toujours formées de droites isotropes. Il considère ensuite naturellement les surfaces développables formées de ces droites : les développables focales. L'inversion transforme les cônes isotropes en des cônes isotropes, ou ce qui revient au même des sphères de rayon nul en des sphères de rayon nul. Darboux considère alors les développables focales comme "*les enveloppes des sphères de rayon nul ayant leurs centres sur l'arête de rebroussement*" ([**Darboux 1873a**, 8])[173]. Par inversion, ces sphères de rayon nul se transforment en une série de sphères étant également de rayon nul, et dont les centres décrivent une nouvelle courbe. Leur enveloppe est ainsi bien une nouvelle surface développable dont cette nouvelle courbe constitue l'arête de rebroussement. Ses génératrices sont bien sûr restées des droites isotropes. Ceci permet à Darboux d'aboutir aux résultats suivants :

> Les développables focales se transforment [par rayons vecteurs réciproques] en développables focales, et par suite les transformées des focales seront les focales de la nouvelle surface. Ce théorème s'applique évidemment aux courbes et aux surfaces.
>
> [**Darboux 1873a**, 24]

La notion de focale est donc bien adaptée à la transformation par rayons vecteurs réciproques. En particulier, une surface invariante par cette transformation - donc *anallagmatique* - possédera ses focales elles aussi invariantes. L'étude de l'inversion renforce pour Darboux le rôle particulier joué par le cercle de l'infini et plus précisément ici par les droites (isotropes) le rencontrant. Non seulement ces droites jouissent de la propriété de se transformer par inversion en des droites du même genre, mais Darboux remarque que la géométrie et les propriétés métriques qui s'y rattachent permettent, par des considérations de géométrie imaginaire uniquement, d'apporter des réponses à des problèmes de géométrie infinitésimale nécessitant d'ordinaire l'intervention des ressources de l'analyse. C'est ce que nous nous proposerons d'étudier ci-après en 7.3.

Une grande partie des travaux liés à l'inversion que Darboux expose dans son mémoire de 1873 se concentrent sur l'application et les propriétés de cette transformation en lien avec les courbes et les surfaces orthogonales (*cycliques* et *cyclides*) que cet ouvrage a pour but d'analyser en profondeur. Nous reviendrons en conséquence plus loin, dans la partie [Chap.3,4.1 & 5], sur ces recherches où l'inversion est appliquée à des cas spécifiques. Néanmoins nous pouvons ici étendre l'analyse des travaux de Darboux à ses recherches portant sur les surfaces anallagmatiques en général. En effet, deux paragraphes intitulés "*généralités sur les surfaces anallagmatiques*" et "*d'un mode de transformation déduit de la théorie des anallagmatiques*" présentent dans [**Darboux 1873a**, 120-127] les résultats du rédacteur du "*Bulletin des Sciences*" s'y rapportant. Ces résultats se détachent en deux parties : la première est à l'image du travail de MacCullagh relatif aux focales (voir 4.5), en ceci qu'elle établit les preuves rigoureuses et les liens entre les différentes définitions ou générations qui étaient alors déjà connues des surfaces anallagmatiques. La seconde en revanche exhibe une transformation permettant d'obtenir de manière systématique des surfaces anallagmatiques, transformation faisant correspondre des sphères à des plans.

173. Cela revient à considérer la surface développable focale non plus comme l'enveloppe de ses plans tangents mais comme enveloppe des cônes isotropes dont les sommets sont regroupés sur l'arête de rebroussement à laquelle les génératrices - certaines des droites isotropes des cônes - restent tangentes.

En présentant à l'Académie par l'intermédiaire de Pierre-Ossian Bonnet sa note de 1864, Moutard avait défini les surfaces anallagmatiques comme les surfaces laissées invariantes par une inversion convenablement choisie. Or nous avons vu qu'une propriété essentielle des sphères dans l'inversion résidait dans le fait que les sphères orthogonales à la sphère d'inversion sont invariantes. S'appuyant implicitement sur cette propriété, Moutard avait alors énoncé sans en donner de preuve :

> Toute surface anallagmatique peut être définie comme le lieu des intersections successives d'une sphère assujettie à couper orthogonalement la sphère principale [...]
>
> [**Moutard 1864a**, 308]

La sphère principale, dite également sphère directrice, devient alors la sphère (S) de l'inversion que l'on doit considérer pour obtenir l'invariance de la surface. Moutard énonce en d'autres termes que toute anallagmatique (Σ) est obtenue comme enveloppe de sphères orthogonales à la directrice (S). De La Gournerie donnera par la suite le nom de *surface déférente* (B) à la surface décrite par les centres des sphères orthogonales à (S) dont on considère l'enveloppe ([**Gournerie 1869**]).

En 1868, dans deux notes publiées au Bulletin de la Société Philomathique, Edmond Laguerre considérera en revanche la génération de l'anallagmatique non plus comme une enveloppe mais via les plans tangents à la déférente (B) ([**Laguerre 1868a**] et [**Laguerre 1868b**]). Ces plans tangents coupent la sphère directrice (S) selon des cercles, et l'anallagmatique est alors obtenue pour Laguerre comme "*les sommets des cônes isotropes [que] par ce[s] cercle[s] on peut faire passer*" ([**Laguerre 1868a**, 18]). Dans les termes que Darboux utilisera, les points de l'anallagmatique sont ainsi les centres des sphères de rayon nul passant par les cercles que décrivent les plans tangents à la déférente sur la directrice. Remarquons par ailleurs qu'on retrouve ici, en comparant les travaux de Moutard, Laguerre et Darboux, un nouveau problème de vocabulaire que nous ne ferons qu'évoquer. Dans la communication initiale de Moutard en 1864, on peut interpréter de deux manières le nom nouveau d'*anallagmatique* qu'il introduit alors : on peut, comme nous l'avons fait jusqu'ici et comme le fait Darboux, l'utiliser pour désigner l'ensemble des surfaces laissées stables par inversion. Mais on peut également interpréter cette dénomination comme rassemblant uniquement les surfaces du quatrième ordre qui possèdent cette propriété, surfaces que Moutard soumet à l'analyse dans sa note. C'est cette seconde interprétation qui est adoptée par Laguerre : pour lui, il est acquis que les anallagmatiques sont des surfaces du quatrième ordre, et on retrouve l'impact de cette conception dans ses travaux. L'irlandais John Casey fera état de cette ambiguïté en 1871 : "*une telle surface [du quatrième ordre admettant le cercle de l'infini pour ligne double] a été appelée par Moutard une 'surface anallagmatique', et par Darboux une 'cyclide'. J'adopterai le second nom*" ([**Casey 1871**, 587]). Si le sens qu'il donne à ces surfaces est plus étroit que ce qu'il est à d'autres mathématiciens, la généralité de la méthode de génération des anallagmatiques de Laguerre va se révéler correcte pour les surfaces *anallagmatiques quelconques* : c'est ce que Darboux va démontrer. Toujours est-il que c'est cette ambiguïté de dénomination qui aura poussé Darboux à "*distinguer [l]es surfaces [du quatrième ordre] des autres anallagmatiques [et ainsi] leur donner le nom de* cyclides" ([**Darboux 1869b**, 1313]), un nom qu'elles portent toujours aujourd'hui associé à celui de Darboux, et que nous étudierons dans le chapitre 3.

Dans son mémoire de 1873, le géomètre nîmois explique comment la considération du plan tangent de la déférente permet de prouver géométriquement de manière simple l'énoncé initial de Moutard stipulant que toutes les anallagmatiques étaient obtenues comme enveloppes de sphères orthogonales à la directrice. Les deux points m, m' d'une de ces sphères touchant l'enveloppe (Σ) sont en effet symétriquement positionnés par rapport au plan tangent de la déférente (B) au centre de cette sphère, et sont par ailleurs alignés avec le centre O de la directrice (S)[174]. Aussi m et m' sont-ils images l'un de l'autre par l'inversion de sphère (S).

Ensuite, Darboux remarque que les sphères orthogonales à (S) ayant leur centre dans le plan tangent (P) de la déférente coupent à angle droit toute sphère contenant le cercle d'intersection décrit par la rencontre de (P) et de (S). Par conséquent, le cas particulier des sphères de rayon nul est obtenu précisément pour les deux points m et m', ce qui établit à partir de l'approche de Moutard la définition donnée par Laguerre.

Au regard des surfaces anallagmatiques, l'apport de Darboux est donc caractérisé par son recul et sa vision synthétique permettant d'apprécier les différentes méthodes et d'en établir rigoureusement les connexions. Cela lui donne ensuite la possibilité de choisir d'adopter les approches les plus appropriées en fonction des propriétés qu'il entendra étudier. Par exemple, en adoptant la vision de Moutard, on voit que les points situés sur l'intersection de la surface déférente (B) et de la sphère directrice (S) peuvent être considérés comme des sphères de rayon nul ; si l'on ajoute à cela la génération de Laguerre, on comprend que ces sphères sont doublement tangentes à l'anallagmatique (Σ). On obtient alors la propriété générale des anallagmatiques, énoncée pour la première fois par Moutard en 1864 mais qui ne trouve sa preuve que dans le mémoire de Darboux, d'avoir pour focales les courbes sphériques données par les intersections des sphères d'inversion et des surfaces déférentes associées - en ne considérant bien sûr que les inversions laissant (Σ) invariante. On comprend ainsi pourquoi les focales des anallagmatiques sont elles-mêmes anallagmatiques : ce sont des courbes sphériques sur les sphères directrices.

L'étude des liens entre les deux conceptions des anallagmatiques révèle un caractère géométrique intrinsèque de ces surfaces : dans la construction de Laguerre, "*les points* m, m' *[de* (Σ)*] ne dépendent que du plan tangent et nullement du point de contact de ce plan [à la déférente]*" ([**Darboux 1873a**, 122]). La construction d'une allagmatique ne repose ainsi en définitive que sur une sphère directrice (S) et une série de plans (P), pourvu que ces plans soient tangents à une certaine surface qui deviendra alors la déférente. Ceci incite Darboux à s'intéresser aux applications qui transforment des plans en des sphères. Pour générer des anallagmatiques, il convient de plus de s'intéresser aux sphères orthogonales à une sphère donnée, la (future) directrice. Dans son mémoire de 1865, Darboux montre une première approche de ces transformations, mais en dépit de ce qu'il affirmera plus tard[175] celles-ci ne sont pas encore tout à fait au point. C'est dans le second mémoire (paru en

174. La propriété d'alignement provient de ce que mm' est l'axe radical commun à toutes les sphères infiniment proches de la sphère considérée. Puisque ces sphères sont orthogonales à la directrice, la puissance de ces sphères par rapport à (S) ne change pas : aussi O appartient-il à cet axe.

175. Darboux répétera souvent qu'il "*avait fait connaître [ou envisagé] dès 1865 un mode de transformation des figures dans l'espace*" permettant de généraliser la génération des anallagmatiques (voir [**Darboux 1917**, 484], ou [**Darboux 1894**, 492]). Mais l'énoncé rigoureux et la description des propriétés géométriques de sa transformation de surfaces quelconques en anallagmatiques n'apparaît que dans son mémoire de 1869 paru en 1873 ([**Darboux 1873a**, 122-124]).

1873) que Darboux exhibe correctement la transformation générale adaptée à la génération des anallagmatiques.

En centrant les coordonnées en un point O, Darboux considère la sphère (S) centrée en O de rayon R. Sa transformation doit associer des sphères à des plans, mais comme il le remarque, "*les géomètres sont plus habitués aux transformations dans lesquelles les points correspondent aux points, on pourra [donc] substituer à la figure formée par les plans [servant d'antécédent] sa polaire réciproque par rapport à la sphère*" ([**Darboux 1873a**, 122]). Rappelons pour remettre cette remarque de Darboux dans son contexte qu'entre 1860 et 1867 le mathématicien italien Luiggi Cremona avait développé à Bologne ses théories des transformations birationnelles qui portent toujours son nom. Darboux relie donc ici les transformations par polaires réciproques et par rayons vecteurs réciproques pour aboutir à une transformation qui à un point M en fait correspondre deux, m et m', dont l'expression analytique est assez simple. En prenant les coordonnées du point antécédent $M(X,Y,Z)$, les coordonnées (x,y,z) des points images m,m' sont en effet données par :

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \frac{R}{R \pm \sqrt{\Omega}} \quad \text{avec} \quad \Omega = R^2 \left(\frac{x^2+y^2+z^2-R^2}{x^2+y^2+z^2+R^2} \right)^2$$ [**Darboux 1873a**, 123]

Les points m et m' sont situés sur la droite (OM) et sont inverses l'un de l'autre par l'inversion de sphère (S), mais surtout leur propriété essentielle est d'être les centres des sphères de rayon nul passant par l'intersection de la sphère (S) et du plan polaire de M. Grâce à cette propriété, cette transformation permet de générer à partir d'une surface quelconque une anallagmatique par l'inversion de sphère (S). Les polaires réciproques permettent en outre d'en connaître la déférente :

> Dans ce mode de transformation, à une surface (B'), lieu du point [M] correspond une surface anallagmatique Σ, dont la sphère directrice est (S), et dont la déférente est la polaire (B) de (B') par rapport à (S).
>
> [**Darboux 1873a**, 122]

Mais Darboux illustre encore l'intérêt de cette transformation - que nous noterons Φ pour plus de simplicité - en montrant qu'elle permet de déterminer les focales de toutes les surfaces anallagmatiques. Il commence par mettre en avant la transformation des propriétés de tangence à la sphère d'inversion de référence (S), et souligne dans ce cadre que "*si une surface est tangente à (S) en tous les points d'une ligne (L), celle-ci est ligne double de l'anallagmatique correspondante*" ([**Darboux 1873a**, 125]). La détermination des lignes doubles des développables focales est alors présentée comme étant une application de ce résultat.

> Soient une surface (B') et l'anallagmatique correspondante $(\Sigma) = \Phi(B')$. Les focales de (Σ) se déterminent de la manière suivante : circonscrivons à (B') et à (S) une développable (Δ), et soit (F) la courbe de contact de cette développable (Δ) et de (S). Les plans [tangents] de (Δ) ont pour correspondants les points-sphères [sphères de rayons nuls] ayant leurs centres sur (F). Donc la surface $[(\Delta') = \Phi(\Delta)]$ sera l'enveloppe d'une suite de sphères de rayon nul, et par conséquent sera une développable focale. Ses génératrices correspondront par couples à celles de (Δ), elle aura une courbe double de plus que (Δ), la courbe (F).

[**Darboux 1873a**, 126]

La transformation de Darboux générant les anallagmatiques donne donc une correspondance nette entre les développables circonscrites aux sphères d'inversion (S) et les développables focales circonscrites aux anallagmatiques. La développable focale (Δ') circonscrite à une anallagmatique est la transformée de la développable (Δ) dans laquelle sont inscrites à la fois la sphère d'inversion (S) et la polaire réciproque de la déférente associée. Le géomètre va appliquer les nombreuses conséquences de ces remarques à l'étude des "*surfaces remarquables*", sujet principal du mémoire [**Darboux 1873a**] (voir [Chap.3,4.1 & 5]). Sans les énoncer comme des théorèmes indépendants, il utilisera surtout les deux propriétés suivantes découlant de la construction des développables focales circonscrites aux anallagmatiques :

- Les focales des anallagmatiques sont des courbes sphériques situées sur les sphères d'inversion.

- Deux anallagmatiques sont homofocales dès que les polaires réciproques de leurs déférentes sont inscrites avec la sphère d'inversion dans une même développable.

On constate que la fécondité de la méthode de Darboux doit ici être reliée à sa capacité d'analyse et de synthèse des méthodes existantes, ainsi que par son aptitude à employer avantageusement des outils appartenant à des domaines variés. Ici, la transformation par polaires réciproques, l'expression analytique des transformations géométriques et la définition des anallagmatiques donnée par Laguerre viennent chacune enrichir la construction si générale et pourtant si simple du jeune géomètre gardois. L'étude de la génération des surfaces développables focales par cette transformation Φ l'amène à des conclusions générales relatives à toute surface anallagmatique. Nous verrons notamment en [Chap.3,4.2] que ces recherches résultent en grande partie de l'analyse en profondeur à laquelle s'est livré Darboux durant l'année 1872 sur les propriétés métriques et géométriques des systèmes de sphères, qui deviennent alors l'objet central de sa géométrie. Pour autant, c'est la compréhension des connections entre points, plans et sphères, entre polaires et rayons vecteurs réciproques, qui donne à sa recherche un fort degré de généralité.

Dans ses leçons de Géométrie, Darboux poursuivra l'étude de ce mode de transformation et en exhibera des propriétés diverses comme la conservation des angles ([**Darboux 1894**, 496]) ou la génération, après composition par homographie, de toutes les transformations ponctuelles faisant correspondre à tout plan une sphère ([**Darboux 1917**, 484]). L'étude comparée des classes, degrés, points doubles, tangences au cercle de l'infini, etc., de la surface d'origine (B') et de son image anallagmatique (Σ) constituera par ailleurs un objet privilégié d'application pour les études des singularités ordinaires des courbes et des surfaces.

7.3. La géométrie infinitésimale particulière des développables focales.

Au-delà de leur importance pour la définition des focales des surfaces, la construction géométrique particulière des développables focales (ou isotropes d'après Laguerre) permet à Darboux d'en retirer plusieurs propriétés ayant trait au domaine de la géométrie infinitésimale. Les spécificités des lignes de courbure et de certaines des lignes géodésiques des développables focales lui permettent en effet de déduire des énoncés généraux s'appliquant à des surfaces quelconques. Nous allons étudier comment, grâce aux propriétés fortes de ces surfaces imaginaires, Darboux obtient des résultats uniquement (ou presque) par la géométrie alors que ces résultats nécessitaient au premier abord l'emploi de méthodes analytiques. Ainsi que nous l'avons effectué plus haut en 7.1 pour l'extension du théorème des orthogonales homofocales de Kummer, nous soulignerons l'évolution des méthodes de Darboux entre 1864 et 1873. Nous insisterons également sur la force du géomètre à relier des questions semblant bien différentes en analysant la compréhension qu'il apporte à une remarque, alors restée inexpliquée, faite par Edmond Bour relative à la théorie des surfaces développables.

Dans un premier temps, nous allons étudier le lien effectué par Darboux entre les développables focales et les lignes de courbure. Les lignes de courbure d'une surface quelconque peuvent être définies au voisinage de chaque point par les deux directions le long desquelles la courbure des lignes tracées sur la surface est minimale et maximale. Ces deux directions étant perpendiculaires, les lignes de courbure sont un système de lignes orthogonales de la surface. Nous avons souligné (voir 6.2) que Monge retrouvait quant à lui les lignes de courbure en assemblant les normales de la surface d'une manière telle que les surfaces réglées formées des normales soient développables - et donc possèdent une enveloppe [176]. La détermination des lignes de courbure d'une surface peut se faire localement à partir de ce qu'on appelle les première et deuxième *formes fondamentales* de la surface. Celles-ci s'expriment à partir de l'expression du carré de "*l'élément linéaire*", noté ds^2, qui permet de définir la distance entre deux points infiniment proches de la surface. Ce "*carré du différentiel de l'arc de surface*", comme l'a si joliment dit Gino Loria, donne directement la première des formes fondamentales : il définit ainsi la métrique de la surface [177]. Néanmoins si l'on suppose l'expression de la surface résolue en z, soit de la forme $z + f(x, y) = 0$, alors en employant les notations différentielles de Monge les lignes de courbure de la surface sont données par la résolution des équations aux dérivées partielles du second ordre suivantes :

$$\frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq} = \frac{dz(1 + p^2 + q^2)}{pdp + qdq}$$ [178]

Dans le mémoire qu'il présente à Joseph-Alfred Serret en 1864, Darboux fait la remarque analytique suivante : le simple fait d'imposer la condition $1 + p^2 + q^2 = 0$ permet d'obtenir une solution particulière de l'équation des lignes de courbure. En effet, cette condition implique la nullité du dénominateur $pdp + qdq$ par différentiation : on a alors bien une solution, imaginaire, pour le système d'équations aux dérivées partielles. Darboux donne ensuite, toujours dans le même mémoire, l'explication géométrique de cette ligne de courbure imaginaire bien particulière. Cette explication justifie l'énoncé de la propriété qu'il donne alors :

176. Rappelons que cela équivaut à pouvoir considérer ces surfaces réglées comme la réunion des tangentes à une courbe : son arête de rebroussement.

177. Pour plus de détails sur les formes fondamentales des surfaces et l'élément linéaire, on pourra commencer par consulter [**Berger Gostiaux 1992**] avant de se lancer dans la lecture des quatre volumes des "*Leçons*" de Darboux. Pour l'expression de Loria, voir [**Loria 1948**, 282].

178. Voir le mémoire [**Monge 1781**].

> Menez à une surface tous les plans tangents parallèles à ceux du cône asymptote de la sphère [les plans isotropes], le lieu des points de contact sera une ligne de courbure de la surface.
>
> [**Darboux 1865**, 56]

La preuve géométrique que Darboux explicite alors est reprise de manière bien plus globale dans son mémoire de 1873, où cette propriété est de plus clairement reliée aux propriétés des développables focales. C'est pourquoi nous choisissons d'analyser ci-dessous directement la méthode globale présentée en [**Darboux 1873a**, 11]. Les développables focales sont enveloppes de plans isotropes. Or Darboux obtient comme nous l'avons souligné les relations de perpendicularité par les propriétés polaires liées au cercle de l'infini : les normales aux plans isotropes présentent alors la particularité d'être des droites, isotropes, incluses dans ces mêmes plans. Darboux poursuit en reliant cette propriété à la définition utilisée par Monge pour les lignes de courbure : en considérant un point d'une développable focale (Δ), la normale à (Δ) en ce point est la droite isotrope du plan tangent à (Δ) passant en ce point. Il s'agit donc en fait d'une génératrice de la développable focale elle-même[179]. Par conséquent, si l'on considère une courbe quelconque γ tracée sur la développable focale (Δ), les normales à la développable le long de cette courbe engendreront une surface développable puisqu'elle engendreront la surface (Δ) elle-même. Aussi la courbe γ est-elle d'après Monge une ligne de courbure de (Δ). Darboux en conclut cette forte propriété que "*toutes les lignes tracées sur [une] surface [développable focale] sont des lignes de courbure*" ([**Darboux 1873a**, 11]). En ceci, les développables focales se rapprochent des plans et des sphères pour lesquels cette propriété est également vraie.

Le lien avec la ligne de courbure d'une surface donnée, propriété dont nous avons donné plus haut le ressort analytique d'après les considérations de Darboux en 1865, vient ensuite de la construction géométrique analogue à celle nécessaire à la détermination des focales de la surface. Étant donnée une surface (S), on circonscrit à (S) une développable focale (Δ). La ligne de contact γ des deux surfaces est une ligne de courbure de (Δ) (comme toutes les lignes de cette-dernière), mais il s'agit en outre d'une ligne de courbure de la surface (S). En effet le long de cette ligne les deux surfaces ont les mêmes plans tangents et les mêmes normales, et par conséquent les normales le long de γ forment bien une surface développable, à savoir la développable (Δ). Darboux peut alors conclure :

> Sur toute surface, on peut déterminer en termes finis une ligne de courbure imaginaire, et cette ligne de courbure est la courbe de contact de la surface avec la développable focale circonscrite.
>
> [**Darboux 1873a**, 11]

Ce qui caractérise cette ligne de contact est le fait que les plans tangents à la surface (S) sont isotropes, c'est-à-dire tangents au cercle de l'infini. On retrouve alors la condition analytique $1+p^2+q^2=0$ donnée en premier lieu par Darboux dès 1864. On voit ainsi comment le nîmois obtient grâce aux propriétés de géométrie imaginaire de ses développables focales un résultat général portant sur les lignes de courbure des surfaces. Ce qui distingue la ligne de courbure ici mise en avant et que l'on parvient à sa détermination sans aucune résolution d'équation aux dérivées partielles, ce qui est pourtant le cas général pour les lignes de courbure. C'est ce que Darboux exprime en affirmant pouvoir la "*déterminer en termes finis*".

179. On retrouve le caractère particulier des plans isotropes d'être normaux à eux-mêmes.

La possibilité d'exhiber, sans aucune intégration, une ligne de courbure sur une surface quelconque montre bien la puissance de l'introduction des imaginaires dans la géométrie. Issue de la toute première communication faite par Darboux à l'Académie des Sciences - la première d'une très longue série - cette ligne deviendra connue sous le nom explicite de "*ligne de courbure imaginaire de Darboux*". On la retrouvera notamment un siècle plus tard dans l'enseignement de Gaston Julia à l'Ecole Polytechnique comme l'illustre le cours de 1959 (voir l'annexe 2).

Après s'être intéressé aux lignes de courbure des développables focales, Darboux se penche sur l'étude des lignes géodésiques. Sur une surface, ces lignes permettent de réaliser les plus courts chemins, c'est-à-dire les arcs de longueur minimale : c'est ainsi qu'elles furent d'abord introduites par Bessel et Jacobi pour l'étude des ellipsoïdes ([**Reich 1973**, 307-309]). En ceci, la notion de géodésique généralise la notion de ligne droite des plans. La caractérisation géométrique générale des lignes géodésiques d'une surface, analogue à celle employée à l'aide des normales pour les lignes de courbure, fut ensuite donnée par Liouville en 1844 ([**Lützen 1990**, 717]) : les plans osculateurs des géodésiques d'une surface sont en tout point perpendiculaires aux plans tangents de la surface [180].

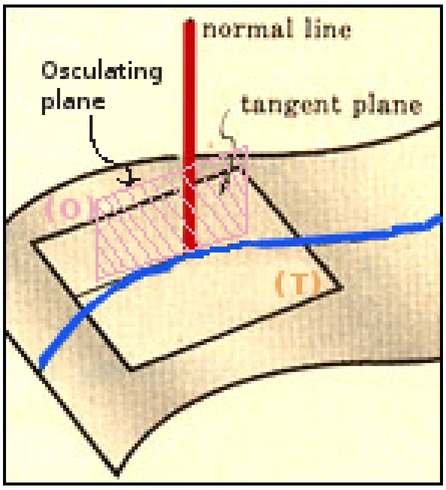


FIGURE 32. Le plan osculateur (O) est orthogonal au plan tangent (T) : la courbe bleue est une géodésique

Darboux ne va pas s'attacher à décrire les propriétés générales des géodésiques des développables focales. Pour les lignes de courbure, c'est d'une propriété singulière de ces développables qu'il a tiré un énoncé général : il en ira de même pour les géodésiques. Le point de départ de Darboux est une propriété métrique caractéristique des droites isotropes, génératrices des développables focales. Il l'énonce sous la forme suivante :

> Les lignes que nous venons de trouver [les droites isotropes] jouent d'ailleurs un rôle des plus importants dans la géométrie métrique ; nous aurons à les employer fréquemment et à les considérer soit comme les génératrices

180. Pour plus de détails sur les lignes géodésiques, on consultera la contribution à l'histoire de cette théorie de [**Nabonnand 1995**].

> rectilignes des sphères, soit comme jouissant de cette propriété que la distance de deux quelconques de leurs points situés à distance finie est nulle.
>
> [**Darboux 1873a**, 7]

Les points d'une droite isotrope sont donc à distance nulle les uns des autres. Puisque les génératrices des développables focales sont de telles droites, l'arête de rebroussement d'une telle développable sera ainsi caractérisée par la forme de l'élément linéaire :

$$ds^2 = 0$$

En effet toutes les tangentes de cette arête sont isotropes. La considération de cette arête et de son élément linéaire si particulier (totalement dégénéré) guide Darboux vers deux analyses : la première relative à l'étude des lignes ayant ce même élément linéaire, et la seconde portant sur la formation et les propriétés de l'élément linéaire général des développables focales.

Darboux commence par remarquer simplement que l'arête de rebroussement de la développable focale en est une géodésique. Le géomètre nîmois cherche alors à généraliser cette propriété : sur une surface donnée, les lignes données par l'équation $ds^2 = 0$ sont-elles des géodésiques de la surface ? La géométrie singulière liée aux développables focales va permettre à Darboux de répondre par l'affirmative. Ces lignes sont en effet des lignes de longueur nulle dont toutes les tangentes sont isotropes, à l'image de l'arête de rebroussement des développables focales. Le plan osculateur en un point M sera alors le plan tangent au cercle de l'infini passant par la tangente isotrope δ. Mais alors puisque la droite δ est précisément la normale au plan osculateur au point M, et que cette même droite appartient naturellement au plan tangent à la surface en M, Darboux en conclut l'orthogonalité des plans tangents et osculateurs qui caractérise les lignes géodésiques.

> Supposons que, sur une surface donnée, on sache intégrer l'équation $ds^2 = 0$. On obtiendra sur cette surface deux séries de lignes de longueur nulle. Je dis qu'on doit les considérer comme des lignes géodésiques, correspondantes au cas où la force vive [181] est nulle.
>
> [**Darboux 1873a**, 12]

Une fois encore, la géométrie des développables focales amène Darboux à trouver une extension d'une propriété infinitésimale particulière, ici concernant un nouveau type de lignes géodésiques. Ces lignes géodésiques *minimales*, dont toutes les tangentes sont isotropes, rappellent le théorème de Kummer. Ce-dernier ne se concentrait que sur les systèmes orthogonaux plans, néanmoins Darboux va effectuer le lien entre ces géodésiques de longueur nulle et les propriétés des systèmes de lignes orthogonales. Il énonce en effet qu'un système double (représenté par la même équation) de lignes orthogonales sur une surface admet pour enveloppe une de ces géodésiques solution de $ds^2 = 0$. Aussi ces géodésiques minimales, de longueur nulle, jouent-elles exactement sur les surfaces auxquelles elles appartiennent le rôle joué par les droites isotropes dans les plans. La nullité de la longueur constituait la première analogie, à caractère métrique. Darboux fait le rapprochement avec la propriété des enveloppes des systèmes orthogonaux, et établit donc une seconde analogie

181. Les lignes géodésiques peuvent être interprétées comme les trajectoires sur la surface d'un mobile soumis uniquement à la réaction normale du support surfacique. Ici, la nullité de la "force vive" correspondrait au cas où le mobile possède une énergie (cinétique) nulle. Pour plus de détails, voir [Chap.3,4.1].

à caractère géométrique. Il étudie en détail l'exemple le plus immédiat de tels systèmes doubles orthogonaux : les lignes de courbure des surfaces. Pour que l'énoncé précédent puisse s'appliquer, il faut que ces lignes soit comprises dans une même équation ce que Darboux rappelle ne pas être le cas général. Il détermine néanmoins que, lorsque l'enveloppe des lignes de courbure existe, celle-ci ne peut se réduire qu'à des droites - isotropes - à l'exception du cas où elle coïncide avec la ligne de courbure imaginaire qui porte désormais son nom ([**Darboux 1873a**, 23]). Ces résultats sont ainsi à rapprocher des propriétés très similaires mises en évidence par Darboux sur les intersections rectilignes des enveloppes des systèmes doubles de surfaces orthogonales (voir 7.1). Il y a ainsi à la fois une unité dans les méthodes, la recherche de généralité de certaines propriétés particulières des développables focales, mais également dans les résultats. Systèmes orthogonaux de courbes et de surfaces, lignes de courbure et géodésiques : l'apport de l'outil imaginaire que représente la *développable focale* bénéficie à ces différentes notions grâce aux recherches de Darboux. La géométrie imaginaire et les relations d'orthogonalité qui caractérisent cet outil permettent de substituer aux calculs de l'analyste les explications du géomètre que le jeune normalien est rapidement devenu.

Le second développement que Darboux donne à la forme nulle de l'élément linéaire de la développable focale (Δ) le long de son arête de rebroussement (r) $(ds^2 = 0)$ est la détermination complète de cet élément en tout point de (Δ). Tout point de (Δ) $M(X, Y, Z)$ se situe en effet sur une droite isotrope, tangente à l'arête (r) en un second point $m(x, y, z)$. En paramétrant par u l'arête de rebroussement et par λ la distance Mm du point au lien de tangence sur (r), l'élément linéaire dS^2 en M ne dépend pas de $d\lambda$ puisque (Mm) est isotrope. Darboux parvient à mettre cet élément sous la forme suivante :

$$dS^2 = \lambda^2 \phi(u) du^2$$

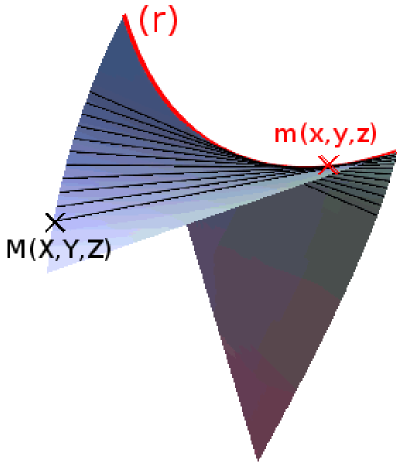


FIGURE 33. Une surface réglée développable et son arête de rebroussement (r) en rouge.

Darboux remarque que cette forme doit en fait caractériser les développables focales en ceci qu'elle s'exprime comme un carré parfait. Lorsque cela n'est pas le cas, on peut toujours déterminer deux différentes directions pour obtenir la nullité du dS^2 : il s'agit des directions formées par les deux droites isotropes du plan tangent. Ici, cette recherche aboutit à une racine double, ce qui correspond donc au cas d'isotropie du plan tangent. Darboux peut alors conclure :

> Cette forme [de l'élément linéaire] est caractéristique des développables étudiées ; car elle entraîne cette propriété qu'en chaque point de la surface, il y aura une seule direction pour laquelle dS sera nul, en d'autres termes, le plan tangent sera constamment circonscrit au cercle de l'infini.
>
> [**Darboux 1873a**, 11]

Les développables focales sont ainsi complètement caractérisées par la possibilité de mettre sous forme d'un carré parfait leur élément linéaire, ce qui d'un point de vue algébrique signifie que la première forme fondamentale est dégénérée : cette forme quadratique n'est en effet que de rang 1. Cette expression particulière du ds^2 comme carré parfait distingue en particulier ces développables focales de l'ensemble des surfaces développables. Cette approche permet à Darboux d'envisager l'explication d'un fait analytique resté inexpliqué. Il s'agit d'une particularité exprimée par Edmond Bour en 1861, liant la recherche des lignes géodésiques et celle des surfaces applicables sur une surface donnée.

Après avoir mis en 1859 la question des surfaces applicables sur une surface donnée au sujet du Grand Prix des Sciences Mathématiques, trois mathématiciens ont brillamment traité la question : l'italien Delfino Codazzi, le professeur Pierre-Ossian Bonnet et le jeune Edmond Bour (voir fig. 31). Ce-dernier remporta le prix en 1861 pour avoir non seulement formé les équations différentielles du problème, mais en outre traité la résolution analytique de plusieurs cas étendus comme les surfaces de révolution. Bour avait annoncé avoir réussi à intégrer complètement l'équation différentielle pour les surfaces de révolution, et c'est cette étude supplémentaire qui lui avait valu le prix. Le rapport signalait en effet :

> Le mémoire n.1 contient en outre un chapitre très remarquable dont l'analogue ne se trouve pas dans les deux autres et qui a déterminé en sa faveur le choix unanime de la Commission. L'auteur ne s'est, en effet, proposé rien de moins que l'intégration complète des équations du problème dans le cas où la surface donnée est de révolution. [...] En résumé, la Commission accorde à l'unanimité de grand prix de Mathématiques au Mémoire inscrit sous le n.1 [...] dont l'auteur est M. Edmond Bour.
>
> *Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences*, Vol.52 (1861 1er Sem.), pp.554-555.

Cependant, la validité de l'intégration proposée par Bour sera remise en question, et l'auteur lui-même décidera de ne pas publier le chapitre dédié à cette étude. Le futur secrétaire perpétuel de l'Académie, Albert de Lapparent, racontera : "*L'œuvre de Bour fut publiée dans le Journal de l'Ecole Polytechnique, mais sans le chapitre relatif aux surfaces de révolution. L'auteur le réservait pour le compléter un jour, selon le vœu exprimé par la commission, qui avait entrevu, dans la généralisation de cette analyse, un notable perfectionnement pour le Calcul intégral. Cette espérance aurait-elle été déçue ? La déception même se serait-elle étendue au résultat que l'Académie, dans un jugement trop rapide, avait considéré comme acquis ? Toujours est-il que, parmi les papiers laissés par Bour, on n'a retrouvé ni le complément espéré, ni même la minute du chapitre qui n'avait pas été livré à l'impression*" [182]. Darboux aura un jugement sévère envers Bour, son opinion étant que la partie critiquée (et méconnue) de son travail qui lui avait valu le Prix au détriment de Bonnet n'était qu'une "*mystification*" :

> je n'ai pas trouvé le temps de vous raconter la mystification Bour et de vous remercier de vos envois. Voici l'histoire : Bour était polytechnicien, c'est-à-dire prétentieux ; il a cru avoir inventé le Pérou et il s'était trompé cela paraît, en sorte qu'il a eu le prix pour un point qui depuis a paru contestable. Il a été surfait, c'est l'opinion général, et s'il n'a pas publié l'intégration qu'il avait annoncée, c'est dit-on qu'il ne l'avait pas faite.
>
> Lettre non datée (Juillet 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

Edmond Bour (voir figure 31) est né à Gray, dans la Haute-Saône, en 1832. Il entre à l'Ecole Polytechnique en 1850 puis termine ses études à l'Ecole des Mines. Il effectuera deux thèses, l'une sur le problème des trois corps et l'autre sur la théorie des perturbations, se rapportant toutes les deux au domaine des équations différentielles de la mécanique. A partir de 1859, il retourne à l'Ecole Polytechnique pour y enseigner la géométrie descriptive et la cinématique. Nous n'insisterons pas plus sur l'épisode du Grand Prix controversé de 1861 que nous avons détaillé ci-dessus. Protégé de Joseph Liouville, Edmond Bour n'est pas élu en 1862 à l'Académie des Sciences qui lui préférera Pierre-Ossian Bonnet. L'opportunité

182. Voir la biographie de Bour par Albert-Auguste Cochon de Lapparent dans le *Livre du Centenaire de l'Ecole Polytechnique. Tome 1*, Paris (Gauthier-Villars), 1897, pp.145-148.

ne se représentera pas. En effet, grand voyageur, Bour mourra prématurément en 1866 d'une maladie contractée lors d'un de ses périples en Asie Mineure.

Dans son mémoire [**Bour 1861**][183], l'ami de Mannheim et de Moutard "*suppose résolues à l'avance un certain nombre de questions préliminaires qui ont leur difficulté propre (telles que la recherche des lignes géodésiques de la surface [...])*" ([**Bour 1861**, 5]). Quelques pages plus tard, Bour forme l'équation aux dérivées partielles du second ordre dont dépend le problème des surfaces applicables.

Bour utilise ce qu'il nomme d'après Gauss les *coordonnées [curvilignes] symétriques*[184], c'est-à-dire des paramètres (x, y) permettant d'exprimer l'élément linéaire d'une surface (S_1) comme :

$$ds^2 = 4\lambda dx dy$$ [185]

Sa méthode consiste alors à considérer une seconde surface (S_2), d'élément linéaire $ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$. Pour que cette surface soit applicable sur (S_1), leur élément linéaire doit coïncider : en considérant alors (X, Y, Z) comme étant des fonctions des coordonnées symétriques (x, y), Bour détermine le système d'équations différentielles traduisant l'égalité des paramètres de la forme fondamentale. Il parvient ensuite à l'équation générale en éliminant X et Y pour ne conserver que Z et ses dérivées des deux premiers ordres ([**Bour 1861**, 13-15]). C'est une fois qu'il a formé explicitement cette "*équation fondamentale*" traduisant l'applicabilité de (S_2) sur (S_1) que Bour remarque succinctement un fait de calcul curieux :

> Cette équation [...] admet pour solution singulière l'équation du premier ordre $\lambda = pq$, qui joue un très grand rôle dans la théorie géométrique et mécanique des surfaces. [...] Je m'abstiens pour le moment de toute recherche relative à l'intégration de l'équation [fondamentale.]
>
> [**Bour 1861**, 15]

L'équation du premier ordre qui est au centre de la remarque de Bour est celle dont dépend la recherche des lignes géodésiques de la surface (S_1) de départ. Ainsi ce que le jeune gagnant du prix de 1861 met en relief est que la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée comprend, comme un cas particulier, la recherche des lignes géodésiques de la surface donnée. Cela reste un fait de calcul sans fondement jusqu'en 1873 lorsque

---

183. Comme nous l'avons signalé, le mémoire complet originel que Bour transmet à l'Académie des Sciences et qui lui vaut le Prix n'est pas, dans son intégralité, passé à la postérité : seule une partie en est en effet publiée en 1861, omettant volontairement la partie remise en cause sur l'intégration de l'équation différentielle relative aux surfaces de révolution. Le manuscrit original, que Bour avait transmis à l'Académie en 1861, est conservé par Joseph Bertrand dans sa bibliothèque de la rue de Rivoli - et des dires de Lapparent, il s'agit de l'unique copie. Celle-ci sera brûlée dans la nuit du 23 au 24 Mai 1871 lors des incendies de la semaine sanglante mettant fin à la Commune de Paris. Ainsi disparaîtra l'exemplaire original du travail d'Edmond Bour, dont la partie controversée sera restée non publiée. L'intégration annoncée par Bour restera donc un mystère, d'où la "*mystification*" évoquée par Darboux.

184. Ainsi que le rappelle [**Darboux 1887**, 153], les coordonnées symétriques furent introduites par Gauss en 1825 dans son mémoire joliment intitulé "*Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird*".

185. La mise sous forme symétrique de l'élément linéaire est un procédé similaire à la méthode de dépolarisation que nous avons rencontrée dans les travaux de Plücker en lien avec ses coordonnées linéaires (voir 2.3).

Darboux permet de l'expliquer à la fois grâce à une nouvelle méthode de recherche des surfaces développables et grâce à l'apport de la métrique des développables focales.

Darboux propose en effet dans son mémoire "*l'indication d'un moyen nouveau et très simple de former l'équation différentielle de surfaces applicables sur une surface donnée*" ([**Darboux 1873a**, X]). Ce paragraphe est d'ailleurs un ajout de dernière minute qui ne figurait pas dans la version originelle du mémoire de 1869. Darboux commence ([**Darboux 1873a**, 17]) par écrire, comme Bour, l'égalité des éléments linéaires de deux surfaces (S_1) et (S_2) :

$$ds^2 = \underbrace{Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2}_{(S_1)} = \underbrace{dx^2 + dy^2 + dz^2}_{(S_2)}$$

Tout comme Bour, le géomètre nîmois recherche l'expression des paramètres (x, y, z) de la deuxième surface en fonction des coordonnées curvilignes (u, v) de la première. Comme Bour encore, il ramène le problème à la recherche de la seule variable $z(u, v)$. Mais l'originalité de son approche est d'envisager deux surfaces auxiliaires, disons (δ_1) et (δ_2), dont l'élément linéaire est donné en retranchant le terme en z dans celui des deux surfaces de départ. On obtient alors :

$$ds'^2 = \underbrace{Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2 - (\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv)^2}_{(\delta_1)} = \underbrace{dx^2 + dy^2}_{(\delta_2)}$$

L'expression de l'élément linéaire de (δ_2) montre que cette surface est une surface développable : il s'agit en effet de l'élément linéaire classique du plan. Par conséquent, (δ_1) qui possède ce même élément linéaire est une surface développable ! On obtient alors immédiatement une équation différentielle en traduisant la nullité de la courbure totale (dite *de Gauss*) de (δ_1) [186]. Cette équation différentielle du second ordre en z - fonction de (u, v) - est alors la condition recherchée pour résoudre le problème initial, à savoir appliquer (S_2) sur (S_1).

Cette méthode rapide ne nécessite ainsi que la connaissance de la formule de la courbure totale en fonction de la première forme fondamentale, formule bien connue depuis les "*Disquisitiones generales circa superficies curvas*" de Gauss (1827). Elle deviendra la méthode systématiquement adoptée par Darboux dans ses leçons de Géométrie pour traiter le problème des surfaces applicables ([**Darboux 1894**]). Mais dès 1873, elle permet à Darboux de comprendre le fait remarqué par Bour en lien avec les géodésiques. En effet, cette approche permet également de traiter la recherche des lignes géodésiques d'une surface donnée (S_1). Cette recherche revient à déterminer ce qu'on nomme des *coordonnées géodésiques* [187], c'est-à-dire des coordonnées (α, β) permettant d'écrire l'élément linéaire sous la forme :

$$ds^2 = d\alpha^2 + Hd\beta^2$$

186. Darboux ne redonne pas cette équation explicitement. On peut la trouver dans [**Darboux 1894**, 254] sous la forme élégante d'égalité de deux déterminants d'ordre 4.

187. A propos des différentes coordonnées et de la forme de l'élément linéaire ds^2 depuis les recherches de Gauß, on consultera [**Reich 1973**].

Les lignes $\beta =$ constante sont dans ce cas des lignes géodésiques de (S_1) ; celles d'équation $\alpha =$ constante leur sont orthogonales[188]. En employant la nouvelle méthode de Darboux, on doit alors égaler les deux formes de l'élément linéaire de (S_1), soit :

$$ds^2 = \underbrace{Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2}_{(S_1)} = \underbrace{d\alpha^2 + Hd\beta^2}_{(S_1)}$$

Lorsque l'on résout selon $\alpha(u, v)$, on obtient alors la surface auxiliaire (δ_1) telle que :

$$ds'^2 = \underbrace{Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2 - d\alpha^2}_{(\delta_1)} = \underbrace{Hd\beta^2}_{(\delta_1)}$$

On voit alors que l'élément linéaire de la surface auxiliaire se réduit à un carré parfait, $Hd\beta^2$. Ceci est donc caractéristique du fait que la surface (δ_1) devienne, dans ce cas, une développable focale.

La méthode mise au jour par Darboux présente donc l'avantage de pouvoir mettre en avant le lien précis entre la recherche des surfaces développables et celle des lignes géodésiques. Ce lien est intimement lié au rôle particulier des développables focales. Étant donné une surface, la recherche des surfaces applicables sur elle revient à former l'élément linéaire auxiliaire d'une surface développable. On en obtient l'équation en développant explicitement la nullité de la courbure totale. La recherche des lignes géodésiques de la surface revient quant à elle à former l'élément linéaire d'une développable focale. Mais puisque les surfaces développables focales sont en particulier des surfaces développables - puisque leur courbure totale est identiquement nulle - on comprend que cette recherche est en fait comprise dans la précédente. Le "*fait qui dans la méthode [de Bour] restait inexpliqué*" prend donc ici tout son sens grâce à la nouvelle exposition du problème qu'effectue Darboux. Ce-faisant, il clarifie ainsi pourquoi "*l'équation différentielle du second ordre [des surfaces développables] admet comme intégrale particulière l'équation aux différentielles partielles du premier ordre à laquelle se ramène le problème des lignes géodésiques*" ([**Darboux 1873a**, 18]).

La rôle particulier des surfaces développables focales, ici envisagées via leurs propriétés métriques, a ainsi permis à Darboux de lever le voile sur l'intrication existant dans la théorie des surfaces entre la recherche des surfaces applicables et celle des lignes géodésiques. En lui inspirant la découverte d'une nouvelle méthode de formation de l'équation différentielle générale dont dépend le problème des surfaces applicables, l'étude des développables focales aura permis au jeune géomètre d'effectuer un premier accomplissement dans le domaine général de la géométrie infinitésimale des surfaces. Cette méthode sera en effet remarquée et adoptée par les géomètres en raison de sa simplicité[189]. Dans ses "*Leçons*", Darboux approfondira un peu plus le lien entre la recherche des surfaces développables et la recherche

188. Voir l'exposé de Bour dans [**Bour 1861**, 2]. D'après Liouville, on sait que les lignes $\alpha =$ constante sont également des géodésiques si la surface (S_1) est développable.

189. [**Jordan 1884**, 1160] ne souligne, dans son rapport pour le prix Petit d'Ormoy, que la présence de cette méthode nouvelle en mentionnant le mémoire de 1873 de Darboux. Weingarten reprendra en particulier à son compte la méthode donnée Darboux dans ses recherches (voir l'important travail du mathématicien allemand dans l'ouvrage "*Ueber die Theorie der aufeinander abwickelbaren Oberflächen*", 1884, Berlin).

des géodésiques. Il mettra notamment en évidence que l'applicabilité effective d'une surface sur une autre repose sur la détermination des lignes géodésiques, et que les méthodes données pour cette détermination tombent précisément en défaut lorsque l'élément linéaire des surfaces s'exprime comme celui d'une développable focale, c'est-à-dire comme un carré parfait. En conséquence, les surfaces applicables sur une surface donnée seront exactement données par les solutions de l'équation différentielle générale du second ordre qui ne sont pas solutions de celle du premier ordre relative aux géodésiques (voir [**Darboux 1894**, 255]).

8. Quelques éléments de conclusion quant à l'étude des focales

L'étude de la théorie projective des foyers et focales présente de nombreuses singularités qui la rendent d'un point de vue général enrichissante, particulière et digne d'intérêt. Elle permet tout d'abord de rendre compte de la place grandissante de la géométrie projective, synthétique et analytique, dans les mathématiques de la première moitié du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Cette évolution et la naissance des objets (points cycliques, droites et plans isotropes, cercle de l'infini) et outils (coordonnées tangentielles, homogènes, circonscription de surfaces développables) qui l'accompagnent révèlent l'importance progressive des imaginaires dans la géométrie. Après l'extension plane de la notion de foyer des coniques par Plücker, sa transposition dans l'espace permet de refléter le rôle d'intermédiaire majeur joué par la sphère et les courbes sphériques, chez Quételet, Dandelin et surtout Chasles. Enfin, l'entrave qui persiste quant à la généralisation des focales aux surfaces générales réside dans la prédominance des surfaces du second degré dans les recherches des différents géomètres, ainsi que dans la difficulté d'y faire entrer les éléments imaginaires à part entière sans les analyser via leurs caractéristiques réelles. La généralisation de la notion projective de focale que donne Gaston Darboux aux surfaces permet ainsi de dresser un début de portrait de son identité scientifique naissante. Versé très tôt dans des recherches personnelles de géométrie, il se départit pleinement des contraintes liées à la réalité des objets géométriques ainsi que du carcan du second degré. Néanmoins, l'influence qu'exerce sur lui Michel Chasles est profonde, et c'est grâce à un prolongement de ses études sur les développables circonscrites aux quadriques que Darboux parvient à la généralisation des focales.

Selon l'historien Charles Fischer, "*une théorie [mathématique] est une collection d'idées reliées à des objets mathématiques*" ([**Fischer 1966**, 137]). La place de ces *objets* dans l'identité d'une théorie est importante, mais peut être également très variable. Lorraine Daston s'est ainsi intéressée à un type nouveau de biographies non plus centrées sur un personnage ou une théorie, mais sur un objet scientifique. Ses "*Biographies des objets scientifiques*" ([**Daston 2000**]) ont donné un cadre à l'étude de la naissance de ces objets, à l'appréhension de leur apparition dans le discours scientifique ainsi qu'à leurs trajectoires dans la dynamique de la science [190]. Au regard de notre enquête, un objet mathématique apparaît comme fondamental dans la contribution de Darboux à la théorie des focales et

190. Comme le rappelle justement Michel Paty, "*ce que nous appellons "la science" est fondamentalement non statique*" ([**Paty 2013**, 61]).

la fixation de sa définition générale : les surfaces développables imaginaires circonscrites au cercle de l'infini, *développables focales* pour Darboux, *développables isotropes* pour Laguerre. Cet objet apparaît d'abord dans le discours scientifique avec Poncelet et Chasles pour décrire une propriété : l'homofocalité. Mais par nécessité de généralisation il devient ensuite crucial en recelant la définition elle-même des focales des surfaces, définition "*qui est due [à Darboux] pour les surfaces du degré supérieur*" ([**Hoüel 1870b**]). Parfois plus encore que la focale elle-même, c'est la développable focale qui sera au centre des recherches du géomètre de l'Ecole Normale.

L'analyse des recherches de Darboux liées aux focales des courbes et des surfaces nous amène à un double constat qui pourrait, à tort, sembler paradoxal. Tout d'abord, on remarque que parmi les résultats retrouvés à la fois dans ses premiers travaux - antérieurs à 1869 - et dans le "*Mémoire sur une classe remarquable etc.*" de 1873, les démonstrations de géométrie analytique sont souvent remplacées par des méthodes de géométrie projective et imaginaire plus éloignées de considérations analytiques. Nous l'avons surtout souligné pour le traitement du théorème généralisé d'homofocalité de Kummer, ainsi que pour l'étude de l'inversion des développables focales. D'autre part, on remarque également qu'après 1869 les domaines que Darboux aborde dans ses recherches deviennent plus variés : géométries métrique, infinitésimale, projective, mais aussi *géométrie anallagmatique* (liée à l'inversion) ou encore méthodes d'intégration de certaines équations différentielles (pour la théorie des surfaces applicables). Bien entendu, ceci lui est permis grâce à la développable focale qui, en tant qu'objet mathématique, se révèle être un véritable caméléon de ces domaines de géométrie. Ce constat met en évidence des caractères naturels de l'identité scientifique de Gaston Darboux : la volonté de mixité des méthodes employées, le rapprochement de domaines et de problèmes divers, la quête critique de compréhension des résultats en les appuyant sur des contextes théoriques différents. Elie Cartan, qui sera son élève, abondera en ce sens en affirmant :

> Darboux aimait à traiter chaque problème par la méthode qui lui était la plus appropriée ; dans le choix de cette méthode, il montrait que l'esprit de finesse, en dépit de Pascal, est aussi indispensable que l'esprit de géométrie. En même temps, il excellait à établir des rapprochements inattendus, mais toujours profonds, entre des questions en apparence étrangères l'une à l'autre : souvent il illuminait par un raisonnement géométrique simple tel ou tel résultat d'une suite de calculs qui auraient été compliqués s'ils n'avaient été faits par Darboux.
>
> [**Darboux 1933**, 17]

Mais on peut aussi esquisser, une première fois, le cheminement intellectuel particulier de notre héros : le jeune étudiant normalien est avant tout un *géomètre* de par ses centres d'intérêt mathématiques, de par la nature des problèmes qu'il aborde dans ses recherches. Pour autant, si Darboux possède les outils de la géométrie projective il préfèrera parfois démontrer par l'analyse : en ceci, il est parfois un *analyste* au sens de Poincaré. L'étude détaillée du contenu de sa thèse (1866) confirmera largement cette remarque (voir [Chap.3]). Avec le temps, il semble qu'au tournant des années 1870 les centres d'intérêt de Darboux s'élargissent, tout en replaçant sur un pied d'égalité les diverses méthodes de démonstration. Là encore, la suite de notre travail viendra étayer cette affirmation. Nous nous aiderons notamment des distinctions opérées au sein des mathématiciens par [**Poincaré 1905**] et [**Mancosu 2010**] pour caractériser l'évolution de son cheminement intellectuel.

L'étude de la théorie des focales s'avère donc pertinente pour commencer à révéler l'identité naissante et le cheminement de Gaston Darboux, en tant que scientifique. Nous avions par ailleurs évoqué en guise d'introduction de cette étude la nécessité de combler un certain vide historiographique. Mais au-delà de ces deux motivations, notre analyse a été l'occasion de nombreuses nouvelles approches pour des problématiques qui ne sont certes pas nouvelles mais revêtent un intérêt historique certain. Elle a ainsi présenté une approche transversale au développement de la géométrie projective - surtout sur la période 1820-1860 - ainsi qu'au problème de l'extension des notions et de l'étude des figures depuis le plan vers l'espace. Bien qu'étant en ce sens parcellaire, notre analyse a partiellement permis de révéler la pertinence de l'attention portée sur "*les pratiques de travail, les écoles et les traditions de recherche*" qui sont, selon Caroline Ehrhardt, "*désormais au centre de la recherche en histoire des mathématiques*" ([**Ehrhardt 2010b**, 489]). Les études métriques, "à la Pappus", des focales effectuées par les mathématiciens irlandais du Trinity College de Dublin sont à rapprocher pour la même notion de l'importance des cônes circonscrits de révolution chez les allemands Steiner et Plücker, ou encore de la prédominance du *rapport anharmonique* chez Chasles. Des recherches ultérieures pourraient être intéressantes pour décrypter dans quelle mesure les travaux relatifs aux focales sont susceptibles d'incarner les distinctions entre les différentes "*écoles de recherche*" dessinées par [**Rowe 2003**] et [**Parshall 2004**]. On peut encore relier ces travaux à la question de l'existence d'un "*style national en mathématiques*", étudiée par [**Mancosu 2010**], qui opposerait alors la France, l'Irlande et la Prusse. Enfin, notre enquête a rencontré de plein fouet le problème du lexique dans l'histoire des sciences, à la fois de par la multiplicité des appellations mais encore de par l'existence d'une ambiguïté de dénomination. Le premier problème a été traité, en histoire des mathématiques, par [**Romera-Lebret 2009**] dans le contexte de la nouvelle géométrie du triangle. Mais en revanche l'ambiguïté - rencontrée ici à un degré fort et rare - a nécessité l'aide des recherches en linguistique *a priori* non tournées vers le cas des mathématiques. Transpositions de deux situations d'optique géométrique duales, la double signification très distincte des *focales* mathématiques nous est apparue comme une problématique passionnante et très instructive.

Un épilogue focal. Reprenons les propos de Fischer liés à l'étude du déclin et de la mort d'une théorie mathématique. Selon l'historien, "*le destin d'une théorie, appréhendée comme catégorie sociale, est déterminée par l'action de ceux qui l'érige en tant que catégorie [...] il y a deux groupes distincts de [tels] mathématiciens [...] ceux qui en sont spécialistes et dont les noms sont associés à la théorie [...] et les mathématiciens [qui n'en sont pas spécialistes]*" ([**Fischer 1966**, 138]. Gaston Darboux fait partie du premier groupe, Laguerre également dans une certaine mesure. L'anglais Arthur Cayley et surtout l'irlandais George Salmon font quant à eux partie du second groupe : les traités de ce-dernier comportent ainsi bien souvent une partie dédiée à l'étude des foyers et des propriétés focales. Cependant, la théorie projective des focales des surfaces ne trouvera pas de spécialiste dans les générations ultérieures de mathématiciens, ce qui - comme l'explique Fischer - mènera assez rapidement à son déclin et finalement à son abandon. Au regard de cette théorie des lignes focales des surfaces de Darboux, "*son éclat a, en majeure partie, disparu avec lui*" [191].

Cependant, une distinction doit être faite entre le cas spatial des surfaces et le cas plan des courbes. Si la théorie projective des focales des surfaces doit être considérée comme morte depuis environ un siècle, les foyers des courbes au sens généralisé par Plücker n'ont pas subi le même destin funeste. Sans pour autant retrouver de spécialistes (du moins, nous le verrons, jusqu'à fort récemment), cette théorie plane n'a cessé d'être considérée comme une catégorie à part entière par les mathématiciens - ceux du second groupe, selon la classification de Fischer. Bien souvent, l'exposition de la théorie des foyers fait ressortir une notion annexe : les *foyers singuliers*. La distinction qu'elle propose est due à Laguerre ([**Laguerre 1868a**, 19]) : lorsqu'une courbe passe par les points cycliques, il peut arriver que le contact avec ses tangentes isotropes se fasse précisément en ces points cycliques. Dans ce cas, l'intersection de ces tangentes donne naissance aux foyers singuliers de Laguerre [192]. Lorsque le contact ne se fait pas aux points cycliques, on retrouve les foyers dits *ordinaires* par opposition. Le travail d'origine de Laguerre porte en réalité sur le cas des surfaces : une surface passant par le cercle de l'infini admet ainsi des *focales singulières* et des *focales ordinaires*. Les premières sont "*les lignes doubles de la développable [focale] circonscrite à la surface suivant le cercle de l'infini*" ([**Darboux 1873a**, 19]) tandis que les focales ordinaires se trouvent sur la développable focale circonscrite à la surface en un autre lieu que le cercle de l'infini. Ces deux définitions ont ainsi trait à la non-unicité de la développable focale que l'on peut circonscrire à une surface, ce que nous n'avons pas détaillé en raison du peu d'attention accordée par les acteurs à la notion générale de focale singulière. Ces focales ne sont en effet ni conservées par inversion, ni uniques dans les systèmes orthogonaux. Nous en donnons ici la définition pour souci de complétude mais également pour anticiper certaines remarques de la partie suivante.

Après la génération de Salmon, Laguerre et Darboux, les focales des surfaces disparaissent mais les foyers des courbes continuent de faire partie des traités relatifs aux courbes planes. Un chapitre leur est ainsi consacré dans l'ouvrage de Harold Hilton publié en 1920 ([**Hilton 1920**, 69-75]), qui centre l'étude sur les foyers ordinaires et singuliers. Malgré cela, la seule référence donnée par Hilton reste le mémoire de 1873 de Darboux. On retrouve également une section dédiée aux foyers des courbes quelques années plus tard dans le traité [**Coolidge 1931**]. Enfin, il n'est pas rare aujourd'hui de retrouver dans les cours de Géométrie de l'Enseignement Supérieur la notion de foyer d'une courbe algébrique plane, présentée via ce qui est désormais couramment appelé "*l'exposé de Plücker*". Si l'application de la notion de foyers aux courbes cubiques a fait aux Etats-Unis l'objet d'un travail de thèse en 1933 [193], l'emploi de cette notion dans la recherche mathématique a ensuite été totalement absent. Pourtant, elle a récemment été ressuscitée dans le cadre de l'extension d'un ancien théorème.

---

191. Nous reprenons cette formule d'Edwards, citée par [**Mancosu 2010**], qui l'employait pour comparer les héritages de Kronecker et de Dedekind.
192. Voir également la présentation de [**Darboux 1873a**, 4].
193. Il s'agit de la thèse de Ethel A. Rice, soutenue en 1933 à l'Université du Colorado, sous la direction de Claribel Kendall et intitulée "*On the foci of plane algebraic curves with applications to symmetric cubic curves*". L'objectif principal de ce travail était de construire géométriquement la position des foyers de certaines courbes cubiques douées de symétries.

En 1864, le mathématicien allemand Paul Siebeck utilise la notion de foyers des courbes planes pour préciser le théorème de localisation des racines polynomiales dit de *Gauß-Lucas* dans le cas des cubiques. Ce théorème stipule l'inclusion des racines du polynôme dérivé P' dans l'enveloppe convexe des racines du polynôme originel P. Lorsque P est un polynôme de degré 3 dont les racines ne sont pas alignées, celles-ci forment un triangle qui n'admet qu'une unique ellipse inscrite telle que les points de tangence coïncident avec les milieux des côtés du triangle [194]. Siebeck démontre alors que les deux foyers de cette ellipse sont exactement les racines du polynôme dérivé P' ([**Siebeck 1864**]). En 2012, le mathématicien Eduardo Casas-Alveiro a donné l'extension de ce *théorème de Siebeck* [195]. Casas-Alveiro définit ce qu'il nomme la *courbe de Siebeck* comme étant pour un polynôme queconque, grâce à la transformation par polaires réciproques, l'analogue de l'ellipse de Steiner dans le cas cubique traité au départ par Siebeck. Définie à partir de la localisation des racines du polynôme P, il prouve que si P est de degré n, alors cette courbe de Siebeck de P sera - dans le cas général - de classe $n-1$. Finalement, l'extension du théorème de Siebeck par Casas-Alveiro réside dans l'identification des $n-1$ foyers réels de la courbe de Siebeck de P avec les racines du polynôme dérivé P' ([**Casas-Alvero 2012**, 235-340] [196]). La notion projective de foyer des courbes planes réapparaît ainsi dans un domaine de la recherche en lien avec la localisation des racines des polynômes complexes.

194. Cette ellipse particulière est appelée *l'ellipse de Steiner*.
195. Dans la littérature, ce théorème pour les cubiques est souvent appelé "*théorème de Marden*" après le mathématicien américain Morris Marden.
196. Soulignons que Casas-Alveiro étend en fait un résultat de Linfield valable uniquement pour le cas des racines simples. Le lecteur intéressé pourra trouver plus de détails sur cette première version de l'extension du théorème de Siebeck dans l'article [**Casas-Alvero 2012**].

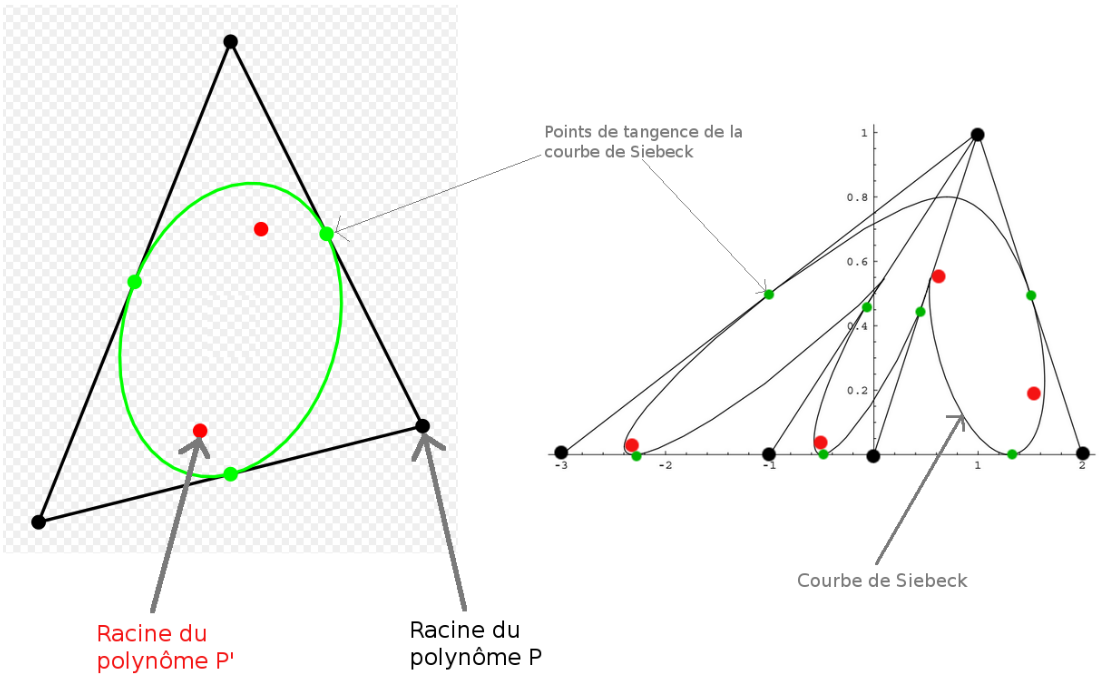


FIGURE 34. Le théorème de Siebeck pour un polynôme cubique (à gauche), son extension par Casas-Alveiro pour le polynôme $P(z) = z(z+1)(z-2)(z+3)(z-1-i)$ de degré 5 (à droite) [197]

Avec le délaissement rapide de la théorie projective des focales des surfaces, l'ambiguïté liée aux dénominations mathématiques disparaît également : après 1920, l'adjectif "*focal*" doit ainsi sans aucun doute être rapporté à la notion de surfaces focales regroupant l'enveloppe des normales d'une surface donnée, c'est-à-dire à rapporté aux *caustiques* de la surface. Sous l'impulsion du mathématicien Ricardo Uribe-Vargas, cette (autre) théorie des focales a été il y a peu généralisée aux courbes et aux sous-variétés des espaces $\mathbb{R}^m$. Les *ensembles focaux* ("*focal sets*") y sont alors définis naturellement comme enveloppes des normales d'une variété, tandis que la *courbe focale* d'une courbe de $\mathbb{R}^m$ apparaît comme le lieu des centres des hypersphères osculatrices ([**Uribe-Vargas 2005**, 286,297]). L'objectif du mathématicien est en fait la détermination de ce qu'il appelle la "*courbure focale*" des courbes des espaces euclidiens.

De manière presque ironique, Uribe-Vargas s'inspire dans son introduction du travail de Darboux sur les développées des courbes de $\mathbb{R}^3$ pour définir les *courbes focales* générales. En ce qui concerne l'héritage scientifique de Gaston Darboux, l'ambiguïté persistera donc toujours quant à l'emploi du terme "*focal*", à la croisée des chemins entre enveloppes des normales et tangences isotropes. Si de nos jours ce flou semble avoir complètement disparu avec la théorie projective des focales des surfaces, on peut cependant constater que la plupart des mathématiciens persistent à utiliser les deux termes de *surfaces focales* et de *caustiques* en les juxtaposant systématiquement dans leurs énoncés [198] : cette dénomination

197. L'exemple du polynôme de degré 5 ainsi que l'image sont tirées de [**Casas-Alvero 2012**, 245].
198. On pourra par exemple voir [**Uribe-Vargas 2005**] lui-même, ou encore [**Berger Gostiaux 1992**].

multiple rémanante apparaît donc comme étant issue d'une ancienne ambiguïté qui est aujourd'hui largement tombée dans l'oubli.

CHAPITRE 3

Théorie des surfaces orthogonales et cyclides de Darboux

Au sein du chapitre précédent consacré à la théorie projective des focales, nous avons constaté l'importance des surfaces du second degré dans l'extension à l'espace de la notion de foyer par Chasles. Il a également été souligné combien la définition et l'utilisation des développables focales avait permis à Darboux d'entreprendre des recherches variées, touchant aux domaines métrique, projectif ou encore infinitésimal de la Géométrie. Dans son discours de 1904 à Saint-Louis sur "*le développement des méthodes géométriques*", le géomètre évoque à nouveau cette large palette de *ressources*, mais la replace complètement dans un cadre nouveau : la théorie des surfaces orthogonales.

> Les systèmes triples orthogonaux dont Lamé avait fait usage en physique mathématique sont devenus l'objet de recherches systématiques. [...] Le système des surfaces homofocales du second degré a été généralisé et a donné naissance à cette théorie des *cyclides* générales dans laquelle on peut employer à la fois les ressources de la Géométrie métrique, de la Géométrie projective et de la Géométrie infinitésimale.
>
> [**Darboux 1904**, 28]

Darboux relie ensuite à ce domaine de recherche "*l'emploi systématique des imaginaires, qu'il faut bien se garder d'exclure de la Géométrie*". C'est en suivant le modèle de son discours que nous allons détailler la naissance de la théorie des surfaces cyclides, en la replaçant dans l'histoire riche de celle des surfaces orthogonales (section 1). Nous verrons en effet que c'est ce contexte qui a présidé chez Darboux à la découverte des cyclides.

Nous nous pencherons ensuite sur les notions et théories adjacentes auxquelles le géomètre est amené suite à cette découverte, et qui pour une large part motivent son travail de thèse. Seront d'abord évoqués les liens avec la théorie physique de la chaleur, où nous mettrons en relief l'influence de Gabriel Lamé sur Gaston Darboux (2). Nous y aurons notamment l'occasion d'aborder au passage la problématique de la découverte mathématique (place de l'erreur, méthodes de démonstrations, place de l'analogie et de l'intuition), où nous retrouverons et mettrons brièvement à l'épreuve plusieurs pistes suggérées au départ par Henri Poincaré [1]. Viendront ensuite les questions, ouvertes au moment des recherches de Darboux, propres à la construction des systèmes de surfaces orthogonales connectées aux propriétés infinitésimales des surfaces et au célèbre théorème de Dupin (3). Ces questions auront trait à la multiplicité des approches scientifiques d'un même problème, mais

1. Voir [**Poincaré 1905**] et [**Poincaré 1908**]. Pour une analyse récente de la philosophie de Poincaré, on consultera les travaux de Gerhard Heinzmann ([**Heinzmann 1985**]) et de Michael Detlefsen ([**Detlefsen 1992**], [**Detlefsen 1993**]).

seront également pour nous l'opportunité d'analyser un problème précis lié à la diffusion des connaissances mathématiques sous formes écrites.

En sortant progressivement du strict cadre de la thèse de Darboux, nous analyserons ensuite ses travaux relatifs à deux systèmes de coordonnées : les coordonnées *elliptiques* d'une part, et les coordonnées *pentasphériques* d'autre part (4). Résultant de prolongements de recherches antérieures pour les premières et d'une théorie tout à fait nouvelle pour les secondes, cette partie revêtira un grand intérêt en nous permettant de toucher à ce que l'acte de création de Darboux possède de singulier. Les distinctions entre ces deux sous-parties mettront au jour les mutations des intérêts scientifiques et des méthodes mathématiques de notre héros. Elles seront par ailleurs le cadre de l'introduction de la notion de *tradition*, notamment grâce au travail de [**Mancosu 2010**], qui soulignera un peu plus la distinction entre les recherches liées à ces deux systèmes de coordonnées.

Pour terminer, nous suivrons avec son important mémoire "*Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces*" (1873) l'étude méthodique, et qu'il souhaite complète, des surfaces cyclides (5). Entreprise seulement après sa thèse, et détachée dans une large mesure du contexte de la théorie des surfaces orthogonales qui l'avait pourtant fait naître, cette étude révèle chez Darboux "*le souci de la perfection*" dont parle son élève Picard [2]. Cette perfection, d'abord voulue pour la présentation écrite de son travail personnel, n'en affecte pas moins le processus même de sa recherche créatrice et ainsi - comme le dit encore Picard - toute son œuvre scientifique. Nous pourrons y mettre en relief les motivations qui guident le choix des méthodes de Darboux, en lien avec la quête de *l'élégance* évoquée par [**Poincaré 1908**].

Cette partie nous permettra, par la transition dont elle procède depuis les travaux du Darboux jeune étudiant (1864-1866) vers ceux du Darboux mathématicien confirmé (1872-1873), de témoigner une première fois de l'ouverture et de l'enrichissement de ses mathématiques au tournant des années 1870. Nous y retrouverons quelques traits qui caractérisent très tôt la recherche du géomètre : la mixité des méthodes analytiques et géométriques, les rapprochements entre des problèmes et des théories très différents de prime abord. Mais nous illustrerons surtout l'élargissement à partir de 1870 de ses centres d'intérêt et en conséquence de sa production mathématique. Cet élargissement provient - nous le verrons plus loin - du virage que prendra son cheminement intellectuel suite à sa tâche de rédacteur du "*Bulletin des Sciences*".

1. Les cyclides de Darboux (1864) : inspirées des ovales de Descartes, le premier système orthogonal "*à la fois triple et un*" qui s'arrache au second degré

Cette partie est consacrée à la genèse des surfaces cyclides de Darboux. Encore étudiant à l'Ecole Normale Supérieure, c'est dans le cadre de sa quête de nouveaux systèmes de surfaces orthogonales que vont apparaître ces surfaces qui porteront son nom. Dans une première section, nous détaillerons l'état des recherches mathématiques sur ce sujet

2. Voir [**Picard 1917**, XII].

des systèmes orthogonaux au moment où le jeune normalien entreprend ses premiers travaux (1.1). Nous insisterons également sur l'importance de leurs applications. Nous verrons ensuite l'objet d'étude central qui sera la source, par leur extension, des découvertes ultérieures de Darboux : des courbes planes nommées *ovales de Descartes* (1.2). Puis nous retracerons le lien opéré par le géomètre entre ces courbes et les propriétés d'orthogonalité, ainsi que le prolongement - depuis le plan vers l'espace - qu'il effectuera de ces considérations avec les surfaces cyclides (1.3). Le nouveau système triple orthogonal algébrique qu'il exhibe alors lui ouvrira les portes vers les études très diverses qu'il entreprendra avec sa thèse et qu'il poursuivra toute sa vie.

1.1. Les systèmes triples orthogonaux connus avant 1864.

L'intérêt des mathématiciens pour les systèmes de surfaces orthogonales s'éveille en France au début du XIXème siècle. Darboux résume ainsi dans sa thèse une opinion communément admise en rappelant que "*le célèbre théorème de M. Charles Dupin a été le point de départ des recherches sur les surfaces orthogonales*" ([**Darboux 1866**, 110]). Ce théorème, sur lequel nous reviendrons dans la partie 3.1, date de 1813 et relie les propriétés d'orthogonalité aux propriétés de courbure des surfaces. Néanmoins, c'est lorsque Gabriel Lamé en explicite l'usage dans le cadre de la physique mathématique dans les années 1830 que les systèmes triples orthogonaux deviennent subitement la source de très nombreuses recherches. Lamé montre en effet l'intérêt des systèmes de surfaces orthogonales pour décrire la répartition de la chaleur à l'intérieur d'un corps solide, ce que nous étudierons en détail dans la section suivante 2. Liés à la résolution de problèmes de physique, ainsi qu'à la mise en évidence de nouveaux systèmes de coordonnées (voir 4) ou encore à des propriétés infinitésimales des surfaces (voir 3), la découverte de nouveaux systèmes triples orthogonaux devient un enjeu important dans les mathématiques du XIXème siècle.

Gabriel Lamé naît à Tours en 1795. Il part étudier à Paris au Lycée Louis-le-Grand et parvient à intégrer l'Ecole Polytechnique en 1814. Ses études durent 6 ans - car l'Ecole Polytechnique est provisoirement fermée en 1815 - les deux dernières étant effectuées en application à l'Ecole des Mines. C'est là qu'il rencontre le physicien Emile Clapeyron qui devient son ami et avec qui il part à Saint-Pétersbourg en détachement de 1820 à 1831. A son retour en France, Lamé devient professeur à l'Ecole Polytechnique, puis à la Sorbonne où il enseignera jusqu'en 1863 la Physique Mathématique. L'œuvre de Lamé, très variée, touche de nombreux domaines de la théorie de l'élasticité à la théorie des nombres, en passant par la théorie de la chaleur, l'optique ou encore la mécanique rationnelle[3].

Le premier système triple orthogonal exhibé par Lamé en 1833[4] et plus largement développé en 1837 est le système formé des *quadriques homofocales*. C'est le système dont parle Darboux dans son discours de 1904 cité en introduction. Il se compose, en tout point de l'espace, d'un ellipsoïde $\mathcal{E}$, d'un hyperboloïde à une nappe $\mathcal{H}_1$ et d'un hyperboloïde à deux nappes $\mathcal{H}_2$. Lamé lui donne l'écriture suivante ([**Lamé 1837**, 154]) :

3. On consultera le Bulletin de la *Sabix* de Janvier 2009, entièrement dédié à "l'ingénieur Lamé".

4. Charles Dupin et Jacques Binet avaient déjà en 1813 abordé l'étude des propriétés géométriques du système des surfaces du second degré (S), voir [**Guitart 2009**, 125] et [**Chasles 1837a**, 390]. Nous verrons le cas de Charles Dupin ultérieurement en 3.1.

$$(S)\begin{cases} \dfrac{x^2}{\mu^2}+\dfrac{y^2}{\mu^2-b^2}+\dfrac{z^2}{\mu^2-c^2} & =1 \quad \mathcal{E} \\ \dfrac{x^2}{\nu^2}+\dfrac{y^2}{\nu^2-b^2}-\dfrac{z^2}{c^2-\nu^2} & =1 \quad \mathcal{H}_1 \\ \dfrac{x^2}{\rho^2}-\dfrac{y^2}{b^2-\rho^2}-\dfrac{z^2}{c^2-\rho^2} & =1 \quad \mathcal{H}_2 \end{cases}$$

On peut en réalité exprimer ces trois familles de surfaces dans la seule équation :

$$f(x,y,z,\lambda)=\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-b^2}+\frac{z^2}{\lambda-c^2}-1=0$$ [5]

Par conséquent, ce système triple orthogonal présente le double avantage d'être formé de surfaces algébriques, toutes du second degré, et d'être exprimé par une unique équation. C'est ce que Darboux appellera un "*système orthogonal triple et un*". Dans la note où il définit les coniques excentriques, Chasles mentionne également la même année ce système orthogonal ([**Chasles 1837a**, 392]). On peut par ailleurs remarquer que Lamé appelle dès 1833 les surfaces de ce système des surfaces *homofocales*. Néanmoins il donne une définition de l'homofocalité des quadriques bien plus réductrice que celle qui s'imposera en 1837 à la suite de la note de l'"*Aperçu*" de Chasles (voir [Chap.2,4.3]) : pour Lamé, les quatre *foyers* de ces surfaces sont définis comme étant les foyers résultant des sections de la surface par ses deux plans principaux ayant le même grand axe ([**Lamé 1833**, 199]). Il existe donc une grande différence avec la notion de *conique focale* des surfaces du second degré introduite par Chasles.

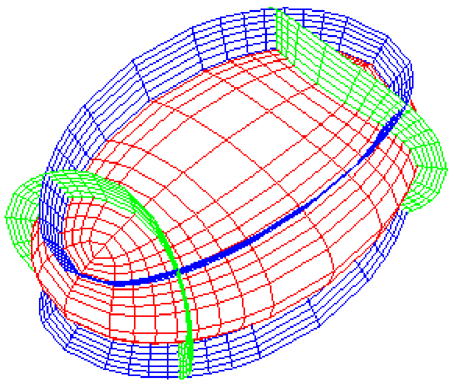


FIGURE 1. Un triplet de surfaces issu du système triple orthogonal de Lamé formé d'ellipsoïdes (en rouge), d'hyperboloïdes à une (en bleu) et à deux (en vert) nappes. [6]

5. Mises sous cette forme, on voit que ces quadriques homofocales peuvent être considérées comme ce qu'on appelle un "*faisceau tangentiel*" : leur équation tangentielle est en effet :

$$(u^2-b^2v^2-c^2w^2-t^2)+\lambda(u^2+v^2+w^2)=0$$

On retrouve alors leurs propriétés focales (voir le chapitre [Chap.2]).

6. Crédits image : *mathcurve.com*.

A partir de ce système triple orthogonal sont dérivés plusieurs autres systèmes. On peut en effet former des systèmes triples en utilisant :

– Une famille d'ellipsoïdes de révolution, une famille d'hyperboloïdes de révolution et une famille de plans parallèles ([**Lamé 1837**, 169])
– Deux familles de paraboloïdes elliptiques (de concavités opposées) et une famille de paraboloïdes hyperboliques ([**Lamé 1843**, 399])
– Une famille de sphères concentriques et deux familles de cônes du second degré de mêmes sommets ([**Lamé 1843**, 399])

Si ces systèmes triples orthogonaux ne sont pas toujours nouveaux pour les géomètres dans les années 1840, ils reçoivent cependant avec Lamé une attention renouvelée et un traitement nouveau. Tous les systèmes triples ci-dessus peuvent en réalité être compris dans le système de quadriques homofocales (S) car ils en découlent par un choix adapté des constantes qui le composent. En 1844, Bertrand évoque les systèmes triples formés de deux familles de cylindres et d'une famille de plans parallèles ([**Bertrand 1844a**]). Ces familles de surfaces sont celles qui dérivent naturellement de l'extension dans l'espace de familles de courbes planes orthogonales. En choisissant pour bases[7] des deux familles de cylindres ces courbes orthogonales prises dans un plan xy, on obtient bien en complétant avec les plans $z = \lambda$ un nouveau système triple orthogonal. Ces systèmes, que Lamé regarde comme "*un groupe distinct et très étendu*" ([**Lamé 1843**, 399]), ne sont néanmoins pas décrits par une unique équation.

FIGURE 2. Gabriel Lamé (à gauche) et Joseph-Alfred Serret (à droite).[8]

Au-delà de la présentation et de l'étude des quadriques homofocales, les travaux de Lamé jouent un rôle déterminant dans la théorie des surfaces orthogonales puisqu'ils font entrer cette théorie parmi les sujets incontournables pour les mathématiciens du XIXème siècle. Le mathématicien Pierre-Ossian Bonnet exprimera ainsi que "*depuis que M. Lamé a fait un si heureux emploi des coordonnées curvilignes dans ses savantes recherches sur la physique mathématique, le problème de la détermination des systèmes triples de surfaces orthogonales est considéré comme l'un des plus importants de la géométrie générale*" ([**Bonnet 1862**, 554]). La poursuite de la découverte des systèmes orthogonaux va après

7. On parle aussi des *parallèles* des cylindres, par opposition aux *méridiens*.
8. Crédits image : photo-arago.fr, Institut de France.

Lamé et Bertrand emprunter deux voies distinctes : il s'agira en effet soit de tenter d'intégrer, dans des cas simples, le système des trois équations cartésiennes décrivant l'orthogonalité des familles de surfaces, soit de tirer profit des coordonnées (μ, ν, ρ), dites elliptiques, apportées par l'écriture des quadriques homofocales de Lamé [9].

Joseph-Alfred Serret va commencer par employer la première méthode. Serret, né à Paris en 1819, est un ancien élève de l'Ecole Polytechnique dont il reste jusqu'en 1862 examinateur d'admission. D'abord chargé des cours d'algèbre et d'analyse supérieure à la Sorbonne, Serret y enseignera à partir de 1863 le calcul différentiel et intégral. Victime d'une attaque au début des années 1870 [10], c'est en fait Jean-Claude Bouquet qui l'y remplacera régulièrement.

En 1847, Serret étudie certains cas d'intégration des équations de la théorie des surfaces orthogonales. L'écriture générale donnée par le polytechnicien des équations différentielles traduisant l'orthogonalité de trois familles, dépendant respectivement des paramètres μ, ν et ρ, traduit ce qu'on appellerait aujourd'hui l'orthogonalité des gradients (ou des plans tangents) :

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{d\rho}{dx}\frac{d\mu}{dx}+\frac{d\rho}{dy}\frac{d\mu}{dy}+\frac{d\rho}{dz}\frac{d\mu}{dz} & =0 \\ \frac{d\rho}{dx}\frac{d\nu}{dx}+\frac{d\rho}{dy}\frac{d\nu}{dy}+\frac{d\rho}{dz}\frac{d\nu}{dz} & =0 \\ \frac{d\mu}{dx}\frac{d\nu}{dx}+\frac{d\mu}{dy}\frac{d\nu}{dy}+\frac{d\mu}{dz}\frac{d\nu}{dz} & =0 \end{array}\right.$$

Loin de se lancer dans sa résolution complète dont il paraît presque effrayé de l'abondance des calculs (voir 3), Serret remarque ([**Serret 1847**, 242]) qu'il peut parvenir à intégrer ces équations lorsque l'un des paramètres est à variables disjointes, c'est-à-dire dans le cas où :

$$\rho(x, y, z) = X(x) + Y(y) + Z(z)$$

Nous verrons en 3.2 que cette étude particulière lui aura été suggérée par des remarques antérieures de Bouquet. Toujours est-il que dans ce cas Serret exhibe un système de trois équations différentielles ordinaires portant sur X, Y et Z, dont les solutions fournissent un système triple orthogonal de la forme recherchée. Ainsi l'examinateur d'admission de l'Ecole Polytechnique parvient à déterminer de nombreux nouveaux systèmes triples orthogonaux, dont la difficulté des calculs y menant et l'expression même des surfaces varient selon les choix des paramètres qui se présentent au fil des intégrations. Aucun de ces systèmes n'est compris dans une unique équation, et pour la plupart ils sont composés d'une famille de surfaces algébriques et de deux familles transcendantes. Néanmoins, l'un des systèmes ne présente pas de calculs trop lourds et fait intervenir des familles de surfaces des ordres 2 et 4. Serret écrit ce système triple orthogonal nouveau comme :

9. A propos des coordonnées elliptiques, voir la section 4.1.

10. Le 26 Mai 1874, Gaston Darboux écrit : "*Serret a eu une petite congestion cérébrale, mais ne le dîtes pas : il y a des choses qu'il vaut mieux cacher. Il est à peu près remis, mais il a besoin de repos*" ([**Archives épistolaires Darboux**]).

$$\begin{cases} \rho = & \dfrac{yz}{x} \\ \mu = & \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+z^2} \\ \nu = & \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2+z^2} \end{cases}$$

La première famille (ρ) est donc composée de paraboloïdes hyperboliques, alors que les deux autres familles sont des surfaces du quatrième ordre comprises dans l'unique équation $(z^2-y^2)^2-2\mu^2(z^2+y^2+2x^2)+\mu^4=0$. Serret les rapproche des deux familles d'hyperboloïdes des quadriques de Lamé en ceci que les deux valeurs de μ correspondent à deux surfaces dont l'une est composée d'une unique nappe, tandis que l'autre présente "*des nappes non fermées*".

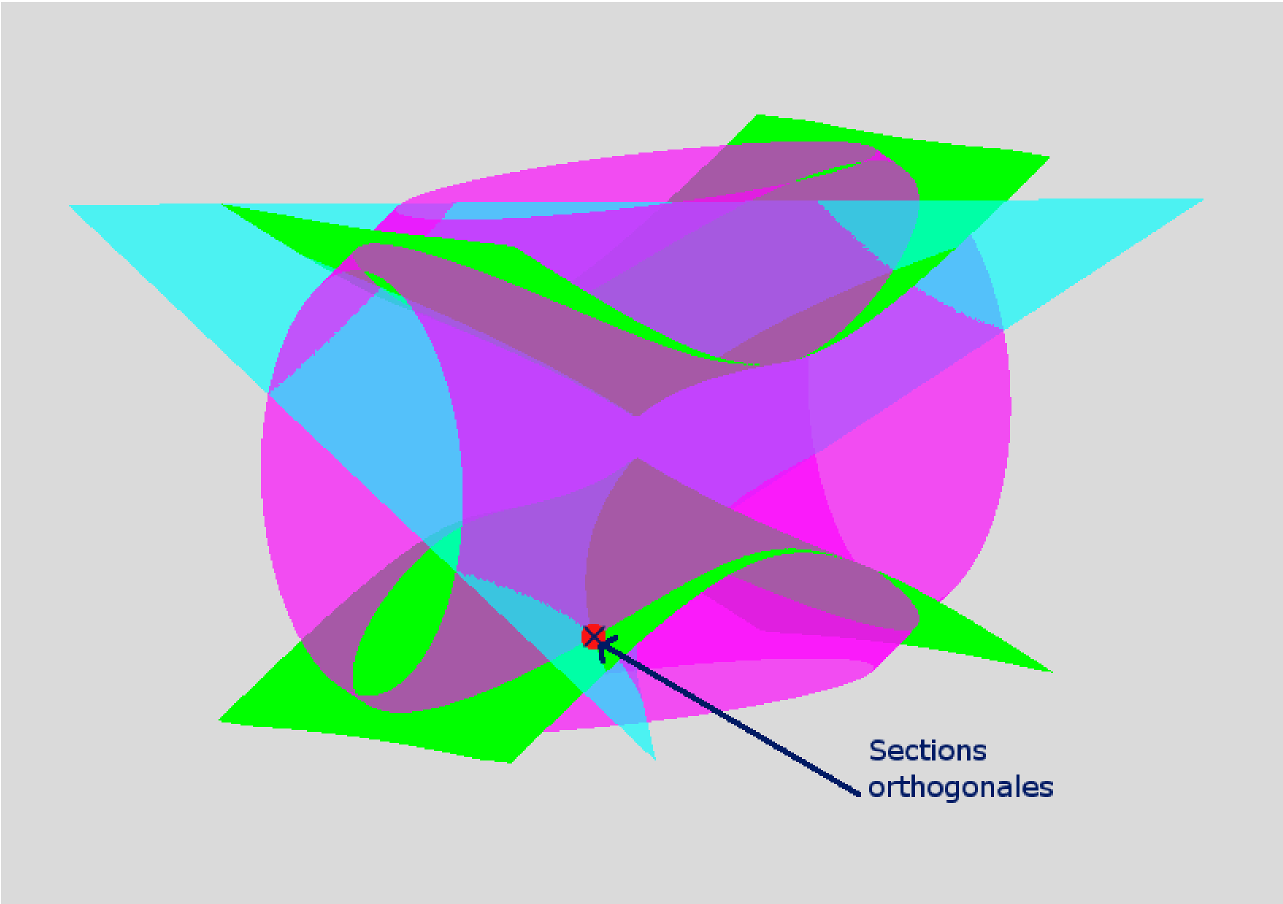


FIGURE 3. Un triplet de surfaces issu du système triple orthogonal de Serret formé d'un paraboloïde hyperbolique (en cyan) et de deux surfaces du quatrième ordre, l'une à une nappe (en violet), l'autre à deux (en vert).

Les trois paramètres (μ, ν, ρ) intervenant directement dans l'expression des quadriques homofocales de Lamé vont jouer un rôle central dans la théorie des surfaces orthogonales. Ces nouvelles *coordonnées elliptiques* - que nous étudierons dans la section 4 - sont en particulier utilisées par le mathématicien irlandais William Roberts pour rechercher directement - c'est-à-dire sans en revenir aux coordonnées cartésiennes x, y, z - l'expression de nouveaux systèmes de surfaces orthogonales ([**Roberts 1863**]).

Né à Cork, en Irlande, en 1817, William Roberts - avec son frère jumeau Michael - fait ses études à l'école Middleton de Cork avant d'intégrer le Trinity College de Dublin avec son frère en 1838. Grands amis de MacCullagh, les deux frères mathématiciens poursuivront leur carrière dans l'enseignement à Dublin dans leur College de formation.

Au début des années 1860, William Roberts étudie ainsi les familles de surfaces données par une équation en coordonnées elliptiques exprimée par $(\mathcal{F}_1)\ :\ F(\rho)+F'(\mu)+F''(\nu) = \alpha$. A partir d'une telle famille de surfaces et en écrivant les coefficients de la différentielle de $(\mathcal{F}_1)$ à l'aide de fonctions qu'il note P, M, N, l'irlandais exprime l'équation différentielle que doit satisfaire toute autre famille de surfaces pour former avec $(\mathcal{F}_1)$ un système double orthogonal ([**Roberts 1863**, 51]). Il trouve que l'intégrale générale de cette équation est donnée grâce à deux fonctions u et v qui dépendent des trois coordonnées elliptiques : toute famille de surfaces $(\mathcal{F}_2)$ comprise dans l'équation elliptique $u + \beta v = \gamma$ forme ainsi avec $(\mathcal{F}_1)$ un système double.

La construction d'un système triple repose alors sur la détermination de deux différentes familles, comprises dans l'équation elliptique précédente et ainsi orthogonales à $(\mathcal{F}_1)$, mais étant en outre "*elles-mêmes mutuellement orthogonales*" ([**Roberts 1863**, 51]). Roberts parvient à écrire la condition d'orthogonalité en utilisant de nouvelles fonctions auxiliaires l, m, n qui dépendent des radicaux de μ, ν et ρ. Cette condition prend alors la forme suivante :

$$\frac{(\mu^2-\nu^2)l^2}{P^2} - \frac{(\rho^2-\nu^2)m^2}{M^2} + \frac{(\rho^2-\mu^2)n^2}{N^2} = 0 \quad (\mathcal{E})$$

Les différentes résolutions de $(\mathcal{E})$ vont ainsi mener le professeur de Dublin à autant de systèmes triples orthogonaux établis à partir de la forme générale des familles $(\mathcal{F}_1)$. Roberts va détailler dans la suite de son travail trois cas distincts dans lesquels il parvient à exprimer analytiquement, toujours dans le système des coordonnées elliptiques, les surfaces qui composent ses systèmes triples orthogonaux.

Le premier cas est obtenu en considérant le cas particulier :

$$\frac{l}{P} = \frac{m}{M} = \frac{n}{N} = 1$$

Cette condition donne en effet une résolution immédiate de l'équation $(\mathcal{E})$. Dans ce cas, le système triple se compose d'une première famille de surfaces parallèles entre elles, dont les nappes des centres de courbure forment deux quadriques homofocales[11]. Les deux autres familles sont alors des surfaces développables, il s'agit des développables normales des surfaces de la première famille. L'écriture de ce système n'est pas simple, elle repose sur des primitives (selon μ, ν et ρ) dont Roberts ne donne pas d'expression analytique. Dans une communication à l'Académie des Sciences de Paris, il avait pourtant détaillé l'obtention de l'écriture algébrique en coordonnées cartésiennes (x, y, z) de ce même système triple. Il avait en outre souligné que la première famille de surfaces possédait pour lignes de courbure des courbes sphériques ([**Roberts 1861**]). Ici, deux ans plus tard, le mathématicien de Dublin remarque qu'un cas particulier présente l'avantage d'aboutir à une expression analytique particulièrement simple : ceci arrive lorsque les nappes des centres de courbure dégénèrent

11. Nous verrons dans la partie 4.1 que ces surfaces parallèles sont les *surfaces de Liouville*, Θ, des deux quadriques homofocales qui sont leurs nappes de courbure communes.

en deux courbes. Les surfaces de la première famille, dont les caustiques deviennent des courbes, sont alors des surfaces du quatrième ordre bien connues : ce sont les *cyclides de Dupin* (voir [Chap.2,7.2]). Les deux autres familles deviennent dans ce cas deux familless de cônes de révolution, dont les sommets et les bases sont donnés par les deux caustiques des cyclides de Dupin - une ellipse et une hyperbole situées dans des plans perpendiculaires. Ce système triple nouveau étend ainsi celui donné par Lamé constitué des sphères et des cônes du second degré. Roberts ne donne pas son écriture cartésienne, mais il explicite néanmoins la forme simple des équations en coordonnées elliptiques :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho+\mu+\nu = & \alpha & \text{Cyclides de Dupin parallèles} \\ \dfrac{(\rho-b)(\mu-b)(b-\nu)}{(\rho+b)(\mu+b)(b+\nu)} = & \beta & \text{Cônes de révolution (1)} \\ \dfrac{(\rho-c)(c-\mu)(c-\nu)}{(\rho+c)(c+\mu)(c+\nu)} = & \gamma & \text{Cônes de révolution (2)} \end{array}\right. \quad \text{[Roberts 1863, 53]}$$

Les cyclides de Dupin, famille de surfaces du quatrième ordre, sont ainsi susceptibles de faire partie d'un système triple orthogonal. Dans le système donné par Roberts, elles sont associées à deux familles de cônes, qui sont du second degré. Ce système triple orthogonal, tout comme celui de Serret, mêle donc des surfaces des degrés 2 et 4. Il n'est ainsi naturellement pas compris dans une unique équation.

Roberts décrit par la suite qu'une seconde manière de satisfaire à la condition d'orthogonalité $(\mathcal{E})$ est de poser :

$$\rho^2 P^2 = l^2,\ \mu^2 M^2 = m^2,\ \nu^2 N^2 = n^2$$

Les systèmes triples orthogonaux qui découlent de ce choix présentent le désavantage de pas être exprimés en général de manière algébrique. L'intérêt que Roberts attache à cette étude réside dans le fait que l'une des trois familles de surfaces peut être explicitée algébriquement, ainsi que les courbes d'intersection qui y sont formées par les deux autres familles [12]. Mais là encore, il existe des cas particuliers et l'un d'entre eux permet d'aboutir à un système triple pour lequel le mathématicien irlandais repasse à titre exceptionnel en coordonnées cartésiennes. Ce système est composé de surfaces cubiques (de degré 3) mais qui ne sont pas comprises dans une unique équation. Son expression est la suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y^2}{ax-b^2}+\dfrac{z^2}{ax-c^2} &=& 1 \\ \dfrac{x^2}{\beta y+b^2}+\dfrac{y}{\beta}+\dfrac{z^2}{\beta y+b^2-c^2} &=& 1 \\ \dfrac{x^2}{\gamma z+c^2}+\dfrac{y^2}{\gamma z+c^2-b^2}+\dfrac{z}{\gamma} &=& 1 \end{array}\right. \quad \text{[Roberts 1863, 58]}$$

Ce système triple possède deux particularités géométriques singulières : d'abord, les surfaces qui le composent se coupent deux à deux suivant des cercles. Ensuite, la construction de chacune des surfaces du système est tirée d'une série d'ellipsoïdes homofocaux : en considérant un point fixe situé sur l'un des trois axes des ellipsoïdes, une surface du système est donnée par l'assemblage des courbes de contact des cônes circonscrits aux

12. D'après le théorème de Dupin que nous étudierons en 3.1, les courbes d'intersection des surfaces des différentes familles d'un système triple orthogonal sont les lignes de courbure de ces surfaces : c'est là que réside principalement l'intérêt de l'analyse de Roberts.

ellipsoïdes ayant pour sommet ce point fixe. Les surfaces d'une même famille sont issues des différents points d'un même axe que les cônes prennent pour sommet, et les trois axes donnent naissance aux trois familles ([**Roberts 1863**, 57]).

La dernière des trois résolutions proposées par Roberts est plus épineuse, et le système triple orthogonal qui en découle ne présente tout au plus qu'une seule des trois familles algébrique. Cette famille est constituée de surfaces de degré 4, et le système ne se simplifie en devenant totalement algébrique que lorsque cette famille décrit des cyclides de Dupin : on retombe alors sur le premier des trois cas étudiés.

On peut ainsi souligner qu'avec l'essor des découvertes de systèmes triples orthogonaux dans les années 1830 et au début des années 1840, Lamé et - dans une moindre mesure - Bertrand ont épuisé les recherches pour les surfaces du second degré. A l'exception des systèmes composés de cylindres et de plans parallèles, tous les systèmes triples orthogonaux du second degré peuvent être compris comme des cas particuliers du système de quadriques homofocales formé par les ellipsoïdes et les hyperboloïdes, un système qui est au centre des travaux de Gabriel Lamé. Par la suite, la recherche des systèmes triples repose entièrement sur la détermination de cas particuliers où l'intégration des équations traduisant l'orthogonalité, facilitée, est rendue possible. Avec les coordonnées cartésiennes ou avec les coordonnées elliptiques, Serret et Roberts parviennent à exhiber quelques nouveaux systèmes triples orthogonaux qui deviennent de plus en plus complexes : les surfaces ne sont plus décrites par une seule équation et elles ne sont, au sein d'un même système, pas nécessairement du même degré. Certaines ne possèdent pas même d'expression algébrique. En 1862, Bonnet résume ainsi que les systèmes triples orthogonaux connus sont "*le système des surfaces du second degré homofocales [...], les systèmes [...] que M. J.-A. Serret a donnés [en 1847] et enfin les systèmes analogues que M. W. Roberts a tout récemment déduits de la considération des coordonnées elliptiques*" ([**Bonnet 1862**, 555]).

Aussi au début de sa thèse Darboux peut-il affirmer qu'en dehors des quadriques homofocales de Lamé, "*tous les autres systèmes orthogonaux connus sont formés de trois séries de surfaces différentes [non compris dans une unique équation]. Si les trois systèmes sont algébriques, les surfaces ne sont pas du même degré comme dans les systèmes découverts et étudiés par M. Serret. Quelquefois même l'un des systèmes est algébrique et les autres sont transcendants*" ([**Darboux 1866**, 98]). Nous allons voir dans la suite comment Darboux va mettre sur pied un nouveau système triple orthogonal compris dans une unique équation et composé de surfaces algébriques d'un seul et même degré, supérieur à 2.

1.2. Les ovales de Descartes : un amour de jeunesse.

Les *ovales de Descartes* sont des courbes planes que Descartes a introduites dans les années 1630 [13]. Ces courbes présentent pour leur auteur deux intérêts majeurs : d'un point de vue optique, elles possèdent des propriétés de réfraction bien particulières qui permettent d'obtenir un stigmatisme parfait entre deux milieux dont l'indice optique diffère. D'un point de vue géométrique, elles permettent à Descartes d'illustrer une méthode de construction des courbes dite *méthode des normales* ou *des cercles tangents* ([**Maronne 2010**],

13. Pour l'introduction des ovales dans les travaux de Descartes, voir [**Barbin Guitart 1998**] et [**Maronne 2010**].

[Barbin Guitart 1998, 369-372]). Descartes accorde en effet une grande importance à la possibilité de décrire mécaniquement les courbes (le savant français aurait plutôt dit dans ses termes que les courbes "*méchaniques*" sont "*bien réglées*").

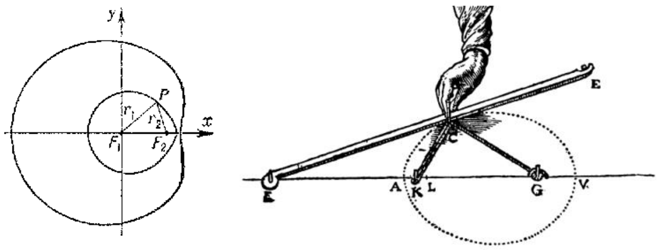


FIGURE 4. Un(e) ovale de Descartes (à gauche), et l'image de la construction "méchanique" de l'ovale donnée par Descartes [14]

L'étude des ovales cartésiennes va, au cours du XIXème siècle, être largement reprise et développée sous trois différents aspects. Tout d'abord, Quételet va mettre au jour de nouvelles propriétés des ovales dans le domaine de l'optique géométrique. Ensuite, les ovales vont largement intervenir dans la recherche de rectification des courbes planes à l'aide des fonctions elliptiques, impliquant notamment Serret, Roberts, Angelo Genocchi et Gaston Darboux. Enfin, l'extension de la notion de foyer (voir Chap.2) permet à Chasles, Salmon et Darboux d'étudier les propriétés focales des ovales et de les reclasser ainsi parmi les différentes courbes planes du 4ème ordre.

L'étude des rectifications en lien avec les ovales et les fonctions elliptiques a déjà largement été menée par Evelyne Barbin et René Guitart ([Barbin Guitart 1998] et [Barbin Guitart 2001]). Nous allons en conséquence nous concentrer sur les deux autres aspects.

En suivant René Descartes, les ovales sont décrites dans le plan - outre la mécanique de leur construction - par une relation de distance impliquant deux points fixes, F et F'. En notant r et r' les distances d'un point M aux deux points fixes, l'équation de l'ovale est donnée par [15] :

$$nr + r' = h$$

Néanmoins, en général une ovale *complète* est composée de deux branches disjointes, et l'équation - dite *bipolaire* - de Descartes ci-dessus ne permet d'en décrire qu'une des deux branches. L'ovale complète serait alors donnée en adoptant la notation : $|nr \pm r'| = |h|$, $n \in \mathbb{R}$. Les deux points F et F' sont ainsi des foyers de l'ovale, ou comme le dit encore Descartes "*des points brûlants*". Symétriques par rapport à leur axe focal, les ovales constituent une extension des coniques que l'on retrouve dans les cas $n = \pm 1$. Leur équation cartésienne - que Descartes ne donne pas - peut être déterminée par un double passage au carré de

14. L'illustration de Descartes se trouve dans le Livre Second de "*La Géométrie*", (1637) p.456. L'ovale est de nos jours devenu un nom masculin, mais auparavant pour Descartes il était féminin ! Nous utiliserons indifféremment les deux genres.

15. Pour faciliter la lecture, nous adaptons toutes nos notations à celles que Darboux emploiera dans ses travaux.

l'équation bipolaire. On obtient alors :

$$h^4 - 2h^2(n^2r^2 + r'^2) + (n^2r^2 - r'^2)^2 = 0$$

Ceci constitue en effet bien une équation cartésienne lorsque l'on remplace r^2 par $(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2$, et de même avec le second foyer F' pour r'^2.

Cela établit peu ou prou l'état des connaissances mathématiques sur les ovales à la suite des travaux de Descartes [16]. Cet état restera presque inchangé durant près de deux siècles : il faut en effet attendre la fin des années 1820 pour que Quételet donne à ces études un renouveau tant significatif qu'inattendu en montrant leur lien avec une notion nouvelle de l'optique géométrique dont il est l'auteur, la notion de *caustique secondaire*, encore appelée *anticaustique*. Pour étudier les phénomènes optiques de réflexion (ou de réfraction) selon une courbe lorsque les rayons lumineux incidents sont émis d'une source ponctuelle ou sont tous parallèles, le mathématicien allemand Ehrenfried Walther von Tschirnhaus [17], ami de Leibniz, choisit dès 1682 d'étudier la courbe enveloppe des rayons réfléchis (ou réfractés). De nombreuses propriétés découlent en effet uniquement de cette enveloppe, et avant tout le lieu de focalisation des rayons lumineux. Tschirnhaus, "*homme de génie*" pour Chasles, donne à cette courbe le nom de "*caustique*" (*par réflexion ou par réfraction*). L'extension dans l'espace donnera naissance aux "*surfaces caustiques*" [18], et Quételet dira que "*toute la catoptrique repose sur la considération de ces surfaces*" ([**Quételet 1825**, 90]).

Si cette notion s'avère fort utile, Chasles et Quételet ne manquent néanmoins pas de remarquer un point faible des caustiques de Tschirnhaus : leur détermination et leur étude géométrique ou analytique sont bien délicates. Quételet souligne que "*les formules [liées aux caustiques] sont nécessairement fort compliquées, et offrent peut-être quelque difficulté quand on passe à l'application*" ([**Quételet 1825**, 90]). Chasles quant à lui remarque qu'à l'heure où il écrit son "*Aperçu historique*", "*la caustique de Tschinhausen, produite par réfraction dans le cercle, s'est refusée jusqu'à ce jour à toutes les ressources de l'Analyse*" ([**Chasles 1837a**, 107]) [19]. Suivant une idée déjà avancée plus tôt par Huygens [20] et par Gergonne ([**Barbin Guitart 1998**, 382]), Quételet propose alors en 1825 de remplacer la recherche de la caustique de Tschirnhaus, dite principale, par la recherche de sa *développante*. Il montre en effet qu'il est bien plus simple, plutôt que de rechercher l'enveloppe des rayons réfléchis (ou réfractés), d'étudier la courbe à laquelle ces rayons sont tous perpendiculaires ou dans ses propres termes, d'étudier "*les trajectoires orthogonales des rayons réfléchis ou réfractés*". Il donne alors à ce nouveau lieu le nom de "*caustique secondaire*", en opposition avec la "*caustique principale*" de Tschirnhaus. Cette-dernière devient alors

16. On pourra lire [**Chasles 1837a**, 161-162] pour voir néanmoins que les ovales et leur construction sont reprises notamment par Newton, Huygens ou encore Roberval. Cependant, aucune nouvelle propriété importante n'est alors mise au jour.

17. A propos de Tschirnhaus et de ses caustiques, on consultera [**Kracht 1990**].

18. On constate qu'il s'agit ici de la naissance de la terminologie de "surface caustique", dont on a vu en [Chap.2,6] qu'elle se mélangeait à présent avec celle de "surface focale". On voit pourtant ici qu'à l'origine, les surfaces caustiques ne reposent pas sur la considération des rayons normaux à une courbe ou une surface mais sur des réflexions ou des réfractions quelconques.

19. Salmon traitera avec succès ce problème dans [**Salmon 1852**, 116].

20. A propos du *principe de Huygens* lié à la propagation de la lumière considérée comme phénomène ondulatoire, voir [**Arnold 1989**, 248-256] qui en donne une exposition mathématique moderne.

simplement la développée de la caustique secondaire de Quételet, dont la construction peut se faire comme enveloppe de cercles centrés sur la courbe réfléchissante (ou dirimante).

Le succès de la méthode de Quételet est immédiat dès son premier mémoire [**Quételet 1825**] où le mathématicien belge traite avec une simplicité nouvelle plusieurs cas. Mais c'est surtout en 1829 que la fécondité des caustiques secondaires est mise en avant avec la résolution du problème que Chasles mentionne dans son "*Aperçu*" : l'étude de la réfraction dans le cercle. Quételet parvient en effet à prouver que la caustique secondaire par réfraction dans le cercle est exactement donnée par l'ovale de Descartes ([**Quételet 1829**, 32-35]). Non seulement cela permet-il de résoudre un important problème d'optique géométrique, mais en outre cela permet de déterminer de nouvelles propriétés des ovales et donc de relancer l'étude de ces courbes pour les mathématiciens. Chasles écrira ainsi au début des années 1830 que "*dans ces derniers temps, ces ovales ont reparu sur la scène géométrique*" ([**Chasles 1837a**, 162]).

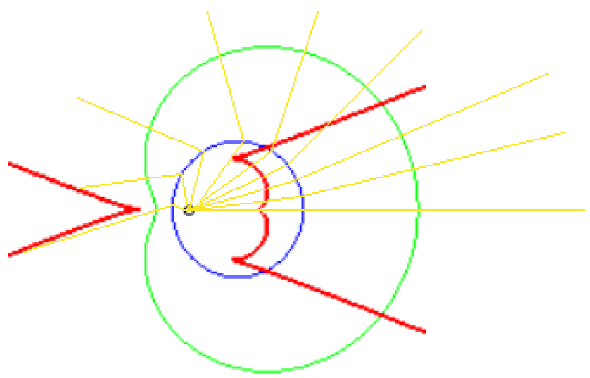


FIGURE 5. Un ovale (en vert) obtenu comme caustique secondaire de réfraction des rayons lumineux (en jaune) de source ponctuelle dans le cercle. La caustique "principale" de Tschirnhaus est tracée en rouge.

Le renouveau de l'étude des ovales, que Quételet tel un physicien appelle des "*lignes aplanétiques*", se manifeste particulièrement par la découverte de plusieurs nouveaux modes de génération de ces courbes planes. En tant que caustiques secondaires par réfraction - mais en fait aussi par réflexion - sur le cercle, les ovales de Descartes peuvent être construites comme enveloppe de cercles de rayon variable dont les centres se situent sur le cercle dirimant (ou réfléchissant). Cette génération est en effet caractéristique des courbes et surfaces caustiques secondaires. Par ailleurs, nous avons vu dans le cadre de l'étude des foyers (voir [Chap.2,4.1]) que l'approche de Quételet était caractérisée par la considération systématique des courbes planes via leur construction dans l'espace [21]. Le mathématicien belge réédite avec les ovales en donnant deux nouvelles manières de les engendrer dans

21. On pourrait également faire remarquer que Quételet introduit encore un problème de vocabulaire : tout comme la "focale" de son doctorat avait troublé les appellations pour les foyers, l'étude des caustiques secondaires du belge amène un synonyme aux ovales cartésiennes avec les *lignes aplanétiques*. Joueur sur les mots, nul doute qu'il aurait apprécié l'anagramme : *la mode Quételet est entrée pour entremêler la quête des mots.*

l'espace : il montre que ces courbes sont obtenues soit par projection stéréographique de l'intersection d'une sphère et d'un cône de révolution, soit par projection orthogonale de celle de deux cônes de révolution dont les axes sont parallèles. Quelques années plus tard, Chasles étend la validité de certaines des descriptions données par Quételet et propose de nouvelles générations. Il énonce en particulier une construction plane à l'aide de deux cercles, dont les centres seront deux foyers de l'ovale, et d'un point de l'axe focal autour duquel "*on fait tourner une transversale*". Les rencontres des transversales et des deux cercles permettent alors de construire les points de l'ovale ([**Chasles 1837a**, 351]).

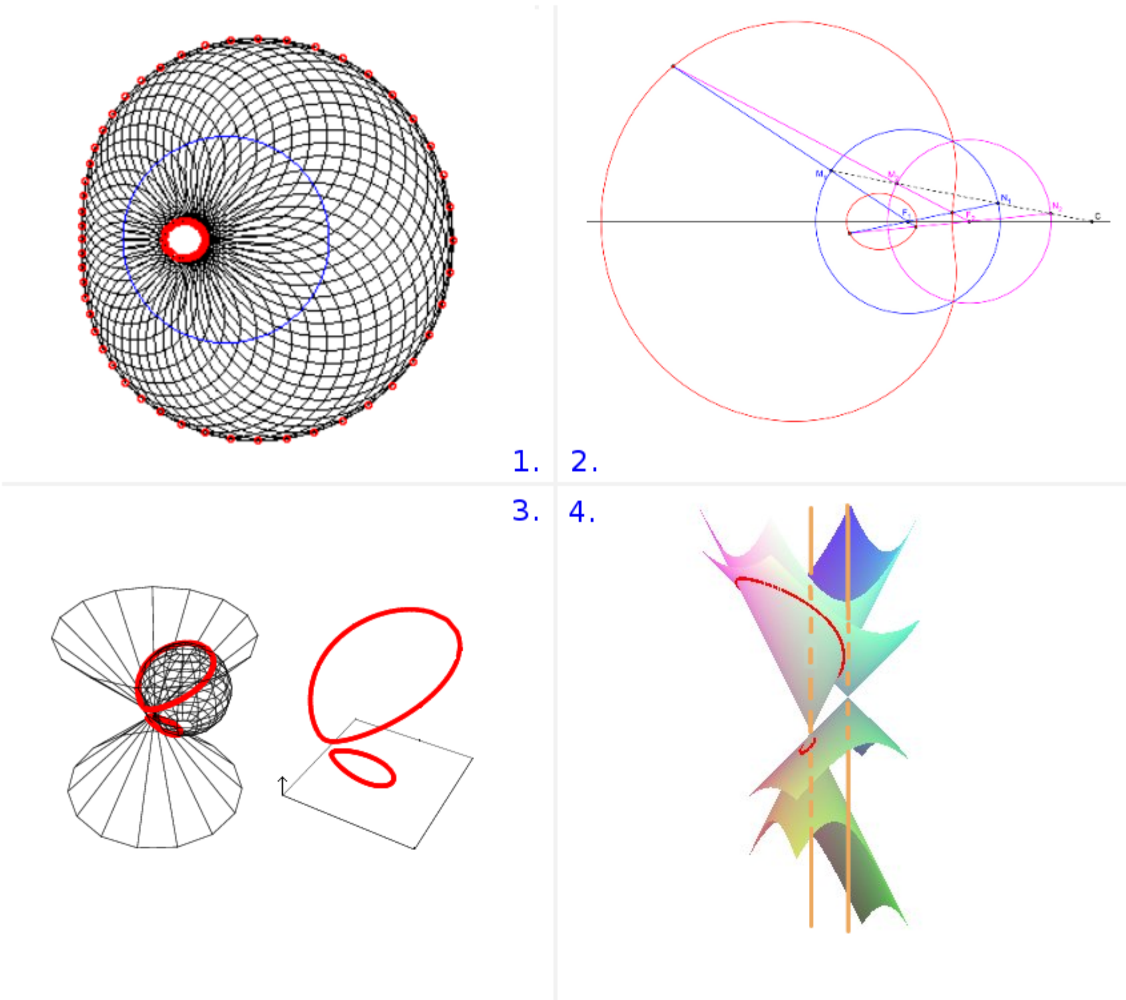


FIGURE 6. Les quatre nouveaux modes de génération des ovales proposés par Quételet (enveloppe de cercles [1], projections des intersections cône/sphère [3] et cône/cône [4]) et Chasles (deux cercles et des transversales [2]).[22]

22. Crédits image : mathcurve.com et mathworld.wolfram.com

Les nouvelles constructions géométriques des ovales que Chasles met au jour lui permettent de découvrir, uniquement grâce aux propriétés de la géométrie de ces courbes, une nouvelle propriété focale. Depuis Descartes, il était bien connu que les ovales possédaient deux foyers qui servaient à en donner la définition bipolaire. Le polytechnicien remarque en effet "*qu'outre les deux foyers qui servent à leur description, elles en ont un troisième qui joue le même rôle*" ([**Chasles 1837a**, 352]). Chasles ne donne pas plus de détail sur l'existence de ce troisième foyer, ni même sur son lieu géométrique. Il est cependant le premier à remarquer l'existence d'un troisième foyer, et cela est d'autant plus surprenant que cette découverte ne doit absolument rien aux outils complexes de la géométrie analytique projective que Plücker développe au même moment précisément pour étendre la notion de foyer.

Il faut attendre le traité sur les courbes planes de 1852 de Salmon pour trouver un traitement nouveau des ovales de Descartes via leurs propriétés focales grâce aux travaux de Plücker. Nous avons déjà mentionné l'existence de ce traitement en [Chap.2,3.2]. Dans [**Salmon 1852**, 122-127], l'auteur irlandais étudie en effet ces courbes d'un point de vue analytique et projectif, et les replace parmi une classe de courbes plus large que nous avons déjà détaillée la section sus-citée : les *quartiques bicirculaires*[23].

Après avoir écrit l'équation d'un ovale sous la forme $l\sqrt{A} + m\sqrt{B} = d$, Salmon décrit le comportement à l'infini de ces courbes : elles admettent les points cycliques comme points de rebroussement. Il en conclut que les ovales, étant du quatrième degré, sont de classe 6. Cela précise largement la remarque que Chasles avait faite stipulant que les ovales possédaient "*deux points conjugués imaginaires situés à l'infini*". Les points cycliques sont donc considérés par le professeur irlandais comme des foyers triples "*puisque la tangente en un rebroussement compte triple*". Il reste alors $6 - 3 = 3$ autres foyers étant bien réels dans le plan. Salmon retrouve ainsi, avec des outils complètement différents, le résultat géométrique de Chasles, c'est-à-dire l'existence de trois foyers (réels finis) pour les ovales de Descartes.

Mais l'irlandais pousse son étude plus en profondeur : en cherchant à donner à l'ovale une équation bipolaire analogue à celle qui implique les foyers A et B, mais en substituant à B le troisième foyer C, il prouve à l'aide de la relation de Stewart que ce-dernier se situe sur la droite (AB) et qu'il est déterminé par l'équation suivante :

$$ab(l^2ac + m^2bc) = d^2 \qquad \text{[Salmon 1852, 124]}$$

L'équation bipolaire d'un même ovale peut donc prendre trois différentes formes, selon le choix des deux foyers. Finalement, à l'aide d'un rapide dénombrement des constantes, Salmon énonce que les ovales de Descartes sont exactement les courbes du quatrième ordre admettant les points cycliques pour points de rebroussement. Un point de rebroussement étant vu comme un cas particulier de point double[24], cela mène naturellement le mathématicien de Dublin à replacer l'étude des ovales dans le cadre plus large des courbes du quatrième ordre qui admettent ces mêmes points cycliques comme points doubles : les *quartiques bicirculaires*.

23. Le nom de "*bicircular quartic*" ne sera introduit qu'ultérieurement dans les années 1860 par John Casey, [**Barbin Guitart 2001**, 164].

24. Pour la plupart des acteurs dont nous nous proposons d'étudier le travail, un *point double* correspond simplement à un *point singulier*. Les *points doubles ordinaires* seront ainsi souvent opposés aux *points de rebroussement* et aux autres types de singularité.

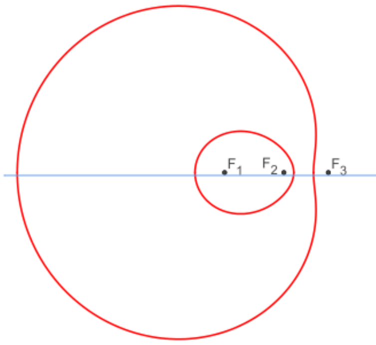


FIGURE 7. Les trois foyers, alignés, d'un ovale de Descartes

Ayant déjà effectué l'analyse du traitement de Salmon des quartiques bicirculaires, nous nous contenterons ici de mettre en évidence ce qui, parmi cette classe de courbes, caractérise les ovales de Descartes dans le traité du professeur du Trinity College. Ayant déterminé l'existence de quatre foyers cocycliques pour les quartiques bicirculaires générales, Salmon peut exprimer sous quatre différentes formes l'équation *tripolaire* homogène définissant ces courbes. Lorsque trois foyers A, B, C deviennent alignés, il remarque que la relation de cocyclicité dégénère et stipule l'alignement du quatrième foyer D tout en fixant sa position sur la droite (ABC). Salmon obtient alors un ovale cartésien lorsqu'il rejette le foyer D à l'infini.

Dès les premières recherches qu'il effectue en tant qu'élève de l'Ecole Normale Supérieure, Darboux attache une très grande importance à ces deux classes de courbes du quatrième ordre que sont les ovales de Descartes et les quartiques bicirculaires. Son approche synthétise les deux méthodes distinctes que nous avons pu mettre en évidence jusqu'alors : la vision géométrique de Chasles et de Quételet (ce-dernier tirant profit de l'appréhension des études planes comme obtenues à travers la géométrie dans l'espace), et la vision analytique de la géométrie projective complexe de Salmon héritée de Plücker.

Les tout premiers travaux de Darboux sur ces courbes sont regroupés dans deux publications d'Avril et de Mai 1864 dans les "*Nouvelles Annales*" ([**Darboux 1864a**] et [**Darboux 1864b**]), ainsi que dans un mémoire qu'il ne publiera certes qu'ultérieurement dans les "*Annales de l'Ecole Normale*" mais qui comportera bon nombre de ses premiers résultats sur les ovales de Descartes ([**Darboux 1867**]).

Dans la première publication de recherche qu'il effectue, Darboux s'intéresse aux sections planes des tores [25] ([**Darboux 1864a**]). Ce qui rapproche, selon Darboux, le tore et une quartique bicirculaire plane est la forme que l'on peut donner à leur équation sous forme linéaire homogène en fonction des distances à trois éléments fixés. S'inspirant du traité de Salmon, Darboux reconnaît les quartiques bicirculaires à la forme de l'équation *tripolaire* : $at + a't' + a''t'' = 0$, où t, t', t'' désignent les distances à trois points fixes (qui sont autant de foyers de la courbe). Dans l'espace, Darboux commence par montrer qu'à partir de la considération dans le tore de deux sphères inscrites [26] opposées (symétriques

25. Il s'agit ici bien sûr de tores standards de révolution, engendrés par la rotation d'un cercle autour d'un axe.

26. Au sens de Darboux, une sphère est dite inscrite dans un tore si l'un de ses grands cercles coïncide avec l'un des cercles qui constituent les méridiens du tore ([**Darboux 1864a**, 156-7]).

par rapport au centre du tore), d'équations abrégées $t = 0$ et $t' = 0$, on peut trouver une troisième sphère inscrite $t'' = 0$ telle que l'équation du tore devienne :

$$ct + c't' + c''t'' = 0$$ [27]

Ainsi le tore peut-il être représenté par une relation linéaire et homogène entre les distances d'un point à trois sphères fixes qui y sont inscrites. Pour Darboux, "*la démonstration est facile, soit par l'analyse, soit par la géométrie*" ([**Darboux 1864a**, 157]). L'analogie avec les quartiques bicirculaires est ainsi immédiate via la forme des équations. Mais surtout, cela permet à Darboux d'obtenir un outil puissant pour l'étude des sections planes. En effet, il remarque que la section par un plan transforme les sphères inscrites en des cercles, qui seront doublement tangents à la section. Cela amène le jeune étudiant géomètre au théorème suivant :

> THEOREME IV. Toute section du tore est telle, que si on lui mène trois cercles doublement tangents, il y a une relation linéaire et homogène entre les distances d'un point quelconque de la section aux circonférences de ces trois cercles.
>
> [**Darboux 1864a**, 160]

Darboux finit par souligner que pour une section donnée, il existe "*quatre sphères inscrites (réelles ou imaginaires) qui lui sont tangentes*". Entamant ainsi l'étude dans le plan (de la section), il continue néanmoins à prendre en considération les sphères et leurs rapports au tore originel : à l'instar de Quételet, l'étude plane du nîmois bénéfie de son appréhension géométrique spatiale. Darboux utilise en effet le fait que les distances aux circonférences sont, pour la section, remplacées dans l'équation homogène par des distances aux points de contact. Ainsi, l'équation de la section plane du tore se met finalement sous la forme :

$$ar + \sqrt{a'^2 + b'^2}r' + \sqrt{a''^2 + b^2}r'' = 0$$ [28]

Darboux parvient ainsi à retrouver les quartiques bicirculaires en considérant les sections du tore. Ces sections "*sont des courbes satisfaisant à l'équation générale $r = \mu r' + \nu r''$*"[29]. Il retrouve par ce biais également le fait que ces courbes planes possèdent quatre foyers (réels finis), et que ces foyers sont "*placés symétriquement par rapport à l'axe de la section ; ils sont donc sur un cercle*". Mais, bien que connaissant le traité de Salmon sur les courbes planes (Darboux cite ce traité dans un de ses travaux datant de la même époque, [**Darboux 1865**, 61]) où ces quartiques sont traitées de manière générale, ce qui intéresse Darboux est avant tout de pouvoir les relier aux ovales de Descartes.

C'est grâce à la transformation par rayons vecteurs réciproques (ou inversion) que le géomètre nîmois met en évidence le lien géométrique liant les ovales cartésiennes aux sections du tore, des quartiques bicirculaires générales. Nous avons souligné que Salmon avait classé les ovales, relativement aux quartiques, en fonction de la position de leurs

27. Les coefficients c sont déterminés par les distances des centres des sphères. Par ailleurs, les expressions de t, t' et t'' sont des distances et contiennent par conséquent des radicaux. Elles correspondent à des distances d'un point à une sphère, ce que Darboux définit comme étant "*la longueur de la tangente menée de ce point à la sphère*" ([**Darboux 1864a**, 157]).

28. Les coefficients a, a', a'' et b dépendent des positions des sphères inscrites tangentes au plan sécant.

29. Une relation lie toutefois les carrés des deux coefficients μ et ν de la quartique, voyez [**Darboux 1864a**, 162].

foyers. Darboux remarque qu'une inversion centrée en l'un des quatre foyers de la quartique envoie précisément ce foyer à l'infini. De plus, les trois autres foyers étant situés sur un cercle passant par le centre de l'inversion, ils sont transformés en trois points alignés. Puisque les foyers de la courbe réciproque sont les inverses des foyers de la quartique, on obtient bien par inversion une courbe, du quatrième ordre, qui possède exactement trois foyers (réels finis) alignés : c'est un ovale de Descartes. Darboux retrouve en fait ces résultats géométriques en ne considérant que la transformation de l'équation homogène de la quartique bicirculaire par inversion :

> Transformons ces courbes [d'équation générale $r = \mu r' + \nu r''$] par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle un quelconque des trois foyers. Nous trouverons, par exemple, en adoptant le foyer r,
>
> $$\mu_1 r'_1 + \nu_1 r''_1 = 1$$
>
> pour équation de la courbe réciproque. Donc :
>
> THEOREME VII. Les sections planes du tore peuvent être regardées de quatre manières différentes, comme les courbes réciproques des ovales de Descartes.
>
> [**Darboux 1864a**, 162]

Ce résultat important sera retrouvé quelques semaines plus tard par un Mannheim dont on peut constater que les recherches sont alors très proches de celles de Darboux. Nous avons déjà souligné ceci en [Chap.2,7.2], où nous avons par ailleurs mentionné que Mannheim utilisait l'inversion pour déduire du tore des propriétés de la cyclide de Dupin. Darboux adopte également cette approche pour déterminer dans les notes additionnelles de son mémoire [**Darboux 1864a**, 163-165] certaines nouvelles propriétés de cette cyclide liées à son travail sur les sections planes du tore. En particulier, il détermine l'existence de deux séries de sections planes des cyclides de Dupin qui donneront des ovales cartésiennes.

Les ovales de Descartes sont ainsi centrales dès les premiers travaux géométriques de Darboux : elles sont pour lui les courbes de référence parmi les courbes du quatrième ordre qu'il rencontre, et les propriétés de ces quartiques, bicirculaires, sont expliquées par lui à partir de leur lien par inversion avec les ovales. En ceci, on voit comment Darboux unifie les méthodes si différentes de Chasles et de Salmon : il décrit ainsi bien, comme l'irlandais, les propriétés focales et les équations homogènes des courbes. Mais il effectue ceci en utilisant des transformations géométriques pour les interpréter à partir d'une famille de courbes qu'il connaît bien - les ovales - ce en quoi il se rapproche de l'auteur de l'"*Aperçu historique*".

Nous avons montré en [Chap.2,4.3] comment, dans l'évolution de la notion de focale, les courbes sphériques (en l'occurence les coniques) avaient constitué en 1830 pour Chasles le tremplin depuis les études planes vers les études spatiales. Il en va de même en 1864 pour Darboux avec l'étude des ovales cartésiennes et des quartiques bicirculaires. Pour plus de simplicité, nous appellerons dorénavant ces-dernières des *cycliques*, nom que Darboux leur attribuera à partir de 1869 ([**Darboux 1873a**, 27]) et qui s'imposera en France pour quelques temps. Aujourd'hui pourtant, le nom de *cyclique* regroupe une famille de courbes bien plus large, et c'est la dénomination d'origine anglaise de "*quartique bicirculaire*" qui est restée[30].

30. Les "cycliques" sont ajourd'hui les courbes anallagmatiques planes, et ce que Darboux appellait *cycliques* sont en fait nos "cycliques du quatrième ordre", soit les anallagmatiques dont les déférentes sont

A peine quelques semaines plus tard, Darboux retrouve la forme caractéristique de l'équation homogène *tripolaire* des cycliques en étudiant l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré ([**Darboux 1864b**]). Cette intersection peut en effet être donnée, comme le montre le jeune normalien, par l'équation :

$$ar + a'r' + a''r'' = 0$$

sous réserve que r, r' et r'' désignent les distances à trois points convenablement choisis sur la sphère. Darboux appellera ces courbes les *cycliques sphériques*. Il détermine que les points fixes sur la sphère permettant d'écrire l'équation tripolaire homogène sont au nombre de 16, situés quatre à quatre sur des cercles orthogonaux de la sphère [31] : ces cercles sont alors appelés *directeurs*, et ces points sont les foyers des cycliques sphériques. S'il se contente de remarquer en 1864 qu'"*il y a toujours un des quatre cercles qui est imaginaire*" ([**Darboux 1864b**, 200]), Darboux précise plus tard la réalité des foyers : "*quatre foyers seulement pourront être réels*" ([**Darboux 1873a**, 41]). Ceci reflète d'ailleurs plus généralement la profondeur des travaux de Darboux sur les cycliques sphériques : il ne s'agit que de considérations naissantes en 1864, mais 5 ans plus tard dans son ouvrage "*Mémoire sur une classe remarquable etc.*" il en établit une véritable théorie. Pour les cycliques sphériques, "*il existe donc une relation linéaire et homogène entre les distances d'un point de la courbe à trois foyers situés sur un même cercle directeur*" [**Darboux 1873a**, 42].

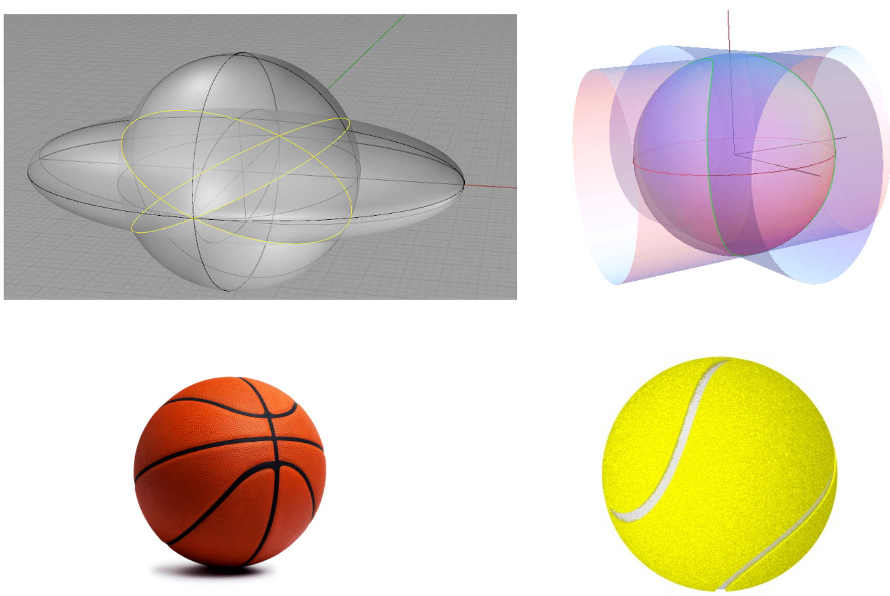


FIGURE 8. Des cycliques sphériques obtenues sur la sphère par les sections d'un ellipsoïde (à gauche) et de cylindres elliptiques (à droite). Les coutures des balles de tennis et des ballons de basket sont également des cycliques sphériques. [32]

de degré 2. On pourra rapidement faire le point grâce à http://www.mathcurve.com/courbes2d/cyclic/cyclic.shtml.

31. L'existence de ces quatre cercles provient de la propriété géométrique, que Darboux énonce, que l'on peut faire passer exactement quatre cônes du second degré par une même cyclique sphérique. De nombreuses propriétés découlent de cette observation.

Dans son travail sur les sections du tore, Darboux ramenait l'étude des cycliques planes aux ovales de Descartes grâce à l'inversion. Ici encore, pour les cycliques sphériques, son approche est identique mais la transformation géométrique appropriée n'est plus l'inversion :

> La projection stéréographique de la courbe d'intersection [d'une sphère et d'une quadrique] donne les ovales de Descartes. Il suffit de placer le point de vue en un quelconque des seize foyers.
>
> [**Darboux 1864b**, 200]

C'est donc l'outil de projection stéréographique qui permet au géomètre nîmois de retrouver ses quartiques de prédilection à partir des cycliques sphériques. Darboux va alors suivre l'adage bien connu de Chasles : "*on ne saurait avoir trop de moyens différents de décrire une même courbe, parce que chacun exprime une propriété caractéristique de la courbe, d'où dérivent naturellement plusieurs autres propriétés*" ([**Chasles 1837a**, 351]). Grâce à cette nouvelle description des ovales, il en obtient deux nouvelles propriétés : la transformée par inversion d'une ovale est encore une ovale dès que le centre d'inversion est placé en l'un des 16 foyers de la cyclique sphérique dont elle est la projection. En outre, les ovales de Descartes sont des courbes anallagmatiques, selon le terme de Moutard, puisque les cycliques le sont également[33]. On retrouve alors ce que Quételet avait déduit de sa théorie des caustiques secondaires que les ovales peuvent être obtenues comme enveloppe de cercles. Par ailleurs, la considération des ovales dans l'espace par projection permet à Darboux de déterminer analytiquement l'une des *focales* de l'ovale comme une cubique plane située dans le plan perpendiculaire au plan contenant l'ovale ([**Darboux 1864b**, 201]). A partir des distances r et r' à deux points quelconques de cette focale, on retrouve l'équation bipolaire caractéristique de l'ovale $\mu r + \mu' r' = c$.

Finalement, les cycliques sphériques permettent à Darboux de généraliser les ovales de Descartes, planes, aux courbes sphériques. En effet, lorsque la quadrique qui coupe la sphère devient une surface de révolution, alors l'équation de la cyclique particulière qui résulte de l'intersection prend la forme :

$$r + kr' = a$$

"*On a ainsi sur la sphère l'analogue des ovales de Descartes*" [**Darboux 1864b**, 201]. Darboux appellera ces courbes sphériques des *cartésiennes*. En lien avec la cubique focale des ovales plans, il prouvera en 1873 que "*les cartésiennes se distinguent des autres cycliques [sphériques] par la propriété d'admettre pour focale une cubique circulaire*" ([**Darboux 1873a**, 54]).

Le rôle central des ovales de Descartes dans les travaux géométriques du jeune Darboux est donc incontournable. Le géomètre découvre à ces courbes planes de nouvelles propriétés, les étend dans le cadre des courbes sphériques, et surtout les utilise pour comprendre et

32. Crédits image : http ://faculty.evansville.edu & grasshopper3d.com

33. On peut objecter qu'*a priori* l'inversion double le degré de la courbe : l'inverse d'une cyclique ou d'un ovale (ou plutôt *la réciproque* selon les termes de Darboux) devrait ainsi être de degré $2 \times 4 = 8$. Mais puisque ces courbes passent deux fois par chaque point cyclique, le degré de la réciproque est abaissé d'autant d'unités qu'elle effectue de passages en un point cyclique (c'est donc la *multiplicité* de ce point). Chaque point cyclique étant point double, on obtient donc bien une réciproque de degré $8 - 2 \times 2 = 4$ et donc encore une quartique. Darboux détaille ces formules liées à l'évolution des degrés par inversion dans la toute première partie de son mémoire de 1873, [**Darboux 1873a**, 1-2].

analyser les courbes du quatrième ordre dont les points doubles sont les points cyliques (les courbes cycliques ou quartiques bicirculaires). C'est ainsi grâce à sa dextérité dans l'appréhension des transformations géométriques, inversions et projections, que le futur doctorant de Chasles parvient à synthétiser les propriétés des différentes courbes d'ordre 4.

Pour être plus complet, il faudrait ajouter à cela la compréhension que possède rapidement Darboux du lien intime existant entre les fonctions elliptiques et les ovales de Descartes. En 1867, il prouve en effet que la rectification des arcs d'ovales est exactement le support géométrique du théorème d'Euler d'addition des fonctions elliptiques ([**Darboux 1867**]). Les ovales constituent donc un moyen d'intégrer, par la géométrie, les équations elliptiques :

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

Nous retrouvons ultérieurement [34] cette volonté du géomètre nîmois de comprendre certaines courbes en les appréhendant comme les supports géométriques des formules d'addition des fonctions elliptiques - et hyperelliptiques - : c'est le cas ici avec la formule qui se situe à la base de cette théorie, la formule d'addition d'Euler.

Par ailleurs, découvrant en 1875 que le mathématicien italien Angelo Genocchi, ayant démontré que la rectification des arcs d'ovales équivalait à la somme de trois arcs d'ellipses, envisageait ce résultat "*simplement comme un fait de calcul*" ([**Genocchi 1875**, 113]), il aura à cœur de mettre au jour la propriété géométrique sur laquelle repose ce fait analytique. C'est en fait dans les symétries induites chez l'ovale par les inversions de centre ses foyers (puisque les ovales sont anallagmatiques) que Darboux découvre en 1878 le véritable fondement géométrique de la triple rectification elliptique de Genocchi ([**Darboux 1878b**]). Nous ne nous attardons pas sur ces recherches car elles ont déjà été largement exposées dans [**Barbin Guitart 2001**]. On peut tout de même rapprocher ces recherches de la méthode de formation présentée par Darboux de l'équation différentielle des surfaces applicables (voir [Chap.2,7.3]). Darboux avait déterminé cette méthode pour comprendre un fait analytique qui était resté inexpliqué, en lien avec les lignes géodésiques. Les deux études que Darboux effectue sur les ovales (avec le théorème d'addition des fonctions elliptiques et le ressort géométrique de la rectification par les arcs d'ellipses) participent d'un même effort : il s'agit pour le géomètre normalien de faire jaillir, par la géométrie, la racine d'une vérité mathématique établie uniquement par l'analyse, ce qu'il considère alors comme étant "*inexpliqué*". On conçoit ici nettement la force de l'influence de la pensée de Chasles sur le jeune Darboux, Chasles qui regarde la Géométrie comme l'outil capable de déterminer "*comment et pourquoi une chose est vraie*" lorsque l'Analyse ne permet que de "*savoir*" que cette chose est vraie [**Chasles 1837a**, 114].

Parmi toutes les propriétés que Darboux découvre au sujet des ovales de Descartes, nous avons volontairement laissé jusqu'ici dans l'ombre celle qui va jouer un rôle crucial dans la géométrie des surfaces que le jeune gardois va développer durant sa thèse et les années qui la suivront. Cette propriété est, on s'en sera douté, la possibilité de construire dans le plan un système double orthogonal au moyen des ovales. Cette propriété, et l'extension qu'en fait Darboux pour aboutir à un système triple de surfaces, fait l'objet de la partie qui suit.

34. Voir la partie 4.1 consacrée aux coordonnées elliptiques et aux travaux de Darboux s'y rapportant.

1.3. Orthogonalité des ovales homofocales et extensions : construction du système triple orthogonal formé par les cyclides.

C'est durant le mois de Juin 1864 que Gaston Darboux, qui s'apprête à passer le concours de l'agrégation, se penche sur le problème de la construction d'un système double orthogonal au moyen des ovales de Descartes. Dans sa première communication à l'Académie des Sciences (le 1er Août 1864), il y fera annoncer le résultat suivant :

> Lorsque l'on considère dans le plan des ovales de Descartes ayant trois foyers communs, on remarque que ces courbes homofocales forment un système orthogonal.
>
> [**Darboux 1864c**, 241]

C'est en accord avec le théorème de Kummer (voir [Chap.2,3.1]) que les courbes, susceptibles d'appartenir à un système double et un orthogonal, doivent avant tout posséder les mêmes foyers. La démonstration analytique que Darboux possède alors en 1864 n'est publiée que trois ans plus tard, lorsqu'il utilise cette propriété pour faire le lien avec le théorème d'addition des fonctions elliptiques. Nous verrons ensuite pourquoi cette démonstration n'apparaît pas dans les premières publications du géomètre.

L'orthogonalité des ovales de Descartes est donnée par Darboux dans [**Darboux 1867**, 81-84]. Il commence par y poser quelques notations, en fixant les trois foyers alignés F, F' et F'' :

- $FF' = c$, et $F'F'' = x$.
- l'équation générale des ovales $nr + r' = h$
- la position de F'' est déterminée par $h^2 - c^2n^2 = cx(n^2 - 1)$
- deux nouveaux paramètres α et k sont définis via les relations $c + x = \dfrac{c}{k^2}$ et $h = c\sqrt{1-\alpha^2}$.

Pour qu'une famille d'ovales soit homofocale, il faudra donc que la position de F'' soit inchangée à partir de l'équation bipolaire en F, F', et par suite que les ovales soient compris dans l'équation :

$$r\sqrt{1-k^2\alpha^2} + r' = c\sqrt{1-\alpha^2}$$

En réécrivant cette équation sous la forme bipolaire faisant usage de r et r'' puis en différentiant et en éliminant α, Darboux obtient que ces ovales sont comprises dans l'équation différentielle $r'dr - rdr' = cdr''$. Le point clef de la démonstration est alors le changement de coordonnées : Darboux adopte en effet les coordonnées symétriques (u, v). A partir des coordonnées cartésiennes (x, y) qu'il centre au foyer F (les abscisses correspondant à l'axe focal), u et v sont alors données par les formules :

$$u = x + iy\ , \quad v = x - iy$$

Cela permet à Darboux d'exprimer l'équation différentielle sous une nouvelle forme en fonction de ces coordonnées :

$$\frac{du^2}{u(u-c)(u-\frac{c}{k^2})} = \frac{dv^2}{v(v-c)(v-\frac{c}{k^2})}$$

Mais surtout, cela lui permet de traduire cette même équation comme une contrainte angulaire portant sur la tangente aux ovales en un point $M(x, y) = M(u, v)$.

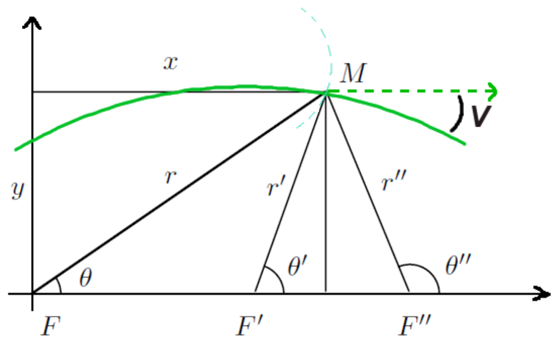


FIGURE 9. Configuration et notations pour la démonstration de Darboux d'orthogonalité des ovales homofocales [35]

En notant V l'angle que fait cette tangente avec l'axe des abscisses (voir figure 9), on obtient grâce aux coordonnées symétriques que $\frac{du}{dv} = e^{2iV}$. Mais de même, les trois facteurs des dénominateurs de l'équation différentielle correspondent aux angles des rayons vecteurs formés par M avec les trois foyers, angles que nous noterons θ, θ' et θ'' [36]. On obtient ainsi :

$$\begin{cases} \frac{u}{v} &= e^{2i\theta} \\ \frac{u-c}{v-c} &= e^{2i\theta'} \\ \frac{u-c/k^2}{v-c/k^2} &= e^{2i\theta''} \end{cases}$$

Par conséquent, l'équation différentielle équivaut à la condition angulaire suivante :

$$e^{4iV} = e^{2i(\theta+\theta'+\theta'')} \iff V = \frac{\theta+\theta'+\theta''}{2} + k\frac{\pi}{2}$$

La tangente ne peut donc, en un point du plan, prendre que deux valeurs qui diffèrent exactement d'un angle droit (à π près), ce qui signifie que les deux ovales passant en ce point sont orthogonaux. Ceci conclut la preuve de la propriété mise au jour par Darboux : les ovales cartésiennes homofocales forment un système de courbes double orthogonal. Ces ovales sont comprises dans une unique équation, que toutefois Darboux n'explicite pas.

Si dans son mémoire publié en 1865 Darboux ne s'attarde pas sur l'orthogonalité des ovales de Descartes, en dépit du fait que cette remarque ait constitué le point de départ de toutes ses recherches sur les courbes et surfaces orthogonales, c'est parce qu'il possède une propriété non seulement plus forte mais dont la démonstration géométrique est bien plus expéditive.

35. Cette image a été modifiée à partir de l'image [**Barbin Guitart 2001**, 182].

36. Nous empruntons ces notations à [**Barbin Guitart 2001**]. Darboux conserve la notation angulaire de type $\widehat{MFH}$.

Darboux a en effet remarqué que les ovales de Descartes étaient les transformées, par rayons vecteurs réciproques, des cycliques. Or cette transformation est conforme, c'est-à-dire conserve les angles. Par conséquent, puisque les ovales homofocales forment un système orthogonal, les cycliques homofocales dont elles sont les transformées doivent également pouvoir former un système orthogonal. C'est en effet ce que Darboux va utiliser. Mais il va souligner un lien géométrique fort entre les cycliques (planes et sphériques) et les coniques sphériques. Ce lien est issu d'une projection stéréographique bien choisie :

> Les courbes du quatrième degré qui ont deux points doubles à l'infini sur le cercle [i.e. les cycliques] [peuvent être] regardées comme la projection stéréographique des coniques sphériques. Il suffit de prendre le pôle de transformation aux points de rencontre de la sphère ayant pour grand cercle le cercle des quatre foyers et de la perpendiculaire au plan de la courbe menée par le point d'intersection des diagonales du quadrilatère formé par les quatre foyers. [...]
>
> On peut donc déduire des propriétés des coniques sphériques toutes les propriétés des courbes du quatrième degré, qui en sont les transformées. En particulier, on sait que l'on peut former sur la sphère un système de coniques sphériques homofocales et orthogonales. On aura donc dans le plan un système formé des courbes du quatrième ordre, orthogonales et homofocales.
>
> [**Darboux 1865**, 66]

Dans ses premiers travaux, les transformations géométriques étaient vouées à ramener l'étude des quartiques à celle des ovales de Descartes. Mais Darboux trouve là une transformation vers des courbes encore plus simples, les coniques sphériques. Cette transformation n'aboutit certes qu'aux cycliques planes, mais il montrera plus tard également que "*toute cyclique [sphérique] peut être considérée comme la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une conique sphérique*" ([**Darboux 1873a**, 56]). Avec ce pont géométrique établi entre les cycliques et les coniques sphériques, la démonstration de nombreuses propriétés des premières devient une simple transposition via une projection ou une inversion des théorèmes connus chez les secondes. C'est en particulier le cas de la propriété d'orthogonalité, que Darboux peut donc déduire pour les cycliques homofocales, sphériques ou planes, de celle connue des coniques sphériques homofocales.

Malgré ce lien simple et fécond vers les coniques, les ovales de Descartes restent fortement présentes dans les travaux de Darboux. Cependant, elles ne sont bien souvent plus étudiées à part entière mais seulement en tant que classe particulière parmi les cycliques, des courbes que Darboux a pourtant dans un premier temps appris à apprivoiser précisément en les reliant systématiquement aux ovales. En ce qui concerne la recherche de systèmes orthogonaux, les cycliques présentent un avantage certain face aux ovales : leur expression analytique générale est extrêmement simple. Il s'agit en effet, comme Darboux le présente à la suite de Salmon, des courbes d'équation :

$$(x^2+y^2)^2 + u_1(x^2+y^2) + u_2 = 0 \quad [\textbf{Darboux 1865}, 61]$$

où u_1 peut être pris homogène de degré 1, u_2 étant quelconque de degré 2. Cette équation traduit en effet la propriété de ces quartiques d'avoir les points cycliques pour points doubles [37].

Ayant remarqué que les cycliques (homofocales) "*sont susceptibles de former un système orthogonal*" ([**Darboux 1865**, 61]), Darboux se lance immédiatement dans l'étude de l'extension de cette propriété dans le cadre des surfaces :

> Les surfaces qui correspondent aux courbes [cycliques] ont une équation de la forme
>
> $$(\alpha) \qquad (x^2+y^2+z^2)^2+u_1(x^2+y^2+z^2)+u_2=0$$
>
> u_1 et u_2 étant comme précédemment des polynômes du premier et du second degré. Nous sommes conduits à chercher si ces surfaces peuvent former un système triplement orthogonal.
>
> [**Darboux 1865**, 66]

Ces nouvelles surfaces, comprises dans l'équation (α), constituent la "*classe remarquable de surfaces du quatrième ordre*" qui sera dès lors au centre des travaux géométriques de Darboux et qui donnera son titre à l'important mémoire de 1869 publié en 1873. Ces "*surfaces du 4ème ordre qui ont le cercle de l'infini pour ligne double*", Darboux les nommera à partir de 1869 les "*cyclides*" avant tout "*parce qu'elles comprennent comme cas particulier la surface à lignes de courbure circulaires nommée cyclide par M. Dupin*" ([**Darboux 1873a**, 107]).

37. La simple divisibilité des termes de degré 4 par $(x^2+y^2)^2$ ne suffirait pas à conclure ceci : en effet, les points cycliques pourraient alors ne pas être des points singuliers. En coordonnées homogènes, la première condition pour que la courbe $f(x:y:t)=0$ admette les points cycliques pour points doubles est que (x^2+y^2) soit racine double à l'infini, c'est-à-dire racine double de $f(x,y,t=0)$. Ils y annulent ainsi les dérivées partielles de f selon x et y. Mais il faut également que les points cycliques annulent la dérivée première à l'infini, c'est-à-dire que (x^2+y^2) soit racine de $\frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t=0)$. C'est cette deuxième condition qui équivaut à la divisibilité des termes de degré 3 par le polynôme (x^2+y^2). Les points cycliques sont alors des *points doubles ordinaires*, des points singuliers où le cône tangent forme bien deux droites distinctes. Sans cette seconde condition sur la dérivée en t, la première condition n'implique pas la tangence de la courbe à la droite de l'infini $t=0$. Avec cette condition en revanche, les points cycliques sont bien des points doubles des sections rectilignes de la courbe dans toutes les directions. Ces explications algébriques de la forme de l'équation des cycliques ou quartiques bicirculaires ne sont pas données par Salmon ou Darboux : elles sont adoptées comme une évidence. Pour plus de détails sur les singularités des courbes planes, on se reportera à [**Gray 2007**, 165-182].

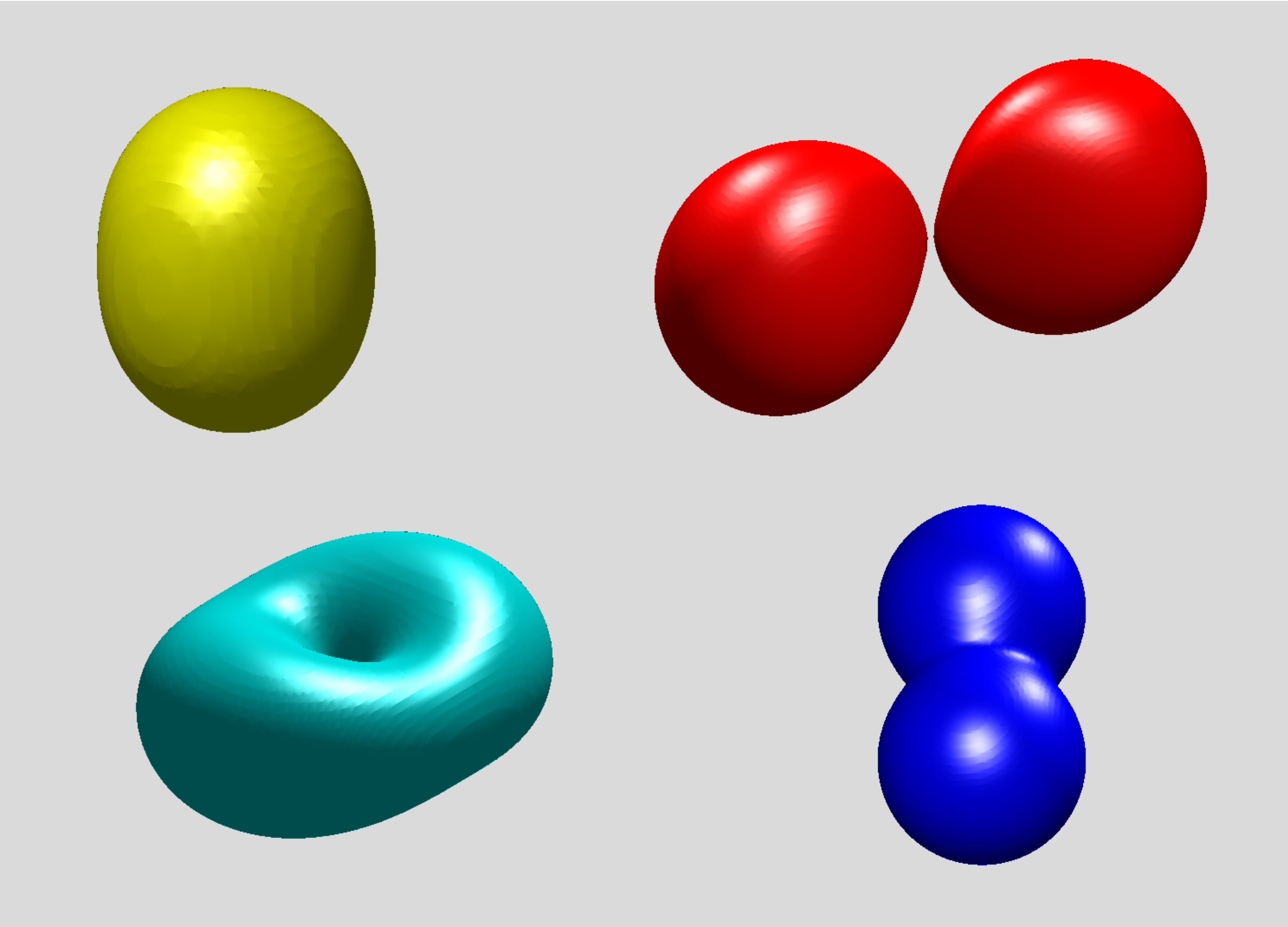


FIGURE 10. Différentes formes des cyclides de Darboux [38]

Ce n'est pas vers Joseph Bertrand mais vers Joseph-Alfred Serret que Darboux se tourne en Juin 1864 pour parvenir à effectuer ses nouvelles recherches ayant pour but de déterminer si les *cyclides* peuvent, à l'image des courbe *cycliques*, constituer un système triple orthogonal. D'une part, Darboux travaille, réside et étudie alors à l'Ecole Normale où Serret enseigne alors que Bertrand n'y enseigne plus depuis 1862. D'autre part, nous avons esquissé dans la section 1.1 et nous reprendrons plus en détail dans la partie 3 les caractéristiques distinctes des travaux des deux maîtres de Darboux dans le domaine des surfaces orthogonales : Bertrand s'est intéressé aux liens entre les propriétés d'orthogonalité et d'isothermie des surfaces, tandis que Serret s'est attaqué au problème de la construction

38. Nous reviendrons en 5.1 sur les classifications des cyclides opérées par Darboux, et qui permettront d'établir les distinctions entre les quatre cyclides représentées sur la figure 10 ci-dessus.

des systèmes triples via l'expression analytique des surfaces et les équations différentielles traduisant l'orthogonalité. Darboux, qui possède alors l'équation de la famille de surfaces, veut déterminer le possible établissement d'un système triple orthogonal, donc vérifier si les relations différentielles d'orthogonalité peuvent être vérifiées : il est donc naturel, au regard de leurs travaux passés respectifs, que le jeune élève préfère se tourner vers Serret plutôt que vers Bertrand.

Darboux va alors "*emprunter le procédé si élégant que [Serret a] bien voulu [lui] communiquer*" ([**Darboux 1864c**, 242]). Il considère uniquement dans un premier temps les surfaces cyclides sous leur plus simple apparat analytique :

$$(\beta) \qquad (x^2+y^2+z^2)^2+\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-h^4=0$$

En notant $\rho^2 := x^2+y^2+z^2$, Darboux considère deux de ces surfaces :

$$\begin{cases} F=\rho^4+\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-h^4 &=0 \\ F'=\rho^4+\alpha'^2x^2+\beta'^2y^2+\gamma'^2z^2-h'^4 &=0 \end{cases}$$

Leur orthogonalité s'exprime par la nullité de l'expression $\frac{dF}{dx}\frac{dF'}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dF'}{dy}+\frac{dF}{dz}\frac{dF'}{dz}$, ce qui traduit, avec un vocabulaire anachronique, la nullité du produit scalaire des deux gradients - ou encore l'orthogonalité de leurs plans tangents. La méthode que Serret présente à Darboux, et que celui-ci expose avec succès dans sa note de 1864 [**Darboux 1864c**], consiste alors à prendre une troisième surface F'' et comparer les deux relations d'orthogonalité ainsi obtenues. Mais Darboux parvient à une légère simplification en remarquant qu'il peut directement combiner la relation d'orthogonalité de F et F' avec la détermination du lieu d'intersection de ces deux surfaces : $F-F'=0$. C'est ce qu'il effectue dans son mémoire de 1865. Il obtient alors plus directement la condition suivante ([**Darboux 1865**, 62]) :

$$h^4=h'^4\ ,\quad \frac{\alpha^2-\alpha'^2}{\alpha^2\alpha'^2+4h^4}=\frac{\beta^2-\beta'^2}{\beta^2\beta'^2+4h^4}=\frac{\gamma^2-\gamma'^2}{\gamma^2\gamma'^2+4h^4}:=\frac{1}{\lambda^2}$$

Cette - double - condition lui permet ainsi de vérifier que deux cyclides comprises dans l'équation (β) se coupent à angle droit. Par ailleurs, en utilisant le paramètre λ pour traduire la condition d'orthogonalité, les surfaces cyclides correspondantes ont toutes pour équation :

$$F(x,y,z,\lambda)=\rho^4+\frac{\alpha^2\lambda^2-4h^4}{\alpha^2+\lambda^2}x^2+\frac{\beta^2\lambda^2-4h^4}{\beta^2+\lambda^2}y^2+\frac{\gamma^2\lambda^2-4h^4}{\gamma^2+\lambda^2}z^2-h^4=0$$

Darboux peut alors conclure :

> L'équation précédente détermine un système triple de surfaces. Elle est en effet du troisième degré en λ[39]. [C]e système triple est orthogonal.
>
> [**Darboux 1865**, 62]

39. Il s'agit d'un abus de langage de Darboux bien sûr : cette équation est du degré 6 mais c'est une équation *bicarrée* : en ne recherchant - par exemple - que les racines positives, on aboutit bien à trois solutions. Dans sa thèse, Darboux préférera lever cette indétermination et obtiendra à proprement parler une équation de degré 3 en λ.

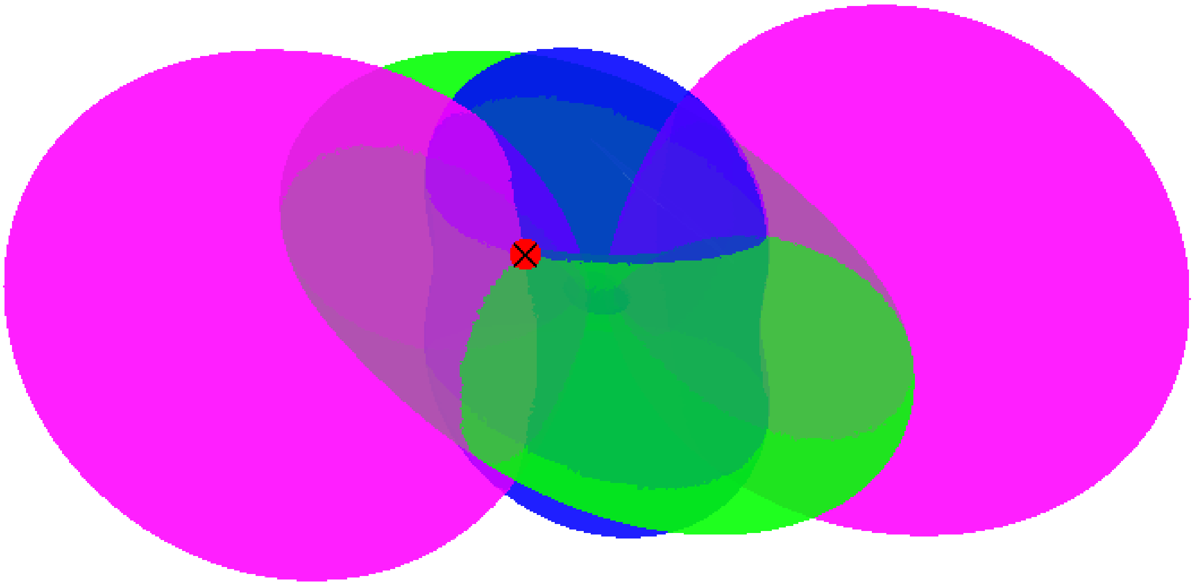


FIGURE 11. Un triplet de surfaces issu du système triple orthogonal des cyclides homofocales de Darboux. Un des douze points de triple orthogonalité est mis en évidence (en rouge)

Darboux détermine alors simplement, en utilisant la transformation géométrique donnée par l'inversion, que toutes les surfaces cyclides, sous leur forme la plus générale (α), sont également susceptibles de former un système orthogonal. En effet, il énonce qu'en transformant par rayons vecteurs réciproques les cyclides orthogonales de l'équation canonique (β), on obtient un nouveau système de cyclides, orthogonales, "*dont les équations auront la forme [la plus générale]* (α)" ([**Darboux 1865**, 62]).

Il montrera en outre la réalité des trois racines de l'équation de degré 3 en λ (donc proprement réécrite) dont dépend le nombre et la réalité des cyclides passant en un point de l'espace ([**Darboux 1866**, 98]). Par conséquent, les cyclides permettent à Darboux de mettre sur pied un nouveau système triple orthogonal formé de ces surfaces du quatrième degré. Ce système triple possède l'avantage majeur d'être "triple et un", c'est-à-dire que les surfaces dont il se compose sont "*comprises dans la même équation*". Aussi les cyclides orthogonales sont, d'après l'extension que Darboux donne au théorème de Kummer (voir [Chap.2,7.1]), homofocales, et c'est pour pouvoir l'énoncer sous cette forme nette et précise que le jeune normalien a, nous l'avons souligné (en [Chap.2,5.2]), arrêté la notion élargie de *focales des surfaces*. Trente ans après sa découverte, le système triple et un orthogonal de Lamé formé des quadriques homofocales vient de trouver avec Darboux son prolongement naturel. Les quadriques de Lamé sont en effet comprises "*comme cas particulier*" dans les cyclides de Darboux [40].

Comme nous l'avons déjà mentionné, le jour même de la présentation de ces résultats à l'Académie des Sciences, Théodore Moutard exhibe également ces mêmes surfaces cyclides comme étant des surfaces invariantes par certaines inversions, donc *anallagmatiques*. Débute alors un véritable engouement des géomètres français (Darboux, Laguerre, Moutard, Mannheim, De La Gournerie) anglais et irlandais (Casey, Cayley, Clifford, Crofton, Roberts) [41] pour l'étude des riches propriétés géométriques des cyclides et des courbes cycliques qui en sont les sections planes. Le mémoire de 1873 de Darboux "*Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces*" viendra, nous le verrons (section 5), couronner ces efforts en établissant complètement la théorie de ces surfaces quartiques.

Néanmoins, Darboux ne prendra réellement part à ces études géométriques qu'à partir de l'été 1867. Ses recherches de thèse (1864-1866) ainsi que sa première année d'enseignement (1866-1867) n'abordent en effet pas les cyclides par leurs propriétés géométriques. La découverte de ce nouveau système triple orthogonal plonge en fait Darboux dans les études de physique mathématique qui ont, avec Lamé, fait naître l'intérêt de ces systèmes de surfaces. Elle le positionne au seuil des problématiques restées alors ouvertes dans la théorie des surfaces orthogonales et isothermes, en lui offrant les moyens d'apporter des réponses nouvelles. Quel est la connexion entre les cyclides et les surfaces isothermes, en lien avec le théorème de Lamé (voir 2) ? Parmi les propriétés et les outils mis en place grâce au système triple des quadriques de Lamé, quels sont ceux qui peuvent trouver une extension avec le nouveau prolongement de ce système par les cyclides (voir 4) ? De surcroît, suite aux recherches de Dupin, Roberts, Bouquet et Serret (ces deux derniers figurant d'ailleurs dans le jury de thèse de Darboux) le jeune doctorant de l'Ecole Normale peut-il éclaircir les fondements restés dans l'ombre sur lesquels repose la construction des systèmes triples orthogonaux (voir 3) ? Ce sont ces problématiques que nous allons détailler dans les prochaines sections de ce chapitre.

2. Des systèmes triples orthogonaux et isothermes : découverte et extension du théorème de Lamé (1843, 1866)

C'est par le biais de la découverte du nouveau système triple orthogonal formé par les cyclides que Darboux fait entrer, pour son travail de doctorat, ses recherches dans la théorie des surfaces isothermes et orthogonales. Cette théorie, après les travaux mathématiques sur la théorie de la chaleur de Fourier et de Poisson, "*trouve son origine dans les travaux de Lamé*" ([**Darboux 1898**, I]). Les surfaces isothermes ont été, dès le départ, reliées par Lamé dans ses publications aux surfaces orthogonales, ce que nous verrons dans la première partie 2.1. Des suites de la pertinence de Bertrand quant à la distinction entre ces deux notions, Lamé érige en 1843 un théorème portant toujours son nom qui permet de tracer

40. Comme l'indique Darboux, les quadriques de Lamé sont obtenues à partir de l'équation (β) des cyclides en posant $h^4 = \infty$ ([**Darboux 1865**, 62]).

41. On peut consulter une liste, probablement non-exhaustive, des travaux sur les cyclides et les cycliques jusqu'à 1872 dressée par Darboux à la fin de son mémoire, [**Darboux 1873a**, 337-340].

précisément le contour commun des deux théories des surfaces orthogonales et isothermes. Nous nous pencherons sur cet énoncé et les évolutions de sa preuve en 2.2. Finalement, en 2.3 nous verrons dans quelle mesure les cyclides, par leurs propriétés infinitésimales, permettent à Darboux dans sa thèse d'obtenir un prolongement du théorème de Lamé, ainsi qu'une preuve nouvelle, grâce à ce que son directeur Chasles relèvera comme étant "*une analyse savante et extrêmement ingénieuse*" [42]. Si savante et ingénieuse qu'elle soit, la démonstration de Darboux présente quelques erreurs souvent ignorées à la fois par les mathématiciens et par les historiens : c'est Darboux lui-même qui reprendra sa preuve et restreindra ainsi la portée de son énoncé initial, énoncé erroné et pourtant largement diffusé jusqu'à aujourd'hui.

Cette partie sera par ailleurs l'occasion de croiser la problématique de "*l'invention mathématique*" sous divers angles de vue. Si nous ne pourrons aborder le caractère discontinu de la découverte, procédant par fulgurances, après [**Poincaré 1908**] et [**Hadamard 1959**], en revanche nous pourrons en discuter sur quelques points la place de l'erreur, ainsi qu'exploiter après Henri Poincaré la dialectique de l'intuition et de la logique dans la progression des idées. Nos études sur les travaux de Lamé et de Darboux viendront en plusieurs points étayer les propos de Poincaré, notamment ceux de sa "*Valeur de la Science*" relatifs à l'importance de l'analogie dans la marche en avant des mathématiciens qu'il appelle les *analystes* ([**Poincaré 1905**]). Nous reprendrons également la distinction entre mathématiciens visuels et mathématiciens analytiques, rappelée après Poincaré par [**Mancosu 2010**, §2], pour montrer comment le cas de Darboux en révèle une limite : plutôt que de *mathématiciens*, il semble qu'il conviendrait de parler de *pratiques* visuelles et analytiques. Un même mathématicien pourrait alors ne pas être rangé dans une de ces deux catégories si ses méthodes ressortent tantôt de l'une, tantôt de l'autre. Ceci s'applique bien au cas de Darboux, ce que nous avons déjà souligné dans la partie [Chap.2,7.3], et que nous retrouverons ci-dessous.

2.1. Qu'est-ce qu'une famille de surfaces isothermes ?

"*On dit qu'une famille de surfaces est isotherme quand, un équilibre calorifique étant supposé établi, la température sur chaque surface de la famille est constante*". Cette définition des familles de surfaces isothermes est donnée par Emile Picard dans son allocution de 1917 ([**Picard 1917**, XII]). Elle reprend de manière très proche la définition originelle que Gabriel Lamé en donne en 1833 dans le mémoire qui introduit, de par son titre même [43], la notion de surface isotherme :

> [D]ans la théorie analytique de la chaleur, on peut se proposer de trouver la loi des températures stationnaires des différents points d'un corps solide dont la surface est soumise à des causes constantes de chaleur et de froid [...]

42. Voir le Rapport de Michel Chasles sur la thèse de Gaston Darboux dans [**Chasles 1870**, 363-364]. Nous y reviendrons dans la section [Chap.4,1.2].

43. Lamé intitule en 1833 son travail : "*Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides en équilibre de température*".

> Lorsqu'un corps solide homogène est en équilibre de température, sous l'influence de sources constantes de chaleur et de froid, contre lesquelles sa surface est immédiatement appliquée, il existe dans l'intérieur de ce corps des surfaces où la température reste la même, dans toute l'étendue de chacune d'elles. [Ce sont d]es surfaces *isothermes*.
>
> [**Lamé 1833**, 194-195]

Grâce à cette notion de *surface isotherme*, Lamé change la philosophie de la théorie mathématique des distributions de chaleur dans les corps solides : il ne cherche plus à déterminer directement la loi que suit la température $V(x, y, z)$ au sein du corps. Il envisage en revanche de décrire ce corps par les tranches infiniment minces qui le composent, des tranches formant des surfaces comprises dans une équation de la forme $\lambda(x, y, z) = \lambda_0$ et dont les températures sont constantes. En cas de succès de cette description du corps par "tranches" de surfaces isothermes, Lamé montre ([**Lamé 1837**, 149]) qu'il est aisé de décrire la température, par de simples intégrations, sous la forme $V(\lambda)$ [44]. Au premier abord, ce changement d'approche apporté par Lamé ne présente ni une simplification ni une difficulté supplémentaire du point de vue mathématique. Et pourtant il va se révéler extrêmement fécond, en grande partie en vertu de la capacité de son auteur à déceler les situations dans lesquelles il permet une résolution analytique effective : c'est ici qu'interviendront de manière cruciale les surfaces du second degré.

C'est dans mémoire de 1837 que Lamé explicite les mathématiques liées à la notion de famille de surfaces isothermes. Il remarque en premier lieu qu'une famille de surfaces quelconque ne constituera *a priori* pas une famille isotherme. En effet, "*toute fonction n'est pas propre à représenter des surfaces isothermes ; elle doit satisfaire pour cela à une équation aux différences partielles*" que l'on déduit de l'équation de la chaleur ([**Lamé 1833**, 196]). La famille de surfaces $F(x, y, z) = \lambda$ est une famille de surfaces isothermes dès que l'équation de la chaleur en régime constant (dite de Laplace) $\Delta V(\lambda) = 0$ est vérifiée. En évaluant les dérivées partielles de λ par rapport aux coordonnées cartésiennes x, y, z, Lamé montre que cette équation revient à traduire l'unique dépendance en le paramètre λ du rapport :

$$\frac{\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dy^2}}{(\frac{dF}{dx})^2 + (\frac{dF}{dy})^2 + (\frac{dF}{dz})^2} := \frac{\Delta_2 F}{(\Delta_1 F)^2} \text{ [45]}$$

Les paramètres différentiels [46] Δ_1 et Δ_2, que Lamé introduira dans son mémoire de 1834 [**Lamé 1834**, 207], correspondent ainsi en langage moderne respectivement à la norme du gradient et au laplacien - scalaire - ([**Tazzioli 2009**, 69]). Aussi Lamé conclut-il que la famille de surfaces $F(x, y, z) = \lambda$ n'est isotherme que s'il existe une fonction ψ, ne

---

44. Pour plus de détails, on consultera [**Guitart 2009**]. L'importance de la théorie des surfaces isothermes, en lien avec les coordonnées curvilignes et la théorie de l'élasticité, est décrite dans [**Tazzioli 2009**]. On y trouve également une belle présentation des *paramètres différentiels* sur lesquels nous reviendrons rapidement. Notons ici que λ ne représente pas (ou plutôt pas nécessairement) la température elle-même : Lamé le baptisera ainsi plus tard dans ses *Leçons* le "*paramètre géométrique*", par opposition à la température $V(\lambda)$ qu'il appellera alors le "*paramètre thermométrique*" ([**Lamé 1857**, 2-4]).

45. On prendra garde à ce que les carrés des dénominateurs s'appliquent sur chacune des dérivées partielles, et non sur la somme comme on le voit malencontreusement dans [**Guitart 2009**, 122].

46. Pour appréhender l'importance et l'utilisation des paramètres différentiels, en particulier dans le travail du mathématicien italien Eugenio Beltrami, on consultera [**Tazzioli 1997**].

dépendant que de λ, telle que :

$$\Delta_2 F = \psi(\lambda)(\Delta_1 F)^2 \quad [47]$$

C'est la "*règle de Lamé*" ([**Darboux 1898**, 213]) qui fixe, par une équation différentielle d'ordre 2, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de surfaces soit isotherme : "*il faut, essentiellement, que le rapport du paramètre différentiel du second ordre, au carré de celui du premier, reste constant sur chaque surface, ou qu'on puisse l'exprimer par une fonction de λ seul*" ([**Lamé 1859**, 31]). On peut retrouver cette preuve dans [**Darboux 1898**], ou sous une toute autre mais bien élégante forme basée sur la considération d'un bilan physique des flux de chaleur ("*la dépense des filets de chaleur*") qui traversent la surface dans [**Bertrand 1844a**].

La définition de la notion de famille de surfaces isotherme et son fondement mathématique permettent à Lamé de traiter la répartition de chaleur dans les corps solides dans les cas où les extrémités de ce solide - que Lamé nomme "*l'enveloppe*" - sont décrites par des surfaces du second degré homofocales. En effet, dans ce cas Lamé a l'intuition que ses surfaces isothermes seront des surfaces homofocales du même type, ce dont la puissance de son analyse va achever d'asseoir la véracité.

Il considère ainsi un corps en équilibre de température dont les parois sont supposées isothermes et décrites par des surfaces du second degré (à centre) :

$$mx^2 + ny^2 + pz^2 = 1 \quad [\textbf{Lamé 1837}, 151]$$

En cherchant la famille de surfaces isothermes sous la même forme - du second degré ayant même centre - il détermine que ces isothermes sont des quadriques de même type et homofocales[48] aux parois. Cela permet ainsi de résoudre entièrement le problème de la distribution de température pour les corps solides délimités par des ellipsoïdes et des hyperboloïdes à une ou deux nappes (la température étant toujours supposée constante au bord). Les familles de surfaces isothermes sont en effet alors respectivement données par :

$$(S)\left\{\begin{array}{llll} \dfrac{x^2}{\mu^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \dfrac{z^2}{\mu^2 - c^2} & = 1 & \mathcal{E} \\ \dfrac{x^2}{\nu^2} + \dfrac{y^2}{\nu^2 - b^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - \nu^2} & = 1 & \mathcal{H}_1 \\ \dfrac{x^2}{\rho^2} - \dfrac{y^2}{b^2 - \rho^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - \rho^2} & = 1 & \mathcal{H}_2 \end{array}\right.$$

47. On peut ici faire remarquer que Lamé n'introduit pas la notation Δ_1 : il écrit ce premier paramètre différentiel h ([**Lamé 1840**, 215], ce qui est malheureux dans la mesure où n'y figure pas, au contraire de Δ_2, la fonction que l'on y considère.

48. Lamé écrit ce mémoire au début des années 1830 : comme nous l'avons déjà souligné, sa définition de l'homofocalité n'est donc pas dans toute sa généralité celle que donnera Chasles par la suite. On peut remarquer que la démonstration de Lamé aboutit à la résolution d'un système de trois équations qui sont exactement les analogues du système des trois équations, en coordonnées tangentielles, que Plücker obtiendra dans son Traité de Géométrie dans l'espace de 1846 pour déterminer les coniques focales des quadriques par la recherche des cônes de révolution circonscrits ([**Plücker 1846**, 250], voir [Chap.2,4.6]).

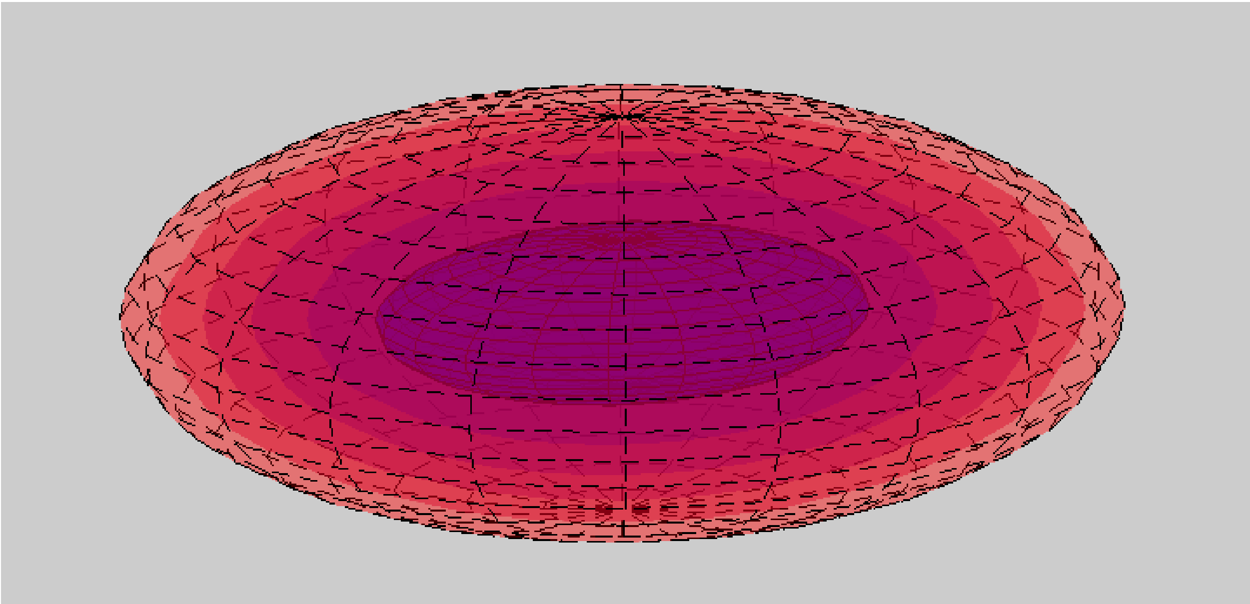


FIGURE 12. Répartition de la chaleur dans un solide délimité par deux ellipsoïdes homofocaux maintenues à deux températures constantes : la famille de surfaces isothermes $\mathcal{E}$ est formée par des ellipsoïdes de même type d'après Lamé.

On voit donc qu'il s'agit des surfaces que nous avons introduites en 1.1 comme étant le système triple orthogonal des quadriques homofocales de Lamé. A présent, on constate que cette présentation dénature complètement la démarche du mathématicien français : ces familles sont avant tout obtenues par Lamé comme un système de famille isothermes. Ce sont elles qui résolvent la distribution de chaleur dans les volumes délimités par des quadriques. Ce n'est que dans un second temps que Lamé révèle par l'analyse de ce système sa propriété géométrique d'orthogonalité, déjà connue depuis Dupin et Binet :

> [T]outes les surfaces homofocales de deux quelconques des trois systèmes [(S)] rencontrent normalement une surface courbe quelconque du troisième système.
>
> [**Lamé 1837**, 160]

Dans la suite de son mémoire, Lamé détaille les calculs pour différentes situations. Il s'attache à résoudre avec les mêmes méthodes les cas où les parois sont décrites par des cônes ou des paraboloïdes en parvenant à ramener ces études aux quadriques du système triple (S), en adaptant les constantes qu'il renferme. Il détaille les intégrations nécessaires à la détermination de la température, et remarque que celles-ci se simplifient lorsque les quadriques sont de révolution. Enfin, la seconde partie de son mémoire ([**Lamé 1837**, 174-186]) est dédiée à l'introduction et l'usage des *coordonnées elliptiques* (ρ, μ, ν) [49] pour

49. Lamé avait néanmoins déjà introduit ces "*transcendantes elliptiques*" dans [**Lamé 1834**, 237-239]. Nous nous pencherons sur les coordonnées elliptiques dans la partie 4.1.

envisager la résolution des cas où les parois du corps sont toujours des quadriques homofocales mais qui ne sont plus supposées être à température constante : l'enveloppe ne fait alors plus partie de la famille de surfaces isothermes.

Lamé introduit ainsi la notion de famille isotherme et en illustre la fécondité grâce aux études des cas physiques où les parois sont décrites par des surfaces du second degré. C'est ainsi qu'apparaît le système triple homofocal formé d'ellipsoïdes et d'hyperboloïdes : comme un système de familles isothermes. Cela n'est qu'incidemment que ces surfaces forment un système triple orthogonal, qui plus est exprimé par une même équation. Aussi dès leur introduction dans la science, les familles isothermes sont-elles reliées aux familles orthogonales. Dans quelle mesure ce lien est-il général ? Il ne faut attendre que six ans pour qu'un tout jeune mathématicien de 21 ans soulève cette question : il s'agit de Joseph Bertrand.

2.2. Lien entre l'isothermie et l'orthogonalité : le théorème de Lamé (1843).

Né en 1822 à Paris, Joseph Bertrand est le fils du Docteur Alexandre Bertrand, polytechnicien de la promotion 1814 tout comme Lamé. Alexandre Bertrand meurt alors que son fils Joseph n'a que huit ans : déjà doué d'une capacité d'apprentissage prodigieuse, Joseph Bertrand est alors éduqué par son oncle, le mathématicien Jean-Marie Duhamel. Celui-ci dirige à cette époque une classe de mathématiques spéciales qui sera vite intégrée à l'institution Sainte-Barbe, et il accueille dans sa classe le jeune Joseph qui, à l'âge de 10 ans, domine déjà la classe préparatoire de Duhamel. A onze ans, il est autorisé exceptionnellement à suivre en toute liberté les cours de l'Ecole Polytechnique après que l'examinateur Lefébure de Fourcy a déclaré, suite à un examen oral du jeune Bertrand, "*qu'il [l]'aurait classé le second de sa liste [d'admission]*" ([**Darboux 1912**, 8]). En 1838, les restrictions d'âge qui barrent alors la route des études de Bertrand disparaissent et il est reçu bachelier et licencié ès sciences en 1838, puis docteur ès sciences et premier à l'Ecole Polytechnique - officiellement cette fois - en 1839. Disposant d'une dispense exceptionnelle de 7 ans, il est également reçu au premier rang à l'agrégation (avec Brio(t)).

Bertrand commence son enseignement au Lycée Saint-Louis mais revient rapidement à l'Ecole Polytechnique comme répétiteur puis professeur d'Analyse. De 1852 à 1855, il enseigne les mathématiques spéciales au Collège Henri IV (alors appelé *Lycée Napoléon*), préparant ses élèves aux examens d'entrée de Polytechnique effectués par son ami Serret. En 1856, il quitte l'enseignement secondaire et l'année suivante devient maître de conférences à l'Ecole Normale qui est alors dirigée par le tandem Désiré Nisard - Louis Pasteur. Il la quittera en 1862 (et son beau-frère Charles Hermite qui l'y remplacera) pour enseigner la Physique mathématique au Collège de France. En parallèle, il continuera d'assurer les cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique qu'il avait commencés conjointement avec son oncle Duhamel [50].

50. On pourra, pour plus de détails sur Joseph Bertrand, lire l'éloge, très détaillé, prononcé par Gaston Darboux sur son maître : [**Darboux 1912**, 1-60].

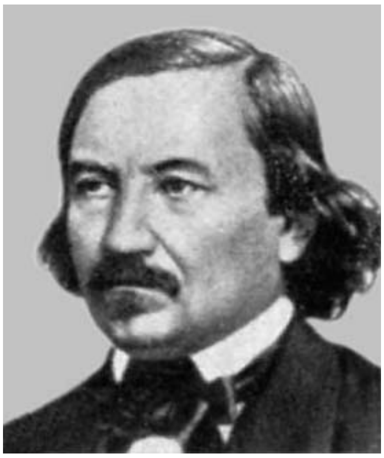


FIGURE 13. Joseph Bertrand

En 1843, Bertrand cherche à éclaircir les liens existant entre les familles isothermes et les familles orthogonales. Il remarque :

> Les seuls cas particuliers où l'on ait déterminé la forme des surfaces isothermes ont présenté jusqu'ici une circonstance remarquable : je veux parler de l'existence de deux autres systèmes de surfaces coupant les premières à angle droit et orthogonales entre elles, qui peuvent également être considérées comme des surfaces isothermes. Il m'a semblé utile d'examiner si ce fait peut être érigé en théorème général.
>
> [**Bertrand 1844a**, 117]

Bien entendu, les surfaces qu'évoque Bertrand sont les quadriques homofocales de Lamé et les diverses formes qu'elles prennent dans des cas particuliers (cônes ou surfaces de révolution). En considérant un système triple de surfaces orthogonales, Bertrand va étudier les conditions portant sur les lignes de courbure de ces surfaces pour que celles-ci puissent être isothermes. Il va alors grâce à la propriété d'isothermie mettre en évidence deux conditions, l'une portant sur deux surfaces d'une même famille infiniment proches, la seconde sur l'ensemble des surfaces du système triple. Ces conditions n'étant *a priori* pas remplies pour un système triple orthogonal, Bertrand pourra alors conclure qu'un système triple orthogonal n'est pas nécessairement formé de surfaces isothermes mais que "*c'est par hasard que ces conditions se sont trouvées remplies dans les cas examinés jusqu'ici*" ([**Bertrand 1844a**, 117]).

L'importance de la considération des lignes de courbure pour les systèmes orthogonaux et isothermes n'est pas nouvelle : à la suite de Dupin, Lamé s'était déjà penché sur de telles études. Dans un mémoire de 1840, il avait ainsi montré que ces systèmes possédaient des propriétés de courbure singulières. Le théorème de Dupin permet, nous le verrons en 3.1, de décrire les lignes de courbure des surfaces d'un système triple orthogonal par les intersections de ces surfaces entre elles. Mais Lamé va pousser plus loin la recherche des propriétés de courbure des systèmes orthogonaux en exhibant des relations liant les 6 différentes courbures du trio de surfaces orthogonales en un point de l'espace.

Les notations de Lamé vont évoluer entre son mémoire de 1840 et ses "*Leçons*" de 1859 : considérant trois surfaces (ρ, ρ_1, ρ_2) se coupant à angle droit en un point de l'espace, Lamé note (ds, ds_1, ds_2) "*les arcs à parcourir sur les normales aux surfaces* (ρ, ρ_1, ρ_2) *pour passer aux surfaces de même espèce infiniment voisines*" ([**Lamé 1840**, 338]). La tangente à l'arc ds est ainsi la normale à la surface ρ, et de même pour ds_1 et ds_2. L'arc ds est par ailleurs le support de 2 courbures : $\frac{1}{c}$, la courbure de ρ_1 dessinée sur elle par ρ_2, et $\frac{1}{\gamma}$, la courbure de ρ_2 dessinée sur elle par ρ_1. Portées par le même arc, Lamé dit de ces deux courbures qu'elles sont "*conjuguées en arc*".

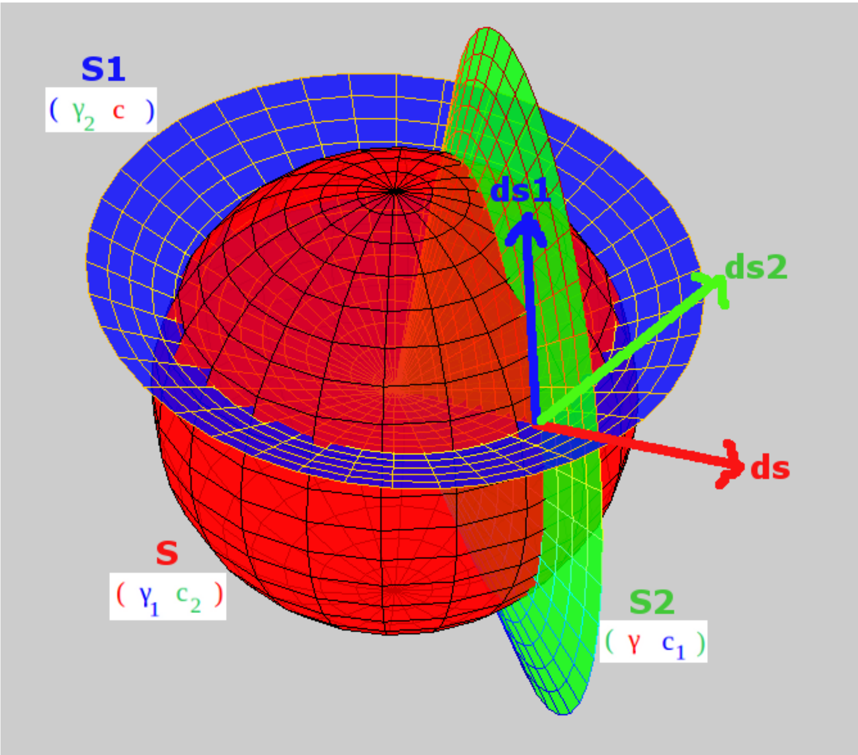


FIGURE 14. Notations des rayons de courbure (γ_i, c_j) d'un système triple [51]employées par Lamé en 1840 : ici, la couleur du rayon rappelle l'arc selon lequel la courbure correspondante est mesurée.

Dans ses "*Leçons sur les coordonnées curvilignes*" de 1859, Lamé préférera noter via l'unique lettre r les 6 rayons de courbure. Il met alors en accent l'index de l'arc et en indice l'indice de la surface. Ainsi $\frac{1}{r'_2}$ représente désormais la courbure de la surface ρ_2 selon l'arc ds_1, et les deux courbures principales de ρ (que Lamé nomme logiquement "*conjuguées*

51. Ici, le système triple orthogonal est constitué d'une famille de sphères S et de deux familles de cônes elliptiques homofocaux S_1, S_2. Nous verrons en 2.3 que ce système est en outre isotherme. Lamé emploie la notation ρ là où nous avons écrit, sur la figure, S.

en surface") ne sont plus notées $(\frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{c_2})$ mais $(\frac{1}{r'}, \frac{1}{r''})$ ([**Lamé 1859**, 49]). Ce sont ces dernières notations qui seront reprises ultérieurement, notamment par Darboux.

Grâce à la compréhension de ces notations, nous pouvons comprendre ce que Lamé apporte dans son mémoire [**Lamé 1840**]. Il parvient, pour un système triple orthogonal quelconque, à dégager totalement les relations de courbure des surfaces des paramètres différentiels qui les définissent. Ce-faisant, Lamé montre que la courbure totale d'une surface - qui est le produit de ses deux courbures principales - dépend des deux courbures qui leurs sont conjuguées (en axe) et des variations de celles-ci. Pour la surface ρ par exemple, la relation de Lamé prend la forme suivante :

$$\frac{d\frac{1}{c_1}}{ds_2} + \frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds_1} = \frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{\gamma_2^2} + \frac{1}{\gamma_1 c_2} \qquad \text{[Lamé 1840, 343]}$$

Deux relations similaires ont lieu pour les deux autres surfaces ρ_1 et ρ_2. Lamé résume ces relations dans la formulation suivante :

> Le produit des deux courbures d'une même surface, augmenté de la somme des carrés de leurs conjuguées en axe, est égal à la somme des variations de ces deux dernières courbures, suivant leurs arcs réciproques.
>
> [**Lamé 1840**, 343]

Mais Lamé remarque que ces relations, dont l'expression est déjà simple, se simplifient encore "*lorsque les surfaces conjuguées orthogonales sont toutes dans la classe des surfaces isothermes*". Dans ce cas, les courbures moyennes des surfaces (la demi-somme des deux courbures) sont reliées aux paramètres différentiels de telle sorte que l'on obtienne la formule :

$$\frac{1}{cc_1c_2} + \frac{1}{\gamma\gamma_1\gamma_2} = 0 \qquad \text{[Lamé 1840, 345]}$$

Cela signifie ainsi que, pour un système de surfaces orthogonales et isothermes :

> [A]bstraction faite de leurs signes, le produit de trois des six rayons de courbure, pris dans un certain ordre, est égal au produit des trois autres.
>
> [**Lamé 1840**, 346]

On voit ainsi qu'avant 1843 et les remarques de Bertrand, Lamé avait déjà observé combien l'ajout de la propriété d'isothermie avait la vertu de simplifier les propriétés de courbure des systèmes orthogonaux. Néanmoins, les analyses de Lamé portaient alors sur la *valeur des courbures* alors que Bertrand va quant à lui placer au centre de son travail les *lignes de courbure*.

L'établissement mathématique même de l'isothermie d'une famille de surfaces est fondé, par Bertrand, sur la considération des flux de chaleur traversant un rectangle infinitésimal $ABDC$ d'une surface S formé par deux de ses lignes de courbure.

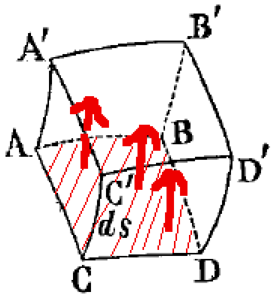


FIGURE 15. Support géométrique de l'établissement de l'isothermie pour Bertrand ([**Bertrand 1843b**, 167])

ds désignant la distance à la surface infiniment proche de S, Bertrand montre que la température est exprimée à l'aide de la variation de la courbure moyenne[52] $V = \lambda \int_0^s e^{-\int_0^s ds(\frac{1}{R}+\frac{1}{r})} ds$. L'isothermie de la famille de surfaces équivaut alors à l'indépendance de l'intégrale en la "*trajectoire orthogonale*" s choisie pour passer de S à sa proche voisine.

C'est encore en considérant deux surfaces de la même famille infiniment proche que Bertrand va établir la première des deux conditions nécessaires aux surfaces orthogonales pour être en outre isothermes. Découpant dans un premier temps la surface S selon huit lignes de courbure, deux à deux infiniment rapprochées, le neveu de Duhamel forme 4 rectangles (les rectangles sélectionnés sur la figure 16) dont les sommets extérieurs sont notés A, B, C, D, les sommets intérieurs A', B', C', D', et les côtés $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4)$. Enfin, les distances de S selon ses normales à la surface infiniment voisine évaluées respectivement en A, B, C, D sont notées par Bertrand i_1, i_2, i_3, i_4.

52. La courbure moyenne est donnée par la formule $\frac{1}{2}(\frac{1}{R} + \frac{1}{r})$. Mais Bertrand appelle en fait "*d'après Mlle Sophie Germain, courbure de la surface*" la somme des deux courbures principales : $\frac{1}{R} + \frac{1}{r}$ ([**Bertrand 1844a**, 119]). Cela illustre le fait qu'après les travaux de Gauß, l'indécision persiste pour choisir la quantité adaptée à la mesure de la courbure d'une surface entre la somme et le produit de ses courbures principales. On retrouve par ailleurs encore bien plus tard cette discussion dans les lettres des années 1870 de Gaston Darboux à Jules Hoüel ([**Archives épistolaires Darboux**]). Pour plus de détails, voir [**Reich 1973**].

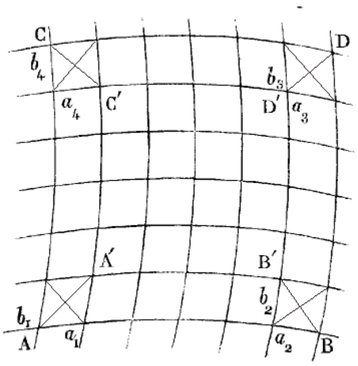


FIGURE 16. Support géométrique pour Bertrand des deux conditions nécessaires à l'isothermie d'un système triple orthogonal ([**Bertrand 1844a**, 123-125])

Si S fait partie d'un système triple orthogonal et isotherme, alors S ainsi que les surfaces lui étant normales selon ses lignes de courbure sont isothermes. Bertrand va alors grâce à cette remarque évaluer les écarts de chaleur des différents côtés des 4 rectangles en les considérant tour à tour dans les deux autres familles de surfaces normales et isothermes auxquelles ils appartiennent. Il évalue ainsi d'abord le "*flux de chaleur*" entre les surfaces normales à S définissant les lignes de courbure AD, $A'D'$, BC et $B'C'$, puis recommence avec leurs perpendiculaires traçant les lignes de courbure AB, $A'B'$, CD et $C'D'$. S étant elle-même isotherme, la combinaison des relations obtenues permet à Bertrand d'obtenir la relation de proportion géométrique[53] suivante :

$$i_1 : i_2 :: i_4 : i_3$$

Cela signifie ainsi que tout rectangle défini sur une surface d'un système orthogonal et isotherme par ses lignes de courbure possède cette propriété que "*la distance des quatre sommets de ce rectangle à la surface infiniment voisine [...] formeront une proportion [géométrique]*" ([**Bertrand 1844a**, 125]).

A elle seule, cette première condition suffit à prouver le bien-fondé de la motivation du travail de Bertrand : en effet, comme le détaille son auteur, cette condition n'est *a priori* pas respectée par un système de surfaces isothermes quelconque. Aussi cela montre-t-il que tout système de surfaces isothermes ne fait pas partie d'un système orthogonal. Mais le jeune polytechnicien va utiliser cette première condition pour en exhiber une seconde dont la vérification mathématique se révélera plus facile que la première, et dont la signification physique sera en outre plus aisée à interpréter.

Il considère pour cela le découpage complet de la surface S, toujours supposée appartenir à un système triple orthogonal et isotherme, selon des rectangles infiniment petits grâce à ses lignes de courbure. Entre deux mêmes lignes de courbure, ces rectangles sont semblables entre eux. En utilisant l'expression des flux de chaleur dans les surfaces normales à S le long de ces rectangles - tout comme pour l'établissement de la première condition - et en ajoutant à ces relations la connaissance de la proportion géométrique précédente,

53. On dit de quatre quantités a, b, c, d qu'elles forment une *proportion géométrique* (et on note $a : b :: c : d$) s'il existe une valeur réelle λ telle que $a = \lambda b$ et $c = \lambda d$. C'est la définition moderne de la *proportionnalité*.

Bertrand parvient à mettre en évidence que *tous* les rectangles infinitésimaux tracés par les lignes de courbure sont semblables entre eux. On peut ainsi en particulier former des carrés puisque le rapport des côtés est arbitrairement choisi et peut être égalé à l'unité. Bertrand obtient ainsi sa deuxième condition :

> Toute surface susceptible de faire partie d'un système de surfaces orthogonales isothermes jouit de la propriété de pouvoir être découpée par ses lignes de courbure en [...] carrés.
>
> [**Bertrand 1844a**, 126]

Cette seconde condition présente plusieurs avantages comparée à la première dont néanmoins elle dépend : pour commencer, sa vérification porte sur une surface quelconque alors que la première condition nécessitait la connaissance et l'emploi d'une famille de surfaces et des surfaces infiniment rapprochées. Ensuite, d'un point de vue physique, qu'une surface soit susceptible d'être découpée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure revient à dire que ces lignes de courbure sont des lignes isothermes. C'est pour cette raison que Gaston Darboux nommera les surfaces respectant cette condition des "*surfaces isothermiques*" [54]. Enfin, d'un point de vue mathématique, cette condition établissant le découpage carré d'une surface par ses lignes de courbure correspond à la possibilité de mettre l'élément linéaire ds^2 sous forme diagonale scalaire [55], c'est-à-dire de pouvoir l'écrire $ds^2 = M(du^2 + dv^2)$ [56]. Aussi la vérification de cette condition d'isothermie est bien adaptée aux outils de géométrie infinitésimale des surfaces, la simple étude de l'élément linéaire permettant de déterminer le caractère *isothermique* de la surface étudiée [57].

Ayant érigé ces deux conditions et vérifié qu'elles étaient effectivement restrictives, Bertrand répond clairement à la question qu'il s'était proposé d'étudier : les familles isothermes sont-elles toujours susceptibles d'être complétées par deux autres familles formant un système à la fois orthogonal et isotherme ? Il répond ainsi par la négative en montrant qu'à partir d'un système triple orthogonal, deux conditions doivent être remplies pour obtenir le caractère isotherme. On peut remarquer que Bertrand n'emploie jamais dans son mémoire [**Bertrand 1844a**] les adjectifs "*nécessaire*" et "*suffisant*". S'il est clair que les conditions qu'il met en évidence sont nécessaires pour obtenir à partir d'un système de trois familles de surfaces orthogonales un système isotherme, le géomètre ne se penche en

54. Picard témoigne de la paternité de Darboux pour cette dénomination d'"*isothermique*" ([**Picard 1917**, XII]). Bonnet proposa dans un premier temps - à la fin des années 1860 - d'appeler ces surfaces "*isométriques*" ([**Darboux 1873a**, 143]). C'est dans ses leçons au début des années 1880 que Darboux emploiera le nom de *surfaces isothermiques* qui s'imposera. Remarquons que, contrairement à ce qui est affirmé dans [**Guitart 2009**, 124], des surfaces isothermiques ne sont pas nécessairement contenues dans un système orthogonal : la seule condition porte sur l'isothermie du réseau des lignes de courbure. Pour simplifier notre présentation, nous emploierons dès l'apparition de cette notion le nom de *surfaces isothermiques* en dépit de l'évident anachronisme que cela constitue.

55. La matrice de la forme quadratique est mise, dans la base (du, dv), sous la forme $\begin{pmatrix} \mathrm{M} & 0 \\ 0 & \mathrm{M} \end{pmatrix}$: c'est ce que l'on nomme une matrice *scalaire*.

56. En vertu de cette forme particulière de la métrique, les coordonnées (u, v) sont appelées *coordonnées isothermes* (voir [**Lützen 1990**, 717]). Une surface admet toujours des coordonnées isothermes, mais il n'est pas évident que ces coordonnées coïncident avec les familles des lignes de courbure de la surface : c'est précisément ce qui distingue une surface *isothermique*.

57. Pour plus de détails sur les surfaces isothermiques, voir [**Darboux 1898**, 217] ou [**Darboux 1889**, 246].

revanche absolument pas sur le problème de leur suffisance. Cette question sera clarifiée par Bonnet en 1845, lequel montrera que les deux conditions de Bertrand appliquées à un système triple sont effectivement suffisantes, mais qu'en outre elles ne sont plus nécessaires si l'on connaît l'isothermie de certaines des familles formant le système triple orthogonal ([**Bonnet 1845**]).

En dépit de sa parution dans le "*Journal de Liouville*" en 1844, c'est en Juillet 1843 que Bertrand présente à l'Académie des Sciences son mémoire ([**Bertrand 1844a**]) renfermant les conditions d'isothermie des systèmes orthogonaux [58]. Joseph Liouville et Gabriel Lamé sont chargés de l'examen de ce mémoire, et par conséquent Lamé prend tout de suite connaissance des résultats obtenus par Bertrand. A la lecture de ces résultats, Lamé a immédiatement "*l'idée de chercher, par l'intégration des équations différentielles [...], quelles sont toutes les surfaces [orthogonales] capables de composer un système triplement isothermes*" ([**Lamé 1843**, 398]). Il ne lui faudra que quelques semaines pour résoudre cette question, de sorte que ses résultats ([**Lamé 1843**]) seront publiés avant même le mémoire de Bertrand leur ayant donné naissance [59].

Le résultat obtenu par Lamé est le suivant :

> [L]es seuls [systèmes triples orthogonaux de] surfaces toutes isothermes, qui ne sont ni cylindriques, ni coniques, ni de révolution, sont [l]es surfaces du second degré homofocales.
>
> [**Lamé 1843**, 430]

Cette proposition forte, qui devient le *théorème de Lamé*, montre la pertinence des propos de Bertrand : les surfaces étudiées dans ses premiers travaux par Lamé, du second degré, sont toujours isothermes et orthogonales. Et pourtant elles constituent l'exception et non la règle puisque seules ces quadriques homofocales forment des systèmes triples isothermes.

La démonstration de Lamé ([**Lamé 1843**, 402-430]) est longue et très fastidieuse. Même un excellent calculateur comme Bonnet reconnaîtra volontiers qu'elle "*est extrêmement épineuse*" ([**Bonnet 1845**, 142]). Tout comme en 1833 pour la distribution de chaleur dans les corps délimités par des quadriques, en 1843 Lamé a l'intuition du résultat grâce à l'étude préalable de certains cas particuliers [60], et la puissance de son analyse lui permet d'en démontrer la validité générale. Il nous suffira ici de remarquer que la preuve de Lamé n'est basée que sur l'intégration des équations différentielles traduisant l'orthogonalité d'un système de trois familles de surfaces, en ajoutant les relations sur les paramètres différentiels représentant leur isothermie et les formules découvertes en 1840 par Lamé lui-même liant les 6 courbures de ces surfaces. Cette longue preuve n'utilise ainsi ni les deux

58. Voir dans les "*Comptes-Rendus*" l'annonce de ce Mémoire et le rapport dans [**Bertrand 1843a**].

59. Les deux mémoires sont publiés dans le "*Journal de mathématiques pures et appliquées*" de Liouville, celui de Lamé paraît en Octobre 1843 et celui de Bertrand en Avril 1844.

60. Lamé explique qu'il effectue tout d'abord ses calculs pour les cas où le système triple contient une famille de plans ou des surfaces de révolution. C'est ensuite, fort des techniques de résolution propres à l'isothermie de ces cas particuliers de systèmes orthogonaux, qu'il parvient à intégrer les équations dans le cas général : "*Je n'ai pu atteindre le but que je me proposais qu'en ayant recours à des procédés particuliers qui paraissent liés intimement avec cette sorte d'équations différentielles*" ([**Lamé 1843**, 399]). L'objectif sous-jacent qu'il espère atteindre est en fait l'intégration des équations différentielles régissant les systèmes triples orthogonaux.

conditions d'isothermie de Bertrand, ni la considération de l'élément linéaire des surfaces en question.

La généralisation des résultats obtenus dans certains cas particuliers joue donc un grand rôle dans l'approche de Lamé. L'établissement de son théorème est en effet basé sur l'enquête méticuleuse des cas simples, qui fait souvent intervenir des surfaces de révolution qui simplifient les intégrations. Ensuite, sa recherche procède du particulier au général en se laissant guider par un robuste moteur : *l'analogie*. On retrouve ici tout à fait le cheminement de la découverte scientifique décrit par Henri Poincaré. En suivant ce-dernier, Gabriel Lamé doit être considéré comme un *analyste, logique*, plutôt que comme un *géomètre, intuitif*[61] : en effet "*les uns aiment mieux traiter leurs problèmes « par l'Analyse », les autres « par la Géométrie ». Les premiers sont incapables de voir dans l'espace, les autres se lasseraient promptement des longs calculs et s'y embrouilleraient*" ([**Poincaré 1905**, 15]). Pour Poincaré, les géomètres créent grâce à l'intuition, tandis que le mécanisme est différent pour les analystes :

> [L]es analystes ne sont pas simplement des faiseurs de syllogismes à la façon des scolastiques. Croira-t-on, d'autre part, qu'ils ont toujours marché pas à pas sans avoir la vision du but qu'ils voulaient atteindre ? Il a bien fallu qu'ils devinassent le chemin qui y conduisait, et pour cela ils ont eu besoin d'un guide. Ce guide, c'est d'abord l'analogie.
>
> [...] Les analystes, pour ne pas laisser échapper ces analogies cachées, c'est-à-dire pour pouvoir être inventeurs, doivent, sans le secours des sens et de l'imagination, avoir le sentiment direct de ce qui fait l'unité d'un raisonnement, de ce qui en fait pour ainsi dire l'âme et la vie intime.
>
> [**Poincaré 1905**, 30-32]

La force de l'analogie dans le mécanisme de progression des recherches de Lamé rejoint les propos de Poincaré. L'analogie ne doit pour autant pas être opposée à l'*intuition*, que nous avons évoquée pour Lamé, ce que Poincaré révèle même à demi-mots : l'intuition joue ainsi un grand rôle dans la présomption d'existence de l'analogie, et donc le processus d'extension de validité ou de transposition des raisonnements particuliers[62]. Detlefsen avait souligné combien "*pour une preuve poincaréenne, l'élément clef est l'appréhension ou l'intuition de l'architecture mathématique générale entre les prémisses et les conclusions*" ([**Detlefsen 1992**, 368]). Dans le cas de Lamé, on peut ainsi dire que l'élément clef de la recherche *laméenne* est l'applicabilité d'une architecture de démonstration déjà vérifiée sur des prémisses plus restrictives : il s'agit là de sa quête de l'analogie.

Si la difficulté de la démonstration du théorème de Lamé est un obstacle à la compréhension détaillée de son articulation, elle est en revanche source de motivation pour les mathématiciens qui vont chercher à la simplifier. Dans la deuxième moitié des années 1840, Pierre-Ossian Bonnet et Joseph Liouville vont progressivement y parvenir.

61. Les figures de proue de ces deux distinctions sont pour Henri Poincaré : Hermite, Weierstraß et Kovalevskaya d'une part, Bertrand, Riemann et Lie d'autre part ([**Poincaré 1905**, 14-17]).

62. L'étude des tensions entre la généralisation, l'intuition et la rigueur dans le cadre plus vaste du développement général des notions a été le sujet de plusieurs recherches récentes de la part des historiens des mathématiques. On consultera notamment à ce sujet [**Schubring 2010**], lequel comporte différentes autres références liées à cette thématique.

FIGURE 17. Pierre-Ossian Bonnet (à gauche) et Joseph Liouville (à droite).

Pierre-Ossian Bonnet naît à Montpellier à la fin de l'année 1819. Polytechnicien de la promotion 1838, il effectue son application à l'École des Ponts et Chaussées. La majeure partie de son enseignement se fera à l'École Polytechnique où il sera après 1844 répétiteur de Géométrie descriptive puis d'Analyse, avant d'en devenir examinateur d'admission en 1861 [63]. En 1872, Bonnet devient le directeur des études de son ancienne École, et alors académicien depuis une dizaine d'années, la Faculté des Sciences lui ouvre ses portes : ayant déjà suppléé Chasles en Géométrie supérieure, c'est à la mort de Le Verrier que Bonnet devient titulaire de la chaire d'Astronomie qu'occupait celui qui découvrit Neptune [64].

C'est grâce à la découverte de nouvelles propriétés des courbures des surfaces orthogonales et isothermes que Bonnet simplifie la démonstration du théorème de Lamé. Il s'inspire largement des travaux du mémoire [**Lamé 1840**] dont il reprend les notations et approfondit les résultats. Surtout, il exploite ses grandes connaissances de la théorie générale des courbures des surfaces ([**Appell 1893**, 1016-1017]) et les met en application pour développer les cas particuliers présentés par l'orthogonalité et l'isothermie. Mettant au jour de nouvelles formules reliant entre elles les variations des courbures des surfaces orthogonales et isothermes, Bonnet parvient à montrer la dépendance des variations des courbures de ces surfaces en fonction du cube de la distance de la surface infiniment proche. En reliant cette dépendance avec des résultats de Bertrand, il parvient à la formule suivante :

$$\frac{\frac{dc_1}{ds_1}}{c_1} = 3\frac{\frac{d\gamma}{ds_1}}{\gamma} \quad {}^{65}$$

Cette formule traduit, le long d'une ligne de courbure (ici s_1) d'une surface quelconque d'un système triple isotherme, le fait que "*le rayon de courbure principal correspondant [ici c_1] varie proportionnellement au cube de l'autre rayon de courbure principal [ici γ]*" ([**Bonnet 1845**, 159]). Cette propriété forte liant les variations des deux courbures des surfaces permet à Bonnet de "*simplifier considérablement la démonstration du théorème de M. Lamé, démonstration qui est très épineuse*". Il adapte en effet tout un pan de la preuve de Lamé en utilisant cette propriété et les conditions d'isothermie de Bertrand pour

63. Pierre-Ossian Bonnet faisait ainsi partie de la commission d'examinateurs qui interrogea Darboux à l'été 1861.

64. A propos de la vie et l'oeuvre de Bonnet, on pourra lire la notice de Paul Appell [**Appell 1893**].

65. Cette formule est relative, selon les notations de Lamé, à la famille de surfaces (ρ_2) dont les courbures sont bien c_1 et γ.

parvenir plus aisément à ramener la preuve à la recherche finale de la forme de certaines fonctions des paramètres ρ, ρ_1, ρ_2 [66].

En 1849, Bonnet reviendra à nouveau sur cette preuve qu'il jugera malgré sa première simplification "*encore très compliquée*". Il montrera alors comment l'intervention de l'équation différentielle des lignes de courbure (en coordonnées cartésiennes, voir [Chap.2,7.3]) lui permet d'accélérer les intégrations finales de la preuve en exprimant systématiquement, via cette équation, les coefficients du problème en fonction des 6 rayons de courbure ([**Bonnet 1849**]).

L'année suivante, en 1850, Joseph Liouville va apporter un nouvel élément de simplification de la démonstration du théorème de Lamé. Joseph Liouville naît à Saint-Omer en 1809. Après avoir grandi en Lorraine, il intègre l'Ecole Polytechnique en 1825 et effectue tout comme Bonnet son application à l'Ecole des Ponts et Chaussées. C'est toutefois au sein de la toute jeune École Centrale des arts et manufactures [67] que Liouville débute son enseignement en 1831. Remarqué par sa création en 1836 du "*Journal de mathématiques pures et appliquées*", il devient deux ans plus tard professeur à Polytechnique d'analyse et de mécanique. Après 1851, Liouville enseigne au Collège de France, mais c'est surtout à partir d'Octobre 1857 qu'il devient titulaire de la chaire de Mécanique de la Sorbonne. Darboux l'y suppléera de Novembre 1872 au Printemps 1878 [68].

L'apport de Liouville au théorème de Lamé est totalement décorrélé des simplifications qu'en a opéré Bonnet. Il consiste à remarquer le rôle que joue la transformation par rayons vecteurs réciproques [69] dans la théorie des surfaces orthogonales et isothermes. Dans une très courte communication, Liouville remarque que l'inversion "*fournit, comme on sait, une solution de l'équation :*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \lambda_{(\alpha,\beta,\gamma)}(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2) \quad \text{" [}\textbf{Liouville 1850}\text{]}$$

Conservant les angles (c'est-à-dire étant ce qu'on appelle aujourd'hui une *transformation conforme*), l'inversion transforme des systèmes orthogonaux en des systèmes orthogonaux. D'autre part, des lignes de courbure de la surface de départ étant transformées en des lignes de courbure de la surface image, l'inverse d'une surface *isothermique* reste une surface isothermique [70]. Mais ce que Liouville souligne en 1850, est le fait que toutes les solutions de l'équation à laquelle il s'intéresse, assujettie au cas où λ est constant, sont exactement "*des valeurs linéaires*" en (α, β, γ). Or une partie de la démonstration de ce théorème recoupe exactement, en les simplifiant, les intégrations effectuées par Lamé pour démontrer son théorème en 1843. C'est grâce à cela que Liouville peut "*simplifier, sans en changer en rien l'esprit, et pour ainsi dire en y supprimant seulement des détails superflus, la démonstration de M. Lamé*" ([**Liouville 1850**, 103]).

Dans sa note, Liouville ne fait qu'annoncer son utilisation de la transformation par rayons vecteurs réciproques et de son théorème de linéarité des variables dans la proportionnalité des formes quadratiques ternaires. Pour en connaître précisément l'analogie avec le théorème de Lamé et ainsi en appréhender les simplifications, il faut se reporter à l'une

66. Ces fonctions sont les fonctions f, f_1, f_2 de Lamé et Bonnet dont dépendent indirectement les expressions des arcs ds, ds_1, ds_2 ([**Bonnet 1845**, 161-162])

67. Cette école est, de nos jours, dénommée École Centrale Paris. Elle fut créée en 1829.

68. Pour plus de renseignements sur la vie et l'œuvre de Liouville, on consultera la biographie [**Lützen 1990**].

69. A propos de cette transformation, encore appelée inversion, voir [Chap.2,7.2].

70. Voir à ce sujet [**Darboux 1887**, 259-264] et [**Darboux 1889**, 245-250].

des notes qui accompagne cette année-là sa réédition de l'"*Application de l'Analyse à la Géométrie*" de Monge[71]. C'est dans cette note que Liouville détaille sa preuve et exhibe les analogies de calculs avec la preuve du théorème de Lamé. Ce-faisant, il accélère et simplifie considérablement l'obtention des fonctions f, f_1, f_2 dont dépendent les arcs normaux aux surfaces, ainsi que la partie finale de la résolution analytique.

2.3. Les cyclides et l'extension du théorème de Lamé réalisée par Darboux (1866).

Ayant mis au jour un nouveau système triple orthogonal grâce aux surfaces cyclides du quatrième ordre, et influencé par les recherches de Serret et de Bertrand, Darboux centre une grande partie de ses études de thèse sur les propriétés d'isothermie des cyclides. Il va alors, entre 1864 et 1866, s'approprier les différents travaux de Lamé à ce sujet.

D'après le théorème de Lamé, seules les quadriques homofocales sont susceptibles de former un système triple orthogonal et isotherme : étant orthogonales, les cyclides ne sauraient ainsi constituer un système de surfaces isothermes. En revanche, Darboux va se pencher sur les deux conditions nécessaires à l'isothermie (et suffisantes d'après Bonnet) données par Bertrand en 1843 s'appliquant aux surfaces orthogonales. Il va parvenir à démontrer dans un premier temps que les cyclides respectent la seconde condition de Bertrand : ce sont des surfaces *isothermiques*, c'est-à-dire qu'elles sont découpées en carrés infinitésimaux par leur lignes de courbure ([**Darboux 1866**, 100-102]). Dans un second temps, il va prouver (ou plutôt croire parvenir à prouver) un résultat bien plus fort : les cyclides forment le système triple orthogonal isothermique le plus général. En d'autres termes, il s'agirait du seul système triple orthogonal au sein duquel les surfaces sont divisées en carrés infinitésimaux par le réseau des lignes de courbure ([**Darboux 1866**, 130-141]). Nous insisterons sur ce théorème car il montre à quel point Darboux s'inspire des travaux et des méthodes de Lamé pour en prolonger les résultats. En outre, la forte impression que fera la thèse de Darboux sera largement due, nous le verrons, à ce dernier théorème[72]. Enfin, il permet de donner "*son prolongement naturel*" au théorème de Lamé, dont il fournit même une nouvelle preuve plus simple en étudiant les cas particuliers de surfaces cyclides susceptibles de fournir un système isotherme.

Dans sa thèse, Darboux n'écrit plus exactement le système de cyclides triple orthogonal sous sa forme la plus simple - comme il le faisait dans son premier mémoire [**Darboux 1865**] - mais à l'aide de l'expression développée suivante :

$$F(x, y, z, \lambda) = M + \frac{4d^2 - a^2}{a + \lambda}x^2 + \frac{4d^2 - b^2}{b + \lambda}y^2 + \frac{4d^2 - c^2}{c + \lambda}z^2 = 0 \qquad (\mathcal{S})$$

71. Il s'agit de la note VI, pp.609-616, intitulée "*Extension au cas des trois dimensions de la question du tracé géographique*". On peut la consulter en ligne : books.google.fr/books?id=QENiAAAAcAAJ. On verra également les commentaires de Lützen dans [**Lützen 1990**, 730].

72. Dans son Rapport de thèse, Chasles - qui préside le jury de Darboux - estimera ce théorème être démontré par Darboux "*par une analyse savante et extrêmement ingénieuse*" ([**Chasles 1870**, 364]). Cela offre d'autant plus d'intérêt que le résultat de Darboux devra être reconsidéré et modifié quelques années plus tard : c'est Darboux lui-même qui s'en apercevra.

Ce-faisant, il pose ainsi : $M = (x^2+y^2+z^2)^2+ax^2+by^2+cz^2$. Cette écriture sera justifiée par la simplification de l'écriture factorisée de F ainsi que des différentes équations qui interviendront dans la recherche ultérieure des systèmes orthogonaux isothermiques.

L'équation $F = 0$ admet, lorsqu'on considère λ comme en étant l'unique variable, trois racines réelles que Darboux notera ρ, ρ_1, ρ_2. Il s'agit des trois coordonnées curvilignes orthogonales du système triple[73]. L'expression de F peut ainsi être factorisée grâce à ces trois racines "*d'après les principes de l'Algèbre élémentaire*" ([**Darboux 1866**, 99]) et être mise sous la forme :

$$F = \frac{M(\lambda-\rho)(\lambda-\rho_1)(\lambda-\rho_2)}{(a+\lambda)(b+\lambda)(c+\lambda)}$$

C'est à l'aide de cette expression factorisée selon le paramètre λ que Darboux parvient à exprimer le carré de l'élément linéaire ds^2 en fonction des coordonnées curvilignes (ρ, ρ_1, ρ_2). Il lui faut en effet prouver que cet élément peut, avec les lignes de courbure des cyclides, prendre la forme diagonale particulière $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$ qui caractérise les surfaces isothermiques. Darboux commence par exprimer l'élément linéaire des surfaces orthogonales sous sa forme générale :

$$ds^2 = Hd\rho^2 + H_1 d\rho_1^2 + H_2 d\rho_2^2 \qquad (\mathcal{G})$$

Avec cette expression, de nombreuses expressions et équations sont écrites de manière symétrique sous forme de triplets. Ainsi par exemple, Lamé avait déterminé dès 1840 l'expression des trois coefficients (H, H_1, H_2) en fonction des paramètres différentiels du premier ordre des trois coordonnées curvilignes (ρ, ρ_1, ρ_2) dans le cas particulier des surfaces orthogonales :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{H^2} = (\dfrac{d\rho}{dx})^2 + (\dfrac{d\rho}{dy})^2 + (\dfrac{d\rho}{dz})^2 = (\Delta_1(\rho))^2 \\ \dfrac{1}{H_1^2} = (\dfrac{d\rho_1}{dx})^2 + (\dfrac{d\rho_1}{dy})^2 + (\dfrac{d\rho_1}{dz})^2 = (\Delta_1(\rho_1))^2 \\ \dfrac{1}{H_2^2} = (\dfrac{d\rho_2}{dx})^2 + (\dfrac{d\rho_2}{dy})^2 + (\dfrac{d\rho_2}{dz})^2 = (\Delta_1(\rho_2))^2 \end{cases}$$

Pour alléger les notations et faciliter la compréhension du déroulement des démonstrations de Darboux, nous adopterons à présent la notation suivante : les indices (i, j, k) seront employés pour synthétiser en une expression unique les trois expressions obtenues par permutation circulaire des indices, c'est-à-dire en remplaçant successivement ces indices par $(\emptyset, 1, 2)$, $(1, 2, \emptyset)$ et $(2, \emptyset, 1)$. De même, nous noterons succinctement (v_i) le triplet (v, v_1, v_1). Ainsi nous dirons, pour reprendre les expressions précédentes des coefficients (H_i) de l'élément linéaire, que Lamé les avait déterminées via les formules suivantes :

$$\frac{1}{H_i^2} = (\frac{d\rho_i}{dx})^2 + (\frac{d\rho_i}{dy})^2 + (\frac{d\rho_i}{dz})^2 = (\Delta_1(\rho_i))^2 := (\Delta_1(\lambda))^2_{\lambda=\rho_i}$$

Darboux va alors évaluer les dérivées partielles de λ par rapport aux variables (x, y, z) en les interprétant comme quotient des dérivées partielles de F en (x, y, z) et de celle en λ. L'expression développée de $F(x, y, z, \lambda)$ lui permet d'obtenir dans un premier temps les trois premières dérivées partielles et de relier la somme de leurs carrés à la dérivée en λ. En effet, il obtient la forme suivante :

73. Nous reviendrons sur ces coordonnées curvilignes qui étendent les coordonnées elliptiques liées au système orthogonal des quadriques de Lamé en 4.1.

$$\left((\frac{dF}{dx})^2 + (\frac{dF}{dy})^2 + (\frac{dF}{dz})^2\right) := (\Delta_1(F))^2 = 4(\lambda^2 - 4d^2)\frac{dF}{d\lambda}$$

En utilisant la relation $\dfrac{d\lambda}{dx} = \dfrac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{d\lambda}}$, et de même pour y et z, Darboux obtient l'expression du premier paramètre différentiel de λ suivante :

$$\Delta_1(\lambda)^2 = \frac{\Delta_1(F)^2}{(\frac{dF}{d\lambda})^2} = \frac{4(\lambda^2 - 4d^2)}{\frac{dF}{d\lambda}}$$

Il ne reste plus alors au jeune géomètre qu'à évaluer ces quantités pour les valeurs $(\lambda = \rho_i)$ pour obtenir les expressions des (H_i) intervenant dans l'élément linéaire. De l'expression factorisée de F dont les (ρ_i) sont précisément des racines, Darboux déduit aisément la valeur de l'évaluation de la dérivée partielle en λ : il lui suffit en effet de "*différentier par rapport au seul facteur* $\lambda - \rho_{[i]}$" ([**Darboux 1866**, 101]). Il obtient alors :

$$\left(\frac{dF}{d\lambda}\right)_{\lambda=\rho_i} = \frac{M(\rho_i - \rho_j)(\rho_i - \rho_k)}{(\rho_i + a)(\rho_i + b)(\rho_i + c)}$$

Darboux peut alors en déduire l'expression complète des fonctions (H_i), et donc de l'élément ds^2 du système orthogonal des cyclides. En adoptant la notation $\psi(x) = 4(x+a)(x+b)(x+c)(x^2 - 4d^2)$, cet élément est donné par la formule :

$$ds^2 = M\left[\frac{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)}{\psi(\rho)}d\rho^2 + \frac{(\rho_1 - \rho)(\rho_1 - \rho_2)}{\psi(\rho_1)}d\rho_1^2 + \frac{(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 - \rho)}{\psi(\rho_2)}d\rho_2^2\right] \qquad (\mathcal{L})$$

Darboux peut, grâce à cette expression générale, déterminer l'élément linéaire des cyclides qui composent le système orthogonal. Il suffit pour cela d'y poser $\rho_i =$ constante. L'élément de la cyclide devient alors :

$$ds^2 = M\left[\frac{(\rho_j - \rho_i)(\rho_j - \rho_k)}{\psi(\rho_j)}d\rho_j^2 + \frac{(\rho_k - \rho_i)(\rho_k - \rho_j)}{\psi(\rho_k)}d\rho_k^2\right]$$

Pour parvenir à la forme diagonale scalaire des surfaces isothermiques, il pose alors :

$$d\rho_j\sqrt{\frac{\rho_j - \rho_i}{\psi(\rho_j)}} := du, \quad d\rho_k\sqrt{\frac{\rho_i - \rho_k}{\psi(\rho_k)}} := dv$$ [74]

La mise en facteur du terme $(\rho_j - \rho_k)$ lui permet finalement d'obtenir la forme souhaitée ci-dessous :

$$ds^2 = \underbrace{M(\rho_j - \rho_k)}_{:=M'}(du^2 + dv^2)$$

L'élément linéaire ds^2 des cyclides peut donc être mis sous la forme particulière qui caractérise les *surfaces isothermiques*. Elles remplissent ainsi la seconde condition d'isothermie énoncée par Bertrand en 1843 : "*les lignes de courbure de chacune des surfaces du système [des cyclides peuvent] la découper en carrés infiniment petits. Cette condition, qui*

74. Le lecteur attentif pourra remarquer que Darboux effectue une légère erreur de notation dans le changement dv ([**Darboux 1866**, 102]).

n'a pas lieu pour tous les systèmes orthogonaux, est satisfaite pour celui que nous étudions" ([Darboux 1866, 102]).

Étant parvenu à découvrir cette propriété des lignes de courbure des cyclides, le système orthogonal de Darboux devient le système orthogonal isothermique le plus général alors connu des mathématiciens. Il va alors, dans l'ultime partie de sa thèse, étudier la généralité de ce résultat.

> Généralisons et cherchons tous les systèmes orthogonaux dans lesquels chacune des surfaces peut être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure.
>
> [Darboux 1866, 130]

La réponse que le géomètre de Nîmes parvient à donner à cette interrogation montre la forte influence exercée sur lui par les recherches et les méthodes de Lamé. Sa méthode de calcul et sa dextérité dans le maniement des systèmes d'équations différentielles seront en effet toutes deux à rapprocher de celles de l'ingénieur polytechnicien.

Le point de départ de l'analyse de Darboux est l'écriture générale de l'élément linéaire des surfaces orthogonales :

$$ds^2 = Hd\rho^2 + H_1 d\rho_1^2 + H_2 d\rho_2^2 \qquad (\mathcal{G})$$

Pour que les surfaces soient isothermiques, il faut et il suffit que leurs lignes de courbure les découpent selon des carrés infinitésimaux. En utilisant le fait que ces lignes sont précisément la trace, sur l'une des surfaces ρ_i, de toutes les surfaces des deux autres familles ρ_j et ρ_k [75], Darboux montre que le rapport de deux coefficients H_i et H_j doit se mettre sous la forme d'un quotient de deux fonctions $f(\rho_i, \rho_k)$ et $F(\rho_j, \rho_k)$. En notant S_i une fonction (de ρ_j et de ρ_k) "*qui ne contient pas* $\rho_{[i]}$", cela signifie que les fonctions (H_i) des surfaces orthogonales isothermiques doivent être écrites sous la forme :

$$H_i = \frac{S_j S_k}{M}$$

Cette condition est nécessaire et suffisante, et Darboux pour faciliter l'écriture des dérivées partielles des (H_i) utilisera dans la suite de sa preuve la forme exponentielle équivalente qui suit :

$$H_i = e^{-ln(M)+R_j+R_k} \text{ [76]} \qquad \text{[Darboux 1866, 131]}$$

C'est à cette forme générale des (H_i) que mène la propriété des systèmes de surfaces d'être isothermiques. Dans la suite, Darboux va utiliser les informations données par le caractère orthogonal des surfaces pour parvenir à de nouvelles contraintes sur l'expression des (H_i). Dans ses "*Leçons*", Lamé avait déterminé deux systèmes de trois équations différentielles portant sur les fonctions (H_i) déterminant entièrement la propriété d'orthogonalité de l'ensemble des surfaces [77]. Ces équations, Lamé les sépare en deux "*groupes*"

75. Ceci résulte du théorème de Dupin que nous verrons en 3.1.

76. Les fonctions (R_i) de Darboux sont soumises évidemment à la même condition que les (S_i) : R_i ne dépend pas de la variable ρ_i.

77. Lamé exprime ceci de cette manière : "*les six équations aux différences partielles [données par les deux groupes] sont les seules, réellement distinctes, que doivent vérifier les fonctions* H_i" [Lamé 1859, 78].

([Lamé 1859, 73-78]) : le premier groupe d'équations est, avec notre notation synthétique, exprimé par :

$$\frac{d^2H_i}{d\rho_j d\rho_k} = \frac{1}{H_j}\frac{dH_i}{d\rho_j}\frac{dH_j}{d\rho_k} + \frac{1}{H_k}\frac{dH_i}{d\rho_k}\frac{dH_k}{d\rho_j} \qquad (\mathcal{C}_1)$$

Le second groupe d'équations prend quant à lui la forme :

$$\frac{d}{d\rho_j}\left(\frac{1}{H_j}\frac{dH_i}{d\rho_j}\right) + \frac{d}{d\rho_i}\left(\frac{1}{H_i}\frac{dH_j}{d\rho_i}\right) + \frac{1}{H_k^2}\frac{dH_i}{d\rho_k}\frac{dH_j}{d\rho_k} = 0 \qquad (\mathcal{C}_2)$$

Darboux va alors procéder comme suit : il exploite dans un premier temps les conditions déterminées par le premier groupe $(\mathcal{C}_1)$ pour parvenir à une expression plus précise des fonctions (H_i) en explicitant la forme des (R_i) qu'elles comportent en exponentielle. Puis il va ensuite exploiter les conditions du second groupe $(\mathcal{C}_2)$ et déterminer (à tort) que, parmi ces solutions potentielles, seules les fonctions (H_i) correspondant au système des surfaces cyclides sont réellement des solutions admissibles.

Pour "*simplifier un peu*", Darboux utilise de nouvelles notations pour désigner les dérivées partielles de la fonction M. Il pose ainsi :

$$x_i := \frac{dM}{d\rho_i}, \quad x_{ij} := \frac{d^2M}{d\rho_i d\rho_j}$$

A l'aide de ces notations, Darboux réécrit les équations du premier groupe $(\mathcal{C}_1)$ appliquées au cas où les surfaces sont isothermiques, c'est-à-dire à la forme exponentielle particulière des fonctions (H_i). Il obtient trois équations prenant la forme :

$$x_{ij} = x_i\frac{dR_k}{d\rho_j} + x_j\frac{dR_k}{d\rho_j} + MU_k$$

Les fonctions (U_i), données par Darboux *a priori* comme des fonctions des dérivées partielles des (R_i), représentent en fait d'un point de vue géométrique les normales aux surfaces $\rho_i =$ constante. Il remarque ensuite que la compatibilité des trois équations précédentes portant sur les x_{ij} est connue et facilement exprimable. En effet, en vertu du théorème d'interversion, "*il faut qu'elles [ces équations] donnent les mêmes valeurs pour la dérivée [troisième]*" de M, $\frac{d^3M}{d\rho_i d\rho_j d\rho_k} = x_{ijk}$. En exploitant ce critère de compatibilité portant sur la dérivée troisième, Darboux parvient à montrer que ce critère revient aux formules :

$$\frac{dU_i}{d\rho_i} = 0$$

Cela confirme par ailleurs l'interprétation géométrique des fonctions (U_i). L'intégration de ces trois formules est immédiate, et en revenant à l'expression originelle des (U_i) en fonction des (R_i), elle se traduit par les trois équations :

$$K_i = \left(\frac{dR_k}{d\rho_j} - \frac{dR_i}{d\rho_j}\right)\left(\frac{dR_j}{d\rho_k} - \frac{dR_i}{d\rho_k}\right) \qquad \text{[Darboux 1866, 133]}$$

L'étude est ainsi entièrement ramenée à la recherche des fonctions (R_i) "*qui peuvent satisfaire à ces trois équations*" pour en déduire la forme des coefficients (H_i) de l'élément linéaire général. Darboux effectue alors une analyse élégante dans laquelle il exploite au maximum la possibilité de fixer dans les équations certaines des variables pour en déduire de nouvelles relations. Il utilise également, à l'image de la première partie de la démonstration, l'étude des quotients de fonctions susceptibles d'éliminer la dépendance en certaines variables. C'est ainsi qu'il parvient à déterminer la forme plus précise des coefficients (H_i) suivante ([**Darboux 1866**, 135]) :

$$H_i = \frac{(\rho_i - \rho_j)^{-h}(\rho_i - \rho_k)^{-h}}{M\sqrt{a_i(\rho_i)}} \qquad (\mathcal{E})$$

Dans ces expressions, seules l'unique constante réelle $h \in \mathbb{R}$ et les fonctions d'une seule variable $a_i(\rho_i)$ restent ainsi à déterminer. Darboux est à ce stade parvenu à exploiter au maximum les informations provenant des conditions du premier groupe des équations de condition de Lamé $(\mathcal{C}_1)$. Il va s'atteler à démontrer, en exploitant les conditions du second groupe $(\mathcal{C}_2)$, que seul le cas $h = \frac{-1}{2}$ correspond à une solution du problème, et que cela rejoint précisément les équations qui caractérisent les surfaces cyclides.

Pour exprimer plus simplement les équations du second groupe $(\mathcal{C}_2)$ adaptées à la forme des fonctions (H_i) déjà déterminées par $(\mathcal{E})$, Darboux adopte l'écriture abrégée suivante :

$$t_i = \frac{(\rho_j - \rho_k)^h}{\sqrt{a_i}}$$

Il explicite alors les formes que prennent les équations du second groupe ([**Darboux 1866**, 136]). Ces équations font intervenir les dérivées partielles de la fonction M, mais le géomètre va parvenir à s'en affranchir. Il fait pour cela intervenir une fonction auxiliaire V ainsi qu'une quantité intégrale ne dépendant que de ρ qu'il note $F(\rho)$. Grâce à des combinaisons astucieuses entre les différentes équations opérées pour en obtenir des combinaisons intégrables, il parvient finalement à écrire une "*équation de condition*" au sein de laquelle non seulement aucune dérivée seconde de M n'apparaît, mais en outre "*ce qu'il y a de remarquable*" c'est que toutes les dérivées premières en ont également été éliminées. Cette équation est la suivante :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{t_0^2}\left[\mathrm{F}(\rho) + \frac{2h^3 - 3h^2}{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)} - \frac{a'}{2a}(2h^2-h)\left(\frac{1}{\rho_1-\rho} + \frac{1}{\rho_2-\rho}\right) + \frac{h-h^2}{(\rho_1-\rho)^2} + \frac{h-h^2}{(\rho_2-\rho)^2}\right] \\ &+ \frac{1}{t_1^2}\left[-\frac{a'_1}{2a_1}h\left(\frac{1}{\rho_2-\rho_1} + \frac{1}{\rho_1-\rho}\right) - \frac{h}{(\rho_2-\rho_1)^2} + \frac{h-h^2}{(\rho_1-\rho)^2} + \frac{h^2}{(\rho_1-\rho)(\rho_1-\rho_2)}\right] \\ &+ \frac{1}{t_2^2}\left[-\frac{a'_2}{2a_2}h\left(\frac{1}{\rho_2-\rho} + \frac{1}{\rho_1-\rho_2}\right) + \frac{h-h^2}{(\rho-\rho_2)^2} - \frac{h}{(\rho_2-\rho_1)^2} + \frac{h^2}{(\rho_2-\rho)(\rho_2-\rho_1)}\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

FIGURE 18. Première équation de condition des systèmes orthogonaux isothermiques ([**Darboux 1866**, 137])

Cette équation est certes débarrassée des dérivées partielles de la fonction M, mais sa résolution paraît délicate. Là encore, Darboux va trouver le moyen de simplifier l'analyse de cette équation compliquée : il pose un nouveau paramètre numérique, k, défini par la relation suivante : $\rho_2 - \rho = k(\rho - \rho_1)$. La réécriture de l'équation de condition en utilisant le paramètre k, puis le passage à la limite pour ne considérer que le cas d'égalité $\rho = \rho_1 = \rho_2$ permettent au jeune normalien d'aboutir à une seconde équation de condition plus simple :

$$(-k-1)^{2h}\left[\frac{3h^2-2h^3}{k}+h-h^2+\frac{h-h^2}{k^2}\right]a(\rho)+k^{-2h}\left[-\frac{h}{(k+1)^2}+h-h^2\right.$$
$$\left.+\frac{h^2}{k+1}\right]a_1(\rho)+\left[\frac{h-h^2}{k^2}-\frac{h}{(k+1)^2}+\frac{h^2}{k(k+1)}\right]a_2(\rho)=0 \qquad (\mathcal{F})$$

C'est alors en identifiant les équations en h déduites du développement en série de cette équation de condition $(\mathcal{F})$ plus simple selon les puissances du facteur k que Darboux va parvenir à clôturer dans sa thèse la résolution du problème. Il divise cette dernière partie de sa recherche selon les trois différents cas : $h<1$, $h=1$ et $h>1$.

– $\boxed{h<1}$: Dans ce cas, Darboux détermine dans l'équation de condition $(\mathcal{F})$ le coefficient, fonction de h, de la plus grande puissance du développement selon les puissances $(k+1)$. Ceci lui permet de déterminer la relation suivante :

$$a_1=a_2=a_3$$

En reportant ces conditions dans $(\mathcal{F})$, Darboux constate que ces fonctions disparaissent et que l'équation ne fait plus intervenir que les paramètres numériques h et k. En identifiant le terme constant du développement en série de $(1+k)^{-2h}$, il obtient ensuite la formule :

$$-2h+6h^3-4h^2=0=h(2h+1)(h-1)^2 \qquad \text{[Darboux 1866, 139]}$$

Seules deux valeurs de h conviennent donc, $h=0$ et $h=-\dfrac{1}{2}$; pourtant Darboux délaisse complètement l'étude du premier cas et affirme que "*la seule valeur acceptable est* $h=-\dfrac{1}{2}$" ([**Darboux 1866**, 139]). Il ne se penche donc que sur le cas $h=-\dfrac{1}{2}$, et en reprenant l'équation de condition dans ce cas particulier parvient à mettre en évidence l'annulation identique des dérivées sixièmes des fonctions (a_i) :

$$\frac{d^6a_i}{d\rho_i^6}=0$$

Darboux peut alors identifier exactement ce cas au système des cyclides homofocales :

> Ainsi, la fonction $a(x)$ doit être un polynôme du cinquième degré au plus. Or le système [des surfaces cyclides] donne un polynôme du cinquième degré quelconque. Ainsi, les seuls systèmes qui correspondent au cas de $h=-\dfrac{1}{2}$ sont ceux que nous avons déjà étudiés.
>
> [**Darboux 1866**, 140]

Parce que l'élément linéaire des surfaces s'écrit, comme celui des cyclides, $ds^2=M\sum_i\dfrac{(\rho_i-\rho_j)(\rho_i-\rho_k)}{a(\rho_i)}d\rho_i^2$, avec $a(x)\in\mathbb{R}_5[X]$ [78], Darboux conclut ainsi que la

78. On pourrait penser que la forme de la fonction $\psi(x)$ pour les cyclides n'est pas la forme la plus générale d'un polynôme du cinquième degré. Néanmoins on l'obtiendrait "*par une substitution homographique légitime*" ([**Darboux 1898**, 263]). Darboux ajoute que l'on n'obtient pas unicité mais deux valeurs différentes pour M, lesquelles correspondent en fait toutes deux à la même surface cyclide en vertu de sa propriété d'être *anallagmatique* ([**Darboux 1866**, 140]). De manière générale, les systèmes de surfaces orthogonales isothermiques sont appariés via la transformation par rayons vecteurs réciproques : "*les deux*

seule solution dans le cas $h < 1$ est donnée dans toute sa généralité par le système orthogonal isothermique formé par les surfaces cyclides homofocales.

– $\boxed{h = 1}$: Lorsqu'il attribue à h la valeur 1, Darboux obtient ensuite en substituant ces valeurs dans l'équation de condition $(\mathcal{F})$ la relation :

$$a(\rho) = a_1(\rho) = a_2(\rho) = 0$$

Il conclut ainsi rapidement que "*ces valeurs sont inadmissibles*" sans donner plus de détail [79].

– $\boxed{h > 1}$: Les seuls cas restant à étudier sont ceux où h dépasse l'unité. Darboux y emploie la même méthode que pour les cas $h < 1$: il étudie le développement de l'équation de condition $(\mathcal{F})$ selon les puissances de $(k+1)$ et remarque que le coefficient de la puissance $-2h$ s'annule pour $k = -1$. Il en déduit l'équation en h :

$$2h^3 - 3h^2 + 2h - 2h^2 = 0 = 2h(h-2)(h - \frac{1}{2})$$

Rejetant les valeurs 0 et $\frac{1}{2}$, Darboux poursuit avec la seule valeur $h = 2$ qui convient. En portant cette valeur dans la première équation de condition (figure 18), il étudie les cas d'égalité de deux des trois paramètres (ρ_i). Il parvient ainsi à démontrer que les trois fonctions (a_i) sont constantes, et qu'en outre leur somme s'annule. Les trois constantes "*ne pouvant avoir le même signe*" ([**Darboux 1866**, 141]), et étant sous un radical au dénominateur dans l'expression des fonctions (H_i), cela contredit la réalité de ces-dernières.

A partir de l'expression des fonctions (H_i) sous la forme $(\mathcal{E})$, Darboux prouve ainsi grâce aux conditions données par le second groupe d'équations de Lamé $(\mathcal{C}_2)$ que le paramètre numérique h ne correspond à une solution du problème de recherche des surfaces orthogonales isothermiques que pour la valeur $-\dfrac{1}{2}$. Mais ce cas correspond aux expressions :

$$H_i = \frac{((\rho_i - \rho_j)(\rho_i - \rho_k))^{\frac{1}{2}}}{M\sqrt{a(\rho_i)}} \quad , \quad a(x) \in \mathbb{R}_5[X]$$

Puisque cette expression caractérise le système des surfaces cyclides, Darboux en vient à conclure avec le résultat suivant :

> [L]e seul système [triple orthogonal] pour lequel chaque surface puisse être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure est le système [...] des surfaces [cyclides] du quatrième ordre, système qui comprend comme cas particulier le système des surfaces du second ordre.
>
> Ce résultat peut même fournir une démonstration du théorème de M. Lamé ; car on n'a plus qu'à chercher dans quel cas particulier le système des surfaces du quatrième ordre devient isotherme [...]
>
> [**Darboux 1866**, 141]

systèmes sont [soit] les mêmes [i.e. anallagmatiques] ou se déduisent l'un de l'autre par une inversion" ([**Darboux 1878a**, 326]).

79. La nullité des fonctions (a_i) semble en effet, au premier abord, contredire l'existence de l'expression $(\mathcal{E})$ définissant les (H_i). Cependant, cette conclusion est incorrecte comme nous le signalerons un peu plus loin.

Le résultat obtenu ainsi par Darboux, faisant coïncider les cyclides avec le cas le plus général d'orthogonalité isothermique, constitue le "*prolongement le plus naturel du théorème de Lamé*" ([**Guitart 2009**, 124]). Sa démonstration étant plus courte, il peut même représenter une nouvelle manière de retrouver le résultat de 1843 de Lamé. Puisque le théorème de Lamé a déjà été démontré et qu'en donner une nouvelle preuve n'est pas un objectif pour Darboux, ce-dernier ne s'attarde pas à expliciter la partie finale de ce qui constituerait une véritable preuve du théorème de 1843. A peine se contente-t-il de noter en bas de page que "*si l'on voulait en outre que le système [des cyclides] fût isotherme, il faudrait supposer* $M = 1$" ([**Darboux 1866**, 131]).

Si Darboux ne développe pas la preuve, nous nous contenterons de remarquer que la condition d'isothermie appliquée à l'équation des cyclides $(\mathcal{S})$ mène rapidement à une équation du second degré en (x, y, z) et ainsi à une quadrique. Le second paramètre différentiel est ainsi donné par :

$$\Delta_2(F) = 20(x^2 + y^2 + z^2) + 2(\frac{4d^2 + a\lambda}{a + \lambda} + \frac{4d^2 + b\lambda}{b + \lambda} + \frac{4d^2 + c\lambda}{c + \lambda})$$

Le carré du premier paramètre différentiel lui s'obtient sous la forme :

$$\Delta_1(F)^2 = 4(\lambda^2 - 4d^2)\frac{dF}{d\lambda}$$

Or $\frac{dF}{d\lambda}$ est une fonction du second degré en (x, y, z). Puisque l'isothermie revient à égaler à une fonction de λ le quotient de ces deux quantités, toutes deux du second degré, cette équation fournira bien une surface du second degré. Ainsi peut être obtenu le fait que parmi les surfaces cyclides orthogonales, seules les quadriques représentent des surfaces isothermes. Ayant égard au résultat de thèse de Darboux caractérisant les cyclides comme les surfaces orthogonales isothermiques les plus générales, ce simple ajout lui permet alors de penser retrouver entièrement le théorème de Lamé.

La démonstration ainsi présentée en 1866 par Darboux dans sa thèse, bien que recueillant alors l'approbation (et même les félicitations) des mathématiciens Chasles, Serret et Bouquet qui composent le jury mais également d'autres mathématiciens comme Bertrand[80], n'est pas exempte de tout reproche. Deux éléments vont amener par la suite Darboux à la reconsidérer et à en apercevoir les défauts : le fait de devoir l'enseigner dès l'année scolaire 1866-1867, et la prise en compte des solutions imaginaires. Pour ce second point, on peut constater en effet que dans son travail de thèse Darboux exclut les cas d'imaginarité des surfaces qu'il obtient : celles-ci ne sont pas considérées par lui comme des solutions. En 1867, le mathématicien héraultais Edouard Combescure, alors professeur de Mathématiques Spéciales au lycée impérial de Nice, va émettre la remarque que le cas correspondant - pour les notations de Darboux - à $h = 1$[81] est susceptible de fournir "*un système [orthogonal] isotherme imaginaire*" ([**Combescure 1867**, 125]). Si Combescure n'accorde pas non plus une grande importance aux solutions imaginaires, Darboux réalise alors par ce commentaire que son traitement du cas $h = 1$ n'est pas rigoureux, et fournit en fait même des solutions réelles au problème. Par ailleurs, la mise de côté des cas $h = 0$ paraît nécessiter des justifications ultérieures.

80. Nous verrons ultérieurement en [Chap.4,1.2] l'appréciation de Joseph Bertrand de la thèse de Gaston Darboux. On peut en lire un commentaire élogieux dans son "*Rapport*" [**Bertrand 1867**].

81. Pour les notations de Combescure, il s'agit du cas $p = -2$.

C'est à l'Automne 1877 que Darboux reprendra sa preuve pour en donner la touche finale qui en rectifie les imperfections et les oublis. La généralité du résultat en sera d'ailleurs altérée : les cyclides homofocales ne constituent finalement "que" les surfaces orthogonales isothermiques réelles et algébriques les plus générales[82]. Darboux montre en effet que parmi ces systèmes de surfaces orthogonales isothermiques, certaines familles - correspondant à différentes valeurs du paramètre h - passées sous silence dans sa thèse fournissent de nouvelles solutions. Son mémoire [**Darboux 1878a**] sur les coordonnées curvilignes déterminera rigoureusement l'existence de 5 différentes valeurs de h susceptibles de fournir exactement toutes les solutions du problème, qu'elles soient réelles ou imaginaires. L'examen des quatre valeurs non nulles est détaillé dans la dernière partie de ce mémoire ([**Darboux 1878a**, 323-348]), alors qu'une étude préliminaire, qui correspond implicitement à la nullité de h, précède ces développements ([**Darboux 1878a**, 318-321]). Le cas $h = \dfrac{-1}{2}$ correspond bien aux systèmes de cyclides homofocales les plus générales. Le cas $h = 1$ correspond quant à lui à un type bien particulier de cyclides : il regroupe les systèmes triples "*formé[s] avec des surfaces à ligne de courbure circulaires, c'est-à-dire avec des cyclides de Dupin*"[83] ([**Darboux 1898**, 256]). Ce sont ces systèmes isothermiques formés de trois familles de cyclides de Dupin qui fournissent les systèmes orthogonaux isothermes imaginaires évoqués par Combescure en 1867. Ces systèmes sont ainsi inclus dans le système plus général des surfaces cyclides. Le cas $h = 2$ avait été correctement envisagé par Darboux dans sa thèse : il n'est susceptible de fournir que des systèmes dont deux des trois familles sont imaginaires ([**Darboux 1878a**, 345]). C'est donc le dernier cas $h = \dfrac{1}{2}$ qui rend l'énoncé du théorème de 1866 inexact : ce cas comprend en effet des systèmes de surfaces réelles orthogonales et isothermiques qui ne sont pas des surfaces cyclides. S'il remarque cela, Darboux souligne surtout que les expressions des surfaces qui composent ces systèmes sont toujours transcendantes, aussi le géomètre "*n[e cherche] pas à compléter la solution*" ([**Darboux 1878a**, 348]).

Pour finir, il reste à souligner que les cas $h = 0$ que Darboux n'étudiait pas dans sa thèse correspondent aux solutions plus "évidentes" du problème où l'une des trois familles est constituée de surfaces sur lesquelles toutes les lignes sont des lignes de courbures (et donc en particulier le réseau des lignes isothermes). C'est le cas pour les familles de plans parallèles[84], complétées par deux familles de cylindres isothermes, pour les familles de sphères concentriques, complétées par deux familles de cônes isothermes, et enfin pour les faisceaux de plans, complétées par deux surfaces de révolution. Les deux premiers types de systèmes sont toujours isothermes, le dernier ne l'est que lorsque les surfaces de révolution

82. L'affirmation de René Guitart "*Les systèmes de surfaces cyclides que Darboux dégage dans sa thèse [...] constituent [le] système isothermique le plus général*" ([**Guitart 2009**, 124]) doit ainsi être reconsidérée.

83. Nous avons déjà rencontré en [Chap.2,7.2] et dans la section 1.3 les surfaces appelées *cyclides de Dupin* : il s'agit des enveloppes de sphères tangentes à trois sphères fixes, mais on peut encore les obtenir comme les surfaces les plus générales dont les caustiques (lieu des centres de courbure) dégénèrent en deux courbes. Cette-dernière définition est équivalente à celle qu'énonce Darboux, à savoir que les lignes de courbure de la surface sont circulaires (voir [**Berger Gostiaux 1992**]). Dans l'expression générale des cyclides $(\mathcal{S})$, on obtient les cyclides de Dupin lorsque deux des trois coefficients a, b, c sont égaux.

84. Ces familles sont à rapprocher des familles obtenues par Liouville en 1850 dans sa recherche de conservation des éléments linéaires par inversion sous la forme $ds^2 = \lambda_{(\alpha,\beta,\gamma)}(d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2)$ ([**Liouville 1850**]). Néanmoins pour le caractère isothermique, il n'est pas nécessaire de rechercher la constance de la fonction λ comme l'opérait Liouville.

sont du second degré ([**Darboux 1898**, 269]). Darboux remarque pour finir qu'à tous ces systèmes solutions il faut ajouter "*leurs transformés par inversion*" ([**Darboux 1878a**, 320]), et que les deux derniers types de systèmes sont précisément inverses l'un de l'autre par une inversion de rapport imaginaire ([**Darboux 1873a**, 162]).

Lors de la présentation de la thèse en 1866, les défauts de la preuve originelle de Darboux n'avaient pas été reconnus, notamment par les membres de son jury Chasles, Bouquet et Serret. En dépit de la rectification que Darboux en opère lui-même quelques années plus tard, et des nombreuses présentations (corrigées) qu'il effectuera de ce problème sur les surfaces orthogonales isothermiques dans ses cours de la Sorbonne et dans plusieurs de ses traités, c'est bien souvent le résultat énoncé dans la thèse qui est repris ultérieurement tant par les mathématiciens que par les historiens. On retrouve ainsi à tort exprimé dans [**Guitart 2009**, 124] mais aussi dans la *Notice historique* de Picard ([**Picard 1917**, XII]) que Darboux montre, dans sa thèse, que les cyclides constituent les surfaces orthogonales isothermiques les plus générales.

Cela suggère le fort impact du travail de thèse de Darboux, qui est celui qui fera référence pour la résolution de ce problème. Mais cela permet, considéré plus largement, de souligner l'importance du travail historique biographique, centré sur un unique acteur, pour mettre en évidence une telle problématique si ponctuelle, si isolée, de diffusion du savoir mathématique. L'intérêt de la biographie scientifique pour l'étude approfondie de la diffusion du savoir à petite échelle a été rappelé notamment par [**Nabonnand Rollet 2012**] [85]. C'est en effet un outil puissant pour rendre intelligible les trajectoires (sociales, disciplinaires, institutionnelles) des acteurs. Avec ce même objectif et à une échelle semblable, Caroline Ehrhardt a ainsi proposé d'employer des approches biographiques non seulement pour évaluer et comprendre la réception de l'œuvre de Galois de son vivant ([**Ehrhardt 2012**]), mais également pour appréhender la diffusion posthume de ses travaux ([**Ehrhardt 2011b**]). Une bonne connaissance de la diffusion du savoir grâce au travail biographique permet aussi de mieux saisir la pratique de la science, ce qui est mis en avant dans [**De Almeida Videira 2013**].

Dans un cadre certes restreint, notre étude retrouve ces différents arguments qu'elle valide en évaluant finement la circulation du savoir mathématique dans le cas très précis de la thèse de Gaston Darboux. On doit y souligner que, malgré l'importance de son enseignement ultérieur, et en dépit de ses publications ultérieures, c'est le résultat pourtant faux de son travail de thèse qui s'impose et semble fixer l'état de ce domaine de recherche. La diffusion de ce savoir fait donc la part belle au premier résultat de 1866, laissant dans l'oubli son caractère imparfait et les modifications aposées par la suite. Ceci peut en partie être expliqué par le fait que Darboux n'exprimera jamais ouvertement que la preuve de son travail de thèse contenait des imperfections. Il se contentera en effet, dans les améliorations ultérieures qu'il apportera à cette résolution, de mentionner son travail de 1866 comme portant le germe de sa recherche des systèmes orthogonaux isothermiques, ce qui lui attribue la paternité - pourtant non remise en cause - de cette recherche. Mais là où en 1866 les cyclides homofocales étaient "*le seul système*" orthogonal et isothermique ([**Darboux 1866**, 102]), après 1877 elles deviennent surtout un exemple donné en préambule de sa démonstration : elles permettent en effet à Darboux d'illustrer l'existence de surfaces orthogonales étant isothermiques mais non isothermes, ce qui en légitime la détermination complète ([**Darboux 1878a**, 303]). Tout au plus Darboux évoquera-t-il dans

85. Voir notamment l'introduction des éditeurs "*Définir, Classer, Compter etc.*" pp. 11-27.

sa "*Notice sur [s]es travaux scientifiques*" de 1881 [86] "*l'étude d'une question difficile que j'avais examinée d'une manière incomplète dans ma Thèse*" ([**Darboux 1884**, 22]), mais qui y aura vraiment prêté attention ?

L'extension du théorème de Lamé dans la thèse de Darboux est ainsi un cas d'étude particulièrement intéressant pour aborder la problématique chère à Poincaré : "*comment l'erreur est-elle possible en mathématiques ?*" ([**Poincaré 1908**, 44]). La démonstration du jeune normalien est longue et fastidieuse, aussi pourrait-on en première lecture attribuer pleinement la place de l'erreur à quelque faute de calcul. Mais il nous semble que l'erreur révèle ici un trait plus profond qui a été mis en relief par Poincaré :

> on remarque presque toujours qu['une] idée fausse, si elle avait été juste, aurait flatté notre instinct naturel de l'élégance mathématique.
>
> [**Poincaré 1908**, 59]

Nul doute qu'à ce sujet, Poincaré fait référence à sa propre (et célèbre) erreur relative au problème des trois corps pour la stabilité du système solaire [87]. Que ses surfaces cyclides constituent le système orthogonal isothermique le plus général était sans doute considéré instinctivement par le jeune Darboux comme le résultat naturellement élégant qui prolongerait parfaitement le résultat de Lamé sur les isothermes. En pensant le démontrer à tort, il "*flatte*" ainsi son instinct de l'élégance mathématique. Le résultat définitif de 1878, en revanche, lui aura paru sans doute bien moins *élégant*.

C'est avant même le début de son travail de thèse que Darboux, étudiant les propriétés géométriques de certaines courbes et certaines surfaces algébriques, avait découvert un système orthogonal nouveau formé de surfaces du quatrième ordre - les cyclides. Durant son travail de thèse (1864-1866), ses recherches vont de par cette découverte basculer dans le domaine de la théorie des surfaces isothermes. Darboux s'inspire des travaux de Lamé, acteur principal dans ce domaine, se familiarise rapidement avec ses résultats et se montre très influencé par les méthodes de l'ingénieur polytechnicien. Aussi dès 1866, son simple travail de doctorat fait déjà de Darboux un continuateur des recherches de Gabriel Lamé.

C'est en réutilisant les méthodes de Lamé que le géomètre nîmois révèle l'importance de ses surfaces cyclides dans la compréhension des distinctions à opérer entre orthogonalité et isothermie. D'abord confondues dans les premiers résultats de Lamé (1833-37, voir 2.1), ces deux propriétés des surfaces sont clairement distinguées grâce à Bertrand et Bonnet, et Lamé (1843) détermine ensuite exactement que le cadre de leur recoupement (réel) ne rassemble que les surfaces du second degré (voir 2.2). Parmi les deux conditions nécessaires de Bertrand que l'on doit ajouter à un système orthogonal pour lui octroyer en outre l'isothermie, Darboux pense établir dans sa thèse que le recoupement de l'une de ces conditions avec la propriété d'orthogonalité est en fait exactement délimité par ses cyclides (voir 2.3). Prolongeant ainsi le résultat devenu célèbre de Lamé, il s'inscrit en outre à la suite de Bonnet et de Liouville en en présentant une nouvelle preuve simplifiée. Cependant, opérant ultérieurement une révision de sa démonstration, Darboux montrera une dizaine d'années plus tard que le résultat obtenu par lui en 1866 n'est valable que pour les surfaces réelles algébriques, et précisera en outre les solutions transcendantes et imaginaires du problème de la détermination des systèmes orthogonaux isothermiques. Ceci fixera alors

86. La Notice de 1884 n'est qu'un supplément annexé à celle de 1881.
87. Voir à ce sujet [**Barrow-Green 1997**].

définitivement cette recherche particulière que Darboux continuera d'aborder dans son enseignement de Géométrie de la Sorbonne après 1878. On la retrouve ainsi dans ses "*Leçons sur la théorie générale des surfaces*" ([**Darboux 1887**, Livre II Chap. III]) et dans ses "*Leçons sur les coordonnées curvilignes*" ([**Darboux 1898**, Livre II Chap. III,IV,V]).

Les publications de Darboux sont généralement pauvres en termes de références aux travaux antérieurs. Pourtant son travail de thèse [**Darboux 1866**] fait exception puisque de nombreux renvois sont donnés en direction des recherches et des notations de Lamé qu'il réutilise systématiquement. La pregnance de cette influence est par ailleurs palpable à travers les méthodes employées par Darboux dans la délicate démonstration du théorème sur les surfaces orthogonales isothermiques. On retrouve en effet, chez Darboux comme chez Lamé, l'importance des combinaisons entre elles des relations différentielles définissant un problème, liées pas à pas à l'introduction de nouvelles notations simplifiant progressivement les nouvelles expressions ainsi mises au jour. L'apparition de paramètres supplémentaires, venant pourtant au premier abord alourdir la résolution, est utilisée par l'un et l'autre pour ensuite simplifier certaines conditions ou pour préciser la forme de la solution [88]. Surtout, les démonstrations de Darboux (1866) et de Lamé (1843) sont extrêmement proches dans la démarche et dans le rythme de la progression vers la solution : à partir d'une forme - encore trop - générale des solutions candidates, ils considèrent une des conditions du problème et l'exploitent au maximum en l'utilisant pour réduire le plus possible la généralité des solutions. Arrivés au terme de leurs ressources de calcul, ils réitèrent avec une nouvelle condition, et ce jusqu'à aboutir à la description la plus fine, la plus restrictive, des solutions du problème.

Aussi tant dans le domaine de recherche que dans les approches de résolution, le travail de thèse de Darboux est fortement marqué par l'influence de Gabriel Lamé. C'est ce qui en explique en outre la haute teneur en longs développements analytiques : si Darboux n'est pas un *analyste* au sens strict de Poincaré, en revanche les pratiques qu'il développe dans sa thèse le sont. L'impact de la forte inspiration des travaux de Lamé fait du doctorant de l'Ecole Normale un mathématicien qui "*aime mieux traiter ses problèmes par l'analyse*", sans "*se lasser des longs calculs*" [89], bien au contraire. L'analogie de leurs méthodes respectives est alors frappante.

Ayant commencé en 1864 ses recherches personnelles avec la géométrie des courbes et surfaces, l'étude des propriétés métriques et focales, on peut remarquer que Darboux s'est rapidement adapté à un second domaine : celui des surfaces orthogonales et isothermes. Par ailleurs, les outils et les méthodes qu'il y développe portent largement la marque de Gabriel Lamé : c'est la méthode analytique (*logique*, par *analogie*) qui prévaut alors sur le raisonnement géométrique (*intuitif*).

88. C'est ainsi par exemple que l'apparition des notations (t_i) ou du facteur numérique k jouent, dans la preuve de 1866 de Darboux, un rôle clef pour aboutir à des conditions à la fois plus simples et plus restrictives portant sur la forme des solutions. On peut rapprocher cela de l'introduction des variables q_i^j par Lamé dans sa démonstration originelle [**Lamé 1843**, 419].

89. Nous reprenons ici volontairement les citations de [**Poincaré 1905**, 15] en les adaptant à notre formulation.

3. Combien existe-t-il de systèmes triples orthogonaux ?

La théorie des systèmes triples orthogonaux débute, avant son usage dans les problèmes de physique mathématique par Lamé, en 1813 avec les travaux de Charles Dupin. Dans ses "*Développements de Géométrie*", cet héritier de Monge exhibe un lien profond entre les systèmes orthogonaux et les lignes de courbure des surfaces. Nous étudierons le théorème qui incarne ce lien dans la partie 3.1. Après les travaux de Dupin, il semble naturel de considérer des surfaces données comme faisant partie d'un système triple orthogonal pour pouvoir en étudier les courbures. Cette approche se renforce avec les premiers travaux de Lamé où les familles de surfaces isothermes, du second degré, sont considérées dans des systèmes triples orthogonaux qui sont encore isothermes. Nous étudierons en 3.2 comment la constitution d'un système triple orthogonal à partir d'une famille de surfaces passe, dans les années 1840 avec Jean-Claude Bouquet et Joseph-Alfred Serret, d'un fait admis - souvent implicitement - à une circonstance considérée comme exceptionnelle. Enfin, nous étudierons dans 3.3 la résolution complète du problème de la complétion d'une famille de surfaces en un système triple donnée indépendamment par Bonnet (1862) et par Darboux dans sa thèse de 1866. La méthode présentée par ce-dernier lui offrira en outre, nous le verrons, une généralisation du théorème fondateur de Charles Dupin.

L'étude comparée des travaux de Darboux et de Bonnet révèle que ces travaux sont tout à fait indépendants, et que les méthodes employées par les deux mathématiciens sont bien différentes. Pourtant leurs recherches semblent converger vers un unique résultat. Cette enquête peut être appréhendée en mettant en avant l'approche platoniste consistant à décrire les objets mathématiques comme existant et évoluant dans un monde séparé du nôtre. Dans cette approche, "*les objets des mathématiques ne sont pas 'perceptibles' mais sont 'intelligibles' [...] et leur connaissance n'est pas basée sur la perception*" ([**Bostock 2009**, 8]). Les recherches de Bonnet et de Darboux pourraient alors être vues comme l'illustration de l'existence *dans un monde à part* de l'objet des mathématiques, Bonnet et Darboux y accédant alors par deux chemins séparés. Cela nous amènerait rapidement à discuter la distinction de deux philosophies des mathématiques attachées au nom de Platon : le platonisme faible et le platonisme fort.

> Platonisme faible et platonisme fort s'accordent pour dire que les mathématiques parlent d'entités mathématiques qui existent objectivement [...]
>
> [L]e platonisme faible ne couple pas la reconnaissance d'objets mathématiques avec la reconnaissance d'un mode d'accès spécifique à ces objets. [...] De même, les vérités mathématiques ne sont pas nécessaires ou, en tout cas, pas plus nécessaires que les principes physiques. Au contraire, le platonisme fort postule l'existence d'un mode d'accès spécifique aux objets mathématiques.
>
> [**Barberousse et al. 2011**, 327-328]

On voit ainsi que notre étude peut être utilisée pour mettre en avant la philosophie du platonisme faible face au postulat d'unicité du mode d'accès aux objets mathématiques. Nous nous contenterons d'indiquer cette piste aux esprits plus philosophiques que le nôtre, cette thématique ayant par ailleurs déjà été étayée par de nombreuses analyses [90].Nous aurons ainsi l'occasion de développer un autre sujet tout aussi intéressant mais à la littérature bien moins conséquente : la diffusion erratique - à court terme - du savoir mathématique sous forme écrite. Nous verrons en effet que le travail de 1862 de Bonnet en présentera un cas d'étude singulier fort intéressant, dont nous tirerons quelques propositions de pistes pour appréhender le cas général.

3.1. Orthogonalité et courbure des surfaces : le théorème fondateur de Dupin (1813).

Nous avons détaillé dans la partie 2 comment, grâce aux travaux de Gabriel Lamé, l'usage des systèmes triples orthogonaux se révèle extrêmement fécond dans la résolution des problèmes de distribution de chaleur dans les corps solides. Le développement de la théorie mathématique des coordonnées curvilignes orthogonales renforce alors l'importance de la notion de système triple orthogonal qui devient ainsi pour les mathématiciens la source de nombreux travaux. Néanmoins, si l'on en croit les mots de Darboux, c'est "*le célèbre théorème de Charles Dupin qui a été le point de départ des recherches sur les surfaces orthogonales*" ([**Darboux 1866**, 110]).

Figure 19. Charles Dupin

Elève, héritier et ami de Gaspard Monge, Charles Dupin naît dans un village de la Nièvre en 1784. Son père et ses deux frères étant tous trois versés dans la politique, Charles aura également une activité d'homme politique importante : député durant la monarchie de Juillet, membre de l'Assemblée constituante de la Seconde République et sénateur sous le Second Empire, Dupin est un conservateur très proche du tiers parti. Mais Dupin est également un géomètre et un ingénieur naval : élève de l'Ecole Polytechnique (promotion

90. En particulier, nos deux références [**Bostock 2009**] et [**Barberousse et al. 2011**] donnent de larges discussions récentes à ce sujet.

1801), il est fortement influencé par Monge et Carnot [91]. C'est durant les guerres napoléoniennes auxquelles il prend part que Charles Dupin effectue ses premières recherches de géométrie qui seront finalement publiées à partir de 1813 dans ses "*Développements de Géométrie*". Membre de l'Académie des Sciences dès 1818, la principale activité d'enseignement de Dupin sera liée au statut de professeur du Conservatoire des Arts et Métiers de Paris qu'il obtiendra l'année suivante.

Dans ses "*Développements*", Dupin déduit de nombreux résultats de géométrie différentielle des surfaces grâce à une nouvelle théorie, "*à laquelle M. Dupin attache le plus [grand] intérêt, et qu'il appelle la théorie des tangentes conjuguées*" [92] ([**Dupin 1813**, xvii]). Cette théorie permet en effet à son auteur d'éclairer d'un regard nouveau, en rattachant de nombreuses études à une analyse sur les courbes coniques, les propriétés locales des surfaces. C'est dans le second des neuf mémoires que compte l'ouvrage qu'apparaît la présentation de cette théorie des tangentes conjuguées ([**Dupin 1813**, 90-136]).

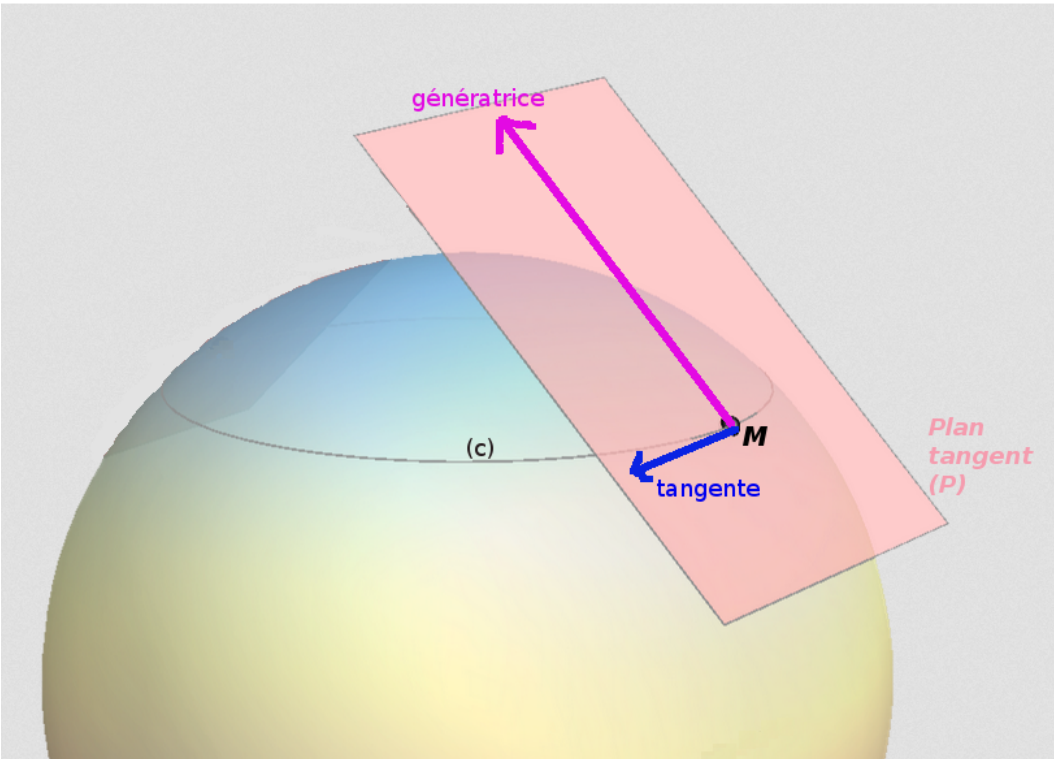


FIGURE 20. Configuration géométrique de la définition des tangentes conjuguées de Charles Dupin

Sur une surface donnée (S), Dupin considère une courbe (c) le long de laquelle il étudie le plan tangent (P) à la surface. Puisque ce plan tangent "*se meu[t] sans cesser de toucher [la surface], il engendrera par ses intersections successives une surface développable*"

91. A propos des cours de Gaspard Monge, on pourra voir ses leçons de mathématiques dispensées à l'Ecole Normale de l'an III dans [**Dhombres 1992**].
92. Il s'agit d'un extrait du Rapport de Monge, Carnot et Poisson présenté au sujet du travail de Dupin, qui sera reproduit en préambule de l'ouvrage [**Dupin 1813**].

([**Dupin 1813**, 91]). Cette développable est ainsi circonscrite à la surface (S) le long de la courbe (c). En un point M de cette courbe, la "*génératrice*" (ou "*arête*") de la développable est donnée par l'intersection du plan tangent (P) et d'un plan tangent infiniment proche ("*immédiatement consécutif*" selon Dupin). Cette génératrice est une droite tangente à la surface passant par M : c'est la première tangente considérée par le géomètre. La seconde est simplement donnée par la tangente à la courbe (c) au point M (voir figure 20). Ces deux droites constituent ce que Dupin appelle deux "*tangentes conjuguées*".

L'aspect de conjugaison qui explique la terminologie choisie par le géomètre nivernais provient de la propriété suivante : si l'on considère une seconde courbe (c') sur la surface (S) qui au point M a pour tangente la génératrice de la première développable, alors sa conjuguée sera précisément la tangente à (c). On pourrait ainsi dire de manière anachronique que *la conjugaison des tangentes est une relation symétrique*. Dupin révèle alors les nombreuses propriétés qui relient les tangentes conjuguées à la courbure de la surface (S). En particulier, les tangentes conjuguées en un point sont orthogonales lorsqu'elles correspondent aux directions principales de courbure. Ainsi, la courbe (c) est une ligne de courbure si et seulement si toutes ses tangentes conjuguées lui sont orthogonales ([**Dupin 1813**, 107]).

Avec cette théorie, Charles Dupin étend les observations de son maître Gaspard Monge relatives aux courbes caractéristiques des équations aux dérivées partielles. Monge avait en effet noté la réciprocité existant sur les intégrales complètes de ces équations - formées en tant qu'enveloppes - entre les courbes caractéristiques et les trajectoires caractéristiques. Les tangentes des unes correspondaient ainsi aux génératrices des surfaces développables formées grâce aux autres ([**Monge 1809**, 376], voir plus loin notre étude en [Chap.7,2.2]). Monge avait utilisé cette propriété pour déterminer les relations nécessaires à l'établissement des célèbres *équations caractéristiques*. Mais il n'avait pas entrevu l'extension de cette construction géométrique. C'est son élève Charles Dupin qui la donne donc quelques années plus tard grâce à ses *tangentes conjuguées*[93].

En utilisant les notations de Monge[94] et en rapportant le plan tangent au plan $(0, x, y)$, Dupin exprime "*l'équation des tangentes conjuguées*". Il note ψ' la tangente trigonométrique de l'angle formé dans (P) par la génératrice et ϕ' celle de l'angle de la tangente à (c). Grâce à ces notations, il parvient à l'équation de condition suivante sur les positions relatives des tangentes conjuguées :

$$r + s(\phi' + \psi') + t\phi'\psi' = 0 \qquad \text{[Dupin 1813, 93]}$$

S'il existe une infinité de couples de tangentes conjuguées - selon la courbe de contact (c) que l'on choisit sur la surface - Dupin va en exhiber un formidable lien avec les courbes planes du second degré qui va considérablement en simplifier l'étude. Il montre en effet que toutes les tangentes conjuguées en un point M correspondent exactement aux systèmes de diamètres conjuguées d'une conique tracée dans le plan tangent (P) ([**Dupin 1813**, 144-153]). Cette conique sera appelée *l'indicatrice de Dupin*. L'étude de la courbure revient alors à celle de l'indicatrice non seulement puisque ses axes correspondent aux directions des lignes de courbure, mais en outre car les longueurs de ses demi-axes sont proportionnelles

93. Pour plus de détails sur Monge et sur la théorie des caractéristiques, voir notre [Chap.7,2.2 & 2.7]. Voir également [**Taton 1951**, Chap.7].

94. Les notations de Monge consistent à considérer l'expression de la surface résolue en z, c'est-à-dire de la forme $z + f(x, y) = 0$, et à en écrire par rapport à x et y, de manière synthétique, les deux dérivées premières p, q et les trois dérivées secondes r, s, t.

aux rayons de courbure. Ainsi par exemple l'analyse des points *ombilics* revient-elle à la détermination des indicatrices circulaires.

C'est dans le quatrième mémoire de son ouvrage que Charles Dupin se penche sur l'étude des systèmes triples orthogonaux. Le géomètre nomme "*surfaces trajectoires orthogonales*" ces systèmes triples, et "*orthotomides*" les surfaces d'une même famille appartenant à un tel système. Aussi pour employer son vocable on dira que les ellipsoïdes sont des orthotomides dans les surfaces trajectoires orthogonales du second degré homofocales. S'il s'intéresse aux trajectoires orthogonales, c'est avant tout pour en souligner l'importance dans l'étude de la courbure des surfaces[95]. Le théorème fondamental de cette partie, qui portera le nom de son auteur, est rapidement énoncé :

> [S]i les surfaces $(S_1), (S_2), (S_3)$ forment ensemble un système de trajectoires orthogonales, chaque surface (S_1) sera coupée par toutes les surfaces (S_2) suivant les différentes lignes d'une de ses courbures, et elle sera coupée par toutes les surfaces (S_3) suivant les différentes lignes de la seconde courbure. De même, chaque surface (S_2) sera coupée par les (S_1) et les (S_3) ; chaque surface (S_3) par les (S_1) et les (S_2), suivant ses lignes de première et de seconde courbure ; enfin ce théorème aura lieu, quelles que soient les relations des divers systèmes entr'eux, quelles que soient les lois qui lient entr'elles les surfaces d'un même système, quelle que soit chaque surface des trois systèmes d'orthotomides.
>
> [**Dupin 1813**, 239]

Le théorème de Dupin caractérise ainsi les intersections des surfaces trajectoires orthogonales comme étant exactement les lignes de courbure de l'ensemble de ces surfaces. Charles Dupin va donner deux preuves différentes de ce résultat : la première est entièrement "*géométrique*", tandis que la seconde est "*une démonstration analytique des plus élégantes où Dupin s'appuie sur sa théorie des tangentes conjuguées*" ([**Darboux 1898**, 9]). La démonstration géométrique ([**Dupin 1813**, 240-243]) repose essentiellement sur l'identification des plans des courbures principales et des plans tangents des surfaces trajectoires orthogonales en substituant aux surfaces leurs osculatrices pour caractériser l'ordre des contacts des normales aux différentes courbes d'intersection. C'est néanmoins sur la seconde démonstration que nous allons nous concentrer puisque, nous le verrons en 3.3, c'est celle-ci qui inspirera à Darboux en 1866 une extension du théorème de Dupin.

95. Le premier paragraphe du Mémoire de Géométrie Pure (n.4) est intitulé "*Propriétés générales des surfaces trajectoires orthogonales, relatives à la courbure des surfaces*" ([**Dupin 1813**, 235]).

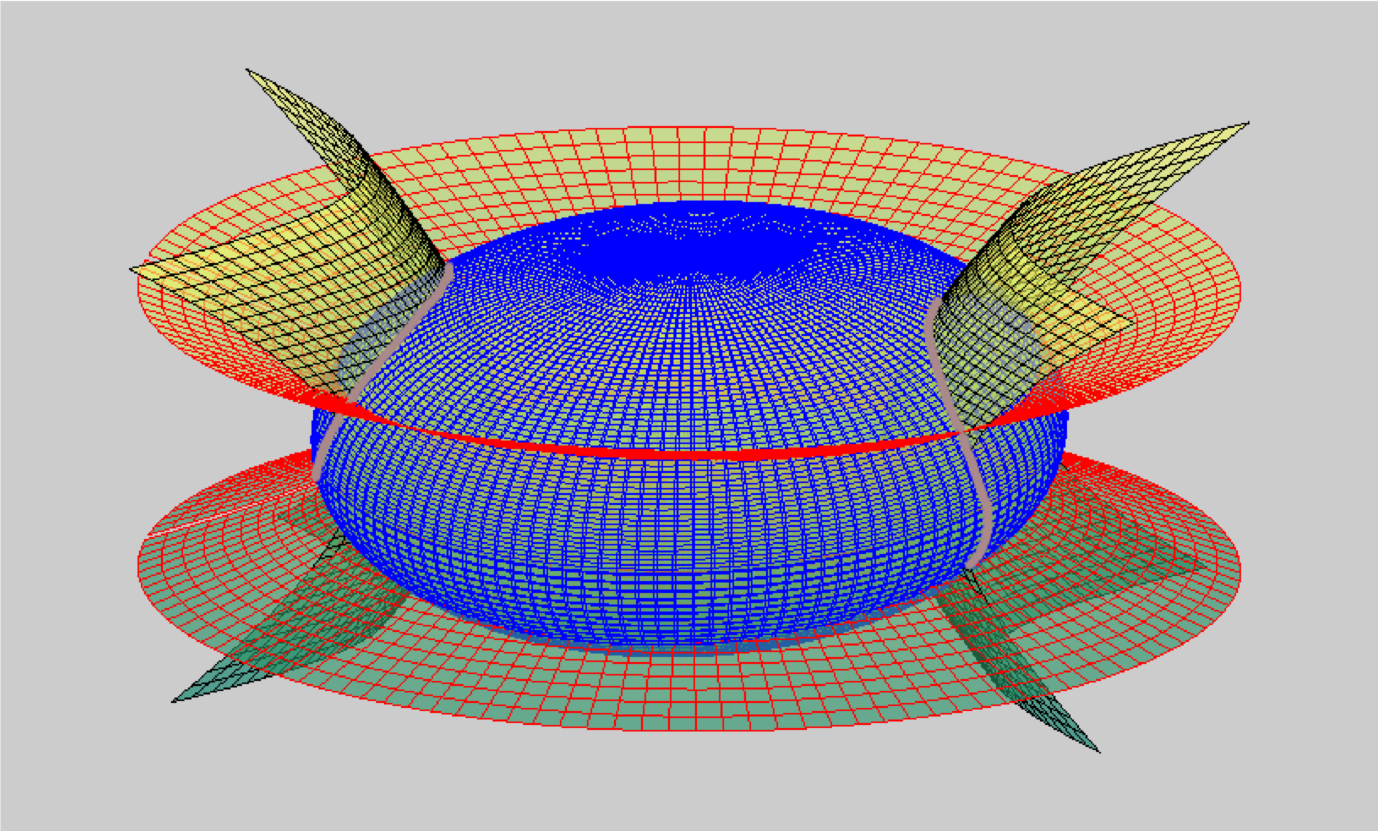


FIGURE 21. Trois surfaces appartenant à un système de "trajectoires orthogonales" [96]se coupent selon leurs lignes de courbure d'après le théorème de Charles Dupin (1813)

Dupin considère des surfaces trajectoires orthogonales ("*trois systèmes de surfaces réciproquement orthogonales*") dont les familles ("*orthotomides*") sont de la forme :

$$\begin{cases} F'(x,y,z,\alpha) &= 0 \qquad (S_1) \\ F''(x,y,z,\pi(\alpha)) &= 0 \qquad (S_2) \\ F'''(x,y,z,\psi(\alpha)) &= 0 \qquad (S_3) \end{cases}$$

Il fixe alors la valeur du paramètre α, ce qui équivaut à considérer trois surfaces orthogonales du système qu'il note toujours $(S_1),(S_2),(S_3)$. On peut remarquer ici que la notation d'une surface coïncide chez Dupin avec celle de la famille d'orthotomides à laquelle celle-ci appartient : cette remarque aura son importance dans la suite. En utilisant des notations de Monge où l'accent indique l'index de la famille de surfaces, il poursuit en traduisant l'orthogonalité deux à deux des surfaces grâce à l'équation $1 + p'p'' + q'q'' = 0$ et aux deux autres équations obtenues par permutation circulaire sur les accents.

Cependant, ces équations du premier ordre ne suffisent pas à traduire le fait que les surfaces $(S_1),(S_2),(S_3)$ font partie d'un système triple orthogonal, ou comme le remarque

96. Le lecteur aura remarqué qu'il s'agit ici d'un exemple emprunté aux quadriques homofocales de Lamé.

Dupin : "*le problème ainsi mis en équation est plus que déterminé*" ([**Dupin 1813**, 324]). En effet, ces équations traduisent l'orthogonalité des "*trois séries de lignes trajectoires*" mais ne permettent pas de conclure que ces lignes soient "*placées sur des surfaces trajectoires orthogonales, ou orthotomides*". Dupin va caractériser cette propriété par trois nouvelles équations différentielles qui seront du second ordre. Il considère le déplacement d'un point $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ le long de la ligne d'intersection des deux surfaces (S_1) et (S_2), et traduit en équation le fait que ce déplacement se fasse selon la normale à la surface (S_3). Cette équation ([**Dupin 1813**, 327]) fait intervenir les dérivées partielles premières et secondes des trois surfaces. Dupin remarque ensuite que deux autres équations similaires sont obtenues par permutation circulaire sur les accents lorsqu'on considère des déplacements sur $(S_2) \cap (S_3)$ et sur $(S_3) \cap (S_1)$.

Ce nouveau système de trois équations homogènes aux dérivées partielles d'ordre 2 est susceptible d'une grande simplification, comme le fait voir le géomètre : il résulte des différentes sommes de deux termes choisis parmi trois termes fixes. Ainsi les trois différents termes sont identiquement nuls, ce qui fournit à Dupin un nouveau système plus simple. C'est grâce à ce dernier système qu'il va relier sa démonstration à la théorie des tangentes conjuguées. Il réécrit les normales aux surfaces au moyen des formules :

$$\frac{p'}{q'} = \chi \ , \quad \frac{p''}{q''} = \phi \ , \quad \frac{p'''}{q'''} = \psi$$

Avec ces formules, le système d'équations du second ordre devient alors :

$$\left\{ \begin{aligned} r' + s'(\phi+\psi) + t'\phi\psi &= 0 \\ r'' + s''(\phi+\chi) + t''\phi\chi &= 0 \\ r''' + s'''(\chi+\psi) + t'''\chi\psi &= 0 \end{aligned} \right. \qquad \text{[Dupin 1813, 329]}$$

Ainsi Dupin reconnaît-il "*l'expression des tangentes conjuguées*" : les intersections sur une surface des deux autres surfaces orthogonales forment en chaque point deux courbes ayant des tangentes conjuguées. Or ces tangentes sont orthogonales (ou pour Dupin "*les lignes trajectoires sont orthotomiques*") car elles sont portées par les intersections de surfaces orthogonales entre elles : c'est ce qui caractérise les directions principales de courbure. Aussi "*cette observation seule suffirait déjà pour nous convaincre que les intersections rectangulaires des surfaces trajectoires que nous considérons sont des lignes de courbure de ces surfaces*" ([**Dupin 1813**, 329]).

Dupin pourtant n'arrête pas là sa preuve : ayant donné une première démonstration purement géométrique, il entend ici "*s'élever directement*" au résultat uniquement à l'aide des méthodes analytiques. Il s'agit en effet pour le géomètre de montrer que la méthode de détermination des lignes de courbure par la géométrie que son théorème propose peut aussi, indépendamment des raisonnements géométriques, être entièrement basée sur des considérations analytiques. Il reprend alors le premier système d'équations du premier ordre pour en exhiber par combinaisons le lien entre les tangentes ψ, ϕ et les dérivées partielles premières p', q' de (S_1). Dupin montre que ce lien tient dans la formule suivante :

$$1 + \phi\psi + (p' + q'\psi)(p' + q'\phi) = 0$$

Il peut ainsi utiliser cette formule pour éliminer ψ dans la première des équations des tangentes conjuguées. Il aboutit alors à une équation dans laquelle n'interviennent plus que les dérivées partielles (premières et secondes) de la surface (S_1) :

$$(\frac{dy}{dx})^2[(1+q'^2)s' - p'q't'] + \frac{dy}{dx}[(1+q'^2)r' - (1+p'^2)t'] + p'q'r' - (1+p'^2)s' = 0$$

Cette équation est loin d'être inconnue pour Dupin : "*c'est l'équation des lignes de courbure que Monge a donnée, d'abord dans son Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais [*[**Monge 1781**]*], puis dans ses leçons à l'Ecole Polytechnique*" ([**Dupin 1813**, 330]). Les lignes tracées sur (S_1) par les deux familles de trajectoires orthogonales, solutions de cette équation, sont ainsi les lignes de courbure de la surface (S_1). Ceci clôt la seconde démonstration, purement analytique, de Dupin pour son théorème éponyme.

Le théorème de Dupin met ainsi en évidence les intrications géométriques qui existent entre les systèmes orthogonaux et la théorie de la courbure des surfaces. Mais pour Dupin lui-même, il donne surtout un moyen nouveau de déterminer les lignes de courbure des surfaces qu'il va appliquer avec succès pour le cas des surfaces du second degré.

> Pour déterminer les lignes de courbure des surfaces du second degré, d'après les moyens généraux que nous venons de présenter, nous allons nous demander quel est le plus simple ordre de surfaces susceptibles de couper à angle droit la surface quelconque du second degré dans toute l'étendue de leur intersection avec elle. Nous formerons ensuite un système de surfaces orthotomides, composé comme nous l'avons dit, de trois groupes différents, mais tels que la surface du second degré que nous considérons se trouve faire partie de l'un d'eux.
>
> [**Dupin 1813**, 266]

Cette méthode va s'avérer efficace pour les surfaces du second degré, où Dupin va parvenir à décrire les lignes de courbure en considérant le système des quadriques homofocales plus tard réutilisé par Lamé ([**Dupin 1813**, 268-280]). En imposant de plus aux deux familles de trajectoires orthogonales d'être des surfaces développables, il retrouvera les surfaces développables normales employées par Monge pour décrire en premier lieu les lignes de courbure[97] ([**Dupin 1813**, 331-334]). Dans le quatrième Mémoire de l'ouvrage de Dupin, l'utilisation de son théorème reste cantonnée à la recherche des lignes de courbure d'une "*surface individuelle*". Il convient alors pour le géomètre de "*porter toute son attention sur le choix des systèmes de trajectoires orthogonales dans lequel on devra classer la surface individuelle dont on se propose d'obtenir les lignes de courbure*" ([**Dupin 1813**, 288]). Cela suppose ainsi l'établissement - possible de différentes manières - d'un système triple orthogonal à partir d'une unique surface, ce dont Dupin a effectivement détaillé la faisabilité dans le cas particulier des développables normales.

Mais dans le cinquième et dernier Mémoire, Dupin - fort de sa démonstration analytique du théorème qui porte son nom - énonce une proposition plus générale valable à partir d'une famille de surfaces, et non plus d'une surface individuelle :

> Si nous supposons maintenant que les surfaces d'un des groupes soient données ; les (S_1) par exemple ; les valeurs de p', q', r', s', t' le seront pareillement. On substituera ces valeurs dans les équations de condition [...] et ce sera alors l'affaire du calcul intégral aux différences partielles

97. Voir [Chap.2,6], [**Ghys 2012**] ou encore [**Taton 1951**] pour la définition des lignes de courbure par la considération d'existence d'une enveloppe pour les familles de normales à la surface.

> de remonter aux fonctions primitives des (S_2) et des (S_3) : on pourra le faire d'une infinité de manières, ce qui présentera une infinité de systèmes trajectoires orthogonales différents. Mais je ne m'étendrai pas sur ce sujet [...]
>
> [**Dupin 1813**, 330]

Avec cet énoncé, Charles Dupin exprime ainsi le fait que toute famille de surfaces puisse être complétée par deux familles orthotomides pour former un système de trajectoires orthogonales, soit en d'autres termes un système triple orthogonal. S'il a montré la construction d'un système triple à partir d'une unique surface, en revanche le géomètre ne revient pas dans son ouvrage sur la construction relative à une famille de surfaces. Avec sa méthode géométrique, cette propriété stipulant la complétion d'une famille de surfaces en un système triple orthogonal n'apparaissait pas dans le raisonnement et les énoncés de Dupin. C'est la confiance qu'il place dans la résolution analytique du problème qui fait émerger cette proposition et incite dans un second temps le mathématicien à en affirmer, presque à en postuler, le bien-fondé.

Cette proposition - la possibilité systématique de complétion d'une famille de surfaces en un système triple orthogonal - n'est certes pas centrale dans l'ouvrage de Dupin. Pourtant, elle sera ultérieurement reprise, souvent implicitement, dans les travaux de plusieurs mathématiciens jusqu'au milieu des années 1840. C'est ce que nous nous proposons d'étudier dans la partie 3.2 ci-dessous.

3.2. La formation d'un système triple orthogonal : une évidence ou une exception (1830-1850) ?

Dans les années 1830, le nombre de travaux relatifs à la théorie des surfaces orthogonales augmente considérablement après l'emploi fécond de cette théorie dans les premiers travaux de Lamé sur les surfaces isothermes. Bertrand en témoignera plus tard, en affirmant que "*la théorie des surfaces orthogonales a acquis depuis les belles recherches de M. Lamé une importance réellement inattendue*" ([**Bertrand 1867**, 23]). La considération des systèmes triples orthogonaux (souvent appelées "*surfaces orthogonales conjuguées*" par Lamé et Bertrand notamment) devient ainsi un sujet de recherche central, et à la suite de Dupin les résultats de Lamé viennent encore renforcer dans les esprits des géomètres la certitude qu'un système triple orthogonal peut être construit non seulement à partir d'une unique surface, mais encore à partir d'une famille de surfaces [98].

C'est en effet le cas de toutes les familles isothermes $V(x, y, z, \lambda) = 0$ considérées par Lamé ([**Lamé 1833**], [**Lamé 1837**]) : ces familles étant prises du second degré, Lamé exhibe systématiquement deux autres familles homofocales du second degré qui sont également isothermes mais qui en outre complètent la première en formant un système triple orthogonal. Aussi Lamé lui-même, poussé en ce sens à la fois par l'idée de Dupin et par

98. Nous sous-entendrons ici, comme c'est également le cas pour les acteurs que nous étudions, que les *familles de surfaces* sont à un seul paramètre.

l'ensemble des cas particuliers qu'il étudie[99], va-t-il "*croire que toute famille à un paramètre puisse être complétée par deux autres familles telles que les trois constituent un système triple orthogonal*" ([**Guitart 2009**, 123]). Si cette croyance reste implicite dans les mémoires de Lamé jusqu'en 1843, elle est néanmoins fortement présente. Aussi dans le mémoire [**Lamé 1843**] par exemple, en partant d'une famille de surfaces isothermes l'enjeu pour le polytechnicien est-il d'étudier la construction d'un système "*triplement isotherme*" c'est-à-dire l'établissement d'un système triple orthogonal dont les deux nouvelles familles soient également isothermes. Ce qui revêt de l'intérêt pour Lamé est bel et bien le fait que les deux nouvelles familles soient *isothermes* : il convient ainsi implicitement que la construction du système *orthogonal* est toujours possible.

Gabriel Lamé n'est pas le seul à prendre ce fait pour acquis. Dans le mémoire contenant les deux conditions (nécessaires) d'isothermie des systèmes triples, Bertrand fait montre de ce même point de vue. Il énonce cela de manière tout à fait explicite :

> Un système de surfaces qui s'enveloppent les unes les autres étant donné, elles ont toujours deux séries de surfaces trajectoires orthogonales qui les coupent suivant leurs lignes de courbure ; dans les cas examinés jusqu'ici, en prenant pour surfaces primitives des surfaces isothermes, il s'est trouvé que les surfaces orthogonales étaient aussi isothermes ; il est important de savoir si ce fait peut être érigé en théorème général.
>
> [**Bertrand 1844a**, 123]

A l'image de ce que nous avons souligné chez Lamé, pour Bertrand la construction d'un système triple orthogonal à partir d'une famille de surfaces [100] est considérée comme acquise. Ce n'est que la possibilité d'isothermie pour les familles de surfaces qui interroge Bertrand.

Enfin, nous pouvons relever ces mêmes considérations chez un troisième mathématicien dont le point de vue a pu contribuer à influencer en ce sens Lamé et Bertrand : le géomètre Michel Chasles. En 1837, Chasles publie dans le "*Journal de l'Ecole Polytechnique*" un mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes ([**Chasles 1837b**]), où il étudie en particulier l'attraction des ellipsoïdes "*infiniment minces*". Pour cela, il considère une famille d'ellipsoïdes "*concentriques et homothétiques*" et s'attache à évaluer "*l'attraction qu'une couche infiniment mince, comprise entre deux surfaces ellipsoïdales concentriques et homothétiques, exerce sur un point pris au dehors*" ([**Chasles 1837b**, 271]). Le premier résultat important obtenu par Chasles est le fait que cette attraction soit en tout point dirigée selon la normale à l'ellipsoïde qui est homofocal à celui décrit par la surface extérieure de la couche solide et qui passe par le point considéré. L'étude est donc ramenée à la recherche de ces ellipsoïdes homofocaux que Chasles appelle les "*surfaces de niveau*" relatives à l'attraction.

99. Nous avons souligné combien la compréhension des énoncés généraux était chez Lamé fortement reliée à l'embrassement des cas particuliers. Dans les "*conflits entre généralisation, rigueur et intuition*" - pour reprendre l'expression de Gert Schubring - la dernière est ainsi la force motrice de la première. Aussi le traitement des surfaces du second degré laisse-t-il entrevoir à Lamé la possibilité systématique d'érection de systèmes orthogonaux.

100. Ce que Bertrand désigne comme étant une "famille de surfaces" est "*un système de surfaces qui s'enveloppent les unes les autres*".

Chasles va montrer combien le problème qu'il traite est proche de celui analysé par Lamé de la répartition de chaleur : les deux études sont ramenées à des familles du second degré de surfaces homofocales, mais en outre les équations dont dépendent l'attraction et la température sont analogues ([**Chasles 1837b**, 272-276]). Exploitant toujours plus ces analogies, il parvient à prouver que dans le cas d'un solide décrit par deux ellipsoïdes homofocaux, l'attraction sur un élément infinitésimal de surface dw exercée par une couche ellipsoïdale infiniment mince est proportionnelle à la quantité de chaleur par unité de temps qui traverse cet élément dans le cas d'un équilibre isotherme ([**Chasles 1837b**, 302]). Ainsi Chasles prouve-t-il que la similarité entre la théorie de la chaleur de Lamé et celle de l'attraction des ellipsoïdes est telle, que l'on obtient dans certains cas la proportionnalité des résultats mêmes des calculs.

La dernière partie du mémoire de Chasles est dédiée à l'extension des résultats obtenus à partir d'une couche ellipsoïdale "*à l'attraction d'une couche de forme quelconque*" ([**Chasles 1837b**, 304]). C'est dans ce cadre qu'il est amené à considérer une famille quelconque de surfaces et que, suivant l'exemple des ellipsoïdes homofocaux, ses résultats dépendent de l'établissement d'un système triple orthogonal venant décrire sur les surfaces de niveau les lignes de courbure (d'après le théorème de Dupin).

Pour généraliser certaines de ses propositions [101], Chasles étudie l'attraction des couches déterminées par les volumes entre des surfaces (A) d'une même famille - des surfaces de niveau - de forme quelconque. Il décrit l'expression analytique de ces surfaces comme "*ne différant, dans leur expression analytique [$V(x, y, z)$], que par un paramètre ρ*" : la famille (A) est donc déterminée par

$$V(x, y, z) = \rho$$

Il va alors construire deux nouvelles familles de surfaces (B) et (C) à partir des lignes de courbure des surfaces de (A). En considérant une surface A de cette famille, il explique mener :

> par tous les points [d'une] ligne [de courbure] les lignes trajectoires orthogonales à toutes les surfaces de niveau [(A)] ; ces lignes formeront une surface B qui coupera à angle droit chacune des surfaces de niveau. Que par les points de la seconde ligne de courbure on mène pareillement les lignes trajectoires orthogonales aux surfaces de niveau, elles formeront une surface C qui coupera aussi à angle droit toutes ces surfaces. [...] on aura deux séries de surfaces (B) et (C), coupant à angle droit toutes les surfaces de niveau [(A)]...
>
> Je dis que chacune des surfaces B coupera à angle droit chacune des surfaces C, dans toute l'étendue de leur courbe d'intersection [...] d'où l'on conclut enfin que les surfaces de niveau $A, A', A'', ...$ et les deux séries de surfaces $B, B', B'', ...$ et $C, C', C'', ...$ forment trois systèmes de surfaces trajectoires orthogonales.
>
> [**Chasles 1837b**, 313-315]

Ce résultat n'est pas une finalité pour Chasles : il l'utilise pour employer les formules de Lamé sur la courbure des systèmes triples orthogonaux et ainsi démontrer que les résultats

101. La proposition précise dans la preuve de laquelle Chasles va construire de manière erronée un système triple orthogonal est la suivante : "*les attractions exercées par une couche de forme quelconque sur les élémens superficiels qu'un canal dont les arêtes curvilignes sont les trajectoires orthogonales aux surfaces de niveau intercepte sur ces surfaces sont toutes égales entre elles*" ([**Chasles 1837b**, 311]).

des précédentes sections peuvent être généralisés. Mais le théorème que Chasles utilise, et dont il donne une idée de preuve géométrique, stipule donc la possibilité de construire un système triple orthogonal à partir de la famille de surfaces quelconque (A).

C'est en 1837 que paraît le mémoire de Chasles sur l'attraction des couches ellipsoïdales qui comporte ce "théorème" sur la complétion des systèmes triples. Il paraît vraisemblable que cela ait influencé les publications de 1843 de Lamé et de 1844 de Bertrand, puisqu'il faut attendre 1846 pour qu'apparaissent - dans les publications mathématiques - des réserves quant à la validité du procédé de Chasles. Avant cette date, Chasles, Lamé et Bertrand sont ainsi les "*quelques géomètres*" dont parlera plus tard Paul Appell, qui "*trompés par l'analogie avec le problème des réseaux de courbes orthogonales dans un plan, avaient cru qu'on pouvait associer à une famille de surfaces arbitrairement choisie, deux autres familles orthogonales entre elles et à la première*" ([**Appell 1893**, 1022]).

Ce sont Jean-Claude Bouquet et Joseph-Alfred Serret qui vont profondément remettre en cause ce théorème et déterminer des restrictions sur la construction des systèmes orthogonaux à partir d'une famille de surfaces. Passant d'une extrême à l'autre, cette construction qui dans un premier temps semblait aller de soi et paraissait même avoir été démontrée par Chasles, va rapidement devenir considérée comme n'étant plus valable que dans certains cas exceptionnels.

FIGURE 22. Jean-Claude Bouquet

Natif de Morteau en Franche-Comté en 1819, Jean-Claude Bouquet effectue ses études à Lyon avant d'intégrer à Paris l'Ecole Normale Supérieure en 1839, une année après son grand ami Charles Briot. Agrégé puis docteur seulement une année après sa sortie de l'Ecole, Bouquet part avec Briot enseigner à la Faculté de Lyon en 1845. Il reviendra dans la capitale sept ans plus tard pour enseigner dans les classes de mathématiques spéciales d'abord au Lycée Bonaparte, puis à Louis-le-Grand. Après 1867, c'est Darboux qui l'y remplace puisque Bouquet est nommé maître de conférences à l'Ecole Normale, où il restera jusqu'à sa mort en 1885. Il remplacera régulièrement après 1871 Serret à la Sorbonne pour les cours de Calcul Différentiel et Intégral. Les travaux les plus importants de Bouquet sont ses traités sur les fonctions elliptiques et abéliennes qu'il publie avec Charles Briot.

C'est dans une note, courte mais célèbre [102], publiée en Décembre 1846 que Bouquet critique le premier le fait de considérer comme systématique la formation d'un système triple à partir d'une famille de surfaces. Il met ainsi directement en cause le théorème de Chasles qu'il juge incorrect :

> Peut-être M. Chasles n'a-t-il point accordé une attention suffisante à ce théorème qui, dans son travail, n'était qu'accessoire, car la conclusion à laquelle il a été conduit par un premier aperçu ne me paraît point rigoureuse.
>
> [**Bouquet 1846a**, 446]

Bouquet va alors considérer certains cas particuliers de familles de surfaces - lui permettant de simplifier ses calculs - et exhiber des contre-exemples mettant en défaut la constructibilité d'un système triple orthogonal.

Il se concentre sur le cas d'une famille de surfaces dont l'expression résolue en le paramètre α est à variables séparées :

$$u(x, y, z) = \phi(x) + \phi_1(y) + \phi_2(z) = \alpha$$

En supposant le théorème de Chasles valide, Bouquet raisonne de la manière suivante : les tangentes aux deux systèmes de lignes de courbure des surfaces $u = \alpha$ doivent être les normales de deux séries de surfaces, celles qui doivent en former des trajectoires orthogonales. En notant (X, Y, Z) la tangente (unitaire) aux lignes de courbure, cette condition correspond à l'intégrabilité de l'équation différentielle :

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

Mais cette condition d'intégrabilité est donnée par :

$$X(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}) + Y(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}) + Z(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}) = 0$$ [103]

Si Bouquet ne le signale pas, il reprend vraisemblablement l'équivalence entre l'existence d'une série de surfaces normales aux tangentes et la condition d'intégrabilité d'un mémoire sur les surfaces de 1844 de Bertrand ([**Bertrand 1844b**]). La condition d'intégrabilité en elle-même était, elle, connue depuis presque un siècle.

En utilisant la forme particulière à variables séparées de la famille de surfaces, Bouquet démontre que cette intégrabilité revient à ce que la fonction u satisfasse une équation aux dérivées partielles du troisième ordre ([**Bouquet 1846a**, 448]). Il va alors illustrer par quelques exemples de surfaces que cette équation aux dérivées partielles n'est pas vérifiée par une famille à variables séparées quelconque. Puisque c'est au théorème de Chasles que son travail est adressé, le premier exemple que Bouquet sélectionne est précisément une

102. Voir la citation ci-après d'Emile Picard au sujet de la note de Bouquet établissant que Chasles était dans son tort au sujet de son théorème sur les systèmes triples orthogonaux.

103. La condition d'intégrabilité de l'équation différentielle $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ était connue depuis le travail d'Alexis Clairaut de la première moitié du 18ème siècle. Elle traduit l'existence d'une solution sous la forme de la famille de surfaces $S(x, y, z) = \lambda$. L'écriture de la différentielle de cette famille solution $\frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial y}dy + \frac{\partial S}{\partial z}dz = 0$ doit s'identifier, à un facteur multiplicatif près, à l'équation différentielle de départ. C'est la traduction de cette proportionnalité que représente alors la condition d'intégrabilité. Pour plus de détails, voir [**Dieudonné 1978**, 43-45].

famille de surfaces fréquemment utilisée dans le mémoire de Chasles : la famille d'ellipsoïdes semblables

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2\alpha$$

L'expression est en effet bien à variables séparées, et Bouquet montre que l'équation différentielle n'est satisfaite que lorsque deux (au moins) des trois paramètres (a, b, c) coïncident, ce qui correspond aux ellipsoïdes de révolution. Il peut ainsi en conclure que la complétion d'une famille d'ellipsoïdes semblables en un système triple orthogonal "*est impossible tant que les ellipsoïdes ne sont pas de révolution*" [**Bouquet 1846a**, 449]. Dans la fin de sa note, Bouquet étudie de même la vérification ou non de l'équation différentielle dont dépend l'existence d'un système triple pour certains cas simples comme les monômes $\phi(x) = (x - a)^\alpha$, les logarithmes $\phi(x) = \ln(x)$ ou encore les fonctions trigonométriques.

L'objectif que s'était fixé Bouquet est bien atteint : en exhibant certains contre-exemples [104], le mathématicien français montre qu'une famille de surfaces dépendant d'un paramètre ne peut pas toujours être considérée comme l'une des trois familles d'un système triple orthogonal. Si ses exemples ne portent que sur les cas restreints où l'expression résolue en le paramètre α est séparée en les variables d'espace (x, y, z) [105], ils suffisent néanmoins à établir que le théorème de Chasles n'a pas lieu d'être. C'est ce que rappellera Picard soixante-dix ans plus tard :

> Un géomètre illustre [Chasles] [106] avait cru que, étant donnée une série de surfaces dépendant d'un paramètre arbitraire, il existe deux nouvelles séries de surfaces qui, avec la première, forment un système triplement orthogonal. Dans une Note mémorable, Bouquet [a] montré, sur un exemple particulier, qu'il n'en était rien.
>
> [**Picard 1917**, XI]

Quelques mois plus tard, Joseph-Alfred Serret vient compléter et prolonger la note de Bouquet dans son mémoire [**Serret 1847**]. Nous avons déjà analysé dans la partie 1.1 la majeure partie du contenu de ce travail : Serret s'y intéresse comme Bouquet aux cas des familles de surfaces dont l'expression est à variables séparées. Il étudie alors certains cas particuliers où il parvient à intégrer l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre et ainsi déterminer complètement les expressions des familles de surfaces qui composent les systèmes triples, ce dont Bouquet ne s'était pas occupé.

Serret accorde en effet une importance toute particulière à la détermination de nouveaux systèmes triples orthogonaux. Ceci s'explique par le fait que, complètement à l'opposé de l'approche de Chasles, il est persuadé qu'il n'existe qu'un petit nombre de tels systèmes. C'est ainsi parce qu'il n'y en a selon lui qu'une poignée que dévoiler certains de

104. "*M. Bouquet, dans une note élégante publiée dans le journal de M. Liouville, a le premier [prouvé] qu'un système de surfaces étant donné, il n'en existe pas en général deux autres qui puissent former avec lui un système triplement orthogonal, et son raisonnement simple et sans réplique consistait à citer des exemples.*", [**Bertrand 1867**, 23].

105. C'est bien parce que l'expression de la famille résolue en α est supposée être à variables séparées que les ellipsoïdes homofocaux ne font pas partie des solutions de Bouquet.

106. [**Guitart 2009**, 123] attribue la remarque de Picard comme étant dirigée vers Lamé. Il nous semble en revanche, puisqu'elle fait référence à la note de Bouquet qui elle-même répond aux travaux de Chasles, que c'est bien Michel Chasles qui est visé ici par Picard.

ces systèmes revêt pour Serret un intérêt essentiel. C'est ce qu'il explique dans l'introduction de son mémoire où il présente une justification de cette position : c'est cela qui nous intéresse ici.

S'il adhère aux contre-exemples présentés par Bouquet, le jeune polytechnicien [107] ne s'en contente pas. Serret voit en effet dans "*les conditions analytiques auxquelles satisfont les paramètres [α, β, γ] des trois surfaces qui composent tout système triple orthogonal*" la raison mathématique profonde qui sous-tend la rareté des systèmes triples : ces conditions sont selon lui difficilement respectables ([**Serret 1847**, 241]). Il écrit les équations différentielles que doivent satisfaire les trois paramètres des surfaces sous une forme analogue [108] à :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dx}\dfrac{d\beta}{dx} + \dfrac{d\alpha}{dy}\dfrac{d\beta}{dy} + \dfrac{d\alpha}{dz}\dfrac{d\beta}{dz} & = 0 \\ \dfrac{d\alpha}{dx}\dfrac{d\gamma}{dx} + \dfrac{d\alpha}{dy}\dfrac{d\gamma}{dy} + \dfrac{d\alpha}{dz}\dfrac{d\gamma}{dz} & = 0 \\ \dfrac{d\beta}{dx}\dfrac{d\gamma}{dx} + \dfrac{d\beta}{dy}\dfrac{d\gamma}{dy} + \dfrac{d\beta}{dz}\dfrac{d\gamma}{dz} & = 0 \end{cases}$$

Pour Serret, la détermination des systèmes triples doit reposer ensuite sur des éliminations successives, à partir du système d'équations ($\mathcal{S}$) et d'autres équations qu'on peut en tirer par différentiations, pour aboutir à une résolution ne dépendant que d'un unique paramètre (par exemple α). C'est dans cette optique de résolution générale qu'il étudie la faisabilité du processus d'élimination en recherchant jusqu'à quel ordre il doit différentier le système d'équations pour pouvoir en éliminer toutes les fonctions qui dépendent de β et de γ. Aussi explique-t-il :

> [s]i l'on différentie les équations [($\mathcal{S}$)] par rapport à x, y, z autant que possible et de manière à n'avoir de dérivées que jusqu'à l'ordre p inclusivement, on aura, en comptant les équations [($\mathcal{S}$)], un nombre d'équations marqué par $\dfrac{p(p+1)(p+2)}{2}$ et le nombre des dérivées des quantités β et γ sera $\dfrac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3} - 2$. Pour que l'élimination de ces dérivées soit possible, il faut que le premier nombre surpasse le second, ce qui donne $p = 6$ ou $p > 6$.
>
> [**Serret 1847**, 241-242]

Serret envisage donc le problème de l'existence des systèmes triples orthogonaux avec une approche très *algébrique* basée sur la théorie des substitutions et une "*méthode d'énumération pure et simple*" [109]. Il souhaite ne conserver dans la résolution qu'un seul des trois

107. Serret deviendra docteur le 25 Octobre 1847, soit quelques semaines après la parution de la note [**Serret 1847**].

108. Pour simplifier la présentation de ces résultats et de ceux ultérieurs de Bonnet et de Darboux, nous harmonisons les notations en employant celles de Darboux ([**Darboux 1866**, 111]) : les paramètres des trois familles de surfaces seront ainsi notées α, β, γ. Serret les note dans son mémoire ρ, μ, ν ([**Serret 1847**]) alors que Bonnet les notera plutôt avec Lamé ρ, ρ_1, ρ_2 ([**Bonnet 1862**]).

109. Ces mots proviennent des critiques bien ultérieures de Darboux, qui mettra en avant le fait que cette méthode "*conduit [Serret] à des résultats complètement erronés*" ([**Darboux 1898**, 6]). Bertrand aussi condamnera - 20 ans après le travail de Serret - "*l'analyse un peu sommaire de ce problème difficile*" ([**Bertrand 1867**, 23]).

paramètres et étudie la faisabilité de la méthode systématique de substitution pour traiter les solutions du système ($\mathcal{S}$) et des équations obtenues à partir de ($\mathcal{S}$) en différentiant. Cette méthode l'amène à la conclusion qu'il lui faut différentier ($\mathcal{S}$) au moins 5 fois (pour obtenir des dérivées d'ordre 6). Or dans ce cas, Serret remarque que le nombre d'équations obtenues est 168 alors que les dérivées partielles des fonctions β et γ sont au nombre de 166. La fonction $\alpha(x, y, z)$ ne doit alors pas satisfaire une seule mais "*deux équations aux différentielles partielles du sixième ordre*". Le cas $p = 7$ - que Serret ne détaille pas dans son mémoire mais qu'il aura assurément analysé - donnerait $252 - 238 = 14$ équations aux dérivées partielles d'ordre 7, et ce nombre de conditions ira croissant avec la valeur de p.

La méthode de substitution et l'énumération des équations et des inconnues conduisent systématiquement Serret au constat que la fonction α doit simultanément satisfaire plusieurs (au moins 2) différentes équations. Puisque deux équations n'ont *en général* pas de solution commune, il émet en conséquence une conclusion qui restera célèbre :

> Cette dernière circonstance de deux [au minimum] conditions auxquelles le paramètre α est assujetti permet de penser que le nombre de surfaces susceptibles de faire partie d'un système triple [orthogonal] pourrait bien être assez limité, et la détermination d'une classe de pareils systèmes n'en présente que plus d'intérêt.
>
> [**Serret 1847**, 242]

Avec ce travail de Serret venant poursuivre les remarques de Bouquet, l'approche des mathématiciens vis-à-vis des systèmes triples orthogonaux change radicalement : la conception de Dupin, Chasles, Lamé et Bertrand est renversée, et l'appartenance d'une famille de surface à un système triple orthogonal paraît désormais être une circonstance exceptionnelle. Puisque *tout ce qui est rare est précieux*, ce sentiment va encourager les mathématiciens à découvrir de nouveaux systèmes triples : c'est ce que feront Serret lui-même et William Roberts (voir 1.1). Le mémoire de 1847 du jeune Serret fera date : on retrouvera fréquemment cité dans les travaux ultérieurs le passage que nous avons retranscrit ci-dessus où figure l'idée de l'existence en nombre "*assez limité*" des systèmes triples. Il est ainsi repris par [**Roberts 1861**, 549], et en revanche si Darboux se garde bien d'y faire référence dans ses premiers travaux c'est que la conception de son maître Serret, tout comme celle de Chasles, s'avèrera finalement infondée. Dans les années 1860, Bonnet et Darboux vont en effet montrer indépendamment que ni Serret ni Chasles n'ont appréhendé correctement l'appartenance des familles de surfaces aux systèmes triples orthogonaux : d'une certaine manière, la vérité se situe entre les deux ! Aussi si plus tard Darboux citera dans ses leçons la célèbre phrase de 1847 de Serret, ce ne sera que pour souligner "*combien était peu avancée la théorie des équations aux dérivées partielles*" ([**Darboux 1898**, 5]).

3.3. Formation et utilisation des équations différentielles régissant l'existence des "familles de Lamé" (1862-1873).

Entre 1862 et 1873, le problème de la détermination de l'appartenance d'une famille de surfaces dépendant d'un paramètre à un système triple orthogonal va être définitivement fixé et résolu. Dans les années 1860, ce sont Bonnet d'abord puis Darboux ensuite qui vont en établir la condition nécessaire et suffisante via une unique équation différentielle.

Son écriture explicite étant fastidieuse et d'abord jugée inutile, il faudra attendre 1872 pour que le mathématicien britannique Arthur Cayley puis Darboux à sa suite ne donnent finalement l'expression développée complète de cette équation.

L'analyse des travaux de Bonnet et de Darboux revêt un intérêt spécial puisqu'ils ne sont pas concomitants et que pourtant le second effectue ses recherches sans avoir connaissance des résultats du premier. Cela semble par ailleurs être le cas général des mathématiciens abordant, entre 1862 (date de la solution de Bonnet) et 1865, la théorie des systèmes triples orthogonaux : la solution de Bonnet ne leur est pas connue. On a ainsi affaire à un nouveau cas d'étude pour la problématique de la diffusion erratique du savoir mathématique, et nous tenterons d'apporter quelques éléments de réponse permettant de comprendre pourquoi le travail de Bonnet semble être resté durant quelque temps méconnu.

C'est le Lundi 10 Mars 1862 que Bonnet présente à l'Académie des Sciences - dont il n'est pas encore membre - un mémoire intitulé "*Sur les surfaces orthogonales*". L'examen du mémoire est renvoyé à la section de Géométrie de l'Académie, mais Bonnet insère dans les "*Comptes-rendus*" une courte note qui en décrit la teneur ([**Bonnet 1862**, 555-559]). Dans cette note, il annonce avoir "*réussi à faire entrer la question [de la détermination des systèmes triples orthogonaux] dans une voie nouvelle, qui [l]'a conduit à des résultats d'une généralité et d'une étendue inespérées*". Il n'affirme ainsi pas avoir complètement résolu la question.

La méthode de Bonnet consiste à rechercher les systèmes triples via les trois vecteurs normaux aux familles de surfaces en faisant intervenir les 3 *angles d'Euler*. Le vecteur N_1, normal aux surfaces de la première famille $\alpha =$ constante, est décrit par les cosinus (X_1, Y_1, Z_1) qu'il forme avec les trois axes fixes de coordonnées, et de même pour N_2 et N_3 [110]. Bonnet obtient donc 9 cosinus, mais les expriment à l'aide des 3 angles θ, ϕ, ψ dits d'Euler qui permettent de décrire par trois rotations le mouvement général d'un solide [111].

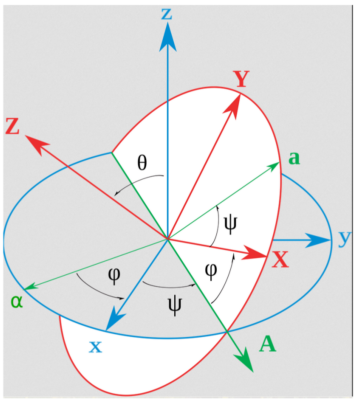


FIGURE 23. Définition des 3 angles d'Euler

En exprimant alors que les vecteurs N_1, N_2, N_3 sont normaux aux surfaces de paramètres α, β, γ, il parvient à un nouveau système d'équations différentielles :

110. Nous adaptons toujours ici les notations pour uniformiser notre présentation. Les notations de Bonnet diffèrent légèrement de celles que nous présentons ici.

111. Ces trois rotations sont appelées la précession, la nutation et la giration (ou rotation propre). Bonnet ne s'attarde pas sur leur origine ni sur leur définition.

$$(S_3)\begin{cases} \sin(\psi)\sin(\theta)\dfrac{d\phi}{d\alpha}+\cos(\psi)\dfrac{d\theta}{d\alpha} & =0\\ \cos(\psi)\sin(\theta)\dfrac{d\phi}{d\beta}-\sin(\psi)\dfrac{d\theta}{d\beta} & =0\\ \cos(\theta)\dfrac{d\phi}{d\gamma}+\dfrac{d\psi}{d\gamma} & =0\end{cases}$$

L'originalité de l'approche de Bonnet est alors d'utiliser une méthode de recherche mixte entre la recherche des trois paramètres α, β, γ et celle des trois angles d'Euler θ, ϕ, ψ : il adopte ainsi comme nouvelles variables du problème le triplet ϕ, α, β, ainsi constitué de deux paramètres curvilignes et d'un paramètre angulaire. Ce choix est justifié par la réduction du nombre d'équations définissant alors le problème. En effet, Bonnet prouve que "*les systèmes [...] peuvent être remplacés par une équation unique aux dérivées partielles du troisième ordre*" ([**Bonnet 1862**, 556]). Cette équation, Bonnet la fait porter sur la fonction $\psi(\phi, \alpha, \beta)$. Puisqu'elle se substitue au système (S_3) de trois équations du second ordre ci-dessus, le problème est bien ramené à la résolution d'une unique équation aux dérivées partielles troisièmes, unicité qui faisait défaut à la méthode d'énumération de Serret en 1847.

Etant parvenu à l'existence et à la formation de cette "*équation compliquée et très difficile à intégrer*" qu'il n'explicite pas, Bonnet ajoute qu'elle lui "*paraît constituer un très grand pas vers la solution générale du problème*" ([**Bonnet 1862**, 557]). Mais immédiatement après, il se concentre sur la recherche de systèmes triples orthogonaux particuliers rassemblant des cas où il parvient, grâce à de nouvelles équations de condition, à effectuer complètement l'intégration des équations du système (S_3) [112]. Aussi la suite de la note est-elle consacrée à la résolution complète de cette recherche particulière : forme des angles d'Euler [113], puis expression des paramètres différentiels H, H_1, H_2 par quadratures qui marque le point final de la recherche en donnant la formule du ds^2 des systèmes solutions.

Deux semaines plus tard, Bonnet insère un nouvel extrait de son mémoire dans les "*Comptes-rendus*" de l'Académie ([**Bonnet 1862**, 655-659]). Ainsi qu'il l'avait annoncé dans la première note, cette seconde communication a pour but "*d'indiquer une seconde application*" de la "*méthode nouvelle pour déterminer les systèmes triples orthogonaux*" ([**Bonnet 1862**, 655]). Le mathématicien héraultais y détaille la recherche des systèmes triples dont un sous-ensemble possède des lignes de courbures planes. La résolution y suit un cheminement analogue : elle repose sur la considération d'un système similaire à (S_3) permettant d'obtenir les angles d'Euler desquels sont ensuite déduits par quadrature les paramètres différentiels H_i du carré du différentiel d'arc.

Les contributions de Pierre-Ossian Bonnet, bien que significatives, s'arrêtent là. Quelques semaines plus tard [114], il est élu, devançant Edmond Bour et Charles Briot, membre de la

112. La recherche de Bonnet se concentre sur les systèmes triples dont une des trois familles est exclusivement formées par des surfaces dont la "*représentation sphérique*" est un réseau isotherme orthogonal. Voir [**Bonnet 1862**, 557] ou [**Darboux 1898**, 13]. Ce que Bonnet (et Darboux) nomment "*représentation sphérique*" est ce que nous appelons l'application de Gauss, qui représente localement une surface sur la sphère unité par ses normales (unitaires).

113. Par souci de précision, nous devons souligner que la recherche de l'angle de précession θ est en fait ramenée à celle de $dw = \frac{d\theta}{\sin(\theta)}$.

114. Bonnet est élu à l'Académie le 14 Avril 1862, en remplacement de Jean-Baptiste Biot.

section de Géométrie de l'Académie des Sciences. On ne trouve dans les "*Comptes-rendus*" aucune trace d'un éventuel rapport portant sur le mémoire de Bonnet. Mais surtout, ce mémoire n'a - à notre connaissance - jamais été publié ! On ne le trouve dans aucun recueil, journal ou publication indépendante d'ouvrages que ce soit. Si l'on en croit le portrait de la personnalité de Bonnet que dressera Paul Appell, ceci n'est guère surprenant étant donné "*combien peu Bonnet se préoccupait de ses travaux*" ([**Appell 1893**, 1016]). Les seuls éléments qui transparaissent ainsi de son travail sont donc uniquement les deux extraits portés en Mars 1862 dans les "*Comptes-rendus*" de l'Académie des Sciences ([**Bonnet 1862**]).

Plusieurs arguments nous permettent d'affirmer que ces deux extraits du travail de Bonnet passent alors durant quelques années étrangement inaperçus pour les mathématiciens, ou du moins que la portée de la découverte de Bonnet n'est pas réalisée. Tout d'abord, parmi les travaux effectués entre 1862 et 1865 portant sur la théorie des systèmes triples orthogonaux aucun ne fait mention de Bonnet ou de son résultat. C'est le cas de William Roberts [115], dont les travaux ne mentionnent ni Bonnet ni l'existence d'une unique équation aux dérivées partielles troisième déterminant entièrement le problème. C'est encore le cas de Victor Puiseux [116]. Puiseux, né à Argenteuil en 1820, est un ancien élève de l'Ecole Normale (promotion 1837) qui en deviendra maître de conférences en 1849 : il fait ainsi partie des maîtres de l'élève normalien Gaston Darboux (voir [Chap.1,fig.5]). Puiseux excelle par ailleurs en astronomie - cours qu'il enseigne à la Sorbonne à la mort de son illustre prédécesseur Cauchy - ainsi qu'en alpinisme [117]. En Octobre 1863, Puiseux publie un travail sur les surfaces orthogonales ([**Puiseux 1863**]) dans lequel il se lance, à l'instar de Liouville dans ses leçons au Collège de France, à la recherche - fastidieuse - de systèmes triples en développant en séries la valeur du paramètre $\alpha(x, y, z)$. Pour cela, il utilise le système classique des trois équations de condition $(\mathcal{S})$. S'il cite les travaux de Dupin, de Lamé ou encore de Bouquet, en revanche aucune référence n'est faite envers Bonnet et la détermination générale du problème par une unique équation aux dérivées partielles d'ordre 3 ne lui est pas connue.

L'exemple des travaux de thèse de Gaston Darboux doit également être souligné. Durant la première partie de ses études doctorales, Darboux se penche exactement sur les problèmes traités par Bonnet en 1862 : l'intégration des équations aux dérivées partielles dont dépend le problème des surfaces orthogonales, et la possibilité de réduction de ce problème à une unique équation. Il essaie alors d'intégrer les 6 équations en les paramètres différentiels H_i donnés par Lamé ([**Lamé 1859**, 73-78], équations $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ de la partie 2.3), mais ses efforts (vains) sont effectués de son propre aveu "*avant de connaître les recherches de M. Bonnet*" ([**Darboux 1866**, 117]). Cette remarque est d'autant plus significative que Darboux effectue alors son travail aux côtés de Serret et de Bouquet, deux mathématiciens extrêmement impliqués - nous l'avons signalé - dans le développement de la théorie des systèmes triples orthogonaux. Si Darboux ne prend ainsi connaissance des

115. Voir son mémoire [**Roberts 1863**] mais encore ses diverses communications à l'Académie des Sciences de Paris durant l'année 1864.

116. A propos de Puiseux, on consultera l'annexe 3.

117. Loin des troubles révolutionnaires qui sévissent dans la capitale, Puiseux se lancera en Septembre 1848 dans l'ascension du Mont Pelvoux, alors considéré par lui comme le point culminant du massif alpin dont la partie savoyarde n'était pas encore rattachée à la France. Parti avec le vieux guide Barnéoud qui était de l'unique ascension précédente avec le capitaine Durand en Août 1828, Puiseux parvient seul au sommet le 8 Septembre 1848, et donnera ainsi son nom à la pointe culminante du massif du Pelvoux : la pointe Puiseux (3946m). Ce-faisant, il découvrira néanmoins qu'il ne s'agissait pas du point culminant des Alpes, ce que le méticuleux capitaine Durand avait pourtant déjà noté avant lui. Voir l'annexe 3.

résultats de Bonnet qu'en 1865 et adapte ainsi la présentation de sa thèse, il paraît plus que vraisemblable qu'il en soit de même pour Serret et Bouquet.

Après avoir constaté que le travail de Bonnet n'a pas été remarqué avant plusieurs années, il convient d'en évoquer les raisons possibles. Pour commencer, l'absence de publication du mémoire "*sur les surfaces orthogonales*" comportant les résultats de Bonnet semble constituer une entrave certaine à la diffusion de ceux-ci. Il est en effet clairement évoqué, à la lecture des comptes-rendus des séances, que les deux notes [**Bonnet 1862**] ne constituent pas une communication finale mais qu'elles ne sont que des extraits d'un travail plus important dont l'examen doit être effectué par une section de l'Académie. L'attente vaine de la parution du mémoire ou même du simple rapport académique aura ainsi pu supplanter l'analyse attentive des quelques précieux développements donnés en guise d'aperçu dans le recueil académique hebdomadaire.

Ceci constitue une possible explication de forme, mais plusieurs raisons de fond doivent en outre être soulignées. La première raison, peut-être la plus pertinente, est que Bonnet ne semble pas réaliser lui-même la portée de son résultat (la dépendance du problème en une *unique* équation), ou que tout du moins il ne considère pas cela comme un résultat à part entière. En effet, ramener la théorie des systèmes triples à une seule équation différentielle ne fait pas partie des objectifs qu'il donne à son mémoire, et lorsqu'il y parvient dans le cours de ses développements il présente cela comme une "*remarque*", certes "*importante à faire*", mais non comme un théorème ou une véritable propriété. Son objectif profond est de parvenir à "*faire entrer la question dans une voie nouvelle*", et il ne l'atteint pas avec l'unicité de l'équation de condition mais plutôt avec l'introduction des trois angles d'Euler. C'est cela que Bonnet considère comme une voie nouvelle, et c'est pour cela que son mémoire (ou tout du moins les extraits qu'il en donne aux comptes-rendus) s'attache avant tout à tirer profit de l'introduction de ces nouvelles variables en soulignant leur intérêt via la découverte de systèmes orthogonaux nouveaux. Par ailleurs, cette réduction ne représente qu'un "*pas vers la solution générale du problème*" ([**Bonnet 1862**, 557]) : cette solution générale est l'intégration complète des équations de condition $(\mathcal{S})$. Cela n'est donc présenté que comme une étape, et non pas réellement comme un aboutissement.

Une seconde entrave peut être invoquée quant à la réalisation de la portée du résultat de Pierre-Ossian Bonnet. Le raisonnement qui le mène à la considération de l'équation du troisième ordre est immédiatement ramené au cadre spécifique d'une recherche de systèmes triples, respectant des conditions particulières. Ceci pourrait entretenir un doute sur la généralité de l'approche présentée par Bonnet. Est-elle tout particulièrement indiquée par la spécificité des cas particuliers qui sont ensuite développés ?

D'autres raisons plus fondamentales peuvent finalement être exposées. Pour commencer, à l'image des conditions d'isothermie de Bertrand en 1843, l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre est dans le travail de Bonnet clairement présentée comme une condition nécessaire. En revanche, il ne saurait être affirmé aussi nettement que cette condition est suffisante comme le soulèvera Picard ([**Picard 1917**, XI]). Darboux quant à lui évoquera le fait que la méthode présentée par Bonnet peut se révéler incapable de mener le problème jusqu'à sa "*détermination complète*", c'est-à-dire jusqu'aux calculs effectifs des paramètres différentiels H, H_1, H_2. Ceux-ci reposent en effet sur une nouvelle intégration, et "*cette intégration sera nécessaire à la solution complète du problème proposé ; elle ne sera pas toujours possible*" ([**Darboux 1898**, 13]). Enfin, l'équation qui résulte des transformations de Bonnet n'est pas tout à fait adaptée aux coordonnées rectangulaires cartésiennes

(x, y, z). Bonnet ayant fait intervenir les angles d'Euler et des fonctions s'y rapportant, son équation fait ainsi figurer "*d'autres variables*" [118].

La problématique de la diffusion erratique des résultats obtenus par Bonnet en 1862 nous offre donc plusieurs pistes qui pourraient de manière générale être pertinentes pour un problème d'entrave de circulation d'un savoir nouveau sous forme écrite : la *piste matérielle* - du support physique proprement dit du travail -, une *piste de visibilité* - de mise en valeur du savoir dans le travail, d'adéquation du contenu avec ce qui est annoncé ou conclu -, et enfin une *piste de lisibilité* - de compréhension et d'appropriation du contenu pour être répercuté [119]. Ces trois *pistes* rejoignent donc en partie les principes évoqués par Hélène Gispert qui remarquait : "*les idées novatrices doivent, pour s'épanouir et acquérir toute leur efficacité, être connues, reconnues comme utiles, puis investies dans la pratique mathématique*" ([**Gispert 1996b**, 405]).

Notre cas d'étude du travail de Pierre-Ossian Bonnet sur la réduction du problème des systèmes orthogonaux nous amène à privilégier les deux premières pistes matérielle et de visibilité : hormis l'intervention des nouvelles variables angulaires, la lisibilité du contenu du travail de Bonnet ne paraît ici pas problématique. Remarquons par ailleurs que les raisons fondamentales que nous avons évoquées avec Darboux et Picard, et qui portent sur la validité du contenu dans sa rigueur mathématique, ne nous paraissent pas ici pertinentes pour discuter de la diffusion du résultat de Bonnet. Tout d'abord, notre échelle de temps de 3 années (1862-1865) est trop courte pour que la validité mathématique intervienne fortement : cela pourrait jouer un rôle à long terme expliquant le délaissement de ce travail, mais il s'agit d'une problématique alors bien différente. Surtout, sur cette courte échelle de temps le fait que la validité mathématique du résultat puisse être remise en question nous paraît au contraire être un moteur pour la diffusion du travail de Bonnet. L'exemple du théorème erroné de 1837 de Chasles sur la complétion des systèmes triples orthogonaux exposé dans [**Chasles 1837b**], que nous avons déjà soulevé et étudié, montre en effet comment la diffusion d'un contenu dont la validité fait débat est au contraire dans un premier temps auto-entretenue par les controverses, les justifications, les contradictions qu'il suscite. C'est ainsi notamment le cas avec le contre-exemple de Bouquet de 1846 pour le travail de Chasles (voir 3.2). Nous aurons notamment l'occasion d'évoquer les mêmes remarques quant aux travaux sur les solutions singulières des équations différentielles dans

118. Ceci est également relevé par Emile Picard.

119. La problématique de la diffusion et de la circulation du savoir mathématique est actuellement - ou a récemment été - au centre de nombreux projets des historiens des mathématiques. Nous pouvons citer le projet ANR "*les sources du savoir mathématiques au début du XXème siècle*", le projet Kult-math "*Circulation et diffusion des savoirs mathématiques des Lumières à la seconde guerre mondiale – une approche comparative*" ainsi que le projet Cirmath "*Circulation des mathématiques dans et par les journaux : histoire, territoires et publics*". Néanmoins les références générales en histoire des sciences au sujet des problèmes de diffusion du savoir nous font ici défaut puisqu'il s'agit ici d'une étude ponctuelle, micro-historique, alors que les travaux généraux des historiens se sont portés sur une approche plus globale de circulation et d'échanges des savoirs, surtout à travers les journaux. Ainsi l'objectif du groupe Cirmath a-t-il fait l'objet de la définition : "*caractériser les formes des échanges mathématiques dans une perspective temporelle longue*" (voir [**Gispert Nabonnand Peiffer 2015**]).

les échanges polémiques entre Darboux, Catalan (et Mansion) dans les années 1870-1873 (voir [Chap.7,2.4 et suivants]).

Si le travail de Bonnet se diffuse effectivement, c'est que - pour réutiliser notre grille d'étude - la thèse de Darboux contribue à éliminer les deux premières pistes d'entrave à la diffusion qui semblaient être ici les plus indiquées. En indiquant explicitement, dans l'introduction de la deuxième partie de son travail, que "*M. Ossian Bonnet a montré, le premier, dans une communication faite en 1862 à l'Académie des Sciences, que le problème de la détermination des systèmes orthogonaux se ramène à la résolution d'une équation aux dérivées partielles du troisième ordre*" ([**Darboux 1866**, 110]), Darboux balaie à la fois la piste matérielle et celle de la visibilité : le lecteur sait à présent où trouver l'information (matérialité) et précisément quelle information rechercher (visibilité). Dans la mesure où son propre travail est largement diffusé, on peut dire que c'est Darboux qui a fortement contribué à diffuser le travail de Bonnet.

Le travail de 1866 de Darboux est non-seulement effectué indépendamment des recherches de Bonnet - dont il ne prend connaissance que bien tardivement - mais en outre il en retrouve les résultats "*en suivant une marche toute différente de la sienne*" ([**Darboux 1866**, 110]). Pour Darboux, réussir à réduire le problème des systèmes triples à une unique équation différentielle est un objectif majeur. Il écrit ainsi dans sa thèse : "*Ce résultat a une grande importance, parce qu'il indique et précise l'ordre de difficulté du problème*". L'originalité que présente l'approche du jeune nîmois réside dans le rôle essentiel joué par les lignes de courbure des surfaces orthogonales, c'est-à-dire par le théorème de Dupin (voir 3.1). Dans les travaux de Chasles, de Bouquet ou de Roberts, la connaissance du théorème de Dupin n'était certes pas décorrélée de la recherche de construction des systèmes triples, mais elle en était décorrélée de la mise en équation. La propriété de Dupin identifiant lignes de courbure et intersections des surfaces trajectoires orthogonales servait en effet soit à l'expression des normales aux surfaces (c'est le cas pour Bouquet), soit était utilisée *a posteriori* pour étudier la courbure des surfaces des systèmes déjà construits (ceci vaut surtout pour Roberts). Darboux ramène au contraire les lignes de courbure au sein des équations de condition et leur fait jouer un rôle prépondérant dans le jeu de combinaison de ces équations pour parvenir à en exhiber une unique, nécessaire et suffisante. Ce-faisant, il met au jour un prolongement du théorème de 1813 de Dupin dont tant l'énoncé que la preuve lui seront essentiels pour parvenir à l'équation du troisième ordre régissant le problème des systèmes triples.

L'extension du théorème de Dupin que Darboux donne dans sa thèse est la suivante :

> Pour que deux systèmes formés de surfaces orthogonales soient orthogonaux à un troisième système, il faut et il suffit que les lignes d'intersection des surfaces appartenant aux deux systèmes soient des lignes de courbure des surfaces.
>
> [**Darboux 1866**, 110]

Une des deux implications de cet énoncé constitue exactement le résultat obtenu en 1813 par Dupin, aussi la propriété que Darboux s'attèle à démontrer est en fait la suivante :

> Quand deux systèmes de surfaces orthogonales se coupent suivant les lignes de courbure de ces surfaces, il existe un troisième système orthogonal aux deux premiers.

[Darboux 1866, 110]

La démonstration de Darboux repose essentiellement sur les conditions d'intégrabilité des équations aux dérivées partielles et leurs interprétations géométriques. Il va en effet identifier la réalisation géométrique de l'intersection des surfaces selon les lignes de courbure avec le respect d'une condition particulière d'intégrabilité.

Considérant un système triple orthogonal formé par trois familles de paramètres α, β, γ, Darboux écrit le système $(\mathcal{S})$ des équations de condition d'orthogonalité. Il utilise alors ce système pour déterminer en formant des rapports les proportions des dérivées partielles du paramètre γ. Cela lui permet d'obtenir :

$$\frac{\frac{d\gamma}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dy}} = \frac{\frac{d\gamma}{dy}}{\frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dz}} = \frac{\frac{d\gamma}{dz}}{\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx}}$$

En identifiant - au facteur de proportion près - les dénominateurs des rapports ci-dessus avec les facteurs de la différentielle de γ, Darboux arrive ainsi exactement à la formation de la condition d'intégrabilité de l'équation :

$$\left(\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dy}\right)dx + \left(\frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dz}\right)dy + \left(\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx}\right)dz = 0 \qquad (\mathcal{I})$$

Etant données deux familles de surfaces orthogonales α, β, l'intégrabilité de cette équation $(\mathcal{I})$ est ainsi nécessaire et suffisante à la constitution d'un système triple orthogonal : son intégrale est précisément la troisième famille $\gamma = \phi_2(x, y, z)$ qui complète les deux familles α, β. Darboux va alors montrer le sens géométrique de l'intégrabilité de $(\mathcal{I})$ grâce aux lignes de courbure des surfaces α, β. En écrivant la condition d'intégrabilité développée de $(\mathcal{I})$ [120], Darboux la simplifie en la combinant avec les équations d'orthogonalité des surfaces α, β et de leurs dérivées. Il montre que cette condition devient alors, en notant via δ un déplacement "*dans la direction de la [normale à la] surface* α" :

$$\begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ \frac{d\beta}{dx} & \frac{d\beta}{dy} & \frac{d\beta}{dz} \\ \delta\frac{d\beta}{dx} & \delta\frac{d\beta}{dy} & \delta\frac{d\beta}{dz} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{[Darboux 1866, 112]}$$

Darboux reconnaît alors sous cette forme synthétique l'équation des lignes de courbure de la surface β. Aussi la normale $(\delta x, \delta y, \delta z)$ à la surface α est-elle tangente à l'une des lignes de courbure de β. Puisque les deux familles de lignes de courbure d'une même surface sont orthogonales [121], cela signifie que la seconde ligne de courbure de β est exactement décrite par l'intersection des surfaces α et β. L'interprétation géométrique que Darboux donne de l'intégrabilité de l'équation $(\mathcal{I})$ est ainsi précisément l'intersection des deux familles de surfaces α, β suivant des lignes de courbure de ces surfaces. Ayant prouvé au préalable que cette intégrabilité était une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une troisième

120. Rappelons que la condition d'intégrabilité d'une équation aux dérivées partielle écrite sous la forme $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ est donnée par : $X(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}) + Y(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}) + Z(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}) = 0$

121. Ce théorème est généralement attribué à Leonhard Euler.

famille de surfaces γ pour former un système triple, cela conclut son extension du théorème de Dupin.

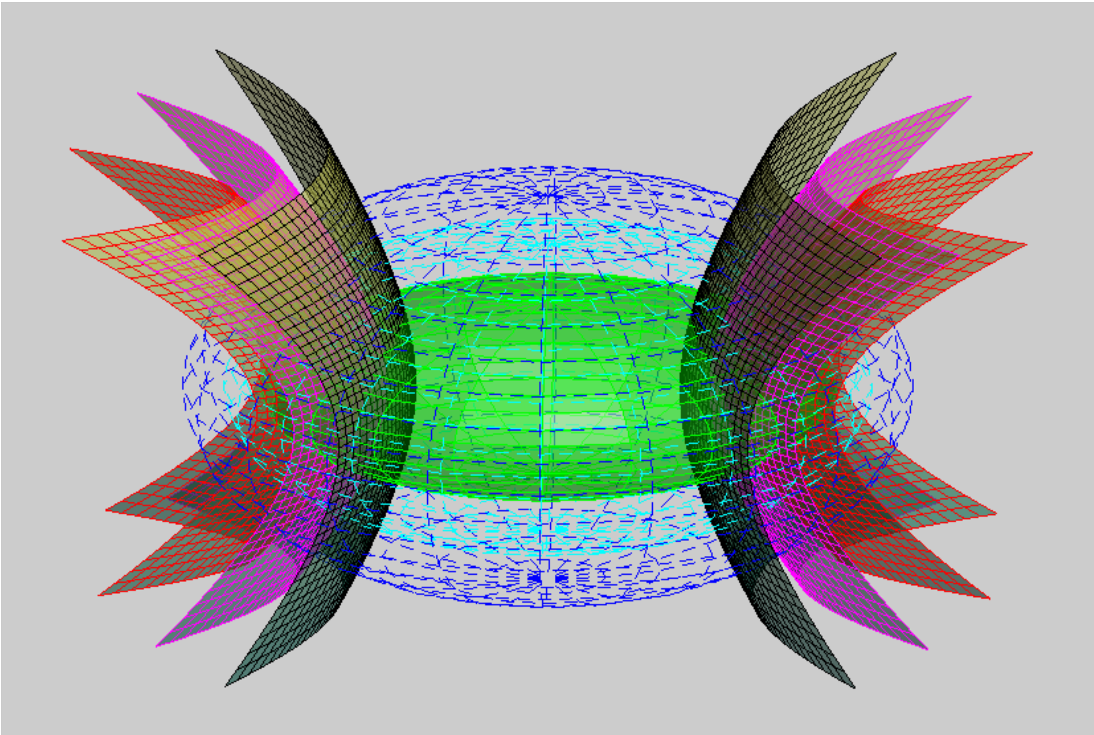


FIGURE 24. D'après l'extension de Darboux du théorème de Dupin, pour que les familles homofocales d'ellipsoïdes et d'hyperboloïdes à deux nappes fassent partie d'un système triple, il faut et il suffit que les surfaces se coupent suivant leurs lignes de courbure.

Ce nouveau résultat ainsi que le rôle des lignes de courbure dans la démonstration permettent ensuite à Darboux de traiter par une approche nouvelle le "*résultat dû à M. Bonnet*", "*notre objet principal*" : la réduction du problème des systèmes triples orthogonaux à une unique équation aux dérivées partielles.

Grâce à son extension du théorème de Dupin, la formation d'un système triple orthogonal ne repose plus pour Darboux que sur l'existence de <u>deux</u> familles de surfaces et non plus <u>trois</u>. Les deux familles doivent alors se couper perpendiculairement selon leurs lignes de courbure. Le géomètre normalien considère alors la famille $\alpha = \phi(x, y, z)$. Il décrit les directions des lignes de courbure avec les deux équations suivantes :

$$\frac{dx}{L} = \frac{dy}{M} = \frac{dz}{N} \quad \text{et} \quad \frac{\delta x}{L'} = \frac{\delta y}{M'} = \frac{\delta z}{N'}$$

Les 6 quantités présentent aux dénominateurs sont "*des fonctions des dérivées premières et secondes de α, fonctions qu'il serait pénible de calculer*" ([**Darboux 1866**, 113]).

La recherche d'une famille de surfaces - disons β - dont l'intersection avec α décrit les normales au premier système de lignes de courbure correspond à l'intégration de l'équation :

$$Ldx + Mdy + Ndz = 0$$

Darboux utilise le fait que si celle-ci est intégrable, alors la famille de surfaces $\beta = \int \lambda(Ldx + Mdy + Ndz)$ constituera une famille orthogonale aux surfaces α et les coupant suivant des lignes de courbure. Cette condition - que l'on savait nécessaire depuis le théorème de Dupin - devient suffisante en vertu de l'extension de ce même théorème. Darboux explicite par ailleurs la troisième famille de surfaces du système triple : $\gamma = \int \lambda'(L'dx + M'dy + N'dz)$. Elle résulte de l'intégration provenant des autres lignes de courbure de α. Darboux peut ainsi conclure et déterminer l'équation aux dérivées partielles finale :

> la condition unique à laquelle doit satisfaire α, c'est que la première équation
>
> $$Ldx + Mdy + Ndz = 0$$
>
> soit intégrable, ce qui donne :
>
> $$L\left(\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}\right) + M\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}\right) + N\left(\frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}\right) = 0$$
>
> équation unique aux dérivées partielles [...] du troisième ordre. [...] Cette équation aux dérivées partielles, nous ne la formerons pas dans le cas général ; elle est très compliquée et paraît très difficile à intégrer.
>
> [**Darboux 1866**, 113]

La méthode de Darboux est donc tout à fait différente de celle de Bonnet [122]. Bonnet mettait au cœur de sa recherche les normales des surfaces et parvenait à ne former qu'une unique équation en mixant les coordonnées cartésiennes et les coordonnées angulaires d'Euler. Darboux quant à lui centre son approche sur les lignes de courbure des surfaces, et la réduction des équations vient avec les interprétations géométriques des conditions analytiques d'intégrabilité. On retrouve ici une intrication forte entre méthodes analytique et géométrique chez le géomètre nîmois, ce en quoi on peut rapprocher ces travaux de ceux de Gaspard Monge, véritable emblème de ce que Darboux appellera la "*méthode anaytico-géométrique*" ([**Darboux 1908**]).

Après le théorème de Dupin et son utilisation pour la détermination des lignes de courbure des quadriques, la considération des familles de surfaces quelconques comme faisant partie d'un système triple orthogonal s'était banalisée jusqu'au milieu des années 1840. On en retrouve la trace dans les travaux de Bertrand et de Lamé, et surtout Chasles pensait l'avoir démontré en 1837. Mais après les remarques de Bouquet, les travaux de Serret ont ensuite longtemps laissé penser qu'au contraire le nombre de systèmes triples était "*assez limité*". Les résultats de Bonnet et Darboux, qui ramènent l'appartenance d'une famille de surfaces à un paramètre à une unique équation aux dérivées partielles d'ordre 3 sur le paramètre, montrent à la fois que le nombre de systèmes triples n'est pas "*limité*", mais réaffirment qu'une famille quelconque de surfaces n'aura en général pas

122. Il est étonnant de lire dans ses "*Leçons sur les coordonnées curvilignes*" que Darboux se plaint que sa méthode de réduction soit "*trop souvent confondue avec celle de M. Bonnet*" ([**Darboux 1898**, 13]). On peut penser que cela tient à une mauvaise connaissance du résultat de Bonnet, ce qui revient à nouveau au problème de la diffusion de son travail de 1862.

cette propriété. En exploitant le rapprochement entre la géométrie des lignes de courbure et les conditions analytiques d'intégrabilité de l'expression différentielle de leurs normales, Darboux prolonge le résultat de Dupin en ramenant ce théorème à la seule considération de deux des trois familles orthogonales d'un même système.

La formation développée de l'équation du troisième ordre, que Darboux se refuse de donner dans sa thèse, sera explicitée pour la première fois par Arthur Cayley en 1872 ([**Cayley 1872b**]). Par la suite, Darboux[123] donnera cette équation sous plusieurs formes synthétiques, et ces recherches seront poursuivies notamment par son élève Lucien Lévy[124] ([**Lévy 1892**]). L'équation du troisième ordre des systèmes triples, allant de pair avec l'extension du théorème de Dupin, fera partie des cours de Géométrie de Darboux : cela constituera souvent le point de départ de ses leçons sur la théorie des surfaces orthogonales. Aussi retrouve-t-on dans ses "*Leçons*" sur les coordonnées curvilignes l'intitulé suivant pour le premier livre : "*L'équation du troisième ordre*" ([**Darboux 1898**, 1-155]). En dépit de la connaissance de cette équation, la découverte de nouveaux systèmes triples orthogonaux reposera avant tout chez Darboux sur d'autres équations : reprenant les 6 équations en les paramètres différentiels H_i de Lamé[125], il introduira dans sa thèse une "*fonction auxiliaire V*" pour traduire ces 6 équations en fonction de l'auxiliaire V. C'est alors une équation certes unique mais aux dérivées partielles du sixième ordre qu'elle devra satisfaire ([**Darboux 1866**, 117-120]). Mais c'est exclusivement sur cette fonction auxiliaire V que Darboux fera par la suite reposer ses études menant à de nouveaux systèmes triples, cherchant à diversifier et à réduire les contraintes portant sur cette fonction lui permettant d'intégrer complètement l'équation du sixième ordre. On peut ainsi souligner, alors que ce n'était pas le cas pour Pierre-Ossian Bonnet, que pour Darboux les deux études que constituent la réduction du problème à une unique équation et la recherche de nouveaux systèmes orthogonaux sont clairement séparées et traitées de manières bien différentes.

Nous terminerons cette section par une remarque portant sur le vocabulaire des objets que nous avons traités dans cette section. Nous avons signalé que Charles Dupin utilisait en 1813 le nom de "*surfaces trajectoires orthogonales*" pour désigner les systèmes triples orthogonaux. Cela sera encore utilisé par Bertrand et Lamé, mais avec Joseph-Alfred Serret, ce nom se rapproche de la terminologie moderne et devient : "*système triple de surfaces orthogonales*". C'est Darboux qui synthétisera cette appellation en "*système triple orthogonal*". En ce qui concerne les familles de surfaces composant ces systèmes, Dupin avait introduit la dénomination originale d'"*orthotomides*" qui ne sera cependant pas réutilisée.

123. Voir [**Darboux 1873c**], [**Darboux 1878a**].

124. Lucien Lévy est élève de la classe de Mathématiques spéciales de Darboux au Lycée Louis-le-Grand durant l'année 1871/1872 au terme de laquelle il intègre l'Ecole Polytechnique. Déjà en Février 1872, Darboux en parle dans ces termes à son ami Hoüel : "*J'ai un de mes élèves qui devient illustre. Philippe Gilbert le proclame un grand homme, il s'occupe de la désarguésienne et même de l'hyperdésarguésienne. Que dîtes-vous de cela !*" (lettre datée du 28 Février 1872 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]). Si le professeur a une haute estime de l'élève, la réciproque n'en est pas moins vraie puisque Lévy se rappellera plus tard de son professeur de Spéciales dans ces termes : "*la clarté, la netteté de votre élocution, le caractère personnel de vos démonstrations, provoquaient notre admiration, et nous travaillions avec entrain, sans nous rappeler que nous avions de sérieux examens à préparer, et sans même savoir les noms des examinateurs*" ([**Darboux 1912**, 469], voir plus loin dans l'annexe 6 le contenu de l'allocution de Lucien Lévy). Cette année-là, Darboux avait également dans sa classe Henri Becquerel, Henri Deslandres, et Joseph Désiré Bertrand, le cadet des fils de son maître Joseph Bertrand.

125. Voir la 6ème leçon de Lamé : "*Intégration des équations en H_i*" dans ses leçons [**Lamé 1859**].

Durant la majeure partie du XIXème siècle, il n'existe pas de dénomination spécifique : on parle simplement d'*une des trois familles d'un système orthogonal.* Mais au début des années 1880, Gaston Darboux va dans ses leçons et dans ses publications fixer ce vocabulaire en associant à titre posthume ces familles au nom de Gabriel Lamé :

> Pour rappeler les immortels travaux de Lamé sur les coordonnées curvilignes, nous désignerons sous le nom de *familles de Lamé*[126] toutes les familles de surfaces qui feront partie d'un système triple orthogonal.
>
> [**Darboux 1898**, 12]

Le choix des mots rappelle ici l'opinion de Poincaré, qui en avait signalé l'importance dans le but d'"*économiser la pensée*" ([**Poincaré 1908**]). Mais au-delà de cette économie, c'est la distinction même des notions mathématiques qui semble ici en jeu. Ainsi, dans un premier temps, le terme de "*surfaces trajectoires orthogonales*" possède une ambiguïté au sens de [**Pinkal 1995**]. Il convient en effet d'en réduire le spectre d'interprétation, c'est-à-dire selon le linguiste d'en donner la *precisification*, en précisant si cet objet mathématique est relatif à une unique surface ou à une famille de surfaces. C'est ce flou, entretenu d'abord par Dupin, qui a engendré chez certains mathématiciens une fausse croyance quant à l'existence générale des systèmes triples orthogonales. Sans une *precisification* adaptée, les propos de Dupin ont alimenté cette croyance. L'apparition ultérieure des termes de "*système triple*" et de "*familles de Lamé*" dissout ensuite complètement cette ambiguïté, et révèle du même coup la maturation de cette notion scientifique. Nous aurons l'occasion de vérifier dans la partie [Chap.7,1] dédiée à l'analyse mathématique, que l'on retrouve cette évolution du vocabulaire scientifique et ce même rôle révélateur de son ambiguïté, de par son apparition puis sa disparition, dans l'émergence de la notion de bornitude en lien avec le théorème des bornes.

Remarquons pour finir qu'il peut désormais paraître ironique que le nom de Gabriel Lamé soit, depuis l'initiative de Darboux, rattaché aux familles de surfaces des systèmes triples orthogonaux quand on sait que Lamé pensait, avec Chasles, que toute famille de surfaces appartenait à un système triple.

126. Les *familles de Lamé* ne doivent pas être confondues avec les *surfaces de Lamé* - encore appelées surfaces tétraédrales - qui sont les boules unités de normes bien particulières.

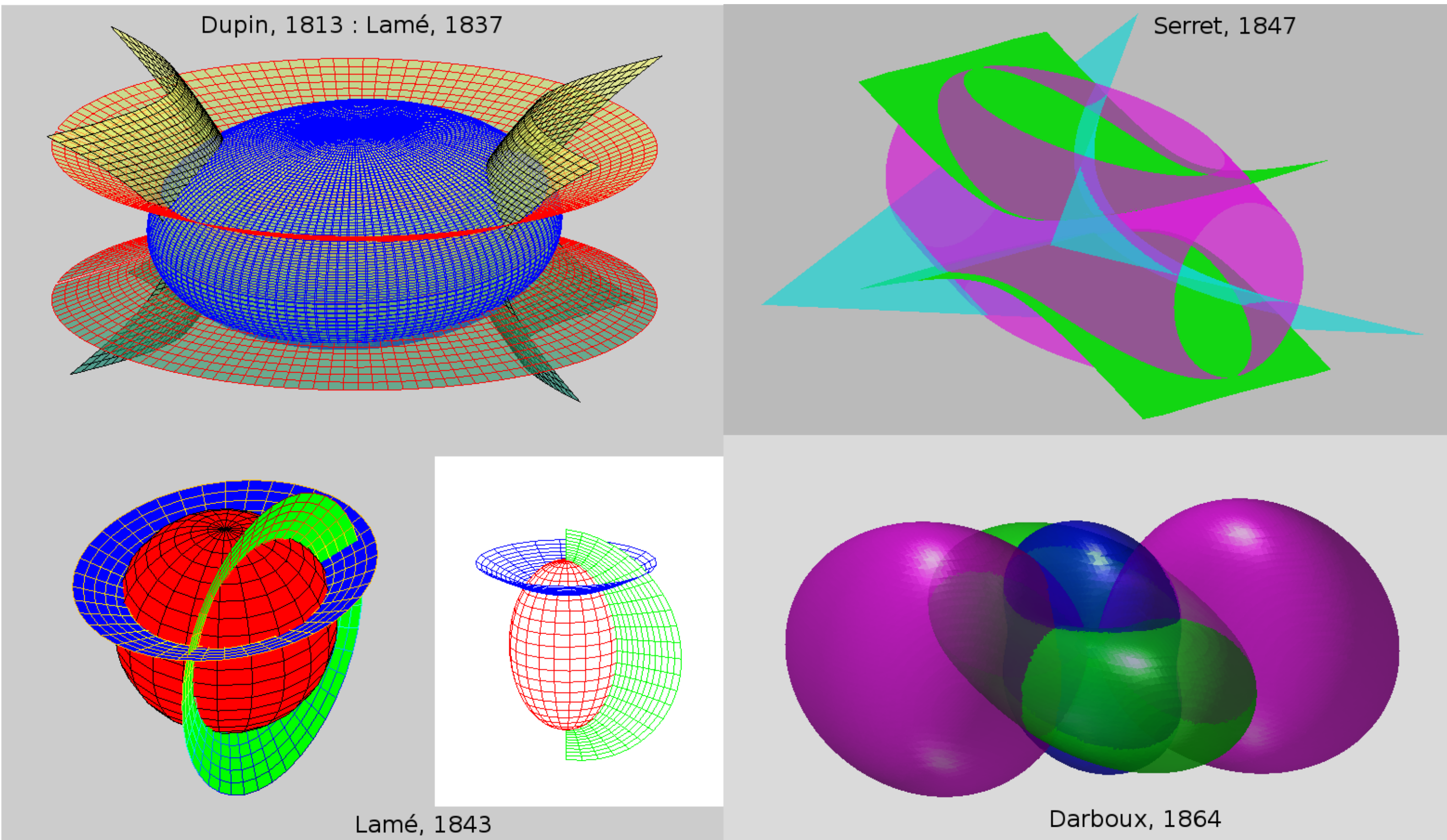


FIGURE 25. Quelques systèmes triples orthogonaux connus au début des années 1870

4. Deux nouveaux systèmes de coordonnées adaptées aux cyclides

Dans les premières publications que Darboux effectue avant sa thèse, l'exposition des surfaces cyclides est présentée dans les coordonnées cartésiennes rectangulaires classiques (x, y, z). Cependant, il va rapidement adapter la description des propriétés des cyclides en utilisant deux autres systèmes de coordonnées que nous allons détailler dans cette partie. Le premier système est celui des coordonnées curvilignes du système orthogonal formé par les cyclides homofocales. Il constitue une extension naturelle des *coordonnées elliptiques* employées par Lamé avec les surfaces du second degré. Nous étudierons dans la première partie 4.1 le lien de ces coordonnées avec les fonctions elliptiques, en analysant comment Darboux dans sa thèse relie la résolution d'équations elliptiques avec la géométrie des quadriques et des cyclides. Dans la seconde partie 4.2, nous verrons comment la géométrie d'inversion bien particulière des cyclides amènera après sa thèse le géomètre à mettre sur pied un tout nouveau système de coordonnées : les *coordonnées pentasphériques*. Puisque c'est alors la sphère qui est considérée comme élément générateur de l'espace, ce système est spécialement bien adapté à l'étude des propriétés des surfaces cyclides considérées comme enveloppes de sphères.

La transformation de ses méthodes, la comparaison de ses approches liées à ces deux systèmes de coordonnées nous permettra de mettre en relief l'évolution du cheminement scientifique de Darboux. L'étudiant géomètre qui emploie les coordonnées elliptiques dans sa thèse de 1866 devient ainsi le mathématicien complet, maître de conférences à l'Ecole Normale, en 1872 l'année de sa découverte du système pentasphérique. Cet élargissement des intérêts et des méthodes, témoin d'un changement profond dans son parcours personnel et mathématique, prendra tout sens dans nos analyse ultérieures : Gaston Darboux était un géomètre avant 1870 ; promu rédacteur du *Bulletin*, il devient rapidement un mathématicien complet attiré par de nombreux nouveaux pans des mathématiques. Signe de ce changement, ses premiers travaux - relatifs aux coordonnées elliptiques - peuvent être inscrits dans une *tradition mathématique* et un *style*[127] qui les replacent dans la lignée de ceux de Jacobi, de Liouville et de Chasles. Au contraire, nous verrons que les travaux de Darboux liés aux coordonnées pentasphériques ne s'inscrivent en aucun cas dans une tradition de recherche. Ils attestent par de nombreux aspects de la diversité et de la complexité grandissantes de l'identité de leur auteur en tant que mathématicien.

4.1. Les coordonnées elliptiques et leur extension aux surfaces cyclides.

Les *coordonnées elliptiques* apparaissent dans les travaux de Lamé au début des années 1830 avec l'emploi d'un nouveau système de repérage des points de l'espace : les *coordonnées curvilignes*. C'est Lamé qui fait, le premier, usage de ces coordonnées dans l'espace ([**Loria 1948**, 285]). Prenant (u, v, w) des variables indépendantes, les coordonnées cartésiennes (x, y, z) s'expriment en fonction de ces nouvelles variables. Si l'on inverse le système d'équations, on aboutit à :

$$u = \phi(x, y, z), \quad v = \phi_1(x, y, z), \quad w = \phi_2(x, y, z)$$

Les *coordonnées curvilignes* (u, v, w) sont ainsi adaptées au système des trois familles de surfaces de paramètres respectifs u, v et w[128]. Elles sont évidemment particulièrement adéquates pour la description des situations dans lesquelles ce triplet de surfaces joue un rôle essentiel : lorsqu'il est formé de surfaces isothermes, on dira qu'il s'agit de *coordonnées curvilignes isothermes*. Lorsqu'il s'agit d'un système triple orthogonal, elles deviennent des *coordonnées curvilignes orthogonales*. Ce type de coordonnées avait déjà été utilisé auparavant par Gauß dans un cadre surfacique, c'est-à-dire avec seulement deux coordonnées

127. Nous entendons ici le double sens signalé par Paolo Mancosu : "*le nationalisme qui a motivé les contributions plus anciennes*" du style national, et "*les cultures locales [qui] jouent un rôle dans la constitution de la connaissance*" ([**Mancosu 2010**, §3].

128. Notre présentation reprend essentiellement celle de Gino Loria. [**Guitart 2009**] ne définit pas les coordonnées curvilignes.

([**Guitart 2009**, 122]). Pour Lamé, les coordonnées curvilignes se doivent d'être orthogonales, en lien avec la théorie de l'élasticité [129]. C'est ce qu'il décrit dans ses "*Leçons*" :

> c'est la théorie mathématique de l'équilibre d'élasticité des corps solides qui a introduit la considération de trois familles conjuguées et orthogonales. En effet, il résulte de cette théorie qu'en chaque point d'un solide en équilibre d'élasticité, il existe toujours trois éléments plans rectangulaires [...] tous ces triples éléments pourront former, de proche en proche, trois familles de surfaces orthogonales, composant ce qu'on appelle un système isostatique [...]
>
> Dans tout système isostatique, chacune des trois familles de surfaces conjuguées a son paramètre [...] Les trois paramètres forment évidemment un système de coordonnées, car en leur donnant des valeurs particulières, elles appartiennent à trois surfaces individuelles, qui se coupent orthogonalement en un point, lequel est complètement déterminé par ces valeurs. De là est venue l'idée des coordonnées curvilignes, dont l'emploi est indispensable [...]
>
> [**Lamé 1859**, VIII]

Lorsque le triplet de surfaces est constitué par les quadriques homofocales, les coordonnées curvilignes (ρ, μ, ν) - à la fois isothermes et orthogonales (voir 2) - correspondent aux trois racines de l'équation :

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - b^2} + \frac{z^2}{\lambda - c^2} = 1$$

Ces coordonnées curvilignes sont couramment appelées *coordonnées ellipsoïdales* [130], puisqu'elles permettent en particulier un repérage bien adapté sur un ellipsoïde - et donc sur la Terre, assimilée à un ellipsoïde [131] - par ses intersections avec des hyperboloïdes homofocaux. Mais cela n'est pas la dénomination première qu'elles reçoivent de leur auteur :

> Je donnerai aux trois variables (ρ, μ, ν) le nom de *coordonnées elliptiques* [...]
>
> [**Lamé 1837**, 156]

Si Gabriel Lamé nomme les coordonnées curvilignes isothermes et orthogonales "*elliptiques*" [132], c'est notamment en vertu du lien qu'il met en évidence entre ces coordonnées et les *fonctions elliptiques*. Pour bien appréhender ce lien et les travaux de Darboux se

129. A ce sujet, on lira [**Tazzioli 2009**].
130. C'est en particulier le nom qui leur est donné dans [**Guitart 2009**].
131. C'est une des motivations des études mathématiques liées aux coordonnées curvilignes isothermes orthogonales, comme le rappelle [**Jacobi 1839**, 309].
132. On peut consulter une présentation concise des coordonnées elliptiques dans [**Coolidge 1963**, 177-179].

rapportant aux propriétés des fonctions et intégrales elliptiques, nous allons en donner un bref aperçu ci-dessous [133].

L'apparition des intégrales elliptiques provient de la volonté des mathématiciens de rectifier les arcs d'ellipse. Cette rectification fait apparaître l'intégrale $\int_0^\theta \sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}d\theta$ qui ne peut pas être exprimée à l'aide de fonctions élémentaires, ce que Joseph Liouville démontrera en 1834 [134]. Par extension, les intégrales de type $\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$ où R est une fonction rationnelle et P un polynôme de degré 3 ou 4 sont alors appelées *intégrales elliptiques*. Le mathématicien français Adrien-Marie Legendre en effectue une classification, et parvient dans son "*Traité*" ([**Legendre 1825**]) - dont la première édition date de 1793 - à démontrer que toutes ces intégrales peuvent toujours s'exprimer en fonction de trois "*espèces*" particulières d'entre elles :

– Les intégrales elliptiques de première espèce : $\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}}$.
– Les intégrales elliptiques de deuxième espèce : $\int_0^\theta \sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}d\theta$, dont dépend le calcul originel de l'arc d'ellipse.
– Les intégrales elliptiques de troisième espèce : $\int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+n\sin^2(\theta))\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}}$.

L'année suivante, la théorie des fonctions elliptiques va éclore lorsque, indépendamment, l'allemand Carl Jacob Jacobi et le norvégien Niels Henrik Abel [135] ont l'idée de rechercher les propriétés de ces intégrales en les interprétant comme des fonctions de leur borne supérieure et en étudiant leur *fonction inverse* : ce sont ces fonctions, inverses des intégrales elliptiques, qui sont appelées *fonctions elliptiques*. Les mathématiciens de la première moitié du XIXème siècle diront plutôt "*étudier les intégrales elliptiques en fonction de leur amplitude*" ou "*de leur module*" [136]. Pour l'intégrale de première espèce $w = \int_0^\theta \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2(x)}}$, Abel [137] concentre sa recherche sur les propriétés de la fonction inverse $sn(w) := \sin(\theta)$ [138]. A l'image de la définition des fonctions trigonométriques, il définit également les fonction $cn(w) := \cos(\theta)$ et $dn(w) := \sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}$. La propriété fondamentale de ces fonctions elliptiques réside dans l'existence de formules d'addition algébriques qui permettent d'évaluer leur valeur en $(w+u)$ comme fonctions rationnelles

133. Pour plus de détails sur l'histoire des fonctions elliptiques (ou encore hyperelliptiques et abéliennes), on consultera [**Houzel 1978**], [**Boyer 1968**] ou [**Lützen 1990**, 351-422]. Les germanophones pourront également se reporter sur [**Fricke 1913**] dans l'"*Encyklopädie*".
134. Voir [**Liouville 1834**], ou encore [**Lützen 1990**, 382-393].
135. Pour des éléments biographiques concernant ces deux mathématiciens, voir [**Rouse Ball 1906**, 150-153] pour Abel et ci-après notre courte notice pour Jacobi.
136. Voyez par exemple [**Chasles 1844**].
137. Les détails de la théorie de l'inversion des intégrales elliptiques de Jacobi sont données dans [**Cogliati 2014**].
138. Les notations que nous employons n'apparaissent en fait que quelques années plus tard sous la plume du mathématicien allemand Christoph Gudermann.

des valeurs prises par les trois fonctions elliptiques sn, cn, dn en w et en u [139]. Ces formules constituent ainsi un prolongement de la formule d'addition d'Euler, que nous avons évoquée via le lien que Darboux en donnait avec la rectification des ovales de Descartes (voir 1.2). La seconde propriété majeure des fonctions elliptiques, liée à l'extension de leur domaine de fonction au domaine complexe, est de posséder deux périodes distinctes : elles sont dites "*doublement périodiques*".

FIGURE 26. Niels Henrik Abel

Arrivé à Paris - qu'il désigne comme le "*foyer de tous ses voeux mathématiques*" [140] - en Juillet 1826 après un semestre à Berlin, Niels Abel étend ses recherches à des différentielles algébriques plus générales : les fonctions *hyperelliptiques*, qui inversent les intégrales hyperelliptiques $\displaystyle\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$ où P est de degré quelconque, et plus généralement les fonctions (et intégrales) dites *abéliennes* [141] définies par $\displaystyle\int f(x,y)dx$ où les variables sont reliées par une équation algébrique quelconque $\chi(x,y) = 0$ [142]. Il parvient alors à "*un résultat très important et très général connu sous le nom de théorème d'Abel*" ([**Rouse Ball 1906**, 151]) qui stipule ceci : la somme d'intégrales abéliennes, de mêmes intégrandes $f(x,y)dx$ mais de bornes supérieures x_i distinctes, s'exprime toujours en fonction des coefficients de l'équation algébrique dont ces bornes supérieures sont les racines [143]. Abel lui prête ainsi la formulation suivante :

$$\text{Soit} \qquad \psi(x) = \int f(x,y)\partial x$$

> où $f(x,y)$ désigne une fonction rationnelle quelconque de x et de y, je dis, que la fonction transcendente $\psi(x)$ jouira de la propriété générale exprimée par l'équation suivante :

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + ... + \psi(x_n) = u + k_1 \log(v_1) + k_2 \log(v_2) + ... + k_n \log(v_n)$$

139. On pourra consulter la formule d'addition du sinus elliptique sn dans [**Houzel 1978**, 296].
140. Voir [**Dieudonné 1978**, 246].
141. Le nom de "*fonctions abéliennes*" sera attribué par Jacobi après la mort d'Abel en 1829.
142. Voir [**Houzel 1978**, 310-311].
143. Ce théorème est énoncé par Abel dans [**Abel 1829**, 200], [**Abel 1841**, 248], ou encore en [**Jacobi 1846**, 121]. La formulation de [**Houzel 1978**] fait apparaître la dérivation dans l'expression du théorème et nous semble en ce sens en compliquer la compréhension.

> $u, v_1, v_2, ..., v_n$ étant des fonctions rationnelles de $a, a', a'', ...$, [les coefficients de l'équation dont les (x_i) sont racines] et $k_1, k_2, ..., k_n$ des constantes.
>
> [**Abel 1829**, 200]

Le théorème d'Abel constitue donc une nouvelle généralisation du théorème d'addition d'Euler pour des différentielles algébriques générales. Le mathématicien norvégien présente le mémoire contenant ce résultat à l'Académie des Sciences parisienne le 30 Octobre 1826. Ce mémoire sera "*connu non seulement pour son contenu, mais aussi pour son destin*" ([**Lützen 1990**, 360]). En effet, laissé dans l'oubli par Cauchy qui devait l'examiner (avec Legendre), il ne sera publié qu'en 1841 par le florentin Guglielmo Libri ([**Abel 1841**]). Mais Libri, profitant de son statut d'inspecteur des Bibliothèques, se constituait alors en secret et en toute illégalité une collection personnelle de mémoires d'archives à laquelle il ajouta le mémoire d'Abel. Suspecté des vols qu'il commettait, Libri fuit la France en 1848 pour l'Angleterre en emportant dans sa fuite une grande partie des précieux ouvrages [144]. Il faudra attendre 1952 pour que Viggo Brun n'en retrouve une partie, puis Juillet 2000 pour que le manuscrit soit révélé dans son intégralité ([**Del Centina 2002**]).

Dans les années 1830, Lamé introduit les coordonnées curvilignes (ρ, μ, ν) liées au système triple orthogonal formé par les quadriques homofocales. Si ces coordonnées sont qualifiées d'*elliptiques*, c'est parce que Lamé montre le lien qui les relie aux fonctions elliptiques. On se souvient que le polytechnicien avait introduit le système des surfaces du second degré pour résoudre le problème de la distribution de chaleur dans les corps solides (voir 2.1). Les trois familles du système sont ainsi des familles isothermes, cependant la température n'est pas égale à la valeur du paramètre ρ, μ ou ν. Ce que Lamé démontre, c'est que la température (qu'il nomme aussi "*paramètre thermométrique*") est précisément donnée par une intégrale elliptique dépendant des coordonnées curvilignes. Ainsi réciproquement, les coordonnées curvilignes peuvent être considérées comme des fonctions elliptiques des températures : d'où leur appellation de *coordonnées elliptiques* [145]. Lamé consacre un traité entier à ces "*transcendantes elliptiques*" ([**Lamé 1857**]). Les formules qu'il donne sont les suivantes : les températures ε sont décrites pour les trois familles par

144. Connor et Robertson parlent de 30 000 ouvrages que Libri aurait réussi à faire transiter en Angleterre (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Libri.html). Après la mort de Chasles, Darboux évoque en prévision de la vente de la bibliothèque de son maître l'ancienne vente de celle de Libri en écrivant : "*la vente Chasles sera comparable [en volume] à celle de Libri, et l'on sera sûr de plus que les volumes achetés ont été acquis par des voies honnêtes*" (lettre datée du 23 Juin 1881, [**Archives épistolaires Darboux**]).

145. "*j'ai rencontré le système des coordonnées elliptiques formé par trois familles de surfaces isothermes du second ordre, homofocales et orthogonales. Or, dans ce système, les trois variétés des transcendantes elliptiques de première espèce expriment respectivement la température sur les trois familles considérées isolément, et les fonctions inverses des transcendantes sont les axes mêmes de ces surfaces*", [**Lamé 1857**, VI].

$$\begin{cases} \varepsilon = w_1 & = c\displaystyle\int_c^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}} & \text{Temp. des ellipsoïdes} \\ \varepsilon = w_2 & = c\displaystyle\int_b^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}} & \text{Temp. des hyperboloïdes à une nappe} \\ \varepsilon = w_3 & = c\displaystyle\int_0^\nu \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}} & \text{Temp. des hyperboloïdes à deux nappes} \end{cases}$$

Lamé note les fonctions elliptiques permettant d'inverser ces intégrales A, B, C. Avec ces "*élégants systèmes ABC de fonctions elliptiques de Lamé*" ([**Guitart 2009**, 127]), les quadriques homofocales peuvent être exprimées directement en fonction des températures :

$$(S)\begin{cases} \dfrac{x^2}{A^2(\varepsilon)} + \dfrac{y^2}{B^2(\varepsilon)} + \dfrac{z^2}{C^2(\varepsilon)} & = c^2 \quad \mathcal{E} \\ \dfrac{x^2}{A^2(\varepsilon)} + \dfrac{y^2}{B^2(\varepsilon)} - \dfrac{z^2}{C^2(\varepsilon)} & = c^2 \quad \mathcal{H}_1 \\ \dfrac{x^2}{A^2(\varepsilon)} - \dfrac{y^2}{B^2(\varepsilon)} - \dfrac{z^2}{C^2(\varepsilon)} & = c^2 \quad \mathcal{H}_2 \end{cases}$$

Lamé étudie les "*relations algébriques et différentielles*" existant entre ces différentes fonctions elliptiques : il met ainsi sur pied une véritable algèbre adaptée à ses fonctions A, B, C à l'image des formules existant pour les fonctions elliptiques sn, cn, dn employées notamment par Jacobi [146].

Si Darboux va réutiliser dans sa thèse les coordonnées elliptiques de Lamé, et leur extension naturelle correspondant aux coordonnées curvilignes adaptées aux surfaces cyclides, son travail ne se place pourtant pas dans la lignée de celui de Lamé. Il se rapporte en revanche à l'interprétation géométrique de la théorie des fonctions elliptiques en lien avec le théorème d'Abel et l'étude des lignes tracées sur les surfaces du second degré. Ce sont les travaux de Jacobi qui se trouvent à l'origine des recherches dans ce domaine. Ils seront ensuite surtout poursuivis par Chasles et Liouville [147], puis dans un second temps par Gaston Darboux.

Né à Potsdam en 1804, Carl Gustav Jacob Jacobi y effectue ses études jusqu'en 1821. Il part alors pour l'Université de Berlin où il poursuit durant deux années les cursus liés à la philologie et aux mathématiques. Optant finalement pour ces-dernières, il devient habilité à les enseigner à partir de 1825 et obtient l'année suivante un poste à l'Université de Königsberg aux côtés de de l'astronome Bessel. Tout son enseignement sera dispensé à Königsberg jusqu'à ce qu'en 1843 sa santé ne l'oblige à se faire remplacer. Il ne donnera alors plus que de rares leçons à l'Université de Berlin. Ses recherches sur les fonctions elliptiques sont accompagnées par une remarquable correspondance épistolaire avec Legendre, que Darboux aura plus tard à cœur de publier dans son "*Bulletin des Sciences*" [148].

146. Pour plus de détails, on consultera la présentation effectuée par [**Guitart 2009**].
147. [**Lützen 1990**, 709-727] permet de retracer la partie de ces recherches qui est liée à l'interaction entre les travaux de Liouville et ceux de Chasles durant la fin des années 1840.
148. La correspondance Jacobi-Legendre se trouve dans les "Mélanges" des Bulletins de l'année 1875 (tomes 8 et 9). Voir [Chap.6,2.2].

FIGURE 27. Carl Gustav Jacob Jacobi

L'apport des fonctions elliptiques dans l'étude des lignes tracées sur les surfaces est réalisé par Jacobi dans une "*Note très importante pour l'histoire des idées de Jacobi et de ses découvertes*" qui "*a provoqué presque immédiatement une foule de travaux intéressants*" ([**Darboux 1889**, 313]). Ce travail, [**Jacobi 1839**], recèle la découverte de l'équation des lignes géodésiques sur l'ellipsoïde. Introduisant deux angles ϕ et ψ [149] pour éliminer les coordonnées cartésiennes x, y, z, Jacobi parvient à la célèbre formule suivante :

$$\alpha = \int \frac{\sqrt{a\cos^2(\phi)+b\sin^2(\phi)}d\phi}{\sqrt{(c-a\cos^2(\phi)-b\sin^2(\phi))((b-a)\cos^2(\phi)-\beta)}} - \int \frac{\sqrt{b\cos^2(\psi)+c\sin^2(\psi)}d\psi}{\sqrt{(-a+b\cos^2(\psi)+c\sin^2(\psi))((c-b)\sin^2(\psi)-\beta)}}$$

Ces intégrales sont deux "*intégrales abéliennes*" de même espèce, et Jacobi ajoute que l'ensemble des géodésiques de l'ellipsoïde est obtenu en faisant varier les constantes α, β. Sans donner de nombreux développements mathématiques, le professeur de Königsberg évoque surtout de nombreuses pistes pour poursuivre ces recherches : il mentionne tout d'abord le fait que sa méthode permette de "*traiter ainsi facilement toutes les surfaces particulières du second ordre*" ([**Jacobi 1839**, 312]), puis souligne que l'ajout de "*substitutions [employées] par M. Lamé*" permet d'obtenir les "*intégrales algébriques d'un système d'équations différentielles [...] concernant les transcendantes abéliennes*". C'est bien aux coordonnées elliptiques que Jacobi fait ici référence. Mais surtout, il s'attache au fait que l'extension des formules à un nombre quelconque de variables le conduit à une nouvelle approche du théorème d'Abel :

> la même substitution m'a aussi conduit au théorème d'Abel, par une voie et par des considérations tout à fait différentes de celles d'Abel, et qui tirent leur origine d'un problème de mécanique. [...] Il y a donc deux manières de traiter le même problème, dont l'une donne la solution sous forme transcendante, l'autre sous forme algébrique [...] En opérant l'extension facile des formules employées [pour passer d'une forme à l'autre] pour deux variables à un nombre quelconque de variables, je rencontrai le théorème d'Abel, et même sous une forme nouvelle, remarquable et élégante.

149. Voir le lien entre les angles ϕ et ψ de Jacobi et les coordonnées elliptiques dans [**Lützen 1990**, 702].

[**Jacobi 1839**, 313]

Ainsi, non seulement Jacobi prouve-t-il en exhibant l'équation différentielle des géodésiques de l'ellipsoïde que l'interprétation géométrique des fonctions elliptiques est féconde pour l'étude des lignes tracées sur les surfaces du second degré, mais il incite à faire intervenir en outre les coordonnées elliptiques et à retrouver par la "*mécanique*" le théorème d'Abel. De fait, Jacobi s'est largement intéressé à la proposition d'Abel et en a formulé plus simplement l'énoncé - et le "*problème de l'inversion*" [150] qui lui est relié - dans les cas d'hyperellipticité. Dans ces cas, il est en effet parvenu à ramener le théorème d'Abel à "*un théorème d'addition algébrique*" portant uniquement sur les sommes des intégrales hyperelliptiques $\sum_i \int \frac{x_i^k dx}{\sqrt{R(x_i)}}$ ([**Jacobi 1842**], [**Houzel 1978**, 311]). C'est donc à cette nouvelle version du théorème d'Abel que Jacobi fait allusion dans sa Note de 1839 qui en évoque le lien avec "*un problème de mécanique*".

Il faut attendre quelques années pour que Liouville et Chasles fassent fructifier les propos de Jacobi en donnant une suite à ses recherches. Dans la séance du 9 Décembre 1844, Chasles expose un (très long) [151] mémoire présentant une approche géométrique plane de la théorie des fonctions elliptiques ([**Chasles 1844**]). Son objectif est de parvenir à une construction - une "*expression géométrique*" - dans le plan de l'amplitude des fonctions elliptiques. Suite à la présentation de ce travail, Liouville exhorte Chasles à donner une suite à ses recherches en les étendant à l'espace et aux fonctions hyperelliptiques :

> Il serait bien à désirer que M. Chasles pût étendre ses ingénieuses considérations géométriques aux transcendantes d'un ordre plus élevé, et d'abord aux fonctions abéliennes de première classe [i.e. hyperelliptiques]
>
> [...] une discussion géométrique détaillée et approfondie donnerait sans doute à ces théorèmes une forme et une élégance nouvelle.

[**Liouville 1844**, 1262]

Par ailleurs, Liouville évoque en particulier une équation en coordonnées elliptiques (ρ, μ, ν), équation liée à l'intégration de l'équation des géodésiques :

$$\mu^2 \cos^2(i) + \nu^2 \sin^2(i) = \alpha$$

i désigne alors l'angle entre la tangente à la géodésique et la normale à l'hyperboloïde à deux nappes ν. Liouville "*prend la liberté de recommander cette recherche au talent de M. Chasles*" ([**Liouville 1844**, 1264]), et il ne s'agit alors nullement d'une mise au défi mais bien d'un encouragement sincère de la part du mathématicien audomarois.

C'est en 1846 que Chasles et Liouville publient tous deux les résultats de leur recherche sur l'interprétation géométrique des fonctions abéliennes et l'équation ci-dessus évoquée par Liouville. Reprenant l'approche mécanique de Jacobi, Liouville étudie les géodésiques de l'ellipsoïde comme étant les trajectoires d'un mobile libre de force ([**Liouville 1846**], [**Liouville 1847a**]). Employant les coordonnées elliptiques, il parvient à l'équation suivante

150. Le *problème de l'inversion* est l'analogue de l'inversion des intégrales elliptiques via les fonctions du même nom mais pour les intégrales hyperelliptiques. L'inversion est alors bien plus complexe que celle d'une simple intégrale de la borne supérieure.

151. Le mémoire de Chasles fait 21 pages, imprimées *in extenso* dans les "*Comptes-rendus*" ; pourtant les règles de l'Académie portent à 8 le nombre maximum de pages des notes de ses membres.

qui dépend d'intégrales hyperelliptiques :

$$\int \frac{\sqrt{\rho^2-\mu^2}d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)(\mu^2-\beta)}} = \alpha - \int \frac{\sqrt{\rho^2-\nu^2}d\nu}{\sqrt{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)(\beta-\nu^2)}}$$

L'équation que Liouville avait communiquée à Chasles constitue une intégrale première de cette équation des lignes géodésiques de l'ellipsoïde. Liouville emploie la même méthode pour les géodésiques de la sphère, puis pour les géodésiques dans l'espace en utilisant les équations de Hamilton-Jacobi ([**Lützen 1990**, 718]). C'est ainsi à des problèmes de mécanique que Joseph Liouville rapproche la considération géométrique des intégrales et fonctions abéliennes.

L'approche de Chasles est bien différente : le travail de Jacobi et les questions de Liouville l'amènent à étudier les congruences formées par les droites tangentes à une surface du second degré le long de ses géodésiques [152]. L'interprétation géométrique de l'équation proposée par Liouville que découvre Chasles est la suivante : les plans osculateurs correspondant à une ligne géodésique d'une quadrique Q sont tangents à une seconde quadrique Q_1 qui lui est homofocale ([**Chasles 1846a**, 10]). L'angle i qui intervient dans l'intégrale première de Liouville caractérise l'inclinaison entre la géodésique et les lignes de courbure de Q, ce qui permet à Chasles de conclure que la seconde quadrique homofocale Q_1 est inchangée pourvu que les géodésiques restent tangentes à une même ligne de courbure de Q. Il énonce ainsi son premier résultat :

> La surface développable circonscrite à une surface du second degré suivant une ligne géodésique a son arête de rebroussement située sur une autre surface du second degré ; et cette seconde surface est la même pour toutes les lignes géodésiques tangentes à une même ligne de courbure.
>
> [**Chasles 1846a**, 14]

Cela l'incite à étudier le problème inverse : étant données deux quadriques homofocales Q, Q_1, quelles sont les droites tangentes à ces deux surfaces ? Chasles montre ([**Chasles 1846b**]) que de telles droites existent et donne les deux équations auxquelles elles satisfont. Il donne d'abord à ces équations la forme synthétique : $PD =$ constante, P et D étant définies au moyen de constructions géométriques [153]. Ce n'est que dans un second temps qu'il explique comment transformer ces relations en des équations différentielles impliquant des intégrales abéliennes. En particulier, il prouve que l'élément linéaire de l'espace peut être rapporté aux trois normales (ds, ds', ds'') relatives aux quadriques homofocales de paramètres (ρ, μ, ν). Cette substitution fait apparaître des différentielles elliptiques puisqu'on obtient alors :

$$ds = \frac{\sqrt{\rho^2-\mu^2}\sqrt{\rho^2-\nu^2}}{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}d\rho$$

Des formules analogues permettent d'obtenir ds' et ds'' en fonction de $d\mu$ et $d\nu$. Ces résultats de Chasles ([**Chasles 1846b**, 119]) seront rapidement réutilisés par Liouville ([**Liouville 1847a**, 416]).

Les recherches de Chasles et de Liouville en lien avec les géodésiques des quadriques et les fonctions elliptiques sont donc bien différentes : au problème de mécanique de Liouville

152. Les résultats de Chasles sont publiés dans [**Chasles 1846a**] et [**Chasles 1846b**].
153. Voir [**Chasles 1846a**, 13].

répond la géométrie des surfaces développables de Chasles. Pourtant, seul Liouville développe le fait que ses résultats le mènent à une nouvelle interprétation du théorème d'Abel, ce que Jacobi avait suggéré. Il montre en effet grâce à l'écriture de l'élément linéaire en coordonnées elliptiques donné par Chasles que la trajectoire dans l'espace d'un mobile isolé est décrite, en utilisant le polynôme bicarré de degré 8 noté $\Phi(x)$, par le système :

$$\begin{cases} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\Phi(\rho)}} + \int \frac{d\mu}{\sqrt{\Phi(\mu)}} + \int \frac{d\nu}{\sqrt{\Phi(\nu)}} & = A \\ \int \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{\Phi(\rho)}} + \int \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{\Phi(\mu)}} + \int \frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{\Phi(\nu)}} & = B \\ \int \frac{\rho^4 d\rho}{\sqrt{\Phi(\rho)}} + \int \frac{\mu^4 d\mu}{\sqrt{\Phi(\mu)}} + \int \frac{\nu^4 d\nu}{\sqrt{\Phi(\nu)}} & = C + t \end{cases} \qquad \text{[Liouville 1847a, 418]}$$

Il s'agit ainsi d'équations bicarrées elliptiques, les deux premières étant précisément celles qui interviennent dans une des formulations de Jacobi du théorème d'Abel des fonctions elliptiques à trois variables ([**Jacobi 1842**, 28]). D'après cette version du théorème d'Abel, il doit exister deux relations algébriques (ici de degré 2 et 4 car les coordonnées sont prises au carré) entre les quantités (ρ, μ, ν), provenant des polynômes dont ces quantités sont racines. Or Liouville remarque que le mouvement du solide que ces équations décrivent est rectiligne uniforme, puisque ce solide est isolé. Par conséquent "*ces intégrales se trouvent ainsi représentées géométriquement par une ligne droite*" : il existe donc deux relations algébriques (linéaires) entre les coordonnées cartésiennes x, y et z, dont découleront par substitution les relations algébriques du théorème abélien liant les coordonnées elliptiques. Aussi Liouville, grâce "*aux équations du mouvement d'un mobile abandonné à lui-même*" parvient-il à ce qu'il appelle "*l'intégrale fondamentale d'Euler pour les fonctions elliptiques*" qui n'est autre chose que le théorème d'Abel pour ces fonctions ([**Liouville 1847a**, 419]). Suivant exactement les mots de Jacobi, c'est le lien entre la méthode analytique et la résolution physique du problème de mécanique des trajectoires des mobiles isolés[154] qui lui permet en 1847 d'obtenir d'une nouvelle manière le résultat d'Abel dans un des cas concernant les fonctions elliptiques de trois variables.

Les travaux de Darboux vont prolonger les considérations géométriques de Chasles pour aboutir à un résultat semblable à celui de Liouville en remplaçant le problème mécanique par une description purement géométrique. Cependant, les recherches de Darboux s'appuient en grande partie sur l'éclairage que Liouville lui-même va apporter aux résultats obtenus par Chasles.

S'il n'a pas employé les termes de "*congruence*" ou de "*système de rayons*" de Kummer et de Hamilton, Chasles a bel et bien[155] montré l'existence d'un système de droites tangentes à deux quadriques homofocales. Il a également mis en évidence les deux équations qui caractérisaient ces tangentes, sans toutefois leur donner une expression *elliptique*. Liouville va synthétiser ce résultat grâce à la théorie des congruences rectilignes (voir [Chap.2,6]) et préciser les équations elliptiques de ce problème géométrique.

Le géomètre originaire de Saint-Omer commence par publier dès 1847 une courte note dans laquelle il insiste sur l'importance des équations obtenues par Chasles : selon lui, ces équations "*se laissent ramener à un système de deux équations du genre de celles que M.*

154. Ce vocabulaire décrit l'absence de force extérieure s'appliquant sur le mobile étudié.
155. Ce jeu de mots est totalement involontaire.

Jacobi a nommé abéliennes, en sorte que les considérations géométriques dont M. Chasles s'est servi fournissent les intégrales d'un tel système" ([Liouville 1847b, 255]). S'il promet de "*traiter en détail ces questions dans un prochain cahier*", c'est en fait quatre années qu'il faudra attendre pour que Liouville donne une suite à ses remarques. Il publie alors en 1851 une note de deux pages seulement, mais qui donne une forme concise et claire aux résultats de Chasles. Liouville a remarqué que le système des droites tangentes aux deux quadriques homofocales de paramètre respectif α, β formait une congruence à deux paramètres. Puisque celle-ci est par construction doublement tangente à une surface, il s'agit d'une *congruence normale* : ces droites sont les normales d'une certaine surface.

> deux surfaces du second degré homofocales données (α), (β), peuvent être considérées comme les lieux des centres de courbure d'une certaine surface (Θ)
>
> [Liouville 1851, 6]

S'il dit ouvertement reprendre ce théorème du travail de Chasles, c'est en réalité une nouvelle forme bien plus claire qu'il donne aux résultats de ce-dernier. Mais Liouville va même expliciter l'expression de la surface (Θ) dont les quadriques homofocales sont les caustiques. Il reprend ainsi l'écriture de l'élément linéaire en coordonnées elliptiques, en adapte l'expression aux deux quadriques de référence α, β, et exprime cet élément comme la différentielle de (Θ) :

$$d\Theta := \frac{\sqrt{\rho^2-\alpha^2}\sqrt{\rho^2-\beta^2}}{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}d\rho + \frac{\sqrt{\alpha^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-\beta^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}d\mu + \frac{\sqrt{\alpha^2-\nu^2}\sqrt{\beta^2-\nu^2}}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}d\nu$$

Liouville montre alors brièvement que la famille de surfaces $\Theta(\rho,\mu,\nu) =$ constante est une famille de surfaces (parallèles) dont les nappes des centres de courbure sont identiquement les deux quadriques α, β. Il décrit en effet, sans donner plus de détail, que les surfaces $\frac{d\Theta}{d\alpha} = A$ sont des développables normales de (Θ), tangentes à α et "*qui coupe la surface β à angle droit, suivant une ligne géodésique de β*" ([Liouville 1851, 8]). Il en va de même pour les développables $\frac{d\Theta}{d\beta} = B$ qui sont tangentes à β et décrivent sur α une géodésique.

Finalement, les surfaces $\Theta(\rho,\mu,\nu) =$ constante sont donc bien les surfaces dont les deux surfaces homofocales du second degré α, β sont les nappes des centres de courbure. Avec l'introduction de ces surfaces, Liouville donne une interprétation géométrique nette aux résultats de Chasles : les tangentes communes aux deux quadriques, objets des recherches de ce-dernier, sont exactement les normales des surfaces Θ. En les décrivant comme intersections des développables normales, Liouville met leur équation sous la forme :

$$\frac{d\Theta}{d\alpha} = A\,,\quad \frac{d\Theta}{d\beta} = B$$

On peut souligner, au-delà des résultats mentionnés par Liouville dans cette courte note, que le système formé des familles de paramètres $(\Theta, \frac{d\Theta}{d\alpha}, \frac{d\Theta}{d\beta})$ est un système triple orthogonal. Les lignes de courbure des surfaces dont il est composé sont géométriquement fortement liées aux géodésiques des deux quadriques homofocales de départ. La note de 1847 de Liouville est comparable à l'article de 1839 de Jacobi : de nombreuses propriétés sont suggérées mais ne sont pas rigoureusement établies. Plus que la démonstration d'un résultat, c'est surtout un nouvel outil géométrique que Liouville apporte pour poursuivre le développement de la théorie géométrique des fonctions elliptiques et des lignes géodésiques des surfaces du second degré.

Après que Jacobi a évoqué les pistes de recherche dans ce domaine, ce furent Chasles, Liouville, ainsi que les mathématiciens irlandais Michael Roberts et James MacCullagh [156] qui étaient venus explorer ces pistes et en développer plus profondément les idées. Pour la note de Liouville et l'introduction des surfaces Θ, c'est Darboux qui va effectuer ces investigations ultérieures. Plusieurs points évoqués par Liouville restent en effet sans véritable preuve : c'est par exemple le cas pour le parallélisme des surfaces Θ, ou pour le lien avec le découpage des géodésiques sur les quadriques. Mais surtout, Liouville n'a pas effectué le lien final avec le théorème d'Abel qui en aurait donné une version purement géométrique.

Nous allons voir comment Darboux va, dans sa thèse, utiliser cette la nouvelle manière géométrique d'appréhender les quadriques homofocales éclairée par Joseph Liouville pour simplifier l'expression en coordonnées elliptiques des systèmes orthogonaux. Il va également finaliser le travail de Liouville en retrouvant par la géométrie le théorème d'Abel, puis va s'attacher à prolonger ces résultats basés sur le système triple du second degré aux surfaces cyclides. Pour simplifier l'exposition qui suit, nous signalerons néanmoins dès à présent que Darboux donnera plus tard, dans ses leçons de Géométrie, le nom de "*surface de Liouville*" à la famille de surfaces parallèles Θ [157]. Etant donné deux surfaces homofocales orthogonales, la surface de Liouville sera ainsi la surface dont les homofocales sont les nappes des centres de courbure.

C'est dans un paragraphe au titre évocateur ("*Lignes géodésiques des surfaces du second degré - Intégration des équations abéliennes par les coordonnées elliptiques*", [**Darboux 1866**, 106-107]) que Darboux se penche sur le prolongement à donner aux recherches de Chasles et de Liouville. Il s'inspire également des méthodes de recherche des systèmes orthogonaux présentées par William Roberts dans [**Roberts 1863**] qu'il cite explicitement. Le travail du mathématicien irlandais consistait à combiner les équations du système triple orthogonal du second degré, en coordonnées elliptiques (ρ, ρ_1, ρ_2), pour aboutir à de nouveaux systèmes. Pour cela, nous avons vu qu'il décrivait l'orthogonalité des surfaces par les angles formés par leurs normales en projection sur les normales de référence $(d\rho, d\rho_1, d\rho_2)$ [158]. Darboux emploie la même méthode et va y introduire la considération de la surface de Liouville Θ. A partir de l'écriture de l'élément linéaire sous la forme :

$$ds^2 = \sum_{i=\emptyset,1,2} \frac{(\rho_i - \rho_j)(\rho_i - \rho_k)}{\psi(\rho_i)} d\rho_i^2 \quad , \quad \psi(x) := 4(x+a)(x+b)(x+c)$$

la méthode de Roberts fait intervenir dans les systèmes orthogonaux trois nouvelles constantes h, h', h''. Pour synthétiser les notations, Darboux s'inspire alors des travaux de Liouville

156. Nous ne nous sommes pas attardés sur les travaux de Roberts et de MacCullagh : pour plus de détails, voir [**Lützen 1990**, 700-726].

157. Voir [**Darboux 1889**, 321]. Cette dénomination ne doit pas être confondue avec l'appellation moderne de *surfaces de Liouville* des surfaces dont les coordonnées isothermes possèdent une propriété singulière qui permet à leurs géodésiques d'être intégrables par quadrature. [**Lützen 1990**] ne fait pas mention des résultats de [**Liouville 1851**], en partie car il en attribue les découvertes à Chasles.

158. Voir 1.1 pour plus de détails.

en posant :

$$d\Theta := \sum_{i=\emptyset,1,2} \sqrt{\frac{(\rho_i - h)(\rho_i - h')(\rho_i - h'')}{\psi(\rho_i)}} d\rho_i \qquad (\mathcal{L})$$

Les systèmes triples orthogonaux ont alors une expression simple en coordonnées elliptiques en fonction de Θ. Celle-ci est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{dh} = \alpha \\ \frac{d\Theta}{dh'} = \beta \\ \frac{d\Theta}{dh''} = \gamma \end{cases} \qquad \text{[Darboux 1866, 105]}$$

On voit comment l'insertion de la fonction Θ permet à Darboux de synthétiser les notations relatives aux systèmes orthogonaux exprimés en coordonnées elliptiques. Mais cet avantage doit être mis en balance avec un inconvénient : cette fonction ne possède pas le sens géométrique que lui avait attribué Liouville. En effet, à ce stade elle est relative aux trois quadriques homofocales de paramètres h, h' et h''. Darboux délaisse pour cela le premier des paramètres par une simple méthode analytique :

> Faisons $h = \infty$, c'est-à-dire dans l'équation [$(\mathcal{L})$] remplaçons par l'unité les binômes $(\rho - h), (\rho_1 - h), (\rho_2 - h)$
>
> [Darboux 1866, 106]

En ayant débarrassé Θ du paramètre h dans la formule $(\mathcal{L})$, Darboux retrouve exactement les conditions de la note de 1851 de Liouville : $\Theta(\rho, \rho_1, \rho_2) =$ constante est l'expression de la surface dont les nappes des centres de courbure sont les deux quadriques homofocales $\rho = h'$ et $\rho = h''$. Cependant il ne fait pas encore référence aux travaux de Liouville dont il veut démontrer les assertions.

Darboux commence par retrouver le parallélisme des surfaces (Θ). Pour cela, il en évalue le carré du premier paramètre différentiel à l'aide des formules de Lamé :

$$(\Delta_1(\Theta))^2 := (\frac{d\Theta}{dx})^2 + (\frac{d\Theta}{dy})^2 + (\frac{d\Theta}{dz})^2 = 1$$

La dérivée prise selon la normale est ainsi constante en tout point des les surfaces (Θ) : celles-ci sont donc bien parallèles [159]. Darboux peut alors en déduire que les deux autres familles du système triple, $\frac{d\Theta}{dh'} = \beta$ et $\frac{d\Theta}{dh''} = \gamma$, "*sont formées des surfaces développables [normales] qui coupent les surfaces parallèles suivant leurs lignes de courbure*" ([Darboux 1866, 106]). La géométrie particulière des développables normales lui permet alors d'en conclure les remarques suivantes :

> les génératrices rectilignes sont donc tangentes aux deux surfaces
>
> $$\rho = h' \ , \quad \rho = h''$$
>
> et par suite les arêtes de rebroussement des deux systèmes de surfaces développables sont sur les surfaces
>
> $$\rho = h' \ , \quad \rho = h''$$

159. Darboux attribuera plus tard cette preuve à Hamilton ([Darboux 1889, 289]).

.

[Darboux 1866, 107]

Une première conséquence que Darboux retire de ces propriétés est le fait que les arêtes de rebroussement correspondent aux géodésiques des deux quadriques, ce que Liouville avait affirmé sans évoquer les rebroussements ([Liouville 1851, 8]). Le plan osculateur le long de l'arête de rebroussement de la quadrique h' est en effet orthogonal au plan tangent de l'autre quadrique h'' [160]. En reprenant l'écriture développée en coordonnées elliptiques du système triple et en cherchant les rebroussements situés sur la quadrique $\rho = h'$, le géomètre nîmois parvient à l'équation suivante :

$$\int \sqrt{\frac{\rho_1 - h'}{(\rho_1 - h'')\psi(\rho_1)}} d\rho_1 + \int \sqrt{\frac{\rho_2 - h'}{(\rho_2 - h'')\psi(\rho_2)}} d\rho_2 = \lambda$$

Il retrouve ainsi le résultat de Jacobi pour l'ellipsoïde, mais dont l'expression reste en fait valable sur les autres types de surfaces du second degré : les géodésiques dépendent d'une équation elliptique faisant intervenir la somme de deux intégrales de même espèce.

La seconde conséquence que Darboux développe est l'obtention du théorème d'Abel par la voie géométrique désirée de Liouville. Dans le système triple orthogonal défini par

$$\frac{d\Theta}{dh} = \alpha, \frac{d\Theta}{dh'} = \beta, \frac{d\Theta}{dh''} = \gamma$$

les intersections des deux dernières familles sont rectilignes : ce sont les normales de la surface de Liouville [161]. Le géomètre réécrit le sous-système formé par ces deux familles en coordonnées elliptiques et remarque par de simples combinaisons qu'il est équivalent au système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\int \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho - h')(\rho - h'')\psi(\rho)}} + \int \frac{d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1 - h')(\rho_1 - h'')\psi(\rho_1)}} + \int \frac{d\rho_2}{\sqrt{(\rho_2 - h')(\rho_2 - h'')\psi(\rho_2)}} & = \dfrac{\beta - \gamma}{h'' - h'} \\ \displaystyle\int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho - h')(\rho - h'')\psi(\rho)}} + \int \frac{\rho_1 d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1 - h')(\rho_1 - h'')\psi(\rho_1)}} + \int \frac{\rho_2 d\rho_2}{\sqrt{(\rho_2 - h')(\rho_2 - h'')\psi(\rho_2)}} & = \dfrac{\beta h'' - \gamma h'}{h'' - h'} \end{array} \right.$$

Ainsi Darboux parvient-il à identifier le système des deux équations elliptiques formées par les développables normales du système triple avec le système intervenant dans l'expression de Jacobi du théorème d'Abel. "*[C]es équations sont les équations abéliennes à trois variables*", or elles "*représentent une droite*". C'est exactement ce que stipule le théorème d'Abel dans ce cas : les relations algébriques découlent, comme l'avait explicité Liouville ([Liouville 1847a]), de la proportionnalité des points de la droite solution. Darboux ne donne pas plus de détail à ce sujet, il se contente de noter : "*ainsi on peut intégrer par la géométrie les équations abéliennes*", en remarquant que "*M. Liouville a[vait] employé la Mécanique*" pour parvenir au même résultat ([Darboux 1866, 107]). La géométrie ici employée est celle des surfaces homofocales du second degré.

Dans l'énoncé du théorème d'Abel tel que retrouvé par Darboux géométriquement via les quadriques, les intégrales sont les plus générales à trois variables mais dont les radicaux

160. Ces propriétés ont été établies par Bertrand dans [Bertrand 1844b] avec la théorie des tangentes conjuguées de Dupin. Darboux les utilise ici sans citer les travaux de Bertrand.

161. Le lecteur pourrait également retrouver ce résultat à l'aide du théorème de Dupin en remarquant que les génératrices sont des lignes de courbure des développables normales.

comportent des polynômes de degré 5. C'est en introduisant les coordonnées curvilignes liées au système orthogonal formé par les cyclides que le normalien va aboutir à une nouvelle démonstration du théorème d'Abel - ou plutôt de l'apparat hyperelliptique qui lui avait fait épouser Jacobi - pour des radicaux du sixième degré. Il parvient ainsi à "*l'intégration des équations abéliennes par le système des surfaces du quatrième ordre*".

Dans le cas des surfaces du second degré, les travaux sur les coordonnées elliptiques de Lamé avaient déterminé que les coordonnées de ces surfaces pouvaient être exprimées à l'aide de fonctions elliptiques de deux variables. En ce qui concerne les cyclides, le système de coordonnées curvilignes lié aux cyclides homofocales permettra à Darboux d'étendre ces résultats en prouvant que les coordonnées des cyclides s'expriment comme des fonctions hyperelliptiques de deux paramètres. Le nîmois élargira d'ailleurs ce résultat aux surfaces cubiques générales ([**Darboux 1873a**, 146-150]). Ces résultats importants, soulignés plus tard par Camille Jordan [162], ne seront néanmoins exposés par Darboux que quelques années après son travail de thèse. Dans ce-dernier, toute l'attention est portée sur l'obtention "*par la géométrie*" du théorème d'Abel pour les hyperelliptiques de degré 5 et 6.

Ayant obtenu le résultat pour les radicaux de degré 5 grâce aux quadriques homofocales, Darboux se penche ensuite sur le système de coordonnées curvilignes - toujours notées (ρ, ρ_1, ρ_2) - relatives aux surfaces cyclides homofocales. Il exprime dans ce contexte l'analogue de la fonction de Liouville Θ sous la forme suivante :

$$d\Theta := \sum_{i=\emptyset,1,2} \sqrt{\frac{(\rho_i - h)(\rho_i - h')(\rho_i - h'')}{\psi(\rho_i)}}\, d\rho_i \qquad (\mathcal{L})$$ [163]

avec cette fois la notation $\psi(x) = 4(x^2 - 4d^2)(x+a)(x+b)(x+c)$. L'obtention des équations abéliennes provient des dérivées partielles de Θ en fonction des paramètres h, h', h''. Pour obtenir via ces quotients des radicaux du sixième degré, c'est ainsi non plus un mais deux des trois paramètres qu'il faut délaisser par la même astuce analytique. C'est ainsi en considérant le cas $h' = h'' = \infty$ que Darboux parvient au système d'équations hyperelliptiques du théorème d'Abel aux radicaux de degré 6 :

$$(A)\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho-h)\psi(\rho)}} + \int \frac{d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1-h)\psi(\rho_1)}} + \int \frac{d\rho_2}{\sqrt{(\rho_2-h)\psi(\rho_2)}} \quad = \text{constante} \\ \displaystyle\int \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{(\rho-h)\psi(\rho)}} + \int \frac{\rho_1 d\rho_1}{\sqrt{(\rho_1-h)\psi(\rho_1)}} + \int \frac{\rho_2 d\rho_2}{\sqrt{(\rho_2-h)\psi(\rho_2)}} \quad = \text{constante} \end{array}\right.$$

Les arguments géométriques inspirés de Chasles et de Liouville sont en défaut puisque la seule cyclide $\rho = h$ intervient ici dans la formule du système. Néanmoins, Darboux va parvenir à "*donner un moyen de trouver les intégrales des équations [(A)] en termes finis*" par une méthode géométrique tout à fait différente ([**Darboux 1866**, 108]). Intersection de deux surfaces, la solution du système (A) est *a priori* une courbe, dont Darboux

162. Voir [**Jordan 1884**], ainsi que plus loin notre commentaire dans [Chap.4,2.2].

163. Darboux étudie en fait le cas plus général où les dénominateurs sont trois polynômes de degré 5 non nécessairement égaux. Néanmoins il ajoutera ultérieurement : "*le système des surfaces du quatrième ordre est le seul qui soit compris dans la forme [générale étudiée]*" ([**Darboux 1866**, 109]). Cela revient ainsi à restreindre les résultats de Darboux aux seuls cas où les dénominateurs sont donnés par les mêmes polynômes. Que seules les cyclides conviennent à la forme de l'élément linéaire étudiée provient de la recherche des systèmes isothermiques orthogonaux que nous avons détaillée en 2.3.

note $d\sigma, d\sigma_1, d\sigma_2$ les projections selon les normales $d\rho, d\rho_1, d\rho_2$ relatives aux cyclides homofocales. La preuve géométrique du théorème d'Abel revient alors, comme dans le cas précédent, à prouver que cette courbe est en fait une droite.

Darboux commence par exprimer les éléments de projection $d\sigma_i$ en fonction des normales $d\rho_i$ en utilisant, à l'image de Chasles pour les quadriques homofocales, l'expression de l'élément linéaire. Les formules lui sont données par :

$$d\sigma = \sqrt{M}\frac{\sqrt{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)}}{\sqrt{\psi(\rho)}}d\rho$$

et de même pour $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$. Il combine ensuite les équations (A) pour obtenir les facteurs de proportionnalité liant $d\rho, d\rho_1$ et $d\rho_2$. En substituant dans ces relations les éléments de projection, Darboux parvient à la formule :

$$d\sigma^2 + d\sigma_1^2 + d\sigma_2^2 = 0 \qquad \text{[Darboux 1866, 108]}$$

Le géomètre nîmois en conclut que "*les tangentes à la courbe cherchée sont parallèles aux génératrices du cône*", c'est-à-dire aux droites isotropes. Puis en combinant d'une autre manière les équations (A), Darboux obtient l'équation d'une surface développable, sur laquelle se trouve la courbe solution, et dont les génératrices sont isotropes : il s'agit donc d'une *développable focale*[164]. La courbe cherchée est ainsi sur une développable focale (Δ) dont elle est tangente aux génératrices (isotropes). Darboux peut alors aboutir au résultat :

> Les génératrices [de (Δ)] répondent à la solution générale des équations [(A)] ; les arêtes de rebroussement aux solution singulières.
>
> [**Darboux 1866**, 109]

La "*solution générale*" étant bien une droite, complexe, Darboux aboutit à la conclusion de la version géométrique du théorème d'Abel : les équations abéliennes générales à trois variables sont intégrées par la géométrie grâce aux surfaces cyclides dans le cas des radicaux de degré 6, alors qu'elles le sont grâce aux quadriques pour des radicaux de degré 5. Dans ce-dernier cas, les droites, solutions géométriques des équations abéliennes, étaient tangentes à deux quadriques homofocales sur lesquelles les développables formées par les droites possédaient leurs arêtes de rebroussement. Dans le cas des cyclides, Darboux achève sa preuve géométrique en démontrant que les développables focales (Δ), qui portent les solutions rectilignes isotropes, possèdent leurs arêtes de rebroussement sur la cyclide $\rho = h$.

164. A propos des développables focales, voir [Chap.2,7].

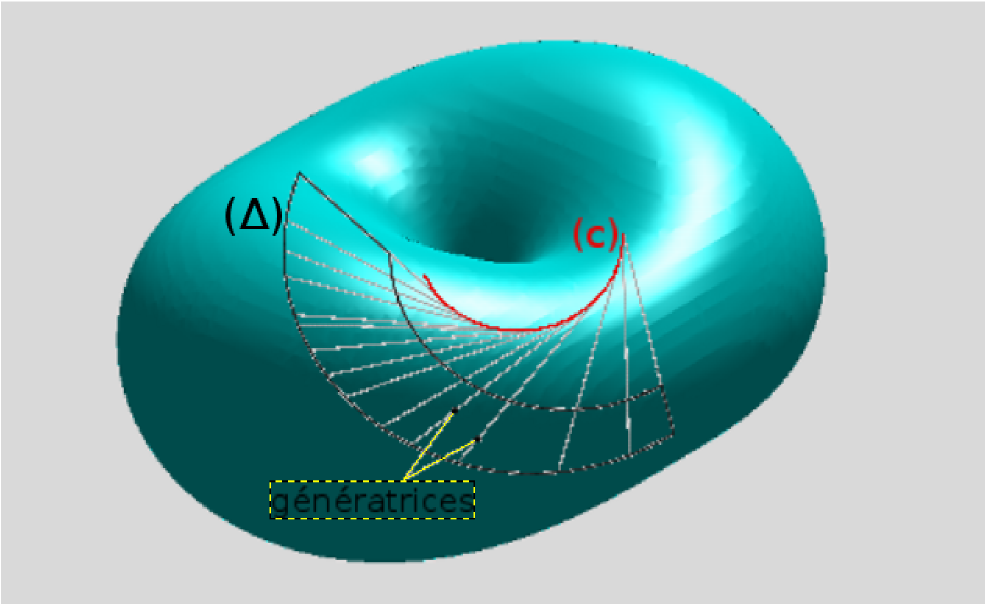


FIGURE 28. Construction d'une surface développable (Δ) tangente à une cyclide le long de l'arête de rebroussement (c)

Nous pouvons souligner quelques points importants en guise de conclusion de cette partie dédiée aux coordonnées elliptiques. Les travaux de Darboux que nous avons analysés s'inscrivent dans la lignée des recherches de Jacobi, de Chasles et de Liouville : ils portent sur l'approche géométrique des fonctions elliptiques employées pour étudier les surfaces du second degré. Ceci définit bien la *tradition de recherche* que nous avions évoquée en introduction, et au sein de laquelle le travail de Gaston Darboux doit être replacé. Les coordonnées elliptiques de Lamé, liées aux surfaces du second degré ici à l'étude, y apparaissent ainsi naturellement.

L'histoire des études des lignes géodésiques sur les surfaces du second degré et des différentes approches du théorème d'Abel revêt un caractère singulier : elle montre l'importance et le pouvoir des suggestions ouvertes dans le développement des idées et des théories mathématiques. Parmi les différents travaux importants, celui de Jacobi (1839) et la note de Liouville (1851) illustrent ce rôle crucial. Ils sont en effet non moins importants par les pistes de recherches qu'ils ouvrent, qu'ils suggèrent, que par les résultats définitifs qu'ils contiennent. Une des forces de cette suggestion est d'opérer un filtre naturel parmi les mathématiciens puisque seuls ceux qui sont capables de reprendre les idées évoquées, d'y apporter des réponses, sont amenés à développer la théorie par de nouveaux travaux. Le mémoire de Jacobi est ici le véritable déclencheur, et il faut attendre Chasles et Liouville pour que les idées qu'il propose soient poursuivies. Les deux mathématiciens français sont alors remarquablement complémentaires. [**Lützen 1990**] affirme que "*les travaux de Liouville ont été principalement inspirés par Jacobi et par Chasles*". Il nous semble devoir nuancer ce jugement : Jacobi a en effet inspiré tant Liouville que Chasles. Dans un second temps, Liouville joue un rôle important pour influencer Chasles en l'incitant à poursuivre les recherches dans le sens indiqué par Jacobi, en développant une interprétation géométrique des intégrales elliptiques. C'est également l'apport synthétique de Liouville qui permet de donner un sens géométrique profond aux résultats de Chasles sur les tangentes doubles aux quadriques. Mais la note de Liouville (1851) joue de fait un rôle similaire à celle de Jacobi dans le sens où elle suggère la suite à donner aux recherches : développer l'apport de la *surface de Liouville* et donner la version géométrique du théorème d'Abel. C'est alors avec la thèse de Darboux (1866) que les pistes ouvertes par Liouville sont vraiment exploitées.

Les travaux sur les géodésiques des ellipsoïdes incitent Liouville et Chasles à se pencher sur des problèmes relatifs aux polygones géodésiques tracés sur ces surfaces. Ce sera la source de plusieurs de leurs mémoires dans les années 1840-1850, et cela inspirera également Darboux qui prendra part à ces recherches [165]. Cela peut expliquer, dans une certaine mesure, pourquoi ni Chasles ni Liouville ne poursuivent leurs études pour aboutir à la démonstration géométrique du théorème d'Abel, dont les différentes approches sont un véritable fil conducteur de la théorie géométrique des intégrales abéliennes.

Ce qui caractérise l'approche de Darboux vis-à-vis de cette théorie est sa volonté "*d'intégrer par la géométrie*" les équations elliptiques et abéliennes. Après des démonstrations algébriques d'origine puis par la mécanique de Jacobi et Liouville, le théorème d'Abel trouve avec Darboux une démonstration géométrique, du moins pour une certaine classe d'intégrales hyperelliptiques. Il parvient à effectuer les *intégrations par la géométrie* dont dépend ce théorème grâce aux surfaces du second degré en poursuivant les travaux de Chasles et de Liouville. Mais il montre en outre comment la géométrie des cyclides se rapporte à ce problème et permet une autre intégration. La géométrie imaginaire des développables focales joue déjà un grand rôle dans cette interprétation géométrique. En ce qui concerne par ailleurs les lignes géodésiques, nous verrons plus loin en 5 que Darboux exprimera en 1873 certaines géodésiques bien particulières des surfaces cyclides (les géodésiques minimales que nous avions rencontrées en [Chap.2,7.3]) à l'aide d'une équation abélienne tout à fait analogue à celle donnée par Jacobi pour l'ellipsoïde.

Nous avions signalé rapidement en 1.2 qu'une partie des recherches de Darboux sur les ovales de Descartes avait consisté en leur identification avec l'intégrale géométrique du théorème d'addition d'Euler, à l'origine de la théorie des fonctions elliptiques. Bien que cela soit chronologiquement incorrect, on peut dire que son travail de thèse sur l'intégrale géométrique liée au théorème d'Abel est un prolongement de cette volonté du géomètre normalien de connecter les objets géométriques aux équations (différentielles). C'est encore cette approche que Darboux met en avant lors de la présentation devant l'Académie des Sciences de (la première version de) son mémoire sur les courbes cycliques et les surfaces cyclides ([**Darboux 1873a**]). Le premier résultat qu'il souligne est en effet "*que la théorie de ces courbes se lie intimement à celle des fonctions elliptiques. Par exemple, une transformation des cycliques par la méthode des rayons vecteurs réciproques revient à une transformation du premier ordre, effectuée sur l'intégrale [abélienne] dont elles dépendent*" ([**Darboux 1869b**, 1311]). On ne peut que souligner que sous cet aspect, Darboux incarne l'esprit de ce qu'il appelle lui-même "*l'école de Monge*", portée par l'idée que "*l'alliance de la Géométrie et de l'Analyse est utile et féconde, que cette alliance est peut-être une*

165. Voir [**Lützen 1990**, 716-727] pour les travaux de Chasles et Liouville. Les résultats de Darboux sont communiqués dans le Bulletin de la Société Philomathique en 1872 sous le titre : "*Sur un nouveau système de coordonnées et sur les polygones inscrits et circonscrits aux coniques*". Darboux réserve alors à ces recherches une longue note de 25 pages qu'il ajoute à son mémoire sur les cyclides [**Darboux 1873a**, 183-208].

condition de succès pour l'une et pour l'autre" ([**Darboux 1904**, 7]). Dans les travaux sur lesquels nous nous sommes penchés ci-dessus, Darboux n'est pas un analyste : il est un géomètre qui met à profit la Géométrie pour compléter et enrichir les résultats de l'Analyse. Il revendiquera ultérieurement l'influence de Jacobi, pionnier de ce que le nîmois appellera "*la méthode mixte*" mêlant les outils de l'Analyse et de l'Algèbre à la recherche géométrique. Dans la théorie des fonctions elliptiques, "*trop longtemps négligée par les géomètres français*", c'est en effet à Jacobi que Darboux attribuera "*l'intégration des équations abéliennes par des méthodes se rattachant à la Géométrie*" ([**Darboux 1904**, 16]).

Nous terminerons cette partie en évoquant l'importance des recherches dont il a été question ci-dessus dans les cours ultérieurs de Darboux. Il semble presque inutile de rappeler l'importance des coordonnées elliptiques, dont les "*Leçons sur les coordonnées curvilignes*" de Darboux font notamment un grand usage ([**Darboux 1898**]). En revanche, on doit mettre en relief que la *surface de Liouville* Θ, liée à deux surfaces homofocales, et les liens avec les lignes géodésiques des quadriques feront partie des leçons de Géométrie de Darboux. Un chapitre entier leur est en effet consacré dans les "*Leçons sur la théorie générale des surfaces*" ([**Darboux 1889**, Chap.XIV Livre IV]).

4.2. Un espace sphérique à quatre dimensions : les coordonnées pentasphériques.

L'historiographie faisant référence au système des coordonnées pentasphériques est relativement ancienne. On ne retrouve ainsi ce système que dans [**Coolidge 1963**, 174-176] ainsi que dans [**Loria 1948**, 281]. Les deux auteurs s'accordent sur le point suivant : les coordonnées pentasphériques sont fortement liées à l'œuvre de Gaston Darboux. Gino Loria nous en offre un aperçu en exprimant :

> Remarquons enfin que la sphère considérée comme élément générateur de l'espace (qui est alors à quatre dimensions) a été utilement représentée à l'aide de six coordonnées homogènes surabondantes : ce sont les "coordonnées pentasphériques", employées avec un remarquable succès par G. Darboux.
>
> [**Loria 1948**, 281]

Loria fait ensuite référence au mémoire "*Sur une classe remarquable etc...*" de Darboux publié en 1873 ([**Darboux 1873a**]). De son côté, le géomètre américain se concentre, après une brève description de ces coordonnées, sur la définition des surfaces cyclides comme les lieux des zéros des formes quadratiques générales de ce système : notant les coordonnées pentasphériques (X_i), il affirme que "*l'équation générale des surfaces du quatrième ordre ayant le cercle de l'infini pour ligne double [appelées cyclides] peut être écrite :*

$$\sum_{i,j} a_{i,j} X_i X_j \quad \text{"}$$ [166] [**Coolidge 1963**, 176]

Nous nous proposons d'étudier dans cette partie dans quelle mesure la géométrie des surfaces cyclides a inspiré à Darboux une recherche approfondie sur les systèmes de sphères orthogonales. Cette recherche aboutit en 1872 à la découverte du système nouveau des

166. Coolidge sous-entend la symétrie de la forme bilinéaire, c'est-à-dire que $a_{i,j} = a_{j,i}$.

coordonnées pentasphériques dans l'espace (et tétracycliques dans le plan) qui doit ainsi pleinement être attribué à Gaston Darboux. Nous verrons que la géométrie du tétraèdre, sujet déjà très développé avant 1872, est intimement connectée aux systèmes de sphères mutuellement orthogonales, et que les travaux dans ce domaine seront largement influencés par l'apparition des coordonnées pentasphériques.

Cette partie revêt à nos yeux un intérêt tout particulier dans l'appréhension de ce que Michel Paty décrit comme "*l'acte de création*" du scientifique ([**Paty 2013**]). La lecture de la création par l'historien y est rapportée comme pouvant (ou devant) être décrite comme une tension entre les "*processus élémentaires singuliers*" mettant en valeur l'apport personnel de l'individu, du scientifique, et "*l'état de connaissance*" du "*milieu social*" qui constitue le terreau de la découverte scientifique [167]. La figure du génie revient ainsi à mettre de côté l'existence de ce terreau de connaissance, que l'on pourrait appeler la "*culture*" mathématique ambiante avec Karen Parshall [168], pour faire la part belle à l'apport singulier dans son acte de création. Parmi les nombreux travaux de Darboux que nous nous sommes proposés d'inscrire dans notre travail au fil de l'évolution des connaissances spécifiques aux domaines auxquels ils se rapportent, la plupart peuvent et doivent être vus comme le prolongement, plus ou moins naturel, des études antérieures préexistantes. Quelqu'original qu'elle puisse être, la contribution de Darboux replacée dans l'état des connaissances relativise la singularité de sa création. La théorie des sphères orthogonales et les coordonnées pentasphériques que nous abordons ici ont ainsi un caractère particulier en ceci que l'acte de création du géomètre nîmois possède, relativement au terreau de connaissance ambiant, une singularité prépondérante. Son travail pionnier est ainsi tout à fait singulier et détonne dans l'état de connaissances mathématiques au sein duquel baigne leur auteur. C'est en outre ce que renforcera la courte étude parallèle des travaux menés sur le même sujet, en même temps mais indépendamment par un second mathématicien : l'irlandais John Casey. Aussi cette partie nous offre-t-elle une fenêtre rare sur les processus intérieurs qui rendent singulière la "création" de Darboux, et qui nous permettent d'acquérir "*l'empathie profonde*" dont parle Robert Locqueneux [169] : en nous apprenant comment pense Darboux, ils nous apprennent à penser comme lui.

Partie prenante de la description de son identité scientifique singulière, cette section nous offre également l'avantage d'étudier l'évolution de la recherche de notre héros au début des années 1870. L'éclairage qu'elle nous apporte n'est que partiel, puisque consacré à un domaine mathématique très spécifique. Cependant notre analyse permettra déjà de déceler quelques traces d'un changement notoire dans le cheminement intellectuel de Darboux : son intérêt nouveau et son ouverture totale aux domaines extra-géométriques.

L'intérêt de Darboux pour les systèmes de sphères orthogonales naît avec sa mise au jour d'une propriété singulière des sphères directrices des surfaces cyclides. Penchons-nous un court instant sur les recherches des mathématiciens liées aux cyclides entre 1864 et le début des années 1870. Le 1er Août 1864, les académiciens découvrent de manière fort surprenante les surfaces cyclides dans deux communications successives faites par deux

167. Voir en particulier le passage [**Paty 2013**, 66].

168. Voir [**Parshall 1999**], ainsi que la discussion proposée par [**Gispert 2012**, 172-174]. Caroline Ehrhardt a ainsi proposé d'inscrire, dans une certaine mesure, la compréhension des travaux de Galois dans l'appréhension de la "*culture mathématique des équations*" ([**Ehrhardt 2012**, 103]).

169. Dans le paragraphe intitulé "*L'empathie comme méthode*", Locqueneux incite l'historien à "*faire abstraction de sa propre pensée pour s'ouvrir à celle d'autrui, s'efforcer de percevoir comme eux [les savants] les problèmes qu'ils abordent*" [**Locqueneux 2013**, 189].

mathématiciens différents : la première, lue par Joseph-Alfred Serret, est écrite par l'élève normalien Gaston Darboux ([**Darboux 1864c**]). Il a découvert ces surfaces en remarquant que les ovales de Descartes homofocales formaient un système double orthogonal dans le plan, puis en étendant cette propriété aux *cycliques* (quartiques bicirculaires planes) plus générales, et enfin en recherchant à étendre ces découvertes dans l'espace (voir 1). Il donne en particulier l'expression analytique des surfaces cyclides, et les caractérise d'un point de vue géométrique par leur degré (4) et par le fait que le cercle de l'infini en constitue toujours une ligne double. La seconde communication est faite par Pierre-Ossian Bonnet, et porte les résultats de Théodore Moutard ([**Moutard 1864b**]). Moutard, nous l'avons détaillé en [Chap.2,7.2], s'intéresse à la transformation par rayons vecteurs réciproques (ou inversion) et aux surfaces *anallagmatiques* qui sont laissées invariantes par cette transformation. Les surfaces cyclides sont alors pour lui les surfaces anallagmatiques les plus générales du quatrième ordre, propriété qui implique d'ailleurs la caractérisation géométrique liée au cercle de l'infini donnée par Darboux.

La propriété qui fut fondamentale pour le développement des recherches sur les surfaces cyclides est le fait qu'elles sont susceptibles de former un système triple orthogonal. Nous avons détaillé ce point et ses nombreuses conséquences dans les parties précédentes. Mais la propriété des cyclides qui est reliée aux coordonnées pentasphériques tient au mode de génération général des surfaces anallagmatiques. Ces surfaces sont en effet les enveloppes d'une famille de sphères orthogonales à une sphère fixe [170] : la sphère d'inversion, encore appelée par Laguerre *sphère directrice* (S). La surface décrite par les centres des sphères orthogonales à (S) sera quant à elle appelée *déférente* (A) par Jules de La Gournerie [171]. Une des premières remarques énoncées par Moutard stipule que le mode de génération d'une anallagmatique n'est pas nécessairement unique, et que pour les surfaces cyclides il en existe cinq différents :

> [Les cyclides] peuvent être de cinq manières différentes, définies comme le lieu des intersections successives des sphères qui coupent orthogonalement une sphère fixe [dite directrice] et dont les centres parcourent une surface [dite déférente] du deuxième ordre.
>
> [**Moutard 1864b**, 243]

Etant donné une cyclide (C), la proposition de Moutard revient à dire qu'il existe pour (C) 5 différentes sphères d'inversion (S_i), respectivement associées à 5 différentes quadriques déférentes (A_i). Les recherches de nombreux géomètres (Moutard, Laguerre, Casey, Darboux) vont alors se porter sur les liens entre ces différents modes de génération, ainsi que les propriétés des focales des cyclides $(S_i \cap A_i)$ [172]. Mais alors que Darboux rédige au début de l'année 1869 le mémoire sur les cyclides qui ne paraîtra qu'en 1873, une propriété des 5 sphères directrices (A_i) est encore restée ignorée : ces sphères sont deux à

170. D'un point de vue moderne, on peut dire que la famille de sphères dont une cyclide constitue l'enveloppe est une famille à trois paramètres. Deux des paramètres décrivent la position des centres lesquels parcourent en effet une surface (une quadrique), tandis que le troisième correspond aux rayons qui varient pour conserver l'orthogonalité à la *directrice* .

171. Voir ces appellations dans [**Laguerre 1868a**] et [**Gournerie 1869**]. La *directrice* était à l'origine appelée *sphère principale* par Moutard ([**Moutard 1864b**]). Pour plus de détails sur les surfaces anallagmatiques, voir [Chap.2,7.2]. Nous notons les surfaces caractéristiques (S) et (A) d'après les notations employées par Darboux pour homogénéiser notre présentation. Sur certaines de nos figures, les déférentes seront notées (D).

172. Nous reviendrons dans la partie suivante 5 sur ces recherches.

deux orthogonales. C'est en recherchant pour son mémoire les expressions analytiques des déférentes et des directrices que le géomètre gardois va "*remarquer*" cette propriété, et en apercevoir ensuite le fondement géométrique.

Darboux commence, via un changement de repère, par ramener l'équation de la cyclide (C) à la forme suivante :

$$K = (x^2 + y^2 + z^2)^2 + 4A^2x^2 + 4A'^2y^2 + 4A''^2z^2 + 8Cx + 8C'y + 8C''z + 4D = 0$$

Il détermine ensuite les lieux (x, y, z) de tangence (double) de la cyclide (C) avec une des sphères dont elle est l'enveloppe dans le mode de génération caractéristique des anallagmatiques. La méthode de Darboux repose sur la propriété géométrique suivante : l'intersection de la cyclide (C) avec une sphère est, en général, une cyclique sphérique. Mais la dégénérescence de cette cyclique en un ensemble de deux cercles caractérise les intersections avec les sphères doublement tangentes dont elle est l'enveloppe ([**Darboux 1873a**, 113])[173]. En traduisant cette propriété en équation, et en notant (α, β, γ) le centre de la sphère[174], il aboutit aux trois "*conditions*" suivantes qui dépendent d'un paramètre λ :

$$(\mathcal{G})\begin{cases} \dfrac{C^2}{\lambda - A} + \dfrac{C'^2}{\lambda - A'} + \dfrac{C''^2}{\lambda - A''} + D - \lambda^2 := L(\lambda) & = 0 \\ \dfrac{\alpha^2}{\lambda - A} + \dfrac{\beta^2}{\lambda - A'} + \dfrac{\gamma^2}{\lambda - A''} & = 1 \\ \dfrac{C\alpha}{\lambda - A} + \dfrac{C'\beta}{\lambda - A'} + \dfrac{C''\gamma}{\lambda - A''} + \lambda & = -\delta^2 \end{cases}$$

La première équation, de degré 5 en λ, répond analytiquement à la description géométrique initiale de Moutard des différentes générations des cyclides : les 5 racines correspondent chacune à un mode différent. Pour un mode fixé (c'est-à-dire une racine λ_i de la première équation), Darboux détaille le sens des deux autres égalités : la deuxième correspond à "*l'équation du lieu des centres des sphères doublement tangentes*", c'est donc la quadrique déférente (A_i). La troisième détermine alors le rayon de ces sphères et permet à Darboux d'en connaître l'équation complète ([**Darboux 1873a**, 115]). La particularité de ces sphères est d'avoir "*même centre radical*"[175]. La détermination de ce centre permet au géomètre d'aboutir à l'équation de la sphère directrice (S_i) :

$$(S_i) \quad : \quad x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2Cx}{\lambda - A} + \frac{2C'y}{\lambda - A'} + \frac{2C''z}{\lambda - A''} - 2\lambda = 0$$

Ce que "*remarque*" alors Darboux - mais qu'il ne décrit pas explicitement dans son mémoire - c'est que pour deux modes de génération λ_i et λ_j, la première équation de condition permet d'obtenir la relation :

$$\frac{C^2}{(\lambda_i - A)(\lambda_j - A)} + \frac{C'^2}{(\lambda_i - A')(\lambda_j - A')} + \frac{C''^2}{(\lambda_i - A'')(\lambda_j - A'')} + \lambda_i + \lambda_j = 0$$

173. Nous reviendrons ultérieurement dans 5 sur la double tangence aux surfaces cyclides des plans et des sphères.

174. L'équation de la sphère considérée est notée : $x^2+y^2+z^2 = 2(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta^2)$ ([**Darboux 1873a**, 114]).

175. L'existence d'un centre radical n'est en général pas obtenue dès que le nombre de sphères dépasse 4 : c'est en effet l'intersection de tous les plans radicaux - où les points sont de même puissance par rapport à deux sphères - obtenus en considérant les sphères deux à deux.

Or cette équation est précisément celle qui caractérise l'orthogonalité des deux sphères directrices (S_i) et (S_j). Dans son mémoire, Darboux se contente de noter brièvement cette propriété, et en ajoute immédiatement une vérification géométrique :

> Sans entrer dès à présent dans l'examen détaillé des relations entre les cinq modes de génération, il sera bon [...] de remarquer que les cinq sphères directrices (S_i) sont orthogonales.
>
> Cette proposition se vérifie sans difficulté sur les équations précédentes, ainsi que la suivante : Étant donné un des modes de génération, défini par $(S_i), (A_i)$, les centres des quatre autres sphères sont les sommets du tétraèdre conjugué à (S_i) et à (A_i).
>
> [**Darboux 1873a**, 117]

Darboux relie ainsi sans plus de détail l'orthogonalité mutuelle des cinq sphères directrices à une propriété de conjugaison du tétraèdre formé par les centres de quatre d'entre elles. Pour comprendre cette propriété et le fait que Darboux l'énonce sans plus de preuve, nous devons souligner qu'il est extrêmement vraisemblable que cette propriété résulte d'un ajout que le géomètre opère entre la première et la seconde version de son mémoire [**Darboux 1873a**]. La première rédaction date en effet de Juin 1869, et tout porte à croire que Darboux n'a soit pas aperçu alors la propriété d'orthogonalité des 5 directrices des cyclides, soit plutôt qu'il n'en a en fait pas encore décelé tout l'intérêt géométrique. En effet, aucune mention n'est faite envers l'orthogonalité mutuelle des cinq sphères ou envers le système de coordonnées pentasphériques qui va en découler dans les présentations faites par Gaston Darboux et par Jules Hoüel de la première version du mémoire ([**Darboux 1869b**], [**Hoüel 1870b**]). C'est donc entre Juin 1869 et le début de l'année 1872 que Darboux se concentre sur l'étude particulière des systèmes de sphères orthogonales, après qu'il a mis au jour l'existence et les liens de ce système avec les surfaces cyclides et leurs sphères directrices. Sa recherche est ainsi motivée par la compréhension géométrique des propriétés des cyclides et par leur description même, en mettant dorénavant au premier plan les sphères directrices orthogonales.

Si la reconnaissance de l'orthogonalité des cinq sphères directrices des cyclides est une propriété nouvelle pour Darboux, elle a également été reconnue d'une manière tout à fait indépendante et quasi-simultanée par un second géomètre : l'irlandais John Casey.

FIGURE 29. John Casey

Originaire de Kilbehenny dans la partie Sud de l'Irlande où il naît en 1820, John Casey est d'abord un simple professeur d'école avant d'être appelé à diriger en 1854 la nouvelle *Central Model Schools* de Kilkenny. Ses premières recherches sur les polygones inscrits dans le cercle vont le faire rentrer en contact avec George Salmon et Richard Townsend, lesquels le persuaderont d'intégrer "leur" Trinity College à Dublin : le professeur Casey redevient ainsi étudiant à l'âge de 38 ans. Ses études prennent fin quatre ans plus tard, mais Casey ne prendra pas part à l'enseignement du Trinity College, dans un premier temps faute d'offre en ce sens, puis dans un second temps par choix. Il sera pour commencer directeur des études scientifiques à la Kingstown Schools entre 1862 et 1873, puis professeur de mathématiques à l'Université catholique de Dublin - qu'il préfère au Trinity College en 1873 - puis à l'University College de Dublin après 1881.

En Mai 1871, John Casey présente un mémoire extrêmement détaillé sur les surfaces cyclides et les cycliques sphériques - qu'il nomme "*sphero-quartics*" ([**Casey 1871**]). Ce mémoire sera enrichi de nombreuses remarques et notes de bas de page en Janvier 1872, après sa relecture par Arthur Cayley, au moment de sa publication dans les "*Philosophical Transactions*" de Londres. S'il en sait l'existence, Darboux n'a pas connaissance du contenu du travail de Casey au moment de publier son propre travail à l'été 1872. Il note avec la référence au mémoire de l'irlandais : "*Je ne connais ce Mémoire que par la mention qu'en a faite M. Cayley dans les Comptes Rendus*" ([**Darboux 1873a**, 337]).

Casey effectue son travail sur les cyclides en employant le système de coordonnées tétraèdrales. Il nomme quatre sphères, de rayons variables, centrées aux sommets du tétraèdre de référence les "*sphères de référence*". La première partie de son étude des cyclides ([**Casey 1871**, 586-602]) repose sur l'hypothèse d'orthogonalité mutuelle des quatre sphères de référence qui sont notées α, β, γ et δ. En exploitant le système de coordonnées tangentielles, il détermine à partir de l'équation d'une cyclide ayant une déférente donnée que la sphère d'inversion U est donnée par "*le Jacobien de α, β, γ et δ*" ([**Casey 1871**, 598]). Pour poursuivre la détermination de U, Casey étudie le cas particulier où la quadrique déférente A - qu'il nomme (malheureusement) "*focal quadric*" - vient elle-même coïncider avec la sphère d'inversion U. Dans ce cas, le calcul de l'équation tangentielle se simplifie à l'extrême et devient :

$$U^2 = -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)$$

C'est à l'aide de cette expression particulière que Casey écrit l'équation de la cyclide (C), ou plutôt sa *forme canonique* :

$$C = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 + eU^2 = 0 \ ,$$

égalité dans laquelle "*chacune des sphères de référence est coupée orthogonalement par toutes les autres*" ([**Casey 1871**, 600]). Néanmoins, à ce stade du mémoire, les sphères de référence sont au nombre de 4 : la directrice U n'en fait pas partie. Ceci est illustré par la forme que le mathématicien irlandais donne dans le paragraphe qui suit aux équations des cyclides et des déférentes. Ces expressions sont au nombre de 5, constituées chacune de 4 des 5 sphères intervenant dans la définition de la cyclide.

L'étude des cycliques sphériques, qui constitue la seconde section du travail de Casey reste appuyée sur la considération "*d'une cyclide* (C) *exprimée en termes de quatre sphères* α, β, γ, δ *qui sont mutuellement orthogonales*" ([**Casey 1871**, 604]). C'est dans le chapitre dédié aux centres d'inversion des cyclides ([**Casey 1871**, 618]) que Casey considère U comme une sphère dite de référence, formant avec les quatre précédentes un système de cinq sphères. Il énonce alors la proposition centrale suivante :

> Les cinq sphères α, β, γ, δ, U de la forme canonique sont mutuellement orthogonales, et si l'on prend le centre de α comme centre d'inversion, et α pour sphère d'inversion, chacune des cinq sphères sera transformée en elle-même. [...] D'où le théorème suivant : "une cyclide est une surface anallagmatique, dont les centres des cinq sphères de la forme canonique sont les cinq centres d'inversion".
>
> [**Casey 1871**, 619]

L'énoncé du théorème de Casey paraît surprenant dans la mesure où il ne paraît pas identifier exactement les sphères d'inversion et les sphères qu'il nomme de référence. L'énoncé stipule en effet uniquement que leurs centres coïncident. Le fait que Casey n'identifie pas exactement ces sphères paraît provenir du flou initial portant sur la définition des sphères de référence, en lien avec le tétraèdre de référence. Les rayons des sphères de référence étaient en effet "*incorporés dans les variables*" ([**Casey 1871**, 599]), ce qui revient peu ou prou à dire que par homogénéité ces sphères étaient *définies au rayon près*. C'est ce qui entrave l'identification des sphères d'inversion et des sphères de référence : ces-dernières n'étant étudiées chacune qu'à une constante près, seuls leurs centres sont fixés et sujets à identification. Le fait de laisser variable les rayons des sphères de référence paraît justifier pour Casey l'existence d'une situation d'orthogonalité mutuelle des quatre sphères de départ, une configuration géométrique toujours évoquée comme possible mais dont il n'étudie pas explicitement la faisabilité.

C'est en réalité dans les nombreuses notes de bas de page qu'il faut rechercher la preuve d'orthogonalité des sphères directrices des cyclides, notes dont nous avons évoqué qu'elles avaient été écrites quelques mois plus tard par John Casey suite à la relecture de Cayley. Une longue note, [**Casey 1871**, 605-610], effectue un développement analogue à celui donné par [**Darboux 1873a**, 114] consistant à exprimer en coordonnées cartésiennes les 5 quadriques déférentes et les 5 sphères directrices d'une même cyclide. Considérant une cyclide décrite par une déférente (A) et une directrice (S) données, le mathématicien irlandais détermine que les quatre autres modes de générations dépendent des quatre racines du discriminant de $\mu A + S$. Détaillant alors les expressions d'un quelconque des quatre autres modes de génération $((A'), (S'))$, il arrive à la conclusion d'orthogonalité des sphères en remarquant que le carré de la distance de leurs centres équivaut à la somme des carrés de leurs rayons : c'est le théorème de Pythagore.

Casey prouve ainsi bien par une voie tout à fait analytique l'orthogonalité des cinq sphères directrices d'une cyclide. L'existence même de cet ajout prouve d'ailleurs qu'il n'était pas parvenu à cette conclusion par la voie algébrique utilisée en premier lieu dans sa rédaction et fondée sur l'existence de quatre sphères de référence, dont les rayons étaient laissés variables pour justifier la considération du cas particulier d'orthogonalité. Néanmoins, il ne souligne pas particulièrement l'obtention de ce résultat, qu'il n'utilisera pas dans la suite de son travail. C'est avant tout l'orthogonalité des quatre sphères de référence qui joue un grand rôle pour Casey dans l'analyse des propriétés focales des cycliques sphériques. Nous verrons en 5.1 que c'est l'utilisation des propriétés des cinq sphères directrices, et de leur orthogonalité en particulier, qui lui fera défaut dans l'étude des propriétés focales des cyclides.

John Casey semble ainsi être convaincu de l'orthogonalité des cinq directrices des cyclides, mais sa première approche géométrique ne lui permet pas de conclure. Une seconde approche, analytique, lui permettra d'obtenir ce résultat. Mais il manquera alors de revenir sur les conséquences de ce résultat pour la partie déjà rédigée de son travail. D'une manière globale, Casey ne se penche pas sur les propriétés des systèmes de sphères, et en particulier des systèmes de sphères orthogonales. L'ambiguïté qui en résulte se répercute sur son approche géométrique des cyclides, où les résultats sont pourtant largement dépendants du "*système de référence*" constitué par des sphères. En conséquence, Casey ne considérera pas les expressions faisant intervenir les "*cinq sphères de référence*" de la forme canonique comme des *équations valables*. Ce qu'il adoptera comme *équations* ne feront intervenir (au plus) que quatre des cinq sphères. Ainsi par exemple le paragraphe suivant la proposition d'orthogonalité sus-citée des sphères α, β, γ, δ, U commencera par l'énoncé : "*soit les sphères de référence α, β, γ, δ exprimées en coordonnées rectangulaires...*" ([**Casey 1871**, 619]).

Cette remarque permet de valoriser le contraste existant entre les travaux de Casey et ceux de Darboux. Contrairement à l'irlandais, Darboux va diriger ses recherches vers l'étude des systèmes de sphères dans l'espace, pour mieux fonder son étude des surfaces cyclides et la faire bénéficier de ses résultats. La guerre franco-prussienne de 1870, qui retarde la publication de son mémoire, lui permettra alors de l'enrichir de nombreuses propositions nouvelles liées à son étude en profondeur de la géométrie des systèmes de sphères.

Les principales recherches et les résultats de Darboux relatifs aux systèmes de sphères dans l'espace, indépendamment des surfaces cyclides, sont contenus dans un mémoire de Mars 1872 : [**Darboux 1872b**]. Il doit être remarqué que le géomètre relie ces recherches à la géométrie du tétraèdre. Il bénéficie ainsi des nombreux travaux sur ce sujet de mathématiciens comme Cayley, Baltzer, Borchardt, Joachimstahl ou Siebeck, et des outils algébriques appliqués à ces recherches[176]. Mais Darboux apporte une nouvelle dimension à ces travaux qui en était alors absente : l'intérêt pour les systèmes de sphères mutuellement orthogonales. Il annonce ainsi en préambule :

176. Une fois n'est pas coutume, l'introduction et le contenu du mémoire de Darboux présentent de nombreuses références envers les travaux liés à la géométrie du tétraèdre.

> Peut-être n'avait-on pas eu l'idée de traiter pour les sphères quelques-unes des questions que j'examine : équation de la sphère orthogonale à quatre autres [dite radicale], rayon de cette sphère, relations entre les angles des sphères et des cercles, condition pour que cinq sphères soient orthogonales à une même sphère. Les formules établies pourraient se démontrer directement ; il m'a paru intéressant d'en conserver le lien avec la théorie des formes homogènes du second degré.
>
> [...] dans les dernières pages se trouve établie une formule que j'avais rencontrée incidemment, et qui lie les puissances d'un point par rapport à cinq sphères. Cette équation est homogène et du second degré [... et] se rapporte à tout système de coordonnées homogènes dans lequel on emploie, pour déterminer un point, cinq coordonnées homogènes liées par une équation du second degré.
>
> [**Darboux 1872b**, 325]

La géométrie du tétraèdre avait, au cours du XIXème siècle, bénéficié par deux fois d'un regain d'intérêt significatif en lien avec l'application de nouveaux outils mathématiques. Tout d'abord, les coordonnées barycentriques de Möbius placent le tétraèdre comme la figure de référence de ces systèmes de coordonnées homogènes dans l'espace ([**Möbius 1827**]). Etant donné un tétraèdre non aplati de sommets (P_1, P_2, P_3, P_4), un point M de l'espace "*peut toujours être considéré comme centre de gravité de quatre masses* (μ_i) *placées au sommet du tétraèdre*" ([**Darboux 1872b**, 326]) : $M = \sum_i \mu_i P_i$ [177]. Ensuite, les propriétés métriques, surfaciques et volumiques du tétraèdre deviennent à partir des années 1850 un objet d'étude privilégié dans l'application de la théorie des déterminants. C'est ce dont atteste en particulier le contenu de l'ouvrage du mathématicien allemand Richard Baltzer ([**Baltzer 1861**]). C'est ainsi, par exemple, que les mathématiciens Ferdinand Joachimsthal et Arthur Cayley ont exprimé le volume du tétraèdre à l'aide d'un déterminant [178]. C'est également à l'aide du déterminant que Borchardt étudie le problème posé par Lagrange du tétraèdre de volume maximal dont les aires des faces sont données [179]. Darboux va alors systématiser les études métriques et géométriques relatives au tétraèdre - c'est-à-dire aux groupes de 4 points de l'espace - grâce à la théorie algébrique des invariants des formes quadratiques et bilinéaires. Ces outils algébriques restant tout aussi valables et analogues lorsque le nombre de variables augmente, cela permettra au géomètre d'étendre

177. Les points à l'infini sont caractérisés par la relation $\sum_i \mu_i = 0$. Pour plus de détails sur ces coordonnées, voir [**Loria 1948**, 249].
178. Voir [**Baltzer 1861**, 182].
179. Voir les *Mémoires de l'Académie de Berlin* des années 1865 et 1866.

ces études à des groupes de sphères ainsi qu'à des groupes de points comportant plus de 4 éléments.

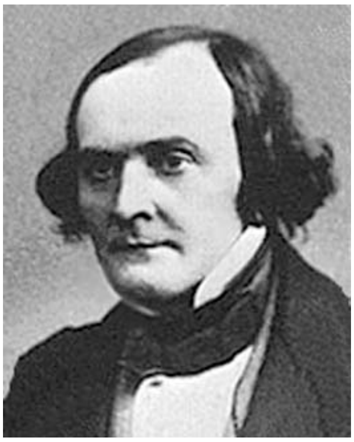


FIGURE 30. Arthur Cayley

Né en 1821 à Richmond dans le conté anglais de Surrey, Arthur Cayley passe les premières années de son enfance à Saint-Pétersbourg avant que sa famille ne revienne en 1829 s'installer près de Londres. Ses études brillantes au King's College se poursuivent dans le prestigieux Trinity College de Cambridge jusqu'en 1842. Ayant reçu certaines distinctions en tant qu'étudiant dont le premier Prix Smith, Cayley obtient un poste temporaire pour enseigner les mathématiques au Trinity College. Mais la précarité de cette position changera temporairement sa carrière : en 1845, Cayley quitte l'enseignement et se consacre au droit. C'est durant ses études de droit qu'il fait la connaissance de James Joseph Sylvester dont il deviendra un proche ami, ainsi que de l'irlandais George Salmon qu'il rencontre à Dublin lors d'un cours donné par William Rowan Hamilton sur les quaternions [180]. Devenu avocat en 1849, Arthur Cayley n'en perd néanmoins pas sa passion pour les mathématiques, et lorsqu'il obtient l'opportunité de se consacrer à nouveau à l'enseignement et à ses recherches en 1863 à l'Université de Cambridge il ne laisse pas passer sa chance. Il enseignera alors à Cambridge jusqu'à la fin des années 1880 [181]. Nous aurons l'occasion de souligner dans notre travail, à plusieurs reprises, la proximité des recherches de Cayley avec celles de Gaston Darboux.

Les travaux liant le tétraèdre et les sphères effectués dans les années 1860 concernent principalement deux types de sphères : les sphères inscrites dans les tétraèdres (dites "*sphères des combles*" [**Comberousse Rouché 1922**, 658]), et les sphères circonscrites aux tétraèdres. Paul Siebeck s'intéresse ainsi aux premières, et relie ces études aux propriétés existant entre deux tétraèdres ([**Siebeck 1863**]). Arthur Cayley s'intéresse quant à lui aux sphères circonscrites et aux conditions de cocyclicité des points sur des sphères

180. Les premiers échanges entre Cayley et Salmon ont donné suite au résultat mathématique établissant en 1849 l'existence de 27 droites sur une surface cubique. Voir [**Lê 2015**], et notre étude ultérieure en 5.3.
181. Pour plus de renseignements sur Cayley, voir la biographie [**Crilly 2006**].

de rayons nuls [182]. Il étend en outre ses recherches aux relations existant entre les distances de 5 points de l'espace ([**Cayley 1868b**]). Cayley avait également rencontré par ailleurs des propriétés géométriques d'orthogonalité relatives aux droites joignant les milieux des arêtes opposées dans les tétraèdres dont les arêtes opposées étaient de même longueur ([**Cayley 1866**]). Cependant cette recherche était restée sans suite.

Dans son mémoire "*sur les groupes de points et de sphères*", Darboux se propose d'étudier une question légèrement différente que celle qu'avait envisagée Cayley en 1866 : "*recherche des conditions pour lesquelles les arêtes opposées d'un tétraèdre sont perpendiculaires*" ([**Darboux 1872b**, 330]). Il commence ainsi par donner la formule générale liant les distances $\sqrt{d_{ij}}$ des sommets du tétraèdre aux angles formés par les couples d'arêtes opposées [183]. Dans le cas de l'angle droit, Darboux peut simplifier la formule et obtenir la relation :

$$d_{12} + d_{34} = d_{13} + d_{24} = d_{14} + d_{23}$$

Darboux remarque que l'orthogonalité de deux couples d'arêtes opposées suffit pour en conclure la propriété sur le dernier couple. Surtout, le géomètre de Nîmes va relier cette propriété à une configuration géométrique faisant intervenir une sphère. Il va en effet montrer qu'"*on arrive aux mêmes résultats en exprimant qu'il y a une sphère conjuguée au tétraèdre*" ([**Darboux 1872b**, 330]). Ce que Darboux signifie par cette énoncé est l'existence d'une sphère pour laquelle le tétraèdre est *autopolaire* : chaque sommet est le pôle de la face opposée dans la transformation par polaires réciproques liée à cette sphère [184]. C'est cette proposition qui fait le lien entre cette étude générale et la remarque exprimée dans le mémoire sur les surfaces cyclides connectée à l'orthogonalité des directrices. Mais c'est également cet énoncé qui va relier intimement la théorie des tétraèdres à celle des systèmes de sphères.

La preuve de Darboux, algébrique, est basée sur le lien entre la "*théorie des formes homogènes du second degré*" - que nous appelons les formes bilinéaires et quadratiques - et la théorie des polaires réciproques. Dans le système des coordonnées homogènes barycentriques, Darboux exprime que l'équation d'une sphère quelconque est de la forme :

$$\sum d_{ik}\mu_i\mu_k - (\sum \mu_i)(\sum \nu_i\mu_i) = 0$$

Il utilise ensuite la condition suivante : si le tétraèdre est autopolaire, "*on pourra disposer des quantités ν_i de telle manière que les rectangles disparaissent*". L'équation doit ainsi pouvoir être identifiée à une forme homogène du second degré, mise sous une forme réduite (ou "*canonique*" pour employer un anachronisme). En égalant les deux expressions, Darboux exprime le résultat sous la forme d'une condition d'écriture des carrés des distances d_{ij} entre les sommets du tétraèdre :

$$d_{ij} = \nu_i + \nu_k \qquad (\mathcal{A})$$

182. Ce cas correspond en effet géométriquement à une réduction de la sphère circonscrite au tétraèdre en un point.

183. Darboux donne la formule en ajoutant "*qu'on la démontrera sans peine*". On peut l'obtenir en transformant le produit scalaire des arêtes opposées par des relations de Chasles.

184. Voir pour plus de détails [**Comberousse Rouché 1922**, 662]. A propos du lien entre inversion et transformation par polaires réciproques, voir [Chap.2,7.2].

Il remarque pour finir que cette écriture "*rejoint*" les conditions d'égalité des sommes des carrés des longueurs des arêtes opposées. Les tétraèdres particuliers dont Darboux inaugure ici l'étude seront appelés par la suite des *tétraèdres orthocentriques*[185] en vertu de la propriété suivante : leurs hauteurs sont concourantes. Ils possèdent en effet un *orthocentre*, ce qui n'est pas le cas d'un tétraèdre quelconque. Darboux ne formulera cette remarque sous la forme que nous lui donnons que dans un second temps : elle est en effet tout à fait équivalente à celle qui affirme le caractère autopolaire du tétraèdre. Les hauteurs coïncident ainsi, dans la réciprocité polaire, avec les droites normales aux faces du tétraèdre passant par le centre de la sphère de conjugaison.

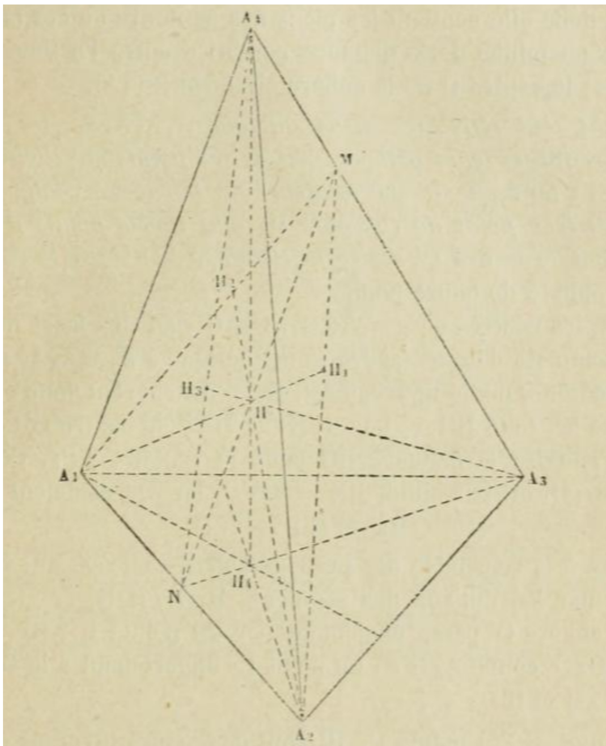


FIGURE 31. Un tétraèdre orthocentrique[186]

Fort de cette étude particulière, Darboux en étudie la généralité en se penchant sur la question suivante :

> Quels sont tous les systèmes de points dans l'espace pour lesquels la distance de deux points i,k s'exprime par les formules $(\mathcal{A})$?
>
> [**Darboux 1872b**, 331]

Remarquant que d'après son étude précédente, tout sous-ensemble de points contenant les sommets $iki'k'$ d'un tétraèdre possédera ses arêtes opposées perpendiculaires, Darboux conclue que le nombre maximum de tels points est 5 : une droite (ik) doit en effet être

185. Voir le vocable français dans [**Comberousse Rouché 1922**]. On retrouve les "*orthocentric tetrahedron*" dans [**Coolidge 1916**] ou encore dans [**Court 1928**].
186. Ce dessin provient du *Traité de Géométrie* de 1922 [**Comberousse Rouché 1922**].

perpendiculaire à toutes les droites formées par les couples de points ne faisant intervenir ni i ni k. Les points autres que ces deux derniers sont donc coplanaires, et de par les relations de perpendicularité il ne peut en exister plus de 3. Darboux retrouve ainsi la configuration formée par les sommets d'un tétraèdre orthocentrique et de l'orthocentre de celui-ci, et cette configuration apparaît alors comme la plus générale répondant à la question. Il ajoute en outre à cette conclusion la propriété géométrique des sphères centrées en ces points qui l'avait amenée en premier lieu à cette étude :

> 1) le nombre total des points ne pourra dépasser cinq
>
> 2) ces points formeront un système dans lequel chacun d'eux sera le point de rencontre des hauteurs du tétraèdre formé par les quatre autres. On voit que la symétrie est complète entre ces cinq points. Si de chacun d'eux comme centre avec un rayon égal à $\sqrt{\nu_i}$ pour le point i on décrit une sphère, on obtient cinq sphères, et les équations $(\mathcal{A})$ expriment que deux quelconques de ces sphères sont orthogonales. Ainsi les cinq points forment les centres de cinq sphères orthogonales, et d'ailleurs, en exprimant qu'il y a entre leurs distances la relation qui lie cinq points de l'espace, on aura l'équation :
>
> $$\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\frac{1}{\nu_3}+\frac{1}{\nu_4}+\frac{1}{\nu_5}=0$$
>
> qui a lieu entre les carrés des inverses des rayons des cinq sphères.
>
> [**Darboux 1872b**, 331]

Darboux emprunte ici la "*relation liant les cinq points de l'espace*" à l'article de 1868 de Cayley, qu'il va néanmoins retrouver dans la suite. Avec ces premiers résultats, Darboux donne ainsi les réponses à plusieurs nouvelles questions qui lui apparaissaient après avoir remarqué l'orthogonalité des cinq sphères directrices des cyclides : quel est le nombre maximal de sphères se coupant mutuellement à angles droits ? Combien d'entre elles peuvent être réelles ? Existe-t-il une configuration géométrique qui les caractérise ? Ces problèmes trouvent ici leurs solutions : le nombre maximum de sphères orthogonales deux à deux est 5, dont 4 au maximum sont réelles d'après la relation qui lie les inverses des carrés des rayons. On peut d'ailleurs souligner ici qu'hormis cette remarque, Darboux ne fait à aucun moment la distinction entre les sphères réelles et imaginaires : les imaginaires sont "*introduits franchement et complètement*" dans sa Géométrie ([**Darboux 1908**, 110]) sans qu'il soit besoin de rattacher leur interprétation au réel comme c'est souvent le cas pour son maître Chasles. Finalement, d'un point de vue géométrique, la position des 5 centres est bien particulière puisque 4 quelconques d'entre eux définissent un tétraèdre orthocentrique dont le cinquième est l'orthocentre. Autrement formulé par Darboux, étant donnée l'une des sphères, "*les centres des quatre autres sphères sont les sommets du tétraèdre conjugué*" à cette sphère : c'est bien la proposition énoncée par le géomètre pour fonder du point de vue géométrique l'orthogonalité des sphères directrices des cyclides ([**Darboux 1873a**, 117]).

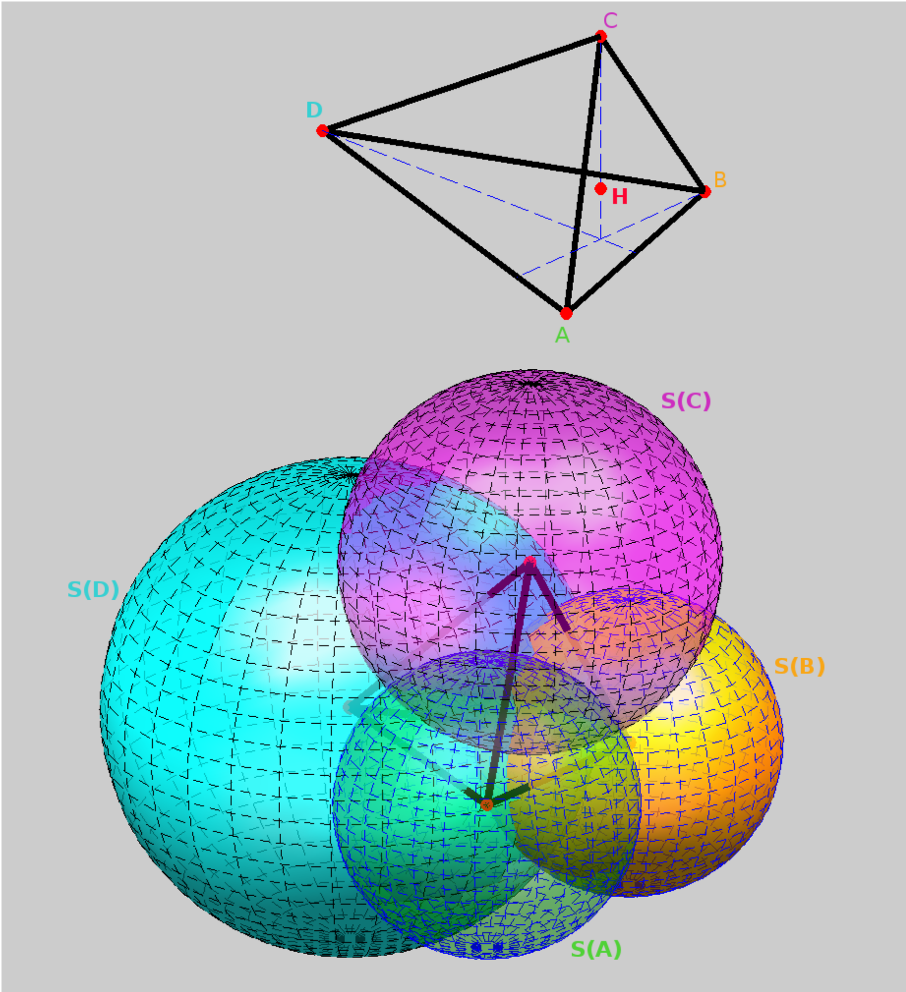


FIGURE 32. Un tétraèdre orthocentrique et le système des cinq sphères orthogonales associé [187]

Les études des tétraèdres d'une part et des systèmes de sphères d'autre part sont ainsi tout à fait imbriquées dans la recherche de Darboux. Ses propos à Hoüel à l'hiver 1872 en témoignent, tenus au moment de clôturer la rédaction de son mémoire :

> Ma grippe, grâce au ciel, est à peu près terminée. Mais je suis aux prises avec une sphère et un tétraèdre qui ne veulent pas entendre raison. Ces 2 figures doivent être de la droite.
>
> Lettre datée du Mardi 22 Février 1872 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

187. La cinquième sphère centrée en l'orthocentre H du tétraèdre est imaginaire : le carré de son rayon est strictement négatif.

> Je suis depuis quelque temps dans un état de ramollissement remarquable. Mes tétraèdres et mes sphères sont tenaces. Si j'osais je les qualifierais de durs à cuire, mais je n'ose pas.
>
> Lettre datée du Mercredi 28 Février 1872 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

C'est en s'inspirant des travaux développés par Cayley et Siebeck que Darboux a poursuivi ses recherches jusqu'à pouvoir mettre au jour une "*identité [qui] contient toute la théorie des sphères orthogonales*" ([**Darboux 1872b**, 390]). Les mathématiciens britanniques et allemands ont en effet, dans le cadre de leurs travaux relatifs au tétraèdre, placé le déterminant comme outil central dans leurs recherches et dans l'expression de leurs formules. Mais Darboux a développé pour ces mêmes travaux une approche systématique, en un mot une méthode, en y ajoutant un ingrédient algébrique : la théorie des invariants des formes homogènes (de degré 2) [188]. Il explique ainsi :

> je me suis aperçu qu'il pouvait y avoir, dans bien des cas, avantage à considérer ces formules, en les rattachant à certaines formes homogènes qui se présentent naturellement dans cette théorie. Par exemple, pour le tétraèdre, cette forme homogène est celle qui, égalée à zéro, représenterait la sphère circonscrite. Pour les questions relatives à deux groupes de points, les formes homogènes contiennent deux séries de variables indépendantes [...] Alors les équations connues, et d'autres peut-être nouvelles, se déduisent de la considération des invariants et des covariants de ces formes.
>
> [**Darboux 1872b**, 323]

Ainsi les propriétés métriques et géométriques des tétraèdres doivent, selon Darboux, découler des invariants algébriques de certaines formes bilinéaires. La considération de ces formes bilinéaires dans l'étude du tétraèdre n'est pas nouvelle, mais c'est le degré de généralité qu'il leur propose qui est novateur. C'est en effet leur étude systématique avec les outils algébriques notamment développés par Cayley et Sylvester qui doit révéler pour Darboux les propriétés géométriques. Cette approche se révélera en outre susceptible de généralisations sous plusieurs points de vue. Par ailleurs, ces études entreprises par le géomètre nîmois revêtent un aspect exceptionnel puisqu'en France, la théorie algébrique des invariants n'est alors absolument pas développée [189].

Il faut attendre le cœur du mémoire pour percevoir l'influence des travaux d'Arthur Cayley sur Darboux. Les travaux de Cayley rassemblent en effet à la fois les recherches géométriques portées sur le tétraèdre ainsi que le développement de la théorie des invariants

188. La théorie algébrique des invariants a principalement été développée par les britanniques James Joseph Sylvester et Arthur Cayley, l'italien Francesco Brioschi et l'allemand Paul Gordan au début de la seconde moitié du XIXème siècle. Un covariant d'une forme est défini comme étant une fonction polynômiale en les mêmes variables que celles de la forme initiale, dont les coefficients sont des polynômes en les coefficients de cette forme, et qui ne varie que d'un facteur multiplicatif lorsqu'on effectue un changement de coordonnées dans la forme initiale. Un contre-variant d'une forme présente quant à lui un changement différent qui induit une forme de dualité avec le covariant (voir [**Hilbert 1993**] pour les définitions précises). Pour plus de détails historiques et techniques, on consultera [**Crilly 1986**] et [**Crilly 1988**], [**Parshall 1989**] ainsi que la biographie de Sylvester [**Parshall 2006**].

189. Voir [**Gispert 1996b**, 399]. Nous y reviendrons notamment en [Chap.4,2.1].

des formes bilinéaires, deux domaines dont Darboux propose ici d'effectuer le rapprochement. Il détaille le procédé algébrique général :

> [Ayant] les deux formes bilinéaires [...] transformées l'une de l'autre par [d]es substitutions [on] n'aura donc plus, pour obtenir les équations cherchées, qu'à appliquer les notations relatives aux invariants et covariants des formes bilinéaires.
>
> [...] les formes homogènes à deux séries de variables indépendantes [i.e. bilinéaires] que nous rencontrons ici ont été considérées par M. Cayley au début même de la théorie des invariants. On connaît d'une manière suffisante pour le but que nous nous proposons leurs invariants et leur système de formes adjointes.
>
> [**Darboux 1872b**, 350]

Darboux détaille rapidement l'exemple générique simple dont il va ensuite se servir : la forme bilinéaire $((x_i), (x'_i)) := \sum a_{ij} x_i x'_j$. Il exprime le premier invariant de cette forme par la formule $\sum \pm \Pi_i a_{ii}$ ainsi que le premier contrevariant (qu'il nomme "*contrevariant simple*") via le déterminant :

$$\begin{vmatrix} & & & & m_1 \\ & \Large{|a_{ij}|} & & & m_2 \\ & & & & m_3 \\ & & & & m_4 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 & m'_4 & 0 \end{vmatrix}$$

Les coefficients (m_i, m'_i) dépendent des substitutions opérées, et on peut noter que Darboux sous-entend par la taille de l'écriture du contrevariant ci-dessus que la forme étudiée est "*quaternaire*", c'est-à-dire que chaque série de variables est composée de quatre variables. Il explique enfin rapidement les procédés d'obtention des autres invariants et contrevariants ([**Darboux 1872b**, 350]). Ce sont ces développements algébriques génériques que Darboux emprunte ainsi à Cayley, et qui se révèlent fondamentaux dans l'emploi qu'en donne l'ancien doctorant de Chasles.

Pour étudier les relations de distances au sein d'un groupe de points ou entre les sommets de deux tétraèdres, les coefficients des formes homogènes étaient les carrés des distances entre les points d_{ij}. C'est ainsi ce que l'on retrouve chez Siebeck ou dans les déterminants de Cayley ([**Cayley 1868b**]). Pour étudier les relations entre les groupes de sphères, Darboux va étendre la notion de "*puissance*" - notion métrique alors bien connue des géomètres reliant un point et une sphère - au cas de deux sphères. Il définit ainsi la "*puissance commune de deux sphères*" :

> Soient deux sphères de rayons R, R' ayant d pour distance des centres. L'expression $d^2 - R^2 - R'^2$ se réduit au carré de la distance quand les sphères se réduisent à des points. Elle est nulle quand les deux sphères sont orthogonales. Comme lorsqu'une des deux sphères se réduit à un point, l'élément précédent devient la puissance de ce point par rapport à l'autre sphère, nous l'appellerons *puissance commune* des deux sphères.
>
> [**Darboux 1872b**, 350]

Cette nouvelle *puissance commune* des sphères va venir remplacer chez Darboux le carré des distances chez Cayley. Darboux considère ainsi deux groupes de n sphères, $(\mathcal{S}_i)$

et $(\mathcal{S}'_i)$, et note k_{ij} la puissance commune de $\mathcal{S}_i$ et $\mathcal{S}'_j$. Il forme ensuite l'expression de la forme homogène :

$$\sum -\frac{k_{ij}}{2}\mu_i\mu'_j$$

C'est l'étude des invariants et des contrevariants de cette forme (relatifs à une substitution bien spécifique) qui permet alors à Darboux de trouver des formules reliant les groupes de n sphères, formules dont certaines sont déjà connues pour $n \leq 4$, mais qui seront nouvelles pour $n \geq 5$[190]. Dans le cas d'une forme homogène quaternaire ($n = 4$), Darboux retrouve notamment grâce au contrevariant les équations de Siebeck relatives à la puissance commune des sphères inscrites à deux tétraèdres[191], ainsi qu'une formule qu'il attribue à Von Staudt reliant les distances de deux groupes de quatre points de l'espace aux volumes des tétraèdres qu'ils forment ([**Darboux 1872b**, 356]).

Dans le cas $n = 5$, l'étude du contrevariant de la même forme homogène (qui de *quaternaire* est devenue *quinaire*) fait aboutir Darboux à un déterminant qui lui est familier :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & & & \\ 1 & & & & & \\ 1 & & \multicolumn{3}{c}{\Big|k_{ij}\Big|} & \\ 1 & & & & & \\ 1 & & & & & \end{vmatrix} \qquad \text{[Darboux 1872b, 364]}$$

Darboux donne l'interprétation de ce déterminant comme étant la relation générale entre les puissances communes de cinq sphères quelconques, mais en outre il remarque que "*c'est l'équation de M. Cayley*" si l'on remplace les puissances par des distances, ce qui revient à considérer les sphères comme étant de rayons nuls. On la retrouve en effet dans [**Cayley 1868b**, 133] avec les carrés des distances.

Pour déterminer des propriétés sur les systèmes de cinq sphères considérés de manière individuelle et non plus les uns en relation avec les autres, Darboux reprend la même étude en considérant cette fois que "*les deux groupes de cinq sphères se confondent*". En notant α_{ij} le cosinus de l'angle formé par les sphères $\mathcal{S}_i$ et $\mathcal{S}_j$, la puissance commune de ces deux sphères devient donnée par la formule $k_{ij} = -2R_iR_j\alpha_{ij}$. Darboux transforme ainsi la relation générale du contrevariant en le déterminant symétrique plus simple :

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_5} \\ \frac{1}{R_1} & & & & & \\ \frac{1}{R_2} & & & & & \\ \frac{1}{R_3} & & \multicolumn{3}{c}{\Big|\alpha_{ij}\Big|} & \\ \frac{1}{R_4} & & & & & \\ \frac{1}{R_5} & & & & & \end{vmatrix}, \quad \text{avec} \quad \alpha_{ii} = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji} \qquad \text{[Darboux 1872b, 384]}$$

Ceci lui permet de démontrer une relation liant les rayons de cinq sphères mutuellement orthogonales qu'il avait exprimée sans démonstration au début de son mémoire. Les sphères

190. Nous allons voir néanmoins que la forme homogène est légèrement modifiée par Darboux pour le cas $n = 6$.

191. Comparez [**Siebeck 1863**, 153] et [**Darboux 1872b**, 357]. On prendra garde à ce que Darboux écrit 24^2 lorsque Siebeck préfère 576.

du système sont en effet mutuellement orthogonales dès que $\alpha_{ij} = 0 = k_{ij}$ (pour $i \neq j$). Dans ce cas, Darboux peut développer le déterminant et retrouver la formule :

$$\sum(\frac{1}{R_i})^2 = 0$$

Par ailleurs, la poursuite de l'étude des invariants de la forme quinaire amène Darboux à d'autres résultats nouveaux comme l'obtention des équations de condition pour que cinq sphères données soient orthogonales à une même sphère. Cette relation revêt un certain intérêt pour le géomètre puisqu'il remarque qu'elle devient, "*quand les sphères se réduisent à des points, la condition nécessaire et suffisante pour que les cinq points de l'un des groupes soient sur une même sphère*" ([**Darboux 1872b**, 365]).

La méthode algébrique proposée par Darboux se révèle ainsi déjà particulièrement efficace. L'étude des invariants des formes homogènes quinaires formées par des coefficients correspondant à des puissances communes de sphères lui permet en effet d'en tirer de nouvelles formules d'orthogonalité des groupes de 5 sphères et de cocyclicité des groupes de 5 points. Nous pouvons souligner que l'étude de ce seul cas $n = 5$, conjuguée aux remarques préalables sur les tétraèdres orthocentriques, suffisent à elles seules à répondre aux questions soulevées par l'étude géométrique des surfaces cyclides. Elles donnent en effet le fondement de l'orthogonalité des cinq sphères directrices de ces surfaces, décrivent les conditions et les propriétés géométriques et algébriques qui caractérisent entièrement cette configuration. Le fait que Darboux poursuive son étude à l'ordre supérieur ($n = 6$) peut ainsi paraître d'abord surprenant, et doit être souligné dans le cadre de l'analyse de son identité scientifique en tant que chercheur. Cette volonté d'approfondir la méthode algébrique proposée enracine le rôle prépondérant de la sphère dans l'espace en la plaçant comme l'élément central de l'étude géométrique. Les propriétés des groupes de 5 sphères sont rattachées aux propriétés des groupes de points, la notion de puissance commune se substituant à la notion de distance. Mais ce n'est qu'avec l'étude des propriétés des groupes de 6 sphères que ces éléments vont acquérir aux yeux de Darboux la capacité génératrice nécessaire à la constitution d'un nouveau système de coordonnées.

Sans motiver cette extension, Darboux s'intéresse ainsi au cas d'un nombre de "*variables*" n strictement supérieur à 5. Il note la forme qu'il étudie :

$$\sum d_{ij}\mu_i\mu'_j$$

On peut remarquer qu'il est étonnant que Darboux réutilise les coefficients de distances d_{ij} plutôt que ceux des puissances communes k_{ij}, mais l'interprétation des formules va montrer qu'il intervertit librement les deux notions : ce sont, au stade de l'écriture de la forme, véritablement des paramètres muets. Parmi tous les invariants résultant de l'étude de ces formes homogènes (n étant quelconque supérieur à 6), les discriminants des formes et les mineurs des contrevariants ne font aboutir qu'à "*une [seule] formule distincte des précédentes ; mais elle est utile : c'est l'équation homogène :*

$$|d_{ij}| = 0 \quad \text{ou} \quad |k_{ij}| = 0 \quad , \quad i,j = 1,2,3,4,5,6.$$ [192] [**Darboux 1872b**, 365]

On constate bien que dans l'équation obtenue, Darboux échange librement distances et puissances. Il en va de même logiquement de son interprétation de cette équation puisque le géomètre décrit cette relation comme ayant lieu "*entre les distances mutuelles de deux*

192. Cette équation est obtenue par la nullité des mineurs des contrevariants de la forme homogène.

groupes de six points de l'espace, ou les puissances communes de deux groupes de six sphères". Le nombre de variables ayant dépassé 5, points et sphères deviennent pour ainsi dire traités sur un pied d'égalité. Ce qui distingue cette nouvelle relation, et ce sur quoi Darboux attire immédiatement l'attention, c'est son homogénéité. Il n'en allait en effet pas de même pour les formules précédentes.

Darboux détaille plusieurs conséquences de cette nouvelle équation. Par exemple, il l'applique à la détermination des tangentes communes à des groupes de sphères ([**Darboux 1872b**, 367]), ainsi qu'à la résolution d'un ancien problème de Géométrie sur les cercles dû à Steiner dans le plan que Darboux se propose d'étendre et de résoudre dans l'espace[193]. Mais c'est dans la dernière partie du mémoire que le géomètre donne toute son importance à cette nouvelle équation. Il considère tout d'abord le cas où la sixième sphère se réduit à un point. Les puissances communes k_{i6} se réduisent alors à la puissance classique de ce point par rapport aux cinq sphères, ce que Darboux note $k_{i6} = S_i$. L'équation homogène devient dans ce cas :

$$\begin{vmatrix} \multicolumn{5}{c}{\Big|k_{ij}\Big|} & \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{matrix} \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & 0 \end{vmatrix}$$

Il s'agit pour Darboux "*d'une équation très importante entre les puissances d'un point par rapport à cinq sphères quelconques*" ([**Darboux 1872b**, 390]). Mais il met ensuite l'accent sur le cas rencontré dans l'étude des cyclides : le cas où les cinq sphères sont mutuellement orthogonales. Dans ce cas, les puissances deviennent :

$$k_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j \text{ et } k_{ii} = -2R_i^2 .$$

Mais le développement du déterminant est alors facile et donne "*la formule remarquable*" :

$$\boxed{\sum \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = 0}$$

S'il détaille quelques autres applications de l'équation liant les puissances communes de 6 sphères dans le cas de deux groupes de sphères ou encore dans celui de deux systèmes constitués chacun de 5 sphères et d'un point, c'est bien la relation ci-dessus que Darboux considère comme étant le résultat crucial. Les commentaires qu'il donne laissent en effet entrevoir l'importance de cette identité dans la considération de la sphère comme un élément central, générateur de l'espace :

> Cette identité contient toute la théorie des sphères orthogonales. [...] L'étude des systèmes de coordonnées dans lesquels un point est déterminé par les rapports de ses puissances relatives à cinq sphères quelconques se

193. Le problème de Steiner est le suivant : "*Construire un cercle coupant sous des angles donnés trois cercles donnés*". Darboux montre l'équivalence de cette donnée avec des conditions sur les longueurs des tangentes aux trois cercles. C'est cette équivalence qui lui permet de procéder à la solution dans le cas tridimensionnel en utilisant ses nouvelles relations portant sur les tangentes aux sphères ([**Darboux 1872b**, 382-384]).

présente comme conséquence des formules précédentes. Je réserve pour un autre travail cette étude, dont j'ai déjà publié plusieurs résultats.

[**Darboux 1872b**, 390-392]

C'est ainsi la formule homogène $\sum\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = 0$ qui permet à Darboux de penser les quotients $\frac{S_i}{R_i}$ comme de potentielles coordonnées. L'"*autre travail*" auquel il fait référence est bien entendu le "*mémoire sur une classe remarquable etc.*" par lequel les études - la nôtre ainsi que celle de Darboux - ont commencé. Le géomètre y insère en effet deux longues notes détaillant la mise en place du système de coordonnées basé sur les puissances par rapport à 5 sphères orthogonales et son application aux surfaces cyclides ([**Darboux 1873a**, 256-286]).

La structure même du mémoire de 1873 rappelle nettement que c'est l'étude des surfaces cyclides qui a incité Darboux à envisager la sphère comme génératrice, et les coordonnées comme les rapports de puissances à cinq sphères. En effet, la forme de l'équation que revêtiront les cyclides dans ce nouveau système de coordonnées est déterminée par Darboux par une voie purement géométrique tout à fait distincte qui précède l'introduction des nouvelles coordonnées. Nous avons détaillé dans la partie [Chap.2,7.2] la description faite par le nîmois d'une transformation - que nous continuerons de noter pour plus de simplicité Φ - liée à la théorie des anallagmatiques. Dans son mémoire, Darboux montre en effet à l'aide de la transformation par polaires réciproques relativement à une sphère (S) que cette transformation génère des surfaces anallagmatiques dont (S) est une (des) sphère(s) d'inversion ([**Darboux 1873a**, 125-128]). A partir d'une surface quelconque (A'), $\Psi(A')$ est ainsi une anallagmatique dont la directrice (S) est associée à une déférente (A) qui est la polaire de (A'). En outre, en lien avec la génération des développables focales, Darboux avait remarqué que la génération d'anallagmatiques homofocales par Φ était tributaire de l'inscription des polaires de leurs déférentes dans une même développable, circonscrite à la sphère (S). Ayant remarqué l'orthogonalité des sphères directrices des cyclides, Darboux va s'appliquer à générer les cyclides homofocales grâce à cette transformation.

Le géomètre considère la sphère $(S) : x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2$ et un tétraèdre orthocentrique qui lui est "*conjugué*", dont les faces déterminent quatre plans qu'il note $P_i = 0$. Il remarque que la transformation Φ ne génèrera des surfaces homofocales qu'à partir de surfaces "*inscrites dans une développable circonscrite à cette sphère* (S)" ([**Darboux 1873a**, 132]) : en effet, la développable focale circonscrite à une surface anallagmatique est l'image de la surface développable circonscrite à (S) et à la polaire réciproque de sa déférente [194]. Par ailleurs, le doublement du degré induit par Φ oblige les surfaces inscrites - les polaires des déférentes - à être de degré 2. Ces propriétés poussent Darboux à considérer la famille de quadriques :

$$(A') \ : \quad \frac{R^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2}{\lambda - a} + \frac{P_1^2}{\lambda - a_1} + \frac{P_2^2}{\lambda - a_2} + \frac{P_3^2}{\lambda - a_3} + \frac{P_4^2}{\lambda - a_4} = 0$$ [195]

La transformation Φ transforme les plans P_i en des sphères (S_i), orthogonales à (S), dont Darboux détermine le rayon et remarque l'orthogonalité mutuelle. En notant alors

194. Pour plus de détails géométriques, on se reportera à la partie [Chap.2,7.2].
195. Les coefficients a_i interviennent dans l'expression analytique cartésiennes des plans P_i.

S_i la puissance d'un point par rapport à la sphère (S_i) [196], il détermine l'expression des anallagmatiques issues des quadriques (A') :

$$\Phi(A') \ : \ \frac{\left(\frac{S}{R}\right)^2}{\lambda - a} + \frac{\left(\frac{S_1}{R_1}\right)^2}{\lambda - a_1} + \frac{\left(\frac{S_2}{R_2}\right)^2}{\lambda - a_2} + \frac{\left(\frac{S_3}{R_3}\right)^2}{\lambda - a_3} + \frac{\left(\frac{S_4}{R_4}\right)^2}{\lambda - a_4} = 0 \quad (\mathcal{C})$$

Puisque cette équation représente des surfaces anallagmatiques du quatrième ordre homofocales, Darboux conclue en identifiant - comme l'avait fait Moutard en 1864 - ces surfaces aux cyclides homofocales. Celles-ci peuvent ainsi être écrites sous la forme $\sum \frac{\left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2}{\lambda - a_i}$, les cinq sphères orthogonales (S_i) en étant les directrices. Mais en outre, puisque l'équation du système triple orthogonal doit être de degré 3 en λ, Darboux donne l'expression de l'annulation du coefficient de λ^4 :

$$\sum_1^5 \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = 0$$

Ainsi la génération des cyclides offre-t-elle une nouvelle démonstration, géométrique et non plus algébrique, de cette identité homogène fondamentale sur laquelle Darboux va faire reposer le nouveau système de coordonnées.

Ce n'est que dans la Note X intitulée "*Sur un nouveau système de coordonnées et son application à la théorie des cyclides*" que le rédacteur du Bulletin va temporairement se détacher des cyclides et construire le système de coordonnées qui seront bientôt appelées *pentasphériques*. Ses recherches sur les groupes de sphères ([**Darboux 1872b**]) lui ont permis d'aboutir à une relation homogène sur les puissances d'un point par rapport à cinq sphères orthogonales S_i, qu'il considère désormais comme "*des coordonnées d'une nature particulière*" ([**Darboux 1873a**, 256]). Il commence par remarquer que "*étant au nombre de* 5 *[les S_i] ne sont pas indépendantes*", et énonce qu'elles satisfont essentiellement à deux équations :

$$\sum_1^5 \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = 0 \ , \ \sum_1^5 \frac{S_i}{R_i^2} = -2 \quad [197] \qquad [\textbf{Darboux 1873a}, 256]$$

Ainsi seules trois des puissances S_i "*peuvent être choisies arbitrairement*". Mais il remarque un parallèle avec les coordonnées ponctuelles homogènes : un point peut en effet être déterminé par des quantités proportionnelles aux S_i. En notant ρ ce facteur de proportionnalité, Darboux obtient les relations :

$$S_i = \rho k_i \ , \ \sum \left(\frac{k_i}{R_i}\right)^2 = 0 \ , \ \rho \sum \frac{k_i}{R_i^2} = -2$$

Le système de valeurs (k_i) correspond alors bien à un système de coordonnées homogènes surnuméraires :

196. Darboux emploie ces notations puisque la sphère (S_i) a pour équation $S_i = 0$.
197. Dans ses "*Leçons*", Darboux déterminera la seconde équation en considérant le cas particulier où l'une des sphères devient un plan [**Darboux 1887**, 268].

> Nous adopterons cette seconde manière de déterminer les points, et nous aurons un système de cinq coordonnées, liées par une seule relation, du second degré par rapport aux coordonnées.
>
> [**Darboux 1873a**, 257]

Mais en dépit de ce que Darboux affirme ici, il va (légèrement) se contredire quelques pages plus loin. Les (k_i) ne sont donc pas les "*coordonnées homogènes surabondantes*" évoquées par Loria ([**Loria 1948**, 281]). C'est l'étude du changement de coordonnées par la transformation par rayons vecteurs réciproques qui va inciter Darboux à adopter un autre système de coordonnées. Les coordonnées cartésiennes homogènes $(x : y : z : t)$ d'un point apportent une invariance par l'homographie, une transformation géométrique ponctuelle : elles ne changent pas pourvu que l'homographie s'applique sur tous les points en même temps que sur le tétraèdre de référence [198]. De même, le géomètre recherche un système de coordonnées homogènes qui soit "*indifférent à la transformation par rayons vecteurs réciproques*", une transformation géométrique de la sphère ([**Darboux 1873a**, 265]). Il étudie ainsi l'impact d'une inversion sur les coordonnées (k_i) d'une sphère.

Ayant montré que l'équation d'une sphère (S) pouvait se mettre sous la forme $\sum m_i \frac{S_i}{R_i} = 0$ Darboux identifie le coefficient m_i à la puissance commune des sphères (S) et (S_i) ([**Darboux 1873a**, 258-259]). Puis il montre que (S'), l'inverse de (S) par une inversion quelconque, aura pour équation :

$$\sum \lambda\, m_i \frac{S'_i}{R'_i} = 0$$

où les (S'_i) sont les sphères inverses des (S_i). Aussi le géomètre remarque-t-il que ce ne sont pas les puissances S_i mais bien les rapports aux rayons $\frac{S_i}{R_i}$ qui "*se changent, à un facteur près, dans les quantités analogues* $\frac{S'_i}{R'_i}$". Pour que le système homogène présente une invariance par inversion, ce sont ainsi ces rapports qui doivent en être pris comme coordonnées, et non pas les seules puissances des numérateurs. C'est ce que Darboux conclue :

> Ainsi, les véritables coordonnées d'un point sont proportionnelles aux quantités $\frac{S_i}{R_i}$ [...] et tout point sera déterminé par les cinq coordonnées homogènes
>
> $$x_i = \lambda \frac{S_i}{R_i}$$
>
> liées par l'équation
>
> $$\sum x_i^2 = 0$$
>
> et invariables pour toute inversion plane ou sphérique.
>
> [**Darboux 1873a**, 266]

C'est là véritablement ce que Darboux appellera les "*coordonnées pentasphériques*" ([**Darboux 1887**, 268]). Tout comme les coordonnées cartésiennes homogènes embrassaient dans une équation l'étude de toutes les figures homographiques, "*on étudie, dans notre système de coordonnées et dans la même équation, en même temps qu'une figure,*

198. On lira le commentaire de Darboux à ce sujet dans ses leçons [**Darboux 1887**, 276].

toutes ses transformées par la méthode des rayons vecteurs réciproques" ([**Darboux 1873a**, 265]).

Les premières propriétés que Darboux met en avant dans son nouveau système de *coordonnées pentasphériques* sont liées au point et à la sphère, nouvel objet générateur d'un espace dorénavant quadridimensionnel [199]. Les coordonnées d'un point O sont obtenues simplement en revenant à l'expression cartésienne de la puissance S_i par rapport à la sphère (S_i) de centre C_i et de rayon R_i :

$$x_i = \frac{\lambda}{R_i}(OC_i^2 - R_i^2)$$

Pour le plan de l'infini, Darboux remarque que cette relation se simplifie en $\dfrac{\lambda}{R_i}$ à l'exception des points du cercle de l'infini (C). Ces points jouent un rôle particulier puisque leur expression est indéterminée : ils ont "*une infinité de systèmes de coordonnées*" ([**Darboux 1873a**, 267]). On peut comprendre cette remarque en se rappelant que tous les points de (C) appartiennent par définition à toutes les sphères, donc à tous les éléments générateurs de l'espace pentasphérique. Mais Darboux préfère fonder son raisonnement sur le rôle de l'inversion. Nous avons détaillé en [Chap.2,7.2] la description donnée par Darboux au début de son mémoire de l'asymétrie des propriétés du pôle O et du cercle de l'infini (C) par inversion ([**Darboux 1873a**, 60]). Le géomètre nîmois prenait en effet soin de distinguer que (C) était l'image de la sphère de rayon nul centrée au pôle O d'inversion, tandis qu'un point a' quelconque de (C) était l'image de tous les points de la droite isotrope (Oa'). Cette propriété était le fondement de la conservation par inversion des cônes isotropes et donc des surfaces développables focales. Mais elles prennent une signification nouvelle dans le système pentasphérique : puisque les coordonnées sont invariantes par inversion et qu'un point a' du cercle de l'infini (C) est l'image par cette transformation d'une infinité de point, alors a' possède une infinité de coordonnées correspondant aux points des droites isotropes passant en a'. C'est ce que détaille Darboux, montrant ainsi que si la sphère est l'élément géométrique clef de son nouveau système de coordonnées, c'est bien l'inversion qui en est la transformation géométrique centrale ([**Darboux 1873a**, 267]).

En coordonnées pentasphériques, les sphères sont ainsi les objets représentés par les équations du premier degré (S) : $\sum m_i x_i = 0$. Darboux rappelle que le principe des notations abrégées de Bobillier et de Lamé [200] y est conservé : les sphères passant par l'intersection de $S = 0$ et de $S' = 0$ auront pour équation $S + \lambda S' = 0$. L'orthogonalité des deux sphères prend une forme également analogue à celle de l'orthogonalité cartésiennes des plans, avec l'expression qui rappelle la nullité du produit scalaire des normales :

$$\sum m_i m_i' = 0$$

La réduction des sphères à des points permet par ailleurs à Darboux d'obtenir la formule de la distance de deux points en coordonnées pentasphériques :

199. Remarquons que l'on peut considérer les coordonnées comme étant le sextuplet donné par le facteur de proportionnalité λ, ajouté aux coordonnées (x_i) : on obtiendra ainsi 6 coordonnées. Mais, nous le verrons, il ne s'agit toujours pas tout à fait des "*six coordonnées homogènes surabondantes*" évoquées par Gino Loria ([**Loria 1948**, 281]).

200. Voir [**Coolidge 1963**, 141].

$$d^2 = \frac{\sum(m_i - m_i')^2}{(\sum \frac{m_i}{R_i})(\sum \frac{m_i'}{R_i'})}$$

Enfin, à travers l'étude du cas particulier des équations de plan - donc des sphères de rayon infini - $\sum \frac{m_i}{R_i} = 0$, Darboux signale un lien inattendu entre les coordonnées pentasphériques et les coordonnées tangentielles. Il détermine que les coefficients de l'équation du plan sont données par :

> $$m_i = \frac{1}{2R_i}(2A\alpha_i + 2B\beta_i + 2C\gamma_i - D)$$
>
> et, comme l'équation du plan (P) est
>
> $$2Ax + 2By + 2Cz - D = 0$$
>
> on voit que [...] le système actuel de coordonnées, quand il est employé à la détermination des plans, est un système de coordonnées tangentielles surabondantes.
>
> [**Darboux 1873a**, 260]

Ainsi certaines équations données en coordonnées pentasphériques pourront être interprétées comme des équations tangentielles où les coefficients m_i seront les coordonnées d'un plan. C'est cette passerelle entre les systèmes de coordonnées qui permettra notamment à Darboux d'obtenir la classe [201] des surfaces cyclides.

Une remarque des plus importantes effectuée par Darboux grâce aux coordonnées pentasphériques est en lien avec les surfaces cyclides qui en ont au départ inspiré la découverte. Cette propriété que le géomètre va révéler consiste à établir que les surfaces cyclides sont exactement représentées par les équations du second degré. Les cyclides sont donc aux coordonnées pentasphériques ce que les quadriques étaient aux coordonnées cartésiennes.

Nous avons souligné plus haut que la transformation Φ permettant de générer la cyclide, en tant que surface anallagmatique, à partir de la polaire réciproque des quadriques déférentes avait permis à Darboux d'obtenir une équation des cyclides homofocales sous la forme :

$$\frac{\left(\frac{S}{R}\right)^2}{\lambda - a} + \frac{\left(\frac{S_1}{R_1}\right)^2}{\lambda - a_1} + \frac{\left(\frac{S_2}{R_2}\right)^2}{\lambda - a_2} + \frac{\left(\frac{S_3}{R_3}\right)^2}{\lambda - a_3} + \frac{\left(\frac{S_4}{R_4}\right)^2}{\lambda - a_4} := \sum_{i=0}^{i=4} \frac{x_i^2}{\lambda - a_i} = 0 \quad (\mathcal{C})$$

Aussi l'équation de toute cyclide correspond, en coordonnées pentasphériques, à une équation de degré 2. Cette équation coïncide avec celle que Casey nommait "*canonique*" : elle ne contient pas les termes rectangles x_ix_j. Identifier les cyclides avec les équations générales de degré 2 revient ainsi à pouvoir mettre sous forme canonique toute relation homogène de degré 2 de type :

$$\sum_{i,j} p_{ij}x_ix_j = 0 \ , \ \ p_{ij} = p_{ji}$$

Il s'agit ainsi du problème de *mise sous carrés* - ou pour parler de manière plus moderne de diagonalisation - des formes homogènes de degré 2. Si cette proposition est importante, Darboux ne va pourtant pas accorder une grande place à sa démonstration. Dans la note XI

201. Les cyclides sont de la douzième classe [**Darboux 1873a**, 276]. Voir également plus loin 5.3.

"*Application du système de coordonnées considéré dans la Note précédente à la théorie des cyclides*" ([Darboux 1873a, 273]), il considère l'écriture cartésienne homogène générale de la cyclide :

$$A(x^2+y^2+z^2)^2+u_1t(x^2+y^2+z^2)+u_2t^2=0$$

Puis il fait apparaître les cinq sphères suivantes :

$$S_1 := xt,\ S_2 := yt,\ S_3 := zt,\ S_4 := t^2,\ S_5 := x^2+y^2+z^2,$$

Darboux abrège l'équation homogène de la cyclide en la mettant sous la forme $\phi(S_i)=0$, et ajoute que les cinq sphères sont liées entre elles par la relation homogène : $f(S_i) = S_5S_4-(S_1^2+S_2^2+S_3^2)=0$.

Sans le développer, le géomètre nîmois emploie alors le résultat algébrique de réduction des formes homogènes :

> D'après des prinicipes bien connus, les deux fonctions $\phi(S_i)$, $f(S_i)$ pourront être ramenées par une substitution linéaire à ne contenir que les carrés des variables. L'identité [de f] prendra la forme :
>
> $$\sum x_i^2=0$$
>
> et les équations $x_i=0$ représenteront, par conséquent, des sphères orthogonales. L'équation de la cyclide deviendra :
>
> $$\sum A_ix_i^2=0$$
>
> Nous retrouvons le résultat établi [par la génération des anallagmatiques homofocales].
>
> [Darboux 1873a, 274]

S'il poursuit en étudiant le cas exceptionnel où deux des sphères se confondent - en montrant qu'il s'agit alors de l'inverse d'une quadrique - le résultat essentiel est bien établi : les équations pentasphériques de degré 2 correspondent bien aux surfaces cyclides. Dans la dernière Note de son mémoire, Darboux évoquera de ce fait "*quelques analogies entre la théorie des cyclides et celle des surfaces du second ordre*" ([Darboux 1873a, 325-336]). Les analogies qu'il présente reposent en majorité sur l'algèbre des formes homogènes de degré 2, qui "*rapprochent [les cyclides] des surfaces du second degré*". En particulier, Darboux développera l'extension aux cyclides de la théorie des points correspondants, ce qui le conduira "*aux propriétés métriques des focales des cyclides*" ([Darboux 1873a, 327]). Il analysera également l'incidence sur les focales de l'inscription d'une cyclide dans une seconde.

Si elles facilitent, nous le verrons en 5, l'étude géométrique *classique* des cyclides (propriétés de tangence, focales, d'inversion, étude des droites et des cercles sur la surface), Darboux entrevoit également l'utilité des coordonnées pentasphériques en géométrie infinitésimale (que nous appelons différentielle). Il donne en effet l'expression de la distance infinitésimale ds^2 dans le système pentasphérique, ainsi que la "*condition de contact de deux sphères infiniment voisines :* $\sum_i dm_i^2=0$" ([Darboux 1873a, 264]). Dans une note précédente [202], il avait attiré l'attention sur l'étude des transformations des surfaces avec

202. Note IX : "*Des surfaces qui demeurent invariables quand on les transforme par polaires réciproques, et des méthodes de transformation des surfaces avec conservation des lignes de courbures*", [Darboux 1873a, 249-255].

conservation des lignes de courbure, transformations dont fait partie l'inversion. Les coordonnées pentasphériques, invariantes par inversion, sont ainsi bien adaptées à l'étude des lignes de courbure. Les deux *Notes* de fin de mémoire "*Sur quelques propriétés de géométrie infinitésimale relatives aux cyclides*" et "*De différents systèmes de lignes définies par des propriétés différentielles et qu'on peut déterminer sur toutes les cyclides*" ([**Darboux 1873a**, 312-324]) présentent en ce sens les premières utilisations que le géomètre fait du système pentasphérique dans le cadre de la géométrie infinitésimale. C'est ultérieurement, dans ses leçons, que Darboux développera plus amplement ces liens, et en particulier suite à son cours à la Sorbonne de 1883-1884 qu'il intitulera "*De la théorie générale des surfaces et des principes de la Géométrie infinitésimale*"[203].

L'introduction des coordonnées pentasphériques sera dans son cours motivée par la remarque suivante : "*si l'on veut donner une exposition satisfaisante de la théorie analytique des lignes de courbure, on est conduit à introduire un système particulier de coordonnées*" ([**Darboux 1887**, 265]). Il montrera notamment dans ses "*Leçons*" que les lignes de courbure des surfaces définies en coordonnées pentasphériques par une équation différentielle linéaire à 2 variables coïncideront avec les caractéristiques de ladite équation. Par ailleurs, le fait que cinq paramètres x_i liés par la relation $\sum x_i^2 = 0$ constituent un système de coordonnées sera exploité par Darboux - toujours dans ses leçons - pour la résolution générale des équations différentielles linéaires. Certains systèmes de solutions appartiendront alors à un système triple orthogonal ([**Darboux 1887**, 272-274]).

Dans son mémoire de 1873 comme dans ses cours de Géométrie supérieure de la Sorbonne bien plus tard, Darboux introduira systématiquement les coordonnées pentasphériques par la considération d'un système de cinq sphères orthogonales. Pourtant dès 1873, il avait ajouté : "*on peut aussi prendre cinq sphères quelconques, non orthogonales à une même sphère*" ([**Darboux 1873a**, 270]). Dans ce système, les coordonnées dépendent, outre de la puissance du point par rapport aux sphères, d'un nouveau facteur multiplicatif. S'il ne présente pas la théorie en commençant par ce cas général, c'est surtout parce qu'en vertu de la théorie des substitutions Darboux considère qu'il pourra toujours se ramener au cas d'orthogonalité. Ainsi qu'il le remarque dans son mémoire, la condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité mutuelle des sphères de référence du système de coordonnées est la disparition des termes rectangles dans la relation quadratique homogène qui relie ces cinq sphères. Il faudra attendre 1911 et le travail de Jules Haag - normalien de la promotion 1903 - pour qu'une nouvelle présentation du système de coordonnées pentasphériques apparaisse en étant basée sur une configuration plus générale "*en partant de cinq sphères quelconques*" ([**Haag 1911**, 49]).

Les coordonnées pentasphériques recevront une large place dans les cours de géométrie ultérieurs de Darboux. Si un chapitre des "*Leçons*" est dédié à leur introduction ([**Darboux 1887**, Chap.VI Livre II]), elles sont en fait utilisées dans plusieurs circonstances où elles se révèlent appropriées, en particulier évidemment dès que les surfaces cyclides interviennent, mais également nous l'avons vu dans le cadre de la théorie des lignes de courbure. La seule modification notable que Darboux apporte à ce système de coordonnées après 1873 est l'introduction d'une sixième coordonnée m_6, apte à prendre nouvellement en considération le signe des rayons des sphères du système. Cela explique le fait que le

203. On peut trouver les intitulés des premiers cours de *Géométrie supérieure* donnés par Darboux à la Faculté des Sciences dans la "*Notice sur les travaux scientifiques*" la plus tardive, c'est-à-dire relative à son élection à l'Académie des Sciences : [**Darboux 1884**, Partie III].

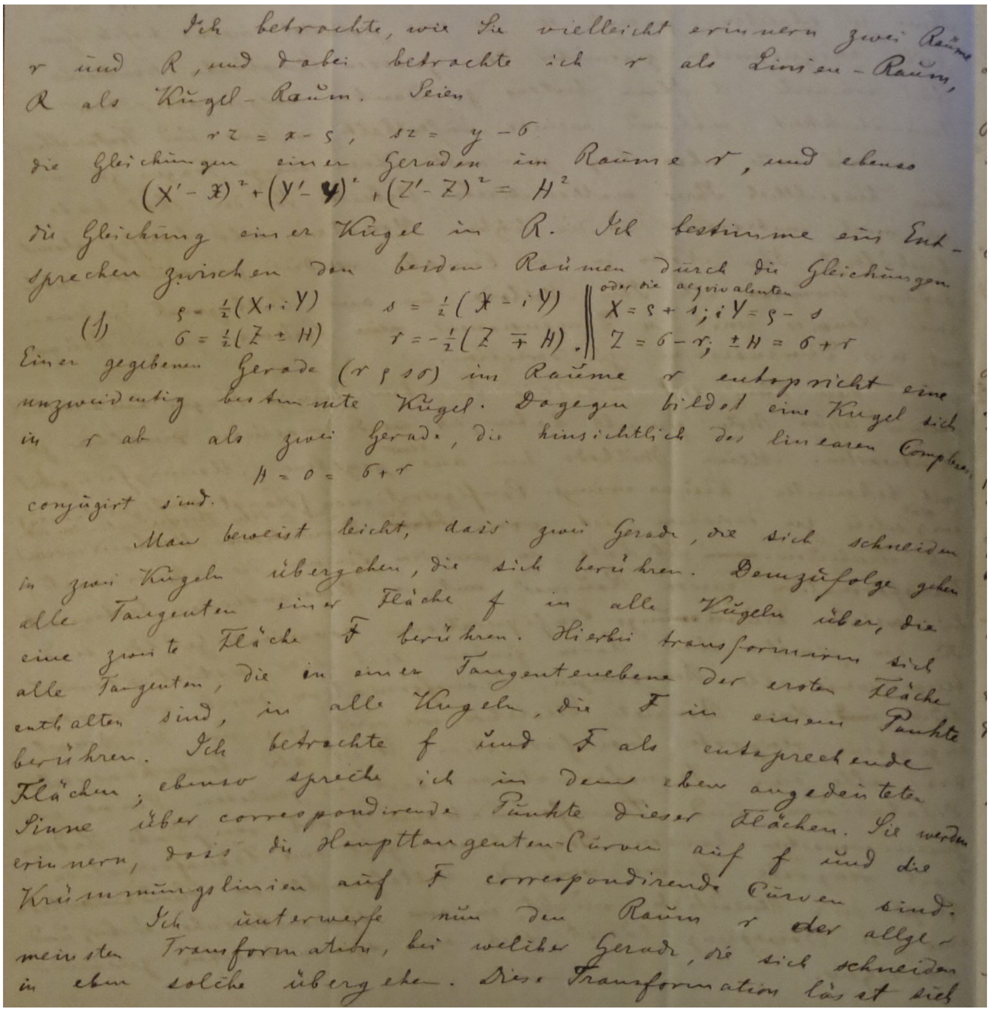
mathématicien Gino Loria ait évoqué "*six coordonnées homogènes surabondantes*" et non pas cinq ([**Loria 1948**, 281]).

Une incidence importante de cette sixième coordonnées est la forme que prend la condition de contact de deux sphères infiniment voisines :

$$\sum_1^6 dm_i^2 = 0 \qquad \text{[Darboux 1887, 282]}$$

Cette équation régissant le contact des sphères "*conduit à un rapprochement capital entre la géométrie des sphères et celle des lignes droites*" ([**Darboux 1887**, 282]) : elle mène en effet à la *transformation de Lie* qui en envoyant les points sur des droites isotropes transforme les droites en sphères - et réciproquement - et fait correspondre l'incidence des unes à la tangence des autres. En cela, c'est une *transformation de contact*[204]. La présentation de ce lien entre les coordonnées pentasphériques (ou plutôt les "*six coordonnées homogènes de la sphère*") et la transformation de Lie est effectuée par Darboux *a posteriori* dans ses leçons, soit plusieurs années après l'écriture de son mémoire "*Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces*" et ses premières études sur les systèmes de sphères. Pourtant, et cela relativise notre présentation initiale visant à minimiser l'importance du *terreau de connaissance* pour faire ressortir la singularité de l'acte de création, il est vraisemblable que la transformation de Lie ait sinon guidé, du moins incité Darboux à effectuer des recherches sur les systèmes de sphère. Si cette transformation apparaît dans les publications de Lie au moment même où Darboux finalise son mémoire sur les cyclides (au Printemps 1872 avec [**Lie 1872**]), le géomètre français la connaît quelques mois avant sa publication. En effet, Sophus Lie l'a détaillée dans la toute première lettre qu'il a écrite à Gaston Darboux, le 19 Septembre 1871.

204. Au sujet de cette notion et de son rôle dans les travaux de Sophus Lie, voir [**Hawkins 1991**], [**Hawkins 1994**]. Nous y reviendrons dans la section [Chap.7,2.7].



Ich betrachte, wie Sie vielleicht erinnern zwei Räume r und R, und dabei betrachte ich r als Linien-Raum, R als Kugel-Raum. Seien

$$rz = x - \rho, \quad sz = y - \sigma$$

die Gleichungen einer Geraden im Raume r, und ebenso

$$(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2 + (Z' - Z)^2 = H^2$$

die Gleichung einer Kugel in R. Ich bestimme ein Entsprechen zwischen den beiden Räumen durch die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{array}{ll} \rho = \frac{1}{2}(X + iY) & s = \frac{1}{2}(X - iY) \\ \sigma = \frac{1}{2}(Z \pm H) & r = -\frac{1}{2}(Z \mp H). \end{array} \quad \Bigg\| \quad \text{oder die aequivalenten} \quad \begin{array}{l} X = \rho + s;\ iY = \rho - s \\ Z = \sigma - r;\ \pm H = \sigma + r \end{array}$$

Einer gegebenen Gerade $(r \rho s \sigma)$ im Raume r entspricht eine unzweideutig bestimmte Kugel. Dagegen bildet eine Kugel sich in r ab als zwei Gerade, die hinsichtlich des linearen Complexes

$$H = 0 = \sigma + r$$

conjugirt sind.

Man beweist leicht, dass zwei Gerade, die sich schneiden in zwei Kugeln übergehen, die sich berühren. Demzufolge gehen alle Tangenten einer Fläche f in alle Kugeln über, die eine zweite Fläche F berühren. Hierbei transformiren sich alle Tangenten, die in einer Tangentenebene der ersten Fläche enthalten sind, in alle Kugeln, die F in einem Punkte berühren. Ich betrachte f und F als entsprechende Flächen; ebenso spreche ich in dem eben angedeuteten Sinne über correspondirende Punkte dieser Flächen. Sie werden erinnern, dass die Haupttangenten-Curven auf f und die Krümmungslinien auf F correspondirende Curven sind.

Ich unterwerfe nun den Raum r der allgemeinsten Transformation, bei welcher Gerade, die sich schneiden in eben solche übergehen. Diese Transformation lässt sich

FIGURE 33. Lettre de Sophus Lie à Gaston Darboux contenant le détail de la "transformation de Lie" [205]

C'est donc en ayant connaissance de l'existence de la transformation du géomètre norvégien, et donc du lien jusqu'alors insoupçonné [206] entre droites et sphères que Darboux a effectué, après l'été 1871, ses recherches sur les groupes de sphères qui aboutiront à la

205. Cette lettre, datée du 19 Septembre 1871, est conservée à la Bibliothèque de l'Institut dans [**Archives épistolaires Lie**].

206. Darboux témoigne du caractère surprenant de la transformation de Lie dans son discours de 1904 : "*Rien ne ressemble moins à une sphère qu'une ligne droite, et cependant Lie avait imaginé une transformation singulière qui faisait correspondre une sphère à une droite et vice versa. [...] Le nom de Lie demeurera attaché à ces relations si cachées qui rattachent l'une à l'autre la ligne droite et la sphère, ces deux éléments essentiels et fondamentaux de la recherche géométrique*" ([**Darboux 1904**, 29]). Dans ce discours, Darboux évoque également l'impact sur Lie des recherches de Plücker sur l'espace réglé, et le fait que le norvégien avait déjà, lors de leur rencontre à Paris à l'été 1870, dirigé ses travaux vers les relations entre droites et sphères : "*Ce sont les travaux de Plücker qui lui donnèrent sa véritable vocation. Il publia en 1869 un premier travail sur l'interprétation des imaginaires en Géométrie, et dès 1870 il était en possession des idées directrices de toute sa carrière*"([**Darboux 1904**, 29]).

création du système pentasphérique. La sphère y est un élément générateur, tout comme la droite l'était dans la géométrie de l'espace réglé de Plücker ([**Plücker 1868**]) dont Lie s'est d'ailleurs beaucoup inspiré. Si nous ne disposons pas d'argument définitif dans les lettres ou les publications de Darboux, il paraît raisonnable de penser que la découverte de la connexion opérée par son ami Lie l'aura encouragé à entreprendre ou à poursuivre des études géométriques où l'élément de référence n'est plus le point, ni la droite, mais bel et bien la sphère.

En guise de conclusion de notre étude liée à l'introduction des coordonnées pentasphériques, nous pouvons caractériser ce qui rend "l'acte de création" de Darboux singulier. Dans sa mise en place d'une géométrie où la sphère prédomine, et dans les études pour en déceler les propriétés, c'est surtout le rapprochement entre les différents domaines qui ressort des travaux de Darboux. Ce rapprochement vaut tant pour les outils que pour les méthodes, et cette dynamique est toujours vouée à accroître la généralité des approches et des résultats. Nous avions déjà constaté, et nous le constatons encore, que le géomètre nîmois n'avait de cesse de mêler les méthodes analytiques et géométriques. Comme il le rappellera, la géométrie de la sphère et l'espace pentasphérique présentent "*bien des questions qui peuvent tenter, et les géomètres, et les analystes*" ([**Darboux 1908**, 121]).

Mais ce qui est encore plus frappant dans notre étude est la place de l'intervention de l'algèbre. L'utilisation de l'algèbre des formes bilinéaires pour les propriétés géométriques est devenue classique, mais en replaçant les travaux de Darboux dans leur contexte, on constate qu'elle décèle une grande originalité. C'est l'usage systématique de la théorie des invariants des formes homogènes qui permet en effet au géomètre de développer des méthodes systématiques d'une grande généralité. D'ailleurs, mais nous le verrons plus tard, l'intervention de cette théorie est d'autant plus remarquable qu'il s'agissait d'un pan des mathématiques alors totalement absent du panorama des recherches mathématiques françaises de cette époque[207]. Aussi la "*création, œuvre individuelle et imprévisible*" ([**Paty 2013**, 71]) de Darboux est-elle marquée d'une part par le décloisonnement entre les domaines mathématiques, qui s'applique à la fois aux sujets étudiés et aux méthodes employées. Si elle reste *imprévisible*, il semble difficile de la comparer à la "*découverte*" de Poincaré, fulgurante et dissociant conscience et inconscience[208].

La deuxième caractéristique qui ressort est liée au *pourquoi* de ce décloisonnement : "*rencontrer les vraies routes de la vérité définitive, pénétrer jusqu'à son origine*" ([**Chasles 1837a**, 115]). Darboux se nourrit de la philosophie de Chasles en ne se départissant jamais d'une vue d'ensemble critique de ses résultats qui l'amène à s'interroger systématiquement sur les fondements sur lesquels ils reposent. Cette tournure d'esprit se manifestera fortement dans l'étude de ses travaux d'analyse et peut parfois être moins prégnante en géométrie. Mais dans le cadre de notre recherche sur les coordonnées pentasphériques, elle se révèle nettement et est encore renforcée par l'étude comparée des travaux simultanés de John Casey. Le mathématicien irlandais ne se penche en effet pas sur les problèmes et les propriétés des systèmes de sphères dans son étude des surfaces cyclides. Aussi ses résultats n'auront-ils pas la généralité de ceux que Darboux présentera après qu'il a quant à lui méthodiquement exploré ces mêmes systèmes dont les cyclides lui ont suggéré l'importance. On peut encore relever cette caractéristique dans le choix final de l'adoption du système de coordonnées

207. Voir plus loin [Chap.4, 2.1]. On lira également [**Chasles 1870**, 375-378] et l'analyse faite par [**Gispert 1996b**, 399].

208. Voir le chapitre "*L'invention mathématique*" de [**Poincaré 1908**].

pentasphériques : c'est là encore l'aspiration à une sorte de "*vérité définitive*" qui motive la sélection du rapport $\frac{S_i}{R_i}$ et non la conservation de la simple puissance S_i.

Emile Picard et Ernest Vessiot ont tous deux évoqué "*le souci de la perfection qui caractérise l'œuvre scientifique de Darboux*" ([**Picard 1917**, XII], [**Darboux 1933**, 22]). Si cette perfection se manifeste dans la production finale, écrite et publiée, du géomètre, c'est la quête de cette perfection qui est le moteur de sa constante mise en perspective de ses travaux. Celle-ci le pousse à accueillir tout nouveau résultat avec l'interrogation de l'existence d'un lien ou d'une autre théorie apte à le faire reposer sur un autre ensemble de connaissances jusqu'alors sous-jacent. Ce mécanisme permet alors d'extrapoler le résultat, de le comprendre autrement, de le généraliser. Ce perpétuel recul sur la profondeur des résultats, ainsi que l'abolition de la segmentation des domaines mathématiques sont les deux singularités qui semblent se dégager en analysant d'après Michel Paty la singularité de l'apport individuel de la "création" de Gaston Darboux.

Au-delà de la mixité de ses méthodes et de son recul quant au caractère *définitif* de ses résultats, les travaux de Darboux relatifs aux systèmes de sphères et aux coordonnées pentasphériques mettent en relief la diversité nouvelle de ses centres d'intérêt. Effectués après 1870, on constate qu'une place importante est occupée par des sujets qui n'étaient auparavant que secondaires voire même absents : l'algèbre, les systèmes de coordonnées homogènes, les propriétés différentielles des lignes tracées sur les surfaces. Ceci est le signe de l'élargissement et de la réorientation des thématiques de recherche de Darboux : ex-géomètre, nouveau mathématicien. Le développement de ces centres d'intérêt est encore mis en lumière grâce à la comparaison avec Chasles : nous avons évoqué la philosophie de ce-dernier, et l'inspiration qu'elle constituait pour son doctorant. Mais il convient d'ajouter que Darboux donne à cette vision une généralité - presque une *isotropie* relativement aux spécialités mathématiques - autre que celle de son maître. Ce-dernier visait en effet à argumenter en faveur du recours à la Géométrie pour comprendre et compléter les théories de "*l'Analyse moderne*". Pour Darboux, on ne remarque plus de discipline préférentielle sur lesquelles doivent reposer les *vérités mathématiques* : son cheminement intellectuel l'amène ainsi après 1870 à ne plus considérer la Géométrie comme la spécialité mathématique première dont les contenus et les preuves prévalent dans l'établissement des vérités.

Les travaux de géométrie de Darboux relatifs aux systèmes de sphères et à l'appréhension de la sphère comme nouvel élément générateur de l'espace marquent une nouvelle étape dans les référentiels géométriques. L'espace ponctuel avait subi sa première révolution avec la découverte de la théorie des polaires réciproques de Poncelet et Gergonne [209] : le plan se présentait alors comme une alternative au point. La droite était ensuite venue s'ajouter aux familles génératrices avec l'espace réglé de Plücker [210]. Avec l'étude des systèmes de sphères et l'établissement des coordonnées pentasphériques, Darboux insère les sphères à ces familles. Pourtant il attribuera systématiquement ce mérite à Sophus Lie : dans l'introduction de son mémoire, il précise ainsi "*M. Lie, professeur à l'Université de Christiana, a, le premier, considéré la sphère comme un élément de l'espace, et il a su établir les relations les plus intéressantes entre la géométrie des sphères et celles des lignes droites*" ([**Darboux 1873a**, XII]). Presque un demi-siècle plus tard, ses propos n'auront pas changé :

209. Voir [**Nabonnand 2006**, 58-72].
210. Voir [**Coolidge 1963**, 243-247], [**Boyer 1968**, 590].

> Que dire de cette partie presque intacte de la Géométrie qui nous a été léguée par les travaux de Plücker, de Sophus Lie et de leurs successeurs. Il ne leur a pas suffi d'introduire le plan et de le considérer, au même titre que le point, comme un élément de l'espace. La théorie des polaires réciproques avait rompu les digues. Au point et au plan sont venus s'adjoindre successivement la ligne droite, la sphère, le cercle [...] C'est tout au plus si l'on a ébauché la théorie de la ligne droite et de la sphère, reliées l'une à l'autre par l'admirable transformation de Sophus Lie.
>
> [**Darboux 1908**, 121]

La transformation de Lie a donc probablement eu un impact sur le sens et la profondeur que Darboux a donné à ses recherches. De même, c'est le caractère anallagmatique des cyclides, révélé au moment même de leur découverte par Moutard, qui aura été le premier moteur de son étude des systèmes de sphères. Ceci fait état du terreau de connaissances qui contextualise la création des connaissances nouvelles de Darboux, à savoir les propriétés des systèmes de sphères orthogonales et la construction d'un système de coordonnées s'y rattachant. Celles-ci doivent en conséquence bien être rapportées à l'"*apport individuel*" issu de ses recherches des années 1870-1873.

Les études géométriques de Darboux des systèmes de sphères ainsi que leurs intrications avec la géométrie du tétraèdre seront largement poursuivies. On en retrouve le prolongement dans l'analyse des "*groupes orthocentriques*"[211] de [**Coolidge 1916**] et de [**Court 1928**]. C'est encore le cas avec la notion de "*tétrasphère*" développée plus récemment ([**De Majo 1961**][212]). Le tétraèdre orthocentrique deviendra quant à lui un sujet classique, notamment développé dans les traités de géométrie ([**Comberousse Rouché 1922**], [**Court 1934**]).

5. L'étude méthodique et exhaustive des cyclides de Darboux (1873)

La découverte des propriétés d'orthogonalité des surfaces cyclides a entraîné, nous l'avons vu, Darboux vers des recherches dédiées aux théories des surfaces orthogonales et isothermes durant sa thèse (voir 2 et 3). Ce n'est qu'après 1867 que Darboux entreprend de compléter son étude méthodique des surfaces cyclides. Dans ce domaine, plusieurs géomètres l'accompagnent, et en premier lieu Moutard, Laguerre et Casey. Avec son mémoire "*Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces*" retardé par la guerre de 1870, Darboux entend développer une théorie finie, aboutie, des surfaces cyclides (et des courbes cycliques). On retrouve là le "*souci de la perfection*" de ses travaux. Nous allons ainsi examiner dans quelle mesure son travail fixe la théorie des surfaces cyclides, en le comparant aux mémoires préexistants.

Par ailleurs, cette partie permet de faire ressortir l'application des différents outils et des différentes méthodes développés par Darboux dans le cadre de ses recherches sur

211. Les groupes orthocentriques désignent les ensembles de 5 points susceptibles d'être les centres de sphères mutuellement orthogonales.

212. Plusieurs références complémentaires sont en outre mentionnées à la fin de l'article de De Majo.

les surfaces cyclides, pour en permettre ou en faciliter l'étude. Passerelles entre méthodes analytiques et géométriques, usage des propriétés métriques et géométriques des développables focales, transferts entre les trois systèmes de coordonnées cartésiennes, curvilignes et pentasphériques : cette partie est particulièrement sujette à l'évaluation de l'application qu'effectue Darboux de ces outils et méthodes. La première étude sera consacrée aux propriétés focales des cyclides (5.1), tandis que la deuxième sera centrée sur les connexions entre les différentes générations de ces anallagmatiques (5.2). Enfin la troisième étude sera l'occasion d'aborder la position des objets plans (cercles et droites) sur les cyclides, ce qui replacera ces recherches dans le contexte des travaux généraux de Salmon, Clebsch et Kummer sur les surfaces algébriques de degré 3 et 4 (5.3). Elle sera l'occasion d'évoquer quelques conjectures restées à ce jour ouvertes relatives aux cyclides et aux recherches actuelles qui y ont trait.

La plupart des sujets qui seront abordés ci-dessous sont traités (puis souvent re-traités) par Darboux durant une période charnière de son développement scientifique personnel, allant de 1869 à 1873. Notre étude mettra ainsi en lumière la diversification de ses recherches, de ses sources et de ses intérêts, ce que nous expliquerons et révélerons encore plus largement dans les parties suivantes.

5.1. Propriétés focales et classifications diverses.

Dès leur présentation commune par Darboux et par Moutard dans la séance du 1er Août 1864 ([**Darboux 1864c**], [**Moutard 1864b**]), les surfaces cyclides ont été étudiées par le biais de la théorie des focales qui reçoit alors simultanément dans ce contexte son extension définitive[213]. Mais Darboux évoque uniquement les propriétés liées aux systèmes orthogonaux, tandis que le polytechnicien développe des propositions centrées sur les cyclides (qu'il nomme *anallagmatiques*) :

> La courbe d'intersection de chaque surface directrice et de la sphère principale correspondante est une ligne focale de l'anallagmatique [i.e. de la *cyclide*]
>
> [...]
>
> Lorsque deux anallagmatiques du quatrième ordre ont en commun une ligne focale, elles admettent les cinq mêmes sphères principales et les cinq mêmes lignes focales ; je dirai qu'elles sont homofocales.
>
> [...]
>
> [P]ar tout point de l'espace il est possible de faire passer trois anallagmatiques, admettant pour ligne focale une courbe sphérique donnée du quatrième ordre.
>
> [**Moutard 1864b**, 243]

En 1868, Edmond Laguerre apporte quelques développements supplémentaires relatifs aux focales des cyclides. Dans ses deux communications à la Société Philomathique ([**Laguerre 1868a**], [**Laguerre 1868b**]), il précise que la développable focale (*isotrope* pour Laguerre) circonscrite à une cyclide possède exactement cinq lignes doubles : les cinq "*anallagmatiques sphériques*" (cycliques sphériques) décrites par les déférentes sur les

213. Voir [Chap.2,5.2].

sphères directrices correspondantes. En outre, il est le premier à étudier le problème de l'unicité de la développable focale, et à définir en conséquence une nouvelle notion : celle de *focale singulière* (voir [Chap.2,8]). Ces focales singulières, où la tangence double avec la cyclide qui caractérise les focales a précisément lieu sur le cercle de l'infini, "*se composent [pour une cyclide] de trois coniques qui sont les focales ordinaires communes aux cinq surfaces [déférentes]* (A_i)" ([**Laguerre 1868a**, 20]). Identifiant ces focales singulières aux focales des surfaces déférentes d'une cyclide, Laguerre précise ainsi une proposition énoncée plus tôt par Moutard ([**Moutard 1864c**, 537]) : les déférentes des cyclides sont des quadriques homofocales. Cette proposition sera également reprise par [**Gournerie 1869**].

Ni Moutard ni Laguerre n'accompagnent leurs communications de démonstrations : c'est ce manque que Darboux va s'attacher à combler, rappelant à plusieurs reprises que certains de ses énoncés ont auparavant déjà été "*donnés sans démonstration*"[214]. Il va également en étudier l'extension à toutes les surfaces anallagmatiques. Ainsi ce type de surfaces, et les surfaces cyclides en premier lieu, se révèlent être pour le géomètre l'objet idéal d'application de sa théorie projective des focales. Ces applications sont par ailleurs pour Darboux une nouvelle occasion de développer cette théorie et mettant sur un pied d'égalité les méthodes géométriques et analytiques.

L'étude des surfaces cyclides est ainsi effectuée dans son mémoire de 1873 en deux temps : la quatrième partie présente en effet une "*Etude analytique des cyclides*", tandis que la suivante consiste en l'"*Etude géométrique des cyclides*". Le clivage que représentent les titres des chapitres ne se retrouve néanmoins pas aussi fortement dans l'emploi des méthodes, où analyse et géométrie viendront souvent se compléter l'une l'autre. Une grande partie de l'étude analytique repose sur le système d'équations $(\mathcal{G})$:

$$(\mathcal{G}) \left\{ \begin{aligned} \frac{C^2}{\lambda - A} + \frac{C'^2}{\lambda - A'} + \frac{C''^2}{\lambda - A''} + D - \lambda^2 := L(\lambda) &= 0 \\ \frac{\alpha^2}{\lambda - A} + \frac{\beta^2}{\lambda - A'} + \frac{\gamma^2}{\lambda - A''} &= 1 \\ \frac{C\alpha}{\lambda - A} + \frac{C'\beta}{\lambda - A'} + \frac{C''\gamma}{\lambda - A''} + \lambda &= -\delta^2 \end{aligned} \right.$$

Déterminé au départ par la recherche des sphères doublement tangentes aux cyclides, ce système $(\mathcal{G})$ permet en effet à Darboux de décrire les cinq déférentes (A_i) - par la deuxième équation - et les cinq sphères directrices (S_i) (voir 4.2). Il retrouve ainsi analytiquement, par leurs équations mêmes, l'homofocalité des quadriques déférentes ([**Darboux 1873a**, 115]). Ayant les équations de (A_i) et de (S_i), "*la détermination des focales est aussi une conséquence des résultats obtenus*" : les focales sont en effet, parmi toutes les sphères doublement tangentes, celles qui ont un rayon nul. Leur équation est ainsi obtenue par le système des deux équations de (A_i) et de (S_i), ce que Darboux signale mais ne détaille pas ([**Darboux 1873a**, 119]). Il remarque par ailleurs que dans le système $(\mathcal{G})$, la première équation représente - pour chaque racine λ - un cône du second degré, de sommet le centre de la sphère directrice, et formé par l'enveloppe des plans tangents doubles à la cyclide[215].

214. Voir par exemple [**Darboux 1873a**, 154].
215. Ces plans tangents sont obtenus en faisant fuir les sphères orthogonales à la directrice à l'infini : leurs rayons deviennent alors infini, ce sont donc des plans ([**Darboux 1873a**, 117]). Nous y reviendrons plus loin en lien avec les recherches antérieures de E.E. Kummer.

Ces cônes seront centraux dans l'étude des systèmes de sphères des cyclides ainsi que dans la classification des cyclides selon leur génération.

Pour effectuer une classification des cyclides suivant leurs propriétés focales, Darboux étudie la réalité et l'imaginarité de leurs courbes focales. Ceci nous paraît original puisque d'une part cette étude n'avait jusqu'alors pas même été évoquée - dans ses travaux ou dans ceux d'autres mathématiciens - et d'autre part car un trait caractéristique du travail de Darboux était alors d'introduire pleinement la géométrie imaginaire sans en distinguer les éléments réels. Cette distinction réapparaît ainsi uniquement pour dresser un classement des surfaces étudiées.

Le géomètre remarque que la première équation de $(\mathcal{G})$ possède soit 3 soit 5 racines réelles. En considérant le cas $A < A' < A''$, il note ainsi que dans chaque intervalle $[A, A'], [A', A''], [A'', \infty]$ se situe en effet au moins une racine, et au plus trois. Il identifie plus loin chacun de ces intervalles avec un type de quadrique déférente : ellipsoïde, hyperboloïdes à une et deux nappes ([**Darboux 1873a**, 128]), puis compare la réalité de ces déférentes avec la réalité des sphères directrices associées. Ce-faisant, il parvient à l'alternative suivante :

- soit l'équation en λ présente 5 racines réelles, auquel cas 4 directrices sont réelles mais seules 2 focales le sont, et "*se composent chacune de deux traits distincts*".

- soit l'équation en λ possède 3 racines réelles, alors 3 directrices le seront et 3 focales également, composées dans ce cas "*d'un seul trait*" ([**Darboux 1873a**, 129]).

Darboux va alors finaliser sa classification en identifiant dans le premier cas les déférentes associées à la directrice de rayon négatif. Il va également remarquer que ce classement correspond également à la *classification topologique* naturelle des surfaces cyclides (bien sûr, Darboux n'emploiera pas ce terme anachronique). Ainsi, dans le second cas (3 directrices réelles), la cyclide est "*formée d'une seule nappe à connexion simple*". Dans le premier cas, si la déférente associée à la directrice imaginaire est un ellipsoïde réel, la cyclide est "*composée de deux nappes enveloppant [le centre de la directrice], et à l'intérieur l'une de l'autre. Elles [les nappes] sont à connexion simple*". Puis le cas de l'hyperboloïde à deux nappes correspond à "*deux nappes opposées situées à l'intérieur de chacune des deux nappes du cône et à connexion simple*", alors que l'hyperboloïde à une nappe (dit *réglé*) donne "*une seule nappe à connexion triple, semblable à un tore ordinaire*"[216] ([**Darboux 1873a**, 130]). En ajoutant le cas de la déférente imaginaire (qui donne une cyclide purement imaginaire), Darboux dresse ainsi un tableau des cyclides les groupant selon 5 catégories. Mais ces catégories sont plus fines que la seule prise en compte des courbes focales et font apparaître les premières propriétés topologiques des cyclides avec le nombre de nappes et leurs connexions.

216. Ce type de cyclide à connexion triple est représenté sur la figure 35 ci-après. Sur la figure 34, la cyclide rouge (en haut à gauche) est à deux nappes opposées, générée par une directrice imaginaire et un hyperboloïde à deux nappes. La cyclide jaune (en haut à gauche) est à deux nappes (dont on ne voit que la nappe extérieure), engendrée par une directrice imaginaire et un ellipsoïde réel. Les deux cyclides bleues (en bas) sont à une nappe, celle de gauche (bleu clair) étant à connexion triple : il s'agit de la même cyclide que celle représentée sur la figure 35 : elle est engendrée avec une directrice imaginaire et un hyperboloïde réglé pour déférente. Ainsi sur la figure 34, seule la cyclide bleu foncé (en bas à droite) possède exactement trois directrices et trois focales réelles.

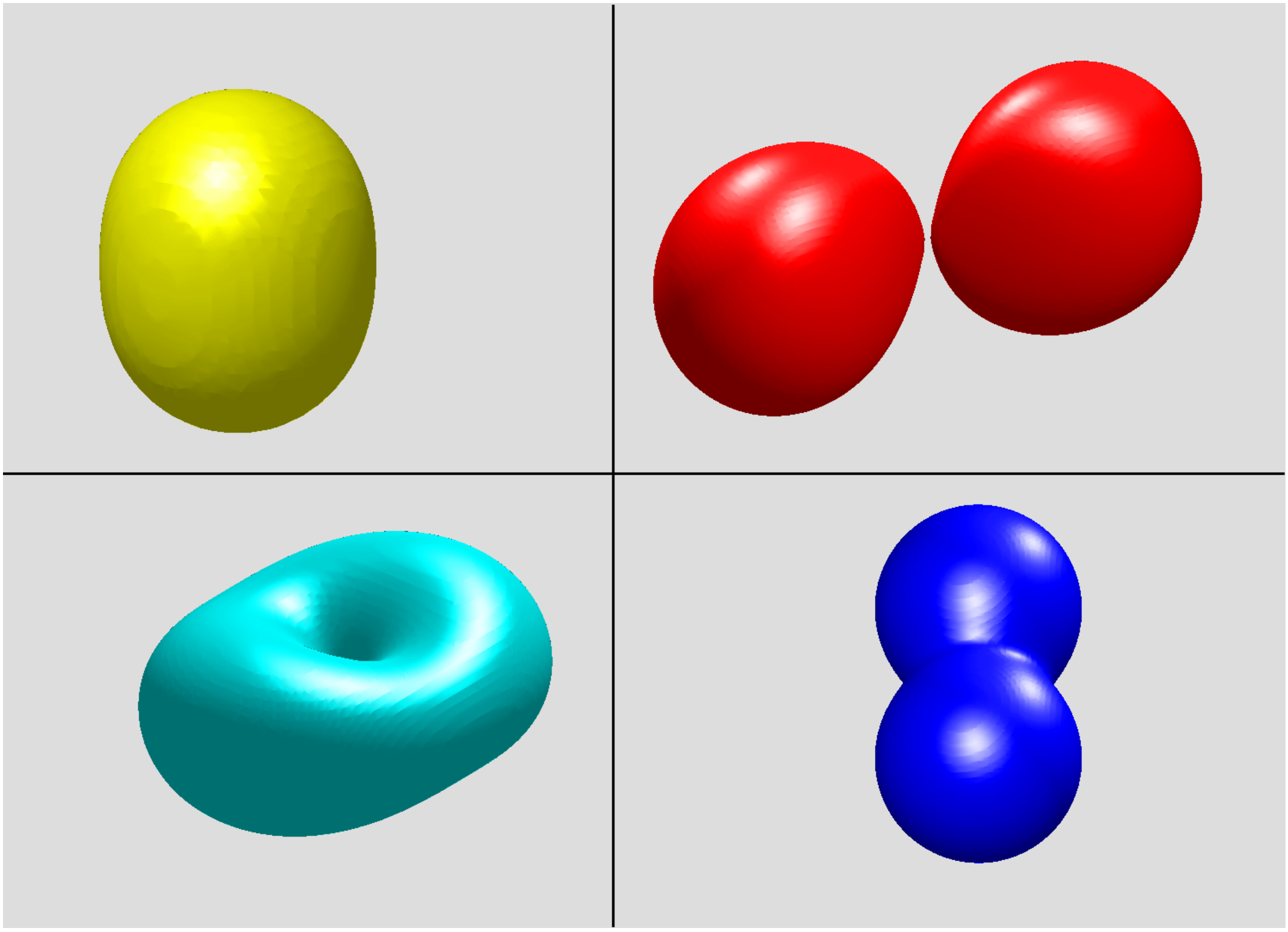


Figure 34. Les quatre différentes formes topologiques des cyclides de Darboux

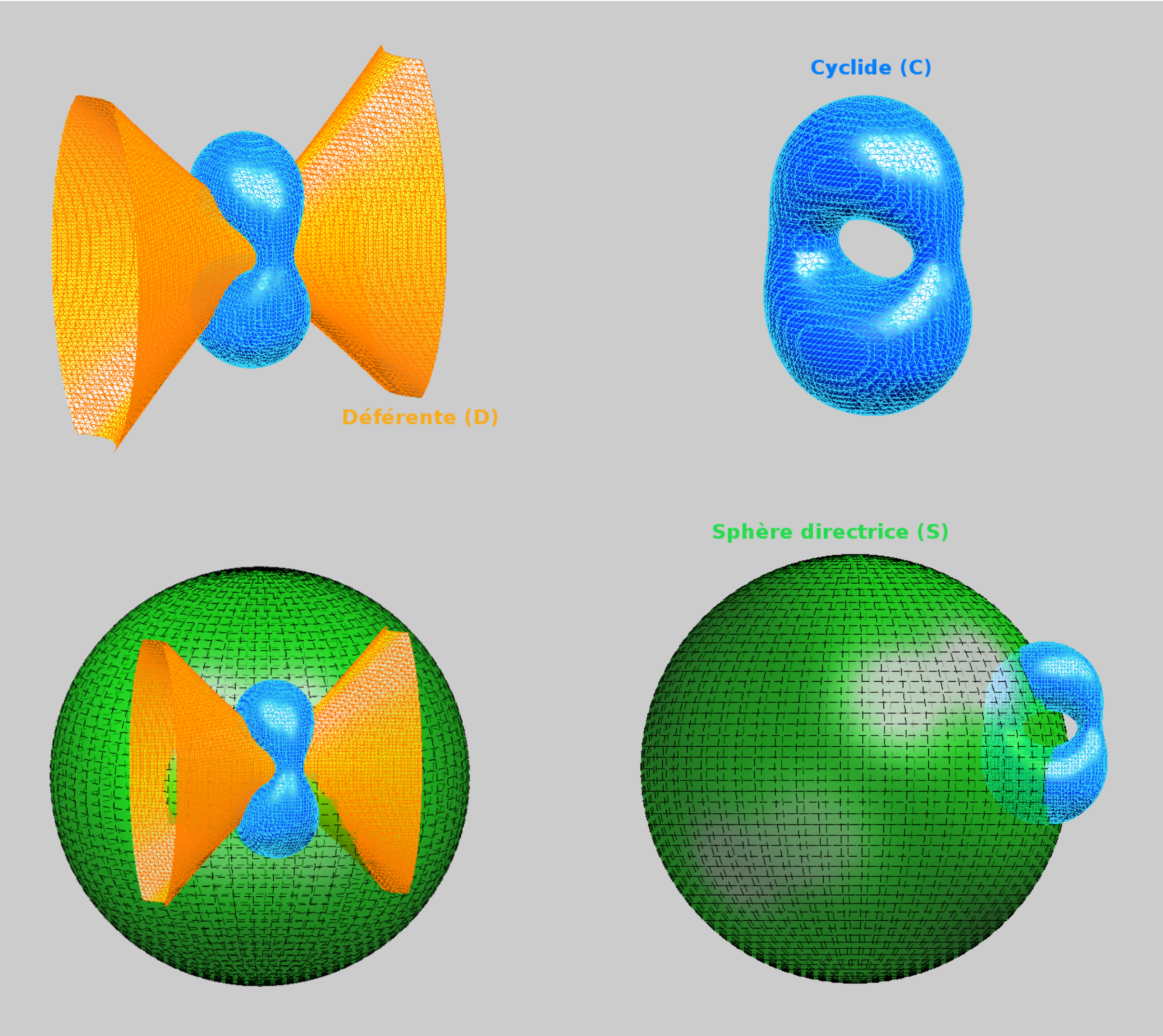


FIGURE 35. Une cyclide à connexion triple (C), représentée avec une de ses déférentes (D) (un hyperboloïde à une nappe) et la sphère directrice (d'inversion) réelle associée (S) [217]

C'est dans la partie d'étude géométrique des cyclides que le normalien va apporter une classification basée de manière exclusive sur les focales. Pour cela, il prend en compte les *focales singulières* des surfaces, sujet du premier paragraphe du chapitre de l'étude géométrique. La description des cyclides comme enveloppe de sphères lui permet d'obtenir géométriquement que les plans isotropes tangents à la cyclide sont également tangents aux déférentes ([**Darboux 1873a**, 152]) : celles-ci sont ainsi inscrites dans une unique développable focale, dont les lignes doubles sont les focales singulières de la cyclide. Il retrouve ainsi par une méthode géométrique ce résultat déjà énoncé par Laguerre et retrouvé de manière

217. La cyclide coupe sa sphère directrice à angle droit, et l'hyperboloïde déférent découpe sur cette sphère une courbe sphérique qui est l'une des cinq focales de la cyclide, dont seules deux sont réelles.

analytique dans le chapitre précédent. Grâce à cela, "*la classification des cyclides s'effectue sans difficulté, d'après la nature des focales ordinaires et singulières*" ([**Darboux 1873a**, 154]).

Le second classement selon les focales dressé par Darboux présente 6 divisions principales : les trois premières sont relatives aux focales singulières, les autres aux focales ordinaires. Ce qui est remarquable, c'est qu'il devrait en compter 7 puisque Darboux, soucieux d'étudier les cas singuliers, en oublie de considérer le cas général. Ce classement ne permet pas de détacher les propriétés topologiques comme le faisait le premier. En revanche, il met en évidence la cyclide de Dupin - pour laquelle les caustiques se réduisent à des courbes -, la cyclide du troisième degré, et les différents types de cyclides de révolution. Certains de ces cas particuliers feront l'objet d'une analyse en profondeur de Darboux dans les quelques paragraphes qui suivront ce classement.

La combinaison des méthodes analytiques et géométriques permet ainsi à Darboux d'opérer deux types de classification des cyclides, tous deux à partir de leurs focales. Si les deux classements font intervenir les focales classiques (ou régulières) des cyclides, le premier leur adjoint les modes de génération tandis que le second y fait figurer les focales singulières. Ces deux classifications révèlent des propriétés bien différentes, et on peut noter que si la théorie des focales y apparaît bien adaptée à la description des surfaces de révolution, elle ne l'est plus pour les propriétés de connexité.

Nous avons vu en 4.3 la propriété suivante relative aux coniques focales des surfaces du second degré : la donnée d'une seule d'entre elles permet d'en déterminer les deux autres. Cette propriété avait en particulier été énoncée par Chasles [218] du fait de la particularité géométrique des coniques focales des quadriques : situées dans les plans principaux de la surface, les sommets de l'une correspondaient en effet aux foyers de l'autre (et réciproquement). En 1864, Moutard avait dans sa communication à l'Académie affirmé l'existence d'une propriété similaire pour les focales des cyclides : deux cyclides ayant en commun une focale sont selon lui homofocales puisqu'elles admettent en fait les cinq mêmes courbes focales. Laguerre et De La Gournerie vont ensuite utiliser ce résultat, mais là encore sans en apporter de preuve. Néanmoins, dans son mémoire de 1871 John Casey ne sera pas exactement en accord avec ce résultat.

Casey donne la définition des focales ("*lines of foci*") comme points-sphères doublement tangents à la cyclide, et les détermine par les intersections des directrices (S_i) et des déférentes (A_i). En considérant la cyclide (C) sous ce qu'il appelle "*sa forme canonique*" $a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 + e\varepsilon^2 = 0$, Casey n'obtient - nous l'avons dit - une *équation* qu'en éliminant l'une des cinq sphères "*de référence*" $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ [219]. Pour étudier la focale située sur la sphère d'inversion $U^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$, il élimine le paramètre ε et adopte en conséquence les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{w^2}{d^2} = 0 & (A) \\[2ex] x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0 & (S) \end{array} \right.$$

218. Voir [**Chasles 1837a**, 385].

219. Nous adoptons ici les notations $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ pour les sphères de référence, alors que dans la partie 4.2, la dernière sphère était notée U. Casey lui-même varie ses notations et en cela entretient le flou sur le système référentiel adopté et le rôle des sphères.

La focale étant située à l'intersection de (A) et de (S), Casey détermine une famille de déférentes par la combinaison $(A + kS)$, qu'il traduit en coordonnées tangentielles ([**Casey 1871**, 637]). Les cyclides engendrées par ces déférentes et la directrice fixe (S) ont ainsi bien en commun la focale $(A) \cap (S)$ [220]. En opérant de la même manière sur chacune des cinq sphères de référence, Casey obtient cinq "*systèmes*" de cyclides, chacun issu de la considération d'une sphère directrice et donc de l'élimination du paramètre qui la représente. Il conclue alors :

> Une cyclide dont la forme canonique est donnée peut être écrite sous cinq différentes formes, et [par ce qui précède] on voit qu'à cette cyclide correspondent cinq différents systèmes de cyclides, chaque système possédant une cyclique sphérique [221] focale en commun avec elle.
>
> [**Casey 1871**, 637]

Casey détaille ensuite l'écriture des cinq différentes équations représentant les systèmes de cyclides. Il est remarquable de noter que ces équations sont identiques dès que l'on ajoute la condition supplémentaire $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 = 0$. Cette condition est connue de Casey, et traduit selon lui "*l'orthogonalité des cinq sphères de la forme canonique*", sphères qu'il n'identifie pas, nous l'avons souligné, avec les sphères d'inversion : seuls les centres sont pour lui identiques. Une quarantaine d'années plus tard, Coolidge fera la remarque suivante :

> John Casey, ce génie erratique [*erratic genius*], semble avoir gardé la curieuse idée qu'une cyclide partageait une courbe focale avec chacun des cinq différents systèmes d'autres cyclides. Il donne les équations des cinq systèmes, mais manque de noter qu'elles sont vraiment identiques.
>
> [**Coolidge 1916**, 289]

Nous ne partageons pas l'avis exprimé par le mathématicien et historien américain. John Casey redonne en effet quelques pages plus tard la relation $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2 = 0$, et il paraît peu probable qu'il n'ait pas remarqué la symétrie parfaite de son système d'équations et la simplification liée à l'introduction de cette relation subséquente. L'analyse du travail de Casey dans la partie précédente 4.2 a en revanche révélé une lacune plus profonde : les cinq sphères de référence ne constituent pas pour l'irlandais un système valable de coordonnées. Les expressions qui impliquent en totalité ces cinq sphères ne sont pour lui pas des équations de surfaces. En revanche, elles le deviennent dès que l'une des sphères en disparaît. Aussi Casey parle-t-il systématiquement de la "*forme*" d'une cyclide pour l'expression :

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 + e\varepsilon^2 = 0$$

En revanche, dès qu'il ajoute "*with respect to* $U^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 = 0$", cette expression devient une "*équation*" : elle lui parait alors propre à représenter une surface.

C'est ce caractère bancal de l'utilisation des sphères de référence qui doit révéler selon nous l'explication de la proposition d'homofocalité seulement partielle que donne Casey. Son résultat dépend de l'expression des *équations* des surfaces déférentes et de la cyclide. Or une *équation* ne doit pour lui être relative qu'à quatre sphères, et il en va de même

220. Il ne s'agit ici de rien d'autre qu'une application du principe des notations abrégées qui ne dit pas son nom !

221. Rappelons ici qu'une *cyclique sphérique* peut être définie comme l'intersection d'une sphère et d'une quadrique. Voir [Chap.3,1.2].

pour *l'équation* des cyclides recherchées. Il paraît ainsi probable que Casey ait réalisé la "*forme*" algébrique concise de son résultat sur les systèmes de cyclides ayant même focale, mais selon sa propre lecture il ne s'agissait pas d'une équation valide.

Dans son mémoire, Darboux va donner une preuve géométrique du résultat d'homofocalité totale des cyclides ayant une cyclique sphérique focale commune. Dans la première partie de son ouvrage dédiée aux courbes cycliques, il détermine que les focales d'une cyclique sphérique sont au nombre de 4, et que ces courbes sont elles-mêmes des cycliques sphériques situées en outre sur quatre sphères venant former avec la sphère de départ un système orthogonal ([**Darboux 1873a**, 44]). Puis c'est à l'aide de sa transformation de génération des anallagmatiques Φ qu'il conclue plus loin, retrouvant au passage une partie des résultats précédents. La développable focale (Δ) circonscrite à la cyclide (C) est obtenue par Φ à partir de la développable circonscrite à la sphère directrice et à la polaire de la déférente. Cette-dernière développable possède quatre "*lignes de striction*", lesquelles se transforment sur la développable focale en autant de cycliques sphériques. Ajoutées à la ligne double située sur la directrice elle-même, elles forment les cinq focales de la cyclide. Aussi la donnée d'une unique focale détermine-t-elle entièrement les quatre autres ([**Darboux 1873a**, 126]). En revanche, Darboux aura également remarqué à l'instar de Moutard que la donnée d'une focale ne détermine pas entièrement une cyclide : "*on pourra associer [à la sphère contenant la focale] comme déférente une quelconque des quadriques qui contiennent la focale*" ([**Darboux 1873a**, 120]). Darboux ne signale pas ce que Moutard avait ajouté, à savoir que les trois familles de quadriques réelles qui conviennent forment un système triple orthogonal, dont on aura fixé les focales au départ.

Les surfaces cyclides sont par ailleurs pour Darboux un outil d'application parfaitement adapté à la géométrie infinitésimale des développables focales. S'il développait déjà quelque peu ce domaine nouveau dans ses premiers travaux (1864-1867), le mémoire de 1873 présente cette géométrie des focales comme une partie importante de son travail. Le premier chapitre en fixe les outils théoriques, nous l'avons vu en 7. Un des aboutissements de l'analyse des propriétés des cyclides est ensuite la détermination et l'étude des développables focales circonscrites aux cyclides. Cette étude vient prolonger et clôturer les investigations de Darboux relatives aux propriétés focales des cyclides.

C'est à l'aide des coordonnées curvilignes du système triple orthogonal formé par les cyclides homofocales que le géomètre normalien explicite l'expression de la développable focale circonscrite à une cyclide. En reprenant dans le système (ρ, ρ_1, ρ_2) l'expression de l'élément de distance :

$$\frac{4ds^2}{-M} = \sum_i \frac{(\rho_i - \rho_j)(\rho_i - \rho_k)}{f(\rho_i)} d\rho_i^2 \quad [222]$$

Darboux emploie la propriété qui caractérise les systèmes orthogonaux exprimés dans une même équation, propriété qui fut la source de ses premières recherches et de sa définition des focales : l'enveloppe d'un système orthogonal *triple et un* est une développable focale (voir [Chap.2,7.1]). Il obtient alors la "*développable focale, enveloppe du système, [comme] le lieu des points de l'espace pour lesquels deux des trois paramètres* (ρ, ρ_1, ρ_2) *deviennent*

222. Nous reprenons les notations adoptées en 4.1 : (i, j, k) désigne une permutation circulaire sur les indices $(\emptyset, 1, 2)$.

égaux" ([**Darboux 1873a**, 144]). En posant $\rho_1 = \rho_2$, il obtient ainsi :

$$ds^2 = -\frac{M}{4}\frac{(\rho-\rho_1)^2}{f(\rho)}d\rho^2$$

Remarquant alors l'expression de ds^2 comme un carré parfait, Darboux note qu'il retrouve la forme de l'élément linéaire caractérisant les développables focales [223] : par tout point de la surface passe une génératrice isotrope. Il souligne également que cette développable focale (Δ) "*touche*" les cyclides $\rho_2 = \alpha$ (i.e. leur est tangente) en déterminant sur chacune d'elles "*la courbe limite, ligne de courbure singulière, intersection de la cyclide avec la surface infiniment voisine du système*" ([**Darboux 1873a**, 144]). Il s'agit sur ces cyclides de la *ligne de courbure imaginaire de Darboux*, lieu des solutions de l'équation $1+p^2+q^2 = 0$ et que Darboux obtient en faisant $\rho_2 = \rho = \alpha$. Nous verrons ultérieurement en 5.3 que le géomètre se penche en outre sur le cas de l'intersection, et non plus de la tangence, de la développable focale avec les cyclides du système, et retrouve des résultats liés à son extension du théorème de Kummer.

Le gardois termine son développement sur les développables focales circonscrites aux cyclides (Δ) en analysant leur contact avec les sphères directrices (S_i) et leurs arêtes de rebroussement. Les études centrées sur les focales (en tant que lignes doubles) et non sur la développable focale dont elles sont issues, tant géométriques qu'analytiques, de Darboux comme de Laguerre, ne faisaient dans ce cadre toujours mention que de la focale $(S_i)\cap(A_i)$. Darboux étudie l'intersection $(S_i)\cap(\Delta)$ plus en profondeur grâce à la connaissance de l'expression de (Δ) en coordonnées curvilignes. Il parvient ainsi au résultat suivant :

> La développable focale $[(\Delta)]$ coupe donc la sphère (S_i) :
>
> - 1) suivant le cercle de l'infini, qui est une ligne octuple de $[(\Delta)]$
>
> - 2) suivant 8 droites [isotropes]
>
> - 3) suivant la focale située sur (S_i) qui est une des courbes doubles de $[(\Delta)]$
>
> [**Darboux 1873a**, 145]

Le contact entre la développable focale et la directrice est donc, par ses éléments imaginaires, bien plus riche que la simple cyclique focale décrite sur la sphère par la déférente. Le fait même que Darboux entreprenne cette recherche, alors que la connaissance de la focale suffit à décrire les propriétés focales des cyclides, témoigne d'une inclinaison d'esprit que nous avons déjà soulignée. Darboux est poussé à approfondir et interpréter ses résultats à la lumière d'un ensemble de connaissances qui ne coïncide pas avec celui qui dans un premier temps a fait naître ce résultat. Ici, la description fine des contacts entre la développable et les sphères représente ce nouvel ensemble, ce regard différent sur l'obtention des focales d'abord venue d'autres considérations géométriques (sphères doublement tangentes, images par Φ des lignes de striction d'une autre développable).

La détermination de l'arête de rebroussement de (Δ) va pour finir renforcer le rôle clef des coordonnées pentasphériques dans l'étude des cyclides. Ce sont pourtant les coordonnées curvilignes (ρ, ρ_1, ρ_2) qui ont présidé à la formation de l'équation de la développable focale. Mais l'obtention de son arête de rebroussement, en étudiant "*le lieu des points de l'espace pour lesquels les trois paramètres (ρ, ρ_1, ρ_2) prennent une même valeur*"

223. Voir [Chap.2,7.3].

([**Darboux 1873a**, 145], amène le géomètre à un système de trois équations de la forme :

$$\sum k_i \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^{\frac{2}{3}} = 0$$

A ce stade du mémoire, Darboux n'a pas encore introduit les coordonnées pentasphériques $x_i = \lambda \frac{S_i}{R_i}$, et ne les fait donc pas intervenir. Mais il est remarquable de noter qu'à partir des coordonnées curvilignes, l'arête de rebroussement de la développable focale d'une cyclide est naturellement donnée par un système d'équations homogènes - de degré $\frac{2}{3}$ - en coordonnées pentasphériques. Le géomètre remarquera, sans en développer les calculs, que ces équations lui permettent de parvenir aux développées sphériques des cinq focales, et donc par conséquent des cycliques sphériques en général. Il retrouve ainsi des liens existant entre l'arête de rebroussement de la développable focale et les centres de courbures de ses lignes doubles sphériques déjà signalés par [**Laguerre 1868a**, 19].

La connaissance des propriétés de la développable focale (Δ) circonscrite à une cyclide sera pour finir complétée grâce aux coordonnées pentasphériques. Pour les cyclides d'équation $\sum \frac{x_i^2}{\lambda - a_i} = 0$, Darboux montre que la recherche des sphères tangentes et de rayon nul est ramenée à l'expression ([**Darboux 1873a**, 605]) :

$$\sum \frac{m_i^2}{\lambda - a_i} = 0$$

Il ajoute que sur la développable focale les sphères sont en outre doublement tangentes, ce qui signifie que λ est une racine double de l'équation ci-dessus. L'équation correspondante est alors de degré 8 en les coordonnées m_i. Lorsque ces coordonnées représentent une sphère de rayon nul, le degré de l'équation est doublé et Darboux obtient ainsi que (Δ) est de degré 16. En revanche, lorsqu'il interprète ces mêmes coordonnées comme les coordonnées tangentielles d'un plan, l'équation de degré 8 correspond à l'équation tangentielle de (Δ) qui est ainsi de la huitième classe.

L'étude des propriétés focales des cyclides apparaît donc comme un formidable outil d'application pour la théorie des focales et des surfaces développables focales que Darboux a développée. Mais elle montre également l'utilité des différents systèmes de coordonnées, le géomètre faisant intervenir les coordonnées curvilignes et pentasphériques, la considération des secondes découlant parfois même de l'introduction des premières.

Les méthodes analytiques et géométriques, employées de concert, se complètent et enrichissent la description des propriétés des cyclides. Elles permettent notamment à Darboux de dresser deux différentes classifications faisant intervenir les focales des cyclides, l'une mettant en relief les propriétés topologiques dites de connexion et de connexité, l'autre détachant les types de surfaces de révolution, les cyclides cubiques et les cyclides de Dupin.

La description focale des cyclides opérée ainsi par Darboux en 1873 est à la fois bien plus complète et plus précise que celles qui avaient été données jusqu'alors de manière éparse notamment par Moutard et Laguerre. Le seul travail comparable est présenté par John Casey, mais celui-ci souffre de l'ambiguïté présentée dans l'appréhension des systèmes de sphères, surtout au regard de leur considération comme un système de coordonnées. L'expression de plusieurs propriétés auraient sans doute été améliorée voire même modifiée si le mathématicien irlandais avait entrepris - à l'instar de Darboux - des études plus fondamentales relatives aux systèmes de sphères. Nous avions déjà souligné ce point au regard de l'étude de l'orthogonalité des directrices des cyclides (partie 4.2), et ce même constat persiste ici dans l'étude des propriétés focales.

5.2. Relations entre les modes de génération.

Dans sa première présentation des surfaces cyclides, Théodore Moutard avait mis l'accent sur la non-unicité de la génération de ces surfaces anallagmatiques :

> [Les cyclides] peuvent être de cinq manières différentes, définies comme le lieu des intersections successives des sphères qui coupent orthogonalement une sphère fixe, dite sphère principale [ou directrice], et dont les centres parcourent une surface directrice [déférente] du second ordre.
>
> [**Moutard 1864b**, 243]

Moutard n'avait ensuite pas cherché les liens qui étaient susceptibles d'unir les différentes surfaces déférentes et les différentes sphères directrices. Au contraire, il s'était intéressé à la possibilité d'effectuer une génération métrique des cyclides "à la Pappus" comme l'ensemble des points de l'espace respectant certaines conditions de distances à des éléments fixés -points ou plans - ([**Moutard 1864c**, 538]). En ceci, Moutard avait prolongé aux surfaces du quatrième ordre l'approche d'Amiot et de MacCullagh pour les quadriques (voir [Chap.2,4.5]), et avait répondu par l'affirmative à cette possibilité de génération par des ratios de distances à des couples de plans et de points fixes, mais par la négative en utilisant uniquement des points.

Dans ses communications de 1868, Edmond Laguerre se propose d'analyser les relations existant entre les différents modes de génération des surfaces cyclides. Son objectif est alors, à partir d'un couple déférente - directrice associée (A, S), de parvenir à la détermination des quatres autres couples (A_i, S_i) liés à la génération de la même cyclide. La construction géométrique de Laguerre repose sur un théorème énoncé par Chasles dans son "*Résumé d'une théorie des surfaces du second ordre homofocales*" de Juin 1860 (voir [Chap.2,5.1]). Etant donné une surface développable circonscrite à une sphère et une quadrique, ce que Laguerre appelle le "*théorème de Chasles*" énonce l'existence de quatre lignes double sur cette développable qui sont des coniques planes par lesquelles passent autant de surfaces du second degré homofocales à la quadrique de départ ([**Chasles 1860b**]).

Laguerre considère ainsi la développable $(\Delta) := \boxed{(A)(S)}$ circonscrite à une directrice et sa déférente. D'après le *théorème de Chasles*, ses lignes doubles sont quatre coniques planes par lesquelles passent exactement quatre quadriques homofocales à (A). Laguerre conclut alors :

> Les quatre surfaces du second degré ainsi déterminées seront précisément les surfaces A_1, A_2, A_3, A_4 [les déférentes] au moyen desquelles, d'après le théorème de M. Moutard, on peut engendrer la surface.
>
> [**Laguerre 1868a**, 20]

Sans étayer cette identification, il détermine ensuite les sphères directrices associées aux déférentes grâce à l'unicité de la sphère inscrite dans une surface développable circonscrite à une déférente A_i et à une conique du plan de la ligne de striction associée à A_i. S'il détermine bien quatre couples de surfaces du second degré (homofocales à A) et de sphères, Laguerre énonce mais ne démontre pas qu'il s'agit bien des déférentes et des directrices associées aux autres modes de génération de la cyclide de départ.

C'est en s'appuyant sur ses études sur les groupes de sphères et les propriétés des tétraèdres orthocentriques que Darboux va prouver le bien-fondé des identifications de Laguerre. En notant (K_i) les quatre coniques planes, lignes doubles de $(\Delta) := \boxed{(A)(S)}$, Darboux note qu'en raison de l'orthogonalité de la cyclide à sa directrice le long de la courbe sphérique $(\Delta) \cap (S)$, ces coniques sont "*dans les faces du tétraèdre [orthocentrique] conjugué commun à* (A) *et à* (S)" ([**Darboux 1873a**, 153]). Puis il démontre que les sphères orthogonales à (S) centrées sur les coniques (K_i) sont doublement tangentes à la cyclide : elles appartiennent ainsi à differentes enveloppes qui génèrent la surface. Ceci montre que les coniques (K_i) appartiennent à des surfaces déférentes, ce qui permet à Darboux de retrouver l'identification des déférentes donnée par Laguerre.

C'est ensuite la connaissance de la géométrie du tétraèdre orthocentrique associé à l'orthogonalité des sphères directrices de la cyclide qui lui permet d'identifier les directrices (S_i). Il utilise en effet le fait que ces sphères possèdent leurs sommets aux sommets du tétraèdre formé par les plans des coniques, puis que leurs rayons sont fixés par l'orthogonalité à la sphère directrice (S). Ceci termine complètement la détermination des relations entre les modes de génération des cyclides : à partir d'une déférente et d'une directrice, Darboux décrit l'obtention géométrique des quatre autres couples de surfaces. Les propriétés géométriques du système orthogonal des cinq directrices, ainsi que des tétraèdres orthocentriques associés, y sont fondamentaux. Si l'identification des déférentes peut s'en affranchir - encore faut-il obtenir au préalable la condition de double tangence des familles de sphères - en revanche l'obtention des sphères directrices repose entièrement sur ces propriétés. L'approche présentée par Laguerre ne permettait pas de conclure en ce sens, et ce n'est que dans un second temps que Darboux montre qu'elle conduisait en effet au bon résultat.

Tout comme dans le cadre des propriétés focales des cyclides, c'est la compréhension des intrications géométriques liées aux différentes surfaces correspondant aux modes de génération des cyclides qui permet à Darboux d'apporter des démonstrations géométriques définitives. Là encore, ses recherches complémentaires de fond sur les systèmes de sphères orthogonales et les tétraèdres *autopolaires* ("*conjugués à une sphère*" pour Darboux) lui permettent de retrouver des résultats déjà énoncés, connus et acceptés, mais qui n'avaient pas été accompagnés de véritables démonstrations. On peut remarquer néanmoins que Darboux ne se penche pas sur le pendant analytique de cette étude, à savoir l'obtention des équations des déférentes et des directrices en connaissant celles de l'une de chaque. S'il n'étudiera pas cette question *en coordonnées cartésiennes*, en revanche il en donnera une réponse indirecte - sans se poser la question sous cette forme - en exprimant déférentes, directrices et séries de sphères dont la cyclide est l'enveloppe dans le système de coordonnées pentasphériques ([**Darboux 1917**, 446-461]).

Signalons pour finir que la cyclide est un cas exceptionnel de surface anallagmatique par les relations existant entre ses modes de génération qui ne se présentent pas dans le cas des anallagmatiques les plus générales, telles que l'orthogonalité des sphères d'inversion. La géométrie anallagmatique, arrivée dans les programmes de lycées et de classes préparatoires au début du XXème siècle, en a disparu après la "*réforme des mathématiques modernes*" de la fin des années 1960 [224]. Cependant, à l'image du destin de la théorie projective des foyers et des focales, elle n'était que bien peu développée dans le cas de l'espace et se cantonnait essentiellement à la géométrie plane.

5.3. Systèmes de cercles et de droites.

Cette dernière section est l'occasion de replacer l'étude des surfaces cyclides dans un contexte plus général qui est celui des investigations relatives aux surfaces du quatrième ordre (dites quartiques), et particulièrement parmi ces quartiques de celles contenant une conique double. Nous pourrons ainsi y relier certains résultats de Darboux concernant les cyclides aux résultats plus généraux obtenus par Kummer quelques années auparavant, puis par Clebsch dans le même temps. Après une analyse générale relative aux quartiques et aux propriétés classiques de ces surfaces, nous étudierons les systèmes de droites des cyclides en les replaçant dans le riche contexte de la recherche des droites sur les surfaces algébriques. Pour finir, nous analyserons les propriétés particulières des cyclides relatives aux systèmes de cercles qui y sont tracées. Ces recherches sont propres aux cyclides et ne s'inscrivent pas dans un schéma plus général d'étude des quartiques, au contraire des systèmes de droites. Nous verrons par ailleurs que certains des énoncés qui s'y rapportent sont encore aujourd'hui le sujet de quelques conjectures restées sans réponse. Les thématiques abordées ci-après portent le reflet de la diversification des intérêts mathématiques de Gaston Darboux à partir de 1870.

Après la lecture "*avec diligence et avec plaisir*" [225] du Traité de géométrie dans l'espace de George Salmon ([**Salmon 1862**]), Eduard Ernst Kummer [226] publie en 1863 et en 1864 deux articles portant sur l'étude de deux classes de surfaces particulières : les surfaces quartiques contenant une conique double ([**Kummer 1863**]), et les surfaces quartiques contenant 16 points singuliers ([**Kummer 1864**]). Ces-dernières, portant le maximum de singularités pour l'ordre 4, seront d'ailleurs appelées les *surfaces de Kummer*.

Dans son premier article, Kummer donne l'équation générale des quartiques contenant une conique double. En notant $p = 0$ l'équation du plan contant cette conique et $\phi = 0$ cette-dernière, le prussien montre que les équations des surfaces étudiées se mettent sous la forme :

$$\phi^2 = 4p^2\psi \quad \Leftrightarrow \quad (\phi + 2\lambda p^2)^2 = 4p^2(\psi + \lambda\phi + \lambda^2 p^2) \qquad \text{[Kummer 1863]}$$

où ψ, tout comme ϕ, est une forme homogène de degré 2 (quadratique). En lien avec la recherche des plans tangents doubles, Kummer relie cette équation à la recherche des cônes représentés par l'équation $\psi + \lambda\phi + \lambda^2 p^2 = 0$. Il parvient à mettre en évidence que cette expression est alors du cinquième degré en λ, et détermine ainsi autant de cônes dont les

224. On consultera le "Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement" de Daniel Perrin en ligne : https://www.math.u-psud.fr/~perrin/SurGeometrie/Rapport_geometrie.pdf. Les "*Compléments de Géométrie*" de Daniel Caire et Robert Deltheil (Ed. Baillière et Fils, Paris, 1951) présentent par exemple le contenu de géométrie anallagmatique du programme des classes préparatoire après la Seconde Guerre Mondiale.

225. Cette citation d'une lettre de Kummer à Leopold Kronecker est reprise dans [**Lê 2015**, 181].

226. Voir la partie [Chap.2,[Chap.2,3.1] pour quelques éléments de présentation du mathématicien allemand E.E. Kummer.

plans tangents sont exactement les plans tangents doubles à la quartique. La recherche des plans tangents doubles avait été l'outil principal utilisé par le révérend George Salmon pour la détermination des droites sur les surfaces du troisième degré, nous y reviendrons plus loin. Dans le cadre des quartiques qu'il étudie, ces plans intéressent particulièrement Kummer puisqu'ils découpent sur la surface deux coniques supplémentaires l'une de l'autre [227].

Le second mémoire de Kummer ([**Kummer 1864**]) est resté célèbre pour la mise en évidence et l'étude des *surfaces de Kummer* [228]. Mais dans le cadre de notre travail, il nous est intéressant car le professeur de Berlin relie l'étude des quartiques et de leurs singularités à l'étude des congruences normales dont elles sont les caustiques ("*Brennfläche*"). En ceci, Kummer se rapproche d'ailleurs des travaux de Chasles relatifs à la *surface de Liouville* des surfaces du second degré. C'est en particulier par la différence de propriétés des congruences que le berlinois distingue la quartique qui portera son nom des quartiques générales :

> Le système de rayons ("*Strahlensystem*") complet du 12ème ordre et de classe 28 qui possède pour caustique ("*Brennfläche*") la surface générale du quatrième ordre se compose, lorsque cette caustique possède 16 points singuliers, premièrement de 16 systèmes de rayons, dont chacun n'est constitué que de toutes les droites d'un même plan, deuxièmement de 4 systèmes de rayons d'ordre 2 et de classe 2, et troisièmement d'un système de rayons d'ordre 4 et classe 4.
>
> [**Kummer 1864**, 258]

Kummer étudie dans la suite de son travail la disposition des plans tangents particuliers de ces quartiques singulières qui contiennent les rayons des différents systèmes. Il doit être souligné qui Kummer étudie ainsi les quartiques en ramenant leur génération à l'enveloppe des congruences dont elles sont les caustiques. C'est ainsi, en particulier, qu'il en étudie la classe, les singularités et les propriétés des plans tangents. Quelques années plus tard, Alfred Clebsch et Carl Friedrich Geiser reprendront les travaux de Kummer et étudieront tout particulièrement les droites des surfaces quartiques à coniques doubles. Nous verrons cela un peu plus loin.

Les cyclides de Darboux représentent, dans le cadre du premier travail de Kummer, le cas particulier des quartiques dont la conique double est le cercle de l'infini. Leur étude est ainsi contenue dans celle de Kummer et dans celle ultérieure de Clebsch. Darboux fait référence à ces travaux dans son introduction des surfaces cyclides, et justifie leur étude par une double remarque :

> Il est juste de rappeler ici [...] que les cyclides du 3ème et du 4ème ordre ne sont que des transformées par l'homographie de la surface du 4ème ordre à conique double, que M. Kummer a étudiée le premier en 1863 ([**Kummer 1863**]), et dont il a reconnu les principales propriétés. Depuis, différents géomètres, et en particulier M. Clebsch, ont consacré des mémoires importants et développés à l'étude de cette surface du 4ème ordre. Je citerai en particulier le mémoire de M. Clebsch publié en 1868 ([**Clebsch 1868**]) [229].

227. Pour plus de détails, on consultera [**Lê 2015**].
228. Pour plus de détails sur la surface de Kummer, voir [**Rowe 2013**].
229. Bien entendu, Darboux ne donne les références qu'en bas de page. Nous les insérons dans le texte pour plus de lisibilité.

> [...] Cependant l'étude directe des cyclides me paraît conserver de l'intérêt. Le choix particulier de la ligne double imprime un caractère remarquable de simplicité à l'étude de ces surfaces, et permet de découvrir des théorèmes dont l'énoncé serait trop compliqué lorsque la conique double est quelconque. Dans tous les cas, on pourra aussi étendre par l'homographie aux surfaces du 4ème ordre à conique double et à la surface générale du 3ème ordre les propositions trouvées dans la théorie des cyclides.
>
> [**Darboux 1873a**, 108-109]

C'est ainsi la position de la conique double au cercle de l'infini qui rend, pour Darboux, l'étude des cyclides plus simple - dans certains cas - que celle de Kummer. Par ailleurs, les cyclides ne doivent selon lui pas être considérées comme un cas particulier puisqu'au contraire toutes leurs propriétés se transfèrent par homographie aux quartiques à conique double. On retrouvera ainsi logiquement dans l'étude de Darboux de nombreuses analogies avec les études de Kummer et de Clebsch. Mais les outils spécifiquement développés par Darboux dans le cadre de sa réflexion sur les cyclides permettront également une approche simplifiée de certains des résultats.

Ce sont les coordonnées pentasphériques que Darboux va mettre à profit pour décrire certaines propriétés liées aux normales et aux tangentes des surfaces cyclides. La dualité présentée par ses coordonnées - les coordonnées m_i d'une sphère pouvant être considérées coordonnées tangentielles homogènes d'un plan (voir la section 4.2) - vont s'y révéler d'un emploi fécond.

C'est la recherche des familles de sphères tangentes à la cyclide $\sum A_i x_i^2$ au point x_i qui va mener le géomètre normalien à ces diverses considérations. Sachant que les sphères recherchées auront l'expression $m_i = (A_i + \lambda)x_i$, il en obtient une équation générale sous la forme d'un discriminant[230] $\Psi(m_i) = 0$ ([**Darboux 1873a**, 275]). Cette équation, "*homogène et du douzième ordre par rapport aux quantités m_i*", est interprétée de quatre manières différentes par Darboux :

- 1) En regardant l'intersection de deux sphères quelconques fixées $(m_i), (m'_i)$: $\Psi(m_i + \lambda m'_i) = 0$, du degré 12 en λ, traduit alors le fait de pouvoir mener douze sphères tangentes à la cyclide passant par un cercle donné (à l'intersection des deux sphères).

- 2) Si ce cercle devient de rayon infini, les deux sphères le sont également : ce sont des plans. Darboux interprète alors cette même équation comme représentant les 12 plans tangents à la cyclide, qui est donc de la douzième classe.

- 3) En étudiant le cas où $(m_i), (m'_i)$ sont deux sphères concentriques, le degré de $\Psi(m_i + \lambda m'_i) = 0$ est vu par Darboux comme le nombre de normales à la cyclide passant par un point donné.

- 4) Enfin, en regardant m_i comme les coordonnées d'un plan, il identifie $\Psi(m_i) = 0$ à l'équation tangentielle de la cyclide, et retrouve encore qu'elle est de la douzième classe.

Darboux ajoute : "*Toutes ces propositions, si différentes en apparence, sont ici des conséquences d'un principe unique*" ([**Darboux 1873a**, 276]). Faire reposer les diverses propositions sur un unique grand principe... On retrouve ici l'impact de la ligne directrice de la philosophie de Michel Chasles. Les coordonnées pentasphériques sont en ceci un outil

230. Ce discriminant est obtenu en considérant les deux équations obtenues d'une part en remplaçant les m_i dans l'équation générale de la cyclide, et d'autre part en vérifiant la relation d'homogénéité de degré 2 des coordonnées.

privilégié : en jouant sur les rayons et l'alignement des centres des sphères, une même équation aboutit à des conséquences très variées. Si Darboux retrouve quelques propriétés des quartiques à conique double de Kummer, la proposition 3) suggère pourtant de prendre le contre-pied des études du mathématicien de Berlin : Kummer avait analysé les quartiques par les congruences dont elles étaient les caustiques, mettant au centre de sa recherche les *tangentes* (doubles) de ces surfaces. Au contraire, Darboux se penche sur leurs *normales*, et va prolonger cette enquête à la surface des centres de courbure Σ des cyclides. Dans la note intitulée "*Sur le problème des normales aux cyclides*" ([**Darboux 1873a**, 287-303]), mêlant par les coordonnées pentasphériques les problèmes de tangence aux problèmes des normales, il démontrera en particulier que Σ est une surface du 24ème ordre et de la 16ème classe. Il poursuivra cette étude par celle des surfaces des centres de courbure des cyclides homofocales, prolongeant ainsi certains travaux de Clebsch consacrés aux quadriques.

Pour analyser plus en profondeur les relations entre les travaux d'Alfred Clebsch et ceux de Darboux, l'étude des droites tracées sur les surfaces quartiques est particulièrement bien appropriée. Nous allons ici replacer cette thématique générale de recherche dans son contexte.

La présence de droites - en nombre infini - sur les surfaces du second degré étant alors déjà bien connue, c'est en 1849 que cette question apparaît pour les surfaces cubiques (du troisième degré). George Salmon raconte ainsi que "*la théorie des lignes droites sur une surface cubique a été pour la première fois étudiée durant l'année 1849 dans une correspondance entre M. Cayley et moi-même*" ([**Salmon 1862**, 386]). Dans un premier temps, Arthur Cayley lie cette recherche aux plans tangents doubles et triples, et démontre alors que les cubiques possèdent toutes un même nombre fini de droites ([**Cayley 1849**]). A la lumière de ces résultats, Salmon détermine ensuite quelques semaines plus tard que ce nombre est exactement 27 ([**Salmon 1849**]). "*Résultat célèbre de la deuxième moitié du XIXème siècle*", ce *théorème des vingt-sept droites* a notamment été étudié dans l'optique du rapprochement entre groupes, équations et géométrie dans [**Lê 2015**].

La présence de lignes droites sur les surfaces quartiques apparaît en revanche alors comme un fait exceptionnel. Dans son "*Traité*" de 1862, George Salmon présente le problème des droites sur les surfaces algébriques à l'aide de la méthode d'énumération des constantes inspirée de Plücker. Partant du constat que dans les équations d'une ligne droite figurent quatre constantes, il dénombre les conditions portant sur ces droites pour qu'elles soient situées sur les surfaces. Dans le cas des quadriques, ces conditions sont au nombre de 3, d'où une infinité de droites. Le cas des cubiques est particulier en ceci que le nombre de conditions, 4, équivaut au nombre de constantes : les droites sont alors en nombre fini. Pour les surfaces d'ordre supérieur, y compris les quartiques, il existe une nombre de conditions strictement supérieur à celui des constantes : en général, il n'existera pas de droites sur ces surfaces ([**Salmon 1862**, 27-29]).

Seules les surfaces *réglées* du quatrième ordre semblent donc comporter des droites, et elles sont alors l'objet des études de [**Chasles 1861**] et de [**Cayley 1864**]. Mais l'introduction par Kummer des quartiques possédant une conique double va permettre à un mathématicien allemand de déterminer les premières droites sur des quartiques non-réglées : Alfred Clebsch.

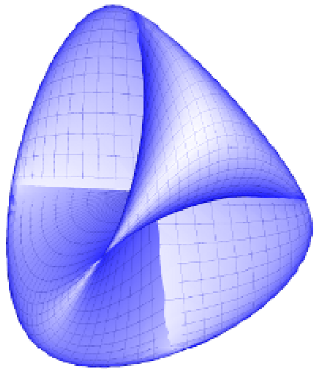


FIGURE 36. Alfred Clebsch et une surface quartique (la surface de Roman) contenant des droites [231]

Né en 1833 à Königsberg, Alfred Clebsch y étudie jusqu'à l'âge de 21 ans et se lie d'amitié avec Carl Neumann avec qui il étudie au Altstädtisches Gymnasium de Königsberg. Après avoir passé quatre années dans l'Université de sa ville natale (appelée l'*Albertina*) et obtenu un doctorat en hydrodynamique sous la direction du physicien Franz Neumann, le père de son ami, Clebsch part pour Berlin où il commence par enseigner dans le secondaire quelques années. Son enseignement dans le milieu académique débute en 1858 avec un court passage à l'Université de Berlin, se poursuit ensuite à Karlsruhe (1858-1863) puis à Gießen (1863-1868). Clebsch a alors largement redirigé ses recherches vers les mathématiques pures. Appelé à Göttingen en 1868 pour y reprendre l'ancienne chaire de Riemann, Clebsch retrouve son ami Carl Neumann avec qui il fonde un nouveau recueil mathématique : les *Mathematische Annalen*, souvent appelées les *Annales de Clebsch*. C'est au sommet de sa carrière et de son influence - notamment sur le jeune Felix Klein - que Clebsch meurt subitement de la diphtérie le 9 Novembre 1872. Darboux insérera *in extremis* dans le numéro de Décembre 1872 du Bulletin une note d'autant plus parlante qu'elle doit être replacée dans le contexte de l'occupation partielle de la France après la défaite de 1870/71 contre la Prusse :

> L'illustre géomètre nous avait honorés plusieurs fois de ses communications et des marques de sa bienveillance. Nos lecteurs connaissent ses beaux mémoires, ses travaux si originaux et si profonds. La perte profondément regrettable que la Science vient de faire sera donc cruellement ressentie dans notre pays.
>
> Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, Décembre 1872 (Tome 3), p.384.

En 1868, Clebsch publie un article dans le *Journal de Borchardt*, [**Clebsch 1868**], dans lequel il entreprend de prolonger l'étude des propriétés des surfaces quartiques à coniques doubles débutée cinq années plus tôt par Kummer. Darboux fera à plusieurs reprises référence à ce mémoire, signalant notamment que "*dans ce travail se trouvent déterminées*

231. Crédits image : originlab.com.

d'une manière complète les droites et les courbes les plus simples qu'on peut placer sur la surface" ([**Clebsch 1868**, 109]). Clebsch analyse en effet en détail les courbes doubles et les courbes cubiques de ces quartiques à coniques doubles, sans néanmoins se pencher spécialement sur le cas des cercles. Surtout, un de ses premiers résultats est relatif à la présence d'un nombre constant de droites sur ces surfaces : elles contiennent toutes 16 droites ([**Clebsch 1868**, 143]). Si une partie de l'article est consacré à la démonstration de ce résultat en explicitant "*l'équation du seizième degré*" dont il dépend et à sa résolution [232], Clebsch s'intéresse surtout aux groupements de ces droites révélant leurs relations d'incidence. Il donne ainsi quatre différents regroupements qu'il présente dans des tableaux ([**Clebsch 1868**, 144-145]). Le premier fait état, pour chacune des 16 droites, des 5 différentes droites qui lui sont incidentes. Le second présente les 40 points des intersections de ces droites, puis le troisième les 40 quadrilatères qu'elles forment. Enfin, dans le dernier tableau Clebsch met en évidence le classement des intersections par groupes de 5. C'est à ce dernier tableau qu'il accorde le plus d'importance, puisqu'il lui indique par sa forme même que "*l'équation des seize droites est résolue à l'aide d'une équation de degré* 5" ([**Clebsch 1868**, 145]). Ainsi qu'il le remarque ensuite, il s'agit en fait de l'équation des 5 cônes déjà mise en évidence par Kummer, les cônes qui en résultent étant enveloppés par les plans tangents doubles de la surface quartique.

L'étude importante de Clebsch sera poursuivie par le mathématicien suisse Carl Friedrich Geiser [233] l'année suivante [**Geiser 1869**]. L'objectif de Geiser est avant tout de révéler le lien entre les 27 droites des cubiques et les 16 droites des quartiques contenant une conique double ([**Lê 2015**, 134]). Mais dans la toute dernière section de son travail, il se penche sur le cas "*d'un intérêt particulier*" où la conique double est le cercle de l'infini - qu'il note k_∞. Ces quartiques correspondent ainsi aux cyclides de Darboux, auquel Geiser fait d'ailleurs référence ([**Geiser 1869**, 256]). Il remarque que l'inversion par une sphère dont le centre se situe sur une cyclide d'ordre 4 change cette-dernière en une cyclide d'ordre 3 [234]. C'est grâce à cette inversion que le mathématicien helvète relie l'étude des 16 droites des cyclides générales aux 27 droites des cyclides cubiques, ce qui lui permet d'avoir un exemple d'application du lien général qu'il voulait alors souligner. Il relie également ces considérations aux systèmes de cercles tracés sur les cyclides. De la présence de deux configurations de sections planes des cyclides du troisième ordre - distinguées selon les intersections de ses 27 droites - Geiser conclut :

> Il se trouve donc sur la surface soit 2 soit 6 ensembles ("*Schaaren*") de cercles, qui se trouvent dans des plans réels, et qui sont donc, comme on peut le montrer, réels.
>
> Il s'ensuit pour les surfaces générales [cyclides] les propriétés suivantes en fonction de la réalité des cercles qui y sont tracés : il y a deux différentes espères de telles surfaces [...]
>
> [**Geiser 1869**, 256]

232. Pour plus de renseignement sur cette "*équation de la géométrie*", voir [**Lê 2015**, 183-185].
233. A propos du mathématicien Geiser, on lira la notice de [**Lê 2015**, 118].
234. Prenons une surface d'ordre n, passant i fois par le cercle de l'infini et o fois par le centre d'une sphère fixée. Alors l'inversion de la surface par cette-dernière sphère produit une surface d'ordre $n' = 2n - 2i - o$. Pour les cyclides, $n = 4$ et $i = 2$: aussi l'inverse d'une cyclide d'ordre 4 est du même ordre ($4 = 2 \times 4 - 2 \times 2$) si le centre de la sphère d'inversion n'appartient pas à la cyclide, mais est d'ordre $3 = 2 \times 4 - 2 \times 2 - 1$ sinon.

Geiser effectue ainsi un classement des cyclides en deux parties : les unes contiennent exactement deux familles de cercles réels, les autres en contiennent six. Son travail est le premier qui accorde, dans le fil général des recherches sur les quartiques à coniques doubles, une place particulière aux cyclides. Les droites de ces surfaces y sont étudiées en ramenant la cyclide à une cubique par inversion, ce qui amène le géomètre suisse à prendre en considération les systèmes de cercles.

Darboux n'a connaissance du travail de Geiser qu'entre les deux rédactions de son mémoire (1869-1872) : c'est ce qu'il indique dans une note de bas de page [235]. Pour déterminer les droites des cyclides, il développe d'une part une méthode géométrique, et d'autre part une méthode analytique basée sur son extension du théorème d'homofocalité de Kummer qui lui permettra d'expliciter la formation des équations des 16 droites des cyclides à partir des coordonnées pentasphériques. Nous allons voir que ces deux méthodes sont reliées l'une à l'autre par le biais de l'inévitable théorie des focales.

La méthode géométrique est présentée dans le paragraphe "*Des sections planes et sphériques des cyclides*" ([**Darboux 1873a**, 164-173]), dans le chapitre d'étude géométrique des cyclides. La méthode analytique - que nous développerons ci-dessous - lui permet de savoir que toutes les droites des cyclides sont isotropes. En recherchant alors les droites isotropes (δ) placées sur la cyclide, Darboux remarque que ces droites sont "*tangentes à chacun des cinq cônes doublement tangents à la cyclide*" ([**Darboux 1873a**, 164]). On retrouve ici les cinq cônes, d'abord évoqués par Kummer puis dont l'importance avait été soulignée par Clebsch pour déterminer la position des 16 droites. Nous avons vu en 5.1 que Darboux en avait déterminé l'expression par la première des équations de condition ($\mathcal{G}$). Les plans tangents à ces cônes doivent couper la cyclide en deux cercles [236], et le géomètre note que s'ils contiennent δ alors ces cercles ont dégénéré en des droites. Mais alors une telle droite δ est conjuguée à une seconde δ' formant un cercle de rayon nul dans le plan tangent. Le centre de ce cercle est ainsi une sphère de rayon nul doublement tangente à la cyclide, il appartient donc à l'une de ses focales. Puisqu'il est également sur la droite δ et par conséquent sur la cyclide elle-même, il est à l'intersection de celle-ci et d'une focale. Darboux en conclut :

> Chaque cyclide est coupée en 8 points par une de ses focales, et par ces 8 points passent 16 droites qui appartiennent à la cyclide. Ces 16 droites forment 8 cercles de rayon nul, dérivés des génératrices de la déférente qui sont tangentes à la sphère directrice.
>
> [**Darboux 1873a**, 165]

Ces 8 points, à l'intersection de la cyclide et d'une de ses cycliques focales, sont des *ombilics* de la surface, ce que Darboux avait rappelé au début du mémoire mais qu'il ne reprécise pas ici [237]. Aussi ces 8 ombilics de la cyclide sont d'après le géomètre des points

235. Voir [**Darboux 1873a**, 165].

236. C'est là la propriété qui caractérise les plans doublement tangents à la cyclide, nous y reviendrons ci-après mais nous l'avons déjà évoquée dans le travail de Kummer pour les coniques doubles non-circulaires.

237. Dans le premier chapitre du mémoire, Darboux rappelait, en considérant les droites isotropes situées sur une surface faisant partie d'un système orthogonal triple et un, que "*les points d'intersection de ces droites sont des ombilics, puisque l'indicatrice [de Dupin] de la surface en ces points est un cercle*" ([**Darboux 1873a**, 21]). Rappelons que cette propriété d'intersection des surfaces en des points ombilics était à l'origine des dénominations d'*ombilicale* chez Laguerre, d'*umbilicar focals* chez MacCullagh (voir parties [Chap.2,4.5 & 6]).

d'incidence des 16 droites, isotropes, qu'elle contient et qui s'y coupent deux à deux. Si on retrouve directement l'importance des cinq cônes de double tangence de Kummer dans l'étude faite par Darboux des droites des cyclides, les 8 points qu'il met ici en évidence par l'intersection des focales paraissent présenter un nouveau moyen d'opérer le classement de ces droites. Le plus important groupement donné par Alfred Clebsch était en effet un groupement des droites en 40 paires illustrant la dépendance du problème en 5 cônes[238]. Chaque paire de droites était alors constituée de deux droites sécantes. On peut remarquer que, sur la cyclide, ces deux droites isotropes sont d'ailleurs inverses l'une de l'autre par une inversion de sphère la directrice sur laquelle s'appuie leur intersection.

Pour les cyclides, le résultat de Darboux montre que les lieux géométriques de ces intersections, donc les points que ces paires représentent, doivent être reliés aux *focales* de la cyclide. On retrouve en effet la classification de Clebsch en remarquant - ce que Darboux prouvera ultérieurement d'une toute autre manière en utilisant les coordonnées curvilignes issues du système pentasphérique ([**Darboux 1873a**, 309]) - que les cyclides possèdent 5 focales, et donc 40 ombilics au total. Ces ombilics recoupent ainsi parfaitement les 40 paires de Clebsch. Darboux ne signalera cependant pas cela, mais préférera renvoyer directement au travail du mathématicien allemand : "*dans un mémoire déjà cité, M. Clebsch a étudié les dispositions relatives de ces droites*" ([**Darboux 1873a**, 165]).

La théorie des focales intervient donc ici de manière inattendue et apporte à Darboux une interprétation géométrique du problème de l'incidence des droites des quartiques à coniques doubles. Sur la cyclide, les 40 points focaux correspondant à ses ombilics sont ainsi à mettre en relation directe avec les 40 appariements formés par Clebsch pour l'une de ses classifications du problème des 16 droites. L'existence de ces droites est quant à elle issue, dans l'approche adoptée par le géomètre français, du rapprochement entre les propriétés géométriques focales et les propriétés des plans tangents doubles des cyclides.

La méthode géométrique de Darboux pour l'étude des droites des cyclides a donc fait intervenir la théorie des focales. Sa méthode analytique reposera quant à elle sur l'objet central de cette théorie : les développables focales. En 1865, Darboux avait étendu le théorème d'homofocalité de Kummer, montrant par une démonstration analytique que l'enveloppe d'un système triple orthogonal compris dans une unique expression était une développable focale. Nous avons également vu que, ce-faisant, il avait donné à ce résultat une extension nouvelle qu'il avait énoncée sous la forme suivante dans son mémoire de 1873 :

> Quand on a trois systèmes de surfaces orthogonales, et que les deux premiers sont compris dans une seule équation [...] leur enveloppe est une développable [focale] coupée suivant des droites par les surfaces du troisième système. Ces droites sont évidemment, sur chaque surface du troisième système, des enveloppes des lignes de courbure de cette surface.[239]
>
> [**Darboux 1873a**, 21]

C'est une application de ce résultat que le géomètre nîmois va donner en considérant les développables focales associées aux systèmes orthogonaux de cyclides homofocales. Il

238. Il s'agit du quatrième tableau, noté IV [**Clebsch 1868**, 145]. On en trouvera une interprétation plus détaillée dans [**Lê 2015**, 184].
239. Pour plus de détails, on se reportera à la partie [Chap.2,7.1].

montrera ainsi que les droites que contiennent une cyclide doivent être vues comme la trace sur cette surface de l'intersection de la développable focale qui enveloppe le système triple, homofocal, dont elle fait partie. Puisque cette développable épouse la cyclide le long d'une ligne de courbure imaginaire (dite de Darboux), on peut également interpréter ce résultat en résumant les droites des cyclides comme les enveloppes de leurs lignes de courbure. C'est d'ailleurs sous cette forme que Darboux avait énoncé pour la première fois ce résultat, sans en donner de preuve, en 1870 ([**Darboux 1870b**, 1332]).

Nous avions vu dans la partie 5.1 que le nîmois avait déterminé en coordonnées curvilignes (ρ, ρ_1, ρ_2) - pour un système triple de cyclides homofocales - l'expression de la développable focale (Δ) : $ds^2 = -\frac{M}{4}\frac{(\rho-\rho_1)^2}{f(\rho)}d\rho^2$. Nous avons également souligné que Darboux explicitait la tangence de (Δ) à la cyclide $\rho_2 = \alpha$ comme la ligne de courbure imaginaire de cette surface. Mais nous avons volontairement omis de signaler que le géomètre rajoutait à cette proposition : "*cette développable* (Δ) *coupe chaque cyclide du système suivant 16 droites*" ([**Darboux 1873a**, 144]). Il va montrer que ces 16 droites proviennent sur la cyclide $\rho_2 = \alpha$ de l'étude du cas $\rho = \rho_1$. Au préalable, le normalien a donné, dans les coordonnées pentasphériques, l'expression des coordonnées cartésiennes (x, y, z). Pour le système triple orthogonal écrit dans le système pentasphérique :

$$\sum_1^5 \frac{(\frac{S_i}{R_i})^2}{\lambda - a_i} = 0$$

Darboux pose les coefficients :

$$H_i := \sqrt{\frac{(a_i-\rho)(a_i-\rho_1)(a_i-\rho_2)}{f'(a_i)}} \ , \quad f(\lambda) = \Pi(\lambda - a_i)$$

Il montre alors que les coordonnées cartésiennes sont liées aux coordonnées pentasphériques par le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{S_i}{R_i} &= \sqrt{M} H_i \\ x &= \sqrt{M} \sum \dfrac{\alpha_i H_i}{R_i} \\ y &= \sqrt{M} \sum \dfrac{\beta_i H_i}{R_i} \\ z &= \sqrt{M} \sum \dfrac{\gamma_i H_i}{R_i} \end{cases}$$ [240] [**Darboux 1873a**, 142]

Pour étudier l'intersection de la développable focale (Δ) avec la cyclide $\rho_2 = \alpha$, Darboux distingue l'étude selon que $\rho = \rho_1$ ou que $\rho = \rho_2 = \alpha$. Ayant montré (voir 5.1) que le second cas correspondait à une tangence selon une ligne de courbure imaginaire, il se concentre sur le premier cas et remarque que les cinq coefficients H_i deviennent des fonctions linéaires de ρ définies, en raison de leur expression sous radical, au signe près :

$$H_i = \frac{\pm(a_i - \rho)\sqrt{a_i - \alpha}}{\sqrt{f'(a_i)}} \ , \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

240. Les coefficients $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ interviennent dans les équations des cinq sphères directrices. Une cinquième relation, que nous n'avons pas explicitée ici, traduit en outre la déshomogénéisation depuis les coordonnées pentasphériques vers les coordonnées cartésiennes classiques.

Il exploite ensuite cette remarque en étudiant sa conséquence sur les coordonnées cartésiennes. En fixant les signes des coefficients H_i, Darboux montre que la première coordonnée s'exprime sous la forme $x = \dfrac{\alpha + \beta\rho}{\alpha' + \beta'\rho}$, et que les valeurs de y et z sont analogues. Il conclut alors en observant que ces formules correspondent à la paramétrisation en ρ d'une droite :

> Lorsque ρ variera dans ces formules, elles donneront tous les points d'une ligne droite. Il y aura 16 droites correspondantes aux différentes combinaisons des signes des radicaux H_i. Ces 16 droites sont évidemment les enveloppes des lignes de courbure.
>
> [**Darboux 1873a**, 145]

On retrouve ainsi l'application complète de l'extension du théorème de Kummer que Darboux avait détaillée au début de son mémoire ([**Darboux 1873a**, 21]). La développable focale qui enveloppe un système *double et un* orthogonal découpe les surfaces de la troisième famille - qui complète le système en un système triple - selon des droites isotropes qui sont les enveloppes des lignes de courbure de ces surfaces. En outre, dans le cas d'un système *triple et un*, cette intersection est complétée par une tangence selon la ligne de courbure imaginaire dite de Darboux.

Par ailleurs, l'existence de 16 droites sur les surfaces quartiques à coniques doubles prend ici, pour les cyclides, un sens analytico-arithmétique. Ces droites, révélées par la trace de la développable focale qui enveloppe le système homofocal, traduisent la linéarité en une unique variable des expressions pentasphériques. Les coefficients étant au nombre de 5 et définis aux signes près, le nombre de 16 droites provient alors des $2^5 = 32$ combinaisons possibles réalisées avec cinq quantités définies au signe près. Puisqu'une droite correspond à deux de ces combinaisons (dont les signes sont exactement opposés), on retrouve bien 16 droites.

Le problème de la recherche des droites sur les cyclides souligne à nouveau que la théorie des focales représente une passerelle entre géométrie et analyse. Entre l'intersection géométrique des focales et des cyclides d'une part, l'expression de la développable focale et le jeu entre les différents systèmes de coordonnées d'autre part, cette théorie se révèle centrale de manière inattendue : elle est en effet de prime abord tout à fait éloignée des considérations liées au problème des droites sur les surfaces. La démonstration géométrique de Darboux permet néanmoins de noter que les travaux de Kummer, de Clebsch (et de Geiser) lui sont connus et qu'il s'en inspire, bien que ses méthodes restent néanmoins propres à l'étude des surfaces cyclides. La méthode de recherche des droites des cyclides qu'il présente n'est en effet pas appropriée au cas plus général des quartiques à coniques doubles. Pour autant, cela dénote tout de même l'élargissement des thèmes qui gouvernent la recherche de Darboux, et souligne même déjà l'influence sur lui des travaux des mathématiciens allemands.

Un épilogue rectiligne quartique. La petite histoire des droites sur les quartiques ne s'arrête pas aux années 1870 avec les 16 droites des cyclides et des quartiques à coniques doubles, mais elle remonte au contraire jusqu'à nous. Les quartiques de Kummer et de Darboux resteront une dizaine d'années les quartiques connues qui contiennent le plus de droites. En 1878, on trouvera dans la troisième édition de la "*Analytische Geometrie* *des Raumes*" de George Salmon et Wilhelm Fiedler la remarque qu'une surface du quatrième ordre peut compter jusqu'à 80 droites [241]. Pourtant aucune nouvelle quartique n'a alors été mise au jour avec cette propriété. C'est en 1882 que le mathématicien allemand Friedrich Schur découvre une nouvelle surface du quatrième ordre portant plus de droites que les cyclides : les quartiques de Schur en contiennent 64, ce que leur auteur démontre [**Schur 1882**].

Après cette découverte, il faut attendre plus d'un demi-siècle pour qu'une nouvelle connaissance apparaisse : il ne s'agit alors pas d'une quartique comportant plus de 64 droites, mais de la preuve que ce nombre constitue le maximum possible. C'est ce que le mathématicien italien spécialiste de géométrie algébrique Beniamino Segre démontre en 1943, en découvrant par ailleurs au cours de sa preuve une nouvelle quartique comportant exactement ce maximum de droites ([**Segre 1943**]). Le domaine de la recherche des droites sur les surfaces est redevenu fort actif après les années 2000, et les mathématiciens polonais Slawomir Rams et allemand Matthias Schütt font une surprenant découverte au début des années 2010 : la preuve de Segre reposait sur une propriété stipulant qu'une ligne d'une quartique rencontrait au plus 18 autres lignes de la surface [242]. Or les deux mathématiciens démontrent que cette proposition est incorrecte, et que la borne d'incidence est en réalité de 20 ([**Rams Schütt 2015**, 1]). Reprenant alors cette recherche, ils aboutissent en 2015 à une nouvelle preuve qui confirme néanmoins que 64 est bien le nombre maximum de droites des quartiques, et que ceci reste en outre valable sur les corps de caractéristiques différentes de 2 et 3 ([**Rams Schütt 2015**, 10-16]).

Dans son mémoire de 1863, Eduard Kummer avait analysé en profondeur les plans tangents doubles des surfaces quartiques à coniques doubles, et mis en évidence deux propriétés importantes. Ces plans sont tangents à cinq cônes, et il tracent sur la surface deux coniques supplémentaires ([**Kummer 1863**, 333-336]). Darboux va effectuer une enquête similaire dans le cas des cyclides : les coniques supplémentaires sont alors des cercles, et ceux-ci sont liés à la génération anallagmatique de la cyclide. La spécificité de cette géométrie, au regard des quartiques plus générales étudiées par Kummer, donne un intérêt particulier à l'étude des systèmes de cercles sur la cyclide que le géomètre nîmois va effectuer sans la relier systématiquement à celle plus globale de Kummer.

Dans un premier temps, Darboux retrouve l'identification de Kummer des plans tangents doubles à la cyclide avec les sections planes constituées de deux cercles. Mais ce qui particularise l'étude des cyclides est le lien entre ces sections planes et la génération spatiale de ces surfaces anallagmatiques : Darboux retrouve en effet que les cercles de ces surfaces correspondent toujours aux lieux d'intersection des sphères doublement tangentes dont la cyclide est l'enveloppe. Aussi remarque-t-il :

> La recherche des sections circulaires est donc comprise comme cas particulier dans celle des sphères doublement tangentes à la surface.
>
> [**Darboux 1873a**, 113]

Puis, toujours dans l'étude analytique des cyclides, le géomètre retrouve l'existence des 5 cônes, fondamentaux dans les études de Kummer et Clebsch, qui portent les plans

241. Voir le Band II "*Geometrie der Curven im Raume und der algebraischen Flächen*" p. 634. Cette remarque est également faite par Friedrich Schur en bas de page [**Schur 1882**, 255].

242. Voir [**Segre 1943**, 88] : la proposition est énoncée pour une surface algébrique de degré n, l'incidence maximale étant alors $8n - 14$ ce qui correspond bien à 18 pour le cas $n = 4$.

tangents doubles des cyclides. C'est en recherchant les équations de ces plans qu'il aboutit au système des trois équations de conditions $\mathcal{G}$ que nous avons détaillées plus haut (voir 5.1). Dans ce système, la seconde correspondait aux quadriques déférentes et la troisième était liée aux rayons des sphères, centrées sur ces déférentes et orthogonales aux directrices. Ce n'est que dans un second temps que Darboux donne l'interprétation géométrique de la première des équations :

$$\frac{C^2}{\lambda - A} + \frac{C'^2}{\lambda - A'} + \frac{C''^2}{\lambda - A''} + D - \lambda^2 := L(\lambda) = 0$$

Il considère ainsi l'équation générale d'une quadrique quelconque inscrite dans la cyclide :

$$(A - \lambda)x^2 + (A' - \lambda)y^2 + (A'' - \lambda)z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D - \lambda^2 = 0$$

Puis Darboux remarque que cette quadrique ne deviendra un cône que lorsque λ est solution de l'équation précédente de degré 5 Cette équation représente ainsi cinq cônes du second degré, que le géomètre décrit comme étant enveloppés par les plans tangents doubles de la cyclide, ayant pour sommets les centres des sphères directrices, et supplémentaires des cônes asymptotes des quadriques déférentes (**[Darboux 1873a**, 117-118]). Puisque toute section circulaire correspond à un plan tangent double, donc à un plan tangent d'un de ces cônes qui découpe exactement deux cercles sur la cyclide, Darboux obtient les conclusions suivantes qu'il relie - en faisant une légère erreur - aux résultats de Kummer :

> par chaque point de la cyclide, on peut faire passer 10 plans tangents doubles, qui sont tangents aux 5 cônes du second degré. Il passe donc 10 cercles réels ou imaginaires par chaque point de la surface. Ainsi, les 10 séries de coniques, qui se trouvent sur toute surface du second ordre à conique double[243], sont ici formées exclusivement avec des cercles.
>
> [**Darboux 1873a**, 119]

Darboux va prolonger cette étude en identifiant parmi ces séries circulaires lesquelles sont réelles, une recherche qui n'avait pas été menée dans le cas général par Kummer mais avait ensuite été évoquée par Geiser. En se plaçant dans le $A < A' < A''$, il observe que l'équation de condition $L(\lambda) = 0$ ne correspond à un cône réel que lorsque $\lambda \in]A, A''[$ ([**Darboux 1873a**, 118]). Ces cas correspondent aux configurations où les déférentes sont des hyperboloïdes : à deux nappes si $\lambda \in]A, A'[$, et à une nappe (que Darboux appelle "*réglé*") si $\lambda \in]A', A''[$. Mais en comparant les relations de position entre les cônes et la cyclide, le géomètre note que dans le premier cas la cyclide est à l'intérieur du cône, alors que dans le second elle est à l'extérieur. Il en conclut alors que les plans doublement tangents à la cyclide - tangents aux cônes - ne seront réels que dans le second cas :

> Les sections circulaires appartenant à un mode de génération ne sont réelles que si la déférente est un hyperboloïde réglé, et alors elles le sont toujours, pourvu que la cyclide sont réelle.
>
> [...] il y a une ou trois racines de l'équation en λ entre A' et A'', c'est-à-dire que parmi les déférentes il y aura un ou trois hyperboloïdes

243. Il s'agit, le lecteur l'aura repéré, du résultat de Kummer sur les surface du *quatrième* ordre, et non du *second* comme l'écrit Darboux.

> réglés [donc] la cyclide aura une série double ou trois séries doubles de sections circulaires réelles.
>
> [**Darboux 1873a**, 119]

Le natif du Gard retrouve ainsi le résultat de l'allemand Geiser, et le relie à la réalité et à la position relative des surfaces déférentes vis-à-vis de la cyclide. Il termine alors cette étude en caractérisant le cas des 6 sections circulaires au sein du premier classement qu'il dresse des cyclides, faisant intervenir les propriétés topologiques (voir 5.1). Darboux y indique en effet que la présence, parmi les cinq déférentes, de trois hyperboloïdes réglés correspond ne se présente que lorsque les 5 racines λ sont réelles et que l'un des hyperboloïdes réglés a pour directrice la sphère imaginaire. Il s'agit ainsi du cas des cyclides "*à une seule nappe à connexion triple, semblable[s] à un tore ordinaire*" (représentées sur les figures 35 et 37). Les "*six séries de sections circulaires réelles [sont] disposées à peu près comme celles d'un tore, après qu'on aurait dédoublé par une déformation les sections méridiennes et les sections parallèles qui représentent deux séries confondues*" ([**Darboux 1873a**, 131]).

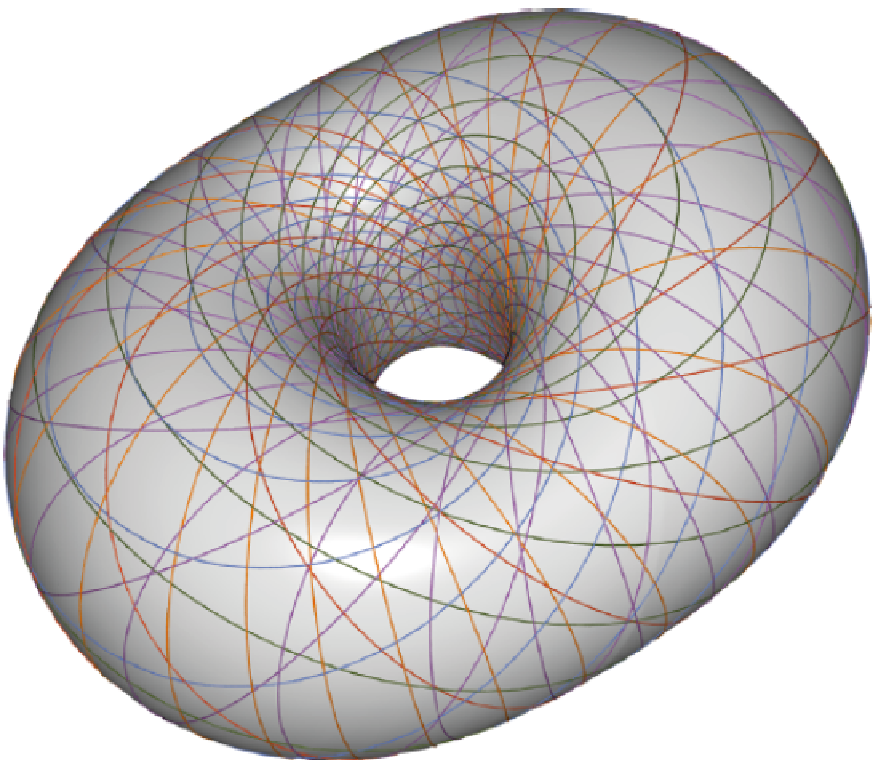


FIGURE 37. Les six séries de sections circulaires d'une cyclide à connexion triple [244]

L'étude des sections circulaires des cyclides sera ensuite reprise par Darboux dans une Note additionnelle du mémoire ajoutée après 1869, avec l'introduction des coordonnées

244. Crédits images : [**Pottmann Ling Skopenkov 2011**].

pentasphériques qui la simplifiera considérablement ([**Darboux 1873a**, 275-278]). Pour une cyclide d'équation $\sum A_i x_i^2$, la condition de tangence d'une sphère $\sum m_i x_i$ est donnée, nous l'avons vu, par l'équation $\sum \frac{m_i^2}{\lambda + A_i} = 0$. Il s'agit là d'une des premières applications que Darboux donne du système de coordonnées pentasphériques pour l'étude des cyclides. Il ajoute ensuite : "*la méthode que nous venons de suivre fournit sans difficulté les sections circulaires des cyclides*" ([**Darboux 1873a**, 277]). Le géomètre ayant identifié l'équation de condition de tangence à celle d'un cône, il analyse la double tangence des sphères comme résultant de la dégénérescence de ce cône en deux plans. Puisque cela correspond à l'indétermination d'un des quotients (soit $m_i = 0$ et $\lambda + A_i = 0$), λ devient racine double de l'équation de condition. Les 5 séries de sphères doublement tangentes, traçant sur la cyclide les 10 sections circulaires, s'expriment ainsi en coordonnées pentasphériques par les équations :

$$m_k = 0\ , \quad \sum_{i \neq k} \frac{m_i^2}{A_i - A_k} = 0$$ [**Darboux 1873a**, 278]

C'est ce développement, utilisant les coordonnées pentasphériques plutôt que cartésiennes, que Darboux privilégiera plus tard dans ses cours de Géométrie à partir de 1880. Plus direct et plus simple, il illustre bien à quel point ce système est plus adapté à l'étude des propriétés géométriques des cyclides que le système cartésien. On retrouve ainsi notamment cette étude dans la "*Géométrie analytique*" de Darboux ([**Darboux 1873a**, 447-450]).

Un épilogue circulaire cyclide. L'étude des sections circulaires des cyclides a été largement reprise après la mort de Darboux (en 1917) dans le cadre du développement des travaux portant sur les réseaux de cercles. Elles constituent en effet là encore un objet d'application parfaitement adapté à ce domaine, ce que l'on constate dans les ouvrages et mémoires du milieu du XX siècle ([**Blaschke Bol 1938**], [**Wunderlich 1938**]). Plus récemment, depuis le début des années 2000 l'étude des cyclides et de leurs familles de cercles se voit offrir une cure de jouvence grâce à l'ampleur des recherches dans le domaine du design géométrique assisté par ordinateur ("*Computer Aided Geometric Design*" ou "*CAD*"). Motivées par les applications architecturales potentielles, les études des chercheurs de ces spécialités ont relancé plusieurs pistes d'analyse liées aux cyclides de Darboux, et bien souvent en lien avec leurs sections circulaires. En effet, ces recherches reposent sur une nouvelle approche de "*rationalisation des structures architecturales libres de forme*" incarnée par les *structures à arc circulaire* ("*circular arc structures*" ou *CAS*, [**Pottmann Ling Skopenkov 2011**, 2]). Le principe sur lequel repose ces structures est simple : remplacer le traditionnel maillage numérique rectiligne par un maillage dont les arêtes sont des arcs de cercle ([**Bo et al. 2011**]).

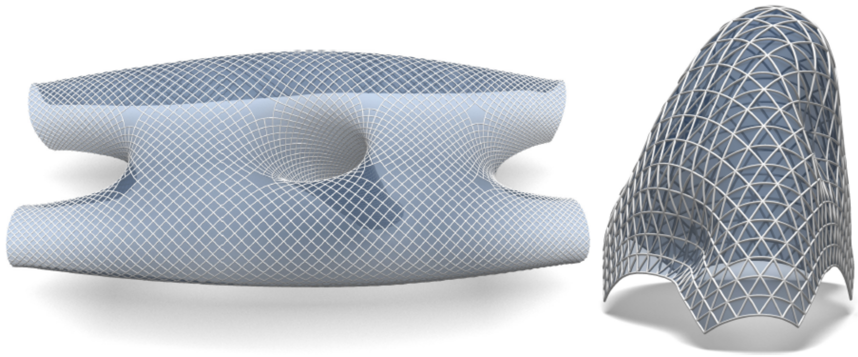


FIGURE 38. Deux structures libres de forme par la méthode des arcs circulaires (CAS) [245]

Les cyclides ne sont alors plus étudiées dans le système pentasphérique cher à Darboux mais dans le modèle sphérique de la géométrie de Möbius où elles sont obtenues depuis la sphère quadridimensionnelle par projection stéréographique, une méthode déjà envisagée par [**Coolidge 1916**]. Relançant la recherche des familles de cercles sur les surfaces, ces études ont ouvert de nouveaux champs de recherche et en outre permis de dégager quelques conjectures relatives aux cyclides de Darboux restées sans réponse. De nombreux travaux portent actuellement sur la construction et l'efficacité d'algorithmes permettant une paramétrisation rationelle des cyclides. Encore inabouties en 2011 ([**Pottmann Ling Skopenkov 2011**, 32]), ces recherches ont récemment débouché sur plusieurs algorithmes dont le *DCMC*[246] de [**Bastl et al. 2014**, 311]. Mais au regard des réseaux de cercles, les deux conjectures les plus importantes restent les suivantes :

– Une surface comportant trois séries doubles de cercles est une cyclide de Darboux.

– Une surface comportant deux séries doubles de cercles qui se coupent sous un angle constant est une cyclide de Darboux à lignes de courbure circulaires, donc une cyclide de Dupin ([**Pottmann Ling Skopenkov 2011**, 32])

Envisagées au départ par Darboux comme l'extension dans l'espace des ovales de Descartes, puis par Moutard comme enveloppe anallagmatique de sphères et par Kummer et Geiser comme cas particulier des quartiques à coniques doubles, les surfaces cyclides n'ont donc, 150 ans après leur découverte, peut-être toujours pas dit leur dernier mot.

---

245. Cette image est directement reprise de l'article [**Pottmann Ling Skopenkov 2011**, 2].
246. Ce sigle correspond à l'abréviation (anglaise) de *algorithm for constructing Darboux Cyclides with Many real Circles.*

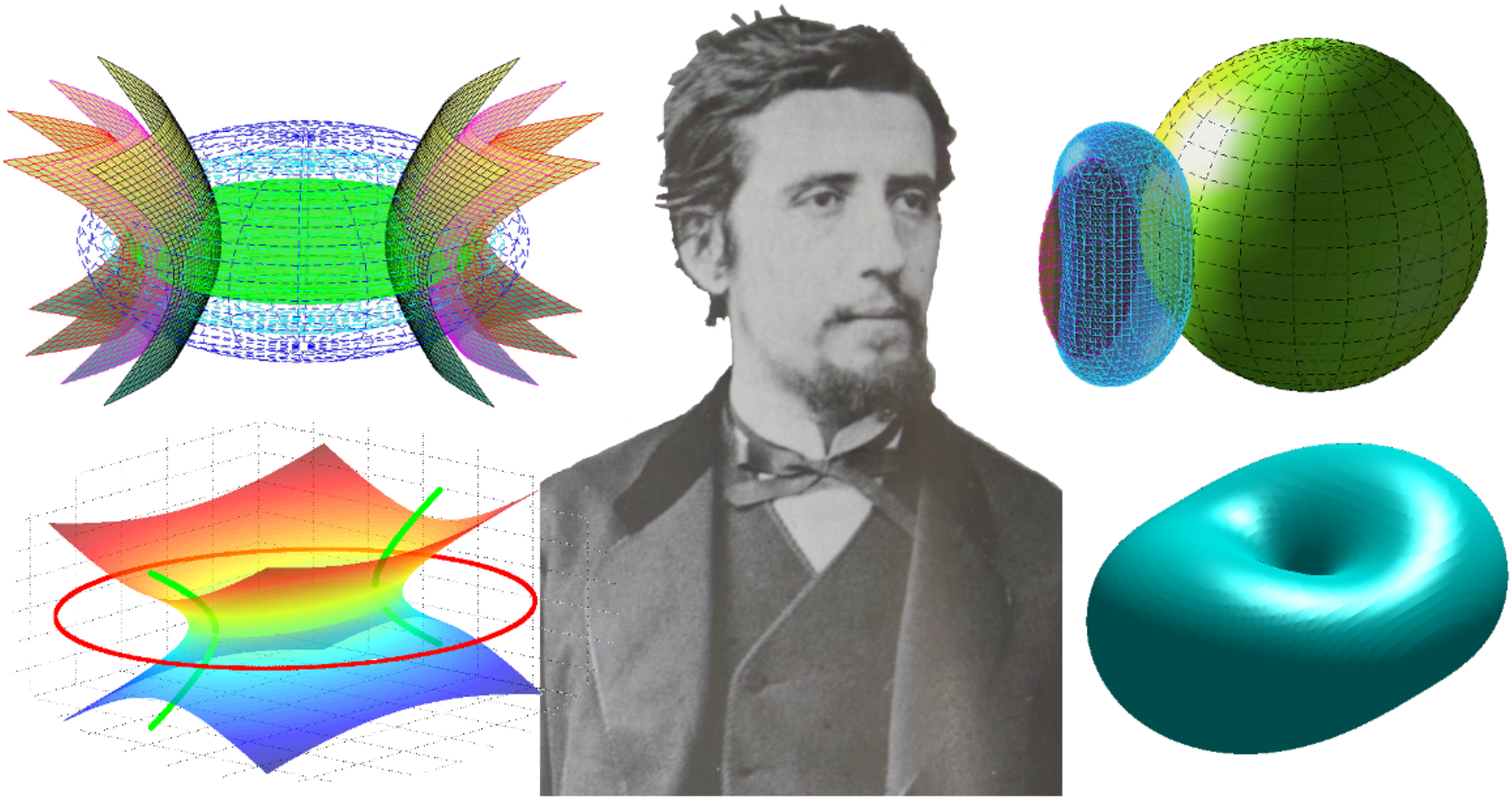


FIGURE 39. Darboux et ses "êtres géométriques" flottant autour de lui

6. Quelques remarques conclusives

En comparaison avec la partie précédente consacrée à la théorie des focales, l'étude des travaux de Darboux relevant du cadre de la théorie des surfaces orthogonales - toujours sur la période 1864-1873 - révèlent plus fortement la nature non-linéaire de son parcours. Comme le rappellera plus tard son élève Elie Cartan : "*j'ai hâte d'en venir à Darboux géomètre : la Géométrie l'attirait naturellement. [...] Cette prédilection pour la Géométrie s'était révélée de bonne heure* " ([**Darboux 1933**, 15]). Chronologiquement, les questions de géométrie traitées par Darboux le sont d'abord (et surtout avec sa thèse) à l'aide de méthodes analytiques : il montre "*un sens trop profond de l'unité de la science pour avoir la superstition des raisonnements purement synthétiques en Géométrie*"[247]. En ceci, il se distance de la lignée de Géométrie dite *pure* incarnée par Poncelet et Chasles. C'est ce

247. Toutes les citations de ce paragraphe sont tirées du discours de 1933 d'Elie Cartan dont la référence est donnée ci-dessus.

que souligne surtout l'étude des propriétés d'isothermie des surfaces orthogonales (section 2.1), qui constitue un domaine majeur de son travail de doctorat. Tant par la nature des problématiques traitées que par la méthode de leurs résolutions, Darboux y apparaît comme un disciple de Gabriel Lamé et de ses pratiques d'*analyste* au sens de Poincaré. Cartan ajoutera que la thèse de Darboux "*le classait d'emblée comme émule de Dupin, de Lamé, de Joseph Bertrand*". Ses travaux sur les coordonnées et les fonctions elliptiques (section 4), certes situés dans la tradition des travaux de Liouville et Chasles, suggèrent également de prendre en compte l'influence de celui qui fût son maître à l'Ecole Normale Supérieure : Charles Hermite.

Darboux mène de nombreuses recherches personnelles de Géométrie relatives aux surfaces cyclides durant les deux premières années de son enseignement dans le secondaire (1867-1869). Ces recherches aboutiront à la première rédaction du mémoire "*Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces*". Darboux est alors, d'Octobre 1867 à Juillet 1872, professeur de la classe de Mathématiques Spéciales du Lycée Louis-le-Grand où il a remplacé Jean-Claude Bouquet. Il confiera quelques années après à son ami Hoüel une remarque qui peut paraître surprenante lorsqu'on se rappelle le contenu de sa thèse de 1866 : "*Je ne suis devenu fort en géométrie que depuis que je suis professeur de mathématiques spéciales*"[248]. Le souvenir que Darboux conservera de ces années sera celui d'une perpétuelle et bienheureuse recherche dans le monde merveilleux des "*êtres géométriques*". Il soufflera un jour à Cartan :

> Les Géomètres se meuvent avec joie dans cet Univers des formes et des nombres. Je compterais toujours, pour ma part, au nombre des heures les plus heureuses de ma vie, celles où j'ai pu suivre dans l'espace et étudier sans trêve quelques-uns de ces êtres géométriques qui flottent en quelque sorte autour de nous.
>
> Souvenir rapporté par Cartan, [**Darboux 1933**, 15]

Par la suite, les méthodes que Darboux emploie deviennent mixtes et ne font plus nécessairement la part belle aux développements analytiques. La composition même du mémoire "*Sur une classe remarquable etc.*" illustre que le mathématicien choisit, mélange, adapte ses méthodes en fonction de la nature du problème mais aussi en fonction des outils et de la théorie qu'il veut replacer comme toile de fond. Le classement de Poincaré[249], distinguant deux types de mathématiciens selon leurs méthodes de démonstration, s'avère donc rapidement caduc dans le cas de Gaston Darboux. Les traits caractéristiques de son identité scientifique, que nous avons pu dégager dès ses premiers travaux - et qui se renforcent encore après sa thèse -, sont ainsi la mixité et l'adaptation des méthodes de preuve, la diversification des approches, cette-dernière étant reliée à la conservation d'un esprit critique quant à la finalité et l'optimalité des résultats, énoncés comme démonstrations. Henri Poincaré, dont Darboux a été un membre du jury de thèse, puis un proche collègue mathématicien et académicien, a regroupé ces différentes caractéristiques en les désignant comme la recherche de *l'élégance mathématique* :

> Les mathématiciens attachent une grande importance à l'élégance de leurs méthodes et de leurs résultats [...] Qu'est-ce-qui nous donne en

248. Lettre non datée de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**], citée dans [**Decaillot-Laulagnet 1999**].
249. Voir [**Poincaré 1905**, 14-17].

> effet dans une solution, dans une démonstration, le sentiment de l'élégance ? C'est l'harmonie des diverses parties, leur symétrie, leur heureux balancement ; c'est en un mot tout ce qui y met de l'ordre, tout ce qui leur donne de l'unité, ce qui nous permet par conséquent d'y voir clair et d'en comprendre l'ensemble en même temps que les détails. [...] [P]lus nous verrons cet ensemble clairement et d'un seul coup d'œil, mieux nous apercevrons ses analogies avec d'autres objets voisins, plus par conséquent nous aurons de chances de deviner les généralisations possibles. L'élégance peut provenir du sentiment de l'imprévu par la rencontre inattendue d'objets qu'on n'est pas accoutumé à rapprocher ; là encore elle est féconde, puisqu'elle nous dévoile des parentés jusque-là méconnues [...]
>
> En un mot, le sentiment de l'élégance mathématique n'est autre chose que la satisfaction due à je ne sais quelle adaptation entre la solution que l'on vient de découvrir et les besoins de notre esprit, et c'est à cause de cette adaptation même que cette solution peut être pour nous un instrument.
>
> [**Poincaré 1908**, 25-26]

Tout ce que décrit ici Poincaré pour décrire l'élégance, nous l'avons souligné dans le portrait de l'identité scientifique de Darboux.

Le déploiement de diverses méthodes et de leurs adaptations va de pair avec l'extension de ses centres d'intérêt mathématiques. D'abord centrées sur les géométries métriques et projectives, les recherches de Darboux touchent rapidement aux fonctions elliptiques et aux systèmes de surfaces, puis dans un second à l'algèbre, aux lignes tracées sur les surfaces et à leurs propriétés différentielles, aux courbes et aux surfaces du quatrième ordre avec une part de plus en plus importante de géométrie infinitésimale, aux systèmes de coordonnées, aux systèmes de sphères ou encore à l'intégrabilité des équations aux dérivées partielles. Cette diversification est surtout révélée par le contenu des *Notes* ajoutées au mémoire sur les cyclides ([**Darboux 1873a**]) entre la première rédaction de 1869 et la seconde de 1872. Elle ressort également fortement dans ses études sur les systèmes de sphères de 1872. Dans leur diversité, les travaux de Darboux s'inscrivent dans de nombreux domaines de recherche dont certains ne sont alors pas ou très peu développés en France. C'est notamment le cas pour les fonctions elliptiques et la théorie algébrique des invariants.

Il apparaît donc que c'est après 1869 que l'activité scientifique de Darboux se modifie en se diversifiant de manière très nette. Tant par les problèmes qu'il traite dans ses recherches personnelles que dans les méthodes qu'il y emploie, ses mathématiques semblent s'ouvrir à de nouveaux domaines. Ses travaux portent par ailleurs de plus nombreuses références envers les mémoires des mathématiciens allemands (Kummer, Clebsch, Plücker) et britanniques (Cayley, Casey, Salmon). Ceci témoigne de l'influence de la tenue du *Bulletin des Sciences* qui, à partir de fin 1869, bouleverse l'activité scientifique de Darboux. Découvrant de très nombreux travaux, en particulier ceux effectués à l'étranger, se tenant au courant de la dynamique des différents domaines mathématiques dont certains lui étaient parfois totalement méconnus, l'activité mathématique du nouveau rédacteur est considérablement stimulée et enrichie grâce à son journal. S'il réarrange certaines de ses méthodes de démonstrations, c'est aussi parce qu'en lien avec l'ouverture de ses centres d'intérêt Darboux acquiert une sensibilité à la rigueur de la démonstration. Pour reprendre la dialectique de [**Poincaré 1905**], c'est l'importance de la distinction entre l'intuition géométrique et la logique analytique dans la rigueur des preuves qui le pousse à adapter certaines de ses méthodes : les premières démonstrations analytiques de Darboux pour certains problèmes de géométrie deviennent ainsi remplacées ou adjointes à de nouvelles preuves géométriques.

Troisième partie

Entre reconnaissances et influences : le Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques

La vie est une intégrale

André Croizat

Aucune expérience humaine n'est dénuée de sens ou indigne d'analyse

Primo Levi

CHAPITRE 4

Réceptions immédiates des premiers travaux de Gaston Darboux

Les travaux de Gaston Darboux que nous avons, au cours des premiers chapitres, soit rapidement évoqués soit étudiés de manière approfondie, ont bien diversement retenu l'attention des historiens des mathématiques. C'est son travail de thèse qui est généralement mis en avant. Aussi Hélène Gispert, dépeignant une image des mathématiques françaises des années 1860-1875, rappelle-t-elle que "*l'actualité française serait quelque peu tronquée si n['y] figurait pas la publication en 1866 de la thèse de Darboux sur les surfaces orthogonales, travail de référence des géomètres français du derniers tiers du XIXème siècle*" ([**Gispert 1996b**, 397]). Mais l'arbre doctoral cache en fait la forêt géométrique : la lumière mise sur la thèse de Darboux a pour effet d'occulter le reste de sa production dans les différents domaines de la Géométrie sur la période étudiée (1864-1873). En particulier, l'historiographie semble rejeter l'important "*Mémoire sur une classe remarquable etc.*" de 1873, ainsi que - nous l'avons souligné - tous les travaux relatifs à la théorie des focales des surfaces.

Nous allons donc nous intéresser ci-dessous à la réception immédiate des travaux de Darboux discutés dans les chapitres précédents. Nous commencerons par évaluer cette réception dans le cadre restreint des maîtres qu'il côtoie dans les milieux de l'Ecole Normale Supérieure en tant qu'étudiant, sans néanmoins nous réfréner d'en évoquer la répercussion au-delà de ces premiers cercles (sections 1.1 et 1.2). Puis dans un second temps nous élargirons notre étude d'un point de vue temporel mais également géographique, pour analyser la réception des travaux du géomètre Darboux, professeur émergent dans l'Europe mathématique. Nous verrons ainsi dans quelle mesure le statut du "*jeune Darboux, étoile montante des mathématiques françaises*" [1] ne se construit au-delà de la France non pas vraiment grâce à sa thèse, mais plutôt via ses divers autres travaux de Géométrie. Nous séparerons cette seconde étude en deux parties (2.1 et 2.2) pour mettre dans la seconde spécialement en lumière le mémoire sur les cyclides de 1873 auquel nous continuons d'accorder une attention particulière.

Notre étude se rapproche ici de certaines recherches effectuées par Caroline Ehrhardt à propos du mathématicien Evariste Galois. L'historienne a ainsi proposé plusieurs "*approches biographiques pour étudier la réception d'une œuvre*" et ainsi comprendre l'accueil à court terme des travaux de son héros au tournant des années 1830 ([**Ehrhardt 2012**, 99]).

1. [**Gispert 1996b**, 404].

Elle a par ailleurs analysé en profondeur l'habitus des acteurs majeurs du champ mathématique dans le but de saisir "*comment l'on devient mathématicien en 1830*" ([**Ehrhardt 2011b**, 133-156]). Ce qui se dégage du travail de l'historienne est surtout la prédominance de l'opinion des quelques académiciens : "*les hommes qui décident du décollage et de l'avancement dans la carrière de jeunes mathématiciens comme Galois sont finalement bien peu nombreux : ce sont [surtout] les six membres de la section de Géométrie de l'Académie des sciences*" ([**Ehrhardt 2011b**, 138]).

Cette approche biographique pour étudier la réception des travaux avait été particulièrement mise en avant dans le cas de Galois du fait du cruel manque de sources et de la "*paucité*" de celles-ci. De notre côté, nous ne devrons pas confronter le même problème. Nous pourrons ainsi nous aider des deux "*Rapports*" de Joseph Bertrand - sur les progrès de l'Analyse - et de Michel Chasles - sur ceux de la Géométrie - commandés par le Ministre de l'Instruction Victor Duruy à l'occasion de l'Exposition Universelle de 1867 qui se tient à Paris. Cette "*année de tous les rapports*" (1867) a été étudiée en détail dans [**Barbin et al. 2009**]. Le rapport de Bertrand ([**Bertrand 1867**]) sera publié juste à temps, mais en revanche [**Chasles 1870**] sera, avec trois années de retard, le dernier de la longue série de rapports sur les sciences et les lettres françaises à paraître. Au-delà de ces rapports, ce sont les nombreuses communications épistolaires qui nous serviront de sources majeures pour analyser la réception des travaux de Gaston Darboux, ainsi que des comptes-rendus (souvent académiques), des recensions et des publications mathématiques ultérieures qu'ils auront engendrés.

Si nous ne nous sommes pas heurtés au problème du manque de source, notre travail partage plusieurs objectifs avec celui de Caroline Ehrhardt dont nous nous rapprocherons et utiliserons les conclusions. Nous insisterons ainsi sur l'importance de l'opinion des membres de l'Académie soulignée par l'historienne. Outre l'écho des travaux de Darboux dans les publications, la richesse des sources épistolaires dont nous bénéficions nous permettra d'avoir accès à plusieurs avis ou commentaires exprimés par les mathématiciens à titre privé. Cela nous amènera progressivement vers la réponse à l'interrogation centrale qui motive notre étude : *qui est, pour ses contemporains au tournant des années 1870, ce géomètre nommé Darboux ?*

1. Ce que les maîtres pensent de l'élève : réception des travaux de l'étudiant Darboux

1.1. Les travaux de l'étudiant normalien.

Les premières appréciations des travaux de Darboux proviennent de ses maîtres de l'Ecole Normale Supérieure, alors qu'il n'est encore qu'étudiant de cette même Ecole. Nous en avons déjà évoqué une partie dans le chapitre biographique introductif (voir [Chap.1]) que nous ne rappellerons donc que brièvement pour les mettre en perspective de la réception d'ensemble.

Les deux premières notes de Darboux, publiées durant sa troisième année d'étude à l'E.N.S. au Printemps 1864, sont relatives aux sections du tore - encore appelées les *lignes spiriques* - et aux courbes sphériques décrites sur la sphère par les surfaces du second degré. Nous avons vu en [Chap.3,1.2] comment le jeune géomètre ramenait ces-dernières, des futures *cycliques sphériques*, à l'étude des ovales de Descartes par plusieurs transformations géométriques.

Militant auprès du Ministre Duruy pour l'ouverture du statut d'agrégé-préparateur de Mathématiques, Louis Pasteur souligne à *Son Excellence* ces "*diverses notes remises dans le courant de l'année sur divers sujets*" [2]. Chasles, dans son *Rapport* de 1870, rappellera plus précisément :

> [A propos de [**Darboux 1864a**] :]
> M. Darboux fait connaître diverses propriétés remarquables des sections planes du tore [...]
> [A propos de [**Darboux 1864b**] :]
> Ces théorèmes, dont la plupart se rapportent aux ovales de Descartes, présentent un grand intérêt.
>
> [**Chasles 1870**, 362]

Darboux sera ainsi par exemple le seul mathématicien cité par Jules de La Gournerie à la fois pour ses travaux sur les lignes spiriques et pour ceux sur les courbes cycliques :

> Depuis cette époque [les années 1820 et les recherches de Quételet et de Chasles], MM. Yvon Villarceau, J.-A. Serret, Garlin, Cornu, Mannheim et Darboux ont trouvé des théorèmes importants sur les spiriques. Enfin leur théorie a été enrichie des résultats considérables obtenus par MM. Salmon, Moutard, Darboux, Laguerre et Crofton sur les courbes du quatrième ordre qui ont deux points doubles à l'infini sur un cercle, car les spiriques sont une variété de ces lignes.
>
> [**Gournerie 1869**, 2]

Les travaux de Darboux relatifs à l'inversion et aux ovales de Descartes - et qui se trouvent dans ses publications de 1864-65 - vont trouver un écho rapide en France dans les mémoires de Mannheim, Moutard ou encore précisément de La Gournerie. La recherche des relations métriques et géométriques liées aux intersections des surfaces du second degré sera par ailleurs notamment reprise à partir du travail de Darboux par [**Aoust 1867**].

Le premier travail de Darboux présenté à l'Académie des Sciences par Serret reçoit quant à lui une grande publicité ([**Darboux 1864c**], extrait de [**Darboux 1865**]). Il contient déjà plusieurs résultats importants relatifs à la théorie des focales, aux systèmes orthogonaux et aux lignes de courbure, mais comporte en outre le germe de la théorie des surfaces cyclides. Pasteur l'avait souligné à Duruy comme un "*travail très remarquable*". Chasles listera les plusieurs théorèmes obtenus par Darboux dans cette note ([**Chasles 1870**, 362-363]). Ce travail figurera également dans le rapport de Bertrand, lequel mettra l'accent sur les résultats relatifs à la théorie des surfaces orthogonales :

2. Voir [**Darboux 1912**, 459-462].

> En cherchant à étendre aux surfaces des résultats élégants obtenus par lui dans l'étude de certaines courbes [i.e. les ovales et les cycliques sphériques], M. Darboux a été conduit à étudier les surfaces du quatrième degré qui ont pour lignes doubles le cercle imaginaire situé à l'infini. Ces surfaces font partie d'un système triplement orthogonal. Ce résultat fort élégant était obtenu en même temps par M. Moutard [...]
>
> [**Bertrand 1867**, 24]

Surtout, ce mémoire [**Darboux 1865**] sera durant quelques années la principale référence quant à la généralisation de la théorie des focales [3] (avant la parution du mémoire sur les cyclides de 1873). En 1870, Jules Hoüel mettra ainsi en relief le travail de Darboux sur "*la théorie des imaginaires et [sur] celle des focales des surfaces, qui lui est due pour les surfaces du degré supérieur, et qu'il a développée pour la première fois dans un travail inséré aux Annales de l'École Normale en 1865*" ([**Hoüel 1870b**]). Bertrand aussi témoignera que "*M. Darboux a généralisé [la définition des] lignes focales d'une surface*" ([**Bertrand 1868**, 15]). A cet égard, le mémoire de Darboux va stimuler beaucoup de travaux en lien avec les propriétés focales des surfaces, parmi lesquels ceux nombreux de Laguerre et de De La Gournerie [4]. Ce sera également le cas à l'étranger où Henry Smith - "*la plus grande figure mathématique d'Oxford*" selon [**Gray 2007**, 240] - et Arthur Cayley entreprennent par exemple des études sur les propriétés focales [5]. On pourra d'ailleurs constater dans la suite que Arthur Cayley fera bien souvent écho aux travaux de Darboux (et réciproquement), et ce dans des domaines différents [6].

Dans ce mémoire de 1865, les travaux de Darboux relatifs aux surfaces cyclides s'inscrivent à la suite de l'étude des surfaces quartiques menées notamment en Allemagne par Kummer. Mais la théorie des cyclides va très rapidement susciter de nombreux travaux de la part de nombreux géomètres français : Moutard, Laguerre, De La Gournerie, Lemonnier [7], etc... Si le travail de Darboux n'y est pas toujours cité, notamment en raison de certaines rivalités (la question de priorité avec Moutard qui, bien que non discutée ouvertement, apparaît nettement de manière sous-jacente ; la rivalité avec Laguerre est plus franche), son rôle dans la stimulation de ces recherches est indéniable. En 1868, Bertrand écrira ainsi : "*Ces surfaces [cyclides], à l'étude desquelles M. Darboux a mêlé, dans plusieurs beaux Mémoires, des recherches générales et élevées, sont appelées, selon toute apparence, à jouer un rôle des plus importants*" ([**Bertrand 1868**, 14]).

A l'étranger, Maxwell ([**Maxwell 1868**]) et l'inévitable Cayley ([**Cayley 1872c**], [**Cayley 1873a**]) enrichissent les recherches sur les cyclides de Dupin et de Darboux - les premières bénéficiant d'un fort regain d'intérêt suite à la découverte des secondes. C'est logiquement en Allemagne que l'impact est plus difficile à évaluer puisque les recherches y portent souvent, à l'instar de Kummer, sur les surfaces du quatrième ordre à conique double (qui ne

3. Voir la section [Chap.2,5.2].

4. Nous avons notamment détaillé plus haut dans notre analyse [**Laguerre 1868a**], [**Laguerre 1868b**] et [**Gournerie 1869**]

5. Voir [**Cayley 1868a**] sur les courbes polyzomales, ou encore [**Smith 1869**] sur les propriétés focales des figures homographiques.

6. Nous reviendrons notamment sur cette proximité frappante dans la section [Chap.7,2.8].

7. Le travail de Lemonnier est ici le seul que nous n'ayons pas déjà rencontré plus haut dans notre recherche. Son travail principal est intitulé "*Etude analytique sur la cyclide*", inséré en 1870 dans les "*Nouvelles Annales*".

comprennent les cyclides que comme cas particulier). C'est par exemple ce qui ressort du travail de [**Geiser 1869**] que nous avons rencontré [8].

1.2. Une thèse remarquablement remarquée.

Le travail de thèse "*Sur les surfaces orthogonales*" de 1866 de Darboux fait, comme le soulignait Hélène Gispert, grand bruit en France. Les félicitations qui lui sont adressées par son jury lors de la soutenance du 14 Juillet, ainsi que la décision prise d'imprimer immédiatement le manuscrit dans les "*Annales Scientifiques de l'Ecole Normale*" témoignent déjà de l'excellente réception à très court terme des recherches du doctorant de Chasles. Le rapport de ce-dernier, certes très bon, n'est pas élogieux pour autant :

> Cette thèse est un travail étendu et fort important sur les surfaces orthogonales. Elle comprend trois parties. La première, intitulée : Etude d'un système remarquable de coordonnées orthogonales, contient différentes propriétés des coordonnées curvilignes formées par le triple système orthogonal auquel l'auteur et M. Moutard [...] ont été conduits, chacun de son côté.
>
> [...] Le troisième et dernier cas [étudié] se rapporte aux systèmes pour lesquels chaque surface peut être partagée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure. M. Darboux avait déjà observé, dans la première partie, que les surfaces du triple système orthogonal antérieurement découvert par M. Moutard et par lui jouissent de la propriété dont il s'agit. Par une analyse savante et extrêmement ingénieuse, il fait voir maintenant que ce dernier système est le seul qui réponde à la question.
>
> [**Chasles 1870**, 364]

Celui qui sera bientôt "*l'héritier désigné de Chasles*" ([**Gispert 1996b**, 401]) reçoit en fait le soutien presque indéfectible de son directeur de thèse bien plus que ce rapport ne le laisse apparaître. Nous verrons que plusieurs manœuvres intestines, à l'Académie ou auprès du Ministère, le souligneront clairement. C'est en particulier en privé, dans ses rapports avec le Ministre Victor Duruy et son rôle dans la création du "*Bulletin des Sciences*", que l'appui fort de Chasles envers Darboux se manifestera. Mais ceci deviendra clair un peu plus loin avec notre chapitre [Chap.5].

Si le rapport de Chasles à l'endroit de la thèse de Darboux n'est pas dithyrambique, ce n'est pas le cas de celui de Joseph Bertrand, son "*illustre maître*" de la première heure. Bertrand, qui n'est pourtant pas membre du jury, considère le travail de son élève comme remarquable :

> Dans sa thèse pour le doctorat, l'une des plus remarquables qui aient été présentées à la Faculté des Sciences de Paris, qui depuis vingt ans en a reçu pourtant de si distinguées, M. Darboux, continuant la même étude [sur les systèmes triples orthogonaux], déduit des équations de M. Lamé une nouvelle méthode de recherche de surfaces orthogonales qui paraît présenter des avantages propres dans l'étude de certains problèmes, et

8. Voir [Chap.3,5.3].

> il en déduit les systèmes orthogonaux formés de surfaces à lignes de courbure planes.
>
> [**Bertrand 1867**, 24]

Les travaux de la thèse de Darboux vont trouver de nombreux échos dans les recherches mathématiques. Maurice et Lucien Lévy s'intéresseront, avec Darboux, aux différentes formes de l'équation aux dérivées partielles dont dépend le problème des surfaces orthogonales [9]. Mais déjà au début des années 1870, Arthur Cayley s'empare de ce problème ([**Cayley 1872b**]). Le mathématicien britannique prolongera également les recherches du nîmois sur les systèmes isothermiques ([**Cayley 1872a**]). Par ailleurs, la thèse de Maurice Lévy soutenue une année seulement après celle de Darboux ([**Lévy 1867**]) reprendra l'étude des coordonnées curvilignes orthogonales, et traitera le problème de l'existence des systèmes triples orthogonaux à partir des familles de surfaces du second degré. Cette même année, Edouard Combescure prolongeait aussi l'analyse de Darboux sur les systèmes orthogonaux isothermiques en y ajoutant la composante imaginaire ([**Combescure 1867**], voir [Chap.3,2.3]).

A la suite de cette thèse, Bertrand va donner à son protégé une opportunité privilégiée qui témoigne de son estime envers celui-ci et ses travaux doctoraux sur les surfaces isothermes. Nous avons signalé dans l'introduction que Victor Duruy avait mandaté - en 1865 - Joseph Bertrand pour l'écriture du Rapport sur les progrès des sciences concernant l'Analyse mathématique. Ce rapport doit être imprimé pour l'Exposition Universelle, qui commencera le 1er Avril 1867 [10]. Il profite de ce prétexte pour demander à être suppléé dans son Cours de Physique Mathématique du Collège de France, et demande expressément au Ministre Duruy à y être remplacé par son élève Gaston Darboux. Le Ministère de l'Instruction Publique avait, on s'en rappelle, promis au jeune normalien sous la plume de Rouland de placer sa carrière "*sous les meilleurs auspices*", et à la fin de l'été 1866 Duruy accepte la requête de Bertrand. Darboux écrit aussitôt au Ministre "*qui*", dit-il, "*a été très bienveillant pour moi*". Il devient alors à 24 ans, l'espace d'une année, le plus jeune professeur du Collège de France [11]. Il racontera plus tard - sans se nommer explicitement - le privilège de cette année-là :

> Lorsqu'en 1867 il [Bertrand] eut à préparer le *Rapport sur les Progrès de l'Analyse mathématique*, qui lui était demandé par M. Duruy, il désigna, pour le remplacer, un de ses plus jeunes élèves. Et non content de lui assurer, sans y être tenu par le règlement, un traitement élevé qui devait lui permettre de se consacrer uniquement à son enseignement, Bertrand lui prodigua les conseils et assista même à quelques-unes de ses leçons. Ce sont là des actes qui ne sauraient s'oublier.
>
> [**Darboux 1912**, 58-59]

9. Dans la séance du 17 Décembre 1873 de la *Société Mathématique de France*, Maurice Lévy présentera par exemple une note intitulée : "*Sur une réduction de l'équation à différences partielles du troisième ordre, qui régit les familles de surfaces susceptibles de faire partie d'un système orthogonal*".

10. Pour plus de détail, voir [**Barbin et al. 2009**].

11. Voir la nomination officielle dans le *Bulletin administratif du Ministère de l'Instruction Publique* Volume 6, 1866, 16 Novembre (p. 609). Bertrand y est autorisé à se faire remplacer étant "*chargé d'une commission extraordinaire du Gouvernement*" par Darboux au Collège de France.

Les travaux de thèse de Gaston Darboux sur les surfaces isothermes et isothermiques reçoivent ainsi auprès de Bertrand un accueil tel, que ce-dernier les juge dignes d'être immédiatement exposés au Collège de France par leur auteur. On reconnaît là un "*témoignage d'estime*" fort du maître envers l'élève [12].

FIGURE 1. Le Collège de France au tournant du siècle

La réception immédiate des premiers travaux de Darboux, étudiant normalien et jeune doctorant, est donc excellente. D'une part, ses recherches de Géométrie s'inscrivent dans des domaines actifs et trouvent un large écho dans les publications de ses contemporains. D'autre part, et il est vrai surtout avec sa thèse, ces travaux lui valent rapidement l'appréciation et l'estime de ses maîtres, au premier rang desquels se trouvent Chasles et Bertrand, deux des mathématiciens qui sont à cette époque en France les plus influents. C'est notamment sous leur impulsion que Gaston Darboux est présenté pour la première fois à l'Académie des Sciences comme candidat pour une place vacante (suite au décès de Gabriel Lamé) de la section de Géométrie le 3 Juillet 1871. Il n'a alors que 28 ans, et est placé en troisième ligne entre Amédée Mannheim qui, en quatrième ligne, va en avoir 40, et Camille Jordan en seconde ligne qui en a 33. Ce sera finalement, et sans surprise, Victor Puiseux qui sera élu [13].

Avec l'élection de Puiseux, la Section de Géométrie de l'Académie des Sciences est composée de : Bertrand, Chasles, Hermite, Puiseux, Serret et Bonnet. Parmi ces six académiciens, les cinq premiers ont été des maîtres de Gaston Darboux entre 1861 et 1866 : soit à l'Ecole Normale Supérieure, soit durant sa thèse. Nous avons vu que, par son parcours d'étudiant et par ses premiers travaux mathématiques, Darboux avait su "*conquérir leur estime et leur bienveillance*" [14]. Même le sixième académicien, Pierre-Ossian Bonnet, que le jeune nîmois connaît pourtant peu en 1866 (ce qui a été révélé par l'étude de la partie [Chap.3,3.2]), partage avec lui bon nombre de centres d'intérêt scientifiques. Ils ne tarderont pas à devenir proches, ce qui sera en particulier plus bénéfique pour l'influence

12. Voir [**Picard 1917**, xiii].

13. Voir dans les "*Comptes-rendus*" de l'Académie des Sciences (Tome 73, 1871 2nd Semestre) : p.58 la présentation de la liste ordonnée des candidats le 3 Juillet, et p.85 l'élection de Puiseux à l'unanimité le 10 Juillet.

14. Nous paraphrasons ici Ernest Lebon, [**Lebon 1910**].

de Bonnet que pour celle de Darboux [15]. Reprenant ainsi à notre compte les remarques de Caroline Ehrhardt, on peut ainsi souligner que *le décollage et l'avancement* de la carrière mathématique de Darboux se présentent presque comme acquis par avance dès sa sortie de l'Ecole Normale. Au-delà de la bienveillance ministérielle qui lui avait été promise en 1861, le jeune normalien bénéficie en effet de l'estime et du soutien des membres de l'Académie des Sciences. Il sera le protégé de Bertrand, l'héritier de Chasles.

2. Ce que les mathématiciens pensent du géomètre

Nous nous proposons à présent d'élargir notre cadre d'étude pour répondre plus précisément à la question : qui est, aux yeux des mathématiciens français et étrangers, ce jeune maître de conférences qui vient d'être nommé à l'Ecole Normale Supérieure en Octobre 1872 [16] ? Nous étudierons ainsi la réception de ses travaux, en nous bornant d'abord à la période 1867-1872, pour mieux faire ressortir ensuite le rôle du mémoire sur les cyclides de 1873. La section précédente ayant déjà largement dessiné la réussite de l'accueil réservé en France à Gaston Darboux et à sa production mathématique précoce, nous pourrons attacher ci-après une large place à l'opinion des géomètres étrangers.

2.1. Réception des divers travaux du géomètre (1867-1872).

Au nombre des correspondants épistolaires étrangers de la première heure de Gaston Darboux, on trouve les mathématiciens transalpins Eugenio Beltrami et Luigi Cremona.

15. Au début des années 1870, "*les seuls novateurs sont - mis à part Jordan [...] - Bonnet et Darboux ; Bonnet publie peu et son influence ne s'impose vraiment qu'à partir du moment où Darboux entre en scène*" [**Gispert 1996b**, 399].

16. Le changement de poste de Darboux, de la classe de Mathématiques Spéciales de Louis-le-Grand à l'Ecole Normale Supérieure, sous le Ministère Jules Simon, semble ne pas avoir été de tout repos. Il écrit à Hoüel : "*Ces gredins qui dirigent l'enseignement secondaire au Ministère ont imaginé de me laisser sans titre de Louis-le-Grand [...] voilà comment on a l'intention de me récompenser de 6 cours de Spéciales, de renoncer à une belle position pour me consacrer à des recherches de Science pure*" (lettre datée du Samedi 14 Septembre 1872 (à 9 heures) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]). Il faudra qu'Armand du Mesnil, qui dirige au Ministère la Division de l'Instruction supérieure, intervienne personnellement pour faire réserver son titre à Darboux. En conséquence, celui-ci ne se verra officiellement attribuer son statut qu'à l'été 1873, un an après sa prise réelle de fonction.

FIGURE 2. Eugenio Beltrami (à gauche) et Luigi Cremona (à droite)

Beltrami naît à Cremone (dit ironiquement *Cremona* en italien) en 1835, dans une Lombardie qui appartient alors à l'Autriche-Hongrie. C'est à Pavie qu'il commence des études de mathématiques, notamment auprès du jeune professeur Brioschi. Au bout de trois ans, Beltrami doit quitter ses études - vraisemblablement en partie en raison de ses vues politiques - et ne reprendra ses recherches qu'un peu plus tard, à Milan, où il rencontrera Luigi Cremona.

Cremona, natif de Pavie et cinq ans plus âgé que Beltrami, avait également effectué des études à l'Université de Pavie. Mais il les avait rapidement délaissées pour aller combattre les forces prussiennes, en vue de l'unité italienne, à la fin de l'année 1848. Il renouera avec les études dans sa ville natale entre 1849 et 1853, avant d'enseigner dans le secondaire à Pavie jusqu'en 1856, puis ensuite à Cremone. En 1860, il se voit nommé professeur à l'Université de Bologne, où il restera 7 ans et où son activité de recherche se développera considérablement. Il y enseigne d'ailleurs au côté de Beltrami, qui grâce au concours de Brioschi y est nommé professeur d'algèbre et de géométrie analytique (1862-1864) en dépit de ses études incomplètes. C'est après un court séjour à Pise que Beltrami revient à Bologne auprès de Cremona, mais cette fois pour occuper la chaire de mécanique rationnelle. Il y restera 7 ans (1866-1873), avant de partir pour Rome et Pavie. Quant à Cremona, il quittera Bologne en 1867 pour Milan, avant de retrouver Beltrami à Rome à partir de 1873.

Au début des années 1870, les travaux mathématiques importants de Beltrami concernent la géométrie différentielle, les éléments linéaires différentiels des surfaces [17] et leur application à la géométrie non-euclidienne, à laquelle le lombard attache une très grande importance. Ceux de Cremona ont trait à la théorie géométrique des surfaces, aux courbes et aux surfaces algébriques et aux transformations de l'espace [18] dont une classe importante portera bientôt son nom.

La correspondance qu'entretient Beltrami avec Darboux témoigne, dès 1870, de la réception des travaux du nîmois qui se rapportent à la théorie géométrique des surfaces. Dans sa toute première lettre, Beltrami exprime :

17. Voir à ce sujet le travail de [**Tazzioli 1997**].

18. Pour plus de détails, on consultera [**Boi Giacardi Tazzioli 1998**] pour Beltrami (en particulier pour son rôle dans le développement de la géométrie non-euclidienne dite *sur la pseudosphère*), et [**Gray 2007**, 239-245] pour Cremona. Les transformations birationnelles générales seront appelées les *transformations crémoniennes*.

> [Pourriez-vous] faire mention dans le Bulletin de la récente traduction faite à Berlin des "Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie" de M. Cremona [...] vous avez une connaissance tellement approfondie du sujet, que la chose que je vous demande ne peut guère vous coûter de temps.
>
> Lettre datée du 8 Juillet 1870 d'Eugenio Beltrami à Gaston Darboux, [**Archives épistolaires Beltrami**]

Ce commentaire peut être rapproché du contenu d'une synthèse effectuée par Bertrand en 1868. Ce-dernier, pour le *Journal des Savants*, dresse sur une trentaine de pages un portrait des recherches mathématiques effectuées durant les années 1850-60 dans le domaine des surfaces algébriques. Dans la succincte bibliographie qu'il donne au début de son article, Bertrand fait figurer le nom de Darboux aux côtés de celui de Cremona et de plusieurs autres géomètres de renom :

> The Cambridge and Dublin mathematical journal. - Journal für die reine und angewandte Mathematik. - Journal de Mathématiques pures et appliquées. - Nouvelles Annales de Mathématiques. - Divers Mémoires de MM. Cayley, Steiner, Kummer, Cremona, Mannheim, Moutard et Darboux.
>
> Bibliographie, [**Bertrand 1868**, 5]

Ceci atteste une première fois de la bonne réception des différents travaux de Darboux sur les quadriques, les courbes quartiques et les surfaces quartiques. Mais Beltrami témoigne également un certain intérêt pour les recherches du jeune nîmois relatives aux coordonnées curvilignes, qui se rapprochent de sa théorie des paramètres différentiels [19]. Il se propose d'en établir le cas échéant l'antériorité :

> Je ne sais si l'époque à laquelle vous avez donné la publicité, par vos leçons, à vos propres recherches sur les paramètres de surface, a été ou non antérieure à celle de mon premier travail : dans le dernier cas, je n'attendrai que la première occasion pour le déclarer.
>
> Lettre datée du 20 Juillet 1870 d'Eugenio Beltrami à Gaston Darboux, [**Archives épistolaires Beltrami**]

Beltrami estime ainsi Darboux pour ses travaux en théorie géométrique des surfaces mais également dans le domaine de la géométrie infinitésimale. Il approuve spécialement "*l'intérêt que vous [Darboux] portez à la géométrie analytique*" [20]. Les recherches du géomètre normalien relatives aux systèmes orthogonaux auront un écho, nous l'avons dit plus haut, dans plusieurs publications ultérieures. Celles de Cayley porteront sur l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre. Mais on peut également signaler celles de Rudolf Lipschitz, qui souligne surtout les liens entre les travaux de Darboux relatifs aux systèmes orthogonaux algébriques et la théorie algébrique des fonctions homogènes de différentielles qui est un de ses domaines de prédilection ([**Lipschitz 1874**]).

Les quelques contributions de Darboux à la théorie des fonctions elliptiques ne passent par ailleurs pas inaperçues. Le mathématicien italien Angelo Genocchi, alors professeur à

19. Voir [**Boi Giacardi Tazzioli 1998**] et [**Tazzioli 1997**] qui donne une présentation étendue de la théorie des paramètres différentiels de Beltrami.
20. Lettre datée du 10 Janvier 1873, [**Archives épistolaires Beltrami**].

Turin, réclame dans sa lettre du 22 Septembre 1869 à Jules Hoüel un exemplaire de la note de Darboux de 1867 relatives aux ovales de Descartes [21]. Hoüel - qui ne possède en fait pas ce mémoire - ne réagit que trop tard, et Genocchi se procure ladite note [**Darboux 1867**] sans son aide. Mais son estime envers ce travail de Darboux le poussera justement à en envoyer ensuite un exemplaire à Hoüel. Ce-dernier répondra :

> J'ai reçu la Note sur l'addition des fonctions elliptiques que vous avez eu la bonté de m'envoyer ; je l'ai parcourue avec grand intérêt, et je me prépare à l'étudier avec profit.
>
> Lettre datée du 23 Février 1870 de Jules Hoüel à Angelo Genocchi, [**Conte Giacardi 1991**, 197-199]

Dans ce travail de 1867 de Darboux figure, nous l'avons signalé en [Chap.3,1.2], sa démonstration géométrique du théorème d'addition d'Euler. Ce résultat attirera toute l'attention de Joseph Bertrand. Pour commencer, il souligne dans son résumé de 1868 :

> l'étude [des ovales homofocales] a conduit récemment M. Darboux à une démonstration nouvelle et fort élégante du célèbre théorème d'Euler, sur l'addition des fonctions elliptiques.
>
> [**Bertrand 1868**, 16]

Ensuite, Bertrand va nommer cette démonstration la "*Méthode de M. Darboux*", et il la fera figurer sous ce nom comme une sous-partie de son *Traité de Calcul Intégral* de 1870 ([**Bertrand 1870b**, 571-572]).

Durant les premiers mois de l'année 1872, Darboux publie un court ouvrage ([**Darboux 1872c**]) sur la théorie des points correspondants, développée plusieurs décennies plus tôt par le mathématicien écossais James Ivory. De cette théorie, relative aux ellipsoïdes homofocaux, Jacobi avait tiré dès 1834 plusieurs théorèmes (qui porteront son nom) et un mode de transformation des figures. Pour Darboux, les théorèmes de Jacobi "*constituent l'extension à l'espace des propriétés métriques focales des coniques, c'est-à-dire de l'équation qui relie les distances d'un point quelconque de la courbe aux deux foyers*" ([**Darboux 1884**, 14]). Jacobi les relie à "*un mode de transformation particulier des figures*", une transformation rationnelle de l'espace définie par des relations de distances à 3 points fixes de l'espace [22]. Darboux donne dans son ouvrage de nouvelles démonstrations des théorèmes de Jacobi. Il étend ensuite la théorie des points correspondants à de nouvelles surfaces du second degré ainsi qu'aux surfaces cyclides, prolonge la transformation de Jacobi, et finit par relier ses résultats au problème de l'attraction des ellipsoïdes qui avait été le point de départ des recherches d'Ivory plus de cinquante ans auparavant [23]. Les recherches exposées dans

21. Voir [**Conte Giacardi 1991**, 196]. Cette demande de Genocchi relative à un travail de Darboux est d'autant plus remarquable qu'à cette date le Bulletin des Sciences n'est pas encore lancé, et que Hoüel et Darboux ne sont donc pas encore en contact.

22. Pour plus de détails, voir [**Darboux 1872c**, 12].

23. L'étude approfondie de cet ouvrage aurait pu être menée dans la partie précédente. Cependant, l'analyse du mémoire sur les cyclides de l'année suivante nous a paru plus pertinente pour notre enquête dans la mesure où elle révélait la diversité des sujets traités par Darboux. La théorie des focales et les transformations géométriques de l'espace, que l'on peut trouver dans [**Darboux 1872c**], se retrouvent en effet dans le plus vaste [**Darboux 1873a**] où elles sont accompagnées de nombreux autres domaines, au premier rang desquels on peut placer la théorie des cyclides et plusieurs points de géométrie infinitésimale.

ce mémoire par le nîmois sont donc en lien avec les propriétés métriques et focales des surfaces, ainsi qu'avec les transformations rationnelles de l'espace.

A la lecture de ce mémoire - que Darboux prend le soin de lui envoyer - Luigi Cremona tient des propos élogieux :

> J'ai à vous remercier encore pour les mémoires que vous avez eu la bonté de m'adresser, et principalement pour le précieux opuscule sur les théorèmes d'Ivory, où vous tirez si grand profit de la transformation de Jacobi et d'autres transformations plus générales. J'admire votre opérosité [sic], votre fécondité, et je vois bien que vous allez vous placer en première ligne parmi les géomètres.
>
> Lettre datée du 4 Mai 1872 de Luigi Cremona à Gaston Darboux, [**Archives épistolaires Cremona**]

Autre signe de la réception de cet ouvrage, une recension en est insérée dans la partie de revue littéraire du périodique allemand "*Archiv der Mathematik und Physik*" [24] de Reinhold Hoppe. Cette revue est bien loin d'être exhaustive - au contraire, nous le verrons, du "*Jahrbuch*" - et cette sélectivité donne donc du poids à la présence d'une mention et d'un court compte-rendu de l'ouvrage de Darboux.

Beltrami va également souligner la dextérité du géomètre nîmois pour les transformations géométriques. Avant son extension de la transformation de Jacobi, Darboux avait étudié "*un nouveau mode de transformation des figures*" ([**Darboux 1868**]). Il avait donné "*la réalisation géométrique du mode de transformation [...] dans lequel à un point répond un point, et à une droite répond une conique*" ([**Darboux 1868**, 73]), pour l'appliquer à la construction de la quadrique passant par neuf points fixés. Le mathématicien italien évoquera, en lien avec "*cette transformation spéciale*", "*le germe des fécondes recherches de MM. Clebsch, Cremona, Darboux, Nöther, etc.*" [25].

Ces propos témoignent de ce que les travaux de Darboux sont particulièrement appréciés parce qu'ils s'inscrivent dans un courant de recherche européen qui regroupe notamment géomètres italiens et allemands. En ceci, les publications de Darboux surprennent car dans les années 1860, "*le milieu [mathématique] français travaille en autarcie*" et les mathématiciens étrangers sont bien conscients du repli sur soi de leurs homologues français, un repli qu'ils condamnent [26]. Aussi les recherches du géomètre normalien semblent-elles être particulièrement bien reçues à l'étranger en rompant avec l'habitude française de "*faire de la science nationale*". Après ses différents travaux sur les transformations rationnelles, Darboux envoie à Cremona à l'Automne 1872 son "*mémoire sur les groupes de points, de cercles et de sphères*" [27]. Ce mémoire, que nous avons étudié en [Chap.3,4.2], mêle les propriétés métriques des groupes de figures aux recherches des géomètres britanniques sur la

24. Voir le Band 55 (1873), Litterarischer Bericht CCXX, p.7. A propos du journal "*Archiv*" en lui-même, sa fondation par Grunert, voir la contribution de Peter Schreiber dans [**Goldstein Gray Ritter 1996**] (Chap.19).

25. Lettre datée du 25 Juillet 1872 d'Eugenio Beltrami à Jules Hoüel, classée dans [**Archives épistolaires Beltrami**].

26. Nous reviendrons dans la suite sur les caractéristiques du paysage mathématique français dans les années 1860. On peut néanmoins consulter sans attendre [**Gispert 1996b**], dont nous tirons la citation (p.401), et [**Bottazzini 2001**]. Le constat que nous évoquons ici peut être inscrit dans un contexte plus large relativement à l'état de la science française dans son ensemble : à ce sujet voir [**Charle Verger 1994**].

27. [**Darboux 1872b**].

théorie des invariants, ainsi qu'aux travaux sur les déterminants (en lien avec les propriétés des tétraèdres) des Cayley, Baltzer et Joachimstahl. C'est ce caractère *international* des recherches de Darboux que Cremona va surtout mettre en évidence :

> J'ai à vous faire mille remerciements pour l'envoi de vos intéressants travaux, si pleins d'idées profondes et ingénieuses. Vous n'avez pas suivi l'exemple de certains géomètres de votre nation, d'ailleurs éminents, qui font de la science nationale en négligeant ce qu'on a fait à l'étranger, et par cela sont restés en arrière sur beaucoup de points. Vous avez, au contraire, suivi tous les progrès de la science, sans aucune distinction puérile de nationalité : ainsi vous avez acquéri [sic] une position scientifique qui ira toujours grandissante.
>
> Lettre datée du 13 Novembre 1872 de Luigi Cremona à Gaston Darboux, [**Archives épistolaires Cremona**]

La théorie algébrique des invariants, dont Darboux fait usage pour mettre au jour les propriétés des systèmes de sphères (et de points) était en effet en 1870 considérée par Chasles comme un des deux domaines majeurs qui étaient alors restés étrangers aux mathématiciens français ([**Chasles 1870**, 377-8]), l'autre étant les fonctions transcendantes [28]. Avec ce mémoire, Darboux se détache aux yeux de Cremona des mathématiciens français "*restés à la science d'il y a vingt ou trente ans*" (pour reprendre une expression du nîmois lui-même), ignorant les développements modernes des géomètres étrangers.

L'avis de Luigi Cremona se rapproche d'un témoignage conjoint de deux jeunes mathématiciens : Félix Klein et Sophus Lie. Pour terminer leurs études entreprises dans des universités allemandes (Göttingen puis Berlin), Klein - originaire de Düsseldorf - et Lie - né dans l'Ouest Norvégien - vont effectuer un séjour de quelques mois à Paris, entre Avril et Août 1870 [29]. Ils sont alors chargés d'écrire un rapport sur le statut des mathématiques françaises pour l'Université de Berlin. Les jeunes étudiants y soulignent surtout l'autarcie et le déclin des géomètres français. Mais ils opposent à cela une récente réaction pour "*infléchir cette évolution*", qu'incarnent d'une part le polytechnicien Camille Jordan, et d'autre part Gaston Darboux dont ils soulignent "*[l]es grandes connaissances et [l]a capacité à les exposer clairement*" ([**Stubhaug 2006**, 123]).

Dans leur diversité, les travaux de Darboux reçoivent donc une réception très favorable en France comme à l'étranger, ce qui a d'autant plus de poids dans le climat européen tendu du fait de la guerre franco-prussienne. Aux yeux de plusieurs géomètres italiens et allemands surtout, ses recherches contrastent avec le paysage mathématique français auquel est apposée l'image de l'autosuffisance. Le contraste joue donc en sa faveur. Deux éléments affirment un peu plus le statut de géomètre renommé que Darboux est rapidement parvenu à se consolider : en France d'abord, il est nommé maître de conférences à l'Ecole Normale dès 1872. Cette année-là, il est par ailleurs déjà membre de deux sociétés savantes françaises et a, au Ministère de l'Instruction Publique, le statut d'Officier d'Académie [30]. A l'étranger ensuite, avant même la publication de l'imposant ouvrage sur les cyclides -

28. Voir à ce sujet - sur lequel nous aurons l'occasion de revenir plus loin - [**Gispert 1996b**].
29. A propos de ce séjour et du rapport écrit à l'Université de Berlin, voir [**Stubhaug 2006**] et [**Bottazzini 2001**].
30. Darboux est membre de la Société Philomathique de Paris depuis Décembre 1871, ainsi que membre correspondant de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux depuis Février 1870.

qui nous intéressera ci-dessous -, Darboux a été élu membre correspondant de la Société Royale de Liège et de l'Académie des Sciences de Bologne. Cette-dernière, tributaire d'une initiative prise par Beltrami, "*n'est qu'un témoignage très justement rendu à [ses] mérites scientifiques*" selon Cremona [31].

2.2. Réception du mémoire sur les cyclides (1873).

Le "*Mémoire sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*" a connu une destinée bien particulière. Résultat des recherches sur les courbes cycliques et les surfaces cyclides menées par Gaston Darboux, lequel met à profit cette opportunité pour y développer largement sa théorie des focales et les propriétés des développables focales, une première version en est présentée à l'Académie des Sciences en Juin 1869 [32]. Après l'examen par la Section de Géométrie (Bertrand, Serret et Bonnet étant les commissaires désignés), Darboux profite de sa nouvelle relation épistolaire avec Jules Hoüel pour le faire imprimer en deux parties dans les "*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*", une société dont Hoüel est membre. Mais après l'impression de la première partie en Juin 1870, la guerre entre la France et la Prusse retarde l'achèvement de ce projet, ce qui donne l'occasion à Darboux d'enrichir notablement son ouvrage - nous l'avons détaillé dans les parties [Chap.3,4.2 & 5] du chapitre précédent. Le géomètre y adjoint ainsi de nombreuses notes, mais il fait surtout bénéficier toute son étude de sa récente découverte des coordonnées pentasphériques. Lorsque la seconde partie est imprimée à Bordeaux en Octobre 1872, le contenu a sensiblement été modifié, et Bertrand rappellera sa parution en Juillet 1873 dans les "*Comptes-rendus*" de l'Académie. Darboux aura en effet obtenu l'impression de son travail - sous sa nouvelle forme et en un seul volume - chez l'imprimeur Gauthier-Villars, qui en lance finalement la distribution fin Mai 1873 ([**Darboux 1873a**]).

Laissé dans l'oubli par l'historiographie, nous allons voir que c'est pourtant cet imposant mémoire qui achève de donner à Darboux sa stature de géomètre de premier plan, aussi bien en France qu'à l'international. La remarquable réception de ce mémoire est, par ailleurs, grandement favorisée par la diffusion qu'en fait son auteur auprès des membres de son nouveau réseau : le nouveau *rédacteur* a en effet acquis, en 1873, un important carnet d'adresses que le seul *géomètre* de 1869 ne possédait pas. De nombreux acteurs majeurs de l'Europe mathématique ne lui sont alors plus qu'à portée de plume.

La première communication - autre que l'annonce académique qu'en donne Darboux lui-même en Juin 1869 - relative à ce mémoire est l'œuvre de Jules Hoüel. En Juin 1870, il fait précéder l'impression de la première partie de l'ouvrage dans les "*Mémoires*" de la Société des Sciences de Bordeaux par un résumé de son contenu. A cette occasion, il écrit :

> Dans le travail actuel, notre Correspondant s'est proposé d'étudier une classe remarquable de courbes et de surfaces du quatrième ordre, qui se rapprochent par leurs propriétés des courbes et des surfaces du second degré. Ces propriétés ont fait l'objet des études de plusieurs géomètres ; M. Darboux les soumet à une révision d'ensemble, dans laquelle il expose,

31. Lettre datée du 22 Juin 1873, [**Archives épistolaires Cremona**].
32. Voir les "*Comptes-rendus*" tome 68 (1869 1er Sem.) p. 1311.

> en même temps que des propriétés nouvelles, des propriétés connues et qui ont déjà été publiées soit par d'autres géomètres, soit par lui.
>
> [...] L'Auteur étudie les propriétés analytiques et géométriques, la classification des sections planes des surfaces [cyclides ...] En un mot, on a un exposé complet de la théorie de ces surfaces si importantes, qui trouveront sans aucun doute de belles applications, et qui paraissent être en quelque sorte l'intermédiaire par lequel on étendra aux surfaces de degré supérieur une foule de propositions de la théorie des surfaces du second degré.
>
> [**Hoüel 1870b**]

C'est cependant après sa parution définitive chez Gauthier-Villars en Mai 1873 que ce mémoire suscite de nombreuses réactions. Pour commencer, il est remarquable que Joseph Bertrand rappelle à l'Académie des Sciences la parution de l'ouvrage, puisque celui-ci avait déjà fait l'objet d'une présentation officielle en 1869. Bertrand fait même ajouter dans les "*Comptes-rendus*" l'adresse suivante :

> Cet ouvrage, présenté manuscrit à l'Académie en 1869, avait été lu et examiné par les commissaires désignés par elle. MM. Serret, Bonnet et Bertrand s'étaient trouvés d'accord pour en reconnaître l'importance et le très grand intérêt.
>
> La publication du travail, développé et étendu par de précieuses additions, ne permettant plus qu'il soit fait de Rapport, M. Bertrand se borne à le signaler à l'attention des géomètres.
>
> Séance du 28 Juillet 1873, "*Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*" T. 77 (1873, 2nd Sem.) p. 282.

A Milan, Luigi Cremona reçoit le mémoire de Darboux et en commence rapidement l'étude. Avant même de l'avoir terminé, il écrit à son auteur :

> J'ai reçu votre nouvel ouvrage *Sur une classe remarquable [etc.]* et j'en ai déjà lu une partie avec la plus grande satisfaction et une véritable admiration pour votre talent d'invention et d'exposition. Ce livre vous fera un grand honneur, et je vous suis très reconnaissant de l'obligeance avec laquelle vous m'en avez envoyé un exemplaire. [...] Quoique très jeune encore, vous avez déjà gagné une belle position dans la science.
>
> Lettre datée du 22 Juin 1873 de Luigi Cremona à Gaston Darboux, [**Archives épistolaires Cremona**]

Beltrami, à qui Darboux a également veillé à faire parvenir son ouvrage, témoigne "*fai[re] souvent des excursions dans votre beau livre, et regrette[r] de ne pas pouvoir, quant à présent, en entreprendre la lecture et l'étude proprement dites*"[33]. Pourtant il souligne son intérêt pour deux passages particuliers du travail du professeur de la rue d'Ulm. Dans un premier temps, il rappelle :

> En particulier, j'avais goûté grandement l'heureuse conception des pages 17-18 : permettez-moi de l'appeler même heureusissime, faisant ainsi, rabelaisiennement, un peu de fusion entre nos deux langues.

33. Lettre datée du 12 Juillet 1873, [**Archives épistolaires Beltrami**].

Lettre datée du 12 Juin 1873 d'Eugenio Beltrami à Gaston Darboux, [**Archives épistolaires Beltrami**]

L'extrait auquel Beltrami fait allusion est la nouvelle méthode de formation de l'équation aux dérivées partielles des surfaces applicables sur une surface donnée, que nous avons étudiée en [Chap.2,7.3], et dont Darboux tire la compréhension du *fait de calcul* observé par Bour relatif aux lignes géodésiques.

Après quelques semaines de lecture, le second point qui ressort, aux yeux de Beltrami, de l'imposant mémoire, est relatif aux théorèmes (dits *de Poncelet* et *de Chasles*) sur les polygones inscrits ou circonscrits aux coniques. Nous avons brièvement mentionné dans la partie [Chap.3,4.1] que Darboux avait effectué quelques travaux dans ce domaine. Dans certaines notes additionnées au mémoire entre 1869 et 1873, le normalien revient sur ses résultats, étend les énoncés à des courbes algébriques de degré supérieur et relie ces considérations aux fonctions elliptiques. Il y cite d'ailleurs les travaux antérieurs de l'autrichien Emil Weyr et de l'allemand Jacob Lüroth. Beltrami écrit à ce sujet :

> Je vous remercie de la mention que vous avez bien voulu faire de mes petits travaux, dans la 1ère note. Mais j'ai trouvé d'autres rapprochements, par exemple [...] dans votre méthode de démonstration des théorèmes de Poncelet. Moi aussi j'avais démontré d'une manière assez simple le théorème relatif au triangle [...] Du reste, vous avez donné un développement bien plus considérable à cette méthode, qui a tout récemment occupé aussi M. Weyr.

Lettre datée du 12 Juillet 1873 d'Eugenio Beltrami à Gaston Darboux, [**Archives épistolaires Beltrami**]

Là encore, sans le faire ressortir aussi nettement que Cremona, les propos de Beltrami montrent que les intérêts scientifiques de Darboux, les sujets qu'il aborde et les méthodes qu'il propose, participent de thématiques en forte activité chez les mathématiciens européens. L'étude complète des cyclides et les notes nombreuses et variées ajoutées à l'ouvrage contribuent à la vitalité de ces domaines de recherche : elles sont, à l'image de la réception d'ensemble des travaux du géomètre français, immédiatement perçues et appréciées comme tel.

En Allemagne, le "*Mémoire sur une classe remarquable etc.*" fait, à l'instar de l'opuscule relatif aux théorèmes d'Ivory, l'objet d'une recension dans le "*Archiv der Mathematik und Physik*" [34]. Si cela est significatif, c'est surtout sur sa recension dans le "*Jahrbuch*" que nous allons nous attarder. Le "*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*", sur lequel nous reviendrons en [Chap.5,4], a pour objet la recension annuelle de tous les travaux mathématiques. La présence d'une recension du travail de Darboux ne revêt donc de prime abord rien d'exceptionnel. Le tome 5, relatif à la production mathématique de l'année 1873, rassemble 1175 recensions qui occupent 618 pages. La taille moyenne d'une recension est donc d'une demi-page. Ce qui est remarquable, c'est que la recension du mémoire de Darboux ([**August 1873**]) compte 9 pages. Il s'agit dans ce volume, et de loin, de

34. La recension est adjacente à celle de [**Darboux 1872c**].

la plus longue recension pour un ouvrage de mathématiques, la seconde plus longue n'atteignant que 4 pages [35]. Là encore, cette recension est d'autant plus significative qu'elle est effectuée dans le climat d'après-guerre où les relations entre la France et la Prusse, devenue Allemagne, sont difficiles [36]. Le recenseur, Friedrich August, y détaille longuement les définitions et les propriétés relatives aux cyclides, mais s'attarde également sur la théorie des focales, les développables focales, et les nombreuses notes annexes. Après neuf pages d'une recension minutieuse et fort approfondie, August ajoute une remarque qui renforce implicitement la richesse de l'ouvrage qu'il a analysé :

> Tout ceci constitue, selon le jugement du recenseur, les points les plus importants de ce travail, intéressant tant pour les méthodes qui y sont développées que pour les nombreux résultats qu'il comporte. On y trouvera également encore beaucoup de détails que nous n'avons pas évoqués ici à propos de l'inversion, des lignes de courbure, des intégrales elliptiques et hyperelliptiques etc... Leur énumération complète et leur discussion n'est pas du ressort du recenseur, qui doit donner un aperçu d'ensemble et ne pas trop en élargir la portée.
>
> [**August 1873**, 407-408]

En France, l'ouvrage de Darboux sur les cyclides recueille par ailleurs généralement l'approbation des mathématiciens, et en particulier celle des académiciens. Darboux reçoit à la fin de l'année 1875 le Prix Poncelet. Ce prix est "*destiné à récompenser l'ouvrage le plus utile aux progrès des Sciences mathématiques pures ou appliquées, publié dans le cours des dix années qui auront précédé le jugement de l'Académie*" [37]. Officiellement, le professeur nîmois est décoré "*pour ses travaux d'Analyse et de Géométrie*". Mais il écrit à Hoüel : "*J'ai le prix Poncelet grâce à Puiseux et Chasles*" [38]. L'impact du mémoire de 1873 n'y transparaît donc pas directement. Ce ne sera pas le cas 9 ans plus tard, lorsque Darboux recevra une seconde distinction académique : le Prix Petit d'Ormoy. Ce prix sera accompagné d'un rapport de Camille Jordan où le mémoire sur les cyclides occupera une place importante :

> Nous devons citer encore, parmi les travaux géométriques de M. Darboux [...] un autre livre plus étendu, intitulé : *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires*. Ce dernier Ouvrage, et les notes qui l'accompagnent, ont été très favorablement appréciés par les géomètres les plus éminents, et contiennent une foule de résultats remarquables. Nous nous bornerons à signaler une méthode nouvelle et très simple pour former l'équation différentielle des surfaces applicables sur une surface donnée, et cette proposition que les coordonnées d'une surface du troisième ordre (et plus généralement d'une surface cyclide) peuvent s'exprimer par des fonctions hyperelliptiques de

35. Pour les statistiques, voir le site emis.de/MATH/JFM. Nous avons ensuite séparé la prise en compte des ouvrages d'histoire et de philosophie des mathématiques, où une recension dépasse (en longueur) celle du mémoire sur les cyclides de Darboux : il s'agit de la revue de "*Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik*" de E. Dühring (p.59-71).

36. Voir l'annexe 8 pour plus de détails sur la guerre franco-prussienne.

37. Voir les "*Comptes-Rendus*" Tome 81 (1875 2nd Sem.) p. 1291.

38. Lettre datée du 27 Novembre 1875, [**Archives épistolaires Darboux**].

> deux paramètres variables. L'analogie de ce dernier résultat avec le célèbre théorème de Clebsch sur les courbes du troisième ordre suffit à en faire ressortir l'importance.
>
> [**Jordan 1884**, 1160]

Autant auprès de ses maîtres, en tant qu'étudiant, qu'auprès de ses pairs - français et étrangers - en tant que géomètre, les travaux de Géométrie de Darboux sont unanimement appréciés. Ces travaux sont d'ailleurs, presque exclusivement, le fruit des recherches que le normalien entreprend d'abord durant la période 1864-1870. Certains travaux sont ensuite terminés puis publiés un peu plus tard, après la guerre[39]. Etudiant, ses premières publications jouissent déjà d'une bonne réception. Sa thèse et ses travaux ultérieurs renforcent par la suite le statut acquis par Darboux auprès de ses maîtres, qui en tant que membres de l'Académie sont en France les mathématiciens les plus influents. Ses publications trouvent par ailleurs sans attendre un écho important dans les productions ultérieures.

Mais l'étude de la réception immédiate de cette première partie de l'œuvre de Darboux révèle aussi son rôle et son statut auprès des mathématiciens étrangers. Ses travaux sont en effet aussitôt appréciés hors des frontières où il fait figure d'exception : il est perçu comme étant un (voire le) géomètre français internationaliste, qui non seulement s'intéresse aux recherches menées en Allemagne, en Italie, en Angleterre etc., mais qui y participe aussi activement. Cette réception et ce statut ne semblent en revanche pas être directement reliés à son travail de thèse, pourtant si important en France, mais plutôt à ses contributions dans le domaine des fonctions elliptiques, des transformations rationnelles, et bien sûr à son riche mémoire sur les surfaces cyclides de 1873. Les différences qui opposent la France et les pays voisins dans la réception de la thèse de Darboux pourraient d'ailleurs témoigner du décalage existant, à cette époque, entre la production mathématique française et celle du reste de l'Europe[40].

Estimé hors des frontières, c'est bien grâce au soutien bienveillant dont il bénéficie de la part des académiciens français que la carrière de Gaston Darboux progresse rapidement (ce qui rejoint l'enquête de [**Ehrhardt 2011b**, 133-156]). Bertrand le promeut - temporairement - professeur au Collège de France dès la fin de sa thèse, puis son nom circule déjà dans les travées de l'Académie cinq ans plus tard pour les nominations. A 30 ans, il enseigne à l'Ecole Normale, et trois années après Chasles et Puiseux lui offrent sa première distinction académique.

Mais ce portrait rapide ne rend pas compte de l'événement qui, au beau milieu de la période que nous avons étudiée, est venu bouleverser sa vie : son quotidien, son identité sociale, mais aussi son identité mathématique. Or c'est paradoxalement en vertu de l'excellente réception de ses premiers travaux qu'intervient cette circonstance disruptive qui modifie son cheminement intellectuel. L'influence de Chasles, pourtant souterraine, y

39. Ces travaux bénéficient bien souvent des nouveaux apports des coordonnées pentasphériques ainsi que du rôle important de l'algèbre.

40. Pour un acompte de ces productions et une mise en lumière du décalage français, voir [**Gispert 1996b**] et [**Gispert 1985**] qui en donne une image à partir du premier volume du *Bulletin des Sciences*.

apparaîtra de manière flagrante. Et ce qui transforme le quotidien de Gaston Darboux au tournant des années 1870 se révèle être en fait un mensuel : c'est le *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*.

CHAPITRE 5

Darboux rédacteur : la volonté du "père Chasles"

Le "*Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*" qui, nous le verrons dans les chapitres ultérieurs, joue un rôle considérable dans le parcours de Gaston Darboux, jouit d'une historiographie conséquente. Son contenu a été exploité par Hélène Gispert dans le but de dresser le contour de la production mathématique et d'en caractériser les spécificités nationales au tournant des années 1870 ([**Gispert 1984**], [**Gispert 1985**], [**Gispert 1996b**]). Les nombreuses correspondances engendrées par la marche de ce journal ont également fait l'objet de plusieurs études historiques et de projets d'édition ([**Gispert 1987**], [**Henry Nabonnand 2016**]). Pourtant, les circonstances de sa création restent floues, et pour certains historiens la visée même du journal est mal connue. On peut ainsi lire que le Bulletin a été créé en 1870 par une institution appelée *Ecole Pratiques des Hautes Etudes* pour y accueillir les travaux des élèves de cette école ([**Paul 1985**]). Hélène Gispert, qui a effectué plusieurs études liées au Bulletin, place la création du Bulletin à la fin de l'année 1869, en détaillant que la décision de sa création fut prise par l'Ecole Pratique des Hautes Etudes puis que la fondation du périodique avait ensuite été le fait des deux mathématiciens Gaston Darboux et Jules Hoüel ([**Gispert 1987**]). La version qui semble la plus commune dans l'historiographie reste le fait que Darboux ait fondé le Bulletin en 1870 ([**Taton 1947**], [**Dhombres 1994**]).

De fait, la création du Bulletin des Sciences n'a jamais fait l'objet de l'enquête historique. C'est toujours le lancement des premiers numéros ou l'analyse de son contenu qui ont constitué la priorité. Nous nous proposons ainsi de combler ici ce vide historiographique en analysant *a priori* la naissance du périodique. Outre la compréhension des mécanismes institutionnels, des initiatives personnelles et des motivations des acteurs intervenant dans l'histoire de la création de ce journal, cette enquête est nécessaire pour rétablir précisément le rôle qu'y joue Gaston Darboux. Ce que nous verrons, et qui contraste avec la version historiographique communément admise, c'est que le nîmois n'apparaît pas dans l'histoire de la naissance d'un Bulletin auquel il est pourtant systématiquement rattaché. Bien sûr, Darboux aura rapidement une place prépondérante dans le *lancement* puis la marche du journal. Mais la *création* de celui-ci lui est totalement indépendante. Elle doit en revanche être reliée aux liens existant entre un homme et une institution : Michel Chasles, et l'Ecole Pratique des Hautes Etudes.

Il est surprenant de noter que l'Ecole Pratique des Hautes Etudes a subi le même traitement historiographique que le Bulletin qu'elle a engendré. Son histoire n'a en effet toujours été envisagée qu'*a posteriori* : elle symbolise les tentatives de réforme effectuées pour pallier les défaillances du système universitaire et de la recherche du second Empire.

Vitrine de l'institutionnalisation de la recherche française et des transformations de l'enseignement supérieur pour [**Fox Weisz 1980**], réflexe identitaire face au modèle de réussite prussien selon [**Charle 1994**], cette Ecole incarne par ailleurs la libéralité de l'action du Ministre Victor Duruy ([**Geslot 2009**]). Mais là encore, la genèse de cette institution reste méconnue et les rares informations relatives à sa création de [**Paul 1985**] ne sont, nous allons le voir, qu'approximatives.

Tout comme pour le Bulletin des Sciences, nous proposons dans ce chapitre de retracer précisément l'histoire de la naissance de l'Ecole Pratique des Hautes Etudes. Cette révision historiographique est en effet indispensable pour y comprendre et y inscrire la naissance puis le lancement du Bulletin, et donc y appréhender correctement les places de Michel Chasles et de Gaston Darboux. Les motivations des différents acteurs, les péripéties et les dysfonctionnements qui accompagnent la mise en place de l'Ecole Pratique illustreront ainsi les véritables leviers de l'arrivée du périodique mathématique. Notre relecture permettra également de préciser les quelques données éparses que comporte la littérature à propos de cette Ecole dont l'histoire a souvent été accaparée par ses propres élèves historiens. Elle nous donnera aussi un aperçu sur le statut des sciences mathématiques et sa considération par les acteurs politiques de cette période charnière que constitue la fin des années 1860, souvent regardée comme une période de déclin de la science française. Nous aurons l'occasion d'aborder cette problématique, aux côtés d'Hélène Gispert ([**Gispert 1987**], [**Gispert 1996b**]), en lien avec les motivations qui animent les grands acteurs de l'histoire de la naissance du Bulletin. Nous verrons ainsi que les mathématiques ne constituaient qu'une part minime de l'Ecole Pratique des Hautes Etudes au départ, presque une anomalie, mais que paradoxalement ceci favorisa la création du Bulletin des Sciences. Le mérite de cette création revient cependant entièrement à Chasles, ce qui a été oublié et que nous soulignerons. L'analyse du rôle de Chasles permettra enfin de bien saisir la filiation existant entre ce Bulletin et l'ancien *Bulletin de Férussac*, publié presque un demi-siècle plus tôt, et qui fait l'objet des études de [**Taton 1947**].

La première partie de notre travail (1) nous permettra, en nous focalisant sur Victor Duruy, de replacer la création de l'Ecole Pratique des Hautes Etudes dans son contexte. Nous y préciserons le regard du Ministre sur l'état de l'enseignement supérieur et de la recherche en France, ce qui l'amènera à envisager la naissance de cette nouvelle institution. C'est cependant dans la seconde partie (2) que nous analyserons précisément les étapes de la création de l'Ecole Pratique. Naturellement, et chronologiquement, nous y affinerons progressivement notre angle de vue pour nous focaliser sur sa section de Mathématiques et l'action de son Président Michel Chasles. Cette partie se terminera avec la décision de création du *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*.

Au sein de la troisième partie (3), nous nous pencherons sur les détails du lancement du Bulletin. Nous y analyserons la période Novembre 1869 - Juin 1872 qui couvre exactement la phase de publication des trente premiers numéros après sa naissance. C'est dans cette partie que nous aurons l'occasion d'aborder la thématique du déclin scientifique en cernant les objectifs du créateur et des rédacteurs du journal, Darboux le premier. Nous détaillerons également les difficultés rencontrées par ces-derniers pour parvenir à donner vie à un Bulletin dont la nature, en tant que journal de recensions, est particulière. Ces études s'inscriront dans la lignée de celles de [**Dhombres 1994**] et surtout de [**Gispert 1987**] et de [**Gerini Verdier 2014**]. L'importance du contexte historique sera un élément essentiel de notre travail, et l'annexe 8 a ainsi vocation à fournir des clefs pour se repérer dans cette période où l'Europe est agitée. Après la guerre de 1870, le Bulletin contracte en effet un important retard de parution qui met en péril son existence. La période que nous étudierons correspond ainsi à la "*remise au courant*" du journal, au rattrapage de ses arriérés, ce qui constitue une priorité absolue pour Darboux

Enfin, la dernière partie (4) éclaircira les liens - voire l'absence de lien - entre le Bulletin des Sciences et un journal allemand, le "*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*". Nous y préciserons l'indépendance et la simultanéité des créations de ces périodiques. Nous reviendrons sur la question de la concurrence entre ces journaux scientifiques, et exploiterons notamment avec [**Gispert 1984**] l'étude de la division en chapitres des tables récapitulatives des fins de volume des deux périodiques pour évaluer les influences mutuelles existant entre eux.

1. Victor Duruy et l'enseignement supérieur français (1863-1868)

En tant que Ministre de l'Instruction Publique durant la deuxième moitié du Second Empire (1863-1869), Victor Duruy est l'acteur central de la création de l'Ecole Pratique des Hautes Etudes. Dans cette première partie, nous retracerons rapidement le diagnostic effectué par le Ministre sur l'état de l'enseignement et de la recherche en France durant son mandat. Ceci nous permettra de contextualiser son action dans ce domaine, une action qui comprendra la création de l'Ecole Pratique comme nous le verrons dans la partie suivante.

1.1. Un Ministre et ses *Statistiques*.

Revenons le 23 Juin 1863, quelques mois après *l'affaire des haricots*, au moment où Gaston Darboux passe les examens des licences ès mathématiques et ès sciences physiques. Victor Duruy est, à cette époque, Inspecteur Général de l'Enseignement Secondaire de Lettres, et se trouve en tournée à Moulins, dans l'Allier. Il apprend alors par télégraphe le décret impérial où l'Empereur Napoléon détaille le remaniement gouvernemental qu'il vient d'entériner : pour le ministère de l'Instruction publique, c'est Duruy que l'Empereur a choisi pour succéder à Gustave Rouland qui occupait ces fonctions depuis 1856. Ce remaniement, presque intégral, fait suite à des élections législatives au terme desquelles Napoléon cherche à se débarrasser d'une partie de ses ministres les plus conservateurs [1]. Faisant figure de "caution libérale" du nouveau gouvernement, Duruy incarne parfaitement cette tendance.

1. Pour l'histoire politique du remaniement ministériel de 1863, on lira [**Geslot 2009**] ; on pourra également consulter [**Histoire-fr.com**].

FIGURE 1. Victor Duruy en 1869 [2]

Victor Duruy est un historien né en 1811 à Paris. Après avoir effectué des études d'histoire à l'Ecole Normale Supérieure (promotion 1830), il est reçu premier à l'agrégation d'histoire en 1833 [3]. Il devient alors enseignant et historien, spécialiste de l'histoire romaine, et dirige l'édition de la collection d'ouvrages intitulée "*Histoire universelle*" publiée par son ami Louis Hachette. Sa vie professionnelle change en 1859 lorsque l'Empereur, connaissant l'"*Histoire des Romains*" écrite par l'historien, l'invite à le rencontrer notamment en vue de le conseiller dans son projet de rédaction d'une biographie de Jules César. Devenu sinon proche du moins connu de l'Empereur et de son entourage, il sort rapidement de l'anonymat : promu Inspecteur Général en 1861, il accède la même année au statut de maître de conférences à l'Ecole Normale. Puis il se voit octroyer la toute nouvelle chaire d'Histoire de l'Ecole Polytechnique en 1862, avant donc de devenir Ministre de l'Instruction publique l'année suivante.

Dès 1864, Victor Duruy commence une étude approfondie sur le système des études en France dans le but de cibler et motiver les réformes qu'il propose, à commencer par celle de l'enseignement secondaire fin 1863 [4]. Ce mode de recueillement de données à grande échelle s'avère efficace et sera en fait prolongé pendant quatre ans. Les chiffres qui résultent de ces grandes enquêtes sont rassemblés dans ce que le Ministre appellera des *Statistiques*. Il en existera trois différentes, une pour chaque domaine de l'Instruction Publique : la statistique sur l'enseignement primaire, celle sur l'enseignement secondaire, et enfin celle sur l'enseignement supérieur. Cela permettra à Duruy de se construire une image fidèle du niveau global de l'instruction et de l'enseignement français :

2. Crédits image : www.histoire-fr.com.
3. Pour plus de détails sur les études et le début de carrière de Victor Duruy, on consultera le joli travail biographique [**Geslot 2009**].
4. Duruy va, quelques mois seulement après son intronisation, faire supprimer le régime de "bifurcation" entre lettres et sciences introduit par Hippolyte Fortoul en 1856. Voir [**Hulin 1982**].

> les trois statistiques [...] forment un ensemble complet de renseignements sur l'éducation et les travaux intellectuels de notre pays.
>
> [**Duruy 1868b**, II]

Rétrospectivement, Duruy se remémorera l'effort qu'il aura fait porter sur son ministère pour établir ces statistiques :

> Afin de voir bien clair sur notre échiquier, j'avais imposé à l'administration un travail considérable, les trois statistiques de l'enseignement primaire, secondaire et supérieur. Tous les faits, tous les chiffres pouvant faire connaître la situation de nos écoles y étaient consignés. Dans le même temps, de savants hommes envoyés partout où il y avait des renseignements à recueillir, et nos agents consulaires dont les informations étaient sollicitées, complétaient l'enquête nationale.
>
> [**Duruy 1901**, 301]

En parallèle de ces études sur le système français, Duruy met en place des enquêtes similaires menées à l'étranger, et tout particulièrement en Allemagne, pour mieux cibler les forces et les faiblesses du fonctionnement en France. L'étude du modèle allemand sera d'ailleurs renforcée après l'Exposition Universelle de 1867 à Paris pour des raisons que nous détaillerons ultérieurement en 2.1.

Nous nous intéresserons dans la suite spécifiquement à la statistique de l'enseignement supérieur - la dernière à être publiée, en 1868 - et les améliorations proposées en conséquence par le ministre Victor Duruy. Pour ce-dernier, le progrès de la science et la qualité de la formation dans l'enseignement supérieur sont essentiels. Certes ils contribuent au prestige de la nation, ce sur quoi s'accordent scientifiques et politiques, mais surtout selon le Ministre ils participent d'un projet global de société. Ce n'est ainsi pas la vision d'un ministre mais plutôt celle d'un historien que l'on retrouve dans ses propos :

> le développement de la vie intellectuelle a pour effet de tout élever, dans l'ordre matériel, comme dans l'ordre moral et politique. Le savant illustre et le maître le plus humble travaillent à la même œuvre, et de cette œuvre doit sortir la concorde entre les classes, l'égalité entre les citoyens, le progrès en tout et pour tous.
>
> [**Duruy 1868b**, II]

1.2. Le diagnostic du Ministre sur l'enseignement supérieur.

Le 15 Novembre 1868, Victor Duruy présente à Napoléon III son "*Rapport sur l'Enseignement Supérieur*" ([**Duruy 1868b**]), résultat de l'enquête menée depuis 1864. Il dresse méthodiquement la comparaison entre les Universités françaises et allemandes, bien souvent à l'avantage de ces-dernières, dans le second chapitre du rapport intitulé *Des établissements d'enseignement supérieur*[5]. Il s'attachera dans la troisième et dernière partie, *Bâtiments*

5. Ce chapitre [**Duruy 1868b**, XXVI] est divisé en quatre sections, l'enseignement des lettres et des sciences, l'enseignement de la médecine et du droit, les bourses pour l'enseignement supérieur, et enfin l'enseignement libre que Victor Duruy s'attache particulièrement à développer.

et Matériel ([**Duruy 1868b**, XXXVII]), à mettre en avant la vétusté des bâtiments de l'enseignement supérieur à Paris.

S'appuyant sur son enquête, Duruy souligne que la différence fondamentale dans l'enseignement des sciences et des lettres entre les universités allemandes et françaises se situe dans la qualité et les attentes des auditeurs qui assistent aux leçons.

> [Nos facultés] ont des auditeurs de tout âge, de toute condition, que le talent du professeur attire, mais sur lesquels le maître n'exerce pas cette action persévérante qui, seule, constitue l'enseignement fécond.
>
> Ce défaut de notre enseignement supérieur a depuis longtemps appelé l'attention de publicistes qui ne manquent pas de montrer comme un reproche les populeuses et vivantes universités d'Outre-Rhin [...] nous avons un problème à résoudre : celui de donner à nos professeurs, au lieu d'un auditoire flottant et sans cesse renouvelé, de véritables élèves.
>
> [**Duruy 1868b**, XXVI-XXVII]

Un constat s'ajoute à cette différence : les professeurs des Universités allemandes donnent une dizaine d'heures de cours par semaine, quand les maîtres de conférence français tiennent deux leçons hebdomadaires d'au plus une heure et demie. Darboux partagera, pour les mathématiques, cette opinion et en soulignera l'impact négatif sur la production scientifique : "*Serret, Bertrand et autres auraient fait plus de travaux si, en ayant moins de chaires, ils eussent plus de leçons. Il est vrai que l'Etat devrait leur donner un traitement qui les dispensât de cumuler, voilà mon avis*" [6].

Dans son rapport, Duruy explique en partie ce décalage de volume horaire par la forme qui est donnée aux leçons : en France, explique-t-il, les lectures se doivent d'être magistrales et compréhensibles pour le plus grand nombre, et ces "*grandes leçons demandent à quelques-uns de nos professeurs une préparation pareille à celle qu'exige un discours académique*" ([**Duruy 1868b**, XXVII]). Cet attachement à une forme accessible, élégante et brillante ne se retrouve pas en Allemagne où la priorité est donnée à l'utile et aux côtés pratiques de la recherche dans les *séminaires* où la science se transmet [7]. Ainsi c'est le temps passé aux côtés des maîtres ainsi que la qualité épurée de l'enseignement prodigué par ces-derniers qui permet aux élèves des universités allemandes de constituer un auditoire du meilleur niveau, formé dans les meilleures conditions. C'est dans ce type d'auditoire que l'on trouve les "*véritables élèves*" sur lesquels le maître exerce une "*action persévérante*", ceux à qui il donne un "*enseignement fécond*" comme le recherche Victor Duruy.

Plusieurs causes sont par ailleurs évoquées pour comprendre l'origine de la vitalité et de la qualité de l'enseignement supérieur en Allemagne. Il y a en premier lieu le système financier allemand au sein duquel les professeurs sont au moins partiellement rémunérés directement [8] par les élèves. Ceci s'oppose au système français où, tous les professeurs étant rémunérés par l'état, le traitement est égal entre des professeurs "*fatigués et délaissés*" et des maîtres "*actifs et populaires*" ([**Duruy 1868b**, XXVII]). Ensuite, l'ouverture de l'accès à l'enseignement outre-Rhin contraste avec le statut unique de maître de conférence

6. Lettre non datée (1872) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].
7. Au sujet du mode d'enseignement par séminaires, voir [**Charle 1994**, 43-46].
8. C'est vrai à la fois pour les privatdocenten, les professeurs ordinarius et extraordinarius, mais les deux dernières catégories bénéficient en outre d'un traitement fixe de l'état (voir [**Duruy 1868b**, XXXV], ou encore [**Charle 1994**, 72-73] et [**Lundgreen 1980**]).

en France. Les trois statuts de professeurs *ordinarius, extraordinarius* et de *privatdocent* permettent en effet aux universités allemandes de disposer de plus de professeurs, le dernier statut offrant même la possibilité aux doctorants d'enseigner dès la fin de leur thèse. Enfin, la qualité de l'enseignement supérieur allemand tient aussi beaucoup à la vitalité de la concurrence entre les universités allemandes des différentes régions. Berlin, Koenigsberg, Göttingen, Halle, Tübingen, Leipzig, etc. se disputent en Allemagne [9] les services des maîtres de la science. Au contraire, en France le fossé continue de se creuser entre les niveaux d'études de Paris et de la province : il y a bien en matière d'instruction et d'enseignement supérieur "Paris et le désert français", et les université de province y sont considérées comme "*des maisons de retraite pour les professeurs de lycée incapables de faire leur cours*" [10] comme le dit joliment Darboux. A cela s'ajoute encore les carences des systèmes de bourses facilitant en France l'accès à l'enseignement supérieur, systèmes beaucoup plus développés et plus généreux en Allemagne, mais également en Angleterre, en Belgique et en Italie [11].

1.3. Les Bâtiments de l'enseignement supérieur à Paris.

La dernière partie du rapport de Victor Duruy fait état de la pauvreté et de l'ancienneté des installations dédiées à l'enseignement supérieur dans la capitale française [**Duruy 1868b**, XXXVII]. Ces lieux où doivent s'opérer les progrès de la science sont inadaptés et datent d'un autre âge, alors même que que le renouvellement architectural de Paris bat son plein [12].

> Tout Paris est renouvelé ; les bâtiments affectés à l'enseignement supérieur restent seuls dans un état de vétusté et d'insuffisance qui contraste péniblement avec la grandeur imposante d'édifices consacrés à d'autres services. [...] il y va de nos intérêts les plus chers à ce que la science cesse d'être renfermée, comme au temps où elle était encore au berceau, dans des édifices qui datent de Richelieu ou de Louis XIV et où il lui est impossible de trouver l'espace indispensable à ses recherches.
>
> [**Duruy 1868b**, XXXVII]

S'ensuit une liste des bâtiments et installations dont Duruy juge la rénovation nécessaire dans laquelle on retrouve la Sorbonne, l'Ecole et l'Académie de médecine, le Muséum d'histoire naturelle et l'Observatoire impérial. Les mesures qu'il convient selon le Ministre

9. Duruy associe dans son Rapport librement la Prusse et l'Allemagne. Entre le début et la fin de son étude sur l'enseignement, la Prusse a formé, en Avril 1867 et grâce à la victoire militaire de 1866 sur l'Autriche, la Confédération d'Allemagne du Nord qu'elle domine largement, politiquement et militairement. Voir l'annexe 8.

10. Expression de Gaston Darboux, citée dans [**Gispert 1987**, 97].

11. Victor Duruy donne dans son rapport plusieurs chiffres à titre d'exemple pour appuyer la défaillance du système de bourses français, voir [**Duruy 1868b**, XXXIII].

12. Rappelons que Georges Haussmann, à l'origine des transformations de l'urbanisme parisien, fut préfet de la Seine de 1853 à 1870.

de prendre à l'égard de ces bâtiments présentent l'avantage de pouvoir être mises à exécution immédiatement, sans attendre de débloquer de nouveaux crédits.

Le constat est donc clair : l'Université française doit se réadapter, changer la relation entre les maîtres et les élèves pour que celle-ci soit plus féconde, plus orientée vers la pratique. Les bâtiments qui abritent la science doivent d'autre part être à la hauteur des ambitions de l'enseignement supérieur de l'Empire : les anciennes installations doivent être rénovées, agrandies ; les laboratoires doivent être de meilleure qualité et en plus grand nombre pour favoriser à la fois le développement des exercices pratiques pour les élèves au contact des maîtres, et donner à ces-derniers les meilleurs moyens de mener à bien leurs recherches. Mais Victor Duruy n'a pas fait qu'observer l'état de l'enseignement supérieur français : avant la présentation du rapport [13] il a réfléchi à la mise en œuvre d'une institution nouvelle qui pourrait apporter certaines des réponses attendues face aux conclusions de son rapport. Allant au-devant des attentes, anticipant les critiques, il est déjà passé à l'action puisque sa réforme a précédé la publication de l'enquête. Cette institution, qui est née dans son esprit dès le début de l'année 1868, c'est une école d'un genre nouveau : une *Ecole Pratique*.

FIGURE 2. Gravures du Collège de France et de la Sorbonne au milieu du XIXème siècle, par Gustave Doré

13. Ce rapport est présenté, nous l'avons dit plus haut, le 15 Novembre 1868.

2. La naissance de l'Ecole Pratique des Hautes Etudes (1868)

L'Ecole Pratique des Hautes Etudes - qui sera plutôt désignée par le sigle EPHE - est souvent mentionnée par les historiens pour aborder la thématique de l'évolution de l'enseignement supérieur français à partir du milieu du XIX$^{\text{ème}}$ siècle jusqu'à la première guerre mondiale, période marquée par "*la réforme inachevée*" de l'Université française [14]. Plusieurs ouvrages insistent donc sur son rôle dans l'évolution des modes d'enseignement en plaçant l'EPHE au cœur de l'importation depuis la Prusse d'un enseignement par *séminaires*. C'est notamment le cas de [**Charle Verger 1994**] et [**Charle 1994**]. D'autres travaux, comme [**Karady 1980**] et [**Zwerling 1980**], mettent en avant l'influence de l'EPHE dans le renouvellement des débouchés pour l'enseignement supérieur scientifique.

Par ailleurs, l'Ecole Pratique est également citée par les historiens se penchant sur les modifications de la recherche scientifique en France durant le XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Dans ce contexte, [**Paul 1985**] souligne qu'elle est le symbole de la vague d'institutionnalisation de la recherche qui va progressivement gagner la France, et [**Lundgreen 1980**] la considère comme une organisation modèle créée pour permettre le financement de la recherche par l'Etat.

Loin de remettre en cause la pertinence des travaux ci-dessus, nous remarquons néanmoins que l'histoire de l'Ecole Pratique des Hautes Etudes n'a été envisagée jusqu'alors qu'*a posteriori*, avec pour but de dégager rétrospectivement ses apports pour l'enseignement supérieur français et la recherche. Mais aucune étude ne s'est, à notre connaissance, attardée sur la naissance du projet de réforme par Victor Duruy dans le contexte de son ministère, sur les détails de la mise en place de l'EPHE ainsi que sur ses premières années de fonctionnement. Seul Harry Paul a consacré quelques lignes à la période de création de cette institution ([**Paul 1985**, 45-50]), mais avec là encore la volonté d'analyser son impact à long terme sur la recherche en sciences physiques. C'est donc cette histoire *a priori*, dont la référence manque encore jusqu'aux notices officielles de l'Ecole en ligne [15], que nous nous proposons d'établir ci-dessous.

Un soin particulier a été apporté à la précision des dates, des chiffres et des personnes qui interviennent dans la suite, ce qui nous a permis de rectifier certaines affirmations imparfaites et quelques données approximatives relatives à la période de mise en place de l'Ecole Pratique des Hautes Etudes. La poursuite de notre étude étant centrée sur l'apparition du "*Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*", nous nous concentrerons progressivement sur la section de mathématiques à laquelle, nous le verrons, il est intimement relié.

14. Expression employée dans [**Charle Verger 1994**, 92].
15. On peut consulter la notice historique du site de l'EPHE : `http://www.ephe.fr/ecole/une-longue-histoire.html`, ainsi que celle de l'ancien doyen de la 3ème section Michel Veuille : `https://epheneurogeneticsteam.wordpress.com/breve-histoire-de-lephe-et-de-la-section-des-sciences-naturelles/`.

2.1. Une année de réflexion jusqu'à l'acte de création du 31 Juillet 1868.

Pour répondre aux critiques soulevées par le rapport sur l'enseignement supérieur présenté ci-dessus (section 1), Victor Duruy a anticipé : plusieurs mois avant la publication du rapport il a envisagé, poussé en ce sens par l'Empereur lui-même, une création massive de nouveaux laboratoires scientifiques. Pour comprendre cette volonté, nous devons remonter provisoirement une année en arrière. En 1867, Victor Duruy a déjà mené à bien de grandes réformes dans les domaines de l'instruction primaire et secondaire. En revanche, il a échoué dans le domaine de l'enseignement supérieur où son projet de liberté a systématiquement été rejeté lors des Conseils des Ministres [16]. C'est dans ce contexte que s'ouvre à Paris l'Exposition Universelle de 1867.

Le ministre Duruy veut profiter de cette Exposition pour faire la part belle à la science française et commande en ce sens dès 1865 aux scientifiques français une série de "*rapports sur les progrès des sciences et des lettres en France*" [17]. Mais c'est en fait lors de cette Exposition que le Ministre et l'Empereur vont prendre tous deux pleinement conscience de la supériorité des laboratoires scientifiques de leurs voisins prussiens : outre les avancées techniques qu'ils voient présentées dans le cadre de l'Exposition, Victor Duruy et Napoléon III rencontrent le renommé chimiste allemand Justus von Liebig. Ce-dernier ne manque pas de leur détailler les installations scientifiques de premier ordre construites en Prusse, insistant particulièrement sur les nouveaux laboratoires de chimie construits à Bonn et à Berlin. Duruy rencontre par ailleurs le directeur du-dit laboratoire de Berlin, August Wilhelm von Hofmann, qui lui détaille le fonctionnement de son nouvel environnement de travail [18].

Impressionnés par les dires des deux chimistes allemands, Duruy et Napoléon réagissent rapidement : le Ministre charge le doyen de la Faculté de Médecine de Paris, le strasbourgeois Adolphe Wurtz, de lui remettre un rapport sur le laboratoire construit à l'Université de Bonn. Le choix de Wurtz n'est pas laissé au hasard, puisque le chimiste avait déjà alerté Duruy auparavant. En Décembre 1864, il avait écrit au Ministre :

> [L]es études de chimie ont pris un grand essor en Allemagne. De vastes laboratoires ont été construits à Giessen, à Heidelberg, à Breslau, à Göttingen, à Carlsruhe, à Greifswalde ... [...] Ils fournissent les éléments d'une comparaison qui n'est point favorable à nos laboratoires. [...] Il s'agit là d'un intérêt de premier ordre, de l'avenir de la chimie en France. Cette science est française, et à Dieu ne plaise que notre pays s'y laisse devancer. [...] L'impulsion est partie de notre pays ; mais elle s'est propagée avec une grande puissance au-delà de nos frontières.

16. Voir au sujet du bilan du ministère Duruy en 1867 [**Geslot 2009**, 225], et au sujet du projet avorté de liberté de l'enseignement supérieur [**Geslot 2009**, 171-173,247].

17. En mathématiques, cette demande débouchera notamment, nous l'avons vu dans le chapitre [Chap.4], sur les rapports de Bertrand en 1867 concernant l'Analyse ([**Bertrand 1867**]) et de Chasles en 1870 concernant la Géométrie ([**Chasles 1870**]). Ces rapports ont été l'objet de l'étude [**Barbin et al. 2009**].

18. Von Hofmann avait déjà accepté en 1866 de rendre compte lui-même pour le "*Moniteur scientifique*" de Quesneville des installations de ces nouveaux laboratoires. Voir ses articles dans le "*Moniteur Scientifique*" Tome 8 (1866) pp.1041-1051 et Tome 9 (1867) pp.65-75 et pp.113-118.

Lettre datée du 10 Décembre 1864 d'Adolphe Wurtz au Ministre de l'Instruction Publique (Victor Duruy) [19]

En Avril 1868, Wurtz remet son rapport sur le laboratoire de Bonn [20], et il et même chargé officiellement par le Ministre quelques semaines plus tard de fournir un second rapport, bien plus étendu, sur l'ensemble des laboratoires et des établissements scientifiques des principales universités d'Allemagne [21]. L'Empereur quant à lui, accompagné de sa épouse, commence par visiter le Samedi 25 Janvier 1868 les laboratoires de Pasteur et de Sainte-Claire Deville à l'Ecole Normale, ainsi que celui tout récent du physicien Jamin à la Sorbonne [22]. Napoléon ne peut que constater le décalage entre les laboratoires parisiens et ceux des scientifiques d'outre-Rhin. Il demande alors à son Ministre d'établir un rapport sur les "*infrastructures parisiennes de recherche*" ([**Geslot 2009**, 254]), ce à quoi Duruy répondra dans la dernière partie de son rapport du 15 Novembre sur l'enseignement supérieur - que nous avons détaillé en 1.3.

Conscients que l'Empereur et le Ministre Duruy s'intéressent alors vivement à la question de la qualité des laboratoires et de leur financement, plusieurs scientifiques profitent de ce contexte favorable pour alerter l'opinion publique, espérant provoquer des réactions et encourager une future réforme. Jusqu'alors, les réclamations des scientifiques étaient restées cantonnées à des communications privées, telles les lettres et les rapports de Wurtz (que nous avons mentionnés), Pasteur ou encore Milne-Edwards [23]. Après l'Exposition Universelle de 1867, ces mêmes appels sont volontairement communiqués publiquement. C'est surtout le cas de Pasteur, qui fait rapidement publier "*le Budget de la Science*" ([**Pasteur 1868**]), un article qui va marquer les esprits [24] :

> Depuis trente ans, l'Allemagne s'est couverte de vastes et riches laboratoires, et chaque jour en voit naître de nouveaux. Berlin et Bonn achèvent la construction de deux palais d'une valeur de 4 millions, destinés l'un et l'autre aux études chimiques. Saint-Pétersbourg a consacré 3 millions à un Institut physiologique. L'Angleterre, l'Amérique, l'Autriche et la Bavière ont fait les plus généreux sacrifices. [...] Et la France ? La France

19. Cette lettre est conservée aux Archives Nationales, Dossier F/17/4020. A propos du rôle important de Wurtz pour la chimie française, voir [**Rocke 2001**] (la lettre évoquée est discutée pp.282-284).

20. Voir la lettre du 12 Avril 1868 que Duruy écrit à l'Empereur lorsqu'il lui transmet le premier rapport de Wurtz, [**Duruy 1901**, 312].

21. Dans le second rapport que le doyen Wurtz termine en 1869 et qui sera publié en 1870, on trouve ([**Wurtz 1870**, 4]) la lettre de mission que Victor Duruy lui fait parvenir début Juin 1868.

22. Louis Pasteur écrit une note pour le "*Moniteur Universel*" dès le Lundi 28 Janvier 1868 sur la visite de l'Empereur dans les laboratoires, on peut consulter cette note dans [**Pasteur 1939**, 196-198].

23. En Août 1861, Louis Pasteur avait écrit à Gustave Rouland : "*Quand la science sera-telle dignement encouragée dans notre pays ? Vous seriez humilié si vous parcouriez les laboratoires des plus humbles universités de l'Allemagne ou de l'Angleterre. Nous servions de modèles il y a vingt ans pour nos voisins. Ils nous ont tellement devancés qu'aujourd'hui ils se rient de notre misère [...] Dans vingt ans nous serons à la remorque de l'Allemagne et de l'Angleterre, si les choses restent ce qu'elles sont*" (Archives Nationales, Dossier F/17/4238, lettre partiellement reproduite dans [**Decaillot-Laulagnet 1999**]). Henri Milne-Edwards, quant à lui, avait écrit dans un rapport de 1865 au Conseil de l'Instruction Publique : "*l'état dans lequel on laisse ces établissements [de la Faculté des Sciences de Paris] est une chose honteuse pour un pays riche et éclairé comme l'est la France*" (rapport de Novembre 1865, reproduit dans [**Rocke 2001**, 284]).

24. Pasteur écrit que "*L'empereur s'était montré surpris et ému des tristes révélations de cet article*", [**Pasteur 1939**, 204].

> n'est pas encore à l'œuvre. La vigilance lui a fait défaut. Elle a dormi à l'ombre de ses vieux trophées. Mais elle commence à s'apercevoir qu'il s'agit ici d'un grand intérêt national [...]
>
> Oserai-je parler des ressources pécuniaires et matérielles des laboratoires français ? Qui voudra me croire quand j'affirmerai qu'il n'y a pas, au budget de l'Instruction publique, un denier affecté aux progrès des sciences physiques par les laboratoires ; que c'est grâce à une fiction et à une tolérance administrative que les savants, envisagés comme professeurs, peuvent prélever sur le trésor public quelques-unes des dépenses de leurs travaux personnels, au détriment des allocations destinées aux frais de leur enseignement.
>
> [**Pasteur 1868**]

C'est à cette occasion que Pasteur rapporte la phrase du physiologiste Claude Bernard qui va devenir célèbre : "*les laboratoires sont les tombeaux des savants*" ([**Pasteur 1868**, 201]). Plus largement, les critiques portant sur les carences de l'enseignement supérieur français se multiplient et les voix des historiens (Paris, Renan, Bréal) viennent se mêler à celles des physiciens, des chimistes et des naturalistes [25].

Finalement, l'Empereur décide de réunir le 16 Mars 1868 autour de quelques membres de son gouvernement quatre scientifiques pour écouter leurs avis sur l'enseignement supérieur et la qualité des laboratoires français : le zoologiste et doyen de la Sorbonne Henri Milne-Edwards, le médecin et physiologiste Claude Bernard, le chimiste et physicien Henri Sainte-Claire Deville ainsi que le chimiste et biologiste Louis Pasteur [26]. Cette réunion achève de le convaincre de la nécessité d'une réforme, et il encourage Victor Duruy en ce sens.

Soutenu directement par Napoléon, le Ministre de l'Instruction Publique forme à l'issue de cette réunion du 16 Mars un groupe de réformateurs autour de deux de ses amis historiens Michel Bréal et Ernest Renan. Dans un premier temps, ils décident de donner la priorité à la construction de nouveaux laboratoires - et à l'aménagement des laboratoires existants - pour les études de sciences naturelles. Le Muséum d'histoire naturelle est en effet un des hauts-lieux de l'enseignement des sciences naturelles, et il fait en outre partie des bâtiments d'enseignement supérieur de la capitale voué selon le Ministre à être réaménagé rapidement. Duruy et son groupe de réformateurs pensent donc avant tout à restructurer le Muséum en lui offrant de nouveaux laboratoires de qualité. Le Ministre propose ainsi rapidement à la Commission du budget une allocation de 50,000 francs pour des laboratoires destinés à Bernard, Berthelot, Pasteur et Wurtz ([**Duruy 1901**, 312]) [27].

Mais ce projet se conjugue à une autre idée du Ministre qui va au-delà des simples laboratoires de sciences naturelles : il souhaite créer une nouvelle institution qui serait la vitrine des grands changements qu'il souhaite opérer dans l'enseignement supérieur français, et dont la nécessité sera soulignée ultérieurement dans le rapport [**Duruy 1868b**]

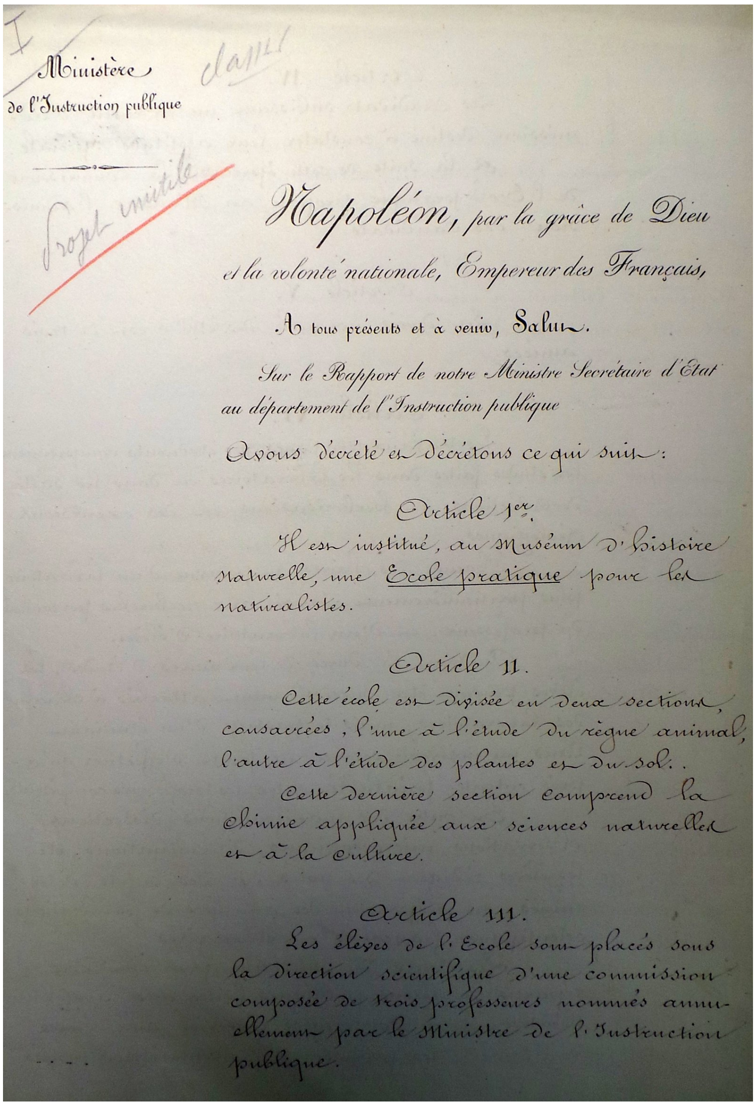
25. Voir [**Geslot 2009**, 253] pour une liste (non-exhaustive) des critiques de l'enseignement supérieur début 1868.

26. Le rapport de Pasteur suite à cette réunion aux Tuileries peut être consulté dans [**Pasteur 1939**, 205-211].

27. Certains de ces laboratoires continuaient néanmoins de concerner la Sorbonne et l'Ecole de médecine de Paris.

(que nous avons décrit en 1.2). Cette institution devrait ainsi remettre les exercices pratiques, en laboratoire, au cœur de l'enseignement. Cette nouvelle école serait un lieu où la présence des maîtres auprès des élèves serait accrue, prodiguant ainsi l'enseignement fécond que Duruy prête volontiers aux universités allemandes. Le système de bourses rendrait plus accessible des aides financières de la part de l'état pour les élèves de cette école. Enfin, les postes de répétiteurs et de préparateurs de cette école seraient ouverts aux étudiants ayant soutenu une thèse de doctorat.

La combinaison de ces deux projets se matérialise au Printemps 1868 lorsque Victor Duruy réalise l'ébauche d'un décret instituant une "*Ecole pratique pour les naturalistes*" [28].



I

Ministère de l'Instruction publique

Projet inutile

Napoléon, par la grâce de Dieu et la volonté nationale, Empereur des Français,

A tous présents et à venir, Salut.

Sur le Rapport de notre Ministre Secrétaire d'État au département de l'Instruction publique

Avons décrété et décrétons ce qui suit :

Article 1er.

Il est institué, au Muséum d'histoire naturelle, une Ecole pratique pour les naturalistes.

Article II.

Cette école est divisée en deux sections, consacrées, l'une à l'étude du règne animal, l'autre à l'étude des plantes et du sol.

Cette dernière section comprend la chimie appliquée aux sciences naturelles et à la culture.

Article III.

Les élèves de l'Ecole sont placés sous la direction scientifique d'une commission composée de trois professeurs nommés annuellement par le Ministre de l'Instruction publique.

FIGURE 3. Première page du projet de création d'une "école pratique pour les naturalistes"

28. Ce projet se trouve dans les Archives [F/17/13616].

Si on se réfère aux articles qui détaillent ce projet, on remarque que les laboratoires seront séparés en deux catégories : ceux réservés aux recherches personnelles des professeurs - les véritables "*laboratoires de recherche*" - et ceux que Duruy appelle les "*laboratoires d'élèves*" où les manipulations se font dans le cadre des études de ces-derniers. Chaque chaire doit avoir à sa disposition les deux types de laboratoire, les élèves pouvant "*être successivement attachés à chacun des laboratoires*". Cette école est séparée en deux sections délimitant deux domaines d'études dans les sciences naturelles (études des animaux et études des végétaux). Les candidats deviennent élèves à l'issue d'une période probatoire dite "*de sélection*", et ils effectuent alors 3 années d'études. Enfin, la direction de l'école est assurée par une Commission dont les membres sont nommés par le Ministre.

Cette école pratique pour les naturalistes ne verra cependant pas le jour, comme l'indique la mention "*Projet Inutile*" apposée sur la première page présentée ci-dessus. Après avoir notamment consulté l'influent chimiste Jean-Baptiste Dumas - que Duruy connaît personnellement - ainsi que le doyen Wurtz devenu très au courant des installations scientifiques installées en Prusse, mais également le philosophe Félix Ravaisson [29], Victor Duruy et son groupe de réformateurs réalisent que l'institution dont ils envisagent la création peut prendre une ampleur bien plus importante. La création et l'aménagement des laboratoires où l'on transmet la science, entre la recherche et l'enseignement, le mode de fonctionnement en séminaires plutôt qu'en cours formels et magistraux, le choix de préparateurs parmi les récents diplômés du doctorat : cela pourrait, voire devrait, ne pas se restreindre au domaine des études en sciences naturelles. Par ailleurs, ce premier projet excluait du cadre de la réforme les laboratoires de physique et de chimie. Les physiciens et les chimistes comme Pasteur et Deville, deux des quatre scientifiques consultés lors de la réunion du 16 Mars qui avait marqué le lancement de la phase de réforme, ou comme Wurtz et Dumas, qui avaient participé aux discussions, n'avaient ainsi pas obtenu gain de cause au contraire des naturalistes.

La visée de l'école pensée par Duruy change alors : elle ne doit plus uniquement former des maîtres en sciences naturelles, elle doit former des savants. La volonté de renouveler et de multiplier les laboratoires s'étend du simple Muséum d'histoire naturelle à l'ensemble des bâtiments de l'enseignement supérieur parisien. A la Sorbonne, où certaines installations de physique viennent tout juste d'être installées pour le physicien Jules Jamin [30], Duruy envisage de construire des laboratoires d'anatomie végétale, de physique, de minéralogie, de chimie. Au Collège de France et à l'Ecole Normale, ce sont des laboratoires de chimie qui seront installés [31].

Pour le fonctionnement administratif de cette école, Victor Duruy reprend exactement le premier projet de création de l'école pour les naturalistes : on distinguera les *laboratoires*

29. L'influence de Ravaisson et de Dumas dans les discussions sur l'enseignement supérieur autour de Duruy est soulignée par [**Paul 1985**, 49].

30. Dans une lettre à Edmond About datée du 16 Août 1868 reproduite dans [**Fleury 1966**], Duruy s'extasie à propos du nouveau laboratoire de Jamin à la Sorbonne : "*Vous n'avez pas vu le nouveau laboratoire de physique à la Sorbonne ; vous avez tort : c'est un organisme vivant*". Jules Jamin a en effet bénéficié d'une allocation financière exceptionnelle en Octobre 1867 pour installer un laboratoire de physique dans une arrière-cour de l'ancienne Sorbonne. On pourra lire l'article de la revue *Cosmos* - probablement écrit par Victor Meunier - : *Le nouveau laboratoire de physique de la Sorbonne*, Cosmos, Serie 3 Vol. 1 (1867), 12 Octobre 1867, pp.17-19.

31. La liste exhaustive de ces laboratoires se trouve dans [**Duruy 1868b**, V].

de recherche - lieux des recherches personnelles des professeurs - et les *laboratoires d'enseignement* (nouvelle dénomination donnée aux laboratoires d'élèves). L'école sera séparée en plusieurs sections, mais chacune sera dirigée par sa propre Commission dite *de patronage*. Si le bénéfice de la création et de l'utilisation de nouveaux laboratoires va directement aux sciences naturelles et physiques, le fonctionnement de l'école est selon le Ministre bien adapté pour toutes les sciences. Aussi abandonne-t-il l'idée d'une seconde école pratique indépendante dite "*pour les sciences*", qui aurait englobé la physique et les mathématiques en parallèle de l'école pour les naturalistes : l'établissement créé devra regrouper tous ces domaines scientifiques. Ouvrant l'enseignement aux jeunes docteurs et de nouvelles bourses pour les élèves, Duruy envisage de plus - nouvel avantage - d'instaurer un organe de publication afin de faciliter la diffusion des travaux des élèves et des maîtres de l'école, à l'image de l'action de Pasteur en 1864 avec les "*Annales Scientifiques*" pour l'Ecole Normale (voir la partie [Chap.1,3.2]). Enfin la création de nouveaux cours, ouverts pour les élèves de cette école, permet de diversifier l'enseignement des différentes chaires préexistantes et de redéfinir les programmes concernés.

Fin Mai 1868, le projet prend véritablement forme. L'institution créée s'appellera *l'Ecole Pratique des Hautes Etudes*. Elle ne sera pas physiquement établie dans un bâtiment mais les élèves et les maîtres seront entièrement accueillis dans les structures existantes comme la Sorbonne, le Muséum, l'Observatoire ou le Collège de France par exemple, lesquels bénéficieront de la rénovation de leurs laboratoires ou de la construction de nouveaux laboratoires. Duruy décide de partager cette école en quatre sections : une pour les sciences naturelles, une pour les sciences physiques, une pour les mathématiques et une pour les sciences historiques et philologiques. Les deux premières sections vont de soi au regard de la création des laboratoires et du mode d'enseignement pratique qui doit caractériser la nouvelle école. En outre, Duruy étant lui-même historien et le groupe ayant conduit la réforme étant par ailleurs également dirigé par des historiens et des philosophes (Renan, Bréal, Paris et Ravaisson), on comprend que les sciences historiques soient amenées à bénéficier de la création de cette nouvelle institution. D'ailleurs le Ministre, qui s'enorgueillit à l'idée de promouvoir ces "*appendices de la littérature*" au sein d'une école à l'image du "*cycle complet de la connaissance humaine*" ([**Paul 1985**, 47]), invite très tôt les trois historiens Bréal, Maury et Quicherat à définir le règlement intérieur de leur future section. La création de cette section historique ne doit donc faire aucun doute lors des discussions ultérieures [32]. Il entend alors appeler celle-ci : *section de philologie, d'histoire et de morale*. En ce qui concerne enfin la section de mathématiques, Duruy envisage simplement de faire étudier les élèves de cette section à l'Observatoire pour en faire des aide-astronomes.

Le 23 Juin 1868, pour effectuer une ultime révision du projet, Victor Duruy réunit une vaste commission de 19 membres qui regroupe 16 scientifiques considérés comme de potentiels professeurs pour les quatre sections de la future Ecole. Les mathématiques y sont représentées par Joseph-Alfred Serret, Victor Puiseux et l'astronome Urbain Le Verrier avec lequel Duruy entretient pourtant des rapports conflictuels [33]. Finalement le rapport

32. Voir les notes de bas de page insérées dans [**Section Hist. EPHE 1893**, 1] qui accompagnent la reproduction du rapport [**Duruy 1868a**].

33. Voir la liste des personnes de la commission dans [**Section Hist. EPHE 1893**, 1]. Au sujet des relations entre Duruy et Le Verrier, voir l'"affaire de l'Observatoire" déclenchée lorsque le Ministre tente en 1867 de mettre en place une Commission chargée de contrôler la situation de l'Observatoire que l'astronome entend diriger seul, affaire décrite dans [**Geslot 2009**, 239-242].

du Ministre est modifié, et ne sera présenté à l'Empereur qu'à la fin du mois de Juillet ([**Duruy 1868a**]). Il sera suivi de deux décrets, le premier portant sur la création des laboratoires d'enseignement et de recherche, le second sur la création d'une école pratique des hautes études. Duruy, enthousiaste, avait écrit à l'Empereur quelques semaines plus tôt pour obtenir sa signature :

> Sire,
>
> J'ai l'honneur de proposer à Votre Majesté de vouloir bien signer deux projets de décrets que MM. Dumas, Claude Bernard, Pasteur, Wurtz, Jamin, Milne Edwards, Balard, Frémy, Alfred Maury, etc., tiennent pour excellents. Ils sont le résultat d'un bien long travail et ont été mûrement discutés dans de nombreuses conférences. Le Conseil Impérial les a adoptés à l'unanimité.
>
> Lettre datée du 13 Juillet 1868 de Victor Duruy à l'Empereur, reproduite dans [**Duruy 1901**, 315-316].

L'empereur actera le 31 Juillet 1868 ces décrets unanimement adoptés, et on pourra les lire dans le numéro du Jeudi 13 Août 1868 du "*Journal Général de l'instruction publique*".

La création de 17 nouveaux laboratoires de recherche ou d'enseignement ([**Duruy 1868b**, V]), pour les structures d'accueil de l'EPHE (Ecole Pratique des Hautes Etudes), s'appuie sur l'augmentation de 600,000 francs du budget de l'enseignement supérieur décidée en 1868, ainsi que sur l'allocation de 50,000 francs que Duruy avait finalement obtenue un peu plus tôt pour les laboratoires de Wurtz, Berthelot, Pasteur et Bernard, alors qu'il envisageait encore de créer une école pratique pour les naturalistes. A ces 17 laboratoires créés s'ajoutent 10 laboratoires qui sont rénovés, modernisés pour recevoir les futurs élèves de l'école : ce sont donc 27 laboratoires qui sont préparés pour la physique, la chimie et les sciences naturelles [34]. Pour diriger ces laboratoires, le statut de "*directeur de laboratoire*" est créé : la direction d'un laboratoire de recherche devient en France enfin reconnue comme une activité à part entière, avec un statut propre et une rémunération associée. Avec le développement de l'activité de recherche au sein d'une institution de l'enseignement supérieur, l'ouverture de nouveaux postes et l'introduction du séminaire comme mode d'enseignement [35], la création du statut de directeur de laboratoire est une des innovations qui marquent la création de l'Ecole Pratique des Hautes Etudes.

Bien entendu, aucun des 27 laboratoires ne concerne la section de mathématiques puisque les études de cette section ne nécessitent pas l'utilisation de tels laboratoires. Les professeurs de cette section ne prendront d'ailleurs pas le nom de *directeur de laboratoire* mais de *directeur d'études*, comme c'est aussi le cas pour la section des sciences historiques.

---

34. On peut consulter la liste de ces 27 laboratoires dans [**Empire 1869-01**, 219-221]. Ces laboratoires atteindront dans Paris le nombre de 46 en 1872, 20 étant des laboratoires de recherche et 26 d'enseignement selon les nombres cités par [**Paul 1985**, 48].

35. Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de cette section, de nombreux ouvrages insisteront quant à l'Ecole Pratique des Hautes Etudes sur son rôle dans l'implantation en France du "séminaire" emprunté à l'Université allemande ([**Charle 1994**, 43-54], [**Charle Verger 1994**, 92-93] par exemple). [**Karady 1980**] soulignera quant à lui l'importance de l'ouverture de nouvelles positions dans l'enseignement supérieur et la recherche grâce à la création de l'EPHE, tout en mettant en lumière le fait que le nombre de postes restera bien plus restreint pour les mathématiciens que pour les physiciens et les naturalistes.

Dans le rapport, Duruy explique brièvement le choix qu'il opère en créant des sections de mathématiques et d'histoire :

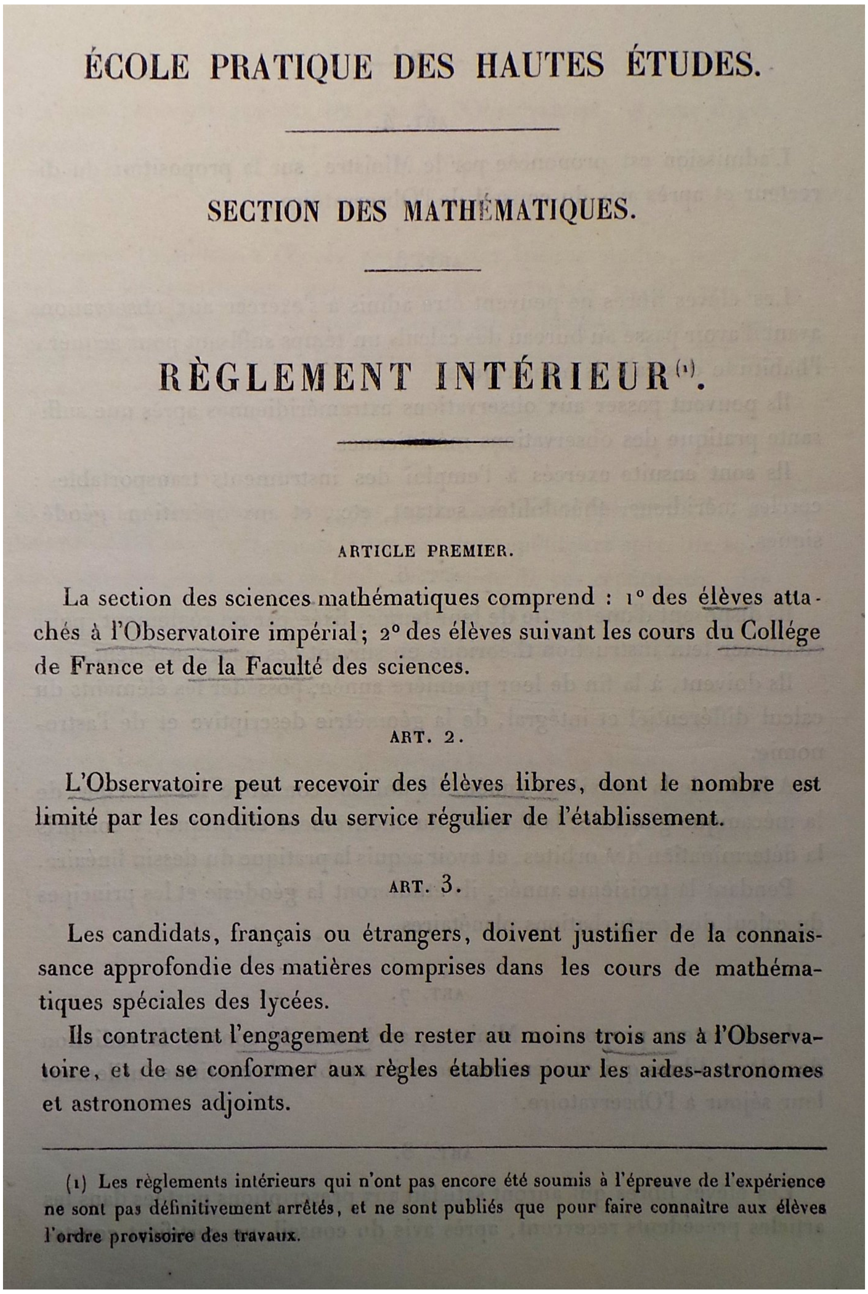
> L'école pratique des Hautes Études se divisera en quatre sections :
> 1. Mathématiques ;
> 2. Physique et chimie ;
> 3. Histoire naturelle et physiologie ;
> 4. Sciences historiques et philologie
>
> Pour les sciences physiques et naturelles, l'organisation proposée est d'une utilité qui frappe les yeux ; elle est moins évidente pour les sciences mathématiques et historiques. Cependant, en lisant les règlements particuliers aux élèves de ces deux sections, on verra qu'il est un grand nombre d'exercices utiles aux mathématiciens, soit qu'ils dirigent leurs études vers l'astronomie, soit qu'ils portent leurs calculs sur la mécanique rationnelle ou appliquée.
>
> [...] ceux des élèves de la section de mathématiques qui seront admis à l'Observatoire Impérial y suivront un ordre d'études qui les conduiront successivement à toutes les connaissances théoriques qu'exige l'astronomie mathématique et à l'usage de tous les instruments qu'emploie l'astronomie d'observation. Ils formeront donc une véritable école d'élèves astronomes qui nous manque encore.
>
> [**Duruy 1868a**, XXXVII]

On peut remarquer que sa volonté de mettre en avant le côté appliqué des sciences pousse ici le Ministre à assimiler de manière réductrice les études de mathématiques aux deux domaines de l'astronomie et de la mécanique. Pour le premier domaine, Duruy envisage la section de mathématiques comme l'école de formation des astronomes qui, selon lui, fait défaut en France. En ceci, il souhaite contribuer à constituer l'astronomie comme un domaine scientifique à part entière, indépendant et détaché des mathématiques, ce qui sera ensuite progressivement réalisé durant la Troisième République [36]. En revanche, pour le second domaine évoqué - à savoir la mécanique -, rien n'est dit dans le rapport à propos du parcours de ces élèves qui n'iraient pas à l'Observatoire.

D'une manière générale, Victor Duruy légitime la création de la section de mathématiques en s'appuyant sur les spécificités de son règlement intérieur. Ce règlement intérieur [37] stipule que les élèves de la première section ont le choix entre un rattachement à l'Observatoire ou un rattachement au Collège de France et à la Sorbonne. Dans le cas de l'Observatoire (articles 2 à 8), le règlement engage les élèves à rester 3 années à l'Observatoire, et planifie la progression des observations (article 6) et des cours théoriques (article 7) durant les trois années. Dans le cas d'un rattachement au Collège de France et à la Sorbonne, le règlement reste laconique et stipule uniquement que les élèves devront assister à des conférences et effectuer des analyses de travaux.

36. Sur la genèse de l'astronomie comme champ scientifique autonome, voir [**Saint-Martin 2007**]. L'auteur y étudie comment "*les décrets organis[e]nt successivement l'astronomie sous la Troisième République (les décrets promulgués de 1873 à 1907)*".

37. Ce règlement se trouve dans les Archives Nationales [**F/17/13614**].



ÉCOLE PRATIQUE DES HAUTES ÉTUDES.

SECTION DES MATHÉMATIQUES.

RÈGLEMENT INTÉRIEUR[1].

ARTICLE PREMIER.

La section des sciences mathématiques comprend : 1° des élèves attachés à l'Observatoire impérial ; 2° des élèves suivant les cours du Collége de France et de la Faculté des sciences.

ART. 2.

L'Observatoire peut recevoir des élèves libres, dont le nombre est limité par les conditions du service régulier de l'établissement.

ART. 3.

Les candidats, français ou étrangers, doivent justifier de la connaissance approfondie des matières comprises dans les cours de mathématiques spéciales des lycées.

Ils contractent l'engagement de rester au moins trois ans à l'Observatoire, et de se conformer aux règles établies pour les aides-astronomes et astronomes adjoints.

(1) Les règlements intérieurs qui n'ont pas encore été soumis à l'épreuve de l'expérience ne sont pas définitivement arrêtés, et ne sont publiés que pour faire connaître aux élèves l'ordre provisoire des travaux.

FIGURE 4. Première page du règlement intérieur de la section Mathématiques de l'EPHE, 1868, [F/17/13614].

2.2. Atermoiements de la première section.

Dans le Rapport accompagnant la création de l'EPHE, Duruy explique indirectement, en revoyant au règlement intérieur, l'utilité de la section Mathématiques par les études au sein de l'Observatoire. Mais dans ce règlement, rien n'est précisé pour les modalités des conférences et des analyses de travaux que doivent effectuer les élèves qui ne souhaitent pas être rattachés à l'Observatoire. Cela témoigne d'une forme de méconnaissance du milieu des études supérieures de mathématiques de la part du Ministre. Cette méconnaissance était déjà retranscrite dans son décret du 31 Juillet de création de l'EPHE par son assimilation réductrice des études mathématiques aux seuls domaines de l'astronomie et de la mécanique. Cette forme d'ignorance apparaît ensuite clairement dans le rapport du 15 Novembre [**Duruy 1868b**], lorsque Victor Duruy évoque les moteurs des progrès de l'analyse mathématique :

> En outre, comme le progrès dans les études astronomiques se lie étroitement au perfectionnement des méthodes dans la haute analyse, les mathématiques pures profiteront de tous les efforts qui seront faits à l'Observatoire impérial pour l'avancement de la science.
>
> [**Duruy 1868b**, XVI]

Cette remarque du Ministre est d'autant plus surprenante que rien ne figure en ce sens dans le "*Rapport sur les progrès de l'Analyse*" [**Bertrand 1867**] remis par Joseph Bertrand en 1867. S'il est familier avec Pasteur et entretient de très bonnes relations avec de nombreux scientifique (physiciens, chimistes, naturalistes), Victor Duruy n'est en réalité proche d'aucun mathématicien[38]. En outre on trouve un peu plus tôt dans le rapport un surprenant aveu d'impuissance de la part du Ministre dans le domaine de la recherche mathématique : "*Pour les mathématiques, l'Administration est réduite, comme pour les lettres, à faire des vœux. Elle ne peut pas plus aider un géomètre à trouver de nouveaux théorèmes qu'un littérateur à produire œuvre qui dure*" ([**Duruy 1868b**, XVI]).

Enfin, les mathématiciens étaient loin d'occuper une place centrale dans la mise en place de la réforme ayant mené à la création de l'EPHE. Comme nous l'avons souligné plus tôt, les scientifiques consultés par Duruy et l'Empereur en Mars 1868 étaient des naturalistes et des chimistes, puis le groupe de réformateurs s'était ensuite structuré autour de plusieurs historiens, le Ministre lui-même en tête. Les trois sections de physique et chimie, de sciences naturelles et d'histoire de l'Ecole Pratique ont donc été créées par des scientifiques de chaque discipline impliqués dès la naissance du projet de réforme. Ce ne fut pas le cas pour la section de mathématiques, pour laquelle Serret, Puiseux et Le Verrier ont uniquement été greffés aux dernières discussions.

Les inscriptions pour l'EPHE sont ouvertes dès la parution du décret du 31 Juillet 1868. Duruy va alors être accaparé par la construction des laboratoires et, en dépit de la confiance affichée au sein de son rapport dans ce domaine, par le souci de trouver des fonds pour financer toutes les dépenses liées à la création de l'école. Deux semaines après l'ouverture des inscriptions, Duruy écrit à son ami Edmond About :

38. L'auteur tient à remercier Jean-Charles Geslot pour les informations que ce-dernier a bien voulu lui communiquer au sujet de Victor Duruy.

> Croiriez- vous que, malgré les vacances, j'ai déjà 70 inscriptions pour cette école. Je tremble qu'il y en ait trop en décembre. Aussi je me hâte de préparer la place : Laboratoires de recherches pour Cl. Bernard, Pasteur, Berthelot, Milne-Edwards, Blanchard, Decaisne, etc. Laboratoires d'enseignement pour Deluynes, Duchartre, Frémy, Hébert, etc. ; trois amphithéâtres, rue Gerson, pour les jeunes filles. Où trouverai-je l'argent ? Je n'en sais rien ; mais je sais bien que tout cela sera prêt le 1er décembre.
>
> Lettre de Victor Duruy à Edmond About datée du 16 Aout 1868 reproduite dans [**Fleury 1966**].

Les vacances d'été passent sans que rien ne vienne structurer le fonctionnement de la future section de mathématiques. Le 28 Septembre 1868, Duruy publie la nomination des Commissions de patronage de chacune des sections [39]. Chaque Commission est formée par 5 professeurs, nommés pour 3 ans, et est chargée de choisir en son sein un président. En outre, un secrétaire est attaché à chacune des sections. Pour la section de mathématiques, les membres de la Commission nommés par le Ministre sont Bertrand, Delaunay, Puiseux, Serret et Chasles, et ce-dernier en sera rapidement choisi président [40]. Il peut paraître étonnant de ne pas retrouver Le Verrier dans cette Commission alors qu'il avait participé à la commission de révision du projet de décret le 23 Juin 1868 ; cependant cette absence n'a rien de surprenant compte tenu des relations exécrables que l'astronome entretenait avec le Ministre depuis 1867. Par ailleurs, en dépit de la volonté affichée dans les projets et les règlements de faire la part belle à l'astronomie, les astronomes de la commission (ou ceux qui peuvent être considérés comme tels) sont, avec Charles-Eugène Delaunay et Victor Puiseux, en minorité. La place de l'astronomie aurait pu être élargie si l'un de ces deux membres avait été élu président de la commission, mais avec Chasles, il n'en sera rien. Finalement, le secrétaire que Duruy choisit pour la première section - celle de Mathématiques - est Louis Bellaguet, Inspecteur Général et chef de la 4ème division du Ministère de l'Instruction Publique [41].

39. Le décret de nomination du 28 Septembre 1868 peut être consulté dans le "*Journal Général de l'Instruction Publique*" de l'année 1868.

40. [**Paul 1985**, 49] affirme à tort que la section de mathématiques était dirigée par les trois professeurs Serret, Briot et Puiseux. Briot ne fera pas partie de la section de mathématiques avant 1881, date à laquelle il entre dans la commission de patronage. Nous verrons dans la suite que cette erreur peut venir du fait que Duruy a bien eu un temps l'intention d'inclure Briot dans la section de mathématiques, mais que cela ne s'est pas concrétisé.

41. Cette 4ème division est chargée des Instituts, des Sociétés savantes et des Bibliothèques.

FIGURE 5. Les membres de la commission de patronage de la section mathématiques de l'EPHE à sa création : Chasles (Pdt), Bertrand, Serret, Delaunay et Puiseux.

Le 3 Novembre 1868, le Conseil supérieur de l'EPHE se réunit, composé des différentes Commissions de patronage, de leur secrétaire, et bien entendu du Ministre Duruy. Ce-dernier demande à chaque président de section de lui fournir un projet de programme des études des futurs élèves de leur section. Aussi Chasles fait-il parvenir au Ministre, dans une lettre datée du 14 Décembre 1868 [42], un projet pour la section qu'il dirige. Ce projet est composé de 4 différents points : des études d'astronomie à l'Observatoire, des missions à l'étranger confiées aux élèves pour étudier l'avancée des sciences et leur enseignement, la constitution d'une bibliothèque contenant les principaux ouvrages mathématiques paraissant en France et à l'étranger, et enfin la publication d'un "*Bulletin mensuel des sciences*

42. Cette lettre est disponible dans les archives [**F/17/13614**].

mathématiques" qui ferait connaître les ouvrages mathématiques nouveaux. C'est là la première mention de ce qui deviendra un peu plus tard le *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*.

Mais entre le 3 Novembre et le 14 Décembre 1868, la rentrée de l'école a déjà été effectuée puisque Duruy l'avait en effet prévue pour le 15 Novembre [43]. Il tente de suivre l'évolution des nombres d'élèves inscrits pour l'insérer à la dernière minute dans son Rapport sur l'enseignement supérieur [**Duruy 1868b**]. Le 29 Novembre, il reçoit l'information que 27 candidats se sont inscrits pour la première section, mais que 9 seulement sont déclarés admissibles par Chasles. La section de mathématiques est la section qui recueillera le moins de candidatures et aura le moins d'élèves : elle comptera finalement pour l'année 1868/69 10 élèves pour 28 candidatures, alors que la section des sciences historiques comptera 51 élèves pour 68 candidatures et que les sections de physique-chimie et de sciences naturelles rassembleront au total 265 élèves pour 326 candidatures [44].

Alors que la rentrée s'effectue et que les cours doivent commencer, la section de mathématiques est totalement désorganisée. Chasles avait proposé dans son projet de scinder les études de sa section entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées. Il propose à Duruy de choisir François Didon [45] comme répétiteur pour les mathématiques pures, et Nicolas Maillard [46] pour les mathématiques appliquées. Mais Serret insiste ensuite auprès de Duruy pour que la répétition de son cours - de calcul différentiel et intégral de la Sorbonne -, auquel devrait pouvoir assister les élèves de la section, soit effectuée par Tisserand [47]. Ce-dernier se propose en effet d'effectuer ces répétitions pour un (faible) solde de 1,000 francs annuels. Finalement, Duruy tranche : puisqu'il n'y a que 10 élèves, et que 6 d'entre eux ont exprimé que, par leurs études à l'EPHE, ils souhaitaient en réalité préparer

---

43. Duruy annonce la rentrée de l'EPHE à Napoléon pour le 15 Novembre 1868 dans sa lettre du 28 Septembre ([**Duruy 1901**, 317]). En fait la rentrée ne s'effectuera que quelques semaines plus tard, les laboratoires des sections 2 et 3 (physique chimie et sciences naturelles) n'ouvrant qu'entre le 30 Novembre et le 15 Décembre 1868 (voir les dates d'ouverture des laboratoires dans le "*Journal Général de l'Instruction Publique*", Vol.38 (1868) pp.826-827).

44. Ces chiffres ont été obtenus en comparant les données recueillies dans les archives [**F/17/13616**], les rapports [**Duruy 1868b**] et [**Empire 1869-01**] ainsi que le rapport de la 4ème section [**Section Hist. EPHE 1872**]. Les archives [**F/17/4023**] et [**F/17/13616**] permettent également d'obtenir précisément le nombre d'élèves de l'EPHE pour la rentrée de Novembre 1871, à l'issue de la guerre franco-prussienne et de la Commune (voir annexe 8) : la 1ère section comptera 15 élèves, la 2ème en comptera 109, la 3ème 155 et enfin la 4ème 113. Avant la guerre, pour l'année scolaire 1869/70, la section de mathématiques comptait 12 élèves.

45. François Didon est entré premier à l'Ecole Normale en 1864 et a réussi l'agrégation de mathématiques en 1867 où il obtient le premier rang. Il est en 1868-69 agrégé-préparateur de mathématiques pour la seconde année : son parcours à l'Ecole Normale est ainsi l'identique de celui de Gaston Darboux. Il partira après la guerre enseigner à la Faculté de Besançon.

46. Nicolas Sylvère Maillard est entré également à l'Ecole Normale en 1864, et a aussi obtenu l'agrégation en 1867 (avec le 3$^{\text{ème}}$ rang). Il deviendra le quatrième agrégé-préparateur de mathématiques de 1869 à 1872, après Darboux, Levistal et Didon. Il y sera remplacé par Jules Tannery.

47. Félix Tisserand entre à l'Ecole Normale en 1863, reçoit l'agrégation en 1866 et se concentre ensuite sur des études d'astronomie. Voir plus loin une notice plus complète sur Tisserand en [Chap.6,1.3].

l'examen de la licence de mathématiques [48], il n'y aura qu'un seul répétiteur : ce sera Didon, et il devra organiser la répétition du cours de mathématiques de Joseph Liouville [49].

Cela constitue encore une marque de la désorganisation de la section de mathématiques : il s'agit de la seule section où les scientifiques qui en deviennent les professeurs n'étaient pas présents lors de la commission de révision du projet le 23 Juin. Cette-dernière était pourtant censée réunir les futurs professeurs, mais ni Puiseux ni Le Verrier, présents avec Serret pour les mathématiques, ne deviennent professeurs des élèves de l'EPHE. Didon devenant chargé par Duruy de la répétition des cours de Liouville, Serret n'est pas non plus considéré comme un professeur de la section [50]. Qui sont alors les directeurs d'étude qui vont diriger la section de mathématiques ? En fait cette section est la seule des quatre sections pour laquelle aucun directeur d'études n'est nommé pour l'année 1868/69 lors de l'arrêté officiel de nomination du 2 Janvier 1869 [51].

Duruy écrit ensuite au jeune Didon, qui est encore agrégé-préparateur et donc bibliothécaire à la récente Bibliothèque scientifique de l'Ecole Normale [52]. Il lui fait de plus la demande de l'informer de l'état des travaux mathématiques en France, et particulièrement des travaux parus au cours de l'année 1868. Cette demande surprenante du Ministre au jeune agrégé-préparateur - qu'il ne connaît pas - souligne encore l'absence de mathématiciens dans l'entourage de Victor Duruy auxquels il aurait pu requérir de tels renseignements. Didon lui répond qu'ayant consulté Hermite et Bouquet à ce sujet, "*il n'y avait pas lieu de parler de travaux mathématiques probants dans le cours de l'année dernière dans notre pays. Ces travaux n'ont en effet rien de saillant*". Il ajoute une anecdote qui en dit long de la méconnaissance du rôle de la section de mathématiques de l'école :

> J'ai vu aujourd'hui trois des élèves de cette section ; deux d'entre eux, MM. Godard et Patru ne se doutaient pas du but de l'Ecole et pensaient qu'elle leur servirait simplement à se préparer à l'agrégation.
>
> Lettre de François Didon à Victor Duruy, datée du 7 Janvier 1869, conservée aux archives [**F/17/13614**]

De fait, Victor Duruy est pris de cours pour la section de mathématiques : les élèves ne vont pas aller étudier à l'Observatoire, alors que l'intérêt principal de l'instauration de cette section reposait pour lui exclusivement sur ce parcours. Il fallait en effet constituer la "*véritable école d'élèves astronomes qui nous manque encore*" [53]. Ainsi que l'écrit Didon au Ministre, les élèves qui s'y inscrivent viennent pour se préparer à la licence ou à l'agrégation,

48. En fait 8 des 10 élèves ne possèdent pas la licence ès mathématiques. A la connaissance du Ministre, seuls 6 ont néanmoins annoncé ouvertement leur souhait d'étudier à l'EPHE dans le but d'obtenir cette licence.

49. La biographie de Liouville [**Lützen 1990**] ne fait état d'aucun contact entre Liouville et Victor Duruy, ni de quelque relation avec l'Ecole Pratique des Hautes Etudes.

50. Cela contredit d'ailleurs l'affirmation de [**Paul 1985**, 49].

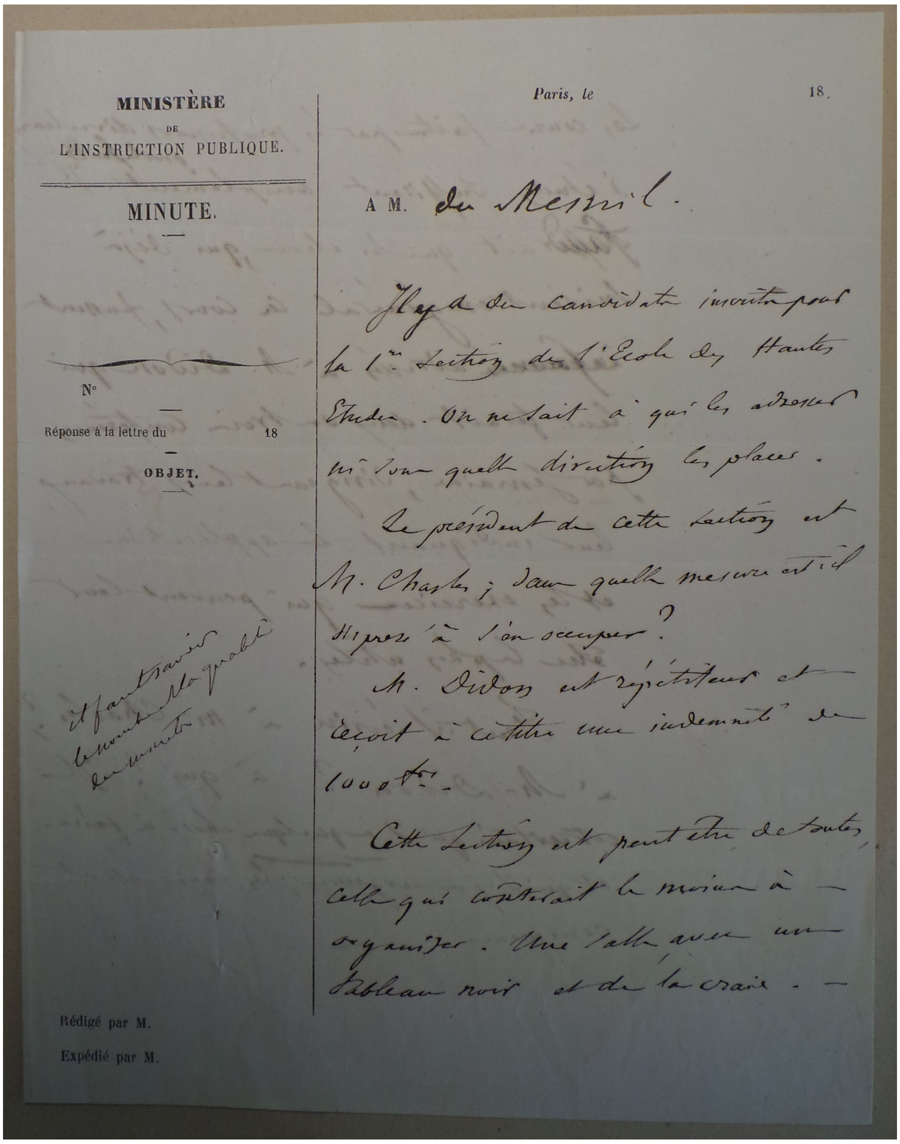
51. Cet arrêté de nomination des directeurs de laboratoire, d'études et des répétiteurs de Victor Duruy daté du 2 Janvier 1869 est conservé dans les archives [**F/17/13616**].

52. Le poste d'agrégé-préparateur de Mathématiques de l'Ecole Normale, créé le 26 Septembre 1864 par Louis Pasteur pour Gaston Darboux, s'accompagne de la responsabilité de *sous-bibliothécaire pour les sciences*. Pour plus de détails, on se reportera à notre section [Ch.1, 3.2].

53. Extrait de la citation de [**Duruy 1868a**, XXXVII].

tout comme ils le feraient à l'Université. En fait, Duruy se montre presque surpris d'avoir des élèves dans cette section qui est loin d'être au centre de ses préoccupations. Il écrit en ce sens à Armand Du Mesnil, chef de division de l'Instruction Supérieure qu'il a nommé secrétaire de la commission de la section de sciences naturelles de l'EPHE :

> Il y a des candidats inscrits pour la 1ère section de l'Ecole des Hautes Etudes. On ne sait à qui les adresser ni sous quelle direction les placer.
>
> Le président de cette section est M. Chasles ; dans quelle mesure est-il disposé à s'en occuper ? [...] Cette section est peut être de toutes celle qui coûterait le moins à organiser. Une salle avec un tableau noir et de la craie... [...] Faut-il écrire à M. Chasles ? à M. Didon ? à qui ? Il est certain qu'il y a quelque chose à faire et qu'il y a urgence, les cours étant commencés ...
>
> Note non datée (Décembre 1868) de Victor Duruy à Armand Du Mesnil, conservée aux archives [**F/17/13616**]



MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

MINUTE.

N°

Réponse à la lettre du 18

OBJET.

Rédigé par M.

Expédié par M.

Paris, le 18.

A M. du Mesnil.

Il y a des candidats inscrits pour la 1re Section de l'Ecole des Hautes Etudes. On ne sait à qui les adresser ni sous quelle direction les placer.

Le président de cette section est M. Chasles ; dans quelle mesure est-il disposé à s'en occuper ?

M. Didon est répétiteur et reçoit à ce titre une indemnité de 1000 fr.

Cette Section est peut être de toutes celle qui coûterait le moins à organiser. Une salle avec un tableau noir et de la craie. —

FIGURE 6. Première page de la Note de Victor Duruy à Armand Du Mesnil, [F/17/13616]

Malheureusement pour Victor Duruy, Chasles n'est absolument pas disposé à s'investir dans l'administration de l'EPHE en dépit de son rang de Directeur de section. Il l'énoncera clairement au Ministre dans sa lettre du 14 Décembre 1868 :

> Je n'ai pas besoin d'ajouter, Monsieur le Ministre, que pour parler de la spécialité particulière de mon propre travail, mon âge et mes occupations actuelles que cet âge rend plus urgentes et obligatoires, ne me permettraient point de prendre aucune part aux nouveaux devoirs qu'entraîne la Direction des Hautes Etudes.

Lettre datée du 14 Décembre 1868 de Michel Chasles à Victor Dury, archives [**F/17/13616**]

Comprenant que Chasles ne s'impliquera pas dans la mise en place et la vie de la future section de mathématiques de son Ecole Pratique, Victor Duruy cherche alors un temps à le faire remplacer par le mathématicien Charles Briot [54]. Aussi, lorsque deux jours seulement après la réception de la lettre de Chasles le Ministre souhaite préparer les cours des 6 élèves candidats à la licence de mathématiques, ce n'est pas avec Chasles mais bien avec Briot qu'il souhaite organiser une réunion. Les Notes qu'il fait dicter en témoignent :

> [...] il ne faut qu'un seul répétiteur. Ce répétiteur peut-il être Didon ? Appeler ces 6 jeunes gens dans votre cabinet avec Briot et Didon.

Note du Cabinet de Son Excellence le Ministre Victor Duruy datée du 16 Décembre 1868, conservée aux archives [**F/17/13616**]

Quelques jours plus tard, Duruy rédige la partie consacrée à l'Instruction Publique du futur "*Exposé de la situation de l'Empire*" qui sera présenté début Janvier 1869. Présentant la composition des commissions des différentes sections de la toute nouvelle EPHE, Duruy écrit pour la section de mathématiques : "*MM. J. Bertrand, Briot, Delaunay, Serret, membres de l'Institut, professeurs de la Faculté des sciences de Paris ; M. Puiseux, professeur à la Faculté des sciences de Paris.*" ([**Empire 1869-01**, 222]). On retrouve donc bien Bertrand, Delauney, Serret et Puiseux ; mais Duruy a fait écrire Briot à la place de Chasles ! Pour finir, en dépit de ce rapport, c'est vraiment Chasles qui continuera de présider la section de mathématiques. Briot aura pu refuser de remplacer Chasles, peut-être au contraire que ce-dernier se sera opposé à son remplacement, ou Duruy a tout simplement fait machine arrière. Toujours est-il que Briot n'intégrera cette section qu'en 1881, une seule année avant sa mort [55].

Pour en revenir au fonctionnement de la section de mathématiques, Didon est bel et bien nommé le 2 Janvier 1869 dans l'arrêté officiel répétiteur de la section Mathématiques des Hautes Etudes. Il percevra à ce titre 1,000 francs pour l'année 1869, le traitement qu'avait proposé Tisserand qui, lui en revanche, n'est pas nommé. Pourtant aucun document ni aucune archive n'atteste des leçons que Didon aurait pu donner. Le premier rapport sur la section Mathématiques de l'EPHE, qui porte sur l'année scolaire 1871/1872 mais fait un état des conférences données depuis la création de la section [**Section Math. EPHE 1871**], ne mentionne ni Didon, ni d'éventuels cours ou répétitions pour la période scolaire de 1868/1869. Cette année semble ne pas avoir existé pour la section de mathématiques qui n'a alors compté ni directeur d'études, ni répétitions officielles en dépit de la nomination à cet endroit de Didon.

Les premières répétitions mentionnées dans le rapport de la première section sont celles de Maillard, sur la période 1869/1870 et relatives aux cours de mécanique rationnelle donnés à la Sorbonne par Joseph Liouville. Des répétitions données par Tisserand

54. Né en 1817 dans le Doubs, Charles Briot est un ancien élève normalien de la promotion 1838. Agrégé de mathématiques en 1841 - en partageant le premier rang avec Joseph Bertrand -, il est en 1868 maître de conférences à l'Ecole Normale. Tant du point de vue de leur très longue amitié que de leurs travaux sur les fonctions elliptiques, Charles Briot forme avec Jean-Claude Bouquet un tandem quasi-inséparable.

55. Cet épisode peut expliquer la confusion des historiens quant à la composition originelle de la section de mathématiques de l'Ecole Pratique des Hautes Etudes. C'est ainsi que [**Paul 1985**, 49] a inclus à tort Charles Briot dans la composition de cette section.

sont également rapportées pour les cours de calcul différentiel et intégral de Serret, mais uniquement à partir du second semestre de 1869/1870. Or Maillard lui-même n'a remplacé Didon le 29 Décembre 1869 [56]. Aussi la section de mathématiques de l'Ecole Pratique n'a-t-elle véritablement existé (au sens non administratif mais d'un fonctionnement effectif de l'enseignement) qu'à partir du mois de Décembre 1869, soit cinq mois après le départ de Victor Duruy du Ministère de l'Instruction Publique. Les premières conférences données pour cette section n'ont eu lieu qu'à partir de 1870 et Didon n'en aura ainsi jamais été l'auteur. S'il n'a pas donné de conférences, François Didon aura néanmoins contribué à ce que les élèves de la section de mathématiques puissent dorénavant accéder librement à la bibliothèque scientifique de l'Ecole Normale. Le premier directeur d'études de la première section de l'EPHE sera Joseph-Alfred Serret, nommé seulement au cours de l'année scolaire 1869/1870 [57]. Il aura vu réussir cette année-là 6 de ses 12 élèves lors de l'examen de la licence ès sciences mathématiques de 1870. Serret sera rejoint par Charles Hermite fin 1871, puis par Jean-Claude Bouquet début 1872 [58]. La Commission de patronage de la section de mathématiques de l'EPHE restera quant à elle inchangée jusqu'à la mort de Delaunay le 5 Août 1872. C'est Hermite qui, le remplaçant, en fera partie avec Serret, Bertrand, Puiseux et Chasles son président [59].

2.3. Projet et rejet de Bulletin (Déc. 1868 - Juil. 1869).

Chasles n'est pas disposé à prendre une part active dans la direction de l'Ecole Pratique des Hautes Etudes, et il l'a clairement fait savoir au Ministre Duruy dans sa lettre-programme du 14 Décembre 1868. En revanche, il est prêt à s'investir pour le projet de "*Bulletin*" qui lui tient à cœur. Il avait ainsi mentionné dans son programme "*la publication d'un Bulletin mensuel des sciences mathématiques qui ferait connaître, par des analyses plus ou moins étendues, les ouvrages nouveaux, et principalement les mémoires renfermés dans les journaux scientifiques de tous les pays*" [60].

Plusieurs éléments lui permettent, fin 1868 lorsqu'il est amené à présider la commission de la première section, d'entretenir raisonnablement l'espoir de pouvoir faire naître une telle publication. Tout d'abord, la création d'un périodique de la section qu'il dirige viendrait légitimer l'existence de celle-ci alors que les élèves qui y sont inscrits sont en très

56. On trouve mention de ce remplacement sur l'écrit originel de l'arrêté du 2 Janvier 1869 de Victor Duruy conservé aux archives [**F/17/13616**].

57. Il paraît probable que la nomination de Serret ait été faite le 29 Décembre 1869 avec la nomination de Maillard comme remplaçant de Didon au poste de répétiteur. Mais aucun document ne nous a permis de l'attester formellement.

58. Ces chiffres, dates et identités des directeurs d'études proviennent des rapports typographiés de la section de mathématiques de l'EPHE qui sont conservés dans les archives [**F/17/13616**].

59. On peut trouver dans la littérature que chaque section de l'Ecole Pratique des Hautes Etudes a été dirigée depuis sa création par trois professeurs. Cette affirmation est incorrecte puisque ce sont bien les commissions de patronage, composées de 5 membres, qui en ont dirigé les sections. On pourrait alors penser que cette affirmation assimile les directeurs d'études (ou de laboratoires) à la direction des sections. Mais ceci est également erroné, puisque les sections comptent un nombre de directeurs très variable. A l'origine, l'arrêté du 2 Janvier 1869 de Duruy instituait ainsi par exemple 10 directeurs de laboratoire pour la section de physique et chimie, 14 pour celle de sciences naturelles, 6 directeurs d'études pour la section d'histoire ... et aucun pour celle de mathématiques, nous l'avions souligné.

60. Lettre de Michel Chasles à Victor Duruy datée du 14 Décembre 1868. Archives [**F/17/13616**]

faible nombre - 10 - et que leurs études ne correspondent pas à ce qui était envisagé lors de la création de l'école. Là où Victor Duruy envisageait d'envoyer des élèves à l'Observatoire, croyant servir ainsi le progrès de l'analyse mathématique, les candidats arrivent à l'école dans le but de préparer la licence ou l'agrégation. A la différence des sections de sciences naturelles et de sciences physiques, qui accueillent avec la création des nombreux laboratoires les bénéfices d'un enseignement à caractère pratique, les études de la section de mathématiques de l'Ecole Pratique ne présentent pas de valeur ajoutée par rapport à l'Université. Cette valeur ajoutée pourrait en revanche se trouver dans la publication d'un nouveau périodique.

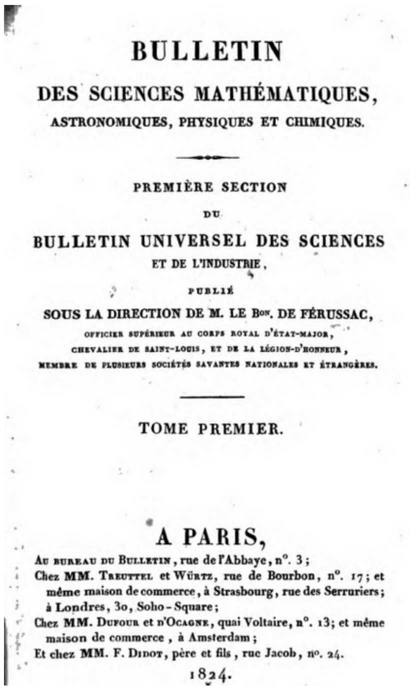
Ensuite, une répartition équitable du budget de l'Ecole permettrait largement de financer cette publication. En effet, 50,000 francs ont été dédiés par le Ministère de l'Instruction Publique au budget de l'EPHE pour le seul dernier trimestre de 1868, et 100,000 francs pour l'année 1869 [61]. Aussi Chasles, qui ne demande qu'une allocation de 12,000 à 15,000 francs au Ministre dans sa lettre du 14 Décembre 1868 (soit des montants bien inférieurs au quart du budget total) peut être optimiste. En outre, aucun frais d'installation n'est à prévoir pour sa section - au contraire des deux sections de sciences physiques et naturelles dont les laboratoires sont onéreux - et le seul répétiteur Didon ne sera payé que 1,000 francs : cela préserve donc une large marge financière. Enfin et surtout, Chasles est persuadé de la nécessité pour les mathématiciens français d'un tel Bulletin, qui puisse tout à la fois diffuser les mathématiques françaises et tenir au courant des mathématiques faites à l'étranger. En cela, il retrouve d'ailleurs un des objectifs évoqués par Duruy dans son Rapport [**Duruy 1868a**] :

> Même pour l'analyse pure, ils [les élèves de la section de mathématiques] ont besoin [...] de prendre l'habitude de se tenir au courant de la science étrangère.
>
> [**Duruy 1868a**, XXXVII]

La précision de l'idée que se fait Chasles d'un Bulletin regroupant des analyses des travaux mathématiques, son enthousiasme quant à sa création s'expliquent par le fait qu'un tel Bulletin a déjà existé et que Chasles a donc déjà pu en mesurer les avantages. Cet ancien Bulletin, c'est le "*Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques*", publié autrefois par le baron de Férussac et plus connu ainsi sous le nom de *Bulletin de Férussac*. En réalité, le "*Bulletin de Férussac*" désigne le "*Bulletin général et universel des annonces et des nouvelles scientifiques*", entreprise de publication commencée en 1823 par Férussac. Ce Bulletin avait alors pour objectif "*d'exposer, avec précision et avec fidélité, la marche et les progrès successifs des connaissances humaines*" ([**Bru Martin 2005**, 10]). En faisant connaître les différents travaux publiés ou les faits observés, l'idéal poursuivi par Férussac était, pour les différentes sciences, d'"*augmenter, dans une progression indéfinie, l'impulsion donnée aux esprits occupés des sciences, régulariser la marche de leurs travaux, éviter une foule d'essais, de tâtonnements, d'écrits inutiles, fruits naturels de l'isolement où sont en général les savants*" ([**Taton 1947**]). Férussac décidera rapidement de diviser sa publication en huit sections indépendantes selon

61. Ces indications se trouvent dans le rapport sur l'EPHE pour l'année 1871/1872, partie IV : Budget. Ce rapport original se trouve aux archives [**F/17/13614**]. Dans ses "*Notes et Souvenirs*", Duruy y ajoute également 80,000 francs débloqués pour les laboratoires d'enseignement ([**Duruy 1901**, 316]).

les différentes disciplines scientifiques, qui résulteront en autant de "*Bulletins de Férussac*"[62]. La première section sera consacrée aux sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques, et donnera 16 volumes parus entre 1824 et 1831. Ce sont donc à ces 16 *Bulletins* que Chasles fait référence dans sa lettre au Ministre. Faute de soutien financier, le baron de Férussac devra faire cesser la parution de ses Bulletins après la naissance de la Monarchie de Juillet, en 1831. Pourtant, outre accélérer la diffusion des travaux scientifiques, la publication de Férussac avait contribué à faire naître à Paris, dans les locaux de la rédaction du Bulletin, un lieu d'échanges et de rencontres pour les savants qui avait donné un nouvel essor aux progrès des sciences dans la capitale française[63].



BULLETIN
DES SCIENCES MATHÉMATIQUES,
ASTRONOMIQUES, PHYSIQUES ET CHIMIQUES.

PREMIÈRE SECTION
DU
BULLETIN UNIVERSEL DES SCIENCES
ET DE L'INDUSTRIE,
PUBLIÉ
SOUS LA DIRECTION DE M. LE Bon. DE FÉRUSSAC,
OFFICIER SUPÉRIEUR AU CORPS ROYAL D'ÉTAT-MAJOR,
CHEVALIER DE SAINT-LOUIS, ET DE LA LÉGION-D'HONNEUR,
MEMBRE DE PLUSIEURS SOCIÉTÉS SAVANTES NATIONALES ET ÉTRANGÈRES.

TOME PREMIER.

A PARIS,
AU BUREAU DU BULLETIN, rue de l'Abbaye, n°. 3;
Chez MM. TREUTTEL et WÜRTZ, rue de Bourbon, n°. 17; et même maison de commerce, à Strasbourg, rue des Serruriers; à Londres, 30, Soho-Square;
Chez MM. DUFOUR et D'OCAGNE, quai Voltaire, n°. 13; et même maison de commerce, à Amsterdam;
Et chez MM. F. DIDOT, père et fils, rue Jacob, n°. 24.
1824.

FIGURE 7. Première page du premier volume du Bulletin de Férussac (1824 - première section)

C'est ainsi un tel journal ayant vocation à "*répandre généralement la connaissance des divers travaux publiés*"[64] que Chasles, qui était âgé de 29 ans lorsque le Bulletin de Férussac commença à paraître, entend ressusciter[65]. Il espère utiliser la création de la

62. La division en 8 sections coïncide également en 1824 avec l'apparition d'une nouvelle appellation qui remplace le "*Bulletin général et universel des annonces et des nouvelles scientifiques*" : il s'agit du "*Bulletin universel des sciences et de l'industrie*".

63. On pourra consulter à ce sujet, notamment pour Dirichlet, Abel et Galois, [**Taton 1947**]. Pour la liste des rédacteurs principaux du Bulletin de Férussac pour les mathématiques, et le rôle d'Antoine Cournot comme collaborateur, on étudiera [**Bru Martin 2005**]. Ces deux travaux constituent les principales références pour l'étude du *Bulletin de Férussac* et la place des mathématiques dans celui-ci.

64. Extrait de l'en-tête du premier numéro du Bulletin de Férussac, cité par [**Bru Martin 2005**, 11].

65. Il doit être noté que le nom de Michel Chasles n'apparaît pas dans la liste des collaborateurs du Bulletin de Férussac pour la section des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques.

section de mathématiques à l'Ecole Pratique des Hautes Etudes pour y parvenir, et écrit en ce sens au Ministre dans la note qui accompagne son projet pour la section qu'il dirige :

> Le Bulletin mensuel des Sciences mathématiques pures et appliquées, proposé dans le second paragraphe de ce projet, serait extrêmement utile. On en peut juger par les services que rendait le Bulletin du Baron de Férussac, qui a paru de 1824 à 1831, parfaitement rédigé par M. Sturm et M. Cournot [66].
>
> Lettre de Michel Chasles à Victor Duruy datée du 14 Décembre 1868. Archives [**F/17/13616**].

Chasles est convaincu que le milieu mathématique français nécessite d'être mieux informé des différents travaux faits en France et à l'étranger. Il sera d'ailleurs, avec son "*Rapport*" de 1870, le premier "grand mathématicien" à dénoncer le retard des mathématiques françaises dû à leur ostracisme [67].

Chasles insiste donc sur les deux derniers points de son projet : la bonne tenue d'une bibliothèque la plus exhaustive possible et la reprise du Bulletin de Férussac contenant un recensement des travaux mathématiques récents. En ce qui concerne le premier point, la difficulté d'obtenir une bibliothèque bien tenue pour les mathématiques peut s'expliquer par la croyance largement répandue que les mathématiciens ne requièrent pas de livres pour étudier. Ceci était déjà illustré par la note de Duruy à Du Mesnil citée précédemment (voir 2.2) dans laquelle le Ministre explicite qu'il est suffisant pour le fonctionnement de la section de mathématiques de fournir une salle avec un tableau et de la craie. Une autre anecdote, bien qu'ultérieure, vient renforcer cette idée. Durant les vacances de Pâques de 1870, le Sous-Directeur de l'Ecole Normale, Bertin [68], reçoit une subvention pour approvisionner la Bibliothèque scientifique de l'Ecole. Voici, raconté par Gaston Darboux, comment il en fera usage :

> Dernièrement M. Bertin ayant reçu 10,000 francs pour la Bibliothèque a employé 9,600 francs en physique et 400 francs en Mathématiques. Si vous ne connaissez pas Bertin, cela vous le dépeindra avec la réponse qu'il m'a faite : <u>Les Mathématiciens n'ont pas besoin de tant de livres</u>.
>
> Lettre non datée (Avril 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

En ce qui concerne le dernier point, la publication d'un journal de recensement systématique des travaux mathématiques, Chasles a déjà réfléchi à la rédaction de ce Bulletin. Il envisage d'obtenir deux rédacteurs, pas nécessairement choisis au sein des élèves de sa section, mais possède par ailleurs déjà un candidat parmi ses anciens élèves : c'est là que se

Pourtant nous avons vu plus haut à l'occasion de notre étude des cônes circonscrits en lien avec la théorie des focales [Chap.2, 4.4] que Chasles était un lecteur de ce Bulletin qui lui permettait de se tenir (partiellement) au courant des travaux de Steiner, publiés dans un allemand qu'il ne parlait pas. Les 16 *Bulletins de Férussac* (1824-1831) peuvent être consultés en ligne à l'adresse suivante : `http://catalog.hathitrust.org/Record/008980872`.

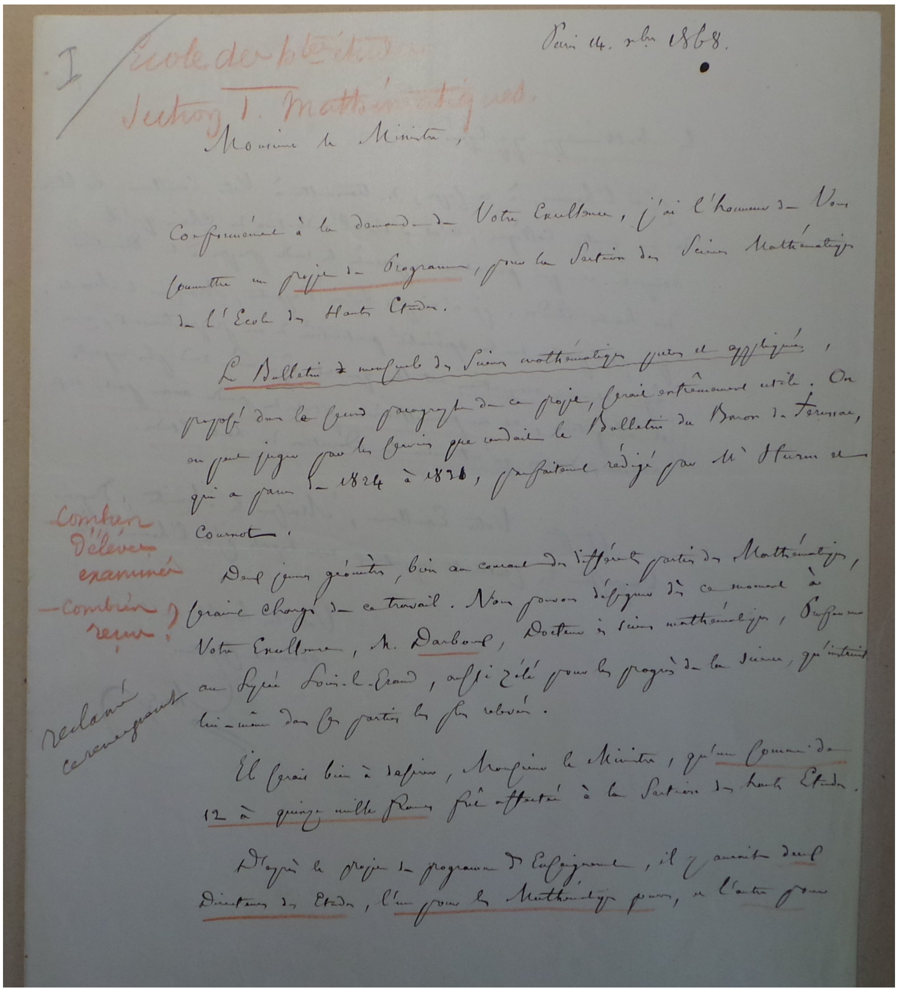
66. Sturm fut le rédacteur principal du Bulletin de Férussac entre 1828 et 1830, tandis que Cournot en fut un des plus actifs collaborateurs entre 1825 et 1831 ([**Bru Martin 2005**]).

67. Voir à ce sujet [**Gispert 1996b**].

68. Augustin Pierre Bertin-Mourot, élève de l'Ecole Normale (promotion 1841) et agrégé de Physique (1844) sera sous-directeur de l'Ecole Normale de 1867 (en remplacement de Désiré Nisard) jusqu'à sa mort en 1884.

révèle enfin pleinement la réception des travaux de son ancien doctorant, Gaston Darboux, auprès de lui.

> Deux jeunes géomètres, bien au courant des différentes parties des Mathématiques, seraient chargés de ce travail. Nous pouvons désigner dès ce moment à Votre Excellence M. Darboux, Docteur ès sciences mathématiques, Professeur au Lycée Louis-le-Grand, aussi zélé pour les progrès de la science qu'instruit lui-même dans les parties les plus relevées.
>
> Lettre de Michel Chasles à Victor Duruy datée du 14 Décembre 1868. Archives [F/17/13616].


Paris 14. xbre 1868.

I / Ecole des hautes études / Section I. Mathématiques.

Monsieur le Ministre,

Conformément à la demande de Votre Excellence, j'ai l'honneur de Vous soumettre un projet de Programme, pour la Section des Sciences Mathématiques de l'Ecole des Hautes Etudes.

Le Bulletin mensuel des Sciences mathématiques pures et appliquées, proposé dans le second paragraphe de ce projet, serait extrêmement utile. On peut juger par les services que rendait le Bulletin du Baron de Férussac, qui a paru de 1824 à 1831, principalement rédigé par M. Sturm et Cournot.

Combien d'élèves examinés — Combien reçus ?

réclamé ce renseignement

Deux jeunes géomètres, bien au courant des différentes parties des Mathématiques, seraient chargés de ce travail. Nous pouvons désigner dès ce moment à Votre Excellence, M. Darboux, Docteur ès sciences mathématiques, Professeur au Lycée Louis-le-Grand, aussi zélé pour les progrès de la science, qu'instruit lui-même dans les parties les plus relevées.

Il serait bien à désirer, Monsieur le Ministre, qu'une somme de 12 à quinze mille francs fût affectée à la Section des hautes Etudes.

D'après le projet de programme d'enseignement, il y aurait deux Directeurs des Etudes, l'un pour les Mathématiques pures, et l'autre pour

FIGURE 8. Projet de programme de Michel Chasles, lettre écrite à Victor Duruy le 14 Décembre 1868

Darboux n'a alors que 24 ans, il n'a soutenu sa thèse de doctorat que deux ans plus tôt. Et pourtant c'est bien lui que Chasles requiert pour tenir le Bulletin de Férussac ressuscité qu'il tente de promouvoir auprès du Ministre. Implicitement, cela souligne que pour Chasles, Darboux incarne l'espoir d'une jeune génération de géomètres français qui saura mettre à mal le repli sur soi des mathématiques françaises, en enrayer le déclin en les ouvrant aux recherches menées à l'étranger. Explicitement, cela signifie aussi que Chasles juge son ancien élève suffisamment compétent et complet dans les différents domaines mathématiques pour pouvoir accomplir la dure tâche d'analyse et de synthèse des différents travaux. D'ailleurs à ce propos le polytechnicien ne fait pas fausse route, et quatre ans plus tard (presque jour pour jour) Eugenio Beltrami en témoignera. Il écrira à Darboux :

> Mes occupations particulières, et aussi la tournure très rebelle de mon esprit me rendent, en effet, presque impossible de participer d'une manière utile à une publication qui demande, avant tout, de la promptitude et, pour ainsi dire, de la flexibilité d'intelligence, afin de l'orienter, sans trop de perte de temps, dans la multitude des travaux qui se croisent en tous sens autour de nous, et que le bon Terquem, dans un moment de mauvaise humeur, appelait "*fatras mathématique*". Vous possédez au plus haut degré cette précieuse faculté de démêler la véritable substance parmi ces innombrables productions en toutes langues et en tout genres, et vous avez très probablement beaucoup de difficulté à concevoir l'absence de cette faculté chez les autres.
>
> Lettre datée du 16 Décembre 1872 d'Eugenio Beltrami à Gaston Darboux, [**Archives épistolaires Darboux**].

Mais en Décembre 1868, nous sommes encore bien loin de la création du recueil. En effet, Victor Duruy ne partage pas l'enthousiasme de Chasles pour son projet de Bulletin. Deux raisons principales vont expliquer son refus de donner une suite à la demande du géomètre.

La première est que Duruy se refuse à prendre en considération les dysfonctionnements de la section de mathématiques. Son attention se porte rapidement, outre l'avancement des travaux concernant les laboratoires, sur la possible création d'une cinquième section de l'EPHE pour les sciences économiques[69]. Quant à la section de mathématiques, il y a peu d'élèves, ils ne sont pas à l'Observatoire, n'ont pas de directeurs d'études et le répétiteur Didon ne sait comment les encadrer et ne donne pas de répétitions. Pourtant voici comment Duruy considère une telle situation qui dure alors depuis un semestre :

> Les élèves de la section de mathématiques trouvent dans l'Ecole des hautes études la seule assistance dont ils aient besoin : une salle de travail, des livres, une direction et des conseils toujours prêts.
>
> Discours prononcé par Victor Duruy lors de la réunion des Sociétés Savantes d'Avril 1869, reproduit dans numéro du Jeudi 8 Avril 1869 du *Journal Général de l'Instruction Publique*, pp. 209-211.

On peut considérer en outre que la tentative (avortée) de Duruy de faire remplacer Chasles par Briot à la commission de patronage, décision qui n'a finalement pas abouti, témoignait du peu de considération du Ministre pour la section de mathématiques. Mais le désintérêt de Duruy vis-à-vis de la première section de l'EPHE est surtout soulignée bien plus tard, en 1882, lorsque son ami Jules Simon lui demande des renseignements à propos

69. Dès Novembre 1868, le Rapport [**Duruy 1868b**] fait état de cette volonté d'ajouter une section d'économie à l'EPHE. Sa création sera effectivement décidée en Janvier 1869 ([**Geslot 2009**, 261]).

de l'EPHE. Il omet alors purement et simplement la première section de l'Ecole dans sa description pourtant détaillée du fonctionnement de l'institution :

> Elle [l'EPHE] se propose de fortifier, pour les lettres savantes, l'érudition, et d'exciter, dans les sciences, l'esprit d'induction.
>
> De là, deux grandes divisions : La section des Sciences historiques et philologiques, qui a pour direction soixante-quatre conférences par semaine et, pour moyen d'étude, une bibliothèque spéciale mise à la disposition des élèves.
>
> La section des Sciences physiques, chimiques et naturelles, qui a des laboratoires où se font des conférences, des manipulations, des analyses et des recherches.
>
> Lettre datée du 6 Décembre 1882 de Victor Duruy à Jules Simon, reproduite dans [**Duruy 1901**, 305-309].

Au-delà d'une certaine négligence de la première section, la seconde raison du refus opposé par Victor Duruy au projet de Bulletin de Chasles tient en ce que le Ministre s'est dès la création de l'EPHE fait une idée précise de la forme qu'il souhaitait pour les publications émanant de la nouvelle école. Une publication mensuelle, indépendante et exclusivement réservée à la section de mathématiques, comme le géomètre le lui propose, ne lui convient pas. Dans une de ses notes personnelles, il commente ainsi la proposition de Chasles :

> Demander à M. Bellaguet [le secrétaire de la Commission pour la Section Mathématiques] d'examiner la question du Bulletin proposé par M. Chasles. Cette question sera étudiée avec tous les présidents quand M. Bellaguet sera en état de nous proposer quelque chose pour réaliser ce que j'ai mis dans mon rapport : moyens permanents d'information.
>
> Je tiens toujours pour ce qui serait la manifestation extérieure de la vie et de l'unité dans l'Ecole, une publication en 5 sections [70] :
>
> Archives de l'Ecole pratique des Hautes Etudes.
>
> Note de Victor Duruy datée du 16 Décembre 1868. Archives [**F/17/13616**].

Cette note illustre l'avis défavorable que Duruy donne concernant le projet de Bulletin de Chasles. Les "*moyens permanents d'information*" que Duruy évoquent sont relatifs à un passage du rapport sur la situation de l'enseignement supérieur ([**Duruy 1868b**, XVIII]) relatif à l'enrichissement des bibliothèques et à la publication de recueils périodiques pour diffuser les travaux des savants. Ce passage se rapporte en priorité à la section d'histoire puisqu'il est inséré au cœur du chapitre consacré aux sciences historiques et philologiques. Néanmoins l'article 9 du décret de création de l'Ecole Pratique mettait en avant la possibilité d'obtenir "*la publication, avec le concours ou aux frais de l'État, des travaux effectués par les élèves*" de l'école ([**Duruy 1868a**]). C'est Bellaguet, par ailleurs secrétaire attaché à la section de Mathématiques, qui a été chargé par le Ministre d'étudier la mise en application de ces moyens d'information et donc la gestion des publications de l'Ecole Pratique. Cette tâche qui lui est confiée explique d'ailleurs l'absence apparente de Bellaguet dans

70. Duruy anticipe la création d'une cinquième section à l'EPHE.

les échanges relatifs à la mise en marche de la section de mathématiques puisque Duruy échange systématiquement avec Du Mesnil - qui n'en est pourtant pas le secrétaire - plutôt qu'avec Bellaguet.

Il faut attendre le Jeudi 16 Juin 1869 pour que les propositions de Bellaguet concernant les éventuelles publications trouvent un accord auprès du Ministre Duruy. Pour commencer, Bellaguet obtient que les règles de publication soient les mêmes pour toutes les sections, et ce en dépit du fait que les "*moyens d'information*" aient été pensés par le Ministre avant tout pour seoir à la section d'histoire. Cependant, entre les quatre sections de l'Ecole la différence de fréquence de ces publications et de leur volume serait trop importante pour qu'une publication unique, à l'image des "*Archives*" entrevues par Victor Duruy, puisse être envisagée. Ainsi par exemple en ce mois de Juin 1869, alors que l'EPHE n'a connu qu'un seul semestre de cours, la section d'histoire est déjà prête à publier un premier fascicule. Au contraire, la section de sciences physiques ne possède encore aucune matière à publication, et celle de mathématiques n'a même pas commencé à fonctionner. Le Ministre doit donc renoncer à ce qu'il avait souhaité dans un premier temps, une publication unique divisée entre les sections de l'Ecole. Pour maintenir l'unité des publications émanant de l'EPHE, Duruy instaure donc non pas un périodique mais une collection : c'est la naissance de la "*Bibliothèque de l'Ecole Pratique des Hautes Etudes*".

L'arrêté de création de cette "*Bibliothèque*" ne se trouve ni dans le "*Journal Général de l'Instruction Publique*", ni dans la "*Revue de l'Instruction Publique*", ces deux organes étant pourtant les plus utilisés pour la diffusion des actes officiels du Ministère[71]. La description de l'arrêté de Duruy peut néanmoins se retrouver dans [**Frédéricq 1883**] :

> Un arrêté ministériel du 16 Juin 1869 a créé, sous le nom de *Bibliothèque de l'Ecole pratique des hautes études*, un recueil destiné à recevoir les travaux collectifs des conférences et les travaux personnels des divers membres de l'Ecole, élèves ou maîtres.
>
> [**Frédéricq 1883**, 31]

Seuls les travaux émanant des maîtres et des élèves de l'EPHE sont donc destinés à être publiés dans la collection de la *Bibliothèque de l'Ecole des Hautes Etudes*[72], conformément à l'article 9 du décret de création de l'Ecole. C'est en particulier ce dont témoignera la modification ultérieure du règlement intérieur de la quatrième section :

> [Art.] 10. Dans les collections de la *Bibliothèque de l'Ecole des Hautes Etudes* peuvent être admis :
> 1) des travaux des directeurs d'étude ;
> 2) des thèses d'élèves diplômés ;
> 3) sur l'initiative du directeur d'études compétent, d'autres travaux d'élèves diplômés ou non diplômés.
> L'admission dans la *Bibliothèque* est prononcée par le Conseil.

71. Il faudrait ajouter à ces deux journaux le "*Journal Officiel de l'Empire français*", mais les archives numérisées de celui-ci sont introuvables pour le premier semestre de 1869.

72. L'adjectif "pratique" a rapidement été omis tant dans la dénomination de l'Ecole que dans celle de sa Bibliothèque. En 1975 alors que la section de sciences économiques et sociales (6ème section instaurée en 1947) devient autonome, elle choisit de nommer son institution l'Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales (EHESS), rejetant ainsi l'adjectif "pratique" de son établissement d'origine.

[**Section Hist. EPHE 1963**, 13]

Chaque section se voit ainsi octroyer la liberté de ses publications, Duruy s'engageant au nom de son Ministère à ce que ce-dernier assiste financièrement chaque section par des souscriptions qui seront décidées au cas-par-cas en fonction des contrats avec les éditeurs.

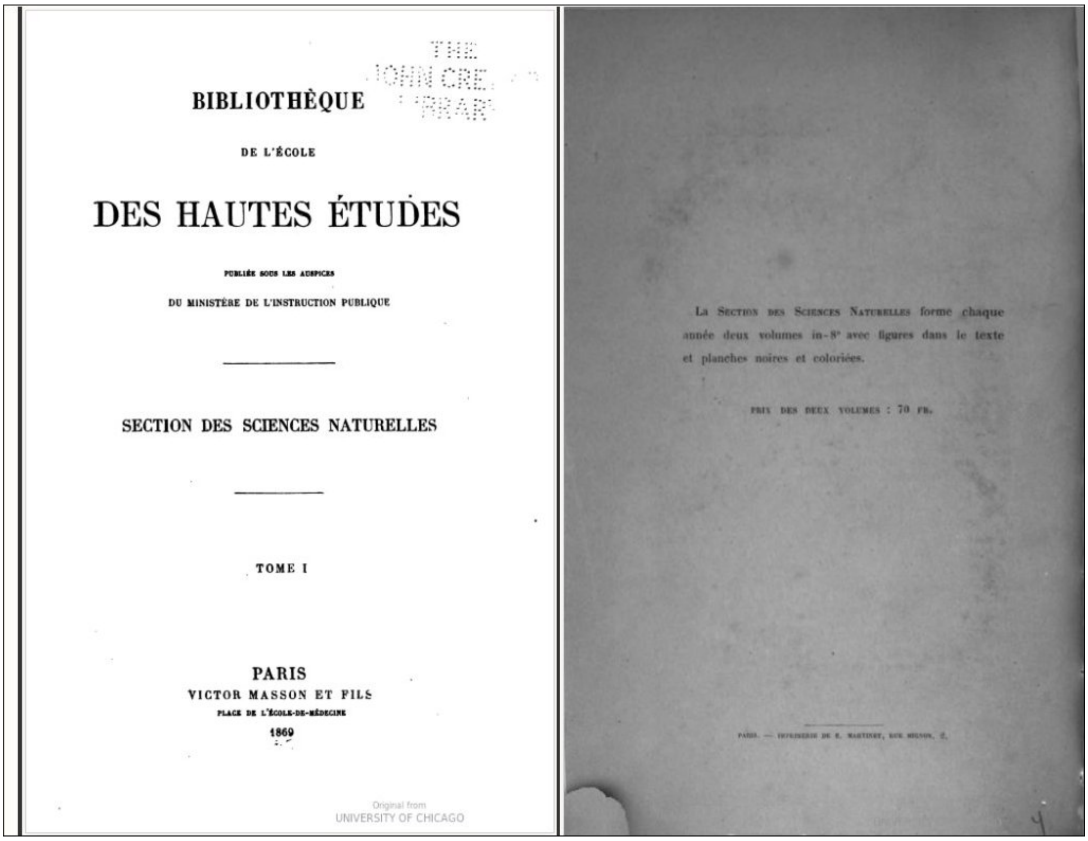
Très rapidement, la section des sciences historiques conclut un accord avec la librairie Franck de Frédéric Vieweg. Celui-ci publiera les fascicules de la quatrième section pour la collection de la Bibliothèque de l'EPHE et le Ministère souscrit à 200 exemplaires de chaque fascicule, le prix pouvant varier pour chacun d'entre eux. Le premier fascicule de cette section paraît durant l'été 1869, comme en atteste la mention à son égard dans la Bibliothèque de l'Ecole des Chartes [**Chartes 1869**, 707]. Un second fascicule paraîtra en Novembre 1869 [73], suivi de trois autres durant l'année 1870 [74]. Dès 1875, [**Pannier 1875**] rendra compte d'une vingtaine de fascicules déjà parus, et le centième ([**Section Hist. EPHE 1893**]) paraîtra aussi tôt que 1893.

Il en va de même pour la section de sciences naturelles. Celle-ci acte un accord avec les libraires Victor Masson & Fils pour la parution de deux tomes annuels dans la Bibliothèque de l'Ecole des Hautes Etudes. Le Ministère souscrit à 125 exemplaires de chaque tome au prix de 20 francs, comme en témoignent les deux factures de 2,500 francs relatives aux deux premiers tome parus en Décembre 1869 pour le premier, et au début de l'année 1870 pour le second [75].

73. Ces deux premiers fascicules publiés par la section d'histoire sont mentionnés par le (nouveau) Ministre de l'Instruction Publique, Olivier Bourbeau, dans l'"*Exposé de la situation de l'Empire*" de Novembre 1869, voir [**Empire 1869-11**, 178].

74. On peut retrouver les factures des souscriptions du Ministère pour ces fascicules, d'un montant de 1,400 f pour 1869 et de 1,625 f pour 1870. Ces factures sont disponibles aux archives [**F/17/4023**].

75. On peut retrouver les factures des souscriptions du Ministère datées du 11 Janvier 1870 pour le tome I et du 5 Avril 1870 pour le tome II. Ces factures sont disponibles aux archives [**F/17/4023**]. La parution des ces deux premiers tomes de la section de sciences naturelles est également évoquée dans l'"*Exposé*" de Bourbeau [**Empire 1869-11**, 178].


BIBLIOTHÈQUE

DE L'ÉCOLE

DES HAUTES ÉTUDES

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

SECTION DES SCIENCES NATURELLES

TOME I

PARIS

VICTOR MASSON ET FILS

PLACE DE L'ÉCOLE-DE-MÉDECINE

1869

La Section des Sciences Naturelles forme chaque année deux volumes in-8° avec figures dans le texte et planches noires et coloriées.

PRIX DES DEUX VOLUMES : 70 FR.

PARIS. — IMPRIMERIE DE E. MARTINET, RUE MIGNON, 2.

FIGURE 9. Première page du Tome 1 et dos de couverture du Tome 2 des publications de la section de Sciences Naturelles de l'EPHE

En revanche, et contrairement à ce qui est affirmé dans l'"*Exposé de la situation de l'Empire*" par le Ministre Bourbeau en Novembre 1869 ([**Empire 1869-11**, 178]), la section de physique et chimie décidera, en dépit des facilités offertes par Bellaguet et Duruy dans le cadre de l'EPHE, de ne pas instituer un nouvel organe pour ses publications. Les travaux des maîtres et des élèves de la section destinés à être publiés seront insérés dans les différents recueils préexistants. Ainsi par exemple en 1872, une trentaine de notes ou de mémoires émanant de cette section sont insérés soit dans les "*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*", soit dans le "*Bulletin de la Société chimique de Paris*", soit encore dans les "*Annales de chimie et de physique*"[76]. L'ensemble des publications scientifiques de physique et de chimie à Paris étant déjà suffisamment riche et ouvert à de nouvelles sources de contributions, il est probable que la création d'un nouvel organe n'ait pas été jugée nécessaire par la section de Wurtz, Balard, Berthelot et Jamin.

Quant à la section de mathématiques, l'arrêté rédigé par Duruy ne permet pas à son Directeur Michel Chasles de laisser libre cours à son projet de Bulletin. En effet, la collection de la Bibliothèque de l'Ecole des Hautes Etudes ne doit comprendre que les travaux des maîtres et des élèves des sections de l'EPHE. Or le Bulletin envisagé par Chasles n'est

76. On peut consulter la liste de ces publications dans les "*Rapports sur l'Ecole pratique des hautes études*" de 1872-1873.

voué à être tenu ni par les maîtres de la section, dont la volonté et l'emploi du temps ne le permettent pas, ni par les élèves dont les qualités mathématiques et linguistiques ne s'avèreraient certainement pas suffisantes. Le projet reste donc (provisoirement) sans suite. Il est ainsi bien connu que Victor Duruy a fondé l'Ecole Pratique des Hautes Etudes, mais il est en revanche méconnu qu'il a fait obstacle à la création du *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques.*

Les efforts de Pasteur dix ans plus tôt, dans sa volonté de créer le recueil des *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale*, étaient restés vains auprès du ministère de Gustave Rouland. Il avait fallu attendre le remplacement de ce-dernier à l'Instruction Publique par Victor Duruy pour que son projet de publication puisse être réalisé. Durant la première année d'existence de l'Ecole Pratique, Chasles a donc connu la même infortune que Pasteur dans un premier temps... Mais l'Histoire n'est-elle pas un perpétuel recommencement ?

2.4. Chasles persévère et la politique s'en mêle : la décision de création du Bulletin (Juil. 1869 - Nov. 1869).

S'il est vrai qu'au début de l'été 1869, Duruy n'a pas donné suite au projet de Bulletin formé par Chasles, ce-dernier ne désespère pas pour autant. Il est alors en train de rédiger - avec trois ans de retard - son "*Rapport sur les progrès de la géométrie*" ([**Chasles 1870**]) [77]. Profitant de cette tribune qui lui est offerte, il insère une note de bas de page qui, visant en particulier le Ministre Duruy qui est à l'origine même du rapport, rappelle sa volonté de voir se reformer un Bulletin pareil à celui de Férussac :

> Il faut citer aussi le Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques, publié par le baron de Férussac, de 1824 à 1831, destiné à faire connaître par des analyses développées ou de simples mentions, selon l'importance des matières, les productions renfermées dans les recueils académiques et les journaux scientifiques de tous les pays. On a regretté vivement que cette belle entreprise, secondée par des collaborateurs d'un grand mérite, parmi lesquels il suffit de citer Sturm et M. Cournot, pour la partie mathématique, n'ait pas été continuée.
>
> Maintenant surtout que les sciences mathématiques sont cultivées avec tant d'émulation et de succès à l'étranger, la publication d'un pareil Bulletin devient d'une nécessité absolue. Puisse l'expression de notre conviction et de nos vœux n'être pas vaine !
>
> [**Chasles 1870**, 55].

Les vœux du grand géomètre devaient en effet ne pas rester vains. En Mai 1869, le mandat de six ans du Corps législatif arrive à son terme, et de nouvelles élections sont donc organisées. Ces élections, qui six ans plus tôt avaient propulsé Duruy au Ministère de l'Instruction Publique, vont cette fois avoir l'effet inverse. L'opposition républicaine y

77. Ces rapports ont été mentionnés plus haut dans la section 2.1.

remporte une large victoire qui laisse Napoléon dans l'obligation de remanier entièrement son gouvernement [78].

Le 17 Juillet 1869, Victor Duruy quitte le Ministère de l'Instruction Publique, adressant ses derniers mots de Ministre à l'Empereur : "*Dieu accorde de longs jours à Votre Majesté*" [79]. Il y est remplacé par le Maire de Poitiers, Louis Olivier Bourbeau.

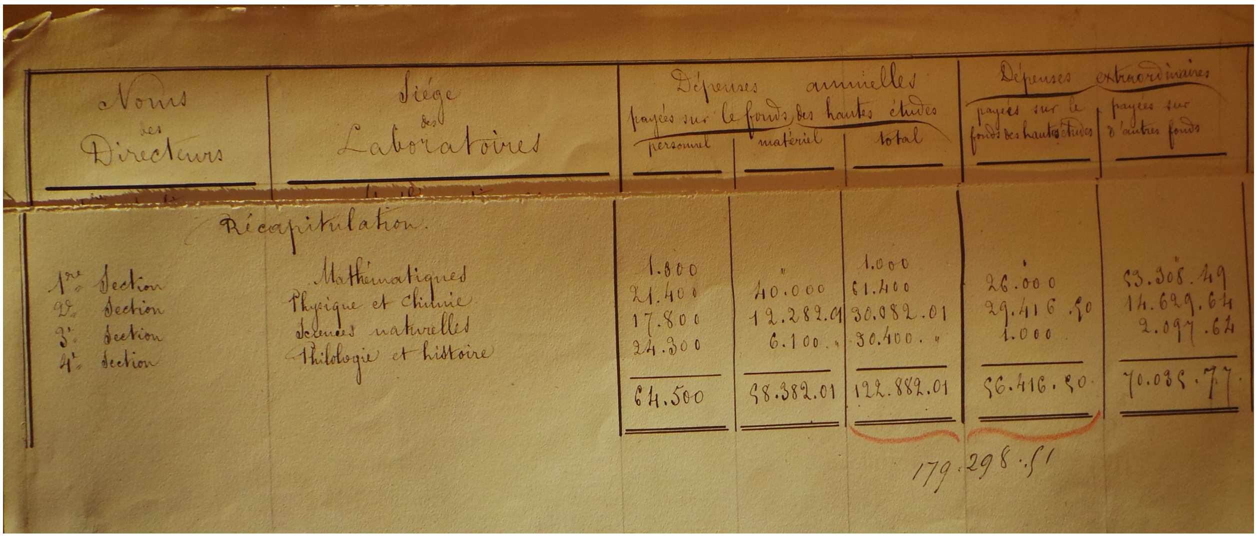
Après des études et un doctorat de droit, Bourbeau, issu d'une famille de notaires, a passé avec succès l'agrégation en 1841. Il est ensuite revenu à Poitiers pour y enseigner, et va devenir le doyen de la Faculté de droit de Poitiers en 1867. Élu député de la Vienne, il entre en 1869 au gouvernement avec une réputation de libéral. Cependant, cette entrée s'accompagne de doutes quant à ses aptitudes politiques et notamment en matière d'Instruction publique [80].

Le départ de Victor Duruy change la perspective pour la publication du Bulletin. Peu avant la rentrée de 1869, Chasles s'en remet au nouveau Ministre Bourbeau et lui soumet à nouveau l'idée de la publication d'un Bulletin dont la réalisation a été bloquée jusque-là par le fait que sa rédaction devait reposer sur des scientifiques étrangers à la section de l'Ecole Pratique des Hautes Etudes. Les chiffres du budget révisé de l'Ecole pour 1869 parlent en la faveur du géomètre : la section de mathématiques n'y prend qu'une maigre part de 1,000 francs pour l'unique répétiteur Didon. Ce-dernier n'a en outre, en l'absence de directeurs d'études et d'organisation de la section, pas même réellement assuré de répétitions. A titre de comparaison, le budget prévisionnel de l'année 1870 de l'Ecole s'élève à 250,000 francs.

78. Pour plus de détails sur ces élections, sur la "révolte parlementaire des Cent-Seize" qui s'ensuivra et sur le contexte du remaniement politique de 1869, on pourra lire [**Geslot 2009**, 270-274] ou [**Histoire-fr.com1869**].

79. Cette citation est reproduite dans [**Geslot 2009**, 273].

80. L'article de E. Frenet dans le "*Journal Général de l'Instruction Publique*" du Jeudi 22 Juillet 1869 en témoigne : "*M. Bourbeau est un universitaire de vieille race ; sa compétence et son autorité en matière de droit jouissent d'une notoriété légitime ; mais on ne peut se dissimuler qu'il y a bien loin de la scène où il doit désormais figurer, au théâtre restreint sur lequel son activité et ses capacités administratives ont eu à se mouvoir jusqu'ici*".



Noms des Directeurs	Siége des Laboratoires	Dépenses annuelles payées sur le fonds des hautes études			Dépenses extraordinaires	
		personnel	matériel	total	payées sur le fonds des hautes études	payées sur d'autres fonds
	Récapitulation.					
1re Section	Mathématiques	1.800	"	1.000	"	"
2e Section	Physique et Chimie	21.400	40.000	61.400	26.000	53.308.49
3e Section	Sciences naturelles	17.800	12.282.01	30.082.01	29.416.50	14.629.64
4e Section	Philologie et histoire	24.300	6.100."	30.400."	1.000	2.097.64
		64.500	58.382.01	122.882.01	56.416.50	70.035.77
				179.298.51		

FIGURE 10. Budget de l'année 1870 pour l'EPHE selon les 4 sections. Archives [**F/17/4023**].

C'est donc le Ministre Bourbeau qui accepte finalement le principe de la création d'un *Bulletin*, certes rédigé par des mathématiciens extérieurs à l'Ecole, mais qui serait tout de même publié dans la collection de la Bibliothèque de l'EPHE. A ce titre, il pourrait obtenir un soutien financier semblable aux publications des fascicules des autres sections.

Le Bulletin différera d'autant plus de ces autres publications de l'Ecole qu'il ne sera absolument pas voué, en dépit de ce qu'affirme [**Paul 1985**, 361], à publier les travaux effectués à l'Ecole Pratique des Hautes Etudes. Le Ministre charge la Commission de patronage de la section de mathématiques d'en constituer la rédaction, puis de lui soumettre ensuite un projet d'accord avec l'éditeur choisi. Nous sommes à la rentrée de l'année scolaire 1869-1870, et grâce à l'entêtement de Chasles le "*Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*" va cesser d'être un projet pour finalement être réalisé. Dans son exposé de la situation de l'Empire de Novembre 1869, Bourbeau annonce officiellement la création prochaine de cette nouvelle publication :

> Un bulletin consacré aux mathématiques comprendra l'analyse succincte des travaux publiés en France et plus particulièrement à l'étranger.
>
> [**Empire 1869-11**, 177-178].

Le contrat final ne sera paraphé par le Ministre, nous le verrons un peu plus loin, que quelques semaines plus tard, lorsque selon son souhait l'éditeur aura été choisi. Onze ans plus tard, à la mort de Chasles (le 18 Décembre 1880), Gaston Darboux déplorera la perte de celui qui fut "*le créateur*" puis le "*protecteur*" d'un Bulletin qu'il était parvenu, seul, à (re)créer :

> [...] Nous n'avons plus notre protecteur, M. Chasles [...]
>
> [...] M. Chasles ayant été le créateur de notre Bulletin, il est impossible que nous ne parlions pas de sa mort [...]
>
> Lettres datées du 16 Février et du 9 Mars 1881 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

Un flou historique règne autour des circonstances de la création du "*Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*". Pour certains historiens, ce Bulletin aurait été créé à l'initiative du Ministère de l'Instruction Publique. Pour d'autres, c'est l'entité institutionnelle *Ecole Pratique des Hautes Etudes* qui aurait décidé de cette création. Enfin, il est très courant de lire que c'est Gaston Darboux qui a fondé "son" Bulletin des Sciences.

Nous avons vu ici que toutes ces affirmations doivent être reconsidérées. Par exemple, le Ministère de l'Instruction Publique a principalement représenté un obstacle à la création du périodique, jusqu'à l'arrivée du Ministre Bourbeau. Gaston Darboux n'a par ailleurs joué aucun rôle dans la genèse de ce recueil qui lui est pourtant si intimement relié. Et si l'Ecole Pratique a aidé la réalisation du projet de Bulletin, c'est avant tout par les dysfonctionnements de sa section de mathématiques naissante. Le soutien financier à cette institution et aux publications qui en émanent a donné à Chasles l'opportunité de donner vie à son projet. Car c'est bien le nom de Michel Chasles qui doit être associé à la création du "*Bulletin des Sciences*" : ce recueil est le fruit de sa volonté et de sa ténacité. Trop souvent oublié, ceci mérite d'être enfin mis en emphase. C'est par ailleurs toujours le fait de Chasles si Gaston Darboux en devient dès le lancement le rédacteur principal. Depuis 1868, Darboux était <u>le</u> mathématicien que Chasles demandait à placer à la tête de la rédaction du Bulletin.

3. Le lancement du Bulletin (Nov. 1869 - Juin 1872)

Après avoir décrit la genèse du *Bulletin des Sciences* en tant qu'entité administrative au cœur de l'Histoire des institutions, nous allons à présent détailler la phase de lancement du journal proprement dit. Dans un premier temps, nous évaluerons les objectifs que Michel Chasles, son créateur, et Gaston Darboux et Jules Hoüel, ses rédacteurs, fixent pour le Bulletin (section 3.1). Nous reviendrons ainsi, à travers eux, sur la problématique du déclin des mathématiques françaises à la fin des années 1860, déjà abondamment étudiée. Nous retrouverons ainsi les études d'Hélène Gispert [**Gispert 1989**] et [**Gispert 1996b**] sur lesquelles nous nous appuierons pour aborder cette thématique.

Après que la forme du journal est arrêtée fin Décembre 1869, les rédacteurs Darboux et Hoüel font face à toutes sortes de difficultés pour mettre en marche ce nouveau périodique. Les études historiques sur les circonstances de création et le lancement des journaux ont été stimulées par [**Dhombres 1994**], puis poursuivies par [**Goldstein Gray Ritter 1996**] et [**Gerini Verdier 2014**]. Nous nous aiderons ainsi des grilles de lecture qu'ils proposent. Mais nous nous appuierons surtout sur le travail de [**Gispert 1987**] qui, en publiant le contenu des échanges entre les rédacteurs Darboux et Hoüel, a proposé plusieurs pistes d'études en guise de préambule. Nous les reprendrons et les développerons, ce qui nous permettra d'évaluer la pertinence des éléments d'appréciation proposés par l'historienne. C'est par ailleurs en très grande partie sur les échanges épistolaires entre les rédacteurs du Bulletin que reposera notre analyse. C'est en adoptant tour à tour différents filtres, adaptés à notre propos, que notre travail utilisera le contenu de ces très riches correspondances dont il fournira de fait plusieurs voies d'interprétation, plusieurs itinéraires d'exploitation. Grâce à cette analyse, nous suivrons les multiples difficultés auxquelles se heurtent Darboux et Hoüel et les moyens qu'ils déploient pour parvenir à les outrepasser (section 3.2). Cette enquête nous entraînera dans la course contre la montre entreprise par les rédacteurs pour parvenir à rattraper le retard important pris par leur Bulletin après la Guerre, pour finalement réussir à se "*mettre au courant*" en Juin 1872.

3.1. Les débuts du Bulletin : un directeur, deux rédacteurs, quels objectifs ?

Durant le mois de Novembre de 1869, Chasles et la commission de la section toute entière mettent sur pied la création du Bulletin. Comme il l'avait écrit à Duruy dans son projet quelques mois auparavant, Chasles a décidé - depuis longtemps - d'en confier la rédaction au jeune Gaston Darboux, son ancien doctorant. Au-delà de ses aptitudes mathématiques, ce qui rassemble le maître et l'élève est avant tout le même sentiment de déclin des mathématiques françaises, et la même volonté d'y remédier rapidement.

Plusieurs études historiques ont déjà été consacrées à l'analyse de la faiblesse des mathématiques françaises autour des années 1860. [**Bottazzini 2001**] a mis en avant ce déclin en comparant les activités de Paris et de Berlin. Les nombreux travaux d'Hélène Gispert qui nous ont servi de référence [81] avaient permis d'envisager cette analyse via différents angles de vue : les écarts de production dans les grands journaux mathématiques européens, le reflet de cette production dans le premier tome du *Bulletin*, ou encore la structure du système universitaire pour les mathématiques. La synthèse de ces études était que "*les années 1860-1875, et plus particulièrement les années 1860, sont des années creuses, au plan des contenus, dans la production mathématique française*" ([**Gispert 1996b**, 399]). Ce qui ressort du travail de l'historienne par ailleurs est à mettre en relation avec les propos que tient Chasles dans la conclusion de son "*Rapport*" : d'un point de vue quantitatif, le déclin français n'est pas sensible. C'est d'un point de vue qualitatif que l'écart se fait avec l'Allemagne, l'Italie et l'Angleterre : plusieurs branches modernes sont développées à l'écart des français.

Les historiens des sciences, tâchant d'embrasser la production scientifique dans son ensemble sans s'arrêter spécialement sur les mathématiques, étaient passés à côté de ce constat. Ils donnaient en effet unanimement des mathématiques françaises de cette époque l'image "*d'une science épargnée par le déclin qui frappe alors plus ou moins toutes les autres*" ([**Gispert 1989**, 50]). Ceci résultait principalement de deux facteurs : soit l'accent était mis sur l'aspect quantitatif de la production (voir les références données par [**Gispert 1989**, 48]), soit ils faisaient des exceptions - Darboux, Jordan - la règle [82] ([**Fox Weisz 1980**, 25]).

Du fait de la richesse des études historiques sur ce sujet, nous ne nous attarderons pas à analyser objectivement la problématique du déclin des mathématiques françaises. Nous allons nous intéresser, en suivant le cours du lancement de la publication, à la manière dont

81. Voir [**Gispert 1984**], [**Gispert 1985**], [**Gispert 1989**] et [**Gispert 1996b**].

82. Hélène Gispert a joliment baptisé ceci : l'intérêt des historiens pour "*la production de pointe*" ([**Gispert 1989**, 51]).

les acteurs (Chasles, Darboux et Hoüel) perçoivent ce retard, y apposent un diagnostic et tentent d'en trouver un remède avec la création du *Bulletin*. C'est la correspondance fournie entre les (futurs) rédacteurs du périodique Gaston Darboux et Jules Hoüel qui nous servira de source principale. Cette correspondance - souvent drôle et toujours enrichissante - a fait l'objet d'une édition partielle dans [**Gispert 1983**] (fragments choisis), [**Gispert 1987**] [83] (Nov. 1869 - Fin 1871), et enfin [**Henry Nabonnand 2016**] (Déc. 1874 - Avr. 1875).

Une des premières choses que Darboux déplore, c'est le manque d'équipements scientifiques, et particulièrement le mauvais état des bibliothèques de Paris. Il écrit :

> Chose incroyable, ici, à Paris, il n'y a pas une seule bibliothèque où l'on puisse consulter tous les recueils importants. Quand je veux lire un journal, je suis obligé de m'y abonner. A la Bibliothèque Impériale, à l'Institut même, il est difficile de se procurer les recueils les plus connus, surtout les derniers volumes, ils sont toujours à la reliure, ou les bibliothécaires ne veulent pas se déranger. A l'Institut, en dehors des ouvrages envoyés, on n'achète presque rien je crois. Il m'arrive quelques fois d'aller y demander des recueils très connus comme le Cambridge and Mathematical, on ne l'a pas complet.
>
> Lettre non datée (Décembre 1869) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

> Ce qu'il y aurait à créer, ce serait une bibliothèque mathématique vraiment sérieuse à Paris. Il n'y a rien de semblable et quand je n'ai pas un livre, je ne sais où le trouver. La bibliothèque de l'Ecole Normale est tenue d'une manière pitoyable [...] à la Bibliothèque Nationale on n'a pas les Mathematische Annalen.
>
> Lettre non datée (1872) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, reproduite dans [**Decaillot-Laulagnet 1999**].

Dix ans plus tard, son constat n'aura pas changé lorsqu'il écrira : "*Il n'y a pas à Paris une bibliothèque scientifique convenablement organisée [...] je m'épuise à demander la création d'une grande bibliothèque scientifique*" [84].

Ensuite, Darboux condamne tout comme Chasles l'ostracisme des mathématiques françaises et leur retard contracté sur plusieurs points récents. Surtout, il souligne la mise à l'écart des travaux faits en Allemagne notamment en lien avec la méconnaissance de la langue. En ceci d'ailleurs, Chasles est un des premiers visés par la critique de Darboux, son "*Aperçu*" de 1837 et son "*Rapport*" de 1870 faisant largement l'impasse sur des mathématiques allemandes qu'il ne sait pas lire. Darboux quant à lui parle l'allemand, et apprendra vite (pour le Bulletin) à lire l'italien, suffisamment pour pouvoir comprendre les lettres et les mémoires mathématiques, mais pas assez profondément pour le parler couramment.

83. Hélène Gispert avait intitulé son travail contenant l'édition du début de la correspondance Darboux-Hoüel : "*La correspondance de G. Darboux avec J. Hoüel. Chronique d'un rédacteur*". Le titre donné à notre thèse, qui en reprend l'expression, rappelle combien [**Gispert 1987**] a constitué pour nous une source d'inspiration. Nous tenons à remercier l'historienne pour avoir bien voulu nous autoriser à en réutiliser les termes de l'intitulé. Les extraits des lettres écrites par Darboux à Hoüel sur cette période (1869-1871) que nous pourrons citer dans la suite y sont donc entièrement reproduits.

84. Lettre datée du 25 Mai 1880 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

> Du reste ceci bien entendu est tout à fait confidentiel, la plupart des membres de l'Académie ne s'occupent en aucune manière des travaux publiés à l'étranger. [...] Il n'y a pas à l'Institut un mathématicien sachant l'allemand.
>
> Lettre non datée (Décembre 1869) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

> Tous nos géomètres d'ailleurs, quoique fort distingués, semblent appartenir à un autre âge. Ce sont des savants éminents restés à la science d'il y a vingt ou trente ans qu'ils perfectionnent, développent avec beaucoup de succès, mais toutes les branches modernes sont pour eux très accessoires.
>
> Lettre datée du 5 Mars 1870 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

Darboux adopte par ailleurs généralement des positions internationalistes à l'approche du conflit franco-prussien de 1870. Insensible aux questions de nationalité lorsqu'il s'agit de la science, il conservera cette attitude après la guerre en dépit des difficultés traversées à titre personnel et globalement par la France [85]. Il se montre ainsi très critique vis-à-vis du système de l'enseignement supérieur français. Effectuant la comparaison avec les universités étrangères, au désavantage des françaises, Darboux se montre pessimiste quant à l'évolution de cette situation :

> Dans vingt ans, les Allemands auront, grâce à cet animal [Bismarck], la centralisation, l'Ecole Polytechnique et plus d'Universités ; voilà le vrai.
>
> Lettre non datée de Gaston Darboux à Jules Hoüel, reproduite dans [**Decaillot-Laulagnet 1999**].

> Je vous disais donc quand M. Chasles est venu que nous avons besoin de refaire notre enseignement supérieur. Je pense que vous êtes du même avis, les Allemands nous enfoncent par le nombre, là comme ailleurs. Je crois que si cela continue les Italiens nous dépasseront avant peu.
>
> Lettre non datée (Juillet 1871) Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

> Serret, Bertrand et autres auraient fait plus de travaux si, en ayant moins de chaires, ils eussent plus de leçons.
>
> Lettre non datée (1872) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

Enfin, Darboux se montre extrêmement critique à l'égard de ses propres maîtres quant à la manière dont ils remplissent leurs obligations d'enseignement ainsi que relativement au contenu de leurs leçons. Cela personnalise un peu ses remarques sur l'enseignement supérieur et en précise les attaques :

> Hermite, qui n'a pas le goût du professorat, expose ce qui lui plaît et ne se préoccupe pas d'obtenir un ensemble satisfaisant [pour le calcul différentiel]

85. Voir le récit par Darboux de sa traversée des deux sièges de Paris en 1870-71 à travers ses correspondances épistolaires dans l'annexe 8.

[...]

Serret a des préventions contre les coordonnées homogènes, il expose les déterminants comme vous l'avez vu dans son *Algèbre Supérieure*. C'est un élève distingué de Lagrange, mais il ignore bien des choses modernes. Mais je vous en prie, ne communiquez ce jugement à personne, il pourrait attirer sur moi la foudre et la tempête et je n'y tiens nullement. Quant à l'Ecole Polytechnique, on se rendra compte plus tard de la valeur des rengaines qui ont cours sur elle et de son influence sur le développement scientifique ... je ne vous dis que ça.

Lettre datée du 5 Mars 1870 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

Vous avez là quelque chose de curieux et qui vous montre bien ce que font certains membres de l'Institut. Quand j'ai fait cet article en janvier, je crois, Bonnet m'a prié d'en suspendre la publication, disant qu'il allait me donner dans huit jours un article sur le même sujet. Je l'attends encore. Et remarquez que Bonnet était examinateur de sortie à l'Ecole Polytechnique, ce qui ne lui imposait à ce moment aucun travail, maître de conférences à l'Ecole Normale où il n'allait pas, professeur à l'Ecole des Beaux Arts où il se faisait suppléer, suppléant [86] de M. Chasles à la Sorbonne où il a fait 26 leçons et où il a fini son cours en Février. Vous comprenez qu'avec toutes ces occupations, il n'avait pas le temps de me remettre son article ...

Lettre non datée (Août 1872) Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

Briot (et Bouquet par conséquent) ont des idées que je n'approuve pas toujours. Figurez-vous que les élèves [de l'Ecole Normale] ne font pas de calcul numérique ; et de plus j'ai demandé à Bertin [le Directeur] qu'on fixât un nombre d'épures à remettre pour chaque élève chaque année. Il m'a dit que Briot n'était pas partisan de cela. C'est Briot qui est le véritable directeur de l'Ecole.

Lettre non datée (Février 1873) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

Parmi les maîtres de Darboux, seul Bertrand semble donc s'en tirer à bon compte. L'attitude clémente et même la compassion du géomètre nîmois durant l'"*affaire Carton*"

86. La tendance des professeurs à se faire souvent suppléer était supportée par un régime financier plus qu'avantageux : à la Faculté des Sciences par exemple, un professeur titulaire d'une chaire gagnait 8,000 francs par an. S'il se faisait suppléer, il percevait tout de même 6,500 francs pour un travail inexistant. Le suppléant gagnait les 1,500 francs restant. Ces chiffres sont tirés directement des lettres de Darboux. Pour plus d'information sur les salaires des professeurs, on verra [**Weisz 1977**], lequel mentionne un salaire de 7,500 fr pour le Collège de France en 1865 (p.218).

de Décembre 1869 pour son maître de Physique mathématique montrera à nouveau l'estime particulière de Darboux pour Bertrand [87].

La volonté affichée de Chasles de placer Darboux à la tête de la rédaction du nouveau *Bulletin des Sciences* paraît donc justifiée et même logique. Comprenant l'allemand, jouissant d'une bonne réputation à l'étranger, le futur rédacteur partage le désir de Chasles de diffuser en France la connaissance des mathématiques faites à l'étranger, particulièrement en Allemagne et en Italie. Pour Darboux, le Bulletin est ainsi un instrument qui doit permettre de sortir les mathématiques françaises de l'état de stagnation qu'il juge être le leur depuis la fin des glorieuses années du règne de Cauchy. Il s'exclame :

> Aussi tâchons avec notre Bulletin de réveiller ce feu sacré et de faire comprendre aux Français qu'il y a un tas de choses dans le monde dont ils ne se doutent pas, et que si nous sommes toujours la Grrrande nation, on ne s'en aperçoit guère à l'étranger.
>
> Lettre non datée (Juillet 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

Enfin, et c'est un point loin d'être négligeable, Gaston Darboux présente l'avantage de résider à Paris. Il habite d'abord au 48 de la rue d'Assas (avec son frère et les sœurs Carbonnier, qui deviennent en fait par alliance les sœurs Darboux). Puis il(s) déménage(nt) à la fin du mois de Juillet 1871 au 29 de la rue Monge. L'année suivante, Louis et Clara-Maria Darboux quitteront définitivement Paris - pour Bourg-en-Bresse puis Nîmes -, laissant plus d'espace à Gaston, Célina, leur premier fils Jean-Gaston (né le 11 Septembre 1870), et bientôt leur deuxième et dernier enfant (Anaïs Berthe) Lucie (née le 25 Juillet 1873). Habiter dans la capitale permettra surtout à Darboux d'intervenir directement auprès du Ministère de l'Instruction Publique ou, nous le verrons, de l'éditeur Gauthier-Villars pour la bonne marche du recueil. Ce sera, durant les premières années, essentiel.

Mais Darboux ne pourrait assurer la rédaction du Bulletin seul. Le travail de rédaction, de traduction et de mise en page serait trop important pour un seul rédacteur. Chasles en était déjà conscient en 1868 dans sa lettre au Ministre lorsqu'il évoquait la tenue du recueil par "*deux jeunes géomètres bien au courant*". Heureusement, ce projet rencontre l'adhésion spontanée d'un second mathématicien qui se révélera être formidablement complémentaire de Darboux : Jules Hoüel.

87. A propos de l'affaire Carton (sur la possibilité de démontrer le *postulat d'Euclide*), voir [**Henry Nabonnand 2016**] ainsi que notre annexe 7 qui envisage cette affaire du point de vue de la presse.

FIGURE 11. Les deux rédacteurs du Bulletin des Sciences : Gaston Darboux (à gauche) et Jules Hoüel (à droite)

Hoüel est un mathématicien âgé de 46 ans qui réside alors (fin 1869) à Bordeaux. Né à Thaon, en Basse-Normandie, le 7 Avril 1823, il a effectué ses études au lycée de Caen puis au collège Rollin à Paris. C'est là qu'il prépare le concours d'entrée de l'Ecole Normale Supérieure qu'il réussit en 1843, soit la même année que Louis Pasteur et Charles Berger qui y seront donc ses camarades. Il n'obtient son agrégation de mathématiques qu'en 1847 (avec le 7ème rang) après avoir donné une année de cours au collège royal de Bourges. Il enseigne ensuite jusqu'en 1855 dans les lycées de Bordeaux, Pau et Alençon.

Après avoir obtenu son doctorat en Sorbonne le 18 Août 1855 en présentant une thèse de mécanique céleste et une seconde d'astronomie, Hoüel se place en congé : il souhaite quitter l'enseignement secondaire et entrer dans le supérieur. Il fera un court passage dans la classe de Mathématiques Spéciales du lycée de Caen en 1856, puis refusera d'occuper une chaire à Lille probablement offerte grâce à Pasteur. Finalement, en 1859 il accepte de se charger des cours de mathématiques pures après Victor-Amédée Le Besgue à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Il deviendra titulaire de cette chaire de 1862 à 1884, année de sa retraite, alors que plusieurs de ses amis parisiens (Bourget et Darboux notamment) auront vainement tenté de le faire rejoindre la capitale [88].

Collaborant à de nombreuses revues scientifiques étrangères, et ayant déjà traduit plusieurs travaux en français notamment pour les "*Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*" et pour les "*Annales Scientifiques de l'Ecole Normale*", Jules Hoüel fait en 1869 exception dans le paysage mathématique français en étant très au fait des recherches mathématiques des pays étrangers ([**Gispert 1987**, 72]). Son multilinguisme et l'étendue de son réseau de correspondants en font un potentiel rédacteur de choix : Hoüel parle couramment l'italien, le russe, l'allemand. Il entretient des correspondances avec de nombreux mathématiciens de ces divers pays, ainsi qu'avec plusieurs

88. Pour plus de détails sur la biographie de Jules Hoüel, on consultera [**Henry Nabonnand 2016**] (dont nous avons tiré de nombreux renseignements), ou encore [**Plantade 2012**].

mathématiciens belges notamment [89]. Son importante activité de traducteur [90] s'est surtout manifestée en 1866 avec la publication dans les "*Annales Scientifiques*" de trois travaux de Leopold Kronecker qu'il traduit de l'allemand. Trois ans plus tard, ce sont deux travaux d'Eugenio Beltrami dont Hoüel publie la traduction (toujours dans les "*Annales*" [91]). Il publie par ailleurs dans l'"*Archiv der Mathematik und Physik*" un ouvrage de Vladimir Imchenetsky, [**Imchenetsky 1864**], sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre qu'il traduit du russe. Enfin, dans les "*Mémoires*" de Bordeaux, il traduit les ouvrages de Bolyai et de Lobatchevsky relatifs à la géométrie non-euclidienne [92].

Hoüel apprend l'existence d'un projet de publication mené par Chasles grâce à son ami Justin Bourget qui réside alors à Paris depuis 1868 [93] et y dirige la publication des "*Nouvelles Annales*". Il se propose alors spontanément pour y prendre part. Partageant avec Chasles et Darboux le constat de déclin mathématique, le bordelais "*souhaite faire connaître à la France la profondeur de l'abîme d'ignorance dans lequel elle est en train de glisser*" [94]. Informé de l'intérêt de Hoüel par Darboux lui-même qui connaît bien Bourget, Chasles accepte bien volontiers (au nom de la Commission de patronage de la section de mathématiques de l'EPHE) d'associer Hoüel, excellente recrue, à la rédaction du Bulletin [95].

Néanmoins, à l'image de la différence de statut qui existait autrefois pour le Bulletin de Férussac entre le rédacteur principal et les collaborateurs [96], Darboux est nommé comme le

89. Plusieurs correspondances de Hoüel ont fait l'objet de publications : c'est le cas de [**Henry Nabonnand 2016**] (avec De Tilly, Darboux et Le Besgue), [**Giacardi 1992**] (Cremona), [**Calleri Giacardi 1995**] (Battaglini), [**Boi Giacardi Tazzioli 1998**] (Beltrami) et enfin [**Gispert 1987**] que nous avons déjà mentionné pour les débuts de la correspondance avec Gaston Darboux.

90. Dans ses lettres à Gösta Mittag-Leffler, Jules Hoüel raconte comment il s'est fait roulé plusieurs fois par Charles Hermite dont il a appris à se méfier. Il relate qu'Hermite lui promettait de faire publier les traductions qu'il lui demandait, mais qu'une fois l'ouvrage traduit par Hoüel, Hermite en conservait la traduction sans jamais entreprendre des démarches de publication ! Les lettres sont conservées à l'Institut Mittag-Leffler de Djursholm.

91. Il s'agit de [**Beltrami 1869a**] et [**Beltrami 1869b**].

92. Ces travaux originaux sont [**Bolyai J. 1832**] et [**Lobatchevsky 1840**]. Les traductions françaises de Hoüel paraissent respectivement dans [**Hoüel 1867**] et [**Hoüel 1866**].

93. Justin Bourget (1822-1887) habitait Clermont. Il arrive à Paris en 1868 pour y diriger le Collège Sainte-Barbe.

94. Lettre datée du 3 Mars 1867 de Hoüel à son cousin Berger, reproduite dans [**Henry Nabonnand 2016**, 429].

95. Chasles charge, à l'issue de la réunion de la Commission qui acte en Novembre 1869 la création du recueil, Darboux d'écrire à Hoüel pour s'assurer effectivement de la participation qu'il proposait. C'est la première lettre d'une correspondance qui en comptera environ 800. L'immense majorité des lettres envoyées par Darboux se trouve dans les Archives de l'Académie des Sciences ([**Archives épistolaires Darboux**]). Darboux y écrit à son nouveau collaborateur : "*J'ai vu ces jours derniers M. Bourget qui m'a dit que vous étiez fort partisan du projet de Bulletin formé par la Commission des Hautes Etudes, et que vous consentiez à devenir notre collaborateur. Aujourd'hui ce projet a abouti et nous allons commencer au mois de janvier. Je suis chargé par les membres de la commission de vous écrire à ce sujet. On a la plus grande confiance en vous et on désire vivement comme une condition essentielle de succès votre collaboration assidue à notre Bulletin*" ; Lettre non datée (Novembre 1869) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, ouverture de correspondance, [**Archives épistolaires Darboux**].

96. On verra à ce sujet [**Bru Martin 2005**].

seul rédacteur officiel du Bulletin. Hoüel est désigné comme "*son principal collaborateur*", et il appellera d'ailleurs dans ses lettres Darboux son "*rédacteur en chef*" [97].

Les objectifs du Bulletin sont clairs depuis longtemps pour Chasles : tenir au courant les lecteurs des progrès mathématiques effectués en France et à l'étranger. Comme souhaité en son temps par le baron de Férussac, le rôle de la publication doit donc être d'accélérer la diffusion des connaissances scientifiques. Les moyens mis en avant pour y parvenir sont également bien définis. Férussac avait dans son "*Bulletin*", en 1828, développé ce sujet en reflétant exactement la pensée de Chasles 41 ans plus tard qui ne souhaite autre chose que la renaissance de ce même périodique :

> Le Bulletin a pour but de faire connaître non seulement les ouvrages publiés, mais aussi les mémoires, les articles contenus dans tous les recueils périodiques et dans toutes les collections académiques. [...] Les savants de tous les pays ont exprimé publiquement leur opinion à cet égard ; ils ont témoigné leur gratitude pour les services que le Bulletin rend à la science ; et, quoiqu'il ne soit pas complet (chose impossible, si on prend ce mot dans toute sa rigueur), les hommes qui sont le plus au courant de la multiplicité et de l'importance des travaux de l'esprit humain n'avaient pas même l'idée de la dixième partie de ceux qu'il leur a signalés.
>
> Bulletin de Férussac, Section des Sciences Mathématiques et Astronomiques, Tome 10, 1828, Correspondance pp.1-4 [98].

Cependant, pour Darboux et Hoüel, il est clair qu'il est bien plus urgent de diffuser en France les mathématiques étrangères que de vouloir diffuser à l'étranger les mathématiques françaises. Certes, Darboux publiera dans l'avertissement du premier numéro du Bulletin :

> [N]ous rendrons compte régulièrement des travaux de toute nature publiés soit en France, soit à l'étranger ; nous ferons tous nos efforts pour tenir nos lecteurs au courant des progrès accomplis soit dans l'enseignement, soit dans la marche des sciences mathématiques.
>
> Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, Tome 1, 1870, Avertissement pp.VII-VIII.

Mais quelques années plus tard, il écrira à son collaborateur Hoüel :

> Quel est notre rôle ? C'est de faire connaître aux français ce qui se fait à l'étranger.
>
> Lettre datée du 6 Mai 1873 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]
>
> En définitive notre publication a été fondée pour mettre les français, nos compatriotes, au courant des progrès de la science à l'étranger.
>
> Lettre non datée (1881) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

---

97. Voir par exemple la lettre de Hoüel à De Tilly du 24 Septembre 1871, [**Henry Nabonnand 2016**, 174].
98. Cette communication peut se consulter en ligne : http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=njp.32101071982340;view=1up;seq=393.

Les objectifs généraux du nouveau Bulletin sont bien définis et coïncident pour son créateur Chasles et pour ses rédacteurs Darboux et Hoüel, bien que ces-derniers mettent plus volontiers l'accent sur le retard français à rattraper. Mais dans la mise en œuvre des moyens à déployer pour y parvenir, plusieurs éléments vont opposer le créateur et les rédacteurs. Chasles veut calquer exactement le nouveau Bulletin sur celui de Férussac, alors que ni Darboux ni Hoüel n'y sont véritablement attachés. L'importance des recensions (ou comptes-rendus) fait l'unanimité, mais pour les deux derniers l'entreprise de rattrapage du retard français doit aussi passer par quelque chose d'essentiel : la publication de traductions en français de certains mémoires importants, dont ils jugeront que leurs compatriotes ne peuvent faire l'économie. En ce sens, Hoüel a déjà contribué à cet élan par ses contributions indépendantes aux "*Annales Scientifiques*" de Pasteur. Les deux extraits précédents sont par ailleurs toujours un prélude au rappel par Darboux de l'importance des traductions d'ouvrage :

> Quel est notre rôle ? C'est de faire connaître aux français ce qui se fait à l'étranger. Eh bien les traductions sont tout aussi utiles pour cela que les analyses.
>
> Lettre datée du 6 Mai 1873 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

> En définitive notre publication a été fondée pour mettre les français, nos compatriotes, au courant des progrès de la science à l'étranger. Et nous avons toujours compris dans notre plan la publication de mémoires importants publiés en Allemagne, en Italie ou en Angleterre.
>
> Lettre non datée (1881) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Dans le but de favoriser les traductions de mémoires dans le Bulletin, Darboux souhaite que sa publication soit bimensuelle : outre le fait que cela laisse plus de temps aux rédacteurs pour composer les comptes-rendus, plus d'espace pourrait y être aménagé pour les traductions. Mais à la fin de l'année 1869, c'est bel et bien Chasles qui dirige (encore) la création du nouveau recueil. Il impose ainsi aux rédacteurs de conserver la forme du Bulletin de Férussac :

> Nous avons eu dernièrement une séance à la Commission. M. Chasles tient avant tout à ce que le Bulletin paraisse tous les mois. J'avoue que j'aurais préféré une publication bimensuelle. [...]
>
> Pour les mémoires étendus, la Commission a décidé qu'on n'en imprimerait pas à cause du petit nombre de feuilles que nous avons à notre disposition. [...] Malheureusement M. Chasles tient beaucoup à ses idées. Pendant les deux ou trois premiers mois il m'accablera de conseils, mais ensuite il nous laissera bien tranquille.
>
> Lettre non datée (Janvier 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

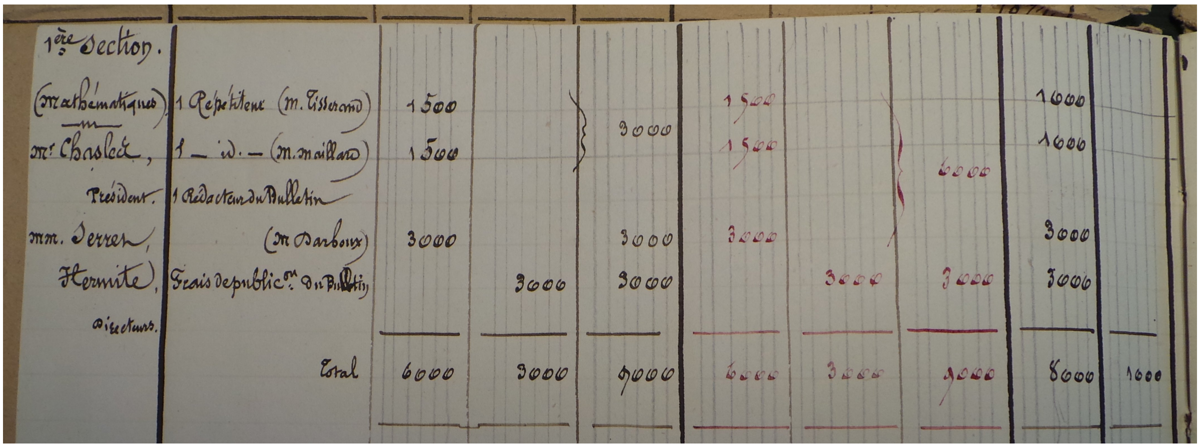
Accepté (sur le principe) par le Ministre Bourbeau à la rentrée de 1869, puis acté par la réunion de Novembre de la Commission (de patronage) de mathématiques, le triptyque chronologique de la création du Bulletin n'est totalement achevé que le Lundi 20 Décembre

1869. Le Ministre avait demandé à Chasles de ne revenir vers lui que muni d'une proposition de contrat avec un éditeur. C'est vers Gauthier-Villars, successeur de Mallet-Bachelier en 1864, que le géomètre s'était alors tourné.

Le contrat signé à cette date entre le Ministère de l'Instruction Publique et l'éditeur (et imprimeur) Gauthier-Villars stipule que ce-dernier prendra en charge pour une durée de cinq ans l'impression du nouveau "*Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*" de la collection de la *Bibliothèque de l'Ecole (Pratique) des Hautes Etudes*. Cette publication sera mensuelle et comportera 32 pages par mois - soit 24 *feuilles* annuelles de rédaction [99]. Chaque numéro sera imprimé en 250 exemplaires, 100 étant destinés à la vente, le Ministère de l'Instruction Publique souscrivant contractuellement aux 150 autres : ce contrat est donc l'égal de ceux actés quelques mois plus tôt pour les publications des sections de sciences naturelles et d'histoire de l'Ecole Pratique.

Le prix de vente du périodique est de 15 francs, mais le Ministère s'engagera à acquérir le Bulletin à 20 francs : la souscription annuelle du Ministère s'élèvera donc à 3,000 francs [100]. Ce qui n'est pas convenu dans le contrat mais discuté en interne au Ministère, c'est qu'aux 3,000 francs de "*frais de publication*" du Bulletin, versés annuellement à l'éditeur Gauthier-Villars, Gaston Darboux percevra en tant que rédacteur une "*indemnité personnelle pour direction de publication*" de 3,000 francs annuels, soit presque le salaire moyen d'un professeur de lycée parisien. En revanche, rien n'est ajouté pour le collaborateur Jules Hoüel. De fait Hoüel, malgré une collaboration plus qu'active au Bulletin, n'en recevra aucun traitement durant de longues années. Non pris en compte dans les accords de 1869 puis dans ceux de 1873 [101], c'est Hoüel lui-même qui refusera ensuite plusieurs fois les propositions de Darboux pour lui obtenir une compensation financière. Nous verrons plus loin en [Chap.6,1.1] que ce ne sera qu'en 1879 que Hoüel percevra pour la première fois une rémunération pour compenser les dépenses effectuées dans le cadre de son rôle dans la rédaction du Bulletin.

99. Une "*feuille*" correspond à un peu plus de 10 pages mensuelles. Voir plus loin le tableau 2 à ce sujet.
100. La facture de 3,000 francs de la première année, datée du 15 Juillet 1870, se trouve conservée aux archives [**F/17/4023**].
101. On verra ultérieurement dans [Chap.6,1.1] le détail des 3 premiers contrats signés en 1869, 1873 et 1877 relatifs au Bulletin signés entre le Ministère de l'Instruction Publique et Gauthier-Villars.



1ère Section. (Mathématiques)	1 Répétiteur (M. Tisserand)	1500		3000	1500		6000	1600	
Mr Chasles,	1 — id. — (M. Maillard)	1500			1500			1600	
Président. MM. Serret,	1 Rédacteur du Bulletin (M. Darboux)	3000		3000	3000			3000	
Hermite, Directeurs.	Frais de publicon du Bulletin		3000	3000		3000	3000	3000	
	Total	6000	3000	9000	6000	3000	9000	8000	1000

FIGURE 12. Le budget de 9,000 francs de la section Mathématiques de l'EPHE pour l'année 1872 (il n'y a pas de budget 1871 en raison de la guerre franco-prussienne) se partage en trois parties égales entre les deux répétiteurs (Tisserand et Maillard), l'indemnité de rédaction accordée à Darboux et les frais de publication versés à Gauthier-Villars.

Le Dimanche 26 Décembre 1869, Gaston Darboux écrit finalement à celui qui devient officiellement son collaborateur :

> Monsieur,
>
> Le Ministre a signé, nous pouvons désormais nous mettre à l'œuvre.
>
> Lettre non datée (26 Décembre 1869) de Gaston Darboux à Jules Houël. [**Archives épistolaires Darboux**]

3.2. Un démarrage laborieux : les difficultés des premiers numéros.

Gaston Darboux et Jules Houël commencent véritablement à travailler à la rédaction du Bulletin à la Noël de 1869. Le premier numéro devant être celui de Janvier 1870, les deux rédacteurs sont pris de court et vont contracter un retard de quelques mois pour les débuts de leur recueil.

Les difficultés auxquelles il se heurtent sont alors nombreuses, et peuvent même parfois nous paraître dérisoires. Tout d'abord, le Bulletin est, presque 50 ans après l'entreprise du baron de Férussac, la première publication qui entend recenser méthodiquement et mensuellement les travaux de mathématiques [102]. Bellavitis avait entretenu une dizaine d'années plus tôt à Venise avec sa "*Rivista di Giornali*" des espoirs qui se rapprochent de ceux de Chasles, Darboux et Houël. Mais la *Rivista*, non contente d'être organisée moins méthodiquement et de paraître plus sporadiquement, avait surtout vocation à constituer une sorte

102. On reviendra ultérieurement dans la section 4 sur les publications allemandes "*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*" et "*Zeitschrift für Mathematik und Physik*" (section 4.2).

de bibliographie universelle, un *Répertoire*[103]. C'est donc en partie sa nouveauté qui rend l'entreprise du Bulletin délicate. La constitution d'une équipe de rédaction, l'approvisionnement en périodiques, la structure des fascicules sont des problématiques auxquelles les rédacteurs doivent faire face sans avoir ni repères, ni modèles.

Mais par ailleurs, le jeune Darboux ne possède à ce moment aucune expérience dans le domaine de l'édition. Tous ses mémoires publiés l'ont été jusqu'alors dans des recueils périodiques. Son premier ouvrage publié de manière indépendante sera, un peu plus de deux ans plus tard, [**Darboux 1872c**]. Si Hoüel paraît plus expérimenté dans ce domaine, il ne pourra assister son *rédacteur en chef* que par des conseils à distance. C'est bien Darboux qui devra se rendre seul, parfois quotidiennement, au 55 Quai des Augustins pour y avoir affaire à Gauthier-Villars et à ses imprimeurs. Les petites batailles pour des sujets que l'on pourrait considérer comme minimes - telle la présence ou non de traits d'union pour les noms d'auteurs - vont parfois, en s'accumulant, donner l'impression de submerger Gaston Darboux.

En suivant la mise en place et le lancement des premiers numéros, nous allons structurer notre étude autour de quatre types de difficultés : les difficultés typographiques (souci de forme), les problèmes de source (souci de fond), le problème de la rédaction (souci de partage des tâches) et enfin l'impact du contexte historique. Nous retrouverons ainsi, en partie, certaines thématiques déjà abordées par les historiens des mathématiques pour l'analyse individuelle des journaux mathématiques que Jean Dhombres a appelés "*journaux professionnels libres*"[104] (notamment le *Journal de Liouville* de [**Verdier 2009a**] et [**Verdier 2014**], ou les *Annales de Gergonne* de [**Gerini 2014**]).

Les difficultés typographiques.

Le premier écueil rencontré par Darboux et Hoüel est celui de la mise en forme de leur Bulletin. La Commission de patronage, Chasles le premier, ne va pas intervenir dans cette problématique. Darboux et Hoüel envisagent tous deux rapidement de distinguer l'analyse des livres de l'analyse des recueils périodiques, ce sur quoi ils se mettent d'accord. Pour l'analyse des périodiques, Darboux pense d'abord séparer les journaux dont les comptes-rendus détaillés seront de réelles recensions - du point de vue du contenu - de ceux dont on ne donnera que les titres des articles et mémoires, sans plus de détails. C'est Hoüel qui proposera finalement d'unifier la section de revue des publications périodiques sans séparer les journaux selon la quantité de comptes-rendus[105].

103. On verra à ce sujet la contribution de G. Canepa, G. Fenaroli et I. Gambaro dans [**Gerini Verdier 2014**, Chap.5].

104. Dans son article fondateur [**Dhombres 1994**], l'historien oppose les *journaux professionnels libres*, tenus par un seul savant sans système de rapporteur, aux organes de publication des grandes sociétés savantes (voir p.120). Le Bulletin des Sciences n'entre pas dans cette dernière catégorie, mais il ne s'inscrit pas totalement non plus dans la première. Nous tenterons dans la suite de notre travail d'évaluer la *personnalisation* du Bulletin de Darboux, un des grands critères mis en avant par l'historien.

105. Darboux résume clairement l'idée émise par son collaborateur : "*D'après vos idées il ne faudrait pas distinguer les journaux dont on fera des comptes-rendus plus détaillés. Cette revue [des publications périodiques] comprendrait donc à la fois pour certains recueils presque seulement les titres des Mémoires, et pour d'autres des analyses plus détaillées suivant le temps, l'espace, et le goût personnel de la personne se livrant à l'analyse, ainsi que suivant l'importance du Mémoire*" [**Archives épistolaires Darboux**].

Les deux premières sections ainsi décidées, Darboux insiste pour instaurer une troisième section qu'il souhaite intituler "*Mélanges*" :

> [...] nous aurions une 3ème section pour les Mélanges où l'on mettrait la correspondance, les traductions de certains passages, les notes rétrospectives etc [...]
>
> Lettre non datée (Janvier 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

C'est dans la section Mélanges que les deux rédacteurs pourront se ménager la place nécessaire à la traduction de certains mémoires étrangers. C'est également cette section qui rend, selon Darboux, le Bulletin plus intéressant en le distinguant d'une simple liste bibliographique, et c'est pour cette raison que le nîmois va y accorder beaucoup d'importance [106]. S'il ne dit (ou plutôt n'écrit) rien à Hoüel en ce sens, Darboux s'inspire très probablement de la structure du Bulletin de Férussac qui comprenait lui-même une courte partie nommée "*Mélanges*" où étaient notamment résumées les séances de l'Académie des Sciences de Paris. On pouvait également y trouver diverses informations comme les passages des comètes, ou des notices relatives aux séances de certaines sociétés ou académies étrangères.

Après la mise au point de la structure en trois sections du Bulletin, Darboux s'interroge sur la possibilité d'ajouter des tables récapitulatives des mémoires. Il veut prendre exemple sur le journal allemand "*Zeitschrift für Mathematik und Physik*" [107] qui, tous les 6 mois, publie dans un fascicule spécial intitulé "*Literaturzeitung*" une telle liste de mémoires. C'est déjà sur ce "*Literaturzeitung*" que Darboux prend exemple lorsqu'il pense à la première section de comptes-rendus des livres puisqu'un tel chapitre, intitulé "*Recensionen*", est également présent dans ce fascicule du Zeitschrift. Mais il s'interroge sur l'utilité d'une telle liste :

> Pour les listes de Mémoires, analogues à celle du Zeitschrift, pensez-vous que cela ait de l'utilité ? Pensez-vous que l'on doive publier une liste tous les trois mois, sauf à faire un erratum général à la fin de l'année ? Enfin, un retard de 6 mois est-il suffisant pour permettre de faire une liste complète ?
>
> Lettre non datée (Janvier 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

L'idée d'une telle liste est finalement abandonnée, mais Darboux emprunte tout de même la disposition du Zeitschrift pour une dernière section : il se décide à adjoindre à la fin de chaque numéro, lorsque l'espace nécessaire est disponible, une liste des livres venant de paraître accompagnés de leur prix de vente. Cette liste, analogue de celle du Zeitschrift présentée dans la section "*Bibliographie*" du fascicule "*Literaturzeitung*", constituera de fait une petite quatrième section : le "*Bulletin Bibliographique*". A la fin du mois de Janvier 1870, la disposition globale du Bulletin, sa structure en quatre sections $(3+1$ optionnelle),

106. Nous reviendrons sur ce point dans la prochaine section 4 lors de l'étude du "*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*".

107. Créé en 1856 par les mathématiciens O. Schlömilch et B. Witzschel, le *Zeitschrift für Mathematik und Physik* paraît à Leipzig chez Teubner. On pourrait en fait parler d'une recréation pour ce journal puisqu'en 1826, un journal du même nom avait été lancé à Vienne ([**Verdier 2009b**]).

est arrêtée. La première section réservée à l'analyse des livres sera intitulée "*Revue Bibliographique*" tandis que la seconde se nommera "*Revue des publications périodiques*". Le volume de chacune des sections n'est pas fixé : il variera selon les mois.

Plus tard, durant l'été 1871, Darboux et Hoüel s'interrogeront sur la structure de la table des matières devant clôturer le premier tome du Bulletin. Les deux rédacteurs ne semblent alors pas trouver un terrain d'entente jusqu'à la réception des cahiers du premier tome du "*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*" dirigé notamment par le professeur de lycée allemand Carl Ohrtmann :

> Quant à la table des matières, vous voyez bien par l'exemple d'Ohrtmann que nous avons besoin d'une table par ordre de sujets.
>
> Lettre non datée (Septembre 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
> [**Archives épistolaires Darboux**]

C'est bien la disposition analytique classée par thème mathématique qui sera adoptée pour les tables des matières annuelles du Bulletin, tables que nous étudierons plus loin dans la section 4.2.

Les réels problèmes typographiques apparaissent en Février 1870 avec l'écriture des premières épreuves et le début des impressions chez Gauthier-Villars. Le choix de la typographie des notes de bas de page et des titres d'articles et de mémoires des périodiques est particulièrement difficile pour Darboux qui doit traiter directement avec l'imprimerie.

> Quant à l'exécution typographique, je suis vraiment fort embarrassé. Les italiques seraient abominables, reste le petit texte qui nous donnerait un surcroît de besogne, et dont M. Gauthier ne veut pas. [...] Mais tout le Zeitschrift est en italiques.
>
> Lettre non datée (Mars 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
> [**Archives épistolaires Darboux**]

Darboux et Hoüel insistent auprès de l'imprimerie sur la qualité typographique après la parution du premier numéro dont ils ne sont pas satisfaits. Le 8 Avril 1870, Darboux obtient enfin de Gauthier-Villars la disposition, fortement inspirée de celle du "*Zeitschrift*" d'Oskar Schlömilch, souhaitée par les rédacteurs :

> J'ai obtenu à l'imprimerie quelque chose qui pourra vous satisfaire. On mettra dans la Revue des Mémoires [ou revue des périodiques] tous les noms en petites capitales, tous les titres en italiques et les remarques en roman. Cela tiendra plus de place que le petit texte mais ce sera tout aussi clair. On va refaire tout ce qui a été mal fait en sorte que dès le second numéro, nous marcherons régulièrement.
>
> Lettre datée du 8 Avril 1870 de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
> [**Archives épistolaires Darboux**]

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK. — Herausgegeben unter der verantwortlichen Redaction von Dr O. SCHLÖMILCH, Dr E. KAHL, und Dr M. CANTOR. T. XIV; 1869 (*).

LOMMEL (E.). — *Exposition élémentaire des phénomènes de diffraction de Fraunhofer.* (47 p., 1 pl.)

THOMAE (J.). — *Note sur la théorie de la fonction*

$$P\begin{pmatrix}\alpha, \beta, \gamma \\ \alpha', \beta', \gamma'\end{pmatrix}, x\Big).$$

(14 p.)

Étude d'une intégrale déjà considérée par Riemann

$$x^\alpha(1-x)^\gamma \int s^{-\alpha'-\beta-\gamma'}(1-s)^{-\alpha'-\beta'-\gamma}(1-xs)^{-\alpha-\beta-\gamma}\,ds,$$

et prise entre les limites $0, 1, \frac{1}{x}, \infty$.

WIENER (CHR.). — *Calcul des altérations dans un réseau variable de triangles.* (3 p.)

BECKER (J.-C.). — *Sur les polyédres.* (2 art., 18 p.)
Étude des surfaces polyédriques au point de vue de leur connexion simple ou multiple.

SCHLÖMILCH (O.). — *Sur la valeur de* arc tg $(\xi + i\eta)$. (3 p.)

(*) *Journal de Mathématiques et de Physique*, publié sous la rédaction responsable de MM. O. SCHLÖMILCH, E. KAHL et M. CANTOR. Leipzig, chez B.-G. Teubner. Fondé en 1856 par O. SCHLÖMILCH et B. WITZSCHEL. Publié par livraisons bimensuelles, formant chaque année un volume grand in-8° (en langue allemande). Chaque livraison est accompagnée d'un Bulletin bibliographique (*Literaturzeitung*) donnant deux fois par an la liste *par ordre de matières* des Mémoires publiés dans les principaux recueils scientifiques.

5.

FIGURE 13. Typographie adoptée pour la revue des publications périodiques, extrait du numéro de Février 1870 du Bulletin des Sciences Mathématiques.

D'autres soucis typographiques viennent contrarier la mise en marche du Bulletin. A partir de Mai 1870 par exemple, les rédacteurs cessent de ne pas mettre de trait d'union entre les prénoms des auteurs allemands, comme il était pourtant d'usage alors. Cet épisode illustre par ailleurs la position délicate de Darboux qui, échangeant avec son collaborateur Hoüel et traitant directement avec l'imprimeur Gauthier-Villars, doit faire preuve de diplomatie : il est, parfois, entre le marteau Gauthiers et l'enclume Hoüel. Darboux considérant la question des tirets entre les prénoms comme secondaire, il explique à son collaborateur :

> Gauthier ne veut pas s'astreindre à distinguer les noms allemands par l'absence de tirets entre les prénoms. Dorénavant de par sa volonté, on en mettra partout, je n'ai pas jugé à propos de le contrarier sur un point qui me paraît si peu important.
>
> Lettre non datée (Avril 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Hoüel s'avère très mécontent de cela, il s'insurge et écrit à Darboux que ce serait un barbarisme de mettre des traits d'union entre les prénoms allemands. Ce-dernier lui rétorquera simplement : "*pour les tirets il faut nous montrer conciliants*". Et le bordelais, abandonnant la partie, laissera finalement faire.

Enfin, la difficulté typographique majeure qui tient en haleine les deux rédacteurs durant les premiers mois de rédaction du Bulletin réside dans le problème des caractères cyrilliques. Si Darboux et Hoüel se sont rapidement accordés pour traduire en français tous les titres de mémoires, Hoüel a néanmoins dès le mois de Février (1870) écrit - notamment en réaction à l'affaire Carton - une notice sur la vie et les travaux du mathématicien russe Nikolaï Lobatchefsky [108]. Cette notice comporte une liste détaillée des articles et ouvrages publiés par ce mathématicien dont les titres sont écrits, sans traduction, dans l'alphabet russe. Malheureusement, lorsque Darboux veut porter cet article pour l'impression début Mars, il apprend que son imprimeur ne possède pas les caractères cyrilliques :

> J'ai transmis les caractères russes à M. Gauthier. Je pense qu'il va se dépêcher de nous les procurer, mais je crains qu'ils ne mettent du temps à arriver.
>
> Lettre non datée (Mars 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
> [**Archives épistolaires Darboux**]

S'ensuivent pendant plusieurs semaines des relances de Darboux à l'imprimerie pour accélérer la recherche de ces caractères cyrilliques, qui ne vont pas contribuer à la bonne entente entre les rédacteurs et les imprimeurs [109] :

> [...] je garde précieusement [l'article sur Lobatchefsky] jusqu'à ce qu'on ait du russe. Car à l'imprimerie, ils seraient épouvantés et ne se procureraient pas les caractères nécessaires. M. Gauthier m'a affirmé ce soir encore qu'il ferait fondre des caractères mais la difficulté c'est de trouver du russe à Paris. Le chef de l'imprimerie me regarde toutes les fois que j'y vais avec un œil à la fois morne et terrible, il est épouvanté.
>
> Lettre non datée (Mars 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
> [**Archives épistolaires Darboux**]

Darboux ira même jusqu'à solliciter personnellement le chef de division Bellaguet au Ministère de l'Instruction Publique pour tenter de trouver des caractères russes à l'Imprimerie Impériale, mais cela sera vain. Les caractères cyrilliques arriveront finalement au mois de Juin 1870, mais il faudra encore attendre plus d'un an pour voir la publication de l'article de Hoüel sur les travaux du géomètre russe [110].

108. Nous empruntons ici l'orthographe du mathématicien russe utilisée par Darboux et Hoüel eux-mêmes. L'orthographe moderne choisit plutôt *Nikolai Lobachevsky*. A propos de l'affaire Carton, voir l'annexe 7.

109. Darboux se plaindra par ailleurs souvent de l'attitude de Gauthier-Villars à son égard durant les premières années du Bulletin. Il évoquera à ce sujet à plusieurs reprises le contexte de rivalité des grandes écoles Normale et Polytechnique : Jean-Albert Gauthier-Villars, qui tient la maison éponyme que lui a cédée fin 1863 son beau-père Mallet qui détenait le fonds Bachelier, est en effet un polytechnicien (promotion 1848) !

110. Cet article [**Hoüel 1870c**] paraît dans le numéro d'Octobre 1870 du Bulletin des Sciences, Tome 1. Mais suite à la guerre et à la Commune de Paris, ce numéro n'est publié qu'en Septembre 1871 (voir la section 3.2).

Les problèmes de sources.

La qualité de la revue bibliographique des périodiques dans le Bulletin demande à ses rédacteurs de disposer de toutes les revues mathématiques significatives. Aussi dès les toutes premières lettres qu'ils s'échangent, Darboux et Hoüel effectuent un partage des différents périodiques. Darboux propose d'effectuer les comptes-rendus des périodiques dont il dispose, soit par certaines bibliothèques, soit par les abonnements qu'il a personnellement effectués :

> Je me chargerai, si vous le voulez, du Journal de Liouville - Nouvelles Annales - Journal de Borchardt - Journal de Clebsch - de Brioschi - Comptes-Rendus - Annales de l'Ecole Normale - Société philomathique.
>
> Lettre non datée (Janvier 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Mais très vite il se rend compte que ce procédé est à la fois quantitativement insuffisant, et qualitativement intenable du fait de la quantité de travail exigée.

Tout d'abord, il faut pour Darboux et Hoüel obtenir l'envoi systématique à leur endroit d'un maximum de revues : ceci constitue le *problème de sources* (nous ne traiterons que plus loin le *problème (qualitatif) de rédaction*). Dans ce but, mais également pour faire connaître le Bulletin et pour disposer en outre gratuitement de certains périodiques, ils proposent aux rédacteurs des différents journaux d'échanger leur périodique contre la réception des numéros du Bulletin. Ce procédé, un témoin de l'internalisation grandissante de la circulation des mathématiques au XIXème siècle, deviendra très courant. Il sera notamment réutilisé par Gösta Mitta-Leffler lors du lancement de ses "*Acta Mathematica*" en 1882.

Pour pouvoir (ap)provisionner ce processus de troc éditorial, Darboux demande et obtient du Ministère de l'Instruction Publique qu'un certain nombre des 150 abonnements souscrits soient réservés aux rédacteurs pour contracter de tels échanges. Dans un premier temps, le Ministère semble sous-estimer l'ampleur des échanges, et il faudra que Chasles se *fâche* pour que 50 fascicules soient systématiquement mis de côté, et que le Ministère prenne même en charge les frais de transport liés aux échanges :

> Si vous pouvez négociez des échanges, ils seront accueillis avec transport, car grâce au Ministère, nous n'aurons rien à demander à M. Gauthier, ce qui vaut mieux.
>
> Lettre non datée (Mars 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

> Vous savez que j'ai écrit à quelques personnes pour obtenir des échanges [...] Mais je comptais sans le Ministère qui met dix exemplaires à notre disposition. Heureusement que la Commission s'est fâchée et en a demandé 50. Je suis convaincu que nous les aurons ; ainsi, vous pourrez aller de l'avant [...]
>
> Lettre non datée (Mars 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Le nombre d'exemplaires réservés aux échanges augmentera ensuite avec le temps.

La réussite de ce procédé d'échanges paraît grandement tributaire de l'absence voulue et affichée de rattachement national du Bulletin. Ceci contraste avec la structure nationalisée du paysage éditorial qui s'était développé durant la première moitié du siècle[111]. Au contraire, le Bulletin se veut par ses rédacteurs être un journal non pas français mais international. Darboux insiste très tôt sur cet aspect qui lui paraît fondamental, et, comme nous le verrons un peu plus loin, Hoüel l'imitera bientôt.

> J'ai reçu ces jours-ci une lettre très aimable de M. Cremona me demandant l'échange avec les Annali ce que je me suis empressé d'accepter. [...] j'ai insisté dans toutes mes lettres sur le caractère international du Bulletin. J'ai aussi écrit à Schlömilch pour échange [...] Si de votre côté vous voulez bien écrire à Grünert[112], nous aurons déjà pas mal de journaux à notre disposition.
>
> Lettre non datée (Avril 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
> [**Archives épistolaires Darboux**]

Notamment grâce à cette volonté transnationale affichée, le procédé d'échanges va fonctionner très rapidement. En effet, dès le mois de Mars, outre les journaux mentionnés par Darboux dans la lettre ci-dessus, Clebsch a déjà accepté l'échange demandé par Darboux de ses "*Mathematische Annalen*" avec le Bulletin. Il en va de même pour Guiseppe Battaglini et son "*Giornale di Matematiche*" à la demande de Hoüel :

> J'ai reçu une lettre très aimable de M. Clebsch qui a l'air de regarder notre entreprise comme difficile et qui nous souhaite le plus heureux succès [...]
>
> Lettre non datée (Mars 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
> [**Archives épistolaires Darboux**]

> J'ai reçu de la part de M. Darboux le premier fascicule de son Bulletin, et je lui ai fait envoyer en échange le Giornale di Matematiche. Cette publication entreprise en France va rendre un service aux savants, en appelant leur attention sur des œuvres et des mémoires qui ne peuvent que difficilement être à la portée de tous.
>
> Lettre datée du 25 Mars 1870 de Guiseppe Battaglini à Jules Hoüel,
> reproduite dans [**Calleri Giacardi 1995**, 88]

Une adresse enthousiaste de Gaston Darboux résume bien le succès rencontré dans la mise en place des échanges auprès des rédacteurs de périodiques mathématiques pour pallier au problème de sources : "*je n'ai reçu jusqu'ici que des réponses favorables*".

Pour favoriser la diffusion du Bulletin, Darboux avait par ailleurs utilisé la liste des abonnés au périodique "*Mathematische Annalen*" de Clebsch, et a fait parvenir à ces abonnés le premier numéro du Bulletin. Mais rapidement Darboux se méfie du contre-coup d'un envoi gratuit des numéros du Bulletin trop systématique :

> Mais croyez-moi, il est bon d'attendre que les dévouements se soient manifestés. Les personnes à qui on envoie le Bulletin finissent par s'y croire des droits à un abonnement et cela conduit ensuite à des froissements.

111. Voir à ce sujet [**Verdier 2009b**].
112. Johann August Grünert dirige à Greifswald la publication des "*Archiv der Mathematik und Physik*".

Lettre non datée (Mai 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
[**Archives épistolaires Darboux**]

La difficulté de l'approvisionnement des rédacteurs en périodiques, français et étrangers, sera presque définitivement levée à l'été 1871. Chasles aura alors convaincu le nouveau Ministre de l'Instruction Publique, Jules Simon, de la nécessité de mettre à la disposition de Darboux et Hoüel les périodiques scientifiques dont ils rendent compte dans leur Bulletin. Le Ministre Simon autorise alors l'achat systématique sur le compte du Ministère d'une liste de ces revues que vont dresser les rédacteurs eux-mêmes [113].

Pour finir, Darboux et Hoüel se heurtent à une problématique qui est connexe à celle des sources : la définition du cadre scientifique, c'est-à-dire la délimitation de la nature du contenu du journal. Ce problème est commun à tous les rédacteurs de journaux spécialisés, et a déjà été étudié pour plusieurs journaux [114]. [**Dhombres 1994**, 123] avait en effet souligné le rôle prépondérant des journaux dans la définition des contours intellectuels des disciplines. Nous allons ainsi ci-après retrouver les problèmes de la place de l'astronomie et de la délimitation des mathématiques dites appliquées dans ce qui est appelé *mathématiques* en 1870.

C'est au moment de la mise en place du tout premier numéro que se pose la question du cadre scientifique du Bulletin. C'est surtout Jules Hoüel qui manifeste des inquiétudes à ce sujet : doit-on parler d'astronomie, de mécanique, de physique mathématique ? A cet égard, c'est Darboux qui définit le cadre scientifique :

> Vous me demandez si nous insérerons l'astronomie ? A cela je vous réponds qu'un astronome, M. Loewy, s'occupera des questions astronomiques. [...]
>
> Vous me demandez aussi jusqu'où nous irons en mathématiques appliquées. La question me paraît difficile à décider, mais pour le moment, il me semble que nous ne devons exclure rien qui se rapporte à la physique mathématique et à la mécanique un tant soit peu rationnelle. La physique mathématique est appelée, je crois, à un grand avenir comme science exacte et il me semble qu'il sera bon d'en parler, surtout en France où on ne la cultive pas du tout.

Lettre non datée (Janvier 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
[**Archives épistolaires Darboux**]

Le parcours de Gaston Darboux témoigne de son intérêt pour ces deux domaines, la physique mathématique et la mécanique rationnelle, qu'il classe dans les mathématiques appliquées. Son travail de thèse, sa première année d'enseignement au Collège de France (1866-67), ainsi que son assiduité aux cours de Physique mathématique de Bertrand montrent l'importance de ce domaine pour le nîmois. D'autre part, un peu plus tard, à la rentrée de l'Automne 1872 que Darboux effectue à l'Ecole Normale Supérieure, il va en

113. "*Chasles a obtenu du Ministère qu'on achetât les publications dont nous avons besoin et il venait me prier de dresser une liste aussi complète que possible des publications dont nous avons besoin*", Lettre non datée (Juillet 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

114. Voir [**Gerini 2014**, 26] pour les *Annales de Gergonne*, [**Verdier 2014**, 48] pour le *Journal de Liouville*, [**Taton 1947**] pour le *Bulletin de Férussac* (première section).

parallèle suppléer Joseph Liouville à la Sorbonne pour les cours de Mécanique rationnelle. Il gardera six années la charge de cette suppléance [115].

Ces deux domaines d'intérêt pour Darboux doivent donc selon lui entrer dans le cadre des sujets dont traitera son Bulletin des Sciences. La prise en compte de la physique mathématique dans le Bulletin peut être rapprochée de la large place que ce sujet occupait déjà dans le Bulletin de Férussac. Cela avait amené René Taton à affirmer : "*la physique mathématique est la matière la plus abondamment représentée dans la partie mathématique du Bulletin de Férussac, tant par les analyses de mémoires que par les articles originaux dont un bon nombre n'ont pas été reproduits ailleurs*"([**Taton 1947**, 122]). Le cadre scientifique du Bulletin, prenant en compte les mathématiques dans un sens très large, ressemble donc de près à celui de la partie mathématique de l'ancien Bulletin de Férussac.

Nous verrons plus loin dans la section [Chap.6,2] dans quelle mesure se traduit la volonté de Darboux d'intégrer dans le Bulletin la physique mathématique et la mécanique. L'astronomie doit, pour le rédacteur, également trouver sa place dans le périodique, à tel point que le premier des collaborateurs que Darboux recrute - Maurice Loewy - est un astronome qui devra se dédier à ce domaine [116]. Si ceci paraît logique au vu du titre donné au recueil, cela ne correspond en revanche pas aux intérêts scientifiques propres de Darboux qui quant à lui ne s'est nullement occupé (et ne s'occupera jamais) d'astronomie. Mais cela témoigne encore du fait que l'astronomie n'est pas considérée, en 1870, comme une discipline indépendante mais comme une branche des mathématiques [117]. L'astronomie ne restera en fait, nous y reviendrons, que durant quinze années prise en compte dans le Bulletin de Darboux. Mais, pour reprendre la thématique de discussion de Jean Dhombres, on constate le flou qui règne encore à cette date autour de la définition des *sciences mathématiques.*

Les problèmes de rédaction.

Le travail de rédaction nécessaire à la tenue d'un périodique comme le Bulletin est colossal, et Darboux et Hoüel s'en rendent compte dès la préparation des premiers numéros. Il leur importe alors de s'entourer rapidement de bons collaborateurs pour les assister dans cette tâche. Il semble dans un premier temps qu'on puisse séparer en deux catégories les collaborations apportées au Bulletin : il y a d'une part les collaborateurs généraux, et d'autre part les collaborateurs spécifiquement rattachés à un périodique. Cette classification est de notre fait, et nous l'adoptons ci-dessous car elle nous semble pertinente pour décrire la manière dont Darboux et Hoüel font, au lancement du journal, face aux problèmes de rédaction. Néanmoins, Darboux lui-même mettra sur pied un autre système de

115. Voir [**Lützen 1990**, 248]. C'est Félix Tisserand qui reprendra la suppléance de Mécanique rationnelle après Darboux en 1878.
116. Voir plus loin en [Chap.6,1.3] une notice sur Loewy. Nous étudierons la place de l'astronomie dans le Bulletin à l'occasion de notre analyse du [Chap.6,2].
117. Nous avions souligné ceci dans la section 2.1 à la lumière de propos de Victor Duruy. Voir [**Saint-Martin 2007**].

catégories : nous y reviendrons plus loin en [Chap.6, 1.3] pour dresser - à moyen terme - le profil des collaborateurs du Bulletin.

Nous adoptons donc provisoirement notre propre subdivision des premiers collaborateurs du Bulletin. Ceux de la première catégorie, les collaborateurs que nous appelons *généraux*, sont les scientifiques prêts à assister Darboux et Hoüel dans la rédaction du Bulletin d'une manière globale. Ils peuvent être chargés d'écrire des articles pour la rubrique Mélanges, ou d'effectuer des comptes-rendus d'ouvrages ou de périodiques pour les revues bibliographiques.

Le premier collaborateur de ce type du Bulletin - outre Jules Hoüel - est l'astronome autrichien naturalisé français Maurice Loewy. Le second collaborateur est l'astronome d'origine allemande Rodolphe Radau, qui travaille à Paris tout comme Loewy [118]. Hoüel quant à lui s'attache la collaboration du jeune mathématicien italien Eugenio Beltrami, en vertu de quoi Darboux obtient qu'on envoie gratuitement le Bulletin à Beltrami [119]. Cependant il avertit Hoüel en soulignant qu'il importe que Beltrami n'ébruite pas en Italie qu'il reçoit le nouveau recueil français gratuitement.

La collaboration de Radau et de Loewy au Bulletin sera de courte durée, ces-derniers ne fournissant pas un travail suffisant aux yeux de Darboux. Selon lui Radau "*est volage*", et il est trop souvent introuvable à Paris qu'il quitte pour aller "*retrouver dans son château de Gascogne M. d'Abbadie*" [120]. Quant à Loewy, il "*procède avec une lenteur toute allemande*". En outre Hoüel déteste Loewy au point qu'il le considère comme sa bête noire [121]. Dès 1871, après la fin de la guerre et de la Commune de Paris, ces deux collaborateurs seront remplacés par quatre nouveaux scientifiques : les astronomes Félix Tisserand et Charles André, le jeune Jules Tannery et le professeur Louis-Félix Painvin [122]. Darboux se félicitera auprès de Hoüel de la qualité de ces nouveaux collaborateurs :

> M. André et M. Tisserand valent bien à eux deux M. Loewy. Vous pouvez être sûr qu'ils seront plus actifs.
>
> Lettre non datée (Août 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

118. Nous présenterons ultérieurement en [Chap.6, 1.3] de courtes notices biographiques qui comprendront notamment celles de Radaux et de Loewy.

119. L'échange épistolaire entre Hoüel et Beltrami, dans lequel on retrouve en particulier le sujet de la collaboration au Bulletin des Sciences Mathématiques, est reproduit dans [**Boi Giacardi Tazzioli 1998**]. Par ailleurs, dans une lettre qu'il adresse à Darboux datée du 8 Juillet 1870 et conservée à la Bibliothèque de l'Institut, Beltrami écrit : "*Je tâcherai de fournir quelques petits* "Beiträge" *à votre excellent Bulletin puisque vous êtes assez bon de m'en témoigner le désir*".

120. La demeure de d'Antoine d'Abbadie dont il s'agit est le *château-observatoire Abbadia* qui est situé à Hendaye.

121. Dans une lettre datée du 10 Mai 1872 adressée à Hoüel, Darboux écrit : "*Vous savez que votre bête noire Loewy se présente à l'Institut ?*" [**Archives épistolaires Darboux**]. Plus tard, en 1875, Hoüel refusera que l'on insère dans le Bulletin une analyse des travaux de Loewy : "*La production de Loewy me semble assez faible du point de vue littéraire, et je ne crois pas qu'il soit urgent de commencer par là la collaboration au Bulletin de notre ex-prétendu collaborateur*", lettre datée du 26 Mars 1875 de Hoüel à Darboux, [**Henry Nabonnand 2016**, 505].

122. Comme pour Loewy et Radau, nous donnerons plus loin en [Chap.6, 1.3] des notices biographiques de ces quatre nouveaux collaborateurs.

> Painvin m'ayant donné son bouquin, je vais l'analyser, et en faire un compte rendu élogieux. Il est sérieux, lui au moins, il travaille, et ce n'est pas un amateur.
>
> Lettre datée du 10 Mai 1872 de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Par opposition à ces collaborateurs généraux, les collaborateurs *attachés à un périodique* sont les scientifiques qui participent à la rédaction d'un recueil scientifique et qui ont accepté d'écrire régulièrement le compte-rendu de ce même recueil pour l'insérer dans le Bulletin. Pour s'alléger la charge de travail, Darboux et Hoüel en font systématiquement la demande auprès des rédacteurs de publications en envoyant les premiers numéros du Bulletin pour demander un échange : c'est là leur réponse au problème *qualitatif* de rédaction.

Le premier collaborateur de ce type est Alfred Clebsch, qui dès les premiers fascicules du Bulletin rend compte de sa revue, les "*Mathematische Annalen*". Il témoigne par ailleurs beaucoup de bienveillance à l'égard de la création du Bulletin et du travail de ses rédacteurs. Les comptes-rendus écrits par Clebsch demandent néanmoins un travail supplémentaire de traduction aux rédacteurs puisqu'ils sont écrits en allemand. Clebsch est imité quelques semaines plus tard par l'italien Luigi Cremona :

> M. Brioschi et moi, nous formons des voeux sincères pour le succès heureux de votre noble entreprise ; et nous chercherons à vous aider de notre concours, autant qu'il nous sera possible. Nous sommes disposés à vous envoyer les comptes-rendus sur les Mémoires insérés dans nos Annali.
>
> Lettre datée du 10 Mai 1870 de Luigi Cremona à Gaston Darboux. [**Archives épistolaires Cremona**]

Giuseppe Battaglini a également rapidement accepté de participer à la rédaction du Bulletin en écrivant lui-même les comptes-rendus des mémoires de son "*Giornale di Matematiche*" :

> Comme vous le désiriez, je vous envoie un résumé des articles contenus dans les numéros de Janvier, Février, Mars et Avril du Giornale di Matematiche ; [...] J'ai reçu jusqu'à présent trois numéros de votre important Bulletin, j'espère que les numéros du Giornale di Matematiche parviennent correctement à M. Darboux.
>
> Lettre datée du 5 Mai 1870 de Guiseppe Battaglini à Jules Hoüel, reproduite dans [**Calleri Giacardi 1995**, 89]

Hoüel se chargera de traduire en français les recensions fournies, en italien, par Battaglini. Naturellement le fonctionnement de la rédaction du Bulletin est soumise à divers aléas en ce qui concerne les collaborations spécifiquement rattachées aux périodiques. Par exemple en 1872 Darboux se plaindra de l'arrêt de l'envoi par Battaglini du Giornale suite à la guerre franco-prussienne [123]. Par ailleurs, suite à la mort de Clebsch en Novembre 1872, Darboux effectuera seul les comptes-rendus des "*Mathematische Annalen*" pendant plus de trois ans, avant que Félix Klein, son ami, n'accepte finalement de lui reprendre cette lourde tâche :

123. On verra à ce sujet la lettre du 9 Février 1872 de Darboux à Hoüel citée ultérieurement dans 3.2.

> J'ai reçu une lettre de Königsberger qui refuse de collaborer, et une de Klein qui fera les Mathematische Annalen [124]. En voilà un bon débarras !
>
> Lettre datée du 1er Février 1876 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Au-delà de la *classification* des collaborateurs du journal, le recrutement rapide opéré par Darboux et Hoüel est dans l'ensemble un réel succès. La diversité des travaux dont l'analyse doit être effectuée dans le Bulletin nécessite la collaboration de nombreux scientifiques étrangers. L'aspect international du Bulletin, affiché dès le départ par les rédacteurs, est donc nécessaire. Et une fois ce caractère international acquis aux yeux des scientifiques, il devient un atout incontestable : nulle priorité ne sera en effet donnée dans le Bulletin aux travaux des scientifiques français. Ceci reste vrai, et acquiert d'autant plus de valeur, au sortir de la douloureuse guerre franco-prussienne. Celle-ci n'entrave ni la volonté des rédacteurs de s'attirer la collaborations des scientifiques allemands, ni l'impartialité de leurs comptes-rendus. L'intérêt d'une publication comme le Bulletin doit selon eux abolir les questions de nationalité. C'est notamment grâce à cette position internationaliste que divers rédacteurs de journaux allemands ou italiens acceptent de collaborer.

Darboux et Hoüel mettent tous deux l'accent sur ce point crucial : nous l'avons vu pour le premier dans une lettre à Hoüel citée ci-dessus. On le constate encore pour le second lorsqu'il tente de s'attacher les services de l'italien Angelo Genocchi :

> Je ne sais si je vous ai envoyé un spécimen du "*Bulletin des Sciences mathématiques et physiques*" [sic], fondé l'année dernière au moment où le gouvernement allait perdre la tête et manquait de perdre la France. La publication en a été forcément interrompue pendant les deux sièges de Paris. Elle va reprendre maintenant avec une nouvelle activité. Vous pourrez voir, en parcourant le numéro spécimen que je vous adresse, quel est le but de ce recueil, rédigé en vue de la science *européenne*, et où la Rédaction ne fait aucune exception de nationalité dans les comptes rendus des travaux qui viennent à sa connaissance. Les rédacteurs désireraient que ce recueil fût plutôt un dépôt de renseignements, fournis par les divers savants, qu'un recueil d'articles originaux. D'autre part, le champ des mathématiques est si vaste qu'il excède bien souvent la compétence des collaborateurs ordinaires, en les condamnant au rôle de simples copistes. Ils font donc appel à tous les savants qui pensent que ce Bulletin, bien rédigé, pourrait rendre des services. Je prends donc la liberté, au nom de mes collaborateurs, de vous demander votre concours pour cette oeuvre scientifique.
>
> Lettre datée du 16 Juillet 1871 de Jules Hoüel à Angelo Genocchi, reproduite dans [**Fenoglio Giacardi 1991**, 207-209]

Le succès de cette ambition internationaliste est manifeste lors d'un épisode postérieur à la guerre de 1870, guerre dont nous évoquerons plus longuement l'importance un peu

124. Darboux avait, fin 1874, proposé à Adolph Mayer, un autre rédacteur des "*Mathematische Annalen*", d'effectuer pour le Bulletin les comptes-rendus de son périodique. Mayer avait refusé : "*J'ai demandé à Mayer de nous envoyer les Math. Annalen, il a refusé*", lettre datée du 15 Janvier 1875 de Darboux à Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

plus loin. En Juin 1872, l'astronome français Yvon Villarceau présente à l'Académie des Sciences une Note intitulée "*Sur un nouveau théorème de mécanique générale*" établissant une relation entre l'énergie cinétique (ou "*force vive*") d'un point mobile et la force à laquelle celui-ci est soumis. Le professeur de l'Université de Bonn, Rudolf Lipschitz, reconnaît à la lecture de cette note un théorème déjà énoncé sous diverses formes par Carl Jacobi ainsi que par lui-même dans certains de ses travaux. Pour faire reconnaître ces priorités, Lipschitz devrait s'adresser à l'Académie de Paris ; mais il craint que cette-dernière ne soit encline à favoriser Villarceau contre lui de par sa nationalité. Il préfère alors s'adresser à Darboux pour que cette priorité soit discutée et reconnue dans le Bulletin :

> Die Auseinandersetzung direct an die Academie zu schicken, hinderte mich ein auf Erfahrungen gegründetes Bedenken, wie die Akademie eine solche Sendung aufnehmen würde. Um so mehr weiss ich es zu stützen, dass ich in Ihnen, hochgeehrter Herr college, einen Mann kennengelernt habe, dem die Wissenschaft mehr gilt als die Person. [125]
>
> Lettre datée du 29 Septembre 1872 de Rudolf Lipschitz à Gaston Darboux. [**Archives épistolaires Lipschitz**]

FIGURE 14. Rudolf Lipschitz

Fidèle aux principes mis en avant par l'allemand, Darboux publiera ([**Lipschitz 1872**]) la traduction de la lettre de Lipschitz dans les Mélanges du Bulletin, relayant ainsi la réclamation du professeur de Bonn. Ce-faisant, il s'assurera de son soutien et continuera de s'attacher sa collaboration au Bulletin [126]. Il est vrai par ailleurs que Darboux ne tenait

125. "*Après réflexion et basée sur des expériences passées, je me suis retenu d'envoyer ces réclamations directement à l'Académie car je sais comment un tel envoi aurait été accueilli. Ce qui a en outre encore motivé ce choix, c'est que j'ai appris à connaître en vous, très estimé collègue, un homme pour qui la science a plus de valeur que la personne*" [**Archives épistolaires Lipschitz**].

126. Voir la partie [Chap.6,2] où la participation de Lipschitz au Mélanges du Bulletin est soulignée. Voir également [Chap.6,1.3] pour la liste des collaborateurs du Bulletin dans laquelle Lipschitz apparaît.

pas l'astronome Villarceau en grande estime, ainsi qu'en témoigne sa confidence à Hoüel : "*Quant à Villarceau, c'est une ... arrêtons-nous ici.*" [127]

Pour finir quant aux problèmes de rédaction rencontrés en 1870, nous devons souligner la fin rapide de la mainmise de Chasles et plus largement de la Commission de patronage sur la tenue du journal et les diverses questions s'y rapportant. A sa création fin 1869, le Bulletin est administrativement contrôlé par cette Commission de la section de Mathématiques de l'EPHE - laquelle Commission est désignée dans le Bulletin comme un "*Comité de rédaction*". Darboux et Hoüel sont ainsi confrontés a priori à la question du contrôle et de l'assentiment de la Commission. Et en effet, nous avons vu plus haut l'influence prépondérante de Chasles dans les premières décisions relatives à la forme du recueil.

Ainsi en Février 1870, lorsque Hoüel évoque la création du Bulletin à Battaglini, il n'est guère surprenant de constater qu'il ne se présente pas, avec Darboux, comme étant à la tête de la publication, mais qu'il préfère précautionneusement mentionner "*le Bulletin des Sciences Mathématiques dirigé par Chasles et Serret [deux membres de la Commission] publié à Paris*" [128].

Cependant si dans sa création officielle Chasles a été très influent (choix des rédacteurs, de la fréquence de publication, des objectifs de la rédaction), il va l'être sensiblement moins dès que la publication commence. C'est ce que Darboux avait pressenti dès les premières réunions de la Commission quand il écrivait à Houël : "*Pendant les deux ou trois premiers mois [Chasles] m'accablera de conseils, mais ensuite il nous laissera bien tranquille*". Plutôt que de vouloir interférer dans la rédaction du périodique, les membres de la Commission préfèrent au contraire s'effacer et laisser la pleine responsabilité du journal aux rédacteurs. C'est ce dont témoigne leur volonté de voir disparaître leurs noms des pages du Bulletin :

> La Commission aurait voulu qu'on ne mît pas "Comité de Rédaction" [129] pour n'avoir pas la responsabilité. Mais en attendant, elle va se réunir tous les mois pour causer du Bulletin et voir ce qu'il y a à faire. Heureusement que les commissions perdent vite de leur zèle, nous ferons comme pour les autres séances. On va dîner chez M. Chasles et au moment de partir on se dit : "Tiens et le Bulletin ? Nous devions en causer."
>
> Lettre non datée (Mars 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
> [**Archives épistolaires Darboux**]

Dès le mois de Mai, la Commission - et Chasles en premier lieu - n'intervient plus dans les affaires du Bulletin, laissant une liberté et une responsabilité totales à ses rédacteurs.

> La Commission finira par passer à l'état de mythe ; nous avons bien été dîner chez M. Chasles, mais il me semble qu'on n'a pas parlé du Bulletin.
>
> Lettre datée du 6 Mai 1870 de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
> [**Archives épistolaires Darboux**]

127. Lettre non datée (Septembre 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**] ou [**Gispert 1987**, 167].

128. On retrouve ces propos dans la lettre du 1er Mars 1870 de Battaglini à Hoüel, reproduite dans [**Calleri Giacardi 1995**].

129. En page 5 du Bulletin (1er tome, 1870), on trouve en effet l'exacte liste des membres de la Commission de patronage de la section de mathématiques de l'École Pratique des Hautes Etudes, mais cette Commission est alors intitulée "Comité de rédaction". A partir du second tome (1871), cette Commission, toujours présentée en page 5, sera bien présentée comme la "*Commission des Hautes Études*".

Si la Commission - et Chasles le premier - continuera d'assister les rédacteurs dans leurs démarches administratives pour favoriser les conditions du fonctionnement du journal (comme c'est le cas avec la souscription ministérielle aux périodiques devant être recensés dans le Bulletin, en 1871), en six mois la transition du pouvoir de décision s'est effectuée depuis Chasles vers Darboux. La bonne tenue du Bulletin est alors devenue l'entière responsabilité des rédacteurs.

Le contexte historique.

Le contexte historique des deux années 1870/1871, avec une guerre suivie par de nombreuses insurrections, représente une grande difficulté pour les rédacteurs du Bulletin. Alors que sa création est actée administrativement en Décembre 1869, les tensions politiques entre la France et la Prusse [130] sont déjà grandes. Après l'humiliation subie par la diplomatie napoléonienne en 1867 suite à la volte-face de Bismarck ayant fait échouer l'annexion française du Luxembourg [131], la tension grandit depuis Septembre 1868 suite à la vacance du trône d'Espagne, convoité par le cousin du roi de Prusse. Surtout la France se méfie de la puissance militaire surprenante de la Prusse après sa victoire écrasante en Autriche. Bismarck au contraire envisage un conflit contre la France qui achèverait de bâtir l'unification des territoires allemands.

L'annexe 8 développe plus en détail les éléments historiques importants et le contexte géopolitique européen des années 1860 pour mieux situer le conflit franco-prussien et ses conséquences. On pourra s'y reporter pour obtenir des informations précises sur le déclenchement de la guerre, sur son déroulement et sur la Commune de Paris qui suivra son armistice. Nous y accompagnons le déroulement des événements des commentaires de Darboux contenus dans ses correspondances.

Alors que les tensions entre la France et l'Allemagne sont fortes, Darboux et Hoüel ne nourrissent en revanche aucun ressentiment à l'égard des scientifiques allemands. Darboux collabore ainsi à Paris avec Radau et Loewy, respectivement natifs de Prusse Orientale et d'Autriche, et de nombreux scientifiques allemands sont appelés à collaborer au Bulletin de par la volonté des rédacteurs de diffuser les mathématiques de l'étranger. L'Allemagne est à ce titre incontournable. Aussi Hermann Hankel échange-t-il avec Hoüel pour insérer au Bulletin un compte-rendu de son dernier ouvrage sur les fonctions oscillantes [132]. Dans le même temps, Darboux échange avec l'allemand Félix Klein qu'il côtoie à Paris en compagnie de Sophus Lie. Dans le rapport qu'ils adressent à la section de mathématiques de l'Université de Berlin et que nous avons déjà mentionné, ces deux jeunes mathématiciens saluent et encouragent l'initiative des rédacteurs du Bulletin qui pourrait selon eux contribuer à enrayer le déclin des mathématiques françaises ([**Stubhaug 2006**, 123]). Surtout, une importante partie des revues périodiques et des travaux effectués à l'étranger

130. La Prusse est alors à la tête de la Confédération d'Allemagne du Nord depuis 1867.

131. Bismarck avait promis à Napoléon III le Luxembourg en échange de la neutralité de la France dans le conflit austro-prussien de 1866, mais le chancelier prussien n'honora pas sa promesse.

132. Dans le numéro d'Avril 1870 (Tome 1, p.117) Jules Hoüel insère le compte-rendu des " *Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen* " d'Hermann Hankel ([**Hankel 1870**]).

proviennent d'Allemagne [133]. La collaboration avec les scientifiques allemands est donc indispensable. Mais elle ne représente lors de la création du Bulletin aucun problème, comme en ont témoigné les réactions chaleureuses d'Alfred Clebsch.

Le premier numéro du Bulletin paraît durant la deuxième semaine du mois de Mars 1870 [134]. Le Bulletin compte alors 14 abonnés payants, mais ce nombre croît rapidement puisque le mois suivant il est déjà de 50. La cadence des rédacteurs est soutenue puisque le numéro d'Avril paraît déjà au début du mois de Mai, le périodique ayant désormais enregistré 77 abonnés [135]. Lorsque la guerre éclate suite à la dépêche d'Ems du 13 Juillet 1870, le numéro de Juin du Bulletin est déjà distribué. L'absence de troubles dans la capitale va même permettre la parution quelques semaines plus tard du numéro de Juillet. Hoüel est alors en vacances à Thaon, et Darboux part également en vacances (probablement à Beauvais dans la famille Carbonnier avec son frère). Lorsqu'il revient au début du mois de Septembre, Paris est sur le point d'être assiégé. La parution du Bulletin est alors interrompue juste après la publication du numéro d'Août 1870 [136].

FIGURE 15. La sortie de Champigny tentée par le Général Trochu durant le siège de Paris (Décembre 1870) [137]

133. Selon [**Gispert 1984**, 260], 53% des ouvrages présentés dans la section du bulletin bibliographique du premier tome du Bulletin sont des livres écrits en langue allemande. D'autre part, 10 des 38 revues périodiques qui sont analysées dans ce tome sont des revues allemandes.

134. On peut lire la présentation de ce périodique faite par Chasles à l'Académie le Lundi 14 Mars 1870 dans les "*Comptes-rendus hebdomadaires*" de l'Académie des Sciences, Tome 70, p.567.

135. Les nombres d'abonnés du Bulletin pendant l'année 1870 présentés ci-dessus proviennent des informations données par Darboux dans ses lettres à Hoüel. Ces lettres sont reproduites dans [**Gispert 1987**]. Des informations supplémentaires sur le nombre d'abonnés au Bulletin sont présentées plus loin dans la partie [Chap.6,1.1].

136. Ce numéro ainsi que le précédent du mois de Juillet est présenté à l'Académie le 31 Octobre 1870 (durant le siège de Paris) par Chasles.

Le siège de Paris dure jusqu'à la fin du mois de Janvier 1871. Pendant ce siège, Darboux et Hoüel ne parviennent à communiquer que très épisodiquement [138]. Dès que la guerre se termine, Darboux est focalisé sur la reprise de la parution du Bulletin. La première lettre qu'il écrit à son collaborateur bordelais en Février 1871 contient cet appel à l'aide :

> Envoyez-moi tout ce que vous aurez de disponible. Je vous enverrai des épreuves des articles russes. Rien n'a paru du Bulletin.
>
> Lettre non datée (Février 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Mais Darboux décide finalement de partir à Nîmes pour prendre soin de sa mère souffrante. Dès qu'il revient à Paris, il commence à composer le numéro de Septembre 1870 où il veut insérer la traduction faite par Hoüel d'un mémoire russe sur les équations différentielles [139]. Mais la préparation de ce numéro sera interrompue par le déclenchement de la Commune de Paris. Suite à l'insurrection du 18 Mars 1871 (pour prendre les canons de la colline Montmartre), Paris est à nouveau assiégé durant plusieurs semaines. Il faut attendre le 28 Mai 1871 et la fin de la semaine sanglante pour que ce nouveau siège prenne fin. Suite à ces "*deux sièges de Paris*", le Bulletin a alors pris presque une année de retard comme l'expliquait dans ses lettres Hoüel à Genocchi [140].

La collaboration avec les scientifiques allemands est alors poursuivie par Darboux et Hoüel sans que le conflit qui s'achève ne change notablement leurs relations avec les collaborateurs d'outre-Rhin. Clebsch et Klein en particulier sont les collaborateurs qui reprennent le plus vite contact avec Darboux, Klein ayant même écrit à Darboux entre la fin du siège de guerre et le début de la Commune. Cette correspondance est alors véritablement nécessaire pour la remise en marche du Bulletin, car les transports entre la France et l'Allemagne sont coupés.

> Grâce à M. Otto von Bismarck nous n'avons pas de publications allemandes ; les chemins de fer marchent sans doute, dans quel but et pour quel objet je l'ignore absolument.
>
> Lettre non datée (Juillet 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

> je suis dans une détresse absolue :
> les livres allemands n'arrivent pas.
>
> Lettre non datée (Septembre 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Le fait que Clebsch reprenne contact avec Darboux et continue à lui faire parvenir les recensions de ses "*Mathematische Annalen*" est particulièrement significatif puisque l'attitude générale du mathématicien allemand envers la France semble changer après la

137. Crédits image : `http://antan.unblog.fr/`.
138. Des ballons portés étaient utilisés pour franchir les lignes ennemies pendant le siège, donnant lieu durant certaines périodes à des échanges épistolaires. Certains de ces ballons ont été photographiés par Nadar. Voir l'annexe 8.
139. Ce mémoire est le second mémoire du russe Imchenetsky, il traite des équations différentielles du second ordre [**Imchenetsky 1868**]. Nous y reviendrons dans la section [Chap.6,3.2].
140. Voir la lettre citée précédemment en 3.2 du 16 Juillet 1871. L'interruption est tellement longue, que Hoüel en a même oublié le nom de la publication : l'épithète "astronomiques" dans le nom complet du Bulletin et devenu sous sa plume "physiques" !

guerre. Comme le raconte en effet Darboux, "*Clebsch supprime de ses livres [son] titre de correspondant de l'Académie [des Sciences de Paris]*" [141]. C'est donc faisant fi de son ressentiment vis-à-vis de la France que Clebsch continue de collaborer avec le Bulletin des Sciences. Les mathématiciens, allemands comme français, font donc dans l'ensemble primer l'entreprise scientifique sur la rivalité nationale [142]. Dans certains de ses commentaires (voir annexe 8), Darboux n'est pourtant pas tendre envers les prussiens et leur attitude durant la guerre. Il fait cependant abstraction de ces sentiments dans le cadre de ses activités scientifiques, et en tant que rédacteur : la survie de son journal en dépend.

Seul le professeur allemand de Gießen Richard Baltzer semble avoir rompu ses contacts avec des scientifiques français, si bien que Darboux demandera à Hoüel plus de deux ans après la fin du conflit : "*Baltzer est-il revenu un peu de sa haine contre les français ?*" [143]

Hoüel de son côté n'a presque rompu aucun contact durant la guerre, notamment auprès de ses nombreux correspondants italiens [144]. C'est donc lui qui va logiquement se charger de s'assurer de la continuité des collaborations pour la poursuite du Bulletin, surtout avec Beltrami, Betti et Battaglini. Cela s'effectuera sans encombre excepté pour le dernier qui - nous l'avons signalé - une fois la guerre terminée, omettra de continuer à faire parvenir à Darboux le journal qu'il dirige, le "*Giornale di Matematiche*". Darboux le lui réclamera en Février 1872 :

> Battaglini ne m'envoyant plus son journal, j'écris à Rome. C'est bien là qu'il est, n'est-ce pas ? Après la guerre, il ne me l'a plus renvoyé. Ce n'est pas bien de sa part.
>
> Lettre datée du 9 Février 1872 de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Les mathématiciens italiens semblent par ailleurs soutenir leurs amis français dans le difficile contexte de la guerre franco-prussienne et des atermoiements de la situation militaire et politique française. Les propos de Battaglini à Hoüel sont particulièrement éloquents :

> Les événements qui se produisent encore en France remplissent l'esprit de douleur et d'horreur. La poursuite de la guerre de la part des Prussiens est maintenant absolument injuste, et en envenimant la haine entre deux peuples pourtant destinés à s'estimer et à s'imiter l'un l'autre dans l'art de la paix, cela prépare une ère formidablement calamiteuse pour l'Europe ! [...] Espérons que la France avec force de patriotisme, chose pas nouvelle dans son Histoire, pourra sortir de cette situation horrible.
>
> [...]
>
> Quel esprit non pervers pourrait rester indifférent face au spectacle de l'abîme de malheurs dans lequel est précipité votre noble pays ?
>
> [...]

---

141. Lettre non datée (1872) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].
142. Si c'est le cas pour la guerre de 1870, en revanche les rivalités et les rancœurs seront bien plus fortes lors de la Première Guerre Mondiale. Voir [**Mazliak Tazzioli 2009**].
143. Lettre datée du 30 Mars 1873 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].
144. On peut constater ceci à la lecture des lettres échangées avec Beltrami publiées dans [**Boi Giacardi Tazzioli 1998**], avec Cremona dans [**Giacardi 1992**] et avec Battaglini dans [**Calleri Giacardi 1995**].

> Comment ne pas participer à votre douleur de voir l'atrocité qui désole la France ?
>
> Lettres datées du 15 Octobre, 11 Novembre et 30 Décembre 1870 de Giuseppe Battaglini à Jules Hoüel. [**Calleri Giacardi 1995**, 104-107]

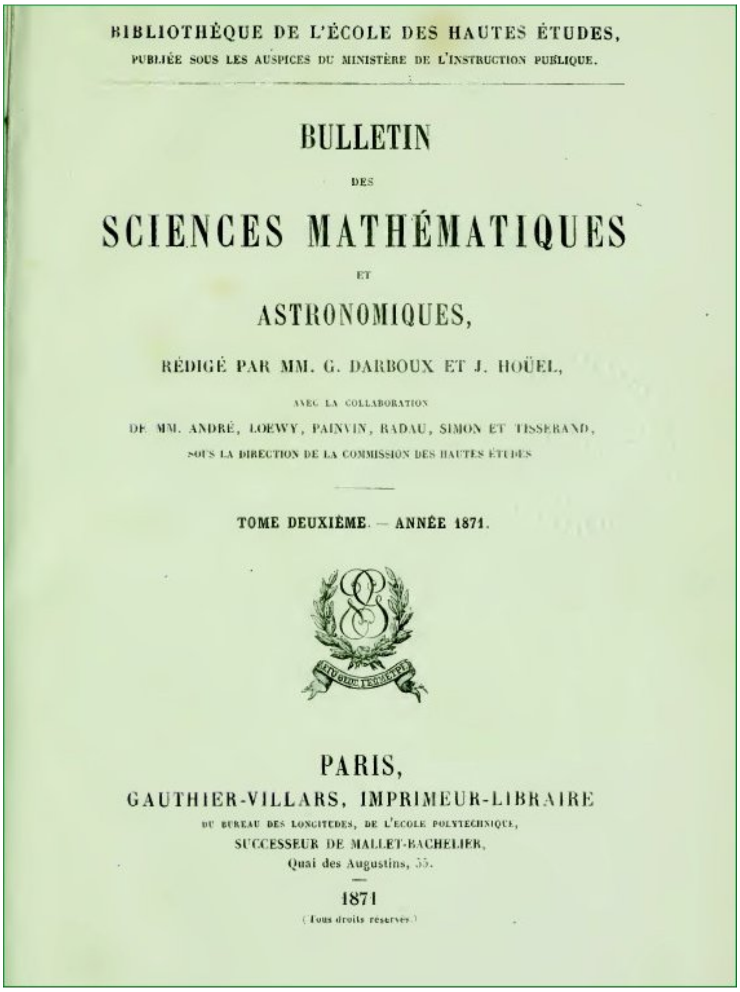
Les publications du Bulletin reprennent après la Commune de Paris lors de la première semaine du mois d'Août 1871 avec la parution du numéro de Septembre 1870. Accompagnant le choix de nouveaux collaborateurs (Painvin, Tisserand, André et Tannery, mais également le professeur Charles Simon), le rythme des publications du Bulletin s'accélère alors. Au milieu du mois d'Octobre 1871, le premier tome (1870) est achevé [145]. Darboux maintient ses collaborateurs sous pression pour garantir leur participation active à la rédaction du Bulletin :

> Simon analyse Folie, Riemann, il prépare une sorte d'article sur les méthodes de Duhamel. Painvin s'est chargé de la Mécanique de Laurent et de votre cours de Calcul infinitésimal. J'ai les Monthly Notices par André ; mais Tisserand ayant calculé une orbite ne m'a rien donné jusqu'ici. Je vais le pousser un peu.
>
> Lettre non datée (Septembre 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Avant la fin du mois de Février 1872, la moitié du second tome est déjà publiée, et dès le début du mois d'Avril 1872, ce second tome est achevé. Le nombre d'abonnés a alors atteint 114. Excepté Tannery encore jeune [146], les nouveaux collaborateurs sont alors apparus sur la couverture des numéros du second tome du Bulletin.

145. L'Académie des Sciences reçoit ainsi les derniers numéros composant le premier tome durant la séance du Lundi 16 Octobre 1871. On consultera le tome 73 (1871, 2nd semestre) des "*Compte-rendus hebdomadaires des séances*", p.1016.

146. Tannery sera agrégé-préparateur de mathématiques de 1872 à 1875, et recevra son doctorat à la fin de l'année 1874. Pour plus d'informations sur Tannery, voir plus loin [Chap.6, 1.3].



BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,
RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
AVEC LA COLLABORATION
DE MM. ANDRÉ, LOEWY, PAINVIN, RADAU, SIMON ET TISSERAND,
SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES

TOME DEUXIÈME. — ANNÉE 1871.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.
1871
(Tous droits réservés.)

FIGURE 16. Première page du second tome (1871) du Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques.

Pour Darboux, rattraper le retard - c'est-à-dire parvenir à publier le numéro du Bulletin durant le mois même qu'il concerne - est un point essentiel. Comme ils le disent, Darboux et Hoüel veulent "*se mettre au courant*" car il en va de l'utilité même de leur publication. Aussi le nîmois continue-t-il de presser le bordelais et de parer au plus pressé pour la composition des articles :

> Tant que nous ne serons pas au courant, ces choses-là [des erreurs dans l'édition des articles] seront presque inévitables. [...] L'essentiel c'est de nous remettre au courant, et j'espère que vous n'allez pas vous oublier et que votre puissant concours ne me fera pas défaut
>
> [...]
>
> Au contraire, quand nous serons au courant, je choisirai, classerai, numéroterai, émonderai, expurgerai, embellirai, préparerai la copie. Nous déciderons d'une manière sérieuse, enfin tout sera pour le mieux dans le meilleur des Bulletins possibles.

Lettres datées du 28 Février et de Mars 1872 de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Finalement, c'est au mois de Juin 1872 que le Bulletin parviendra à combler le retard de parution contracté pendant la guerre puis la Commune. Le 24 Juin 1872, Chasles présente en effet à l'Académie le numéro de Juin du troisième tome [147] : les rédacteurs sont parvenus à *se mettre au courant*. Ils compteront dès le début de l'année 1873 140 abonnés payants, soit légèrement moins que ce que Darboux envisageait au lancement du périodique [148].

Cependant l'existence du *Bulletin des Sciences*, si elle a vacillé durant la guerre, est en 1873 encore loin d'avoir acquis sa perpétuité. Les années 1875-76 seront en effet marquées par une forte instabilité dont plusieurs facteurs avaient déjà été influents pour l'ancien Bulletin de Férussac : nous les évoquerons dans le chapitre suivant. Ce ne sera qu'en 1877, grâce à une renégociation des termes du contrat liant Gauthier-Villars et le Ministère de l'Instruction Publique, que le Bulletin atteindra sa *vitesse de croisière*.

4. Le Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik : concurrent ou modèle ?

Nous ne pourrions clore ce chapitre dédié aux débuts du *Bulletin des Sciences* sans évoquer le journal qui lui est systématiquement associé : le "*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*". A l'image du Bulletin, le *Jahrbuch* a souvent été pour les historiens un outil d'études plutôt que l'objet de l'étude, ce qui est en grande partie dû à la numérisation récente de son contenu [149]. Cela a largement favorisé les études statistiques.

Pourtant, et toujours à l'image du recueil de Darboux, les circonstances de la création du *Jahrbuch* restent floues, et l'incertitude - notamment chronologique - pourrait amener à considérer le Bulletin comme un "*réflexe identitaire*" [150] en réaction à sa publication.

Nous n'avons pas ici la place de donner autant de détails pour la création du Jahrbuch que pour celle du Bulletin, néanmoins certains éléments doivent être soulignés pour mieux comprendre les interactions entre ces deux périodiques naissants. Dans un premier temps, nous rétablirons une chronologie précise de la mise en place de ces recueils. Cela nous permettra ensuite d'évaluer la manière dont Darboux et Hoüel envisagent le journal allemand : dans quelle mesure représente-t-il véritablement une concurrence ? Enfin, nous ferons rapidement la lumière sur un épisode méconnu centré sur Jules Hoüel qui renforcera l'importance de la collaboration du mathématicien bordelais.

147. On peut trouver la présentation de Chasles du numéro du Bulletin dans le tome 74 des "*Comptes-rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*" (1872), p.1607.

148. Darboux espérait obtenir 200 abonnés payants, mais pensait que 150 abonnés permettraient déjà d'assurer la pérennité de sa publication en permettant à l'imprimeur Gauthier-Villars de "*couvrir ses frais*". Les nombres d'abonnés du Bulletin pour 1872 et 1873 proviennent des lettres datées du 28 Janvier 1872 et du 19 Mai 1873, [**Archives épistolaires Darboux**]. Nous y reviendrons plus loin dans le détail des contrats avec Gauthier-Villars ([Chap.6,1.2]).

149. La base de données en ligne du *Jahrbuch* peut être interrogée à l'adresse `http://www.emis.de/MATH/JFM/JFM.html`.

150. Nous empruntons cette belle expression à [**Verdier 2009b**].

4.1. Chronologie de la création des publications.

Le "*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*"[151] est un recueil allemand - et rédigé en langue allemande - qui a pour vocation de recenser annuellement de manière systématique tous les travaux mathématiques, effectués en Allemagne et ailleurs. Ce recensement est classé par matières, et chaque travail recensé est accompagné d'une notice (une recension), de longueur variable, qui en décrit la teneur.

La date de la création du Jahrbuch est presque unanimement désignée dans la littérature comme étant l'année 1868[152]. Pourtant, à l'instar du Bulletin, il convient de bien distinguer plusieurs dates importantes : la décision de la création du recueil, les débuts de parution du recueil, et enfin l'année sur laquelle portent les recensions.

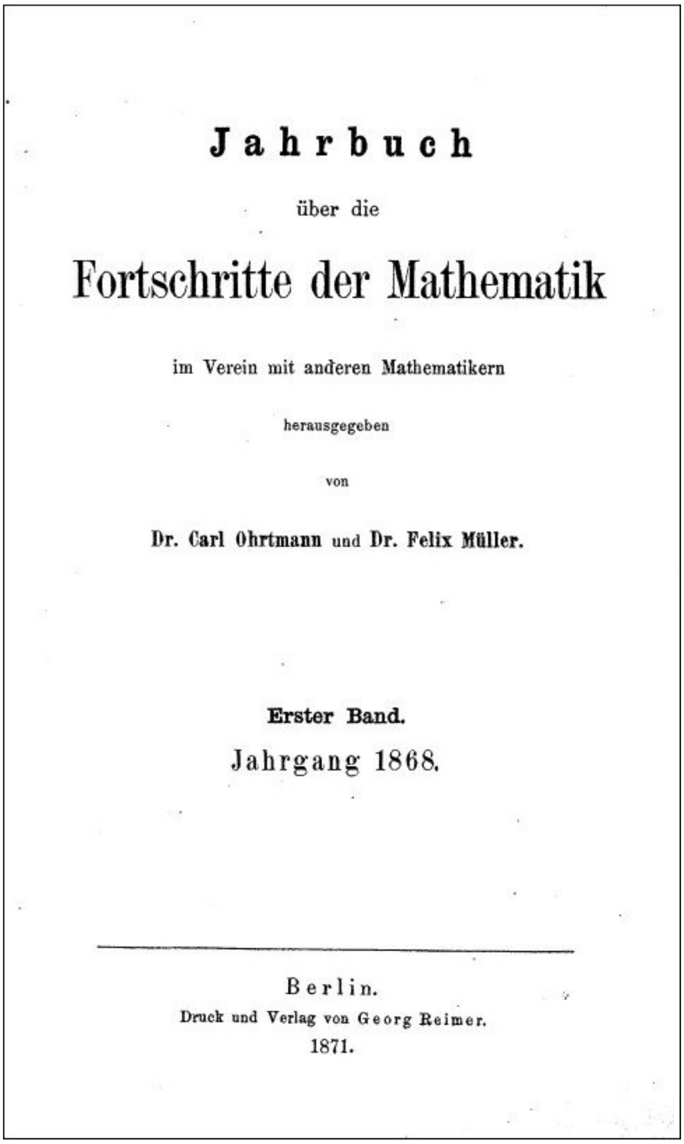
Le Jahrbuch a été créé à Berlin par les mathématiciens Felix Müller et Carl Ohrtmann, et le premier tome a consisté en le recensement des travaux mathématiques de l'année 1868. C'est la raison pour laquelle cette date est très souvent évoquée. Cependant, ça n'est qu'à Pâques de l'année 1871 que ce premier tome commence à paraître, comme l'indique le fondateur Ohrtmann dans une lettre à Jules Hoüel :

> Seit vorigem Ostern ist hier [in Berlin] unter meiner und Herr Dr Felix Müller's (eines Schülers von Weierstrass) Leitung ein Unternehmen in's Leben gebrochen, betitelt : "Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik", das sich zum Ziel steht, in systematischer Anordnung die gesammter Leistungen auf dem Gebiet der reiner une angewandter Mathematik seines Lesern vorzuführen[153].
>
> Lettre datée du 16 Juillet 1871 de Carl Ohrtmann à Jules Hoüel.
> [**Archives épistolaires Ohrtmann**]

151. Ci-après ce journal sera désigné par le terme "*Jahrbuch*".

152. Voyez par exemple [**Goldstein Gray Ritter 1996**], ou encore [**Goldstein 2010**] où l'on peut lire : "*une tentative pour offrir un panorama global des travaux de recherche en cours est constituée par la parution, à partir de 1868, du "*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*"*, p.148. On trouve par ailleurs plus surprenamment : "*c'est en 1869 que parut le premier numéro du* Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" dans [**Dhombres 1994**, 119].

153. « Depuis les dernières Pâques, une entreprise a vu le jour ici [à Berlin] sous ma direction et celle du Dr Félix Müller (un élève de Weierstrass), intitulée : "Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik", dont le but est de présenter à ses lecteurs l'ensemble des publications, ordonnées de manière systématique, du domaine des mathématiques pures et appliquées. » [**Archives épistolaires Ohrtmann**].


Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

im Verein mit anderen Mathematikern

herausgegeben

von

Dr. Carl Ohrtmann und Dr. Felix Müller.

Erster Band.

Jahrgang 1868.

Berlin.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1871.

FIGURE 17. Première page du premier numéro du Jahrbuch

La naissance du Jahrbuch d'un point de vue éditorial remonte donc à Pâques 1871 [154], ce que [**Gispert 1987**, 72] avait déjà souligné. Mais on peut dater plus précisément la décision de la création de ce recueil, et les débuts des travaux des rédacteurs. Selon le mathématicien Emil Lampe, qui prendra la direction de la rédaction du Jahrbuch en 1885, Carl Ohrtmann aurait bien fondé le Jahrbuch à Berlin en 1868 ([**Lampe 1903**]). Mais Felix Müller, qui en est le co-fondateur, va donner une version légèrement différente un an après la déclaration de Lampe :

154. La liste bibliographique bimensuelle du "*Literaturzeitung*" associé au "*Zeitschrift*" permet d'affirmer que le premier des trois cahiers constituant le premier tome du Jahrbuch a paru entre le 16 Février et le 15 Avril 1871. Le troisième et dernier cahier de ce premier tome a paru en Juillet ou en Août 1871 ("*Zeitschrift für Mathematik und Physik*", Tome 16 (1871), pp.610,641).

> Es war im Dezember des Jahres 1869, als mein lieber Freund und Kollege Carl Ohrtmann mich aufforderte, ihm bei der Begründung einer Zeitschrift behülflich zu sein, die nach dem Vorbild der Fortschritte der Physik [155] eine systematisch geordnete Übersicht über alle neuen Erscheinungen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften zu geben bestimmt sein sollte. [...] Die nächsten Weihnachtsferien benutzten wir dazu, das im Jahre 1868 erschienene Material zu sammeln und systematisch zu ordnen. [156]
>
> [**Müller 1904**, 292]

La naissance de l'idée d'un Jahrbuch à Berlin a donc parfaitement coïncidé, chronologiquement, avec la création administrative du Bulletin des Sciences à Paris : les deux publications peuvent être datées du mois de Décembre 1869. En outre, nous avons vu d'une part que l'idée du Bulletin était présente à l'esprit de Chasles dès la formation de l'EPHE en 1868 (voir 2.2). Mais d'autre part la création du Bulletin est restée inconnue des mathématiciens allemands (et donc d'Ohrtmann et de Müller) jusqu'au début de l'année 1870. Ces deux journaux ont ainsi été pensés puis réalisés, à leurs débuts, de manière totalement indépendante. Ceci, souvent oublié, mérite d'être mis en emphase.

4.2. Quelle concurrence pour le Bulletin ?

Lorsque la rédaction du Bulletin commence, les deux rédacteurs Darboux et Hoüel n'ont donc pas pu avoir connaissance de l'entreprise à Berlin de Ohrtmann et Müller, et réciproquement. C'est ce dont atteste d'abord l'absence totale de mention de ce journal dans leurs échanges épistolaires. Ceci est ensuite renforcé par leur réaction, lorsqu'ils découvrent durant le mois de Mai 1871 l'existence du Jahrbuch via la parution des premiers cahiers du premier tome. Hoüel écrit à Darboux à propos de la parution de ce nouveau recueil, et s'inquiète de la concurrence qu'il pourrait représenter. Darboux, dans la première des lettres qu'il envoie après la fin de la Commune de Paris, le rassure :

> Il y a quelque temps qu'on m'avait signalé cette publication allemande dont vous me parlez. Mais ne vous inquiétez pas. Dès que nous serons au courant, nous serons obligés de faire un choix et le travail sera facile.
>
> Lettre non datée (Juin 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
> [**Archives épistolaires Darboux**]

En fait, la seule mention d'une possible concurrence pour le Bulletin qui est faite par Darboux est évoquée à propos de l'incident des caractères cyrilliques. Ce concurrent est, selon lui, le "*Zeitschrift für Mathematik und Physik*", le journal allemand fondé à Leipzig

155. Le journal intitulé "*Fortschritte der Physik*" a commencé à paraître en 1847. Il s'agissait pour les rédacteurs, membres de la Société de Physique de Berlin, de recenser les travaux publiés au cours d'une année dans le domaine des sciences physiques. Le premier tome recense les travaux de l'année 1845.

156. « Ce fut en Décembre de l'année 1869, lorsque mon ami et collègue Carl Ohrtmann m'invita à l'assister dans la création d'un journal qui, à l'image du "Fortschritte der Physik", devait donner un aperçu répertorié de manière systématique de toutes les nouvelles parutions dans le domaine des sciences mathématiques. [...] Nous avons alors utilisé tout le temps des vacances de Noël à rassembler puis classer tous les papiers parus en 1868. » [**Müller 1904**, 292].

par les mathématiciens Schlömilch et Witzschel en 1856. Darboux utilise le fait que les rédacteurs de ce journal, qu'il présente alors comme un rival, aient à leur disposition des caractères russes pour négocier auprès de son imprimeur Gauthier-Villars :

> Enfin, j'ai réclamé pour les traités et pour le russe. J'ai piqué au vif M. Gauthier. Je lui ai dit que notre concurrent Schlömilch en a tome X ou XI du Zeitschrift, vous en verrez dans un mémoire de Neumann [...]
>
> Lettre non datée (Juin 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Le "*Zeitschrift*" est avant tout une publication scientifique composée de mémoires de mathématiques et de physique. Cependant il peut représenter un concurrent pour le Bulletin puisque chaque fascicule [157] s'accompagne d'un supplément intitulé "*Literaturzeitung der Zeitschrift für Mathematik und Physik*". Dans ce supplément on trouve d'abord dans une première partie quelques comptes-rendus de livres, puis dans une seconde partie une bibliographie des ouvrages récemment parus. Ces deux divisions sont analogues aux sections Revue Bibliographique (comptes-rendus des livres) et Bulletin Bibliographique (liste des ouvrages récemment parus), ce qui n'est pas surprenant puisque, comme nous l'avons vu plus haut (voir 3.2), Darboux et Hoüel se sont ouvertement inspirés de la disposition du Zeitschrift pour composer le Bulletin.

157. La fréquence de publication des fascicules du "*Zeitschrift*" peut varier mais il y a toujours 6 fascicules publiés par année, de sorte que cette publication peut être qualifiée, en moyenne, de bi-mensuelle. Signalons par ailleurs que la création du *Zeitschrift* est souvent rapportée comme étant une réponse de Schlömilch à un arbitrage de Grünert qui lui était défavorable, dans ses *Archiv*, suite à une rivalité avec le mathématicien Friedrich Wilhelm Barfuss.

Zeitschrift
für
Mathematik und Physik
herausgegeben
von
Dr. O. Schlömilch und Dr. B. Witzschel.

Erster Jahrgang.
Mit 9 lithographirten Tafeln und Holzschnitten.

LEIPZIG,
Verlag von B. G. Teubner.
1856.

Literaturzeitung
der
Zeitschrift für Mathematik und Physik
herausgegeben
von
Dr. O. Schlömilch und Dr. B. Witzschel.

Erster Jahrgang.

LEIPZIG,
Verlag von B. G. Teubner.
1856.

FIGURE 18. Première page du premier numéro du Zeitschrift (1856) ainsi que du premier fascicule Literaturzeitung

Mais de fait, ni Darboux ni Hoüel ne semblent se soucier véritablement de la concurrence représentée par le Zeitschrift. Son évocation par Darboux ressemble plus à un artifice utilisé envers son imprimeur pour toucher à l'amour-propre de ce-dernier et obtenir gain de cause.

Plusieurs éléments expliquent cette insouciance vis-à-vis du périodique allemand. Tout d'abord le Zeitschrift en lui-même n'est pas une revue consacrée aux comptes-rendus d'ouvrages : seule l'est son supplément, le "*Literaturzeitung*". D'autre part, la revue bibliographique du Zeitschrift n'est composée presque exclusivement que d'ouvrages allemands [158], et dans la bibliographie les périodiques mentionnés sont exclusivement ceux qui paraissent en langue allemande. Comparé au Bulletin, l'effort est ainsi sensiblement moins porté sur le caractère international.

Mais surtout la revue mêle les disciplines de mathématique et de physique, ce qui pour Darboux constitue un réel inconvénient [159]. En outre, les comptes-rendus du Zeitschrift ne portent que sur les livres et ainsi ne prennent jamais en compte les mémoires insérés dans

158. Pour l'année 1869 par exemple, dans les comptes-rendus de livres seul le traité sur les fonctions de variables complexes de Casorati n'est pas un ouvrage allemand .

159. On se souvient (voir 3.1) que Darboux reprochait en ce sens à Pasteur de ne pas avoir séparé ses "*Annales Scientifiques*" en deux volumes, l'un étant exclusivement réservé aux travaux mathématiques.

les publications périodiques, tâche pourtant majeure dans la rédaction du Bulletin. Enfin, le journal de Schlömilch ne compte pas une section analogue aux Mélanges du périodique français. En définitive, si les rédacteurs du Bulletin se sont inspirés de la disposition de la partie Literaturzeitung du Zeitschrift pour construire leurs sections de Revue et Bulletin Bibliographiques, ils ne se font pas de souci quant à la concurrence représentée par celui-ci. Aucune autre mention du Zeitschrift en tant que publication concurrente n'apparaît d'ailleurs plus dans les lettres entre les rédacteurs.

Analysons dès lors l'influence de l'arrivée du Jahrbuch dans le panorama des publications. Avant même l'apparition du premier tome, de nombreux mathématiciens se montraient sceptiques voire pessimistes envers le travail d'Ohrtmann et de Müller. Au contraire, les premières impressions au sujet du Bulletin étaient positives. C'est ce qui ressortait du rapport écrit par Lie et Klein à l'Université de Berlin (voir 3.2), et c'est encore ce dont témoigne une lettre de Georg Cantor à Hermann Schwarz suite à la parution du premier numéro du Bulletin :

> En ce qui concerne l'entreprise de ces Messieurs Ohrtmann et Müller, ceux-ci m'ont jusqu'à présent épargné toute demande de contribution ; ils seraient bien avisés de patienter quelques années pour pouvoir faire eux-mêmes quelques progrès avant de pouvoir porter quelque jugement que ce soit sur le progrès des mathématiques [160].
>
> Par ailleurs, à Paris le premier cahier d'un Bulletin de Mathématiques vient de déjà de paraître, rédigé de manière extrêmement habile par des hommes tels que Hoüel ; on ne pourra que se féliciter si cela se poursuit.
>
> Lettre datée du 30 Mars 1870 de Georg Cantor à Hermann Schwarz, publiée dans [**Meschkowski Nilson 1991**, 25]

Darboux et Hoüel reçoivent le premier cahier du premier tome du Jahrbuch (portant sur le recensement des travaux de 1868) durant le mois de Septembre 1871. Darboux donne immédiatement une impression contrastée de ce recueil à son collaborateur :

> J'ai reçu l'Ohrtmann impatiemment attendu. C'est mieux fait et c'est plus mal fait que notre journal. D'abord grâce à leur système de retard ils peuvent adopter une division plus claire des matières. Il y a beaucoup de choses mais cela tourne un peu à la bibliographie ; il faut que nous fassions aussi bien pour les renseignements, la partie technique, et en outre que nous continuions notre système d'articles généraux de Mélanges qui rendent un journal de cette nature intéressant. Le leur est ennuyeux comme la pluie.
>
> Lettre non datée (Septembre 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

S'il reconnaît l'exhaustivité et la bonne présentation du recueil berlinois, Darboux insiste donc sur la différence de contenu des deux publications. C'est bien la section de Mélanges qui à ses yeux fait la différence en faveur du Bulletin. Le Jahrbuch se résume

160. Ohrtmann et Müller ne sont alors "que" des professeurs dans l'enseignement secondaire ; c'est en raison de ceci que Cantor semble douter de leurs aptitudes.

à une longue liste bibliographique dont la lecture lui semble aride et rébarbative [161]. Cela renforce Darboux dans son choix de donner la priorité à la diversité apportée par les Mélanges de son Bulletin : le Jahrbuch n'est pas un journal qui peut véritablement se lire, c'est un journal qui se consulte, alors que grâce surtout à ses Mélanges, le Bulletin lui est un journal qui se lit.

Darboux ne considère donc pas le Jahrbuch comme un véritable concurrent, affirmant même à Hoüel que le journal allemand "*ne peut pas nous faire concurrence : c'est une entreprise d'un genre tout à fait différent de la nôtre*" [162]. Le nîmois voit surtout dans le Jahrbuch un outil de comparaison qui lui permet d'améliorer la qualité du Bulletin. La qualité des renseignements bibliographiques du Jahrbuch l'incite à vouloir "*faire aussi bien*" pour le Bulletin. Ce-dernier aura de plus, selon lui, toujours outre la diversité apportée par la section Mélanges un avantage certain : celui de la fréquence de publication. Le Bulletin est en effet mensuel, tandis que le Jahrbuch est annuel - bien que paraissant en trois cahiers. Alors que le Bulletin rattrape rapidement son retard initial de publication (dès le Printemps de l'année 1872), le Jahrbuch va régulièrement paraître avec en moyenne deux à trois années de retard, ce qui semble normal au regard de la quantité de travail. Par exemple, l'exemplaire regroupant les travaux - exceptionnellement regroupés - des années 1869-1870 ne sera terminé qu'à l'été 1873 et celui de l'année 1873 ne le sera qu'à la fin de 1875. C'est notamment pour conserver cet avantage sur le Jahrbuch que Darboux attachera tant d'importance à *mettre au courant* son Bulletin [163].

En dépit de l'apparente assurance de Darboux, son collaborateur Hoüel reste quant à lui inquiet de la concurrence que représente le recueil berlinois. En Juin 1871, il s'inquiétait auprès de son ami belge Joseph De Tilly de l'apparition de ce nouveau journal, à un moment où la publication du Bulletin était toujours interrompue suite à la guerre et dont il allait même jusqu'à douter de la reprise. Faisant fi des considérations internationalistes prônées jusqu'alors par Darboux, Hoüel présentait alors la rivalité des deux publications sur fond de rivalités nationales :

> Ce pauvre Bulletin a été bien éprouvé par toutes ces interruptions, qui n'ont pas encore permis de faire paraître le numéro de septembre 1870. Il a besoin de tout l'intérêt de ceux qui aiment la civilisation française pour se mettre de nouveau à flot, et pouvoir soutenir la concurrence d'un recueil analogue qui vient de se fonder à Berlin. En supposant donc, comme je l'espère, que notre publication reprenne son cours, j'implore plus que jamais votre aide pour nous secourir dans cette oeuvre, pour laquelle les savants de notre pays ne nous apportent peut-être pas tout le concours que nous pourrions en attendre.
>
> Lettre datée du 16 Juin 1871 de Jules Hoüel à Joseph-Marie De Tilly, reproduite dans [**Henry Nabonnand 2016**, 144-145]

161. Hélène Gispert avait également souligné combien Darboux voulait préserver son Bulletin pour qu'il ne devienne pas une simple *table des matières*. L'historienne avait ensuite plutôt mis l'accent sur l'utilisation de la rubrique de Revue bibiographique ([**Gispert 1987**, 74]).
162. Lettre datée du 1er Décembre 1873 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].
163. Voir plus haut la partie 3.2 pour la mise au courant du Bulletin forcée par Darboux après les difficultés traversées durant la guerre de 1870 puis la Commune.

Plus de quatre années plus tard, Hoüel évoquera encore la concurrence avec le Jahrbuch pour tenter de stimuler l'activité de De Tilly vis-à-vis du Bulletin : "*Il faut que nous tâchions d'arriver à lutter avec succès contre l'excellente publication qui se fait à Berlin : "Jahrbuch für die Fortschritte der gesammten Mathematik". Pour cela, il nous faut avoir, comme les rédacteurs du Jahrbuch, beaucoup de collaborateurs, et de bons. Nous comptons sur votre concours, tant pour la rédaction que pour le recrutement*" [164].

Le fait que le Jahrbuch soit un concurrent direct pour le Bulletin des Sciences est, au-delà du simple cas de Jules Hoüel, l'opinion générale des mathématiciens au sujet de ces deux publications. En fait, Darboux semble être le seul à ne pas partager cette opinion. Nous avons ainsi vu par exemple que Cantor, dans sa lettre à Schwarz citée précédemment, plaçait ces deux journaux sur le même plan. On peut également mentionner le commentaire de Giuseppe Battaglini à Hoüel, qui ne contribua sans doute pas à rasséréner ce-dernier :

> Maintenant le Bulletin a un concurrent, que vous connaissez certainement, le Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, publié à Berlin par les Drs C. Ohrtmann et F. Müller ; seuls deux fascicules sont sortis jusqu'alors [...]
>
> Lettre non datée (Mai/Juin 1871) de Giuseppe Battaglini à Jules Hoüel, reproduite dans [**Calleri Giacardi 1995**, 111-113]

Heureusement pour le mathématicien bordelais, Battaglini poursuit sa lettre en lui assurant à nouveau son active collaboration pour la rédaction du Bulletin. Malgré la crainte de cette concurrence, Hoüel écrira dans le Bulletin de Mai 1872 une notice élogieuse au sujet du premier volume du "*Jahrbuch*". Il y soulignera notamment que l'"*inconvénient de ne pas pouvoir signaler les travaux au moment de leur apparition*" y est largement compensée par "*la possibilité de classer les matières dans un ordre méthodique et d'offrir un tableau plus complet et plus clair des progrès de la Science*" [165]. A travers ces propos, on reconnaît en fait tout à fait les commentaires exprimés par Darboux - cités plus haut - à la réception du premier cahier du Jahrbuch, et non la réelle pensée de Hoüel. Le Bulletin ne pourra, si l'on en croit le nîmois, que s'inspirer de la qualité et de la clarté du classement effectué dans le recueil allemand.

C'est donc conformément à l'avis qu'il a donné à Hoüel que Darboux va prendre exemple sur le Jahrbuch pour la construction des tables récapitulatives. Ces tables seront insérées à la fin de chaque volume du Bulletin. Or à la réception du Jahrbuch après la Commune de Paris, le premier volume du Bulletin est encore loin d'être terminé puisque la publication a été interrompue après le numéro d'Août 1870. C'est grâce à ce retard que les premières tables récapitulatives n'ont pas même encore été préparées. Le rédacteur nîmois décide de disposer à l'instar du recueil berlinois une table des mémoires et ouvrages "*par ordre méthodique*", c'est-à-dire en opérant un classement par ordre de matières. Comme pour le Jahrbuch [166], cette première table est complétée par une seconde, une table des noms d'auteurs rangés par ordre alphabétique.

Seules deux légères différences distinguent les tables du Bulletin de celles du Jahrbuch : tout d'abord la table par ordre de matières (appelée par Darboux *méthodique* ou *par ordre*

164. Lettre datée du 1er décembre 1875 de Hoüel à De Tilly, [**Henry Nabonnand 2016**, 286-7].
165. Voir le commentaire de Hoüel sur le "*Jahrbuch*" dans le tome 3 (1872) du "*Bulletin des Sciences Math. et Astr.*", p.129.
166. Voir [**Goldstein 2010**, 148].

de sujets) est présentée en fin de volume pour le recueil français alors qu'elle l'est au début pour le recueil allemand. Puis la table des noms d'auteurs du Bulletin ne reprend pas les titres des mémoires et ouvrages, seuls les numéros de pages y sont apposés, là où la table du Jahrbuch mentionne quant à elle de nouveau les titres.

Analysons brièvement les "matières"[167] adoptées dans le Bulletin pour effectuer le classement méthodique des travaux dans la table de fin de volume, en les comparant aux matières choisies dans le Jahrbuch. Ceci nous permettra de mettre en avant l'attitude de Darboux et Hoüel, qui composent les tables du Bulletin, vis-à-vis du périodique allemand.

Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik Tome 1 (12 cat.)	**Bulletin des Sciences Tome 1 (14 cat.)**	**Bulletin des Sciences Tome 2 (19 cat.)**	**Bulletin des Sciences Tome 3 (6 cat.)**	**Bulletin des Sciences Tome 4 et suivants (5 cat.)**
Algèbre Théorie des Nombres Théorie des Fonctions Calcul Différentiel et Intégral Séries	Algèbre Arithmétique Fonctions Particulières Calcul Différentiel et Intégral Calcul Numérique, Tables de Logarithme, Méthode des Moindres Carrés Séries	Algèbre Arithmétique Fonctions Particulières Calcul Différentiel et Intégral Equations aux dérivées ordinaires et partielles Calcul des variations, calcul aux différences finies Séries	Arithmétique et Analyse	Arithmétique et Analyse
Géodésie et Astronomie Calcul des Probabilités	Astronomie Théorique, Ephémérides Astronomie Pratique Géodésie Probabilités	Astronomie Théorique, Ephémérides Astronomie Pratique Géodésie Probabilités, Combinaisons	Astronomie, Géodésie, Physique du Globe Probabilités, Statistiques, Finances	Astronomie, Géodésie, Physique du Globe, Probabilités
Géométrie Analytique Géométrie Synthétique	Géométrie	Géométrie Analytique Géométrie Infinitésimale Géométrie Synthétique	Géométrie	Géométrie
Histoire et Philosophie	Bibliographie Histoire des Sciences Mathématiques	Bibliographie Histoire des Sciences Mathématiques	Histoire des Mathématiques, Généralités	Histoire des Mathématiques, Généralités
Mécanique Physique Mathématique	Mécanique Physique Mathématique	Mécanique Mouvement et Equilibre des Fluides Physique Mathématique Physique Mathématique Générale	Mécanique, Physique Mathématique	Mécanique, Physique Mathématique

FIGURE 19. Comparaison des catégories (sections, matières) choisies dans les tables de fin de recueil du Jahrbuch et du Bulletin

Le tableau 19 ci-dessus regroupe les catégories adoptées dans les tables ordonnées par matières, pour le premier tome du Jahrbuch et pour les premiers tomes du Bulletin. Suivant

167. Comme l'a justement fait remarquer [Gispert 1984, 261], "*les intitulés des différentes matières qui figurent [dans ces tables] sont devenus, pour une part, caduques pour un lecteur moderne*". Il serait ainsi trompeur de vouloir interpréter le contenu de ces matières grâce aux sens que nous leur attribuons aujourd'hui.

leur classification, nous y avons fait apparaître deux échelons : une *matière*, représentée par un code couleur, peut contenir plusieurs *sections* dont nous avons inscrit les intitulés.

La proximité très forte entre les catégories adoptées dans le premier tome du Jahrbuch (1ère colonne) et celles du premier tome du Bulletin (2ème colonne) souligne à quel point Darboux s'est inspiré de la disposition des tables du Jahrbuch pour composer, fin 1871, la première table générale méthodique de son Bulletin. L'astronomie et la géodésie disposent de trois sections distinctes dans le Bulletin alors qu'elles sont rassemblées en une seule matière dans le Jahrbuch. En contrepartie les Géométries Analytique et Synthétique, dissociées dans le classement du Jahrbuch, ne constituent plus dans le Bulletin que deux sous-parties [168] de l'unique section de Géométrie. Mais dans l'ensemble la ressemblance est frappante.

Le classement du deuxième tome du Bulletin (3ème colonne) est plus fin que celui du premier mais reste très proche de celui du Jahrbuch : la Géométrie se scinde en trois sections dont une de "Géométrie Infinitésimale" et la Physique Mathématique tout comme la Mécanique se divise en deux sections. Enfin une catégorie dédiée aux équations différentielles apparaît. Globalement le classement opéré est donc plus détaillé, certaines sous-sections de la table du premier tome devenant dans le suivant des sections à part entière. Ce deuxième tome, composé dans l'urgence en à peine un semestre pour rattraper le retard de publication dû à la guerre et à la Commune, présente ainsi dans sa table récapitulative un découpage des matières encore très similaire à celui du Jahrbuch.

Mais à partir du tome 3 de 1872, la tendance change radicalement : plutôt que de chercher à affiner les catégories de la table générale de fin de volume, Darboux opte pour un classement très synthétique en seulement 6 catégories :

- Arithmétique et Analyse (qui comprend également les travaux d'algèbre et ceux relevant du domaine des équations différentielles)
- Astronomie, Géodésie et Physique du Globe
- Probabilités
- Géométrie
- Histoire des Mathématiques
- Mécanique et Physique Mathématique

Par le choix du classement des mémoires dans la table générale, le géomètre nîmois cherche ainsi à se démarquer du Jahrbuch : plutôt que d'établir comme ce-dernier un classement très détaillé avec de nombreuses matières, il préfère opter pour un classement synthétique ne faisant intervenir que 6 catégories. Ce changement est d'autant plus marqué que les 6 matières ne renferment plus aucune subdivision, comme c'était pourtant le cas dans les deux premiers tomes du Bulletin ainsi que dans le Jahrbuch.

Cette mutation visant à mieux différencier le Bulletin de son "meilleur ennemi" berlinois sera parachevée avec le tome 4 du premier semestre de 1873. Le nombre de matières y est porté à 5 puisque les probabilités deviennent intégrées à la matière "*Astronomie*". Excepté la migration des travaux de probabilité à partir du tome 7 (2ème semestre 1874) [169] vers la section d'Arithmétique et Analyse, ce classement en cinq matières, matérialisé par

168. Le tableau 19 présenté ici ne fait pas apparaître les éventuelles sous-sections.
169. Ce septième tome marque également le retour des sous-titres au sein des 5 catégories de la table par noms d'auteurs.

le code couleur du tableau 19 présenté ci-dessus, sera conservé jusqu'en 1877 [170]. Surtout, suite à une initiative prise par Jules Hoüel à l'été 1873, l'ordonnancement par matières ne porte à partir de ce quatrième tome plus sur la table générale des mémoires et ouvrages, qui comprend les titres des travaux, mais sur la seconde table des noms d'auteurs qui ne les comprend pas. La table générale du Bulletin devient ainsi classée par ordre alphabétique, et il faudra se reporter à la seconde table pour obtenir, grâce au nom de l'auteur et au numéro de page, le classement des travaux selon les 5 matières. Darboux consentira, malgré quelques réticences, à conserver ce format de tables distinct de celui du Jahrbuch qu'il avait adopté au départ :

> Quant à la nouvelle disposition de la table, elle n'est pas plus mauvaise que l'ancienne et présente des avantages particuliers, j'en conviens ; mais l'inconvénient c'est que lorsqu'on voudra savoir par exemple ce qui s'est fait en arithmétique, au lieu de consulter comme autrefois une seule page, on sera obligé d'aller chercher d'abord la table par ordre des matières puis chaque nom en particulier. Ce n'est pas une critique que je vous fais. Chaque disposition offre des avantages et des inconvénients particuliers [...] maintenant en tous cas conservons-la. L'uniformité est là le point essentiel.
>
> Lettre datée du 29 Septembre 1873 de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
> [**Archives épistolaires Darboux**]

Si Darboux s'est dans un premier temps fortement inspiré du Jahrbuch pour compiler les tables récapitulatives de son Bulletin, il en a par la suite avec Hoüel profondément modifié la conception pour mieux souligner la différence entre son périodique et le journal d'Ohrtmann et Müller.

Nous avons souligné que, si l'on en croit les mots mêmes de Darboux, c'est le Zeitschrift qui était présenté comme un adversaire du Bulletin, tandis que ce-dernier et le Jahrbuch ne sont en revanche pas à proprement parler des concurrents. Nous avons également noté que le géomètre gardois était le seul à ne pas s'avouer l'existence de cette concurrence éditoriale. Cependant une autre forme de concurrence, plus inattendue, va s'instaurer entre ces deux périodiques : celle relative à la primauté de l'entreprise bibliographique des deux publications.

Il a été remarqué que l'un des rédacteurs du Jahrbuch, Emil Lampe, avait insisté rétrospectivement sur l'année 1868 comme le repère temporel du début du Jahrbuch [171] [**Lampe 1903**], ce qui a posteriori paraissait justifié puisque cela correspondait à la période de la production mathématique analysée dans le premier tome. En France, les membres de

170. En 1877, avec le début de la 2nde série du Bulletin qui marquera la séparation de la section de revue des publications périodiques - devenant un fascicule indépendant - des comptes-rendus d'ouvrages et des Mélanges - constituant un second fascicule - les tables générales du Bulletin abandonneront totalement les classements "méthodiques" par matières. On étudiera les changements apportés au Bulletin suite au nouveau contrat de Mai 1877 en [Chap.6,1.1].

171. Lampe écrit : "*Da der Nutzen eines solchen [wie die "Fortschritte der Physik"] die erste Orientierung ermöglichenden und erleichternden Werkes von den Physikern allseitig anerkannt wurde, so regte Carl Ohrtmann zu Berlin im Jahre 1868 die Gründung eines ähnlichen Organs für die Mathematik an*", [**Lampe 1903**, 97].

la Section de Mathématiques de l'EPHE dont émane le Bulletin vont au contraire, dans leur rapport annuel de 1873, souligner l'antériorité du Bulletin et considérer la création du Jahrbuch comme une réaction mimétique face à l'utilité et au succès de la publication française. Cela est bien sûr effectué dans le but de diminuer le crédit accordé aux rédacteurs allemands, et donc de glorifier le recueil parisien :

> L'utilité d'une telle publication [le Bulletin des Sciences] est si manifeste qu'en Allemagne l'exemple donné par la France a été suivi et que, depuis quelque temps, un recueil périodique du même genre y a été fondé, quoique sur un plan moins étendu.
>
> [Section Math. EPHE 1873, 4]

Pourtant, l'analyse menée au début de cette section nous a permis d'affirmer que les créations du Bulletin et du Jahrbuch avaient été non seulement concomitantes (datant de Décembre 1869), mais en outre effectuées sans que ni d'un côté ni de l'autre on eût connaissance du projet concurrent. Le climat de tension entre la France et l'Allemagne au sortir de la guerre de 1870 n'a pas eu un fort impact sur la collaboration des scientifiques des deux pays, nous l'avons vu. Mais il aura sans doute motivé le rapport annuel de la Section de Mathématiques, et attisé de part et d'autre du Rhin l'envie de chacun de faire primer sa publication en s'octroyant l'antériorité de l'entreprise.

Ce climat pourrait également expliquer l'animosité de Darboux à l'égard du rédacteur allemand Carl Ohrtmann. Mais nous allons voir que c'est un autre événement qui est à l'origine de cette aversion.

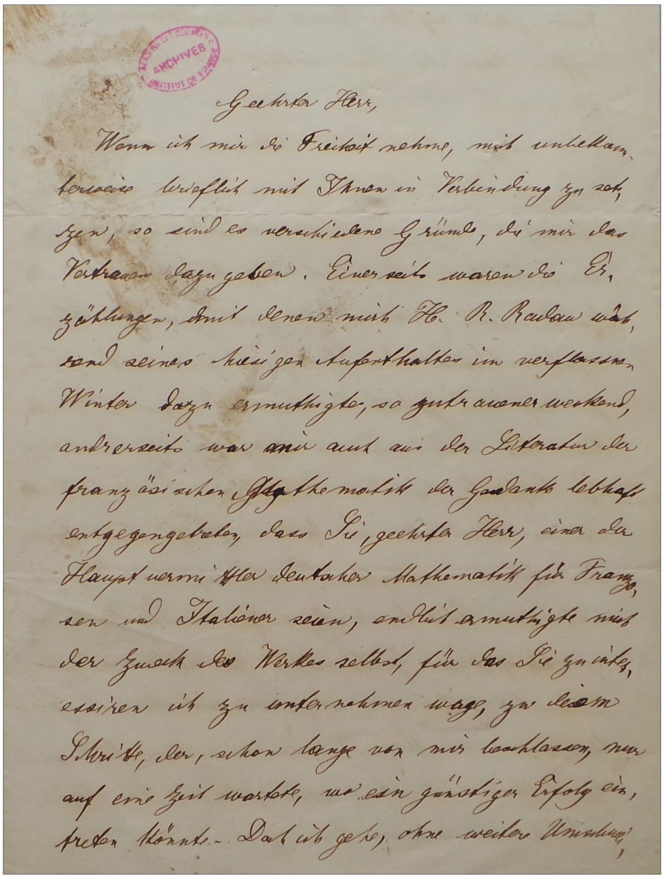
4.3. Un Hoüel très convoité.

Au début de l'été 1871, Carl Ohrtmann et Félix Müller entament les travaux du second tome du Jahrbuch. Pour rattraper le décalage entre la période des publications recensées et la parution du recueil, ils ont décidé que le second tome regrouperait à la fois les travaux de 1869 et de 1870. La quantité de travail accrue exige le recrutement de nouveaux collaborateurs pour écrire les comptes-rendus. D'autre part, Ohrtmann sait qu'à Berlin il ne peut recevoir la totalité des publications scientifiques françaises, et la guerre vient d'accentuer les difficultés de circulations des journaux entre la France et l'Allemagne [172]. Enfin, parmi les collaborateurs qu'il a su s'attacher jusqu'alors, aucun n'est français [173].

Pour remédier à cela, Ohrtmann décide de recruter un collaborateur français. Ce qui est surprenant, c'est que le berlinois jette son dévolu sur celui qui fait partie de la rédaction du périodique français qui apparaît comme son concurrent - le Bulletin des Sciences - en la personne de Jules Hoüel. Le 16 Juillet 1871, Ohrtmann écrit donc à Hoüel en ce sens.

---

172. Ceci est également une difficulté que nous avons évoquée plus haut pour le Bulletin.
173. Rodolphe Radau, né prussien mais naturalisé français, a néanmoins collaboré au travail du premier tome du Jahrbuch.



Geehrter Herr,

Wenn ich mir die Freiheit nehme, mich unbekannterweise brieflich mit Ihnen in Verbindung zu setzen, so sind es verschiedene Gründe, die mir das Vertrauen dazu geben. Einerseits waren die Erzählungen, mit denen mich H. R. Radau während seines hiesigen Aufenthaltes im verflossenen Winter dazu ermuthigte, so zutrauenerweckend, andrerseits war mir auch aus der Literatur der französischen Mathematik der Gedanke lebhaft entgegengetreten, dass Sie, geehrter Herr, einer der Hauptvermittler deutscher Mathematik für Franzosen und Italiener seien, endlich ermuthigte mich der Zweck des Werkes selbst, für das Sie zu interessiren ich zu unternehmen wage, zu diesem Schritte, der, schon lange von mir beschlossen, nur auf eine Zeit wartete, wo ein günstiger Erfolg eintreten könnte. Doch ich gehe, ohne weitere Umschweife,

FIGURE 20. Première page de la lettre de Carl Ohrtmann à Jules Hoüel datée du 16 Juillet 1871, [**Archives épistolaires Ohrtmann**]

Il commence par complimenter le mathématicien normand pour la qualité de ses travaux scientifiques, ainsi que pour avoir été l'un des principaux acteurs de la diffusion des mathématiques allemandes en France et en Italie. Puis il détaille la création du Jahrbuch ainsi que les buts fixés par les rédacteurs. Viennent ensuite la liste des collaborateurs et le motif précis de la lettre d'Ohrtmann :

> [...] bereits ist eine Anzahl bedeutender Mathematiker gewonnen, die es übernommen haben, uns die betreffenden Referate über mathematischen Arbeiten ihres respektiven Landes zu liefern. Ich erwähne für England die Herren Henrici, Cayley, Casey, Glaisher, für Italien Jung, Cremona, Battaglini, Beltrami, ; für Russland Korkine, Zolotareff ; für Skandinavien Hansen ; für Deutschland selbst eine Anzahl haüfiger Gelehrter, von denen Ihnen vielleicht die Herren R. Hoppe, F. Klein bekannt sind. Nur Frankreich steht in dieser Beziehung noch aus. Und doch nimmt dies gerade eine so grösse Stelle in den Leistungen unserer Wissenschaft ein ! [...] Die Bitte nun, geehrter Herr, mit der ich mir die Freiheit nehme, Ihnen zu nahen, geht darin, dass Sie so für die Zukunft übernehmen möchten, uns Referate über [französische] Publikationen, wie die oben erwähnten, uns

> nicht zugänglichen [...] wie über die selbststandig erscheinenden Werke Frankreichs zu tiefern. [...] Das Honorar das wir unsern geehrten Mitarbeitern bieten können ist gering (6 Tahler - 22,5 Francs), indessen die einem derartigen Unternehmen nicht wohl höher möglich ist. [174]
>
> Lettre datée du 16 Juillet 1871 de Carl Ohrtmann à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Ohrtmann**]

Dans sa lettre Ohrtmann n'évoque pas une seule fois ni le Bulletin des Sciences ni Darboux. Pourtant Ohrtmann collabore avec Félix Klein pour la rédaction du Jahrbuch. Or Félix Klein, par son séjour à Paris au Printemps de 1870 et sa correspondance avec Darboux, est tout à fait au courant de l'entreprise de publication de Darboux et Hoüel. Il l'a en outre mentionnée dans son rapport à l'Université de Berlin. Par ailleurs, Ohrtmann est ami et a travaillé à l'élaboration du premier tome du Jahrbuch avec Rodolphe Radau, comme il le rappelle dans le début de sa lettre, où il souligne que c'est Radau qui a, de par sa haute opinion de Hoüel, en partie motivé l'initiative du rédacteur allemand. Mais Rodolphe Radau est également un des plus proches collaborateurs de Darboux dans la rédaction du Bulletin des Sciences. Enfin, la lettre de Cantor à Schwarz datée du 30 Mars 1870 ([**Meschkowski Nilson 1991**, 25] citée dans 4.2) prouve que la parution du "*Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*" était déjà connue à Berlin des mathématiciens allemands quelques semaines seulement après son lancement. Il semble ainsi absolument impossible qu'Ohrtmann ait ignoré l'existence du Bulletin ainsi que l'importance de la participation de Hoüel à sa rédaction : espérant s'attirer la collaboration du bordelais, Ohrtmann fait (habilement ?) le choix de passer cela sous silence.

Très rapidement, Hoüel va décliner la proposition d'Ohrtmann, mettant en avant la part de responsabilité qu'il occupe dans la rédaction du Bulletin des Sciences. Néanmoins il accède en partie aux requêtes d'Ohrtmann puisqu'il lui fait parvenir les "*Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*" que ce-dernier avait écrit ne pas avoir à sa disposition à Berlin pour en effectuer les comptes-rendus. Il lui envoie également un exemplaire de son "*Cours de calcul infinitésimal*". Enfin, il lui conseille de reporter son choix sur Rodolphe Radau pour effectuer des comptes-rendus sur les publications mathématiques françaises.

Ohrtmann n'abdiquera qu'à regret, et exprimant cette fois sa volonté de soutien à la rédaction du Bulletin des Sciences, bien que ceci constitue précisément la raison du refus de Hoüel :

174. « [...] nous avons déjà réuni un certain nombre de mathématiciens de premier ordre, lesquels ont entrepris de produire les comptes-rendus des travaux mathématiques de leurs pays respectifs. Je peux mentionner pour l'Angleterre ces Messieurs Henrici, Cayley, Casey, Glaisher, pour l'Italie Jung, Cremona, Battaglini, Beltrami, pour la Russie Korkine, Zolotareff, pour la Scandinavie Hansen, pour l'Allemagne elle-même un certain nombre d'importants érudits parmi lesquels vous connaissez peut-être Messieurs R. Hoppe et F. Klein. Seule la France fait défaut à cet égard. Et pourtant celle-ci occupe bien une place si importante dans les avancées de notre science ! [...]

La demande, cher Monsieur, qui me pousse à prendre la liberté de me rapprocher ainsi de vous, consiste à savoir si vous aimeriez à l'avenir entreprendre de nous fournir les comptes-rendus pour les publications françaises dont nous ne disposons pas, comme je l'évoquais précédemment, mais également pour les œuvres paraissant de manière indépendante en France.

[...] Les honoraires que nous pouvons offrir à nos chers collaborateurs sont faibles (6 Thalers, 22,5 Francs), néanmoins pour une entreprise de la sorte il est impossible d'en obtenir de plus élevés. », [**Archives épistolaires Ohrtmann**].

> Ich brauche wohl kaum hinzuzufügen, mit welcher Freude wir Ihre gütige Vermittlung in Anspruch nehmen werden, um in eingegenseitiges freundschaftliches Unterstützungsverhältniss mit der Redaktion des Bulletin des sc. m. et ph. [sic] [175] zu treten, obgleich ich nicht umhin kann, mein lebhaftes Bedauern zu gestehen, dass Ihre direkte Unterstützung, geehrter Herr, uns in Folge Ihrer Thätigkeit bei demselben fehlen wird. [176]
>
> Lettre datée d'Août 1871 de Carl Ohrtmann à Jules Hoüel.
> [**Archives épistolaires Ohrtmann**]

Suite à ce refus de Hoüel, il n'y aura pour la rédaction du Jahrbuch aucun collaborateur français pendant de longues décennies, pas même Rodolphe Radau. Il semble même que les premiers "*reviewers*" français du Jahrbuch n'aient été que Jean Dieudonné en 1939 et Jean Leray en 1940 [177]. Au contraire, le Bulletin des Sciences comptera dès 1876 quatre collaborateurs allemands - outre Alfred Clebsch mort en 1872 - : Rodolphe Radau, Félix Klein, Rudolf Lipschitz et Emil Lampe. Néanmoins, le nombre de collaborateurs du Jahrbuch va augmenter régulièrement, et cette augmentation s'accompagnera d'une forte diversification des nationalités des rédacteurs comme en témoigne la liste ci-dessous tirée du Jahrbuch paru en 1889.

175. Ohrtmann, à l'instar de Hoüel dans sa lettre à Genocchi du 16 Juillet 1871 (3.2), effectue une erreur dans le titre du Bulletin, remplaçant astronomiques par physiques (ou philosophiques ?). Dans le second tome du Jahrbuch, on trouvera également une erreur (page 19) quant au prénom de Darboux : il est écrit "George" en lieu et place de Gaston. Quant à savoir si cela était intentionnel ...

176. « Je n'ai même pas besoin d'ajouter avec quelle joie nous accueillons votre heureuse entremise, pour construire des relations de soutien amicales et mutuelles avec la rédaction du Bulletin des sc. m. et ph., bien que je sois dans l'obligation de regretter vivement que votre soutien direct, cher Monsieur, nous fera défaut suite à votre activité au sein de cette même rédaction », [**Archives épistolaires Ohrtmann**]

177. Il faut préciser qu'Elie Cartan effectuera en 1927 un unique compte-rendu portant sur un de ses propres travaux intitulé "*Sur un problème du calcul des variations en géométrie projective plane*".

Verzeichnis

der Herren, welche für den achtzehnten Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate.)

A.	Herr Prof. August in Berlin.
B.	" Prof. Bruns in Leipzig.
Bg.	" Prof. Björling in Lund.
Bm.	" Prof. v. Braunmühl in München.
Cly.	" Prof. Cayley in Cambridge.
Dn.	" Dickstein in Warschau.
E.	" Prof. G. Eneström in Stockholm.
E. K.	" Dr. E. Kötter in Berlin.
El.	" Dr. Engel in Leipzig.
F. K.	" Dr. F. Kötter in Berlin.
G.	" Prof. v. Geer in Leiden.
Gbs.	" Assist. Prof. Gibson in Glasgow.
Glr.	" Prof. Glaisher in Cambridge.
Gm.	" Dr. Gram in Kopenhagen.
Gr.	" Prof. Günther in München.
H.	" Prof. Hoppe in Berlin.
Hch.	" Dr. Henoch in Berlin.
Hk.	" Prof. Hauck in Berlin.
Hr.	" Prof. Hamburger in Berlin.
H. S.	" Dr. Heinr. Simon in Berlin.
Ht.	" Dr. Hilbert in Königsberg i. Pr.
Hz.	" Prof. Hurwitz in Königsberg i. Pr.
Js.	" Dr. Jolles in Aachen.
Kr.	" Prof. Krazer in Strassburg.
La.	" Prof. Loria in Genua.
Lbg.	" Dr. Lorberg in Strassburg.
Lg.	" Dr. Lange in Berlin.
Lp.	" Prof. Lampe in Berlin.
Ls.	Herr Lazarus in Hamburg.
M.	" Prof. F. Müller in Berlin.
Mi.	" Dr. Michaelis in Berlin.
M. L.	" Prof. Mittag-Leffler in Stockholm.
Mn.	" Prof. Mansion in Gent.
M-n.	" Prof. Mellin in Helsingfors.
My.	" Prof. F. Meyer in Clausthal.
Mz.	" Dr. Maynz in Ludwigslust.
N.	" Prof. Neumann in Leipzig.
No.	" Prof. Netto in Giessen.
P.	" Dr. Petzold in Hannover.
Rdt.	" Dr. Reinhardt in Meissen.
R. M.	" Dr. R. Müller in Berlin.
Rs.	" Dr. Rosochatius in Berlin.
Sbt.	" Dr. Siebert in Gross-Lichterfelde.
Schg.	" Dr. Schlegel in Hagen.
Schn.	" Prof. Schumann in Berlin.
Scht	" Prof. Schubert in Hamburg.
Sn.	" Dr. P. Simon in Berlin.
Std.	" Prof. Studnička in Prag.
T.	" Dr. Toeplitz in Breslau.
Tn.	" Prof. Treutlein in Karlsruhe.
Tx.	" Prof. Teixeira in Porto.
Vi.	" Dr. Vivanti in Mantua.
Wi.	" Prof. A. Wassilieff in Kazan.
Wn.	" Prof. Wangerin in Halle a. S.
W. St.	" Prof. W. Stahl in Aachen.
Wz.	" Dr. Weltzien in Berlin.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Dr. Max Henoch, Berlin W, Victoriastr. 29.

FIGURE 21. Liste des collaborateurs du Jahrbuch concernant le recensement des travaux de l'année 1886

Darboux apprendra un peu plus tard par Hoüel lui-même cette tentative avortée de débauchage de son plus proche collaborateur, et ceci sera à l'origine d'une forte animosité de Darboux à l'égard d'Ohrtmann. Cette animosité se manifestera quelques mois plus tard : le 2 Janvier 1872, Ohrtmann écrit de nouveau à Hoüel [178]. Il envisage de publier un petit travail historique sur un problème de mécanique, le problème des tautochrones, et il lui manque des notes sur la vie de certains mathématiciens français apparaissant dans son travail [179]. Aussi demande-t-il à Hoüel si ce-dernier peut l'aider en lui écrivant ces notices qui lui sont nécessaires. Apprenant cela, la réaction de Darboux est immédiate et sans appel :

> Il est bon, Ohrtmann. Quelle race que ces Prussiens. Voyez-vous, ne dîtes rien pour les défendre, ce serait inutile, je ne les digérerai jamais.

178. Voir la lettre datée du 2 Janvier 1872, [**Archives épistolaires Ohrtmann**].

179. Les mathématiciens français sur lesquels Ohrtmann demande des notices sont le Père Jullien, Duhamel, Puiseux, Bertrand et Haton de la Goupillère. Le travail d'Ohrtmann sera publié, il s'agit de [**Ohrtmann 1872**].

Lettre non datée (1872) de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
[**Archives épistolaires Darboux**]

Les positions franchement internationalistes de Darboux, en tant que mathématicien et en tant que rédacteur, n'empêchent pas le géomètre d'avoir en privé quelques accès de rage contre l'occupant allemand (l'annexe 8 le confirme). Ceci rend d'ailleurs la lecture de sa correspondance particulièrement savoureuse. Nous clôturerons de ce fait ce chapitre avec les superbes vœux que Darboux écrit à son collaborateur Hoüel pour l'année 1872 :

> Espérons que 1872 nous apportera des Universités, des chaires, et nous débarrassera de nos aimables hôtes aux belles bottes que je voudrais bien voir à tous les diables, malgré leur talent pour les mathématiques.
>
> Je termine cette lettre en vous serrant cordialement la main.

Lettre non datée (2 Janvier 1872) de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
[**Archives épistolaires Darboux**]

5. Quelques conclusions sur la création et le lancement du Bulletin des Sciences

Le *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques* a donc été le fruit de l'opiniâtreté de Michel Chasles. Décidé à voir renaître l'ancien *Bulletin de Férussac* pour contribuer au redressement des mathématiques françaises qu'il voit sombrer dans l'autarcie, Chasles profite en 1868 de la création de l'Ecole Pratique des Hautes Etudes pour tenter de donner vie à son projet. Cependant, le Ministre Duruy, fondateur de l'Ecole Pratique, n'adhérera pas au projet de Chasles. Les mathématiques sont à la marge de l'institution qu'il a créée avant tout pour promouvoir l'enseignement pratique. Eloignée des laboratoires qui sont au cœur de cette Ecole, la section de mathématiques est pensée au départ par le Ministre comme un incubateur d'élèves-astronomes, une antichambre de l'Observatoire. Cette vision ne correspondra pas à la réalité d'une section délaissée qui peinera à trouver sa voie. Par ailleurs, les publications de l'Ecole Pratique bénéficient grâce à Victor Duruy d'un appui financier sous réserve que celles-ci aient pour vocation de publier les travaux des membres de cette Ecole. Ceci n'est pas en accord avec le projet de Bulletin de Chasles. Il faudra ainsi que le grand géomètre attende plus d'un an pour que le successeur de Duruy permette finalement la création d'un *Bulletin des Sciences* qui, publié sous le régime avantageux des recueils de l'Ecole Pratique, n'en émane toutefois que très indirectement.

Si Gaston Darboux devient le rédacteur du Bulletin, c'est avant tout parce que cela semble avoir toujours fait partie du projet de Chasles. Dès 1868, Darboux constitue en effet selon lui un rédacteur idéal : mathématicien déjà renommé en France et progressivement à l'étranger (voir Chapitre 4), le nîmois est en rupture avec le paysage mathématique français dans la mesure où il ne fait pas "*de la science nationale*", comme l'écrira bientôt Cremona. Tout comme Hoüel qui s'associera spontanément à la rédaction du Bulletin fin 1869, Darboux partage l'avis d'un Chasles qui réalise et condamne le repli sur soi des mathématiques françaises. Journal de recension, le *Bulletin des Sciences* doit contribuer à enrayer ce déclin. En dépit de la volonté conjuguée de Darboux et Hoüel de participer à ce même élan en publiant des traductions d'ouvrages, Chasles s'y oppose, voulant entièrement calquer le nouveau Bulletin sur l'ancien *Bulletin de Férussac*.

Mais la mainmise de Chasles et de la Commission de patronage de la section Mathématiques de l'Ecole Pratique sur le Bulletin des Sciences s'évanouit rapidement, et dès avant le déclenchement de la guerre franco-prussienne, c'est bien Gaston Darboux qui en apparaît comme le leader. Dans cette mesure, et bien que le journal ait été créé par Chasles en 1869, il semble justifié de dire que Darboux a réellement lancé "son" Bulletin en 1870. Pour faire face aux difficultés d'approvisionnement, en terme de journaux devant être recensés, les rédacteurs du Bulletin instaurent rapidement un vaste système d'échanges avec de nombreux périodiques mathématiques européens. Ce système de troc des publications scientifiques entre rédacteurs à grande échelle deviendra très courant, comme en témoigneront les procédés de Gösta Mittag-Leffler une dizaine d'années plus tard lors du lancement des *Acta Mathematica*. Pour fournir le travail de rédaction, Darboux recrute indépendamment une poignée de mathématiciens, dont Loewy et Radau seront les premiers, mais surtout il repense de manière innovante la collaboration des rédacteurs des périodiques mathématiques européens en les enjoignant à fournir eux-mêmes les comptes-rendus des mémoires de leurs journaux respectifs.

Notre étude a permis de souligner qu'à court terme, ces stratégies ont été couronnées de succès. Dans le climat européen difficile, où la guerre franco-prussienne exacerbe les tensions, cette réussite est surtout le résultat de l'internationalisme prôné par Darboux et Hoüel. Le Bulletin des Sciences est en effet une publication qui se veut "*rédigée en vue de la science européenne*" comme l'écrit Hoüel, où les questions de nationalité sont bannies. Darboux veille ainsi à ce que les rivalités avec la Prusse après la guerre n'interfèrent pas dans son journal, et l'attitude révélatrice de Lipschitz démontre qu'il y parvient. Ceci, nous le détaillerons, rejaillira sur sa propre réputation : le journal et le rédacteur se forgeront ainsi de concert des réputations internationalistes.

Pour finir, nous avons vérifié que la création du *Jahrbuch über die Forschritte der Mathematik* avait été effectuée, à Berlin, dans le même temps que celle du Bulletin parisien et de manière complètement indépendante. Journal de recension par excellence, Darboux refuse pourtant de considérer que le Jahrbuch puisse représenter un concurrent pour son Bulletin. Dans l'urgence de la "*remise au courant*" de son journal, il compose les tables récapitulatives de fin de volume en prenant exemple sur celles du Jahrbuch. Mais une fois le Bulletin "remis au courant", le nîmois compose de nouvelles tables, plus synthétiques, qui se démarquent de celles du recueil allemand. S'il ne considère pas celui-ci comme un concurrent, en revanche Darboux s'en inspire car il constitue le seul journal pour lequel la comparaison avec le Bulletin est pertinente. A cet égard, il est un modèle non seulement à court terme pour le format des premières tables récapitulatives, mais ensuite à plus long terme pour perfectionner les renseignements bibliographiques et la tenue générale du journal. La comparaison avec le Jahrbuch dont il juge la lecture "*ennuyeuse comme la pluie*" incite Darboux notamment à renforcer la part de la section de Mélanges du Bulletin. Il s'agit en effet de diversifier le journal pour ne pas le voir réduit à une simple liste bibliographique.

CHAPITRE 6

Influences mutuelles entre un rédacteur et son journal

Les études historiques sur les journaux scientifiques du XIXème siècle ont, à la suite du travail de Jean Dhombres, souvent distingué les journaux *libres* des recueils académiques ([**Dhombres 1994**]). Le périodique scientifique libre y apparaît comme le recueil d'un grand savant : la "*personnalisation du journal*" [1] est alors prédominante. Les enquêtes entreprises ensuite à propos notamment du *Journal de Liouville* et des *Annales de Gergonne* ont confirmé la place fondamentale occupée par le rédacteur-fondateur dans le fonctionnement, la nature et le contenu de son journal ([**Verdier 2009a**], [**Gerini Verdier 2014**]).

Dans ce chapitre, nous entreprendrons l'étude des courants d'influence entre le rédacteur Gaston Darboux et son journal le Bulletin des Sciences dans le sens le plus large possible. Pour une part, nous retrouverons ainsi les approches et les résultats des études historiques citées ci-dessus en nous penchant sur l'analyse du contenu du Bulletin. En effet, ce type d'enquête révélera la force de l'influence de Darboux, qui est presque le seul maître à bord, sur la nature de son journal en terme de contenu. Nous nous inspirerons pour cela des études déjà entreprises par Hélène Gispert que nous prolongerons ([**Gispert 1984**], [**Gispert 1985**]). Nous traquerons ainsi l'influence de Darboux sur la teneur de son Bulletin via une analyse statistique des deux sections principales du journal : les Mélanges et la Revue des périodiques. Nous détaillerons d'ailleurs le bien-fondé de nos enquêtes en distinguant la spécificité de la troisième section, celle de Revue Bibliographique, qui ne se prête pas à une enquête analogue.

Par ailleurs, Jean Dhombres avait mis en avant la pertinence d'une étude dédiée aux conditions matérielles de fonctionnement des journaux : "*à savoir les finances, le coût bien sûr - et donc les tirages - mais aussi bien la nature des subventions reçues, en particulier les octrois publics, mais encore la part des abonnements automatiques par le fait de l'administration dans des abonnements et la part de ceux-ci dans la vente elle-même*" ([**Dhombres 1994**, 120]). L'historien avait alors regretté le manque de résultat des recherches historiques à ce sujet. En effet, l'inaccessibilité des archives des éditeurs et des imprimeurs constitue souvent un obstacle insurmontable pour ce genre de recherche. Nous reprendrons cependant cette thématique avec succès grâce aux nombreux renseignements compilés dans diverses communications épistolaires. Nous pourrons ainsi réutiliser les pistes

1. Voir [**Dhombres 1994**, 118].

évoquées par Jean Dhombres, et y déceler la force de l'influence de Darboux sur le fonctionnement de son entreprise éditoriale.

Toutefois les analyses précédentes ne rendent compte que d'une influence à sens unique : celle du rédacteur Darboux sur son journal. Nous y ajouterons ainsi une composante nouvelle, qui nous paraît fondamentale dans le cadre des approches biographiques des savants liés à des publications scientifiques. Il s'agira ainsi de mettre en relief l'influence du Bulletin des Sciences sur Darboux.

Pour y parvenir, nous pisterons d'abord les critères de subjectivité des données de nos enquêtes. Les résultats statistiques gagneront ainsi à pouvoir être interprétés non plus uniquement comme issus d'une influence de Darboux, mais également comme reflets d'une influence du journal sur Darboux. Dans ce cadre, nous dessinerons une première fois les contours du bouleversement de la trajectoire scientifique de notre héros au début des années 1870.

Nous proposons d'appréhender les influences du Bulletin des Sciences sur Darboux en opérant une distinction entre deux types d'influences. Elles peuvent en effet provenir d'une part des échanges scientifiques forts liés aux collaborations entreprises pour le journal. Dans ce cas, l'influence revêt un caractère personnel. Mais elles peuvent également trouver leur source dans les recensions des ouvrages et des mémoires faites pour le journal. Elles sont alors impersonnelles. C'est en menant une analyse plus fine qui mettra en relation les échanges avec Hoüel, les recensions effectuées dans le cadre du Bulletin des Sciences, et les travaux effectués par Gaston Darboux que nous révélerons pleinement la force de ce courant d'influence du journal sur le rédacteur. Cette influence est à l'origine d'un profond changement de son identité scientifique, de ses centres d'intérêt mathématiques et de sa production. Nous en étudierons en détail l'impact dans le dernier chapitre 7.

Nous commencerons ce chapitre en nous focalisant sur les courants d'influence de Gaston Darboux sur son Bulletin sans toutefois prendre en compte la nature du contenu du journal. Dans cette première section (1), nous ferons écho aux pistes d'étude signalées d'abord par Jean Dhombres en attachant une importance particulière à une enquête sur les contrats entre le Ministère de l'Instruction Publique et l'imprimeur Gauthier-Villars. Ce sont en effet ces contrats qui régissent le fonctionnement matériel du Bulletin des Sciences, et dont l'étude nous permettra de retrouver les différents éléments que l'historien regardait comme étant pertinents. Nous y analyserons également l'équipe de collaborateurs que Gaston Darboux met en place pour rédiger son Bulletin. Les caractéristiques de cette population de rédacteurs retranscriront nettement l'influence du rédacteur en chef nîmois dans les répercussions des choix qu'il décide d'opérer, et dans l'incidence des objectifs qu'il fixe à son journal et pour son journal.

La seconde section (2) sera le cadre d'une étude du contenu du Bulletin des Sciences. Pour obtenir des comparaisons opportunes avec les travaux préexistants, cette enquête sera menée sur la période 1870-1875 correspondant aux neuf premiers tomes du Bulletin. Nous nous attacherons à effectuer pour chacune des trois grandes sections du journal trois analyses différentes, pour bien faire ressortir l'influence de Gaston Darboux tout en s'assurant du bien-fondé de nos approches. En vertu de l'effet miroir des interprétations que nous avons signalé, nous y dégagerons également la nette évolution de sa production scientifique sur la période étudiée. Nous aurons par ailleurs l'occasion d'y évoquer le rôle des journaux dans la définition des frontières des domaines scientifiques via la scission de la partie astronomique du Bulletin.

Enfin, la troisième section (3) sera entièrement consacrée à la mise en évidence des influences du Bulletin des Sciences sur Gaston Darboux. Nous commencerons par analyser l'impact de la vie sociale dont la création accompagne celle du journal, et où Darboux, muni de sa nouvelle identité sociale de rédacteur en chef, est le personnage central. Nous aborderons également ses qualités d'administrateur, son statut et sa réputation au-delà des frontières, ainsi que ses habitudes de publication. Puis nous nous pencherons sur l'influence du Bulletin des Sciences sur le cheminement intellectuel de son rédacteur. Nous rencontrerons le rôle de Jules Hoüel dans le cadre des influences personnelles en lien avec la théorie des équations différentielles et la géométrie non-euclidienne. Nous étudierons également les influences impersonnelles sur Darboux des travaux des mathématiciens allemands relatifs aux fondements de l'analyse. Nous verrons que la force de cette influence sera telle, que le mathématicien nîmois finira par incarner l'école de Berlin de Karl Weierstrass dont il hérite à distance des leçons grâce à son travail de recension.

1. La prédominance de Darboux sur la forme et le fonctionnement de son Bulletin

Nous commencerons cette partie en rappelant brièvement l'influence de Darboux sur la forme même des fascicules du Bulletin dans la première section. Nous étudierons ensuite plus longuement les conditions matérielles d'existence de la publication à travers les contrats reliant le Ministère de l'Instruction et l'imprimeur Gauthier-Villars. Pour finir, la dernière section sera dédiée à l'analyse des collaborateurs du Bulletin sur la période 1870-1875 [2]. Nous y donnerons de courtes notices biographiques des principaux collaborateurs, et y dresserons le portrait du collaborateur type pour faire ressortir les effets des choix et des intentions de Darboux.

1.1. Le découpage en sections des numéros.

L'influence de Darboux sur le Bulletin qui apparaît la plus tôt et de la manière la plus nette concerne la forme adoptée pour les fascicules du périodique. Lors de la mise en marche du Bulletin durant l'hiver 1869-70, c'est en effet sous son impulsion que naissent les divisions en sections du futur journal ainsi que leur titre :

> Voilà ce que je vous proposerai comme titre. La 1ère section portera le titre 'Analyse des livres'. Peut-être conviendrait-il de mettre :
> Première section
> Analyse des livres
> ... Théorie des fonctions etc....
> .....

2. Cette période est choisie pour respecter le cadre temporel de l'étude ultérieure relative au contenu du Bulletin des Sciences (partie 2).

> peut-être pourrait-on se contenter du titre
> Analyse des livres.
>
> La 2ème section
> – Revue des publications périodiques –
> Sous-titre Journal de Borchardt
> cahier tome.
>
> [...]
>
> Enfin nous aurions une 3ème section pour les Mélanges où l'on mettrait la correspondance, les traductions de certains passages, les notes rétrospectives etc.
>
> Si vous acceptez ces idées, je prendrai dès à présent des dispositions avec M. Gauthier.
>
> Lettre non datée (Janvier 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

C'est également sur son initiative qu'est lancée la section optionnelle de Revue Bibliographique comportant une liste des ouvrages récemment publiés. Cette section additionnelle lui permet de *faire tampon* à la fin des fascicules en adaptant sa longueur à l'espace disponible.

Nous avons déjà analysé les choix de mise en forme du journal lors de son lancement en [Chap.5,3.2], aussi nous n'y reviendrons pas en détail. Le caractère prédominant de Darboux dans les choix ayant trait à la forme ou aux conditions matérielles de sa publication sera en fait être largement révélé dans la partie ci-après 1.2 : le changement de fréquence de publication des volumes, la taille des fascicules, le début d'une nouvelle série, toutes ces décisions sont prises par le seul Darboux. Hoüel n'en est bien souvent informé qu'*a posteriori*. Certes les contributions du bordelais sont bien loin d'être négligeables, mais force est de constater que les deux rédacteurs ne sont pas sur un pied d'égalité. Le *Bulletin Darboux* méritera ainsi rapidement son surnom : c'est bien Darboux qui possède le pouvoir décisionnel. La résolution de séparer *mathématiques* et *astronomie*, prise en 1884 et sur laquelle nous reviendrons dans l'épilogue de la section 2, participera encore de la même dynamique unilatérale.

1.2. Ce n'est pas qu'une question de moyens ? Le prix et les contrats avec Gauthier-Villars.

L'étude des choix de mise en forme du Bulletin des Sciences lors de son lancement nous a révélé que Darboux n'avait que rarement obtenu satisfaction. A la fin de l'année 1869, c'était en effet Chasles - et avec lui toute la Commission de l'EPHE qu'il préside - qui imposait ses choix, en dépit de certaines objections du futur rédacteur.

> J'avoue que j'aurais préféré une publication bimensuelle. Cela ne fera donc que 32 pages par mois. [...]
>
> Pour les Mémoires étendus, la Commission a décidé qu'on n'en imprimerait pas [...]

Lettre non datée (Janvier 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
[**Archives épistolaires Darboux**]

Mais comme nous l'avons mis par ailleurs en relief (voir [Chap.5,3.2]), l'influence de Chasles et de la Commission sur la rédaction du Bulletin disparaît rapidement au profit des rédacteurs. Il ne faut en effet pas plus d'un semestre pour que Chasles et la Commission ne leur laissent entièrement les rennes du journal. Dès lors, c'est Darboux qui va imposer ses choix, et cela sera particulièrement sensible lors des renégociations du contrat qui lie Gauthier-Villars au Ministère de l'Instruction Publique. De telles renégociations auront lieu une première fois en Mai 1873, puis une seconde en Mai 1877.

Dans son enquête générale sur les journaux professionnels, Jean Dhombres avait souligné la pertinence des études relatives aux finances des journaux scientifiques. Pour cette "*question pratiquement inviolée pour ce qui est des journaux français*", dont "*on ne peut faire l'impasse*", l'historien avait déploré le manque de résultats. "*L'enquête jusqu'ici menée s'avère décevante : rien n'a pu être obtenu sur la Correspondance de l'Ecole Polytechnique ou sur le Journal de l'Ecole Polytechnique, pas plus d'ailleurs que sur le Journal de Liouville*" ([**Dhombres 1994**, 120]). [**Gispert 1987**] avait néanmoins donné quelques précieux éléments d'information à ce sujet concernant le lancement du *Bulletin des Sciences*. Nous allons ci-après poursuivre et compléter cette enquête, pour laquelle nous avons pu pallier, pour une fois, au manque d'archives des éditeurs grâce à l'abondance des correspondances des rédacteurs[3].

Pour la négociation du premier contrat, celui du 20 Décembre 1869, Darboux avait essentiellement demandé deux choses auprès de Chasles : avoir une publication bimensuelle, et obtenir un prix de vente peu élevé. Nous avons vu qu'il n'avait pas obtenu gain de cause pour le premier point. Pour le second en revanche, Chasles et Gauthier-Villars s'accordent sur un prix annuel pour le *Bulletin des Sciences* de 15 francs à Paris, 18 francs en Province et à l'étranger.

Darboux est déjà conscient que le prix du Bulletin sera un facteur important pour son succès, et il était allé rencontrer seul Gauthier-Villars à ce sujet avant même la conclusion de l'accord. Il s'était alors entendu avec l'éditeur sur un prix de 12 francs pour les personnes déjà abonnées chez Gauthier-Villars. C'est pourquoi les 15 francs décidés dans le contrat final ne correspondent pas à ses attentes :

> Le prix de la publication sera de 15 F, 400 pages à peu près. Je trouve le prix un peu élevé. M. Gauthier m'avait promis de faire une réduction aux personnes déjà abonnées chez lui à un autre recueil. J'espère qu'il la fera l'année prochaine.

Lettre non datée (Janvier 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
[**Archives épistolaires Darboux**]

Darboux aurait donc voulu obtenir un abonnement à Paris de 12 francs pour le Bulletin, et c'est ce qu'il envisagera un temps de modifier pour la seconde année de fonctionnement : "*Gauthier m'avait dit qu'il donnerait le Bulletin à 12 F à toutes les personnes ayant des abonnements chez lui. [...] Je compte lui rappeler cette promesse et obtenir à la fin de*

3. A cet égard, nous ne pouvons qu'être extrêmement reconnaissants envers les efforts notamment déployés par Hélène Gispert et Philippe Nabonnand pour avoir contribué à l'édition de nombreuses correspondances mathématiques dont nous avons pu tirer *une foule de renseignements*, comme disait souvent Darboux.

l'année si nous avons 100 abonnés, ou bien le prix de 12 F, ou bien du petit texte pour les périodiques" [4]. Darboux abandonnera bien vite cette ambition suite aux troubles subis par le Bulletin pendant la guerre de 1870 qui vont redéfinir ses priorités.

Pour mieux comprendre l'opinion de Darboux vis-à-vis du prix de 15 francs, voici - en ordre croissant - les prix de quelques recueils scientifiques importants entre 1869 et 1872 [5] :

- Le "*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*" se vendra (à partir de 1871) en moyenne à Paris [6] à 4 francs (1 Thaler) par cahier, soit 12 francs pour un volume complet (3 cahiers).
- L'abonnement annuel aux "*Nouvelles Annales de Mathématiques*" s'élève à 15 francs par an.
- Les "*Annali di Matematica*" se vendent à 16 francs par an.
- Les "*Comptes-Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*" se vendent à 20 francs par an.
- Le "*Journal für die reine und angewandte Mathematik*" (dit *de Crelle* ou *de Borchardt*) se vend à Paris à 20 francs par an (16 francs en Allemagne).
- Le "*Zeitschrift für Mathematik und Physik*" d'Oskar Schlömilch se vend à 20 francs (5 Thaler) par an.
- Les "*Mathematische Annalen*" de Clebsch se vendent à 21,5 francs par an (5 Thaler 1/3) [7], un prix que Darboux condamne : "*Voilà un prix abominable, et qui fait du tort à une publication*" [8].
- Les "*Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*" se vendent quant à elles à 30 francs par an.

Une présentation des prix des différents recueils périodiques de la librairie Gauthier-Villars en 1885 est par ailleurs présentée à titre indicatif en annexe 4.

En dépit de l'avis de Darboux, le prix de l'abonnement au Bulletin est donc correct voire compétitif puisqu'en 1870 il s'agit du prix le plus faible parmi les principales revues mathématiques. Le fait que le Bulletin soit principalement une publication de recensions et non un journal publiant des mémoires originaux explique pourquoi, au-delà de la simple attractivité du contenu, le rédacteur nîmois attache de l'importance au prix de son recueil. Pour compenser ce prix à la vente relativement faible, le Ministère - qui souscrit automatiquement à 150 exemplaires du Bulletin - achète à Gauthier-Villars le périodique à 20 francs l'abonnement et non à 15. Cela correspond donc pour l'éditeur à une subvention annuelle

4. Lettre non datée (Mai 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].
5. Les données présentées ci-dessous proviennent des informations dispensées de manière éparse dans le premier tome du Bulletin des Sciences ainsi que dans les fascicules de "*Literaturzeitung*" du Zeitschrift.
6. Le prix des cahiers du Jahrbuch peut varier, ceux du second volume par exemple, qui rassemble exceptionnellement les deux années 1869 et 1870, se vendent à 4/3 Thaler soit environ 5,5 francs. En Allemagne, les cahiers se vendent le plus souvent à 2/3 Thaler.
7. Klein fera même passer le prix de l'abonnement à 6 Thaler (24 francs) à partir de 1874.
8. Lettre non datée (Mai 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

de 3,000 francs, qui est exactement équivalente à l'indemnité ministérielle de rédaction perçue par Darboux.

La première renégociation du contrat du Bulletin intervient en Mai 1873. Le Bulletin compte alors 140 abonnés payants (hors souscriptions du Ministère), un chiffre suffisamment élevé pour que Darboux soit en position de force vis-à-vis de son imprimeur. Le géomètre nîmois obtient alors ce qui à ses yeux fait défaut au Bulletin depuis sa création : une augmentation du nombre de pages pour pouvoir augmenter le volume de la section Mélanges, et ainsi insérer plus aisément la traduction des mémoires étrangers. Il obtient de faire passer le nombre de pages mensuelles de 32 à 48. Le nombre d'exemplaires du Bulletin destinés à la vente double par ailleurs, ce qui le porte à 200. Ceci était du reste rendu nécessaire par l'accroissement du nombre d'abonnés. Au total, le nombre de tirage des fascicules mensuels est donc de 350 [9]. Fait important pour Darboux, cette augmentation du nombre de pages et de tirages n'est accompagnée d'aucune modification du prix du Bulletin. Pour obtenir cela en revanche, c'est le Ministère de l'Instruction Publique qui fait encore des concessions : les abonnements qu'il souscrit passent au prix de 27 francs, ce qui entraîne pour l'imprimeur Gauthier-Villars une subvention annuelle de 4,050 francs. Enfin, Darboux décide de scinder les volumes annuels, désormais plus volumineux, en deux volumes semestriels. Il est remarquable que ces négociations et les décisions qui en découlent soient uniquement le fait du géomètre gardois : l'avis de Chasles n'est plus que consultatif, et Hoüel n'est pas même mis au courant de cette renégociation en cours. Il n'est informé par Darboux qu'une fois les modifications entérinées :

> Mon cher ami,
>
> Nous allons régulariser la situation du Bulletin et signer un nouveau traité par lequel nous aurons 43 feuilles définitivement. Au moment d'arrêter toutes les dispositions, j'ai été conduit à proposer la division de chaque année en deux volumes, et elle a été acceptée. Remarquez que, avec le papier que nous avons, un volume de 43 feuilles serait énorme. Je pense donc que vous approuverez mon idée [...]
>
> Lettre datée du 19 Mai 1873 de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
> [**Archives épistolaires Darboux**]

Avec ce nouveau contrat, Darboux continue par ailleurs de percevoir 3,000 francs annuels pour la rédaction du Bulletin. Et comme en 1869, il n'est acté d'aucune subvention additionnelle pour les collaborateurs, Hoüel y compris.

Au début de l'année 1875, le Bulletin subit un coup d'arrêt lorsque Darboux y consacre subitement moins de temps. Il mène alors de front de nombreux travaux personnels - dont plusieurs recherches sur les équations différentielles [10] -, ses cours de l'Ecole Normale et de la Sorbonne, mais doit en outre effectuer des inspections de lycées à Versailles, remplacer Louis-Félix Painvin, malade, à la Sorbonne - où il suppléait lui-même Bouquet -, et préparer

9. Les 150 exemplaires non destinés à la vente sont toujours souscrits directement par le Ministère de l'Instruction Publique.

10. Voir [Chap.7,3.2].

son déménagement [11]. Hoüel, qui parle alors de "*la crise du Bulletin*", rappelle à l'ordre son rédacteur en chef de manière très directe :

> Mais il faut absolument sortir de l'ornière où nous sommes en ce moment. Ou laissons-là le Bulletin et je ne demande pas mieux, car il me fait faire plus de mauvais sang qu'il ne rapporte d'utilité au public ; ou débarrassez-vous de vos occupations surabondantes pour y consacrer le temps nécessaire. Vous me parlez avec raison de votre facilité à faire des articles. Mais c'est là un talent qui ne suffit pas pour la direction d'un journal. Il faut aussi s'occuper de la partie administrative, et je crois que sur ce point je pourrais vous donner des leçons.
>
> [...]
>
> Si vous voulez que je continue à tirer la charrue du Bulletin de concert avec vous, il faut que vous commenciez par remettre un peu d'harmonie dans ce tohu-bohu. Aujourd'hui, c'est descendu à l'extrême limite de l'anarchie, et, si le Bulletin se relève de là, c'est qu'il aura la vie dure. Songez qu'un journal est comme un navire en mer, et que si le capitaine s'endort ou s'amuse dans sa cabine à faire des hautes mathématiques, le naufrage ne tardera pas.
>
> Lettre datée du 11 Mars 1875 de Jules Hoüel à Gaston Darboux, reproduite dans [**Henry Nabonnand 2016**, 497]

Accompagné par le formidable travail de Hoüel, Darboux ne mettra que deux semaines à réagir ; il écrira le 30 Mars 1875 : "*je ne vous ai pas écrit mais j'ai travaillé au Bulletin. Comme nous commençons à avoir de l'avance je vous enverrai dorénavant ma copie*" ([**Henry Nabonnand 2016**, 505]). Néanmoins les critiques sur sa capacité à administrer correctement le Bulletin exprimées par son collaborateur vont profondément le toucher. Durant l'été 1876, c'est pour cette raison que Darboux va proposer à Hoüel de quitter la rédaction du Bulletin, pour laisser le bordelais, qu'il conçoit être un meilleur administrateur que lui, seul à la tête de l'entreprise de publication. Mais Hoüel refusera tout net : Darboux reste un rédacteur précieux, indispensable au fonctionnement d'un Bulletin qu'il dirige et surtout qu'il représente. En outre Hoüel, depuis Bordeaux, aurait bien du mal à administrer le fonctionnement d'une publication éditée à Paris : "*il faudrait être sur les lieux*", dit-il, "*et je suis à 600 kilomètres*" [12]. Darboux prendra acte de la réponse de Hoüel et restera, évidemment, le rédacteur en chef du Bulletin :

> Je vous remercie de tout ce que vous me dîtes d'aimable dans votre dernière lettre. La proposition que je vous faisais de quitter le Bulletin n'était inspirée que par le sentiment de mon infériorité administrative et du peu de loisirs que je puis consacrer à notre publication. Il vaudrait beaucoup mieux que vous ayiez la direction du Bulletin.

11. Le Jeudi 2 Mars 1875, la famille Darboux quitte l'appartement de la rue Monge pour emménager au 36 rue Gay-Lussac. Gaston Darboux y restera presque toute sa vie, et pourtant il déménage encore l'année suivante, en 1876 ... Ce ne sera que pour changer d'étage : les Darboux s'installent en effet dans un grand appartement au 5ème et dernier étage du petit immeuble du 36 rue Gay-Lussac. Ils y resteront 33 ans, et y hébergeront notamment le jeune Emile Borel en 1888.

12. Cet argument est présenté dans la lettre de Hoüel à Darboux datée du 11 mars 1875 ([**Henry Nabonnand 2016**]). Gergonne avait lui, un demi-siècle plus tôt, orchestré sa publication à distance ([**Gerini 2014**]).

Lettre datée du 15 Octobre 1876 de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Mais de fait à partir de 1875, la principale difficulté rencontrée pour faire marcher correctement le Bulletin n'est pas (plus) l'implication de son rédacteur en chef. Cette difficulté est analogue à celle rencontrée un demi-siècle plus tôt par le baron de Férussac [13] : c'est le financement des collaborateurs du périodique. Ce financement devient en effet une nécessité pour s'assurer la contribution active et efficace des collaborateurs en charge des recensions. Hoüel est formel au sujet du manque d'attractivité de la collaboration au Bulletin : "*Il faut donc absolument, et sous peine de fermer la boutique, que vous vous arrangiez avec la commission (ou prétendue telle) des Hautes Études, ou avec le Ministère, pour allécher des collaborateurs. Sans cela, nous sommes f[ichus]*" [14]. En revanche, il ne pense pas à y remédier par un système de financement systématique et ne dit rien à ce sujet.

Dès le mois de Mars 1875, Darboux propose cependant de rémunérer les collaborateurs du Bulletin :

> Quant à l'avenir nous avons avec M. Gauthier pensé que ce qu'il y a de mieux à faire c'est d'assurer une rétribution aux collaborateurs. Surtout aux étrangers. Nous avons été amenés à penser qu'on pourrait diviser les articles en 2 séries, l'une à 2 fr la page, l'autre à 3 fr.

Lettre datée du 17 Mars 1875 de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Aucune subvention n'étant prévue à cet effet dans le contrat entre Gauthier et le Ministère, Darboux propose en fait - sans le mentionner - de donner une partie de son traitement de 3,000 francs à cet effet. Les deux échelles de rémunération aux collaborateurs lui paraissent justifiées par le fait que le travail de recension peut demander un investissement bien différent selon qu'il s'agit de certains périodiques abordables ou d'ouvrages difficiles.

Mais Hoüel n'approuve pas l'idée d'une telle rémunération : celle-ci est selon lui d'une part si faible qu'elle en est méprisante, et d'autre part l'existence de deux différentes sommes pourrait instaurer des rivalités entre les collaborateurs. En outre, ceux-ci pourraient alors être incités à rallonger inutilement leurs productions pour gagner plus. Il écrit :

> D'abord votre idée des deux catégories est on ne peut plus malheureuse. Et l'amour-propre des rédacteurs, qu'en faites-vous, s'il vous plaît ? Croyez-vous qu'un rédacteur à 40 sous n'enragera pas de voir son voisin traité à trois francs ? [...] Moi-même, je ne méprise pas les pièces de 40 sous [15], il en faut bien ; mais, tout mauvais que sont mes articles, je n'aurai pas beaucoup de courage pour en faire à deux francs la page. D'autre part, il y a des rédacteurs qui prennent cette prime au sérieux, croyez-vous qu'ils ne pourront pas bien se mettre à tirer à la page, en nous en donnant pour l'argent ? Il serait, je crois, beaucoup plus digne de payer vos collaborateurs en nature, en donnant aux plus actifs des abonnements gratis, en faisant des tirages à part de tous les travaux qui en

13. "*[C]'est par manque de crédits que le Bulletin [de Férussac] dut cesser de paraître au début de 1832*", [**Taton 1947**, 100].

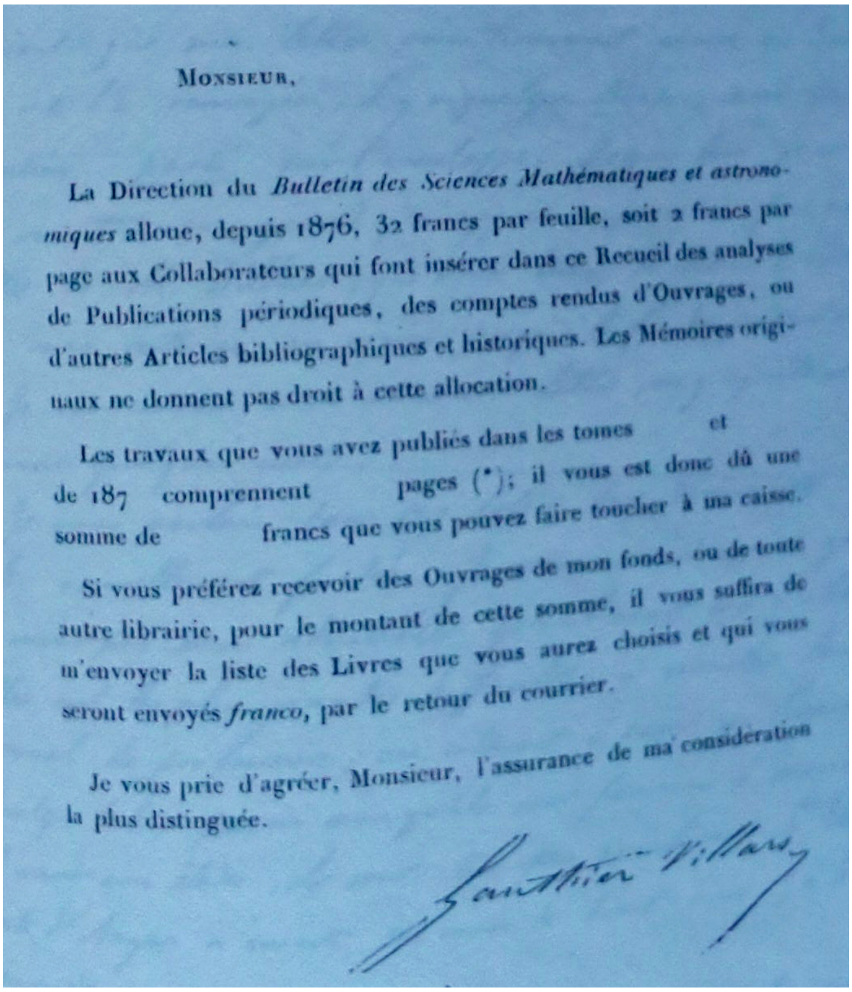
14. Lettre datée du 8 Janvier 1875 de Hoüel à Darboux, [**Henry Nabonnand 2016**, 450].

15. 1 *sou* vaut alors 5 centimes, si bien que 40 sous équivalent à 2 francs.

> sont susceptibles, en offrant des exemplaires des ouvrages dont on désire un compte rendu, en ajoutant même, pour les rédacteurs de première qualité, des primes consistant en volumes de la librairie Gauthier ou du Ministère. On arrêterait les faveurs dès que le zèle du favorisé se ralentirait. Cela ne coûterait pas plus cher, et cela ferait plus d'effet, surtout à l'étranger.
>
> Lettre datée du 18 Mars 1875 de Jules Hoüel à Gaston Darboux, reproduite dans [**Henry Nabonnand 2016**, 499]

L'idée est donc abandonnée, provisoirement. Mais elle reviendra bien vite dans les discussions entre les deux rédacteurs, et finalement en Décembre 1875, Darboux, Hoüel et Gauthier-Villars s'accorderont sur la somme unique de 2 francs par page pour rémunérer les collaborateurs. Cette somme sera prise sur l'indemnité perçue par Darboux, et Hoüel en fera rapidement la promotion auprès de son ami et collaborateur belge De Tilly :

> Tout auteur de compte rendu aura droit à une rémunération de 2 francs par page d'impression, plus à un tirage à part de 25 exemplaires, sur sa demande. De cette manière, en fournissant une demi-feuille [soit environ 8 pages] par an, on deviendra abonné gratuit, à moins qu'on ne préfère toucher l'indemnité en espèces ou en livres du catalogue de Gauthier-Villars. Soyez assez bon, je vous prie, pour communiquer cet avis à toutes les personnes dont vous jugerez que le concours pourrait nous être utile.
>
> Lettre datée du 1er Décembre 1875 de Jules Hoüel à Joseph De Tilly, reproduite dans [**Henry Nabonnand 2016**, 287]



Monsieur,

La Direction du *Bulletin des Sciences Mathématiques et astronomiques* alloue, depuis 1876, 32 francs par feuille, soit 2 francs par page aux Collaborateurs qui font insérer dans ce Recueil des analyses de Publications périodiques, des comptes rendus d'Ouvrages, ou d'autres Articles bibliographiques et historiques. Les Mémoires originaux ne donnent pas droit à cette allocation.

Les travaux que vous avez publiés dans les tomes et de 187 comprennent pages (*); il vous est donc dû une somme de francs que vous pouvez faire toucher à ma caisse.

Si vous préférez recevoir des Ouvrages de mon fonds, ou de toute autre librairie, pour le montant de cette somme, il vous suffira de m'envoyer la liste des Livres que vous aurez choisis et qui vous seront envoyés *franco*, par le retour du courrier.

Je vous prie d'agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Gauthier-Villars

FIGURE 1. Exemplaire type des reçus envoyés annuellement aux collaborateurs du Bulletin pour leur participation [16]

La rémunération aux collaborateurs permet en outre, comme l'explique Hoüel dans la suite de sa lettre à De Tilly, de pouvoir concurrencer le "*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*" [17] dont les collaborateurs sont également rémunérés annuellement. Les montants restent cependant faibles, puisque le forfait prévu à cet effet pour le *Jahrbuch* est de 6 Thaler, soit environ 24 francs [18]. Le fait de consacrer une partie de son traitement aux rédacteurs n'est, en 1875, pas (plus) un problème pour Darboux. Si les 3,000 francs

16. Cet exemplaire, conservé à l'Institut Mittag-Leffler dans la correspondance de Jules Hoüel, a été envoyé par le bordelais à Gösta Mittag-Leffler en 1876.

17. Le Jahrbuch reste toujours pour Hoüel l'élément de comparaison premier qui révèle les dysfonctionnements de son concurrent de Bulletin. En Février 1875, il écrit à Darboux : "*Pendant ce temps-là [la crise du Bulletin], Ohrtmann publie tranquillement son annuaire, avec une cinquantaine de collaborateurs effectifs pour le moins. Tout cela est fait avec un ordre ; rien n'est oublié ; c'est un vrai exercice à la prussienne. Nous, nous ressemblons à des Français ... du temps de la bataille de Rosbach*" ([**Henry Nabonnand 2016**], 492]).

18. Voir la lettre d'Ohrtmann à Hoüel datée du 16 Juillet 1871 citée dans [Chap.6,4.3].

d'indemnité de rédaction n'étaient pour lui pas du luxe en 1870 alors qu'il était professeur de Mathématiques Spéciales, il est devenu maître de conférences à l'École Normale et suppléant à la Sorbonne depuis Octobre 1872, ce qui lui assure désormais un niveau de vie confortable. Il perçoit en effet annuellement depuis lors, outre la subvention ministérielle de rédaction du Bulletin, 7,500 francs pour sa maîtrise de conférence à la rue d'Ulm, et 1,500 francs pour sa suppléance de Liouville [19]. Il a même demandé au Ministère de l'Instruction Publique, en Novembre 1875, de céder officiellement une partie de son traitement de rédacteur pour s'attacher les services d'un nouveau collaborateur officiel : Jules Tannery [20].

> Tannery va devenir un collaborateur sérieux. Il le faut bien car les nouvelles conditions dans lesquelles je suis à la Sorbonne me mettent à l'aise. J'ai donc proposé de lui laisser toute la partie [superflue] de mon traitement et je garde ce qui est nécessaire pour faire face aux charges du Bulletin.
>
> Lettre datée du 27 Novembre 1875 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Cependant les indemnités accordées aux auteurs vont vite représenter une dépense plus importante que ce que Darboux avait anticipé. Ceci va par ailleurs venir s'ajouter à la volonté de certains collaborateurs de se voir rattacher officiellement au Bulletin par le Ministère, et donc de pouvoir bénéficier du statut privilégié de Tannery qui, en tant que "*rédacteur officiel*", n'est pas rémunéré à la page mais avec un forfait annuel fixe tout comme Darboux. 3,000 francs ne suffisent alors que difficilement à faire face à ces nouvelles dépenses, et en Décembre 1876 Darboux doit refuser à l'astronome bordelais Georges Rayet l'accession à un statut équivalent à celui de Tannery :

> Pour ce qui concerne Rayet, on lui donnera ce que vous voudrez par page, mais je désire qu'il n'ait pas son traitement payé par le Ministère. D'abord d'autres qui nous ont fourni longtemps de la copie sans rien demander comme André [21] pourraient se fâcher. Ensuite vous avez l'exemple de Tannery qui, attaché dans ces conditions au Bulletin n'a pas donné grand chose la première année. [...] J'ajoute que si je lui fais donner encore une portion de mon traitement il ne resterait plus grand chose pour les rémunérations aux auteurs qui peuvent devenir considérables.
>
> Lettre datée du 5 Décembre 1876 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

La nécessité d'obtenir une indemnité, indépendante du traitement de Darboux, pour rémunérer les collaborateurs du Bulletin devient ainsi évidente, et c'est ce qui va motiver

19. Nous tirons ces informations d'une comparaison des données de [**Lützen 1990**] et de la lettre de Darboux datée du 1er Février 1876 [**Archives épistolaires Darboux**]. Ceci est cohérent avec [**Weisz 1977**, 218] qui évoque un salaire de 7,000 fr pour les maîtres de conférences à l'Ecole Normale à Paris à la date de 1865.

20. Nous verrons ultérieurement en détails le choix des collaborateurs et le cas particulier de Jules Tannery dans la partie 1.3.

21. Il s'agit de l'astronome français Charles André, voir sa notice en 1.3.

une seconde renégociation du contrat qui lie Gauthier-Villars et le Ministère de l'Instruction Publique au sujet du Bulletin.

Cette nouvelle négociation aboutira en Mai 1877, ce qui marquera par ailleurs l'avènement de la deuxième série de la publication. Darboux y obtient ce qu'il souhaite avant tout : outre son indemnité de rédaction, qui reste inchangée, le Ministère ajoute une indemnité annuelle de 2,000 francs dont il peut disposer librement pour rémunérer les collaborateurs du Bulletin à hauteur de 2 francs par page pour de la rédaction de recensions ou des travaux de traductions. Ceci lui permet ainsi de ne plus effectuer ces rémunérations sur le compte de son indemnité personnelle.

Le Bulletin, qui compte alors 200 abonnés (hors Ministère), gagne par ailleurs une dizaine de pages par mois ce qui porte le nombre de pages mensuelles à 58 en moyenne. La souscription de 150 exemplaires par le Ministère est désormais effectuée au prix de 34 francs par abonnement, soit une indemnité de 5,100 francs pour Gauthier-Villars. Néanmoins, pour la première fois Darboux doit faire un sacrifice sur le prix de vente du Bulletin [22] : l'abonnement est porté à 18 francs annuels à Paris, 20 francs dans les départements et les pays du continent européens [23] et 22 francs en Amérique du Nord.

La disposition des sections et des volumes change également. Fidèle à sa volonté de faire la part belle aux sections de Mélanges mais aussi de Revue Bibliographique, Darboux divise le Bulletin en deux parties qui deviennent deux fascicules mensuels indépendants. Le premier regroupera ces deux sections, tandis que le second sera exclusivement consacré à la Revue des Périodiques (recensions des publications périodiques). Le volume de chacun des deux fascicules est variable, mais c'est au total que le nombre de pages doit être d'environ 58 par mois. Comme il est annoncé dans les en-têtes des numéros du Bulletin de 1877, les intitulés des sections changent quelque peu :

> La 2ème Série [du Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques], qui a commencé en Janvier 1877, forme chaque année un Ouvrage de 50 feuilles environ, qui comprend deux Parties ayant une pagination spéciale et pouvant se relier séparément. La Ière Partie contient : 1° *Comptes rendus de Livres et Analyses de Mémoires* ; 2° *Mélanges scientifiques, Traductions de Mémoires importants et peu répandus, et Réimpression d'Ouvrages rares.* La IIème Partie contient : *Revue des Publications académiques et périodiques.*

En-tête attenante au numéro du Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques de Juin 1877, Première Partie.

22. Décidée en Mai 1877, l'augmentation du prix de l'abonnement de 15 à 18 francs ne sera effective que pour l'année 1878, elle n'est indiquée sur les numéros du Bulletin qu'à partir du numéro d'Avril 1877.

23. Il s'agit des pays membres de l'Union Postale créée en 1874.

Allant de pair avec la scission en deux fascicules, les volumes cessent donc d'être semestriels pour redevenir annuels, mais chaque année désormais s'accompagne de deux nouveaux volumes *reliés indépendamment* l'un de l'autre, un pour chaque partie.

Darboux se montre extrêmement satisfait des termes du nouveau contrat. Avant même la signature définitive, il annonçait à Hoüel : "*les conditions matérielles de notre publication vont devenir magnifiques*" [24]. Dès que cela est acté le 30 Mai 1877 [25], il écrit plein d'enthousiasme à son collaborateur :

> Je vous écris un mot à la hâte pour vous annoncer que la question du Bulletin est enfin réglée. Nous avons 54 feuilles [26] par an et 2,000 francs pour les rédacteurs. Ainsi nous pouvons marcher franchement.
>
> Lettre datée du 3 Juin 1877 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Les termes du contrat sont tellement satisfaisants pour les rédacteurs du Bulletin qu'aucun changement n'apparaîtra ensuite pendant plus de vingt ans : les modifications ultérieures n'auront lieu qu'en 1899 et en 1919, cette-dernière ayant lieu alors que le Bulletin se trouve sous la direction d'Emile Picard. Le tableau ci-dessous 2 permet de regrouper les différentes informations relatives aux trois différents contrats que nous avons étudiés entre le Ministère de l'Instruction Publique et Gauthier-Villars pour le Bulletin des Sciences.

24. Lettre de Darboux à Hoüel datée du 19 Mai 1877, [**Archives épistolaires Darboux**].
25. La date exacte de la signature du contrat apparaît dans une note du Ministère de l'Instruction Publique adressée à M. Puiseux relative aux paiements effectués à Gauthier-Villars, datée du 19 Juillet 1882 et archivée dans le dossier [**F/17/4023**].
26. Le nombre de feuilles annuelles va en fait varier entre 50 et 56, les annonces faites sur les numéros indiquant, comme on l'a vu sur la citation précédente, 50 feuilles.

Contrats Gauthier-Villars & Ministère I.P.	Décembre 1869	Mai 1873	Mai 1877
Longueur Bulletin	26 feuilles/an (32 pages/mois) 1 Vol. / an	43 feuilles/an (48 pages/mois) 1 Vol. / semestre	50 feuilles/an (58 pages/mois) 2 Vols. / an
Tirages mensuels [total -- à la vente]	250 – 100	350 – 200	350 – 200
Abonnés payants	(14 ; 50 ; 77 ; 114)	140	200
Prix annuel abonnement	15 fr (Paris) / 18 fr	15 fr (Paris) / 18 fr	18 fr (Paris) / 20 fr
Souscriptions Ministère : nb Bulletins	150	150	150
Financement annuel Ministère → Gauthier-V.	3 000 fr	4 050 fr	5 100 fr
Financement annuel Ministère → Rédacteurs	3 000 fr (G. Darboux)	3 000 fr (G. Darboux)	3 000 fr (G. Darboux) 2 000 fr (traduct°, rédact°)

FIGURE 2. Résumé des termes des contrats de 1869, 1873 et 1877 pour le Bulletin des Sciences

En guise d'aparté, nous pouvons noter qu'il est remarquable que les signatures de ces accords - en Décembre 1869, Mai 1873 et Mai 1877 - coïncident toujours avec un changement de Ministre de l'Instruction Publique. Nous avons vu dans [Chap.5,2.4] le rôle de l'arrivée de Bourbeau à la place de Duruy pour la création du Bulletin et donc pour le premier contrat s'y rapportant. La première renégociation de ce contrat intervient ensuite quelques jours à peine après le départ du Ministre Charles de Rémusat, le 18 Mai 1873, au cours d'une semaine politiquement agitée après des élections législatives (partielles) qui aboutiront au départ du président Thiers le 24 Mai (voir l'annexe 8). Le Ministère de l'Instruction Publique reviendra alors au sénateur Anselme Batbie. Enfin, la seconde renégociation intervient quelques jours après le départ du Ministre William H. Waddington, le 17 Mai 1877, et son remplacement par Joseph Brunet. Ceci est à rapprocher de la création des "*Annales Scientifiques*" par Pasteur, la décision ayant été concomitante avec l'arrivée de Victor Duruy. Il semble donc que les valses ministérielles de l'Instruction Publique aient constituées autant d'appels d'air pour les négociations des scientifiques liées aux publications.

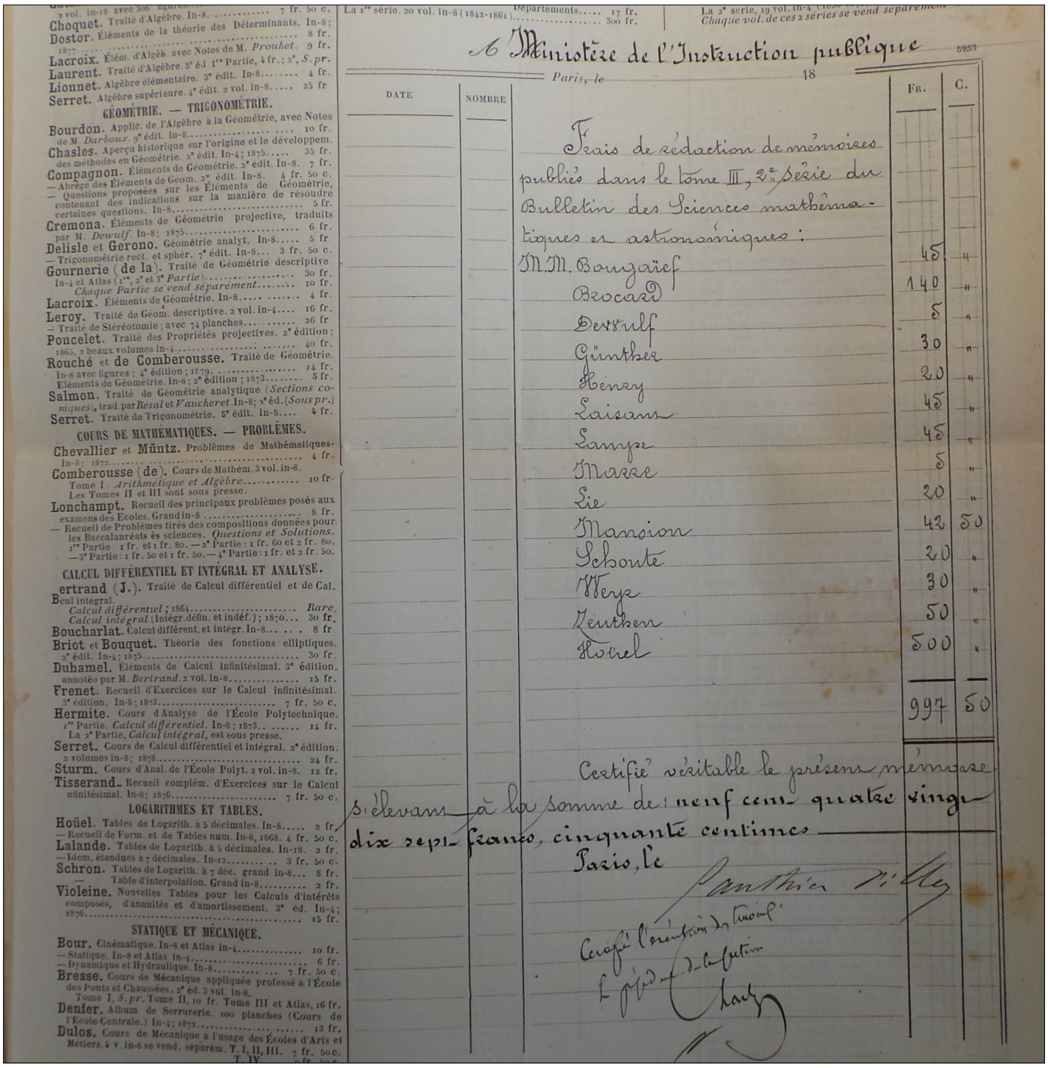
Signalons finalement, pour clôturer cette étude des contrats, que l'indemnité annuelle supplémentaire de 2,000 francs négociée en 1877 permet enfin à Darboux d'attribuer un traitement à son collaborateur Hoüel. Il a été noté dans la partie [Chap.5,3.1] que celui-ci ne bénéficiait d'aucun traitement officiel dans les contrats de 1869 et 1873. Il semble que Hoüel ne demandât jamais quelque compensation financière que ce soit, à l'exception d'une demande faite en Mars 1875 probablement sous le coup de la colère face à l'investissement insuffisant de Darboux pour la bonne marche de leur périodique :

> il faut leur [les collaborateurs du Bulletin] demander des articles sur leurs propres travaux, leur faire avoir des abonnements gratis, leur procurer des tirages à part, leur envoyer en cadeau quelques ouvrages que vous auriez en double, etc., etc. Il faut demander pour moi mille francs de subvention dont je ferai l'abandon entier au Bulletin pour payer les frais dont il vient d'être question.
>
> Lettre datée du 11 Mars 1875 de Jules Hoüel à Gaston Darboux, reproduite dans [**Henry Nabonnand 2016**, 497]

Hormis cette requête exceptionnelle, Hoüel ne perçoit ni ne réclame jamais un "*traitement*", c'est-à-dire une rémunération correspondant à son activité de rédacteur. A partir de 1879, Darboux peut profiter de la création du budget alloué aux frais de rédaction et de traduction pour faire bénéficier son collaborateur bordelais de 1,000 francs annuels. Il semble d'ailleurs que Hoüel se soit opposé dans un premier temps à recevoir cette somme, comme en attestent les efforts faits par Darboux pour parvenir à le faire changer d'avis :

> Il faut de toute nécessité que vous acceptiez la somme qui a été marquée à votre nom. C'est de toute justice d'abord, et il faut au moins que vous rentriez dans les déboursés que vous faîtes pour le Bulletin. Sans doute vous ne voulez pas de traitement, mais je considère cette indemnité comme destinée simplement à couvrir vos frais de correspondance et autres. Je tiens absolument à ce que vous l'acceptiez [...]
>
> Lettre datée du 27 Juillet 1879 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Hoüel finira par accepter, et Darboux le fera automatiquement figurer sur les factures semestrielles de Gauthier-Villars au Ministère pour lui allouer 500 francs deux fois par an. Un exemple d'une telle facture est présentée ci-dessous :


A Ministère de l'Instruction publique

Paris, le 18

Frais de rédaction de mémoires publiés dans le tome III, 2e série du Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques :

	Fr.	C.
MM. Bougaïef	45	"
Brocard	140	"
Dewulf	5	"
Günther	30	"
Henry	20	"
Laisant	45	"
Lampe	45	"
Marre	5	"
Lie	20	"
Mansion	42	50
Schoute	20	"
Weyr	30	"
Zeuthen	50	"
Hoüel	500	"
	997	50

Certifié véritable le présent mémoire s'élevant à la somme de : neuf cent quatre vingt dix sept francs, cinquante centimes

Paris, le

Gauthier-Villars

Figure 3. Facture détaillée relative aux frais de traduction et de rédaction pour le premier semestre de 1879, [**F/17/4023**]

Après que le nouveau contrat est signé en 1877, assurant des "*conditions matérielles magnifiques*" au Bulletin et établissant avant tout le système de rémunérations aux rédacteurs, la rédaction du périodique fonctionnera correctement et l'entreprise éditoriale voulue dès 1868 par Chasles aura enfin assuré sa pérennité. Ce contrat corrige en effet l'instabilité financière du journal qui semble alors être le seul point faisant encore défaut. Les motifs de satisfaction étaient de fait déjà nombreux, comme en témoignent différents commentaires de Darboux :

> [...] des destinées superbes se prépare pour lui [le Bulletin]

> [...] du côté des rédacteurs, ça a l'air de marcher [...]

> [...] il [le Bulletin] a un succès dont nous devons être fiers [...]
>
> Lettres datées du 27 Novembre 1875, 3 Juin 1876 et 22 Février 1877 de Jules Hoüel à Gaston Darboux, [**Archives épistolaires Darboux**]

Quatre années plus tard, Darboux dressera un bilan optimiste du succès d'un Bulletin des Sciences qu'il dirige alors avec Hoüel et Tannery. La coexistence de son entreprise et du *Jahrbuch* de Berlin y est à nouveau évoquée :

> Les principales publications sont analysées très régulièrement et d'une manière développée. Je crois que nous donnons à nos lecteurs une idée suffisamment exacte du mouvement et du progrès des diverses branches de la science mathématique. Il est clair que le dictionnaire Ohrtmann [le *Jahrbuch*] n'est pas rendu par nous inutile ; mais nous ne pourrions pas faire une revue analogue sans renoncer à la périodicité qui nous est imposée et sans être en retard d'une ou deux années, comme l'est Ohrtmann qui d'ailleurs profite de notre travail.
>
> Lettre datée du 24 Septembre 1881 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

Finalement, le *Bulletin* va traverser les âges et les guerres, puisque - rappelons-le - il existe toujours aujourd'hui. Le journal *de recherche* a maintenant néanmoins complètement pris le pas sur le journal *de recensions*.

1.3. Le choix des collaborateurs (1870-1875).

L'influence de Darboux sur le Bulletin se manifeste également dans le choix des collaborateurs : c'est ce que nous nous proposons de mettre en évidence ci-après. Sa volonté est dès le départ d'obtenir rapidement un maximum de collaborateurs pour pouvoir mieux répartir la lourde tâche de rédaction :

> Il faut tendre à avoir beaucoup de collaborateurs à qui nous donnerons peu de besogne. C'est là l'idéal de Férussac. Sturm n'avait que le Journal de Crelle, mais hélas les temps ont changé.
>
> Lettre datée du 5 Avril 1873 de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Certains éléments ayant trait aux collaborations entreprises avec les mathématiciens pour le *Bulletin des Sciences* ont déjà été évoqués dans la section précédente [Chap.5,3.2]. Il s'agissait néanmoins d'évaluer surtout les réponses apportées, à court terme, lors du lancement des premiers numéros aux problèmes posés par l'écriture des recensions et l'approvisionnement en périodiques. A présent, nous centrons complètement notre étude sur l'équipe de collaborateurs que Darboux va constituer autour de lui, dans le but d'en établir un portrait type et de révéler par là l'influence du rédacteur en chef. Nous élargissons du même coup la période d'étude aux six premières années de parution du journal (1870-1875), ce qui nous permettra d'avoir une cohérence méthodologique avec le cadre temporel de l'étude ultérieure du contenu mathématique du Bulletin (voir plus loin la section 2).

Pour comprendre l'influence de Darboux dans le choix des scientifiques qu'il associe à la tâche de la rédaction de son journal, nous allons commencer par dresser rapidement le portrait des *principaux* collaborateurs du Bulletin. C'est donc sur les distinctions que le nîmois fait parmi l'ensemble de ses collaborateurs que nous allons tout d'abord nous pencher, pour comprendre qui sont ceux qu'il considère comme étant les *principaux* collaborateurs. Nous délaissons ainsi, comme prévu, le classement que nous avions établi en [Chap.5,3.2] pour adopter l'interprétation même de Gaston Darboux.

Selon les propres paroles du père des cyclides, ceux qui sont considérés comme les principaux collaborateurs du Bulletin apparaissent sur la couverture du journal : ils constituent ce que Darboux appelle sa "*liste des rédacteurs*". Les autres ne sont mentionnés que dans une liste annexe, que Darboux nomme "*liste des collaborateurs*", et qui est présentée en page 6 des tomes du Bulletin à partir de 1873. Ce classement se veut en fait récompenser le mérite de ceux qui participent à l'effort de rédaction. Aussi par exemple lorsque la contribution du collaborateur Charles Simon ne donne plus satisfaction à Darboux, ce-dernier modifie en conséquence la composition de ces deux listes, ce qui fait office de blâme :

> Pour les changements de liste des rédacteurs, je vais donner un premier avertissement à Simon en le faisant passer dans la liste des collaborateurs. A la fin de l'année je lui supprimerai son abonnement.
>
> Lettre datée du 22 Mai 1873 de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
> [**Archives épistolaires Darboux**]

Outre Darboux et Hoüel, 7 principaux collaborateurs apparaissent ainsi entre 1870 et 1875 sur les couvertures des volumes du Bulletin dans la "*liste des rédacteurs*". Nous présentons ci-dessous de courtes notices biographiques de ces collaborateurs en y adjoignant un huitième collaborateur proche, dont l'importance apparaît incontestable à la lumière des échanges épistolaires entre Darboux et Hoüel. Les renseignements biographiques exposés proviennent en grande partie de nos propres recherches et des informations de la base de données "*Léonore*" des archives de la légion d'honneur [27] (notamment les "états des services" rédigés par les scientifiques eux-mêmes), ainsi que des quelques notes regroupées dans [**Decaillot-Laulagnet 1999**, 194-203].

27. Voir les [**Archives Léonore**].

⋆⋆⋆⋆⋆

Maurice Loewy

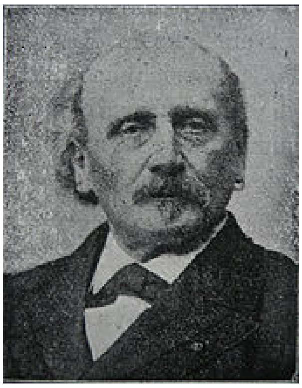


FIGURE 4. Maurice Loewy

Sur la couverture du premier tome, en 1870, figure outre Darboux et Hoüel uniquement Maurice Loewy. Loewy est un astronome autrichien né à Vienne le 15 Avril 1833. Après des études à l'Université de Vienne, il devient assistant à l'Observatoire de l'Université de Vienne. Appelé en France à l'Observatoire de Paris auprès de Le Verrier en 1860 grâce à l'entremise de von Littrow, directeur de l'Observatoire de Vienne, il en devient astronome adjoint en Août de l'année suivante, puis y est nommé astronome titulaire le 14 Février 1866. En 1869, il est admis à la grande naturalisation et acquiert donc la nationalité française. Sa collaboration à la rédaction du Bulletin des Sciences va durer trois ans, de 1870 à 1872. En 1872, Loewy est élu au Bureau des Longitudes et prend en charge la rédaction de la publication "*La connaissance des temps*" ainsi que celle de la partie astronomique de "*l'Annuaire*" du Bureau des Longitudes. Malgré ces nouvelles fonctions, la fin de la collaboration de Loewy avec la rédaction du Bulletin s'explique surtout par la volonté conjuguée de Darboux et de Hoüel. Dès 1870, Darboux évoque en effet dans ses échanges épistolaires avec Hoüel la "*lenteur toute allemande*" avec laquelle procède Loewy, "*notre pseudo-collaborateur*". L'année suivante, Darboux est déjà catégorique au sujet de l'astronome autrichien :

> [...] je choisirai un autre collaborateur que M. Loewy puisqu'il ne donne rien. Il faut vous dire que M. Loewy est nouvellement marié ce qui est pour lui une excuse jusqu'à un certain point.
>
> Lettre non datée (Juin 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
> [**Archives épistolaires Darboux**]

D'autre part, l'existence d'une animosité certaine entre Hoüel et Loewy, la "*bête noire*" du mathématicien normand[28] a certainement contribué à écarter rapidement Maurice Loewy des collaborateurs.

Dès la fin de l'année 1871, Darboux évoque deux nouveaux collaborateurs pour remplacer Loewy :

28. Voir la lettre de Darboux à Hoüel datée du 10 Mai 1872 dans laquelle apparaît cette expression, [**Archives épistolaires Darboux**].

> M. André et M. Tisserand valent bien à eux deux M. Loewy. Vous pouvez être sûr qu'ils seront plus actifs. Nous devons dîner ensemble un de ces jours pour fixer leur besogne.

Lettre non datée (Août 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
[**Archives épistolaires Darboux**]

En réalité, ce seront non pas deux mais cinq nouveaux collaborateurs qui apparaîtront en couverture du second tome du Bulletin : Charles André, Louis Painvin, Rodolphe Radau, Charles Simon et Félix Tisserand.

Élu à l'Académie des Sciences en 1873, Loewy deviendra directeur de l'Observatoire de Paris en 1896 à la mort de Tisserand, dont il sera question plus loin. Il réalisera notamment un important atlas photographique de la Lune avec Pierre Puiseux, fils du mathématicien Victor Puiseux. Il décédera le 15 Octobre 1907 au Ministère de l'Instruction Publique alors qu'il participait à un Conseil des Observatoires.

⋆⋆⋆⋆⋆

Charles André

Charles André naquit le 14 Mars 1842 à Chausny dans l'Aisne. Après être venu à Paris étudier à l'Institution Barbet, il entre à l'ENS dans la section des sciences en 1861 avec Gaston Darboux. Il choisit cependant rapidement de diriger ses études vers la physique et l'astronomie. Agrégé de sciences physiques en 1864 (classé $4^{\text{ème}}$), il effectue à sa sortie de l'Ecole Normale un court passage dans l'enseignement dans les lycées de Nevers et de Dijon avant de devenir en 1865 astronome adjoint à l'Observatoire de Paris dans le service de Charles Wolf. Il y restera 11 ans avant de partir en 1876 pour Lyon enseigner l'astronomie à la Faculté, mais surtout diriger jusqu'en 1912 le nouvel observatoire établi à Saint-Genis Laval, observatoire dont il avait largement encouragé la construction avec l'appui du général Perrier. Le 23 Juin 1876, peu avant son départ pour Lyon, il avait soutenu en Sorbonne une thèse sur l'influence des phénomènes de diffraction dans l'utilisation des instruments d'optique.

Charles André participe à l'expédition de Nouméa en 1874 pour effectuer des observations du transit de Vénus. Deux ans plus tard c'est lui qui dirige la mission d'observation menée à Ogden dans l'Utah pour observer le passage de Mercure. En Septembre 1892, il survit miraculeusement à la chute du ballon motorisé construit par son ami l'inventeur Pompéien-Piraud, où il s'était embarqué pour étudier les courants électriques de l'atmosphère. Charles André mourra le 6 Juin 1912, quelques semaines à peine après avoir été admis à la retraite. Collaborateur du Bulletin dès 1871, il continuera pendant plus de 25 ans à apporter une aide active à l'entreprise éditoriale dirigée par Darboux [29].

29. Le nom de Charles André est présent sur les couvertures des tomes du Bulletin jusqu'en 1897.

FIGURE 5. Ballon motorisé de Pompéien-Piraud utilisé par Charles André pour l'étude de l'électricité atmosphérique.

⋆⋆⋆⋆⋆

Louis-Félix Painvin

Louis Painvin naît le 18 Mai 1826 à Malesherbes, commune du Loiret frontalière de l'Essonne et de la Seine-et-Marne. Devenu en 1848, après avoir obtenu son baccalauréat ès lettres à l'issue de ses études secondaires, maître d'études au lycée d'Orléans l'espace d'une année, Painvin décide de se placer en congé à partir de l'année suivante. Il n'obtient la licence ès sciences mathématiques qu'au début des années 1850 et soutient en Sorbonne le 19 Juin 1854 devant Chasles, Lamé et Delaunay deux thèses, l'une en mécanique sur les phénomènes vibratoires, l'autre en astronomie sur les équations différentielles liées au problème des trois corps. Cette-dernière sera publiée dans le Journal de Liouville [30]. Painvin devient alors pendant 5 ans répétiteur de mathématiques dans différentes institutions de Paris comme Massin, Favart et Sainte-Barbe. En Juillet 1859, il réussit la licence ès sciences physiques ce qui lui ouvre la possibilité de concourir à l'agrégation de mathématiques qu'il obtient quelques semaines plus tard, au 4ème rang sur 10.

Se faisant suppléer à Bar-le-Duc où il est nommé professeur après l'agrégation pour rester à Paris une année supplémentaire, Painvin obtient l'année suivante sa nomination en mathématiques spéciales au lycée impérial de Douai où il enseignera pendant neuf années jusqu'en 1869. En 1870, Louis Painvin part enseigner au Lycée de Lyon mais il revient à Paris à l'été 1872 pour enseigner au Lycée Louis-le-Grand dans la classe de spéciales laissée vacante par le départ de Gaston Darboux pour le poste de maître de conférence à l'Ecole Normale. En 1874 Painvin obtient de donner pour la première fois des cours à la Faculté des Sciences de Paris : il y supplée Jean-Claude Bouquet pour les cours de mécanique physique et expérimentale à partir du 17 Novembre 1874, date de la reprise du cours.

30. Il s'agit de [**Painvin 1854**].

Mais il contracte dès le début de l'année 1875 la phtisie, une forme de tuberculose, qui le contraint à se faire remplacer à la Sorbonne par Darboux à partir du mois de Février et à quitter ses cours de lycée. Il s'éteindra finalement le 12 Octobre 1875 et sa mort attristera beaucoup Darboux dont il était devenu proche au cours des trois dernières années de sa vie passées dans la capitale. Ce-dernier rendra dans le Bulletin "*justice à ses belles qualités morales, à son ardeur infatigable au travail, à la loyauté qu'il apportait dans toutes ses relations, au soin jaloux avec lequel il s'occupait de ses élèves*" [31]. Son fils Georges et son petit-fils ... Georges étudieront à l'Ecole Polytechnique (promotions 1878 et 1905).

⋆⋆⋆⋆⋆

Rodolphe Radau

Rodolphe Radau naît le 22 Janvier 1835 à Angeburg, dans la partie orientale de la Prusse d'alors correspondant aujourd'hui à la Pologne [32]. Après des études de mathématiques et d'astronomie à l'Université de Königsberg durant lesquelles il participe aux travaux de l'Observatoire de Königsberg, Radau collabore dès 1857 aux travaux géodésiques du français Antoine d'Abbadie. Il le rejoint à Paris en 1858 et contribue, tout en publiant certains travaux personnels d'astronomie, à la rédaction de nombreux ouvrages scientifiques de d'Abbadie relatifs aux observations de ce-dernier en Éthiopie. L'amitié de d'Abbadie et de Radau aura d'ailleurs long cours, car à en croire Darboux l'astronome prussien conservera longtemps l'habitude de fuir Paris pour aller à Hendaye "*retrouver dans son château de Gascogne M. d'Abbadie*".

A partir de 1866, Radau collabore à la rédaction du périodique "*La Revue des Deux Mondes*", et écrit sporadiquement pour le "*Journal des Débats*". S'il collabore de 1870 jusqu'à sa mort - en 1911 - à la rédaction du Bulletin, Radau fait également partie du comité de rédaction du "*Bulletin de l'Observatoire*", ou "*Bulletin Astronomique*", dès sa création en 1884 par Félix Tisserand [33]. Naturalisé français en 1873, Radau devra néanmoins attendre 1897 pour être élu à l'Académie des Sciences, et 1899 pour devenir membre du Bureau des Longitudes. Il mourra à Paris en Décembre 1911.

⋆⋆⋆⋆⋆

Charles Simon

Charles Simon naît à Paris le 6 mars 1825. Il entre à l'ENS en 1845 dans la section des Sciences, alors que Louis Pasteur et Jules Hoüel y entament leur dernière année d'étude. Agrégé de mathématiques ($5^{\text{ème}}$ rang) à sa sortie de l'Ecole en 1848, il est immédiatement nommé professeur de mathématiques spéciales au Lycée d'Alger où il restera jusqu'en 1861. Durant l'été 1855, Simon revient temporairement à Paris présenter sa thèse, "*Sur la théorie géométrique de la rotation de la Terre*" devant un jury présidé par Chasles et composé de Duhamel et Delaunay. Chargé en 1856 de la fondation de l'Observatoire d'Alger, il y occupera un an le statut d'astronome après la création de la station d'observations en 1860. Après son départ d'Algérie, et bénéficiant du soutien de l'astronome Urbain Le Verrier, Charles Simon dirige l'Observatoire de Marseille durant une année avant de revenir à Paris en Octobre 1862 avec le statut d'astronome titulaire de l'Observatoire de Paris. A partir du mois de Janvier 1864, Simon décide de se dédier à l'enseignement des mathématiques. Il est

31. Extrait de la Communication de Darboux, "*Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*", Tome 9 (2nd Semestre 1875), p.145.

32. Voir l'évolution des territoires de la Prusse et des états fédérés dans la Confédération d'Allemagne du Nord dans notre annexe 8.

33. A propos du Bulletin Astronomique, voir la partie 2.3.

professeur deux ans au Lycée Saint-Louis, puis de 1866 jusqu'à sa mort (le 23 Juin 1880) au Lycée Louis-le-Grand où il n'enseigne cependant que les mathématiques élémentaires. Dans les années 1870, il est voisin à Paris de Darboux puisque ce-dernier réside de l'été 1871 à Mars 1875 au numéro 29 de la rue Monge, rue où habitera jusqu'à sa mort Charles Simon au numéro 5.

Parallèlement à ses enseignements, Simon continuera ses recherches personnelles sur la rotation de la Terre, mais également sur les probabilités et les applications les plus diverses des mathématiques comme en témoignent ses articles sur le rôle de l'analyse mathématique pour l'économie politique et la finance[34]. Dans le numéro de Septembre 1871 du Bulletin, Simon insérera par exemple une note sur une formule probabiliste due à l'actuaire britannique Benjamin Gompertz utilisée pour estimer le temps de vie des individus [**Simon 1871**]. Il fera surtout partie en Janvier 1872 des 6 membres fondateurs du "*Cercle des Actuaires français*"[35], société imitant l'association anglaise "*Institute of Actuaries*" qui publiera annuellement un "*Journal des actuaires français*" jusqu'en 1880.

La collaboration de Charles Simon à la rédaction du Bulletin sera par ailleurs de courte durée puisque son nom n'apparaît que sur les tomes 2, 3 et 4. On trouve un écho de la fin de sa collaboration dans une lettre de Darboux du début de l'année 1874 :

> C'est en vain que je tambourine pour le Bulletin, je ne trouve de collaborateur ni pour or ni pour argent. Simon m'a abominablement lâché après avoir obtenu les Œuvres de Lagrange et un abonnement au Bulletin.
>
> Lettre datée du 19 Janvier 1874 de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
> [**Archives épistolaires Darboux**]

⋆⋆⋆⋆⋆

Félix Tisserand

FIGURE 6. Félix Tisserand

34. On peut consulter par exemple [**Simon 1865**] ainsi que le compte-rendu [**Simon 1869**] des "*Nouvelles Annales*".

35. On trouve dans la promulgation des statuts de la Société le nom des membres fondateurs à l'article 15 : Maas, Charlon, Simon, Achard, Courcelle-Seneuil et Javary. Ces statuts sont publiés dans le premier numéro du "*Journal des Actuaires français*", Vol. 1 (1872), Gauthier-Villars, pp.7-10. A ces six membres viendra rapidement s'ajouter le polytechnicien luxembourgeois Hermann Laurent (X 1860).

Félix Tisserand est né le 11 Janvier 1845 à Nuits-Saint-Georges en Bourgogne. Après des études au Collège de Beaune puis au Lycée de Dijon, Tisserand entre à l'Ecole Normale en 1863 dans la section des sciences, aux côtés de Louis Darboux, le benjamin de Gaston. Il en sort en 1866, en ayant obtenu avec le premier rang l'agrégation de mathématiques la même année. Alors qu'il est chargé de cours de mathématiques au lycée de Metz en Septembre 1866, il se voit nommé quelques semaines plus tard astronome adjoint à l'Observatoire de Paris ce qui lui permet d'éviter les cours de lycée. Il travaille à l'Observatoire avec Le Verrier[36] dans une bonne entente inattendue, comme le racontera plus tard Joseph Bertrand :

> Bon, cordial, capable de patience et de fermeté, Tisserand, en entrant à l'Observatoire, s'était promis d'ignorer les haines et les intrigues. Témoin pacifique d'une guerre sans cesse renaissante, sans entrer en révolte contre le grand astronome [Le Verrier] qui sut apprécier ses talents, il ne devint pas son ami.
>
> J'ai entendu, longtemps après, chacun d'eux parler de l'autre sans rancune ni amertume.
>
> [**Bertrand 1899**]

En Juin 1868, Tisserand soutient devant Delaunay Serret et Briot une thèse sur la théorie du mouvement de la Lune où il rapproche les méthodes de Delaunay des principes de mécanique de Jacobi. Il collabore ensuite au Bulletin de 1871 au premier semestre de 1873, avant de partir pour Toulouse où il est nommé directeur de l'Observatoire et chargé du cours d'Astronomie à la faculté.

Tisserand reviendra à Paris à la fin de l'année 1878 après qu'il a été nommé membre de l'Académie des Sciences (alors qu'il ne résidait pas encore à Paris comme cela était pourtant exigé par les règlements) et du Bureau des Longitudes. Il succède alors à Darboux pour la suppléance du cours de Mécanique Rationnelle que Liouville ne dispense plus depuis l'été 1872. En 1883, Tisserand devient professeur titulaire à la Sorbonne de la chaire d'Astronomie mathématique, succédant à Victor Puiseux comme l'avait anticipé un commentaire de Pasteur alors que Tisserand n'était encore qu'un jeune élève de l'Ecole Normale : "*Tisserand, c'est un petit Puiseux !*". L'année suivante, Tisserand fonde avec le soutien de Mouchez, directeur de l'Observatoire de Paris - et, nous le verrons, avec la bénédiction de Darboux - le "*Bulletin astronomique*", sur le modèle du Bulletin de Darboux. Nous reviendrons ultérieurement dans la section 2 sur la création de ce nouveau Bulletin.

En 1892, Tisserand deviendra à la mort de Mouchez directeur de l'Observatoire de Paris. Il sera remplacé dans ces fonctions à sa mort - le 20 Octobre 1896 - par Maurice Loewy, et dans ses fonctions d'enseignement à la Sorbonne par Henri Poincaré.

⋆⋆⋆⋆⋆

Gaston Lespiault

La disparition sur la couverture des collaborateurs Charles Simon et Félix Tisserand pour le tome 4 du second semestre de l'année 1873 est compensée par l'apparition d'un nouveau collaborateur : Gaston Lespiault. Lespiault naît à Nérac dans le Lot-et-Garonne

36. Nous n'insistons pas sur le légendaire caractère exécrable de l'astronome Le Verrier. Fâché en 1846 après Uranus qu'il accusait de ne pas suivre les trajectoires qu'il calculait, cela lui valut tout de même de découvrir sa petite sœur Neptune.

non loin d'Agen le 13 Octobre 1823. Après des études parisiennes au Collège Sainte-Barbe et au Lycée Louis-le-Grand, il entre à l'Ecole Normale en 1844 où il côtoie notamment Jules Hoüel et Charles Simon. A sa sortie de l'Ecole, il enseigne quatre années les mathématiques élémentaires à Amiens, et réussit en 1848 l'agrégation de mathématiques en étant reçu au 7ème rang. Après qu'il est passé entre 1851 et 1855 par Pau, Rennes puis Toulouse, il prend un congé sans traitement de trois ans jusqu'en 1858. Durant ce congé, il effectue des recherches sur le phénomène de libration lunaire[37] qui aboutiront à une thèse d'astronomie qu'il présente à Paris le 6 Juillet 1857. La faculté de Bordeaux fait alors appel à lui pour le cours d'astronomie et de mécanique dont il deviendra professeur en 1861. Il le restera jusqu'en 1896, année où Jacques Hadamard lui succèdera après l'avoir remplacé durant trois ans. Il aura alors été entre 1886 et 1893 le doyen de la faculté des sciences de Bordeaux, et aura par ailleurs grandement contribué à la création d'un observatoire pour la faculté de Bordeaux. Celui-ci sera construit à Floirac, à quelques kilomètres de Bordeaux, entre 1877 et 1885. Lespiault mourra le 3 Octobre 1904 dans sa ville natale de Nérac.

Gaston Lespiault côtoie donc Jules Hoüel à la faculté de Bordeaux dès les années 1860, mais également au sein de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Mais cette proximité entre les deux professeurs est également géographique puisque Hoüel et Lespiault sont voisins à Bordeaux : le premier réside au numéro 80 du Cours d'Aquitaine, le second au 82 de ce même Cours. Lespiault continuera à collaborer au Bulletin des Sciences de Darboux plusieurs années après la mort, en 1886, de Jules Hoüel.

⋆⋆⋆⋆⋆

Jules Tannery

Figure 7. Jules Tannery

Enfin, bien que son nom n'apparaisse pas sur les couvertures des 9 premiers tomes du Bulletin, nous pensons devoir inclure Jules Tannery parmi les principaux collaborateurs

37. La libration lunaire est l'oscillation, de faible ampleur, de la face apparente de la Lune depuis la Terre.

du Bulletin. La collaboration de Tannery au Bulletin débute en 1871 après la Commune de Paris, alors que Darboux le sollicite pour écrire les comptes-rendus de certaines revues astronomiques :

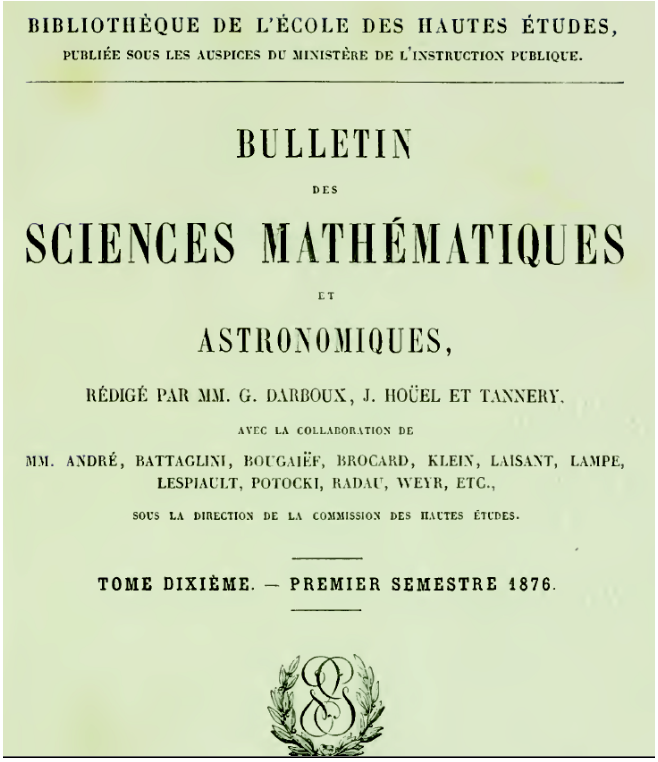
> Je me suis aussi entendu avec Tannery et Tisserand de l'Astronomische Nachrichten, de l'Astronomische Gesellschaft et généralement de tout ce qui paraît à l'Observatoire. Je vais leur demander une liste des publications qu'ils doivent analyser.
>
> Lettre non datée (Septembre 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Tannery, qui parle un très bon allemand, effectue également des traductions des recensions que Clebsch envoie, en langue allemande, pour ses "*Mathematische Annalen*". Après plusieurs années de collaboration durant lesquelles Tannery n'apparaît pourtant pas dans les listes de collaborateurs publiées dans le Bulletin, c'est en Novembre 1875 que Darboux demande au Ministère d'entériner la participation de Tannery à la rédaction du Bulletin. Comme nous l'avons vu précédemment en 1.1, Tannery est officiellement nommé comme le troisième rédacteur du Bulletin des Sciences. Avec ce statut, il acquiert une portion du traitement de rédaction de 3,000 francs qui était jusqu'alors réservé à Darboux, ce auquel Hoüel n'avait pas droit. C'est donc logiquement que lors de la composition du numéro de Janvier 1876, ce-dernier propose à Hoüel de faire figurer le nom du nouveau rédacteur :

> Pour le numéro de janvier, il me paraît juste de mettre Tannery avec nous deux. Il accepte de faire partie de la rédaction, est nommé par le Ministère ; il sera un collaborateur sérieux.
>
> Lettre datée du 4 Mars 187[6] [38] de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Le nom de Tannery n'apparaîtra donc sur la couverture du Bulletin qu'à partir du tome 10 de 1876. Il ne sera néanmoins pas "*collaborateur*" comme Lespiault, Tisserand et les autres précédemment cités, mais sera directement "*rédacteur officiel*" au même titre que les seuls Darboux et Hoüel. Son implication dans le travail de rédaction et de traduction pour le Bulletin depuis 1871, ainsi que son accession immédiate au statut de rédacteur motivent ainsi la prise en compte de Tannery dans la liste des principaux collaborateurs du Bulletin pour la période 1870-1875.

38. Dans les archives [**Archives épistolaires Darboux**], cette lettre est injustement datée de la part de Darboux lui-même du 4 Mars 1875. Plusieurs éléments, dont la question alors anachronique de la rémunération des collaborateurs du Bulletin, ainsi que la mention d'une traduction dans le Bulletin d'un mémoire de Lipschitz qui figurera dans le volume 10 (1876) permettent d'affirmer que l'année est bien 1876. Aussi cette lettre ne figure-t-elle pas, à juste titre, dans les échanges épistolaires de Mars 1875 entre Darboux et Hoüel reproduits dans [**Henry Nabonnand 2016**].


BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET TANNERY.
AVEC LA COLLABORATION DE
MM. ANDRÉ, BATTAGLINI, BOUGAIËF, BROCARD, KLEIN, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, POTOCKI, RADAU, WEYR, ETC.,
SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

TOME DIXIÈME. — PREMIER SEMESTRE 1876.

FIGURE 8. Couverture du 10ème tome du Bulletin (1876) où apparaît le nom de Jules Tannery

Tannery est né le 24 Mars 1848 à Mantes en Seine-et-Oise. Il est le petit frère de Paul Tannery qui, cinq ans plus âgé que lui, entrera à Polytechnique avant de devenir ingénieur des Tabacs et de s'intéresser de près à l'histoire des sciences antiques[39]. Après des études au Lycée de Caen, Jules Tannery est reçu à l'Ecole Normale Supérieure en 1866, dans la même promotion que l'astronome Benjamin Baillaud avec qui il se lie d'amitié. Agrégé de mathématiques en 1869 avec le premier rang à sa sortie de l'Ecole, il choisit de ne pas effectuer de thèse de doctorat et part enseigner à Rennes puis à Caen. Finalement, en 1872 il revient sur sa décision et profite du poste d'agrégé-préparateur de mathématiques de l'ENS qui lui est offert pendant trois ans pour effectuer une thèse sur les équations différentielles linéaires sous la direction de Charles Hermite. Après qu'il a soutenu cette-dernière le 28 Novembre 1874, il enseigne une année le cours de mathématiques spéciales du lycée Saint-Louis avant de suppléer durant six années Jean-Claude Bouquet à la chaire de mécanique physique et expérimentale de la Sorbonne à partir de 1875. Tannery est alors nommé en 1881 maître de conférence à l'Ecole Normale Supérieure en remplacement de Gaston Darboux. Il deviendra également à partir de 1884 le sous-directeur des études scientifiques de cette école. A partir de 1882 il sera par ailleurs maître de conférence à l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles de Sèvres, soit dès la deuxième année de fonctionnement de cette

39. Paul Tannery est parfois considéré comme "le premier historiens des sciences" : voyez François Pineau, *Paul Tannery et la science hellène*, [**Rey 2013a**, 305-320].

Ecole. Il conservera ces trois dernières fonctions dans les Ecoles Normales jusqu'à la fin de sa vie [40]. Enfin à partir de 1904 et pendant les six dernières années de sa vie, il sera titulaire de la seconde chaire de calcul différentiel et intégral créée à la Sorbonne à la suite du rattachement de l'Ecole Normale Supérieure à la faculté parisienne.

En 1901, Tannery dressera un bilan sur sa participation à la rédaction du Bulletin des Sciences :

> Il y a vingt-cinq ans, M. Darboux a bien voulu me demander de collaborer avec lui et avec M. Hoüel à la rédaction du Bulletin des Sciences mathématiques ; je m'honore de cette longue collaboration, à laquelle M. Picard s'est associé récemment : elle a absorbé une bonne partie de mon temps et de mon travail.
>
> La production scientifique est aujourd'hui rapide et étendue : aucun savant ne peut avoir à sa disposition immédiate toutes les publications relatives à la science dont il s'occupe, et son temps ne suffirait pas à les lire attentivement. Il importe de signaler ces publications et les principaux résultats qu'elles contiennent : en parcourant l'analyse des principaux Livres et Mémoires, le travailleur peut se tenir au courant des découvertes essentielles et savoir quels travaux il devra consulter ou étudier, parce qu'ils intéressent particulièrement ses propres recherches. Être utile de cette façon et dans ce sens, tel est le but et la raison d'être du Bulletin ; je me suis efforcé de regarder ce but, de faire connaître les œuvres plutôt que de les juger, d'en parler enfin avec la déférence que méritent ceux qui contribuent à accroître le domaine scientifique.
>
> [**Tannery 1901**]

Tannery restera rédacteur du Bulletin jusqu'à sa mort, le 11 Novembre 1910 à Paris. Signe de sa notoriété et d'un certain prestige, Karl Weierstrass acceptera - fait suffisamment rare pour être souligné - que Tannery effectue des traductions de certains de ses travaux pour les publier en français dans le Bulletin [41]. D'abord associé à Hoüel et Darboux de 1876 à 1886, il en partage la rédaction avec Darboux après la mort du premier jusqu'en 1900, avant qu'Emile Picard ne vienne se greffer à la rédaction du périodique à partir de 1901. De 1910 à 1917, après la mort de Tannery, Picard et Darboux seront les rédacteurs du Bulletin. Enfin, après la mort de Darboux en 1917, c'est Paul Appell qui le remplacera et reprendra la rédaction du Bulletin avec Picard après la fin de la Première Guerre Mondiale. Picard dirigera seul la rédaction du Bulletin après la mort d'Appell. Enfin, après la Seconde Guerre Mondiale, c'est Paul Montel qui aura la direction d'un Bulletin des Sciences Mathématiques bientôt devenu centenaire.

---

40. On peut trouver dans [**Charle Telkes 1989**, 250-252] des renseignements plus précis sur la vie et les fonctions de Jules Tannery.

41. On pourra notamment consulter le Bulletin de 1880 (tome 5, 2ème série) où figure les traductions de deux mémoires de Weierstrass. Hermite dans ses échanges avec Mittag-Leffler évoque à plusieurs reprises les traductions de Tannery des mémoires de Weierstrass, voir [**Hermite 1984**].

FIGURE 9. Les rédacteurs officiels du Bulletin des Sciences Mathématiques

⋆⋆⋆⋆⋆

En conclusion, les rédacteurs du Bulletin et leurs principaux collaborateurs sur la période 1870-1875 sont au nombre de 10 : Darboux, Houël, Loewy, André, Painvin, Radau, Simon, Tisserand, Lespiault et Tannery. Plusieurs caractéristiques peuvent être mises en évidence concernant ce "groupe de rédaction", les plus marquantes étant rassemblées ci-après dans le tableau 1.

TABLE 1. Caractéristiques des 10 principaux rédacteurs du Bulletin (1870-1875)

Collaborateurs \ Caractéristiques	Lieu des Etudes Supérieures	Agrégation et Thèse	Enseignement au Lycée ($\geq$ 3 ans)	Position géographique (1870-75)	Importants travaux d'Astronomie
Darboux	E.N.S.	✓	✓	Paris	
Houël	E.N.S.	✓	✓	Bordeaux	
Loewy	Vienne	(non pert.)		Paris	✓
André	E.N.S.	✓		Paris	✓
Painvin	Facultés	✓	✓	Lyon, Paris	
Radau	Königsberg	(non pert.)		Paris	✓
Simon	E.N.S.	✓	✓	Paris	✓
Tisserand	E.N.S.	✓		Paris, Toulouse	✓
Lespiault	E.N.S.	✓	✓	Bordeaux	✓
Tannery	E.N.S.	✓	✓	Caen, Paris	

Tout d'abord si l'on écarte temporairement Radau et Loewy qui n'ont pas effectué leurs études en France, on constate que 7 des 8 rédacteurs, soit 82, 5%, ont effectué leurs études supérieures à l'École Normale. Seul Painvin, ayant étudié dans une faculté de sciences, n'a pas fréquenté cet établissement. L'absence de polytechniciens parmi les rédacteurs est un fait remarquable. Ceci contraste en effet avec le paysage mathématique français de l'époque puisqu'à titre de comparaison, parmi les 141 sociétaires français de la Société Mathématique de France (SMF) en 1873/74, société qui donne une image fidèle du milieu mathématique français, 58% sont polytechniciens contre seulement 14% pour l'Ecole Normale[42].

Cette prédominance des normaliens dans la rédaction du Bulletin est voulue par Darboux. Ayant étudié durant 5 ans à l'Ecole Normale sous l'influence forte de Pasteur, il en a retiré une volonté tenace de mettre à mal le monopole de l'École polytechnique sur la recherche et l'enseignement supérieur, ce que nous avons déjà discuté dans le premier chapitre[43]. Pouvoir afficher le nom de plusieurs mathématiciens français normaliens sur les couvertures de sa revue scientifique participe donc naturellement de l'aspiration de Darboux à promouvoir par tous les moyens l'École Normale. Au-delà de la rivalité - qui peut engendrer une saine émulation - entre les écoles, le géomètre nîmois entretient une véritable aversion pour l'École polytechnique et la majorité des polytechniciens, peut-être encore plus que Pasteur. En témoignent ses propos confiés à Hoüel sur les quatre polytechniciens Laguerre, Bour, Mannheim et Moutard : "*Bour était polytechnicien, c'est-à-dire prétentieux*" ; *ce M. Laguerre est un capitaine répétiteur à l'Ecole Polytechnique. Esprit confus, tellement orgueilleux qu'il en est puant, prenant en pitié toute la création [...] Il remplace Bour dans le trio Bour, Mannheim, Moutard. Mais je vous en prie, ne communiquez pas ma lettre, vous me feriez écharper*"[44]. Ceux qui ont été ses maîtres durant ses études comme Chasles, Hermite ou encore Bertrand, font néanmoins exception. Darboux refusera ensuite en 1872 la proposition de Pierre-Ossian Bonnet de le faire devenir examinateur d'admission de l'École Polytechnique avec dédain : "*je ne me présente pas pour être colleur dans la première école du monde !*". Enfin, il déplorera avec ironie l'attitude des élèves polytechniciens lorsque ceux-ci choisiront le programme de certaines conférences, nouvellement introduites dans leur enseignement fin 1871 : "*il se trouve qu'on a demandé aux élèves de 2nde année s'ils voulaient des conférences d'Analyse. Ils ont répondu qu'ils n'en voyaient pas bien la nécessité. C'est charmant, n'est-ce pas ?*"[45] Dès lors, il n'est pas surprenant qu'aucun polytechnicien n'apparaisse parmi les principaux collaborateurs du Bulletin. Néanmoins si l'on en croit Darboux, ce-dernier aurait tenté à quelques reprises de faire participer certains polytechniciens à la rédaction du Bulletin, mais aurait alors subi des désillusions :

> J'ai envoyé deux ou trois fois des ouvrages à des Polytechniciens ; ils ont gardé les livres et n'ont pas fait de compte-rendu. Ils nous donneraient des articles originaux mais pas de comptes rendus.
>
> Lettre datée du 15 Janvier 1875 de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Par ailleurs, Radau et Loewy toujours mis à part, on note que tous les rédacteurs ont passé l'agrégation - de mathématiques, à l'exception d'André qui est agrégé de sciences

42. La représentativité du milieu mathématique français par la SMF, que nous semblons avancer impétueusement, ainsi que les données chiffrées que nous présentons proviennent de [**Gispert 1996a**, 3-7].

43. Voyez [Chap.1,3].

44. Lettres non datées (1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**].

45. Lettres datées du 28 Janvier et du 16 Mai 1872 de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**].

physiques - et ont obtenu un doctorat. Ces caractéristiques témoignent de la volonté de Darboux de s'attacher des collaborateurs au cœur du milieu de la recherche mathématique en France avec un niveau de compétence élevé. Son ancêtre, le Bulletin de Férussac, avait vu le recrutement d'une équipe de collaborateurs très hétérogène, réservant "*un rôle considérable*" à "*des gens de valeur modeste*" ce qui avait pu déplaire à certains savants ([**Taton 1947**]). Cela n'est pas le cas pour le Bulletin des Sciences version Darboux. Il est vrai néanmoins que les deux dernières caractéristiques mentionnées (le doctorat et l'agrégation) doivent être rapprochées de la qualité d'ex-normalien que Darboux fait primer dans la constitution de son équipe de collaborateurs. Anciens élèves de l'École Normale, leur parcours d'études était grandement favorisé vers le concours de l'agrégation et la préparation au doctorat [46].

Des 10 rédacteurs, 6 ont par ailleurs enseigné au moins 3 ans au Lycée, que ce soit les mathématiques élémentaires ou les mathématiques supérieures. Ceci est en accord avec le choix de Darboux de s'attacher un lectorat composé non seulement de chercheurs mais aussi de professeurs, en insistant dans son journal sur "*les progrès accomplis dans l'enseignement*" (voir [Chap.5,3.1]). D'autre part, on retrouve dans ces rédacteurs - et dans la même proportion (60%) - des scientifiques travaillant ou ayant effectué des travaux dans le domaine de l'Astronomie. Là encore cela résulte de l'influence de Darboux pour qui la prise en compte de l'Astronomie dans le Bulletin est dès le commencement une question primordiale, ainsi que nous le soulignions en [Chap.5,3.2].

Enfin, l'étude du lieu de résidence des rédacteurs montre l'existence de deux pôles, Bordeaux et Paris, correspondant naturellement aux deux villes où se situent les principaux rédacteurs, respectivement Hoüel et Darboux. Si à Bordeaux Hoüel travaille avec Lespiault, les autres rédacteurs sont à Paris avec Darboux pour qui leur présence dans la capitale est indispensable. Aussi reproche-t-il par exemple à Radau de partir trop souvent en Gascogne chez Antoine d'Abbadie, et supprime-t-il l'abonnement gratuit au Bulletin de Tisserand quand ce-dernier part pour Toulouse.

A travers les différentes caractéristiques mentionnées ci-dessus, on comprend que l'influence de Darboux sur la composition du groupe de rédaction du Bulletin est à la fois forte et multiple. Mais après avoir insisté dans la section [Chap.5,3.2] sur l'aspect international du périodique, aspect que Darboux met particulièrement en avant, ainsi que sur les rapides liens qu'il établit avec Hoüel en Italie et en Allemagne, on pourrait légitimement s'étonner de l'absence de mathématiciens étrangers dans le groupe des proches collaborateurs. Ces mathématiciens étrangers sont en fait tous présents, jusqu'en 1875, dans la "*liste de collaborateurs*" et non en couverture dans la "*liste de rédacteurs*". On compte dans ces collaborateurs, que l'on pourrait qualifier de second rang pour Darboux, 29 scientifiques qui viennent s'ajouter aux 10 rédacteurs que nous avons étudiés jusqu'alors. Parmi ces collaborateurs, 13 sont français et 16 sont étrangers :

– 4 Allemands : Emil Lampe (1840-1918) ; Rudolf Lipschitz (1832-1903) ; Alfred Clebsch (1833-1872) ; Félix Klein (1849-1925).

46. Voir à ce sujet les statistiques de [**Lundgreen 1980**].

- 3 Italiens : Eugenio Beltrami (1835-1900) ; Giuseppe Battaglini (1826-1894) ; Ernesto Padova (1845-1896).
- 2 Belges : Joseph Marie De Tilly (1837-1906) ; Paul Mansion (1844-1919).
- 2 Russes : Vasily Grigorevich Imschenetsky (1832-1892) ; Vasilii Petrovich Ermakov (1845-1922).
- 1 Suisse : Rudolf Wolf (1816-1893).
- 1 Autrichien : Emil Weyr (1848-1894).
- 1 Norvégien : Sophus Lie (1842-1899).
- 1 Danois : Hieronymus Georg Zeuthen (1839-1920).
- 1 Finlandais : Lorenz Leonard Lindelöf (1827-1908).

L'absence de collaborateurs étrangers dans la première liste de 10 rédacteurs n'était ainsi qu'une apparence due au filtre que nous avions choisi avec Darboux : l'apparition sur la couverture dans la liste dite des rédacteurs. En outre, dès 1876 avec le premier tome qui échappe à ceux que nous avons pris en compte (1870-1875), 5 scientifiques étrangers seront présentés en couverture en qualité de rédacteurs : les deux allemands Klein et Lampe, ainsi que Battaglini, Weyr et le russe Nikola Bougaïef (voir la figure 8). Deux de ces cinq collaborateurs ont par ailleurs une place importante dans la rédaction d'un périodique : Klein s'occupe, avec Neumann (et Mayer), de la rédaction des "*Mathematische Annalen*" après la mort de Clebsch et Battaglini dirige le "*Giornale di Matematiche*". On peut tout de même noter l'absence de collaborateurs anglais, ce qui concorde avec la remarque faite par Darboux à Hoüel : "*mon cher collaborateur, je songe avec effroi que l'Angleterre est négligée dans notre Bulletin*" [47]. Si le Bulletin rend bien compte des périodiques anglais, il semble en effet que l'obtention de ces périodiques n'ait pas été à l'origine de collaborations avec les mathématiciens d'outre-Manche [48].

Tant par la forme éditoriale choisie, par les contrats d'édition que par la composition de l'équipe de rédaction, Darboux impose ses choix pour le Bulletin des Sciences. Ayant pris en quelques mois à peine la responsabilité quasi totale de la rédaction du Bulletin au détriment de la Commission de l'EPHE dirigée par Chasles, il gère la mise en forme du journal et négocie directement les contrats avec Gauthier-Villars. Il s'attache d'autre part rapidement la collaboration d'une équipe de mathématiciens qu'il recrute en tenant compte de plusieurs critères importants. Des études effectuées à l'Ecole Normale, ainsi que le double statut d'agrégé et de docteur sont des points que les collaborateurs principaux partagent, et que Darboux recherche dans son recrutement. Le Bulletin est en effet un nouvel outil à la disposition de l'ex-protégé de Pasteur pour mettre l'Ecole Normale Supérieure, à travers ses anciens élèves, sur le devant de la scène face à l'Ecole Polytechnique. Si les collaborateurs étrangers du Bulletin sont déjà très nombreux en 1875, ils n'apparaissent sur la couverture

47. Lettre non datée (Mai 1870), [**Archives épistolaires Darboux**].
48. Ceci avait déjà été remarqué, pour l'étude du premier tome du Bulletin, par [**Gispert 1987**, 75]. Cette remarque reste ainsi tout autant pertinente pour les cinq premières années de fonctionnement du périodique.

du périodique qu'à partir de 1876. On compte parmi eux plusieurs rédacteurs de périodiques scientifiques, fruit de l'effort effectué par Darboux et Hoüel dès 1870 pour contracter le plus d'échanges possibles avec les revues mathématiques étrangères. Sans surprise, l'Allemagne et l'Italie sont les deux pays comptant le plus de mathématiciens collaborateurs du Bulletin de Darboux. Au total, en 1875, en incluant Darboux et Hoüel, l'équipe de rédaction du Bulletin des Sciences et ses collaborateurs rassemblent 39 scientifiques, soit exactement le nombre de collaborateurs que le Jahrbuch concurrent (ou pas ?) affiche cette année-là sur ses cahiers [49].

En parvenant à obtenir des contrats de plus en plus avantageux avec son imprimeur et le Ministère, une équipe de collaborateurs large, compétente et diversifiée, ainsi que de plus en plus d'abonnés, Darboux a sans commune mesure permis le succès de son entreprise éditoriale. Mais en outre la renommée et les qualités de Darboux, qualités mathématiques mais également qualités d'analyse d'œuvres et de rédaction, ont sans aucun doute largement contribué à ce succès. Son accession en 1872 à la maîtrise de conférences à l'École Normale Supérieure et à une suppléance à la Sorbonne, conjuguée à l'excellente réception de ses travaux - que nous avons analysée au [Chap.4,4] -, ont fait grandir, en France et en Europe, le prestige du géomètre de pair avec celui de sa publication. Il semble opportun alors de reprendre les termes de René Taton, et de les transposer sans difficulté du Bulletin de Férussac au Bulletin de Darboux : "*un des éléments qui contribuèrent au renom du Bulletin des Sciences mathématiques est certainement la valeur de ses rédacteurs principaux*" ([**Taton 1947**, 115]). Le rédacteur en chef nîmois aura eu une influence déterminante sur son journal et le succès de celui-ci, si bien que les propos de Jean Dhombres résumant ce succès au fait que "*Darboux a[it] su bénéficier, sans effort particulier, de la vitalité d'une science*" [50] nous semblent devoir être reconsidérés.

2. Etude des influences sur le contenu des sections du Bulletin (1870-1875)

2.1. Introduction et méthodologie.

Dans cette section, nous nous proposons d'analyser l'importance accordée aux différentes matières dans le Bulletin, pour tenter d'en dégager les courants d'influence entre le rédacteur Darboux et son journal. Plusieurs tendances se dégagent dans les différentes études des historiens sur les journaux mathématiques. De nombreux travaux portent sur les *auteurs* qui y insèrent leurs travaux. C'est notamment le cas de [**Delcourt 2014**] et plus largement des études portant sur les *Annales de Gergonne* et les *Nouvelles Annales*, qui ont donné naissance à une base de données en ligne des auteurs du dernier nommé [51]. D'autres travaux se concentrent quant à eux sur les contenus des périodiques, et le problème du *classement* de ce contenu : [**Taton 1947**] pour le Bulletin de Férussac peut être évoqué dans ce cadre, tout comme [**Gerini 2014**] pour les *Annales de Gergonne*. C'est également

49. En 1875, le tome 4 du Jahrbuch paraît, recensant les travaux parus en 1872. La page 34 présente alors une liste de collaborateurs qui sont précisément au nombre de 39.
50. [**Dhombres 1994**, 125].
51. Voir en ligne : `nouvelles-annales-poincare.univ-lorraine.fr`.

sous cette optique qu'Hélène Gispert a envisagé l'analyse du premier tome du Bulletin des Sciences ([**Gispert 1984**] et [**Gispert 1985**]). Ces travaux balisent donc notre présente recherche.

Notre étude du contenu des sections du Bulletin vise à évaluer la présence et le rôle des domaines mathématiques au sein du journal. Aussi nous heurtons-nous également à la problématique du classement du contenu. Nous définissons pour y remédier des *matières* grâce à la division des ouvrages et mémoires du Bulletin opérée dans les tables de fin de volume. Il s'agit simplement de la division que nous avons analysée précédemment dans la section [Chap.5,4.2], et que nous avions matérialisée via le code couleur de la figure [Chap.5,fig.19]. Nous suivons en fait la méthodologie déjà adoptée par Hélène Gispert dans ses travaux sur le Bulletin, qui a effectué ses analyses de la répartition des sujets traités dans le périodique en utilisant également la classification présentée sur les tables méthodiques. Deux différences existant entre notre recherche et celles de l'historienne qui nous ont inspirés doivent néanmoins être soulignées. D'une part, ses travaux avaient pour but l'étude des productions mathématiques nationales (en France et en Italie) et, suite à la présence de ce filtre des nationalités, ne comprenaient pas l'ensemble des livres et articles mentionnés dans le Bulletin. D'autre part, les deux études étaient centrées sur l'année 1870 et utilisaient ainsi la répartition en 14 rubriques de la table du Bulletin de cette année-là. Les données analysées ainsi que les classifications opérées vont donc quelque peu varier.

Puisque [**Gispert 1985**, 382-391] établissait en parallèle quelques données globales relatives au Bulletin, au Jahrbuch ainsi qu'aux "*Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*" sur la période 1865-1875, nous choisissons de prendre en compte les 9 premiers tomes du Bulletin couvrant la période 1870-1875. Cela nous permettra ainsi d'effectuer des rapprochements cohérents avec les travaux de l'historienne. Ce choix de spectre temporel présentera l'avantage de pouvoir constituer une base de données suffisamment large pour en tirer, nous le verrons, des analyses pertinentes. Par ailleurs, ces données n'étant pas excessivement volumineuses, nous avons pu construire cette base de données dans un temps raisonnable.

Dans ses analyses, Hélène Gispert insiste sur la Revue et le Bulletin bibliographiques. Nous allons en revanche étudier d'abord la section de Mélanges, puis ensuite celle de Revue des publications périodiques. Notre but étant d'évaluer les influences entre Darboux et le contenu du Bulletin, il nous semble en effet que cette influence transparaît clairement via une étude statistique de ces deux sections, alors que cette étude ne se révélerait pas pertinente quant à la section de Revue bibliographique. Cette-dernière est consacrée aux comptes-rendus des ouvrages parus hors des périodiques. Or un rapide aperçu permet d'illustrer le fait que la Revue Bibliographique du Bulletin rend compte de la très grande majorité des ouvrages parus : ainsi entre 1870 et 1875, le Jahrbuch dénombre en moyenne 24 nouveaux livres parus annuellement, alors que la Revue Bibliographique du Bulletin rend compte en moyenne de 27 livres par année[52]. On constate donc que la section de

52. Les résultats concernant le Jahrbuch proviennent de la base de données numérisée `http://www.emis.de/MATH/JFM/JFM.html`. Le fait que le Bulletin analyse en moyenne plus de livres que le Jahrbuch est à relativiser toutefois : durant les premières années, le Bulletin rendait également compte de certains ouvrages parus avant 1870, ce qui explique que le nombre de livres présentés dans le Bulletin puisse dépasser celui du Jahrbuch qui se veut pourtant exhaustif. D'autre part, il arrive que certains mémoires initialement parus dans des périodiques soient par la suite imprimés à part comme des ouvrages indépendants. Dans ce cas, les rédacteurs du Bulletin pouvaient en rendre compte dans la section de Revue Bibliographique alors

revue bibliographique des ouvrages du Bulletin est suffisamment exhaustive pour pouvoir affirmer que le tri opéré par les rédacteurs est très faible, voire insignifiant. Une étude statistique visant cette section ne rendrait donc pas compte d'un choix significatif de la part de Darboux mais établirait plutôt une image fidèle de la production mathématique d'ouvrages, ce qui supporte donc tout à fait l'utilisation de cette section par Hélène Gispert pour refléter les productions nationales.

Au contraire, une étude quantitative des sections de Mélanges et de Revue des publications périodiques permet de cerner les choix des rédacteurs et donc directement l'influence de Darboux. Cela est immédiat en ce qui concerne la section Mélanges qu'il est libre de composer comme il l'entend. Ses choix sont donc immédiatement reflétés par la teneur des travaux présentés dans cette section. Le géomètre gardois dirige en effet d'une manière quasi unilatérale le contenu de cette section, y insérant à son gré des mémoires et des traductions de travaux étrangers, y compris parfois contre l'avis de Hoüel. C'est le cas en 1873 pour le mémoire de Riemann [**Riemann 1854a**] et, surtout, celui de Cauchy [**Cauchy 1825**] en 1875 :

> J'ai fait un article original de quinze pages qui figurera dans les Mélanges et je vais mettre le mémoire de Clebsch.
>
> Lettre non datée (Août 1871) de Darboux à Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

> Pourquoi vous plaignez-vous que le Bulletin publie des traductions ? Quel est notre rôle ? C'est de faire connaître aux français ce qui se fait à l'étranger. Et bien les traductions sont tout aussi utiles pour cela que les analyses.
>
> Lettre datée du 6 Mai 1873 de Darboux à Hoüel, à propos de l'insertion de la traduction du mémoire [**Riemann 1854a**] dans le tome 5 (1873) du Bulletin

> [...] nous réimprimons le mémoire de 1825 de Cauchy sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires. [...] Je crois que vous approuverez cette idée de réimprimer un ou deux mémoires de Cauchy. Si vous saviez combien cela fait plaisir aux pauvres gens qui ont entendu parler de ces mémoires et qui soupirent après sans pouvoir mettre la main dessus.
>
> Lettre datée du 12 Janvier 1875 de Darboux à Hoüel, à propos de la réimpression du mémoire [**Cauchy 1825**] dans les tome 7 et 8 (1874,1875) du Bulletin

> Savez-vous ce qui aurait été 200000 fois plus utile et plus intéressant que la réimpression du Mémoire de Cauchy ? C'aurait été une Note de vous résumant et classant les divers travaux faits depuis Pfaff jusqu'à Mayer, Lie et vous, sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre. Cela aurait appris quelque chose à nos lecteurs. Tandis que le Mémoire de Cauchy ne sera lu de personne que de quelques vieux arriérés. Ne

---

que le même travail était compté comme émanant d'un périodique dans le Jahrbuch. Enfin, les "ouvrages" dont rend compte le Bulletin peuvent également être des thèses ou des rapports parus indépendamment qui ne sont pas classés comme "livres" dans la base de données du Jahrbuch.

> persévérez pas, je vous en supplie, dans cette voie de remplissage quand même. Elle est détestable.
>
> Lettre datée du 7 Février 1875 de Hoüel à Darboux
>
> Je crois que la guérison serait possible, mais ce serait avec le secours de remèdes autrement sérieux que votre réimpression d'une antiquaille de Cauchy, qui ne trouvera pas un lecteur, tant cette méthode est vieillie, par rapport même aux travaux suivants de l'auteur. Ç'a été un admirable travail pour le temps où il a paru. Mais les travaux d'Archimède n'ont pas été moins admirables dans leur temps, et vous ne les reproduirez pas sans doute.
>
> Lettre datée du 8 Mars 1875 de Hoüel à Darboux
>
> Mais quelle diable d'idée avez-vous eue de nous encombrer de ce vieux Mémoire de Cauchy ! Et dire que nous ne serons pas encore quittes après celui-là, et que vous nous menacez encore d'un autre ! Il fallait me dire la chose avant de l'avoir décidée.
>
> Lettre datée du 11 Mars 1875 de Hoüel à Darboux
>
> Lettres de Gaston Darboux à Jules Hoüel : [**Archives épistolaires Darboux**].
> Lettres de Jules Hoüel à Gaston Darboux : [**Henry Nabonnand 2016**, 484-497]

Dans un premier temps nous allons ainsi étudier, statistiquement, la composition de la section de Mélanges (section 2.2), puis nous nous pencherons sur celle de la section de revue des périodiques pour pouvoir établir une comparaison (section 2.3). Enfin nous terminerons après ces études quantitatives par une étude qualitative sur la section de revue bibliographique où nous soulignerons l'absence d'adéquation entre la forte présence de recensions d'une matière et la volonté des rédacteurs du Bulletin de promouvoir cette même matière (section 2.4). Ce que nous montrerons par quelques exemples, c'est que les recensions d'ouvrages peuvent en effet être très critiques, ou alors faussement élogieuses.

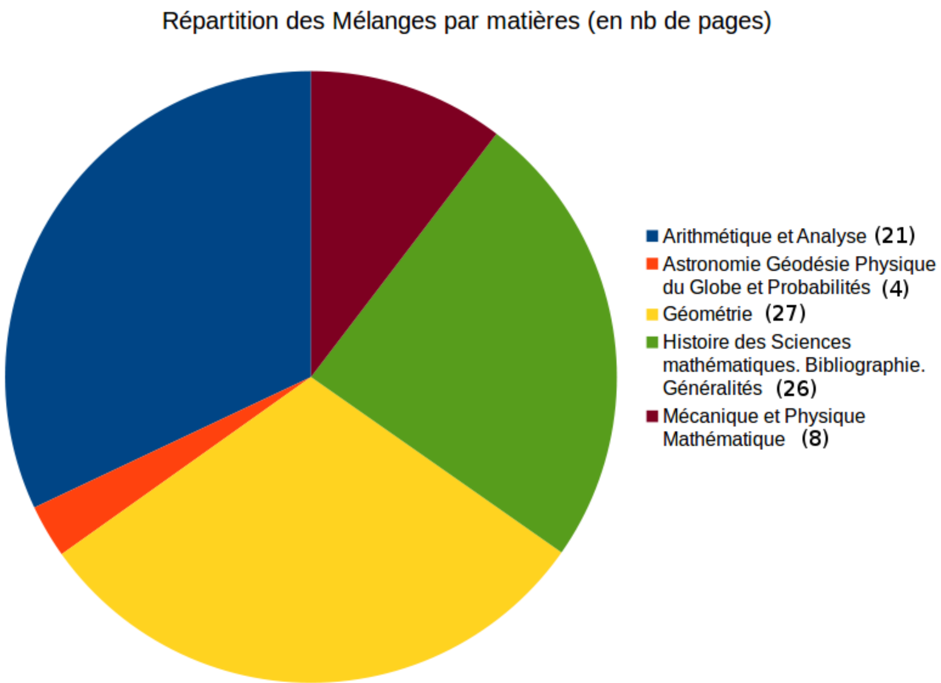
2.2. Etude du contenu des Mélanges (1870-1875).

Pour cette première étude, nous avons constitué une base de données regroupant tous les travaux présentés dans la section Mélanges du Bulletin entre 1870 et 1875. Cette base rassemble 86 travaux, lesquels représentent 887 pages. Nous avons ensuite classé ces travaux entre les 5 *matières* : Arithmétique et Analyse, Astronomie Géodésie Physique du Globe Probabilités, Géométrie, Histoire des Mathématiques Généralités, Mécanique Physique Mathématique. Ce classement est opéré, comme nous l'avons rappelé plus haut, selon les tables mêmes du Bulletin. La division en 5 matières n'est pas systématiquement adoptée dans les tables du Bulletin sur la période 1870-1875 (voir [Chap.5,4.2]). Cependant nous avons toujours pu, pour les 9 tomes analysés, reverser les différentes sections dans ces 5 grandes matières grâce à la répartition des sections que nous avions illustrée dans le tableau de la figure [Chap.5,fig.19].

Ce n'est pas tant le nombre de mémoires qui nous paraît pertinent mais la longueur de ceux-ci. En effet, certains articles insérés dans les Mélanges n'excèdent pas la simple page, tandis que d'autres peuvent courir sur plusieurs fascicules et rassembler plusieurs dizaines de pages. C'est ainsi le critère du nombre de pages que nous élisons comme le plus pertinent pour notre étude statistique. Nous conserverons cependant dans la mesure du possible l'information relative au nombre de mémoires sur les données graphiques présentées ci-après, où nous la ferons figurer entre parenthèses dans les légendes.

Pour l'ensemble de la période (1870-1875), les résultats obtenus sont présentés ci-dessous. Nous commençons par y présenter la répartition générale de la section de Mélanges selon les matières, en la comparant avec celle des mémoires de Darboux que celui-ci y insère (figure 10). Nous enrichissons ces données de quelques résultats généraux relatifs à cette section, à savoir son importance dans le journal, la place des contributions de Darboux - que nous distinguerons être de deux sortes - (figure 11), et pour finir les auteurs qui y sont les plus représentés (figure 12).

(A)



(B)

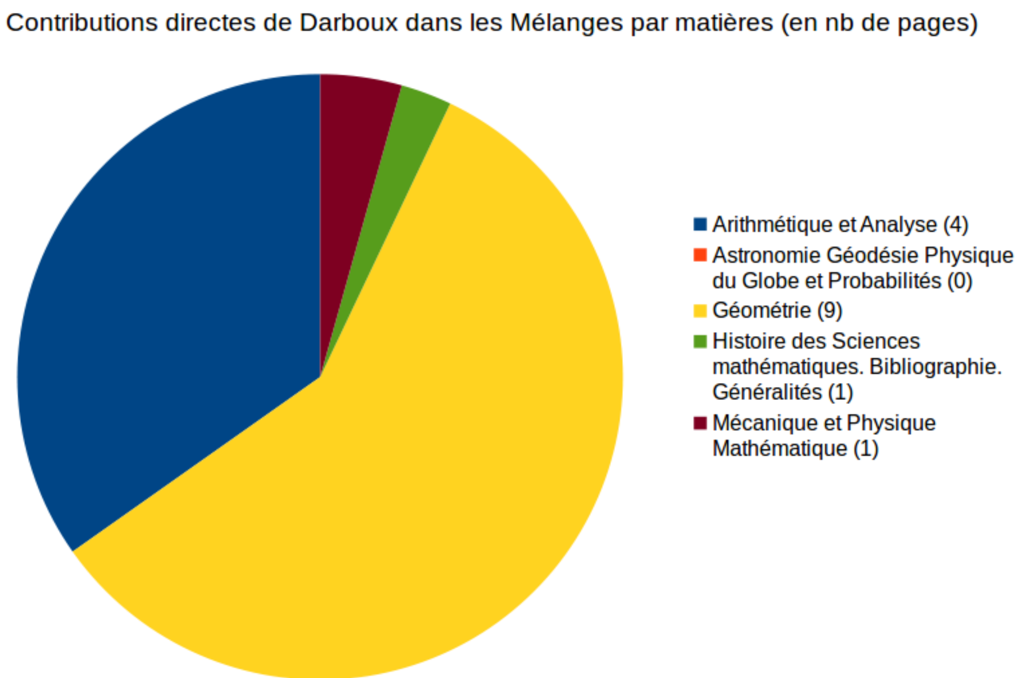


FIGURE 10. Section Mélanges (1870-1875) : résultats de répartition par matières généraux (A) et des contributions directes de Darboux (B)

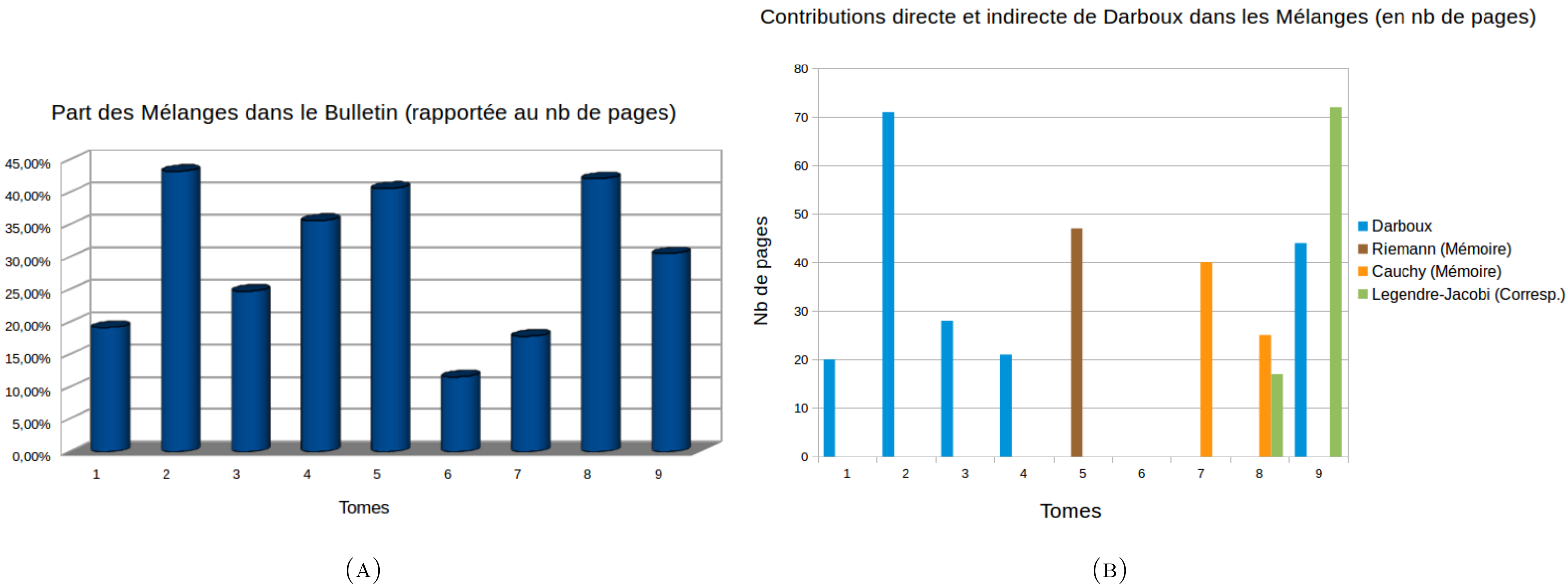


FIGURE 11. Section Mélanges : part volumique dans le Bulletin et contributions de Darboux selon les tomes

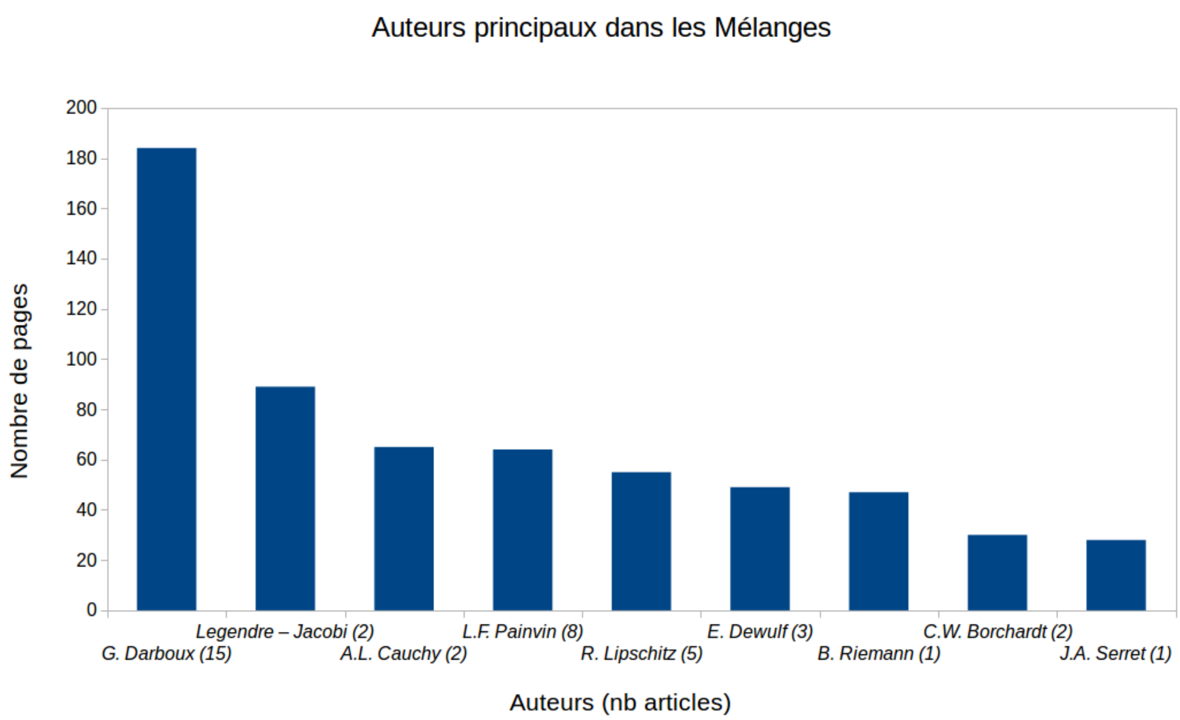


FIGURE 12. Section Mélanges : classement des auteurs principaux (1870-1875)

On constate sur les figures 10 que les deux matières les plus représentées dans les travaux de la section de Mélanges sont l'Arithmétique et Analyse d'une part, et la Géométrie d'autre part. L'Histoire des mathématiques y est également largement représentée [53], alors que l'Astronomie ne l'est presque pas. On remarque par ailleurs que cette répartition globale correspond très bien aux travaux présentés par Darboux lui-même dans la section de Mélanges. Les mémoires du nîmois y sont en effet en majorité des travaux de Géométrie (9 au total sur la période 1870-1875). Ses travaux d'Arithmétique et Analyse (4 au total) représentent par ailleurs plus d'un tiers de ses contributions à cette section. L'influence de Darboux paraît ainsi qualitativement très importante : ses propres productions mettent en avant l'Analyse et la Géométrie, les deux matières qui sont globalement les mieux représentées dans les Mélanges.

Les figures 12 et 11 indiquent d'autre part l'influence de Darboux d'un point de vue quantitatif. Il est ainsi largement l'auteur prépondérant des Mélanges avec plus de 180 pages lorsque l'on cumule ses travaux, ce qui représente 21% du total de pages de la section. On retrouve là ce que [**Gerini 2014**] et [**Verdier 2009a**] avaient déjà souligné respectivement pour Gergonne et ses Annales, et pour Liouville et son Journal : Darboux, rédacteur du Bulletin, est le premier auteur de son journal (au moins pour la production dans les Mélanges). Ses propres mémoires, publiés dans le Bulletin, sont ce que nous avons qualifié comme étant ses *contributions directes*.

Mais on peut également noter que parmi les autres auteurs importants de la section, Legendre et Jacobi, Cauchy et Riemann correspondent en fait à une contribution que l'on peut qualifier d'*indirecte* de Darboux. C'est en effet lui qui décide en 1873 de publier une traduction du mémoire de Riemann sur les séries trigonométriques et l'intégrale ([**Riemann 1854a**] [54]), puis qui choisit de publier le mémoire [**Cauchy 1825**] dans les tomes 7 et 8 du Bulletin. C'est enfin toujours lui prend l'initiative de présenter la correspondance entre Legendre et Jacobi dans les Mélanges des Bulletins de 1875. Si l'on ajoute ces contributions *indirectes* aux articles qu'il signe *directement* de sa main, les contributions de Darboux pour le Bulletin représentent alors un total de 385 pages entre 1870 et 1875, soit 43% [55] de cette section. Pour finir, il est remarquable, en comparant les deux figures 11, que le tome 6 (correspondant au premier semestre de 1874) est à la fois le seul volume pour lequel Darboux n'apporte aucune contribution (directe ou indirecte) et le tome où les Mélanges occupent la plus faible portion du Bulletin, avec à peine plus de 10%. L'influence quantitative de Darboux sur la section de Mélanges ressort donc clairement : le volume éditorial réservé à cette section dépend directement de la contribution apportée par le rédacteur du Bulletin, qui est aussi le premier auteur des articles des Mélanges.

Cette dernière partie d'analyse quantitative de l'apport de Darboux valide du même coup les remarques qualitatives qui la précédaient sur son influence. Mais on peut dégager cette influence sur la composition des Mélanges d'une manière plus forte encore, qui va par ailleurs révéler pleinement la très forte diversification des centres d'intérêt mathématiques de notre héros au début des années 1870. Plusieurs indices poussent en effet à scinder le cadre temporel de notre étude en deux : 1870-1872 (les trois premiers volumes

53. La majeure partie des articles relevant de l'Histoire des mathématiques sont des notices sur la vie ou les travaux de certains mathématiciens tels Lobatchevsky ou Julius Plücker.

54. Nous reviendrons sur la grande importance de ce mémoire pour Darboux dans la section 3.2.

55. Rappelons ici que le nombre total de pages dédiées à la section de Mélanges entre 1870 et 1875 est de 887.

du Bulletin) et 1873-1875 (groupant les tomes 4 à 9). La prise en compte de sa trajectoire institutionnelle par exemple, laquelle change nous l'avons vu fin 1872, ou encore la lecture rapide d'une bibliographie des écrits de Darboux ([**Lebon 1910**]) incitent ainsi à appréhender différemment ces deux périodes. Avec ce nouveau découpage temporel, nous rééditons l'étude présentée en figure 10 en observant à nouveau la répartition des matières dans les travaux de la section Mélanges en général et dans ceux effectués par Darboux lui-même. Le résultat est présenté sur la figure 13 ci-dessous.

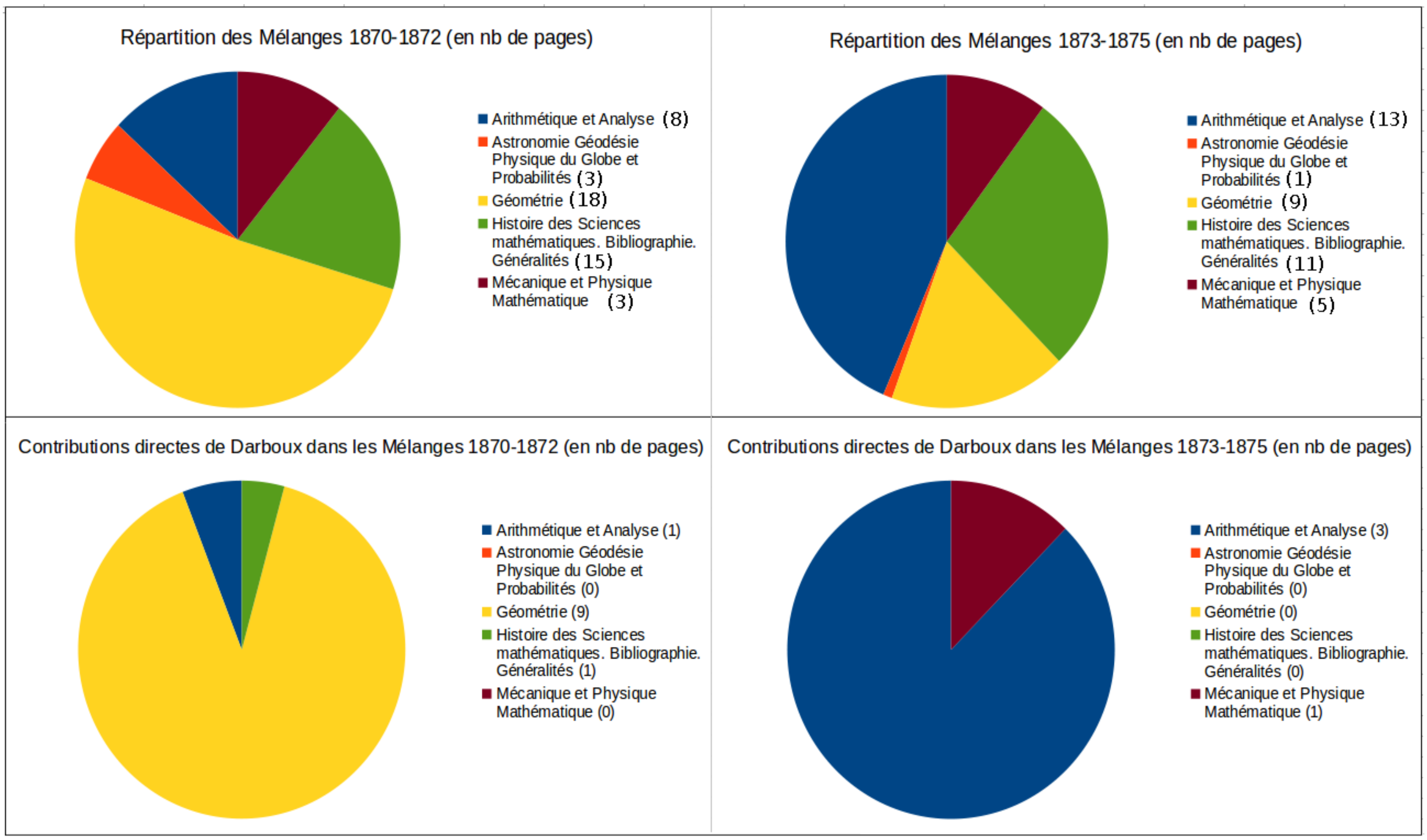


FIGURE 13. Section Mélanges (1870-72 et 1873-75) : résultats de répartition par matières généraux (en haut) et des contributions directes de Darboux (en bas)

Les deux diagrammes circulaires consacrés aux contributions de Darboux reflètent nettement la diversification, voire même le bouleversement des domaines de recherches du nîmois. Tous les travaux de Géométrie de Darboux présents dans la section de Mélanges du Bulletin de 1870 à 1875 le sont en réalité dans les trois premiers numéros soit entre

1870 et 1872. Ces contributions couvrent alors la quasi totalité des apports directs de Darboux à cette section sur cette période [56]. En revanche entre 1873 et 1875, les travaux que Darboux publie dans les Mélanges sont consacrés à l'Analyse pour la plupart ainsi qu'à la Mécanique. Ceci est en accord complet avec la trajectoire institutionnelle du *professeur* Darboux, qui devient en Octobre 1872 maître des conférences de Calcul différentiel et intégral à l'Ecole Normale, et dans le même temps chargé des cours de Mécanique rationnelle de la Sorbonne. Le Bulletin *reflète* donc ici à merveille ce virage des intérêts scientifiques de Darboux, et nous verrons un peu plus loin dans quelle mesure le journal a pu par ailleurs *causer* et *alimenter* ces modifications.

La comparaison avec les répartitions globales des articles selon les cinq matières, présentées sur les diagrammes supérieurs, montre la prépondérance de l'impact de Darboux sur les Mélanges. Entre 1870 et 1872, la Géométrie regroupe ainsi la moitié des articles de cette section. Puis, à l'image des travaux de Darboux, c'est la section consacrée entre autres à l'Analyse qui devient dominante entre 1873 et 1875 alors que la Géométrie ne rassemble plus qu'une faible portion des articles. On constate ainsi l'influence de Darboux sur la composition des Mélanges du Bulletin puisque les choix qu'il opère, à titre personnel, pour ses recherches et ses travaux en terme de sujets mathématiques se répercutent nettement sur la teneur des articles de cette section.

Ce changement de matière dominante, sous l'impulsion de Darboux, est particulièrement bien illustrée par le *démarchage* de Rudolf Lipschitz en 1872. Jugeant les travaux de Lipschitz méconnus en France, Darboux prend spontanément contact avec le mathématicien de Bonn en lui soumettant la proposition d'exposer ses recherches (sur les formes de plusieurs différentielles) dans le Bulletin :

> Depuis plusieurs années vous avez pris pour sujet de vos recherches un sujet dont l'étude est fondamentale, et a les plus hautes conséquences soit en mécanique, soit en géométrie. Chargé de diriger le Bulletin des Sciences mathématiques, je désirerais vivement que vos travaux fussent analysés avec toute l'étendue qui leur est due, aussi viens-je vous prier de bien vouloir avoir la bonté de nous [en] envoyer un résumé [...]
>
> Lettre non datée (Mars 1872) de Gaston Darboux à Rudolf Lipschitz, reproduite dans [**Lipschitz 1986**, 44]

Lipschitz répondra favorablement à cet appel [57] : il écrira lui-même un résumé en allemand de six de ses mémoires parus dans le "*Journal de Borchardt*" que Hoüel se chargera ensuite de traduire en français. Le résultat [**Lipschitz 1873**] sera inséré dans les Mélanges du Tome 4 du Bulletin (1er Semestre 1873), amorçant ainsi le virage de cette section vers la Mécanique et l'Analyse.

56. Le seul article d'analyse que Darboux insère dans les Mélanges entre 1870 et 1872 est son travail sur le théorème des bornes pour une fonction de deux variables [**Darboux 1872c**]. Nous l'étudierons dans la partie [Chap.7,1]. Cet article paraît d'ailleurs en Octobre 1872.

57. Les réponses de Lipschitz à Darboux sont conservées à la Bibliothèque de l'Institut ([**Archives épistolaires Lipschitz**]). On peut également consulter dans [**Lipschitz 1986**, 150-152] quelques extraits de lettres de Hoüel à Lipschitz relatifs à l'effort de traduction en français par le premier du résumé des travaux du second.

2.3. Etude du contenu de la Revue des périodiques (1870-1875).

De même que nous venons de le faire pour les Mélanges, nous analysons à présent la composition de la section de Revue des publications périodiques du Bulletin entre 1870 et 1875, en cherchant toujours à souligner quelles matières y sont mises en avant. Nous conservons la division établie en [Chap.5,4.2] et utilisée jusqu'à présent des mémoires et ouvrages en cinq matières.

Pour cette section, une difficulté apparaît qui est propre aux recensions des périodiques : les comptes-rendus de mémoires ont une taille extrêmement variable. Pour certains l'analyse se résume en effet à la simple mention du titre, tandis que pour d'autres la recension peut compter plusieurs pages. Cette variété était déjà pointée du doigt par Darboux au moment de définir avec Hoüel la composition de leur journal :

> D'après vos idées, il ne faudrait pas distinguer les journaux dont on fera des comptes-rendus plus détaillés. Cette revue [des publications périodiques] comprendrait donc à la fois pour certains recueils presque seulement les titres des Mémoires, et pour d'autres des analyses plus détaillées suivant le temps, l'espace, et le goût personnel de la personne se livrant à l'analyse, ainsi que suivant l'importance du mémoire.
>
> Lettre non datée (Janvier 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Pour les Mélanges, la taille des articles se prêtait tout à fait à l'emploi du nombre de pages comme critère statistique. Mais pour les recensions des mémoires parus dans les périodiques ce n'est plus le cas : cela nécessiterait en effet d'adopter pour unité de longueur une fraction de page, voire même la simple ligne. Il semblait alors que nous dussions en revenir à la seule prise en compte du nombre de recensions, indépendemment de leur longueur. Mais là encore, du fait de la diversité des longueurs des recensions, la quantité de mémoires relevant d'une matière donnée recensés dans la revue des périodiques n'apparaît donc pas comme une donnée pertinente pour déceler les sujets mis en avant par les rédacteurs. Nous retrouvons là ce qui nous avait conduit à rejeter ce critère en premier lieu pour les Mélanges.

Notre méthodologie va donc consister en un critère *mixte* entre le nombre et la longueur. Notre base de données ne prendra ainsi pas en compte l'intégralité des recensions des périodiques. Nous fixons en effet une taille minimale de 10 lignes qui, telle une longueur critique, correspondra à la taille minimale que la recension devra atteindre pour que nous la prenions en compte. Nous nommerons dans la suite de telles recensions des *recensions significatives*. Ce-faisant, nous prenons le parti de relier directement la taille d'une recension à la volonté par son auteur de mettre en avant le mémoire en question. C'est en effet la (seule) règle qui est donnée aux collaborateurs du Bulletin prenant en charge les recensions des mémoires parus dans les périodiques. Aussi par exemple lorsque le belge Joseph De Tilly, qui doit traiter les périodiques belges et hollandais, s'enquiert des éventuelles consignes à suivre pour effectuer sa tâche de rédaction, Hoüel lui répond-il :

> Vous connaissez la forme et l'étendue des articles qui ont paru jusqu'ici, et vous voyez en même temps combien sont larges les limites entre lesquelles le rédacteur peut se mouvoir. La seule règle (qui n'est peut-être

pas aussi scrupuleusement observée que nous le voudrions), c'est de proportionner autant que possible la longueur d'un article à l'importance de l'ouvrage. [58]

Lettre datée du 31 Août 1871 de Jules Hoüel à Joseph De Tilly, reproduite dans [**Henry Nabonnand 2016**, 169-171]

Le nombre de recensions significatives par matière dans la section de revue des publications périodiques devient par conséquent une donnée pertinente pour notre étude : c'est celle que nous retiendrons pour les données statistiques. Néanmoins ce nombre reste dépendant *a priori* du nombre total de mémoires relevant d'une matière donnée publiés dans les périodiques, et donc également du nombre de périodiques existants qui publient les travaux de cette matière. Aussi le nombre brut de recensions significatives de mémoires de cette matière dans le Bulletin refléterait-il, au moins en partie, non pas des intentions et des choix des rédacteurs, mais plutôt l'état de la production mathématique dans son ensemble relativement à cette matière, à l'instar de la composition de la Revue Bibliographique. C'est pourquoi, dans un second temps, nous ramènerons pour chaque tome du Bulletin le nombre brut de recensions significatives d'une matière au total des travaux de cette matière cités dans le même tome du Bulletin. Cette *proportion par matière de recensions étant significatives* - selon le sens que nous avons défini - nous semble pour finir la donnée la plus pertinente pour analyser les matières mises en avant par les rédacteurs dans la section de revue des périodiques.

La base de données ainsi constituée rassemble pour notre période d'étude (1870-1875) 755 recensions dites significatives, nombre qui doit être rapproché des 6418 travaux cités au total. La répartition de ces travaux totaux selon les cinq matières est donnée en annexe (voir Annexe 5). Ces recensions significatives sont ventilées selon les cinq matières dans la figure 14.

58. On retrouve également cette *règle* de fonctionnement dans des propos de Gergonne (qui paradoxalement n'effectuera jamais de recension dans ses Annales) : "*Les rédacteurs des Annales s'attacheront à présenter [des travaux] un compte-rendu parfaitement exact, et d'une étendue proportionnée à leur importance*", citation reproduite dans [**Dhombres 1994**, 110].

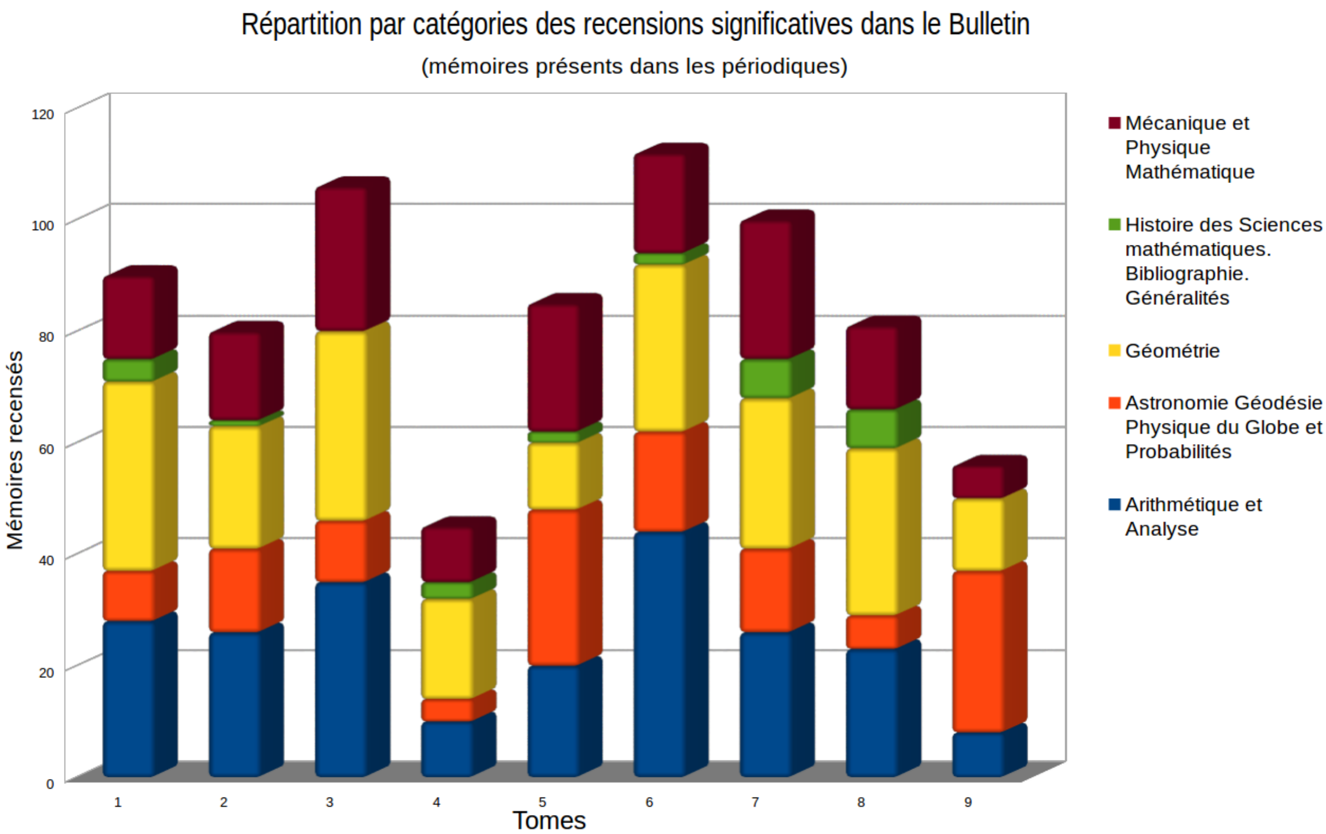


FIGURE 14

On remarque que, comme pour la section de Mélanges, les matières comptant le plus de recensions significatives dans la Revue des périodiques du Bulletin sont pour la plupart des volumes l'Arithmétique et Analyse ainsi que la Géométrie. Cependant, le nombre de telles recensions en Astronomie est fortement variable et surpasse pour les tomes 5 et 9 les autres matières. Finalement, seule l'Histoire des Sciences n'est que très faiblement représentée dans le nombre de recensions significatives. D'un point de vue global, le nombre total de recensions significatives annuelles devient plus important après 1873, ce qui va de pair avec l'augmentation du nombre de feuilles du Bulletin[59]. Néanmoins, on note que c'est en 1874 (tomes 6 et 7) que le nombre de recensions significatives est le plus fort. En comparant avec la figure 11, on constate que cela coïncide avec l'année où les Mélanges occupent la plus faible partie du Bulletin. Au contraire, l'année 1873 (tomes 4 et 5) est l'année - postérieure au changement de forme de publication - pour laquelle le nombre

59. Rappelons que les trois premiers volumes sont annuels alors qu'à partir de l'augmentation en 1873 du nombre de pages mensuelles - de 32 à 48 - les volumes sont semestriels (voir l'étude des contrats en [Chap.6,1.2]). Ainsi il convient par exemple d'ajouter les tomes 4 et 5 pour comptabiliser l'ensemble de l'année 1873.

de ces recensions est le plus faible alors que la part de la section Mélanges y est la plus importante.

On constate ainsi la dépendance des volumes accordés par les rédacteurs aux sections de mélanges et de recensions des périodiques. Darboux avait toujours à cœur de souligner l'importance des Mélanges dans son journal, mais la place réservée à cette section devait toujours être adaptée à la longueur des recensions des périodiques. Dans ce cadre, c'est la publication dans les Mélanges de traduction de mémoires plutôt longs, étalée sur plusieurs numéros, qui a permis à Darboux de s'adapter au volume très variable dont il disposait encore en fin de numéro pour parvenir aux 48 pages mensuelles. Cet artifice est d'ailleurs un des arguments que Darboux met en avant pour tenter de persuader Hoüel du bien-fondé de la réimpression du mémoire [**Cauchy 1825**] :

> Nous avons absolument besoin d'avoir un bouche-trou quelque chose d'analogue au feuilleton des grands journaux. Cauchy remplira admirablement ce rôle, ce sera un feuilleton de genre.
>
> Lettre datée du 12 Janvier 1875 de Darboux à Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Après 1877, la Revue de publication des périodiques devient avec l'avènement de la deuxième série un fascicule indépendant [60]. Néanmoins la contrainte du nombre de pages portant sur les Mélanges persistera puisque ce fascicule indépendant, ajouté aux sections de Revue Bibliographique et de Mélanges - composant l'autre fascicule -, devra mois après mois ne comporter que 58 pages.

Nous avons analysé ci-dessus la répartition des recensions significatives selon les matières. Mais il ne s'agit pas du meilleur indicateur statistique pour notre étude. Observons ainsi dans la figure 15 ci-dessous les données les plus pertinentes pour analyser l'influence des rédacteurs sur la mise en avant des différentes matières dans la Revue des publications périodiques : la proportion par matière des recensions significatives par rapport au nombre total de travaux cités dans le Bulletin.

60. Voir à ce sujet la section 1.2.

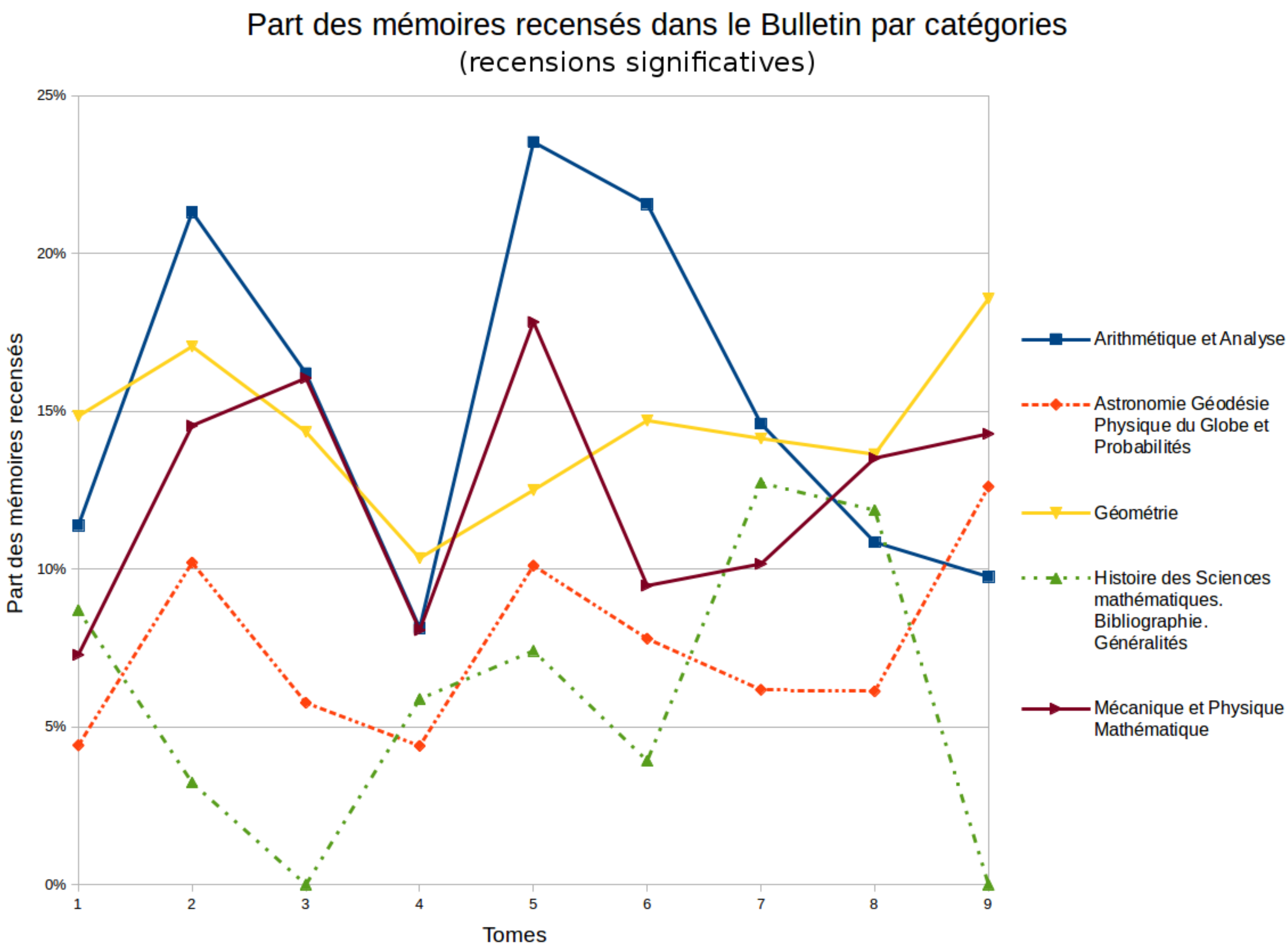


FIGURE 15

On note que la fraction des mémoires faisant l'objet d'une recension significative dans la section de Revue des périodiques est globalement plus forte pour les trois matières regroupant l'Analyse, la Géométrie et la Mécanique (représentées en traits pleins) que pour l'Histoire des Mathématiques et l'Astronomie (tracées en pointillés). Pour les trois premières, la part moyenne des recensions significatives se situe autour de 15% des mémoires alors que pour les deux dernières elle est environ de 8%.

Malgré cette disparité, aucune tendance nette ne se dégage : la part de recensions significatives est, exceptée pour l'Analyse, sensiblement constante dans le temps pour chacune des catégories. En outre, elle apparaît plutôt homogène puisque si l'Histoire des Mathématiques est vraiment moins représentée, l'Astronomie n'est que légèrement en retrait et la Géométrie, la Mécanique et l'Analyse présentent des parts équivalentes. Seule cette dernière présente une proportion de recensions significatives plus élevée fin 1873 et début 1874, ce qui coïncide avec l'évolution des matières observée dans la section de Mélanges et peut ainsi refléter une influence de la part de Darboux. Nous verrons que cette période correspond par ailleurs exactement à celle durant laquelle le nîmois rédige son principal travail d'analyse, à savoir son "*Mémoire sur les fonctions discontinues*" [61] sur lequel nous reviendrons. En ce qui concerne la Géométrie, la part de recensions significatives des mémoires de cette matière reste quant à elle remarquablement constante autour de 15%.

On peut donc conclure qu'aucune préférence en terme de sujets mathématiques n'est reflétée dans les choix de recensions de la section de revue des publications périodiques du Bulletin. Au contraire, l'homogénéité et la constance des proportions de recensions significatives témoignent de la volonté des rédacteurs, Darboux mais aussi Hoüel, de "*mettre les français, nos compatriotes, au courant des progrès de la science à l'étranger*" [62] et en France. Aussi cet objectif se traduit-il par l'absence d'inclination particulière envers certaines matières : il s'agit en effet de rendre compte fidèlement de la production scientifique dans son ensemble en effectuant les recensions des périodiques scientifiques. Les rédacteurs du Bulletin parviennent à atteindre cette homogénéité et cette transparence dans les comptes-rendus de leur journal en s'entourant de collaborateurs aux affinités et aux spécialités variées, ainsi qu'en s'efforçant eux-mêmes de donner des recensions fidèles au contenu des périodiques.

Nous avons remarqué dans la section 1.3 la part importante occupée par les astronomes parmi les collaborateurs du Bulletin. En outre, [**Gispert 1985**, 385] avait fait état de ce que 25% de la production mathématique globale, telle qu'elle apparaissait via sa réflexion dans le Bulletin des Sciences, relevait du domaine de l'Astronomie. Pourtant cette importance (en nombre de travaux et dans le paysage de spécialités des collaborateurs du journal) n'est pas retranscrite au niveau des recensions des périodiques : il est ainsi remarquable que le nombre (voir fig.14) et la proportion (voir fig.15) de recensions significatives de cette matière soient si mesurés.

La nécessité d'accorder plus de place et d'importance à l'Astronomie que ne le fait Darboux dans son Bulletin, notamment en ce qui concerne les recensions des périodiques, va aboutir en 1884 à la création d'un second Bulletin traitant uniquement cette matière : le "*Bulletin Astronomique*". Nous allons rapidement détailler la genèse de ce nouveau périodique ci-dessous.

Un épilogue astronomique. En 1883, Félix Tisserand est devenu professeur d'astronomie à la Sorbonne (voir sa notice dans la section 1.3). Il va devenir, 9 ans plus tard, le directeur de l'Observatoire de Paris. Tisserand comme Darboux partageaient alors le constat fait ci-dessus de l'insuffisance de la place de l'Astronomie accordée dans le Bulletin. Cette matière était certes raisonnablement représentée dans la section de revue des périodiques (en nombre mais pas nécessairement en longueur des recensions) compte-tenu entre autres de l'insertion systématique des rapports annuels adressés par les différents directeurs d'Observatoires et publiés notamment dans les "*Monthly Notices of the Royal Astronomical Society of London*", les "*Astronomische Nachrichten*" ou encore le "*Vierteljahrsschrift der*

61. [**Darboux 1875b**]. Nous étudierons largement cet important mémoire dans le prochain chapitre [Chap.7].

62. Extrait d'une lettre déjà citée datée de 1881 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, reproduit dans [**Gispert 1987**, 73].

astronomischen Gesellschaft". Cette place importante laissait même Darboux affirmer en 1876 :

> Quételet m'ayant envoyé un rapport sur l'Observatoire de Bruxelles, je l'ai fait insérer. J'espère que les astronomes ne se plaindront pas du Bulletin. Pour le moment, il est tout à eux.
>
> Lettre datée du 8 Février 1876 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Mais le Bulletin des Sciences ne permettait d'abord pas toujours de ménager l'espace nécessaire à des recensions détaillées pour les revues astronomiques. Ensuite, il ne comprenait pas la publication d'autres informations pertinentes pour les astronomes, comme certains éphémérides ou des questions liées à la Météorologie, qui n'intéressaient pas les mathématiciens non-astronomes. Au contraire, Darboux était partisan de débarrasser son Bulletin de l'Astronomie, non réellement pour augmenter la place réservée aux autres périodiques et aux Mélanges, mais surtout pour ne pas risquer de déplaire aux mathématiciens ne s'occupant pas d'Astronomie alors que certains numéros étaient très largement consacrés aux recensions de cette matière. Enfin, à l'image de la volonté de Darboux de consacrer les "*Annales Scientifiques*" exclusivement aux mathématiques (ou à défaut de publier un fascicule séparé réservé à cet effet), Tisserand regrettait vivement l'absence d'un périodique entièrement dédié aux questions et aux publications relevant de l'Astronomie.

C'est ainsi avec le soutien de Darboux, mais aussi et surtout celui d'Ernest Amédée Mouchez, alors directeur de l'Observatoire de Paris, que Tisserand fonde en 1884 le "*Bulletin Astronomique*", sur le modèle du Bulletin de Darboux mais qui se concentre exclusivement sur l'Astronomie. Ce nouveau Bulletin n'est pas publié dans la Bibliothèque de l'Ecole Pratique des Hautes Études, ni "*sous les auspices du Ministère de l'Instruction Publique*" comme l'était celui créé par Chasles en 1869 ; il l'est en revanche "*sous les auspices de l'Observatoire de Paris*". On peut toutefois se rendre compte de la filiation évidente entre le Bulletin de Darboux et ce qui sera rapidement appelé le *Bulletin de l'Observatoire* de Tisserand en lisant l'Avertissement inséré au début du premier tome, et écrit par le directeur Mouchez :

> Ce Bulletin comprendra donc deux Parties distinctes, répondant à ces deux besoins.
>
> La première se composera des observations présentant un intérêt d'actualité, faites dans nos observatoires pendant le mois précédent ; des éphémérides de planètes ou de comètes, et aussi des Mémoires ou des Notices sur diverses questions d'Astronomie théorique ou pratique.
>
> La seconde Partie comprendra une revue aussi complète que possible de toutes les nouvelles astronomiques, et une analyse des principales publications périodiques et des Ouvrages nouvellement parus.
>
> Enfin, quand l'occasion s'en présentera, une troisième Partie donnera, sous le titre *Variétés*, des articles sur des questions d'actualité concernant les sciences liées étroitement avec l'Astronomie, telles que la Physique du globe, la Géodésie, la Météorologie ; on y traitera aussi de points intéressants relatifs à l'histoire de la Science.
>
> "Avertissement", Bulletin Astronomique, Tome 1 (1884), p. 6.

On retrouve ainsi dans ce Bulletin - également mensuel - l'image des trois sections de Revue Bibliographique, Revue des publications périodiques et Mélanges du Bulletin de Darboux, renommées et réadaptées par Tisserand pour l'Astronomie. Seule la première partie de revue bibliographique change sensiblement pour le Bulletin Astronomique en devenant une section dédiée aux observations et aux éphémérides. Les collaborateurs de Tisserand pour ce Bulletin sont alors les astronomes de l'Observatoire Octave Callandreau et Guillaume Bigourdan, ce-dernier ayant suivi Tisserand de Toulouse à Paris, ainsi que Rodolphe Radau.

Darboux se félicite de la création d'un tel Bulletin, et interroge Hoüel sur "*des questions très graves*", à savoir la conservation ou non de la prise en compte de l'Astronomie dans leur publication :

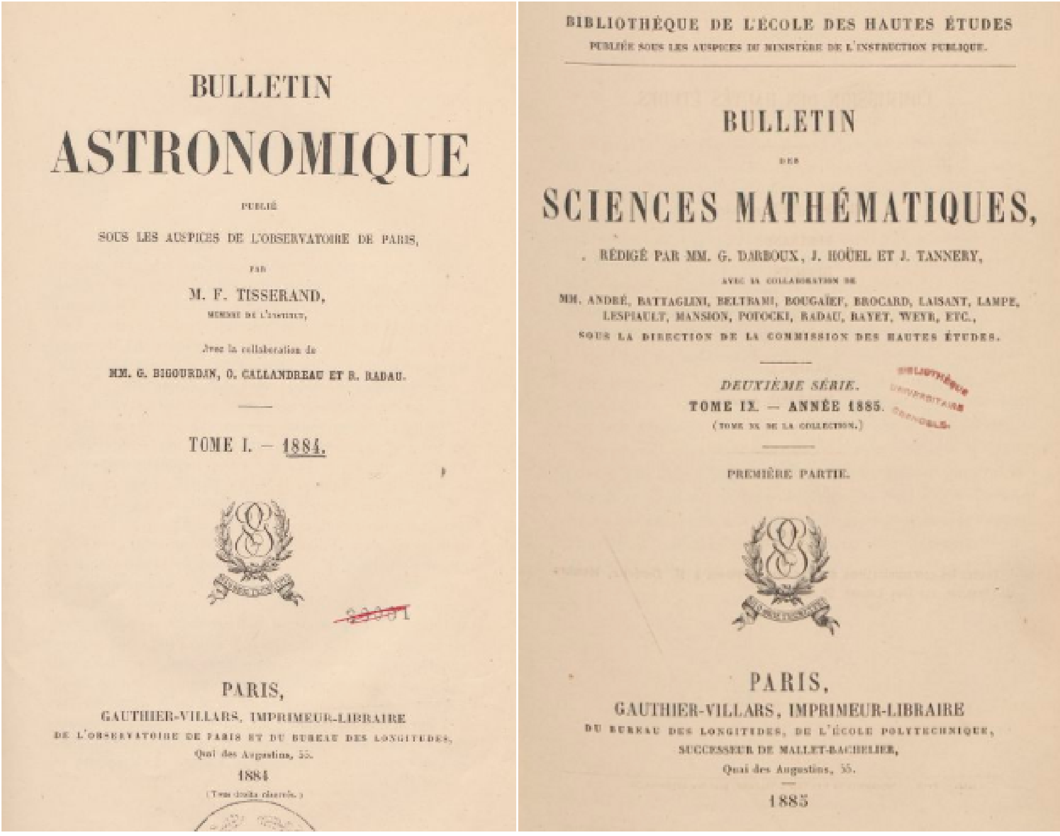
> Nous avons à décider des questions très graves tenant à la création du Bulletin Astronomique que j'ai d'ailleurs favorisée autant que possible, car je crois qu'elle sera très utile.
>
> Lettre datée du 16 Mai 1884 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Mais finalement cette question sera vite tranchée : Darboux préfère exclure complètement l'Astronomie de son Bulletin, quitte à rendre les volumes légèrement moins importants. C'est dans cette optique de détachement du domaine astronomique qu'il avait encouragé la création du recueil de Tisserand. Il écrit à son collaborateur bordelais :

> [...] le Bulletin va être réduit à 36 à 38 feuilles [...] La seule modification dont je serais partisan consisterait dans la suppression de l'astronomie au titre et dans le corps de l'ouvrage. Nous mettrons au mois de décembre une note flatteuse pour Tisserand indiquant ce changement et tout sera dit.
>
> Lettre datée du 12 Juin 1884 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

C'est - sans surprise - exactement ce qui se produira : dès Janvier 1885, la publication de Darboux prend le nom de *Bulletin des Sciences Mathématiques* et restreint en conséquence son contenu pour éviter les répétitions avec le Bulletin Astronomique. Une "*note flatteuse*", présentée ci-dessous, est par ailleurs bel et bien insérée dans ce-même numéro pour expliquer les modifications effectuées :

> Les rédacteurs du Bulletin ont salué avec joie l'apparition du nouveau journal. Pour éviter toute répétition et pour donner une marque de sympathie à une entreprise qui a déjà fait ses preuves, ils ont décidé de supprimer à partir de 1885 tout compte rendu se rapportant à l'Astronomie ou à la Mécanique céleste proprement dite. Cette décision explique le changement que nous faisons subir à partir du présent numéro au titre de notre publication.
>
> Bulletin des Sciences Mathématiques, Série 2, Tome 9 (1885). Numéro de Janvier 1885, Première Partie, p. 6.


BULLETIN
ASTRONOMIQUE
PUBLIÉ
SOUS LES AUSPICES DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,
PAR
M. F. TISSERAND,
Avec la collaboration de
MM. G. BIGOURDAN, O. CALLANDREAU ET R. RADAU.
TOME I. — 1884.
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, 55.
1884

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.
BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES,
RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,
AVEC LA COLLABORATION DE
MM. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAÏEF, BROCARD, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, MANSION, POTOCKI, RADAU, RAYET, WEYR, ETC.,
SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.
DEUXIÈME SÉRIE.
TOME IX. — ANNÉE 1885.
PREMIÈRE PARTIE.
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.
1885

FIGURE 16. Couverture des nouveaux Bulletin Astronomique (1884) et Bulletin des Sciences Mathématiques (1885)

Après 1885, l'Astronomie ne fait donc plus partie du nouveau "*Bulletin des Sciences Mathématiques*" de Darboux. La création de ce journal s'inscrit par ailleurs dans le contexte de définition de l'Astronomie hors des Mathématiques en tant que domaine scientifique indépendant, ce à quoi le bulletin éponyme aura en outre pu contribuer [63].

L'évolution du Bulletin Astronomique sera dans un premier temps très similaire à celle du Bulletin des Sciences : il sera scindé après la Première Guerre Mondiale en deux fascicules pour pouvoir en consacrer l'un des deux exclusivement aux recensions. Ce fascicule prend, en 1919, le nom de "*Bulletin astronomique. Revue générale des travaux astronomiques*". Il sera néanmoins abandonné après seulement six années de publication. Le Bulletin Astronomique [64], redevenu alors une publication en un unique fascicule, survivra sans modification à la Seconde Guerre Mondiale mais sera mis à mal lorsqu'en 1965 il cessera d'être publié par l'Observatoire de Paris. La publication, orpheline de l'institution mère qui la supportait depuis sa naissance, disparaîtra finalement trois ans plus tard en 1968.

63. Voir [**Saint-Martin 2007**] à propos de la genèse de l'astronomie en tant que domaine scientifique indépendant, et [**Dhombres 1994**, 123] pour le rôle général des journaux dans les frontières des domaines de la science.

64. La revue prendra en fait le nom de "*Bulletin astronomique. Mémoires et variétés*" de 1920 à 1946.

Ceci souligne l'impact du soutien institutionnel, notamment sur le plan financier, sur les périodiques scientifiques.

Nous terminerons cette partie consacrée à la section de revue des publications périodiques du Bulletin de Darboux avec une dernière étude statistique. Celle-ci consiste en l'analyse des périodiques scientifiques qui y comptent le plus de recensions significatives, ainsi que le découpage dans les 5 grandes matières de ces recensions. Nous en présentons les résultats ci-dessous dans la figure 17.

La faible représentativité de l'Astronomie dans les recensions significatives du Bulletin, que nous avons soulignée précédemment en analysant la figure 15, sera encore confirmée par nos résultats.

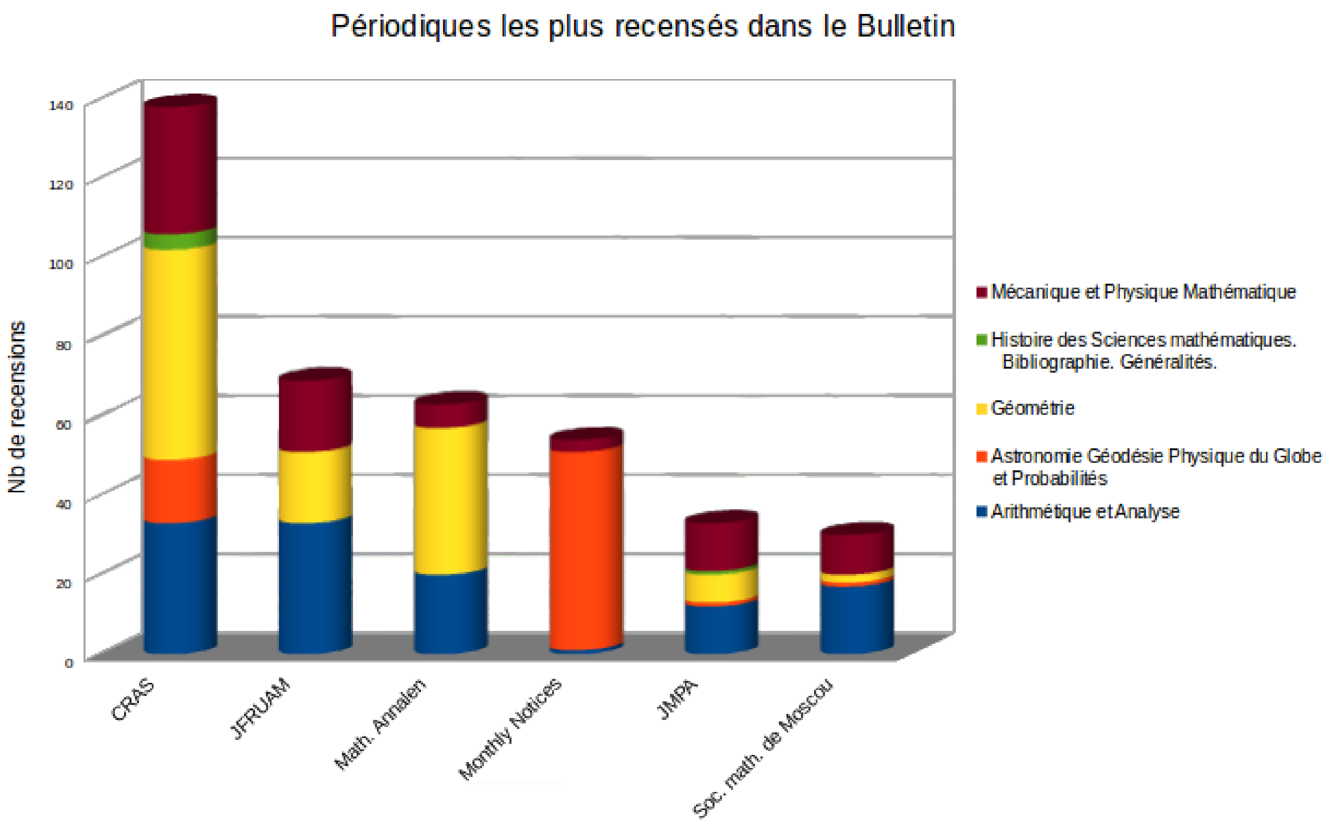


FIGURE 17. Classement des périodiques comptant le plus de recensions significatives dans le Bulletin, et répartition par matières de celles-ci sur la période 1870-1875 [65]

65. Les abréviations utilisées sur le graphique correspondent dans l'ordre aux journaux : Comptes-rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris (CRAS), Journal für die reine und angewandte Mathematik (JFRUAM, Borchardt), Mathematische Annalen, Monthly Notices of the Astronomical Society of London, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (JMPA, Liouville), Recueil mathématique publié par la Société mathématique de Moscou.

On note en effet que parmi les périodiques comptant le plus de recensions significatives, seules les "*Monthly Notices of the Astronomical Society of London*" - entièrement dédiées à la science astronomique - présentent une part importante de recensions significatives consacrées à cette matière. Les "*Comptes-Rendus hebdomadaires des Séances*" de l'Académie des Sciences de Paris (CRAS), qui est le recueil comptant le plus de recensions significatives dans le Bulletin, donnent lieu à moins de 12% de recensions significatives en Astronomie alors qu'en moyenne cette matière occupe 34% du journal[66]. Ceci est à relier directement avec les choix faits par Darboux, puisque c'est ce-dernier qui effectue systématiquement les recensions des mémoires des "*Comptes-Rendus*".

A l'instar de ce que nous avons observé dans l'étude de la section des Mélanges, les trois matières les plus représentées dans les recensions significatives de Darboux pour les "*Comptes-Rendus*" sont la Géométrie, l'Analyse et la Mécanique. On observe également - bien qu'atténuées - les mêmes tendances entre les deux périodes 1870-1872 et 1873-1875 que celles que nous avions révélées lors de l'étude des Mélanges : les recensions de Géométrie, prépondérantes pour la première période, s'effacent quelque peu durant la seconde période au profit des recensions d'Analyse et de Mécanique.

Les mêmes remarques sur la répartition globale selon les matières des recensions restent valables pour les deux autres journaux les plus importants : le "*Journal für die reine und angewandte Mathematik*" (JFRUAM) et les "*Mathematische Annalen*". Là encore, Darboux intervient directement dans l'écriture des comptes-rendus puisqu'il effectue, sur notre période d'étude 1870-1875, les recensions du premier jusqu'en 1873 (avant que Emil Lampe ne l'y supplée), ainsi que celles du second après la mort de son fondateur Clebsch en Novembre 1872. On ne peut ainsi pas, pour ces journaux, caractériser une évolution temporelle pertinente dans la répartition des matières, puisque le nîmois apparaît ou disparaît précisément dans l'écriture des comptes-rendus autour de 1873. Nous nous contenterons ainsi de noter que, tout comme nous l'avions remarqué pour la production scientifique dans la section de Mélanges, Darboux est également le premier auteur de son journal au regard des recensions de périodiques. Par ailleurs, des 6 périodiques les plus représentés par l'importance des recensions dans la Revue des périodiques du Bulletin, seuls 2 sont français (les *Comptes-rendus* et le *Journal de Liouville*). Avec deux périodiques allemands (le *Journal de Borchardt* et les "*Mathematische Annalen*"), un journal anglais et un journal russe dans ce classement, on constate à nouveau le caractère fortement international du Bulletin de Darboux. L'importance de l'Allemagne dans le paysage mathématique sort pour finir renforcée de cette analyse.

Pour clore ces deux études statistiques des sections de Mélanges et de Revue des publications périodiques, nous pouvons souligner que l'influence de Darboux sur son journal semble très forte pour les deux sections, mais qu'elle s'y manifeste pour chacune d'une manière très différente. Tout d'abord, notre première étude a révélé que le contenu de la section de Mélanges dépendait directement des centres d'intérêt de Darboux, tant par son volume que par les sujets mathématiques qui y sont abordés. Sur la période 1870-1875 sur laquelle nous nous sommes concentrés, les Mélanges subissent ainsi la même trajectoire que celle (institutionnelle et scientifique) de leur principal auteur : d'abord dominés par la Géométrie, ils se tournent ensuite vers l'Analyse et la Mécanique. Le volume réservé à la

66. Cette donnée provient également de l'étude [**Gispert 1985**, 385].

section de mélanges est très dépendant, presque proportionnel, au volume des publications de Darboux que celui-ci décide d'y insérer.

En revanche, les attentes de Darboux vis-à-vis du Bulletin ont une tout autre incidence sur la section de recensions des périodiques : ces recensions n'y favorisent aucune des matières, et peut y voir là encore une influence du rédacteur. Les différentes matières y sont globalement exposées de manière équitable, dans le but d'offrir au lecteur un panorama pertinent et représentatif des progrès de la recherche mathématique dans son ensemble. Les recensions effectuées par Darboux lui-même des mémoires présentés à l'Académie des Sciences, et dans une moindre mesure celles des deux grands journaux allemands de Clebsch et Borchardt, montrent néanmoins que Géométrie, Analyse et Mécanique y sont sensiblement plus présentes que l'Astronomie. Le rédacteur nîmois effectue lui-même de très nombreuses recensions, et ses seules contributions pour les trois recueils sus-cités font d'emblée de lui le premier auteur de comptes-rendus de son journal. Pour finir, ce que notre étude ne permet pas de révéler ici est l'importance dans le cheminement intellectuel de notre héros de l'écriture de ces nombreuses recensions. Ayant déjà dévoilé un changement dans ses intérêts scientifiques à travers la section de Mélanges du Bulletin, nous y reviendrons dans la suite[67].

2.4. Une limite méthodologique : le caractère valorisant et l'objectivité des recensions. Le cas de la Revue Bibliographique.

Nos études précédentes des parties 2.2 et 2.3 se sont appuyées sur des statistiques effectuées pour les sections de mélanges et de recensions des périodiques. Pour les analyses de cette-dernière, nous avons rapproché la mise en avant d'une matière au nombre de recensions s'y rapportant. La validité de ce raisonnement repose sur le fait que les recensions des mémoires des périodiques sont soit neutres soit positives, mais ne sont presque jamais négatives. Une opinion négative se manifeste en effet par l'absence pure et simple de compte-rendu. Par ailleurs, les conclusions relatives aux intentions des rédacteurs et à l'influence de Darboux ont présupposé que les recensions reflétaient fidèlement l'avis des rédacteurs quant aux mémoires recensés.

Or ces deux arguments, la quasi absence de recensions mitigées ou négatives et la transparence des analyses vis-à-vis de l'opinion du rédacteur, nous paraissent être en défaut lorsque l'on considère la section de Revue bibliographique qui rassemble les recensions des ouvrages parus indépendamment. Cette limite méthodologique, ajoutée au nombre restreint de parutions de tels ouvrages que nous avions déjà mis en avant au début de cette section (voir 2.1), nous a poussés à exclure la Revue bibliographique de notre analyse statistique. Nous allons ci-après aborder l'étude des recensions de cette section dans l'optique d'analyser le bien-fondé de notre position.

Commençons pour étayer notre propos par montrer l'existence de comptes-rendus négatifs dans le Bulletin avec trois exemples de recensions particulièrement critiques vis-à-vis des ouvrages analysés. Ces trois recensions sont publiées dans le Bulletin de Janvier 1873 (tome 4) pour les deux premières, et dans celui de Mars 1876 (tome 10) pour la dernière. Elles concernent respectivement le "*Nouveau Précis d'Analyse Infinitésimale*" de Charles

67. Voir la section 3.

Méray (1872), le "*Cours d'Analyse Infinitésimale - Partie Elementaire*" de Philippe Gilbert (1872), et enfin l'"*Histoire des Mathématiques, depuis leurs origines jusqu'au commencement du XIXème siècle*" de Ferdinand Hoefer (1874).

Recension du "Nouveau Précis" de C. Méray

Le titre de l'Ouvrage dont nous allons faire l'analyse semblerait impliquer de la part de M. Méray l'intention d'en faire la base de l'enseignement du Calcul infinitésimal : c'est ce qu'il nous est impossible d'admettre. [...]

M. Méray donne peut-être un peu tard la définition des fonctions périodiques simples ; il définit les fonctions trigonométriques à l'aide de leurs développements connus en série, et démontre très simplement l'existence d'une période ; mais il n'enseigne pas le moyen d'éviter les considérations géométriques, qui rendent leur emploi si précieux et si fécond dans les applications. [...]

En nous plaçant à un autre point de vue, nous regrettons que M. Méray n'ait pas employé le mot *fonction* dans une acceptation plus générale. Que deviennent, en adoptant sa méthode, les fonctions définies par les phénomènes physiques, les fonctions définies par des intégrales contenant un paramètre variable, les séries de Fourier, etc. ? M. Méray, en restreignant ainsi le sens que l'on attache au mot *fonction*, simplifie beaucoup l'Analyse, mais il en réduit forcément la généralité. [...]

Recension du "Cours" de Ph. Gilbert

[...] pour l'étendue des points multiples, M. Gilbert se contente d'appliquer le principe de la discussion à des exemples particuliers, ce qui, pense-t-il, sera plus clair et aussi instructif qu'une discussion générale. Nous n'adoptons pas complètement l'opinion de l'auteur sur ce sujet ; car il y a certaines propositions importantes, relatives à l'ordre du contact dans le cas des points de rebroussement, qui ne peuvent se conclure que d'une discussion générale.

Recension de l'"Histoire des Mathématiques" de F. Hoefer

[...] Le Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques a pris pour tâche de signaler à ses lecteurs les livres qui peuvent rendre des servies à la Science, et il a généralement gardé le silence sur les ouvrages auxquels il n'aurait eu que des critiques à adresser. Nous croyons cependant devoir nous départir aujourd'hui de cette réserve à propos d'une publication dont l'auteur, connu depuis longtemps par de nombreux et utiles travaux d'histoire scientifique [...] se présente en invoquant le patronage d'un nom vénéré du monde savant [...]

> [L'auteur] faisant admettre son Livre dans une Collection historique qui renferme tant d'excellents volumes, [joignant] à cela l'accueil favorable que ce Livre a trouvé dans des recueils périodiques estimés et répandus [68] [...] [t]outes ces circonstances réunies, en favorisant dans notre pays la diffusion de cet Ouvrage, en font presque un livre dangereux, à cause des graves erreurs qu'il tend à propager dans la partie du public qui n'est pas à portée d'en contrôler les assertions [...]
>
> Nous craignons qu'il [l'auteur] n'ait quelquefois confondu la routine avec la science sérieuse, [...] et quoique l'absence de préjugés lui semble la condition la plus favorable pour saisir le véritable esprit des sciences et les réinventer au besoin, nous persistons à préférer sous ce rapport la bonhomie d'un Ampère à l'astuce d'un chef de tribu sauvage des montagnes Rocheuses.
>
> Revue Bibliographique, Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques Tome 4 (1873) pp.24-28,33-35 et Tome 10 (1876) pp.136-139.

Ces trois recensions se montrent ainsi spécialement critiques à l'égard des livres auxquels elles se rapportent. On peut remarquer par ailleurs que les deux premières recensions portent sur des livres de Calcul Infinitésimal, ce qui n'est pas un hasard au vu des positions tranchées et critiquées de Darboux dans ce domaine au début des années 1870 (nous y reviendrons) [69]. Certes ces recensions ne sont pas écrites par Darboux lui-même, la première émanant d'Hermann Laurent et la seconde de Louis Painvin. Néanmoins toutes les recensions d'ouvrages du Bulletin des Sciences étaient relues et parfois corrigées par Darboux lui-même avant d'être portées à l'imprimerie. Aussi quand Hoüel lui envoie une recension qui n'est pas à son goût, Darboux entreprend-il de la modifier : "*Je ne vous trouve pas trop raisonnable pour votre Compte-Rendu*" lui dit-il, "*mais nous tâcherons d'arranger. De mon chef, je vous proposerai des corrections à la fin et au commencement*" [70]. Au sujet de la troisième recension sus-citée, celle-ci est écrite par un Hoüel amateur d'histoire des mathématiques et très remonté face à ce qu'il considère dans l'ouvrage d'Hoefer comme des absurdités. Hoüel a réfléchi pendant une année entière à cette recension. Dès Janvier 1875, il écrivait à Darboux :

> Il y a pourtant un ou deux articles qui me démangent la plume. C'est au sujet de la prétendue histoire des mathématiques de cet ex-allemand de Hoefer, qui a cru qu'il était nécessaire, pour devenir un pou Vranzais [sic] de se parer du ton cavalier et léger que ses anciens compatriotes [71] nous reprochent si souvent. Lisez, je vous prie, les quelques pages qu'il a consacrées aux mathématiques des Hindous. C'est monumental ! Il prétend que la science hindoue n'est qu'une mystification d'un bout à l'autre [...] rien n'est plus absurde qu'une pareille opinion.

68. Hoüel fait ici référence à la recension élogieuse du livre de Hoefer par H. Brocard dans les "*Nouvelles Annales*", tome XIV, Série 2 (1875), p.46.
69. On pourra néanmoins déjà consulter à ce sujet [**Gispert 1990**] et [**Gispert 1983**].
70. Lettre datée du 9 Février 1872 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].
71. Ferdinand Hoefer est né en Allemagne, puis est naturalisé français en 1848.

> [...] J'ai une furieuse envie d'éreinter ce Hoefer. Il reste à trouver le moyen le plus convenable et le plus français.
>
> Lettre datée du 11 Janvier 1875 de Jules Hoüel à Gaston Darboux, reproduite dans [**Henry Nabonnand 2016**, 451]

Darboux encouragera dans un premier temps Hoüel à écrire la sévère critique qu'il envisage ("*Tapez sur Hoefer, je ne demande pas mieux*", répondra-t-il le lendemain). En Décembre 1875, Hoüel soumettra l'examen de son texte à Darboux qui ne manquera pas d'apprécier le "*châtiment*" réservé à l'écrivain franco-allemand :

> Tudieu mon cher ami, vous n'y allez pas de main morte ! Le châtiment est mérité mais il est sévère. On n'aura pas besoin d'aller étudier des écorchés hors de chez nous. Pauvre Hoefer, et dire que Serret (Paul) voulait me faire un procès pour l'article que j'ai consacré à sa géométrie de Direction [...] Mais je suis prêt à l'envoyer à l'imprimerie, il m'a fait faire du bon sang à moi qui ne ris jamais, j'en suis enchanté. Bienaymé, qui a la même opinion que Hoefer sur les Hindous, va être horripilé.
>
> Lettre datée du 21 Décembre 1875 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Au moment de faire imprimer cet article, Darboux décide de l'adoucir très légèrement en supprimant l'épithète "*sauvage*" :

> Votre article sur Hoefer est en composition. J'ai simplement supprimé le mot "sauvage", mais si vous y tenez vous le rétablirez.
>
> Lettre datée du 1er Février 1876 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Hoüel, tenace, tient à conserver intacte la sévérité de ses propos, et comme le lecteur l'aura constaté à la lecture de l'extrait cité ci-dessus de cette recension, il y fera réinsérer l'adjectif "sauvage" [72]. Remarquons par ailleurs que Darboux évoque la réaction négative de Paul Serret [73] après la recension dans le Bulletin de Darboux d'un de ses ouvrages. Il s'agit de la "*Géométrie de Direction*" de Serret (1869), qui constitue la toute première recension parue dans le Bulletin des Sciences. Cette recension, en dépit de la réaction de l'auteur, n'est pourtant pas particulièrement critique, bien au contraire [74], et ceci illustre les difficultés que rencontrent parfois les rédacteurs. Ceux-ci peuvent en effet se retrouver dans une position délicate lorsque les comptes-rendus heurtent ou vexent les auteurs des ouvrages.

Au-delà des recensions critiques, la comparaison des échanges épistolaires entre Darboux et Hoüel et certains des comptes-rendus d'ouvrages publiés dans le Bulletin laisse apparaître à de nombreuses reprises un fort écart entre l'opinion réelle des deux rédacteurs

72. Il s'agit ici du passage : "*nous persistons à préférer sous ce rapport la bonhomie d'un Ampère à l'astuce d'un chef de tribu sauvage des montagnes Rocheuses*".

73. Il doit être noté ici qu'il n'existe aucun lien de parenté entre Paul Serret et l'académicien Joseph-Alfred Serret.

74. Cette recension, écrite par Darboux, paraît dans le numéro de Janvier 1870, Tome 1, pp.9-12. Elle commence dans ces termes : "*Ce nouvel Ouvrage d'un auteur déjà connu et apprécié contient des propositions d'Analyse et de Géométrie qui nous paraissent d'une véritable importance ; nous croyons qu'il sera lu avec profit par toutes les personnes qui s'intéressent aux progrès de la Géométrie analytique*".

quant à un livre, opinion contrastée voire même mauvaise, et la recension élogieuse qui en est insérée dans le Bulletin. On n'observe néanmoins ce décalage qu'en présence d'ouvrages écrits par des amis ou des professeurs de Darboux, ou encore par des collaborateurs du Bulletin. Pour ceux-ci, les critiques exprimées en privé par les rédacteurs ne se retrouvent pas dans la recension, contrairement à ce que l'on a vu plus haut pour Méray et Gilbert par exemple. Nous présentons ci-dessous pour illustrer ce point des extraits de lettres de Darboux à Hoüel contenant un avis explicite à propos d'un ouvrage, juxtaposés à des extraits des recensions qui en seront finalement publiées dans le Bulletin.

Le "Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral. Volume 2 : Calcul Intégral" de Joseph Bertrand (1870)

Echanges épistolaires :

"Le deuxième volume de Bertrand va paraître dans huit jours. Voilà un compte-rendu qui va être difficile. Je connais bien le volume heureusement. Vous verrez que si la rigueur y fait quelques fois défaut, la simplicité et la lucidité y sont parfaites."

"Je vous avoue que l'article sur Bertrand m'ennuye beaucoup à cause de la position très particulière dans laquelle je suis vis-à-vis de lui. Son volume est très bon comme ouvrage élémentaire complet, mais d'autre part on peut lui adresser bien des critiques dont je me garderais bien de parler. Ce que je vous dis là, je vous prie de vouloir bien ne pas le communiquer."

"Mais je vous avoue que ce que je vous en ai dit n'était qu'une pure plaisanterie, car sans vous notre Bulletin aurait presque autant de fautes que le *Calcul Intégral* de Bertrand."

Lettres non datées (1870)

Recension :

"[Ce livre] était attendu avec impatience, et l'accueil qu'il recevra du public récompensera M. Bertrand du travail considérable qu'il a dû s'imposer pour la publication d'une œuvre aussi importante, et qui, dans l'état actuel de la science, paraissait presque au-dessus des forces d'une seule personne."

"Les géomètres très habiles pourront, peut-être, désirer des démonstrations plus complètes et plus développées sur quelques points ; l'essentiel, à nos yeux, c'est que les objections auxquelles peut prêter une démonstration généralement admise, les cas particuliers dans lesquels elle peut n'avoir aucune valeur soient indiqués avec précision, et c'est ce que ne manque jamais de faire M. Bertrand."

"L'analyse rapide que nous venons d'en faire ne peut donner qu'une idée bien imparfaite des nombreuses richesses réunies et mises en œuvre dans ce volume de plus de 700 pages, dont la lecture est pourtant si facile et si attrayante."

BSMA [75], tome 1 (1870), pp.41-49.

75. Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques.

Le "Traité des Substitutions et des Equations Algébriques" de Camille Jordan (1870)

Echanges épistolaires :

"J'ai l'existence assombrie par le gros bouquin de Jordan qu'il me faudra lire et qui est ennuyeux comme la pluie. Que voulez-vous que j'y fasse[76]."

Lettre non datée (1871)

Recension :

"[Cet ouvrage] exercera, nous en sommes sûr, une influence considérable sur les progrès de la théorie la plus importante de l'Algèbre [...]"

"Les travaux [présentés dans cet ouvrage] viennent au moment favorable ; car les progrès de la Géométrie analytique ont permis, comme on l'a vu, à M. Jordan de donner des applications qui ajoutent un grand intérêt et un nouvel attrait à la théorie si difficile des substitutions."

BSMA, tome 2 (1871), pp.161-169.

Le "Recueil d'exercices pour l'étude de l'analyse supérieure" d' Oscar Schlömilch (1870)

Echanges épistolaires :

"Quant à votre article sur Schlömilch, je vous prie de me donner carte blanche pour le modifier. Songez donc 1) qu'il a l'air d'un éreintement de Schlömilch 2) que dans la Commission [de patronage de la section de Mathématiques de l'EPHE] il y a deux auteurs[77] de Calcul infinitésimal. Je serais obligé d'acheter une canne à épée et un revolver de peur qu'ils ne me fissent un mauvais parti. Prenez pitié de ma situation [...]"

Lettre non datée (1870)

Recension :

"Le Second Volume (338 p.) est consacré aux exercices sur le Calcul intégral. [...] Les deux volumes que nous possédons seront certainement d'un précieux secours dans l'enseignement supérieur des mathématiques, où le bon choix des exercices proposés aux étudiants est un élément de succès, parfois trop négligé."

BSMA, tome 2 (1871), pp.66-68.

76. Charles Hermite lui-même considérait la lecture du Traité sur la théorie des substitutions de Jordan comme impossible. Hélène Gispert raconte : "*Sollicité par Jordan à propos de sa candidature à l'Académie des Sciences, Hermite déclare dans sa réponse que s'il l'oblige à lire son livre, il démissionnera de l'Académie*" ([**Gispert 1996b**, 392]) !

77. Ces deux auteurs sont Joseph-Alfred Serret et Joseph Bertrand.

Le "Cours d'Analyse de l'École Polytechnique" de Charles Hermite (1873)

Echanges épistolaires :

"Vous me mettez tout de même dans un terrible embarras avec le bouquin d'Hermite [...]"

Lettre datée du 5 Avril 1873

Recension :

"Il ne nous appartient pas de faire l'éloge d'un Livre dont l'auteur est un des géomètres éminents de notre époque, qui a contribué pour une large part aux progrès de la théorie des formes et des fonctions. Le Traité de M. Hermite est conçu au point de vue des idées nouvelles, et met en lumière les progrès les plus récents de l'Analyse ; c'est donc un de ces Ouvrages dont il suffit de signaler l'apparition [...]"

BSMA, tome 5 (1873), pp.49-52.

La "Théorie des Fonctions Elliptiques" de Charles Briot et Jean-Claude Bouquet (1875) [78]

Echanges épistolaires :

"J'ai aussi reçu le gros bouquin de Briot et Bouquet que je vais lire et dont je tâcherai de faire un compte-rendu le plus tôt possible. Ils ont malheureusement renoncer à traiter des fonctions abéliennes [...]"

Lettre datée du 7 Août 1873 [79]

Recension :

"La première édition de la "*Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques*", était depuis longtemps épuisée. [...] Cet excellent ouvrage, qui a marqué un progrès si considérable dans l'étude des fonctions d'une variable imaginaire, était sur le point de manquer aux jeunes géomètres. Nous devons donc remercier d'abord MM. Briot et Bouquet d'avoir bien voulu nous donner une nouvelle édition de leur travail, considérablement étendue et mise en rapport avec les progrès les plus récents de l'Analyse. [...] Nous nous contenterons de faire remarquer que l'exposition des matières a reçu un développement qui en accroît de beaucoup l'intérêt et la portée ; plusieurs Chapitres sont entièrement nouveaux, en sorte que la première édition peut tout au plus être considérée comme un abrégé de la nouvelle."

BSMA, tome 6 (1874), pp.65-69.

78. Cet ouvrage - dont il s'agit de la seconde édition - a paru en plusieurs fascicules indépendants dont la parution s'est étalée de 1873 à 1875, d'où son évocation dans les lettres de Darboux à Hoüel dès 1873.

79. Toutes les lettres citées ci-dessus sont écrites par Gaston Darboux à Jules Hoüel, et proviennent des [**Archives épistolaires Darboux**].

On remarque ainsi que Darboux se garde bien de vexer ou d'offenser les collaborateurs du Bulletin comme Schlömilch - alors que Hoüel semble ne pas le ménager - ainsi que les mathématiciens influents comme Bertrand ou Hermite, ses anciens maîtres qu'il côtoie quotidiennement à l'Ecole Normale, à la Faculté ou à l'Académie. Pour les travaux de ceux-ci, les recensions du Bulletin sont adoucies et s'efforcent d'être élogieuses en dépit des critiques que les rédacteurs pourraient leur adresser et n'expriment qu'à titre privé.

Le modèle des études statistiques que nous avons effectuées pour les sections de mélanges et de recensions des périodiques du Bulletin ne saurait ainsi être appliqué pertinemment à la section de revue bibliographique. Nous en avons détaillé les trois principales raisons : tout d'abord, le faible nombre d'ouvrages à recenser ne nécessite pas des rédacteurs qu'ils opèrent une sélection significative. Ensuite, les recensions de cette section ne peuvent pas être considérées comme unanimement positives. Enfin, une part des recensions positives le sont par nécessité vis-à-vis des auteurs des livres et ne reflètent ainsi pas l'opinion réelle des rédacteurs. Cette section ne se prête donc que mal à l'étude des courants d'influence entre Darboux et son Bulletin que avons nous entreprise au sein de ce chapitre.

3. Réciprocité de l'influence : le Bulletin, ouvertures mathématiques et accélérateur de vie scientifique pour son rédacteur

Les deux sections précédentes ont illustré l'importante influence de Darboux sur un Bulletin qui est à juste titre très vite indissociable de son nom. Mais d'autre part, l'incidence de la rédaction d'une entreprise éditoriale telle que le *Bulletin des Sciences* sur la vie et les travaux de Darboux est aussi forte. Nous détaillons ci-dessous les principaux effets de la direction du périodique sur le nîmois, en commençant par les conséquences sur sa trajectoire sociale. Celles-ci pèsent, bien entendu, sur son identité en tant que scientifique. Dans un second temps, nous nous pencherons plus précisément sur l'influence de la tenue du Bulletin sur la trajectoire scientifique de Darboux. Ses mathématiques - ses centres d'intérêt, ses repères, ses références - ainsi que son rapport à la publication évoluent en effet du fait de son nouveau rôle de rédacteur.

3.1. Influence sur la trajectoire sociale de Darboux.

Sa nouvelle responsabilité à la tête du *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques* donne un nouveau statut à Gaston Darboux : il n'est plus seulement mathématicien et professeur, mais endosse désormais le troisième costume de rédacteur. Les conséquences sur sa trajectoire sociale sont multiples.

Tout d'abord, Darboux se crée un nom dans les papiers et auprès des personnes importantes du Ministère de l'Instruction Publique où, cependant, il n'était pas tout à fait anonyme après l'éclat de son entrée à l'Ecole Normale neuf ans plus tôt [80]. Mais il va rapidement devenir un personnage influent dans ce Ministère, et la genèse de cette influence provient de son rôle de rédacteur.

Avoir la responsabilité d'un périodique publié "*sous les auspices du Ministère de l'Instruction Publique*" comme le Bulletin a de fait pour effet immédiat de mêler directement le jeune mathématicien aux affaires de ce Ministère. Au-delà de la seule négociation des contrats avec Gauthier-Villars, Darboux se rend en effet très souvent les premières années au Ministère pour diverses raisons : vérifier le nombre de fascicules du Bulletin disponibles pour des échanges, s'assurer de leur envoi auprès des collaborateurs étrangers, statuer sur l'identité des collaborateurs et des rédacteurs de la revue (comme c'est le cas pour Tannery), faire pression sur l'imprimeur Gauthier-Villars en cas de dysfonctionnements (pour les caractères cyrilliques par exemple), ou encore apporter des modifications à la liste des revues auxquelles le Ministère de Jules Simon a automatiquement abonné les rédacteurs à la demande de Chasles en 1871.

Les contacts noués par Darboux au Ministère, en particulier auprès des chefs de division (Bellaguet, Du Mesnil, Collin), lui permettront ainsi par exemple de faire en sorte que son petit frère Louis soit nommé professeur au Lycée de Nîmes à l'été 1873 alors que celui-ci enseignait auparavant à Bourg-en-Bresse. Gaston Darboux écrit ainsi à Hoüel à Pâques 1873 : "*Je viens de recevoir la nouvelle que mon frère est nommé à Nîmes comme je l'avais demandé. Cela fait qu'il sera près de ma mère*" [81]. En fait Darboux, sûr de son coup, avait anticipé une réponse positive à sa demande et commencé à s'occuper du réarrangement de la bibliothèque de son frère à Nîmes un mois plus tôt.

Non-content d'être très au fait des affaires du Ministère de l'Instruction Publique et d'en retirer quelques bénéfices personnels, le géomètre nîmois va rapidement devenir important au sein de ce Ministère. A 30 ans, il est déjà Officier d'Académie et 5 ans plus tard Officier de l'Instruction Publique. Avant d'avoir fêté ses 40 ans, Darboux sera ensuite nommé membre de trois différentes Commissions rattachées à l'Instruction Publique : le *Comité des Travaux historiques et scientifiques*, *le Comité consultatif de l'Enseignement public* (commission des sciences) et la *Commission des Bibliothèques populaires*. Son influence dans ces commissions est rapidement sensible. Par exemple, c'est le cas lorsque Charles Hermite milite en 1883 pour que le nouveau périodique mathématique de son ami suédois Gösta Mitta-Leffler, les "*Acta Mathematica*", fasse l'objet d'une large souscription ministérielle pour alimenter les bibliothèques des Facultés et des Lycées de France. Hermite s'assure en effet alors du soutien de Darboux, dont il connaît le poids majeur dans la Commission appelée à arrêter la décision :

> Je ne sais pas quand se réunira la commission présidée par M. Collin, chef de Division au Ministère de l'Instruction Publique, et qui a dans ses attributions les souscriptions aux publications de l'étranger. M. Dumont [82] a eu la bonté de me faire prévenir par M. Alexandre Bertrand que Darboux a une grande influence dans cette commission, pour les questions concernant les mathématiques ; cette circonstance me donne bon espoir, puisque Darboux nous est acquis comme vous le savez [...]

80. Voir [Chap.1,3].
81. Lettre datée du 5 Avril 1873, [**Archives épistolaires Darboux**].
82. Albert Dumont est alors le Directeur de l'enseignement supérieur. Nommé par Jules Ferry en 1879, il fut également le camarade de promotion de Darboux à l'Ecole Normale Supérieure (1861).

Lettre datée du 22 Décembre 1883 de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler. [**Hermite 1984**, 232-233]

A partir de 1888, Darboux fera partie de la plus importante des commissions du Ministère de l'Instruction Publique : le Conseil supérieur. A ce titre, il participera activement à la création du P.C.N. en 1893, un certificat d'études s'inscrivant dans la préparation des études médicales, dont la première phase s'effectuait désormais au sein des Facultés des Sciences [83]. Puis il joua notamment un grand rôle pour la réforme de la licence ès sciences en 1896 qui, selon lui, "*achève de constituer la plus utile préparation au vote du projet de loi que nous [le Conseil] espérons voir prochainement aboutir et qui est relatif à la création des Universités*" ([**Darboux 1912**, 440]).

Si la rédaction du Bulletin lui apporte en 1870 une charge de travail considérable, elle permet également à Gaston Darboux d'obtenir une amélioration sensible de son niveau de vie. A cette époque, Darboux est en effet professeur au Lycée Louis-le-Grand, et il habite dans un petit appartement de la rue d'Assas avec son frère Louis et leurs compagnes respectives les sœurs Célina et Clara-Maria Carbonnier. Après le 11 Septembre 1870 et la naissance de Jean-Gaston, fils de Gaston Darboux et Célina Carbonnier, la nouvelle maman met en outre fin à son activité de modiste. Les 3,000 francs annuels versés par le Ministère de l'Instruction Publique à Darboux pour la rédaction du Bulletin des Sciences (voir [Chap.5, fig.12]) vont donc presque doubler les revenus [84] du foyer à un moment fort opportun : la naissance d'un enfant, ainsi que les difficultés à venir liées à la guerre et à la Commune de Paris. Conjuguée à la reprise de son frère Louis d'un poste de chargé de cours au Lycée Charlemagne en 1871, cette augmentation de revenus permettra aux cinq colocataires de quitter l'appartement exigü de la rue d'Assas pour trouver plus de confort dans le nouvel appartement du 29 de la rue Monge. Enfin en 1872, le départ de Louis et de Clara-Maria pour Bourg-en-Bresse, où le premier enseignera une année, mais surtout le nouveau statut de Darboux de maître de conférences à l'École Normale mettront un terme aux soucis financiers de la famille Darboux.

La nécessité de recruter des collaborateurs - dont une grande partie sont étrangers - et d'échanger avec eux pour assurer la continuité de leurs travaux pour le Bulletin a un fort impact sur Gaston Darboux. Bénéficiant dès le départ des nombreuses correspondances entretenues par Hoüel, le nîmois se tisse très rapidement un large réseau de mathématiciens en Europe avec lesquels il entretient des échanges épistolaires. Une très grande partie des correspondances de Darboux à l'étranger débute ainsi dans les premières années de la décennie 1870, provoquées par le rédacteur en quête de collaborations pour son journal.

Demandant aux uns l'échange et les comptes-rendus des journaux auxquels ils participent, exhortant les autres à collaborer à la rédaction du Bulletin ou à insérer leurs travaux dans les Mélanges pour les faire connaître des savants français, Darboux se constitue un important réseau international dans le cadre de son activité éditoriale. Beltrami, Cayley, Clebsch, Cremona, Klein, Lie, Lipschitz ou Zeuthen sont ainsi autant de mathématiciens étrangers éminents avec lesquels Darboux engage une correspondance entre 1870 et 1873. Une véritable *sociabilité mathématique* [85] se constitue autour du Bulletin des Sciences, et Darboux, au centre des échanges, se situe au cœur de son fonctionnement. Par ailleurs,

83. Au sujet du P.C.N., voir [**Fox Weisz 1980**, 80-85].
84. En 1870, 3,000 francs représentent un salaire annuel moyen d'un professeur de Lycée.
85. A propos de la sociabilité mathématique, voir [**Gispert Nabonnand Peiffer 2015**].

tant pour comprendre les travaux dont il doit rendre compte que pour entretenir ses correspondances, il perfectionne son allemand et commence à apprendre l'italien.

La constitution de ce réseau va de pair avec l'émergence de la réputation internationaliste de Darboux. Premièrement, cette réputation ressort de la réception de ses travaux mathématiques, ce que nous avons étudié en [Chap.4,2]. Or cette réception est grandement favorisée par l'extension de son réseau social, puisque le nîmois peut soumettre directement ses travaux à ses correspondants étrangers, ce dont nous avons directement mesuré le bénéfice auprès de Beltrami et de Cremona avec ses travaux de géométrie des années 1872-73[86]. Mais avec la rédaction du Bulletin, cette réputation prend une tout autre ampleur : ce n'est plus seulement dans le cadre de son activité mathématique que Darboux apparaît comme un personnage international. En faisant abstraction des nationalités dans son journal - comme l'a montrée notre étude des recensions des périodiques du Bulletin (2.3) ou encore la réclamation de priorité de Lipschitz ([Chap.5,3]) - y compris au sortir de la guerre franco-prussienne, ce sont toutes les identités de Darboux qui se parent de la vertu internationaliste, et non uniquement son identité mathématique.

La stature internationale qu'il aura acquise très tôt dans et grâce à son réseau de correspondants, de collaborateurs et d'amis étrangers jouera un grand rôle dans les futurs statuts de Darboux au sein d'institutions internationales et dans ses prises de position résolument internationalistes[87]. Il aura ainsi une place importante dans l'histoire de la création de l'*Association Internationale des Académies* en 1899 et sera un acteur fort des premiers *Congrès Internationaux des Mathématiques* (ICM). Il sera enfin au total membre de 21 Académies scientifiques étrangères, dont celle de Prusse à Berlin, celle des Lincei à Rome, celles de Saint-Pétersbourg, de Londres, de Copenhague ou encore de Vienne.

Au-delà de la constitution d'un vaste réseau de collaborateurs, la rédaction du Bulletin des Sciences développe chez Gaston Darboux une exceptionnelle faculté d'*administrateur*. Gérer son équipe de rédacteurs, le recrutement, les relations avec l'imprimeur et le Ministère, diviser les tâches de rédaction, relancer, encourager, sanctionner parfois, pour s'assurer que le travail est effectué : le mathématicien acquiert sur le fait sa capacité à *administrer* (on dirait aujourd'hui volontiers *manager*), ou du moins développe-t-il considérablement ses éventuelles prédispositions. Cette capacité est loin d'être négligeable en dehors de son activité de rédacteur au vue des nombreuses responsabilités qui lui seront confiées durant toute sa vie.

Henri Poincaré, que Darboux considérait alors comme "*le plus grand géomètre vivant*", parlera du nîmois comme d'un "*administrateur laborieux et fécond en ressources*" ([**Darboux 1912**, 450]). Outre son rôle dans les commissions de l'Instruction Publique et dans le fonctionnement de l'Ecole Normale - souligné, nous l'avons vu, par Tannery[88] - c'est surtout son activité de doyen de la Sorbonne qui est mise en avant par ses pairs pour illustrer les aptitudes de gestion de Darboux. Ernest Lebon rappelait ainsi : "*M. Darboux possède les qualités d'organisateur à un degré aussi élevé que celles de professeur. Il l'a révélé dans les hautes et délicates fonctions de doyen de la Faculté des Sciences de Paris, auxquelles il fut nommé, sur la proposition de ses collègues, par le ministre de l'Instruction publique, le 12 novembre 1889*" ([**Lebon 1910**]). Réélu quatre fois, il restera doyen

86. Voir à ce sujet l'étude de la réception menée en [Chap.4,,2].
87. On pourra consulter à ce sujet [**Croizat Tazzioli 2014**], ainsi que les discours compilés dans [**Darboux 1912**].
88. Voir [Chap.1,3.2].

jusqu'en Mars 1903 avant de demander à y être remplacé - ce qui sera fait par son ancien élève Appell.

Sous son impulsion, la Sorbonne sera fortement modifiée. Elle est tout d'abord rénovée par l'architecte Paul Nénot, qui achève en 1894 de la reconstruire sur le même emplacement "*à la manière d'un paquebot où nulle place n'est perdue*". Ce renouvellement avait été entériné par Jules Ferry en 1881, mais Darboux fait tout particulièrement attention à ce que les travaux se fassent "*sans l'interruption d'aucun service*" ([**Darboux 1912**, 458]). Après l'instauration du P.C.N., le doyen Darboux veille à donner de nombreuses nouvelles extensions à sa Faculté, à l'intérieur de Paris et au-delà, avec de nouveaux laboratoires. Durant ses treize années à la tête de l'administration de la Sorbonne, l'activité de celle-ci a été décuplée : entre 1889 et 1903, le nombre d'élèves passe de 675 à 1896, le nombre d'enseignements (semestriels) de 55 à 88, le budget annuel de 775,000 à 1,267,000 francs [89]. Son successeur Appell rappellera ainsi : "*vous avez accepté à votre corps défendant d'être choisi pour administrer la Faculté [...] Jamais depuis la création des Facultés aucun Doyen n'a accompli une œuvre aussi considérable que la vôtre [...] vous avez été "un pour tous" dans l'organisation de notre Faculté, en vue d'assurer l'accomplissement de la haute mission de science et d'enseignement qui lui est confiée par la France*" ([**Darboux 1933**, 457-9]). La lourde charge de mise en marche et de rédaction d'un journal de recension à l'âge de 27 ans aura ainsi donné à Darboux la capacité d'administrer efficacement, une faculté qu'il utilisera ensuite dans diverses circonstances, une caractéristique qui le rapproche d'ailleurs de son ancien maître Louis Pasteur.

3.2. Influence sur le cheminement intellectuel du mathématicien.

Les divers travaux des historiens relatifs aux journaux mathématiques que Jean Dhombres a appelés *libres* ont insisté sur la grande influence du savant sur sa publication [90]. En conséquence, nous nous sommes penchés sur ce sujet au début de ce chapitre. Par ailleurs, plusieurs travaux ont analysé la toile sociale créée par la presse scientifique spécialisée, mettant l'accent sur les dynamiques à l'œuvre entre les différents journaux et celles des réseaux d'auteurs [91]. Dans ce qui suit, nous allons adopter une focale différente en tentant de déceler les modifications que vient apporter la tenue du *Bulletin des Sciences* dans le cheminement intellectuel de son rédacteur.

La première partie de notre thèse a en effet permis de décrire ce cheminement naissant à travers l'étude de certains travaux qui participaient de la dynamique de recherche du jeune Darboux géomètre de l'Ecole Normale. Or quelques-unes de nos observations suggéraient déjà un bouleversement dans la pratique et les intérêts mathématiques de notre héros autour de 1870. Ceci a ensuite été renforcé par notre analyse de la section de Mélanges

89. Ces chiffres sont tirés de [**Darboux 1933**, 31-33] et de [**Darboux 1912**, 456-7] (des discours de l'Inspecteur général de Monzie et du doyen Paul Appell). Pour remettre ces chiffres dans le contexte universitaire français et européen, voir [**Charle 1994**] et [**Lundgreen 1980**]. En particulier, on note dans le second qu'en 1905, le nombre total d'étudiants dans les Universités scientifiques de Prusse est de 2495 : ceci montre bien la forte vitalité de la Sorbonne de l'ère Darboux dont les effectifs équivalent à eux seuls aux trois-quarts des effectifs universitaires du pays voisin.

90. Voir l'ouvrage [**Gerini Verdier 2014**], [**Verdier 2009a**] ou encore pour l'étude générale sur les journaux [**Dhombres 1994**].

91. Voir à ce sujet [**Verdier 2009b**] et l'ouvrage [**Goldstein Gray Ritter 1996**].

du Bulletin (voir 2.2). Nous allons ci-dessous préciser les contours de ce bouleversement en affinant l'analyse des influences sur le rédacteur de la tenue de son journal de recensions. Ceci nous permettra de nous intéresser plus loin, pour clore notre travail, aux productions de Darboux qui résulteront de ces modifications d'intérêts mathématiques.

Être nouvellement à la tête du *Bulletin des Sciences* est pour Darboux la source d'influences qui peuvent être séparées en deux catégories : il y a tout d'abord les effets de la découverte de nouvelles mathématiques, faites à l'étranger et dont il doit être rendu compte dans le journal. Mais il y a également une influence plus indirecte : celle qui émerge de l'apprentissage des travaux et des connaissances de son collaborateur Jules Hoüel, dans ses publications mais aussi dans leurs échanges. Cette seconde forme d'influence ne saurait être sous-estimée ici. La rencontre - scientifique et épistolaire - du mathématicien de Bordeaux est en effet, du point de vue mathématique, la première des conséquences de la rédaction du Bulletin sur Darboux.

Les premiers échanges entre Hoüel et Darboux font découvrir à ce-dernier les travaux importants effectués à l'étranger au sujet des géométries non-euclidiennes, ou "*imaginaires*" comme on les appelle alors. Hoüel, outre ses propres travaux de géométrie imaginaire, est très au fait des recherches de Lobatchevsky, Bolyaï et Beltrami en la matière. Il a en effet recherché, lu puis traduit en français les travaux des deux premiers ([**Hoüel 1866**], [**Hoüel 1867**]), ainsi que publié une traduction de deux importants travaux du mathématicien transalpin dans les "*Annales Scientifiques de l'Ecole Normale*" [92].

Or le lancement du Bulletin des Sciences, fin décembre 1869, coïncide avec un événement dans la vie mathématique parisienne qui a trait à la géométrie dite imaginaire : l'affaire Carton [93]. Joseph Bertrand soutient en effet au début du mois la validité d'une démonstration de *l'axiome des parallèles* - encore appelé *postulat(um)* d'Euclide - présentée par un professeur du nom de Jules Carton. Pourtant, le développement et la diffusion des géométries non-euclidiennes avaient déjà été commencés en Allemagne par Bernhard Riemann et Richard Baltzer, ainsi qu'en Italie par Giuseppe Battaglini et Eugenio Beltrami [94]. Hoüel s'apprête alors à faire publier dans les "*Annali di Matematica*" la traduction française de l'*Habilitationsvortrag* de Riemann de 1854 relative aux fondements de la Géométrie, signe de la faible réception de ses premières traductions en France des travaux de géométrie non-euclidienne [95].

Ainsi les tout premiers échanges épistolaires entre les deux rédacteurs du Bulletin vont se rapporter, au moins en partie, au sujet de la géométrie non euclidienne et aux événements de l'affaire Carton. Fin 1869, Darboux méconnaît complètement les recherches portant sur les géométries non-euclidiennes. Il lui paraît donc envisageable que le postulatum d'Euclide puisse admettre une démonstration. Pour mieux le persuader qu'une telle preuve est impossible et lui faire connaître les travaux de géométrie non euclidienne, Hoüel

92. On verra à ce sujet [**Boi Giacardi Tazzioli 1998**]. Plus généralement, on découvrira les *regards sur la géométrie non euclidienne* que portait Jules Hoüel dans [**Henry Nabonnand 2016**].

93. Une description détaillée de l'affaire Carton est présentée en annexe 7. Nous en écrivons la chronique du point de vue de la presse d'alors en juxtaposant les avis contrastés des rédacteurs scientifiques de l'époque.

94. Pour plus de renseignements, on se reportera à l'annexe 7.

95. [**Riemann 1854b**] est traduit par Hoüel dans [**Hoüel 1870c**]. Il avait été publié par Richard Dedekind en 1867 dans les *Abhandlungen* de la Société des Sciences de Göttingen.

lui envoie dès la fin du mois de Décembre - alors qu'ils n'ont encore échangé que 2 lettres ! - plusieurs travaux relevant de ce domaine, y compris plusieurs de ses traductions :

> Je n'ai ni la "science absolue de l'espace", ni "la théorie élémentaire des quantités complexes", ni la Note d'Helmholtz sur les fondements de la géométrie. Mais j'ai reçu et je vous en remercie vos autres publications.
>
> Lettre non datée (Décembre 1869) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Ce sont surtout les travaux de Lobatchevsky qui feront que Darboux découvrira, comprendra et appréciera les géométries non-euclidiennes. Il avouera ainsi quelques mois plus tard à son ami bordelais : "*la Pangéométrie*[96] *m'a bien fait comprendre, et je n'ai eu quant à moi plus rien à objecter*"[97]. Mais il aura en fait suffit de quelques semaines à Darboux pour se ranger du côté des partisans de Lobatchevsky contre Bertrand, Carton et les "*postulateurs*". Hoüel l'aura largement influencé en ce sens :

> Je me range dorénavant tout à fait à l'opinion que vous avez émise et dont je n'étais pas très convaincu : il est impossible de démontrer le postulatum.
>
> Lettre non datée (Décembre 1869) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Conséquence de l'opinion commune des deux rédacteurs quant à la géométrie non euclidienne, sujet qui divise encore en 1870 les mathématiciens français, le Bulletin des Sciences fera la promotion des travaux relevant du domaine de la géométrie non euclidienne. La note de 1871 Félix Klein "*Sur la géométrie dite non-euclidienne*" y sera traduite *in extenso* dans le numéro de Novembre 1871[98]. Darboux ira même jusqu'à assurer à Hoüel : "*soyez tranquille, moi vivant, on ne dira pas de mal dans le Bulletin de Lobatchevsky*"[99]. Au contraire, tous les travaux portant sur une (prétendue) démonstration du postulatum seront ignorés dans le périodique, comme par exemple le mémoire du fameux Jules Carton, au centre de l'affaire éponyme, dont Hoüel affirmera : "*nous garderons, dans le Bulletin, le silence le plus complet sur cet intrépide auteur*"[100].

Parmi les découvertes que Darboux effectue en se renseignant sur les travaux de son nouveau collaborateur, le nîmois va être particulièrement marqué par les traductions des publications du mathématicien russe Vassili Imchenetsky dans le domaine des équations aux dérivées partielles. Les travaux d'Imchenetsky sur les équations du premier ordre ([**Imchenetsky 1864**]) et du second ordre ([**Imchenetsky 1868**]) lui sont alors inconnus.

96. Il s'agit du titre de l'ouvrage de Lobatchevsky [**Lobatchevsky 1855**].
97. Lettre non datée (Juillet 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, citée dans [**Pont 1986**, 659].
98. La note originelle est écrite en allemand et s'intitule *Über die sogenannte nicht-euklidische Geometrie*. Voir sa traduction en français dans le Bulletin tome 2 (Nov. 1871) pp.341-351. Elle sera publiée deux ans plus tard en Allemagne dans les "*Mathematische Annalen*" de 1873.
99. Lettre non datée (1872) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].
100. Lettre datée du 12 Avril 1872 de Jules Hoüel à Joseph De Tilly, reproduite dans [**Henry Nabonnand 2016**, 197-200].

Hoüel avait fait publier sa traduction française du premier des ouvrages d'Imchenetsky dans les *Archiv* de Grünert quelques mois auparavant ([**Hoüel 1869**]) [101], et avait également fait paraître sa traduction chez Gauthier-Villars comme un ouvrage à part. Puis, au moment du lancement du Bulletin, Hoüel hésitait encore à entreprendre la traduction en français du second ouvrage du mathématicien russe - qu'il possédait aussi.

Grâce à l'envoi que Hoüel lui fait parvenir de ses propres travaux dès Décembre 1869, Darboux découvre le travail d'Imchenetsky relatif aux équations différentielles du premier ordre. Le travail de Hoüel fera dans le Bulletin l'objet d'une mention dans la Revue Bibliographique du mois de Février 1870 (pour l'ouvrage tiré à part), ainsi que d'une recension exceptionnellement longue le mois suivant lors du compte-rendu des "*Archiv der Mathematik und Physik*" où il figure [102]. Apprenant par Hoüel l'existence d'un second ouvrage du même mathématicien sur le sujet des équations aux dérivées partielles d'ordre deux, Darboux exhorte son collaborateur à en entamer la traduction. Il pense alors que le Bulletin pourrait accueillir cette traduction :

> Je crois que [l]a traduction [du mémoire d'Imchenetsky sur les équations différentielles du second ordre] pourrait rendre de véritables services. Seulement avec nos 24 feuilles nous serons obligés de l'insérer par fragments. Cela vous convient-il ? Le sujet est très intéressant et je crois que vous rendriez en traduisant ce mémoire si vous le trouvez bien fait un véritable service aux géomètres
>
> Lettre non datée (Décembre 1869) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Mais Chasles et la Commission, nous l'avons vu en [Chap.5,3.1], vont entraver ce projet en ne donnant pas au Bulletin l'espace nécessaire à la publication de longues traductions.

> J'ai vu aussi quelques membres de la Commission. Je crains que le défaut d'espace ne nous empêche d'insérer le mémoire russe [...] Pour ma part je regretterais que le mémoire ne fût pas traduit, il y a de belles études à faire sur le sujet.
>
> Lettre non datée (Décembre 1869) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

Continuant d'entretenir l'espoir d'une publication de la traduction dans le Bulletin, Hoüel entreprend tout de même la traduction du second mémoire d'Imchenetsky. Il est fortement encouragé par Darboux en ce sens :

> Si cependant vous vouliez bien traduire le Mémoire [d'Imchenetsky], je pourrai en insérer des extraits ou bien en faire un compte rendu détaillé si vous le publiez dans un autre recueil. Je crois toujours et plus que jamais que vous ferez une œuvre utile, car cette théorie des équations aux dérivées partielles est fort importante et depuis Ampère on n'a pas fait dans cette partie de travail d'ensemble.
>
> Lettre non datée (Janvier 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

101. Ces deux ouvrages d'Imchenetsky et leurs traductions ont parfois été l'objet de certaines confusions. Nous rétablissons ici avec précision les références aux ouvrages du mathématicien russe, et les traductions de Hoüel.

102. Voir le *Bulletin des Sciences Math. et Astr.*, Tome 1 (1870), pp.73, 101-104.

La publication dans le Bulletin de la traduction de Jules Hoüel du second ouvrage d'Imchenetsky est même annoncée dans le journal lors du numéro de Mai 1870 [103]. Avec la guerre de 1870 et la difficile course pour rattraper le retard, aucune traduction d'ouvrage ne sera publiée dans le Bulletin avant 1873. Hoüel aura donc préféré se tourner à nouveau vers les "*Archiv*" de Grunert pour publier sa traduction dès la fin de la guerre franco-prussienne ([**Hoüel 1872**]).

Darboux possède donc bien vite grâce à Hoüel les traductions françaises des mémoires d'Imchenetsky sur les équations aux dérivées partielles. Développant un fort intérêt pour cette théorie, il va les étudier de près. Durant quelques mois, Sophus Lie va d'ailleurs l'accompagner dans ces études lors de son séjour parisien de 1870 : Félix Klein, également présent, se remémorera plus tard : "*à Paris, Lie avait étudié l'Imchenetsky avec beaucoup d'enthousiasme, jusqu'à n'en plus pouvoir*" [104]. Certes dans ses précédents travaux, et nous l'avons bien vu dans nos études précédentes, le géomètre nîmois s'était déjà penché sur la mise en équation ou la résolution de certaines équations différentielles. Mais celles-ci apparaissaient toujours dans le cadre de recherches plus larges dont elles constituaient une étape mais pas l'essence du problème. Ce que Darboux développe à la lecture des ouvrages d'Imchenetsky, c'est un intérêt pour la théorie des équations aux dérivées partielles en soi, et non pas uniquement dans le cadre de son intervention dans la formulation ou la solution des problèmes de Géométrie.

Ce nouveau centre d'intérêt mathématique va être la source de plusieurs travaux de Darboux à partir de 1870 : il s'intéressera tout d'abord à la résolution générale des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur à l'unité, en adaptant l'extension de la méthode des caractéristiques des équations d'ordre un et en précisant les raisons de son insuccès général ([**Darboux 1870a**]). Un peu plus tard, il se penchera sur le problème de l'existence des solutions avec l'outil du développement en séries ([**Darboux 1875a**]). Suite aux travaux des professeurs des Universités allemandes (Alfred Clebsch, Sophus Lie, Adolph Mayer notamment), Darboux contribuera également aux recherches sur le problème de Pfaff ([**Darboux 1882**]). Nous reviendrons sur la réception, l'impact et la diffusion de ces travaux dans la section [Chap.7,3.2]. Mais surtout, la plus grande partie de ses recherches dans ce domaine sera consacrée à la théorie des solutions singulières, où le principe d'unicité (locale) est mis en défaut ([**Darboux 1870c**], [**Darboux 1873b**], et [**Darboux 1876**]). Ce sont ces derniers travaux qui lui vaudront un Grand Prix des Sciences mathématiques (1877), et que nous étudierons dans le chapitre suivant ([Chap.7]).

L'influence indirecte de la tenue du Bulletin des Sciences émanant des travaux de Hoüel est donc relative aux domaines de la géométrie non-euclidienne et des équations aux dérivées partielles. L'influence directe est, quant à elle, plus vaste. De manière générale, Darboux devient à partir de 1870 au courant de tout ce qui se fait à l'étranger du fait de son rôle nouveau de rédacteur en chef. Bien sûr, il approfondit particulièrement ses connaissances des travaux dont il doit écrire lui-même les recensions. Mais de fait, Darboux centralise les informations de son périodique : systématiquement il vérifie, relie, corrige

103. On peut lire dans les Mélanges de ce numéro : "*En attendant qu'il nous soit donné de publier la traduction que nous faisons en ce moment de cet important Mémoire [*[**Imchenetsky 1868**]*], nous croyons être agréable aux lecteurs du Bulletin en leur faisant connaître l'Avant-propos [...]*", BSMA, Tome 1 (1870), p.164.

104. "*Lie studierte in Paris den Imchenetsky sehr eifrig, bis zum Euberdruss*", citation reprise de [**Hawkins 1991**, 217]. Voir également à ce sujet [**Stubhaug 2006**, 117,419].

parfois de son propre chef, tout ce qui doit être inséré dans son Bulletin avant de porter les documents à Gauthier-Villars pour impression. Aussi si le réseau de collaborateurs du Bulletin est vaste, l'imprimeur du quai des Grands Augustins pourrait presque ne pas s'en apercevoir puisque son interlocuteur est toujours le mathématicien nîmois.

Parmi cette foule de connaissances mathématiques qu'il est amené à aborder pour son Bulletin, un domaine va véritablement faire naître en lui de la curiosité d'abord, puis un réel attrait ensuite : l'analyse mathématique développée en Allemagne.

Ce sont d'abord les travaux d'Hankel sur les fonctions oscillantes qui retiennent son attention. Darboux découvre ce champ nouveau de l'analyse qui lui est, là encore, inconnu à l'occasion du compte-rendu que Hoüel insère dans le Bulletin de l'ouvrage [**Hankel 1870**] [105]. Il écrit à son collaborateur : "*dans votre article sur Hankel, je n'ai rien osé changer [...] je n'ai pas compris : oscillant en chaque point, dans toute l'étendue d'un espace fini*" [106]. Hankel, alors professeur à Tübingen, avait dans ce livre exploité la convergence des séries de fonctions pour construire des fonctions continues qui ne possédaient pas de dérivées sur des ensembles denses. Il annonçait dans son introduction : "*avec l'aide d'un principe que j'appelle la condensation des singularités, qui m'a été inspiré d'un exemple donné par Riemann [Art.6, über die Darst.]*[107]*, j'ai réussi à construire des séries convergentes qui oscillent sur l'ensemble de l'intervalle*" ([**Hankel 1870**, 6-7]). Ainsi, à travers le livre de Hankel, c'est également l'importance des travaux de Riemann dans le domaine de l'analyse que Darboux aperçoit. Il écrit :

> A propos de Hankel qui me paraît avoir une véritable passion pour Riemann, ne pourriez-vous pas lui demander pour notre Bulletin un article sur la vie et les travaux de Riemann ? Cela sourirait peut-être, en tout cas, nous lui en serions bien reconnaissant.
>
> Lettre non datée (Mars 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel.
> [**Archives épistolaires Darboux**]

Dans son livre, Hankel avait en effet mentionné : "*cette étude m'a surtout été inspirée par les écrits de Riemann, auquel je suis redevable, par son brillant mémoire sur les séries trigonométriques*" [108].

105. Voir le *BSMA*, tome 1 (1870) p.117.
106. Lettre non datée (Mars 1870) reproduite dans [**Gispert 1987**, 114-116].
107. Hankel appose ceci en bas de page. Il s'agit d'une référence au mémoire [**Riemann 1854a**]. Voir ci-après quelques détails.
108. [**Hankel 1870**, 8], traduction de [**Henry Nabonnand 2016**, 54].

FIGURE 18. Bernhard Riemann (à gauche) et Hermann Hankel (à droite)

Avec cet ouvrage de Hankel et l'évocation du travail de Riemann, Darboux va nourrir un intérêt pour la théorie des fonctions et en particulier les fonctions (surtout les séries de fonctions) continues qui ne possèdent pas de dérivée. Il demande à Hoüel plus d'exemples à ce sujet qui l'intrigue, et recherche à se procurer les travaux des deux mathématiciens allemands :

> J'ai lu et envoyé à l'imprimerie votre article sur Hankel, ainsi que le Bulletin bibliographique que je vous enverrai. Dans votre article sur Hankel, la fin m'a paru de nature à devoir gagner si vous ajoutiez des exemples des fonctions et en particulier de ces séries que je ne serais pas fâché de voir. Je pense que les lecteurs partageront ma manière de voir [...]
>
> Savez-vous, Monsieur, si le Mémoire de Riemann sur la Darstellbarkeit etc. [109] est long et se vend à part ? Je serais curieux de le connaître. J'en avais entendu parler mais je ne l'ai jamais vu.
>
> Lettre non datée (Mai 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, reproduite dans [**Henry Nabonnand 2016**, 55]

Hankel n'écrira jamais de notice sur Riemann, comme l'avait demandé Darboux. En outre, la guerre va venir mettre entre parenthèses sa recherche des mémoires des deux mathématiciens d'outre-Rhin. Ce n'est qu'en 1873 qu'il y reviendra, mais le contexte aura changé : le travail de Hankel aura en effet été vivement critiqué entre temps, notamment par le mathématicien franco-belge Philippe Gilbert [110]. Darboux entreprendra la traduction du mémoire de Riemann dès qu'il l'aura reçu [111], et la publication complète de cette traduction

109. Il s'agit de [**Riemann 1854a**] dont le titre originel est "*Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*".

110. Voir à ce sujet le mémoire du mathématicien de Louvain [**Gilbert 1873a**], et la trame de *l'affaire Gilbert* dans [**Henry Nabonnand 2016**, 53-78].

111. Darboux bénéficie de la connaissance et de l'accès hors-norme que Hoüel possède au réseau de libraires en France et à l'étranger. Hoüel communique ainsi avec l'astronome russe Kowalski à Kazan pour obtenir les mémoires russes, ainsi qu'avec le libraire Klincksieck à Paris dont il obtient certains ouvrages rares ([**Henry Nabonnand 2016**]). C'est grâce à ce-dernier que Darboux obtiendra en 1873 les travaux d'Hankel et de Riemann.

sera insérée dans les Mélanges du tome 5 (1873 2nd Sem.) du Bulletin. Il sera émerveillé par ce travail d'analyse, et par la "*perle*" qu'il y aura découverte :

> Le mémoire de Riemann est un chef-d'œuvre semblable à ces vieux tableaux dont quelques parties en pleine lumière vous font regretter ce que le temps a détruit ou ce que l'auteur a négligé ...
>
> [...]
>
> Voilà un beau morceau qui ne sera pas apprécié. Mais il y a une perle que tout le monde y découvrira je l'espère. C'est la définition de l'intégrale définie. C'est de là que j'ai tiré une foule de fonctions continues qui n'ont pas de dérivées. [...] Ce brave Gilbert va être vexé, mais je le ménagerai et tâcherai de l'écorcher sans le faire crier.
>
> Lettres datées du 18 et du 30 Mars 1873 de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**] [112]

Il recevra finalement l'ouvrage d'Hankel quelques semaines plus tard, le 10 Avril 1873, mais ne devra alors bientôt plus compter sur son auteur pour mener à ses côtés les recherches de non-dérivabilité : Hankel meurt en effet d'un méningite en Août 1873, à l'âge de 34 ans [113].

Ce qui supporte encore le développement de son intérêt pour l'analyse, et qui lui fait par ailleurs découvrir les outils mathématiques nécessaires à l'établissement des fonctions sans dérivées, est le fait que Darboux va grâce à son activité de rédacteur en chef du Bulletin suivre en continu (et avec attention) la publication en Allemagne des tout premiers travaux d'analyse de *l'école de Weierstraß*.

Karl Wilhelm Weierstraß [114] enseigne en effet à Berlin depuis 1856, et ses cours exercent une grande influence vis-à-vis des fondements du calcul différentiel et intégral. Pourtant le contenu de ces mêmes cours reste alors méconnu, et le restera longtemps puisque Weierstraß est fermement opposé à la publication de ses leçons [115]. Ce n'est donc qu'à travers les publications de ses élèves (Hermann Schwarz, Georg Cantor, Wilhelm Thomé, Otto Stolz) ou des amis de ceux-ci qui bénéficient indirectement des cours du professeur de Berlin (Eduard Heine, Johannes Thomae) que les méthodes qu'ils contiennent sont, parfois lentement, diffusées.

Or ces premières publications commencent précisément autour de 1870, alors que Darboux est (et doit être) particulièrement réceptif pour la rédaction de son journal. En parallèle du livre de Hankel, il étudie aussi l'ouvrage de Thomae [**Thomae 1870**] qu'il mentionne dans le Bulletin Bibliographique du numéro de Juillet 1870 sur les séries et les variables complexes [116]. Mais c'est avant tout parce qu'il effectue lui-même les recensions des tomes du "*Journal für die reine und angewandte Mathematik*" que le mathématicien nîmois va rencontrer les méthodes de Weierstraß à travers les travaux de ses disciples.

112. Ces extraits, bien connus, sont notamment reproduits dans [**Gispert 1983**, 85-6].
113. Pour plus de détails sur Hankel, voir [**von Zahn 1874**]. Pour la réception de l'ouvrage d'Hankel, Darboux écrit à Hoüel le 11 Avril 1873 : "*j'ai aussi reçu hier seulement le paquet qui contient Hankel*", [**Archives épistolaires Darboux**].
114. A propos de Weierstraß, voir plus loin [Chap.7,1.2] ou les travaux [**Bölling 1994**] et [**Biermann 1966**].
115. Voir à ce sujet [**Bottazzini Gray 2013**, 460] et [**Lützen 2003**, 186].
116. Voir *BSMA* tome 1, Juillet 1870, p.232.

Rendant compte des tomes 71-74 (1869-1872) de ce journal de Berlin, Darboux est ainsi mêlé aux propriétés de continuité et de convergence des séries dans les articles de Cantor ([**Cantor 1870a**], [**Cantor 1870b**], [**Cantor 1871**]), ainsi qu'aux propriétés de convergence des fonctions continues d'une ou de plusieurs variables dans les travaux de Schwarz ([**Schwarz 1871**]) et de Heine ([**Heine 1870**]).

C'est surtout avec un article d'Eduard Heine, dont il rendra compte dans le numéro de Septembre 1872 du Bulletin [117], que Darboux apprend les méthodes de Weierstraß relatives à certains fondements de l'analyse. De ce mémoire [**Heine 1872**] publié au Printemps 1872, Hélène Gispert précise ainsi que "*c'est ici la première fois qu'un auteur présente une synthèse de résultats sur les fondements*" ([**Gispert 1983**, 62]). Heine y donne dans une première partie une construction des nombres réels - liée aux suites de Cauchy ([**Heine 1872**, 174-6]) -, puis y développe la théorie des fonctions, les définitions liées à la continuité ainsi que les propriétés des fonctions continues [118]. L'héritage de Weierstraß y est clairement affirmé dans l'introduction :

> En dépit des démonstrations données par un chercheur des plus sagaces [*scharfsinnig*], des doutes subsistent quant à certains théorèmes élémentaires de la théorie des fonctions. De sorte que les résultats des recherches ne sont pas complètement considérés comme corrects dès lors qu'ils reposent sur ces principes fondamentaux. La raison en est, je crois, que même si les principes du professeur Weierstrass ont été diffusés dans des cercles plus étendus directement dans ses leçons et par d'autres communications orales, ou indirectement dans des notes de cahiers travaillées à partir de ces cours, ils [les principes] n'ont pas été publiés par lui-même dans une authentique publication.
>
> [**Heine 1872**, 172]

FIGURE 19. Eduard Heine

117. Voir *BSMA*, tome 3 (1872) p. 264.
118. Ce mémoire est notamment resté célèbre puisqu'il contient (il s'agit du dernier énoncé) le théorème relatif à la continuité uniforme qui est désormais associé au nom de Heine. Nous l'étudierons plus en détail dans la section [Chap.7,1.3]. Pour la définition des réels donnée par Eduard Heine, voir [**Epple 2003**, 300].

Heine entend donc réparer ce manque en publiant les principes de Weierstraß sur lesquels s'appuie toute la théorie des fonctions. L'héritage du professeur de Berlin est revendiqué encore plus fortement lorsque Heine aborde le dernier paragraphe (§3) relatif aux propriétés des fonctions continues :

> Le cheminement général des preuves de quelques théorèmes du paragraphe §3 d'après les principes de M. Weierstraß m'est connu grâce à des communications orales venant de lui-même ou de MM. Schwarz et Cantor [119], de sorte que pour ces démonstrations seule la manière de présenter est la mienne.
>
> [**Heine 1872**, 182]

Gaston Darboux sera particulièrement stimulé par la publication par Heine d'un tel travail sur les fondements qui synthétise l'image parcellaire qu'il se faisait, à travers les publications éparses, des cours de Karl Weierstraß. Il commence par en donner une longue recension dans le Bulletin :

> Celui qui a déjà professé la théorie des fonctions connaîtra sans doute les difficultés qui s'opposent au développement des théorèmes fondamentaux. [...] Dans son Cours sur la théorie des fonctions, M. Weierstrass, de Berlin, établit ces principes de la manière la plus satisfaisante : mais il n'en a rien publié, et d'autres géomètres, qui ne connaissent pas sa méthode, ne veulent pas toujours accepter cette base inédite de son système. M. Heine, ami de M. Weierstrass, prend la peine de publier quelques-uns des théorèmes élémentaires. [...]
>
> [**Darboux 1872d**, 264]

Ensuite, l'intérêt que porte Darboux à ce travail est manifesté dans un court article qu'il insère au Bulletin le mois suivant, [**Darboux 1872a**]. Ce mémoire fait en effet directement suite à l'un des théorèmes présentés par Heine : le théorème des bornes atteintes, que nous étudierons plus loin en [Chap.7,1].

Avec le Bulletin des Sciences, un intérêt croissant naît chez Darboux dès les premières années d'existence du journal pour les fondements de la théorie des fonctions et du calcul différentiel et intégral. Cet intérêt est provoqué puis renforcé par ses découvertes des travaux sur l'intégration de Riemann ainsi que des différentes méthodes de Weierstraß. Ces méthodes sont certes encore assez méconnues, mais son activité de rédacteur lui donne l'opportunité d'en avoir une vue d'ensemble dans les recensions des productions qui en éventent des bribes. Le travail de synthèse d'Heine l'y aura néanmoins bien aidé.

Cette connaissance de l'analyse de l'école de Berlin et son intérêt nouveau pour ce domaine se conjuguent à sa volonté de diffuser et de rendre, en certains points, plus rigoureuse la définition de l'intégrale donnée par Riemann. Il compte par ailleurs s'appuyer sur celle-ci ainsi que sur ce qu'il a appris des notions de borne supérieure et de convergence uniforme dans les travaux allemands pour s'impliquer, avec Hoüel et Hankel et contre Gilbert, dans

119. Schwarz et Cantor quittent tous les deux, l'un après l'autre, l'Université de Berlin de Weierstraß pour aller travailler à Halle aux côtés de Heine, Schwarz d'abord en 1867, puis Cantor fin 1869. Par ailleurs, Heine a rencontré Weierstraß à plusieurs reprises au début des années 1870. Nous détaillerons ceci ultérieurement ([Chap.7,1.3]).

la non-dérivabilité des fonctions continues. Savoir que Weierstraß l'y précède ne peut que l'encourager, et il écrit à Hoüel :

> Bonnet et moi, nous sommes de votre avis en un point contre cet âne de Gilbert : on ne peut pas démontrer l'existence de la dérivée, quoi qu'il en pense, et je crois que vous auriez tort de lui répondre. Il veut faire du bruit pour vendre son bouquin
>
> Lettre datée du 30 Mai 1872 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

> Quant à Gilbert le grand Belge, nous avons grand besoin d'agir avec prudence et il faut bien choisir notre moment pour lui asséner un coup terrible et dont ce grand belge ne puisse se relever. Il attaque Hankel [...] quand Hankel aura répondu d'une manière victorieuse [120], je n'en doute pas, nous arriverons à la rescousse et gare Gilbert. Nous aurons la partie d'autant plus belle qu'à Berlin, il y a aussi des géomètres pointus et que Weierstrass a lu un article sur les fonctions qui n'ont pas de dérivée [121].
>
> Lettre non datée (Février 1873) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

En décembre 1873, Darboux recevra et lira "*avec plaisir*" une note d'Hermann Schwarz ([**Schwarz 1873**]) présentant une nouvelle fonction "*plus simple*" continue n'ayant, dans tout intervalle (d'intérieur non-vide), pas de dérivée pour une infinité de valeurs [122].

Entre la fin de l'année 1872 et le début de l'année 1874, Darboux est concentré sur un projet : écrire un ouvrage d'analyse sur les fondements en y reprenant, modifiant, synthétisant, développant les méthodes de Weierstraß qu'il connaît et l'intégrale de Riemann. Alors qu'il expose le plan de ce qu'il appelle son "*travail sur les fondements*" à Hoüel, l'influence des mathématiciens allemands est claire :

> Voici quel est le plan de mon travail sur les principes du Calcul Diff. : j'approfondis d'abord [1] l'idée de limite et je montre que la condition nécessaire pour que le terme général d'une suite $a_1, a_2, ... a_n, ...$ ait une limite c'est qu'on puisse prendre n assez grand pour que :
>
> $$a_{n+p} - a_n < \varepsilon \quad \text{en valeur absolue}$$ [123]

120. Hankel ne répondra jamais. Quelques semaines avant sa mort, Darboux s'énervera de l'absence de réponse de sa part : "*A propos de Hankel, ce géomètre baisse décidément dans mon estime ; il me paraît un singe de Riemann, mais les bottes que lui a portées Gilbert sont parfaitement justes*" (lettre datée du 9 Juillet 1873, [**Henry Nabonnand 2016**, 73]).
121. Il s'agit de [**Weierstrass 1872**], une communication qui n'est pas publiée. Mais en Janvier 1875, Paul du Bois Reymond donnera pour la première fois dans une publication, avec la bénédiction du maître berlinois, l'exemple et la preuve de la non-dérivabilité de la fonction que Weierstraß avait dévoilée à l'Académie de Berlin le 18 Juillet 1872 (voir [**du Bois-Reymond 1875**]). Pour un descriptif de cette fonction et la preuve de sa non-dérivabilité, voir [**Henry Nabonnand 2016**, 68-9].
122. Voir cette fonction dans [**Henry Nabonnand 2016**, 76-77].

> Après cela je passe [2] à la définition des fonctions continues, à leurs propriétés et je définis une classe de fonctions discontinues [124].
>
> Les séries dont les termes sont des fonctions de x donnent lieu à des distinctions que j'établis d'après les allemands [3] : il y a les séries également convergentes dans un intervalle donné (*gleichmässig*), et celles qui ne le sont pas. Il y a une différence capitale entre ces séries.
>
> Après cela, j'étudie [4] la définition de l'intégrale de Riemann en la rendant rigoureuse (c'est bien long) et [5] j'en déduis l'existence de fonctions continues qui n'ont pas de dérivées. J'en donne une foule développées en séries. Il y en a une qui n'est ni croissante ni décroissante dans un intervalle fini.
>
> Lettre datée du 23 Décembre 1873 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

On constate ainsi à quel point ce travail de Darboux, qui va résulter en le mémoire [**Darboux 1875b**], a été stimulé par les recherches des mathématiciens allemands qu'il a découvertes dans le Bulletin : les points 1 et 2 sont directement inspirés du travail de Heine, tandis que le 4 l'est - indirectement - du travail de Hankel. Le point 3, l'uniformité de la convergence des séries (*gleichmässig*), provient également des méthodes développées par Weierstraß que Heine a dévoilées dans les travaux que Darboux a recensés ([**Heine 1870**, 353]). Enfin, le point 5 - qui dans ce plan semble être la finalité du travail de Darboux - se place dans la lignée des travaux de Hankel, Schwarz et Weierstraß qui recherchent par des exemples à préciser la distinction entre continuité et dérivabilité. Dans son mémoire, Darboux reprendra d'ailleurs la méthode de condensation des singularités de Hankel ainsi que la fonction de Schwarz ([**Darboux 1875b**, 94-103]).

En le forçant à se tenir au courant des travaux effectués à l'étranger, et plus précisément en le faisant connaître certains mémoires important publiés en Allemagne par son travail de recension, l'activité de Gaston Darboux au Bulletin des Sciences a provoqué chez lui la naissance du goût pour les recherches sur les fondements de la théorie des fonctions et du calcul différentiel et intégral. Ce véritable *éveil de l'analyste*, par opposition à celui du géomètre, a lieu à partir de 1870 et se nourrit de sa découverte des méthodes de Weierstraß ainsi que de la polémique autour de la dérivabilité des fonctions. Après une première phase de découverte et d'appropriation de ces travaux (1870 - début 1872), ce nouvel intérêt scientifique du nîmois se traduit dans sa production mathématique (mi-1872 - 1875). Ceci explique le *virage vers l'analyse* que nous avions observé lors de notre étude révélatrice de la section de Mélanges du Bulletin (voir 2.2).

En parvenant à synthétiser clairement certains points clefs du cours de Weierstraß qui transparaissent dans les travaux publiés, Darboux se forge une idée - plutôt fidèle - de ce cours et en fait la base d'un nouveau travail. Les nombreuses références qu'il donne envers

123. Darboux ne le sait pas encore, mais Weierstrass a déjà introduit dans son cours à partir de 1866 la notation $|x|$ pour désigner la valeur absolue ([**Weierstrass 1866**, 14]).

124. Un acte manqué a vu Hélène Gispert oublier le préfixe *dis* dans sa retranscription de cette lettre ([**Gispert 1983**, 87]), ce qui en change considérablement la signification : ici la classe de fonctions discontinues désignée par Darboux est celle des fonctions qui respectent le théorème des valeurs intermédiaires. Le théorème qui portera le nom de Darboux stipule que toute fonction dérivée appartient à cette classe ([**Darboux 1875b**, 110]

ce cours qu'il n'a pourtant jamais suivi pour la démonstration et le rôle du théorème des accroissements finis montrent à quel point il est influencé à distance par le professeur de Berlin :

> A votre place, je lâcherais le théorème sur les limites de sommes, qui ne vaut rien aussi, et bien d'autres choses. Avec le théorème des accroissements finis tel qu'il est démontré dans Serret [125] vous pouvez élever un édifice solide. Ca et la définition de l'intégrale, il n'y a pas autre chose. C'est comme cela, je crois, que procède Weierstrass.
>
> Lettre datée du 24 Janvier 1874
>
> Vous pouvez mettre dans le premier quart de la première leçon de Calcul Différentiel le théorème des accroissements finis tel que le démontre Bonnet, et il domine alors toute la théorie. Du reste ce cours de Weierstrass que vantent tant les allemands me paraît taillé sur le même modèle
>
> Lettre datée du 16 Février 1874
>
> je pourrais vous citer une foule d'autorités qui sont de mon avis : Weierstrass, Bonnet, Thomae ...
>
> Lettre datée du 19 Février 1874
>
> Je vous ai proposé alors de prendre cette démonstration du théorème des accroissements finis qui se trouve dans le cours de Serret, dans celui de Weierstrass [...]
>
> Lettre datée du 27 Novembre 1875 [126]

Pour clore ici l'enquête liée à l'impact du Bulletin des Sciences sur les mathématiques de Gaston Darboux, on peut noter une transition éditoriale notoire qui n'a, elle, pas trait au contenu de ses recherches.

Jusqu'au début des années 1870, Darboux a pour habitude d'exposer presque systématiquement une première version de ses recherches à la *Société Philomathique de Paris*. Certaines de ses communications sont alors publiées dans le "*Bulletin*" de cette société. Celle-ci joue donc le rôle d'un *incubateur* qui lui permet à la fois de présenter ses travaux rapidement, dès leur première rédaction (et ainsi de fixer la date pour d'éventuelles questions de priorité), tout en pouvant les modifier ultérieurement après d'éventuelles remarques ou critiques pour les publier plus tard, sous une forme finale dans d'autres recueils plus prestigieux. Ce mode de fonctionnement n'est d'ailleurs nullement spécifique à Darboux, comme en témoigne le surnom d'"*antichambre de l'Académie*" que les historiens aiment à donner à la *Société Philomathique*.

Après les premières années de la décennie 1870, il est remarquable que Darboux ne publie absolument plus dans le "*Bulletin*" de la Société Philomathique. La section de mélanges de son Bulletin lui donne en effet la possibilité nouvelle d'exposer ses travaux de

125. Darboux fait ici allusion à [**Serret 1868**, 17-19], la démonstration du théorème étant explicitement attribuée à Pierre-Ossian Bonnet.

126. Toutes les lettres citées ici sont écrites par Gaston Darboux à Jules Hoüel et conservées dans [**Archives épistolaires Darboux**].

son propre chef. D'ailleurs notre étude consacrée à cette section a montré que Darboux ne s'en privait pas, étant de loin le premier des auteurs de la section. Cet effet peut être rapproché de l'impact qu'avait eu la création du *Bulletin de Férussac* sur la Société Philomathique de Paris. [**Bru Martin 2005**, 37] a en effet rappelé que l'ancêtre du Bulletin de Darboux avait atrophié l'activité de la Société qui avait même en conséquence disparu, provisoirement, en 1836.

Deux éléments limitent cependant l'interprétation que nous présentons de l'abandon de la Société Philomathique conséquent à l'apparition du Bulletin. Tout d'abord, le Bulletin de Férussac avait été, dans les années 1820, accompagné de l'activité d'un haut lieu de la vie scientifique parisienne qui s'était directement établie au détriment de la vie de la Société Philomathique. Férussac avait en effet installé les "*bureaux du Bulletin*" au 3 rue de l'Abbaye, où une large bibliothèque et des salons étaient vite devenus les lieux de rencontre et de travail des savants de la capitale ([**Bru Martin 2005**, 12]). Rien de tel n'existe pour le Bulletin de Darboux, qui n'a pas de bureau et dont la vie sociale n'est créée qu'à travers les réseaux épistolaires. La sociabilité mathématique du nouveau Bulletin n'est plus la même que celle de l'ancien : la force du réseau écrit a supplanté la rencontre sociale physique. Ceci va d'ailleurs globalement de pair avec le mouvement d'internationalisation des journaux scientifiques. Ensuite, la création en Novembre 1872 de la *Société Mathématique de France*[127] et de son *Bulletin* donne à Darboux une nouvelle tribune pour ses communications et la publication de ses notes. Ceci contribue donc également au délaissement de la Philomathique par le mathématicien nîmois.

4. Quelques conclusions sur les interactions rédacteur/journal

Dès son lancement fin 1869, le *Bulletin des Sciences* prend une part majeure dans la vie mathématique et sociale de son rédacteur en chef Gaston Darboux. Le mathématicien se pare en effet d'une nouvelle tunique, celle de rédacteur, qui lui donne accès à une toute nouvelle sociabilité mathématique. Au cœur d'un réseau de correspondants européen qui ira toujours croissant, le rédacteur nîmois acquiert un statut international qui vient renforcer sa réputation de mathématicien. Ceci rejoint les études précédentes effectuées sur les journaux scientifiques *libres* ([**Dhombres 1994**], [**Goldstein Gray Ritter 1996**], [**Verdier 2009b**]), mais acquiert plus de poids encore dans le climat de tension qui règne en Europe au début des années 1870 suite à la guerre franco-prussienne. Darboux fait preuve avec intransigeance d'un internationalisme qui se répercute sur la tenue et la réputation de son journal.

L'intérêt et la pertinence de l'étude du journal scientifique en tant que tel ont largement été développés dans l'article de Jean Dhombres ([**Dhombres 1994**]). En ce qui concerne le Bulletin de Darboux, cette étude a déjà été entreprise par Hélène Gispert ([**Gispert 1984**], [**Gispert 1985**], [**Gispert 1987**]). Tout en prolongeant ces analyses, nous avons néanmoins ajouté une composante essentielle pour notre travail qui n'avait jusqu'alors pas réellement émergé : les influences entre le rédacteur (le "*savant*" de Jean

127. A propos de la S.M.F., voir [**Gispert 1996a**].

Dhombres) et son périodique. Dans le cadre de l'analyse du contenu du journal, ceci se traduit par une enquête des critères de subjectivité du rédacteur et propose ainsi une nouvelle grille d'interprétation des données, souvent statistiques, qui ressortent de cette analyse. La composition du journal, mais également sa vie en tant qu'organe institutionnel à la frontière des Ministères, des imprimeurs et des scientifiques, ou encore la nature des collaborateurs amenés à participer à cette aventure rédactionnelle gagnent à être lues grâce à ce filtre d'interprétation. En retour, cette étude enrichit notre portrait des différentes identités de notre héros.

Mais cette composante permet par ailleurs d'envisager l'étude sous une autre approche : décrypter l'incidence du journal sur la trajectoire scientifique du rédacteur. Les évolutions de ses dynamiques de production, du spectre de ses centres d'intérêt doivent ainsi être regardées comme pouvant avoir été causées ou simplement encouragées par l'importance de son activité de rédaction. La tenue du Bulletin oblige en effet Darboux d'une part à interagir très fortement avec de nombreux scientifiques - Hoüel le premier - et d'autre part le force à découvrir l'étendue des recherches de l'Europe mathématique de son temps. L'écriture des recensions constitue enfin un chemin d'accès privilégié aux connaissances, et cette activité contribue à moyen terme à immerger le rédacteur à distance dans des eaux mathématiques qui pouvaient lui être étrangères jusqu'alors. Il devient ainsi particulièrement intéressant d'y analyser la perméabilité de son identité mathématique.

Les études statistiques menées dans la section 2 confortent les observations des historiens ayant entrepris des études semblables aux nôtres pour d'autres journaux libres. A la tête de la publication, Darboux est en effet de loin le premier auteur de son journal. Ceci est valable tant pour les articles de recherche insérés dans les Mélanges que pour les recensions écrites pour la Revue des périodiques. Mais l'étude détaillée des Mélanges permet de révéler l'orientation changeante des domaines d'intérêt du nîmois sur la période 1870-75. Dominée par la Géométrie dans un premier temps, sa production mathématique semble dans un second temps se dédier à l'Analyse et, dans une moindre mesure, à la Mécanique. Ces évolutions sont très nettement retranscrites par la composition générale de la section de Mélanges sur laquelle nous avons montré qu'elles ont un fort impact. En accord avec la trajectoire institutionnelle de Darboux, elles sont confirmées par une analyse plus fine des influences directes et indirectes de la tenue du journal. A travers son collaborateur principal Jules Hoüel, Darboux verse rapidement dans des lectures de géométrie non-euclidienne et des recherches sur la théorie des équations différentielles. Puis à travers son activité incessante de recension, le rédacteur est immergé dans les travaux d'analyse des mathématiciens allemands. Découvrant les héritages de Riemann et fortement influencé par la diffusion des cours de Weierstrass, son identité mathématique se révèle fortement perméable à ce courant d'influence.

Le spectre des intérêts mathématiques de Darboux s'élargit ainsi considérablement du fait de son rôle de rédacteur au début des années 1870. La nature de sa production scientifique change du même coup, au détriment de la Géométrie qui l'avait vu naître en tant que mathématicien et qui se voit, provisoirement, laissée de côté. Les rares travaux que Darboux lui consacre encore sont sur la lancée de ses anciennes recherches. Il s'adonne ainsi à de nouvelles recherches très variées dans le domaine de la théorie des équations différentielles. Mais il s'attache aussi à participer aux travaux d'analyse de l'école allemande pour une refonte rigoureuse des principes fondamentaux. Immergé à distance dans ce courant, nous verrons par la suite que du point de vue de la science française, Darboux nage alors en eaux troubles. Si les réceptions immédiates de ces nouveaux travaux s'avéreront bien moins glorieuses que ne l'avaient été celles de ses premières recherches, il convient tout de même de signaler l'abondance de la production scientifique du mathématicien durant cette courte époque. Comme le dit Emile Picard qui était alors son élève, "*durant cette période, entre 1870 et 1880, l'activité de Darboux fut prodigieuse*" ([**Picard 1917**, xviii]).

Le Bulletin des Sciences constitue ainsi à la fois la victime et l'agresseur au regard des crimes d'influences dans lesquels le rédacteur est impliqué. Les interactions à l'œuvre sont complexes : le journal impacte son rédacteur tout autant que le rédacteur impacte, sous d'autres formes, son journal. En tant qu'instrument de rayonnement scientifique, le Bulletin est également utilisé par Darboux comme un outil qui lui permet de continuer sa promotion de l'Ecole Normale sur un autre terrain. L'analyse des collaborations a par ailleurs signalé, en lien avec la nature du contenu du journal, le caractère inéluctable de la séparation entre l'Astronomie et les Sciences Mathématiques. Enfin, dans sa gestion de ces collaborations et plus généralement du bon fonctionnement du journal, nous avons pu avoir un aperçu de la genèse de l'administrateur Darboux qui sera plus tard loué pour son rôle à la tête de grandes institutions comme la Sorbonne ou l'Académie des Sciences. Le Bulletin des Sciences a donc bien constitué pour son rédacteur en chef un accélérateur de vie sociale, un incubateur du développement de sa trajectoire institutionnelle ainsi qu'un puissant moteur de son changement scientifique.

Pour terminer ce chapitre, nous signalerons une ouverture intéressante que nous n'avons pu exploiter dans nos recherches. Nous avons étudié le virage vers l'analyse des intérêts scientifiques de Darboux, mis en évidence grâce à l'étude de la section de Mélanges. Nous continuerons par ailleurs, dans le chapitre suivant, à développer plus loin cette étude où nous mêlerons également les travaux relatifs à la théorie des équations différentielles. Néanmoins, des remarques analogues pourraient être faites et des études similaires effectuées dans le cadre du domaine de la Mécanique. L'importance accrue de cette matière est en effet pareillement ressortie de notre étude. Il serait donc intéressant d'effectuer en détail cette enquête de l'influence du Bulletin sur Darboux au regard de ses intérêts, ses recherches et ses productions dans le domaine de la Mécanique. Nous en avons déjà néanmoins quelques résultats : [**Lützen 1995**, 35-49] a en effet révélé l'influence très forte de Rudolf Lipschitz sur les travaux entrepris par Gaston Darboux après les années 1880 en lien avec la mécanique et la géométrie différentielle. Les travaux dont le nîmois s'inspire et auxquels sa recherche offre un prolongement sont dans ce domaine précisément les publications des années 1871-1873 de Lipschitz. Ce sont celles dont, nous l'avons vu, le rédacteur avait demandé et obtenu que l'allemand en écrive un résumé pour son Bulletin (voir 2.2). Là encore, le Bulletin des Sciences aura donc sans doute exercé une influence incontournable sur la trajectoire du Darboux mécanicien.

CHAPITRE 7

Des travaux stimulés par le Bulletin : nouveaux champs d'intérêt et contraste des réceptions

Le chapitre précédent a mis en lumière la diversification des centres d'intérêt scientifiques de Darboux au début des années 1870. Il a également permis de souligner l'importance de la fonction du Bulletin des Sciences dans cette diversification. De manière plus ou moins directe, le Bulletin stimule en effet chez son rédacteur des recherches nouvelles. Nous allons à présent analyser les retombées de ces recherches en terme de productions scientifiques d'abord, puis ensuite au regard de leur réception. Ceci nous permettra de retrouver "*l'empathie*" de Michel Locqueneux [1] qui sera à même de nous fournir une interprétation correcte du tournant crucial que prend le parcours de Darboux à la fin des années 1870. Sa trajectoire institutionnelle et son identité mathématique subissent en effet alors un bouleversement qui marque l'avènement d'une seconde carrière pour le nîmois : celle de l'influent *professeur-géomètre* dont on se remémorera. Car c'est de fait cette nouvelle carrière qui, par sa longévité, les travaux qu'elle comporte et le rayonnement de l'enseignement qu'elle voit prodiguer, aveugle le bilan rétrospectif qu'il est facile d'effectuer à propos de Gaston Darboux [2].

Dans ce chapitre, nous commencerons par reprendre la méthodologie globale de notre travail pour appréhender l'étude des travaux de Darboux déclenchés par le - ou grâce au - Bulletin des Sciences entre 1870 et 1877. Nous y analyserons, dans les nouveaux champs mathématiques qu'il parcourt, les atours de son identité scientifique : ses méthodes, ses approches et ses intérêts. Ceci nous permettra de dégager certaines facettes invariables du mathématicien dont les études traversent pourtant des domaines si variés. Nous y retrouverons notamment la capacité de recul critique et d'insatisfaction, très liée à l'opération de rapprochements entre les domaines et les problèmes mathématiques. Nous verrons cependant aussi les limites des approches et des travaux de Darboux sur des sujets qui ne sont plus au cœur de sa formation scientifique initiale.

La première partie (1) sera consacrée non plus à une théorie ou à un objet mathématique, comme c'était le cas dans nos études des premiers chapitres, mais à un théorème : le théorème des bornes. Nous verrons néanmoins que cette étude peut et devrait être regardée comme une histoire de l'émergence de la notion de bornitude. D'une certaine manière, il s'agit donc encore d'une *biographie d'un objet scientifique* ([**Daston 2000**]). A défaut de combler un vide historiographique - comme c'était le cas pour l'étude de la

1. Voir [**Locqueneux 2013**].
2. Voir la section 3.3, ainsi que notre Introduction Générale.

théorie des focales ([Chap.2]) - il s'agira plutôt ici comme nous le détaillerons ci-après de réexaminer une lecture historiographique existante. Le rôle et les travaux de Darboux liés au théorème des bornes nous offriront un support d'étude pertinent pour discuter l'ensemble de ses travaux d'analyse stimulés par le Bulletin. Une grande partie de ces travaux a déjà fait l'objet de recherches historiques sur lesquelles nous aurons loisir de nous appuyer ([**Henry Nabonnand 2016**], [**Gispert 1983**], [**Gispert 1990**]). Ils révéleront par ailleurs au-delà des simples méthodes mathématiques les limites du travail de Darboux : perméable à l'étude menée en Allemagne sur les fondements de l'analyse, le nîmois se révèle néanmoins tout à fait imperméable aux travaux relatifs à la construction des nombres réels. Enfin, cette partie sera propice à l'évaluation de l'influence des travaux de Darboux, avant même de s'intéresser plus loin à leur réception.

La seconde partie (2) sera par ailleurs l'occasion d'étudier les travaux effectués par Darboux dans le domaine de la théorie des équations différentielles. Les recherches du nîmois y étant très diverses, nous avons choisi de nous concentrer sur l'histoire de la théorie des solutions singulières. Cette histoire où les apports disruptifs de Darboux rompent avec la *doxa* mathématique, nous permettra de suivre à petite échelle les étapes du "*changement scientifique*" aux côtés de [**Barberousse et al. 2011**, Chap.V]. Là encore, le choix de la théorie des solutions singulières a été fait au regard de notre méthodologie d'ensemble pour appréhender au mieux ce qui caractérise son travail en le replaçant au fil de l'évolution des théories abordées. Outre retracer les contours de son identité scientifique, l'étude de cette théorie nous offrira la possibilité, tout comme l'étude précédente du théorème des bornes, de bien comprendre la réception, immédiate et à plus long terme, des travaux entrepris par Darboux sur la période 1870-1877. Une enquête consacrée à cette réception sera finalement développée dans la partie 3, laquelle nous conduira comme un épilogue vers le virage de 1878 dont elle mettra en lumière les ressorts.

Ce chapitre sera pour nous l'occasion d'aborder à nouveau des problématiques que nous avons déjà rencontrées et dont nous avons pour certaines détaillé des pistes d'étude dans les chapitres précédents. Ainsi, l'histoire du théorème des bornes (partie 1) sera encore le théâtre de péripéties liées au vocabulaire scientifique[3]. Le vocabulaire y acquerra, nous le verrons, une dimension révélatrice de la maturité des notions scientifiques émergentes. Le problème du vocabulaire ne sera que rapidement rencontré dans la seconde partie (voir 2.1). Nous serons également et presque constamment confrontés à la problématique de la diffusion du savoir dans la partie 1. Suivre et comprendre la diffusion des travaux de Bolzano à Weierstrass, puis des cours de Weierstrass dans et au dehors de sa salle de classe, nous a pour ainsi dire tout à fait passionné. Enfin, nous rencontrerons en regardant précisément l'état d'esprit avec lequel Darboux appréhende l'écriture de ses mémoires et les objectifs qu'il lui fixe, la problématique de la philosophie de la production scientifique écrite. Il ne s'agit pas ici d'analyser la philosophie de la création, à l'instar du chapitre [Chap.3], mais de distinguer le caractère définitif que le mathématicien souhaite donner à ses écrits. Ces-derniers doivent alors présenter les théories sous des formes absolument abouties. Si nous l'évoquerons dans les parties 2.1 et 3 pour les théories des solutions singulières et des fonctions, ceci rappelle également les circonstances de son écriture du mémoire sur les surfaces cyclides ([Chap.3,5]).

3. Nous avons mené une large étude de la problématique du lexique scientifique dans la partie [Chap.2,6] en lien avec les objets et les notions de la théorie projective des focales. Nous réutiliserons dans la partie 1 les outils de linguistique développés par [**Pinkal 1995**] que nous y avions détaillés.

1. L'analyse du théorème des bornes

1.1. Introduction et motivation historiographique.

Le théorème que nous nous proposons d'étudier dans cette section porte en français le nom de *théorème des bornes* (ou *théorème des bornes atteintes*). En allemand, cet énoncé est nommé *Extremwertsatz*, en italien *Teorema di Weierstrass*. Son énoncé stipule que l'image d'un compact par une application continue prenant ses valeurs dans un espace séparé est compacte. Plus simplement, pour les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ce théorème devient : *une fonction continue définie sur un intervalle fermé borné* $[a, b]$ *est bornée et atteint ses bornes.*

Comme l'indique sa dénomination italienne, ce théorème est unanimement porté au crédit du mathématicien allemand Karl Weierstraß. Les premières recherches historiques menées par Pierre Dugac ont d'ailleurs confirmé cette paternité mathématique. En étudiant le tout premier des cours disponibles de Weierstraß, le cours de *Differentialrechnung* de 1861 ([**Weierstrass 1861**]), l'historien français y a reconnu le théorème des bornes atteintes dès les toutes premières pages. Il affirmait ainsi :

> Page 3 [du cours], Weierstrass donne la définition d'une fonction continue qui est une simple application de la notion de variation infiniment petite. [...] Et, après avoir démontré [l]e théorème [des valeurs intermédiaires], il conclut (p.4), en traduisant en langage d'aujourd'hui, que l'image continue d'un compact est un compact.
>
> [**Dugac 1973**, 64]

La messe était dite pour les historiens, et ce théorème n'a en conséquence pas fait l'objet de nouvelles enquêtes. Les histoires de l'analyse et de la théorie des fonctions ont en effet systématiquement repris en l'état la version de Dugac ([**Dieudonné 1978**, 273], [**Bottazzini 1986**, 291], [**Gispert 1983**, 45], [**Lützen 2003**, 185], [**Bottazzini Gray 2013**, 396]). Il est possible que l'absence de nouvelles études ait néanmoins été liée au problème de source, puisqu'après les études de l'historien français, le manuscrit du cours de Weierstrass de 1861 conservé à l'Institut Mittag-Leffer a été perdu. Il a cependant été retrouvé en 2014 par le libraire de l'Institut, Mickael Ragstedt [4], ce qui nous a permis de soumettre l'article de référence de Pierre Dugac à une révision critique.

D'après nos études, l'énoncé de Dugac doit être réévalué : l'écart de traduction d'un terme crucial, *stetige Folge*, a faussé son interprétation. Dans le cours original du professeur de Berlin, la proposition de transfert de la *connexité* a été identifiée à tort par l'historien comme une proposition stipulant le transfert de la *compacité*. A l'aide de ces notions modernes, la distinction paraît aisée. Néanmoins, dans les notes de 1861, elle est plus ténue et tient dans l'interprétation du comportement des intervalles et de leurs bornes. Grâce à plusieurs apparitions dans les cours de Weierstrass du terme *stetige Folge*, nous avons pu nous assurer qu'il ne s'agissait nullement d'un intervalle *fermé borné*, mais uniquement d'un *intervalle*. Par conséquent, l'histoire du théorème des bornes se devait d'être réécrite.

4. Nous remercions très chaleureusement Mickael pour son aide précieuse. Sans ses efforts, ce pan de notre recherche n'aurait jamais vu le jour, "faute de preuve".

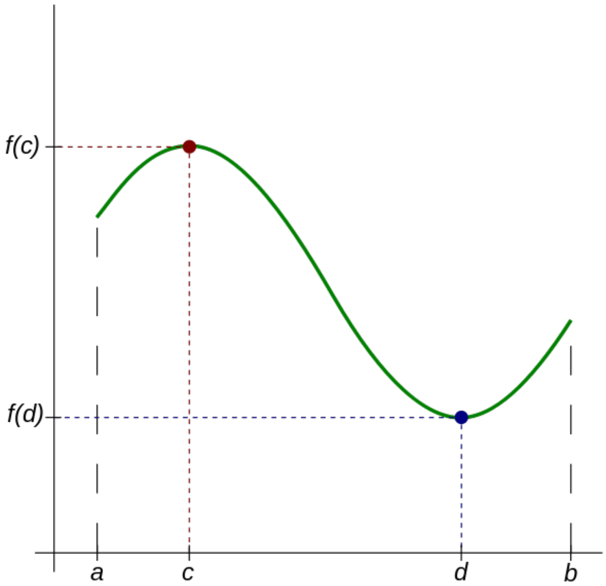


FIGURE 1. Le théorème des bornes (atteintes) : f, continue sur $[a, b]$, y est bornée et y atteint son maximum en c, et son minimum en d

Au-delà de l'évolution du théorème en lui-même, avoir placé son énoncé et sa démonstration dans les premiers cours de Weierstrass a masqué certains enjeux autour de la formation et de la signification de ce théorème. L'apparition de la distinction entre la bornitude et la finitude, la validité de la méthode de dichotomie, et donc la question de la construction et de la propriété de complétude des réels, le contour de ce qui est inclus dans la définition d'une fonction continue et *a contrario* de ce qui doit être démontré : ces enjeux mathématiques sont liés de très près au théorème des bornes. L'étude de celui-ci permet d'apporter un nouvel éclairage sur ces interrogations relatives à certains fondements de l'analyse. Ceci ressortira nettement de notre analyse des premiers cours de Weierstrass (voir 1.2).

Par ailleurs, une réévaluation concernant le théorème des bornes est nécessaire pour y comprendre et y inscrire le rôle de Gaston Darboux (voir 1.5). Sans une analyse complémentaire, Darboux semble ne pas intervenir dans une histoire dont la conclusion est déjà écrite en 1861. L'apport du mathématicien nîmois ne sera ainsi mis en valeur qu'en établissant l'état et l'évolution des connaissances, des pensées, des convictions et des démonstrations des mathématiciens au moment de ses travaux. Darboux s'inscrit à cet égard au cœur des pratiques des mathématiciens allemands dont il s'inspire et épouse les centres d'intérêt. Ses deux productions que nous évoquerons dans le cadre de notre enquête, [**Darboux 1872a**] et [**Darboux 1875b**], sont très nettement des "*travaux stimulés par le Bulletin des Sciences*" - pour faire référence au titre de notre chapitre. Le géomètre français s'y pare, provisoirement nous le verrons, des atours des analystes allemands. L'étude de la manière dont Darboux découvre le théorème des bornes atteintes, dans les quelques travaux laissant transparaître le contenu des cours de Weierstrass, nous permettra d'évaluer la diffusion du théorème dans sa version embryonnaire (voir 1.3).

Le rôle de Darboux quant à l'évolution du théorème des bornes révélera les forces et les faiblesses de son analyse mathématique. Rigoureux vis-à-vis des énoncés, critique envers la validité des démonstrations, il contribuera à distinguer très clairement les notions de bornitude et de finitude en dégageant séparément les deux conclusions du théorème et leur dépendance. Pour montrer que les bornes sont atteintes, Darboux souligne qu'il est nécessaire que ces bornes existent et soient finies. Ce point de vue contraste avec celui de Karl Weierstrass que nous aurons analysé au préalable (voir 1.4). Cette exigence relative à la séparation entre finitude et bornitude se retrouve par ailleurs dans les modifications, légères mais significatives, que Darboux effectue lors de sa traduction du mémoire de Riemann sur la définition de l'intégrale ([**Riemann 1854a**]). Pourtant, Darboux ne se penchera jamais sur la preuve de ce qui constitue la première conclusion de l'énoncé moderne du théorème : la finitude des bornes supérieure et inférieure. Ceci permet de révéler une des limites de son approche des fondements de l'analyse. En effet, le mathématicien nîmois se désintéresse du problème de la construction des nombres réels. Dans ce cadre, il est symptomatique qu'il n'envisage pas l'étude de la finitude des bornes puisque cette étude est fortement reliée à la théorie des nombres réels. Seule la seconde conclusion du théorème, à savoir l'atteinte effective des bornes, fera pour lui l'objet de démonstrations.

Une histoire précise du théorème des bornes nous permettra de déterminer les répercussions de l'approche apportée par Gaston Darboux sur l'évolution du théorème d'un point de vue mathématique. Mais cela nous offrira en outre un moyen d'appréhender l'influence de ses travaux, en France comme à l'étranger. Nous n'en étudierons que plus loin la réception (section 3). Nous verrons également, bien sûr, le rôle incontournable de Karl Weierstrass dans la genèse et l'évolution du théorème des bornes. Nous mettrons néanmoins en évidence les lacunes de son approche (voir 1.4) et l'entrave que représentera leur diffusion dans l'évolution du théorème vers sa forme définitive (voir 1.6).

1.2. Les cours de Weierstrass avant 1870.

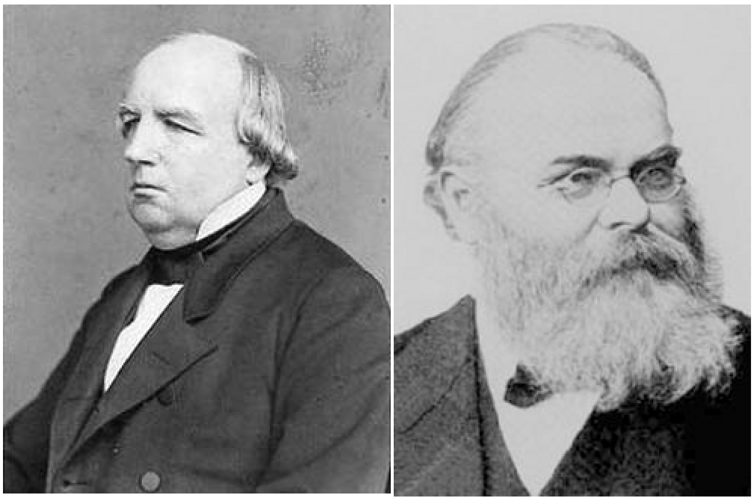


FIGURE 2. Karl Wilhelm Weierstrass (à gauche) et Hermann Amandus Schwarz (à droite)

Karl Wilhelm Weierstrass naît à Ostenfelde en Westphalie le 31 Octobre 1815. Aîné d'une famille de quatre enfants, il perd sa mère à l'âge de 11 ans alors que sa dernière sœur, Elise, n'a que quelques mois. C'est à Westernkotten que Karl passera ensuite son enfance, où son père emménage pour travailler dans les salines [5]. Après être allé à l'école à Münster, Karl Weierstrass fréquente le lycée (*Gymnasium*) de Paderborn entre 1829 et 1834. Il s'y montre aussi doué en mathématiques que pour l'apprentissage des langues étrangères. Pourtant, sur les conseils de son père c'est vers le droit que le jeune étudiant décide alors d'orienter sa formation. Il part ainsi pour l'Université de Bonn en vue d'effectuer des études de caméralisme. Influencé par la lecture du "*Journal für die reine und angewandte Mathematik*" qui paraît à Berlin, ainsi que par les cours de Gudermann et de Plücker, il décide finalement en 1838 d'abandonner le droit pour se dédier aux études mathématiques.

Aidé par son maître Gudermann, il obtient en 1841 le diplôme qui lui ouvre les portes du professorat. Malgré ses travaux sur les fonctions elliptiques loués par Gudermann lui-même, Weierstrass doit enseigner dans différents lycées : Deutsch Krone en 1842, puis Braunsberg en 1848. Ce n'est qu'en 1854 que sa vie scientifique bascule, avec la publication dans le Journal de Crelle d'un résumé de ses recherches personnelles sur les fonctions elliptiques. Weierstrass devient alors subitement célèbre et plusieurs universités tentent de s'attacher ses services. C'est vers l'Université de Berlin qu'il se dirigera en 1856, une Université qu'il ne quittera plus de toute sa carrière. Aux côtés de Leopold Kronecker et d'Eduard Kummer, il y formera un trio dont l'enseignement - à travers les cours mais aussi le séminaire créé en

5. Karl Weierstrass partage là un point commun avec Charles Hermite, l'un de ses plus grands admirateurs qui l'appellera "*le Grand Législateur des Mathématiques*" : leurs pères ont travaillé dans les salines.

1861 - gagnera une influence considérable dans le monde mathématique [6]. La liste des cours qu'il donnera à l'Université de Berlin est disponible dans [**Weierstrass 1903**, 355-360].

Hermann Amandus Schwarz naît à Hemsdorf, dans l'actuelle Pologne, le 25 Janvier 1843. Après des études à Dortmund, Schwarz arrive à Berlin à l'âge de 18 ans pour y étudier la chimie au *Gewerbeinstitut*. Sous l'influence de Kummer et de Weierstrass, le jeune étudiant modifie l'orientation de ses études pour les concentrer sur les mathématiques. En particulier, Hermann Schwarz assiste durant le semestre d'été de 1861 au cours de Calcul Différentiel dispensé par Weierstrass. Ce sont ses notes qui constituent la première archive [**Weierstrass 1861**] des leçons du maître analyste, où est exposée sa théorie des fonctions de la variable réelle. Schwarz deviendra docteur en 1864 sous la direction de Kummer ([**Biermann 1988**, 352]). Il restera à Berlin trois années supplémentaires pour recevoir son *Habilitation*, c'est-à-dire être habilité à enseigner dans le supérieur. Il commencera ses enseignements à Halle aux côtés d'Eduard Heine entre 1867 et 1869 comme *Privatdozent*, avant de partir pour Zürich où l'ETH (Eidgenössische Technische Hochschule) lui offre son premier poste de professeur [7].

Le cours de 1861 [8]

L'analyse du cours de 1861 de Karl Weierstrass revêt une importance particulière puisqu'il s'agit de mettre en évidence l'absence du théorème des bornes de son contenu. De manière générale, il est plus aisé de démontrer la présence de contenu que l'absence de contenu. Cependant, c'est en ciblant d'une part l'erreur d'interprétation de [**Dugac 1973**], puis en soulignant d'autre part les lacunes révélées dans ce cours quant aux distinctions entre finitude et bornitude, que nous pourrons vérifier le bien-fondé de notre proposition de révision historiographique.

La première définition du cours de Weierstrass est relative à la notion de variable (*veränderliche Grösse*). Le concept de *fonction* en découle, en tant que relation entre deux variables. Il est d'ailleurs remarquable que puisque la notion de variable est caractérisée par le parcours d'un nombre infini de valeurs, les constantes n'y sont pas considérées comme des fonctions ([**Weierstrass 1861**, 1,21]) [9]. Mais avant même la définition d'une fonction, Weierstrass introduit la notion de *stetige Folge* de la manière suivante :

> Les valeurs que peut prendre une variable peuvent appartenir à une ou à plusieurs *stetigen Folgen* [10].
>
> [**Weierstrass 1861**, 1]

6. Pour plus de détails sur la vie de Karl Weierstrass, voir [**Bölling 1994**] et [**Biermann 1966**].
7. Pour plus de renseignements sur H.A. Schwarz, on consultera [**Bölling 1998**].
8. Nous rappelons que le manuscrit dactylographié du cours de 1861 de Weierstrass, écrit par Hermann Schwarz, se trouve dans les archives de l'Institut Mittag-Leffler de Djursholm en Suède.
9. Dans sa démonstration du théorème de Rolle, Weierstrass rappelle que pour la fonction continue f qui s'annule sur les bords de son intervalle de définition $[x_1, x_2]$, il existe nécessairement un argument x_3 tel que $f(x_3) \neq 0$, "*sonst wäre $f(x)$ eine Constante und nicht eine Funktion von x*" ([**Weierstrass 1861**, 21]).
10. "*Die Werte, welche eine veränderliche Grösse annehmen kann, können einer oder mehreren stetigen Folgen angehören*" [**Weierstrass 1861**, 1]. Nous laissons intentionnellement le terme "*stetige Folge*" sans traduction ici, son sens précis étant l'un des enjeux de notre enquête.

Weierstrass définit alors la continuité d'une fonction grâce à un formalisme $\varepsilon - \delta$ qui le caractérisera bientôt. Il énonce ensuite très clairement le théorème des valeurs intermédiaires, et le démontre d'une manière bien moins satisfaisante que ne l'avait fait le mathématicien bohémien Bernhard Bolzano dans un certain anonymat presque un demi-siècle auparavant ([**Bolzano 1817**]). C'est ensuite comme un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que Weierstrass remarque :

> Les valeurs qu'une fonction continue peut prendre appartiennent donc également a une *stetige Folge*, ce qui justifie sa dénomination. [11]
>
> [**Weierstrass 1861**, 4]

Comme nous l'avons souligné dans la section précédente, Pierre Dugac a interprété cette remarque de Weierstrass comme "*traduisant en langage d'aujourd'hui que l'image continue d'un compact est un compact*" ([**Dugac 1973**, 64]). Ce-faisant, l'historien français a identifié la notion de *stetige Folge* avec celle d'*intervalle fermé borné*, qui correspond aux parties connexes et compactes de $\mathbb{R}$.

Plusieurs éléments mettent en défaut cette proposition de traduction. Tout d'abord, d'un point de vue mathématique, le théorème des valeurs intermédiaires ne stipule que le transfert par continuité de la propriété de *connexité* - c'est-à-dire le passage d'un intervalle à un autre intervalle. Il n'est nullement relié à la nature de l'intervalle (fermeture, bornitude), donc à la propriété de *compacité*. Ensuite, on trouve dans les cours ultérieurs de Weierstrass des définitions ou des énoncés dans lesquels la définition de la notion de *stetige Folge* apparaît sans détour comme correspondant à la notion d'*intervalle*. Dans le cours de 1866, le professeur de Berlin définit :

> Si x_1, x_2 sont deux valeurs (réelles) de la variable x, telles que cette variable peut prendre toutes les valeurs intermédiaires, alors nous dirons que les valeurs de x forment une *stetige Folge*. [12]
>
> [**Weierstrass 1866**, 7]

Il s'agit donc ici très clairement de la définition de l'intervalle, l'élément réel de référence possédant la propriété de connexité. Dans son cours de 1874, Weierstrass définit un *Continuum* dans le domaine complexe à l'aide de la notion de *stetige Linie*. Une région du plan complexe est pour lui un *Continuum* si :

> de tout point de la région à tout autre second point de cette région il est possible de tracer une *stetigie Linie* ininterrompue qui reste tout entière à l'intérieur de la région [13].
>
> [**Weierstrass 1874**, 185]

On constate encore ici que c'est la propriété de connexité (par arcs) qui est invoquée. Finalement, dans la dernière des leçons que nous analyserons ici - celle de 1886 -, Weierstrass aborde la connexité des réels d'un point de vue géométrique :

11. "*Die Werte, welche eine continuirliche Funktion annimmt oder annehmen kann gehören auch einer stetigen Folge an ; daher rechtfertigt sich ihre Benennung.*" [**Weierstrass 1861**, 4]
12. "*Sind x_1, x_2 zwei beliebige (reelle) Werthe der Veränderlichen x, und kann dieselbe alle zwischenliegende annehmen, so sagen wir : die Werthe von x bilden eine stetige Folge.*" [**Weierstrass 1866**, 7]
13. "*wenn es möglich ist, von jedem Punkte zu jedem anderen Punkte eine stetige ununterbrochene Linie so zu ziehen, dass sie ganz im Innern des Bereiches verläuft.*" [**Weierstrass 1874**, 185]

> Nous supposerons que si C appartient à l'ensemble de points considéré, alors tout point situé entre A et C appartient encore à ces points. Ceci n'est rien d'autre que convenir que ces points forment une *stetige Folge*, de sorte qu'il est clair que si deux points C et C' n'appartiennent pas aux points considérés, alors aucun des points entre C et C' ne leur appartient. [14].
>
> [**Weierstrass 1886**, 62]

Toutes ces expressions concordent : le terme de *stetige Folge* fait référence à ce que nous appelons un ensemble connexe. Sa traduction, dans le cadre de $\mathbb{R}$, doit donc être : *intervalle*. Aucune propriété n'est reliée à ce terme quant à la nature des bornes de l'intervalle, dûssent-elles être finies ou infinies, incluses ou exclues. Par conséquent, l'affirmation de Pierre Dugac nécessite une réévaluation que nous nous proposons d'effectuer ici.

De manière globale, le contenu du cours présenté en 1861 par Weierstrass est bien éloigné, du point de vue de la rigueur et des outils mathématiques, de l'énoncé du théorème des bornes atteintes. Weierstrass n'y utilise ni la méthode de dichotomie, ni la notion de borne supérieure. Tout porte à croire qu'il ne possède pas encore ces outils qu'il ne découvrira qu'à la lecture du travail de [**Bolzano 1817**], quelques années plus tard. C'est surtout la preuve peu soignée du théorème des valeurs intermédiaires qui révèle ceci.

Nous allons nous pencher, dans le contenu du cours de Weierstrass, sur le théorème des accroissements finis ainsi que sur un théorème proche de ce que nous nommons la règle de l'Hospital. Ceci nous permettra de fixer l'état de la théorie weierstrassienne, en 1861, au regard des notions impliquées dans le théorème des bornes : continuité, bornitude, atteinte des bornes. L'énoncé du théorème des accroissements finis de Weierstrass débute comme ceci :

> Si une fonction $f(x)$ et sa dérivée première $f'(x)$ sont continues pour toutes les valeurs de l'argument entre les limites x_1 and x_2, alors il doit y avoir parmi toutes les valeurs que la dérivée peut prendre lorsque x reste dans l'intervalle considéré, une plus grande et une plus petite valeur. Soit A la première, B la seconde ; [...] [15].
>
> [**Weierstrass 1861**, 25]

Ce que nous devons souligner ici, c'est le fait que la bornitude de la fonction continue f' est considérée comme une évidence. Aucun énoncé n'a ainsi au préalable établi ce point. En outre, la nature de l'intervalle considéré n'est pas spécifiée. La formulation utilisée par Weierstrass "*valeurs entre les limites x_1 et x_2*" reste vague à ce sujet. Aussi le fait que la fonction f' soit bornée ne dépend pas, pour Weierstrass, des propriétés de l'intervalle de définition. En ce qui concerne l'éventuelle atteinte des bornes, nous trouvons dans la suite du déroulement de la preuve :

14. "*Man nimmt an, daß, wenn C zu den definierten Punkten gehört, auch jeder Punkt zwischen A und C dazu gehört. Dies heißt nichts anderes, als daß diejenigen Punkte, die hier in Betracht gezogen werden, eine stetige Folge bilden, und es ist dann klar, daß, wenn zwei Punkte C und C' nicht zu den definierten gehören, auch kein Punkt zwischen C und C' zu den definierten gehören.*" [**Weierstrass 1886**, 62]

15. "*Ist eine Funktion $f(x)$ mit ihrer ersten Ableitung $f'(x)$ kontinuirlich für alle Werte des Arguments innerhalb der Grenzen x_1 und x_2, so muss es unter allen Werten, welche die Ableitung annehmen kann, so lange x in dem bezeichneten Intervall bleibt, einen grössten und einen kleinsten geben. Der erste sei A, der zweite B ; [...]* " [**Weierstrass 1861**, 25]

> Soit α la valeur de l'argument pour lequel la fonction prend sa plus grande valeur, β celui pour lequel elle prend celle la plus faible. C'est-à-dire soit $f'(\alpha) = A$, $f'(\beta) = B$ [...][16]
>
> [**Weierstrass 1861**, 26]

Tout comme le caractère borné de la fonction f', l'atteinte des bornes extrêmes apparaît ici comme une évidence. En dépit de l'absence de théorème précis à ce sujet, le fait que f' atteigne effectivement sa plus grande et sa plus petite valeur est considéré comme acquis. Un peu plus loin dans la démonstration, Weierstrass précisera que α et β sont "*entre* x_1 *et* x_2", là encore sans donner plus de détail quant à l'inclusion (ou non) de ces bornes.

Les notions mises en jeu dans l'énoncé du théorème des bornes sont donc considérées comme évidentes par Weierstrass pour les fonctions continues. La bornitude et l'atteinte des bornes ne sont absolument pas regardées comme devant faire l'objet d'un théorème. Mais dans la preuve de l'extension de la règle de l'Hospital[17], nous trouvons l'emploi des mêmes usages - relatifs à la bornitude et à l'atteinte de bornes - sans même le lien avec la continuité. Retranscrit avec une écriture mathématique moderne, l'énoncé du théorème que Weierstrass entend démontrer est le suivant :

$$\text{Soit } (f,\phi) \in \mathcal{C}^n_{(I)},\ x_0 \in I,\ \forall\, 0 \le k \le n-1,\ f^{(k)}(x_0) = \phi^{(k)}(x_0) = 0,\ 0 \notin \phi^{(n)}(I)$$

$$\text{Alors} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{\phi^{(n)}(x_0)}$$

Le cas de la règle classique de l'Hospital correspond ici à $n = 1$. C'est en analysant ce cas précis que Weierstrass entame sa démonstration. Les éléments de sa preuve sont alors :

> $\phi'(x)$ ne prend pas la valeur 0 dans le voisinage (*Umgebung*) de x_0. De sorte que le quotient $\dfrac{f'(x)}{\phi'(x)}$ prend des valeurs bien définies en fonction de l'argument situé dans le voisinage de x_0. Soit A la plus grande valeur et B la plus faible valeur de $\dfrac{f'(x)}{\phi'(x)}$, que cette fonction peut prendre pour de telles valeurs de l'argument entre x_0 et x_1. Ainsi $\dfrac{f'(x)}{\phi'(x)} - A$ ne sera jamais positive, et $\dfrac{f'(x)}{\phi'(x)} - B$ jamais négative [...]
>
> Il doit alors exister une valeur $x = \alpha$ qui n'est pas située en-dehors des limites x_0 et x_1, et de même une valeur $x = \beta$, telle que la fonction $\dfrac{f'(x)}{\phi'(x)}$ prenne pour $x = \alpha$ la valeur A, et pour $x = \beta$ la valeur B. Donc lorsque x varie depuis α jusqu'à β, la fonction $\dfrac{f'(x)}{\phi'(x)}$ va prendre toutes les valeurs entre B et A au moins une fois puisque selon nos théorèmes

16. "*Es sei nun α derjenige Wert des Arguments, für den die Ableitung den grössten und β derjenige Wert, für den sie den kleinsten Wert annimmt. Es sei also $f'(\alpha) = A$, $f'(\beta) = B$ [...]* " [**Weierstrass 1861**, 26]

17. Guillaume-François-Antoine de l'Hôpital (1661-1704) était un Marquis parisien qui s'attacha les services de Johann Bernoulli pour obtenir une éducation mathématique. Il publiera, résultat de ses leçons privatives, l'ouvrage *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* pour lequel il reste célèbre.

> précédents, en tant que quotient de deux fonctions continues et en vertu de l'hypothèse effectuée sur la non nullité de $\phi'(x)$, elle est également continue.[18]
>
> [**Weierstrass 1861**, 27-28]

Quelque chose d'essentiel dans la compréhension des mathématiques de Weierstrass ressort donc de cette preuve de 1861 : la bornitude et l'atteinte des bornes ne sont pas seulement considérées comme acquises pour les fonctions continues. Elles le sont pour toute fonction bien définie. C'est en effet uniquement en remarquant que $\dfrac{f'(x)}{\phi'(x)}$ est bien définie - ce qui signifie que le quotient ne prend pas la valeur $\pm\infty$ - que Weierstrass conclut à l'existence de bornes, puis naturellement à leur atteinte effective. L'argument de continuité n'est invoqué qu'ultérieurement, étant seulement relié à la propriété des valeurs intermédiaires. L'amorce de l'étude du cas $n = 2$ commence d'ailleurs par la formulation on ne peut plus claire :

> ainsi $\dfrac{f'(x)}{\phi'(x)}$ a une valeur finie pour chaque valeur de l'argument, donc il [le quotient] a à l'intérieur de l'intervalle considéré une plus grande et une plus petite valeur[19]
>
> [**Weierstrass 1861**, 29]

Nous pouvons ainsi conclure à propos du cours de 1861 de Weierstrass que non seulement le théorème des bornes n'y apparaît pas, mais que le professeur de Berlin présente même quelques idées fausses relativement aux notions qui sont liées à cet énoncé. Le caractère borné ainsi que l'atteinte des bornes sont ainsi considérés comme des acquis pour les fonctions bien définies. Outre les exemples que nous avons détaillés, on retrouve cette conception à plusieurs reprises dans le cours[20]. Weierstrass ne possède alors ni l'outillage mathématique lié au théorème (notion de borne supérieure, méthode de dichotomie) ni la disposition d'esprit rendant nécessaire l'énoncé d'un tel théorème.

Ceci doit être souligné puisque Pierre Dugac, après avoir cru reconnaître la présence de l'énoncé du théorème des bornes ([**Dugac 1973**, 64]) a par la suite souligné à diverses reprises que cet énoncé n'était pas suivi d'une preuve ([**Dugac 1980**, 95], [**Dugac 2003**, 131]). Selon nous, l'accent ne doit pas être placé sur l'absence de preuve. Il doit en revanche

18. "*$\phi'(x)$ [wird] in der Umgebung von x_0 für keinen Wert des Arguments gleich Null. So hat der Quotient $\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$ einen ganz bestimmten Wert des Arguments, der in der Nähe von x_0 liegt. Es sei A der grösste, B der kleinste Wert von $\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$, den diese Funktion für solche Werte des Argumentes zwischen x_0 und x_1 annehmen kann. So wird $\frac{f'(x)}{\phi'(x)} - A$ nie positiv, $\frac{f'(x)}{\phi'(x)} - B$ nie negativ werden können, [...] Nun muss es einen solchen Wert von $x = \alpha$ geben, der nicht ausserhalb der Grenzen x_0 und x_1 liegt, und ebenfalls einen solchen Wert von $x = \beta$ geben, sodass die Funktion $\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$ für $x = \alpha$ den Wert A und für $x = \beta = B$ wird. Wenn also x von α bis zu β übergeht, so wird die Funktion $\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$, da sie als Quotient zwei stetiger Funktionen nach früheren Sätzen stetig ist, und $\phi'(x)$ nach der Voraussetzung nicht gleich Null werden soll, alle Werte zwischen B und A jeden wenigstens einmal annehmen.*" [**Weierstrass 1861**, 27-28]

19. "*[...] so hat $\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$ für jeden Wert des Arguments einen endlichen Wert, hat also innerhalb des betrachten Intervalls einen grössten und einen kleinsten Wert [...]*" [**Weierstrass 1861**, 29]

20. On verra par exemple le théorème de Taylor avec reste intégral (dit de Lagrange) [**Weierstrass 1861**, 36].

être mis sur l'absence de l'énoncé, et surtout sur l'absence de prise de conscience de la nécessité de cet énoncé.

Une courte section du cours de 1861 est dédiée à l'étude globale des extrema des fonctions ([**Weierstrass 1861**, 30-33]). Néanmoins, cette partie est consacrée aux fonctions continûment dérivable, et l'enjeu y est de caractériser les extrema selon les valeurs de la dérivée. Aucune propriété n'est mise en avant via la seule continuité : tout est axé sur la dérivée. Par ailleurs, il ressort de cette brève étude la conception de ce que Weierstrass appelle *maximum*, et qui doit être distingué en deux points de la *plus grande valeur*. Selon ses définitions, le maximum d'une fonction est un maximum *local* qui se situe dans *l'intérieur* du domaine de définition de la fonction. Au contraire, la *plus grande valeur* d'une fonction correspond à un comportement global. Aucune restriction n'est alors faite quant à l'inclusion (ou non) des bornes de l'argument.

Le cours de 1866

Les cours donnés par Weierstrass à l'Université de Berlin étaient établis selon un cycle de deux ans, soit quatre semestres [21]. C'est dans le premier de ces cours, souvent intitulé *Introduction à la théorie analytique des fonctions*, que se trouveront systématiquement exposés les fondements de la théorie des fonctions de Weierstrass, et en particulier pour la variable réelle. Néanmoins, la finalité du cursus était bien l'étude des fonctions elliptiques et abéliennes. C'est donc la variable complexe qui, très tôt, prédominait dans les leçons du maître allemand.

Durant le semestre d'hiver 1865-66, Weierstrass débute son cycle de cours avec des leçons intitulées "*Théorie des fonctions analytiques*". Le manuscrit de Moritz Pasch, alors son élève, a été conservé dans ses *Nachalass* à Gießen ([**Weierstrass 1866**]). Lorsqu'on le compare aux autres cours de Weierstrass dont nous possédons des archives (1861, 1868, 1874, 1878, 1886), il en ressort que ce cours a été sensiblement moins étudié par les historiens. Ceci contraste pourtant totalement avec sa richesse : notation de la valeur absolue (et du module des complexes), notion de borne supérieure, méthode de dichotomie, propriété d'accumulation dite de Bolzano-Weierstraß... Tous ces trésors apparaissent dans le cours de 1865-66 de Karl Weierstrass. Celui-ci s'est alors approprié les méthodes de preuve (*Schlußweise*) du mathématicien bohémien Bernhard Bolzano [22].

La définition de la continuité d'une fonction est, dans le cours de 1866 de Weierstrass, immédiatement suivie de celle de la borne supérieure (*obere Grenze*). A l'instar de

21. Voir [**Weierstrass 1903**] pour la liste des cours. Voir également [**Ullrich 1989**, 146-8] pour obtenir une chronologie des cours débutant ces cycles ainsi qu'une liste des archives connues et disponibles de ces leçons.

22. A propos de Bolzano, voir [**Russ 2010**]. La question de la transmission du savoir entre Bolzano et Weierstrass est une problématique qui nous a passionnés, mais que nous regrettons ne pas pouvoir développer ici avec l'amplitude qu'elle mérite. Toujours est-il que le décalage entre les discours de 1864 entre Weierstrass, Kronecker et Casorati (voir la section 1.7) et le cours [**Weierstrass 1866**] nous a permis d'établir précisément que la prise de connaissance par Weierstrass du travail [**Bolzano 1817**] datait de 1865. Par ailleurs, l'impact de cet apprentissage a été très fort sur les fondements de la théorie des fonctions de Weierstrass. Cette influence et le rôle important de Bolzano ont trop souvent été sous-estimés par les historiens ([**Lützen 2003**, 176], [**Bottazzini 1986**, 124]).

[Bolzano 1817] dont il s'inspire, le professeur de Berlin en restreint la définition à une partie bornée de $\mathbb{R}$:

> Soit x une variable réelle [...] on suppose que x reste positive sans pour autant pouvoir devenir aussi grande que l'on veut, il y a donc toujours un nombre positif b tel que toutes les valeurs de x soient inférieures à b. On prend en outre $\frac{x}{b} = u$, alors $0 \leq u < 1$. On divise la ligne de 0 à 1 en n intervalles égaux, et soit l'intervalle de $\frac{m}{n}$ à $\frac{m+1}{n}$ le dernier intervalle dans lequel des valeurs de u sont encore présentes. Dans ce cas on pose $\frac{m}{n} = a_n$. On obtient alors évidemment $a_{2n} = a_n + \dfrac{\varepsilon}{2n}$ avec $\varepsilon = 0$ ou 1. En procédant de cette manière, on définit la suite ("*Reihe*") suivante : $a_2 = \dfrac{\varepsilon_1}{2}$, $a_4 = a_2 + \frac{\varepsilon_2}{4}$, $a_8 = a_4 + \frac{\varepsilon_3}{8}$,... où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1. Alors la série ("*Reihe*") $\dfrac{\varepsilon_1}{2} + \dfrac{\varepsilon_2}{4} + \dfrac{\varepsilon_3}{8} + ...$ possède une somme a et l'on peut prouver qu'aucune valeur de u n'est supérieure à a et que si l'on choisit un nombre a' aussi proche de a que l'on souhaite, au moins une valeur de u se trouvera entre a' et a. Nous appelons ce nombre a la borne supérieure ("*obere Grenze*") de u.[23]
>
> [Weierstrass 1866, 7]

La manière dont procède Weierstrass pour définir la borne supérieure d'un ensemble de valeurs réelles bornées est tout à fait similaire à celle présentée par [Bolzano 1817]. S'il évoque la possibilité d'effectuer des subdivisions en n intervalles, les termes de la somme qu'il finit par utiliser révèlent que Weierstrass préfère utiliser la dichotomie de manière classique, c'est-à-dire avec des subdivisions en deux parties. Il envisage en fait toutes les subdivisions possibles, mais ne conserve que celles qui formeront une progression géométrique de raison 2. La convergence de la méthode de dichotomie, ou plutôt de la somme de la série qui en découle, permet au professeur de Berlin de définir rigoureusement cette nouvelle notion. Il la nomme alors *obere Grenze* : il s'agit de la toute première apparition de cette dénomination.

La définition, la preuve d'existence et l'usage de la notion de borne supérieure par Karl Weierstrass avaient été datés par les historiens entre 1868 et 1870. Pierre Dugac avait par ailleurs affirmé :

> Il apparaît qu'avant 1866 Weierstrass n'avait pas de démonstration de [ce théorème] comme le révèle l'examen du cours [...] de 1865-66, rédigé par M. Pasch.
>
> [Dugac 2003, 131]

Ces affirmations doivent ainsi également être réévaluées à la lumière de notre étude. Dès le semestre d'hiver de 1865-66, Weierstrass possédait bien les outils mathématiques

23. "*Es sei x eine reelle veränderliche Größe [...] x sei stets positiv und kann nicht beliebig groß werden, so giebt es einen positiven Zahl b von der Art, daß allen Werthen von x kleiner als b sind. Ist sogar $\frac{x}{b} = u$, so ist $0 \leq u < 1$. Theilt man die Strecke von 0 bis 1 in n gleiche Intervalle, so sei das Intervall von $\frac{m}{n}$ bis $\frac{m+1}{n}$ das letzte, in welchem Werthe von u vorkommen. In diesem Fall setzen wir $\frac{m}{n} = a_n$. Dann ist offenbar $a_{2n} = a_n + \frac{\varepsilon}{2n}$, wo $\varepsilon = 0$ oder $= 1$ ist. Auf dieser Weise wird folgende Reihe bestimmt : $a_2 = \frac{\varepsilon_1}{2}$, $a_4 = a_2 + \frac{\varepsilon_2}{4}$, $a_8 = a_4 + \frac{\varepsilon_3}{8}$,... wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ entweder 0 oder 1 sind. Die Reihe $\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{4} + \frac{\varepsilon_3}{8} + ...$ hat nun eine Summe a, und man kann zeigen, daß kein Werth von u grösser als a ist, und daß es, wie nahe von a man auf einen Zahl a' annehmen mag, zwischen a' und a wenigstens einen Werth von u giebt. Diese Zahl a nennt man die obere Grenze von u.* " [Weierstrass 1866, 7]

développés par Bolzano : la méthode de dichotomie et son usage pour la définition de la notion de borne supérieure.

Dans son cours de 1866, Weierstrass utilise ces nouveaux outils mathématiques pour démontrer une propriété essentielle que, faute de dénomination appropriée, nous appellerons la *propriété d'encadrement*. Il s'agit d'encadrer pour une fonction réelle de la variable réelle, les antécédents dans un intervalle aussi petit que l'on souhaite, de sorte que la fonction y conserve la même borne inférieure (ou supérieure) que sur l'intervalle tout entier. Weierstrass définit ceci de la manière suivante :

> Soit u une variable réelle comprise entre 0 et 1, et t une seconde variable reliée à u de sorte qu'à chaque valeur de u corresponde une valeur de t. Nous supposerons que la borne inférieure de t est égale à 0. Divisons à présent le segment de 0 à 1 en n intervalles égaux, alors il y en a un parmi eux qui possède la propriété que les valeurs de t pour les valeurs de u correspondantes ont encore 0 pour borne inférieure. Supposons que cet intervalle soit le (m+1)ème, posons $\frac{m}{n} = a_n$. Alors on a $a_{2n} \geq a_n$. Ainsi, il y a parmi les n nombres entiers qui suivent au moins un, disons p, tel que $a_p \geq a_n$. La même propriété est valable sur g par rapport à p etc... Posons alors $a_p - a_n = \alpha_1$, $a_g - a_p = \alpha_2$, ..., de sorte que la série $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ...$ possède une somme α, et nous posons alors $a_n + \alpha = a$. On peut alors facilement prouver que pour tout δ si petit soit-il, il existe des valeurs de u entre $a - \delta$ et $a + \delta$, et que les valeurs de t correspondantes ont encore 0 pour borne inférieure. [24]
>
> [**Weierstrass 1866**, 7]

Remarquons que, à notre connaissance, ces extraits [**Weierstrass 1866**, 7-8] du cours du mathématicien allemand où apparaissent la notion de borne supérieure et la *propriété d'encadrement* n'ont jamais été étudiés ou même simplement évoqués dans l'historiographie. Et pourtant, ce dernier énoncé et sa preuve sont remarquables à plusieurs titres. Tout d'abord, il s'agit de la première propriété qui relie la notion de borne supérieure aux valeurs d'une fonction. En effet, la borne supérieure n'était jusqu'alors définie que pour une plage de valeurs réelles. Avec la propriété d'encadrement, Weierstrass montre que l'on peut encadrer aussi précisément que l'on souhaite un argument autour duquel la borne inférieure (ou supérieure) d'une fonction reste inchangée. La notion de continuité n'intervient pas ici. Par ailleurs, sans que Weierstrass ne le souligne, le caractère borné de l'ensemble de définition - ici $[0, 1]$ - intervient dans la validité du raisonnement par dichotomie. Mais cette démonstration doit aussi être regardée comme unique par les historiens puisqu'il s'agit du premier usage de l'extraction d'une sous-suite (ou suite extraite) convergente. Le professeur

24. "*Es sei u eine reelle veränderliche Größe,die stets zwischen 0 und 1 liegt, und t eine zweite mit ihr so verbunden, daß zu jedem Werthe von u ein Werth von t gehört. Es werde nun vorausgesetzt, daß der absolute Bertrag von t die untere Grenze 0 hat. Theilt man die Strecke von 0 bis 1 in n gleiche Intervalle, so giebt es ein von diesen derart, daß die Werthe von t für die entsprechende Werthe von u die untere Grenze 0 haben. Ist dies das (m+1)te, so setzen wir* $\frac{m}{n} = a_n$. *Dann ist* $a_{2n} \geq a_n$. *Folglich giebt es unter den auf n folgenden ganzen Zahlen ein, sage p, derart, daß* $a_p \geq a_n$. *Dieselbe Eigenschaft hat g im Bezug auf p, u.s.f. Es sei* $a_p - a_n = \alpha_1$, $a_g - a_p = \alpha_2$, *..., so hat die Reihe* $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ...$ *eine Summe* α, *und wir setzen* $a_n + \alpha = a$. *Man zeigt nun leicht, daß es, wie klein auch* δ *sei, zwischen* $a - \delta$ *und* $a + \delta$ *Werthe von u giebt, und daß die untere Grenze der zugehörigen Werthe von t Null ist.*" [**Weierstrass 1866**, 7]

berlinois utilise en effet, à partir de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'extraction d'une sous-suite monotone (croissante) qui convergera puisqu'elle reste inférieure à l'unité [25].

La preuve de cette propriété d'encadrement montre que Weierstrass sait articuler la méthode de dichotomie autour de la notion de borne supérieure, au-delà de la simple définition de cette-dernière. Cette propriété s'avère ensuite cruciale lorsque la continuité entre en jeu. Mais Weierstrass ne va effectuer cette nouvelle étape que dans le cadre des fonctions complexes (de la variable complexe). Il énonce :

> Lorsqu'à chaque valeur d'une variable complexe $x = u + vi$ dont le domaine ("*Ort*") est une portion simple et bornée du plan (la frontière incluse) correspond une valeur de la variable y qui varie continûment en fonction de x, et si l'on suppose en outre que y peut s'approcher aussi près que l'on veut d'une certaine valeur b, alors il y a au moins une valeur x pour laquelle y atteint la valeur b. [26]
>
> [**Weierstrass 1866**, 8]

Pour démontrer cet énoncé, où la notion de borne supérieure est mêlée à la propriété de continuité, Weierstrass commence par considérer la fonction réelle $|y - b|$ dont la borne inférieure est par hypothèse nulle. Puis il utilise la propriété d'encadrement précédente pour déterminer un lieu (u_0, v_0) dont les voisinages donnent identiquement à $|y - b|$ une borne inférieure nulle. Il ajoute d'ailleurs que ce lieu peut se situer à l'intérieur ou sur le bord du domaine de définition, une précision que l'on ne trouvait pas dans l'énoncé de la propriété d'encadrement. Enfin, il ajoute :

> [...] en ce point $[x_0 = u_0 + v_0 i]$, t prend la valeur 0. Parce que si ce n'était pas le cas, on pourrait décrire autour de x_0 un disque tel que les valeurs t, correspondant aux valeurs de x $[= u + iv]$ du disque, auraient une borne inférieure différente de 0. [27]
>
> [**Weierstrass 1866**, 9]

La clarté de cet argument montre bien que Karl Weierstrass sait déjà, fin 1865, articuler la notion de borne supérieure autour de la continuité pour parvenir à démontrer l'atteinte par une fonction d'une valeur spécifique. En ceci, ce théorème peut être considéré comme une forme précoce du théorème des bornes atteintes. Cependant plusieurs points l'en distinguent encore : tout d'abord, l'énoncé de Weierstrass porte sur des fonctions et des variables complexes. Ensuite, cet énoncé n'est pas concentré sur l'atteinte des bornes supérieure et inférieure de la fonction ; logiquement du reste, puisque ces notions ne sont pas définies pour les variables complexes. Enfin, seule l'atteinte d'une valeur est traitée :

---

25. Weierstrass ne détaille pas les arguments de convergence de la sous-suite extraite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mais il en souligne néanmoins la monotonie.

26. "*Wenn zu jedem Werthe einer complexen Veränderlichen $x = u + vi$, deren geometrischen Ort ein einfach begrenzter Theil der Ebene (die Begrenzung ist eingeschlossen) ist, ein Werth der complexen Veränderlichen y gehört, die sich mit x stätig ändert, und man weiß, daß y einem bestimmten Werth b beliebig nahe kommen kann, so giebt es mindestens einen Werth von x, für welchen y den Werth b erreicht.*" [**Weierstrass 1866**, 8]

27. "*[...] hier [in x_0] nun hat t den Werth 0. Dann sonst könnte man von x_0 einen so kleinen Kreis beschreiben, daß die Werthe von t, welche die dann vorkommenden Werthen von x entsprechen, eine von 0 verschiedene untere Grenze hätten.*" [**Weierstrass 1866**, 9]

le caractère borné ne fait absolument pas partie de l'étude, puisque Weierstrass se focalise sur les cas où par hypothèse la borne inférieure des fonctions est nulle.

Deux raisons doivent être invoquées pour expliquer pourquoi Weierstrass ne traite pas le cas des fonctions réelles de la variable réelle. Tout d'abord, il faut rappeler que le cours dans lequel figurent ces énoncés est un cours d'introduction à la théorie des fonctions analytiques. Sa visée principale est donc de donner les outils nécessaires à l'étude de ces fonctions, pour ensuite aborder dans les semestres ultérieurs les fonctions elliptiques et abéliennes. Ceci légitime l'implication précoce des fonctions complexes dans un cours dont les premiers fondements semblent pourtant traiter la variable réelle. Borne supérieure et continuité permettent dans ce cadre à Weierstrass de donner un support théorique à l'atteinte des valeurs approchées par les fonctions analytiques sur des domaines fermés.

La seconde raison revient aux remarques importantes que nous avons formulées suite à l'étude du cours de 1861. Pour Weierstrass, l'atteinte d'une plus grande et d'une plus petite valeur par une fonction réelle bien définie est un acquis qui ne saurait faire l'objet d'un théorème. Nous aurions en effet tort de considérer que l'apport rigoureux de la notion de borne supérieure se répercute chez Weierstrass sur le traitement des fonctions réelles. On retrouve ainsi dans le cours de 1866 pour ces fonctions les mêmes largesses que dans le cours précédent. Il est par exemple symptomatique que le professeur berlinois continue d'utiliser la terminologie de *plus grande* et de *plus petite* valeur pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en dépit de sa définition des bornes supérieure et inférieure[28]. Il existe ainsi un réel décalage dans son traitement des fonctions réelles et des fonctions complexes.

Le cours de Karl Weierstrass de l'hiver 1865-66 présente ainsi une progression significative dans la marche vers le théorème des bornes. L'introduction de la borne supérieure et de la méthode de dichotomie y est conjuguée à la notion de continuité. Néanmoins ce lien n'est véritablement opéré que pour l'atteinte des bornes inférieures des modules des fonctions complexes. La bornitude et l'atteinte des bornes des fonctions réelles ne bénéficient pas dans l'ensemble de ces apports et restent traitées de manière moins rigoureuse.

Signalons pour terminer l'étude de ce cours qu'en dehors de son usage originel pour déterminer les bornes d'une plage de valeurs réelles, Weierstrass étend l'application de la méthode de dichotomie aux ensembles infinis de points. Il détermine ainsi l'existence d'un point d'accumulation de tels ensembles contenus dans une région bornée ([**Weierstrass 1866**, 17]) : c'est la propriété connue sous le nom de *Bolzano-Weierstrass*. Pourtant elle est bien distincte des travaux d'origine du mathématicien bohémien où la dichotomie n'était employée que pour traiter des plages *continues* de valeurs réelles, et non des ensembles infinis de points. Ceci a déjà fait l'objet des études de Gregory Moore ([**Moore 2000**] et [**Moore 2008**]) qui a justement fait remarquer que "*la première version du théorème de Bolzano-Weierstrass*" apparaissait dans le cours de 1865-66. Nous signalerons tout de même, ce que Moore n'a pas souligné, que la motivation de cette extension réside dans la volonté de Weierstrass de démontrer rigoureusement une proposition alors apparue dans l'ouvrage de Briot et Bouquet sur les fonctions elliptiques. Weierstrass, qui possède la traduction allemande de cet ouvrage, y a remarqué l'énoncé suivant : une fonction analytique ne peut avoir une infinité de zéros dans une région bornée de son domaine sans y être identiquement nulle ([**Briot Bouquet 1862**, 46]). Briot et Bouquet ne donnaient pas de

28. On verra par exemple le traitement des séries de Laurent de la variable réelle [**Weierstrass 1866**, 20].

preuve rigoureuse de cet énoncé qui, aujourd'hui, est désigné comme le *principe d'unicité du prolongement analytique*. C'est ce que Weierstrass parvient à faire grâce à la méthode de dichotomie ([**Weierstrass 1866**, 17]), et qui explique l'émergence de la célèbre propriété qui unira son nom à celui du mathématicien de Prague.

Le cours de 1868

Durant les premiers mois de l'année 1867, Weierstrass tombe malade et suspend son enseignement [29]. Ceci décale d'un semestre la tenue de son cycle de leçons, et explique pourquoi les cours d'introduction à la théorie des fonctions analytiques se tiennent à partir de 1868 durant les semestres d'été des années paires. Le cours de 1868 du professeur de Berlin a été écrit et conservé cette année-là par son élève Wilhelm Killing, alors âgé de 21 ans. Ces notes se trouvent toujours conservées dans les archives du *Mathematisches Institut* de la *Westfälische Wilhelms-Universität* de Münster, d'où Killing était originaire [30].

Ce cours de 1868 de Weierstrass est marqué dès son introduction par la première présentation d'une construction des nombres réels grâce à sa théorie des agrégats [31]. Comparé à la version de 1866, il doit être noté qu'une plus grande partie est dédiée à la théorie des fonctions réelles de la variable réelle, tandis que les fonctions analytiques ne sont étudiées que dans l'une des six sections du cours ([**Weierstrass 1868**, 66-75]). En outre, une section entière est consacrée aux "*fonctions continues en général*" ([**Weierstrass 1868**, 54-65]).

Weierstrass présente la borne supérieure et la propriété d'encadrement d'une manière similaire à celle employée deux ans plus tôt. Il étend néanmoins les dichotomies à des subdivisions successives en n intervalles égaux (et non plus uniquement 2), ce qui l'amène à considérer des sommes de séries géométriques de raison $\frac{1}{n}$. Cependant, dans l'énoncé de la propriété d'encadrement, il ajoute une hypothèse superflue de continuité de la fonction - notée $x(u)$ - qui n'est pas utilisée dans la démonstration ([**Weierstrass 1868**, 57]). On pourrait alors s'attendre à voir apparaître l'atteinte de la borne grâce à la continuité, mais ce n'est pas le cas : la conclusion est restée inchangée tandis que les hypothèses ont été renforcées. Seule une nouvelle attention quant à la possibilité d'une convergence sur le bord du domaine de définition de la méthode de dichotomie peut être signalée.

Weierstrass généralise ensuite la propriété d'encadrement aux fonctions de plusieurs variables, bien qu'il ne développe la démonstration que pour le cas de 2 variables. Là encore, l'hypothèse de continuité apparaît sans être utilisée. Le théorème des bornes ne figure pas dans ce cours de 1868, pourtant un énoncé donné sans preuve paraît s'en rapprocher :

> Lorsque x dépend d'un certain nombre de variables $u, v, ...$ de sorte que non seulement $u, v, ...$ varient de manière continue, mais encore qu'à

29. En particulier, Weierstrass se sentant fragile décide de ne pas prendre part à un voyage officiel à Paris en Mai 1867 ([**Neuenschwander 1979**, 72])... au grand dam de son admirateur Charles Hermite.

30. Nous remercions chaleureusement Martin Paul ainsi que l'équipe de la Bibliothèque de l'Institut de Mathématiques de Münster pour leur soutien et leur encouragement dans notre travail, en nous ayant permis de consulter librement la reproduction du cours de 1868 écrit par Killing.

31. A propos de la construction des réels de Weierstrass, voir [**Spalt 1991**]. Le cours de 1868 représente également le point de départ des études comparées de Peter Ullrich sur la théorie des fonctions analytiques dans l'enseignement du professeur allemand ([**Ullrich 1989**]).

> chaque valeur de $u, v, \ldots$ corresponde une valeur de x qui varie continûment, alors la valeur de x ne peut pas être infinie [32] et donc une borne supérieure existe pour x, alors il y a au moins une valeur de l'argument (*Werthpaar*) pour laquelle la borne supérieure est atteinte. Donc il y a à l'intérieur du domaine de $u, v, \ldots$ une certaine valeur de l'argument $a, b, \ldots$ telle que pour tout couple de valeurs voisines a' et a'', b' et b'', ... a étant entre a' et a'', b entre b' et b'' [...] il y a pour les valeurs correspondantes de x la même borne supérieure que pour le domaine tout entier. [33]
>
> [**Weierstrass 1868**, 54]

Cet énoncé est surprenant et déroutant de prime abord, mais son analyse est extrêmement instructive. On constate dans la seconde partie de l'énoncé que celui-ci doit consister en une généralisation de la propriété d'encadrement dans le cas d'une fonction de plusieurs variables. Mais plusieurs autres éléments doivent être mis en avant dans le déroulement de la propriété.

Tout d'abord, on constate que Weierstrass ne distingue pas les deux notions de bornitude et de finitude. Il explique en effet que la fonction x admet une borne supérieure (qui est donc finie par sa définition dans ce cours) parce qu'elle ne prend pas la valeur ∞. Ceci équivaut à affirmer que la fonction est bornée puisqu'elle est finie. Ensuite, on remarque que l'atteinte effective de cette borne supérieure est considérée comme acquise, sans avoir égard à quelque propriété de continuité ou à la nature du domaine de définition sur lequel rien n'est précisé. Le caractère borné et l'atteinte de la borne semblent ainsi uniquement reposer sur la bonne définition de la fonction, ce qui s'accorde avec le résultat de nos études des cours de 1861 et de 1866. Par ailleurs, ce qui ici fait l'objet du théorème reste bien la propriété d'encadrement, c'est-à-dire la possibilité d'isoler parmi les arguments de la fonction un point au voisinage duquel la borne supérieure reste la même que sur la totalité du domaine. Dans ce cadre, la bornitude de la fonction et l'atteinte de la borne sont utilisées pour établir la propriété d'encadrement, et non l'inverse comme on aurait pu s'y attendre. Remarquons enfin comment est employé l'argument de continuité de la fonction x. Il est invoqué pour déterminer que les valeurs de la fonction sont finies, ce dont Weierstrass conclut ensuite que la borne supérieure est finie et donc que la fonction est bornée.

Ces implications mettent en lumière les confusions de Weierstrass dans les notions de finitude et de bornitude. Le raisonnement dans son ensemble ainsi que l'absence de considération pour la nature du domaine montrent qu'en dépit des développements des mathématiques du professeur berlinois liés à l'usage de la méthode de dichotomie, le théorème des bornes reste bien éloigné de la logique de son esprit. Ceci contraste avec la nature

32. La traduction du terme "*unendlich werden*" comme "être infini" repose sur l'utilisation sans ambiguïté dans le cours [**Weierstrass 1874**] de cette terminologie par opposition à : "*grösser als jede angebbare Grösse werden*", c'est-à-dire à "devenir plus grand que toute quantité donnée".

33. "*Wenn x mit einer beliebigen Anzahl Variabeln $u, v, \ldots$ so zusammen hängt, dass nicht allein $u, v, \ldots$ stätig veränderlich sind, sondern auch zu jedem Werthe von $u, v, \ldots$ ein bestimmter von x gehört, der sich continuirlich ändert, so möge der Werth von x nicht unendlich werden, also eine obere Grenze für x existiren. Dann giebt es mindestens ein Werthepaar, für welches die obere Grenze erreicht wird. Dann giebt es im Innern des Gebietes von $u, v, \ldots$ ein solches bestimmtes Werthepaar $a, b, ..$ so beschaffen, dass wenn ich zwei benachbarte Werthe a' und a'' nehme, b' und b'', ... a zwischen a' und a'', b zwischen b' und b'', ... [...] so wird die obere Grenze der zugehörigen x noch dieselbe sein, als für das ganze Gebiet.*" [**Weierstrass 1868**, 54]

et la qualité des outils mathématiques qu'il définit et exploite, qui sont - seront - particulièrement pertinents pour ce théorème. La prise de conscience de la nécessité d'énoncer ce théorème lui fait encore défaut. Les remarques que nous avons émises pour les cours de 1861 et 1866 relativement au manque de rigueur dans l'utilisation des plus grandes et plus faibles valeurs des fonctions réelles sont encore valables pour le cours de 1868. Les traitements de la formule de Taylor, des natures des zéros des fonctions analytiques ou des séries de deux variables présentent ces mêmes types de défaut ([**Weierstrass 1868**, 47,86,90]).

L'étude des cours de Weierstrass entre 1861 et 1868 révèle ainsi la nécessité de réévaluer l'histoire du théorème des bornes. Les études de référence de Pierre Dugac avaient conclu à la présence de ce théorème dans les cours du professeur de Berlin, tout en nuançant ceci en affirmant qu'il ne disposait pas de démonstration de l'existence de la borne supérieure ou de la propriété d'accumulation de Bolzano-Weierstrass. Ces deux éléments nous semblent devoir être révisés. En ce qui concerne le second, nous avons mis en lumière l'appropriation par Weierstrass de la méthode de dichotomie de Bolzano dès 1865 ainsi que son usage pour définir les points d'accumulation des ensembles infinis et bornés de points. Ceci était alors effectué pour parvenir à prouver le principe de prolongement analytique.

En ce qui concerne le théorème des bornes, notre analyse souligne son absence des cours de Weierstrass. Mais cette enquête s'est révélée très complexe et intéressante au plus haut point. Weierstrass a en effet développé dans ses cours tous les outils mathématiques qui *pourraient* lui permettre de démontrer ce qui deviendra bientôt le théorème des bornes. L'absence de ce théorème doit en fait être reliée aux conceptions du berlinois sur les fonctions réelles, conceptions qui mettent en défaut la nécessité d'un tel théorème. La nature des domaines de définition ou encore la continuité ne sont pas, pour Weierstrass, nécessaires pour conclure à l'atteinte des bornes des fonctions réelles. Ceci est considéré comme un acquis pour toute fonction bien définie. Par ailleurs, il montre encore une certaine confusion entre les notions de finitude et de bornitude, que le vocabulaire mathématique ne semble pas encore apte à distinguer aisément, ce qui est révélateur. Enfin, la propriété qui est considérée par lui comme centrale dans la théorie des fonctions réelles en lien avec la notion de borne supérieure est ce que nous avons appelé la *propriété d'encadrement*. *Il teorema di Weierstrass* ne serait-il en définitive pas un théorème de Weierstrass ?

1.3. Cantor, Schwarz et Heine : diffusion d'un théorème prématuré (1870-1872).

Le développement, l'utilisation et la diffusion du théorème des bornes atteintes ne trouvent pas leur source dans le cours de Karl Weierstrass (du moins c'est ce que nous avons établi jusqu'en 1870). La naissance de ce théorème va en fait venir de ceux qui vont contribuer à la maigre diffusion de ce cours : Georg Cantor, Hermann Schwarz et Eduard Heine. Dans la conception de son énoncé comme dans sa diffusion, ces trois mathématiciens vont jouer un rôle clef entre 1870 et 1872.

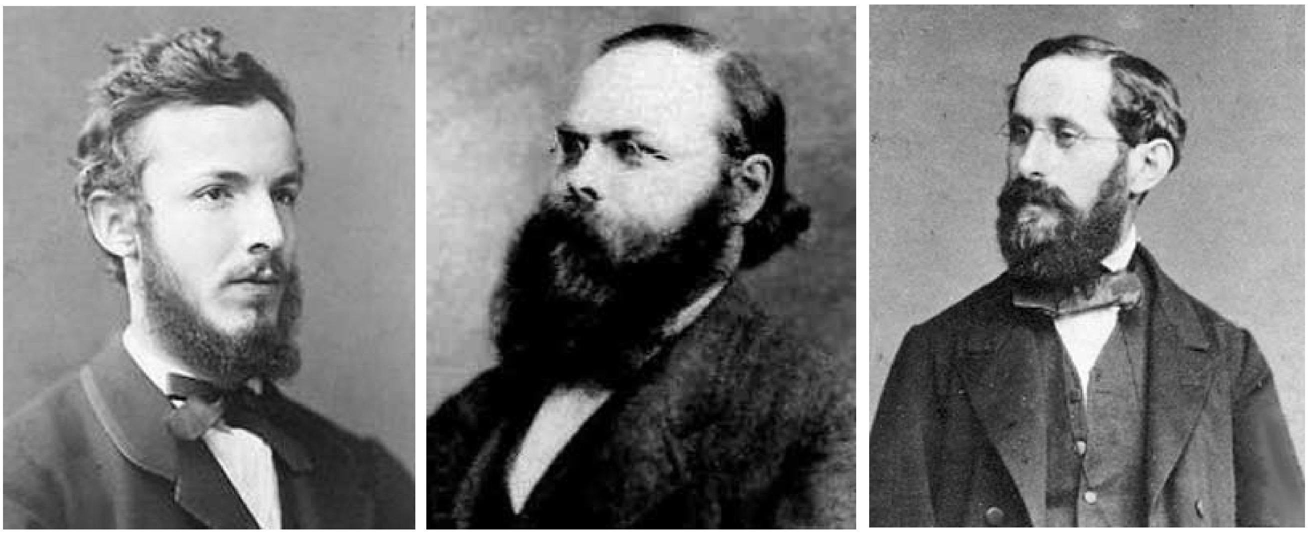


FIGURE 3. Georg Cantor, Hermann Schwarz et Eduard Heine (de gauche à droite)

Eduard Heine naît à Berlin en Mars 1821. Après des études dans des lycées de sa ville natale, il en intègre l'Université en 1838. Heine décide cependant rapidement de partir pour Göttingen, notamment pour assister aux leçons du prince des mathématiques, Gauß. Il reviendra terminer ses études à Berlin entre 1840 et 1842. Après avoir enseigné dans les Universités de Königsberg et de Bonn, Heine arrive à Halle en 1856 où il devient professeur *Ordinarius*. Il y restera ensuite toute sa vie.

Les travaux de Heine relatifs à la théorie des fonctions révéleront à la fois l'influence de Dirichlet, qui fut son professeur à Berlin, mais également l'impact de Weierstrass dont il découvre souvent les méthodes grâce à ses élèves. Ainsi, Hermann Schwarz travaille à Halle aux côtés de Heine après avoir étudié à Berlin entre 1861 et 1867. Cantor l'y remplacera ensuite.

Georg Cantor naît à Saint-Pétersbourg le 3 Mars 1845. Il passera ses onze premières années dans sa ville natale, avant que sa famille ne s'installe à Wiesbaden puis à Francfort, en Allemagne. Après être passé par les *Gymnasien* de ces deux villes, Cantor poursuit ses études dans les écoles de Darmstadt, la *RealSchule* dans un premier temps, puis après 1860 la *GewerbeSchule*. Doué d'aptitudes remarquables pour les mathématiques, Georg Cantor suit les conseils de son père et part en 1862 pour l'*ETH*[34] de Zürich. Mais dès l'année suivante, après le décès de son père, Cantor rejoint l'Université de Berlin. Il y étudiera aux côtés de celui qui devient son ami, Hermann Schwarz, durant les débuts de l'ère Kummer-Kronecker-Weierstraß[35].

En 1867, Cantor termine son doctorat sous la direction conjuguée de Weierstrass et de Kummer. Il reste à l'Université de Berlin encore deux années, lorsqu'en 1869 le départ de Schwarz pour Zürich lui offre la possibilité de partir pour Halle l'y remplacer. Il y

34. La *Eidgenössische Technische Hochschule* est un institut polytechnique fondé en 1854.
35. Pour plus de détails sur Schwarz, Cantor et Heine, voir [**Bölling 1998**] et [**Meschkowski 1967**].

obtiendra bientôt son *Habilitation*, et commencera avec Heine ses travaux sur l'unicité des séries trigonométriques.

Durant la fin des années 1860, Eduard Heine avait travaillé sur les différentes méthodes de développement des fonctions en séries trigonométriques ([**Bottazzini 1986**, 274]). Réalisant l'importance de la notion de convergence uniforme, qu'il apprend probablement indirectement du cours de Weierstrass [36] à travers Schwarz et Cantor, Heine publie en Février 1870 un travail où il en souligne le rôle central pour l'intégration terme à terme des séries ([**Heine 1870**]). C'est par ailleurs dans ce mémoire que le professeur de Halle définit la notion de continuité uniforme. Le problème de l'unicité du développement en série trigonométrique reste entier, mais le travail de Heine le fait reposer sur une base nouvelle. Surtout, il inspire celui qui enseigne désormais à ses côtés, Georg Cantor.

Cantor se saisit en effet de ce problème en en déplaçant l'approche : plutôt que d'étudier la série représentant une fonction, il préfère supposer l'existence de deux séries et étudier leur différence. La résolution repose alors sur l'analyse du développement de la fonction nulle :

$$0 = C_0 + C_1 + ... + C_n + ... \quad \text{en posant} \quad C_n = c_n\, sin(nx) + d_n\, cos(nx)$$

Le théorème d'unicité découle alors de la nullité des fonctions C_n [37]. Le natif de Saint-Pétersbourg reprend alors une idée de Riemann et forme la fonction

$$F(x) = C_0\frac{x^2}{2} - \frac{C_1}{1^2} - \frac{C_2}{2^2} - ... - \frac{C_n}{n^2} - ...$$

Cette fonction est continue, 2π-périodique, et possède la propriété particulière d'avoir un quotient différentiel du second ordre toujours nul :

$$\forall x \in [-\pi ... \pi], \quad \lim_{\alpha \to 0} \frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha^2} = 0$$

Cantor parvient à démontrer en Février 1870 toutes les étapes du théorème d'unicité *exceptée* la nullité de la fonction F qui en est la pierre angulaire. Il publie une première partie de son travail qui laisse de côté ce lemme crucial ([**Cantor 1870a**]). Puis il écrit à son ami Hermann Schwarz [38], en lui détaillant les étapes de sa recherche ainsi que le lemme central - la nullité de la fonction F - sur lequel il butte toujours.

Schwarz va mettre moins de dix jours à trouver une solution au problème posé par Cantor. Il envoie à Cantor une preuve de la nullité de F ([**Schwarz 1890**, 341-343]). Le nouveau professeur de Zürich démontre ce point en déterminant que la fonction est un polynôme de degré 1, ce qui constitue, il est aisé de le montrer, une condition suffisante. Il considère une fonction F, continue sur $[a, b]$ - en prenant bien garde d'inclure les bornes de l'intervalle - et possédant la même propriété de nullité du second quotient différentiel. Il pose ensuite :

36. Weierstrass lui-même tenait la définition et le rôle de la convergence uniforme des séries de son maître Christoph Gudermann ([**Bottazzini 1986**, 204]).

37. Nous ne donnons ici qu'un aperçu rapide du travail de Cantor sur les séries trigonométriques, qui l'amènera à son œuvre célèbre sur les ensembles. Pour plus de détails, on consultera les études de [**Dauben 1970**] et [**Dauben 1979**]. On pourra également se reporter sur le résumé [**Bottazzini 1986**, 274-277] des premiers travaux de Cantor.

38. Les échanges entre Schwarz et Cantor ont été publiés dans [**Meschkowski Nilson 1991**].

$$\phi(x) = \varepsilon[F(x) - F(a) - \frac{x-a}{b-a}\left(F(b) - F(a)\right)] - \frac{k}{2}(x-a)(x-b)$$

Cette nouvelle fonction ϕ est continue, nulle en a et en b, et possède un quotient différentiel du second ordre identiquement égal à k. L'objectif de Schwarz est de démontrer la négativité de ϕ pour tout $k > 0$. Il étudie pour commencer le cas $\varepsilon = 1$ (et bien sûr $k > 0$). Il raisonne alors par l'absurde :

> Supposons que la fonction $\phi(x)$ puisse prendre une valeur positive, différente de 0, pour une valeur de l'argument dans l'intervalle considéré, alors la valeur g, borne supérieure de toutes les valeurs prises par $\phi(x)$, serait également une valeur positive différente de 0. En employant une méthode de preuve (*Beweisverfahren*) dont M. Weierstrass a fait usage à répétition dans son cours sur la théorie des fonctions elliptiques, on obtiendrait alors, puisque $\phi(x)$ est une fonction continue de son argument, que cette valeur g est une valeur véritablement atteinte par la fonction pour au moins une valeur x_0 de l'argument x de l'intervalle considéré. Ainsi la valeur $\phi(x_0) = g$ serait la plus grande valeur de la fonction $\phi(x)$ [...][39]
>
> [**Schwarz 1890**, 342]

Schwarz utilise ensuite la méthode de double inégalité déjà employée par Ossian Bonnet dans sa démonstration du théorème des accroissements finis ([**Serret 1868**, 17-19]). En sommant les différences $\phi(x_0 \pm \alpha) - \phi(x_0) \leq 0$ puis en divisant par la quantité positive α^2, Schwarz aboutit à un quotient différentiel du second ordre en x_0 négatif. Ceci est contradictoire, puisque ce quotient reste égal à $k > 0$. En opérant d'une manière similaire dans le cas $\varepsilon = -1$ (et encore $k > 0$), il parvient à la même conclusion : $\phi(x) \leq 0$. Il en déduit finalement en reprenant la définition de cette fonction l'inégalité

$$|F(x) - F(a) - \frac{x-a}{b-a}\left(F(b) - F(a)\right)| \leq k\frac{1}{2}(x-a)(x-b)$$

Enfin, puisque cette-dernière reste valable pour toute valeur de $k > 0$, Schwarz conclut à la nullité du membre de gauche. C'est la conclusion du lemme qui échappait à Cantor, puisque F est bien une fonction affine :

$$F(x) = F(a) + \frac{x-a}{b-a}(F(b) - F(a))$$

Cette élégante démonstration d'Hermann Schwarz nous intéresse au plus haut point dans le cadre de notre étude : elle marque la première apparition du théorème des bornes. Schwarz y stipule clairement les conditions de fermeture de l'intervalle de définition $[a, b]$ et

39. "*Gesetzt nämlich, die Function $\phi(x)$ nähme für einen der betrachteten Werthe des Arguments x einen von 0 verschiedenen positiven Werth an, so müsste der Werth g der oberen Grenze aller Werthe der Function $\phi(x)$ ebenfalls eine von 0 verschiedene positive Grösse sein. Durch Anwendung eines Beweisverfahrens, von welchem Herr Weierstrass in seinem Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen wiederholt Gebrauch gemacht hat, ergibt sich ferner, dass die Function $\phi(x)$, da dieselbe eine stetige Function ihres Argumentes ist, diesen Werth g für mindestens einen dem angegebenen Intervalle angehörenden Werth x_0 des Argumentes x wirklich annehmen müsste. Es wäre demzufolge der Werth $\phi(x_0) = g$ der grösste Werth der Function $\phi(x)$ [...]*" [**Schwarz 1890**, 342]

de continuité de la fonction étudiée. La conclusion est alors l'atteinte effective de la borne supérieure des valeurs de la fonction en un point - au moins - de l'intervalle.

Deux remarques importantes doivent être mises en avant. La première constitue une lacune dans l'énoncé du théorème qui est en accord avec les conclusions de notre analyse des cours de Weierstrass (voir section précédente 1.2). Schwarz utilise en effet la conclusion d'atteinte de la borne supérieure sans rien avoir énoncé au préalable sur la finitude de cette borne. En d'autres termes, il n'énonce du théorème que la partie *atteinte*, qui en est la seconde conclusion, et non la partie *bornitude*, qui en est la première. Comme pour son maître Weierstrass, il ne fait aucun doute pour Schwarz que la borne supérieure de la fonction F est finie. Du fait de cette évidence, il ne juge pas même nécessaire d'énoncer cette précision. Ceci rejoint bien, par ailleurs, la confusion entre les notions de finitude et de bornitude que nous avons soulignée.

La seconde remarque est la nature du crédit que Schwarz attribue à son maître berlinois. Il est en effet très intéressant de noter que le professeur de Zurich ne donne pas crédit à Weierstrass pour le théorème des bornes, mais seulement pour la méthode de démonstration (*Beweisverfahren*) qui permet selon lui d'en établir la preuve. Schwarz fait ici allusion à la méthode de dichotomie et à ce que nous avons appelé la *propriété d'encadrement*, à laquelle Weierstrass accorde une très grande importance. Cette conclusion rejoint là aussi notre analyse des cours du professeur de Berlin : ses leçons comportent de nombreux outils liés à ce qui deviendra le théorème des bornes, mais ce théorème n'y est pas présent.

Ayant reçu la solution de Schwarz, Cantor s'apprête à la publier pour compléter son travail sur l'unicité des développements en série trigonométrique. Il demande néanmoins à son ami la forme sous laquelle il doit faire référence à sa démonstration du lemme. Schwarz lui répond alors :

> Non seulement je n'ai rien contre le fait que tu puisses inclure ma petite contribution mot pour mot, mais je suis ravi que tu aies pu en faire un si heureux emploi. Je voudrais simplement te suggérer ceci : à la place de marquer "cette preuve est due à M. Schwarz de Zurich", le formuler plutôt comme "cette preuve est communiquée par..." ou "je dois cette preuve à une communication de ...". Il me paraît en effet important que l'accent soit mis sur les noms de Bolzano et de Weierstrass. [40]
>
> Lettre datée du 1er Avril 1870 de Hermann Schwarz à Georg Cantor, reproduite dans [**Meschkowski 1967**, 228]

Cette insistance de Schwarz à ne pas se voir attribuer le mérite de la démonstration - et donc du premier énoncé du théorème des bornes - mais à mettre en avant les noms de Bolzano et Weierstrass va avoir un impact considérable sur la diffusion du théorème. En effet, le nom de Schwarz ne sera jamais associé à ce théorème auquel il vient pourtant de donner naissance. Surtout, Cantor va modifier ce qu'il avait envisagé. En publiant la

40. "*Nicht nur habe ich nichts dagegen einzuwenden, daß Du meinen kleinen Beitrag mit in den Text Deines Aufsatzes aufnimmst, sondern ich freue mich sehr darüber, daß Du von demselben einen so guten Gebrauch machen kannst und machen willst. Nur möchte ich Dir vorschlagen, anstatt zu sagen : Dieser Beweis ist von Herrn S. in Z., lieber Dich so auszudrücken : Dieser Beweis ist mir von ... mitgetheilt worden, oder, ich verdanke diesen Beweis einer Mitteilung, oder wie Du Dich sonst ausdrücken willst. Es scheint mir nämlich das Hauptgewicht auf die Namen Bolzano und Weierstrass gelegt werden zu müssen.*" [**Meschkowski 1967**, 228]

seconde partie de son travail, qui comporte la preuve du lemme trouvée par Schwarz, Cantor écrit :

> Cette preuve repose essentiellement sur le théorème suivant, fréquemment cité et démontré dans les leçons de M. Weierstrass : "Une fonction continue $\phi(x)$, de la variable x, sur un intervalle $[a, b]$ (les bornes incluses) atteint le maximum g des valeurs qu'elle peut prendre pour au moins une valeur x_0 de la variable, de sorte qu'on ait $\phi(x_0) = g$". [41]
>
> [**Cantor 1870b**, 141]

Cantor, qui du reste reproduit verbatim la preuve de Schwarz, effectue ainsi deux modifications importantes. La première consiste dans l'emploi du terme *maximum* pour remplacer le terme de *borne supérieure*. Ceci, nous le verrons, peut s'expliquer par les doutes que suscitait alors parmi les mathématiciens (Heine lui-même, mais surtout Leopold Kronecker) la validité de la méthode de dichotomie (alors appelée *die Bolzano-Weierstraßsche Schlußweise*) et donc la définition même de la notion de borne supérieure. La seconde modification de Cantor est le décalage du crédit qu'il attribue publiquement à son maître Weierstraß. Schwarz n'avait crédité leur professeur que de la méthode de preuve sur laquelle s'appuyait la démonstration du théorème des bornes. Cantor en revanche écrit dans son article que ce théorème est régulièrement énoncé et prouvé dans les cours de Weierstrass. C'est cette version qui est alors diffusée, puisque la communication de Schwarz n'est que privée tandis que celle de Cantor est un mémoire publié. On voit ici qu'il s'agit d'un problème particulièrement pertinent pour l'étude de la diffusion non des connaissances mais de la paternité de celles-ci.

La diffusion de cette première forme du théorème des bornes au début de l'année 1870 coïncide avec les premières utilisations, en-dehors de sa salle de classe, des nouvelles méthodes de preuve de Karl Weierstrass. La méthode de dichotomie (ou plus largement les procédés itératifs de subdivisions), la notion de borne supérieure et les différents énoncés qui y sont rattachés suscitent des débats parmi les mathématiciens allemands. Beaucoup doutent voire même contestent la validité des procédés de Weierstrass. Eduard Heine fait partie des mathématiciens qui sont alors critiques envers ces méthodes. Après que Schwarz lui a envoyé une version de la démonstration que nous avons détaillée ci-dessus, Heine répond :

> Je ne peux vous cacher que votre preuve du lemme d'après les principes de Bolzano-Weierstrass, si élégante soit-elle, ne me paraît pas complètement démonstrative (*beweisend*), si bien que je ne saurais admettre que le théorème soit bien établi. [42]
>
> Lettre datée du 8 Mars 1870 de Eduard Heine à Hermann Schwarz, reproduite dans [**Meschkowski 1967**, 228]

41. "*Dieser Beweis stützt sich im Wesentlichen auf den in den Vorlesungen des Herrn Weierstrass häufig vorkommenden und bewiesen Satz : "Eine in einem Intervalle (a...b) (die Grenzen incl.) der reellen Veränderlichen x gegebene, stetige Function $\phi(x)$ erreicht das Maximum g der Werthe, welche sie annehmen kann, zum Mindesten für einen Werth x_0 der Veränderlichen, so dass $\phi(x_0) = g$".*" [**Cantor 1870b**, 141]

42. "*Dagegen leugne ich nicht, dass Ihr Beweis des Hülfssatzes nach Bolzano-Weierstras. Principien, wie schön er auch ist, mir nicht völlig beweisend erscheint, und ich deshalb nicht zugeben kann, dass der Satz erledigt sei.*" [**Meschkowski 1967**, 228]

Weierstrass tentera personnellement de convaincre Heine du bien-fondé de la méthode de dichotomie lorsque ce-dernier sera de passage à Berlin au Printemps 1870 [43]. Mais c'est bel et bien Leopold Kronecker qui s'opposera de la manière la plus farouche aux procédés de démonstration par dichotomie utilisés par Weierstrass après Bolzano. Kronecker écrit à Schwarz en Juin 1870 pour tenter de le persuader de se ranger de son côté contre Weierstrass :

> Les conclusions de Bolzano sont évidemment fallacieuses (*Trugschlüsse*) [...] Kummer Borchardt et Heine sont de mon côté [...] Je suis même convaincu qu'il sera possible de bâtir des fonctions tellement déraisonnables que, en dépit de la pertinence des affirmations de Weierstrass, elles n'auront pas de borne supérieure. Tous ces théorèmes généraux admettent des recoins où ils cessent d'être valides. [44]
>
> Lettre datée du 3 Juin 1870 de Leopold Kronecker à Hermann Schwarz, reproduite dans [**Meschkowski 1967**, 68]

La raison principale pour laquelle Kronecker refuse de voir dans la méthode de dichotomie une méthode valide, acceptable, réside dans le caractère infini du procédé itératif. Kronecker, lui, considère qu'un processus valable doit pouvoir être réalisé effectivement, c'est-à-dire avec un nombre fini d'étapes. C'est ce que Schwarz décrira au mathématicien italien Ulisse Dini :

> Je ne peux oublier de mentionner que M. Kronecker soulève une objection contre la méthode de preuve ("*Beweismethode*") de Weierstrass. Cette objection est basée sur le fait qu'il n'existe en fait pas de méthode pour mener effectivement à bien les opérations que cette méthode de preuve requiert, par exemple numériquement. [45]
>
> Lettre datée du 3 Mars 1871 de Hermann Schwarz à Ulisse Dini, reproduite dans [**Bottazzini 1992**, 79]

Ce débat sur la méthode de dichotomie marque le début d'une longue opposition entre Kronecker et Weierstrass, le premier demandant à placer l'analyse sur des opérations arithmétiques finies. Cette opposition est étudiée en détail dans [**Edwards 1998**].

Les défenseurs de la méthode de preuve de Weierstrass par dichotomie sont avant tout ses élèves : Schwarz et Cantor en premier lieu, mais également Wilhelm Thomé, alors *privatdozent* à Berlin [46]. Ils soulignent généralement que "*l'objection de M. Kronecker*

43. Cantor écrit à Schwarz le 30 Mars 1870 : "*Herr Weierstrass [...] hofft, ihn [Heine] von der Richtigkeit der Schlußweise selbst zu überzeugen [...]*" ([**Meschkowski Nilson 1991**, 24]).

44. "*die Bolzanoschen Schlüsse sind offenbare Trugschlüsse [...] Kummer, Borchardt und Heine befinden sich auf meiner Seite [...] Ich bin sogar überzeugt, daß man Funktionen wird aufstellen können, die so unvernünftig sind, daß sie trotz des Zutreffens von Weierstrass' Voraussetzungen keine obere Grenze haben. All solche allgemeinen Sätze haben ihre Schlupfwinkel, wo sie nicht mehr gelten.* " [**Meschkowski 1967**, 68]

45. "*Es darf nicht unerwähnt bleiben, dass Herr Kronecker gegen die Weierstrass'sche Beweismethode einen Einwand geltend macht. Derselbe stützt sich auf die Tatsache, dass es allerdings keine Methode gibt, in einem gegebenen Falle wirklich die Processe, die das Beweisverfahren erfordert, auszuführen, zum Beispiel numerisch.*" [**Bottazzini 1992**, 79]

46. A propos de Thomé voir [**Biermann 1988**, 129]. Quant à son soutien et son usage dans ses cours de la méthode de dichotomie, voir la lettre de Cantor datée du 30 Mars 1870 dans [**Meschkowski Nilson 1991**, 24].

n'invalide en rien la méthode de preuve [de Weierstrass] puisque celle-ci vise uniquement à prouver l'existence" [47]. En 1871, Cantor publie d'ailleurs un court rectificatif suite à ses deux mémoires sur l'unicité des séries trigonométriques de l'année précédente. Il y rétablit l'emploi du terme *borne supérieure* en lieu et place de *maximum* dans l'énoncé du théorème des bornes qu'il avait utilisé ([**Cantor 1871**, 296]). Cette brève contribution marque également la première diffusion de la notion de borne supérieure hors des cours de Weierstrass puisque Cantor en donne, à défaut d'une construction, une définition précise.

Eduard Heine conserve quant à lui une attitude mitigée envers la validité de la méthode de dichotomie. Réticent de prime abord, il est ensuite influencé par Schwarz et Cantor, ainsi que par Weierstrass directement. Plus généralement, Heine s'inspire des méthodes du professeur de Berlin, de sa construction des nombres réels et des fondements de sa théorie des fonctions. Comme nous l'avons détaillé en [Chap.6,3.2], Heine produit en Octobre 1871 un résumé de cette théorie dans le but de faire connaître et faire accepter les méthodes de Weierstrass alors encore peu diffusées. Il enrichit par ailleurs son mémoire de certaines propositions qui lui sont propres ou qui émanent de Schwarz et de Cantor. On y trouve ainsi par exemple la première caractérisation séquentielle de la continuité due à Cantor [48]. Dans ce travail publié l'année suivante ([**Heine 1872**]), Heine présente une théorie des nombres réels [49] légèrement différente de celle de Weierstrass qui lui permet de passer outre les difficultés présentées selon lui par l'utilisation de la méthode de dichotomie.

Heine définit en effet les nombres réels grâce aux suites convergentes (d'après le critère de Cauchy), les *Zahlenreihen*. Les nombres, ou *Zahlzeichen*, sont alors les représentants (nous dirions également les *classes d'équivalence*) de ces suites ([**Heine 1872**, 176] [50]). Cefaisant, Heine s'octroie la possibilité d'utiliser sans plus de preuve la convergence des suites monotones bornées qui émergent naturellement des processus de dichotomie. Il n'y a alors plus lieu de mettre en doute la convergence du procédé puisque la suite *est* le nombre lui-même.

Dans son mémoire, le professeur de Halle fait figurer pour la seconde fois (après l'article [**Cantor 1870b**]) le théorème des bornes dans une publication. Présent dans la partie consacrée aux propriétés des fonctions continues, ce théorème apparaît en fait comme un corollaire de l'énoncé suivant :

> Théorème. Si une fonction $f(x)$ est (pour chaque valeur individuelle de x) depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$ continue, et n'est en outre de $x = a$ à $x = b$ jamais négative mais peut entre ces bornes devenir inférieure à toute quantité donnée [positive], alors elle atteint la valeur 0. [51]
>
> [**Heine 1872**, 186]

47. Extrait de la lettre de Schwarz à Dini, [**Bottazzini 1992**, 80].
48. Voir [**Heine 1872**, 182] et les notes de bas de page qui y soulignent la paternité du théorème.
49. A propos des constructions des nombres réels au début des années 1870, de la place de Heine et de Weierstrass, on verra les études [**Boniface 2007**] et [**Petri Schappacher 2007**]. On pourra également consulter [**Bottazzini 1986**, 265-280].
50. Pour plus de détails sur la construction des nombres réels proposée par Eduard Heine, voir [**Epple 2003**].
51. "*Lehrsatz. Wenn die (für jedes einzelne x) von $x = a$ bis $x = b$ continuirliche Function $f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ nie negativ, aber zwischen diesen Grenzen kleiner wird als jede angebbare Grösse, so erreicht sie auch den Werth Null.*" [**Heine 1872**, 186]

La démonstration de Heine utilise sa définition des nombres réels mais est en outre basée sur les outils donnés dans le cours de Weierstrass. En effet, le professeur de Halle développe ce que nous avons appelé la *propriété d'encadrement* pour encadrer de manière itérative les arguments où la fonction "*devient inférieure à toute quantité donnée*" - Heine se refusant à employer la terminologie de *borne supérieure* et *inférieure.* La suite (*Zahlenreihe*) $x_1, x_2, ...$ définie par les bornes des intervalles que construit cette propriété détermine un nombre (*Zahlzeichen*) X. Heine va alors démontrer que $f(X) = 0$.

En supposant (par l'absurde) $f(X) = 3\varepsilon,\ \varepsilon > 0$, il utilise un raisonnement devenu depuis classique - et en partie caractéristique de Weierstrass. D'après la continuité de f en X, $\exists \eta_0 > 0,\ \forall x \in [X - \eta_0, X + \eta_0],\ \ |f(X) - f(x)| \leq \varepsilon$. Quitte à prendre n suffisamment grand, les différences entre les termes de la suite (x_n) et X peuvent être supposées plus petites que η_0. Mais il existe par hypothèse une valeur x dans l'intervalle considéré où la fonction f devient plus petite que toute quantité donnée, donc en particulier plus petite que ε. Dans ce cas, Heine obtient l'inégalité :

$$f(X) = f(X) - f(x) + f(x) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon < 3\varepsilon$$

Ceci contredit la valeur de $f(X) = 3\varepsilon$, et conclut la preuve du professeur de Halle en toute rigueur. Il s'agit là de la première démonstration d'atteinte par une fonction réelle d'une de ses bornes en vertu de la propriété de continuité.

Ensuite, Heine énonce le théorème des bornes comme une simple conséquence de ce résultat :

> Corollaire. Si une fonction est continue (pour chacune des valeurs de x) depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$ et ne conserve pas identiquement une unique valeur, alors elle atteint pour une certaine valeur de x un Maximum, et de même pour un Minimum. [52]
>
> [**Heine 1872**, 188]

Heine ne donne donc pas de preuve de ce théorème qui n'apparaît que comme une conséquence de l'énoncé précédent. Il s'agit ici bien de la même version du théorème des bornes que celle que Cantor et Schwarz avait utilisée en 1870. D'une part, les deux hypothèses de continuité de la fonction et de définition sur un intervalle fermé borné sont données par Heine. Mais d'autre part, le théorème se concentre sur l'atteinte des bornes extrêmes sans même évoquer leur finitude. Il est ainsi considéré comme acquis que la borne supérieure de la fonction sera bien une valeur finie, et l'agencement logique de la présentation de Heine le souligne clairement. Il apparaît ainsi pour Heine, mais aussi pour Cantor et Schwarz, que la nécessité de l'énoncé du théorème des bornes réside uniquement dans l'atteinte des bornes. Que celles-ci soient finies n'est jamais mentionné : cela est perçu comme une évidence. On retrouve ainsi une influence à double tranchant des mathématiques de Weierstrass dans les énoncés du théorème des bornes chez ses élèves et chez Heine. Certes ces-derniers font bon usage des outils liés à la dichotomie et à la borne supérieure, mais d'un autre côté ils ne se penchent pas non plus sur la distinction entre la bornitude et la finitude, deux notions qui continuent d'être confondues. Néanmoins, comparé aux cours de Weierstrass de la décennie 1860, le théorème des bornes tel qu'il naît avec Schwarz, Cantor et Heine apporte une rigueur nouvelle dans "*l'atteinte de la plus grande valeur*"

52. "*Folgerung. Wenn eine (für alle einzelne Werthe) von $x = a$ bis $x = b$ continuirliche Function nicht überall gleiche Werthe besitzt, so erreicht sie für einen bestimmten Werth von x ein Maximum und ebenso ein Minimum.*" [**Heine 1872**, 188]

d'une fonction réelle, ce que Weierstrass utilisait sans avoir égard au domaine de définition ou même à la continuité.

Le *Grand Législateur des Mathématiques* prendra-t-il conscience de la nécessité de s'assurer de la finitude des bornes ? La poursuite de l'analyse du contenu de ses cours dans la section suivante nous fournira une réponse - surprenante - à cette interrogation. Remarquons pour finir le rôle révélateur du vocabulaire scientifique [53] : l'absence de distinction entre les notions de finitude et de bornitude doit ainsi être reliée à l'absence d'un lexique adapté pour décrire la notion de bornitude. Il n'existe en effet pas, en 1870, de pendant au mot fini (*endlich*) dans les langues française (*et allemande*).

1.4. Le théorème des bornes selon Weierstrass : histoire d'une éternelle lacune (1874-1886).

Nous avons signalé en guise d'introduction (voir 1.1) que Pierre Dugac avait affirmé la présence du théorème des bornes dans les cours de Weierstrass depuis 1861, en mentionnant également qu'il ne disposait avant 1868 pas de démonstrations pour le théorème d'existence de la borne supérieure et la propriété d'accumulation de Bolzano-Weierstrass ([**Dugac 1973**, 64], [**Dugac 2003**, 131]). Nos premières études des cours de l'analyste de Berlin avant 1870 nous ont permis de réévaluer ces affirmations. Se pose alors naturellement la question du contenu des cours après 1870, bien que comme nous l'avons vu dans la section précédente le théorème est alors déjà apparu dans certaines publications. Selon Hélène Gispert, c'est en effet le cours de 1874 qui doit marquer l'avènement du théorème sous sa forme définitive :

> La démonstration de Weierstrass [du théorème des bornes] de 1861 était également lacunaire dans la mesure où il admettait l'existence de la borne supérieure. Il en donnera une version entièrement correcte dans son cours de 1874, version qu'il possédait probablement depuis 1868.
>
> [**Gispert 1983**, 45]

Après son apparition dans les publications de Cantor (1870) et de Heine (1872), Karl Weierstrass reprend dans ses cours ce qui devient la première version du théorème des bornes atteintes. Son cours d'*introduction à la théorie des fonctions analytiques* du semestre d'été de l'année 1874 a été écrit et conservé par Georg Hettner ([**Weierstrass 1874**]). Hettner est alors âgé de 20 ans et après avoir étudié à Leipzig, il devient l'un des étudiants préférés de Weierstrass [54]. Ses notes sont conservées dans les archives de l'Université de

---

53. On pourra consulter les chapitres consacrés aux "*Entités mathématiques dans le discours scientifique*" et à "*La trajectoire d'un objet scientifique*" de [**Daston 2000**, Chap.2,11].

54. Après avoir fait un malaise durant l'un de ses cours en Décembre 1861, Karl Weierstrass décida de ne plus donner ses leçons qu'en position assise. Il désignera désormais toujours l'un de ses élèves pour écrire au tableau le cours qu'il dicte, ce qui rendra parfois la compréhension de ce cours assez difficile. Hettner fera ainsi partie de ces élèves qui écriront le cours du maître analyste pour le reste de la classe. Pour plus de détails sur Georg Hettner, voir [**Biermann 1988**, 144].

Göttingen, mais des copies sont également disponibles à Berlin ou à l'Institut Mittag-Leffler.

Comparé aux cours des années 1860, le cours de 1874 introduit de nouvelles études - et un nouveau vocabulaire - pour distinguer les variables bornées des variables non bornées. Il est par exemple symptomatique que Weierstrass définisse pour la première fois le terme de *variable bornée* (*beschränkt veränderlich*) ([**Weierstrass 1874**, 181]). Il définit ainsi dans un premier temps la borne supérieure d'un ensemble de valeurs borné supérieurement ([**Weierstrass 1874**, 163]), puis relâche la contrainte de bornitude en autorisant la possibilité d'obtenir une borne supérieure infinie :

> Nous avions dans le théorème [précédent] supposé que x' ne prenait que des valeurs positives mais ne pouvant devenir arbitrairement grandes. Cette dernière condition peut être abandonnée : dans ce cas, la borne supérieure devient arbitrairement grande : [...] $g = \infty$ [55]
>
> [**Weierstrass 1874**, 168]

Les énoncés liés au théorème des bornes n'apparaissent dans le cours que dans la sixième section consacrée à l'étude de la convergence des séries ([**Weierstrass 1874**, 276-361]). Weierstrass y énonce et y prouve tout d'abord la propriété d'accumulation de Bolzano-Weierstrass. Puis il se penche sur le problème de l'atteinte des bornes d'une fonction :

> Soit $f(x)$ une fonction de x, telle que pour toute valeur de x entre a et b, a et b inclus, f a une valeur bien définie qui varie continûment avec x, alors il est immédiatement clair que $f(x)$ possède une borne supérieure et une borne inférieure. Il reste à prouver qu'il y a au moins une valeur $f(x)$ qui atteint réellement cette borne supérieure (et resp. cette borne inférieure).
>
> [...] On obtient immédiatement qu'une borne supérieure existe, mais c'est sur le concept de continuité que repose l'atteinte de cette borne. [56]
>
> [**Weierstrass 1874**, 310-311]

L'énoncé même donné par Weierstrass est très clair : le théorème des bornes distingue les fonctions continues par la possibilité d'atteindre effectivement la valeur de leur borne supérieure sur un segment $[a, b]$. L'existence des bornes ne fait pas partie du théorème, elle est immédiate. C'est leur atteinte qui est intimement reliée à la continuité. Néanmoins, puisque Weierstrass a défini dans ce cours les bornes supérieures des ensembles non bornés supérieurement, on ne pourrait déjà en conclure qu'il prend pour acquis la finitude des bornes comme le faisaient Cantor et Heine avant lui. L'examen détaillé de la preuve puis de l'usage du théorème vont nous éclairer sur ce point.

---

55. "*Wir hatten in dem Satze angenommen, dass x' nur positive Werthe annehmen dürfe und nicht beliebig gross werden könne. Die letztere Bedingung können wir fallen lassen : Denn wir sagen in diesem Falle, die obere Grenze g wird beliebig gross : [...] $g = \infty$*" [**Weierstrass 1874**, 168]

56. "*Ist $f(x)$ eine Function von x, welche für jeden Wert von x zwischen a und b, a und b mitgerechnet, einen bestimmten Wert hat, der sich stetig mit x ändert, so ist unmittelbar klar, dass $f(x)$ eine obere und untere Grenze hat. Es soll aber bewiesen werden, dass es mindestens einen Wert von $f(x)$ giebt, für den diese untere und obere Grenze wirklich erreicht wird. [...] Dass eine Grenze existiert, ergiebt sich unmittelbar, dass aber diese Grenze wirklich erreicht wird, liegt im Begriff der Stetigkeit.*" [**Weierstrass 1874**, 310-311]

Weierstrass va utiliser la propriété d'accumulation pour démontrer son énoncé du théorème des bornes. Il divise pour cela l'intervalle $[a, b]$ en m intervalles égaux notés $I_\mu := (\frac{\mu}{m}, \frac{\mu+1}{m})$ - sans spécifier la nature des intervalles. Il considère ensuite les bornes supérieures (g_μ) de la fonction sur chacun de ces intervalles I_μ, et prouve que l'une au moins de ces bornes supérieures coïncide avec la borne supérieure globale g. Si g_ν est précisément cette borne, Weierstrass considère la borne inférieure $\frac{\nu}{m}$ de l'intervalle I_ν correspondant. En changeant la valeur de l'entier m, représentant le nombre de subdivisions, le professeur de Berlin construit la suite $(\frac{\nu(m)}{m})_{m\geq 1}$. Cette suite est bornée puisque ses valeurs restent dans l'intervalle de départ $[a, b]$, ce qui autorise Weierstrass à employer la propriété d'accumulation. Celle-ci lui permet d'obtenir l'existence d'un argument x_0 de $[a, b]$, tel que la fonction f admet sur tous ses voisinages la borne supérieure g. Il s'agit en fait ici de la propriété d'encadrement, que Weierstrass a retrouvée en développant une nouvelle méthode.

La dernière étape de la preuve consiste alors pour le mathématicien allemand à démontrer que $f(x_0) = g$. Il y raisonne par l'absurde, et suppose pour commencer l'existence de $\gamma > 0$ tel que $f(x_0) = g' = g - \gamma < g$. Puisque f est continue en x_0, et en choisissant ε tel que $0 < \varepsilon < \gamma$, Weierstrass utilise l'existence de $\delta > 0$ tel que :

$$\forall h\ ,\ \ 0 \leq h < \delta\ ,\quad |f(x_0 \pm h) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Il considère alors le cas $\varepsilon = \frac{\gamma}{2}$ et obtient :

$$f(x_0 \pm h) < \varepsilon + f(x_0) = \varepsilon + g - \gamma = g - \varepsilon$$

Mais ceci signifie alors que la borne supérieure de la fonction dans un voisinage de x_0 devrait être inférieure à $g - \varepsilon$ et donc strictement inférieure à g. Ceci contredit alors la définition de x_0, ce dont Weierstrass conclut finalement que $f(x_0) = g$.

La preuve de Weierstrass correspond rigoureusement à la démonstration moderne qui est donnée du théorème des bornes ... pour en démontrer la seconde conclusion ! Sa preuve établit en effet l'atteinte de la borne supérieure, à condition qu'il ait été démontré au préalable que celle-ci est finie. En effet, le traitement des inégalités que Weierstrass utilise ($f(x_0) = g' = g - \gamma < g$, ou encore $f(x_0 \pm h) < \varepsilon + g - \gamma = g - \varepsilon$) n'est valide que dans les cas où $g \in \mathbb{R}$. Le mathématicien berlinois ne démontre pas ceci : comme c'était le cas dans ses cours précédents, ainsi que dans les énoncés de Cantor et Heine, il ne fait aucun doute et il est tacitement admis que la borne supérieure est finie. Weierstrass va par ailleurs étendre ce théorème aux fonctions continues de plusieurs variables d'une manière exactement similaire, et à laquelle nous apposerions exactement la même analyse ([**Weierstrass 1874**, 314-324]).

Cette *lacune de bornitude* peut paraître n'être qu'un détail peu significatif qui sera bientôt rectifié. Mais pour Weierstrass - et pour nombre de ses disciples - cette lacune va prendre la forme d'un cercle vicieux. En ne réalisant pas la faille de sa démonstration, Weierstrass va obtenir comme une conséquence de sa version du théorème des bornes la finitude de la borne supérieure. En suivant son raisonnement, la borne supérieure est atteinte par la fonction continue, donc correspond à une valeur prise effectivement par la fonction, en vertu de son théorème. Mais puisque cette fonction est bien définie, les valeurs qu'elle prend sont finies. En particulier, c'est le cas pour la borne supérieure qui est donc finie : pour Weierstrass, une fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée puisque c'est un corollaire du théorème des bornes qui affirme que les bornes sont atteintes, sans en connaître *a priori* la nature - finies ou infinies.

Weierstrass développe très exactement ce raisonnement dans la première application qu'il donne du théorème des bornes : l'étude du prolongement analytique des séries entières

$$\mathcal{G}(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$$

En considérant $r > 0$ le rayon de convergence de cette série, il définit pour toute valeur x' du disque de convergence la série auxiliaire :

$$\mathcal{G}(x|x') = \sum_{n\geq 0} c_n (x - x')^n$$

Le problème du prolongement analytique de $\mathcal{G}$ consiste ici à déterminer l'existence de valeurs x' pour lesquelles le disque de convergence de $\mathcal{G}(x|x')$ n'est pas strictement contenu dans celui de $\mathcal{G}(x)$, et donc en étend le domaine.

Le théorème des bornes intervient alors dans le raisonnement de Weierstrass lorsque celui-ci en vient à établir que la fonction de deux variables $\mathcal{G}(x'|h)$ est - en module - bornée. Son argumentation révèle à la fois la distinction nouvelle et nette qu'il établit entre les notions de finitude et de bornitude, mais également le cercle vicieux dans lequel l'a plongé le théorème des bornes :

> Nous devons encore prouver que $\mathcal{G}(x'|h)$ possède [en module] une borne supérieure finie pour $|x'| \leq r_1$ et $|h| \leq d$. On ne peut pas affirmer immédiatement ceci puisque bien qu'elle ne puisse pas être infinie, la fonction pourrait tout de même devenir plus grande que toute quantité donnée ("*zwar nicht unendlich gross, aber doch grösser als jede angebbare Grösse*"). Nous savons que $\mathcal{G}(x'|h)$ est finie dans un certain domaine, et nous voulons démontrer qu'elle est aussi continue sur ce domaine. Ainsi, en vertu du théorème précédent [le théorème des bornes à plusieurs variables], il y aura un point (x'_2, h_0) dans le domaine, où $\mathcal{G}(x'|h)$ atteindra son maximum. Puisqu'à l'intérieur de ce domaine, à toute valeur de x' et de h correspond une valeur finie de $\mathcal{G}(x'|h)$, il en va de même pour ce maximum, c'est-à-dire que la borne supérieure est finie, ce qui démontre notre théorème. Il nous suffit dès lors de montrer la continuité de $\mathcal{G}(x'|h)$ sur son domaine. [57]
>
> [**Weierstrass 1874**, 324-325]

On peut ainsi souligner ici que Weierstrass établit une distinction bien nette entre la finitude - prendre des valeurs finies pour tout argument - et la bornitude - avoir une borne

57. "*[...] wir haben den Beweis noch nachzutragen, dass die $\mathcal{G}(x'|h)$ für $|x'| \leq r_1$, $|h| \leq d$ eine endliche obere Grenze hat. Wir sind nicht erledigt, dies ohne Weiteres zu schliessen, denn die Function kann zwar nicht unendlich gross, aber doch grösser als jede angebbare Grösse werden. Wir wissen, dass $\mathcal{G}(x'|h)$ innerhalb einer bestimmten Bereiches endlich ist und wir wollen beweisen, dass es innerhalb dieses Bereiches auch stetig ist. Dann muss es nach dem bewiesenen Satze eine Stelle x'_2 und h_0 in dem Bereiche geben, für welche $\mathcal{G}(x'|h)$ sein Maximum erreicht. Da aber innerhalb des Bereiches zu jedem Wert für x' und h ein endlicher Wert von $\mathcal{G}(x'|h)$ gehört, so muss auch dieses Maximum, das ist die obere Grenze, endlich sein, womit der Satz bewiesen ist. Wir brauchen also nur die Stetigkeit von $\mathcal{G}(x'|h)$ in dem Bereiche zu zeigen*" [**Weierstrass 1874**, 324-325]

supérieure finie. Cette distinction n'apparaissait pas dans ses cours précédents. Mais, dans le cadre des fonctions continues, cette évolution est mélangée à une conception erronée provenant de la lacune de sa démonstration du théorème des bornes. Sans avoir réalisé que sa preuve reposait *in fine* sur la finitude des bornes, Weierstrass pense avoir démontré que les fonctions continues sont bornées (sur les intervalles fermés bornés) comme une conséquence de ce théorème. De l'atteinte de la borne supérieure, supposée acquise et rigoureusement établie, il déduit que la fonction est bornée puisqu'elle est finie partout et donc en particulier là où elle correspond précisément à la borne supérieure. Pour le formuler de manière plus concise, la lacune de bornitude de sa preuve du théorème des bornes laisse Weierstrass affirmer que - pour les fonctions continues - la bornitude devient un simple corollaire de la finitude.

Nous ne ferons qu'un examen rapide des cours de 1878 et de 1886 car, nous allons le souligner, le théorème des bornes disparaît progressivement du cadre de ces cours. Ceci est révélateur de l'importance modérée que lui accorde Weierstrass. Son cours du semestre d'été 1878 d'introduction à la théorie des fonctions analytiques est probablement le plus connu parmi ses différentes leçons. Parmi ses étudiants se trouvent cette année-là Carl Runge, Max Planck, Salvatore Pincherle ou encore Adolf Hurwitz. Ce sont les notes de ce-dernier qui constituent notre source [**Weierstrass 1878**], et qui sont conservées à Zürich. Deux ans plus tard, Pincherle publiera également quelques portions de ce cours en langue italienne ([**Pincherle 1880**]). Le résumé du mathématicien italien ne comportera néanmoins pas le théorème des bornes, qui apparaît pourtant dans le cours du professeur de Berlin puisqu'il figure dans les notes d'Hurwitz.

D'un point de vue global, les énoncés liés au théorème des bornes (définition de la borne supérieure, propriété d'encadrement, propriété d'accumulation de Bolzano-Weierstrass) sont tous présentés en 1878 par Weierstrass sans aucune restriction sur les bornes des intervalles considérés. Pourtant, ces énoncés et leurs démonstrations restent identiques à celles de 1874. Certaines preuves ne sont alors rigoureusement plus acceptables, comme par exemple celle de la propriété d'encadrement qui reposait sur le découpage en un nombre *fini* d'intervalles du domaine ([**Weierstrass 1878**, 91]). Le professeur allemand se concentre alors sur l'énoncé qui paraît le plus proche du théorème des bornes : il considère une fonction continue $y = f(x)$ pour des valeurs de x situées "*entre deux limites fixées a et b*"[58]. Il énonce ensuite que les valeurs de y ont une borne supérieure g et étudie la question suivante : quelles sont les conditions à remplir pour que y possède un maximum ? En employant sa propriété d'encadrement, Weierstrass détermine une valeur x_0 au voisinage de laquelle y a identiquement g pour borne supérieure. Il discute alors deux cas, selon que x_0 se situe dans l'intérieur de l'intervalle (a, b) ou sur ses bords.

> Dans le premier cas, $f(x_0)$ est un maximum. En effet, $f(x_0)$ doit être égale à g puisque $f(x) - f(x_0)$ peut être rendu aussi petit que l'on souhaite, en choisissant $|x - x_0|$ suffisamment petit, et puisque par ailleurs $f(x)$ peut être choisie arbitrairement proche de g parce que x appartient à l'intervalle $x_0 - \delta \ldots x_0 + \delta$, alors on aura $f(x_0) = g$. (En supposant $f(x_0) = g + h$, nous aurions $f(x_0) - f(x) = f(x) - g - h$ et par conséquent $f(x)$ n'approcherait g aussi près que l'on souhaite que si $h = 0$).

58. "*zwischen zwei bestimmten Grenzen a und b*" [**Weierstrass 1878**, 91].

> Dans le second cas, x_0 correspond à a ou à b ; alors on ne peut affirmer que a (ou b) est un maximum que si $f(x)$ est en outre continue en a (ou en b).
>
> Si une valeur x' située entre a et b est telle que $f(x') > f(a), f(b)$, alors la valeur x_0 doit être située entre a et b.[59]
>
> [**Weierstrass 1878**, 91]

Il est remarquable que le théorème des bornes atteintes ait, entre 1874 et 1878, perdu dans le cours de Weierstrass sa valeur de *théorème*. Il n'est ici invoqué que pour un cadre d'étude précis, la recherche des extrema des fonctions. La lacune de bornitude y subsiste, c'est-à-dire que les rudiments de preuve que Weierstrass donne pour le premier cas reposent encore sur la finitude de la borne supérieure g. Par ailleurs, le théorème (ou ce qu'il en reste) intervient ici sans l'hypothèse essentielle de fermeture de l'intervalle de définition de la fonction. Les bords du domaine font l'objet d'une enquête supplémentaire où l'hypothèse de continuité doit alors être rajoutée.

L'évolution du statut, de l'énoncé et de la démonstration du théorème des bornes dans les cours de Karl Weierstrass entre 1874 et 1878 montre que le rôle que ce théorème y joue devient de plus en plus annexe. L'étude ne se concentre plus sur les propriétés des intervalles fermés bornés, et ce qui était un théorème bien mis en évidence n'est plus qu'un rapide lemme pour traiter les extrema des fonctions dans certains cas favorables. Le cœur de notre analyse cependant, *l'éternelle lacune* de la preuve, semble rester intacte. Et il devient improbable que Weierstrass puisse réaliser ce défaut, y remédier et ainsi sortir du cercle vicieux où s'entremêlent finitude, bornitude et continuité.

En effet, dans le dernier cours de 1886 du maître analyste sur des chapitres choisis de la théorie des fonctions, le théorème des bornes a complètement disparu. Les archives de ces leçons sont constituées des notes de ses élèves Paul Günther et August Gutzmer ([**Weierstrass 1886**]). Weierstrass y donne bien la définition de la borne supérieure grâce à la méthode de dichotomie. Puis il énonce et prouve ce que nous avons nommé la *propriété d'encadrement*, et qu'il appelle désormais "*théorème fondamental de la théorie des quantités*"[60]. Il reprend d'ailleurs la démonstration de [**Bolzano 1817**, 41-44] qu'il cite explicitement mais qu'il critique injustement[61]. Enfin, dans la démonstration du théorème de convergence uniforme de Heine, Weierstrass utilise le découpage de l'intervalle de définition d'une fonction continue en n intervalles semi-ouverts $[\frac{\mu}{n} ... \frac{\mu+1}{n})$. En étudiant les valeurs de la fonction sur l'un de ces intervalles, il affirme : "*il y a assurément une borne*

59. "*Im ersten Falle ist $f(x_0)$ ein Maximum. Nämlich $f(x_0)$ muß gleich g sein : Da nämlich $f(x)-f(x_0)$ durch genügend klein gewähltes $|x-x_0|$ so klein gemacht werden kann, als man will, anderseits aber $f(x)$, da x in dem Intervalle $x_0-\delta ... x_0+\delta$ liegt, der Größe g beliebig nahe gebracht werden kann, so muß $f(x_0)=g$. (Wäre $f(x_0)=g+h$, so wäre $f(x)-f(x_0)=f(x)-g-h$, und $f(x)$ könnte dem g nicht beliebig nahe kommen, wenn nicht $h=0$ ist.) Stimmt aber x_0 mit a oder b überein, so kann man nur dann von a resp. b behaupten, daß $f(a)$ resp. $f(b)$ ein Maximum ist, wenn $f(x)$ sich auch noch in a resp. b stetig ändert. Liegt x' zwischen a und b und ist $f(x')>f(a), f(b)$, so kann der Werth x_0 nur zwischen a und b liegen.*" [**Weierstrass 1878**, 91]

60. "*FundamentalSatz aus der Größenlehre*", [**Weierstrass 1886**, 60-62].

61. Weierstrass lui-même confond alors les deux notions de borne supérieure d'une plage continue de réels et de point d'accumulation d'un ensemble discret infini. Il reproche à Bolzano de ne pas avoir déterminé l'existence d'un *point* tandis que le bohémien n'était concentré que sur la mise en évidence d'une *valeur numérique*.

supérieure g et une borne inférieure g', de sorte que $g - g'$ représente la plus grande oscillation ("Schwankung") des valeurs de la fonction sur cet intervalle" [62]. C'est là ce qui subsiste péniblement des ruines de la gloire passée du théorème des bornes atteintes dans le cours du *Grand Législateur*.

Le théorème des bornes atteintes apparaît ainsi bien dans les cours de Weierstrass après 1870 et son éclosion dans les publications de Cantor et de Heine. Comme dans les versions présentées par ces-derniers, le théorème n'est présenté que dans la partie *atteinte* des bornes, sans mentionner leur finitude qui est considérée comme acquise. Mais en ne s'apercevant pas que sa démonstration repose sur le caractère fini des bornes supérieure et inférieure, Weierstrass considère alors que cette finitude découle naturellement du théorème comme un simple corollaire. La lacune de bornitude se mue en un cercle vicieux où une fonction continue devient *in fine* bornée parce qu'elle est finie, deux notions qu'il distingue désormais nettement comme en atteste l'apparition du terme *beschränkt* à partir de 1874 : le vocabulaire approprié a émergé. Par ailleurs, le théorème des bornes n'est pas jugé par le professeur de Berlin comme étant un élément central de sa théorie des fonctions, au contraire de sa propriété d'encadrement. Il disparaît ainsi peu à peu du contenu de ses leçons, sans avoir jamais revêtu sa forme rigoureuse définitive d'une part, sans que Weierstrass n'en ait été conscient d'autre part.

1.5. 1872-1875 : le rôle de Darboux.

Nous avons souligné dans la partie [Chap.6,3.2] combien Darboux était influencé au début des années 1870 à travers son Bulletin par les travaux sur les fondements de l'analyse des mathématiciens allemands. En recensant les mémoires de Cantor, de Schwarz ou de Heine, Darboux subit indirectement l'influence de Weierstrass dont il loue le cours sans même le connaître. Après [**Cantor 1870b**], c'est surtout le travail [**Heine 1872**] qui le fait découvrir le théorème des bornes.

Darboux écrit en effet la recension du travail de Heine dans le numéro de Septembre 1872 de son Bulletin [63], en y soulignant que ce travail a pour but de "*publier quelques-uns des théorèmes élémentaires*" qui forment "*la base inédite*" de la "*théorie des fonctions [que] M. Weierstrass, de Berlin, établit de la manière la plus statisfaisante*". Avec la lecture de cet aperçu du cours du professeur de Berlin, Gaston Darboux entre définitivement dans le cercle des mathématiciens qui se préoccupent alors, au début des années 1870, d'établir des fondements rigoureux pour les principes de l'analyse. Ceci a déjà fait l'objet des études précises de [**Gispert 1983**] et [**Gispert 1990**].

L'intérêt que porte immédiatement Darboux au théorème des bornes qu'il voit énoncé par Heine s'explique par son insatisfaction de la preuve du théorème fondamental de l'algèbre donnée par Cauchy et alors généralement acceptée. Il écrit à Hoüel :

> Cauchy démontre nettement que, si le module [de la fonction] a un minimum, ce minimum ne peut être que zéro, mais il ne démontre pas que

62. "*es gibt dann sicher eine obere und untere Grenze g und g', so daß $g - g'$ die größte Schwankung des Funktionswertes innerhalb dieses Intervalls darstellt.*" [**Weierstrass 1886**, 74].
63. Voir [**Darboux 1872d**].

> le module a un minimum. Cela vous paraît évident, soit. Mais comment se fait-il que ce fait ne soit pas exact pour les fonctions non continues ? [...] Concédez-vous ce point, qu'il n'est pas démontré qu'une fonction continue ait une valeur minimum ou maximum entre certaines limites ?
>
> Lettre datée du 26 Avril 1872 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Ce point particulier est, par ailleurs, un élément central de la preuve du théorème des accroissements finis que Pierre-Ossian Bonnet avait donnée dans le "*Cours*" de Serret ([**Serret 1868**, 17-19]). Bonnet, nous l'avons dit dans la section 1.3, y avait inauguré la méthode des doubles inégalités en un extremum. Néanmoins, pour obtenir l'existence d'un tel point Bonnet avait été contraint d'évoquer *l'évidence*. Il affirmait ainsi : "*si les valeurs dont il s'agit sont positives [au voisinage de x_0, la borne inférieure de l'intervalle de définition], comme $\phi(x)$ est continue et qu'elle doit s'annuler pour $x = X$, il est évident qu'il y aura une valeur x_1 entre x_0 et X telle que $\phi(x_1)$ sera supérieure ou au moins égale aux valeurs voisines*". Comme [**Gispert 1983**] l'a mis en évidence, Darboux attache une grande importance à cette démonstration de Bonnet qui contraste avec les preuves classiques qui utilisent tacitement l'uniformité de la convergence des quotients différentiels.

Mais en outre, Darboux s'interroge sur le sens à donner à la notion de continuité pour les fonctions de plusieurs variables. Dans la suite de la lettre que nous venons de citer, il met ainsi l'accent sur la différence capitale existant entre les différentes définitions de la continuité des fonctions de deux variables, suivant que l'on raisonne selon ce que nous appellons des *voisinages* (que Darboux décrit comme des régions délimitées par des courbes) ou le long de certaines courbes, ce dernier cas se rapprochant de la continuité *partielle* utilisée par Cauchy ([**Gispert 1990**, 189][64]). S'intéressant ainsi à la fois à la continuité des fonctions de plusieurs variables et à l'atteinte des valeurs extrêmes des fonctions continues, Darboux va chercher à étendre le théorème des bornes de Heine pour des fonctions de deux variables. Il explique :

> [Les démonstrations du théorème fondamental de l'Algèbre] admettent toutes, en effet, que si une fonction continue reste comprise entre deux limites fixes, et ne décroît pas, par conséquent, au-dessous d'une certaine quantité, elle atteint nécessairement la valeur qui marque la limite inférieure de toutes celles qu'elle peut avoir. [...] du moment qu'un principe n'est pas vrai pour toutes les fonctions, et que, d'ailleurs, il n'est pas contenu clairement dans la définition des fonctions continues, il devient indispensable d'en donner la démonstration. Je me suis donc proposé d'établir rigoureusement la proposition qui suit :
>
> Si une fonction continue de deux variables prend, pour tous les points situés à l'intérieur d'un contour fermé, des valeurs qui demeurent comprises entre deux nombres H et K, elle obtient nécessairement, pour un système au moins de valeurs des deux variables indépendantes, la valeur qui marque la limite minimum ou maximum de toutes les valeurs qu'elle peut prendre.

64. Voir également [**Gispert 1983**, 83] pour une reproduction de la lettre et surtout des dessins que Darboux trace pour appuyer la distinction entre les définitions.

> J'ai vu, dans le Journal de Borchardt, que M. Weierstrass avait démontré ce théorème pour une fonction d'une seule variable.
>
> [**Darboux 1872a**, 308]

Au-delà de l'esprit de rigueur qui anime Darboux, on peut souligner plusieurs éléments particulièrement intéressants de son approche vis-à-vis de celle de Heine et de Weierstrass. Tout d'abord, Darboux introduit- sans toutefois la définir - la notion de *borne supérieure* sous le nom de *limite maximum*. Ceci lui permet de distinguer cette notion de celle de *maximum*, qui pour une fonction contient déjà en son sein la condition d'atteinte effective de cette valeur. Le champ lexical des *bornes* n'existe pas encore dans le vocabulaire mathématique français [65]. Ensuite, Darboux souligne dans les hypothèses du théorème une nouvelle condition qui n'apparaissait pas chez les mathématiciens allemands : la fonction doit prendre "*des valeurs qui demeurent comprises entre deux nombres*". Pour la première fois, la bornitude de la fonction continue est évoquée dans le théorème des bornes. Cependant elle ne fait pas partie des conclusions mais des hypothèses. Darboux rajoute cette condition, sans même signaler qu'il s'agit bien d'un ajout au regard de l'énoncé originel donné par Eduard Heine dont il s'inspire. Par ailleurs, l'hypothèse de fermeture du domaine n'est pas nettement soulignée : la formulation de Darboux "*à l'intérieur d'un contour fermé*" reste vague à ce sujet. Nous verrons dans la suite qu'aucune attention ne sera portée au rôle du bord du domaine. Enfin, remarquons du point de vue de la diffusion de la paternité du théorème qu'il n'est pas étonnant que le nîmois attribue celle-ci à Weierstrass, au vu du crédit que lui donne Heine pour les théorèmes de son mémoire-résumé [**Heine 1872**].

La continuité que Darboux adopte dans son travail est "*la première définition moderne de la continuité d'une fonction de deux variables (continuité dans le plan muni de la norme euclidienne)*" ([**Gispert 1990**, 189]). La description d'un contour - si petit soit-il - autour d'un point de continuité M doit ainsi permettre de rendre (en valeur absolue) la différence des valeurs de la fonction f avec $f(M)$ arbitrairement petite. Darboux nomme ceci "*la continuité point par point*" ([**Darboux 1872a**, 308]). Il décrit ensuite géométriquement, en interprétant les valeurs de la fonction comme les longueurs d'un segment sur une "*droite des longueurs*", les notions de limite maximum (segment OB) et minimum (segment OA). Le professeur gardois remarque que le théorème des valeurs intermédiaires assure que toutes les valeurs "*intermédiaires entre OA et OB seront atteintes au moins une fois. Il n'y a de doute que pour les valeurs extrêmes OA, OB*" [**Darboux 1872a**, 311]) : ceci constitue pour lui l'enjeu du théorème des bornes.

Darboux emploie alors une méthode itérative de subdivision des "*contours*" qui forment le domaine de définition de la fonction f. Il propose de diviser le contour (*l'aire primitive (C)*) par un ensemble de droites parallèles aux axes.

65. Nous verrons d'ailleurs qu'il n'existe pas non plus en 1878 dans le vocabulaire italien en analysant le mémoire [**Dini 1878**], voir section 1.6.

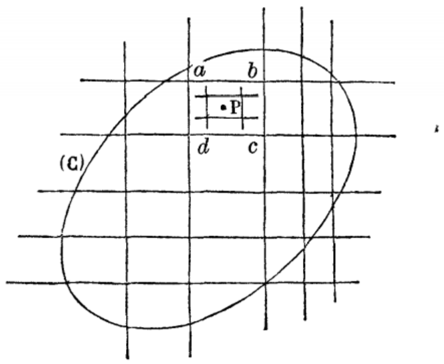


FIGURE 4. Support géométrique de la démonstration de Darboux par subdivisions successives [**Darboux 1872a**, 312]

Il remarque ensuite que "*dans l'un au moins de ces contours, la limite inférieure OA sera la même que dans le contour total*" ([**Darboux 1872a**, 312]), puis procède de nouveau à la subdivision de ce nouveau contour, et ainsi de suite. Ce-faisant, il aboutit à ce qui était la *propriété d'encadrement* dans les cours de Weierstrass :

> on formera ainsi une suite de contours tous compris les uns dans les autres, devenant aussi petits qu'on le voudra, et pour lesquels la limite inférieure est toujours la même. [...] comme les rectangles intérieurs les uns aux autres décroissent dans leurs deux dimensions, ils tendent vers un point unique P, qu'ils comprennent dans leur intérieur.
>
> [**Darboux 1872a**, 312]

Darboux utilise ainsi, sans la questionner outre mesure, la convergence de son procédé itératif de subdivision vers un unique point. Par ailleurs, il ne prête pas attention à la possibilité d'une convergence sur le bord du domaine de départ qui semble exclue de l'étude. Pour démontrer finalement que $f(P) = OA$, le nîmois ne va pas employer un raisonnement par l'absurde - contrairement à Heine et Weierstrass - mais une preuve directe. Il remarque que par définition de la continuité en P, il peut délimiter une "*aire*" autour de P dont tous les points (x, y) respectent la condition

$$f(x, y) - f(P) < \delta \quad \text{en valeur absolue}$$

Puis il note que cette aire "*comprend un nombre illimité des contours intérieurs rectangles considérés plus haut*", et que par conséquent elle comprend "*des points pour lesquels :*

$$f(x, y) - OA < \varepsilon \quad \text{en valeur absolue "}$$

En comparant les deux inégalités, Darboux en conclut :

$$OA - f(P) < \delta + \varepsilon \quad \text{en valeur absolue}$$

ce dont il tire le résultat souhaité $f(P) = OA$.

Darboux parvient ainsi lui aussi à bien articuler la notion de continuité autour de celle de *limite inférieure* (borne inférieure) dans le but de démontrer l'atteinte de cette valeur.

Il est remarquable de noter que l'égalité finale est obtenue en assimilant une différence - en valeur absolue - inférieure à deux infiniment petits indépendants à une égalité. Ceci permet au gardois de ne pas employer un raisonnement par l'absurde.

La démonstration de Darboux ne souffre pas de la même lacune de bornitude que celle de Weierstrass, puisque la bornitude de la fonction est devenue une hypothèse explicitement citée dans l'énoncé du théorème. Elle permet d'assurer la finitude des bornes (*limites*) supérieures et inférieures, avant d'utiliser celles-ci dans les raisonnements et de les manipuler comme des quantités réelles finies. Cependant plusieurs limites doivent être évoquées quant à la version donnée ici par Darboux : d'une part, la fermeture du domaine n'est pas mentionnée. La possibilité de convergence sur le bord de la méthode de subdivisions ne semble pas envisagée. D'autre part, la convergence de cette méthode ne fait l'objet ni d'une enquête, ni même d'une simple remarque. Si Darboux élargit ses centres d'intérêt sous l'influence des analystes allemands, ceci atteste de son désintérêt pour les théories de construction des nombres réels. Absent de ce champ de recherche pourtant connexe aux intérêts qu'il témoigne (voir [**Petri Schappacher 2007**], [**Boniface 2007**] et [**Epple 2003**]), ceci constituera une limite importante de son travail d'analyste.

Jules Hoüel ne semble pas avoir goûté à la méthode de dichotomie et à la rigueur nouvelle du théorème des bornes exposé par Darboux. Ce-dernier parle en effet dans leur correspondance de "*notre numéro d'Octobre [du Bulletin] où figure ce diable d'article qui vous horripile*" [66]. Mais le nîmois va reprendre le théorème des bornes, ainsi que la notion de *limite supérieure* et l'usage de la dichotomie dans son important mémoire "*sur les fonctions discontinues*" ([**Darboux 1875b**]). Ce mémoire a fait l'objet de plusieurs études : par exemple [**Gispert 1983**] pour les fondements de l'analyse en général et les fonctions continues mais *saugrenues*, [**Henry Nabonnand 2016**, 79-91] pour les fonctions sans dérivée. Comme l'ont fait ressortir ces travaux, Darboux entend y exposer méthodiquement et rigoureusement les principes fondamentaux du calcul différentiel et intégral. Ce mémoire participe également de sa volonté de clore le débat sur la non-dérivabilité des fonctions continues et de diffuser et rendre totalement rigoureuse l'intégrale de Riemann qu'il vient de découvrir en traduisant pour le Bulletin le travail de l'allemand (voir [Chap.6,3.2]).

La première partie du mémoire de Darboux est intitulée "*Des fonctions et de la continuité*" ([**Darboux 1875b**, 59]). C'est ici que se trouvent établis le théorème des bornes et les notions qui lui sont reliées. Dans un premier temps, le mathématicien de la rue d'Ulm souligne la distinction entre les deux notions de finitude et de bornitude. Darboux bien sûr n'emploie pas ces termes précis, il parle de la différence entre une fonction "*qui demeure finie pour toute valeur de x*" et une fonction "*qui demeure comprise entre deux limites fixes*" ([**Darboux 1875b**, 62]). C'est dans ce cadre qu'il donne la définition des *limites maximum et minimum* d'une fonction :

> Etant donnée une fonction $f(x)$ qui reste comprise, quand x prend les valeurs x_0, x_1 et toutes les valeurs intermédiaires, entre deux limites fixes A et B, on peut assigner deux nombres M, m donnant lieu aux propriétés suivantes : M est supérieur ou égal aux diverses valeurs de la fonction, et il y a au moins une valeur de la fonction supérieure à $M-\varepsilon$, ε étant aussi petit qu'on le veut. De même m est inférieur ou égal à toutes les valeurs

66. Lettre datée du 7 Septembre 1872, [**Archives épistolaires Darboux**].

> de la fonction, et il y a au moins une valeur de la fonction inférieure à $m + \varepsilon$.
>
> [Darboux 1875b, 61]

Il s'agit donc bien ici de la définition des bornes supérieure et inférieure d'une fonction supposée bornée, c'est-à-dire d'une plage de réels bornée. Darboux tire cette définition de [Cantor 1871], puisque [Heine 1872] ne la faisait pas figurer dans son travail. La démonstration que donne le nîmois est distincte de celle de Weierstrass : il divise en n intervalles égaux l'intervalle $[A, B]$, et conserve l'intervalle $[X_i, X_k]$ le plus petit possible (au sens de l'inclusion) où figurent encore toutes les valeurs de la fonction. Avec l'augmentation du nombre de subdivisions n, Darboux construit ainsi "*une suite d'intervalles tous compris les uns dans les autres et tendant vers un intervalle limite* $[m, M]$" ([Darboux 1875b, 61]). On constate une nouvelle fois que la convergence des processus de dichotomie ne fait l'objet d'aucune remarque de la part du nîmois. Pour son article de 1872 déjà, sa démonstration "*n'est pas entièrement satisfaisante car [elle] revient à admettre l'existence d'une limite commune à deux suites adjacentes*" dans la convergence des subdivisions répétées ([Gispert 1983, 45]). Dans son mémoire de 1875, c'est la convergence des suites monotones bornées qui est tacitement admise. Ne se penchant pas sur la construction des réels, Darboux laisse de côté les problèmes de convergence des processus itératifs tirés de la méthode de dichotomie de Bolzano et de Weierstraß.

Fort de cette définition, le professeur gardois utilise la fonction $y = \frac{1}{x}$ pour $x \in]0, 1]$, $y = 0$ pour $x = 0$. Cette fonction est *bien définie* : elle est finie pour toute valeur de $x \in [0, 1]$ [67]. En revanche, "*elle ne reste pas comprise entre deux limites fixes*" : elle n'est pas bornée.

Après avoir énoncé le théorème de valeurs intermédiaires (sans en donner de preuve), Darboux énonce et prouve le théorème des bornes :

> Etant donnée une fonction de x finie et continue dans l'intervalle $[a, b]$, cette fonction atteint ses limites maximum et minimum pour une ou plusieurs valeurs de x comprises dans l'intervalle, et par conséquent elle passe par toutes les valeurs intermédiaires entre M et m.
>
> [Darboux 1875b, 62]

On constate ici que l'hypothèse de bornitude est devenue implicite, comme ce sera le cas dans toute la suite du mémoire (y compris lors de la célèbre définition des *sommes de Darboux* quelques pages plus loin). Pour Darboux, il est néanmoins clair que cette hypothèse est reconduite à chaque énoncé. Le contenu de ses échanges avec Hoüel nous le confirmera.

La démonstration donnée par Darboux utilise exactement la méthode de dichotomie. En raisonnant sur la limite supérieure M, il divise $[a, b]$ en deux intervalles égaux et utilise le fait que "*dans l'un au moins de ces [deux] intervalles la limite maximum sera M*" ([Darboux 1875b, 63]). Puis, en "*continuant indéfiniment*", il obtient "*une suite d'intervalles tous compris les uns dans les autres et tendant vers zéro pour lesquels la limite maximum sera M*" : c'est la propriété d'encadrement de Weierstrass. Pour justifier de la convergence de ce que nous appelons les *intervalles emboîtés*, Darboux fait remarquer que

67. Darboux note les intervalles entre parenthèses, comme cela était courant en 1875. Nous avons ici employé la notation moderne entre crochets. Néanmoins cet exemple montre que pour Darboux, l'écriture parenthésée d'un intervalle inclut bien ses bornes.

leurs bornes forment deux suites monotones de monotonie opposée. Il en utilise ensuite sans donner plus de détail : "*soit α leur limite commune, ...*" ([**Darboux 1875b**, 63]). Une nouvelle fois, comme l'a souligné Hélène Gispert, Darboux admet - et sans le rappeler - la convergence des suites adjacentes.

La seconde partie de la démonstration est extrêmement similaire à celle donnée en 1872. Par construction de cette valeur α et par définition de la limite supérieure M, il existe une valeur $\alpha \pm \theta h$ telle que :

$$M - f(\alpha \pm \theta h) < \varepsilon$$

Mais par continuité en $x = \alpha$, Darboux obtient d'autre part (en valeur absolue) :

$$f(\alpha) - f(x \pm \theta h) < \varepsilon$$

De ces deux inégalités, il conclut :

$$M - f(\alpha) < 2\varepsilon \quad \longrightarrow \quad M = f(\alpha)$$

Comparée à la version donnée par Darboux de ce même théorème en 1872, on peut souligner que la démonstration n'a pas sensiblement évolué. Les méthodes sont identiques, et la convergence du procédé itératif de subdivision, admise, n'est soumise à aucune analyse. Cependant, il est plus nettement mis en avant en 1875 que l'intervalle d'étude doit être fermé borné. Rien n'était signalé à ce sujet dans [**Darboux 1872c**], tandis que dans ce mémoire cette hypothèse est bien présente dans l'énoncé du théorème. Ensuite, Darboux souligne à la fin de sa preuve la possibilité de convergence sur le bord de la méthode de dichotomie. Il énonce ainsi : "*le raisonnement se ferait à peu près de la même manière si α était une des limites extrêmes a, b de l'intervalle primitif*" ([**Darboux 1875b**, 64]).

Par ailleurs, nous devons noter qu'il reste clairement établi par Darboux que l'objet du théorème reste l'étude d'une fonction qui est d'emblée supposée bornée. Ceci était mentionné sans détour dans l'article de 1872, et si cette hypothèse est implicitée dans l'énoncé de 1875, l'usage de la notion même de limite supérieure rappelle sa présence. Ceci est donc particulièrement remarquable, notamment au vu de l'étude du cours de Weierstrass (1.4) et de la formulation du théorème par Cantor et Heine (1.3). Chez tous ces mathématiciens, la bornitude constituait en effet une lacune majeure du théorème qui n'était concentré que sur l'atteinte des bornes sans étudier leur nature finie (ou infinie). Dans la version de Heine dont Darboux s'inspire directement, le fait qu'une fonction continue soit bornée était tout simplement considéré comme une évidence qui ne méritait pas d'être énoncée. Ensuite, dans les cours de Weierstrass, la lacune de sa preuve, intimement liée au défaut de bornitude, le laissera penser que le fait que la borne supérieure soit finie n'est qu'une conséquence du théorème dont cette propriété lui semble alors être totalement exclue, de l'énoncé comme de la démonstration.

Gaston Darboux replace donc la finitude de la borne supérieure rigoureusement comme une hypothèse de l'énoncé du théorème, nécessaire à la validité de la preuve qui en établit l'atteinte par continuité sur un fermé borné. Ceci souligne encore à quel point le nîmois approche avec un regard critique les propositions mathématiques. Ce qui peut paraître un détail avait en effet échappé à Cantor, Heine, et échappera à Weierstrass et à beaucoup d'autres (voir 1.6). Avoir décelé cette faille dans un énoncé qu'il reçoit pourtant en 1872 comme étant *a priori* bien établi et prouvé par Weierstrass qui est alors considéré comme le maître des fondements de l'analyse témoigne de la ténacité de la critique du regard scientifique de Darboux.

On pourrait s'interroger à bon droit sur l'éventuelle quête de Darboux d'établir la bornitude de la fonction non plus comme une hypothèse du théorème des bornes mais comme une conclusion, ce qui renforcerait cet énoncé. En effet, le mathématicien recherche alors à énoncer les théorèmes avec les hypothèses les moins restrictives possibles. Il souhaite "*bien définir les hypothèses sur lesquelles on s'appuie, ne donner que celles qui sont nécessaires pour l'exactitude du théorème*" [68]. Dans cette optique, Darboux vise à ne jamais rien *admettre*, c'est ce que le contenu de ses échanges avec Hoüel démontre avec force [69]. Il est donc symptomatique que le nîmois dût admettre, à plusieurs reprises dans ces mêmes échanges, la bornitude des fonctions continues sur les intervalles fermés bornés. Il s'agit d'un point qu'il ne parvient pas à démontrer, voire qu'il ne cherchera pas à démontrer : ceci est très relié à son désintérêt pour la construction des nombres réels.

Plusieurs lettres écrites à Hoüel témoignent de ceci :

> On peut démontrer, et on n'a aucune peine à admettre, qu'une fonction continue qui varie de 0 à 0 quand x varie de a à b passe dans l'intervalle par une valeur plus grande en valeur absolue que toutes les autres correspondant à $x = x_1, \;\; b < x_1 < a$ [...]
>
> Il est vrai que j'admets qu'il y a une fonction allant de 0 à 0 et ayant un minimum.
>
> Lettre datée du 16 Avril 1874

> Remarquez premièrement que la démonstration que je vous propose admet bien qu'une certaine fonction a un maximum, mais cette fonction est continue et on peut démontrer qu'elle a un maximum.
>
> Lettre datée du 27 Avril 1874

> Quoi de plus simple que d'admettre qu'une fonction qui va de 0 à 0 passe par un maximum en valeur absolue ?
>
> Lettre datée du 24 Janvier 1875

> Quand une fonction est finie continue et réelle, et que l'on considère toutes les valeurs de la variable x comprises entre a et b, la fonction a une certaine valeur minimum qui est effectivement atteinte [...]
>
> Lettre datée du 27 Décembre 1880 [70]

Darboux n'admet que rarement : dès qu'il possède une démonstration des énoncés qu'il discute avec son collaborateur et contradicteur favori Hoüel, il met un point d'honneur à la détailler dans ses lettres, quitte à la répéter à de nombreuses reprises. C'est notamment le cas pour les solutions singulières des équations différentielles [71]. Le fait que Darboux continue d'*admettre* le théorème des bornes atteintes lorsque les fonctions continues ne sont pas en outre supposées bornées montre nettement qu'il s'agit là d'un point qu'il ne

68. Lettre datée du 12 Janvier 1875, [**Archives épistolaires Darboux**].
69. Voir [**Gispert 1983**], [**Henry Nabonnand 2016**].
70. Lettres de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].
71. Voir notre prochaine section 2. Voir également l'acompte de ces échanges dans [**Gispert 1987**].

veut ni ne sait démontrer, en dépit de ce qu'il peut parfois affirmer ("*on peut démontrer que...*").

L'apport de Darboux vis-à-vis du théorème des bornes consiste donc essentiellement en un positionnement rigoureux du rôle de la finitude de la borne supérieure. Ceci, nous l'avons vu, était soit considéré comme évident, soit une source d'erreur chez Weierstrass qui croyait d'abord pouvoir s'en passer pour ensuite le déduire. Pertinent dans son approche critique de l'énoncé de Heine, Darboux contribue à envisager avec rigueur l'hypothèse de bornitude dans le théorème des bornes. Il introduit par ailleurs une distinction très nette entre les notions de finitude et de bornitude, bien que le vocabulaire adapté n'émerge pas encore.

Néanmoins, Darboux ne se penche pas sur la possibilité de démontrer que la borne supérieure est finie, ce qui étendrait le théorème des bornes (en lui donnant son apparence moderne). Cette assertion est en effet liée à la propriété d'accumulation, et *in fine* aux fondements de la théorie des nombres réels (construction, propriétés) dont Darboux semble se détourner. C'est ce dont atteste notamment son absence d'analyse des convergences des procédés itératifs et des suites adjacentes par exemple. De même, dans son grand programme de Calcul Différentiel et Intégral de sa lettre du 23 Décembre 1873 (voir [Chap.6,3.2]), une véritable étude des nombres réels fait-elle encore défaut [72]. En outre, il est symptomatique que le nîmois n'ait jamais jugé le travail de son compatriote Charles Méray sur la construction des nombres réels ([**Méray 1869**]) - travail qu'il connaît pourtant [73] - digne d'être mentionné dans son Bulletin. Ce manque d'intérêt constitue une lacune qui explique au moins en partie les limites du grand travail que Darboux entreprend entre 1872 et 1875 sur les fondements de l'analyse.

1.6. 1885-86 : forme définitive du théorème des bornes.

Nos études nous ont permis d'établir précisément les contours du théorème des bornes dans les cours de Weierstrass, dans les mémoires de Darboux, mais également dans les publications de Cantor et Heine où il était d'abord apparu. Nous avons mis en évidence que le rôle de la finitude de la borne supérieure y était problématique. Pour Darboux, cela devait constituer une hypothèse pour conclure en toute rigueur à l'atteinte de cette borne. En revanche, pour Weierstrass ceci découlait comme une conséquence facile d'un théorème dont la preuve comportait en réalité une lacune difficile à déceler. Nous allons voir l'influence de ces deux courants de démonstrations jusqu'en 1886, où le théorème aura véritablement acquis son aspect définitif.

72. On notera particulièrement que Darboux ne mentionne le critère de Cauchy que comme une condition nécessaire de la convergence des suites.

73. Darboux évoque le travail de Charles Méray sur la *nature des limites* (i.e. la construction de $\mathbb{R}$) dans une de ses lettres à Hoüel ([**Archives épistolaires Darboux**]). A propos de ce mémoire, voir [**Epple 2003**].

Les *Fondamenti* de Dini (1878)

FIGURE 5. Ulisse Dini (à gauche) et Salvatore Pincherle (à droite)

Professeur d'Analyse supérieure à l'Université de Pise, Ulisse Dini publie en 1878 un important traité sur les fondements de la théorie des fonctions de la variable réelle ([**Dini 1878**]). Informé surtout par Hermann Schwarz avec qui il correspond beaucoup en 1871 [74] au sujet des fondements de l'analyse et des méthodes du cours de Weierstrass, Dini mentionne dans l'introduction de son ouvrage l'influence des mémoires de Schwarz, Cantor, Hankel et Heine mais également le mémoire de 1875 de Gaston Darboux ([**Dini 1878**, IV]).

De fait, Dini adopte l'approche proposée par Darboux et non celle de Weierstrass du point de vue du traitement de la bornitude des fonctions, bien qu'il suive pas-à-pas les étapes du cours du maître allemand qu'il connaît grâce à ses échanges avec Schwarz. Il commence en effet par construire la borne supérieure (*limite superiore*) d'une plage de réels bornée grâce au "*processo della divisione successiva dell'intervallo*" ([**Dini 1878**, 19]). Il démontre également la propriété d'accumulation de Bolzano-Weierstrass, en utilisant le lexique de Cantor des *ensembles dérivés* (*gruppi derivati*). Puis il se concentre sur la notion de continuité et ses propriétés. C'est là qu'il fait montre de la même approche que Darboux dans le but d'étendre aux images des fonctions les notions qu'il vient de définir pour les ensembles bornés. Il souligne :

> [...] sauf mention explicite du contraire, nous supposerons toujours dans la suite que [la fonction] est réelle et finie (c'est-à-dire que ses valeurs sont comprises entre deux nombres finis). [75]
>
> [**Dini 1878**, 37]

74. Voir [**Bottazzini 1992**].
75. "*[...] a meno che non si avverta espressamente il contrario, supponiamo sempre che essa [funzione] sia reale e sia finita (cioè i suoi valori siano tutti compresi fra due numeri finiti).*" [**Dini 1878**, 37]

On constate la proximité avec les expressions de Darboux, ainsi que là encore l'absence d'un vocabulaire adéquat pour spécifier la notion de bornitude : comme pour le français *borné*, l'adjectif italien *limitato* ne fait alors pas partie du lexique mathématique.

Dini démontre alors la *propriété d'encadrement* pour une telle fonction (c'est-à-dire bornée) en employant toujours la dichotomie. Il est remarquable que ce soit sur cette propriété d'encadrement - et non sur le théorème des bornes qui suivra - que Dini mette l'emphase, en la nommant "*teorema di Weierstrass relativo ai limite superiori*" ([**Dini 1878**, 43]). Si cela contraste avec la dénomination moderne, nous avons vu que c'est pourtant tout à fait en accord avec la grande importance de cette propriété dans le cours du professeur de Berlin. Le théorème des bornes vient ensuite :

> Une fonction $f(x)$ continue sur l'intervalle (α, β) [76] qui n'est pas constante atteint effectivement sur cet intervalle sa valeur maximum et sa valeur minimum. [77]
>
> [**Dini 1878**, 51]

Pour souligner l'enjeu de ce théorème, Dini rappelle la distinction essentielle qui existe entre les notions de borne supérieure (*limite superiori*) et de valeur maximum (*valore massimo*) : la seconde est une valeur effectivement atteinte par la fonction, ce qui n'est pas (nécessairement) le cas de la seconde. Le mathématicien italien rappelle que pour une fonction non continue sur l'intervalle (α, β), le maximum peut ne pas exister. Le théorème des bornes montre alors que dans le cas des fonctions continues, bornées, sur un intervalle fermé borné, ces deux valeurs coïncident. La démonstration de Dini est très concise : ayant démontré le "*théorème de Weierstrass*", c'est-à-dire la propriété d'encadrement, Dini emploie cette propriété pour déterminer une valeur x' de (α, β) dont les voisinages continuent de donner identiquement aux valeurs de f la borne supérieure globale notée λ. Il utilise alors un argument de continuité séquentielle, inspiré de Cantor et détaillé dans les énoncés précédents, pour en conclure l'égalité souhaitée $f(x') = \lambda$.

L'énoncé de Dini est donc très proche de celui de Darboux, bien qu'il admette une démonstration plus concise grâce à l'utilisation de la propriété d'encadrement, énoncée indépendamment en-dehors de toute considération de continuité. Comme le gardois, le natif de Pise prend bien garde de ne comprendre dans son étude que les fonctions bornées. C'est donc le cas du théorème des bornes, qui est énoncé et prouvé uniquement dans le cadre de l'atteinte d'une borne supérieure dont on a supposé par hypothèse la finitude. Comme chez Darboux, en adoptant cette approche Dini ne semble pas avoir cherché à démontrer la finitude de la borne supérieure. Le point de départ de leurs travaux est l'analyse des ensembles de réels bornés, et donc des fonctions bornées. Ceci, d'ailleurs, constitue une importante limite des mémoires de l'un et de l'autre.

Le travail de Dini peut être rapproché de celui de Salvatore Pincherle. Ayant, nous l'avons dit, assisté à la leçon de 1878, Pincherle publie en 1880, encouragé par Battaglini et sans avoir consulté Weierstrass (qui aurait probablement émis des réticences), un résumé des cours du professeur de Berlin ([**Pincherle 1880**]). Pincherle y détaille la construction de la borne supérieure pour un ensemble de réels non nécessairement borné, ce qui inclut la possibilité d'obtenir une borne infinie ([**Pincherle 1880**, 245]). Dans la troisième section

76. Tout comme Darboux, Dini écrit les intervalles fermés en utilisant des parenthèses.

77. "*Una funzione $f(x)$ che in un dato intervallo (α, β) è continua e non è costante, prende sempre effettivamente nello stesso intervallo il valore massimo e il valore minimo*" [**Dini 1878**, 51]

de son travail, Pincherle présente les théorèmes sur les *propriétés générales des fonctions*. Tout comme Dini et Darboux, il restreint alors toujours ses énoncés aux fonctions bornées que, faute d'un vocabulaire approprié, il nomme *toujours finie* (*sempre finita*) :

> soit y une fonction prenant une valeur bien déterminée pour toute valeur de x comprise entre deux limites p et q ; nous supposerons en outre que y est toujours finie ("*sempre finita*") dans cet intervalle.[78]
>
> [**Pincherle 1880**, 248]

Ceci témoigne d'une première évolution lexicale vers la distinction des notions de finitude et de bornitude : il existe désormais (à la fin des années 1870 et au début des années 1880), les fonctions *finies*, c'est-à-dire uniquement bien définies, et les fonctions *toujours finies* qui sont bornées. Cette évolution du lexique scientifique italien est, nous le verrons, exactement identique à ce qui se produira bientôt en France au début des années 1880.

Le théorème central énoncé par Pincherle dans cette section est la propriété d'encadrement :

> Soit L la borne supérieure des valeurs de la fonction $y = f(x)$ pour des valeurs de x comprises entre deux limites p et q, alors il existe dans l'intervalle $q - p$[79] au moins un point X tel que les bornes supérieures (*limite superiore*) des valeurs de y correspondant à celles de x dans tout voisinage de X, si petit soit-il, restent identiquement égales à L.[80]
>
> [**Pincherle 1880**, 249]

Le théorème des bornes est absent du *Saggio* de Pincherle. La propriété d'encadrement ci-dessus y est le théorème principal relativement aux propriétés générales des fonctions. Ceci concorde avec l'emphase mise sur cet énoncé par Dini, qui considérait cette propriété comme le théorème important de Weierstrass relativement à la borne supérieure ([**Dini 1878**, 43]). Ceci correspond également à l'importance que Weierstrass lui-même accordait à cette propriété, qui constituait pour lui "*le théorème fondamental de la théorie des quantités*" ([**Weierstrass 1886**, 60]). Conformément à l'évolution générale du contenu du cours de Weierstrass dans les années 1870 (que nous avons étudiée dans la section 1.4), le théorème des bornes ne fait pas partie des énoncés regardés comme importants dans le cours : il est ainsi logique que Pincherle ne l'ait pas mentionné dans son résumé.

78. "*abbia y un valore determinato per ogni valore di x compreso fra due limiti p e q ; si supponga inoltre y sempre finita in quell'intervallo.*" [**Pincherle 1880**, 248]

79. Cette notation originale correspond chez Pincherle à l'intervalle fermé borné $[p, q]$.

80. "*Se L è il limite superiore dei valori della funzione $y = f(x)$ corrispondenti ai valori di x compresi fra i due limiti p e q, vi sarà nell'intervallo $q - p$ per lo meno un punto X avente la proprietà che il limite superiore dei valori di y corrispondenti ai valori di x presi in qualunque intorno piccolo quanto si vuole di X, sarà ancora L.*" [**Pincherle 1880**, 249]

La *FunktionenTheorie* de du Bois-Reymond (1882)

FIGURE 6. Paul du Bois-Reymond

Né à Berlin en 1831, Paul du Bois-Reymond commence sa carrière comme professeur des écoles - tout comme Weierstrass - à Berlin. Il devient ensuite professeur dans les Universités de Heidelberg, Fribourg puis finalement Tübingen où il prend la place de feu Hermann Hankel en 1874. Du Bois-Reymond est un des plus proches amis de Karl Weierstrass. Comme nous le verrons plus loin en 3.1, c'est en effet à lui que Weierstrass confie par exemple le soin de publier début 1875 son exemple de fonction continue nulle-part dérivable ([**du Bois-Reymond 1875**])[81]. Leur correspondance fournie (qui se trouve dans les [**Archives épistolaires Weierstraß**]) révèle également que c'est vers du Bois-Reymond que se tourne parfois le grand analyste de Berlin pour des questions de réclamation de priorité. Nous le verrons dans le cas de Gaston Darboux dans la section 3.

En 1882, Paul du Bois-Reymond publie un ouvrage sur *la théorie générale des fonctions* ("*Die allgemeine Funktionentheorie*") où il développe les méthodes de son illustre ami Weierstrass. On y trouve notamment le théorème des bornes atteintes, dans le chapitre 4 intitulé "*sur les fonctions*".

Du Bois-Reymond définit et prouve l'existence de la borne supérieure de l'ensemble des valeurs prises par une fonction bornée sur un intervalle fermé borné - qu'il note (a, b). Il y mentionne très clairement l'hypothèse de bornitude, qui faute de vocabulaire précis est énoncée en précisant que les valeurs de la fonctions "*restent comprises entre des bornes finies*"[82]. La méthode de preuve utilisée est alors un processus itéré de subdivisions en 10 intervalles égaux, ce qui permet au mathématicien de Tünbingen de construire le développement décimal de la borne supérieure en progressant d'un chiffre à chaque itération. Il cite ensuite le théorème des valeurs intermédiaires, puis enfin le théorème des bornes de la manière suivante :

81. Voir cette fonction et le détail de la preuve dans [**Henry Nabonnand 2016**, 68-9].
82. "*zwischen endlichen Schranken verbleibt*" [**du Bois-Reymond 1882**, 248].

> III. Une fonction continue dans l'intervalle (a, b) y atteindra les valeurs de ses bornes supérieure et inférieure.
>
> Preuve. [...] Posons à présent $h = \beta_0, \beta_1\beta_2...$ la borne supérieure des valeurs de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle (a, b) [...][83]
>
> [**du Bois-Reymond 1882**, 252-253]

Tant dans l'énoncé que dans la preuve, la version du théorème des bornes de du Bois-Reymond est très exactement le reflet de celle du cours de Karl Weierstrass de 1874. Elle comporte précisément la même lacune : sans avoir égard à la bornitude de la fonction, le théorème stipule uniquement l'atteinte des bornes extrêmes. Dans le cours de la démonstration, du Bois-Reymond utilise l'écriture décimale de la borne supérieure h que, de fait, il considère comme finie. Tout comme celle de Weierstrass, sa preuve repose donc sur la finitude de la borne supérieure. Il est difficile de dire si du Bois-Reymond pense, comme Weierstrass, que sa démonstration permet du même coup de s'assurer de cette finitude, ou s'il considère tout simplement la finitude de la borne supérieure d'une fonction continue comme une évidence. Toujours est-il que sa démonstration présente la même lacune que celle de Weierstrass.

Par ailleurs, du Bois-Reymond appuie la paternité de Karl Weierstrass pour ce théorème d'atteinte de la borne supérieure. Selon lui, cet énoncé doit être appelé "*théorème de Weierstrass*" bien qu'il soit apparu dans des publications d'autres mathématiciens que son ami de Berlin :

> ce théorème III est nommé après M. Weierstrass qui le démontre et l'emploie dans ses cours. Il a été publié sans preuve par M. Schwarz (Borch. Journ. Bd. 72, pag. 141, remarques) [...] Mais quoi qu'il en soit, c'est M. Weierstrass qui le premier a appelé l'attention des mathématiciens sur la nécessité d'énoncer et de prouver un tel théorème.[84]
>
> [**du Bois-Reymond 1882**, 252-253]

La référence évoquée ici n'est pas un article de Schwarz mais bien le second article de Cantor ([**Cantor 1870b**]) où, nous l'avons vu, le théorème est évoqué pour la première fois (voir section 1.3). Cantor lui-même donnait crédit à Weierstrass pour avoir énoncé et prouvé le théorème des bornes qu'il utilisait dans le lemme que Schwarz lui avait transmis. Pourtant nos études ont confirmé que ceci était incorrect, et que le cours de Weierstrass (avant 1870) s'il comportait tous les outils mathématiques liés à l'établissement du théorème, ne comportait pas ledit théorème. Schwarz lui-même avait en outre, dans ses lettres à Cantor, crédité Weierstrass non de *l'énoncé* du théorème mais des *méthodes de démonstration* qui permettait de le prouver.

On peut ici constater la présence de deux courants de diffusion bien distincts du théorème des bornes à deux égards. Au regard de l'énoncé et de la démonstration tout d'abord, il existe jusqu'au milieu des années 1880 la version de Heine et de Weierstrass et la version

83. "*III. Eine in einem Intervall (a, b) stetige Function $f(x)$ wird darin ihrer oberen und ihren unteren Grenze irgendwo gleich.*
Beweis. [...] Nun sei $h = \beta_0, \beta_1\beta_2...$ die obere Grenze der Functionswerthe $f(x)$ im Intervall (a, b) [...]" [**du Bois-Reymond 1882**, 252-253]

84. "*Dieser Satz III wird nach Hrn Weierstrass benannt, der ihn in seinen Vorlesungen beweist und verwendet. Er ist ohne Beweis veröffentlicht durch Hrn Schwarz (Borch. Journ. Bd. 72, pag. 141, Anm) [...] Jedenfalls hat Hr Weierstrass zuerst auf die Nothwendigkeit, dergleichen Sätze aufzustellen und zu beweisen, die Aufmerksamkeit gelenkt.*" [**du Bois-Reymond 1882**, 252-253]

de Darboux et de Dini. La première, qui est la forme première que l'énoncé a pris sous la plume de Schwarz et de Cantor, ne faisait figurer la bornitude de la fonction ni dans les hypothèses ni dans les conclusions du théorème. Celle-ci était supposée acquise, comme une évidence ou même pour Weierstrass comme un corollaire d'un théorème dont il n'avait pas repéré le vice caché. La seconde version, quant à elle, présentait la bornitude comme une hypothèse requise pour énoncer et prouver le théorème d'une manière rigoureuse.

Par ailleurs, il existe également deux courants de diffusion de la paternité du théorème, surtout en comparaison avec la *propriété d'encadrement*. Pour Schwarz, Dini et Pincherle, qui connaissent précisément le cours de Weierstrass, le théorème des bornes n'en est pas un énoncé central. C'est la *propriété d'encadrement*, permettant d'isoler la conservation de la borne supérieure des fonctions (et qui n'est pas reliée à la notion de continuité), qui constitue le théorème majeur du maître de Berlin. En revanche, Darboux, du Bois-Reymond, et généralement la plupart des mathématiciens découvrant le théorème des bornes dans le mémoire [**Heine 1872**] l'attribuent directement à Weierstrass. Heine avait laissé une certaine ambiguïté quant à l'origine des théorèmes qu'il présentait et à la part de ses propres recherches ou de celles de Cantor et de Schwarz. Mais en se plaçant globalement dans le rôle d'une reproduction des éléments des leçons de Weierstrass, et en ajoutant à cela les remarques de [**Cantor 1870b**], il n'est pas étonnant que la paternité du professeur de Berlin sur le théorème des bornes s'affirme progressivement.

Les *Vorlesungen* d'Otto Stolz (1885) : la lacune finalement exposée

FIGURE 7. Otto Stolz

Etudiant autrichien de Karl Weierstrass, Otto Stolz - né en 1842 dans la belle région autrichienne du Tyrol - étudie dans un premier temps à Innsbruck au début des années 1860. Il y recevra son doctorat, puis partira à Vienne où il enseignera au titre de *Privatdozent* jusqu'en 1869. Il reçoit alors une bourse d'étude qui lui permettra d'effectuer deux années dans les Universités allemandes : Berlin la première année, puis Göttingen la seconde. Il retournera ensuite enseigner à Innsbruck où il restera toute sa vie. Ayant suivi les cours de

Weierstrass en 1870, Stolz rétablira le rôle important et oublié des travaux de Bernhard Bolzano dans l'article [**Stolz 1881**], dont Weierstrass aura retiré au milieu des années 1860 la désormais célèbre *Schlußweise* : la dichotomie et plus généralement les processus itératifs de subdivisions.

En 1885, Stolz publie un important traité sur l'*arithmétique générale* ([**Stolz 1885**]), où l'arithmétisation de l'analyse atteint son apogée. Il est alors le premier à déceler la lacune de la preuve de Karl Weierstrass, à y remédier et ainsi à énoncer la bornitude des fonctions continues sur les fermés bornés comme une conclusion à part entière du théorème des bornes. Ayant détaillé la construction de la borne supérieure d'un ensemble de réels, borné d'abord puis non-borné ([**Stolz 1885**, 149-152]), Stolz ne donne pas la propriété d'encadrement de Weierstrass ni la propriété d'accumulation dite de Bolzano-Weierstrass. Mais ces propriétés vont apparaître dans le cours de la démonstration de ce qui constitue désormais le théorème central pour les fonctions continues : le théorème des bornes, sous une version enrichie, rigoureuse, moderne :

> 15. Théorème. Soit $f(x)$ une fonction bien définie, continue pour toutes les valeurs $a \leq x \leq b$, alors la quantité $f(x)$ possède une borne supérieure g finie, et une borne inférieure k finie. En outre, il existe au moins une valeur c $(a \leq c \leq b)$ pour laquelle $f(x) = g$ et au moins une valeur d $(a \leq d \leq b)$ pour laquelle $f(d) = k$. En d'autres termes : toute fonction continue sur l'intervalle (a, b), les bornes étant incluses, atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure : elle possède bien une plus grande et une plus petite valeur.[85]
>
> [**Stolz 1885**, 188]

On constate ainsi que, pour la première fois, le théorème des bornes comporte deux conclusions : la finitude des bornes extrêmes de la fonction, puis ensuite l'atteinte effective de ces bornes. Les seules hypothèses sont la continuité de la fonction et le caractère fermé borné de l'intervalle de définition.

Stolz commence la preuve en développant la propriété d'encadrement ([**Stolz 1885**, 188-190]) pour une fonction f non-nécessairement continue sur l'intervalle $[a, b]$. Il y souligne que la propriété reste valable bien que la borne supérieure de f puisse devenir $g = \infty$. Grâce à cette propriété, le mathématicien autrichien va démontrer par l'absurde la finitude de la borne supérieure g de la fonction f désormais supposée continue.

> Comme résultat du théorème précédent [la propriété d'encadrement], on obtient la finitude de la borne supérieure g de la fonction continue f pour toutes les valeurs $a \leq x \leq b$. En effet, si l'on suppose avoir $g = +\infty$, on obtiendrait au moins une valeur $a \leq c \leq b$ telle que dans tout intervalle $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ la borne supérieure de f serait ∞. Mais grâce à la continuité de f en $x = c$, on obtient pour une valeur $\varepsilon' > 0$ fixée, une seconde valeur $\delta' > 0$ telle que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon'$ dès que $|x - c| < \delta'$. Ainsi g ne peut pas être ∞. Cette remarque que nous venons d'établir n'a rien d'une

85. "*15. Satz. Ist $f(x)$ eindeutig definirt und stetig für alle Werthe $a \leq x \leq b$, so hat die Veränderliche $f(x)$ eine endliche obere Grenze g und eine endliche untere Grenze k. Es giebt ferner mindestens einen Werth c - $a \leq c \leq b$ - wofür $f(c) = g$ und mindestens einen Werth d - $a \leq d \leq b$ - wofür $f(d) = k$.*
Oder : Jede im Intervalle (a, b) mit Einschluss der Grenzen stetige Function erreicht sowol ihre obere, als auch ihre untere Grenze : sie hat einen größten und einen kleinsten Werth." [**Stolz 1885**, 188]

> évidence. Même si $f(x)$ est finie pour toute valeur de x ($a \leq x \leq b$), cela n'implique pas que g soit également finie.[86]
>
> [**Stolz 1885**, 190]

Le raisonnement de Stolz est ainsi tout à fait rigoureux. Distinguant très clairement les notions de finitude et de bornitude, il montre que l'absence de bornitude d'une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ conduit à une contradiction de la continuité de la fonction en un point (déterminé grâce à la propriété d'encadrement de Weierstrass)[87]. Que la borne supérieure soit finie devient donc une conclusion du théorème des bornes, une proposition dont Stolz souligne bien la nécessité : d'une part cette conclusion ne revêt rien d'évident, ce en quoi il se distingue de Heine, Weierstrass et du Bois-Reymond. D'autre part, il montre qu'il est nécessaire d'obtenir cette propriété pour établir en toute rigueur la seconde partie du théorème des bornes : l'atteinte effective des bornes. Stolz effectue cette deuxième partie de démonstration avec la méthode de Darboux. La continuité au point c, mis en évidence dans la propriété d'encadrement, lui permet d'obtenir $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ dans un voisinage de c. Puis par définition de la borne supérieure, il utilise l'existence d'un point x de ce voisinage tel que $g < f(x) < g - \varepsilon$. La combinaison de ces deux inégalités, $|f(c) - g| < 2\varepsilon$, restant valable pour toute valeur (strictement positive) de ε, Stolz en conclut la *partie atteinte* du théorème : $f(c) = g$.

Stolz est ainsi le premier mathématicien à avoir donné au théorème des bornes sa forme moderne, avec toute son étendue et en toute rigueur. Mettant au jour la lacune qui subsistait dans la preuve de Weierstrass, et parvenant à démontrer la finitude des bornes plutôt que de la prendre pour hypothèse à l'instar de Darboux, le professeur d'Innsbruck donne au théorème des bornes une portée nouvelle. Il n'est désormais plus nécessaire de supposer la bornitude des fonctions continues (sur les intervalles fermés bornés), ce qui permet aux propositions des ouvrages de Dini et de Darboux, notamment la définition des sommes de Darboux dans la construction de l'intégrale, de sortir du carcan de la bornitude présupposée. Sous cette nouvelle forme élargie, le théorème des bornes vient supplanter la propriété d'encadrement de Weierstrass dont il constitue, pour les fonctions continues, une réelle extension. En ce qui concerne la paternité du théorème, Stolz l'attribue sans détour à son ancien maître Weierstrass : il écrit "*les théorèmes du N.15 [la propriété d'encadrement et le théorème des bornes] viennent de Weierstrass*"[88]. Il ne dira rien de la modification fondamentale qu'il vient pourtant de donner au théorème des bornes.

86. "*Mit Hilfe des vorstehenden Satzes ergiebt sich nun zunächst, daß die obere (untere) Grenze g der für alle $a \leq x \leq b$ stetigen Function $f(x)$ endlich ist. Denn wäre $g = +\infty$, so müsste es mindestens einen Werth $a \leq c \leq b$ geben, derart, daß in jedem Intervalle $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ die obere Grenze von $f(x)$ $+\infty$ ist. Aus der Stetigkeit von $f(x)$ für $x = c$ folgt aber, daß bei gegebenem $\varepsilon' > 0$ ein $\delta' > 0$ existirt, sodaß $|f(x) - f(c)| < \varepsilon'$, wenn nur $|x - c| < \delta'$. Also kann g nicht $+\infty$ sein. - Die soeben gemachte Bemerkung ist keineswegs sebstverständlich. Wenn auch $f(x)$ für jedes x $(a \leq x \leq b)$ einen endlichen Werth hat, so braucht g nicht endlich zu sein.*" [**Stolz 1885**, 190]

87. En toute rigueur, Stolz n'est pas le premier à démontrer ce point. Dans son énorme manuscrit non publié intitulé "*Theorie der Größenlehre*", Bernhard Bolzano était déjà parvenu à démontrer ce point dans les années 1830. S'il ne possédait pas la propriété d'encadrement de Weierstrass, Bolzano établissait le théorème de finitude de la borne supérieure des fonctions continues à l'aide de la construction d'un point d'accumulation. Voir [**Russ 2010**] pour le détail de ces travaux de Bolzano.

88. "*Die Sätze von Nr 15 rühren von Weierstrass her.*" [**Stolz 1885**, 340].

La *Théorie* de Jules Tannery (1886) : influence de Darboux et uniforme continuité

Nous avons présenté une notice biographique de Jules Tannery, en tant que collaborateur principal du Bulletin des Sciences, dans la section [Chap.6,1.3]. Proche de Darboux pour la rédaction du journal, Tannery fut également agrégé-préparateur à l'Ecole Normale durant les années 1872-1875 où le nîmois y était maître de conférences et s'intéressait particulièrement aux fondement de l'analyse. Il fait ainsi partie, avec les élèves normaliens dont Darboux fut le professeur dans les années 1870, de ceux sur lesquels Darboux eut une influence importante dans ce domaine [89]. Héritier de la maîtrise de conférence de Darboux en 1881, Tannery continue de diffuser les idées de son prédecesseur gardois en travaillant à les étendre. Son ouvrage sur "*la théorie des fonctions d'une variable*", écrit en 1883 et publié trois ans plus tard ([**Tannery 1886**]), porte la marque de cette influence. Aussi Hélène Gispert a-t-elle souligné que le "*livre remarquable [de Tannery] est le premier traité d'analyse prenant en compte les nouveaux travaux sur les fondements*" ([**Tannery 1886**, 58]). Dix ans après, les idées de Darboux sur les fondements de l'analyse trouvent, au moins en partie, un écho en France [90].

Dans l'introduction de ce qui est véritablement un traité sans en porter le nom, Tannery juxtapose l'héritage de Weierstrass et de Darboux : il dit en effet reprendre "*les éléments de l'Analyse [...] après l'enseignement de M. Weierstrass, divulgué et développé par ses disciples, après le mémoire de M. Darboux sur les fonctions discontinues (1875) [...]*" ([**Tannery 1886**, VIII]). Les ouvrages de Tannery et de Stolz sont produits simultanément, et en toute méconnaissance l'un de l'autre. Le traité du français présente ainsi une version du théorème des bornes atteintes distincte, dans sa démonstration, de celle de l'autrichien, et qui porte l'empreinte du travail de Darboux.

Dès le début de son ouvrage, Tannery définit la borne supérieure d'un ensemble de réels borné ([**Tannery 1886**, 21-23]). Comme Darboux, il nomme cette notion la "*limite supérieure*". Il remarque d'ailleurs pertinemment que cette notion, traditionnellement associée au nom de Weierstrass, provient des travaux de Bolzano. Il fait mention à cette occasion du rappel historique donné dans [**Stolz 1881**] à ce sujet. Tout comme Darboux et Dini, dans le but de pouvoir appliquer cette notion aux valeurs des fonctions, il se restreint à ne considérer que des fonctions bornées. Le vocabulaire utilisé dénote une fois encore la difficulté de distinction qui existe entre la finitude et la bornitude :

> Une fonction définie dans un intervalle (a, b) a nécessairement une valeur finie pour chaque valeur de la variable x qui appartient à cet intervalle ; je dirai que la fonction est finie dans cet intervalle s'il existe un nombre positif A tel que chaque valeur de la fonction soit, en valeur absolue, inférieure à A [...]
>
> [**Tannery 1886**, 101]

89. Nous reviendrons sur l'influence de Darboux dans le domaine des fondements de l'analyse dans la partie 3.1.
90. Nous étudierons plus loin en 3 la réception bien médiocre en France du travail d'analyse (1872, 1875) de Darboux

Comme pour le vocabulaire scientifique italien, l'adjectif "*finie*" acquiert une ambiguïté. Pour reprendre les outils de méthodologie linguistique de [**Pinkal 1995**] (voir [Chap.2,6]), la *precisification* réside pour le vocabulaire français de Tannery dans l'unique étape de réduction du spectre interprétatif : *la fonction est-elle finie pour une valeur ?* versus *la fonction est-elle finie dans un intervalle ?* La positive à la seconde réponse correspond alors à la notion de bornitude. Dans le vocabulaire italien de Dini, la *precisification* était identique à celle de Tannery. Chez Pincherle en revanche, elle reposait sur la *precisification* : *la fonction est-elle toujours finie ("sempre finita")* ? Là encore, l'affirmative revient à la notion de bornitude, tandis que la négative nous fait retomber sur la finitude de la fonction en un argument fixé.

En ne considérant que des ensembles et des fonctions bornés (*finies*), Tannery suit de près la méthodologie de Darboux. C'est cependant grâce à la notion de *continuité uniforme* qu'il doit à Heine [91] que le professeur normalien va faire sauter le verrou de cette restriction préalable. Après avoir donné la définition de la continuité ponctuelle et, par opposition, celle de la continuité uniforme ([**Tannery 1886**, 104-106]), Tannery démontre le théorème dit de Heine qui en établit l'équivalence sur les intervalles fermés bornés (qui sont notés (a, b)). Sa démonstration est effectuée par l'absurde, avec un procédé de subdivisions en 10 intervalles égaux. La négation de la continuité uniforme vient alors contredire la continuité ponctuelle en le point mis en évidence par le procédé itératif ([**Tannery 1886**, 106-108]). Contrairement à Darboux cependant, Tannery s'était assuré au préalable de la convergence d'une telle méthode inspirée de la dichotomie, en construisant les nombres réels via la théorie des coupures due à Dedekind (voir [**Petri Schappacher 2007**]). Par sa théorie des nombres réels, Tannery donne une assise rigoureuse aux convergences des processus itératifs (et ainsi des suites adjacentes après Dini). Il se démarque en ce point de Darboux, et se rapproche au contraire de Stolz, dont la partie *bornitude* du théorème des bornes est très similaire à la démonstration que détaille ici le français.

Jules Tannery accorde une grande importance au théorème de Heine : ceci lui permet en effet d'établir sans plus de preuve le caractère borné des fonctions continues sur les intervalles fermés bornés, un point que Stolz rattachera à l'énoncé du théorème des bornes.

> Une fonction continue dans l'intervalle (a, b) est nécessairement finie dans cet intervalle : si, en effet, après avoir choisi arbitrairement ε et déterminé η en conséquence, on divise l'intervalle (a, b) en un nombre n d'intervalles dont chacun soit moindre que η, la fonction $f(x)$ sera moindre, en valeur absolue, que $|f(a)| + \varepsilon$ dans le premier intervalle, que $|f(a)| + 2\varepsilon$ dans le second, ..., que $|f(a)| + n\varepsilon$ dans le dernier.
>
> [**Tannery 1886**, 103-104]

Avec cette approche, la partie *bornitude* du théorème des bornes découle très simplement du théorème de Heine, où réside en fait désormais la difficulté des démonstrations. Le découpage de (a, b) en un nombre fini (n) d'intervalles où est respectée l'inégalité de continuité uniforme suffit en effet à établir que la fonction continue y est bornée, et à en donner effectivement une borne $(|f(a)| + n\varepsilon)$. C'est donc dans un second temps que Tannery va énoncer une version du théorème des bornes où il est déjà acquis que la fonction est bornée. Il s'agit néanmoins selon lui d'"*une propriété fondamentale des fonctions continues*" ([**Tannery 1886**, 126]) :

91. Voir [**Heine 1870**].

> Si une fonction $f(x)$ est continue dans un intervalle (a, b) et si M, m désignent respectivement sa limite supérieure et sa limite inférieure, il existe deux nombres X, x, appartenant à cet intervalle, pour lesquels on a : $f(X) = M$, $f(x) = m$.
>
> [Tannery 1886, 126]

La preuve de Tannery suit ensuite un cours qui devient classique : en utilisant encore - à l'image de du Bois-Reymond - des subdivisions itérées en 10 intervalles égaux, il suit le cours de ce qui constitue chez Weierstrass l'importante propriété d'encadrement. Il emploie ensuite à l'instar du professeur de Berlin un argument par l'absurde pour parvenir à démontrer définitivement l'atteinte des bornes supérieures (et inférieures) de la fonction f aux points construits dans la propriété d'encadrement.

Il n'est pas surprenant de remarquer, pour terminer, que Tannery dût attribuer la paternité du théorème à Karl Weierstrass. L'ayant découvert dans les travaux de Heine et de Darboux, il ajoute en bas de page que "*M. Weierstrass donne depuis longtemps la démonstration de cette proposition dans son enseignement.*" ([Tannery 1886, 126]).

1.7. Quelques remarques conclusives.

La réévaluation de l'histoire du théorème des bornes était donc nécessaire au vu du décalage existant entre l'historiographie et le contenu des cours d'analyse de Karl Weierstrass dont, presque 150 plus tard, l'accès reste délicat ! La faiblesse des sources historiographiques au sujet de ce théorème a élevé la première recherche [Dugac 1973] au rang de référence principale. Pourtant, nos études ont révélé que la version proposée par l'historien français devait être examinée sous un jour nouveau. Contrairement à ce qui a ensuite été largement repris et diffusé, le théorème des bornes ne se trouve pas dans le cours de Weierstrass de 1861. Mais en outre, cette affirmation a caché la difficulté rencontrée par le grand analyste allemand pour distinguer nettement les notions de bornitude et de finitude, ainsi que les nombreuses conceptions erronées qu'il entretenait au sujet de l'atteinte des valeurs extrêmes pour les fonctions réelles. Ceci, il est vrai, contraste avec l'image traditionnelle qui est donnée d'un Weierstrass "*maître de l'analyse*" qui en incarne la tendance rigoriste ([Dieudonné 1978, 272-5], [Bottazzini 1986, 257-291], [Bottazzini Gray 2013, 370-418]). Et pourtant, Pierre Dugac n'a-t-il pas lui même posé la question : "*la rigueur de Weierstrass : mythe ou réalité ?*" ([Dugac 2003, 118]). Il nous semble qu'il y ait, dans ce domaine, une nette distinction à apposer entre le traitement de la théorie des fonctions réelles d'une part, et des fonctions complexes d'autre part.

L'évolution du théorème des bornes, sa nécessité, ses énoncés, ses démonstrations, racontent en fait pleinement l'histoire du détachement progressif de la notion de bornitude dans la conscience des mathématiciens. Cette nouvelle notion, qui a bien du mal à exister à côté de la finitude qui est alors bien connue et clairement définie, doit beaucoup à Bolzano pour en avoir défini en 1817 l'objet essentiel : la notion de borne supérieure. Elle doit ensuite à Weierstrass d'avoir repris et fait fructifier cette notion dans ses cours à partir de 1865, ce qui n'a pas toujours été bien retranscrit par les historiens. Mais, si Weierstrass a bien défini "*la distinction entre maximum et supremum*" ([Lützen 2003, 186]), sa compréhension de l'articulation de ces notions avec la continuité et sa conscience de l'importance du choix du domaine de définition doivent être relativisées. Développant de nombreux outils mathématiques qui s'avéreront cruciaux dans l'évolution du théorème des bornes, Weierstrass se concentre avant tout sur la possibilité *d'isoler* les arguments des fonctions dont dépend la valeur de la borne supérieure : c'est sa *propriété d'encadrement*. En revanche, l'atteinte des maxima et des minima par les fonctions continues ne fait pas l'objet d'un théorème dans son cours ... du moins jusqu'à ce que ses élèves Schwarz et Cantor ne lui en fassent prendre conscience en 1870. Mais là encore, son appréhension du théorème sera endommagée par sa conception *a priori* de la bornitude des fonctions. En ne parvenant pas à évaluer correctement le rôle de la finitude de la borne supérieure vis-à-vis du théorème, Weierstrass ne donnera jamais de version correcte du théorème des bornes. Nous devons souligner ce point tant il va à l'encontre de l'opinion établie. Si l'on s'en réfère aux mathématiciens qui l'ont d'abord énoncé, puis ensuite démontré, *il teorema di Weierstrass* devrait ainsi être renommé *il teorema di Schwarz-Stolz* !

L'histoire du théorème des bornes paraît particulièrement pertinente pour saisir le travail de Darboux dans le domaine de l'analyse entre 1872 et 1875. Darboux se penche en effet sur ce théorème suite à sa mention dans les publications de [**Cantor 1870b**] et [**Heine 1872**] dont il a connaissance puisqu'il en effectue les recensions pour le Bulletin. Ceci révèle l'impact des travaux des mathématiciens allemands, élèves ou disciples de Weierstrass, sur le mathématicien nîmois au début des années 1870. A l'image de Dini, l'influence directe et indirecte - dans ce qui en transparaît dans les mémoires - du cours et des travaux Weierstrass sur Darboux est très forte. Nourrissant pour ce domaine un intérêt nouveau, il se lance dans de nouvelles recherches d'analyse pour établir les principes de la théorie des fonctions sur d'autres bases, plus rigoureuses. Ceci bien sûr doit également être rapproché de son nouveau statut de professeur de calcul différentiel et intégral à l'Ecole Normale. Mais ses correspondances et la chronologie de ses travaux montrent que son intérêt pour ce domaine précède sa nomination : plus que sa trajectoire institutionnelle, c'est l'influence du Bulletin des Sciences qui a nourri chez Darboux un désir d'analyse.

Comme l'a formulé clairement Hélène Gispert, "*Darboux cherche à dégrossir le concept de fonction continue, et à le dépouiller de tout ce qui n'est pas strictement induit par sa définition, et que l'«usage», l'activité mathématique passée, lui avait donc conféré*" ([**Gispert 1990**, 192]). Nos études des travaux géométriques du nîmois ont souligné chez lui l'aptitude à toujours appréhender les résultats avec un regard critique, qu'il s'agisse de ses propres résultats ou non, de résultats que l'on considère comme définitifs ou non. Ceci constituait pour lui un moteur de recherche dans la mesure où cela le forçait à envisager un même énoncé, une même démonstration, sous différents angles, mettant ainsi au jour des rapprochements entre différents domaines, différentes méthodes. Dans le cadre de notre présente étude, c'est la pratique mathématique traditionnelle que Darboux appréhende de manière critique. Ce regard le fait mettre de côté le poids de l'héritage passé pour remettre en cause certains fondements. L'atteinte d'un maximum pour une fonction continue fait partie de ces fondements dont doute Darboux. Ceci va le pousser à effectuer des recherches liées au théorème des bornes. Mais il parvient également à appréhender de manière critique l'énoncé qui lui sert pourtant d'unique support, celui de Heine. Là encore, "*la rigueur devient un levier de découverte mathématique*" ([**Gispert 1990**, 200]), et cette quête de rigueur l'amène à effectuer une nette distinction entre les notions de bornitude et de finitude. Il s'inscrit alors complètement dans le courant de recherche des analystes de l'école de Weierstrass.

Les travaux de Darboux relatifs au théorème de bornes portent donc certaines marques de son identité scientifique. Ils tracent également les contours de ses intérêts, et par là même les limites de ses travaux. Car une différence majeure entre Weierstrass et Darboux réside bien dans l'intérêt envers la construction des nombres réels. Le français ne participe en effet nullement à cette épopée où il brille par son absence dans les travaux des historiens [92]. Son absence d'intérêt pour la théorie des nombres réels constitue ainsi une limite de son travail d'analyste : il n'étudie ni les propriétés d'accumulation ni les convergences des processus hérités de la dichotomie. Ceci mérite d'être souligné car les travaux historiques relatifs au rôle et aux méthodes de Gaston Darboux sur les fondements de l'analyse n'ont pas suffisamment fait ressortir l'importance de cette limite. Ceci le distingue pourtant de nombreux mathématiciens allemands et italiens de cette époque partageant alors par ailleurs les mêmes intérêts pour la refonte des principes de l'analyse.

En définitive, s'il attire l'attention sur la nécessité de borner la fonction pour obtenir une démonstration valide du théorème des bornes, Darboux ne saura jamais envisager cette nécessité autrement que comme une hypothèse, et non comme une possible conclusion.

Nous verrons un peu plus loin la réception pénible du travail d'analyse [**Darboux 1875b**] en France (section 3.1). Mais l'étude de l'évolution du théorème des bornes permet déjà d'évaluer l'influence de ce travail. Les méthodes de Darboux, l'attention mise sur la nécessité de borner les fonctions, sont en effet reprises par Dini, puis prolongées par Tannery. Cela suggère ainsi la diffusion et l'impact du travail du nîmois à l'étranger - du moins en Italie - mais aussi dans les cercles de son enseignement. Sans faire de bruit, les nouvelles positions rigoristes de Darboux imprègnent ainsi au milieu des années 1870 ses élèves Picard, Appel, Goursat, et Tannery qu'on peut presque considérer à bon droit comme l'un de ses élèves. Si Darboux se détournera bien vite de ce domaine des fondements de l'analyse, en revanche son influence perdurera.

Signalons pour conclure cette analyse de l'analyse qu'une fois de plus dans notre travail, la pertinence de l'étude du vocabulaire y est fortement apparue. Ici, c'est le manque du vocabulaire adéquat puis les évolutions adaptatives du lexique scientifique qui nous ont permis de suivre le fil de l'émergence de la notion de bornitude. D'abord complètement absente du vocabulaire, cette notion était confondue avec celle de finitude. La discussion de 1864 entre Felice Casorati, Leopold Kronecker et Karl Weierstrass en témoigne :

> [Kronecker] disait qu'Abel, dans son mémoire sur la série binomiale (où il ne définit pas la continuité de manière suffisamment précise), bien que corrigeant l'erreur de Cauchy, donne une démonstration qui n'est pas valide. Cela provient du fait qu'elle repose avant tout sur le fait que lorsqu'on prend pour x n'importe quelle valeur d'un intervalle donné (par exemple de -1 à $+1$), on peut toujours donner une limite supérieure (*limite superiore*) aux valeurs de la fonction $\phi(x)$, la fonction $\phi(x)$ doit avoir un maximum sur cet intervalle. Kronecker dit qu'Abel n'a pas considéré

92. Voir notamment [**Petri Schappacher 2007**], [**Boniface 2007**], [**Epple 2003**] ainsi que [**Spalt 1991**] pour une étude centrée sur Bolzano et Weierstrass.

> le fait que si cette limite maximum dépend de x, on ne peut plus affirmer qu'il existe un maximum. Il dit qu'il voit bien le défaut de la preuve d'Abel, mais qu'il ne voit pas le moyen d'en obtenir une démonstration rigoureuse. [93]
>
> Notes de Felice Casorati (Octobre 1864), citées dans [**Neuenschwander 1979**, 76]

Le problème posé par *la dépendance en x de la limite supérieure* montre bien à la fois mathématiquement la confusion entre finitude et bornitude, et d'un point de vue lexical l'absence d'une terminologie adaptée.

Avec la naissance d'une conscience de la distinction de ces notions chez les mathématiciens, le lexique s'adapte par des périphrases ou un ajout d'ambiguïté au sens de [**Pinkal 1995**]. Le sens d'une fonction *finie* change (en français et en italien) selon le contexte, et par cela nécessite une *precisification*. Parle-t-on en effet d'une valeur fixée ou d'un intervalle ? Dit-on que la fonction est en outre *toujours finie* ? Le vocabulaire mature, il est en gestation, et à l'instar de notre étude sur les systèmes triples orthogonaux (voir [Chap.3,3.3]), ceci reflète l'évolution de la notion mathématique même dans la conscience scientifique générale. Finalement, lorsque cette notion mathématique est à la fois nette dans sa définition et dans son utilisation, qu'elle s'est clairement scindée des notions adjacentes, le lexique scientifique évolue lui aussi et fait disparaître l'ambiguïté qui s'était développée. C'était le cas en géométrie avec la notion de système triple, distincte de celle des trajectoires orthogonales d'une surface unique. C'est le cas ici avec la distinction de la notion de bornitude à partir de celle plus large de finitude.

Dès 1874, le terme *beschränkt* apparaît ainsi dans les leçons de Weierstrass, signe de la netteté précoce de sa distinction du terme *endlich* préexistant. En revanche, en Italie et en France il faut patienter plus d'une décennie pour que le lexique scientifique s'adapte et dissolve totalement cette sorte d'*ambiguïté de l'émergence*. Ce ne sera en effet qu'à la fin des années 1880 et au début des années 1890 qu'apparaîtront les termes *bornée* et *limitata*. On en trouve notamment à cette époque la trace dans les notes d'un des brillants représentants de la jeunesse normalienne de l'ère Tannery : Emile Borel. Henri Poincaré disait ainsi, à propos du sens des mots de la Science :

> Un mot bien choisi suffit le plus souvent à faire disparaître les exceptions que comportaient les règles énoncées dans l'ancien langage.
>
> [**Poincaré 1908**, 29]

Plus encore que la caractérisation de l'exception, il est apparu dans nos études que la mutation du vocabulaire scientifique pouvait refléter précisément la maturation des notions. La naissance d'une conscience, encore indistincte, d'une notion nouvelle va ainsi de pair avec l'émergence d'une ambiguïté lexicale, qui disparaîtra plus tard lorsque la Science aura fait l'effort de reconnaître et de légitimer ce nouvel enfant auquel elle aura donné vie.

---

93. "*[Kronecker] fu condotto a dire che Abel nella memoria sulla serie binomiale (dove definisce non abbastanza nettamenete la continuitá) correggendo l'errore di Cauchy dá una dimostrazione che non vale. Poiché essa poggia essenzialmente su ció che quando predendo per x un valore qualunque in un dato intervallo (p. e. da -1 a $+1$) si possa sempre assegnare un limite superiore al valore di una funzione $\phi(x)$, la funzione $\phi(x)$ debba avere un massimo nello stesso intervallo. E Kronecker rimarca che Abel non considera che se quel limite superiore dipende dall'x non si puó asserire l'esistenza del massimo. Egli vede il diffetto della dimostrazione di Abel ma dichiara di non vedere il mezzo di ottenere una dimostrazione rigorosa.*" [**Neuenschwander 1979**, 76]

2. La singularité des équations différentielles

La théorie des *solutions* (ou *intégrales*) *singulières* des équations différentielles du premier ordre (ordinaires ou aux dérivées partielles) présente en elle-même une singularité historiographique. Sa naissance au dix-huitième siècle est en effet très souvent mentionnée par les historiens, en particulier lorsque les regards se tournent vers Lagrange, présenté comme l'homme fort de cette théorie ([**Dieudonné 1978**, 43-45], [**Grattan-Guinness 1990**, 156-160], [**Archibald 2003**, 333-336]). Cette théorie apparaît également ponctuellement pour illustrer la force des applications de l'Analyse à la Géométrie effectuées par Monge et sa théorie des enveloppes autour des années 1800 ([**Dieudonné 1978**, 363-365]).

En revanche, aucune mention n'est faite des développements ultérieurs donnés à cette théorie au cours du dix-neuvième siècle. Les travaux historiques tentant ainsi de reconstruire l'évolution de la théorie des équations aux dérivées partielles (EDP) n'abordent pas ce sujet ([**Demidov 1982**]). Bien entendu, ceci peut s'expliquer dans une large mesure par la multiplication et la diversification des travaux mathématiques relatifs aux EDP après 1800, travaux qui avec Cauchy, Pfaff et Jacobi notamment prennent leur essor dans plusieurs directions [94].

Nous tenterons ci-dessous d'apporter, en cohérence avec la méthodologie adoptée tout au long de notre travail, une vue d'ensemble de la théorie des intégrales singulières en rétablissant l'importance des recherches des mathématiciens du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Ceci mettra en particulier en lumière les travaux de Darboux durant les années 1870 qui, nous le verrons, présenteront cette théorie sous une forme qui, un siècle après Lagrange, aura bien évolué. A l'instar de son mémoire sur les cyclides de 1873 (voir [Chap.3,5]), le mémoire de 1876 est une "*œuvre considérable*" qui vient "*donner l'explication définitive*" de la théorie des intégrales singulières [95] ([**Darboux 1876**]). Nous verrons cependant, dans la section qui suivra, l'écart important existant dans les réceptions de ces deux ouvrages.

Les deux premières parties de notre étude (2.1 et 2.2) se concentreront sur la naissance de la théorie des solutions singulières des équations différentielles et sur son support géométrique via la théorie des enveloppes. Centrées sur les travaux de Clairaut, Lagrange et Monge, ces parties sont - nous l'avons dit - bien connues de l'historiographie sur laquelle nous aurons donc le loisir de nous appuyer. Les deux parties qui suivront seront consacrées aux remises en question des fondements de ces théories dans les années 1850-1870 : par les mathématiciens anglais De Morgan, Boole et Cayley d'une part (2.3), au cours de la polémique en 1870 à Paris entre Darboux et Catalan d'autre part (2.4).

Les éléments apportés par Darboux à la théorie des solutions singulières lors de cette polémique constituent un changement d'approche radical que nous interpréterons grâce aux clefs de lecture du "*changement scientifique*" données dans [**Barberousse et al. 2011**, 172-182]. Dans ce cadre, après la construction de la théorie sur le modèle lagrangien, les doutes évoqués dans la partie 2.3 peuvent être analysés comme une période de *crise*. Darboux y apporte ensuite la *révolution* en bouleversant le paradigme de cette construction scientifique. Il renverse en effet le rôle des cas *général* et *particulier*, proposant alors un renouvellement d'une grande partie des conceptions et des fondements de la théorie.

94. Pour plus de détails, on lira précisément [**Demidov 1982**] et [**Archibald 2003**].
95. Les expressions citées sont respectivement reprises de [**Jordan 1884**] et [**Picard 1917**].

Nous nous pencherons alors dans la partie 2.5 sur la réception de cette proposition, qui n'est alors pas solidement adossée à une production scientifique de référence. Ceci nous permettra de mieux comprendre les travaux ultérieurs de Darboux qui souhaite apporter des réponses robustes aux critiques suscitées par ses premières remarques. L'étude de ses deux mémoires (1873 et 1876) sera menée dans la partie 2.6. Nous verrons que le second mémoire, [**Darboux 1876**], présente des similarités avec le mémoire sur les cyclides analysé au Chapitre 3 [96]. Dans cet ordre d'idées, la dernière partie (2.7) sera l'occasion d'aborder deux rapprochements effectués par le nîmois dans cet imposant ouvrage à partir de la théorie des intégrales singulières : le lien avec la classification des solutions des EDP d'une part, la validité de la méthode d'intégration de Cauchy-Jacobi liée aux équations caractéristiques d'autre part.

2.1. Clairaut, Lagrange et les courbes touchantes : naissance de la théorie.

La naissance de la théorie des intégrales singulières est indissociable des noms de deux mathématiciens : Alexis-Claude Clairaut et Joseph-Louis Lagrange. Nous allons voir dans quelle mesure ceux-ci, par leurs travaux, doivent être mis au premier plan des nombreux scientifiques qui peuvent être associés à l'émergence de la théorie.

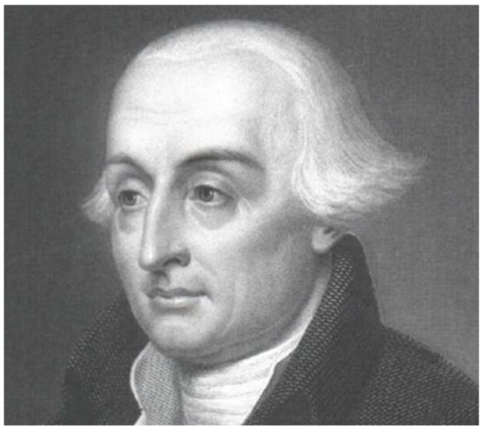


FIGURE 8. Alexis-Claude Clairaut (à gauche) et Joseph-Louis Lagrange (à droite)

Clairaut naît à Paris le 13 Mai 1713. Son père enseigne les mathématiques et le jeune Alexis-Claude montre vite de grandes facilités dans ce domaine. Il devient ainsi, à l'âge de 13 ans, le plus jeune des scientifiques à avoir présenté un travail devant l'Académie des Sciences de Paris [97]. Il deviendra membre de cette Académie en 1731. Ami de Voltaire et

96. Voir la partie [Chap.3,5].
97. Son mémoire, intitulé *Quatre problèmes sur de nouvelles courbes* est présenté à l'Académie en 1726.

de Maupertuis, Clairaut développe de nombreuses recherches d'analyse durant la décennie 1730. Il se montre surtout influencé par les travaux de l'Hôpital et de Bernoulli (Johann), étudie les courbes à double courbure, le calcul des variations et les équations différentielles. Mais progressivement, Clairaut se tournera vers la géométrie, la mécanique et l'astronomie. Il y confirmera plusieurs théories de Newton, en particulier l'expression newtonienne de la force de gravité (grâce à des observations précises des mouvements de la Lune) ainsi que l'aplatissement de la Terre aux pôles dû à sa rotation. Ceci avait notamment été formulé auparavant par Huygens et Maclaurin.

Membres de plusieurs académies et en relations (parfois houleuses) avec les grands savants de son temps (Euler, Bernoulli, d'Alembert ou encore Cramer), Clairaut était à la fin de sa vie un savant largement reconnu. Il mourra à Paris en 1765.

Tandis que Clairaut construit sa réputation à Paris, Joseph-Louis Lagrange naît à Turin à la fin du mois de Janvier 1736 [98]. Turin, aujourd'hui en Italie, était alors la capitale du royaume indépendant de Piémont-Sardaigne, et avait été jusqu'en 1720 la capitale du duché de Savoie, attaché au royaume de France. La famille Lagrange elle-même était d'origine française du côté de son père, Giuseppe, et résolument turinoise du côté de sa mère Teresa. La nationalité de Lagrange n'a, encore de nos jours, pas fini de faire débat.

En 1754, Lagrange commence à publier des premiers résultats sur les fonctions analytiques puis sur le problème des tautochrones en lien avec le calcul des variations. L'année suivante, il devient professeur de mathématiques à l'Ecole Royale d'Artillerie de sa ville natale. Lagrange se montre très inspiré par Euler, avec qui il correspond déjà, ainsi qu'avec d'Alembert. Ses travaux mathématiques concernent alors des domaines très variés, mais se rapportent souvent aux équations différentielles, en particulier en lien avec les orbites des planètes. Prenant part à un prix de l'Académie de Paris relatif à la libration lunaire [99], il effectue plusieurs voyages entre 1763 et 1766 notamment à Paris et à Berlin où il décline une offre d'entrer à l'Académie émanant directement du roi de Prusse. Ce n'est que lorsque Euler retournera à Saint-Pétersbourg que Lagrange acceptera d'entrer à l'Académie de Berlin. Il s'y installe en Novembre 1766, et y restera plus de vingt ans.

Son travail à Berlin est considérable : Lagrange étudie le problème des trois corps, les équations différentielles, les développements en série des fonctions analytiques ou encore la mécanique céleste. Il écrit sa "*Mécanique analytique*" (1788) mais celle-ci ne paraîtra pas à Berlin mais à Paris : Lagrange y arrive en effet à la fin de l'année 1787. Durant la Terreur, le chimiste Lavoisier le préserve d'une arrestation qui aurait pu lui être fatale en 1793. L'année suivante, Lagrange ne pourra en revanche pas sauver de la guillotine celui qui l'avait protégé autrefois [100]. A la création des écoles *Polytechnique* et *Normale de l'an III* (en 1794 et 1795), Lagrange devra reprendre son activité d'enseignement, activité qu'il avait volontiers interrompue en arrivant en France [101]. Il publiera quelques années plus tard

98. Lagrange a eu 10 frères et sœurs, soit presque moitié moins que Clairaut qui en a eu 19.

99. Voir le sujet de la thèse de Gaston Lespiault en [Chap.6,1.3] pour plus d'explications sur la libration lunaire.

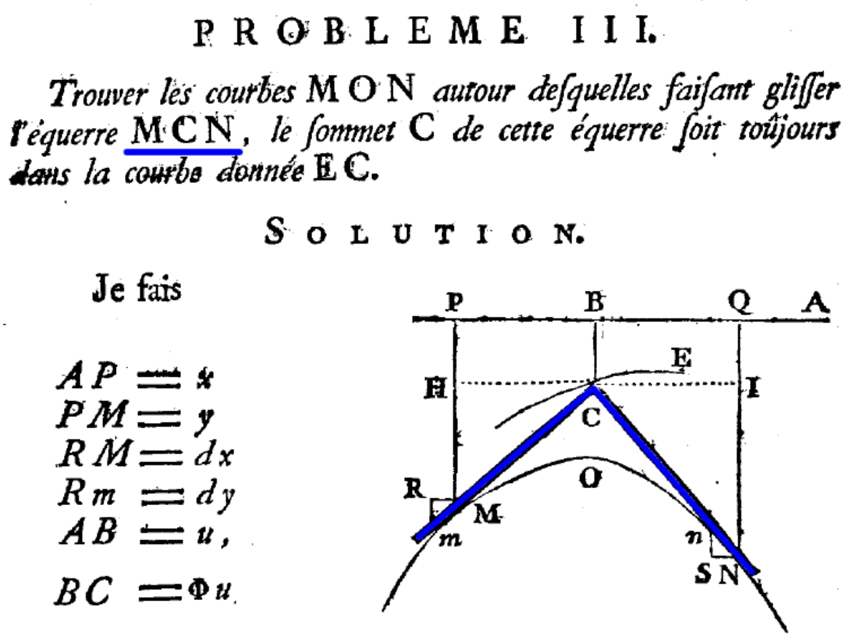
100. Lavoisier est guillotiné le 8 Mai 1794. Lagrange dira à cet égard la phrase restée célèbre : "*Il ne leur a fallu qu'un moment pour faire tomber cette tête et cent années, peut-être, ne suffiront pas pour en reproduire une semblable*".

101. Des dires de Joseph Fourier, Lagrange n'était pas un bon professeur. Ses élèves lui reprochaient son fort accent italien, sa voix trop basse ou encore son penchant pour l'abstraction.

sa "*Théorie des fonctions analytiques*" (1797). Lagrange s'éteindra à Paris en Avril 1813, et sera inhumé au Panthéon.

En 1734, Clairaut insère dans les Mémoires de l'Académie de Paris un travail dans lequel il se propose de traiter plusieurs "*problèmes*" consistant à déterminer la forme de courbes (planes) dont les branches sont reliées entre elles par une équation ([**Clairaut 1734**]). C'est le troisième et dernier problème qui nous intéresse ici, et nous allons voir que c'est également celui qui a le plus intrigué le mathématicien français.

Clairaut s'y propose de déterminer, étant donnée une courbe qu'il note EC, les courbes autour desquelles peut "*glisser*" une équerre (notée MCN) tel que son sommet droit C reste sur la courbe EC.


PROBLEME III.

Trouver les courbes MON *autour desquelles faisant glisser l'équerre* MCN, *le sommet* C *de cette équerre soit toûjours dans la courbe donnée* EC.

SOLUTION.

Je fais

$AP = x$
$PM = y$
$RM = dx$
$Rm = dy$
$AB = u$,
$BC = \Phi u$.

FIGURE 9. Configuration géométrique et notations du problème donné par Clairaut (à partir de l'image [**Clairaut 1734**, 206]).

Pour trouver la solution de ce problème, Clairaut *paramétrise* la situation géométrique : il adopte d'abord un repère centré en A[102] (voir la figure 9). La courbe fixée parcourue par le sommet droit de l'équerre est alors $(u, \phi(u))$, et les deux autres sommets de l'équerre ont pour coordonnées (x, y) et (x', y').

En utilisant les propriétés fixes du triangle rectangle que décrit l'équerre, Clairaut parvient à déterminer trois équations entre les six paramètres $x, y, \frac{dy}{dx}, x', y', \frac{dx'}{dy'}, u$. Puis, en forçant sa recherche à aboutir à "*une fonction de u susceptible de deux valeurs*" qui donne les deux tangentes $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dy'}{dx'}$ ([**Clairaut 1734**, 207]), il aboutit à la formulation définitive du problème :

102. Le lecteur remarquera que abscisses et ordonnées sont orientées dans un sens qui pourrait le surprendre.

$$\begin{cases} x\Pi(u) - u\Pi(u) & = y - \phi(u) \\ \dfrac{dy}{dx} & = \Pi(u) \end{cases} \qquad \text{[Clairaut 1734, 208]}$$

Clairaut propose alors de résoudre cette équation différentielle - ou système de deux équations - par deux différentes méthodes : la première fait partie du corps de sa solution, la seconde en revanche fait partie d'une longue remarque ultérieure. La première méthode consiste à "*résoudre non pas par l'intégration (en premier lieu) mais par la différentiation*" ([**Archibald 2003**, 334]). En effet, en différentiant la première équation, puis en substituant dy grâce à la seconde, Clairaut remarque qu'il parvient à une expression où y n'apparaît plus. Après combinaison de cette expression avec l'équation de départ "*en chassant* u", il obtient une équation de y comme fonction de x, soit bien "*une équation qui exprimera également les deux branches de la courbe* MON." ([**Clairaut 1734**, 209]).

Dans un second temps, le mathématicien de Paris s'étonne de ce que l'utilisation du calcul intégral - c'est-à-dire l'intégration de l'équation différentielle sans réutiliser de nouvelles différentiations - ne pouvait en aucun cas le conduire à ce résultat :

> Dans la façon précédente de traiter les équations [...] on évite le calcul intégral, cependant ce calcul paraît d'abord nécessaire pour les résoudre [...] cependant cette solution, par le calcul intégral, ne peut pas être la même que la précédente, car elle doit renfermer une constante que l'on ajoute toujours en intégrant. Il reste à voir si cette équation intégrée ne serait pas plus générale que celle que l'on a par l'autre méthode
>
> [**Clairaut 1734**, 209]

Clairaut revient alors sur sa méthode pour utiliser "*le procédé du calcul intégral*". Il remarque que celle-ci utilisait une simplification par du : l'équation alors obtenue "*n'est pas la seule, car on pourrait aussi en tirer* $du = 0$". Dans ce cas, u est constant égal à a, et la nouvelle solution du problème par cette méthode devient :

$$x\Pi(a) - a\Pi(a) = y - \phi(a)$$

Il s'agit ainsi d'une famille de droites, qui ne contient pas la première solution. Clairaut synthétise alors la différence entre les deux types de solution, en lien avec le problème de départ qu'il se proposait de résoudre :

> Ainsi il se rencontre dans ce cas deux solutions à la fois des mêmes équations, différentes l'une de l'autre. Mais la première est la seule qui soit véritablement la solution du Problème [posé], car la seconde, au lieu de donner les courbes touchées par l'équerre, n'exprime que les droites qui sont les branches de cette équerre. [...] le calcul intégral ne donne jamais que les lignes droites [et] les équations trouvées par la première méthode échappent à l'intégration.
>
> [**Clairaut 1734**, 210]

Pour justifier ce qu'il affirme et clarifier son propos, Clairaut donne ensuite quelques exemples qui se rapportent aux cas où le sommet de l'équerre se meut sur une ligne droite. Pour plus de simplicité, nous allons considérer temporairement le cas où cette ligne droite est horizontale. En reprenant les notations du mathématicien, ceci correspond au cas où

u étant libre, $\phi(u)$ est constante et $\Pi(u)$ est l'identité. La mise en équation du problème prend alors la forme suivante :

$$\begin{cases} x\Pi(u) - u\Pi(u) & = y \\ \dfrac{dy}{dx} & = \Pi(u) = u \end{cases}$$

Employons alors tout d'abord la première méthode, celle qui selon Clairaut donne la *véritable* solution du problème. En différentiant la première ligne, on obtient alors :

$$dx \cdot u + x \cdot du - du \cdot u - u \cdot du = dy = u \cdot dx$$

Ceci correspond donc à $(x - 2u)du = 0$. Procédons comme Clairaut et *chassons du* : on obtient alors la relation $x = 2u$, que l'on reporte dans l'équation de départ. Cela nous donne la première solution :

$$\boxed{y = -\frac{x^2}{4}}$$

Effectuons alors la seconde solution via le calcul intégral : dans ce second cas, c'est $du = 0$ que l'on conserve dans la résolution. On obtient alors la constante $u := a$ et en reportant dans l'équation de départ, la famille de droites :

$$\boxed{y = ax + a^2 \ \ , \ a \in \mathbb{R}}$$

On voit donc avec Clairaut que pour une même équation, la parabole de la première méthode n'est pas comprise dans les lignes droites issues de l'intégration de la seconde méthode.

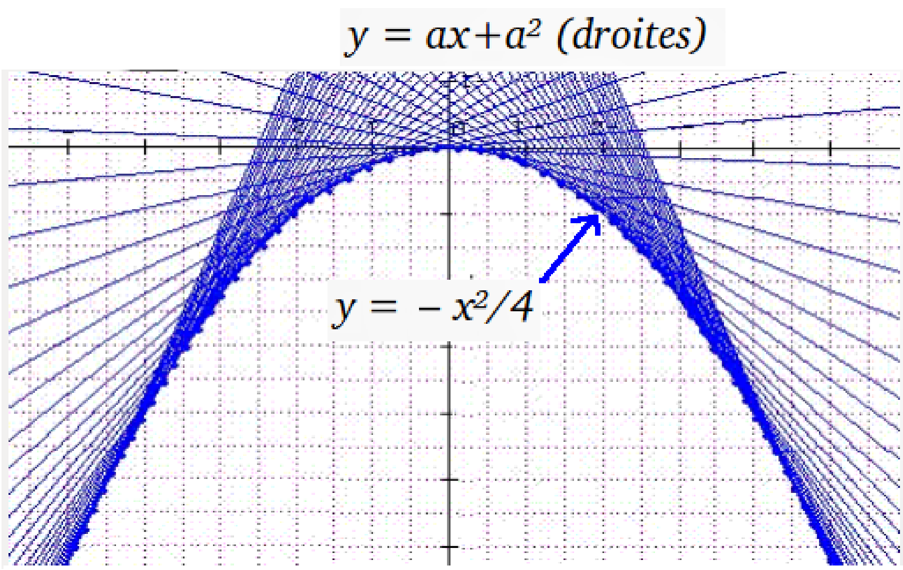


FIGURE 10. Les deux types de solutions déterminées par Clairaut

Clairaut termine son mémoire en affirmant la généralité de la singularité de calcul qu'il vient de mettre en valeur dans le cas précis du problème de l'équerre :

> Il y a des équations différentielles capables d'avoir deux solutions différentes l'une de l'autre, dont l'une (et même dans ce cas-ci la plus générale) n'a pas besoin du calcul intégral [...]
>
> En général, $\dfrac{d(\phi(x,y))}{\phi(x,y)}$ = à une fonction quelconque de x, y, dx, dy serait de cette nature : intégrée, elle donnerait une équation, et sans aucune intégration $\phi(x,y) = 0$ serait l'autre. Il y a encore d'autres problèmes où cette singularité se rencontre, mais ce serait sortir de l'objet de ce Mémoire que de s'étendre davantage là-dessus.
>
> [**Clairaut 1734**, 213]

Avant Clairaut, Gottfried Leibniz et Brook Taylor avaient déjà rencontré des équations différentielles dont certaines solutions *échappaient* à la résolution générale par le calcul intégral ([**Archibald 2003**, 334]). Joseph-Louis Lagrange et George Boole s'accorderont ainsi dans leurs travaux à reconnaître la priorité de la reconnaissance d'une telle *singularité* à Taylor et à son analyse de l'équation $(1+x^2)p^2 - 2xyp + y^2 - 1 = 0$ [103]. Mais le travail de Clairaut, avec une étude spécialement dédiée à ce type de particularités mettant en valeur une potentielle défaillance de la résolution intégrale classique, va attirer ensuite l'attention de plusieurs autres mathématiciens. En particulier, Leonhard Euler va s'y intéresser dans les années 1750-60, ainsi que d'Alembert et Laplace. Lagrange qui, nous l'avons dit, suit de près les recherches du grand mathématicien suisse, va à sa suite se pencher sur ce sujet qu'il juge "*complètement nouveau*" [104].

C'est en 1774 que Lagrange va présenter à l'Académie de Berlin ses résultats sur ce qu'il appelle la théorie "*des intégrales particulières*". Cette présentation fait suite à sa lecture d'un mémoire de Laplace sur le même sujet, lu à l'Académie de Paris en 1772, et qui a "*réveillé d'anciennes idées que [Lagrange] avai[t] sur la même matière*" ([**Lagrange 1774**, 6]). Le turinois reprend d'ailleurs en la modifiant la dénomination d'*intégrale particulière* à Laplace : ce-dernier parlait en effet de "*solution particulière*" ([**Laplace 1772**]).

Nous ne ferons pas de différence dans la suite dans l'emploi des termes de *solution* et d'*intégrale*. Mais il doit être noté que ce double emploi aux sens contraires chez Laplace et Lagrange est plutôt malheureux au regard de l'ambiguïté qu'il procure à l'adjectif *particulière*. La levée de l'ambiguïté, ou pour reprendre notre grille d'étude de vocabulaire (voir [Chap.2,6]), la *precisification* ne reposera plus que sur le choix de l'article, du moins jusqu'à l'adoption de l'épithète *singulier* que nous utilisons de nos jours. Il y aura ainsi *une* solution particulière (choisie parmi une famille plus générale de solutions) et *la* solution particulière, aujourd'hui dite singulière, objet des remarques de Clairaut et du travail de Lagrange. C'est Lagrange lui-même qui introduira l'adjectif *singulier* dans son ouvrage sur les fonctions

103. Voir [**Lagrange 1806**, 276] et [**Boole 1859**, 165]. L'intégrale générale de l'équation de Taylor est une famille de droites, tandis que l'hyperbole équilatère $y^2 - x^2 = 1$ en est également solution : c'est ce que l'on nommera son *intégrale singulière*.

104. Lagrange écrit à Euler en 1769 : "*je suis surtout enchanté par ce que vous avez dit sur les intégrales singulières [...] C'est un sujet complètement nouveau que personne n'a touché jusqu'alors, et qui est aussi curieux qu'important*", ([**Archibald 2003**, 335]).

analytiques en 1797 ([**Grattan-Guinness 1990**, 159])[105] et dans les "*Leçons*" qui l'accompagnent (voir [**Lagrange 1806**, 178]). Néanmoins, un certain flou persistera quelque temps quant à la signification précise du terme *intégrale particulière*, flou que nous avons retrouvé jusque dans les travaux de Darboux ([**Darboux 1866**], [**Darboux 1870c**]).

Dans son travail, Lagrange va étendre la théorie des intégrales singulières aux équations aux dérivées partielles de 2 variables[106]. Mais cette extension ne sera donnée que sur le modèle du traitement effectué pour les équations ordinaires (à une seule variable). La conception du mathématicien y repose essentiellement sur la vision géométrique systématique qu'il possède de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle. Il s'agit alors d'évaluer par le calcul les lieux de contact des courbes qui représentent ces solutions. C'est donc toujours dans un premier temps sur les *solutions* des équations que Lagrange va travailler, pour ensuite en transposer les résultats aux *équations* proprement dites.

Dès le début de son mémoire, Lagrange clarifie ce qu'il nomme *intégrale complète* d'une équation différentielle ordinaire : cette intégrale doit "*renferme[r] une constante arbitraire*" ([**Lagrange 1774**, 7]). Ceci lui permet d'opposer à cette définition les intégrales *singulières*, solutions de l'équation non comprises dans l'intégrale complète. En considérant une équation $Z(x, y, \dfrac{dy}{dx} := p) = 0$, le point de départ du raisonnement de Lagrange est la considération de son intégrale complète, qu'il note $V(x, y, a) = 0$. Il exhibe tout d'abord le lien entre ces deux équations : $Z = 0$ est le résultat de l'élimination de la constante a entre les expressions $V = 0$ et $dV = 0$, puisque cette-dernière fait bien apparaître la dérivée $\dfrac{dy}{dx}$.

Dans la différentiation, a était d'abord considérée comme constante. Mais l'équation $Z = 0$ étant inchangée quelle que soit la valeur de a, Lagrange considère ensuite celle-ci comme une variable à part entière :

> l'équation finie $V = 0$ satisfera toujours à l'équation différentielle $Z = 0$ pourvu que, par la différentiation de l'équation $V = 0$, on ait également dans le cas de a variable, $dy = pdx$.
>
> [**Lagrange 1774**, 10]

En identifiant les expressions de dy selon que a varie ou non[107], Lagrange en conclut que l'équation $\dfrac{dy}{da} = 0$ doit être vérifiée. Or ceci permet d'éliminer a dans l'expression de l'intégrale complète : il résulte de cette élimination une nouvelle solution de l'équation qui n'appartient pas à cette intégrale, c'est donc selon Lagrange une *solution singulière*. C'est ainsi en jouant sur la variabilité et la constance du paramètre a que le mathématicien

105. L'historien donne un excellent tableau récapitulatif des différents termes employés par les mathématiciens à la fin du XVIIIème siècle pour désigner ce que nous appelons désormais les *intégrales singulières* : [**Grattan-Guinness 1990**, 159].

106. Il doit être noté ici que pour Lagrange, les équations aux dérivées ordinaires sont nommées des équations à 2 variables : x et y sont toutes deux considérées comme variables, bien que la résolution se fasse grâce à la variation de l'une en fonction de l'autre. De même, les équations aux dérivées partielles impliquant z et ses dérivées en x et en y sont pour Lagrange (et pour ses contemporains, y compris Gaspard Monge) des équations à 3 variables.

107. Rappelons que le nom de Lagrange reste associé au plus célèbre oxymore de la science mathématique : la *variation de la constante*. Néanmoins, cette méthode n'a pas trait aux critères de recherche des solutions singulières que nous traitons ici. Il s'agit d'un procédé de recherche de solutions d'une équation différentielle à partir de l'expression des solutions de sa forme homogène.

de Turin parvient à déterminer une règle pour trouver, à partir de l'intégrale complète d'une équation, une intégrale *particulière*. Il faut effectuer l'élimination de a au moyen des expressions :

$$V(x, y, a) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{da} = 0$$

Comme le remarque par ailleurs Lagrange, les mêmes raisonnements (et les mêmes résultats) subsistent lorsque l'on considère dx en lieu et place de dy. On peut remarquer que la règle donnée par le mathématicien de Turin est mathématiquement équivalente, en s'intéressant à la différentiation de V, au critère suivant :

$$V(x, y, a) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dV}{da}(x, y, a) = 0$$

C'est d'ailleurs sous cette seconde forme qu'il est le plus souvent présenté [108]. Pourtant, s'il s'autorisera bien à différentier Z - nous le verrons ci-après - Lagrange en revanche n'effectue dans son mémoire aucune différentiation de l'intégrale complète V. Sa méthode ne porte "que" sur l'indépendance en a de dy. Ce n'est qu'un peu plus tard, dans ses "*Leçons*", que Lagrange formulera explicitement le critère de recherche des intégrales singulières via la différentiation $\frac{dV}{da} = 0$ ([**Lagrange 1806**, 181]).

Lagrange poursuit son mémoire en donnant plusieurs exemples de recherches de solutions *particulières* d'équations différentielles à partir de l'expression de l'intégrale générale, qui viennent valider le bien-fondé du critère qu'il vient d'expliciter. Il se penche ensuite sur un autre problème : "*de la manière de trouver ces intégrales [particulières] sans connaître les intégrales complètes*", c'est-à-dire uniquement à partir de l'équation différentielle $Z = 0$ ([**Lagrange 1774**, 18]).

Sa méthode ([**Lagrange 1774**, 26-27]) prolonge celle que nous avons déjà exposée pour le critère de recherche des solutions singulières à partir de l'intégrale complète. Il commence par remarquer que le paramètre a (qu'il appelle "*l'arbitraire*") n'intervient pas dans la formulation de l'équation différentielle $Z(x, y, p) = 0$. Par conséquent, il obtient :

$$\frac{dZ}{da} = 0$$

En différentiant Z, Lagrange emploie les notations suivantes pour les trois dérivées partielles :

$$dZ = Adp + Bdy + Cdx$$

Il utilise ensuite la possibilité d'exprimer y en fonction de x et a grâce à l'intégrale complète :

> en regardant y comme une fonction de x et de a [...] donnée par l'équation $V = 0$
>
> [**Lagrange 1774**, 26]

La variation de Z en fonction de a devient ainsi relative aux variables $p = \frac{dy}{dx}$ et y selon la loi :

$$\frac{dZ}{da} = A\frac{dp}{da} + B\frac{dy}{da}$$

108. Voir par exemple [**Archibald 2003**, 335].

Or pour l'intégrale singulière, Lagrange connaît la nullité de la dérivée $\dfrac{dy}{da}$. Il en conclut ainsi, après avoir écarté les possibilités de nullité $\dfrac{dp}{da}$:

> il faudra nécessairement qu'on ait : $A = 0$. [...] puisque dans le cas de l'intégrale particulière A doit être nul, [l'] équation $dZ = 0$ se réduira à
>
> $$Bdy + Cdx + 0 \quad \text{ou bien} \quad B\frac{dy}{dx} + C = 0$$
>
> laquelle devra s'accorder avec l'équation $A = 0$ après avoir chassé la valeur de $\dfrac{dy}{dx}$ au moyen de l'équation proposée $Z = 0$.
>
> [**Lagrange 1774**, 26]

L'intégrale singulière de l'équation $Z = 0$ résulte ainsi, selon la méthode exposée par Lagrange, de l'élimination de $p = \dfrac{dy}{dx}$ au moyen des expressions :

$$Z(x, y, p) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dZ}{dp} = 0$$

La distinction entre ce critère, qui prend pour point de départ l'équation elle-même, et le précédent qui partait de l'expression de l'intégrale complète est celle-ci : avec les deux équations $Z = 0$ et $\dfrac{dZ}{dp} = 0$ "*devra s'accorder*" une troisième, à savoir $\frac{dZ}{dy}dy + \frac{dZ}{dx}dx = 0$. Cette équation surnuméraire n'apparaissait pas dans le premier critère sur V. Lagrange n'accorde pas ici d'importance à cette distinction pour les équations ordinaires, et n'en déduit rien pour l'existence de l'intégrale singulière. Nous verrons un peu plus loin ce que le mathématicien ajoutera dans le cas des équations aux dérivées partielles, où un phénomène analogue aura lieu. Ce qu'il remarque en revanche, c'est qu'en différentiant l'équation $Z = 0$, le rapport donnant la dérivée seconde $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ devient pour l'intégrale singulière indéterminé de la forme $\dfrac{0}{0}$.

Pour illustrer le succès de sa méthode, Lagrange va encore employer un certain nombre d'exemples, et en particulier inclure le problème traité quarante ans plus tôt par Clairaut (puis ensuite par Euler). Lagrange va exprimer l'équation différentielle dont dépend le problème de Clairaut sous la forme concise suivante :

$$Z = y - px + f(p) = 0$$

Cette formulation deviendra par la suite appelée *l'équation de Clairaut*[109]. La solution singulière en est obtenue en éliminant p par combinaison de l'équation avec $\dfrac{dZ}{dp} = f'(p) - x = 0$, ce qui correspond bien au cas de la parabole déterminée par Clairaut pour le cas que nous avons étudié, à savoir $f(p) = p^2$. Par ailleurs, Lagrange vérifie que les deux critères de recherche de la solution singulière concordent en retrouvant cette solution à partir de l'intégrale complète $V(x, y, a) = y - ax + f(a) = 0$ ([**Lagrange 1774**, 34]).

Avant de considérer le cas des équations aux dérivées partielles, Lagrange donne une interprétation - voire un fondement - géométrique de ses critères de recherche des solutions

109. Voir [**Archibald 2003**, 334].

singulières. Cette partie de son travail, dans laquelle il "*déduit la théorie des intégrales particulières de la considération des courbes*" ([Lagrange 1774, 37]) préfigure les études qu'entreprendra Monge à sa suite.

Commençant par l'étude de l'intégrale complète $V(x, y, a) = 0$, Lagrange la considère comme une famille de courbes et introduit la considération systématique d'une courbe supplémentaire qui *touchera toutes les autres* :

> en donnant successivement à a toutes les valeurs possibles depuis zéro jusqu'à l'infini positif et négatif, on aura un assemblage d'une infinité de courbes toutes de la même famille, et infiniment peu différentes l'une de l'autre, dont chacune représentera également l'équation différentielle $Z = 0$. Je dis maintenant que la courbe qui touchera toutes les courbes dont il s'agit satisfera aussi à la même équation différentielle $Z = 0$.
>
> [Lagrange 1774, 37]

Le long de cette courbe, les valeurs du triplet $(x, y, \frac{dy}{dx})$ coïncident en effet toujours avec celles de l'une des courbes de l'intégrale complète. Ces valeurs sont donc toutes bien des solutions de $Z = 0$. Lagrange relie ensuite cette approche géométrique avec son critère de recherche de l'intégrale singulière :

> pour la même abscisse x, les coordonnées qui répondent à deux courbes infiniment proches seront, en général, y et $y + \frac{dy}{da}$; donc, au point d'intersection de ces deux courbes, on aura $\frac{dy}{da} = 0$; et par conséquent si l'on élimine a au moyen des deux équations $V = 0$ et $\frac{dy}{da} = 0$, on aura l'équation de la courbe formée par les intersections continuelles de toutes les courbes contenues dans l'équation $V = 0$, laquelle sera aussi la courbe qui touchera toutes ces mêmes courbes.
>
> [Lagrange 1774, 38]

L'approche géométrique de Lagrange, consistant à interpréter l'intégrale complète comme une famille de courbes et à étudier la courbe qui *touche toutes ces courbes*, donne donc à la fois un fondement à l'existence de l'intégrale singulière ainsi qu'une preuve du bien-fondé du critère analytique donné par le mathématicien pour sa recherche à partir de l'expression de V.

Il en ira de même pour le critère de recherche de la solution singulière uniquement à l'aide de l'équation $Z = 0$. Mais dans ce cas, Lagrange s'intéresse à l'indétermination de la dérivée seconde $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$:

> Toute équation différentielle du premier ordre représente donc premièrement une infinité de courbes de la même famille, qui ne diffèrent entre elles que par la valeur de la constante arbitraire, laquelle tient lieu de paramètre ; en second lieu, cette équation représente aussi la courbe qui touche toutes ces mêmes courbes ; en sorte qu'on peut regarder en quelque façon tant les courbes touchées que la courbe touchante comme une seule courbe ayant une infinité de branches liées entre elles par la même équation. Ainsi, à chaque point de la courbe touchante il y aura

> deux branches [...] donc à chaque valeur de $\frac{dy}{dx}$ il devra répondre une valeur double de $\frac{d^2y}{dx^2}$; par conséquent l'expression de la quantité $\frac{d^2y}{dx^2}$ tirée de l'équation différentielle proposée au moyen de la différentiation devra devenir égale à $\frac{0}{0}$ pour tous les points de la courbe touchante
>
> [**Lagrange 1774**, 39]

Ayant établi au préalable que l'expression de la dérivée seconde était donnée par la formule :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Bp+C}{A}$$ [110]

la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ de cette formule inclut le critère analytique donné par Lagrange (au dénominateur) ainsi que l'équation supplémentaire qui "*devra s'accorder*" (au numérateur). Une vingtaine d'années plus tard dans ses "*Leçons*", c'est cette forme indéterminée qui deviendra le critère premier : la présence d'une solution singulière deviendra alors explicitement soumise à l'accord des trois équations.

> Dans le cas de l'équation primitive singulière [i.e. l'intégrale singulière], on a séparément :
>
> $$\frac{dZ}{dp} = 0\,, \quad \frac{dZ}{dx}dx + \frac{dZ}{dy}dy = 0$$
>
> donc on aura dans ce cas
>
> $$y'' = \frac{0}{0}$$
>
> ce qui donne cette règle générale et fort simple pour trouver l'équation primitive singulière de toute équation du premier ordre, lorsqu'il y en aura une. Cherchez, en prenant les fonctions dérivées, la valeur de la fonction seconde y'' et supposez-là égale à zéro divisé par zéro : vous aurez deux équations en x, y et y', qui, étant combinées avec la proposée, donneront par l'élimination de y' deux autres équations en x et y. Si elles ont un facteur commun, ce sera l'équation primitive singulière de la proposée.
>
> [**Lagrange 1806**, 221]

On constate ainsi qu'avec le temps, Lagrange est devenu plus prudent quant à l'existence de la solution singulière en raison d'une considération algébrique : celle-ci doit satisfaire à deux équations simultanées. Pour garantir son existence, il faut donc que ces équations s'accordent. Lagrange n'étudiera jamais plus en détail la signification des deux équations, prises indépendemment l'une de l'autre, ni la signification de l'échec de leur accord.

En ce qui concerne le mémoire originel de 1774, l'approche novatrice [111] proposée par Lagrange lui permet ainsi de caractériser les propriétés géométriques des intégrales singulières au regard des courbes des intégrales complètes, mais en outre de donner un fondement

110. Nous reprenons ici les notations de Lagrange pour les dérivées partielles de la fonction Z.

111. [**Archibald 2003**, 338] considère le travail de Lagrange relatif à la théorie des intégrales singulières comme la seule exception, dans des travaux antérieurs à ceux de Monge, d'une étude liée à la théorie des équations différentielles ayant bénéficié des apports d'une approche géométrique.

géométrique aux critères analytiques liés à leur détermination. Pour les équations différentielles à une seule variable, l'étude de l'existence de la solution singulière n'est toutefois pas menée.

Fort de ces résultats sur les équations différentielles ordinaires, Lagrange en donne à la fin de son mémoire les extensions pour les équations aux dérivées partielles (EDP) à deux variables : $Z(x, y, z, p := \frac{dz}{dx}, q := \frac{dz}{dy}) = 0$. La première difficulté rencontrée par le mathématicien tient à la définition, dans ce cas, de l'intégrale singulière. Dans le cas d'une seule variable, il avait - nous l'avons vu - défini cette intégrale par opposition avec l'intégrale complète via l'existence ou non d'une "*constante arbitraire*". Or, dans le cas de deux variables, se pose le problème du nombre de telles constantes arbitraires pouvant intervenir dans les solutions. C'est donc directement ce qui l'amène à en donner une classification, comme l'a justement noté [**Dieudonné 1978**, 44].

Etant donnée une EDP $Z(x, y, z, p, q) = 0$, il définit trois différents types d'intégrales solutions :

- L'*intégrale complète* $V(x, y, z, a, b) = 0$ qui contient deux constantes arbitraires
- L'*intégrale générale* $V(x, y, z, a, \phi(a)) = 0$ qui ne contient qu'une constante arbitraire, que Lagrange reprend des travaux d'Euler [112]
- L'*intégrale singulière* qui ne contient aucune constante arbitraire.

Les raisonnements de Lagrange vont dès lors s'appuyer au départ sur la considération de l'intégrale complète. En particulier, c'est à partir de cette intégrale qu'il va étudier, par des raisonnements analogues à ceux que nous avons détaillés pour les équations ordinaires, les critères analytiques permettant d'en déduire les deux autres types d'intégrales.

En partant de l'intégrale complète $V(x, y, z, a, b) = 0$, il établit la formation de l'équation différentielle $F = 0$ par élimination des deux constantes grâce aux expressions :

$$V = 0 \ , \ \frac{dz}{dx} = p \ , \ \frac{dz}{dy} = q$$

Ces combinaisons supposent que z se différentie sous la forme $dz = pdx + qdy$, or la formation de l'équation différentielle doit persister si l'on considère désormais les constantes a et b comme variables. Dans ce cas, Lagrange écrit la différentielle sous la forme :

$$dz = pdx + qdy + rda + sdb$$

Pour conserver la formation de l'équation différentielle, la relation suivante doit être vérifiée :

$$rda + sdb = 0 \quad (\mathcal{R})$$

La "*manière la plus rapide de satisfaire à l'équation*" $(\mathcal{R})$ est de prendre $r = s = 0$. Or ceci amène précisément à l'élimination des deux constantes, donc à la solution singulière de l'équation aux dérivées partielles. C'est ainsi que Lagrange procédera dans ses "*Leçons*" un peu plus tard ([**Lagrange 1806**, 368-9]). Mais en 1774, Lagrange préfère conclure uniquement par analogie avec les études des équations ordinaires :

> les deux conditions dont il s'agit seront représentées par
>
> $$\frac{dz}{da} = 0 \ , \ \frac{dz}{db} = 0$$

112. [**Grattan-Guinness 1990**, 158], [**Archibald 2003**, 338].

> lesquelles étant analogues à la condition $\dfrac{dy}{da}$ que nous avons trouvée dans l'article I pour la détermination des intégrales particulières des équations à deux variables, on pourra regarder aussi les intégrales provenantes de ces conditions comme des intégrales particulières des équations à différences partielles entre trois variables.
>
> [**Lagrange 1774**, 65]

Il détaillera un peu plus loin que lorsque r et s ne sont pas tous deux nuls, la relation $(\mathcal{R})$ permet d'obtenir une relation entre les deux constantes $b = \phi(a)$, amenant ainsi après élimination à la considération d'une *intégrale générale* ([**Lagrange 1774**, 74]). Mais Lagrange préfère poursuivre l'analogie avec les équations ordinaires déjà traitées en étudiant le fondement géométrique de l'intégrale singulière. Il transpose ainsi la considération de la *courbe touchante*, qui *touchera toutes les autres*, au cas des surfaces :

> l'équation $V = 0$ pourra représenter une infinité de surfaces courbes, en donnant aux arbitraires a et b toutes les valeurs possibles, et chacune de ces différentes surfaces satisfera également à l'équation du premier ordre $Z = 0$; ensuite on prouvera par un raisonnement semblable [au précédent] que la surface qui touchera toutes celles-ci satisfera aussi à la même équation différentielle $Z = 0$; enfin on démontrera aisément que, pour avoir l'équation de la surface touchante dont il s'agit, il n'y aura qu'à éliminer a et b de l'équation $V = 0$ au moyen des deux équations :
>
> $$\frac{dz}{da} = 0 \ , \ \frac{dz}{db} = 0$$
>
> d'où il s'ensuit que cette surface touchante exprimera l'intégrale particulière de l'équation $Z = 0$
>
> [**Lagrange 1774**, 67]

Finalement, et après avoir donné un exemple de recherche de l'intégrale singulière à partir de l'intégrale complète contenant deux arbitraires, Lagrange expose "*une règle pour trouver les intégrales particulières sans connaître les intégrales complètes*" ([**Lagrange 1774**, 71]). Cette règle repose sur l'indétermination des dérivées partielles secondes $d\dfrac{dz}{dy}$ et $d\dfrac{dz}{dx}$, le long de l'intégrale singulière, lorsqu'on les évalue grâce à une différentiation de l'équation proposée. Il écrit alors la différentielle sous la forme suivante :

$$dZ = M dp + N dq + P dx + Q dy = 0$$

puis remarque :

> il faudra, pour obtenir l'intégrale particulière de l'équation dont il s'agit, faire séparément les quantités M, N, P, Q chacune égale à zéro ; ce qui donnera, comme l'on voit, quatre équations lesquelles étant combinées avec l'équation $Z = 0$ donneront, par l'élimination des deux quantités $\dfrac{dz}{dy}$ et $\dfrac{dz}{dx}$, trois équations finales en x, y, z qui devront avoir lieu en même temps. Par conséquent, si ces équations ont un facteur commun, ce facteur sera l'intégrale particulière cherchée ; sinon la proposée n'admettra point d'intégrale particulière.

[**Lagrange 1774**, 71]

Il est ainsi remarquable que, pour la première et seule fois du mémoire de 1774, Lagrange évoque la possibilité de non-existence de l'intégrale singulière. Dans le cas des équations différentielles ordinaires, il avait déjà noté qu'aux deux équations qui définissaient son critère de recherche de l'intégrale particulière à partir de l'équation différentielle, une troisième venait s'ajouter. Mais il n'avait alors qu'émis la remarque que celle-ci devait s'accorder, sans éclaircir si cela était une implication ou une contrainte supplémentaire. Nous avions néanmoins souligné que ce point serait éclairci plus tard dans ses "*Leçons*". Par ailleurs, les exemples traités ne rencontraient pas cette problématique grâce à l'utilisation de l'intégrale complète. Pour les équations aux dérivées partielles en revanche, Lagrange explicite nettement dès 1774 que les équations supplémentaires (désormais au nombre de 2 pour autant de variables) ne s'accordent pas nécessairement : il pourra ainsi ne pas exister de *solution particulière*.

Il s'agit donc ici d'une remarque ponctuelle du géomètre turinois au cœur d'un mémoire d'une centaine de pages dont les exemples renforcent tant le bien-fondé des critères analytiques exhibés que la pertinence de son approche géométrique. Ces contraintes supplémentaires, qui pourraient entraver la mise au jour de la solution singulière, n'apparaissent pas lorsque la recherche est menée à partir de l'intégrale complète, ce qui est le cas de la grande majorité des exemples analysés dans le mémoire. S'il sera plus réservé dans ses "*Leçons*", Lagrange n'émet pas ouvertement de réserve quant à l'existence de l'intégrale singulière des équations différentielles ordinaires dans son mémoire. Ceci, ajouté au sens géométrique que ses critères vont acquérir entre les mains de Gaspard Monge, va contribuer à la considération systématique de l'intégrale singulière des équations différentielles en délaissant la question de leur existence.

Après quelques études isolées, c'est ainsi par son mémoire de 1734 que le travail de Clairaut porte une attention particulière, nouvelle, aux solutions des équations différentielles qui *échappent au calcul intégral*. C'est la résolution d'un problème de géométrie analytique plane particulier qui l'amène à considérer spécifiquement ce type de solutions.

Ensuite, l'apport de Lagrange à la théorie des intégrales singulières réside dans la force de son approche centrée avant tout sur la considération de l'intégrale solution. C'est l'intégrale complète qui est au cœur de son raisonnement, l'équation différentielle et la solution singulière y étant ensuite rattachées. D'ailleurs, chez le géomètre de Turin la considération de l'équation différentielle et de son intégrale complète semblent indissociables : les équations qu'il considère sont toujours le fruit de l'élimination des constantes à partir d'une expression algébrique qui en devient *de fait* l'intégrale complète. Selon Lagrange, ceci est une règle générale : toute équation différentielle est formée comme ceci. Il explicitera clairement ceci dans ses "*Leçons*" :

> Je considère maintenant que, comme toute équation dérivée du premier ordre, telle que $f(x, y, y') = 0$ ne peut être que le résultat de l'élimination de la constante arbitraire a, au moyen de l'équation primitive [i.e. l'intégrale complète] $F(x, y, a) = 0$ et de sa dérivée $F'(x, y) = 0$ ainsi que nous l'avons vu dans la leçon douzième [...]

[**Lagrange 1806**, 217]

Ceci est en accord avec la fondation algébrique que Lagrange donne à l'analyse, et qui a été étudiée en détail par [**Jahnke 2003**, 126-132]. Son raisonnement centré sur les solutions plutôt que sur les équations lui permet alors de donner des méthodes systématiques de recherche de ces intégrales *particulières*, après que Clairaut les a mises en évidence par des exemples sans toutefois en donner une véritable construction. Il faudra un siècle pour que les faiblesses de cette approche ne soient révélées par Darboux. Mais les méthodes de Lagrange bénéficient en outre de l'interprétation géométrique que le mathématicien italien en apporte. En s'intéressant aux courbes et aux surfaces *qui touchent toutes celles* dont est constituée l'intégrale complète, il fait reposer ses critères analytiques sur une nouvelle fondation géométrique qui, bientôt, supportera toute la théorie des intégrales singulières. L'ancrage des méthodes de Lagrange sera en effet rapidement renforcé par le prolongement que va donner Gaspard Monge de ses conceptions géométriques avec la *théorie des enveloppes*.

2.2. Intégrales singulières et théorie des enveloppes de Monge.

Le travail de Lagrange a permis de donner naissance à la théorie des intégrales singulières : le sujet est cerné, défini, et des règles de calcul sont établies. Le turinois alterne dans sa recherche entre les critères analytiques et les raisonnements géométriques pour supporter les combinaisons des équations qu'il propose et leurs interprétations. Pourtant, Lagrange n'étudie en détail ni les fondements analytiques ni le bien-fondé géométrique des éléments de la théorie qu'il forge. Selon les historiens Hans Jahnke et Ivor Grattan-Guinness, ceci est "*en accord avec le style algébrique*" de Lagrange. L'une de ces études - celle relevant de l'aspect géométrique - va être menée peu de temps après : "*comme il était prévisible, l'homme de la situation était Monge*" ([**Grattan-Guinness 1990**, 160]).

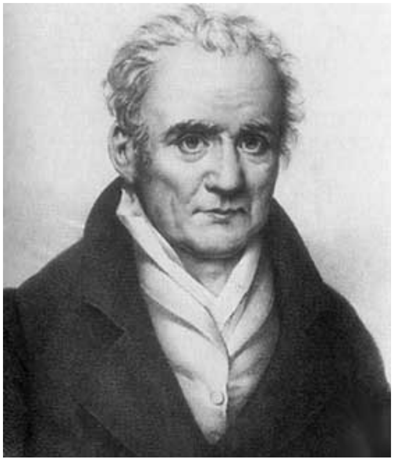


FIGURE 11. Gaspard Monge

Gaspard Monge est né le 9 Mai 1746 à Beaune, dans l'actuelle Côte-d'Or. Aîné des trois garçons de la famille Monge, il quitte Beaune à l'âge de 16 ans pour aller étudier au Collège de la Trinité de Lyon. Dès sa seconde année au Collège, il est jugé suffisamment brillant pour être chargé de l'enseignement des cours de physique. "*Ainsi, dès l'adolescence, commença pour Monge la carrière du professorat, qu'il a parcourue, avec un éclat toujours croissant, pendant quarante-huit années*" ([**Dupin 1819**, 9]), ce qui n'est pas sans nous rappeler le parcours de Gaston Darboux. Remarqué par un lieutenant colonel de l'Ecole Royale du Génie de Mézières pour avoir levé seul un plan de sa ville de Beaune, Monge pût intégrer cette Ecole en 1765. Reconnu pour son talent mathématique, ce sont ses aptitudes à développer des méthodes géométriques nouvelles pour effectuer des tâches pratiques - lever des plans, construire des fortifications ou encore tracer le relief - qui sont remarquées. Les nouvelles méthodes géométriques qu'il développe alors, dans l'optique d'applications concrètes, donneront naissance à une véritable doctrine : la *géométrie descriptive* [113].

Monge est choisi pour enseigner à l'Ecole du Génie au début de l'année 1769, et commence bientôt à envoyer le fruit de ses recherches personnelles à l'Académie des Sciences de Paris. Son travail en tant que géomètre de l'Académie à partir de 1780 l'oblige à quitter définitivement Mézières pour s'installer dans la capitale fin 1784. Ses nombreux travaux dans des domaines mathématiques variés (équations différentielles, courbes à double courbure mais aussi calcul des variations) se diversifient encore puisque le géomètre porte toujours plus d'intérêt à la chimie, la météorologie ou encore l'optique. Actif défenseur de la Révolution de 1789, il est appelé à la Convention Nationale pour participer à la création de ce qui deviendra en 1794 *l'Ecole Polytechnique*. Tout comme Lagrange, il fait également partie des premiers professeurs de l'Ecole Normale [114]. Ses cours de l'Ecole Polytechnique sont d'ailleurs publiés, ce qui donne naissance à ses "*Applications de l'Analyse à la Géométrie*" (1795) [115].

Proche de Napoléon Bonaparte, le géomètre participe indirectement à plusieurs campagnes en effectuant des voyages pour le "comité des œuvres d'art" : comme le dit Etienne Ghys sans détour, "*en clair, il s'agit d'aller piller les musées et les églises d'Italie et de remplir le Louvre d'œuvres d'art qui n'ont rien à faire en France*" ([**Ghys 2011**]). De ses voyages en Italie Monge ramènera une curiosité pour le "*fromage de Lodézan, connu sous le nom de Parmésan*" au sujet duquel il écrira un mémoire [116]. Du fait de son ancienne proximité avec l'Empereur, la Restauration sera pénible pour Monge qui fut exclu de l'Institut de France. A sa mort, le 28 Juillet 1818, les élèves de sa chère Ecole Polytechnique ne furent

113. Ayant pour but de représenter graphiquement des objets tridimensionnels à l'aide de projections bien choisies (que Monge appelait "*orthographiques*"), la géométrie descriptive de Monge permet "*d'embrasser d'une manière générale les moyens de définir la figure des corps ; et d'en conclure des méthodes uniformes, pour déduire de cette figure primitive et donnée, d'autres formes commandées par les besoins des arts*" ([**Dupin 1819**, 176]).

114. On peut voir les leçons de Monge dans cette Ecole dans [**Dhombres 1992**]. Dupin écrit par ailleurs, au sujet de la création de l'Ecole Polytechnique dont il sera élève en 1801 : "*on ne saurait trop admirer le plan d'instruction de l'école polytechnique, tel qu'il fut conçu par les créateurs au milieu desquels Monge s'élève au premier rang. Qu'on songe à ce que devaient être la physique et la chimie, dans leur généralité et dans leurs applications aux arts, professées sous ces divers points de vue par les Berthollet, les Chaptal, les Vauquelin et les Fourcroy ; la haute algèbre, l'analyse infinitésimale, et leurs applications à la géométrie et à la mécanique ; la géométrie descriptive et ses applications aux arts professées par les Monge, les Lagrange, les Prony, les Fourier, etc...*" [**Dupin 1819**, 52-3].

115. C'est la quatrième édition de ces *Applications*, [**Monge 1809**], qui nous servira de référence dans la suite.

116. "*Lorsque Monge était en Italie, il eut l'occasion de voir fabriquer ces énormes fromages connus sous le nom de parmésan, et renommés pour le grand usage qu'en font les Italiens dans l'assaisonnement de leurs pâtes et d'une foule de leurs mets. Cette fabrication lui parut offrir beaucoup d'intérêt pour notre économie domestique*" [**Dupin 1819**, 295].

pas autorisés à assister à ses obsèques ; pourtant beaucoup firent fi de cette interdiction si bien que son ami Charles Dupin écrira : "*les derniers honneurs rendus au géomètre [...] n'ont pas été sans gloire et sans splendeur*" ([**Dupin 1819**, 168]).

L'influence des mathématiques de Gaspard Monge fut importante du fait de l'impact de son enseignement auquel il accorda une place énorme dans sa vie de scientifique. Darboux, en rapportant cela, en rapportera la comparaison avec Lagrange :

> Monge avait exercé une influence que Lagrange constatait avec quelque regret. On connaît le mot célèbre échappé à l'illustre géomètre, au sortir d'une leçon de Monge à l'Ecole Polytechnique : « Avec sa géométrie descriptive et ses générations de surfaces, ce diable d'homme se rendra immortel » [117]. Monge ne se contentait pas de faire des découvertes ; il faisait aussi des élèves, ce qui vaut quelquefois mieux.
>
> [**Darboux 1908**, 108]

Son œuvre reste emblématique de la fécondité de l'unité des mathématiques, comme le résume Etienne Ghys : "*peu de mathématiciens ont eu une vision aussi claire des liens profonds qui unissent l'Analyse et la Géométrie. [T]oute l'approche scientifique de Monge n'est qu'un mélange permanent de théorie et d'applications*" ([**Ghys 2011**]). Par ailleurs, l'œuvre scientifique de Gaspard Monge a fait l'objet de la thèse de l'historien René Taton, une thèse qui est publiée ([**Taton 1951**]).

C'est dans ses célèbres "*Applications*" que Gaspard Monge développe dès 1795 la théorie des enveloppes et son lien fort avec la théorie des équations aux dérivées partielles exposée par Lagrange un peu plus tôt. Les *enveloppes* vont y être substituées aux courbes et aux surfaces *touchantes* que le turinois avait utilisées.

Monge étudie les surfaces dont l'équation est "*connue*" et "*finie*" et dépend d'un paramètre α : $F(x, y, z, \alpha) = 0$. Reprenant les considérations géométriques de Lagrange, il s'intéresse à la description d'une surface "*enveloppe*" lorsque le paramètre α varie :

> Si on suppose que le paramètre α ait successivement toutes les valeurs possibles depuis $\alpha = -\infty$ jusqu'à $\alpha = \infty$, toutes les équations, telles que $F = 0$ que l'on obtiendra de cette manière, seront chacune en particulier celle d'une surface courbe individuelle ; et la suite infinie de toutes ces surfaces courbes sera enveloppée par une autre surface courbe unique, qui est de la nature de celles que nous nous proposons de considérer, et auxquelles nous donnerons le nom générique d'*Enveloppes*.
>
> [**Monge 1809**, 27]

La considération des *enveloppes* permet à Monge de consolider sa théorie des lignes de courbure comme les lignes découpées sur une surface par les assemblages de normales qui possèdent une telle *enveloppe*, ce que nous avons vu en [Chap.2,6.2]. Cela lui permet également de démontrer que les surfaces développables sont les enveloppes de plans ([**Libermann 1978**, 364], [**Monge 1809**, 78-91]). Mais dans son cours, la première remarque que donne le géomètre est relative aux intégrales complètes et générales de Lagrange : si l'équation contient un second paramètre $\beta = \phi(\alpha)$, la forme de l'enveloppe

117. On prête également une seconde réaction envieuse à Lagrange envers Monge. Ce-dernier ayant réussi à donner l'expression analytique des lignes de courbure de l'ellipsoïde, Lagrange aurait dit, impressionné : "*J'aurais aimé le démontrer moi-même*" (voir [**Ghys 2011**]).

de la famille de surfaces $F(x, y, z, \alpha, \phi(\alpha)) = 0$ change avec la forme de la fonction ϕ. Il va alors rechercher à démontrer que "*toutes ces enveloppes auront un caractère général, une propriété commune, une même génération*" ([**Monge 1809**, 27]). Cette unicité va en grande partie provenir de la considération des courbes *caractéristiques*.

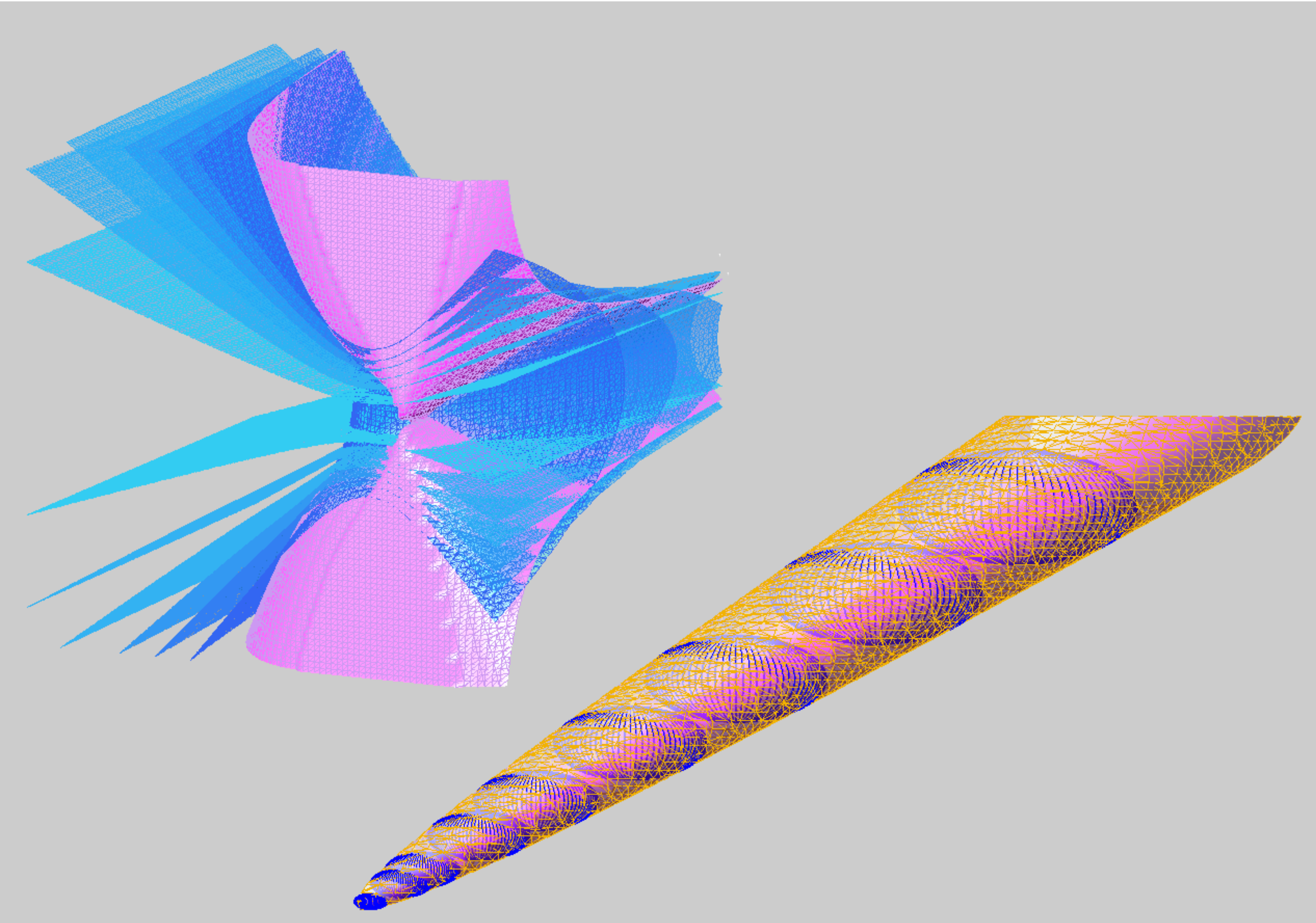


Figure 12. L'enveloppe d'une famille de paraboloïdes hyperboliques (à gauche) et une surface canal, enveloppe de sphères de rayons variables (à droite)[118]

C'est de l'étude du contact entre les surfaces *enveloppées* et leur *enveloppe* que Monge fait émerger la notion de *caractéristique*. Il remarque que lorsque l'on considère une surface $F(x, y, z, \alpha, \phi(\alpha)) = 0$ correspondant à une valeur de α, puis qu'on donne à ce paramètre

118. La famille de paraboloïdes a pour équation : $V(x, y, z, a) = z^2 - ay^2 - 2ay + a^2x - 4a = 0$, le lecteur curieux pourra retrouver que son enveloppe est une surface algébrique du cinquième degré. En ce qui concerne la surface canal, elle est l'enveloppe de la famille de sphères $V(x, y, z, a) = (x - \frac{1}{2}a^2)^2 + (y - a^2)^2 + (z - a^2)^2 - \frac{a^2}{4} = 0$.

"*une valeur infiniment peu différente de la première*" $\alpha + d\alpha$, l'intersection des deux surfaces sera une courbe qui est également "*la ligne de contact commune des deux enveloppées consécutives avec leur enveloppe*" ([Monge 1809, 29]). C'est cette courbe de contact, où l'enveloppe vient toucher (contact avec tangence) les enveloppées, qui reçoit du géomètre bourguignon l'appellation de *caractéristique*. Monge la détermine à l'aide d'un système de deux équations tiré des méthodes de Lagrange :

$$\begin{cases} F & = 0 \quad (A) \\ \left(\dfrac{dF}{d\alpha}\right) & = 0 \quad (B) \end{cases}$$

Ces deux équations permettent d'éliminer le paramètre α et d'obtenir l'équation de l'enveloppe, ce qui se rapproche de la méthode de Lagrange. Mais là où Lagrange préférait éliminer les constantes, Monge préfère quant à lui *parcourir* les objets géométriques décrits successivement par les différentes valeurs des constantes. L'objet étudié reste donc le même, mais la manière géométrique de l'envisager change avec Monge. En fixant une valeur pour α, les équations (A) et (B) déterminent une caractéristique sur l'enveloppe. Aussi, en donnant "*successivement à α différentes valeurs, on aura les équations de courbes de contact différentes [les caractéristiques] qui se trouveront toutes sur l'enveloppe, et dont l'enveloppe elle-même sera, pour ainsi dire, composée*" ([Monge 1809, 29]).

Ces courbes caractéristiques, qui participent de la description de l'enveloppe qu'elles forment, permettront à Monge d'obtenir le caractère commun aux enveloppes d'une même famille de surfaces :

> La [caractéristique] dont les équations sont (A) et (B) a aussi une propriété indépendante de la courbe qui particularise l'enveloppe, et dont on peut avoir l'expression analytique ; en vertu de cette propriété, elle imprime un caractère général à toutes les enveloppes soumises à la même génération ; sa considération est très importante dans l'intégration des équations aux différences partielles.
>
> [Monge 1809, 29]

Mais dans un premier temps, en étudiant le contact des caractéristiques entre elles, il adjoint aux équations (A) et (B) une troisième équation issue d'une nouvelle différentiation selon le paramètre : $\dfrac{d^2F}{d\alpha^2} = 0 \quad (C)$. Ces trois équations déterminent sur l'enveloppe une courbe à laquelle sont tangentes toutes les caractéristiques : "*elle est pour l'enveloppe une véritable arête de rebroussement*" ([Monge 1809, 51]). Une troisième dérivation détermine pour finir le(s) point(s) de rebroussement de cette arête.

Ce n'est que dans l'addition qu'il donne à son ouvrage, intitulée "*De l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre entre trois variables*", que Monge se penche véritablement sur le lien entre sa théorie des caractéristiques et la théorie des équations différentielles ([Monge 1809, 367-414]). En reprenant les équations (A) et (B) des courbes caractéristiques, il démontre que leur différentiation permet d'aboutir à une équation aux dérivées partielles du premier ordre débarrassée de toute dépendance en α et $\phi(\alpha)$. C'est dans cette équation différentielle que repose finalement l'unité recherchée dès le début de l'ouvrage par le géomètre entre les différentes enveloppes. Avec un langage pittoresque qu'on ne peut qu'apprécier, il indique :

> On aura une équation aux différences partielles du premier ordre
>
> $$f(x, y, z, p, q) = 0$$
>
> Or, 1) en éliminant α on transporte à l'enveloppe ce qui n'était dit d'abord que de l'enveloppée ; 2) en éliminant $\phi(\alpha)$ on transporte à toutes les enveloppes possibles ce qui n'était dit d'abord que de l'enveloppée déterminée par la forme supposée de la fonction ϕ. [...] Donc l'équation $f = 0$ appartient à toutes les enveloppes possibles qui peuvent être produites d'une manière quelconque par le mouvement de la même enveloppée mobile.
>
> [**Monge 1809**, 371]

Monge est ainsi parvenu à déterminer l'unité analytique des objets géométriques dont il proposait l'étude. Dans la suite, il va poursuivre le développement de sa théorie géométrique pour en tirer des applications analytiques. Le professeur de l'Ecole Polytechnique va en effet prouver que l'intégration d'une équation aux dérivées partielles peut être obtenue, le long de ses courbes caractéristiques, grâce à un système d'équations différentielles ordinaires ([**Archibald 2003**, 339]). Puisque la viabilité de cette intégration sera ultérieurement le sujet de notre analyse (voir section 2.7), mais que les outils employés par Monge seront largement repris après lui - tout particulièrement par Darboux -, nous allons détailler rapidement son raisonnement [119].

Le géomètre commence par étudier les surfaces développables formées par des plans qui "*roulent*" sur deux caractéristiques consécutives d'une enveloppe. Ces surfaces, que Darboux appellera des "*développables caractéristiques*", ont pour enveloppe la surface enveloppe originelle. Puis il considère sur une caractéristique un point et la tangente en ce point. En faisant "*tourner*" les plans qui passent par ce point et cette tangente, la position de tangence à l'enveloppe correspond au plan qui touche la caractéristique consécutive (infiniment proche). Les points de contact de ces familles de plan forment sur l'enveloppe des courbes qui coupent toutes les caractéristiques. Monge les appelle des "*trajectoires caractéristiques*". Les caractéristiques et leurs trajectoires sont ainsi formées par différents roulements de plans tangents sur l'enveloppe. Il remarque alors une réciprocité singulière entre les tangentes de ces deux familles de courbes de l'enveloppe :

> la surface développable qui touche l'enveloppe dans la caractéristique, et celle qui touche l'enveloppe dans la trajectoire, sont réciproques en cela que la première est le lieu des tangentes aux différentes trajectoires dont les points de contact sont pris sur la même caractéristique, tandis que la seconde est le lieu des tangentes aux différentes caractéristiques dont les points de contact sont pris sur une même trajectoire.
>
> [**Monge 1809**, 376]

Cette réciprocité entre les tangentes de deux familles de courbes d'une surface et les génératrices de contact des développables de ces courbes inspirera grandement l'élève de Monge, Charles Dupin. De cette construction particulière il développera, nous l'avons vu en [Chap.3,3.1], la théorie générale des tangentes conjuguées. Le long des caractéristiques

119. Pour une analyse plus fine et plus poussée, voir [**Taton 1951**, Chap.7].

de l'enveloppe, les tangentes conjuguées seront en effet avec le vocabulaire de Dupin les trajectoires caractéristiques, et réciproquement.

Sans en donner cette extension, Monge remarque tout de même que la propriété de réciprocité des tangentes "*mérite une grande attention, parce que c'est son expression qui nous produira les deux équations aux différences ordinaires de la caractéristique*" ([**Monge 1809**, 376]). En effet, en étudiant les variations de l'équation différentielle $f(x, y, z, p, q) = 0$ le long de ces deux directions particulières, il obtient deux relations entre deux seulement des quatre différentielles dx, dy, dp, dq. En combinant ces relations, il obtient ce qui sera rapidement appelé *les équations des caractéristiques* :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{pP+qQ} = -\frac{dp}{X+pZ} = -\frac{dq}{Y+qZ}$$ [120] [**Monge 1809**, 581]

Ce sont ces équations qui seront le fondement des méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles qui en réduisent la résolution à celle de systèmes d'équations différentielles ordinaires. Nous aurons l'occasion d'y revenir plus largement dans la suite, en particulier dans la section 2.7. Signalons pour terminer que Monge, dans les exemples qu'il détaille ensuite, remarque que l'équation différentielle $f(x, y, z, p, q) = 0$ permet de définir, si l'on fixe un point de l'espace $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, un ensemble de directions auxquelles les caractéristiques en ce point sont tangentes. Ce cône, qui sera appelé *cône caractéristique*, *cône de Monge* ou encore *cône des tangentes*, est enveloppé par les plans tangents des surfaces intégrales passant par M_0. Nous en retrouverons l'emploi plus loin chez Bonnet et Darboux.

La théorie des enveloppes de Gaspard Monge vient ainsi donner un fondement théorique fort aux raisonnements que Lagrange avait exposés dans le cadre de son travail sur les intégrales singulières. Dans le cas d'une variable, ces intégrales apparaissent ainsi comme l'enveloppe des courbes de l'intégrale complète. Pourtant, dans le cas de deux variables, Monge ne s'intéresse pas à l'intégrale singulière de Lagrange : il se concentre sur le lien entre intégrale complète et intégrale générale.

En effet, à partir d'une intégrale complète $F(x, y, z, a, b)$ d'une EDP, la théorie des enveloppes de Monge permet d'obtenir une intégrale générale de la manière suivante : l'établissement d'une relation entre les paramètres a et b donne naissance à une famille de surfaces à un seul paramètre. L'enveloppe de cette famille de surfaces est alors une intégrale générale de l'équation différentielle. C'est d'ailleurs sous cette forme - sans employer toutefois le terme *enveloppe* - que Lagrange présentera ses "*Leçons*" sur les intégrales des EDP. Le géomètre de Turin mentionnera d'ailleurs explicitement celui dont il est le collègue à l'Ecole Polytechnique :

> On peut voir, dans les écrits de Monge, la théorie de la génération des surfaces et des équations qui peuvent les représenter, développée dans toute son étendue, et avec des considérations particulières et ingénieuses qui lui appartiennent.
>
> [**Lagrange 1806**, 383]

120. Monge adopte la notation suivante : il désigne la dérivée partielle de l'équation différentielle par rapport à l'une des variables x, y, z, p, q par la lettre majuscule correspondant à cette variable.

En revanche, qu'en est-il de l'intégrale singulière dans l'ouvrage de Monge ? Lagrange l'ayant décrite comme *la surface touchant toutes les surfaces* de l'intégrale complète, on serait naturellement tenté d'affirmer comme Ivor Grattan-Guinness que "*la solution singulière est l'enveloppe de toutes les solutions de la solution complète*" ([**Grattan-Guinness 1990**, 160]). Mais contrairement à ce que ceci laisse penser, le travail de Monge ne porte aucunement sur les enveloppes des intégrales complètes dont les deux paramètres sont laissés libres.

Le géomètre de Beaune ne mentionne les intégrales singulières que deux fois dans son travail : la première est relative à sa construction d'une surface dont les normales sont tangentes à une sphère ([**Monge 1809**, 242-3]). Il utilise alors l'unicité de l'intégrale singulière pour caractériser l'arête de rebroussement de cette surface. La seconde apparition de l'intégrale singulière est une remarque que donne Monge pour les lignes de courbures planes de la surface dont les normales sont tangentes à une surface développable donnée ([**Monge 1809**, 281]).

Il y a donc un paradoxe apparent lorsque l'on étudie le travail de Lagrange et celui de Monge : les raisonnements de Lagrange relatifs à l'existence et aux critères de la détermination analytique de l'intégrale singulière reposent sur la notion de *surface touchante*, qui préfigure la notion d'*enveloppe*. Cette notion est ensuite largement développée par Monge qui en érige une véritable théorie géométrique, qui sera incontournable dans les mathématiques du XIXème siècle. Aussi, et les historiens s'accordent à le dire comme nous l'avons vu, le travail de Monge apporte-t-il une analyse systématique, un prolongement et même un fondement à celui de Lagrange. Et pourtant, ce travail n'inclut absolument pas l'étude des intégrales singulières.

L'exemple de la discussion donnée dans [**Grattan-Guinness 1990**, 160] montre bien à quel point ce décalage n'a pas été perçu : voulant illustrer la théorie de Monge, l'historien reprend avec lui le premier des exemples qu'il donne, à savoir la surface canal engendrée par des sphères de rayon constant dont les centres parcourent une courbe plane ([**Monge 1809**, 35-42]). Il donne, avec Monge, l'équation différentielle du problème puis son intégrale complète :

$$U(x, y, z, \alpha, \beta) = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = a^2$$

Puis Grattan-Guinness poursuit comme ceci :

> En éliminant α et β à partir de :
>
> $$U = 0\ ,\ U_\alpha = 0\ ,\ U_\beta = 0$$
>
> la solution singulière est obtenue $z = \pm a$; deux plans parallèles au plan xy et éloignés de a au-dessus et au-dessous.
>
> [**Grattan-Guinness 1990**, 160]

Il poursuit enfin avec la discussion de l'intégrale générale, dont sont bien issues les surfaces canal.

Bien sûr, les calculs de l'historien sont corrects. Mais dans le travail de Monge, la discussion relative à l'intégrale singulière est totalement absente. Ceci reflète néanmoins l'association profonde qui existe entre la théorie des enveloppes et celle des intégrales singulières. Le travail de Lagrange sur la seconde est certes supporté, renforcé par le développement de la première. Mais la théorie des enveloppes n'est pas directement reliée à celle des intégrales singulières par Monge. Dans le cas des équations différentielles ordinaires, l'*enveloppe* permet bien de décrire l'intégrale singulière à partir des solutions de l'intégrale complète. Mais le bourguignon ne le signale même pas : son ouvrage est complètement dédié à la génération des surfaces.

L'emploi de l'outil *enveloppe* dans les travaux des mathématiciens relatifs aux intégrales singulières reste néanmoins inévitable. Ce que nous allons étudier dans la suite, c'est dans quelle mesure la théorie des enveloppes peut être appliquée, ou même peut constituer le fondement théorique de la notion d'intégrale singulière en lien avec sa définition, son existence et sa détermination.

2.3. De Morgan, Boole et Cayley : remise en cause des critères de Lagrange (1850-1870).

Durant la première moitié du XIXème siècle, le succès de la théorie des enveloppes de Monge accompagne la diffusion de la théorie des intégrales singulières. Celle-ci devient un sujet de prédilection pour les exercices de Calcul Différentiel et Intégral. Si Cauchy expose d'autres critères pour rechercher les solutions singulières à partir de l'équation différentielle [121], ce sont les méthodes de Lagrange qui s'imposent. Le contenu du Traité de l'Abbé Moigno en témoigne ([**Moigno 1844**]).

Il faut attendre les années 1850 pour que le bien-fondé de ces critères soient remis en cause, ou tout du moins pour que des études précises soient entreprises pour analyser les cadres de validité des procédés de Lagrange, voire leur donner les prolongements nécessaires. C'est ce que nous allons illustrer ici en nous penchant sur les travaux des mathématiciens britanniques De Morgan, Boole et Cayley. Ces travaux sont en effet particulièrement révélateurs de la seconde phase de l'évolution de la théorie des intégrales singulières : il s'agit en effet désormais de préciser, rigoureusement, la signification des premiers critères de Lagrange, ainsi qu'éventuellement d'en déterminer des améliorations. La notion même d'*intégrale singulière* va alors être redéfinie.

FIGURE 13. De gauche à droite : Augustus De Morgan, George Boole et Arthur Cayley

121. Cauchy propose notamment d'utiliser la forme indéterminée $\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{0}{0}$ (voir [**Boole 1859**, 176]). Nous y reviendrons.

Nous avons déjà donné quelques détails biographiques au sujet du benjamin de ces mathématiciens, Arthur Cayley, dans la partie [Chap.3,4.2]. Aussi nous contenterons-nous ici de n'évoquer que De Morgan et Boole.

Né en Inde en 1806, Augustus De Morgan grandit dans le Sud de l'Angleterre avant d'entrer au Trinity College de Cambrdige en 1823, à l'âge de 16 ans. Il n'en obtient pas le diplôme de sortie et ne peut y poursuivre ses études du fait de son refus de passer l'examen de théologie. Après être retourné à Londres en 1826, De Morgan se tourne vers des études de droit tout comme le feront Cayley et Sylvester une vingtaine d'années plus tard. Mais seulement deux années plus tard, il obtient la chaire de Mathématiques de la toute nouvelle Université londonienne, qui deviendra bientôt la *University College London*. Il y restera jusqu'en 1866, si l'on excepte toutefois quelques années durant la décennie 1830 après que De Morgan a démissionné.

Brillant logicien, De Morgan aura introduit la notion de *raisonnement par récurrence* pour la preuve mathématique. A la fin de sa carrière, il participe activement à la création de la London Mathematical Society (1864) dont il est le premier Président, et se voit élu à la Royal Astronomical Society. Il s'éteindra à Londre en Mars 1871 à l'âge de 64 ans.

En ce qui concerne George Boole, celui-ci naît en 1815 à Lincoln, dans l'Est de l'Angleterre. Son nom reste célèbre dans le domaine de la logique binaire dont l'algèbre porte son nom. Mais enfant, son domaine de prédilection n'est ni la logique ni les mathématiques mais l'apprentissage des langues, y compris de manière autodidacte. Connaissant le Grec, le Latin, le Français et l'Allemand, George Boole quitte sa ville natale à l'âge de 16 ans pour le poste d'aide-instituteur dans une école de Doncaster, et fait de brefs séjours à Liverpool et dans la *Hall's Academy* de Waddington en 1833. De retour à Lincoln en 1834, Boole y crée sa propre école. Il apprend en parallèle la mécanique et les mathématiques uniquement grâce aux livres qu'un de ses amis lui procure depuis l'Institut de Mécanique de la ville de Lincoln. Il est alors appelé à Waddington pour y diriger l'Academy, ce qu'il entreprend avec l'aide de toute sa famille.

Boole développe alors des aptitudes mathématiques stimulées par ses lectures de Lagrange et de Laplace notamment. Il fait relire ses premiers travaux, en algèbre et en analyse, à Augustus De Morgan avec qui il correspond dès 1842, et ne tarde pas à se faire un nom parmi les mathématiciens britanniques. Si bien qu'en 1849, il est élu à la chaire de mathématiques du Queen's College de Cork en Irlande. Il y restera ensuite toute sa vie, et y publiera notamment en 1854 l'important traité de logique, considérée de manière algébrique, qui le rendra immortel. Parmi ses travaux, son *Traité* sur les équations différentielles - que nous étudierons ci-après - paraît en 1859. Boole est alors un mathématicien reconnu, membre de la Royal Society. En Novembre 1864, il se rend au College sous une pluie battante et donne sa leçon dans ses habits détrempés. Il contractera alors une pneumonie et mourra quelques jours plus tard, à l'âge de 49 ans, d'un épanchement pleural.

C'est Augustus De Morgan qui, le premier, va remettre en question les critères de recherche des solutions singulières de Lagrange qui avaient été généralement acceptés. D'une manière générale, le logicien britannique doute des conclusions établies par l'analyse algébrique, qu'il nomme *modern analysis* (développée notamment par Lagrange, voir [**Jahnke 2003**]), lorsque celle-ci fait intervenir des infiniments petits ou des quantités infinies. Dans un mémoire qu'il écrit en 1851 - et qui sera publié quelques années plus tard - De Morgan entame une enquête approfondie qui se réclame d'une rigueur nouvelle sur différents points du Calcul intégral. Il annonce l'objet fondamental de ses remises en question :

> Lorsque l'analyse moderne impressionna au début les mathématiciens qui en ressentaient la puissance, il semble qu'ils l'aient acceptée comme apte à donner des résultats de la même ampleur que ceux de la géométrie. Peut-être avaient-ils oublié que l'apparente universalité des conlusions de la géométrie n'est valide que grâce à des restrictions préliminaires.
>
> [...] L'analyse s'est lancée dans la compétition avec les généralités bien gardées de la géométrie sans se soucier des cas extrêmes, et nous en ressentons les effets aujourd'hui. La nécessité d'une enquête spéciale réservée aux cas où les formules naissent de l'évanescence ou de l'infini est finalement admise : mais nous ne connaissons pas encore l'interprétation complète de la sentence *ce qui est vrai jusqu'à la limite est vrai à la limite* ; tout comme nous ne savons pas si cette sentence est, en un certain sens, universellement vraie.
>
> [**De Morgan 1856**, 108-9]

De Morgan n'appartient donc plus à cette génération que Niels Jahnke a appelée "*les analystes algébristes du XVIIIème siècle*", à la recherche de "*généralisation*" grâce à l'algèbre quitte à délaisser avec "*pragmatisme*" les considérations des cas particuliers où les formules générales sont mises en défaut ([**Jahnke 2003**, 131]). Au contraire, le mathématicien britannique incarne parfaitement son siècle, le XIXème siècle, "*souvent appelé l'âge de la rigueur*" ([**Lützen 2003**, 155]).

La première de ces *enquêtes spéciales* que Boole entreprend dans le cadre du calcul intégral est réservée aux solutions singulières. Ne s'intéressant qu'aux équations différentielles ordinaires, De Morgan va s'attacher à montrer que la nature des lieux géométriques dont découlent les critères de Lagrange est en réalité plus variée que la seule enveloppe des courbes de l'intégrale complète. Ce principe général, largement adopté en vertu de la théorie de Monge, est ainsi remis en cause. Ce ne sont pas les enveloppes elles-mêmes (leur existence, leurs propriétés) dont doute le logicien britannique en premier lieu. Son enquête porte en revanche surtout sur l'adéquation entre l'enveloppe des courbes intégrales et le produit des critères algébriques de Lagrange. Mais ce-faisant, il va soumettre à une analyse méticuleuse le procédé algébrique même de détermination de l'enveloppe.

La première remarque de De Morgan porte sur la nature des courbes particulières que l'on peut déduire de la considération d'une famille (à un paramètre) de courbes planes. Lagrange puis surtout Monge avaient uniquement placé au cœur de cette étude l'*enveloppe* (la *courbe touchante*). Le mathématicien de Londres va adjoindre de nouvelles courbes à l'enveloppe :

> Lorsqu'une famille de courbes $V(x, y, c) = 0$ [122] est complètement dessinée, on peut distinguer parmi l'infinité de courbes qui leur sont reliées

122. Dans ce qui suit, nous harmonisons les notations qui diffèrent et souvent se contredisent chez les différents mathématiciens dont nous étudierons les travaux. $V(x, y, c)$ sera employé, à la suite de Lagrange, pour désigner l'intégrale complète. $F(x, y, y')$ sera utilisé pour les équations différentielles pour être cohérent avec l'étude du mémoire [**Darboux 1876**]. Enfin, l'expression de y' tirée de l'équation F sera noté $\chi(x, y)$ conformément aux notations de De Morgan, et $f(x, y)$ sera employée avec Lagrange pour désigner l'expression de la constante c.

> les trois courbes suivantes. D'abord, la *courbe de séparation*, rassemblant les points qui altèrent le nombre d'individu de la famille de courbes qui y passent. Ensuite, une *courbe de contact*, dont chaque point est touché par un ou plus d'un individu(s) de la famille. Enfin une *courbe de résistance* (*resilience*[123]) où en chaque point un individu de la famille s'arrête puis rebrousse chemin (*stops and recedes*) sans intersection.
>
> [**De Morgan 1856**, 109]

Ces trois lieux géométriques peuvent coïncider, et De Morgan note même que c'est généralement le cas. Mais ils demeurent dans une certaine mesure indépendants les uns des autres : une courbe peut ainsi avoir l'une de ces propriétés sans les deux autres, ou deux de ces propriétés sans la troisième. Ainsi, comme le détaille le mathématicien anglais, les cercles tangents à une courbe développante ont avec elle un contact sans résistance, et cette développante n'est pas nécessairement un lieu de séparation pour les cercles. De même, un lieu de rebroussements (résistance) peut ne pas être une courbe de contact ou de séparation. Enfin, une remarque importante de De Morgan consiste à remarquer que ces trois lieux peuvent coïncider (en tout ou en partie) avec l'une des courbes individuelles de la famille de départ. Cette dernière remarque pousse De Morgan à redéfinir la notion même d'intégrale singulière : il propose de nommer ainsi toute solution "*qui résulte d'un procédé qui ne peut introduire de constante arbitraire*" ([**De Morgan 1856**, 109]). Selon cette définition, une intégrale singulière peut appartenir à l'intégrale complète en vertu de la remarque précédente. Aussi propose-t-il de nommer *solutions étrangères* (*extraneous solution*) les solutions d'une équation différentielle qui n'appartiennent pas à l'intégrale complète.

Grâce à ces définitions, De Morgan aborde son propos principal : les critères algébriques usuels de détection des solutions *étrangères*. Il affirme que les tests qui, à l'origine (chez Lagrange), avaient pour but de déceler les solutions *étrangères* - échappant au calcul intégral selon la formule de Clairaut - incluent en réalité la recherche des solutions qu'il appelle *singulières*. En d'autres termes, les critères de Lagrange permettent effectivement de progresser vers la recherche des solutions hors de l'intégrale complète en permettant d'obtenir des solutions dénuées de paramètre arbitraire. Mais ils ne permettent pas d'opérer effectivement un tri final parmi ces solutions entre celles qui sont déjà dans l'intégrale complète et celles qui ne le sont pas (les *étrangères*). Par ailleurs, ils ne donnent aucun résultat quant à la nature des solutions relativement aux trois différents lieux géométriques définis par De Morgan à partir d'une famille de courbes. Ces remarques mettent ainsi en lumière la prudence avec laquelle le mathématicien aborde les critères algébriques de Lagrange, ainsi que l'écart qui selon lui doit être rigoureusement instauré entre *intégrales singulières* et *enveloppes*.

De Morgan en vient ensuite à l'enquête proprement dite des critères algébriques, avec une attention renforcée envers les infiniment petits et les infiniment grands. Le premier des critères qu'il met à l'épreuve est celui que Lagrange avait développé dans ses "*Leçons*" pour révéler la solution singulière à partir de l'intégrale complète V. Il est néanmoins largement établi à partir des premières remarques de 1774 que nous avons détaillées plus haut (voir 2.1). En accord avec Monge, Lagrange recherche la solution singulière dans l'élimination

123. Le lecteur trouvera plus loin dans cette section différents exemples graphiques de ces trois courbes qui, nous le verrons, auront pour certaines changé d'appellation.

de la constante a à partir des équations

$$V(x,y,a)=0\ ,\ \frac{dV}{da}=0\ .$$

Ce qu'il introduit dans ses leçons, c'est la considération de la fonction $a=f(x,y)$ déterminant, grâce à l'intégrale complète, le paramètre en fonction des coordonnées. Son nouveau critère va alors porter sur cette fonction f. La différentiation de l'intégrale complète prend alors la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dx}+f'_x\dfrac{dV}{da} & =0 \quad \leftrightarrow \quad f'_x \quad = -\dfrac{\frac{dV}{dx}}{\frac{dV}{da}} \\[2ex] \dfrac{dV}{dy}+f'_y\dfrac{dV}{da} & =0 \quad \leftrightarrow \quad f'_y \quad = -\dfrac{\frac{dV}{dy}}{\frac{dV}{da}} \end{cases}$$

En utilisant ensuite la nullité des dénominateurs $\dfrac{dV}{da}$ pour l'intégrale singulière, Lagrange en déduisait le critère :

$$\boxed{f'_x=\infty\ ,\ f'_y=\infty} \qquad \text{[Lagrange 1806, 196]}$$

De Morgan revient en détail sur la validité de ce critère. En désignant la dérivée de y et le paramètre - qu'il note c et non a - grâce aux fonctions $\chi(x,y)=y'$ et $f(x,y)=a$, il en reprend la construction. La variation du paramètre, exprimée par la différentielle de la fonction f, lui permet d'avoir une expression de dy et fonction de dx. Il s'agit alors de comparer cette expression à la valeur de χ qui régit la dérivée des solutions de l'équation différentielle. Ce-faisant, De Morgan obtient la relation suivante :

$$(y'-\chi)dx=\frac{dc}{f'_y}=-\frac{\chi\cdot dc}{d'_x}$$

Les solutions de l'intégrale complète correspondant aux cas où dc est nul, il observe que trois autres possibilités doivent être envisagées :
- f'_x et f'_y deviennent infinies, ce qui correspond au critère de Lagrange
- f'_x seule devient infinie et x est constant
- f'_y seule devient infinie et y est constant

De Morgan conclut que ces trois possibilités permettent de prendre en compte toutes les solutions *singulières*. Il va ensuite montrer que le critère d'élimination du paramètre c à l'aide l'équation différentielle peut amener dans l'intégrale complète à des lieux qui ne sont plus des solutions de ladite équation. Ceci a ainsi directement trait à la formation de l'enveloppe et à ses propriétés. En employant le même procédé que précédemment mais en utilisant au départ l'intégrale complète pour observer les variations de c, De Morgan obtient la seconde relation :

$$y'-\chi=-\frac{V'_c}{V'_y}\left(\frac{dc}{dx}+\frac{dc}{dy}y'\right)$$

En imposant la nullité du premier membre - c'est-à-dire en se restreignant aux solutions de l'équation différentielle -, De Morgan remarque que les solutions singulières doivent annuler le rapport $\dfrac{V'_c}{V'_y}$. Mais d'un autre côté si l'on utilise ce critère pour exprimer $c=$

$f(x, y)$ et le substituer dans l'intégrale complète, cette méthode est susceptible de fournir des courbes qui ne sont plus solutions de l'équation différentielle. C'est en effet le cas lorsque les différentielles de c deviennent infinies, ce qui ne contraint plus $y' - \chi$ à la nullité ([**De Morgan 1856**, 110]). Ce que De Morgan démontre en fait ici, c'est qu'il existe des cas où les critères usuels de recherche des solutions singulières aboutissent à des expressions qui ne sont plus des solutions de l'équation originelle. Mais ceci ne deviendra vraiment explicite qu'avec son étude du second critère, que nous suivrons un peu plus loin.

Pour mieux faire apprécier les différentes distinctions entre la nature des solutions singulières et les relier aux spécificités des comportements des infiniment petits des critères analytiques, De Morgan en propose une "*interprétation géométrique*". Il interprète l'intégrale complète $V(x, y, c) = 0$ comme une surface de $\mathbb{R}^3$, et introduit la considération d'un *cylindre tangent* dont la base est une solution singulière. Ce cylindre est en outre déterminé par son intersection avec la surface $V = 0$: le long de cette intersection, le cylindre et la surface ont les mêmes plans tangents. De Morgan propose alors une étude géométrique des différentes natures des solutions singulières en fonction des propriétés des cylindres tangents auxquels elles donnent naissance ([**De Morgan 1856**, 110-111])[124].

Pour terminer cette première partie de son travail - consacrée aux critères portant sur *l'intégrale* V et non sur *l'équation* F - le professeur de Londres donne un premier exemple. Il s'agit alors d'illustrer la distinction entre solutions *singulières* et *étrangères*, tout en replaçant la considération de l'enveloppe parmi les trois lieux géométriques définis dès le début du mémoire. La famille de courbes qu'il choisit d'étudier brièvement est donnée par l'expression :

$$V(x, y, c) = x + c(x - \sqrt{c})^2 - y = 0$$

L'élimination de la constante, selon la méthode classique employée par Lagrange et Monge *a priori* pour déterminer l'enveloppe, est donnée par la combinaison de $V = 0$ et de $\dfrac{dV}{dc} = 0$. De Morgan obtient alors deux courbes :

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} x + \sqrt{c} & = 0 & \leftrightarrow & y & = \quad x \\ x + 2\sqrt{c} & = 0 & \leftrightarrow & y & = \quad x + \dfrac{x^4}{16} \end{array} \right. \qquad [\textbf{De Morgan 1856}, 111]$$

124. Plus précisément, la nature des solutions singulières est discutée par De Morgan selon les propriétés des intersections entre le cylindre tangent et la surface qui représente l'intégrale complète. Le nombre des contacts (i.e. des tangences) et l'*inclinaison* des courbes d'intersection (De Morgan parle de courbes *obliques* et *horizontales*) sont les piliers du raisonnement qu'il emploie.

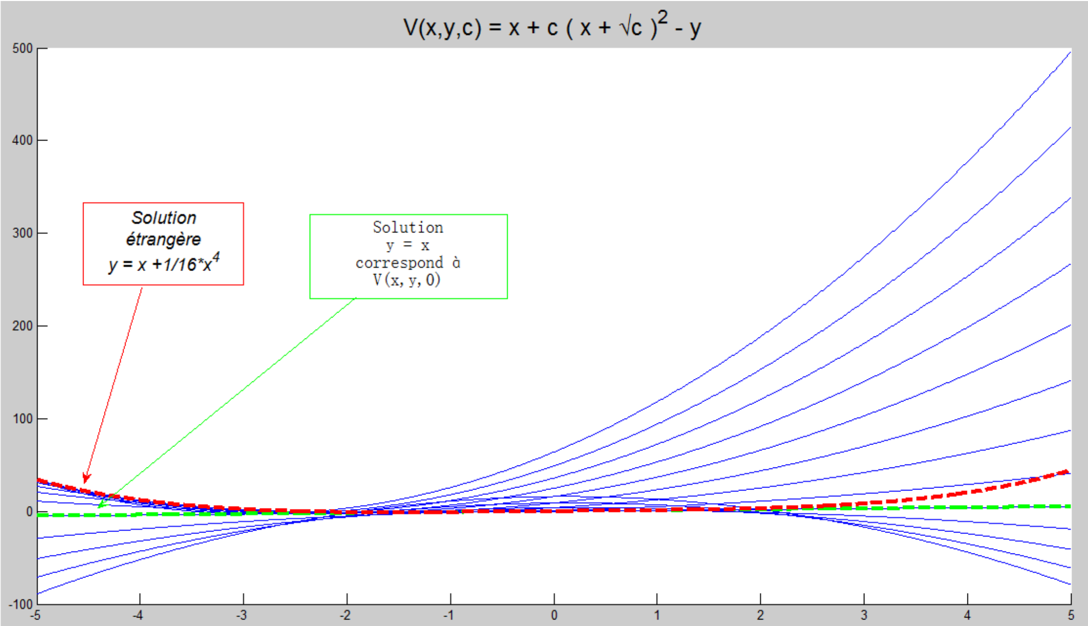


FIGURE 14. L'exemple de De Morgan conduit à deux solutions qu'il nomme singulières, l'une appartenant à l'intégrale complète (en vert), l'autre étant une solution étrangère (en rouge)

Au sens de De Morgan, ces deux solutions sont des *solutions singulières*. Cependant, la première ($y = x$) n'est pas une solution *étrangère*, puisque comme il le souligne elle correspond à $V(x, y, 0)$ et appartient ainsi à l'intégrale complète. La seconde en revanche n'y figure pas : c'est une solution *étrangère*. Par ailleurs, rien ne distingue pour le mathématicien anglais la nature des lieux géométriques qu'elles incarnent vis-à-vis de la famille de courbes : "*ces deux solutions donnent des courbes de séparation, de contact et de résistance des courbes primaires*" ([**De Morgan 1856**, 111]).

Animé par le même désir d'examiner en détail la validité des critères algébriques de Lagrange, Augustus De Morgan se penche ensuite sur le "*test dérivé de l'équation différentielle elle-même*". Là encore, c'est une forme du critère de Lagrange légèrement différente de celle que nous avons présentée plus haut que le logicien va analyser. Dans ses "*Leçons*", le géomètre turinois avait en effet préféré au premier critère ($F = 0$, $\dfrac{dF}{dy'} = 0$) un second. En recherchant via l'équation différentielle une expression de $y' = \chi(x, y)$, Lagrange y écrivait l'équation $F(x, y, \chi(x, y)) = 0$. La suite du raisonnement suit exactement les étapes du critère précédent portant sur l'intégrale complète, à savoir la différentiation de l'équation selon x et y, l'isolation des dérivées partielles de χ, puis enfin l'introduction de la nullité des dénominateurs $\dfrac{dF}{dy'} = 0$ pour la solution singulière. Le critère de Lagrange était donc le suivant :

$$\boxed{\chi'_x = \infty \ , \ \chi'_y = \infty} \qquad \text{[\textbf{Lagrange 1806}, 229-230]}$$

De Morgan quant à lui prend pour point de départ l'expression de l'intégrale complète $V(x, y, c) = 0$. En en combinant la différentielle avec l'expression de l'équation différentielle résolue $y' = \chi(x, y)$, il recherche c comme *une fonction des trois variables x, y, χ*. L'annulation des deux dérivées partielles de $V\left(x, y, c(x, y, \chi_{(x,y)})\right)$ lui permet enfin d'aboutir à une relation entre les variations de c et celles de χ débarrassée de la dépendance en V :

$$(\chi'_x + \chi'_y \chi)\,\frac{dc}{d\chi} = -\left(\frac{dc}{dx} + \frac{dc}{dy}\chi\right)$$

De Morgan remarque ainsi là encore que le critère donné par Lagrange, à savoir que χ'_x et χ'_y deviennent des quantités infinies, peut avoir d'autres causes que la nullité de V'_c [125]. Cette cause était la seule envisagée par Lagrange, mais le mathématicien britannique remarque ici que "*la possibilité que $\dfrac{dc}{d\chi}$ s'annule, ou que $\dfrac{dc}{dx}$ ou $\dfrac{dc}{dy}$ puisse devenir infini doit immédiatement frapper l'esprit*" ([**De Morgan 1856**, 112]).

Tout comme au sein de l'étude du premier critère, l'importance de la finitude de la quantité $\left(\frac{dc}{dx} + \frac{dc}{dy}\chi\right)$ est mise en avant par De Morgan. Pour distinguer les cas où cette quantité reste finie de ceux où elle devient infinie, le mathématicien va mettre au jour ses liens avec la courbure des courbes intégrales. Il note en effet que, pour l'une de ces courbes, cette quantité correspond à la dérivée seconde y''. La discussion doit donc être établie selon la finitude des courbures [126] des lieux où l'intégrale singulière touche les courbes de l'intégrale complète.

> Cette difficulté [la finitude des courbures] remet la signification entière du critère en question au-delà de la portée de l'analyse ordinaire. Le mode d'examination suivant va pourtant réussir complètement.
>
> Lorsque deux solutions $y' = \chi(x, y)$ se rencontrent (et par conséquent se touchent), il s'ensuit que l'une au moins des deux quantités χ'_x et χ'_y doit être infinie, excepté dans les cas où l'une au moins des deux courbes est de courbure infinie.
>
> [**De Morgan 1856**, 109]

De Morgan donne une preuve géométrique de cette propriété, tout en admettant que sa preuve soulèvera des objections et nécessitera de plus amples développements [127]. Néanmoins, cette propriété lui permet d'énoncer clairement le théorème central de son travail, qui remet nettement en cause la validité du critère de Lagrange :

> Toute relation satisfaisant $\chi'_x = \infty$ ou $\chi'_y = \infty$ vérifie bien $y' = \chi$ dès que la quantité $\left(\frac{dc}{dx} + \frac{dc}{dy}\chi\right)$ n'est pas infinie, et *est susceptible de* vérifier $y' = \chi$ lorsque $\left(\frac{dc}{dx} + \frac{dc}{dy}\chi\right)$ est infinie. Dans le premier cas, la courbe $\chi'_x = \infty$ ou $\chi'_y = \infty$ est tangente à toutes les courbes intégrales qui la rencontrent, mais dans le second, avec ou sans tangence, elle est le lieu

125. L'expression des dérivées partielles de χ est donnée, par différentiation de l'intégrale complète, par des quotients dans lesquels V'_c apparaît aux dénominateurs, voir [**De Morgan 1856**, 112].

126. La courbure d'une des courbes intégrales est donnée par l'expression $\dfrac{y''}{(1+\chi^2)^{\frac{3}{2}}}$.

127. "*All this requires more amplification, and will not be received without objection except by those who give it*" ([**De Morgan 1856**, 113]).

des points de courbure infinie des courbes intégrales (plus communément appelés rebroussements). Mais lorsque $\left(\frac{dc}{dx} + \frac{dc}{dy}\chi\right)$ est infinie, on ne peut pas affirmer que $y' = \chi$.

[De Morgan 1856, 113]

Ce théorème de De Morgan porte un coup important au critère de Lagrange. Dans le cadre du premier critère étudié - à partir de l'intégrale complète - le logicien avait mis en évidence la complexité des liens entre une famille de courbes et son enveloppe. C'est l'intrication entre intégrales singulières et enveloppes qui en ressortait alors diminuée. Pour le critère relatif à l'équation différentielle elle-même, De Morgan montre non seulement que là encore le critère ne permet pas de distinguer l'enveloppe (*courbe de contact*) des rebroussements (*courbe de résistance*). Mais il souligne en outre que pour ces-derniers, le critère peut ne plus fournir une solution de l'équation différentielle. Ce résultat fort avait déjà été suggéré dans son analyse du premier critère, où la finitude de la différentielle de c avait émergé comme une donnée fondamentale.

De Morgan va donner trois différents exemples qui illustrent la remise en question des critères algébriques de recherche des solutions singulières, acceptés et utilisés après Lagrange et Monge. Le second est tiré d'un de ses propres ouvrages, tandis que le dernier est repris après Cauchy et Moigno pour mieux illustrer la défaillance de leur méthode [128]. Nous illustrerons uniquement le premier : il s'agit de l'équation différentielle $y' = a + \sqrt{x-y}$. Le critère de recherche de Lagrange donne identiquement :

$$\begin{cases} \chi'_x & = \infty \quad \leftrightarrow \quad y \quad = \quad x \\ \chi'_y & = \infty \quad \leftrightarrow \quad y \quad = \quad x \end{cases}$$

Or l'expression de la dérivée seconde est, à partir de l'équation :

$$y'' = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{(1-a)}{\sqrt{x-y}}$$

Cette quantité ne peut ainsi être finie dans le cas $y = x$ que pour $a = 1$, et alors l'équation différentielle $y' = a = 1$ est bien vérifiée : De Morgan en conclut que $y = x$ est alors bien une solution singulière. Néanmoins, dès que $a \neq 1$ il obtient $y'' = \infty$: la première bissectrice n'est alors pas une solution singulière, ni même une solution tout court. Elle regroupe les rebroussements des courbes intégrales ([De Morgan 1856, 114]). Nous représentons le cas $a = 5$ sur la figure ci-dessous.

128. Voir [De Morgan 1856, 116], ou [Moigno 1844, 434-435].

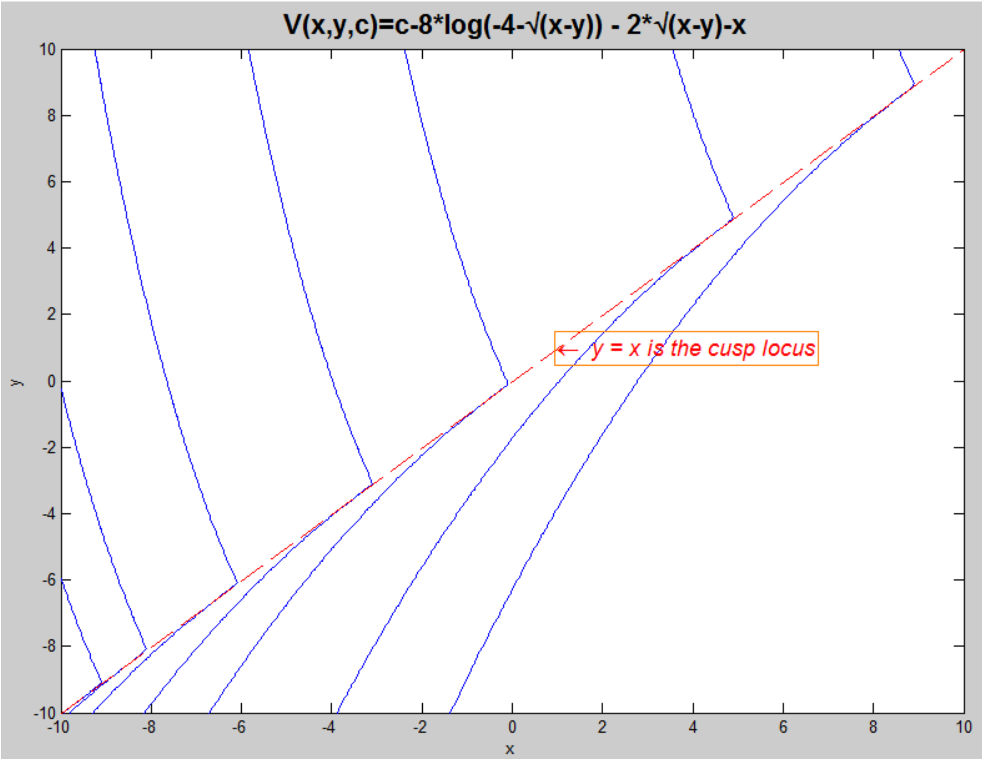


FIGURE 15. L'exemple de De Morgan $y' = 5 + \sqrt{x-y}$ pour lequel le critère de recherche des solutions singulières ne conduit qu'aux rebroussements (cusps) des courbes intégrales, qui n'est pas une solution de l'équation (1856)

Le travail d'Augustus De Morgan relatif aux solutions singulières des équations différentielles ordinaires marque donc une rupture dans l'automatisme des liens géométriques et algébriques qui avaient été mis en place par Lagrange et Monge. Ajoutant à la considération des familles de courbes deux nouveaux lieux géométriques qui viennent compléter l'enveloppe de Monge, soulignant que ces lieux géométriques peuvent coïncider, le résultat le plus fort et le plus surprenant du mathématicien anglais reste le fait que les procédés algébriques d'élimination de la constante peuvent, à partir d'un ensemble de solutions d'une équation, aboutir à des lieux qui n'en sont plus.

Grâce à une analyse fine des infiniment petits qui interviennent dans la construction des critères algébriques, le mémoire De Morgan donne des pistes pour vérifier la nature des résultats auxquels mènent les critères de recherche des solutions singulières donnés par Joseph-Louis Lagrange. Pour le critère lié à l'intégrale complète, c'est l'interprétation géométrique qui est proposée à l'aide du *cylindre tangent*. Cette piste de recherche ne trouvera néanmoins pas de répercussion dans les travaux ultérieurs. En revanche, en ce qui concerne le critère lié directement à l'équation différentielle, le test analytique relatif à la finitude de la courbure sera largement adopté : avec De Morgan, il devient reconnu que le critère de Lagrange peut échouer. Ce sont les *courbes de résistance* qui ne sont pas *courbes de contact* - c'est-à-dire les lieux des rebroussements qui ne sont pas des enveloppes - qui sont associées aux cas où le critère échoue. Nous verrons un peu plus loin que certains cas d'indétermination n'ont pas été envisagés par De Morgan [129], en lien avec l'importance de ses *courbes de séparation*, des courbes qui sont plutôt absentes de sa discussion. Néanmoins, leur simple mise en évidence aura un peu plus tard inspiré Arthur Cayley (et peut-être aussi Darboux) qui leur donnera toute leur importance.

S'il passe ses critères à la loupe, il doit être noté que De Morgan suit toujours les méthodes de Lagrange, sans pour autant leur accorder une confiance aveugle. Au contraire, le logicien anglais est lucide quant au décalage qui existe désormais entre la rigueur analytique de son temps et la vérité universelle des raisonnements algébriques du géomètre de Turin [130]. Il finit cependant sur une note d'optimisme quant à la recherche des solutions singulières à partir des diverses formes que peut recouvrir l'intégrale complète :

> Nous devons nous rappeler que, lorsque Lagrange écrivait [ses critères], tous les théorèmes généraux étaient considérés comme pouvant admettre des exceptions dans certains cas particuliers : la sensibilité du mathématicien devait alors détecter la manière générale d'aboutir à un cas extrême, et les manières inhabituelles étaient délaissées pour n'être étudiées qu'au cas par cas. La méthode de démonstration de l'universelle vérité du théorème de Taylor dans un chapitre, puis sa mise en défaut occasionnelle dans le suivant n'étaient pas des cas isolés, mais au contraire un specimen générique de ce qui était fait lorsque cela était commode.
>
> [...] Je vais terminer cette section avec une remarque qui devrait accroître la confiance placée dans ces systèmes généraux de raisonnements que Lagrange et les autres ont utilisés, sans pour autant indiquer que ceux-ci doivent être implicitement acceptés. [...] Je crois que dans tous les cas, on pourra obtenir l'intégrale complète sous une forme $\psi(x, y, c) = 0$ telle que $\psi'_c = 0$ représente l'intégrale singulière complète.
>
> [**De Morgan 1856**, 115-119]

Le "*Traité*" sur les équations différentielles que George Boole publiera quelques années plus tard donnera, au moins en partie, une résonance aux travaux de De Morgan sur les solutions singulières. Un long chapitre y est en effet consacré à ces solutions pour les équations ordinaires ([**Boole 1859**, 139-186]). Dans le court passage historique relatif à la théorie des solutions singulières, il mentionne : "*le Professeur De Morgan, dans ce qui est peut-être la dernière des publications à ce sujet, adopte les résultats de Lagrange en exprimant toutefois une confiance mesurée en cette méthode*" ([**Boole 1859**, 176]). Par ailleurs, le dernier des théorèmes que Boole donne dans ce chapitre est la "*remarque très intéressante de M. De Morgan*". Le professeur de Cork donne néanmoins une version légèrement modifiée de ce théorème puisqu'il affirme que lorsque la condition $\chi'_y = \infty$ (ou $\chi'_x = \infty$) ne fournit pas une solution de l'équation différentielle, alors ce qu'elle fournit est le lieu des rebroussements des courbes intégrales ([**Boole 1859**, 181]). Presque imperceptiblement,

129. Le critère de recherche à partir de l'équation différentielle peut en effet donner des expressions dont y'' n'est ni fini ni infini mais indéterminé : c'est ce qui se produit en particulier lorsque différentes courbes intégrales sont tangentes entre elles. Cayley, nous le verrons, nommera ce lieu le *tac-locus*.

130. A propos de ce décalage entre l'analyse algébrique lagrangienne et les tendances rigoureuses de l'analyse du XIXème siècle, voir [**Lützen 2003**] et [**Jahnke 2003**, Chap.4] auxquels nous nous avons déjà fait référence à plusieurs reprises. Voir également [**Gray 2008**, 58-147] et [**Bottazzini 1986**, Chap.2,3].

l'implication a été renversée dans la transmission d'un logicien à l'autre : le théorème originel de De Morgan stipulait exactement que les lieux des rebroussements étaient d'une part produits par le critère, et d'autre part pouvaient ne pas être des solutions. Formulé par Boole, le théorème est devenu : si le produit du critère n'est pas une solution, il s'agit des lieux des rebroussements. Les travaux de Cayley et Darboux réhabiliteront de fait la formulation initiale de De Morgan : il existe en effet d'autres lieux géométriques pouvant ne pas être solution tout en étant cependant obtenus par le critère de Lagrange.

Néanmoins, le propos principal développé par Boole relativement aux solutions singulières est celui-ci : les critères portant sur x ne sont pas équivalents à ceux portant sur y, ce qui est contraire au traitement qu'en avait donné Lagrange. Dans ce cadre, Boole va montrer que les critères $\chi'_y = \dfrac{dp}{dy} = \infty$, $\chi'_x = \dfrac{dp}{dx} = \infty$ de Lagrange ne sont pas exacts, que le critère portant sur x n'a pas la même forme que celui sur y. Selon lui, c'est ce qui explique les échecs observés dans certains cas des critères de Lagrange, notamment ceux mis en évidence par De Morgan.

La première partie du chapitre est dédiée aux critères portant sur l'intégrale complète $V(x, y, c) = 0$. La seconde sera consacrée à l'obtention des solutions singulières directement à partir de l'équation. L'agencement des deux parties doit se faire naturellement dans cet ordre selon Boole puisque "*la théorie du second procédé est tellement dépendante de celle du premier qu'il est nécessaire de les considérer dans cet ordre*" ([**Boole 1859**, 140]). Comme c'était le cas dans le travail originel de Lagrange, puis dans celui de De Morgan, la considération de l'intégrale complète sera donc omniprésente dans la théorie des solutions singulières de Boole, y compris pour les critères ne devant être en définitive dépendants que de l'équation différentielle. Ce paradigme persiste donc, et si les travaux de Boole fissurent le modèle de la théorie des solutions singulières établi par Lagrange, ce n'est que pour mieux tenter de le réparer. Ce sont toutefois les prémisses d'un changement scientifique qui s'amorce : la théorie est ainsi entrée dans une période de *crise* ([**Barberousse et al. 2011**, 179-180]).

Boole définit tout d'abord ce qu'il entend par *solution singulière* d'une équation $F = 0$: il s'agit pour lui d'une expression qui d'une part "*donne la même valeur de* $\frac{dy}{dx}$ *en fonction de y et de x que le fait l'équation différentielle elle-même*", donc d'une *solution*. Deuxièmement, cette solution "*doit ne pas être incluse dans l'intégrale complète*" ([**Boole 1859**, 140]). Il ne réemploie ainsi pas le vocable introduit par De Morgan.

Boole recherche d'abord les solutions singulières par la méthode de Lagrange : l'élimination de la constante c de l'intégrale complète $V(x, y, c)$ pour aboutir à l'équation différentielle, combinée aux expressions différentielles dans lesquelles c est autorisée à varier. En supposant que l'intégrale complète prenne la forme résolue en y : $y = f(x, c)$, il aboutit au critère classique $\dfrac{dy}{dc} = 0$. cependant, il remarque que "*cette condition ne peut que mener à celles des solutions singulières dont l'expression implique la variable y*" ([**Boole 1859**, 144]). De la même manière, si l'intégrale complète est résolue en x, le critère obtenu est $\dfrac{dx}{dc} = 0$ qui n'est pas valable pour des solutions singulières dans lesquelles ne figure pas la variable x. Ce sont ainsi les droites verticales et horizontales qui peuvent échapper à la recherche menée à partir de l'un de ces critères.

Pour illustrer ces particularités, le logicien de Lincoln analyse le cas de l'intégrale $V(x, y, c) = x - (y - c)^2 = 0$. Le critère selon x aboutit à l'expression $y = c$, expression incompatible avec l'hypothèse selon laquelle c s'exprime en fonction de x. Le second critère, selon y, ne peut quant à lui être satisfait [131]. Ceci montre pour Boole la nécessité d'adopter une méthodologie qui prenne en compte les deux différents critères :

> Il est nécessaire pour établir une méthode générale de prendre en compte les deux critères $\dfrac{dy}{dc} = 0$ et $\dfrac{dx}{dc} = 0$. Et ces conditions sont suffisantes : aucune autre n'est requise.
>
> [Boole 1859, 145]

La fin de l'étude réservée par Boole à la considération des intégrales singulières à partir de l'intégrale complète aura pour but de mettre en évidence les cas où les deux critères sont équivalents. Il montre en effet que ceci est le cas pour les solutions singulières dont l'expression présente une dépendance dans les deux variables x et y. Boole finit par rappeler que l'emploi dans les calculs de la condition $\dfrac{dV}{dc} = 0$, largement employée par Lagrange et Monge, doit toujours être accompagné des vérifications $\dfrac{dy}{dc} = 0$ et $\dfrac{dx}{dc} = 0$. Il critique ouvertement le fait que la condition $\dfrac{dV}{dc} = 0$ "*soit adoptée par la plupart des auteurs comme la seule expression pour la règle d'obtention de la solution singulière depuis la primitive complète, sans plus de restriction supplémentaire*" ([Boole 1859, 149]). Cette critique prolonge ainsi les remarques et les calculs détaillés de De Morgan. Ce sera également le cas de l'interprétation géométrique que Boole donne du critère $\dfrac{dy}{dc} = 0$:

> la solution singulière représente le lieu des points qui constituent les limites de position des points de véritable (*actual*) intersection des différents membres de la famille de courbes représentée par l'équation $y = f(x, c)$. [...] L'enveloppe des lieux des courbes est le lieu d'une solution singulière, sauf si elle coïncide avec l'un des lieux particuliers dont elle forme le lien des connexions (*connecting bond*).
>
> [Boole 1859, 153]

C'est surtout dans la seconde partie, réservée à la dérivation des solutions singulières depuis l'équation différentielle, que le travail de Boole s'éloigne de celui de De Morgan. Pour le professeur de Cork, la symétrie des critères de recherche selon les variables x et y, pourtant encore bien présente pour la recherche à partir de l'intégrale complète, n'a plus lieu d'être pour les critères déterminés depuis l'équation. Le raisonnement qu'il propose est le suivant.

Si l'on suppose l'intégrale complète résolue en y, c'est-à-dire mise sous une forme (A) : $y = f(x, c)$, la différentiation selon x permet d'aboutir à l'expression :

$$(B)\ :\ p := \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}(x, c)$$

131. On obtient une dérivée toujours égale à l'unité en valeur absolue.

La combinaison de ces deux expressions (A) et (B) permet d'éliminer la constante c et d'obtenir l'équation différentielle :

$$(C)\ :\ p = \chi(x, y)$$

En procédant comme Lagrange, Boole indique que cette équation (C) reste inchangée si l'on considère la constante comme variable : $c(x, y)$. La dérivée partielle en y de l'équation différentielle (C) peut alors être obtenue grâce aux dérivées partielles des expressions (A) et (B) prises par rapport à c :

$$\underbrace{\frac{dp}{dy}}_{(C)} = \underbrace{\frac{dp}{dc}}_{(B)} \cdot \underbrace{\frac{dc}{dy}}_{(A)} = \frac{d^2f}{dx \cdot dc} \cdot \frac{1}{(\frac{df}{dc})} = \frac{d}{dx}\left(\log(\frac{dy}{dc})\right)$$

Cette formule relie ainsi une variation dans l'équation différentielle - dans le premier membre, selon y - à une variation de l'intégrale complète - dans le second membre. Pour obtenir ensuite une formule équivalente concernant les variation selon x, Boole reprend le même raisonnement en supposant cette fois que l'intégrale complète est résolue en x : $(A) : x = f(y, c)$. La dérivée en y de cette expression donne alors une nouvelle forme à la relation (B) :

$$(B)\ :\ \frac{1}{p} := \frac{dx}{dy} = \frac{df}{dy}(y, c)$$

La suite du raisonnement est inchangée, et la relation finale à laquelle Boole aboutit est la suivante :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{d}{dy}\left(\log(\frac{dx}{dc})\right)$$

Les relations en x et en y ne sont ainsi pas symétriques. Le mathématicien britannique introduit ensuite les critères liés aux solutions singulières déduits de l'intégrale complète : $\frac{dx}{dc} = 0$ et $\frac{dy}{dc} = 0$. Il en déduit ainsi ses critères de recherche des solutions singulières à partir de l'équation différentielle elle-même, le critère selon y étant le même que celui de Lagrange mais le critère selon x ayant adopté une nouvelle forme :

> Nous pouvons conclure qu'une solution singulière, considérée comme obtenue grâce à l'intégrale complète par la conversion de c en une fonction de x, satisfait vis-à-vis de l'équation différentielle la condition :
>
> $$\frac{dp}{dy} = \infty$$
>
> Et de la même manière, on montre qu'une solution singulière considérée comme obtenue de l'intégrale complète par la conversion de c en une fonction de y satisfait la condition :
>
> $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p}\right) = \infty$$
>
> [**Boole 1859**, 158]

Il souligne néanmoins une différence majeure entre les deux types de critères (sur l'intégrale et sur l'équation), qui fait écho aux travaux de De Morgan :

> Nous mentionnons également un contraste entre les premières conditions $\frac{dy}{dc} = 0$ et $\frac{dx}{dc} = 0$, et les secondes conditions $\frac{dp}{dy} = \infty$ et $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p}\right) = \infty$. Les premières mènent à des solutions, mais pas nécessairement à des solutions singulières. Les secondes ne mènent pas nécessairement à des solutions, mais lorsque c'est le cas, alors celles-ci sont singulières.
>
> [**Boole 1859**, 157]

Pour terminer son étude, Boole s'intéresse à la distinction entre les différentes *espèces* (*species*) de solutions singulières obtenues grâce aux seconds critères - portant sur p. Il remarque en effet que différents types de solutions peuvent remplir le critère $\frac{dp}{dy} = \infty$, et donc donner des solutions singulières. Parmi ces différents types, seul un correspond au *type enveloppe* auquel Boole accorde une importante toute particulière. Il détaille ainsi comment la validité de ce critère peut provenir de plusieurs comportements de la dépendance en le paramètre c. Le premier de ces comportements mis en avant est une *dépendance discontinue* :

> La condition $\frac{dp}{dy} = \infty$ peut indiquer l'existence d'espèces de solutions singulières obtenues de l'intégrale complète en ne considérant pas c comme une fonction continue [ce qui correspond à *l'espèce enveloppe*], mais comme une constante discontinue dont la loi de discontinuité présente cependant quelque connexion avec les variations de x.
>
> [**Boole 1859**, 161]

Boole donne comme exemple de cette *espèce discontinue* une relation de la forme $cx = -\infty$, obligeant c à "*recevoir la valeur* $+\infty$ *ou* $-\infty$" selon le signe de x. C'est ce qui se produit, note-t-il, pour l'équation différentielle $p = \frac{y\log(y)}{x}$, dont le critère donne $y = 0$ tandis que l'intégrale complète est $y = e^{cx}$ ([**Boole 1859**, 161]).

La seconde espèce de solution singulière signalée par Boole et ne correspondant pas aux *espèces enveloppes* se présente lorsqu'une solution "*correspond à une valeur multiple de c [...] c'est de fait une espèce d'intégrale particulière multiple*" ([**Boole 1859**, 162]). Pour illustrer l'apparition de ce type de solution singulière d'*espèce multiple*, le logicien anglais exploite l'équation différentielle $p^2 - pxy + y^2\log(y) = 0$. L'intégrale complète de cette équation est de la forme :

$$V(x, y, c) = e^{cx-c^2} = 0$$

Par ailleurs, le critère $\frac{dp}{dy} = \infty$ aboutit aux deux solutions suivantes :

$$y = 0 \quad y = \frac{x^2}{4}$$

La seconde correspond bien à l'enveloppe des courbes intégrales. En revanche, la première doit selon Boole être considérée comme étant une *intégrale particulière multiple*, puisqu'elle correspond à la fois à $V(x, y, +\infty)$ et à $V(x, y, -\infty)$ [132].

Il existe donc selon George Boole trois différentes espèces d'intégrales singulières susceptibles de répondre aux critères $\dfrac{dp}{dy} = \infty$ et $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{p}\right) = \infty$: les solutions *à dépendance discontinue* en une variable, les *intégrales particulières multiples*, et enfin les *enveloppes*. Il reste au logicien à caractériser les dernières. Le critère qu'il donne est le suivant : l'enveloppe est contenue dans l'expression $\dfrac{dy}{dc} = 0$. Or cette expression apparaît au dénominateur dans $\dfrac{dp}{dy} = \frac{\frac{dp}{dc}}{\frac{dy}{dc}}$. De ceci, Boole conclut que ce qui distingue une enveloppe $u = 0$ d'une autre espèce de solution singulière est la présence d'une puissance strictement négative de son équation - soit un terme de la forme u^{-k}, $k > 0$ - dans l'expression de $\dfrac{dp}{dy}$. Ne donnant pas de preuve de ce résultat, il ajoute :

> Des enquêtes, qui ne sont guère d'un caractère suffisamment élémentaire pour trouver leur place dans cet ouvrage, nous indiquent (avec une très forte probabilité) que ce caractère [la présence de u^{-k} dans $\frac{dp}{dy}$] est universel et indépendant de toute hypothèse particulière, si bien qu'il constitue un *critère* pour distinguer les solutions de l'espèce *enveloppe* des autres.
>
> [**Boole 1859**, 163]

Ce raisonnement (ou plutôt cette absence de preuve) est plutôt surprenant au cœur d'un ouvrage qui pourtant promeut un certain degré de rigueur dans le calcul analytique et le procédé de démonstration. Si Boole le fait apparaître ici, c'est selon toute vraisemblance parce que la caractérisation des solutions de type enveloppe représente la dernière marche vers le théorème central qu'il exhibe pour synthétiser la théorie des solutions singulières - ou plutôt les critères de recherche à partir des équations différentielles. Son énoncé est le suivant :

> Définition : Une solution singulière d'une équation différentielle du premier ordre est une solution dont la connexion avec l'intégrale complète ne consiste pas en la donnée d'une unique valeur constante de c, absolument indépendante de la valeur de x.
>
> [...]
>
> Théorème : Les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre consistent en toutes les relations appartenant au moins à l'une de ces classes :
>
> - Relations impliquant au moins y, rendant $\dfrac{dp}{dy}$ infini et seulement infini, et satisfaisant l'équation différentielle.

132. Boole ajoute la remarque suivante : une telle intégrale ne doit être considérée comme singulière que lorsqu'il s'agit de *la seule* correspondant à deux valeurs distinctes du paramètre c. Ainsi, les courbes de la famille $y = c^2 x$ ne sauraient être considérées comme des intégrales singulières, en dépit de la correspondance de chacune d'entre elles à deux valeurs opposées de c.

- Relations impliquant au moins x, rendant $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p}\right)$ infini et seulement infini, et satisfaisant l'équation différentielle.

Lorsqu'une telle solution est obtenue en égalant à 0 un facteur apparaissant avec une puissance négative dans l'expression $\frac{dp}{dy}$ ou $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p}\right)$, elle peut être considérée comme appartenant à l'espèce des enveloppes des solutions singulières. Dans tous les autres cas, elle est déductible de l'intégrale complète en considérant c comme une constante à la valeur multiple, dont les valeurs sont soit dépendantes de celles de x d'une certaine manière [*type discontinu*], soit indépendantes de x mais en donnant à cette propriété sur c un caractère singulier [*type multiple*].

[**Boole 1859**, 163-165]

Le *Traité* de 1859 de George Boole met donc l'accent sur trois différents points de la théorie des intégrales singulières. L'une des discussions présentées comme les plus fondamentales est relative à l'asymétrie selon les deux variables x et y des critères de recherche de ces solutions. Pour le critère portant sur l'intégrale complète, Boole souligne la nécessité de considérer le cas particulier des droites horizontales ou verticales, dont les expressions n'impliquent que l'une des deux variables. Mais c'est surtout sur les critères de recherche à partir de l'équation différentielle que le mathématicien insiste. Critiquant les critères utilisés par Lagrange ($\frac{dp}{dy} = \infty = \frac{dp}{dx}$) et par Cauchy ($\frac{dp}{dy} = \infty$ ou $\frac{dp}{dy} = \frac{0}{0}$), il réhabilite le critère $\frac{dp}{dy} = \infty = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p}\right)$ que Laplace avait pourtant utilisé dans le mémoire de 1772 qui avait inspiré Lagrange ([**Laplace 1772**], [**Boole 1859**, 174-176]).

Ensuite, Boole donne à la notion de *solution singulière* une nouvelle définition, en lien avec les différentes *espèces* de ces solutions qu'il met en évidence. Ce qui distingue ces espèces, et qui fonde la définition de Boole, c'est l'agencement des solutions singulières au cœur de l'intégrale complète $V(x, y, c)$, et plus particulièrement les dépendances de c en les variables x, y. La description et la caractérisation des différents types de dépendance qui ne correspondent pas aux enveloppes constituent enfin le troisième point important du Traité du Professeur de Cork.

Les relations entre le travail de De Morgan et celui de Boole sont ambiguës. Ces deux travaux partagent plusieurs points communs : une position critique envers les méthodes de Lagrange, une volonté d'entériner la distinction entre *enveloppes* et *solutions singulières*, des enquêtes sur les critères de recherche de ces solutions et sur leur validité. Ce qui rassemble en outre la recherche des deux mathématiciens anglais et celle de Lagrange, c'est la position centrale qu'occupe l'intégrale complète dans leurs raisonnements. Ceci est encore plus remarquable chez Boole, dont la classification des espèces de solutions singulières repose sur le lien avec l'intégrale complète. En reprenant la dialectique du changement scientifique, la persistance de ce paradigme continue de caractériser la période de crise mais fait obstacle à l'avènement de la révolution.

Pourtant les méthodes et les objectifs de Boole et de De Morgan diffèrent : le premier souhaite avant tout justifier les critères de recherche qu'il propose, et mettre en avant les cas où les raisonnements sur l'une des variables ne sont pas équivalents à ceux effectués sur l'autre. Boole n'offre aucune vision géométrique de la théorie, les *espèces* de solution étant définies à partir de critères analytiques. En ceci, il doit être opposé à De Morgan qui mettait l'accent sur la nature géométrique des lieux qui émergeaient des différents critères de recherche.

Au-delà de ces différences et de ces oppositions, le Traité de Boole prolonge le mémoire de De Morgan en soulignant la complexité de la recherche des solutions singulières. Les deux travaux montrent bien comment les critères de recherche peuvent parfois ne pas donner de solution, ou parfois en donner qui ne sont pas singulières ce qui dépend toutefois des définitions adoptées. En attaquant la vision trop générale et pas assez rigoureuse de l'analyse algébrique de Lagrange, la théorie des solutions singulières telle qu'elle apparaît présentée par les deux mathématiciens revêt quelque chose d'abscons. Elle semble opposer à la généralité de l'enveloppe une liste de contre-exemples, dont il s'agit ensuite paradoxalement de justifier de la généralité. Ensuite, il apparaît nettement dans les deux travaux que nous venons d'analyser que ce que nous appelons *théorie des solutions singulières* est encore un objet aux contours flous puisque le sujet lui-même - la *solution singulière* - n'a pas de forme définitive. Au contraire, cette notion est toujours redéfinie par les auteurs d'une manière nouvelle, qui paraît pertinent à chacun au regard de son propos. Au prix certes d'une volte-face tant au regard des objectifs poursuivis que des méthodes employées, Arthur Cayley va donner une quinzaine d'années plus tard à cette théorie une présentation nette - on serait tenté de dire *définitive*[133] -, dont la concision est alors sans commune mesure avec les travaux de ses prédécesseurs.

Cayley va faire bénéficier la théorie des solutions singulières de la puissance synthétique de son approche algébrique. Mais c'est également en s'emparant des descriptions géométriques données par De Morgan et en les affinant qu'il parvient à présenter cette théorie sous une forme épurée. Il va en effet caractériser exactement les lieux déterminés par les éliminations algébriques qui formaient la base des critères de Lagrange.

L'article de Cayley sur les solutions singulières, qu'il écrit en 1872 mais qui ne sera publié que l'année suivante[134] dans le "*Messenger of Mathematics*", compte à peine plus de cinq pages. Les quatre premières consistent en la description et l'interprétation géométrique et algébrique des conditions très précises dans lesquelles Cayley se place. Suivent ensuite les "*principes abstraits*", c'est-à-dire en fait la description des lieux géométriques à l'instar de De Morgan et l'énoncé des résultats qui relient ces lieux géométriques aux éliminations algébriques qui supportent les critères de recherche des solutions singulières. Ce n'est enfin que dans les deux dernières *phrases* du mémoire que Cayley relie explicitement ses résultats à la théorie des solutions singulières, dont il donne une nouvelle définition.

Arthur Cayley considère dans son étude une équation différentielle $F(x, y, p) = 0$ rationnelle en p et de degré n fini en cette variable, irréductible, dont les coefficients sont univoques en fonction de (x, y). Tout comme Lagrange, De Morgan et Boole, Cayley rapporte cette équation différentielle "*au système de courbes qu'elle détermine*" ([**Cayley 1873b**, 6]). Il représente ce système par l'intégrale complète qu'il écrit sous la forme :

$$V(x, y, c_1, c_2, ..., c_m) := V(x, y, c) = 0$$

133. Ceci fait référence à l'intitulé de la section 2.6, lui-même inspiré de la philosophie avec laquelle Darboux aborde, nous le verrons, certains de ces écrits dans le domaine de la théorie des solutions singulières.
134. Cette précision chronologique aura son importance lorsque nous étudierons les productions de Darboux, dont une date précisément de 1873.

Les constantes (c_i) sont liées entre elles par un certain nombre de relations algébriques, et l'expression de V présente les mêmes caractéristique que celle de l'équation F : rationalité, irréductibilité, et expression univoque en (x, y).

Après avoir détaillé et illustré la signification de ces hypothèses initiales, Cayley va s'attacher à décrire quatre différents lieux géométriques issus du réseau de courbes de l'intégrale complète $V = 0$. S'il ne fait pas explicitement référence à De Morgan, l'influence de ce-dernier y paraît indéniable.

– Le *nodal locus* (N) (ou *node-locus*) regroupe le lieu des points doubles ordinaires des courbes intégrales

– Le *cuspidal locus* (C) (ou *cusp-locus*) regroupe le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales

– L'*envelope locus* (E), qui correpond à l'enveloppe de Monge, et que Cayley décrit comme étant "*un lieu distinct des lieux nodal et cuspidal tel qu'en tout point P de ce lieu, c possède une valeur double [...] les n directions en ce point sont la direction le long de cette courbe de double valeur de c, comptée deux fois, et les $n-2$ autres directions : l'équation $F = 0$ y donne une valeur double de p*" ([**Cayley 1873b**, 11])

– Le *tac locus* (T), "*lieu des points P pour lesquels p possède une valeur double ; il n'y a en revanche pas de particularité pour c*" : autrement dit, "*le tac locus est le lieu des points où deux des courbes du système $f(x, y, C) = 0$ se touchent*" ([**Cayley 1873b**, 11]).

Cayley reprend ainsi la description géométrique des lieux spécifiques aux courbes d'une intégrale complète que De Morgan avait donnée en 1856. Aux lieux des rebroussements (ancienne *courbe de résistance*) et à l'enveloppe (ancienne *courbe de contact*), Cayley ajoute une précision à ce que De Morgan avait nommé la *courbe de séparation*, en la caractérisant par l'altération du nombre de courbes de l'intégrale passant en ces points. Le mathématicien de Cambridge distingue désormais les cas où cette altération provient d'une même courbe - c'est le cas des points doubles, donc du *nodal locus* - des cas où elle provient de la tangence de deux courbes distinctes, non consécutives : c'est le *tac locus*. Nous illustrerons la géométrie de ces lieux par quelques exemples dans les figures ci-après 16 et 17.

Pour chacun de ces lieux, Cayley décrit le comportement particulier des racines c de $V = 0$ et des racines p de l'équation $F = 0$. Sur l'enveloppe, les points correspondent à des racines doubles dans les deux cas, alors que pour le tac-locus, p est une racine double tandis que c n'est qu'une racine simple. Sur le cusp locus, c'est-à-dire le long des rebroussements, p et c sont des racines doubles respectivement de F et de V. Enfin, le long du nodal locus, c est racine double de V tandis que "*there is no peculiarity (bizarrerie) in regard to the equation $F = 0$*" ([**Cayley 1873b**, 10]). E, C et T correspondent donc à des valeurs de la dérivée p qui sont racines doubles de l'équation différentielle. Par ailleurs, E, C et N sont des lieux où c est racine double de l'intégrale complète.

Cayley va ensuite utiliser l'outil (et la notation) algébrique du *discriminant* pour retranscrire les procédés d'élimination sur lesquels étaient basés les critères de recherche des solutions singulières. A partir de l'intégrale complète, Cayley emploie la notion de *c-discriminant*, noté $disct_c(V(x, y, c)) = 0$ pour décrire l'élimination de la constante c entre les équations que Monge employaient pour déterminer l'enveloppe : $V = 0$, $\dfrac{dV}{dc} = 0$.

Ainsi $disct_c\left(V(x,y,c)\right)=0$ "*correspond à l'équation entre x et y telle que, pour toute valeur (x,y) satisfaisant à cette équation, le point P correspond à une valeur double de c*" ([**Cayley 1873b**, 11]). Il introduit de même le *p-discriminant*, noté $disct_p\left(F(x,y,p)\right)=0$, pour décrire l'élimination de la dérivée p entre les équations $F=0$ et $\frac{dF}{dp}=0$. Cette élimination constituait, nous l'avons vu, le premier des critères que Lagrange avait donné en 1774 pour la recherche de la solution singulière à partir de l'équation.

A partir des considérations géométriques précédentes, de leur lien avec les racines doubles de p et de c, et en supposant implicitement que sa description a été exhaustive, Cayley donne, sans en donner de preuve, la décomposition algébrique des discriminants selon les différents lieux géométriques :

> D'après ce qui précède, le c-discriminant est constitué des lieux nodal [N], cuspidal [C], et envelope [E], et sans rentrer en détail dans la preuve j'en déduis qu'il est en fait constitué de deux fois le nodal-locus, trois fois le cuspidal-locus, et une fois l'envelope-locus.
>
> [...] D'après ce qui précède également, le p-discriminant est constitué de l'envelope-locus [E], du cuspidal-locus [C] et du tac-locus [T], et j'en déduis qu'il s'agit de chacun pris une fois.
>
> [**Cayley 1873b**, 12]

En leur donnant la forme que leur fera rapidement adopter le mathématicien américain Woolsey Johnson, les résultats énoncés par Cayley prennent un apparat remarquablement concis :

$$disct_p\left(F(x,y,p)\right)=0=ECT\ \ ,\ disct_c\left(V(x,y,c)\right)=0=EC^3N^2$$ [135]

Finalement, le professeur de Cambridge aborde le lien entre ces *principes abstraits* et la théorie des solutions singulières. Pour commencer, il définit clairement ce qu'il entend par solution singulière en affirmant : "*je considère la solution singulière comme était donnée par l'équation qui appartient à l'envelope-locus, c'est-à-dire que je ne reconnais aucune solution singulière qui ne soit pas de l'espèce enveloppe (envelope species)*" ([**Cayley 1873b**, 12]). On retrouve ici l'emploi du vocabulaire utilisé dans son traité par Boole. La définition de Cayley est plus restrictive que celle de Boole, mais aussi que celle de De Morgan : avec Cayley, solution singulière rime de nouveau avec enveloppe. Néanmoins, aucune remarque n'est faite quant à la possible coïncidence de l'enveloppe avec une solution particulière de l'intégrale complète. Par ailleurs, le problème de l'existence de l'enveloppe n'est pas non plus abordé. Mais le "*résultat de l'investigation*" est alors le suivant :

> Lorsqu'on recherche l'intégrale singulière de la manière ordinaire, qu'on le fasse depuis l'intégrale complète ou l'équation différentielle, on prend en compte les facteurs étrangers qui se présentent respectivement dans les deux procédés. Je réserve pour une autre communication la discussion d'exemples particuliers.
>
> [**Cayley 1873b**, 12]

135. Voir [**Johnson 1887**, 33] pour la *forme* des résultats. Pour leur exactitude mathématique...voir ci-après.

Comme on peut le souligner, le but de Cayley n'est pas d'opérer effectivement la recherche des solutions singulières des équations différentielles. En effet, il ne décrit pas comment séparer les *facteurs étrangers* (les tac, nodal et cusp loci) de l'enveloppe, la seule solution singulière qu'il reconnaît. Mais par sa description géométrique des quatre différentes natures des lieux à prendre en compte dans les éliminations algébriques, et leur présence dans les discriminants, Cayley donne une forme très claire à la théorie des solutions singulière. La définition même de la notion centrale de cette théorie, l'intégrale singulière, en bénéficie.

Nous allons à présent donner deux exemples simples qui nous permettront d'illustrer les notions de tac-locus et de node-locus introduites par Cayley. Nous avons par ailleurs déjà illustré les deux autres lieux présents dans sa description, à savoir l'enveloppe et le lieu des rebroussements (voir figures 10 et 15).

Notre premier exemple est emprunté au célèbre Traité d'Andrew Forsyth sur lequel nous reviendrons[136] ([**Forsyth 1956**, 45]). Il s'agit de l'équation :

$$F(x, y, p) = \frac{1}{2}p^2y^2 - pxy + y^2 - \frac{1}{2}x^2 = 0$$

L'intégrale complète représente une famille de cercles, de rayons variables, dont les centres sont situés sur l'axe des abscisses :

$$V(x, y, c) = (x - c)^2 + y^2 - \frac{c^2}{2} = 0$$

L'évaluation du p-discriminant, à partir de l'équation, donne :

$$disct_p(F) = \underbrace{((x - y)(x + y))}_{(E)} \cdot \underbrace{y^2}_{(T)} = 0$$

Celui du c-discriminant est quant à lui :

$$disct_c(V) = \underbrace{((x - y)(x + y))}_{(E)} = 0$$

Les deux droites $y = \pm x$ représentent ainsi la solution singulière, c'est-à-dire l'enveloppe des cercles de l'intégrale complète. Mais ces cercles sont tangents deux à deux le long de l'axe des abscisses : par conséquent, et c'est ce qu'indique le p-discriminant, $y = 0$ est le tac-locus. Il n'y a ici pas de rebroussement ni de point multiple.

136. Voir la section 3.2.

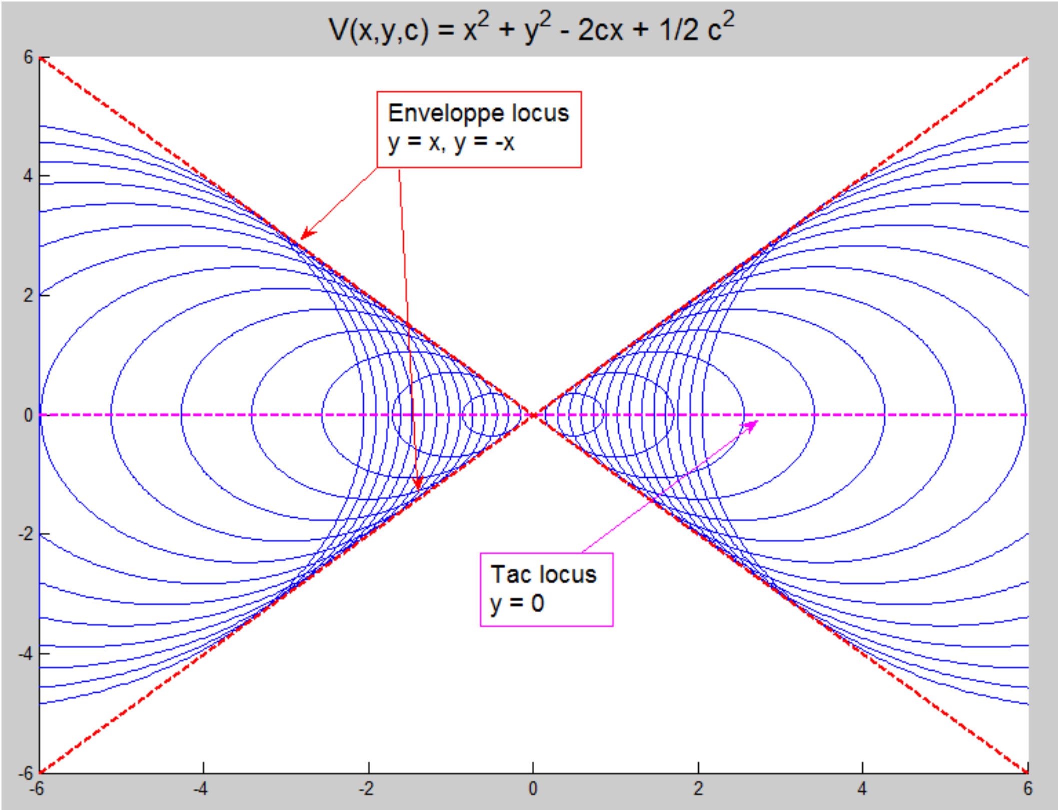


FIGURE 16. Illustration de l'enveloppe et du tac-locus

Le second exemple nous permettra de faire intervenir le node-locus. Nous choisirons pour cela l'équation différentielle :

$$F(x, y, p) = (y')^2(2 - 3y)^2 - 4(1 - y) = 0$$

L'intégrale complète représente une famille de cubiques présentant un point double en translation selon l'axe des abscisses :

$$V(x, y, c) = (x - c)^2 - y^2(1 - y) = 0$$

Le p-discriminant vaut ici :

$$disct_p(F) = \underbrace{(1 - y)}_{(E)} \cdot \underbrace{(2 - 3y)^2}_{(T)} = 0$$

Quant au c-discriminant, il se présente sous la forme :

$$disct_c(V) = \underbrace{(1 - y)}_{(E)} \cdot \underbrace{y^2}_{(N)} = 0$$

Nous avons donc encore ici une solution singulière, l'enveloppe des cubiques, représentée par la droite $y = 1$. Nous obtenons également un tac-locus $y = \dfrac{2}{3}$ où deux de ces cubiques sont tangentes l'une à l'autre. Mais en outre, le c-discriminant fait apparaître un node-locus : la droite $y = 0$, qui regroupe le lieu des points doubles des cubiques.

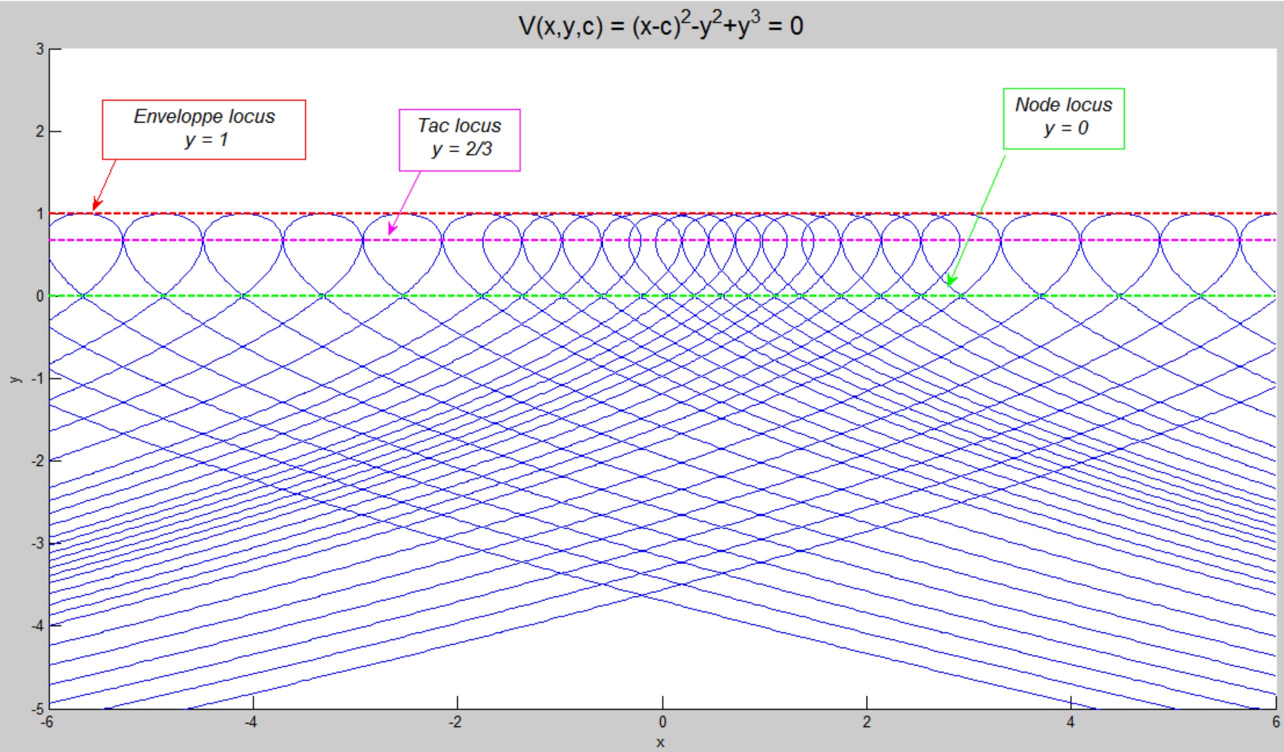


FIGURE 17. Illustration de l'enveloppe, du tac-locus et du node-locus

Nous pouvons à présent terminer notre étude du travail de Cayley et ainsi clore notre section. Comme il l'avait annoncé en 1873, Cayley revient sur ce sujet en 1877 pour donner quelques exemples concrets ([**Cayley 1877**]). Il n'y traitera néanmoins que les équations différentielles de la forme suivante :

$$(L, M, N)\!\!(p, 1)^2 \;{}^{[137]} := p^2L(x, y) + 2pM(x, y) + N(x, y) = 0$$

Ainsi, Arthur Cayley ne donnera jamais de preuve de la décomposition algébrique des discriminants qu'il avait avancée en 1873 sur la base de ses raisonnements géométriques. C'est en 1887 que Wooley Johnson d'une part et Micaiah Hill d'autre part, en donneront de véritables démonstrations ([**Johnson 1887**], [**Hill 1887**]). Ils rectifieront également la présence du tac-locus T au carré dans le p-discriminant [138], que le lecteur aura remarquée dans les deux exemples précédents. Darboux aura par ailleurs déjà souligné ceci indépendamment, nous le verrons un peu plus loin. Outre cette modification ultérieure, Cayley a

137. La présentation des parenthèses entrecroisées est la notation originale adoptée par Cayley.
138. D'un point de vue géométrique, le tac-locus doit apparaître avec un facteur 2 dans le p-discriminant du fait de l'existence de deux courbes intégrales distinctes menant à la même valeur (x, y, p), tandis qu'il n'en existe qu'une menant à ce triplet pour l'enveloppe ou les rebroussements.

résumé dès 1873 en quelques pages l'état de la théorie des solutions singulières des équations différentielles en deux formules concises :

$$\boxed{disct_p\left(F(x,y,p)\right) = 0 = ECT^2 \;\;,\; disct_c\left(V(x,y,c)\right) = 0 = EC^3N^2}$$

Les travaux d'Augustus De Morgan et de George Boole avaient, durant les années 1850, réexaminé avec une rigueur analytique nouvelle les critères algébriques donnés par Lagrange puis Monge pour la formation des solutions singulières et des enveloppes. Le premier avait entrepris de donner une fondation géométrique aux différents lieux afférents à une famille de courbes, donc à une intégrale complète. Il avait également noté la possibilité de satisfaire aux critères sans pour autant constituer une solution de l'équation différentielle de départ. Sans en reprendre le pan géométrique, Boole avait donné une suite à ce travail en cherchant à préciser les critères et les définitions de la théorie.

Cayley bénéficie des recherches de ses deux prédécesseurs, et en particulier des descriptions géométriques de De Morgan qu'il reprend en les enrichissant quelque peu. Contrairement à eux, Cayley ne recherche pas à déterminer de nouveaux critères pour obtenir les intégrales singulières. Au contraire, il éclaircit avec précision les produits des tout premiers critères algébriques d'élimination de Lagrange et Monge. Les travaux de Cayley viennent clore la description des connexions entre une intégrale complète, ses propriétés géométriques et l'équation différentielle qu'elle représente. L'ordre des termes de cette phrase possède néanmoins son importance : dans tous les travaux que nous avons mentionnés jusqu'alors, le rôle de l'intégrale complète est central. Presque toutes les propriétés étudiées sont ramenées, directement ou indirectement, à la considération de cette intégrale. C'est Gaston Darboux qui va amener à repenser le rôle de cette intégrale. Jusqu'alors gouverné par les *solutions*, le royaume de la théorie des solutions singulières des équations différentielles sera sous son impulsion replacée toute entière sous le règne des seules *équations* : c'est la révolution scientifique ([**Barberousse et al. 2011**, 180]).

2.4. La polémique Darboux-Catalan (1870).

Au moment des travaux de De Morgan et de Boole sur les solutions singulières, il n'existe pas d'activité mathématique équivalente sur ce sujet dans la production française (1850-1860). Les travaux relatifs à la théorie des équations différentielles étaient surtout concentrés sur les développements de la "*première méthode de Jacobi*", c'est-à-dire sur la réduction des résolutions des équations aux dérivées partielles à celles de systèmes d'équations différentielles ordinaires ([**Demidov 1982**, 377]). Le mémoire de Joseph-Alfred Serret [**Serret 1866**], que nous évoquerons dans la section 2.7, incarne la poursuite de ce courant de recherche.

Pourtant au début de l'été 1870, soit quelques semaines avant le déclenchement de la guerre franco-prussienne, une passe d'armes à l'Académie des Sciences de Paris va subitement mettre en lumière la théorie des solutions singulières des équations différentielles. Elle va opposer le jeune Gaston Darboux au mathématicien Eugène Charles Catalan. Par le biais de la correspondance du premier avec Jules Hoüel, ce-dernier va également être impliqué dans le débat comme le note Hélène Gispert :

> Il ne s'agit plus ici d'un simple échange d'idées mais d'un débat au cours duquel Hoüel et Darboux s'affrontent sur des points importants de l'activité mathématique, tant dans ses méthodes que dans son contenu.
>
> [**Gispert 1987**, 82]

Après la discussion relative à la géométrie non-euclidienne des suites de l'affaire Carton, la théorie des solutions singulières est en fait la première véritable opposition scientifique entre les deux rédacteurs du Bulletin des Sciences [139]. Signalons que [**Gispert 1987**, 82-84] a déjà présenté quelques points des échanges que nous allons analyser ci-dessous.

FIGURE 18. Eugène Charles Catalan

Eugène Catalan naît le 30 Mai 1814 à Bruges, qui fait alors partie de l'Empire français de Napoléon Bonaparte. Son père est un joaillier parisien, et le jeune Catalan quittera rapidement la Belgique pour rejoindre la capitale française. La vie de la famille Catalan y est bouleversée : sa mère meurt brusquement, et son père, qui se remariera bientôt, change de profession pour devenir architecte. L'instruction du jeune Catalan est également déroutante : sans passer par le Lycée, il suit à la fin des années 1820 les cours de l'Ecole Gratuite de Dessin et de Mathématiques, ainsi que ceux de l'Ecole des Beaux-Arts. Encouragé par le professeur Lefébure de Courcy, il abandonne l'idée de devenir architecte comme son père pour préparer les concours d'entrée aux grandes écoles. Brillant mathématicien, il intègre l'Ecole Polytechnique en 1833.

Probablement pour des manifestations de sympathie républicaine bien mal vues en temps de Restauration, Catalan est exclu de Polytechnique l'année suivante, puis autorisé à y finir ses études en 1835. Il fonde à sa sortie de l'Ecole, avec Sturm et Liouville, l'Institution privée Sainte-Barbe qui formera les candidats aux écoles Polytechnique et Normale. Mais sa carrière ne progresse que bien difficilement : toujours assistant à l'Ecole Polytechnique depuis la fin de ses études, il échoue à y obtenir une position permanente en 1844. Puis deux ans plus tard, il n'obtient aucune nouvelle proposition en dépit de sa réussite à l'agrégation où il est reçu avec le premier rang. En 1849, il devient professeur au Lycée Saint-Louis, mais aucune opportunité ne lui sera jamais offerte dans l'enseignement supérieur. Le républicain

139. Nous avons évoqué plusieurs de ces oppositions dans la première partie du chapitre (1).

convaincu qu'il est aura souffert en temps de monarchie comme en temps d'Empire après 1851. Il ne se résoudra à quitter Paris, la ville de son cœur, qu'à regret en 1865 pour regagner la Belgique où l'Université de Liège lui ouvre ses portes. Il y fondera en 1875 un journal, la "*Nouvelle Correspondance Mathématique*" qui ne connaîtra pas un réel succès puisque seuls 6 tomes paraîtront. Darboux écrira à Hoüel :

> Catalan annonce que sa Nouvelle Correspondance Mathématique va cesser de paraître. Je le regrette, le recueil était médiocre, mais il y avait de la vie.
>
> Lettre datée du 13 Novembre 1880 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Jamais élu à l'Académie des Sciences de Paris, il ne faudra que quelques mois à l'Académie Royale de Belgique pour réparer ce tort. Il recevra pourtant la décoration de Grand Officier de la Légion d'Honneur française en 1888 à Paris, à l'occasion du mariage de son fils. Connu pour ses travaux en théorie des nombres, Catalan avait émis dans un article pour le journal de Crelle de 1843 l'hypothèse - qui deviendra la *conjecture de Catalan* - que la seule solution de l'équation en nombres entiers $x^n - y^m = 1$ était $3^2 - 2^3$. Il mourra à l'âge de 79 ans sans avoir assisté à la résolution de cette conjecture, qui résistera aux mathématiciens jusqu'en 2002 [140].

Notre étude consacrée à l'extension donnée par Darboux au théorème d'homofocalité des courbes orthogonales de Kummer (voir [Chap.2,7.1]) nous a déjà permis de révéler la prudence avec laquelle le géomètre nîmois utilisait la notion d'enveloppe. Nous y avions relié cette prudence à la pertinence du lien sous-jacent que Darboux soulignait entre la théorie des enveloppes et la continuité. La rigueur analytique avec laquelle le jeune professeur de Louis-le-Grand aborde l'existence de l'enveloppe va transparaître pleinement dans une note qu'il présente à l'Académie le 20 Juin 1870. Cette note, [**Darboux 1870b**], porte pourtant sur un sujet *a priori* éloigné de la théorie des solutions singulières : Darboux s'y propose d'étudier les propriétés géométriques (ordre, classe, singularités) des nappes des centres de courbure des surfaces algébriques - ou autrement dit de leurs *caustiques*. Cette note est d'ailleurs suffisamment appréciée de Bertrand, qui en effectue la présentation, qu'elle est "*insérée au compte rendu bien que dépassant en étendue les limites réglementaires*" ([**Darboux 1870b**, 1328]) [141].

Ce n'est que dans la dernière partie de la Note qu'intervient la théorie des solutions singulières. Darboux y étudie l'extension d'un résultat d'Alfred Clebsch. Ce-dernier avait déterminé que la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde possédaient exactement huit plans tangents ayant un contact triple avec ledit ellipsoïde, les lieux de contact se trouvant sur autant de coniques. Darboux va étendre à toutes les surfaces algébriques cet énoncé de Clebsch en le reliant aux *droites isotropes* de ces surfaces. Plus précisément, il exhibe le fait que le long de ces droites les normales à la surface algébrique sont coplanaires, leur plan commun étant un plan tangent à la caustique de la surface. Darboux énonce alors que ces normales enveloppent dans ce plan tangent une certaine courbe algébrique, qui est précisément le lieu du contact triple décrit par Clebsch entre la surface originelle et l'un

140. Cette conjecture, désormais théorème, a été démontrée par le mathématicien Preda Mihailescu. On peut en lire une preuve en ligne : `http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups05-01.pdf`.

141. La note de Darboux compte 5 pages et demie ; tandis que la limite de longueur pour les non-membres de l'Académie est de 4.

des plans tangents de sa caustique ([**Darboux 1870b**, 1332]). Ce-faisant, il ramène l'étude entreprise par Clebsch des contacts triples entre une surface et sa caustique à l'étude des droites isotropes [142] contenues dans les surfaces algébriques.

Or il s'avère que Gaston Darboux sait relier la génération de telles droites isotropes sur une surface à la théorie des enveloppes. Nous en avons en effet déjà étudié un cas particulier avec les 16 droites des surfaces cyclides (voir [Chap.3,5.3]). En lien avec son prolongement du théorème de Kummer, ces droites peuvent ainsi résulter de l'enveloppe des lignes de courbure de la surface [143] :

> Toutes les fois qu'il y aura une enveloppe imaginaire pour les lignes de courbure, cette enveloppe se composera de lignes droites allant rencontrer le cercle de l'infini. [Le long de chacune de ces droites, les normales] enveloppent une courbe algébrique suivant laquelle le plan [des normales] a un contact triple avec la surface des centres de courbure.
>
> [**Darboux 1870b**, 1332]

Cela permet à Darboux de généraliser le théorème de Clebsch, en stipulant notamment l'existence de ces huit lieux de contact triple pour toute surface quadrique, tandis qu'il en existe seize pour toute surface cyclide.

Darboux a ainsi bien pris soin de préciser que sa construction géométrique n'était valable que "*toutes les fois où il y aura une enveloppe*" pour les lignes de courbure. En fait, il a en préambule de cet énoncé donné une "*remarque qui [lui] paraît nouvelle*" au sujet des intégrales singulières et, donc, de la théorie des enveloppes. Cette remarque surprenante est la suivante :

> Considérons une équation différentielle que, pour plus de simplicité, nous supposerons du second degré en $\frac{dy}{dx}$:
>
> $$A(\frac{dy}{dx})^2 + B\frac{dy}{dx} + C = 0$$
>
> A, B, C étant des fonctions de x et de y. On admet qu'en général, les courbes représentées par cette équation différentielle ont une enveloppe, et que cette enveloppe est donnée par l'équation
>
> $$R = B^2 - 4AC = 0$$ [144]
>
> C'est précisément le contraire qui arrive : en général, les courbes n'ont pas d'enveloppe, et la courbe $R = 0$ est le lieu de leurs points de rebroussement. Si les courbes avaient en effet une enveloppe, pour tous les points de celle-ci, le $\frac{dy}{dx}$ serait donné par l'équation différentielle ; on aurait
>
> $$\frac{dR}{dx} + \frac{dR}{dy}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{B}{2A}$$

142. Rappelons ici que Darboux n'emploie pas (encore) en 1870 le terme *isotrope* proposé par Laguerre 5 ans plus tôt ([Chap.2,6]). Il parle dans sa note d'une *ligne droite allant couper le cercle de l'infini*.
143. Il s'agit en fait d'une version tridimensionnelle de l'énoncé de Kummer [Chap.2,3.1] dans le cas du réseau orthogonal formé par les lignes de courbure.
144. Il s'agit ici du résultat de l'élimination de $\frac{dy}{dx}$ entre l'équation et sa dérivée partielle selon $\frac{dy}{dx}$; ou autrement dit dans le langage de Cayley du *p-discriminant* de l'équation différentielle.

> d'où :
> $$\frac{dR}{dx} - \frac{B}{2A}\frac{dR}{dy} = 0$$
> Cette dernière équation devrait donc être vérifiée en même temps que l'équation $R = 0$, ce qui n'a pas lieu en général puisque R et $\frac{B}{2A}$ sont des fonctions indépendantes l'une de l'autre.
>
> [**Darboux 1870b**, 1332]

C'est donc à la généralité de l'existence de l'enveloppe que Darboux s'intéresse. Augustus De Morgan avait démontré que le p-discriminant [145] (ici $R = 0$) pouvait contenir le lieu des rebroussements des courbes intégrales, lieu qui pouvait ne pas être solution de l'équation différentielle. Puis Boole avait repris ce résultat en le présentant sous la forme suivante : lorsque la recherche de solution singulière à partir de l'équation échoue à donner une solution, alors il s'agit du lieu des rebroussements des courbes intégrales (le futur cusp-locus). Cependant ce cas était resté considéré comme un cas particulier que seuls certains exemples isolés pouvaient révéler.

La proposition de Darboux déplace, pour les équations en degré 2, la considération de ce qui est *le cas général* et de ce qui est *le cas particulier*. Elle prend comme généralité l'obtention des rebroussements, et relègue l'enveloppe au statut du cas particulier. Sa démonstration sommaire repose sur l'existence et l'emploi du système de *trois* équations qui découle du critère de recherche de la solution singulière. Lagrange, ayant remarqué le fait de calcul analogue, avait souligné que les équations devaient "*s'accorder*" sans plus de détails. De Morgan et Boole étaient également passés outre [146]. En exploitant ce système de trois équations, Darboux montre l'implication analytique de l'existence de l'enveloppe : celle-ci relie l'équation de son lieu (R) avec certains des paramètres de l'équation différentielle ($\frac{B}{2A}$). Dans le cas *général* dans lequel se place le nîmois, cette dépendance n'a pas lieu d'être, ce qui contredit l'existence de l'enveloppe.

Darboux affirme donc, à l'appui d'une courte démonstration, que le cas général correspond, pour une équation différentielle, à la non-existence de l'enveloppe. Tout du moins sa preuve porte-t-elle sur les équations différentielles les plus simples. On peut remarquer que la considération de l'intégrale complète est totalement absente du propos de l'ancien normalien. Par ailleurs, son affirmation stipulant que le critère de recherche conduit généralement aux lieux de rebroussement n'est pas étayée. Elle repose pour Darboux pleinement sur l'absence de l'enveloppe, ce qui signifie que le lieu de tangence des courbes (le futur *tac-locus*) est sinon oublié, du moins passé sous silence.

La preuve analytique donnée par Darboux est simple. Pourtant, comment expliquer que l'enveloppe soit presque systématiquement apparue dans les équations différentielles rencontrées jusque-là par les mathématiciens si elle dût être une telle exception ? Certes certains cas étaient connus où l'élimination aboutissait aux rebroussements et non à l'enveloppe, mais au regard des exemples présentés dans les traités et dans les mémoires, ce

145. Nous effectuons ici un anachronisme puisque ce terme ne sera introduit par Cayley qu'en 1873, soit trois années après la note de Darboux et plus de quinze après celle de De Morgan.

146. Boole et De Morgan ont tous deux exhibé, nous l'avons vu, des critères portant sur trois équations (deux valeurs infinies adjointes à l'équation originelle). Mais il ne s'agissait que de la prise en compte de la symétrie (ou de l'asymétrie) du rôle des variables, et non de celle de la véritable contrainte algébrique surnuméraire.

cas ne semblait en rien être général. Les conclusions de Darboux ne sont donc pas acceptées de tous, et le premier à s'élever ouvertement contre elles sera Catalan. Moins de deux semaines après la présentation de la note de Darboux, il envoie à l'Académie parisienne ses "*remarques*" au sujet (en fait, à l'encontre) du travail du nîmois.

> A peine ai-je besoin de déclarer que je ne suis animé d'aucun esprit de dénigrement à l'égard de M. Darboux ; nul, plus que moi, ne reconnaît le mérite de ce jeune et déjà célèbre géomètre. [...]
>
> Il est bien vrai que l'équation $R = B^2 - 4AC = 0$ ne présente *pas toujours* l'enveloppe des courbes représentées elles-mêmes par
>
> $$A(\frac{dy}{dx})^2 + B\frac{dy}{dx} + C = 0$$
>
> Mais M. Darboux ne va-t-il pas un peu loin en affirmant que *c'est précisément le contraire qui arrive*, et que $R = 0$ *représente le lieu des points de rebroussement des courbes* ?
>
> [**Catalan 1870**, 51]

Catalan admet ainsi volontiers l'absence occasionnelle de l'enveloppe. Mais il conteste tout à fait la généralité que Darboux donne aux lieux de rebroussement par le critère d'élimination de $\frac{dy}{dx}$. Et Catalan de développer toute une série d'exemples d'équations différentielles où "*l'on ne rencontre pas du tout l'exception que M. Darboux signale comme devant arriver si fréquemment*" ([**Catalan 1870**, 53]), c'est-à-dire où $R = 0$ donne l'enveloppe et ne donne pas les rebroussements. Dans un de ses exemples, le mathématicien de Liège souligne d'ailleurs la présence d'un facteur ne correspondant ni à l'enveloppe ni aux rebroussements mais au "*lieu des points où se touchent les courbes*" : le tac-locus [147]. Mais son propos principal est l'existence de l'enveloppe par les procédés d'élimination que Darboux avaient signalés comme devant mener aux lieux de rebroussement, ainsi que la possibilité d'accorder les deux équations

$$R = 0\ , \quad \frac{dR}{dx} - \frac{B}{2A}\frac{dR}{dy} = 0$$

sur lesquelles le jeune géomètre avait fait reposer sa démonstration.

Le point essentiel de divergence entre les deux travaux est la considération de ce qui est *le cas général*. Toutes les équations différentielles que Catalan exhibe en guise de contre-exemples ont un point commun : elles sont formées, comme le faisait Lagrange, à partir de l'élimination des constantes dans une expression $V(x, y, c) = 0$ qui en devient donc l'intégrale complète [148]. En un mot : elles sont intégrables, et leurs intégrales, algébriques,

147. Catalan emploie l'équation différentielle "intégrale" résultant de l'élimination de la constante dans l'intégrale complète $V(x, y, c) = c^2 + P(x, y)c + Q(x, y) = 0$. L'élimination de y' donne alors : $R = (P^2 - 4Q)(\frac{dP}{dx}\frac{dQ}{dy} - \frac{dP}{dy}\frac{dQ}{dx})^2 = 0$. Le premier facteur correspond alors à l'enveloppe, tandis que le second (dont on note qu'il apparaît bien au carré) est relatif au tac-locus : il est le lieu de tangences des courbes P =const. et Q =const. ([**Catalan 1870**, 52]).

148. Catalan leur donne le nom d'*équation intégrale* (voir également [**Gispert 1987**, 83]). Ce nom désigne aujourd'hui un type d'équation qui est différent de celui que désigne le mathématicien franco-belge.

connues, possèdent certaines propriétés de continuité. Dans le travail de Darboux, la considération du *cas général* l'a poussé à passer outre l'intégrale complète : seule l'équation différentielle est prise en compte.

Le rédacteur du Bulletin ne va pas laisser les remarques de Catalan sans réponse : il prépare sa riposte d'autant plus méticuleusement qu'il sait que son adversaire est tenace. Il tient Hoüel informé de l'évolution de ce qui devient un débat :

> Que dîtes-vous de ce brave Catalan et des rapports qu'il découvre entre la théorie des nombres et celle des solutions singulières ? Je vous recommande, si vous voulez rire, la Note du même auteur et sur le même sujet dans le Journal de l'Ecole Polytechnique. Je lui décoche une réponse qui, j'en suis sûr, ne le convaincra pas : avec Catalan, on n'a jamais le dernier mot.
>
> Lettre non datée (Juillet 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Surtout, Darboux veut établir nettement la distinction à opérer entre ce qui constitue le cas général et les équations différentielles possédant une intégrale complète $V = 0$. Il publie ainsi au compte-rendu une seconde note le 25 Juillet 1870 qui, critiquant les remarques de Catalan et réaffirmant les énoncés de la première note, souligne cette distinction. Après y avoir reproduit exactement le passage relatif aux solutions singulières et aux points de rebroussement, objet des critiques du mathématicien belge, il remarque : "*tel est le raisonnement que j'avais donné. S'il est inexact, pourquoi M. Catalan ne signale-t-il pas le point précis où j'ai commis une erreur ?*" ([**Darboux 1870c**, 268]). Darboux donne alors une seconde démonstration pour établir l'absence d'enveloppe dans le cas général, démonstration qui lui est "*communiquée par un Membre de l'Académie*" :

> Soit une équation différentielle $F(x, y, y') = 0$. Prenons la dérivée de cette équation par rapport à y' :
>
> $$\frac{dF}{dy'} = 0$$
>
> Si entre cette équation et la précédente on élimine y', on admet qu'on aura, en général, la solution singulière. Il résulte de là qu'en déduisant des deux équations les valeurs de y et de y', la valeur obtenue pour y' devrait être la dérivée de la valeur obtenue pour y, résultat évidemment absurde, puisque la composition en x de l'équation différentielle est tout à fait arbitraire et qu'on pourra, dans les formules, remplacer un coefficient constant par une fonction quelconque de x, sans rien changer à la suite des opérations (il n'y a pas de dérivée prise par rapport à x)
>
> [**Darboux 1870c**, 268]

Comme nous le verrons, Darboux reviendra un peu plus tard pour donner une formalisation à cet énoncé. Mais d'ores et déjà ce second raisonnement vient renforcer sa conclusion : le p-discriminant $R = 0$ n'est généralement pas le lieu de l'enveloppe, contrairement à ce qui est *admis en général* et qui n'est vrai, selon Darboux, que lorsque la troisième équation de condition ($\frac{dR}{dx} - \frac{B}{2A}\frac{dR}{dy} = 0$) est vérifiée. Au contraire, lorsque cette équation de condition n'est pas vérifiée, le lieu $R = 0$ est le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales : "*c'est là le cas général*". Le gardois signale également la possibilité que $R = 0$ se "*décompose en deux parties*", l'une respectant l'équation de condition qui est alors l'enveloppe, l'autre ne la respectant pas qui est le lieu des rebroussements ([**Darboux 1870c**, 268]). Si le raisonnement qu'il présente change entre la note de Juin et celle de Juillet, sa conclusion reste identique. D'ailleurs là encore, la possible présence de ce que Cayley appellera le tac-locus dans l'équation $R = 0$ n'est pas mentionnée par Darboux, alors que son contradicteur belge l'avait soulignée dans l'un de ses exemples.

Par ailleurs, Darboux reconnaît qu'il n'avait pas démontré dans sa première note que $R = 0$ constituait le lieu des points de rebroussement. Pour prouver ce point, il emploie deux méthodes : d'une part, il fait référence aux travaux antérieurs de Briot et Bouquet ([**Briot Bouquet 1856**]) en soulignant que "*la démonstration rigoureuse se déduit très facilement des beaux résultats obtenus par MM. Briot et Bouquet*" ([**Darboux 1870c**, 269])[149]. Le travail invoqué ici était centré sur l'étude des fonctions complexes solutions d'équations du type $\dfrac{du}{dz} = f(u, z)$, et en particulier à la suite de Cauchy sur les solutions développables en série. Une courte analyse y avait bien été menée dans le cas où le coefficient différentiel devenait une racine multiple de l'équation, l'intérêt présenté selon les auteurs par cette étude étant la perte de la propriété dite de *monodromie* (caractère univoque de l'image) des fonctions intégrales ([**Briot Bouquet 1856**, 191-193]). Dans ce cas, et par le biais d'approximations pour un type d'équation particulier, ils étaient parvenus à mettre en évidence des rebroussements dans les courbes représentant la différence de deux solutions ([**Briot Bouquet 1856**, 178-180]). Mais cette remarque était restée isolée, sans suite dans le développement ultérieur des cas plus généraux. Par ailleurs, ce mémoire était bien loin d'être dédié à la théorie des solutions singulières.

Darboux propose alors un raisonnement géométrique, adapté aux cas des équations $A(\dfrac{dy}{dx})^2 + B\dfrac{dy}{dx} + C = 0$ sur lesquelles il continue de concentrer son analyse. Dans le plan (x, y), la courbe $R = B^2 - 4AC = 0$ est interprétée par le géomètre comme étant la séparation des deux régions du plan où les valeurs de la dérivée $\dfrac{dy}{dx}$ sont réelles pour l'une, et imaginaires pour l'autre. En considérant une courbe intégrale (α) venant couper le lieu $R = 0$ au point M, il conclut son raisonnement puis émet une réserve sur la preuve qu'il vient de développer :

> On voit bien que la courbe (α) ne peut se prolonger dans la région où le coefficient angulaire de la tangente est imaginaire. Donc le point M est un point singulier.
>
> Ce mode de démonstration, quoique peu rigoureux, puisqu'il est fondé sur la considération du réel et de l'imaginaire, me paraît pourtant de nature à former la conviction des géomètres.
>
> [**Darboux 1870c**, 270]

149. Darboux donne au travail auquel il fait référence un titre erroné : il nomme le mémoire de Briot et Bouquet "*Sur l'intégration des équations différentielles*", tandis que le véritable nom en est "*Propriétés des fonctions définies par des équations différentielles*".

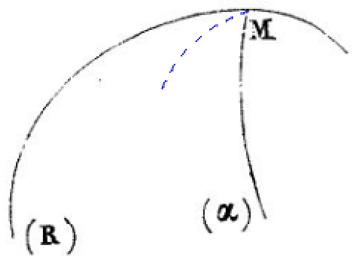


FIGURE 19. Configuration géométrique du raisonnement de [Darboux 1870c]

Cette remarque de Darboux est extrêmement révélatrice de son état d'esprit au moment de l'écriture de la note : il est conscient de ne pas posséder une démonstration solide et générale pour l'énoncé qu'il doit défendre (la correspondance entre le p-discriminant $R = 0$ et les rebroussements des courbes intégrales). Il tente alors plutôt de persuader du bien-fondé de la proposition en en donnant une assise géométrique dans le cas restreint des équations simples de degré 2 en y'. La référence envers le travail de Briot et Bouquet, dont la pertinence est discutable, participe de cette volonté de persuasion. A défaut de parvenir à démontrer, il essaie de convaincre, ce qui est suffisamment rare dans les publications de Darboux pour être signalé. Rigoureux dans le mécanisme de démonstration et dans l'exactitude des énoncés des théorèmes, Darboux prouve ou admet les points qu'il avance. C'est ce que nous avons notamment souligné dans l'étude précédente de la partie 1 en lien avec l'existence des extrema des fonctions continues. Qu'il se situe dans une région floue entre ces deux attitudes dénote le fait que le géomètre a acquis la double conviction que son énoncé est vrai et nécessaire dans l'enchaînement des propositions, mais également qu'il doit pouvoir parvenir à le démontrer. Dans le cas des extrema, seule la première de ces deux convictions existait. Et en effet, nous verrons bientôt que Darboux aura à cœur de revenir sur ce point pour en donner une preuve plus satisfaisante qu'il estimera être définitive. Observons par ailleurs que la remarque du géomètre relative aux imaginaires ne porte pas atteinte à nos conclusions des chapitres de la première partie. Au contraire, c'est parce que l'introduction sans réserve des imaginaires en géométrie qu'il prône en efface la distinction avec les réels que Darboux estime sa preuve "*peu rigoureuse*".

Outre la défense des énoncés donnés dans la première note et la (tentative de) preuve quant à la généralité de l'obtention des rebroussements, Darboux évoque dans cette seconde note le point essentiel qui caractérise l'originalité de son approche. Il s'agit de la définition du *cas général*, par opposition à l'obtention et donc la considération des intégrales complètes. Pour la première fois, l'accent est mis sur ce point de vue qui deviendra fondamental :

> Il faut dans la théorie qui nous occupe, *distinguer avec le plus grand soin le cas où l'équation n'est pas intégrée et n'est pas susceptible d'intégration, de celui où l'on a l'intégrale générale*. Si l'on admet, en effet, qu'étant donnée une équation différentielle, quelconque, cette équation a une intégrale générale de la forme $V(x, y, c) = 0$, où la fonction V est finie, continue et bien déterminée, dans une étendue suffisante du plan, [...] il y a une solution particulière qui est l'enveloppe des courbes du système.

> Mais rien ne prouve qu'étant donnée une équation différentielle, elle ait en général une intégrale de la forme indiquée. Admettre cette proposition, c'est faire une hypothèse justifiée sans doute dans la plupart des cas où l'on sait intégrer, mais qui est loin d'être démontrée dans le cas le plus étendu, celui où l'on ne sait pas trouver l'intégrale générale.
>
> [**Darboux 1870c**, 269]

Ce véritable changement de paradigme porté par Darboux doit être relié aux traits caractéristiques que nous avons mis en évidence dans nos études géométriques (voir notamment [Chap.3,6]). Nous avions en effet souligné la nature critique avec laquelle le géomètre abordait ses propres résultats, ce qui l'amenait à diversifier ses approches pour percevoir mieux, interpréter différemment, comprendre plus complètement. C'est cette inclination d'esprit qui le pousse ici à douter de l'enracinement des méthodes liées à la théorie des solutions singulières dans l'utilisation de l'intégrale complète. L'intrication entre intégrale complète et équation différentielle était, nous l'avons vu, totale chez Lagrange qui interprétait la seconde comme résultat d'une élimination algébrique effectuée à partir de la première. Pour Monge, dans un autre registre, les liens étaient étroits entre les enveloppes issues de l'intégrale complète et l'équation différentielle qui leur donnait une unité analytique. Dans les travaux ultérieurs, et de manière plus ou moins explicite, les principes de la théorie des solutions singulières étaient systématiquement ramenés à l'intégrale complète. C'est surtout le comportement de la variation du paramètre c dans l'intégrale $V(x, y, c)$ qui était la base des discussions des mathématiciens.

Darboux se départit de cet héritage inconscient parvenu jusqu'à lui depuis Lagrange : le *cas général* n'est pas le cas qui a en général été étudié jusqu'alors. Plus globalement, le cas général ne doit pas nécessairement être ce qui est généralement abordé. Les équations différentielles intégrables, formées par élimination des constantes, ont certes été l'objet de la plupart des études menées par les mathématiciens. Mais Darboux souligne qu'elles ne constituent pourtant que le *cas particulier*, qui permet à la théorie des enveloppes d'être appliquée et donc à la solution singulière d'exister. Pour autant, le cas général doit à ses yeux totalement se départir de la notion d'intégrale complète.

Ceci permet à l'ancien normalien de replacer les exemples avancés par Catalan dans leur contexte : s'agissant de cas d'équations *intégrables*, elles ne sont en rien représentatives de la généralité qui fait l'objet des études de Darboux. Elles appartiennent à cette catégorie d'équations où l'emploi de la théorie des enveloppes est légitime, mais ne sauraient constituer des contre-exemples valables. "*Les exemples fournis par M. Catalan ne sont donc pas de nature à faciliter la discussion*" ([**Darboux 1870c**, 269]). S'il amorce une révolution scientifique en délaissant les paradigmes instaurés par Lagrange, notons pour terminer cette section que Darboux réintroduit ponctuellement l'ambiguïté du vocabulaire du turinois. La "*solution particulière*" a en effet retrouvé une place dans son discours aux côtés de la "*solution singulière*" dont elle est synonyme.

2.5. Une première réception mitigée (1870-1873).

Si Eugène Catalan apparaît comme son principal contradicteur dans le débat qui s'installe au sujet des solutions singulières des équations différentielles (ordinaires), c'est l'opinion de son nouveau collaborateur Jules Hoüel que Darboux souhaite surtout connaître.

Nous sommes alors en Août 1870, et la guerre contre la Prusse a commencé sans que Paris n'en subisse - encore - les conséquences. Darboux écrit alors :

> j'espère que tout tournera pour le mieux. Il n'y a pas péril en la demeure. Je vous recommande ma réponse à Catalan. Vous devez avoir une opinion sur le débat, ne craignez pas de me la dire. C'est un point qui vous intéresse puisque vous professez le Calcul Différentiel et vous ne me ferez pas l'injure de croire que je vous en voudrais de ne pas être de mon avis.
>
> [...] Et les opérations militaires ? Ici, on ne sait rien ; mais l'opinion générale est que les Français devraient rester l'arme au bras et laisser la Prusse se ruiner et mourir de maladie [150].
>
> Lettre non datée (Août 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

La guerre va interrompre le dialogue entre les deux rédacteurs, mais dès la reprise des échanges épistolaires, Hoüel fait parvenir à Darboux son Cours de Calcul Différentiel de la Faculté des Sciences de Darboux sous la forme de feuilles autographiées ([**Gispert 1987**, 159]). Le réception de ce cours et la lecture qu'en fait Darboux sont à l'origine de bon nombres de discussions polémiques qui auront long cours entre les deux rédacteurs sur plusieurs points mathématiques précis ([**Gispert 1983**], [**Henry Nabonnand 2016**]). En particulier, il semble que dans son Cours le professeur de Bordeaux ne soit pas en accord avec les propositions défendues par son collaborateur parisien. Darboux tente alors plusieurs fois dans ses lettres de démontrer le bien-fondé de son approche :

> Etant donné une équation différentielle, il est évident que dans l'immense majorité des cas, elle n'est pas intégrable. Toutes les fois qu'elle l'est, cela suffit pour lui donner un nombre infini de propriétés qui la distinguent de celles qui ne le sont pas. Le cas général est donc celui-ci : une équation différentielle n'est pas intégrable. Alors se présente la question suivante : étant donnée une équation différentielle, cette équation admet-elle une solution singulière ? En supposant tracées les courbes qu'elle représente, ces courbes ont-elles une enveloppe ? Par exemple, les lignes de courbure d'une surface du n$^{\text{ème}}$ ordre ont-elles une enveloppe ? La réponse est non en général. [...] Voilà ce que je puis vous répondre. Vous voyez que je n'ébranle pas les bases du Calcul Intégral.
>
> Lettre non datée (Août 1871)
>
> Pour en revenir aux équations différentielles, je crois que nous pourrons nous entendre quand je viendrai vous voir. Mais dès à présent il est évident qu'avec votre surface mon théorème et mes remarques peuvent être énoncées de la manière suivante : Etant donnée une équation différentielle $F(x, y, y') = 0$, la surface $V(x, y, c) = 0$ n'a pas en général de point où le plan tangent soit vertical. Ce qui fait bien voir quelle est la source des erreurs (sont-ce des erreurs, ou plutôt du défaut de netteté que les auteurs apportent dans cette question) car si vous partez d'une forme quelconque, pour l'intégrale générale $V(x, y, c) = 0$, il est évident qu'en général vous aurez une enveloppe. Ainsi mon théorème revient à celui-ci :

150. Voir l'annexe 8 pour plus de détails sur le déroulement de la guerre franco-prussienne et l'interruption de la correspondance entre Darboux et Hoüel.

la surface $V(x, y, c) = 0$ est en général une surface bizarre n'ayant pas de point où le plan tangent soit vertical.

Lettre non datée (Septembre 1871)

Décidément les solutions singulières sont un sujet bien embrouillé puisque je n'ai pas réussi à me faire comprendre. Cependant la question est bien simple, et je n'ai pas rencontré ici un géomètre qui ne soit de mon avis. Etant donnée une équation différentielle $F(x, y, y') = 0$, en général il n'y a pas d'enveloppe pour les courbes. Voilà ce que j'affirme, comme ma démonstration a deux lignes, je vous y renvoye et après l'avoir lue, vous serez bien obligé d'être de mon avis. C'est très drôle mais c'est comme ça.

Lettre non datée (Octobre 1871)

J'ai lu avec une grande attention vos feuilles lithographiées [i.e. le Cours de Hoüel]. Cela me paraît très bien pour les différents points. Seulement, je suis têtu, je tiens à mes idées. Voilà un point qui est pour moi, hors de toute contestation. Dans la théorie des solutions singulières, il faut distinguer absolument le cas où l'on a une intégrale générale - alors c'est le problème des enveloppes - de celui où l'on a une équation différentielle écrite au hasard. Alors il n'y a pas en général de solution singulière. Ceci est aujourd'hui admis par tout le monde. [...] Lisez ma réponse à Catalan. Vous y verrez démontré d'une manière irrécusable que si vous prenez une équation quelconque $F(x, y, y') = 0$, cette équation différentielle étant générale, il n'y a pas de solution singulière. C'est une hypothèse fausse que celle de la surface de Cauchy si l'on l'applique à l'équation différentielle [...] Si j'ai le temps je ferai un mémoire là-dessus. Il y a à dire quelque chose de définitif ; mais où trouver le temps ?

Lettre datée du 16 Mars 187[2] [151]

Comment voulez-vous qu'une courbe qui satisfait à l'équation $F = 0$ ne satisfasse pas aux suivantes $dF = 0$ et $d^2F = 0$ qui sont des conséquences de la première. Le paradoxe que vous me faîtes connaître s'explique simplement. y'' doit se présenter sous la forme $\frac{0}{0}$ et si on fait une différentiation de plus, on trouve deux valeurs pour y'', l'une correspondante à la solution particulière, l'autre à l'intégrale singulière. Mais ce qu'il y a de sûr, c'est que votre distinction n'est pas exacte, le fait se présente pour les solutions singulières comme pour les autres.

Lettre datée du 29 Avril 1873 [152]

Comme le note Hélène Gispert, "*Hoüel ne semble pas avoir été convaincu par les arguments que Darboux oppose à Catalan dans sa deuxième note*" ([**Gispert 1987**, 83]). En dépit des démonstrations répétées que lui fait parvenir Darboux, Hoüel ne tombera jamais d'accord avec les idées que le nîmois défend. C'est sa réticence à considérer la distinction

151. Cette lettre est datée à tort de l'année 1871, comme l'avait fait remarquer [**Gispert 1987**, 175].

152. Les lettres citées sont des lettres de Gaston Darboux à Jules Hoüel provenant de [**Archives épistolaires Darboux**].

entre le cadre du *cas général* dans lequel se place Darboux et l'applicabilité de la théorie des enveloppes qui l'empêchera de concevoir les énoncés du nîmois comme devant être acceptés. Comme ce sera le cas à propos des fondements de l'analyse, les deux rédacteurs du Bulletin semblent ne pas parler la même science [153].

Dans ses lettres à Hoüel, Darboux souligne à plusieurs reprises que ses idées sont acceptées par les géomètres parisiens qu'il côtoie. On peut en effet vraisemblablement penser, à la lecture des notes des *Comptes-rendus* et des références données par Darboux, que son travail a été bien accueilli par les académiciens. Néanmoins, Darboux force volontairement le trait dans le but de convaincre Hoüel, et omet les réticences que ses notes ont suscitées. Ce n'est pas seulement la non-existence de l'enveloppe qui semble alors faire débat, mais également le théorème qui stipule que la recherche qui lui était dédiée aboutit en général au lieu des points de rebroussement. Darboux, nous l'avons signalé, n'était d'ailleurs lui-même pas satisfait de sa preuve de ce résultat.

Luigi Cremona, dont la lecture des *Comptes-rendus* lui a permis de suivre le débat à distance, exprime cette réticence :

> Je suis d'accord avec vous, Monsieur, quant à la non-existence de l'enveloppe en général. Mes doutes se rapprochaient plutôt si mes souvenirs ne me trompent pas sur votre théorème c'est-à-dire que l'intégrale singulière représente en général un lieu des points de rebroussement. Je ne pouvais pas concevoir que pour une série simplement infinie il existe en général un lieu de tels points. Mais je ne puis pas dans ce moment consulter le Compte-rendu où se trouve votre raisonnement ; ainsi je n'insiste pas sur ce point. Et comme d'autre part j'ai la plus haute estime de votre talent et de votre grande habileté, ainsi j'incline à croire que vous avez complètement raison.
>
> Lettre datée du 20 Octobre 1871 de Luigi Cremona à Gaston Darboux, [**Archives épistolaires Cremona**].

Après avoir émis ses premières remarques en Juillet 1870, Eugène Catalan ne revient pas à la charge face aux remarques de Darboux. Ce sont ses deux amis de la Société Royale de Belgique Paul Mansion et Philippe Gilbert qui vont s'en charger à l'été 1872. Paul Mansion, professeur à l'Université de Gand, publie en effet en Août dans les "*Bulletins*" de cette Société un mémoire d'une vingtaine de pages qui contredit les raisonnements du professeur de Paris sur plusieurs points ([**Mansion 1872**]).

Tout d'abord, le mathématicien belge conteste les conclusions de Darboux relatives à l'obtention de l'enveloppe et des rebroussements. En employant un exemple d'équation, il remarque que "*l'équation $R = 0$ représente l'enveloppe des courbes données par l'intégrale générale et le lieu de leurs points de courbure infinie*" ([**Mansion 1872**, 154]). Il affirme ainsi que les distinctions établies par Darboux entre rebroussements et enveloppes doivent être reconsidérées.

Mais surtout, il s'oppose absolument au raisonnement de Darboux selon lequel l'élimination de y' dans $F = 0$ (1) et $\dfrac{dF}{dy'} = 0$ (2) ne conduit en général pas à l'enveloppe. Deux raisons principales sont mises en avant par le professeur de Gand : la première réside dans

153. Voir plus loin notre section 3.1.

sa confiance dans la théorie des enveloppes, et donc l'accord des deux équations (1) et (2). Après avoir cité entièrement le paragraphe en question de la note de Darboux, il poursuit :

> On pourrait peut-être mettre en doute la conclusion de ce raisonnement parce qu'il ne tient pas compte de cette circonstance non seulement que l'équation (2) se déduit de l'équation (1) par une opération qui ne touche en rien aux x, mais que cette opération est une dérivation par rapport à y'. Peut-on savoir, *a priori*, que l'équation (2) n'est pas la condition nécessaire pour que les systèmes de courbes représentées par l'équation (1) quand les paramètres y représentent diverses fonctions de x aient une enveloppe représentée par le résultat de l'élimination de y' entre les équations (1) et (2) ? Cela ne semble pas évident. Un raisonnement identique à celui de M. Darboux pourrait être dirigé contre la théorie ordinaire des courbes enveloppes [...] Le regarderait-on, dans ce cas, comme concluant ?
>
> [**Mansion 1872**, 157]

Le second point avancé par Mansion est le fait que selon lui, si Darboux ne parvient pas à obtenir les enveloppes des courbes intégrales, c'est parce qu'il n'utilise pas le bon critère de recherche.

> Mais [l]e raisonnement [de M. Darboux] a un autre défaut. Les équations (1) et (2) ne donnent pas nécessairement les solutions singulières de l'équation (1) quand celle-ci a de telles solutions. En réalité, les solutions singulières sont données, quand elles existent, par les deux systèmes suivants :
>
> $$F(x,y,y')=0\ ,\ \frac{\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{dy}}=0$$
>
> $$F(x,y,\frac{1}{x'})=0\ ,\ \frac{\frac{dF}{dx'}}{\frac{dF}{dy}}=0$$ [154]
>
> Les objections de M. Darboux ne peuvent plus s'appliquer ici.
>
> [**Mansion 1872**, 158]

Le critère de recherche des solutions singulières que Paul Mansion met ici en avant est exactement celui que George Boole défend également dans son "*Traité*" (voir 2.3). Boole vient en 1872 de faire publier en Angleterre une seconde édition de son traité, et Mansion y fait explicitement référence, ainsi qu'aux travaux de De Morgan qu'il contient. Selon le belge, l'emploi des critères de Boole mène correctement aux solutions singulières des équations différentielles. Il détaille de manière analogue au logicien anglais le bien-fondé de ces nouvelles équations, de même qu'il analyse le "*théorème de De Morgan*" qui étudie ce "*cas exceptionnel*" qu'est l'obtention des lieux de courbure infinie des courbes intégrales ([**Mansion 1872**, 158-161]). Il souligne par ailleurs un type particulier d'enveloppe rectiligne lorsque le contact avec les courbes intégrales se fait au niveau des inflexions de celles-ci.

Le mémoire de Mansion est ainsi dans la continuité de celui de Boole : il reprend les *résultats* de Lagrange en en donnant des démonstrations qui se veulent plus rigoureuses

154. Mansion effectue ici une légère erreur : la dérivation du dénominateur doit en effet être prise par rapport à x et non y, conformément à ce que Boole avait affirmé.

que celles du géomètre de Turin. Mansion souligne que "*la règle pour trouver les solutions singulières n'est pas démontrée d'une manière rigoureuse dans la plupart des traités*" ([**Mansion 1872**, 165]). Le critère qu'il emploie à la suite de Boole "*conduit en général à l'équation de l'enveloppe des courbes représentées par l'intégrale générale de l'équation* $F = 0$" ([**Mansion 1872**, 169]). Si Darboux a cru à la non-existence de l'enveloppe, c'est selon lui tout simplement parce qu'il la recherchait mal.

C'est durant le mois de Mars 1872 que Mansion transmet son mémoire à l'Académie de Belgique. Eugène Catalan, qui en est membre, s'apprête justement à partir pour Paris. Fort de ce nouveau soutien, Catalan ne manque pas d'informer Darboux de la publication prochaine de ce mémoire en sa faveur. Le nîmois écrit alors à Hoüel :

> Nous avons eu ici Catalan-Rabasson (vous avez dû connaître l'intrépide Rabasson [155] qui tombait tous les lutteurs). Il m'a annoncé que l'illustre Mansion avait adressé à l'Académie de Belgique un mémoire dans lequel il donne raison à Catalan. C'est ce qui va vous rendre content : moi aussi, je serai tombé. Enfin, comme on dit à Bordeaux, d'un coup de poing je le tombe, de l'autre je le ramasse. Je parle de la théorie des intégrales singulières.
>
> Lettre datée du 4 Avril 1872 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Précédant la publication du mémoire de son collègue de l'Académie, Philippe Gilbert insère son rapport du travail de Mansion. Gilbert émet quelques réserves quant aux résultats de Mansion, mais dans la formulation de ses propos, il semble pencher en faveur de son compatriote :

> Il y a deux ans, M. Darboux prétendit, contrairement à l'opinion généralement suivie, que l'équation $R = B^2 - 4AC = 0$ ne représente pas généralement une solution singulière [...]
>
> Enoncées sous une forme qui pouvait prêter à discussion sur l'étendue des propositions, et accompagnées de démonstrations fort concises, les remarques de M. Darboux ne furent point acceptées de tous les géomètres, qui avaient sous les yeux un bon nombre de cas où la méthode critiquée conduit à des résultats exacts.
>
> [...]je pense que M. Mansion a discuté avec habileté et succès une question délicate d'analyse, et que son travail contribuera à porter la lumière sur un sujet resté jusqu'ici plus ou moins obscur.
>
> [**Gilbert 1872b**]

Enfin, en 1873 le mathématicien luxembourgeois Hermann Laurent [156] (polytechnicien de la promotion 1860) refuse d'accepter les propositions émises par Darboux à l'Académie

155. Originaire de Provence, Rabasson était l'un des plus célèbres lutteurs des années 1850. Il combattait à Paris dans la salle Montesquieu de la rue Le Peletier, et était surnommé « l'invincible paysan ». Puis il partit combattre à Bordeaux où il acquit le sobriquet de « Taureau de la Gironde ». Il y mourra au début des années 1860 dans une lutte face à un lutteur dénommé Bernard. Alexandre Dumas écrit : "*Qui a vu Mathevet et Rabasson, l'homme qui n'a jamais été tombé, a vu les lutteurs tatars et peut se figurer avoir vu Alcidamas et Milon de Crotone*", (A. Dumas, *Le Caucase*, Nvlle Ed. Arvensas, 2015, p.294).

156. Hermann Laurent (1841-1908), en dépit de son amour pour l'analyse complexe et les séries, ne doit pas être confondu avec le commandant Pierre Alphonse Laurent (X 1830) après qui sont baptisées les séries

en 1870. Il interprète en effet les énoncés de la seconde note du nîmois comme étant contradictoires avec la possible existence des intégrales complètes des équations différentielles. C'est ce qu'il souligne dans une "*brochure*" qu'il montrera au principal intéressé :

> Ce brave Laurent m'a donné la brochure où il fait clairement entendre que j'ai affirmé qu'on ne pouvait pas intégrer une équation du premier ordre par une équation de la forme $V(x, y, c) = 0$. Je n'ai jamais rien dit de pareil, Dieu m'en garde ! J'ai affirmé seulement qu'en général, cette fonction V n'a pas les propriétés nécessaires pour qu'on puisse appliquer les principes de la théorie des enveloppes. Ce qui est bien différent, n'est-ce-pas, de l'affirmation que cette fonction n'existe pas.
>
> Lettre datée du 1er Décembre 1873 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

En résumé, les modifications profondes que Darboux fait subir à la théorie des solutions singulières ne sont donc pas - en dépit de ses propres affirmations - acceptées de tous. Loin s'en faut. Son théorème stipulant la généralité de l'obtention des points de rebroussement par la méthode d'élimination classique est contredit. Quant à la non-existence en général de l'enveloppe, le débat est déplacé soit vers l'argument d'autorité d'existence des intégrales complètes, soit vers le choix des critères algébriques alternatifs de Mansion et de Boole. Hoüel lui-même fait référence au Traité du mathématicien anglais dans ses échanges épistolaires avec Darboux. Celui-ci va entamer au sujet des solutions singulières avec Arthur Cayley une correspondance en 1873. Il en profite pour le questionner sur la qualité du travail de Boole pour pouvoir répondre à Hoüel. La réponse qu'il reçoit du professeur de Cambridge n'est pas élogieuse, car Darboux écrit à son collaborateur : "*Quant à Boole, c'est très mauvais. Cayley me l'a écrit ces jours-ci*"[157].

En fait, Darboux et Cayley ont tous deux écrit, de manière totalement indépendante, un mémoire sur la théorie des solutions singulières à la fin de l'année 1872. Les deux travaux paraîtront en 1873, alors que leurs auteurs entament leur correspondance. Nous avons déjà analysé celui de l'anglais dans la section 2.3. Quant à Darboux, il souhaite éclaircir à la fois ses propos sur la généralité de l'absence d'intégrale complète pour les équations différentielles, mais aussi ses démonstrations jugées "*fort concises*". Ce n'est pas tant la non-existence de l'enveloppe que la mise en évidence en général des rebroussements qui lui pose problème. Finalement, c'est la lecture du mémoire de Paul Mansion qui lui aura donné l'idée d'une nouvelle preuve à ce sujet, plus rigoureuse. Ceci lui permet à propos de la théorie des solutions singulières de "*dire quelque chose de définitif*"[158] comme il le souhaitait.

dont les exposants parcourent les entiers relatifs. Hermann Laurent est un ami de Charles Simon avec qui il est notamment membre du *Cercle des actuaires français* créé à Paris en 1872.

157. Lettre datée du 29 Avril 1873 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

158. Voir la lettre du 16 Mars 1872 citée précemment, [**Archives épistolaires Darboux**].

2.6. "Quelque chose de définitif" sur les solutions singulières des équations différentielles ordinaires (1873) et aux dérivées partielles (1876).

C'est au début du mois de Novembre 1872 que Gaston Darboux, qui effectue alors sa rentrée à l'Ecole Normale en tant que maître de conférences, produit un mémoire sur la théorie des solutions singulières des équations différentielles ordinaires du premier ordre. Il présente ce travail à la Société Philomathique le 23 Novembre 1872, mais ne le publiera que dans les Mélanges du numéro de Mars 1873 de son Bulletin des Sciences ([**Darboux 1873b**]). Au moment de son écriture, le nîmois ne connaît donc pas les résultats de Cayley que nous avons présentés et qui paraîtront presque simultanément en 1873.

Dans son mémoire, Darboux se "*propose de compléter les résultats*" énoncés dans ses notes de l'Académie de 1870, et de "*donner un théorème précis*" quant à l'existence des solutions singulières ([**Darboux 1873b**, 158]). Il considère le cas d'une équation :

$$(E)\ :\ F(x,y,y')=0$$

La "*règle connue qui conduit à la solution singulière, si elle existe*" consiste à éliminer y' au moyen de l'équation (E) et de la seconde condition :

$$(A)\ :\ \frac{dF}{dy'}=0$$

Paul Mansion avait critiqué l'usage de cette règle dans son mémoire, aussi Darboux souligne-t-il :

> M. Mansion a critiqué les résultats auxquels je suis arrivé, en particulier ce géomètre croit devoir faire remarquer que la règle précédente n'est pas absolument exacte, qu'il faut remplacer l'équation (A) par la suivante :
>
> $$\frac{\frac{dF(x,y,y')}{dy'}}{\frac{dF}{dy}}=0,\ \frac{\frac{dF(x,y,\frac{1}{x'})}{dx'}}{\frac{dF}{dx}}\text{[159]}=0$$
>
> Mais ces dernières règles ne s'appliquent qu'aux cas tout à fait singuliers où la fonction F contient des expressions mal déterminées, radicaux, etc. ; [c'est] tout au plus si elles peuvent fournir la solution $y'=\infty$ [...] qu'on peut toujours écarter par un changement d'axes coordonnées. Les règles que rappelle M. Mansion [...] ne trouvent donc pas leur application dans la question actuelle, et, d'ailleurs, elles n'infirmeraient pas nos raisonnements.
>
> [**Darboux 1873b**, 158]

En utilisant un argument géométrique de changement d'axes, Darboux balaie donc d'un revers de main les remarques et les efforts analytiques déployés par Boole et Mansion pour traiter analytiquement les cas faisant exception aux premiers critères lagrangiens. A la suite de cette remarque, le professeur de l'Ecole Normale donne une démonstration plus détaillée de la non-existence de l'enveloppe en général. Ce "*raisonnement si simple [que] M. Mansion ne paraît pas avoir compris*" est une formalisation de la seconde preuve, celle que Darboux avait donnée dans sa seconde Note. Il suppose que l'équation (E) contient

159. Darboux rectifie ici la légère erreur effectuée par Mansion dans sa réécriture des critères de Boole : les dénominateurs doivent en effet être respectivement des dérivations en y et en x.

un "*coefficient littéral*" a. Les équations (E) et (A) - correspondant au p-discriminant de Cayley - permettent d'éliminer y' et d'exprimer y dans l'équation de départ : $y = f(x, a)$. y' lui-même peut alors être exprimé à son tour en remplaçant y par sa nouvelle expression : $y' = f_1(x, a)$. S'il existe une solution singulière, alors ces deux expressions concordent avec $y' = \frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire :

$$f_1(x, a) = \frac{df(x, a)}{dx}$$

Darboux utilise alors l'arbitraire du choix de a : "*en mettant à la place de a une fonction quelconque $w(x)$, les valeurs de y et y' ne sont pas changées*" ([**Darboux 1873b**, 159]). Mais la dérivation précédente devient alors :

$$f_1(x, a) = \frac{df(x, a)}{dx} + \frac{df}{da} w'(x)$$

Les deux expressions de f_1 sont incompatibles, ce qui signifie qu'en général l'enveloppe n'existe pas.

Darboux détaille ensuite la méthode géométrique qui va lui permettre d'établir rigoureusement la généralité de l'obtention des points de rebroussement. C'est la transformation par polaires réciproques qu'il place au cœur de sa nouvelle approche. Il remarque qu'une équation différentielle, outre qu'elle définit une courbe par les propriétés de sa tangente, définit "*une propriété du point de contact*" si l'on considère "*la courbe intégrale non comme lieu de points, mais comme enveloppe de droites*" ([**Darboux 1873b**, 159]). Les polaires réciproques des courbes intégrales solutions de l'équation (E) sont en effet également solutions d'une équation différentielle du premier ordre, ce que Darboux démontre rapidement. Il en conclut que le principe de dualité s'applique aux propriétés générales des courbes intégrales de ces équations. L'emploi des polaires réciproques dans la théorie des équations différentielles n'est pas absolument nouveau : en effet, dès 1787 Adrien-Marie Legendre avait utilisé un changement de variables [160] particulier pour intégrer un type d'équation étudié par Monge ([**Libermann 1978**, 365]). Ce changement, appelé *transformation de Legendre*, correspondait ainsi à un cas particulier de transformation par polaires réciproques. Cependant ce travail était d'une part antérieur à ceux des géomètres relatifs à la dualité des polaires réciproques [161], mais surtout le rôle que Darboux fait ici jouer à cette transformation est bien plus général que le cas particulier utilisé par Legendre.

C'est grâce à cette dualité que Darboux établit un pont entre le lieu des inflexions des courbes intégrales, mis en évidence par Mansion, et le lieu des rebroussements. Il étudie ainsi les droites qui enveloppent les courbes intégrales pour lesquelles deux des points de contact sont confondus. En notant y' le coefficient directeur de ces droites, le problème revient alors aux deux équations :

$$(E) \ : \ F(x, y, y') = 0 \ , \quad (B) \ : \ \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' = 0$$

L'élimination de y' entre ces deux équations aboutit au lieu $w(x, y) = 0$ où les doubles contacts sont réalisés. Mais pour Darboux, ce lieu revêt une autre signification géométrique :

160. Les changements proposés par Legendre étaient : $(x, y, z) \longrightarrow (x' = p, y' = q, z' = z - px - qy)$.
161. Voir [**Nabonnand 2006**, 58-73] à propos de la théorie des polaires et de la dualité.

les équations (E) et (B) impliquent en effet - par différentiation de (E) et retranchement de (B) - la troisième équation suivante :

$$\frac{dF}{dy'}y'' = 0$$

Dans le cas général, $\frac{dF}{dy'}$ n'est pas nul en même temps que (E) et (B) - il s'agit d'un problème analogue à celui de l'existence de l'enveloppe. En conséquence, le lieu $w(x, y) = 0$ est généralement caractérisé par $y'' = 0$, c'est-à-dire par l'inflexion des courbes intégrales. Aussi Darboux conclut-il provisoirement le théorème suivant :

> Le lieu représenté par l'équation $w = 0$ est en général celui des points d'inflexion des courbes intégrales, et les tangentes en ce point sont les seules droites pour lesquelles deux points de contact viennent se réunir en seul, qui est le point d'inflexion [162].
>
> [**Darboux 1873b**, 161]

A la manière des *énoncés parallèles* présentés en géométrie projective par Gergonne et les autres mathématiciens, Darboux traduit la version duale du théorème ci-dessus. La réunion de deux tangentes de la courbe enveloppée y correspond à une valeur double de la dérivée $\dfrac{dy}{dx}$, et les inflexions correspondent aux rebroussements. Le théorème dual de Darboux est alors le suivant :

> Les points pour lesquels deux valeurs de $\dfrac{dy}{dx}$, fournies par l'équation différentielle, deviennent égales, sont, en général, les points doubles de rebroussement de première espèce pour les courbes intégrales, et les deux valeurs égales de $\dfrac{dy}{dx}$ définissent la tangente à la courbe intégrale au point de rebroussement.
>
> [**Darboux 1873b**, 161]

C'est ainsi en rapprochant la transformation par polaires réciproques de la théorie des équations différentielles et en exploitant la piste ouverte par Mansion de l'étude des points d'inflexion que Darboux parvient à une preuve rigoureuse du théorème général qui avait déclenché la polémique en 1870. La méthode classique de recherche de l'intégrale singulière conduit, généralement, aux points de rebroussement. Cette singularité est ainsi présentée par le nîmois comme la propriété duale des inflexions des courbes intégrales.

Dans la suite du mémoire, le mathématicien du Gard se penche sur les conditions d'existence et la recherche des solutions singulières. Sa définition est analogue à celle de Cayley : la solution singulière ne peut être autre chose que l'enveloppe des courbes de l'équation différentielle ([**Darboux 1873b**, 162]). Une condition nécessaire d'existence de ces solutions est l'accord entre les deux recherches présentées ci-dessus : le lieu $\mathcal{A}$ donnant en général les points de rebroussement, et le lieu $\mathcal{B}$ donnant en général le lieu des inflexions. Ces lieux sont en effet obtenus par les trois équations :

162. Nous conservons ici la formulation de Darboux sans modifier l'ambiguïté que celle-ci instaure relativement à la pluralité ou à la singularité desdits lieu(x) d'inflexion.

$$\overbrace{(A) : \frac{dF}{dy'} = 0,\ (E) : F(x,y,y') = 0,}^{\mathcal{A}}\!\phantom{(A) : \frac{dF}{dy'} = 0,\ }\underbrace{(E) : F(x,y,y') = 0,\ (B) : \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}y' = 0}_{\mathcal{B}}$$

Lorsque l'enveloppe existe, elle satisfait aux équations (E) et (A) qui traduisent que la dérivée est une racine double de l'équation différentielle. C'est là le critère usuel qui correspond au lieu géométrique $\mathcal{A}$. Mais par différentiation de (E), cette solution satisfait alors également à l'équation (B) et donc appartient de même au lieu $\mathcal{B}$.

Réciproquement, Darboux démontre qu'une partie commune aux deux lieux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ n'est susceptible de ne pas correspondre à une solution singulière que dans les deux cas suivants :

- soit les trois équations qui les définissent, considérées comme des équations en y', aboutissent à plusieurs valeurs de la dérivée et ne sont pas toutes vérifiées pour une seule et même valeur de y'.

- soit l'équation $\dfrac{dF}{dy} = 0$ est vérifiée pour cette valeur de y' (et donc aussi $\dfrac{dF}{dx} = 0$).

Dans toutes les situations qui ne correspondent à aucune de ces deux propositions, les facteurs communs à $\mathcal{A}$ et à $\mathcal{B}$ sont les solutions singulières. Darboux parvient ainsi à un résultat positif sur l'existence et la détermination effective des solutions singulières :

> Pour qu'une équation différentielle admette une ou plusieurs solutions singulières, il faut que les deux lieux suivants :
>
> 1) le lieu $\mathcal{A}$ des points pour lesquels deux valeurs de y' deviennent égales
>
> 2) le lieu $\mathcal{B}$ qui, dans le cas général, contient tous les points d'inflexion des courbes intégrales
>
> coïncident ou aient des courbes partielles communes.
>
> [...]
>
> On cherchera le lieu $\mathcal{A} = 0$, résultat de l'élimination de y' entre les deux équations (E) et (A). [Puis] on cherchera le lieu $\mathcal{B} = 0$, résultant de l'élimination de y' entre les deux équations (E) et (B). Si les deux courbes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ n'ont aucune partie commune, il n'y a pas de solution singulière ; la première contient les points de rebroussement, généralement de première espèce, des courbes intégrales, la seconde les points d'inflexion.
>
> Si les deux courbes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont une ou plusieurs courbes partielles communes $C = 0$ [...] la condition pour que (C) donne une solution singulière, c'est que les trois équations (E), (A), (B) soient satisfaites pour tous les points de la courbe (C) par une même valeur de y' [et] il faudra encore s'assurer que cette valeur de y' ne vérifie pas identiquement l'une des équations
>
> $$\frac{dF}{dy} = 0,\ \frac{dF}{dx} = 0$$
>
> [Alors] on sera sûr que (C) est une solution singulière.
>
> [**Darboux 1873b**, 161]

La rigueur de la recherche des solutions singulières de Darboux se fait il est vrai, lorsqu'on compare son travail à celui de Cayley, au prix de la concision. Mais Darboux souhaite apporter des résultats "*définitifs*" à ce sujet, et se prémunir des critiques telle celle de Mansion au sujet des possibilités d'échec de certaines des opérations. Il donne néanmoins un procédé effectif de recherche des solutions singulières bien adapté : pas trop lourd du point de vue des opérations nécessaires, sa validité doit être mise hors de doute. L'enveloppe y est clairement obtenue comme la coïncidence des deux recherches duales liées d'une part aux inflexions, et d'autre part aux rebroussements. C'est l'association inattendue de ces deux singularités grâce à la théorie des polaires réciproques qui permet à Darboux de synthétiser efficacement les procédés.

Avant de donner une liste d'exemples qui lui permettront d'illustrer la justesse et l'efficacité de sa méthode, Darboux rappelle "*quelle a été l'origine de l'erreur qui a duré si longtemps dans la théorie des solutions singulières*". Il critique alors sévèrement les "*auteurs*" n'ayant pas su apercevoir le défaut de la considération systématique de l'intégrale complète des équations :

> Cette erreur tient à une confusion que presque tous les géomètres ont laissé s'établir dans toute cette question. [...] les auteurs ont supposé, à tort selon nous, qu'étant donnée, par exemple, une équation différentielle du premier ordre, cette équation admet toujours une intégrale du premier ordre $V(x, y, c) = 0$ où V est une fonction qui, dans toute l'étendue du plan, possède les propriétés qu'on reconnaît généralement aux fonctions étudiées par l'Analyse. Cette fonction V était pour eux plus ou moins difficile à trouver ; mais dans leur esprit, elle existait toujours. Or c'est là précisément le point contestable [...]
>
> Comme rien ne démontre qu'une équation différentielle admette, en général, une intégrale de la forme $V = 0$, on voit qu'on devra séparer cette théorie en deux parties bien distinctes :
>
> L'une, du ressort du Calcul différentiel, et dans laquelle on examine les équations différentielles formées par l'élimination des constantes ;
>
> L'autre, appartenant au Calcul intégral, et où, ne supposant rien sur l'origine de l'équation différentielle, on est obligé de se tenir dans les hypothèses générales et de ne pas supposer l'existence d'une intégrale de la forme $V = 0$. C'est à ce dernier cas que se rapportent nos remarques.
>
> [**Darboux 1873b**, 167-8]

La distinction est donc ici faite par Darboux bien plus nettement que dans ses premières notes : la théorie des solutions singulières correspond bien à la théorie des enveloppes, mais dans le cas général on ne dispose pas de l'intégrale complète pour appliquer celle-ci. S'il rappelle les travaux de Cauchy et de Briot et Bouquet quant à l'existence des solutions des équations différentielles, c'est pour mieux mettre en évidence (en utilisant ses propres termes) qu'il ne s'agit que d'énoncés valables localement qui ne se prêtent ainsi pas à la théorie des enveloppes. D'ailleurs, nous pouvons souligner une fois encore que la notion d'intégrale complète n'apparaît à aucun moment dans le travail du professeur de la rue d'Ulm. La théorie de Lagrange n'est pas infirmée pour autant : elle ne correspond tout simplement pas au *cas général.*

La suite du mémoire de Darboux est consacrée au développement de plusieurs exemples. Le premier d'entre eux consiste en l'étude de l'équation :

$$F(x, y, y') = y - 2xy' - (y')^2 = 0$$

Cette équation provient du Cours de Joseph-Alfred Serret ([Darboux 1873b, 168]). Le nîmois, suivant la méthodologie présentée dans son travail, évalue les deux lieux spécifiques :

$$\mathcal{A} = y + x^2 = 0$$

$$\mathcal{B} = y = 0$$

Aucun facteur n'est commun aux deux lieux : la proposée n'admet ainsi pas de solution singulière. Le premier des lieux est une parabole sur laquelle se placent les rebroussements des courbes intégrales, dont les seules inflexions se situent bien à l'intersection du second lieu (que nous traçons en vert ci-dessous).

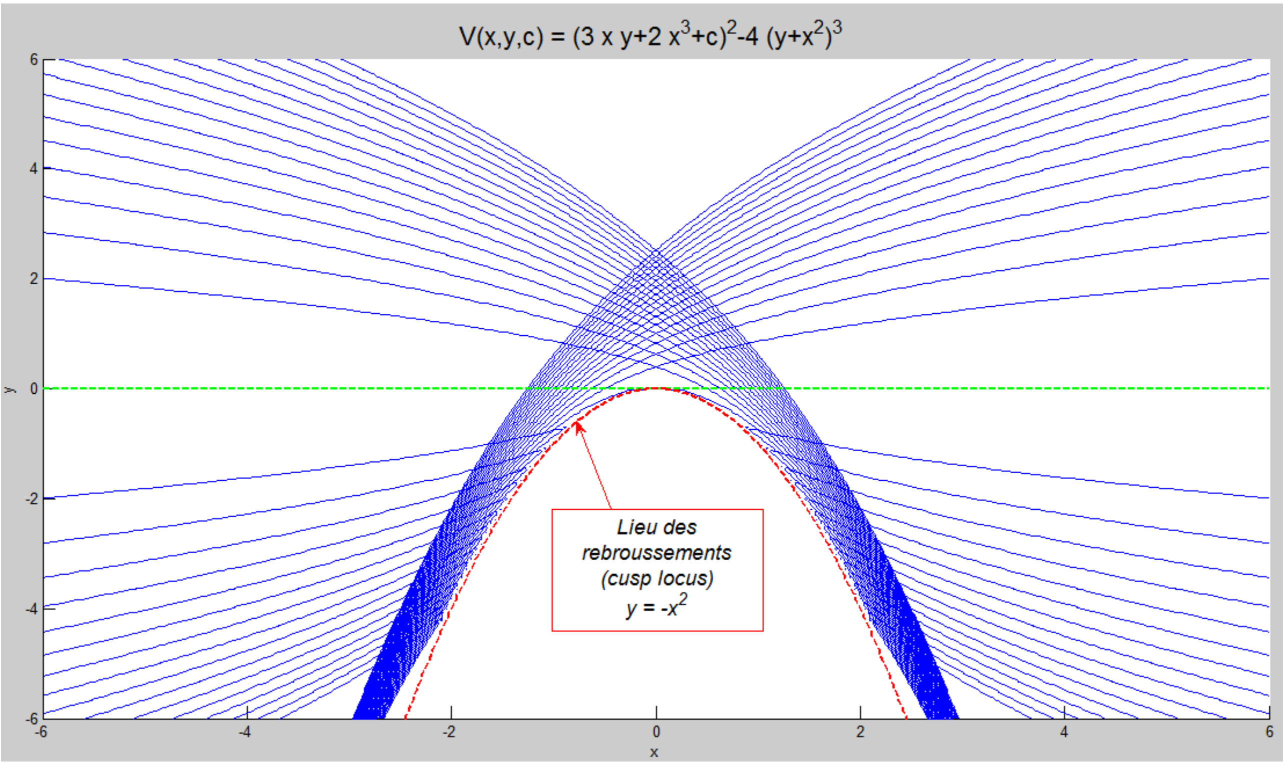


FIGURE 20. Illustration des lieux d'inflexion et de rebroussement

Dans la plupart des exemples qu'il donne, Darboux note que des "*facteurs étrangers*" sont présents dans l'expression algébrique du lieu $\mathcal{A}$. Il remarque en outre que ces facteurs ne sont pas présents dans l'élimination effectuée à partir de l'intégrale complète (le c-discriminant) :

$$V(x, y, c) = 0\ ,\ \frac{dV}{dc} = 0$$

Il donne alors une "*définition géométrique*" de ce facteur étranger : la condition d'élimination de y' entre (E) et (A) - qui définit le lieu $\mathcal{A}$ - "*est évidemment remplie pour les points de contact de chaque courbe avec son enveloppe ; mais elle l'est aussi évidemment pour les points où deux courbes distinctes viennent se toucher, sans être, en tout leur parcours, à une distance infiniment petite l'une de l'autre*" ([**Darboux 1873b**, 174]). Le mathématicien prouve alors que ce facteur étranger satisfait aux trois équations de conditions (E), (A), (B) pour une même valeur de y' sans être une solution singulière, ce qui signifie qu'il annule les dérivées partielles $\dfrac{dF}{dy} = 0$ et $\dfrac{dF}{dx} = 0$. Puis il prouve "*une remarque essentielle, relative aux facteurs [étrangers] : ils figureront élevés au carré dans* $\mathcal{A}$" ([**Darboux 1873b**, 175]). Comme il le note, ceci est confirmé au-delà de ses propres exemples par l'un de ceux que Catalan lui avait opposés ([**Catalan 1870**, 50]). Darboux généralise d'ailleurs à toutes les intégrales complètes algébriques de degré 2 en la constante c le résultat du professeur de Liège.

Aussi Darboux met-il exactement en évidence dans ce que Cayley va appeler le p-discriminant la présence des trois lieux : enveloppe, rebroussements, et *tac-locus* qui correspond au *facteur étranger*. Sans employer ce vocable, Darboux montre que les deux premiers lieux se retrouvent dans le c-discriminant (élimination à partir de l'intégrale complète) tandis que ce n'est pas le cas du tac-locus. Enfin, et sans le savoir au moment de l'écriture, il rectifie la présence du tac-locus au carré dans le p-discriminant, ce que Cayley aura oublié.

C'est ainsi en effectuant un rapprochement clef entre la théorie des équations différentielles du premier ordre et celle des polaires réciproques que Darboux donne à son travail sur les solutions singulières l'aspect "*définitif*" qu'il envisageait. Ce rapprochement lui permet d'abord de démontrer les premiers énoncés qui figuraient dans ses notes de 1870, mais également de donner un procédé rigoureux de recherche des solutions singulières uniquement à partir de l'équation. Son travail se caractérise ainsi par la mixité et l'enrichissement mutuel entre les méthodes analytiques et l'approche géométrique.

Après la parution de ce mémoire, Darboux ne consacre dans l'immédiat pas de recherches ultérieures sur la théorie des solutions singulières. Son travail semble concentré sur l'Analyse, avec l'écriture de son mémoire de 1875 sur les fonctions discontinues, puis sur l'existence (locale) des solutions des équations différentielles grâce à l'emploi des séries ([**Darboux 1875a**])[163]. Avec l'absence de nouvelles productions mathématiques - autres que celles de Darboux -, il semble qu'après avoir été mise subitement sur le devant de la scène grâce au débat avec Catalan, l'effet de mode dont bénéficie la question des solutions singulières s'estompe. Les travaux concomitants de Cayley et de Darboux paraissent fixer l'état de la théorie.

Pourtant les débats comme les productions sont restés cantonnés au cadre d'une seule variable, c'est-à-dire aux équations ordinaires. Les équations aux dérivées partielles, qui avaient pourtant été le point central dans les travaux de Lagrange, n'ont pas été abordées

163. Voir la section ultérieure 3 pour quelques détails sur le travail de Darboux relatif à l'existence de l'intégrale des équations différentielles. Nous y évoquerons également le contenu du mémoire d'analyse sur les fonctions discontinues.

comme en témoigne le traité de Boole ([**Boole 1859**]). C'était sans compter sur le pouvoir d'influence sur les courants de recherche scientifiques détenu par l'Académie des Sciences grâce au système de prix. A la fin de l'année 1875, les membres de la section de Géométrie décident de proposer pour le Grand Prix des Sciences Mathématiques de l'année 1876 le thème suivant : *Théorie des solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre*[164]. Il fait peu de doutes que ce Prix est proposé sur mesure par ses pairs pour Gaston Darboux. Comme l'a noté Elisabeth Crawford, "*les prix académiques ont évolué vers un système où la reconnaissance des travaux réalisés était synonyme de bénéfice matériel pour encourager les scientifiques dans leurs activités de recherche*" ([**Crawford 1980**], 283]). Au vu des deux notes et du mémoire du professeur nîmois, nul semble mieux que lui à même de décrocher les 3,000 francs du Grand Prix. Cependant, Darboux n'a encore rien publié relativement aux solutions singulières dans le cadre plus large des équations aux dérivées partielles.

La date limite de soumission des mémoires pour les candidats au Grand Prix est fixée au 1er Juin 1876. Pourtant Darboux ne se met pas au travail avant la mi-Avril : comme nous l'avons détaillé dans [Chap.5,1.2] à l'occasion de la crise du Bulletin (1875), il est souvent surmené. La tenue du Bulletin est chronophage, et s'ajoute à ses cours à l'Ecole Normale, à ceux de la Faculté, et aux inspections de Lycée. Le temps lui manque parfois pour ses recherches personnelles, et pourtant c'est paradoxalement durant les années 1870 que Darboux est le plus productif. C'est en effet durant cette période que son "*activité scientifique*" fut "*prodigieuse*"[165]. Le nîmois a de fait "*des facilités*" pour "*pondre des travaux*" comme il l'écrit lui-même. Cela sera révélé de manière éclatante pour le Grand Prix de 1876. Au milieu du mois de Mai 1876, il a tout de même le sentiment d'être rattrapé par le temps :

> J'ai eu la malencontreuse idée de vouloir concourir pour le prix sur les solutions singulières. J'ai commencé trop tard et je n'ai plus que 20 jours. Ce sera un mémoire fait en un mois et demi. J'aurais besoin d'un mois de plus ; mon travail serait bon.

Lettre datée du 13 Mai 1876 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Le travail fourni par Darboux est alors colossal, et l'absence de lettre écrite à Hoüel pendant trois semaines - fait rarissime - témoigne du degré de son implication. Une fois le mémoire déposé, il est épuisé mais soulagé et reprend le contact avec son collaborateur :

> Vous devez vous demander si je ne suis pas mort et enterré dans la question des solutions singulières. Heureusement, c'est fini et j'ai pris un peu de repos. Je ne suis pas enchanté de mon travail, mais enfin je me suis décidé à le présenter et je respire.
>
> [...] bien que je ne fasse que changer d'appartement dans la maison où j'habitais[166], c'est une terrible affaire que de déménager un millier de volumes, mais c'est à peu près fini. [...] Je suis à bout de forces, ce

164. Voir les "*Comptes-Rendus des séances de l'Académie*, Tome 81 (1875 2nd Sem.), p.1370.
165. [**Picard 1917**, 18].
166. Le Lundi 5 Juin 1876, la famille Darboux déménage : ils changent d'étage tout en restant au 36 rue Gay-Lussac où ils s'installent au 5ème et dernier étage dans un grand appartement qu'ils conserveront plus de trente ans.

> diable de Mémoire sur les solutions singulières fait en si peu de temps m'a couché sur le flanc.
>
> Lettres datées du 3 et du 11 Juin 1876 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Le résultat des efforts du professeur de l'Ecole Normale est, compte tenu des délais, impressionnant. Le mémoire qu'il transmet à l'Académie compte 4 parties qui rassemblent 240 pages ([**Darboux 1876**]). La première partie concerne les équations à deux variables $F(x, y, z, p, q) = 0$, tandis que la seconde, reprenant le formalisme et les études de Sophus Lie et d'Adolph Mayer, traite le cas général de n variables $F(x_i, p_i, z) = 0$. Dans la troisième partie, l'auteur emploie les développements en série pour retrouver certains résultats et en démontrer de nouveaux. Puis la dernière partie est consacrée à une extension de l'équation originelle de la théorie des solutions singulières, l'équation de Clairaut. A l'image de l'étude des surfaces cyclides dans le mémoire [**Darboux 1873a**], le nîmois aborde de très nombreux problèmes, divers, dont il détermine des rapprochements avec la théorie des solutions singulières. Nous en analyserons tout particulièrement deux dans la section ultérieure 2.7. Plus encore que dans le cas des équations ordinaires, nous allons voir que le domaine des EDP lui permet de faire bénéficier ses études de l'emploi des méthodes géométriques et analytiques qui s'y complètent à merveille. L'algèbre servira là aussi souvent de médiatrice entre analyse et géométrie.

Le seul concurrent de Darboux pour le Grand Prix de 1876 est Louis-Victor Turquan, dont le mémoire compte à peine une vingtaine de pages. Agrégé en 1849, Turquan enseigne dans différents lycées de province avant de prendre sa retraite en 1873 dans le Loiret. Sans manquer d'estime pour Turquan, qui est tout de même membre de la Société Mathématique de France, l'absence d'une véritable concurrence face à Darboux renforce la certitude que ce Prix lui ait directement été destiné. Aussi c'est sans surprise que, le 23 Avril 1877, le suppléant de Liouville est couronné par les cinq commissaires Bertrand, Puiseux, Hermite, Bouquet et Bonnet - dont les quatre premiers ont été ses maîtres. Le rapport de Joseph Bertrand est spécialement élogieux :

> la Commission a été particulièrement frappée de la grande supériorité, tant pour la forme que pour le fond et pour l'abondance des détails, du Mémoire n.2 [...] C'est une œuvre considérable, digne à tous égards des encouragements de l'Académie. La Commission, à l'unanimité, lui décerne le prix, en exprimant le vœu que cet excellent travail soit imprimé dans le *Recueil des Savants Etrangers*.
>
> [...] M. Le Président proclame le nom de M. G. Darboux.
>
> Rapport de J. Bertrand, Grand Prix des Sciences Mathématiques, 23 Avril 1877 [167]

Dans l'introduction de son travail, Darboux annonce vouloir effectuer une "*étude détaillée et géométrique des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes [qui] peut être considérée comme une exposition complète de la méthode des caractéristiques de Monge*" ([**Darboux 1876**, 4]). Il va en effet analyser en profondeur les relations de contact entre l'intégrale singulière d'une part, et les surfaces intégrales et les caractéristiques d'autre part. La recherche de ces relations de contact va le mener directement au

167. "*Comptes-Rendus des séances de l'Académie des Sciences*", Tome 84 (1877, 1er Sem.), p. 804.

problème de l'association des caractéristiques pour faire en sorte de constituer une surface intégrale, poursuivant des recherches commencées par Monge ([**Archibald 2003**, 330]). L'étude des relations de contact sera prolongée ensuite dans la seconde partie dans le cadre des équations différentielles à n variables en lien avec la théorie algébrique de réduction des formes quadratiques, puis dans la troisième partie avec la théorie analytique des séries. Le mémoire de Darboux étant extrêmement riche du point de vue mathématique [168], nous n'en détaillerons que certaines parties dont l'étude est pertinente tant pour continuer de pister l'identité scientifique de l'auteur que pour faire ressortir plus loin le contraste avec la réception de cet imposant ouvrage.

Gaston Darboux commence par donner une interprétation géométrique à l'équation $F(x, y, z, p, q) = 0$ dont il bénéficiera largement dans la suite du mémoire. En fixant les variables d'espace (x, y, z), puis en adoptant de nouvelles variables (X, Y, Z), cette équation devient une propriété du plan tangent aux surfaces qu'elle représente. Le cône défini par :

$$F(x, y, z, \frac{x-X}{Z-z}, \frac{y-Y}{Z-z}) = 0$$

est ainsi un cône dont les génératrices sont les normales des plans tangents des surfaces solutions. Darboux le nomme "*cône des normales*" et le note (N). Par dualité, son cône supplémentaire (T) est le "*cône des tangentes*", qui avait été défini et utilisé par Monge (voir 2.2). Les surfaces intégrales de F, considérées comme lieu de points, sont telles qu'en tout point leur plan tangent touche le cône (T), ou, ce qui revient au même, telles que la normale à ce plan appartienne au cône (N). Considérées de manière duale comme enveloppes de plans, l'équation F décrit pour un plan fixé (P) une courbe de ce plan (C) où se situeront les points de contact des différentes surfaces solutions dont (P) sera un plan tangent ([**Darboux 1876**, 17]).

Cette approche offre à Darboux une présentation des solutions singulières et des caractéristiques indépendantes de la notion d'intégrale complète, qu'il détaille cependant dans un premier temps. Tout d'abord, les caractéristiques deviennent sous cet angle de vue les courbes intégrales dont les tangentes restent en permanence les génératrices du contact avec la surface développable engendrée par les plans touchant le cône des tangentes (T). On retrouve ici le lien entre la géométrie de Monge des caractéristiques et de leurs trajectoires, et la théorie des tangentes conjuguées qu'en tirera Dupin [169]. L'expression analytique de cette propriété amène Darboux à retrouver les équations des caractéristiques que Monge avait déjà déterminées [170] (voir 2.2) :

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{pP + qQ} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ} \text{ [171]}$$

168. La lecture de l'introduction que Darboux donne à son mémoire ([**Darboux 1876**, 1-14]) pourra donner au lecteur un survol synthétique des différents problèmes abordés, ainsi que des nombreux résultats nouveaux qui y sont présentés.
169. Voir la section 2.2.
170. Voir [**Archibald 2003**, 330] et [**Dieudonné 1978**, 45]. Voir également [**Demidov 1982**, 332] pour le travail sur le même sujet effectué par Lagrange et le mathématicien moins connu Paul Charpit (mort en 1784). Une comparaison des méthodes d'intégration liées à la théorie des caractéristiques chez Charpit, Lagrange et Monge est donnée dans [**Saltykov 1930**] et [**Saltykov 1937**].

Les caractéristiques forment ainsi une classe de courbes particulières parmi les "*courbes intégrales*" dont les tangentes sont des génératrices des cônes (T).

Par ailleurs, l'intégrale singulière correspond quant à elle à une dégénérescence des cônes (N) et (T) : sur l'intégrale singulière, le cône des normales possède une droite double (qui est la normale à l'intégrale singulière). Ceci correspond au fait que le cône des tangentes en ces points dégénère en un cône et un plan, le plan tangent à l'intégrale singulière ([**Darboux 1876**, 61]).

Dans la progression du mémoire, Darboux juxtapose les paragraphes où les propositions sont fondées uniquement sur l'équation différentielle et les paragraphes où le point central est, à l'instar de Lagrange, l'intégrale complète ou générale. Ceci distingue ce travail de ses précédentes productions où la notion d'intégrale était bannie pour mieux affirmer la généralité de l'absence de son existence. Via la notion d'intégrale complète $V(x, y, z, a, b) = 0$, Darboux présente une première étude des courbes intégrales, de leur association et de leur contact. En employant le signe d pour désigner une différentiation selon les variables d'espace (x, y, z) et le signe δ pour les paramètres (a, b), il retrouve l'arête de rebroussement dans les équations :

$$V = 0,\ \delta V = 0,\ \delta^2 V = 0$$

Cette courbe particulière est tangente à toutes les caractéristiques qui sont placées sur l'intégrale complète V, et "*peut être considérée comme une courbe enveloppe de toutes les caractéristiques sur V. Elle fait donc partie de ces courbes que nous avons appelées* courbes intégrales" ([**Darboux 1876**, 37]). Darboux démontre deux nouvelles propositions relatives à ces arêtes : d'abord, toute courbe intégrale (U) peut être obtenue comme une telle arête. Dans la preuve de cet énoncé, le professeur de la rue d'Ulm retrouve qu'il est suffisant, pour construire une surface intégrale, d'effectuer l'association de courbes caractéristiques tangentes à une seule et même courbe. C'est en choisissant (U) comme cette courbe "*enveloppe*" que celle-ci devient, sur la surface intégrale, ladite arête de rebroussement. Ceci lui permettra plus loin de souligner que par toute courbe tracée sur l'intégrale singulière il passe une seconde surface intégrale qui en partage les plans tangents : les intégrales complètes touchent donc l'intégrale singulière en un point, tandis que les intégrales générales l'épousent selon une courbe ([**Darboux 1876**, 61]).

La seconde proposition de Darboux consiste en la mise en évidence "*d'une classe remarquable d'intégrales*" ([**Darboux 1876**, 47]). Il détermine en effet l'existence d'une intégrale générale "*non encore signalée*" dont le rebroussement n'est plus apparent. Cette intégrale dénuée de rebroussement est caractérisée par l'équation supplémentaire :

$$\delta^3 V = 0$$

C'est cette classe d'intégrales qui amène Darboux à l'étude de l'ordre des contacts des caractéristiques, et plus généralement des courbes dans l'espace qui possèdent une enveloppe. En effet, ces intégrales *remarquables* admettent pour arête de rebroussement (non-apparente) des courbes qui coupent en 4 points les intégrales qui leur sont tangentes. Autrement dit, et comme l'illustre Darboux avec un type d'équation particulier qu'il reprend de Serret, dans la formation de l'intégrale générale par enveloppe des intégrales

171. Nous adoptons à nouveau la notation synthétique de Monge (et de Darboux) dans laquelle une lettre majuscule (autre que F) correspond à la dérivée partielle de F par rapport à la variable représentée par la lettre minuscule. Ainsi par exemple $X = \dfrac{dF}{dx}$.

complètes il n'y a plus seulement tangence mais osculation. Les caractéristiques y ont un contact d'ordre 2 - et non plus 1 - avec leur enveloppe ([Darboux 1876, 50]). Pour analyser le cas général de l'ordre des contacts des caractéristiques et mieux appréhender le cas particulier de ces intégrales remarquables, le mathématicien de Nîmes va étendre un théorème de Bouquet :

> M. Bouquet a montré que, si la plus courte distance de deux droites infiniment voisines d'une surface réglée est d'un ordre supérieur à 3, elle est nulle. Il n'existe pas de théorème analogue quand on prend des courbes quelconques. Nous allons poursuivre l'étude de cette question.
>
> [Darboux 1876, 51]

Bouquet avait énoncé ce théorème trente ans plus tôt (voir [Bouquet 1846b]). Dans son cas, le paramétrage des droites ne posait que peu de problème. Dans le cas de courbes quelconques de l'espace (K) possédant une enveloppe (R), Darboux choisit d'"*exprimer les coordonnées des points des courbes tangentes*" par deux systèmes d'abscisse curviligne : le premier, s, désigne l'arc compté sur l'enveloppe (R) depuis une origine fixe O jusqu'au point de contact M entre la courbe et son enveloppe. Le second, σ, désigne l'arc compté sur (K) entre M et le point P dont on cherche les coordonnées. Ainsi, celles-ci sont : $P : (s, \sigma)$.

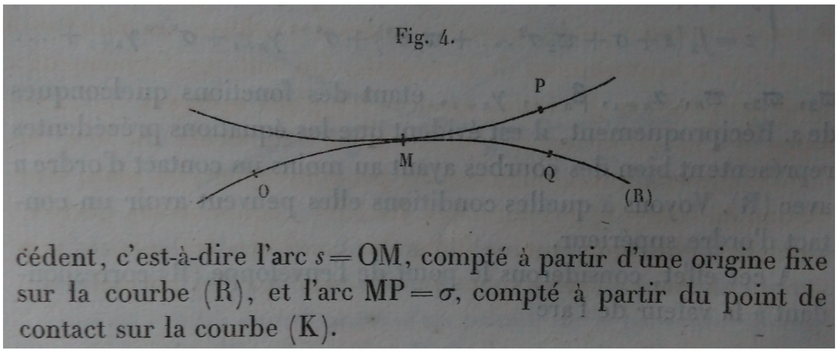


FIGURE 21. Coordonnées mobiles de deux abscisses curvilignes dans l'espace, [Darboux 1876, 51]

Les coordonnées définies par Darboux pour traiter ce problème spécifique sont remarquables en ce sens qu'elles sont mobiles : elles dépendent de la configuration géométrique étudiée, à savoir la disposition de la famille de courbes par rapport à son enveloppe. Le fait d'adapter ici le système de coordonnées au problème d'une disposition géométrique variable peut être perçu comme préfigurant la théorie du repère mobile pour les études des courbes et des surfaces de l'espace. Darboux reprendra en effet cette méthode dite de "*périmorphie*" d'Albert Ribaucour dans ses cours des années 1880. Signalons tout de même que la mobilité des référentiels n'est alors pas tout à fait nouvelle (voir [Delcourt 2011] et [Rouxel 1980]).

Grâce à cette paramétrisation adaptée, Darboux montre que la plus courte distance entre deux courbes infiniment proches ayant un contact d'ordre n avec leur enveloppe est au plus d'ordre $n+1$ lorsque n est pair, mais est au moins d'ordre $n+2$ si n est impair ([Darboux 1876, 55]). En appliquant ces résultats aux caractéristiques des surfaces intégrales, tangentes à l'arête de rebroussement, le cas général de la configuration - soit un contact du premier ordre - correspond à une équation approchée de la forme $z = K\sqrt{y}$: il y a bien rebroussement. En revanche, Darboux montre que dans le cas des intégrales "*remarquables*", où le contact des caractéristiques est d'ordre 2, l'équation approchée de la surface devient $z = K(y)^{\frac{4}{3}}$: le rebroussement a, en apparence, disparu.

La détermination de l'intégrale singulière à partir des caractéristiques tient pour Darboux essentiellement dans la propriété suivante : il passe en tous les points de l'intégrale singulière une infinité de caractéristiques qui lui sont tangentes ([**Darboux 1876**, 64]). Ce-faisant, en exploitant l'indétermination des équations des caractéristiques (ce sur quoi nous reviendrons en 2.7), il obtient sans passer par la notion d'intégrale complète les équations :

$$F = 0,\ P = Q = 0,\ X + pZ = Y + qZ = 0$$

En accord avec les équations différentielles ordinaires, il montre ce "*résultat paradoxal*" que ces équations n'ont en général pas de solution, et que les trois premières représentent en général une surface qui est le lieu des rebroussements des surfaces intégrales. Ses démonstrations, analytiques, sont calquées sur celles de 1873 pour le cas d'une seule variable ([**Darboux 1876**, 69]). Il souligne néanmoins ensuite que lorsque les intégrales complètes existent et sont "*finies et continues dans une étendue assez grande pour qu'il y ait lieu de chercher leur enveloppe*", alors cette enveloppe est la solution singulière qui, par conséquent, existe bien. Mais il note que l'existence d'une telle intégrale n'a pas lieu d'être en général, alors que "*Monge regarde ce point comme évident et ne juge pas même nécessaire de l'énoncer [et que] la notion de l'intégrale complète joue d'ailleurs un rôle fondamental dans la méthode de Jacobi*" ([**Darboux 1876**, 68]). Enfin, il se penche sur l'ordre du contact entre les différentes intégrales et l'intégrale singulière, lorsqu'elle existe. Mais nous allons détailler ces recherches dans le cadre plus vaste qu'elles occupent dans le second chapitre, où l'équation est aux dérivées partielles de n variables (x_i).

Le second chapitre commence par quelques "*préliminaires analytiques*" où Darboux expose et redémontre les résultats alors récents de Sophus Lie et d'Adolph Mayer avec le formalisme hérité de Jacobi et de Clebsch [172]. En commençant ensuite par définir l'intégrale singulière à partir des différentes classes d'intégrales à l'image du travail originel de Lagrange - ce sur quoi nous reviendrons ci-après dans la section 2.7 - il retrouve ensuite les équations qui permettent de déduire l'intégrale singulière de l'EDP. Ces équations de condition sont au nombre de $2n + 1$:

$$\begin{cases} F(z, x_i, p_i) & = & 0 & \\ P_i & = & 0 & i = 1, 2, ..., n \\ X_i + p_i Z & = & 0 & i = 1, 2, ..., n \end{cases}$$

Darboux va en fait, dans ce cas général, hisser ces équations de condition au rang de définition de l'intégrale singulière. Celle-ci devient entièrement définie comme une solution de ce système de $2n + 1$ équations, si toutefois ce système n'est pas identiquement vérifié par toutes les solutions [173]. Nous ne reviendrons pas sur les remarques analogues au cas de 2 variables quant à la signification de ces équations et à l'absence en général de solution

172. Voir [**Hawkins 1991**], [**Hawkins 1994**] et [**Demidov 1982**] sur les *systèmes fondamentaux* de Clebsch définis grâce aux crochets de Poisson, puis les travaux de Lie et Mayer publiés de 1872 à 1875.

173. Ceci se produit notamment lorsqu'on considère une équation sous la forme $F^m = 0,\ m > 1$ comme le fait remarquer Darboux.

singulière. Nous signalerons néanmoins avant d'y revenir plus loin que les différents types d'intégrale des EDP à n variables sont obtenues, à partir d'une intégrale complète contenant n arbitraires, en formant un certain nombre de relations entre ces arbitraires. Nous allons ainsi pouvoir nous pencher plus longuement avec Darboux sur l'étude de l'ordre des contacts entre les intégrales et la solution singulière.

Dans le cas de 2 variables, le professeur nîmois avait rapporté par un changement de variables l'intégrale singulière au plan $z = 0$, pour ramener l'étude du contact à celle des différentielles dz et d^2z. Il avait d'ailleurs noté que cette transformation était "*toujours légitime dans une étendue suffisamment petite des valeurs de x et de y*", ce qui mettait un accent rare sur le caractère local des transformations et de la validité des énoncés en dépendant. Sans entrer dans les détails, Darboux était parvenu à déterminer que l'ordre du contact entre les intégrales générales et l'intégrale singulière dépendait du hessien de l'intégrale complète selon ses paramètres : $Hess_V(a, b)$. La faiblesse du rang de celui-ci allait de pair avec l'élévation de l'ordre des contacts. L'intervention de l'algèbre est encore bien plus forte dans le cas de n variables. En considérant une intégrale complète $V(z, x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_n) = 0$, Darboux effectue le même changement de variables pour ramener "*un élément de l'intégrale singulière*" à l'élément :

$$z = 0,\ x_i = 0,\ p_i = 0$$

Il démontre alors que la substitution algébrique permettant de "*ramener* $\sum\sum \frac{d^2V}{dx_idx_k}dx_idx_k$ *à la forme* $dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_{n-p}^2$" ([**Darboux 1876**, 121]), c'est-à-dire de réduire la forme quadratique associée au hessien $Hess_V(x_i)$, aboutit en outre aux relations :

$$\frac{d^2V}{dx_idx_k} = 0,\ \frac{d^2V}{da_idx_k} = 0,\ \frac{d^2V}{da_ida_k} = 0,\ \ i \neq k$$

En différentiant le long de l'intégrale singulière les dérivées du premier ordre de V - qui sont nulles - Darboux met en évidence la relation de proportionnalité qui existe à l'ordre 2 entre les dérivées selon les variables d'espace x_i et celles selon les paramètres a_i :

$$\frac{d^2V}{dx_i^2} = k_i\frac{d^2V}{dx_ida_i} = k_i^2\frac{d^2V}{da_i^2}$$

Pour Darboux, ces relations sont fondamentales car elles contiennent les contraintes qui portent sur le lieu géométrique qu'une intégrale peut avoir en commun avec l'intégrale singulière. Il relie en effet la nullité d'une dérivée seconde $\frac{d^2V}{da_i^2}$ à la détermination de la différentielle da_i ainsi qu'à l'évanouissement d'une contrainte portant sur les éléments dx_i. Il y aura alors contact du second ordre pour une intégrale générale composée d'une relation entre les "*arbitraires*" a_i. Si plusieurs dérivées secondes s'annulent, autant de nouvelles relations entre les arbitraires peuvent apparaître dans les intégrales générales tout en conservant l'ordre de ce contact. Il éclaircit ensuite le lien entre les substitutions algébriques, la nullité analytique des dérivations, et le contact des lieux géométriques :

Quelle est la signification de ces équations $\frac{d^2V}{da_1^2} = 0, ..., \frac{d^2V}{da_h^2} = 0$?

> Elle exprime qu'avant la substitution linéaire, la forme
> $$\sum\sum \frac{d^2V}{da_i da_k} da_i da_k$$
> se réduit à une somme de $n-h$ carrés. Nous obtenons donc la proposition suivante :
>
> Si pour tous les éléments de l'intégrale singulière, la forme
> $$\sum\sum \frac{d^2V}{da_i da_k} da_i da_k$$
> se réduit à une somme de $n-h$ carrés, toutes les intégrales générales obtenues en éliminant au plus h relations entre les arbitraires a_i auront avec l'intégrale singulière un contact du second ordre.
>
> [**Darboux 1876**, 126]

La théorie algébrique des formes quadratiques, leur classification selon leur rang, permet donc à Darboux en lien avec l'interprétation géométrique des lieux de contact de déterminer que l'ordre du contact entre intégrales générales et solution singulière dépend directement du rang de la forme quadratique associée à l'intégrale complète. Si cette forme est de rang maximal, tous les contacts seront du premier ordre. En revanche, Darboux montre que tout abaissement du rang correspond au relâchement d'une contrainte à la fois sur un élément différentiel ainsi que sur la détermination d'un lieu géométrique de contact. Une nouvelle classe d'intégrale générale vient alors avoir un contact du second ordre avec l'intégrale singulière.

En employant les développements en série des solutions dans la troisième partie du mémoire, Darboux va donner à ce résultat une forme plus concise ainsi que de nouvelles démonstrations. Après avoir énoncé et redémontré certains résultats de Cauchy et de la mathématicienne russe (disciple de Weierstraß) Sofia Kovalevskaya [174], le gardois analyse la possibilité de développer les solutions en séries de n variables indépendantes parmi les $2n$ paramètres $x_1, ..., x_n, p_1, ...p_n$. Ceci l'amène à une classification des intégrales selon le nombre de variables d'espace x_i laissées indépendantes. Il ramène une fois encore l'intégrale singulière au plan (nous dirions l'hyperplan) $z = 0$. Son résultat met en évidence $n + 1$ classes de solutions qu'il présente sous la forme suivante :

– Classe 0 : la solution singulière $z = 0$.
– Classe $k \in [1, n-1]$: les intégrales générales, pour lesquelles $z, x_1, ..., x_k, p_{k+1}, ..., p_n$ sont développables en série suivant les puissances de $p_1, ..., p_k, x_{k+1}, ..., x_n$. Ces intégrales "*sont tangentes à la solution singulière en tous les points d'un lieu défini par k équations*" ([**Darboux 1876**, 166]).

174. A propos de Cauchy et de ses travaux, voir [**Belhoste 1991**]. Dans sa thèse effectuée à Berlin sous l'autorité de Karl Wilhelm Weierstraß, et publiée au début de l'année 1875 ([**Kovalevskaya 1875**]), Sofia Kovalevskaya prolonge les théorèmes d'existence locaux de solutions des équations différentielles grâce aux séries (voir [**Archibald 2003**, 346-348] et plus loin notre section 3.2). Le travail de Darboux sur le même sujet paraît quelques semaines plus tard ([**Darboux 1875a**]). Enfin, l'année suivante, Rudolf Lipschitz "*affaiblira les hypothèses du théorème d'existence de Cauchy*" ([**Kline 1990**, 718]) : ce résultat porte encore aujourd'hui son nom, associé à celui du Baron Cauchy.

– Classe n : les intégrales complètes, pour lesquelles $z, x_1, ..., x_n$ sont développables en série suivant les puissances de $p_1, ..., p_n$. Ces intégrales touchent en un point l'intégrale singulière. Elles sont formées des caractéristiques qui passent par le lieu de contact avec l'intégrale singulière ([**Darboux 1876**, 160]).

Darboux va ensuite montrer que les équations des lieux de contact sont elles-mêmes développables en série, puis isoler leur expression dans les intégrales générales. Il remarque alors que "*tous les termes du développement contiennent, soit le carré de l'une des variables, soit le produit de deux de ces variables*" ([**Darboux 1876**, 187]). Grâce à de nouveaux changements de variable pour effectuer la mise sous carrés, il démontre ainsi que ces lieux peuvent être mis sous la forme $u_i = 0$ de sorte que l'intégrale générale de classe k s'écrive $V = u_1^2 + ... + u_k^2$. Il retrouve et donne ainsi l'extension d'"*un curieux et intéressant résultat établi par Poisson*" ([**Darboux 1876**, 178]) qui avait noté la mise en facteur de la solution singulière.

Enfin, Darboux s'attelle à retrouver les résultats du chapitre précédent au sujet de l'ordre du contact avec l'intégrale singulière. S'il adapte les énoncés aux développements en série, l'outil algébrique reste au cœur de sa méthode. Il suppose l'équation aux dérivées partielles écrites sous la forme résolue suivante :

$$z = \Phi(p_1, ..., p_n) + \Psi(x_i, p_i)$$

où Φ est une forme quadratique. La solution singulière étant $z = 0$, Darboux étudie les premiers termes des développements des variables x_i de l'intégrale complète formée des caractéristiques passant en un point donné (x_i^0). Ce sont en effet ces premiers termes qui détermineront l'ordre du contact avec $z = 0$. En identifiant le premier terme à la dérivée $\frac{d\Phi}{da_i}$ (a_i étant l'un des arbitraires de l'expression de l'intégrale), il relie ce contact au "*déterminant des n fonctions linéaires $\frac{d\Phi}{da_i}$*" ([**Darboux 1876**, 181]), ou encore "*ce qui revient au même*", à la réductibilité de la forme quadratique Φ. En redonnant à l'équation différentielle sa forme générale $F = 0$, Darboux retrouve un critère portant sur le rang de la forme quadratique $\sum\sum \dfrac{d^2F}{dp_i dp_k} dp_i dp_k$ équivalent à celui déterminé précédemment sur l'intégrale complète. Ce rang ne correspond alors plus directement aux classes des intégrales dont le contact est du second ordre, mais à la possibilité d'en obtenir un développement selon les puissances des variables d'espace $x_1, ..., x_n$. Plus le rang de la forme quadratique est élevé, plus il y aura de classes permettant un tel développement. Darboux synthétise ce résultat et la forme des classes d'intégrales en le théorème ci-dessous, qui représente l'aboutissement du troisième chapitre :

> Quand une équation aux dérivées partielles à n variables indépendantes a une solution singulière pour laquelle $Z \neq 0$ [175], il y a n classes d'intégrales développables. Si
>
> $$z = f(x_1, ..., x_n)$$
>
> est l'équation de la solution singulière, [...] les intégrales de la k^ième^ classe seront représentées par une équation de la forme
>
> $$z = f(x_1, ..., x_n) + u_1^2 + u_2^2 + ... + u_k^2$$

175. Cette hypothèse légitime les changements de variables et les développements en série que Darboux considère dans tout le chapitre.

> $u_1 = 0, ..., u_k = 0$ étant l'équation des lieux de contact [avec l'intégrale singulière]. Cette classe contiendra les coefficients de k fonctions arbitraires de $n - k$ variables.
>
> Les intégrales de la n$^{\text{ième}}$ classe seront représentées par une équation de la forme :
> $$z = f(x_1, ..., x_n) + u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2$$
> et dépendront de n constantes qui sont les coordonnées du point de contact avec l'intégrale singulière. Si la forme
> $$\sum \sum \frac{d^2F}{dp_i dp_k} dp_i dp_k$$
> est réductible à une somme de $n - k$ carrés, les k dernières classes subsistent, mais les développements précédents ne leur sont plus applicables.
>
> [**Darboux 1876**, 188-9]

Prolongement de ces études, Darboux résout pour finir l'"*intéressant problème d'analyse*" algébrique de la recherche des polynômes homogènes du second degré satisfaisant l'équation aux dérivées partielles $2z = \Phi(p_i)$ ([**Darboux 1876**, 190-3]). Il termine en soulignant l'importance de la condition $Z \neq 0$, en remarquant qu'en son absence certaines "*solutions singulières exceptionnelles*" apparaissent. L'équation n'étant plus résolue en z, il met en relief l'existence de certaines solutions singulières échappant à la théorie des enveloppes ou à l'élimination des constantes. C'est alors "*l'emploi du parallélogramme de Newton*" qui lui permet de construire de telles solutions ([**Darboux 1876**, 193]).

La dernière partie du mémoire est dédiée à l'étude d'une "*classe importante d'équations ayant des solutions singulières*" ([**Darboux 1876**, 205]). Il effectue un bref rappel historique des recherches suscitées par l'équation de Clairaut :

> La théorie des solutions singulières trouve son origine dans l'étude de l'équation de Clairaut. [...] La théorie de Lagrange a été beaucoup étendue dans un des plus beaux mémoires de M. Serret [176]. Mais rien encore de général n'a été fait dans cette voie, croyons-nous, pour les équations aux dérivées partielles.
>
> [**Darboux 1876**, 205]

Darboux donne alors ce qu'il appelle une "*généralisation de l'équation de Clairaut*", qui regroupe les équations $Z = 0$ dont la différentielle totale se met sous la forme :

$$dZ = \sum P_i dX_i$$

avec P_i, X_i des fonctions des $2n + 1$ variables z, x_i, p_i. En reprenant le formalisme et les lemmes de Lie et Mayer (voir 2.7), Darboux va établir que ces équations admettent toujours des solutions singulières. Il remarque que la forme de la différentielle impose aux éléments solutions de respecter l'équation :

$$dZ - \sum P_i dX_i = \rho(dz - \sum p_i dx_i)$$

La forme générale des solutions a déjà été étudiée par Darboux dans la seconde partie, après [**Lie 1875**] et [**Mayer 1875**]. Elle est donnée par un certain nombre de relations

176. Il s'agit ici de [**Serret 1853**].

algébriques entre les deux systèmes de $n+1$ variables (Z, X_i) d'une part, (z, x_i) d'autre part. Par la forme même de l'écriture, Darboux retrouve la solution singulière comme étant celle qui "*annulerait tous les coefficients* dX_i". Il établit ensuite réciproquement, avec une méthode similaire, l'intégrabilité et l'existence des solutions singulières des équations de la forme :

$$U = f(Z, X_1, ..., X_n) = 0$$

Ces transformations entre les systèmes généraux de $2n+1$ variables (Z, X_i, P_i), (z, x_i, p_i) sont au cœur des méthodes de transformation alors employées par plusieurs mathématiciens, dont surtout Lie, pour classer et résoudre les étapes d'intégration des équations aux dérivées partielles envisagées par la *seconde méthode de Jacobi* ([**Demidov 1982**], [**Hawkins 1991**]). Darboux en donne d'ailleurs un aperçu en se penchant sur le cas où (Z, X_i) est ce que Clebsch appelait un *système complet* ([**Darboux 1876**, 212-216]). Mais surtout, il souligne l'emploi particulièrement heureux de ce formalisme pour reconnaître l'existence de solutions singulières à la seule forme de la différentielle de l'équation de départ. Il termine son mémoire par une application de cette méthode à la dualité induite par la *transformation de Legendre*, cas particulier de lien simple entre deux systèmes de variables [177] ([**Darboux 1876**, 209-211]).

Ecrit en six semaines, le mémoire produit par Gaston Darboux à l'occasion du Grand Prix sur les solutions singulières est extrêmement riche et tout aussi varié. L'étude des EDP renforce tout d'abord l'absence générale de l'enveloppe, dont Darboux prend bien soin de souligner que la théorie n'est pas applicable aux efforts de Cauchy, de Briot et de Bouquet, concentrés sur l'existence locale. Ainsi, il réaffirme qu'"*on a été conduit à donner à la théorie de Lagrange une extension et une portée qui n'étaient sans doute pas dans la pensée de ce grand géomètre*" ([**Darboux 1876**, 4]). Selon lui, ce sont surtout les travaux de Monge qui ont entériné l'emploi de l'enveloppe sans avoir égard aux prérequis de son existence.

De tous ses travaux, le mémoire de 1876 sur les solutions singulières est certainement celui où l'influence de Monge sur Darboux se révèle de la manière la plus nette. Le gardois présente une exposition profonde des liens analytiques et géométriques existant entre les surfaces intégrales et les caractéristiques. Les théories de Monge sont donc au premier plan. Pour Darboux, l'intégrale singulière se distingue en outre par la possibilité de mener en tout point une infinité de caractéristiques dans les directions de son plan tangent.

En déplaçant les équations qui définissaient autrefois les critères de recherche des solutions singulières pour les hisser au rang de définition, le protégé de Bertrand décale subtilement la visée de ses études. L'enquête n'est en effet plus centrée sur les conditions particulières d'échec de ces critères et les vérifications supplémentaires requises. En revanche, l'enjeu du travail de Darboux devient la description de ce qui donne à la solution singulière - et à son existence - toute sa singularité, du point de vue analytique comme au regard des propriétés géométriques. Tant vis-à-vis de l'analyse avec les développements en série que pour la géométrie des lieux de tangence des intégrales complètes, l'étude méticuleuse des contacts avec la solution singulière dévoile l'usage des méthodes algébriques comme étant des pivots essentiels. L'ordre des contacts, la classification des solutions -

177. Il s'agit en effet du cas où le lien $dZ - \sum P_i dX_i = \rho(dz - \sum p_i dx_i)$ n'est déterminé que par la fonction constante $\rho = -1$.

dont ressortira le rôle singulier de l'intégrale éponyme -, le développement des solutions selon les variables d'espace sont tous ramenés aux rangs des formes quadratiques centrales de la théorie des équations différentielles : celles définies par les hessiens de l'équation et de l'intégrale complète. Cette omniprésence dénote l'intrication forte entre les approches géométriques et analytiques, bien plus que ne le laisse supposer la dichotomie des titres des parties, une remarque que nous avions déjà effectuée vis-à-vis du mémoire sur les surfaces cyclides.

Darboux ne reprend que partiellement le formalisme que Lie développe dans le cadre de ses transformations de contact, un terme que le nîmois se garde d'employer : il semble en effet possible qu'une forme de compétition ait pu s'instaurer entre les deux amis au sujet des méthodes liées à cette théorie. Dans l'introduction du mémoire où il présente en détail cette théorie nouvelle, Lie note en effet :

> Après avoir publié mes premiers travaux sur les transformations de contact, M. Darboux m'a écrit spécialement pour me dire qu'il s'était également occupé de cette théorie. Je dois regretter ne pouvoir en tirer parti puisque rien n'a paru de ses recherches.
>
> [**Lie 1875**, 219]

Quoiqu'il en soit, les objectifs de Lie sont bien distincts de ceux de Darboux : le norvégien cherche à déterminer les relations qui existent entre les différentes solutions pour construire les procédés algébriques sur lesquels il fonde les méthodes d'intégration. Son but est *in fine* d'optimiser le nombre d'intégrations nécessaires à la résolution du problème de Pfaff par la "*seconde méthode*" de Jacobi. De ce qui transparaît du contenu de son mémoire, Darboux s'attache quant à lui à analyser les cas particuliers. S'il reprend le travail de Lie (et celui de Mayer) en certains points, c'est parce qu'il trouve "*un avantage à exposer cette théorie*" pour mieux mettre en évidence les caractères exceptionnels des solutions singulières. Nous verrons d'ailleurs dans la section suivante comment Darboux utilise cette théorie pour abattre la classification classique des intégrales (entre intégrales complètes et générales), ce qui participe de sa volonté de faire ressortir le statut exceptionnel de la solution singulière.

Soulignons pour terminer le nombre important de rapprochements que Darboux dévoile entre la théorie des solutions singulières et d'autres problèmes ou d'autres théories mathématiques. Certains sont assez inattendus, comme la réussite de la méthode d'intégration de Cauchy-Jacobi (que nous avons préservée pour la section 2.7) ou les théorèmes sur l'ordre des contacts des familles de courbes inspirés des recherches de Bouquet. D'autres peuvent paraître moins surprenants mais n'en sont pas moins dignes d'être soulignés : les méthodes de Cauchy-Kovalevskaya d'intégration locale, la classification des intégrales. Nous terminerons ainsi cette section en étudiant l'apport et les méthodes de Darboux dans le cadre de deux de ces rapprochements. Ceci confirmera les conclusions déjà envisagées ici, à savoir que le portrait de l'identité scientifique du gardois reste invariable dans ses méthodes, tandis que ses intérêts scientifiques se sont considérablement élargis. La rigueur analytique dont il témoigne reflète la tournure autocritique de son esprit, sa capacité à être insatisfait des résultats pourtant acquis.

2.7. L'élégance des rapprochements : l'objection Bertrand et la classification des solutions.

Parmi les différentes connexions que Darboux met au jour et exploite grâce à la théorie des solutions singulières, deux sont particulièrement pertinentes à analyser. Elles montrent en effet d'une part la personnalité scientifique du Darboux incapable de se satisfaire d'un "*fait de calcul*" (voir [Chap.2,7.3]), d'une démonstration qu'il juge incomplète ou dont les fondements doivent être réinterprétés. Elles permettront également d'inscrire les travaux du nîmois dans la dynamique des recherches de son temps dans le domaine des équations différentielles, après Bertrand et Jacobi, avec Lie et Mayer, avant Fröbenius et les élèves de Darboux : Picard, Vessiot et Cartan.

Nous commencerons par analyser "*l'objection Bertrand*", en lien avec la méthode d'intégration proposée par Jacobi en 1837 et connue sous le nom de "*première méthode de Jacobi*" ([**Demidov 1982**]). Nous verrons ensuite la classification des intégrales solutions, inspirée de la théorie de Lagrange mais où Darboux fait usage des transformations de contact dont il tait le nom.

La "*première méthode de Jacobi*" s'inscrit dans le cadre de la recherche de méthodes d'intégration susceptibles de réduire les (ou des) solutions d'équations aux dérivées partielles - du premier ordre - à celles d'un système d'équations différentielles ordinaires. Cette méthode a fait l'objet de plusieurs présentations, dont celle de [**Hawkins 1991**, 200-207]. Elle peut être vue comme une extension de la théorie des caractéristiques de Monge ([**Saltykov 1930**, 262]) dont elle exploite les équations [178]. Nous avons présenté plus haut (section 2.2) l'obtention par Monge de ces équations des caractéristiques.

Jacobi, inspiré par les travaux de Mécanique de William Hamilton, poursuit les idées de Pfaff en recherchant les changements de variables permettant de réduire l'expression des différentielles totales :

$$0 = \sum_{1}^{2n-1} B_i dA_i$$

Ces différentielles résultent en effet de l'intégration d'une équation $F(z, x_i, p_i) = 0$ au moyen de $2n$ relations, en considérant d'abord les p_i comme des variables indéterminées, puis en ajoutant la contrainte :

$$dz = \sum_{1}^{n} p_i dx_i$$

En exploitant un changement de variables consistant à introduire comme système auxiliaire les valeurs x_i^0, p_i^0, Jacobi parvient à établir la relation très forte :

$$(\mathcal{J}) \quad dz - (\sum_{1}^{n} p_i dx_i) = M(\sum_{1}^{n} p_i^0 dx_i^0)$$

178. A propos de la théorie et des équations caractéristiques, voir [**Taton 1951**, Chap.7] qui étudie le travail de Monge. Taton conclut : "*par sa théorie des caractéristiques, l'introduction des courbes intégrales, des développables caractéristiques et des trajectoires caractéristiques, l'œuvre de Monge [...] est suffisante pour lui valoir une place de choix parmi les grands analystes de la fin du XVIIIème siècle*".

où il a posé : $M := e^{-\int_0^z \frac{dF}{dz}\frac{dz}{P}}$, $P := \sum_1^n p_i P_i$ ([**Jacobi 1838**, 171-6]). Cette relation est le résultat de l'intégration entre 0 et z des équations des caractéristiques que Pfaff (et Jacobi après lui) écrit sous la forme du système :

$$(S)\begin{cases} P\dfrac{dx_i}{dz} & = & P_i \\ -P\dfrac{dp_i}{dz} & = & X_i + p_i Z \end{cases}$$

La conclusion de Jacobi est alors la suivante : l'équation $dz = \sum_1^n p_i dx_i$ "*peut être transformée dans*" $\sum_1^n p_i^0 dx_i^0 = 0$. Il suffit alors de choisir pour x_i^0 des valeurs constantes pour satisfaire cette relation différentielle. Le système des équations (S) est alors bien un système d'équations ordinaires dont les solutions sont solutions de l'équation $F = 0$ ([**Jacobi 1838**, 176]).

Presque dans le même temps, Cauchy propose une méthode extrêmement similaire ([**Cauchy 1841**, 243-9]). Il astreint la définition de la "*fonction inconnue*" z au moyen de sa pleine détermination lorsque l'une des n variables est fixée : $z(x_n = \xi_n) := \xi = f(x_1, ..., x_{n-1})$. En évaluant la différentielle de cette relation, Cauchy remarque que les $2n$ équations obtenues ne comportent plus que des fonctions ne dépendant que d'une unique variable indépendante : elles peuvent "*être traitées comme des équations différentielles ordinaires*"[179]. L'égalité des rapports différentiels est résumée par Cauchy dans "*la formule algébrique*" :

$$(\mathcal{E}) \quad \frac{dx_i}{P_i} = \frac{dz}{\sum p_i P_i} = \frac{-dp_i}{X_i + p_i Z}$$

Cette formule donne aux équations caractéristiques une présentation concise. La conclusion de Cauchy est identique à celle de Jacobi, le Baron employant en lieu et place du facteur de proportionnalité M de l'allemand le suivant :

$$I = i \cdot e^{-\int \frac{Z}{P} dx}$$

Ces deux méthodes, dont l'analogie est très forte, seront ensuite souvent associées par les mathématiciens. Jacobi travaille néanmoins dans le cadre large des équations à n variables, et accorde à la réduction des formes différentielles une importance qu'on ne retrouve pas chez le français.

Durant l'année scolaire 1856-57, Joseph Bertrand revient sur ce sujet dans ses leçons de Physique Mathématique du Collège de France[180]. Il y expose en effet la méthode de Jacobi, et met l'accent sur "*une lacune que présente la méthode dont Jacobi se sert pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre*" ([**Bonnet 1857**]). La

179. Notons que Cauchy ne donne cette méthode que dans le cas de 3 variables en 1841. C'est [**Serret 1866**] qui en détaillera l'extension au cas de n variables, dans un mémoire dont nous tirons notre citation.

180. Bertrand supplée Jean-Baptiste Biot à cette chaire depuis 1848. Il en deviendra titulaire à la mort de Biot en 1862. Voir [**Darboux 1912**, 16].

lacune soulignée par Bertrand correspond au cas où dans la formule

$$dz - (\sum_1^n p_i dx_i) = M(\sum_1^n p_i^0 dx_i^0)$$

le facteur M devient infini. Dans ce cas, il attire l'attention sur le fait que "*le mode de démonstration cesse d'être admissible*" ([**Bertrand 1857**]). Cette remarque, dont Bertrand ne souligne pas (encore) l'importance ni éventuellement le moyen de contourner la difficulté, devient connue sous le nom d'*Objection Bertrand*.

C'est Pierre-Ossian Bonnet, camarade polytechnicien de Bertrand, qui va diffuser cette *objection* en-dehors des bancs du Collège de France. Dans la séance du 19 Octobre 1857, il présente à l'Académie des Sciences un mémoire qui a pour visée principale de lever l'objection Bertrand. Selon Bonnet, la lacune analytique ne porte pas atteinte au résultat de Jacobi, qu'il propose de démontrer par une voie purement géométrique :

> Jacobi conclut de l'équation $(\mathcal{J})$ et de ce que $dx_1^0, ..., dx_n^0$ sont nuls que $dz-(p_1dx_1+...+p_ndx_n)$ est aussi nul. Or cela n'est permis évidemment qu'après avoir fait voir que M ne peut pas devenir infini.
>
> Je vais donner, pour le cas de trois variables, une démonstration géométrique qui me paraît à l'abri de toute objection.
>
> [**Bonnet 1857**, 581]

Le raisonnement de Bonnet est bien plus délicat que les intéressantes définitions et remarques qui le précèdent. C'est en effet à cette occasion que Bonnet redéfinit après Monge le "*cône enveloppé*", que Darboux reprendra sous le nom de "*cône des tangentes*" (T). Il définit également les courbes caractéristiques de la même manière que le nîmois par les propriétés de leurs tangentes vis-à-vis de ce cône (T) [181]. La définition de Bonnet suppose toutefois d'emblée que les caractéristiques sont tracées sur une surface intégrale, ce dont Darboux s'affranchira. Enfin, il définit encore une catégorie de courbes, qu'il nomme les courbes c, "*parmi lesquelles se trouveront comprises les caractéristiques de toutes les surfaces intégrales*" ([**Bonnet 1857**, 582]) : elles correspondent, nous l'avons vu, à ce qui sera appelé - notamment par Darboux - les *courbes intégrales*. A l'aide de ces définitions, le mathématicien héraultais rappelle que "*toute surface S formée avec les courbes c n'est pas une surface intégrale*", et que par ailleurs "*le théorème de Jacobi consiste en ce que S est une surface intégrale lorsque les courbes c partent d'un même point*" ([**Bonnet 1857**, 583]).

La construction géométrique que Bonnet propose est la suivante : à partir des courbes (c_i), on considère les surfaces développables (Σ_i) formées par les plans tangents aux cônes (T). La preuve revient à montrer que la surface S est l'enveloppe de ces développables. Bonnet propose alors une construction polygonale fort compliquée liée aux normales des courbes (c_{p+1}) sur les surfaces (Σ_p), dont il entend retirer le fait que ces courbes sont "*à une distance infiniment petite du second ordre*" des surfaces développables (Σ_p). Ce résultat, obtenu en deux temps (d'abord l'évaluation de la variation des longueurs des normales, puis l'obtention d'un unique point de la courbe intégrale où la distance est du second ordre), démontre selon Bonnet que la surface S est bien l'enveloppe des développables (Σ_i), donc est bien une surface intégrale.

181. Pour plus de détails, on se reportera aux sections précédentes 2.2 et 2.6.

D'un point de vue strictement mathématique, le vice du raisonnement de Bonnet, difficile à apercevoir sans un certain nombre de lectures, est l'hypothèse implicitement admise qu'une courbe intégrale ne peut être située à une distance infiniment petite du second ordre de la surface développable consécutive sans y être complètement incluse. Il faudra attendre le mémoire de 1876 de Darboux, et l'étude précise des ordre des contacts des courbes intégrales, pour déterminer que cette hypothèse, bien que vérifiée *en général*, peut être prise en défaut. C'est justement le cas pour certains contacts avec l'intégrale singulière, ainsi que pour les *intégrales remarquables* à rebroussement non-apparent. Mais à notre connaissance, personne (et pas même Darboux) n'est revenu sur ce raisonnement géométrique de Bonnet. En 1866, son ami Serret écrira "*le travail de M. Bonnet ne jette aucune lumière sur la portée véritable de l'objection formulée par M. Bertrand, laquelle subsiste dans son entier*" ([**Serret 1866**, 162]).

Dans la séance de l'Académie de la semaine suivant la présentation du mémoire de Bonnet, Bertrand va revenir sur ce point. Il défend l'utilisation de la méthode de Jacobi, tout en affirmant paradoxalement que son *objection* possède en fait une portée très étendue.

> Cette méthode, je me hâte de le déclarer, est complètement exacte, et mon objection portait seulement sur le mode de démonstration, qui cesse d'être admissible lorsqu'une certaine quantité qui s'introduit dans les calculs devient infinie. Or cette circonstance ne se présente pas seulement dans quelques cas exceptionnels, et il est, au contraire, facile de s'assurer qu'elle a lieu dans le cas le plus général. [..] M. Cauchy a traité la même question et sa démonstration est soumise à une difficulté analogue.
>
> [**Bertrand 1857**, 617-8]

Bertrand rappelle l'objet de son *objection* : le cas $M = \infty$. Il montre ensuite comment le vice de la démonstration équivaut à la proposition *toute fonction f qui s'annule pour une valeur x_0 est identiquement nulle* : l'intégration de la dérivée logarithmique n'est en effet plus autorisée. Mais le polytechnicien se contente de ces énoncés, et il ne donne de preuve ni de l'exactitude de la méthode de Jacobi - en dépit de la lacune de sa preuve classique - ni du fait que cette lacune se présente selon lui dans *le cas général*.

En 1866, Joseph-Alfred Serret s'attaque à son tour à l'*objection Bertrand* dans son mémoire [**Serret 1866**]. Il la replace dans le cadre de la présentation de la méthode d'intégration de Cauchy. En y définissant la forme de $\varepsilon = f(x_1, ..., x_{n-1})$ qui définit z lorsque $x_n = \varepsilon_n$, Serret retrouve les équations caractéristiques $(\mathcal{E})$ et leur unique dépendance en ε_n. Il exprime alors les $2n$ variables $z, x_1, ..., x_{n-1}, p_1, ..., p_n$ comme des fonctions de x_n. La méthode mène donc aux intégrations ordinaires grâce au facteur de proportionnalité :

$$I = I_0 e^{-\int_{\varepsilon_n}^{x_n} \frac{Z}{P_n} dx_n}$$

Serret remarque alors :

> Toutefois la conclusion précédente n'est plus admissible, comme nous l'avons déjà dit, lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_{\varepsilon_n}^{x_n} \frac{Z}{P_n} dx_n$ cesse d'avoir une valeur finie et déterminée, et cette circonstance se présentera en général, si l'on attribue une forme déterminée convenable à la fonction $f(x_1, ..., x_{n-1})$ [...]

> Mais je dis que si l'intégrale cesse d'avoir une valeur définie et déterminée pour une certaine forme de la fonction $f(x_1, ..., x_{n-1})$, les formules [qui définissent $z, x_1, ..., x_{n-1}, p_1, ..., p_n$] deviennent illusoires et cessent de fournir la solution du problème proposé.
>
> [**Serret 1866**, 153]

Serret reconnaît donc bien l'échec de la méthode d'intégration de Jacobi : les formules deviennent "*illusoires*" dans le cas de l'objection Bertrand. Selon lui, la solution n'est alors plus donnée que par l'intégrale complète de Lagrange, ou par une intégrale subsidiaire qui en découle. Cependant, il n'étudie pas les circonstances dans lesquelles s'applique cette objection, et n'apporte pas de nouveau résultat positif permettant de contourner cette lacune analytique.

Dans la partie dédiée aux développements en série de son mémoire de 1876, Gaston Darboux revient assez longuement sur l'objection Bertrand. Il va en éclaircir les fondements en la reliant à la théorie des solutions singulières, mais aussi apporter certains outils analytiques permettant d'outrepasser la barrière qu'elle semblait présenter sur le chemin de l'intégration.

Darboux est le premier à remarquer que l'*objection Bertrand* s'applique précisément aux cas où la méthode de Jacobi rencontre l'intégrale singulière. Il réintroduit [182] "*une variable auxiliaire t dont l'emploi nous sera très utile*" pour présenter les équations caractéristiques ([**Darboux 1876**, 135]) :

$$(\mathcal{E}) \quad \frac{dx_i}{P_i} = \frac{dz}{\sum p_i P_i} = \frac{-dp_i}{X_i + p_i Z} = dt$$

La définition de la solution singulière correspond exactement à la nullité des dénominateurs de ces équations. Il remarque ainsi clairement que "*pour chacun de[s] éléments [de la solution singulière], les équations différentielles de la caractéristique doivent être complètement indéterminées*" ([**Darboux 1876**, 8]). Il reprend ensuite la méthode d'intégration de Cauchy-Jacobi sous la forme :

$$\begin{cases} dz - p_1 dx_1 - ... - p_n dx_n & = & (dz^0 - p_1^0 dx_1^0 - ... - p_n^0 dx_n^0) e^{-\int_0^t Z dt} \\ \dfrac{dx_i}{dt} & = & P_i \\ \dfrac{dp_i}{dt} & = & -X_i - p_i Z \end{cases}$$

Darboux aborde ensuite plus précisément "*l'objection de M. Bertrand, bien connue des géomètres ayant étudié cette théorie*" ([**Darboux 1876**, 145]). Il commence par discuter l'origine analytique de cette objection : la valeur infinie de l'intégrande Zdt. En supposant que Z lui-même soit bien défini, Darboux remarque que le problème disparaît en remplaçant dt par l'un des $2n$ rapports suivants, issus des équations caractéristiques : $\dfrac{dx_i}{P_i}$, $-\dfrac{dp_i}{X_i + p_i Z}$. Si l'un au moins de ces quotients ne devient pas infini, l'objection est levée en plaçant ce quotient comme intégrande. Ainsi Darboux met-il en évidence le fait que la circonstance de cette objection ne se produise que lorsque ces dénominateurs sont tous

182. Jacobi avait déjà proposé d'employer une variable auxiliaire dt ([**Jacobi 1838**, 167]). Mais ni Bertrand, ni Bonnet, ni Serret n'avaient donné suite à cette suggestion.

simultanément nuls. Or, cela correspond comme il le fait remarquer exactement à sa définition de l'intégrale singulière. L'objection Bertrand découle ainsi d'une intégration des équations caractéristiques à partir d'un élément appartenant à l'intégrale singulière.

Par ailleurs, le nîmois évalue la conséquence de cette configuration géométrique sur le résultat de l'intégration : grâce à l'introduction de la variable auxiliaire t, le système d'équations différentielles ordinaires subsiste en adoptant la forme particulière :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} & = & 0, \quad x_i = x_i^0 \\ \dfrac{dp_i}{dt} & = & 0, \quad p_i = p_i^0 \end{cases}$$

Ainsi, les intégrales "*n'auraient aucune utilité*" dans ce cas ([**Darboux 1876**, 145]). L'intégration des équations caractéristiques par la méthode classique est donc stationnaire dans le cas de l'objection Bertrand, c'est-à-dire à partir d'un élément de l'intégrale singulière.

Ce résultat obtenu par Darboux relie nettement le défaut présumé de la méthode de Jacobi à l'intégrale singulière. Pourtant ce résultat revêt une apparence paradoxale entre la méthode analytique et l'approche géométrique : Darboux a en effet caractérisé l'intégrale singulière par l'infinité de caractéristiques passant en chacun de ses points. Or il s'avère que l'intégration de leurs équations est justement en défaut dans ce cas précis.

En employant un simple - mais astucieux - changement de variables, le professeur de l'Ecole Normale montre néanmoins que ce paradoxe n'est qu'apparent. Il propose ainsi d'employer une variable auxiliaire logarithmique et non plus linéaire, ce qui revient à poser $\frac{du}{u}$ en lieu et place de dt ([**Darboux 1876**, 152]). L'emploi de cette nouvelle variable est fécond : elle autorise le développement des solutions en série de la variable u. Ceci permet donc d'aboutir à des intégrations qui ne sont plus "*illusoires*" comme le déplorait Serret. Mais d'autre part, Darboux retrouve analytiquement le résultat géométrique des positions des caractéristiques sur le plan tangent de l'intégrale singulière. Les directions des séries solutions dépendent en effet d'un paramètre $\frac{\alpha}{\beta}$, qui est libre de parcourir toutes les directions de ce plan tangent. Il termine enfin en étudiant "*un cas où l'objection de M. Bertrand prend toute son importance*" ([**Darboux 1876**, 157]) : l'association des caractéristiques le long d'une courbe tracée sur l'intégrale singulière. Dans ce cas, et en employant la même méthode analytique, Darboux montre que le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ devient entièrement déterminé. Il retrouve ainsi le résultat géométrique de l'existence d'une unique intégrale, non singulière, tangente à l'intégrale singulière tout au long d'une courbe.

Le rapprochement que Darboux effectue entre la méthode de Jacobi (l'objection Bertrand) et la théorie des solutions singulières donne ainsi un éclairage nouveau aux significations géométriques et analytiques des possibilités et des résultats de l'intégration des équations caractéristiques. Il transforme ainsi l'objection de son maître, qui paraissait devoir être un obstacle, en un atout. Guidé par la compréhension des configurations géométriques des courbes caractéristiques sur l'intégrale singulière, il adapte en conséquence les méthodes analytiques pour parvenir à lever complètement cette objection et dissiper l'ambiguïté autour des circonstances de celle-ci.

Pour terminer cette enquête, nous allons aborder les différentes classifications que Darboux effectue des types d'intégrales solution d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Dans la section précédente 2.6 nous avons déjà rencontré les deux classifications géométriques et analytiques données par le gardois. La première n'a été évoquée que rapidement, tandis que la deuxième, basée tantôt sur le nombre de variables d'espace des développements en série, tantôt sur le nombre de relations définissant les lieux communs avec l'intégrale singulière, a été plus amplement détaillée. C'est donc sur la première que nous allons nous pencher un peu plus en profondeur ici. Darboux fait à cette occasion explicitement référence aux travaux de Lie et Mayer, par lesquels nous entamerons notre analyse.

FIGURE 22. Sophus Lie (à gauche) et Adolph Mayer (à droite)

Au début des années 1870, Sophus Lie et Adolph Mayer enseignent tous deux à l'Université de Leipzig. Lie, mathématicien norvégien né en 1842, a effectué une partie de ses études dans les universités allemandes où il a notamment lié une grande amitié avec Felix Klein. Son passage à Paris à l'été 1870 lui a également fait faire la connaissance de Gaston Darboux, avec qui il correspond régulièrement, et de Camille Jordan. C'est lors de ce séjour que le natif de Nordfjordeid commence à s'intéresser très fortement aux liens existant entre les groupes et la géométrie des solutions des équations différentielles. "*Dès 1870, [Lie] était en possession des idées directrices de toute sa carrière*" ([**Darboux 1904**, 29]), c'est-à-dire de son "*idée fixe*" d'une approche géométrique des équations différentielles, pour prolonger la seconde méthode de Jacobi. Il développe ainsi la notion de "*transformation de contact*", dont l'emploi dans les cas homogènes et infinitésimaux lui permettront de renouveler et d'étendre de nombreuses méthodes d'intégration ([**Hawkins 1991**, 226-228])[183].

Natif de Leipzig et de trois ans l'aîné de Lie, Adolph Mayer a étudié dans les universités de Heidelberg et de Göttingen. Après son doctorat, il part pour Königsberg entre 1862 et 1865 avant de revenir à Leipzig où il enseignera toute sa vie. Au début des années 1870, les

183. A propos de la vie de Sophus Lie - plus éloignée de l'œuvre -, voir [**Stubhaug 2006**].

recherches de Mayer et de Lie sont très proches, et les deux mathématiciens publient des mémoires qui se répondent et se complètent les uns les autres ([**Mayer 1872**], [**Lie 1875**] puis [**Mayer 1875**]).

[**Lie 1875**] est le mémoire important publié par Sophus Lie où figure une première présentation de la théorie des transformations de contact. L'objectif de Lie est clair : "*améliorer la [seconde] méthode d'intégration de Jacobi pour les équations différentielles du premier ordre, ainsi que le traitement donné par Clebsch du problème de Pfaff*" ([**Lie 1875**, 216]). Il relie ainsi la réussite de son travail à "*la réduction du nombre d'intégrations*" de ces méthodes.

Lie définit la notion de *transformation de contact* entièrement à partir de la relation ($\mathcal{J}$) donnée par Jacobi. En lien avec le futur mémoire de Darboux, ce qui est intéressant de souligner est la manière d'obtenir (*erhalten*) une telle transformation selon Lie. Ceci fait l'objet de son tout premier théorème ([**Lie 1875**, 223]).

> Une transformation de contact peut être obtenue de la manière suivante. On prend $q+1$ égalités entre les variables $z, x_1, ..., x_n$, $z', x'_1, ..., x'_n$:
>
> $$\Pi_0 = 0,\ \Pi_1 = 0, ..., \Pi_q = 0$$
>
> et on pose :
>
> $$-p_i = \frac{\Pi_0 + \lambda_1\Pi_1 + ... + \lambda_q\Pi_q}{dx_i} : \frac{\Pi_0 + \lambda_1\Pi_1 + ... + \lambda_q\Pi_q}{dz}$$
>
> $$-p'_i = \frac{\Pi_0 + \lambda_1\Pi_1 + ... + \lambda_q\Pi_q}{dx_i} : \frac{\Pi_0 + \lambda_1\Pi_1 + ... + \lambda_q\Pi_q}{dz'}$$
>
> On élimine $\lambda_1, ..., \lambda_q$ entre les $2n+q+1$ équations, alors les $2n+1$ relations restantes définissent une transformation de contact entre les variables $z, x_1, ..., x_n$ et $z', x'_1, ..., x'_n$.
>
> [**Lie 1875**, 223]

Lie va ensuite s'intéresser à certains cas particuliers de transformations, établissant un lien spécifique entre les variables z et z'. Ces transformations seront le fondement de la notion de *transformation homogène* sur laquelle le mathématicien norvégien basera sa présentation du problème de Pfaff, en reprenant les systèmes complets d'Alfred Clebsch ([**Lie 1875**, 227-238]). Pour plus de détails sur ce travail, le lecteur pourra se reporter sur [**Hawkins 1991**] et [**Hawkins 1994**].

Darboux, nous l'avons dit, n'emploiera jamais le terme de transformation de contact. Pourtant, il fait explicitement et à plusieurs reprises référence aux travaux des professeurs de Leipzig. Surtout, ses définitions des "*éléments solutions*" et des "*classes d'intégrales*" en reprennent exactement les mêmes éléments et les mêmes notations. Darboux considère en effet la formation d'une équation aux dérivées partielles grâce à la donnée d'un système de h relations entre les variables d'espace z, x_i et n constantes a_i :

$$f_k(z, x_i, a_i) = 0, \quad k = 1, .., h$$

Il détermine ensuite les dérivées partielles de z en différentiant la somme $\Pi = \sum_1^h \lambda_k f_k$:

$$\frac{d\Pi}{dx_i} = (\sum_{k=1}^{h} \lambda_k \frac{df_k}{dz})p_i + (\sum_{k=1}^{h} \lambda_k \frac{df_k}{dx_i})$$

C'est enfin par l'élimination des constantes a_i et des multiplicateurs λ_k que Darboux obtient l'équation différentielle $F(z, x_i, p_i) = 0$ ([**Darboux 1876**, 93]). Pour établir un premier classement des intégrales de cette équation, Darboux procède de la même manière que Lagrange. Il interprète désormais les coefficients a_i et λ_k comme des inconnues à déterminer à partir des équations qui ont servi à l'obtention de l'équation différentielle. En opérant les mêmes combinaisons, le mathématicien nîmois aboutit à l'équation :

$$(\mathcal{C}) \quad : \quad (\sum_{k=1}^{h} \lambda_k \frac{df_k}{da_1})da_1 + ... + (\sum_{k=1}^{h} \lambda_k \frac{df_k}{da_n})da_n = 0$$

De la résolution de cette équation découlent alors les classes d'intégrales données par Darboux : les intégrales complètes correspondent aux solutions de l'équation de condition $(\mathcal{C})$ établies à partir de n relations entre les a_i, qui deviennent ainsi des constantes arbitraires. Au contraire, "*la solution singulière sera celle pour laquelle les coefficients de* $da_1, ..., da_n$ *seront nuls. Il y aura aussi des intégrales générales obtenues en établissant entre* $a_1, ..., a_n$ *une ou plusieurs relations*" ([**Darboux 1876**, 93]).

Il existe ainsi selon la première classification de Darboux $n+1$ classes d'intégrales, différenciées selon le nombre de relations qui lient entre elles les arbitraires a_i. Mais il va montrer que les distinctions entre les différents types d'intégrales générales ne sont qu'apparentes, tandis que l'intégrale singulière définit quant à elle véritablement une classe à part. En effet, "*ces [premières] distinctions sont inexactes, les intégrales que nous avons appelées générales et complètes appartiennent à un groupe unique, et leur différence apparente ne provient que du choix de l'intégrale qui sert de point de départ*" ([**Darboux 1876**, 102]). Darboux se penche alors sur l'incidence du passage d'une intégrale complète à l'autre.

Il montre que le passage d'une intégrale complète caractérisée par les arbitraires a_i, b_k, à une seconde définie par α_i, β_k revient à la résolution de la formule qui définit pour Lie une transformation de contact :

$$da - \sum \beta_i d\alpha_i = \sigma(da - b_i da_i)$$

En considérant le cas le plus simple, Darboux retrouve le résultat de Lie, à savoir la résolution de l'équation précédente en établissant un certain nombre $h-1$ de relations entre les arbitraires a_i et α_i :

$$\alpha_k = f_k(\alpha_h, ..., \alpha_n, a_1, ..., a_n) \quad k = 1...h-1$$

La différentiation de ces relations lui permet alors de rassembler les formules permettant de passer de la première intégrale complète à la seconde. Ces $2n-h+1$ relations expriment les paramètres $b_1, ..., b_n, \beta_h, ..., \beta_n$ en fonction des $\beta_1, ..., \beta_{h-1}$ et des dérivées partielles des fonctions f_k. Darboux souligne deux remarques au sujet de ce système : il est indépendant de l'intégrale complète de départ, mais surtout il transforme des intégrales complètes en des intégrales générales.

> Les anciennes intégrales complètes, celles qu'on obtiendrait en laissant $a_1, ..., a_n$ constantes, nous donneront pour $\alpha_1, ...\alpha_n$ des fonctions de ces constantes et de $n-1$ variables à éliminer [...] il y aura donc, en général, une seule relation entre les $\alpha_1, ..., \alpha_n$ et l'on reconnaîtra aisément que cette conclusion s'applique aux différentes classes d'intégrales générales. Il n'en est plus de même pour l'intégrale singulière.
>
> [**Darboux 1876**, 105]

Le changement d'intégrale complète de référence bouleverse ainsi le nombre de relations établies dans les solutions entre les arbitraires, ce dont Darboux déduit qu'il ne doit pas exister de distinction entre les intégrales complètes et générales. Mais en étudiant l'impact du changement sur l'intégrale singulière provoqué par cette transformation de contact qui ne porte pas son nom, il détermine que cette intégrale constitue une classe à part, invariante par changement d'intégrale complète. La nullité de tous les b_i implique en effet immédiatement celle de tous les β_i. Ceci achève dans la partie géométrique du travail de Darboux de distinguer la solution singulière comme une classe à part de solution, dont l'invariance par changement d'intégrale complète contraste avec le comportement de tous les autres types d'intégrales. Ces-derniers ne forment de fait plus qu'une seule et même classe.

Nous devons encore souligner la différence profonde qui existe entre les objectifs des travaux de Lie et de Darboux. La visée de l'enquête de Lie est avant tout l'optimisation des méthodes existantes d'intégration des équations aux dérivées partielles. Il va pour cela développer des outils algébriques qui se révéleront d'une portée remarquable. Darboux utilise les mêmes objets mathématiques fondamentaux que le professeur de Leipzig : les transformations entre les différentes intégrales solutions des EDP. Pourtant, ses objectifs sont tout autres : il s'agit pour lui de faire éclater la singularité de l'intégrale singulière. Les philosophies des recherches de Darboux et de Lie sont ainsi bien distinctes : le norvégien classe pour résoudre le cas général, tandis que le français classe pour singulariser le cas particulier.

2.8. Quelques conclusions quant à la théorie des solutions singulières.

Développée à l'origine par Lagrange qui la bâtit sur sa théorie des intégrales complètes, la théorie des solutions singulières des équations différentielles représente un cas d'étude particulièrement approprié pour retracer les modifications subies par l'analyse entre la fin du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle et le XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Dans notre étude, ces modifications répondent de manière très proche à la description du "*changement scientifique*" présentée par [**Barberousse et al. 2011**, 172-182] sur un modèle donné par Thomas Kuhn. Les périodes de "*crises*" sont reflétées par les études des mathématiciens Augustus De Morgan et George Boole, qui fracturent progressivement les résultats lagrangiens sans toutefois proposer "*une reconsidération complète du matériel théorique*". L'apport fondamental de Darboux peut alors être interprété comme la "*révolution*" de cette théorie. Les "*nouveaux efforts théoriques*" de Darboux "*présentent une nouvelle manière de regarder les choses*" : ils permettent "*le passage d'un paradigme à un autre*" ([**Barberousse et al. 2011**, 180]). Ce nouveau paradigme correspond à l'abandon total de la notion d'intégrale complète pour pouvoir établir des énoncés *généraux*. Les théories de Lagrange sont ainsi replacées dans un cadre nouveau qui leur confère le statut d'exception. Henri Poincaré témoignera du renversement provoqué par Darboux des statuts de *cas particulier* et de *cas général* dans le domaine des solutions singulières :

> On a pensé longtemps que toutes les équations différentielles avaient des solutions singulières : on avait cru l'établir par un raisonnement spécieux, mais un peu sommaire. Vous avez montré combien on se trompait ; ce qu'on croyait la règle n'était que l'exception, ce qu'on croyait l'exception était la règle. C'est là une sorte d'aventure à laquelle les mathématiciens seraient souvent exposés, si la sagacité des maîtres ne les avertissait du piège.
>
> Allocution d'Henri Poincaré du 21 Janvier 1912 pour le Jubilé Scientifique de Gaston Darboux, [**Darboux 1912**, 452]

Stimulée par la lecture des travaux d'Imchenetsky à partir de 1870, la production de Darboux dans le domaine des solutions singulières des équations différentielles témoigne également de sa volonté de créer un travail "*définitif*", qui doit présenter clairement et fixer l'état de la théorie. Son mémoire de 1876 participe par ailleurs, comme c'était le cas pour le mémoire sur les cyclides, d'une volonté d'inscrire la théorie des solutions singulières au cœur de plusieurs champs de recherche avec lesquels il établit des connexions.

Les approches de Darboux que nous avons mises en évidence au cours de cette section sont révélatrices de son aptitude à douter en permanence. Nous avons déjà étudié à plusieurs reprises comment le mathématicien nîmois remettait toujours en cause le fruit de sa propre réflexion, ce qui l'amenait à établir de nouvelles connexions, à relier entre elles des théories *a priori* bien distinctes. Ici, c'est l'héritage présumé acquis des théories de Lagrange que Darboux parvient à remettre en cause jusque dans ses fondations profondes. En ceci, on retrouve une caractéristique identitaire du Darboux scientifique que nous avions mise en évidence dans notre étude du théorème des bornes (voir 1.7). C'était alors l'héritage de "*l'activité mathématique passée*" [184] liée à l'atteinte par une fonction de ses valeurs extrêmes que Darboux était parvenu à remettre en cause. Dans le cadre de la théorie des solutions singulières, c'est l'héritage inconscient de l'existence systématique de l'intégrale complète que le gardois révèle, puis détache pour mieux s'en affranchir.

Au-delà de l'examen attentif des fondements de la théorie des enveloppes, les travaux principaux de Darboux - et tout particulièrement le mémoire primé de 1876 - soulignent encore la force que représente l'usage alterné et complémentaire des méthodes géométriques et analytiques. L'ouverture de ses intérêts scientifiques l'amène à y employer certaines méthodes développées en Allemagne par Lie et Mayer, sans pour autant poursuivre des recherches dans les mêmes voies. Comme nous le signalerons un peu plus loin, ceci doit être nuancé par le fait que quelques semaines après l'écriture du mémoire, Darboux travaillera sur le problème de Pfaff comme le faisait alors Lie. Les approches géométriques du rédacteur du Bulletin sont mêlées à l'usage analytique de la théorie des séries qu'il avait cultivée à distance avec l'école de Weierstrass (voir [Chap.6,3.2]).

Cette enquête nous a permis de rappeler une fois encore la formidable proximité existant dans les productions scientifiques de Gaston Darboux et d'Arthur Cayley dans les années

184. Voir [**Gispert 1990**, 191-2] qui avait parfaitement ciblé cette caractéristique du travail de Darboux en lien avec la notion de continuité des fonctions.

1860-1870. Il est vrai que ces deux mathématiciens ont été très prolifiques : Darboux a publié environ 450 écrits au cours de sa carrière, Cayley presque le double [185]. Mais même si l'on pouvait s'attendre à rencontrer des recoupements, la rencontre de leurs productions respectives se fait sur des domaines très variés (courbes cycliques, surfaces cyclides, théorie projective des foyers, équation différentielle des systèmes triples orthogonaux, solutions singulières) et avec une simultanéité chronologique exceptionnelle.

Cependant, à partir de 1880 on ne retrouvera plus dans les productions des deux mathématiciens le même enchevêtrement. Celui-ci était en outre d'autant plus remarquable que les représentations traditionnelles associées à ces deux grands mathématiciens sont bien distinctes : Cayley est le plus souvent associé à ses contributions algébriques, pour la théorie des invariants ou l'algèbre matricielle. Darboux quant à lui est vu comme le maître de la géométrie différentielle de la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle [186].

3. Des réceptions contrastées

Les études menées au Chapitre 4 ont montré la qualité de la réception des travaux de Géométrie effectués par Darboux entre 1864 et 1873. Il a ainsi été mis en évidence combien ces travaux avaient reçu une excellente réception tant en France qu'à l'étranger. Jouissant d'une diffusion de qualité, ils s'inscrivaient dans des courants de recherche dynamiques et étaient appréciés dès leur publication par ses pairs français ainsi que par les géomètres européens.

Nous allons à présent analyser rapidement le contraste qui existe entre ces premières réceptions et la réception des travaux de Darboux menés dans les domaines de l'analyse et des équations différentielles entre 1870 et 1877. Nous commencerons par nous concentrer sur le premier de ces domaines (section 3.1) pour lequel notre travail de la partie 1 suffit à rendre compte de la production scientifique de Darboux dans son ensemble [187]. Ce ne sera en revanche pas le cas dans le cadre des équations différentielles (section 3.2) où l'enquête de la réception sera élargie à des travaux de Darboux qui échappaient au scope de notre travail sur les solutions singulières de la partie précédente (2). L'appréhension de ces réceptions contrastées nous permettra d'évaluer pertinemment le second tournant que prend le parcours de Darboux à la fin des années 1870 et au début des années 1880 (section 3.3). L'année 1864 marquait, nous l'avons vu, la naissance du géomètre Darboux. A ce titre, 1878 peut correspondre à la *renaissance* d'un Gaston Darboux qui n'est alors, de fait, plus le même géomètre.

185. Voir [**Lebon 1910**] qui dénombre 419 papiers en s'arrêtant à l'année 1909. En ce qui concerne Cayley, ses *Collected Mathematical Papers* comptent plus de 800 productions.

186. Voir [**Crilly 2006**] pour Cayley, quant à Darboux, nous citerons en particulier l'expression d'Hélène Gispert : "*la géométrie infinitésimale française « à la Darboux »*", qui précède cette remarque forte : "*La géométrie en France est l'empire d'un seul homme : Darboux*" ([**Gispert 1991**, 17], l'étude étant concentrée sur la période 1870-1914).

187. Cela ne signifie évidemment pas que nous ayons analysé de manière représentative le contenu de cette production. Ceci d'ailleurs ne correspondrait pas à la méthodologie que nous nous sommes proposée.

3.1. Les fondements de l'analyse : entre rejet des pairs et influence ultérieure des élèves.

La réception du travail que Darboux effectue entre 1872 et 1875 sur les fondements de l'analyse (et qui se cantonne aux mémoires [**Darboux 1872a**] et [**Darboux 1875b**]) a été évoquée dans [**Gispert 1983**] et [**Henry Nabonnand 2016**, 79-99]. Elle a par ailleurs été étudiée dans [**Gispert 1990**] et [**Gispert 1996b**]. En reprenant ces analyses, nous y apporterons quelques compléments ainsi qu'une idée de l'impact à long terme des réceptions de ses mémoires sur Darboux.

Nous avons mentionné dans la partie 1.5 l'opposition présentée par Jules Hoüel en 1872 envers les méthodes que Darboux utilise dans "*ce diable d'article qui [l']horripile*" [188]. Ceci constituera un prélude à la divergence constante des idées du nîmois et du bordelais sur les fondements de l'analyse. En dépit de leurs nombreux échanges épistolaires, et de toutes les tentatives effectuées par Darboux pour tenter de persuader son collaborateur de la nécessité de réévaluer certaines démonstrations de son *Cours de Calcul Différentiel*, Hoüel ne sera jamais convaincu. [**Henry Nabonnand 2016**, 91-99] détaille la "*première querelle*" entre les deux amis relative à la démonstration du théorème des accroissements finis. Hoüel, qui "*a la tête dure*", ne concédera pas le manque de rigueur de la démonstration qu'il développe dans ses leçons, et finalement "*pour Darboux, l'espoir de convaincre Hoüel succède aux regrets*" [189].

Hélène Gispert a analysé d'un point de vue plus général le "*débat dur et passionné sur les principes de l'analyse*" qui a lieu entre les deux rédacteurs principaux du Bulletin des Sciences. Son enquête a établi que :

> Hoüel attribue en fait les premières réserves de Darboux à une différence de point de vue sur le niveau des exigences requises dans la présentation d'un traité élémentaire de calcul différentiel, et non à des positions différentes sur des points fondamentaux des mathématiques.
>
> [...] Hoüel reste enfermé dans le cadre de l'étude de fonctions définies par une même loi sur tout intervalle fermé, cadre dans lequel le concept de fonction continue coïncide pratiquement avec celui de fonction uniformément continue.
>
> [**Gispert 1990**, 195-6]

Il existe donc un décalage fondamental entre Darboux et Hoüel quant au degré d'exigence des propositions de l'analyse mathématique. En exhibant des contre-exemples qui mettent en défaut les démonstrations de son collaborateur, Darboux pense - au moins dans un premier temps - lui démontrer ainsi la fausseté de celles-ci, la nécessité de les réexaminer plus rigoureusement. Mais Hoüel lui répond : "*Ne cherchez pas à m'indiquer des fonctions mettant en défaut mes énoncés ; mais plutôt montrez-moi à quelles conditions ils sont vrais [...] Jusqu'à quel point, en formulant suffisamment mes restrictions, puis-je conserver les énoncés et les démonstrations actuels, qui ne sont pas entièrement faux*" [190].

188. Lettre datée du 7 Septembre 1872, [**Archives épistolaires Darboux**].
189. Voir [**Henry Nabonnand 2016**, 97].
190. Lettre de Jules Hoüel à Gaston Darboux, reproduite dans [**Gispert 1990**, 201].

En étant réduit à ne pouvoir que constater "*la divergence de nos idées*" [191], Darboux refusera de collaborer avec son ami bordelais à la réimpression du cours de calcul différentiel de ce-dernier. Tout au long de ce dialogue de sourd entre deux mathématiciens du début des années 1870 au sujet des fondements de l'analyse, on se rend compte de manière révélatrice que Darboux et Hoüel ne parlent plus la même science.

Le décalage des idées qui existe entre Darboux et Hoüel préfigure parfaitement la piètre réception que recevra en France en 1875 le mémoire du premier sur les fonctions discontinues ([**Darboux 1875b**]). Pour commencer, le nîmois est contrarié par les délais de son impression. Le jugeant "*trop gros*" pour être inséré dans le Bulletin, il remet son mémoire en Janvier 1874 à Henri Sainte-Claire Deville qui dirige alors les *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale*. Il écrit alors : "*pourvu qu'il ne me fasse pas attendre trop longtemps*" [192]. Son vœu sera loin d'être exaucé puisqu'en Octobre il se plaindra auprès de Hoüel d'avoir dû intervenir pour accélérer les choses :

> Un mémoire sur l'existence de la dérivée que j'ai donné il y a neuf mois à l'École normale et qu'on aurait imprimé dans dix ans si je ne m'étais un peu fâché est en train de s'imprimer.
>
> Lettre datée du 22 Octobre 1874 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Le mémoire paraîtra pour finir au début du Printemps 1875. Il connaîtra un rejet de la part des pairs de Darboux qui l'avaient jusqu'alors immanquablement soutenu. En effet, "*Darboux fut unanimement blâmé de s'occuper de fonctions trop bizarres*" ([**Gispert 1990**, 216]). Emile Picard et Henri Lebesgue témoigneront de ce rejet :

> Darboux racontait plus tard que ce Mémoire [[**Darboux 1875b**]] avait été froidement accueilli par plusieurs de ceux qui habituellement s'intéressaient à ses travaux. Ils l'avaient dissuadé de labourer plus longtemps le champ stérile des fonctions qui n'ont pas de dérivées.
>
> [**Picard 1917**, xix]

> Darboux avait consacré son Mémoire de 1875 à l'intégration et aux fonctions sans dérivée [... il] fut quelque peu blâmé de s'être laissé aller à étudier de pareilles questions.
>
> [**Lebesgue 1922**, 14]

Très tôt, Darboux est influencé par la position de ses pairs et de ses maîtres qui le tancent d'abandonner ces recherches qu'ils jugent inutiles. Dès l'année suivante, il ne semble en effet plus accorder la même importances aux *fonctions saugrenues* pourtant prépondérantes dans son mémoire. Il tempère ainsi sa position dans le débat qui l'oppose à Hoüel :

> Je crois que vous pouvez fort bien avec des définitions convenables écarter les fonctions singulières. Sans cela, rien ne serait possible. Il y en a, de ces fonctions, qui sont si bizarres, qu'elles mettraient le bon Dieu lui-même en défaut.

191. Lettre datée du 9 Septembre 1873 de Darboux à Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].
192. Lettre datée du 19 Janvier 1874 de Darboux à Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

Lettre datée du 26 Février 1876 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Il est vrai que Darboux souhaite également ne pas entraver le projet entretenu par Hoüel de publication de son cours. Mais cette remarque symbolise le changement de son état d'esprit : le nîmois considère désormais que la poursuite de ses recherches dans le domaine de la théorie des fonctions pourrait lui être nuisible. C'est ce dont atteste l'histoire de la réclamation de priorité de Karl Weierstraß. Le 18 Juillet 1872, le maître de Berlin avait donné, dans l'intimité de l'Académie des Sciences de Berlin, le premier exemple d'une fonction continue non-dérivable [193]. Darboux le sait, qui évoquait dès 1873 à Hoüel le fait que "*Weierstrass a[it] lu un article sur les fonctions qui n'ont pas de dérivée*" [194]. Il ignore cependant l'exemple développé par le professeur de Berlin ([**Darboux 1884**, 29]), et s'attache dans son mémoire - qu'il écrit durant l'année 1873 - à donner lui aussi une fonction de ce genre. Il montre ainsi que la fonction

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin\left((n+1)!x\right)}{n!}$$

est une fonction continue et nulle part dérivable ([**Darboux 1875b**, 107]) [195]. Or dans le même temps à Berlin, Weierstrass a autorisé son ami Paul du Bois-Reymond à publier son exemple et la démonstration simple de sa non dérivabilité ([**du Bois-Reymond 1875**]).

Lorsqu'il prend connaissance du travail de Gaston Darboux, Weierstrass est embarrassé. Il vient en effet, comme nous le verrons dans la section 3.2, de lui écrire quelques semaines plus tôt là aussi pour une réclamation de priorité. Aussi demande-t-il à du Bois-Reymond de s'en charger :

> Mon très cher collègue ! [...]
>
> A cette occasion, j'aimerais vous demander d'envoyer un exemplaire de votre travail ([**du Bois-Reymond 1875**]) où se trouve ma notice sur la fonction non-dérivable à Monsieur Darboux (Paris, rue Monge 29). Darboux vient en effet de publier un article sur les fonctions sans coefficient différentiel où il remarque très justement que par exemple la fonction donnée par Schwarz n'est pas à vrai dire un cas valable, puisqu'elle admet tout de même un quotient différentiel en une infinité de points, et remarque - encore très justement - que la série $\sum c_n \sin(n!x)$ où $\sum c_n$ converge mais $\sum n!c_n$ diverge constitue une fonction nulle part dérivable. Il me paraît quand même nécessaire de lui faire remarquer que vous aviez déjà détaillé très précisément cette opinion, et que cela fait

193. La non-dérivabilité est ici à comprendre au sens où la fonction n'admet de dérivée en aucun point. Pour plus de détails sur la fonction de Weierstrass, les polémiques que nous avons évoquées en [Chap.6,3.2] que ce sujet suscite au début des années 1870 et le rôle de Darboux, voir [**Henry Nabonnand 2016**, 53-91].

194. Lettre non datée (Février 1873) de Darboux à Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

195. La démonstration donnée par Darboux est tellement courte qu'elle est compliquée à bien comprendre. Le nîmois s'en rendra compte, probablement en tentant de l'enseigner, et proposera en 1879 d'y revenir en remarquant : "*le raisonnement que j'ai employé dans ce dernier exemple a été si abrégé, qu'il est très difficile à saisir. Je me propose donc de le reprendre ici*" ([**Darboux 1879**, 195]). Certes légèrement plus détaillée, sa seconde preuve traite un cas plus général et en cela n'est - à nos yeux - pas vraiment plus accessible.

> longtemps que j'ai démontré l'existence d'une fonction qui n'est véritablement nulle part dérivable. Vous n'avez pas besoin de lui écrire, si cela ne vous sied pas, mais alors soulignez juste [dans votre mémoire] l'endroit où cela apparaît. Je préfère ne pas lui écrire moi-même, puisque j'ai déjà été il y a peu en situation de le solliciter pour revendiquer la priorité pour mon élève [*meine Schülerin* (Sofia Kovalevskaya)] concernant les théorèmes qu'elle a développés dans sa thèse et que Darboux - de manière moins forte et moins générale - a publiés dans les *Comptes-rendus* du début de l'année.
>
> Lettre datée du 6 Juin 1875 de Karl Weierstrass à Paul du Bois-Reymond [196]

Paul du Bois-Reymond s'exécute rapidement. C'est dans la réponse que Darboux lui écrit quelques jours plus tard que se trouvent les premiers signes du changement d'attitude du nîmois :

> Permettez-moi une remarque purement scientifique qui m'est inspirée par un passage de votre lettre et aussi de votre Mémoire. Vous paraissez attacher une grande importance aux fonctions qui n'ont jamais de dérivée. <u>Pour moi, qui suis placé dans un milieu où le genre d'études dont nous nous occupons est très contesté et ne peut même que faire du tort à ceux qui s'en occupent</u> [197], il me semble que le pas le plus considérable a été fait quand on a trouvé des fonctions continues qui n'ont pas de dérivée pour une infinité de valeurs de la variable [...]
>
> Selon moi, quand on s'occupe de raisonnements qui roulent sur des pointes d'aiguilles, on doit avant tout s'attacher à la rigueur. D'abord parce qu'elle est très difficile à obtenir, et ensuite parce que des erreurs de raisonnement éloigneraient pour longtemps le grand courant des géomètres de ce genre de considérations.
>
> Lettre datée du 13 Juin 1875 de Gaston Darboux à Paul du Bois-Reymond, conservée (à tort) dans [**Archives épistolaires Weierstraß**]

Il semble ainsi déjà devenu clair pour Darboux que, quelques semaines après la parution de son travail, la poursuite de ce genre de recherches pourrait lui "*faire du tort*". Ayant alors le sentiment d'aller à contre-courant, risquant de perdre l'estime et le soutien des académiciens, des mathématiciens français influents, Darboux se détourne subitement du champ de la théorie des fonctions. Il n'y aura finalement versé que durant bien peu d'années, et jamais plus il "*ne fit d'autre incursion dans le domaine des fonctions non analytiques*" ([**Lebesgue 1922**, 14]).

Comme l'explique joliment Hélène Gispert, "*la censure du milieu fonctionne, et cette incursion malencontreuse dans un champ totalement étranger aux préoccupations du milieu mathématique français d'alors est « effacée » du paysage*" ([**Gispert 1996b**, 404]). Cette *censure* fonctionne à double titre : d'une part, Darboux "*abandonne le champ stérile*" de la théorie des fonctions réelles. Mais d'autre part, comme le note [**Henry Nabonnand 2016**,

196. Cette lettre est reproduite dans le numéro spécial des *Acta Mathematica* (Vol. 39, 1923) spécialement consacré par Mittag-Leffler à feu son maître Weierstrass, pp.209-212.

197. Nous plaçons une emphase qui n'existe pas dans la lettre originelle.

91], le travail du professeur de la rue d'Ulm ne suscite en France aucune publication ultérieure. Il faudra attendre le traité de 1886 de Tannery pour que ce domaine y soit ressuscité. Pourtant en Allemagne comme en Italie, le mémoire d'analyse de Darboux ne passera pas inaperçu. Schwarz lui témoignera son appréciation envers son travail, puis - nous l'avons vu en 1.6 - celui-ci servira de référence aux ouvrages de Dini et de Tannery lui-même. Darboux est, en 1875, victime des carcans du milieu mathématique français dont la "*fonction normative des traditions de recherche*" en entretient les carences [198].

Au-delà du simple détournement de Darboux de la théorie des fonctions, le gardois va véritablement en venir à rejeter à son tour les travaux effectués dans ce domaine, comme une décompensation après son propre échec. C'est sur le long terme que cette réaction de rejet se manifeste, avec l'éveil au tournant du vingtième siècle de la génération dorée des analystes français incarnée par Emile Borel, René Baire et Henri Lebesgue.

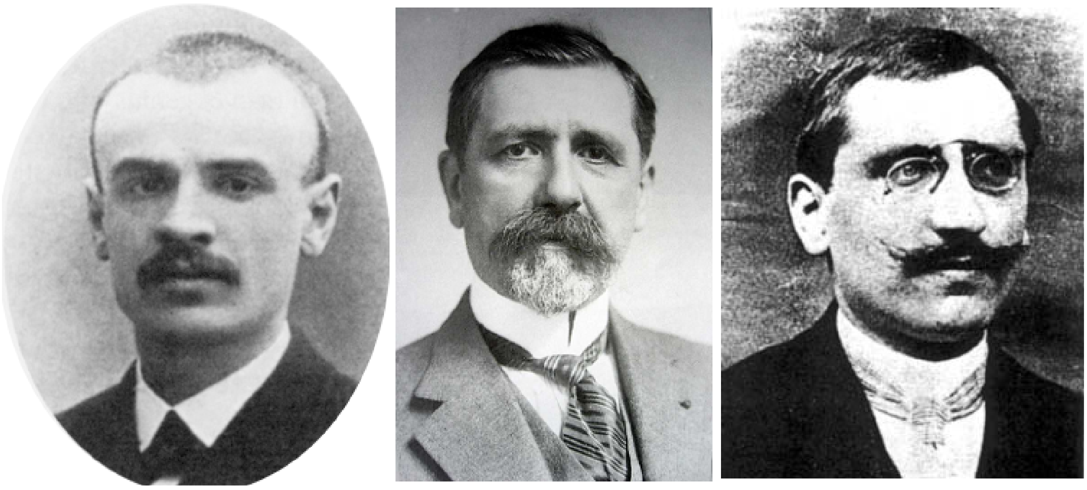


Figure 23. René Baire, Emile Borel et Henri Lebesgue (de gauche à droite)

Ces trois célèbres normaliens se plaindront en effet du manque de considération de Gaston Darboux à leur égard du fait de la nature de leurs travaux. Le nîmois, dont le poids institutionnel est alors très fort, ne semble montrer aucune estime pour les recherches innovantes de ces jeunes analystes :

> Je n'ai jamais rien publié au Bulletin Darboux-Tannery, et j'en ignore au juste les conditions.
>
> Lettre datée du 28 Février 1907 de René Baire à Emile Borel, [**Baire 1990**, 87]

> J'ai à l'usage de Darboux envoyé au Bulletin une note stupide sur les surfaces minima. Je pourrais rédiger toute une série de remarques établissant des équivalences entre problèmes, les ramenant les uns aux autres, sur les

198. Voir [**Gispert 1996b**] qui détaille cette grille de lecture, et dont nous paraphrasons l'expression de la page 404.

> histoires de Baire et d'autres analogues [...] j'aurais des propriétés concernant les séries trigonométriques [...] J'avoue d'ailleurs que tout cela n'est pas dans le goût de Darboux.
>
> Lettre datée du 7 Février 1902 de Henri Lebesgue à Emile Borel, [**Lebesgue 1991**, 7]

> je suis certain qu'il [Darboux] fera toujours tout pour mes concurrents éventuels, sauf peut-être si ces concurrents se réduisent à Baire qui ne doit guère être en odeur de sainteté. Vous me disiez jadis qu'on peut bien vivre sans l'estime de Picard : je me suis dit la même chose de Darboux depuis que, après avoir passé ma thèse, j'avais été le voir pour recevoir de lui cette réponse : "J'appuierai auprès de la section permanente toute proposition pour qu'on vous inscrive sur la liste des candidats éventuels à une maîtrise de conférences".... Ce jour-là, j'avais évidemment obtenu peu et beaucoup. Peu comme résultat, beaucoup comme renseignement sur l'état d'esprit de Darboux à mon égard.
>
> Lettre datée du 7 Avril 1905 de Henri Lebesgue à Emile Borel, [**Lebesgue 1991**, 107]

> Je suppose que Darboux a dit non seulement du bien de Servant, mais aussi du mal de moi [...] je ne puis m'empêcher de remarquer l'insistance avec laquelle Darboux répète actuellement cette épistolaire bêtise d'Hermite "Je me détourne avec effroi et horreur...". Dans le Bulletin, Darboux semble en faire la conclusion de l'œuvre d'Hermite. Eh bien, cela me paraît prouver que Darboux est plus que jamais dans un état d'esprit que je me permets de qualifier d'intransigeant et d'étroit et qui ne saurait m'être favorable.
>
> Lettre non datée (Février 1906) de Henri Lebesgue à Emile Borel, [**Lebesgue 1991**, 136]

> [A propos d'une élection à l'Institut :] Pour moi, je ne crois plus avoir aucune chance. L'hostilité violente de Darboux fera réfléchir à deux fois les nombreux candidats à l'Institut et comme aucun pontife de l'Institut ne me défendra avec la moitié de l'énergie que Darboux mettra à me combattre, on votera finalement pour un autre que moi.
>
> Lettre datée du 22 Mai 1910 de Henri Lebesgue à Emile Borel, [**Lebesgue 1991**, 241]

Après avoir vu son propre travail d'analyse rejeté par ses maîtres un quart de siècle plus tôt, Darboux semble agir de la même manière avec les jeunes Borel, Baire et Lebesgue qui sont pourtant des normaliens. Lebesgue racontera plus tard, en adoucissant son opinion : "*je doute qu'il m'ait jamais pardonné entièrement ma Note sur les surfaces applicables : pendant longtemps, il ne s'intéressa guère à mes Mémoires sur l'intégration qui, en un certain sens, prolongeaient cependant le sien*" ([**Lebesgue 1922**, 14]).

En dépit de ce rejet et de son éloignement complet des travaux d'analyse pure, le travail de Darboux exerce - presque malgré lui - une influence chez ses élèves et la génération des élèves de ses élèves. Tannery comme Lebesgue placent ainsi tous deux leurs travaux à la suite du mémoire de 1875 du nîmois. Picard soutiendra "*comme il l'a toujours fait depuis le premier jour*" les travaux de Lebesgue ([**Lebesgue 1922**, 14]). René Baire évoque également l'impact de ce travail sur ses recherches avec une anecdote sur sa date de naissance qui montre sa prédestination pour la théorie des fonctions de la variable réelle : "*je suis né le 21 Janvier 1874, le lendemain du jour où Darboux signa son mémoire sur les fonctions discontinues, fatale coïncidence !!!*"[199].

Le travail de Darboux est donc bien reçu immédiatement hors des frontières, et sera influent en France pour la génération de mathématiciens ultérieure. Mais au moment de sa parution, la réception de son mémoire par les élites nationales est bien mauvaise, et Darboux se hâte de délaisser ce domaine de recherche que ses maîtres condamnent. Dans sa grande lettre du 23 Décembre 1873 où il exposait à Hoüel son plan de travail sur les fondements de la théorie des fonctions et les principes du calcul différentiel, il écrivait déjà : "*si l'on ne se moque pas de moi, je continuerai ces études petit à petit*". Il sera en effet moqué, blâmé, et remis dans ce qui apparaissait alors comme le droit chemin.

3.2. Le délai de la réception des travaux liés aux équations différentielles.

Le premier travail que Darboux consacre, après ses lectures des ouvrages d'Imchenetsky traduits en français par Hoüel, à la théorie des équations différentielles est un court mémoire d'une dizaine de pages publié dans les *Annales* de l'Ecole Normale ([**Darboux 1870a**]). Dans ce travail, le nîmois étudie l'extension des méthodes d'intégration reposant sur la théorie des caractéristiques aux équations différentielles d'ordre supérieur à un. Il démontre que, en général, la méthode des caractéristiques ne permet pas de résoudre le problème, contrairement à l'ordre un, puisque "*il y a toujours une équation de moins qu'il n'y a d'inconnues*" ([**Darboux 1870a**, 167]). En remarquant que cette propriété reste vraie en différentiant les équations de départ, Darboux donne une méthode systématique - un véritable algorithme - pour tenter d'utiliser les caractéristiques avec succès. Sa résolution repose sur la recherche de combinaisons intégrables en augmentant progressivement par différentiation l'ordre des équations.

L'historien Morris Kline a estimé ce travail comme donnant "*une méthode puissante pour intégrer les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes qui repose sur la théorie des caractéristiques*" ([**Kline 1972**, 703]). Picard jugera lui aussi que "*cette méthode extrêmement importante allait bien au-delà des recherches antérieures*". Mais il ajoute que "*Darboux n'a pas poursuivi lui-même les applications de sa méthode, mais nombreux ont été ses élèves, en France et au dehors, qui en ont montré la fécondité*" ([**Picard 1917**, xv]).

Plus récemment, l'historien Aberto Cogliati a étudié le travail de Darboux en en donnant les ressorts mathématiques ([**Cogliati 2014**]). Comme Picard, Cogliati souligne que le mémoire de Darboux apporte une méthode nouvelle dans un domaine où les recherches piétinaient depuis Monge et Ampère, ce que le nîmois lui-même mettait en avant dans l'introduction de sa note. Mais l'étude de l'historien italien s'attarde surtout sur la diffusion

199. Lettre datée du 4 Février 1902 de Baire à Borel, [**Baire 1990**, 49].

et l'utilisation de la méthode de Darboux dans les travaux ultérieurs. En cela, il rejoint les conclusions de Picard. Hormis une réaction immédiate de Maurice Lévy, il faut en effet attendre une vingtaine d'années pour que le procédé d'intégration proposé par Darboux trouve un écho grâce à Sophus Lie d'une part, et son élève Edouard Goursat d'autre part. Le premier utilisera au milieu des années 1890 sa théorie des groupes continus infinis pour déterminer des classes d'équations différentielles dont il parvient à mener la résolution en les ramenant à des formes intégrables grâce à la méthode de Darboux ([**Cogliati 2014**, 319-321]). Quant à Goursat, il accordera dans ses "*Leçons*" de l'Ecole Normale et de la Sorbonne une place importante aux "*vues profondes et originales*" de son maître. Il y donnera une large présentation de la méthode de 1870, en la réadaptant pour l'utiliser effectivement dans de nombreux cas ([**Goursat 1898**]). Les leçons de Goursat contribueront largement à la diffusion du procédé d'intégration de Darboux qui sera resté pendant vingt ans quasi inutilisé. En 1884, Jordan ne la mentionnait ainsi qu'*in extremis* dans son rapport pour le Prix Petit d'Ormoy ([**Jordan 1884**, 1162]).

A la suite de ses recherches d'analyse pure, Darboux utilise en Janvier 1875 ses connaissances nouvelles de la théorie des séries pour se pencher sur le problème général d'existence des solutions des équations différentielles. Il expose à l'Académie dans une courte note ([**Darboux 1875a**]) ses résultats, obtenus grâce aux développements en série des solutions. Le mathématicien italien Angelo Genocchi écrit alors, à la lecture de cette note, à Joseph Bertrand pour signaler que les résultats de Darboux ne contiennent rien de nouveau vis-à-vis de ce que Cauchy avait déjà établi :

> Ce jeune géomètre [Darboux], dont j'admire le talent, croit que sa démonstration sera la première démonstration rigoureuse de ce théorème fondamental. Permettez-moi de faire à ce sujet quelques observations. Il y a longtemps que Cauchy s'est occupé de la même question. [...]
>
> Je conclus que, pour les équations aux dérivées partielles comme pour les équations différentielles, la première démonstration de l'existence de l'intégrale est due à Cauchy. Sans doute le très grand nombre des écrits du célèbre analyste doit excuser ceux qui n'ont pas connaissance de tous les résultats obtenus par lui.
>
> Lettre datée du 28 Janvier 1875 d'Angelo Genocchi à Joseph Bertrand [200]

Bertrand défendra son protégé en mettant en avant la différence entre les méthodes de Cauchy et celles de Darboux, "*notre ingénieux compatriote*". Mais le professeur de l'Ecole Normale se heurte à une seconde réclamation de priorité que nous avons déjà évoquée dans la section précédente 3.1 : celle de Weierstrass pour son élève Sofia Kovalevskaya.

200. Cette lettre est reproduite dans les *Comptes-rendus* de l'Académie des Sciences de Paris, Tome 80 (1875 1er Sem.), pp.315-7.

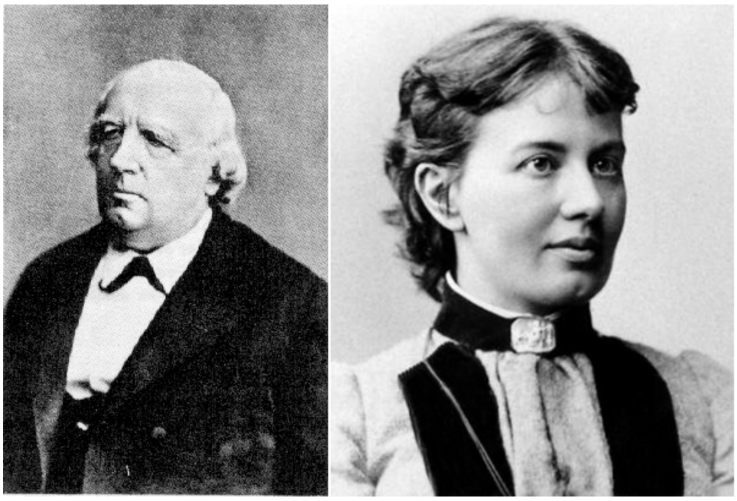


FIGURE 24. Karl Wilhelm Weierstrass et son élève Sofia Kovalevskaya

Influencée en ce sens par le professeur berlinois, la mathématicienne russe avait effectué entre 1872 et 1874 son travail de doctorat sur la résolution des équations différentielles polynômiales. Publiée au tout début de l'année 1875, la thèse de Kovalevskaya ([**Kovalevskaya 1875**]) présente des résultats d'existence de l'intégrale grâce à des développements des solutions en séries ([**Archibald 2003**, 347-9]). Son travail est ainsi très similaire à celui effectué indépendamment quelques mois plus tard par Darboux. A la lecture de la note de ce-dernier dans les *Comptes-rendus* de l'Académie parisienne, Weierstrass découvre la proximité entre les travaux du nîmois et ceux, antérieurs, de sa doctorante. Il écrit à Darboux et à Charles Hermite pour réclamer cette priorité, en leur envoyant le mémoire publié de Kovalevskaya et son diplôme de doctorat. Weierstrass détaille ensuite tout ceci à son ancienne doctorante qui semble, elle, bien moins préoccupée par ces questions de priorité :

> J'avais oublié de renouveler mon abonnement aux *Comptes-rendus* de l'Académie de Paris au début de l'année, et de ce fait je n'en ai reçu que tardivement les premiers numéros. A ma grande surprise, j'y ai trouvé juste après l'envoi de ma dernière lettre dans les numéros 2 et 5 une note de Darboux "sur l'existence de l'intégrale dans les équations aux dérivées partielles ..." qui accompagne la présentation d'un mémoire sur le même sujet.
>
> [...] J'ai écrit à Darboux pour l'informer du mémoire que tu as présenté, en lui disant que celui-ci avait déjà paru en Septembre dernier. J'ai donc envoyé un exemplaire de ta thèse et de ton diplôme à Darboux, ainsi qu'un second à Hermite (je n'avais plus d'autre exemplaire), sans provisoirement faire plus de remarques.
>
> Lettre de Karl Weierstrass à Sofia Kovalevskaya (Mai 1875), reproduite dans [**Bölling 1993**, 199-200]

Darboux ne reviendra ensuite plus sur les théorèmes d'existence de l'intégrale. Ce travail, dont la réception est donc entravée par l'existence d'une production mathématique similaire détenant de justesse le droit de priorité, doit être rapproché d'un second travail du mathématicien nîmois. Suite à son effort de recherche intense en Mai 1876 sur les solutions singulières - ce sur quoi nous reviendrons ci-après - Darboux poursuit ses études sur les équations différentielles, en se penchant désormais sur le problème de Pfaff. L'histoire des travaux liés à ce problème a été analysée par [**Hawkins 2005**]. Alors que Darboux expose les résultats de son travail à Bertrand, à Berlin Georg Fröbenius parvient dans le même temps indépendamment à des résultats similaires. Tandis que le nîmois laisse provisoirement ses notes à son maître pour qu'il puisse les intégrer à ses cours, Fröbenius publie quant à lui ses résultats sans plus attendre. Darboux expliquera :

> La première partie de ce travail [sur le problème de Pfaff] a été écrite en 1876 et communiquée à M. Bertrand, qui enseignait alors au Collège de France la théorie des équations aux dérivées partielles. M. Bertrand a bien voulu exposer la méthode que je lui avais soumise, dans sa première leçon de Janvier 1877.
>
> Quelque temps après paraissait dans le *Journal de Borchardt* un beau Mémoire de M. Fröbenius qui porte d'ailleurs une date antérieure à celle de Janvier 1877 (Septembre 1876) et où ce savant géomètre suit une marche assez analogue à celle que j'ai communiquée à M. Bertrand, en ce sens qu'elle repose sur l'emploi des invariants et du covariant bilinéaire de M. Lipschitz.
>
> [**Darboux 1882**, 2].

Avec la publication du travail de Fröbenius, Darboux abandonnera son projet de faire publier ses propres résultats. Il n'y reviendra que plusieurs années plus tard où, enrichissant ses premières méthodes, il tentera d'apporter une diminution du nombre d'intégrations par rapport au travail de Fröbenius ([**Hawkins 2005**, 420-3]). Ce n'est qu'en vertu de cette amélioration qu'il se décidera à publier son travail en 1882. Thomas Hawkins montre par ailleurs combien la méthode de Darboux aura, une dizaine d'années plus tard, de l'influence sur les travaux de son élève Elie Cartan.

Quant aux travaux du nîmois concernant la théorie des solutions singulières, nous avons présenté dans la section 2.5 un premier aperçu de leur réception immédiate sur la période 1870-1873. Nous allons voir que, du point de vue de l'évolution des recherches sur ce sujet et de la diffusion de ces recherches, il semble en fait que l'année 1873 ait fixé l'état de la théorie de manière quasi définitive. Ceci signifie que l'imposant mémoire académique [**Darboux 1876**] est resté dans l'ombre.

Lors de la réception du Grand Prix en Avril 1877, Bertrand avait proposé que le mémoire primé de Darboux soit imprimé dans le *Recueil des Savants étrangers* de l'Académie. C'est ce qui avait alors été décidé. Mais une année plus tard, le nîmois ne connaît toujours pas l'avancée de ce projet de publication à l'Institut. Dans le doute, il ne peut changer sa stratégie pour l'édition de son travail :

> Figurez-vous qu'à l'Institut, je ne peux pas avoir une réponse par oui ou par non pour savoir si mon Mémoire sera imprimé avant la fin de l'année. Si j'avais pu obtenir une réponse par non, j'aurais pu vous l'offrir, et il n'est peut-être pas bon mais le fait qu'il a été couronné le fera sans doute lire.

Lettre datée du 12 Juin 1878 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

Darboux devra encore patienter : la composition du prochain volume (le tome 26) des *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences* - recueil qui doit accueillir son travail - est alors déjà arrêtée. Ce volume ne paraîtra d'ailleurs qu'en 1879. Il obtiendra ensuite l'assurance que son mémoire fera partie du volume suivant (tome 27). Ce sera en effet le cas ... mais celui-ci ne sera publié qu'en 1883 ! Darboux aura ainsi attendu 7 ans pour voir enfin la publication de son mémoire primé sur les solutions singulières. Ce "*déboire académique*" subi par le nîmois n'a d'ailleurs rien d'exceptionnel : [**Verdier 2014**, 41] rappelle en effet que Liouville ou encore Sturm ont régulièrement dû patienter plus de cinq ans pour que leurs travaux annoncés à paraître dans les *Mémoires des savants étrangers* soient finalement publiés.

Ce très long décalage entre l'écriture du mémoire, la publicité éphémère qu'il reçoit au moment de l'attribution du Prix [201], et sa publication vont dans une large mesure en entraver la diffusion. Pour commencer, il est évident que la réception du travail est totalement mise entre parenthèses durant les sept années d'attente qui précèdent la publication du recueil. Mais ensuite, plusieurs éléments attestent de la disparition presque totale du mémoire de 1876 dans le paysage mathématique.

Tout d'abord, une remarque de Gösta Mittag-Leffler de 1884 révèle l'ignorance générale des mathématiciens qui, s'ils connaissent l'existence du travail de Darboux, ne savent où se procurer la publication. Pour reprendre notre grille d'interprétation des problèmes de diffusion exposée dans la section [Chap.3,3.3], il s'agit là d'un défaut de la *piste matérielle*. Mittag-Leffler, dont la grande maîtrise des réseaux de circulation des ouvrages est bien connue, écrit par exemple à Darboux pour obtenir un exemplaire de son mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles, ne sachant où le trouver. Darboux doit l'informer dans sa réponse de la publication du mémoire dans le périodique académique :

> Il me serait très agréable de vous offrir un exemplaire de mon mémoire sur les solutions singulières. Malheureusement, il ne m'en reste plus. Du reste, ce travail a paru dans le Recueil de l'Académie.

Lettre datée du 15 Mars 1884 de Gaston Darboux à Gösta Mittag-Leffler [**Archives Darboux Mittag-Leffler**].

Ensuite, le contenu des leçons de l'ancien élève de Darboux, Emile Picard, sur la théorie des solutions singulières montre que des travaux de son maître à ce sujet, Picard n'a retenu que le premier mémoire de 1873. Il prend en effet pour sujet de son cours d'Analyse à la Sorbonne en 1886/87 les solutions singulières, et ses leçons seront publiées dans [**Picard 1928**, Chap.3]. Ce traité comporte également un chapitre sur l'application aux équations différentielles de la méthode des caractéristiques, ainsi qu'un exposé général sur la forme et l'ordre des contacts des caractéristiques [202]. Les recherches présentées sont donc extrêmement proches de celles que Darboux développaient dans le mémoire primé de 1876. Pourtant, la seule référence que Picard donne des travaux du nîmois est la suivante :

201. Darboux écrit le 3 Avril 1877 : "*J'ai été heureux de reconnaître à cette occasion combien il y a de personnes, dans l'Université, qui ont appris ce petit succès avec plaisir. C'est au moins aussi agréable que le prix*" ([**Archives épistolaires Darboux**]).

202. Voir les Chapitre 1 et Chapitre 10, [**Picard 1928**, 12,245].

> On trouvera une démonstration géométrique de ce théorème [sur les lieux de rebroussement] dans un Mémoire fondamental de M. Darboux sur cette théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1873)
>
> [**Picard 1928**, 48]

Ceci atteste d'une part de la bonne réception du premier mémoire [**Darboux 1873b**] sur les équations ordinaires, mais prouve d'autre part que le second mémoire plus large sur les équations aux dérivées partielles n'est que peu ou pas connu. Néanmoins, le contenu du Traité de Picard montre que les méthodes que Darboux y employait ont été diffusées indépendamment, en dépit de l'oubli du mémoire [**Darboux 1876**] où le professeur gardois les exposait. En particulier, les études sur les contacts entre les caractéristiques, les intégrales et la solution singulière, ou encore l'usage de la variable auxiliaire logarithmique $\frac{du}{u}$ pour l'intégration des équations caractéristiques sont bien reprises et étendues par Picard.

La difficile diffusion du mémoire sur les solutions singulières de 1876 peut également s'expliquer par le désintérêt général des mathématiciens, dans leur recherche comme dans leur enseignement, pour la théorie des solutions singulières des équations différentielles dont le nombre de variables dépasse l'unité. Le contenu des cours de Picard souligne en effet que la théorie des solutions singulières ne fait véritablement l'objet d'une exposition que pour les équations ordinaires. Dans le cadre des équations aux dérivées partielles, on ne la mentionne que rarement, souvent uniquement pour rappeler la formation d'après Lagrange des solutions singulières à partir de l'intégrale complète. C'est ainsi ce qui est développé dans [**Picard 1928**, 60], mais également dans le grand traité [**Forsyth 1956**] qui devient une référence dès sa première édition en 1885. Selon Forsyth :

> La théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre, telle qu'elle est acceptée à présent, a été établie tout d'abord par Cayley ([**Cayley 1873b**] ; et un important mémoire a été publié indépendamment par Darboux dans le même temps ([**Darboux 1873b**]).
>
> [**Forsyth 1956**, 44]

Cet important traité est le seul dans lequel nous ayons trouvé une référence envers le mémoire primé de 1876 de Darboux sur les solutions singulières. Il est néanmoins révélateur qu'Andrew Forsyth n'en connaisse pas la date exacte de publication (voir [**Forsyth 1956**, 392]).

En ce qui concerne les travaux de recherche, le mémoire sur les équations aux dérivées partielles de Darboux ne suscite pas de publications ultérieures. Au contraire, c'est la théorie concise et concentrée sur les équations différentielles ordinaires d'Arthur Cayley qui provoque un fort écho dans le paysage mathématique. Son exposition des *loci* géométriques d'après De Morgan et sa caractérisation des p- et c-discriminants [203] sont l'objet de plusieurs recherches ultérieures ([**Hill 1887**], [**Johnson 1887**], et plusieurs autres travaux sont cités par [**Forsyth 1956**, 44]). L'exposé de la théorie algébrico-géométrique des solutions singulières de Cayley semble d'ailleurs devenir une *tradition nationale* de recherche (en un sens présenté et discuté par [**Gispert 1996b**] et dans une certaine mesure par [**Parshall 2004**]). Cette théorie est en effet régulièrement présentée dans les cours des

203. Voir la section 2.3.

mathématiciens anglais, et reste Outre-manche un domaine actif dans la production mathématique. En France, l'état de la théorie des solutions singulières semble rester figé après [**Darboux 1873b**], et l'exposition donnée par Cayley est laissée de côté. Cela correspond du reste à la volonté initiale de Darboux, qui souhaitait *dire quelque chose de définitif* à ce sujet. Mais ce *quelque chose* n'est retenu que dans le cadre des équations ordinaires, et son travail ultérieur sur les équations aux dérivées partielles tombe en revanche véritablement dans l'oubli.

Il est ainsi intéressant et instructif de comparer l'histoire et la résonance des trois importants ouvrages de Darboux produits dans les années 1870 : le mémoire de géométrie sur les cyclides de 1873 (étudié en [Chap.3,5]), le mémoire d'analyse sur les fonctions discontinues de 1875 (voir 1.5 et 3.1) et celui de 1876 sur la théorie des solutions singulières des équations aux dérivées partielles (voir 2.6).

Plusieurs points distinguent tout d'abord ces mémoires. La production de chacune de ces trois œuvres est tout à fait singulière. Le premier est véritablement écrit sur une longue période de cinq années, de 1868 à 1872. Produit sous une première forme en 1869, Darboux tire un grand profit de l'absence de publication définitive de son travail, interrompue par la guerre, pour en donner des améliorations, des modifications et des ajouts jusqu'en 1872. Il n'est publié qu'ensuite comme un ouvrage indépendant chez Gauthier-Villars. Le second est écrit sur une période d'une dizaine de mois en 1873. Terminé en Janvier 1874, Darboux le fait publier dans un recueil périodique, les *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale*. Il ne peut ainsi plus y toucher jusqu'à sa parution l'année suivante. Enfin le dernier est paradoxalement le plus volumineux (si toutefois on excepte les notes du mémoire sur les cyclides) et tout à la fois celui qui est écrit en un temps record de six semaines. Sa production est précipitée par un concours académique : le Grand Prix des Sciences Mathématiques de 1876. En acceptant de l'insérer dans le recueil officiel de l'Académie, Darboux perd le contrôle de la diffusion de son travail pour une durée de sept ans.

Ces trois mémoires se distinguent également les uns des autres par la réception immédiate des travaux qu'ils comportent. Le mémoire sur les cyclides est, à tout point de vue, un véritable succès (voir [Chap.4,2.2]). Le mémoire d'analyse, globalement bien reçu à l'étranger, est largement rejeté en France. Enfin le mémoire sur les solutions singulières n'est ni rejeté ni un réel succès : certes vainqueur d'un point de vue académique, sa réception n'est ni bonne ni mauvaise, elle est simplement absente. Si le mémoire d'analyse était victime d'une censure des élites nationales, celui de 1876 pâtit d'un sort bien pire à long terme : il est une victime de l'enlisement académique, puissant moteur de l'oubli scientifique.

Il est par ailleurs étonnant de noter la résonance à long terme de ces mémoires, et leur présence dans l'historiographie. Le mémoire sur les cyclides de 1873 a été totalement absorbé par les publications ultérieures de la deuxième partie de carrière du Darboux professeur de Géométrie de la Sorbonne qui est bien connu. Dans ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (1887,89,94) puis dans sa *géométrie analytique* (1917), le contenu du premier mémoire du géomètre est largement repris, développé et enrichi. Il n'est, en conséquence, pas reconnu à part entière par l'historiographie. Le mémoire sur les fonctions discontinues renaît de ses cendres, en France, après une vingtaine d'années. Il apparaît alors comme une racine des développements modernes qui seront donnés à l'analyse au tournant du siècle. Symbole de la puissance des normes du cadre institutionnel national ([**Gispert 1996b**]), du renouveau des fondements de l'analyse ([Gispert 1983], [Dugac 2003]), des transitions parfois difficilement comprises vers une rigueur de démonstration ([Jahnke 2003], [Gispert 1990]), ce mémoire est fort bien connu de l'historiographie où on le rencontre couramment. Enfin, le mémoire de 1876 sur les solutions singulières est ici le grand absent historiographique. Il est victime d'une part d'une lacune historiographique relative à son sujet, la théorie des solutions singulières, et d'autre part de la vacuité de sa diffusion.

D'une manière générale, les travaux de Darboux dans le domaine des équations différentielles ont souvent souffert d'un timing désavantageux. Début 1875 et fin 1876, le nîmois se heurte aux recherches similaires de Kovalevskaya et de Fröbenius qui ont sur lui la priorité chronologique. Sa méthode de 1870 nécessitera vingt ans pour être employée, et son mémoire de 1876 restera aux oubliettes académiques. Il n'est alors pas étonnant de constater que Gaston Darboux est généralement absent des grandes lignes de l'histoire des équations différentielles ([Archibald 2003], [Demidov 1982]). En matière de timing malheureux, ses travaux d'analyse doivent aussi être évoqués. Certes repris par Weierstrass qui lui rappelle l'antériorité de ses travaux, c'est surtout le milieu mathématique national qui, en 1875, ne peut et ne veut recevoir son travail. Si l'on se place avec [Locqueneux 2013] un instant dans l'*empathie*, à la fin des années 1870, on constate que pour Gaston Darboux l'ouverture des mathématiques provoquée - au sens des intérêts scientifiques - par le Bulletin des Sciences ne lui a pas toujours profité. La réception de ses recherches dans les domaines nouveaux qu'il a abordés est souvent contrastée, et à court terme elle est toujours incomparable avec celle, éclatante, de ses premiers travaux de Géométrie.

3.3. 1878 : épilogue précoce d'une trajectoire scientifique et institutionnelle.

C'est dans le contexte que nous venons de dépeindre que s'amorce pour Gaston Darboux un virage dans ses parcours institutionnel et scientifique, tout aussi important que celui subi entre 1869 et 1872 du fait de la rédaction de son périodique. En Septembre 1877, l'astronome Urbain Le Verrier meurt à Paris, âgé de 66 ans. Le Verrier était titulaire de la chaire d'Astronomie physique de la Sorbonne, où il était suppléé par l'astronome Charles Wolf depuis 1875. Mais ce-dernier, chargé ensuite d'un cours de physique céleste et nommé professeur adjoint à la Faculté ne succédera pas à Le Verrier.

Durant l'année 1878, c'est Pierre-Ossian Bonnet qui est désigné à l'unanimité par la Faculté des Sciences pour prendre en charge la chaire d'Astronomie laissée vacante. Mais Bonnet se chargeait jusqu'alors de la suppléance des cours de Géométrie supérieure de la chaire détenue par Michel Chasles à la Sorbonne ! Darboux tire alors profit de ce véritable *jeu des chaires musicales* qui représente pour lui une parfaite opportunité : il demande et obtient sans peine de pouvoir remplacer Bonnet. Darboux à la Géométrie supérieure, c'est Félix Tisserand qui donnera à la Sorbonne les cours de Mécanique rationnelle.

Avec cette nomination, Gaston Darboux redevient bien "*l'héritier désigné de Chasles*" ([Gispert 1996b, 401]). Non seulement il se place comme son successeur probable pour la chaire, mais ce transfert institutionnel s'accompagne d'un revirement de ses intérêts scientifiques. Chronologiquement, il s'agit presque d'un retour en arrière : Darboux revient à ce moment très nettement vers ses premières études qu'il avait mises de côté au cœur des années 1870. A l'Automne 1877, il reprend ainsi son travail de thèse, modifie la démonstration de son théorème phare sur les surfaces isothermiques (voir [Chap.3,2.3]), et publie bientôt cela sous la forme d'un premier mémoire sur les coordonnées curvilignes ([**Darboux 1878a**]). Il concentre également ses recherches sur le domaine des surfaces minimales, et reprend le problème qu'il avait laissé ouvert en 1869 de la représentation sphérique des surfaces[204].

Bien entendu, il serait réducteur d'affirmer que Darboux ne fait plus *que* de la Géométrie. En revanche, il est clair que son centre d'intérêt scientifique principal est *redevenu* la Géométrie : projective, des courbes et des surfaces, et surtout infinitésimale (autrement dit *différentielle*). Dans le même temps, Darboux, "*jeune universitaire, dynamise le cours de Géométrie où il succède[ra] à Chasles*" ([**Gispert 1996b**, 400]). Les premiers cours qu'il y dispense en témoignent par leurs intitulés[205] :

– Du déplacement d'une figure invariable et de la théorie des systèmes articulés (1878-1879)
– Des principes de la Géométrie moderne, de l'emploi des imaginaires et de l'infini en Géométrie (1879-1880)
– Des surfaces algébriques du quatrième ordre, douées de points multiples ou de lignes multiples (1880-1881)
– Des méthodes géométriques de Monge et de leur emploi dans la théorie des équations aux dérivées partielles (1881-1882)
– De la théorie des surfaces et plus particulièrement des surfaces applicables sur une surface donnée (1882-1883)
– De la théorie générale des surfaces et des principes de la Géométrie infinitésimale (1883-1884)

Darboux dynamite ainsi la vieille chaire de Chasles : d'une chaire de géométrie projective, il en fait une chaire de géométrie différentielle. Lorsque Chasles meurt, en Décembre 1880, le mathématicien nîmois n'est absolument pas concentré sur la vacance de la place de l'Académie des Sciences que cela occasionne. Ce que Darboux veut à tout prix, c'est la succession de son maître géomètre à la Sorbonne :

> J'espère que j'aurai sa succession à la Sorbonne ; tout le monde est disposé à me la donner. Quant à l'Institut, c'est une autre affaire et je ferai tous mes efforts pour me dispenser de me présenter. Hermite, je vous le dis confidentiellement, veut me présenter en première ligne ; mais cela m'ennuierait beaucoup car je courrais à un échec certain. Mais il est inutile de vous entretenir de tous ces détails. L'essentiel pour moi c'est la Sorbonne.
>
> Lettre datée du 27 Décembre 1880 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

204. Voir à ce sujet la chronologie de la bibliographie de [**Lebon 1910**].
205. On retrouve la liste des premiers enseignements de Géométrie Darboux à la Sorbonne dans la notice [**Darboux 1884**].

Les désirs de Darboux seront, au moins en ce qui concerne la Sorbonne, exaucés. Le 22 Mars 1881, les membres de la Faculté des Sciences le choisissent unanimement pour succéder à Chasles à la chaire de Géométrie supérieure. Pour cela, il devra néanmoins quitter à regret l'Ecole Normale Supérieure.

> Mon affaire à la Sorbonne paraît aller toute seule. A l'Institut, je crois que Jordan sera nommé, mais l'élection ne se fera que dans deux mois.
>
> Lettre datée du 8 Février 1881 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

> Hier la Faculté m'a proposé à l'unanimité en première ligne pour la Chaire de Géométrie.
>
> Lettre datée du 23 Mars 1881 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

> Ma situation est réglée. Je suis nommé professeur de première classe à la Faculté [206] et je reste à l'Ecole Normale jusqu'à la fin de l'année. Seulement je vous prie de croire que si ce n'était pour le traitement et pour ma petite famille, j'aurais préféré la solution inverse.
>
> Lettre datée du 6 Mai 1881 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

En 1881, Darboux est ainsi devenu le professeur de Géométrie qui va laisser durablement son empreinte sur cette discipline. Il sera bientôt l'homme des "*Leçons sur la théorie générale des surfaces*", que Beltrami désignera comme : "*votre grand ouvrage sur la théorie des surfaces qui, en dehors de toutes les recherches originales dont vous l'avez enrichi, est devenu désormais le texte obligé dans la matière et le point de départ d'un grand nombre de travaux sur tous les chapitres de la théorie*" [207]. Hélène Gispert retranscrira par ailleurs l'impact de Darboux sur les recherches françaises dans le domaine de la Géométrie :

> [Entre 1880 et 1900] il y a peu de contributions qui ne soient consacrées à la géométrie élémentaire du triangle ou des courbes et des surfaces, et à la géométrie infinitésimale française "à la Darboux". [...] La géométrie en France est l'empire d'un seul homme : Darboux.
>
> [**Gispert 1991**, 17]

206. Darboux obtiendra de ce fait un salaire annuel de 12,000 francs. Durant l'année 1881 où il cumule la chaire de Géométrie Supérieure (mais non en tant que titulaire) et la maîtrise de conférence de la rue d'Ulm, son salaire était de 17,500 francs. Dans ses correspondances avec Hoüel des années 1880-1882, Darboux évoque couramment le niveau des traitements des professeurs. Plusieurs réformes sont en effet entreprises à ce sujet sous l'impulsion de Jules Ferry.

207. Lettre datée du 7 Janvier 1898 de Beltrami à Darboux, [**Archives épistolaires Beltrami**].

La trajectoire scientifique et le parcours institutionnel de Gaston Darboux ont donc basculé à nouveau en 1878 lorsque s'ouvrent à lui les cours de Géométrie supérieure de la Sorbonne. Ce basculement n'est ensuite que confirmé en 1881 lorsque le passage de témoin entre Chasles et Darboux devient officiel. Pourtant le regard rétrospectif, ébloui par les trente-sept années d'enseignement de géométrie différentielle à la Faculté, ne saurait oublier les quatorze riches années qui ont précédé cette position univoque. Né une première fois en 1864 avec ses focales et ses cyclides, le *géomètre* Darboux était devenu au début des années 1870 un *rédacteur* au parcours et aux mathématiques aussi diverses que complexes. Mais lorsqu'en 1878 naît le *professeur* de Géométrie, le *géomètre* renaît définitivement avec lui.

FIGURE 25

Un épilogue généalogico-académique. Nous venons de voir ci-dessus dans les lettres de Darboux faisant suite à la mort de Chasles que le mathématicien nîmois, accaparé par la perspective de lui succéder à la Sorbonne, espère surprenamment ne pas être présenté parmi les prétendants au fauteuil vacant d'académicien. Il écrit en effet : "*je ferai tous mes efforts pour me dispenser de me présenter*". Les trois principaux candidats sont alors Camille Jordan, Amédée Mannheim et Gaston Darboux.

Si le gardois ne souhaite pas se voir présenté, c'est parce qu'il est convaincu qu'il n'aurait pas les faveurs des académiciens face à Jordan. Et pourtant, Hermite tient à placer Darboux et Jordan ex-aequo en première ligne. Le nîmois écrivait ainsi à Hoüel :

> La Section de Géométrie va se réunir. Il avait été question de me présenter en première ligne avec Jordan. Mais pour augmenter les chances de Jordan, je serai probablement lâché. Tout ceci confidentiellement.
>
> Lettre datée du 16 Février 1881 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

> Quant à la Section de Géométrie, je vous dirai tout à fait confidentiellement que je crois que grâce à Hermite, je serai présenté ex-aequo avec Jordan ; et cependant je vous assure que je ne le désire pas.
>
> Lettre datée du 23 Mars 1881 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Si Charles Hermite insiste pour présenter Darboux en première ligne (ce qu'il ne parviendra pas à obtenir), il est paradoxalement tout autant persuadé que le nîmois que celui-ci ne peut pas remporter l'élection. La raison de la défaite certaine de Darboux réside pour lui dans sa situation familiale défavorable. Il confie ce secret, qu'il tient de son beau-frère Joseph Bertrand, à son ami suédois Gösta Mittag-Leffler

> Vous êtes sage et prudent, je puis vous confier ce qui explique pourquoi Darboux n'a point pour la prochaine élection les chances qu'il devrait à son talent hors ligne, et ce que Mr Bertrand m'a appris là-dessus. Darboux a fait un mariage au-dessous de sa position, qui a été légitimé longtemps après la naissance de son fils aîné. De là dans l'opinion académique une défaveur dont il porte le poids, et qui lui fait préférer Mr Camille Jordan. La lutte n'est vraiment point possible [...]
>
> Lettre datée du 11 Mars 1881 de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler, [**Hermite 1984**, 109]

Gaston Darboux s'était marié à Beauvais le Vendredi 27 Juillet 1872 avec Amélie-Cœlina (dite *Célina*) Carbonnier [208]. Les Carbonnier étaient alors une modeste famille beauvaisienne dont le père Charles-Louis était tailleur d'habits. Dans la famille Carbonnier, Célina était la deuxième des quatre enfants. Partie pour Paris avec sa jeune sœur Clara-Maria à la fin des années 1860, les deux sœurs Carbonnier vont épouser les deux frères Darboux.

208. Voir les [**Archives Oise**].

Mais dès avant leur mariage, Gaston Darboux et Célina Carbonnier ont un premier enfant : un fils, qu'ils nomment Jean-Gaston, et qui naît le 11 Septembre 1870 tout juste avant le début du long siège de Paris de la guerre franco-prussienne. Durant un temps, Darboux va cacher l'existence de son fils et probablement également son mariage même. Le jour de ses noces, Darboux part pour Beauvais. Il écrivait pourtant la veille à son ami Hoüel :

> Je vais partir pour un jour ou deux et aller me reposer [209].
>
> Lettre datée du 26 Juillet 1872 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Darboux cache aussi longtemps à Hoüel le fait qu'il est le père d'un fils né hors-mariage. Lorsque sa fille Lucie Darboux naît en Juillet 1873, il l'évoque à son collaborateur comme étant son premier enfant, son "*héritière*". Il écrivait ainsi avant sa naissance :

> ma femme est dans un état de santé qui me promet un héritier pour cet été. Je vous dis un héritier, ce sera peut-être une héritière, n'importe, elle sera la bienvenue.
>
> Lettre datée du 30 Mars 1873 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Il faut attendre la fin de l'année 1876 pour voir apparaître dans ses lettres l'existence de ses "*deux enfants*", et 1877 pour que Darboux s'autorise enfin à écrire : "*mon fils*".

Jean-Gaston Darboux (le fils) entrera, après avoir noué une amitié avec son camarade de classe au Lycée Louis-Le-Grand Emile Borel, à l'Ecole Normale Supérieure en 1891. Agrégé de Sciences Naturelles en 1894, il deviendra professeur de zoologie à Lyon puis longtemps au sein de la Faculté des Sciences de Marseille. Sa petite sœur, Lucie, partira habiter à Nîmes au début des années 1890 où elle épousera l'avocat Léopold Cabanis (le frère de Juliette Cabanis qui se mariera avec ... Jean-Gaston Darboux !). Mais suite à la mort de son mari, elle reviendra à Paris où elle se remariera avec André Mornet, substitut du procureur puis procureur général qui mènera notamment les réquisitoires des procès de Mata Hari (en 1917) et Philippe Pétain (en 1945). Ceci explique notamment que les divers fonds et papiers Darboux soient généralement, dans les archives, indiqués comme ayant été légués par la famille Mornet. Enfin, pour terminer cette ébauche généalogique, signalons que Jean Darboux, le fils de Jean-Louis Darboux (donc le neveu de Gaston Darboux) restera maire de la ville de Saint-Rémy-lès-Chevreuse pendant plus de vingt ans des années 1930 aux années 1950.

En Mars 1881, Darboux, présenté en deuxième ligne et voulant à tout prix tant ne pas subir un échec que favoriser l'élection de son ennemi Mannheim, décide de retirer sa candidature. Jordan sera alors largement élu devant Mannheim.

Peut-être que Bertrand ou Hermite eurent quelques mots au sujet de la situation familiale de Darboux... Toujours est-il qu'à peine quelques semaines plus tard, Gaston et Célina Darboux entreprennent ce qu'ils avaient jusqu'alors toujours omis de faire : ils vont le 24

209. Dans cette lettre, le verbe "reposer" est écrit par-dessus un autre terme raturé, signe que Darboux a probablement hésité avant de se décider à ne rien dire à Hoüel au sujet de son mariage.

Juin 1881 à la mairie du 6ème arrondissement de Paris y faire officiellement enregistrer leur mariage[210]. Ils légitiment ainsi, onze ans après sa naissance, leur fils Jean-Gaston. Suite à cela, un peu plus de deux ans plus tard, Gaston Darboux sera élu à l'Académie des Sciences après la mort de Victor Puiseux. Il en deviendra, à la mort de son maître bien-aimé Joseph Bertrand, le secrétaire perpétuel.

FIGURE 26. Jean-Gaston Darboux (fils de Gaston), photo datant des années 1920

210. Voir l'acte de naissance (Paris 6ème arr. 11 Septembre 1870) de Jean-Gaston Darboux qui comporte la mention apposée lors de l'enregistrement de l'acte de mariage de ses parents dans [**Archives Paris**].

Quatrième partie

Conclusion générale : aléas des trajectoires déterministes, complexité du parcours de Gaston Darboux et bilan de nos approches

> *Reste à choisir ces temps forts, éventuellement ces années fortes, cette biographie se nouant alors au cœur de ces choix et à la façon de les mettre en résonance les uns avec les autres. Certes on y perd toute prétention à l'exhaustivité, de toute façon illusoire ; certes on y perd des événements, des publications, des prises de position [...] On y gagne, je pense, une clarté utile pour tracer un portrait de notre personnage, sinon un récit de sa vie.* [211]
>
> Hélène Gispert

Gaston Darboux s'avère ainsi être un personnage complexe au cheminement intellectuel tout aussi riche qu'il est difficile à bien appréhender. Sa formation scientifique comme ses aspirations mathématiques premières font de lui un géomètre à l'identité particulière. Ses méthodes alternent entre l'emploi fort de l'analyse de Plücker et de Lamé, et le raisonnement géométrique plus direct et intuitif de Chasles. Dès ses premiers travaux, la recherche de Darboux se caractérise par une volonté d'établir des rapprochements entre les divers sujets, entre des domaines disparates. Il s'agit pour lui de les voir, de les considérer et de les expliquer différemment. Mais cette volonté est en réalité le fruit d'un moteur plus profond : la critique et le doute. Remettant en cause des propositions pourtant établies, des démonstrations pourtant acceptées, cet état d'esprit scientifique critique est le levier de cette volonté d'apporter d'autres regards sur les problèmes de la Science, d'en exhiber d'autres liens. Par ailleurs, cela le pousse à compléter les propositions dont les fondements ne sont pas compris, les faits de calcul inopinés. Mais de manière plus concrète, son recul critique lui permet aussi de s'absoudre de certaines habitudes mathématiques, des pratiques traditionnelles dont il a cependant hérité durant sa formation. C'est ce qui le pousse par exemple, dès ses tout premiers travaux, à introduire complètement les imaginaires dans sa Géométrie, ce qui libère notamment les notions de la théorie des focales dont il donne ainsi l'extension.

Le travail de doctorat de Darboux contient les germes de bon nombre de ses recherches ultérieures, mais également les prémisses de son identité scientifique. Reprenant des travaux de Dupin et de Lamé sur les surfaces orthogonales et isothermes, il s'attache à relier ses travaux au domaine des fonctions elliptiques où la géométrie se marie à l'analyse. C'est ainsi qu'il "*intègre par la Géométrie*" les équations liées au théorème d'Abel. Souvent connectées à la théorie des courbes cycliques et des surfaces cyclides qu'il développe, les recherches de Darboux se diversifient ensuite et s'inscrivent dans des courants actifs sur la scène européenne. Si le milieu mathématique français d'alors est carencé, cela ne semble pas avoir d'incidence sur le nîmois dont les travaux sont vite appréciés à l'étranger.

Suite à son entrée éclatante et animée à l'Ecole Normale Supérieure en Novembre 1861, l'identité sociale première de Gaston Darboux est forgée par cette école dont il apparaît comme le symbole, et qu'il promouvra activement toute sa vie. Mais le jeune gardois s'y assure aussi rapidement, et en grande partie grâce à Louis Pasteur, une bienveillance ministérielle teintée de favoritisme, ainsi que l'estime et le soutien de l'élite mathématique

211. Citation au sujet du cas d'Emile Borel, voir [**Gispert 2012**, 175].

française qu'il est amené à y côtoyer. La réception de ses premiers travaux de Géométrie est excellente, et le "*jeune Darboux, étoile montante des mathématiques françaises*"[212] se construit un statut et une réputation en France et progressivement en Europe. Les méthodes géométriques, algébriques et analytiques dont il fait preuve pour traiter en les reliant la géométrie des systèmes de sphères, des surfaces cyclides, des fonctions elliptiques et les transformations de l'espace caractérisent alors son portrait scientifique d'une part, et jouissent d'une réception remarquable d'autre part. Lorsque paraît en 1873 ce qui est pour lui et pour ses contemporains son ouvrage de référence sur les surfaces cyclides ([**Darboux 1873a**]), tous les travaux géométriques de Darboux ont été des succès du point de vue de leur réception immédiate.

En lien avec ces réceptions heureuses vient s'ajouter en Novembre 1869 une identité sociale nouvelle pour Gaston Darboux. Chasles, qui est avec Joseph Bertrand son maître le plus proche et le plus influent, parvient à redonner vie à l'ancien *Bulletin de Férussac* en profitant de son nouveau rôle dans la toute jeune Ecole Pratique des Hautes Etudes. En dépit de nombreux obstacles, Chasles réussit à tirer profit des imperfections de la section de Mathématiques négligée qu'il dirige pour créer ce qu'il considère comme le successeur de ce vieux Bulletin : le "*Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*". Il s'agit pour le grand géomètre de remédier à l'autarcie croissante des mathématiques françaises grâce à ce journal de recension. Et c'est à son ancien doctorant Gaston Darboux qu'il confie la rédaction de ce périodique, ce qu'il souhaitait depuis longtemps.

L'arrivée du Bulletin dans sa vie bouleverse alors complètement le parcours du géomètre nîmois : le journal fait en effet évoluer toutes ses identités. Socialement, Darboux devient un rédacteur au cœur d'un réseau européen de correspondants et de collaborateurs. Son statut et sa réputation se lient à ceux de son recueil, ce dont il gagne crédit, estime et renommée internationaliste qui rejaillissent donc de fait sur son identité scientifique. Darboux a un poids prépondérant dans tous les secteurs de la gestion du Bulletin des Sciences, et son journal constitue ainsi son reflet au moins en certains points. Mais si l'influence du rédacteur sur son journal est indéniable, l'influence réciproque l'est tout autant. Le Bulletin des Sciences atteint en effet très fortement l'identité mathématique de Gaston Darboux. Au centre des courants d'échange entre scientifiques que le journal engendre, le gardois est également immergé dans divers champs de recherches via les recensions continuelles du Bulletin dont il produit lui-même une part importante. Son identité mathématique se révèle alors fortement perméable à certains des domaines dans lesquels il est plongé.

A ce moment de sa vie, au début des années 1870, les dynamiques à l'œuvre dans son cheminement intellectuel sont puissantes, effectives et très variées. Ses centres d'intérêt changent, et sa production mathématique avec eux. On retrouvera néanmoins au sein de sa recherche une forte unité dans les caractéristiques de sa personnalité scientifique qui transcendent la simple nature des domaines mathématiques. Darboux réoriente son travail vers la théorie des équations différentielles et l'analyse de la théorie des fonctions. Dans ce second domaine, le nîmois s'inscrit dans le courant de recherche des mathématiciens allemands dont Karl Weierstrass est le symbole, qui tentent d'établir les principes de l'analyse

212. [**Gispert 1996b**, 404].

sur de nouveaux fondements. Il en partage à distance les intérêts, les codes et les méthodes : en un mot, la *culture*[213].

Durant cette période agitée où Darboux se montre extrêmement prolifique et semble se chercher de nouvelles identités, les réceptions immédiates de ses travaux n'ont plus la même saveur que celles prospères des recherches du géomètre en plein essor qu'il était. Certes certains de ses travaux connaîtront plus tard une seconde jeunesse, mais au temps de leur écriture, ils sont parfois inadaptés au milieu mathématique, parfois à la marge des courants de recherche. Ils pâtissent pour certains d'une mauvaise diffusion, et se heurtent pour d'autres à la priorité des productions concomitantes. Certaines dynamiques de son cheminement intellectuel vont alors se retourner : ce n'est plus son identité sociale de rédacteur qui jouera le rôle de déclencheur comme fin 1869, mais son identité institutionnelle de professeur. En 1878, Gaston Darboux devient en effet le professeur de Géométrie Supérieure de la Faculté des Sciences, et cette trajectoire professionnelle épouse parfaitement le mouvement de repli identitaire qu'il semblait déjà avoir amorcé. Il y retrouve un épanouissement mathématique en recentrant ses intérêts scientifiques sur ses belles amours de jeunesse géométriques. L'avènement du professeur de Géométrie marque ainsi la seconde naissance du géomètre.

Notre travail de thèse, que nous venons en quelque sorte de synthétiser, nous a permis d'apporter de nombreux éléments nouveaux concernant Darboux. Au regard de sa biographie, plusieurs éléments restés inconnus sont utiles pour expliquer son parcours et sa future carrière. Les circonstances de son entrée à l'Ecole Normale sous-tendent en effet l'évolution ultérieure de ses positions dans les institutions et président à la réceptivité du milieu scientifique national pour sa production mathématique. Dans un cadre plus intime, connaître et prendre en compte sa vie familiale permet d'obtenir une compréhension plus complète de son identité sociale, de son arrivée à la tête du Bulletin des Sciences ou encore de son élection retardée à l'Académie des Sciences.

Nous avons par ailleurs fait la lumière sur plusieurs travaux de Gaston Darboux, restés en dehors du spectre des enquêtes historiques, mais qui étaient pourtant considérés comme remarquables par ses contemporains et qui ont joué un rôle majeur dans sa carrière et sa renommée internationale précoce. Au-delà de sa thèse, seule production véritablement retenue par l'historiographie, la diversité et la modernité de ses travaux sont frappantes. Et il apparaît désormais illusoire de vouloir comprendre son ascension scientifique sans prendre en considération ses travaux sur les surfaces développables focales, les systèmes de sphères et les surfaces cyclides. Ceci en outre entravait la perception de l'aspect international anticipé des identités de Gaston Darboux. Car l'internationalisme de la fin de carrière de Darboux est bien connu, notamment grâce à certains discours importants qu'il donnera en tant que Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, ou encore en lien avec son rôle dans la création et le fonctionnement de l'Association Internationale des Académies. Mais notre travail a permis de mettre également en évidence l'internationalisme de Gaston

213. Voir à ce sujet [**Lê 2015**].

Darboux dès le début de sa carrière, avant même le lancement d'un Bulletin des Sciences qui cependant vient donner encore plus de poids à cette position et à ce renom. L'aspect internationaliste de Darboux et de ses mathématiques se retrouve donc d'abord sur son Bulletin, puis plus tard dans ses engagements institutionnels.

Notre thèse a enfin apporté une composante essentielle à l'étude de Gaston Darboux avec l'inclusion de l'influence exercée par le Bulletin des Sciences sur lui. Seul le courant inverse avait jusqu'alors était considéré. Pourtant ceci nous a permis de contextualiser ses contributions à l'analyse qui avaient certes déjà été remarquées dans l'historiographie, mais n'avaient pas été replacées dans cette perspective plus large. Ces influences ont donné un éclairage nouveau sur le parcours de Gaston Darboux en général.

Tout au long de notre travail, nous avons pu évaluer la méthodologie que nous nous étions proposés d'adopter. Nous avons retrouvé la justesse et la pertinence des différents éléments méthodologiques qui nous avaient servi de points de départ dans notre introduction pour établir notre démarche générale. Ainsi nous avons retrouvé avec [**Nabonnand Rollet 2012**] l'importance de la prise en compte du personnage scientifique dans la multiplicité de ses identités, et la diversité des sources nécessaires pour appréhender leur reconstruction et comprendre leurs interactions. C'est la dynamique des enchevêtrements entre le Darboux étudiant, mathématicien, rédacteur, professeur, ... qui a de fait brossé son portrait, ou plutôt les portraits de son parcours.

La prépondérance de la réception immédiate des travaux mathématiques de Darboux a joué, comme le signalait [**Ehrhardt 2012**], un rôle crucial pour interpréter la dynamique de son identité mathématique et donc de son cheminement intellectuel même. Dans ce cadre, comme par ailleurs pour mener à bien les études consacrées au Bulletin des Sciences, l'usage des correspondances épistolaires a été absolument essentiel. Ceci ne peut d'ailleurs que renforcer la valeur accordée à l'édition de ces échanges, qui en augmente considérablement l'accessibilité pour les investigations historiques. Enfin, la faisabilité et l'accessibilité de notre approche biographique a reposé toute entière sur la stratégie de focalisation sélective proposée par [**Gispert 2012**]. Nous y avons rencontré la responsabilité de l'historien dont les intentions se doivent d'être claires, transparentes pour motiver pertinemment les morceaux choisis. Qu'il s'agisse de temps forts d'un point de vue chronologique - comme c'est le cas pour l'historienne - ou de points forts mathématiques au sens de leur représentativité, cette stratégie s'est avérée payante pour tirer profit de la pluralité des temps, des sources et des œuvres.

En cuisinant notre propre approche à partir de ces différentes recettes opportunes, notre travail qui était à l'origine d'une nature si hétérogène a pu acquérir une cohérence interne dans son unité méthodologique. L'histoire des mathématiques, l'histoire des institutions et l'histoire des journaux scientifiques y auront été capturées puis traitées avec une même ligne directrice, soit pour ainsi dire à la même sauce. Cette méthodologie a donné une intelligibilité au parcours de Gaston Darboux. Père des focales en 1864, père des cyclides en 1869, père mais aussi fils du Bulletin des Sciences en 1870, père et fils de la théorie des fonctions et de l'intégrale en 1873, père de la théorie renouvelée des solutions singulières en 1876, les images que nous avons reconstruites du scientifique nîmois sont variées et en apparence disparates. Néanmoins en visant l'empathie dans nos enquêtes avec [**Locqueneux 2013**], nous avons non seulement pu décrire son identité mathématique changeante, mais également parcouru à ses côtés les tumultes des dynamiques entre les différentes facettes de son personnage.

Mais notre méthodologie nous a par ailleurs autorisés à aborder plusieurs problématiques annexes dont elle a favorisé tant la rencontre que l'étude. L'importance du vocabulaire scientifique en est ainsi particulièrement fortement ressortie. L'analyse du sens et de l'origine de l'ambiguïté lexicale scientifique a été une étude enrichissante, instructive pour saisir les ressorts des mathématiques de nos études, mais aussi pour révéler plus largement les phénomènes de naissance et de rencontre des objets et des notions scientifiques. La mise en valeur des problématiques de diffusion, parfois erratiques, des connaissances a été essentielle pour ne pas lire les mathématiques dans la linéarité de leur chronologie, mais pour recadrer précisément le rôle des acteurs et de leurs interactions. Enfin, nous avons, plus ponctuellement, pu cerner les intentions du scientifique dans son acte d'écriture. Cette problématique nous paraît très intéressante, et mériterait d'être développée au-delà de ce travail.

Pour finir, en retraçant depuis leur genèse l'histoire d'objets scientifiques ou d'institutions parfois peu connus ou simplement jamais envisagés via cette perspective, notre méthodologie nous a amenés vers des éléments nouveaux pour l'histoire des mathématiques et des sciences en général. Nous avons ainsi constitué des portraits inédits pour la théorie projective des focales, la théorie des surfaces cyclides, les coordonnées pentasphériques et la théorie des solutions singulières des équations différentielles. De même, nous avons retracé la naissance méconnue de l'Ecole Pratique des Hautes Etudes et ainsi, par filiation, celle du Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques. Comme c'était le cas pour certaines parties de ces histoires institutionnelles, nous avons en outre réexaminé certaines lectures historiques dont la plus importante reste celle du théorème des bornes. C'est en rectifiant avec précision la place de Bolzano et de Weierstrass que nous avons pu y comprendre pleinement le rôle de Darboux passé jusqu'alors inaperçu.

Certaines des approches que nous avons développées dans cette thèse nous paraissent utiles et propices à des usages et des extensions ultérieurs. La méthodologie d'ensemble a d'une part permis de faire émerger plusieurs études sinon d'un genre nouveau, tout du moins abordées avec une perspective et un degré de précision nouveaux. Notre travail a ainsi illustré comment cette approche pouvait se révéler appropriée pour enquêter sur les évolutions lexicales, l'existence et le contour des traditions et des écoles de recherche, l'origine et l'impact des diffusions erratiques des savoirs ou encore la circulation de la paternité de ces savoirs. D'autre part, l'influence des journaux scientifiques sur leurs rédacteurs constitue une dimension nouvelle de l'étude historique qui revêt à nos yeux une grande importance. Enfin, nous devons signaler notre usage des journaux non mathématiques, et même plus généralement non scientifiques, pour comprendre la diffusion et la représentation des problématiques scientifiques auprès du public le plus large. C'est en effet grâce à cette approche que nous avons apporté un regard inédit sur l'aperçu des géométries non-euclidiennes à travers notre annexe sur l'affaire Carton.

Les pistes suggérées dans nos enquêtes pour répondre aux diverses problématiques rencontrées grâce à notre méthodologie, et ainsi présenter une lecture historique, doivent de manière générale être considérées comme des propositions qui gagneront sans doute à être mises à l'épreuve et critiquées à la lumière d'autres études et d'autres objectifs. Ainsi par exemple, les analyses du vocabulaire scientifique pourraient bénéficier d'une investigation dédiée à la diffusion du savoir à travers les langues, ou à travers le caractère oral de la transmission. De même, les études de diffusion erratique à petite échelle profiteraient certainement d'une mise en relation avec le traitement historique de la diffusion du savoir sur des échelles de temps et d'espace plus vastes.

Au regard de notre héros, Gaston Darboux, notre stratégie d'étude par morceaux choisis a bien sûr jeté le voile sur une grande partie de sa production scientifique que nous avons certes étudiée, mais qui n'est de fait pas apparue dans cette thèse. Tout en conservant les mêmes approches méthodologiques, il nous semble pertinent de chercher à évaluer la répercussion de son cheminement intellectuel complexe des années 1870 sur ses mathématiques ultérieures d'une part, et son enseignement d'autre part. Une enquête pourrait d'ailleurs être entièrement dédiée à la partie enseignement de sa vie scientifique que nous n'avons pas analysée en profondeur. On pourrait également s'interroger sur la persistance de l'unité de sa personnalité scientifique que nous avons mise en valeur dans notre enquête. Mais la poursuite qui nous semble la plus naturelle serait le prolongement de l'analyse des interactions entre le rédacteur Darboux et son Bulletin : la perméabilité de son identité mathématique évolue-t-elle dans le temps ? Comment change-t-elle ? D'un autre côté, l'influence de Darboux sur son journal conserve-t-elle la forme de celle des premières années d'existence de la publication ?

Gaston Darboux, spécialiste de la géométrie infinitésimale, titulaire de la chaire de Géométrie Supérieure de la Sorbonne. Voilà un portrait qui s'inscrit désormais dans un parcours riche aux dynamiques alambiquées où s'entremêlent les identités de l'étudiant, du rédacteur, du géomètre, de l'éphémère analyste et du professeur. Mathématicien qui donne naissance à deux géomètres, rédacteur qui transforme un mathématicien que le professeur influence, dont les méthodes continuent de converger lorsque les centres d'intérêt divergent, les contours de son parcours montrent que la vie de Gaston Darboux est une intégrale complexe dont le chemin de l'enquête historique n'a pas fini de modifier la valeur.

Cinquième partie

Annexes

Annexes graphiques

1. Coniques focales de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde à une nappe

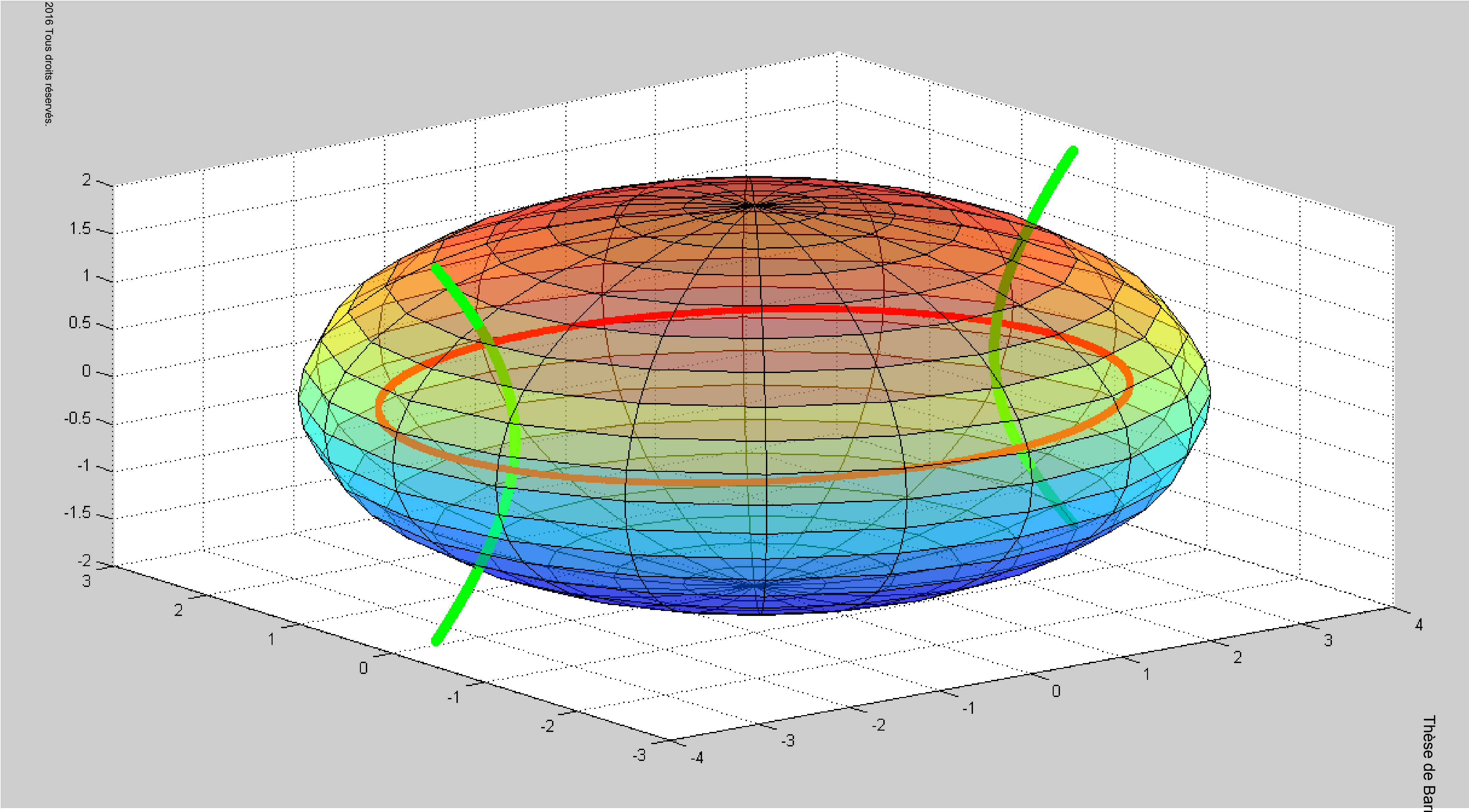


FIGURE 27. En rouge, l'ellipse focale est strictement incluse dans l'ellipsoïde. En vert, l'hyperbole focale coupe l'ellipsoïde en ses quatre ombilics.

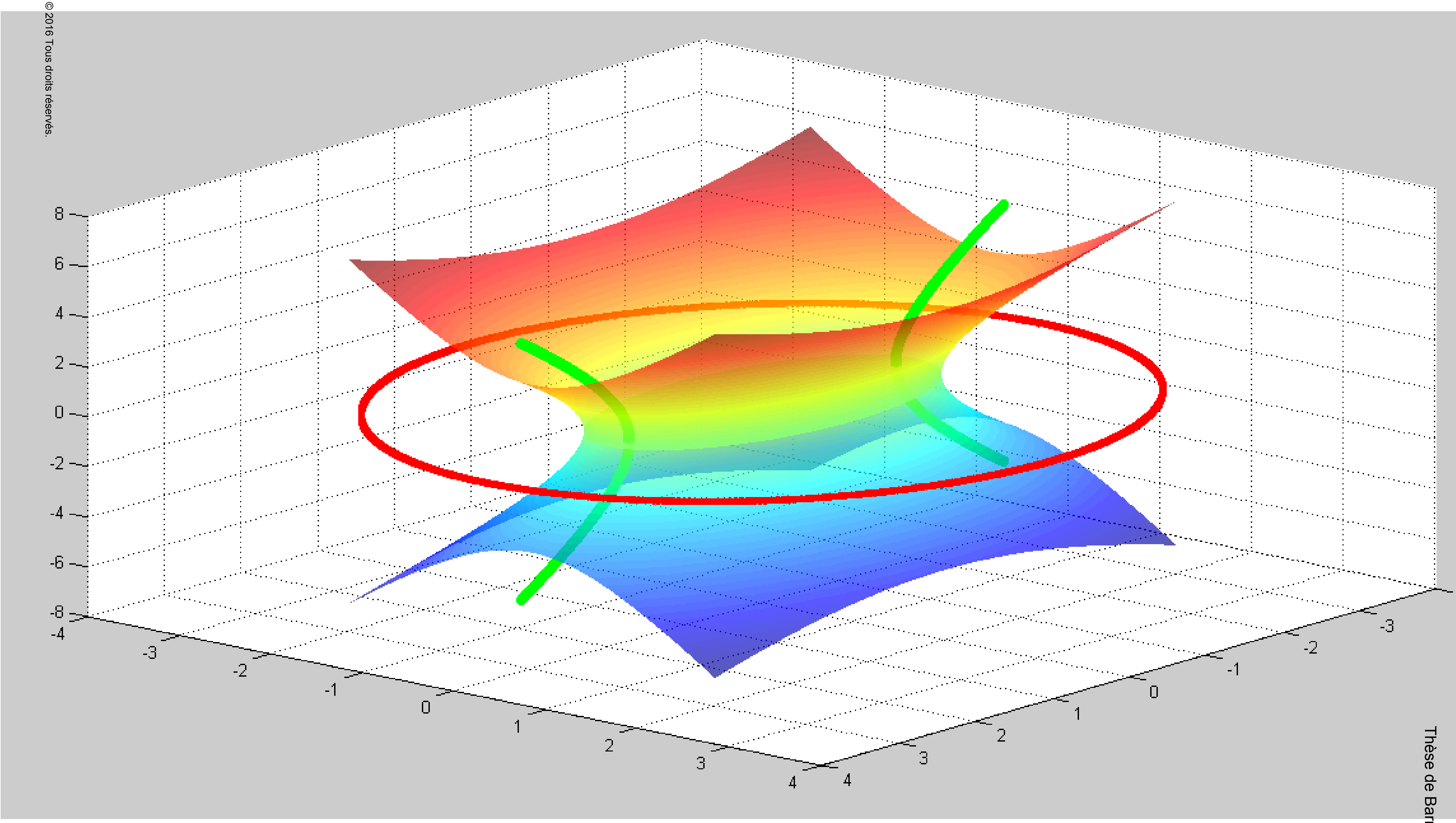
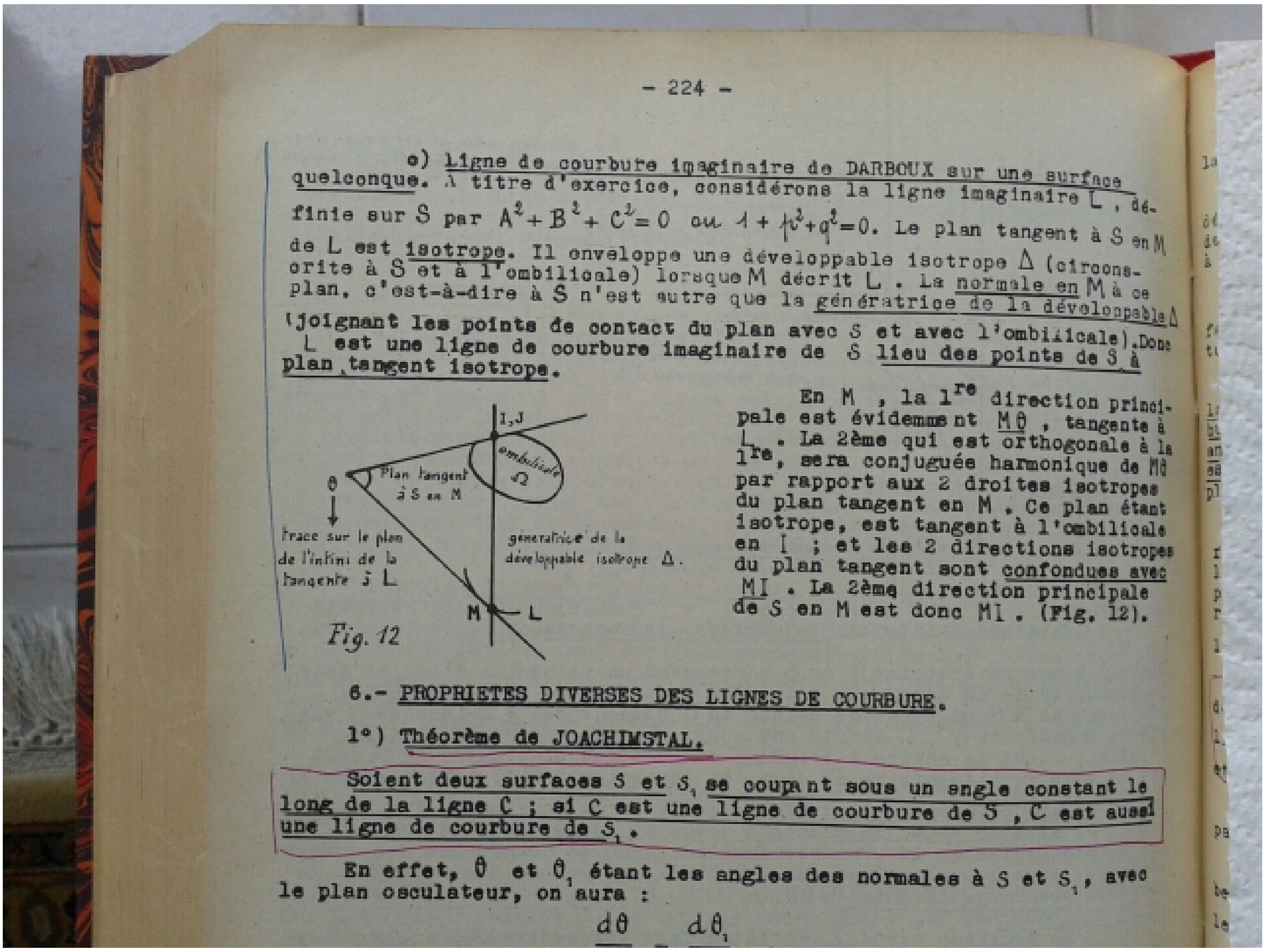


FIGURE 28. En rouge, l'ellipse focale est à l'extérieure de l'hyperboloïde. En vert, l'hyperbole focale reste à l'intérieure de l'unique nappe de l'hyperboloïde : l'hyperboloïde est à courbure négative, il n'admet pas d'ombilics.

2. Ligne de courbure imaginaire de Darboux : le cours de Gaston Julia de 1959



\- 224 -

e) Ligne de courbure imaginaire de DARBOUX sur une surface quelconque. A titre d'exercice, considérons la ligne imaginaire L, définie sur S par $A^2+B^2+C^2=0$ ou $1+p^2+q^2=0$. Le plan tangent à S en M de L est isotrope. Il enveloppe une développable isotrope Δ (circonscrite à S et à l'ombilicale) lorsque M décrit L. La normale en M à ce plan, c'est-à-dire à S n'est autre que la génératrice de la développable Δ (joignant les points de contact du plan avec S et avec l'ombilicale). Donc L est une ligne de courbure imaginaire de S lieu des points de S à plan tangent isotrope.

En M, la 1re direction principale est évidemment $M\theta$, tangente à L. La 2ème qui est orthogonale à la 1re, sera conjuguée harmonique de $M\theta$ par rapport aux 2 droites isotropes du plan tangent en M. Ce plan étant isotrope, est tangent à l'ombilicale en I ; et les 2 directions isotropes du plan tangent sont confondues avec MI. La 2ème direction principale de S en M est donc MI. (Fig. 12).

Fig. 12

6.- PROPRIETES DIVERSES DES LIGNES DE COURBURE.

1°) Théorème de JOACHIMSTAL.

Soient deux surfaces S et S_1 se coupant sous un angle constant le long de la ligne C ; si C est une ligne de courbure de S, C est aussi une ligne de courbure de S_1.

En effet, θ et θ_1 étant les angles des normales à S et S_1, avec le plan osculateur, on aura :

$$\frac{d\theta}{\ } = \frac{d\theta_1}{\ }$$

Figure 29. Extrait du "Cours d'Algèbre et de Géométrie" de 1959 donné à l'Ecole Polytechnique par Gaston Julia. Exemplaire d'André Croizat.

3. Victor Puiseux et le Mont Pelvoux

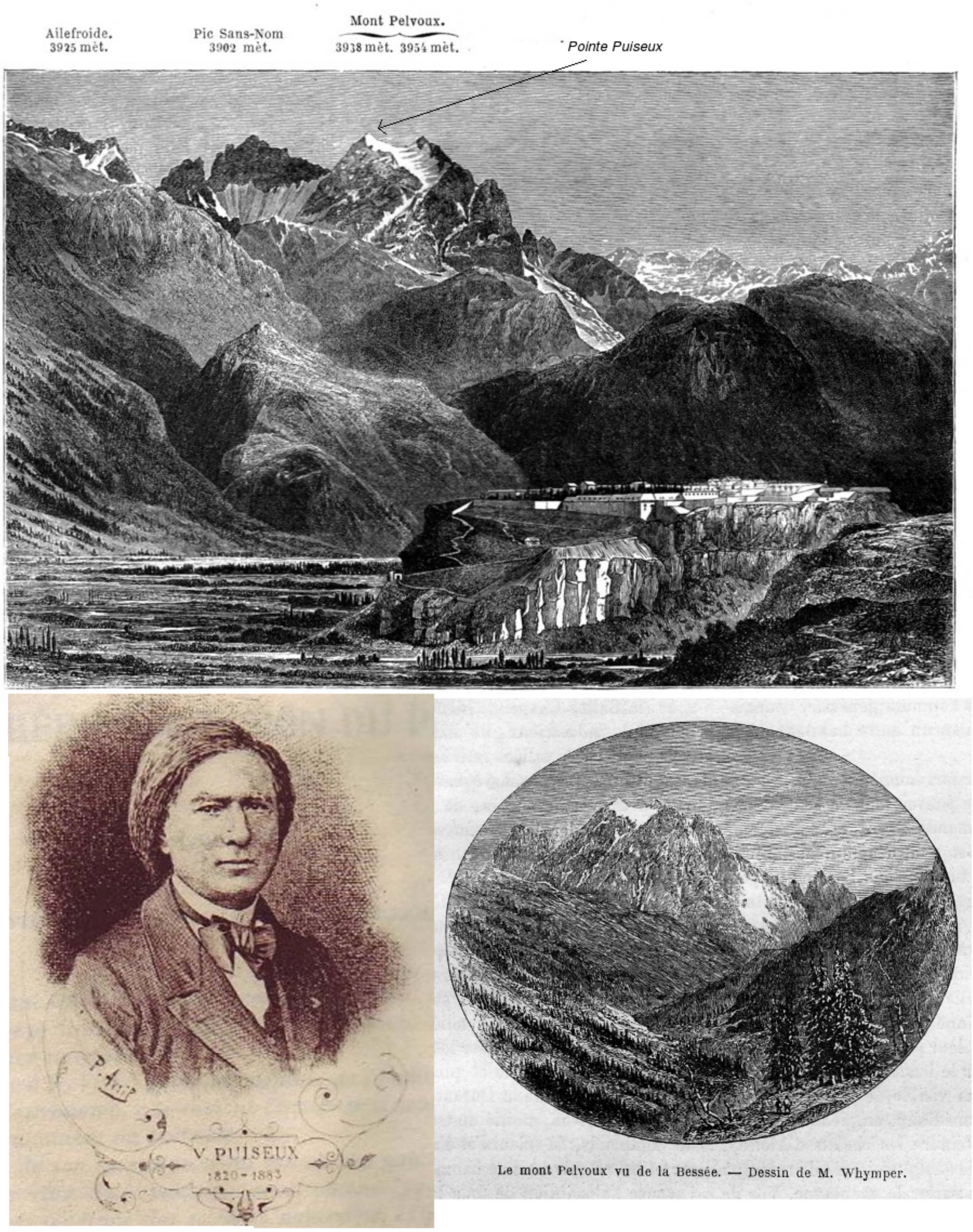


FIGURE 30. Victor Puiseux (1820-1883) et deux vues du Mont Pelvoux d'Edward Whymper, ascensioniste lui-même en Août 1861.

4. Tableau des périodiques de Gauthier-Villars en 1885, incluant leur prix

PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

Librairie Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55, Paris.)

	Format.	Périodicité.	Paris.	France et Algérie	Union postale.
			fr	fr	fr
Annales scientifiques de l'École Normale supérieure	In-4	Mensuel	30	35	35
Bulletin astronomique, publié sous les auspices de l'Observatoire de Paris, par F. Tisserand	Gd in-8	Mensuel	16	18	18
Bulletin hebdomadaire de l'Association scientifique de France	In-8	Hebdomad.	15	15	17
Bulletin de la Société française de Photographie	Gd in-8	Mensuel	12	12	15
Bulletin de la Société internationale des Électriciens	Gd in-8	Mensuel	25	27	27
Bulletin de la Société mathématique de France	Gd in-8	6 Nos	15	16	16
Bulletin des Sciences mathématiques, publié par G. Darboux, J. Houel et J. Tannery	Gd in-8	Mensuel	18	20	20
Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences	In-4	Hebdomad.	20	30	34
Journal de l'École Polytechnique (2 Cahiers par an). Prix de chaque cahier	In-4	Semestriel	12	12	12
Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par Liouville, continué par H. Resal, et publié, depuis 1885, par Camille Jordan	In-4	Trimestriel	30	35	35
Journal de Physique théorique et appliquée, fondé par d'Almeida, publié par E. Bouty, A. Cornu, F. Mascart et A. Potier	Gd in-8	Mensuel	15	15	15
Journal de l'Industrie photographique, organe de la Chambre syndicale de la Photographie	Gd in-8	Mensuel	7	7	7
L'Astronomie, Revue mensuelle d'Astronomie populaire, de Météorologie et de Physique du Globe; publiée par Camille Flammarion	Gd in-8	Mensuel	12	13	14
Nouvelles Annales de Mathématiques, rédigées par Gerono et Brisse	In-8	Mensuel	15	17	17
American Journal of Mathematics pure and applied. Editor in chief Sylvester	Gd in-4	Trimestriel	30	30	30
Bulletin de l'Association belge de Photographie	Gd in-8	Mensuel	27	27	27
Mathesis, Recueil mathématique à l'usage des Écoles spéciales et des Établissements d'instruction moyenne; publié par Mansion et Neuberg	Gd in-8	Mensuel	9	9	9

Les abonnements sont faits pour un an et partent de Janvier. — Envoyer un mandat de poste ou valeur sur Paris à M. Gauthier-Villars, Éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris. On peut aussi s'abonner, sans supplément de frais, en versant le prix de l'abonnement dans un des bureaux de poste de France et de l'Union postale. — Lorsque l'abonnement n'est pas payé en souscrivant, le prix est augmenté de 50 centimes pour frais de recouvrement.

Figure 31. [214]

214. Ce tableau est présenté en réclame comme la première feuille du Bulletin des Sciences Mathématiques pour le numéro de Janvier 1885.

5. Répartition par matières des mémoires et ouvrages cités dans le Bulletin selon les tomes (1 à 9)

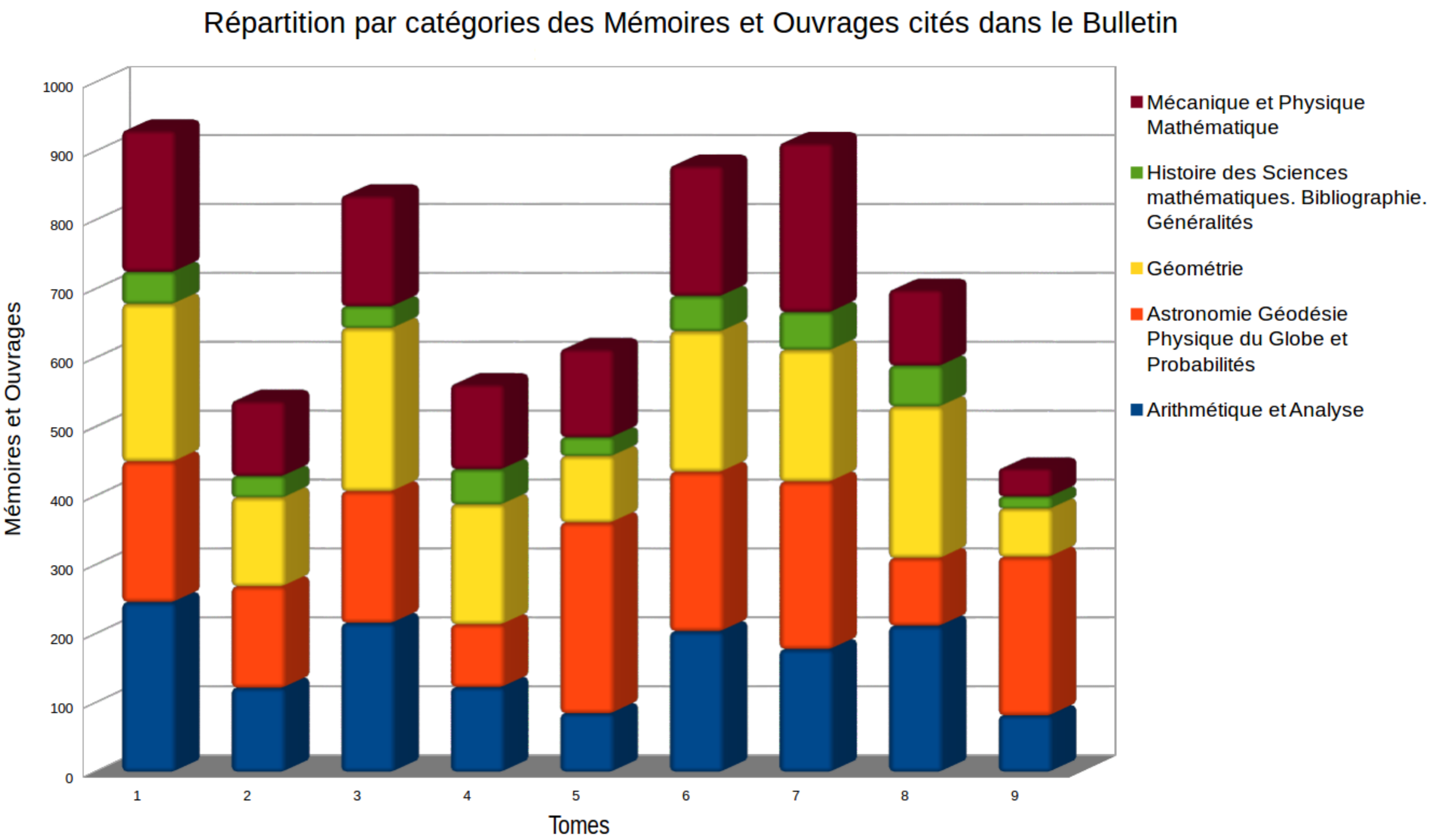


Figure 32

Annexes de rédaction

6. Un épilogue professoral

Gaston Darboux fut professeur de la classe de Mathématiques Spéciales du Lycée Louis-le-Grand de 1867 à 1872. Il devint ensuite maître de conférences à l'Ecole Normale de 1872 à 1881. C'est cependant à la Sorbonne qu'il dispensa la plus grande part de son enseignement : suppléant Liouville à la chaire de Mécanique rationnelle de 1872 à 1878, il assure ensuite les cours de Géométrie Supérieure à partir de 1878 (les trois premières années en tant que suppléant de Michel Chasles). Il y professera jusqu'en 1916 avant de se faire remplacer. Dans le même temps, Darboux enseigna également à l'Ecole Normale d'enseignement secondaire pour les jeunes filles de Sèvres depuis sa création en Décembre 1881, une Ecole dont il été l'un des fondateurs[215].

Après son acquisition très précoce du goût de l'enseignement, que lui procura son maître bien-aimé Charles Berger à Montpellier durant ses jeunes années (voir [Chap.1,2.2]), Darboux a toujours aimé enseigner. Josias Paut raconte qu'il "*a considéré l'enseignement presque comme un sacerdoce et à ce sujet il a donné le bon exemple à beaucoup de professeur de Lycée [...] dont les idées directrices étaient : dévouement pour les élèves et désintéressement*" ([**Darboux 1933**, 44]). Et l'enseignement du professeur Darboux a été unanimement loué par ceux qui assistèrent à ses leçons. Nous rassemblons ci-dessous à ce propos quelques témoignages de ses élèves et de ses collègues.

> C'est en 1871 que j'ai été votre élève au Lycée Louis-le-Grand, et après 49 années écoulées je me rappelle encore, comme si c'était hier, le plaisir avec lequel mes camarades et moi nous allions à votre classe. Vous saviez, en vous jouant, obtenir de nous une dose énorme de travail et je frémis rétrospectivement en voyant aujourd'hui la pile de mes cahiers de notes prises à votre cours. La clarté, la netteté de votre élocution, le caractère personnel de vos démonstrations, provoquaient notre admiration et nous travaillions avec entrain, sans même nous rappeler que nous avions de sérieux examens à préparer, et sans même savoir les noms des examinateurs. Vous n'aviez pas besoin, pour obtenir de nous du travail, d'invoquer la nécessité de satisfaire tel ou tel de nos juges, et même parfois vous n'hésitiez pas à critiquer les méthodes qui semblaient avoir leurs préférences : vous développiez ainsi notre sens critique et notre puissance de raisonnement, au lieu de charger notre mémoire. Aussi, ce qui est à l'éloge du professeur et des examinateurs, vos élèves remportaient-ils d'éclatants succès aux examens de la fin de l'année. Lorsque je me remémore mes camarades de classe, je les vois presque tous entrés à l'Ecole polytechnique ou à l'Ecole normale, presque tous ont eu plus tard une belle carrière : Henri Becquerel, mort membre de l'Institut et professeur

215. Voyez [**Picard 1917**, xxxiv], [**Darboux 1912**, 465-7]. L'initiative de cette création revient cependant, comme le rappelle Darboux, à Camille Sée et à Jules Ferry.

à l'Ecole polytechnique ; Henri Deslandres, aujourd'hui membre de l'Institut ; Antoine Breguet, dont la vie, trop courte hélas !, a pu être marquée par d'intéressantes découvertes en téléphonie ; Weiss, directeur des chemines de fer de l'Est, et enfin, pour ne pas nommer toute votre classe, le colonel Bertrand, fils du grand savant Joseph Bertrand.

[...] Entraîné par le souvenir de votre enseignement de 1872, je vous ai suivi plus tard à la Sorbonne, et je n'ai pas été surpris de retrouver chez le professeur de Faculté les mêmes qualités de clarté, de science profonde et d'invention, le même talent à rendre lumineuses les questions les plus abstruses que j'avais admirés chez le professeur du lycée Louis-le-Grand. J'ai eu le plaisir de vous y entendre professer vos premières leçons sur la théorie générale des surfaces [...]

Lucien Lévy [216], élève de la classe de Mathématiques Spéciales de Darboux (1871-1872), élève de la classe de Géométrie Supérieure de la Faculté des Sciences (1880-1881) ; [**Darboux 1912**, 471-473]

En 1872, tu nous revenais [à l'Ecole Normale] comme maître de conférences. Ta jeunesse, ton ardeur, ton exemple attirèrent les jeunes gens les plus distingués |...] C'est en 1882 que tu as quitté l'Ecole pour la Faculté des Sciences, mais nos mathématiciens ont continué à être tes disciples. Parmi les cours non obligatoires pour eux, qu'ils fréquentent en Sorbonne, est ton cours de Géométrie supérieure. Que tu le professes depuis trente ans, que tu aies publié tes leçons en volumes, cela n'a pas nui au succès de ta parole. Tu ne te répètes point, parce que ton esprit travaille toujours : l'expérience acquise n'endort pas ton activité toujours jeune. Dans tes leçons, qui leur semblent trop courtes, tes élèves trouvent, avec des modèles d'élégance et de sobriété, quantité d'idées nouvelles. Les meilleurs s'enthousiasment pour la recherche ; tu les encourages et tu les guides. Les dédicaces de leurs thèses sont les témoignages de leur reconnaissance. Tu es le patriarche d'une lignée indéfinie et vaillante.

Ernest Lavisse, camarade et proche ami de Darboux à l'Ecole Normale (promotion lettres 1862), professeur à la Faculté des Sciences (à partir de 1880), Directeur de l'Ecole Normale (à partir de 1904). [**Darboux 1912**, 461]

---

ce n'est pas mon rôle de parler de l'administrateur laborieux et fécond en ressources, ni de la limpide clarté du professeur [...] il n'est pas toujours facile, dans un court et rapide exposé, de faire goûter [les joies des mathématiques] d'un nombreux auditoire ainsi qu'il conviendrait. Si encore, j'avais votre talent d'exposition, je ne redouterais pas ce péril ;

216. Lucien Lévy (X 1872) est le père du mathématicien - plus célèbre que lui - Paul Lévy (X 1904 - major). Jules Hoüel fut par ailleurs témoin du mariage à Bordeaux de Lucien Lévy en 1878 : Hoüel est en effet l'ami du père de Lucien, Edouard Lévy, qui appartient comme lui, Pasteur et Berger à cette immanquable promotion 1843 de l'Ecole Normale.

malheureusement, je ne sais pas comme vous rendre faciles et agréables les voies les plus arides.

Henri Poincaré, dont Darboux fut membre du jury de thèse (1879), [**Darboux 1912**, 450]

C'est à son enseignement riche de faits et d'aperçus suggestifs, aux leçons d'Hermite animées d'enthousiasme, aux cours élégants de Darboux, à des conférences de Paul Appell et de M. Goursat que nous avons dû notre première initiation aux mathématiques modernes [...]

Ce fut aussi une fortune singulièrement heureuse que les leçons où Darboux, de sa voix dont la douceur musicale est toujours restée présente à mon esprit, nous initiait à la Géométrie infinitésimale dont il était l'un des fondateurs.

[...]

[A propos de Darboux et Hermite :] j'ai nommé deux des grands maîtres auxquels je dois ma formation scientifique.

Jacques Hadamard, élève du cours de Géométrie Supérieure de la Sorbonne (1886-87) [217]

Six ans plus tard, après avoir suppléé Bertrand pendant un an au Collège de France et professé pendant cinq années avec éclat dans la classe de spéciales de Louis Le Grand, Darboux revenait à l'Ecole [Normale] comme Maître de conférences.

Sa jeunesse, son ardeur, le charme de ses leçons, où ses auditeurs trouvaient, avec des modèles d'élégance et de sobriété, nombre d'idées originales et neuves et de rapprochements suggestifs, attirèrent les sujets les plus distingués dans la voie qu'il avait lui-même suivie. [...]

Bien plus, les mémoires de Darboux, comme les ouvrages de Boissier [218], portent la marque de leur talent de professeur, qui fut une partie essentielle de leur génie. C'est qu'il y avait chez eux le même besoin de clarté, où l'on peut voir l'influence première du climat lumineux de leur ville natale [...] Tous deux apparaissent donc comme des modèles accomplis de l'éducation, également préoccupés de science et d'enseignement

Ernest Vessiot [219], élève de la Faculté des Sciences (1886-87), professeur de cette Faculté (à partir de 1910), [**Darboux 1933**, 22-23]

217. Extraits de l'allocution prononcée par Hadamard lors de son Jubilé, le 7 Janvier 1936.

218. Gaston Boissier est un historien français né à Nîmes en 1823 et ancien élève de l'Ecole Normale. La cérémonie du 22 Octobre 1933, tenue à Nîmes pour célébrer l'inauguration d'un buste de Darboux dans la cour du Lycée de Nîmes, est également dédiée à la mémoire de Gaston Boissier. Cela explique sa mention dans le discours de Vessiot.

219. En Avril 1888, Darboux interviendra auprès de Lie pour obtenir du norvégien que Vessiot, ainsi qu'un second élève normalien (Wladimir de Tannenberg), puissent effectuer un semestre à Leipzig sous la direction de Lie. Ce-dernier acceptera, et se montrera particulièrement satisfait du travail de Vessiot. Il écrit à Darboux en Décembre 1888 : "*Dans les 3 à 4 derniers mois, vos élèves Tannenberg et Vessiot ont fait de gros progrès à propos de ma théorie. Si on doit beaucoup attendre des deux, on doit particulièrement*

Les qualités d'esprit de Darboux se retrouvent dans ses livres comme on les trouvait dans son enseignement. Il fut un professeur incomparable. Sa diction sobre et élégante, la clarté de son exposition qui ne laissait rien dans l'ombre faisaient de chacune de ses leçons une œuvre d'art achevée ; comme les chefs-d'œuvre de l'architecture antique, la beauté s'en révélait par le seul appel à la raison de l'auditeur ou du spectateur.

Comme son maître Joseph Bertrand, il ne semblait pas goûter outre mesure les méthodes générales que Joseph Bertrand comparaît, dit-il, à ces grandes routes que l'ingénieur a tracées d'un point à un autre, sans se préoccuper ni de la beauté des sites, ni de la situation de la contrée qu'elles traversent. Aussi Darboux aimait à traiter chaque problème par la méthode qui lui était le plus appropriée ; dans le choix de cette méthode, il montrait que l'esprit de finesse, en dépit de Pascal, est aussi indispensable au bon géomètre que l'esprit de géométrie.

Elie Cartan, ancien élève de la classe de Géométrie Supérieure de la Faculté des Sciences (1889-1891) ; [**Darboux 1933**, 16]

Vos élèves, Monsieur, gardent de vos leçons un souvenir inoubliable. Elles aiment à évoquer la clarté, la précision, l'élégance de vos démonstrations, et ce souci constant de former des esprits justes et droits, incapables de se payer de mots, ne se lassant pas de chercher la perfection du fond et de la forme. Quand, dans une circonstance mémorable, au 23$^{\text{ème}}$ anniversaire de notre maison, vous avez voulu, rappelant les souvenirs des premières années, assurer que les Mathématiques ont quelque chose de rébarbatif, une voix s'écria « Pas avec Monsieur Darboux ! », et cette protestation spontanée était l'expression exacte et incontestée de beaucoup de gratitude et d'admiration silencieuses. Celles qui ont eu le privilège de vous avoir pour maître en 3$^{\text{ème}}$ année me prient, de façon spéciale, de faire mention de leur reconnaissance : vos critiques si nettes, qui ne laissaient subsister dans une leçon rien d'inutile, qui les obligeaient à mettre toujours en lumière le point important, elles ne les ont jamais oubliées ; et si leurs élèves, aujourd'hui, ont imposé, par le développement tout naturel de leur esprit, le relèvement des programmes de mathématiques dans les Lycées de jeunes filles, c'est à vos leçons, Monsieur, et à celles des collaborateurs éminents dont vous avez inspiré le choix, qu'elles le doivent.

Louise Belugou, Directrice de l'Ecole Normale de jeune filles de Sèvres (1906-1919) ; [**Darboux 1933**, 46]

*attendre de Vessiot qui n'a pas seulement la réceptivité mais également l'originalité. Certes son premier travail n'a pas donné entière satisfaction mais je suis persuadé que tant formellement qu'objectivement les apports de Vessiot seront de valeur. Je suis persuadé qu'entre ses mains, ma théorie généralisée de l'intégration (*meine allgemeine Integrationtheorie*) deviendra une simplicité, alors même que les résultats n'en sont pas si simples*", [**Archives épistolaires Lie**].

> Darboux fut un professeur des plus distingués, mettant dans ses leçons ce qui était nécessaire et supprimant le reste. Il a eu comme récompense de garder la considération de l'affection de tous ses élèves de France ou de l'étranger. C'est une grande satisfaction pour une fin de carrière dans l'enseignement.
>
> C'est un exemple à donner aux professeurs d'enseignement secondaire qui verront à quels résultats on arrive par un travail continu [...]
>
> Pr. Dumoulin de l'Université de Gand, ancien élève de la classe de Géométrie Supérieure de la Faculté des Sciences (1891-1893) ; [**Darboux 1933**, 46]

> Il succédait à Chasles pour laquelle la chaire de Géométrie Supérieure avait été créée en 1846. Il modifia complètement la physionomie de cette chaire, qui devint surtout une chaire de Géométrie infinitésimale. Il exposait avec une clarté merveilleuse, utilisant avec une égale habileté le raisonnement purement géométrique et les plus délicates conceptions de l'Analyse.
>
> Dans cette chaire, qu'il a occupée avec un incomparable éclat pendant 37 ans, il a formé une nombreuse pléiade de disciples, répandus dans tous les pays du monde, et à qui incombe maintenant la mission de propager ses méthodes et de développer les germes de découvertes qu'il a laissés.
>
> Claude Guichard, élève de l'Ecole Normale et de la Faculté des Sciences de Paris (1880-1883), professeur à la Sorbonne (1910-1924) qui succédera à Gaston Darboux à la Géométrie Supérieure en 1918 ; [**Guichard 1917**]

Gaston Darboux avait dit lui-même à propos de Gaspard Monge : "*Monge ne se contentait pas de faire des découvertes ; il faisait aussi des élèves, ce qui vaut quelquefois mieux*" ([**Darboux 1908**, 108]). De ce point de vue, Darboux aura largement suivi le modèle de Monge qu'il considérait comme un exemple. Son enseignement a en effet constitué une très large partie de sa vie scientifique. Si notre travail de thèse n'a pas révélé pleinement l'importance de ce pan de sa vie mathématique, en revanche le nombre des élèves que Gaston Darboux a formés et leur place de premier rang dans la science ont été suggérés par les multiples mentions que nous avons faites de ces élèves et de leurs travaux.

7. L'affaire Carton, ou "les profanes marchant sur la foi du postulatum d'Euclide"

Cette annexe nous permet de donner un éclairage sur l'influence indirecte du Bulletin des Sciences sur Gaston Darboux, à travers les échanges avec Jules Hoüel, en matière de géométrie non-euclidienne. Elle révélera aussi l'attitude particulière du nîmois face à Joseph Bertrand, au cœur de cette *affaire Carton*. Par ailleurs, la capacité diplomatique de Darboux y apparaîtra nettement pour la première fois. Cette annexe donne également un aperçu du degré d'isolation des mathématiques françaises de la fin des années 1860, théâtre d'un imbroglio académique qui sera la risée éphémère de certains mathématiciens allemands ou italiens. Enfin, elle signale l'importance de la prise en compte des journaux non mathématiques dans la diffusion des géométries non-euclidiennes et la construction d'une opinion générale auprès d'un large public.

L'affaire Carton est bien connue des historiens des mathématiques. On peut ainsi en référer à [**Pont 1986**, 637-660] et [**Voelke 2005**, 49-72] pour en découvrir les grandes lignes, ainsi que quelques communications épistolaires entre mathématiciens ayant trait à cette affaire. Plus récemment, cette épisode a été présenté avec soin dans [**Henry Nabonnand 2016**, 23-33] dans le but d'éclairer les correspondances du mathématicien Jules Hoüel qui y sont publiées. Dans le même contexte, de précieux renseignements se trouvent également dans les lettres échangées entre Beltrami et Hoüel rapportées dans [**Boi Giacardi Tazzioli 1998**, 109-130] et dans les notes qui y sont apposées en bas de page. Nous présentons néanmoins ci-dessous une histoire de cette fameuse affaire dont la particularité réside dans son aspect très détaillé, qui établit une chronologie précise des événements qui se déroulent en Décembre 1869 et en Janvier 1870. Cette présentation est enrichie d'une compilation des correspondances entre mathématiciens se rapportant à cette affaire. Surtout elle est accompagnée des articles des journaux scientifiques français qui ont largement contribué à sa diffusion - et donc à celle du sujet de la géométrie non euclidienne auquel elle se rattache - auprès d'un public plus vaste que celui de la communauté des mathématiciens de premier rang familiers des travaux de géométrie non euclidienne. La mise en lumière des contenus des périodiques révèle alors la grande diversité des réactions et de la manière de comprendre, d'interpréter les controverses au cœur de cette affaire dont les abstraites mathématiques restent inaccessibles pour le plus grand nombre. Ce lectorat, qui ne peut ou ne veut pas se plonger dans la technique des démonstrations, se fie aux opinions des rédacteurs scientifiques : les discussions sont alors parfois plus philosophiques que mathématiques. Par ailleurs, certains points de la chronologie de l'affaire Carton étaient sujets à rectification, et les extraits de journaux auxquels les mathématiciens se réfèrent dans leurs correspondances restaient difficilement accessibles. Dans ce cadre, notre but était ainsi d'éclaircir nettement ces deux points, la chronologie des événements ainsi que les articles de périodiques se rapportant à l'affaire. Dans le but de favoriser des recherches ultérieures, nous avons systématiquement rapporté les liens permettant d'accéder aux versions numérisées des périodiques concernés.

L'affaire Carton relève du domaine de la géométrie et des postulats (ou "*demandes*") donnés par Euclide dans ses "*Éléments*". Le postulat particulier dont il est question, appelé alors par les mathématiciens "*postulatum*" ou "*postulatum d'Euclide*", constitue la cinquième "*demande*" du géomètre grec : "*Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits*"([**Euclide 1990**, 175]). Cette cinquième demande équivaut aux deux propositions suivantes :
"*Etant donné un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe une seule droite passant par ce point et parallèle à la première*"
"*La somme des angles d'un triangle est égale à deux droits*"

Comme le note Bernard Vitrac, cette cinquième demande est ce que nous appelons maintenant le postulat (ou l'axiome) des parallèles. De nombreux mathématiciens ont tenté jusqu'au XIX$^{\text{ème}}$ siècle de démontrer cette demande, la réduisant donc à l'état de simple proposition. L'une des plus célèbres tentatives fut celle d'Adrien-Marie Legendre (1752-1833) dans ses "*Éléments de Géométrie*" : Legendre traite cette question du postulatum en utilisant le second énoncé équivalent, c'est-à-dire en cherchant à démontrer que la somme des angles d'un triangle vaut 180°. Pour cela il procède par double inégalité, montrant dans un premier temps que la somme n'excède pas 180°, puis dans un second temps qu'elle ne peut en être strictement inférieure. Néanmoins ces démonstrations soulèvent certains doutes, y compris chez leur auteur, et Legendre ne les fera pas apparaître dans toutes les éditions de son livre [220].

Durant la première moitié du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, deux mathématiciens vont cependant mettre à jour dans leurs travaux une géométrie d'un nouveau genre en délaissant l'axiome des parallèles : le hongrois Janos Bolyai (1802-1860) et le russe Nicolaï Lobatchevsky (1792-1856).

220. L'énoncé du cinquième postulat - et donc l'absence de démonstration se substituant à son énoncé - revient dans les éditions numéro 9, 10 et 11 du livre de Legendre ([**Verdier 2007**, 44]).

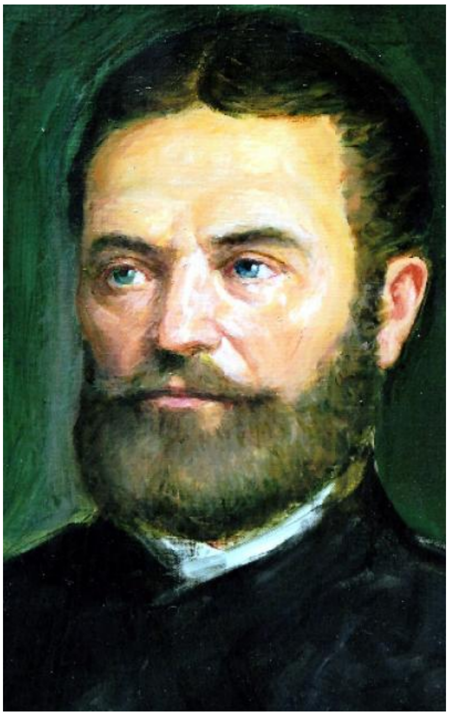



FIGURE 33. Portraits de Nicolaï Lobatchevsky (1792-1856) à gauche et Janos Bolyai (1802-1860) à droite.

En 1832, Janos Bolyai publie [**Bolyai J. 1832**] en appendice du livre de son père, Farkas Bolyai, intitulé en abrégé "*Tentamen*"[221]. Il y définit une géométrie que l'on appellera plus tard "*à courbure négative*", où la somme des angles d'un triangle est inférieure à 180° et où on peut mener en un point une infinité de parallèles à une droite donnée, violant ainsi le postulatum d'Euclide. Puis Lobatchevsky publie indépendamment deux ouvrages importants, les "*Geometrische Untersuchungen*" [**Lobatchevsky 1840**] et la "*Pangéométrie*" [**Lobatchevsky 1855**] où il traite également de cette géométrie que nous nommons hyperbolique et qu'il nomme "*géométrie imaginaire*"[222]. L'absence de contradiction dans la construction de cette géométrie "imaginaire" prouve que le postulatum n'est bien qu'un postulat qui ne saurait être démontré : son acceptation ou son rejet sont un *choix* qui mène à des constructions différentes, toutes aussi valables les unes que les autres. Cependant ces travaux, s'ils sont bien connus de Gauss[223], restent quelques temps très méconnus

221. [**Bolyai F. 1832**].

222. Pour plus de détails sur les mathématiques des ouvrages de Bolyai et Lobatchevsky, on pourra consulter [**Voelke 2005**, 19-26] et [**Gray 2007**, 101-128], ainsi que [**Gray 2006**] pour l'étude particulière des travaux de Bolyai.

223. Gauss est un ami Farkas Bolyai, le père de Janos, avec qui il correspond. La lecture de l'appendice du "*Tentamen*" le soulage du poids de devoir exposer par écrit ses propres idées en matière de géométrie non euclidienne. Il écrit à Janos Bolyai : "*Aussi est-ce pour moi une agréable surprise de voir que cette peine peut maintenant m'être épargnée, et je suis rempli d'une joie extrême que ce soit précisément le fils de mon vieil ami qui m'ait devancé d'une manière si remarquable.*". Il recommandera par ailleurs la lecture des "*Geometrische Untersuchungen*" de Lobatchvesky à son ami Schumacher : "*Vous savez que depuis cinquante-quatre ans (depuis 1792) je partage les mêmes convictions, sans parler ici de certains développements qu'ont reçus, depuis, mes idées sur ce sujet. Je n'ai donc trouvé dans l'ouvrage de Lobatschewsky*

de l'ensemble des mathématiciens. Ils seront redécouverts grâce aux efforts conjugués de trois mathématiciens à la fin des années 1860 : l'allemand Richard Baltzer, le français Jules Hoüel et l'italien Guiseppe Battaglini.

C'est Baltzer le premier qui va inciter Hoüel à faire connaître en France la géométrie non euclidienne en lui indiquant en 1866 les travaux de Lobatchevsky et Bolyai, et en lui assurant : "*vous vous attirerez un mérite si vous frappez en France à ce sujet sur la grande cloche*" [224]. A son tour, Hoüel fera connaître à Battaglini ces travaux l'année suivante [225] après être parvenu à se procurer les rares travaux des Bolyai grâce à la collaboration d'un architecte hongrois du nom de Franz Schmidt [226]. Le mathématicien français effectuera alors des traductions de ces recherches ([**Hoüel 1866**] et [**Hoüel 1867**]) et sera imité plus tard par son ami italien ([**Battaglini 1868**]). Eugenio Beltrami tentera quant à lui de construire en Italie des modèles permettant de représenter la géométrie de Lobatchevsky par des surfaces de l'espace euclidien dites "*pseudosphériques*" ([**Boi Giacardi Tazzioli 1998**, 3-14]). Enfin, si depuis les travaux de Gauss sur la courbure du début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle la géométrie sphérique était bien connue, elle n'était cependant pas considérée comme une alternative à la géométrie euclidienne à part entière. Pourtant, cette géométrie simple à visualiser offre un exemple de géométrie à courbure positive, où la somme des angles d'un triangle excède 180°. Plusieurs éléments la distinguent en effet de l'espace euclidien au-delà du simple axiome des parallèles : son caractère "fini" la rend non-archimédienne (les grands cercles, jouant le rôle des "droites", ne se prolongeant pas indéfiniment), mais en outre deux "droites" (grands cercles) y délimitent une surface, ce qui est incompatible avec l'espace euclidien. Ce ne sera qu'ultérieurement, avec la publication posthume du travail de Bernhard Riemann (1826-1866) sur les fondements de la géométrie ([**Riemann 1854b**]),

aucun fait nouveau pour moi ; mais l'exposition est toute différente de celle que j'avais projetée, et l'auteur a traité la matière de main de maître et avec le véritable esprit géométrique." Ces lettres sont en particulier citées dans [**Verdier 2007**].

224. Voir à ce sujet [**Voelke 2005**, 60] où est notamment citée la lettre de Baltzer à Hoüel.

225. Les lettres de Giuseppe Battaglini à Jules Hoüel ont été publiées dans [**Calleri Giacardi 1995**].

226. On peut prendre connaissance du rôle de F. Schmidt dans sa courte biographie posthume [**Halsted 1901**]. Hoüel détaillera plus tard au mathématicien italien Angelo Genocchi : "*J. Bolyai n'a jamais fait imprimer que sa "Science absolue de l'espace", et ses papiers, qui renferment sans doute des recherches de la plus haute importance, sont restés enfouis dans la bibliothèque du Collège de Maros Vàsàrhely. M. Schmidt et moi, nous avons fait des vains efforts pour obtenir sur ces papiers des renseignements quelconques. Dernièrement, M. le prince Boncompagni a entrepris auprès du ministère hongrois des démarches ayant pour but d'intéresser le gouvernement de Pest au triage et à la publication de ces précieuses reliques d'un homme à qui les circonstances ont peut-être seules manqué pour devenir un géomètre de premier ordre. Si le gouvernement italien, ou quelque grand corps savant comme l'Académie de Turin s'intéressait à cet objet, on parviendrait peut-être à vaincre l'inertie des Magyars*" ([**Fenoglio Giacardi 1991**, 183]).

que la géométrie sphérique sera regardée au même titre que la géométrie du plan euclidien et deviendra ainsi un modèle considéré comme valable de géométrie non euclidienne [227].

En dépit de ces travaux et traductions faites à l'étranger et en France - Hoüel habitant et publiant, le plus souvent, à Bordeaux - la géométrie dite imaginaire ne comptait en France à la fin de l'année 1869 que bien peu d'adeptes, les mathématiciens les plus en vue - pour la plupart assez âgés - préférant alors majoritairement rejeter ou ignorer les travaux de Lobatchevsky, et plus généralement les recherches portant sur la géométrie imaginaire. En Février 1870, Darboux témoignera de cette méconnaissance des travaux du géomètre russe : "*Je ne connais pas la Pangéométrie [*[**Lobatchevsky 1855**]*] et personne ne la connaît à Paris. J'en suis parfaitement sûr ; au moins les membres de l'Institut n'en ont jamais entendu parler*" [228]. C'est, au moins en partie, ce qui pousse Darboux à penser qu'en France, "*tous nos géomètres [...] semblent appartenir à un autre âge. Ce sont des savants éminents restés à la science d'il y a vingt ou trente ans*" [229]. En outre, l'Académie des Sciences de Paris continuait alors à recevoir régulièrement des communications visant à établir une preuve du postulatum d'Euclide. Durant la décennie 1860-1869, une dizaine de travaux suffisamment sérieux pour être considérés dans ses "*Comptes-Rendus*" parviennent ainsi à l'Académie des Sciences en ayant pour but d'établir une démonstration du postulatum. On peut par exemple mentionner celles de Boillot en 1864, de Polleux en 1865 (envoyée et soutenue par le Ministre Duruy en personne), de Valat, Maffre et Darget en 1867, ce-dernier n'en étant d'ailleurs pas à sa première tentative [230]. Ces mémoires sont soit renvoyés à la section de Géométrie, soit soumis à l'examen d'une commission dont la composition varie peu : elle fait systématiquement intervenir Chasles, le plus souvent Bonnet, ainsi que Bertrand ou Serret. Certains travaux sont soumis à l'examen de Chasles seul, et Liouville ne fait jamais partie des commissions. Néanmoins, aucun de ces travaux ne fait l'objet de communications ultérieures de la part des académiciens après leur examen ....aucun à l'exception de celui qui sera le dernier de la décennie : le mémoire de Jules Carton.

Jules Carton est, en 1869, un professeur du Lycée impérial de Saint-Omer. Il présente un mémoire à l'Académie des Sciences de Paris dans la séance du Lundi 5 Juillet 1869, mémoire où il expose une preuve du postulatum d'Euclide. Outre ce travail, il adresse dans cette séance la lettre ci-dessous aux académiciens :

Messieurs,

227. Au sujet du cas particulier de la géométrie sphérique comme modèle accepté ou non de géométrie non euclidienne, on consultera [**Gray 1979**], en particulier l'appendice. On rencontre par ailleurs chez Hoüel la difficulté d'accepter de fonder les recherches géométriques sur des considérations relevant du calcul infinitésimal, c'est-à-dire sur la géométrie dite "*différentielle*" ou "*infinitésimale*" : "*dans [l]es travaux [de M. Beltrami], et surtout dans ceux de Riemann et de Helmholtz sur [la nouvelle géométrie], je rencontre une difficulté fondamentale qui m'arrête dès l'abord. C'est l'idée d'élément linéaire posée a priori, avant qu'on n'ait donné aucune définition de forme géométrique, en prétendant au contraire tirer de là les définitions des formes fondamentales, la ligne droite et le plan. Cette démarche est tout à fait contraire à mes idées [...]*" ([**Fenoglio Giacardi 1991**, 180-181]).

228. Lettre non datée (Février 1870) de Darboux à Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**].

229. Lettre datée du 5 Mars 1870 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]. Rappelons que la quasi-totalité des lettres de Darboux à Hoüel de Novembre 1869 à Octobre 1871 ont été publiées dans [**Gispert 1987**].

230. On trouve dans les "*Comptes-Rendus*" de l'Académie les mentions de ces travaux respectivement tome 59 (2nd semestre 1864) p.486 ; tome 60 (1er semestre 1865) p. 1094 ; tome 65 (2nd semestre 1867) pp.70, 648, 1155.

Vu mon désir ardent d'être éclairé sur un certain point de la Géométrie euclidienne, je me permet (sic) de m'adresser directement à vous pour en obtenir satisfaction.

Il s'agit du Postulat d'Euclide : par un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une seule parallèle à cette droite.

Tous les ouvrages ou traités de géométrie enseignent que cette proposition n'est pas susceptible de démonstration.

Or, on admet qu'une propriété est démontrée lorsqu'on peut la déduire logiquement de principes reconnus comme évidents.

Mais, précisément en Géométrie, en assemblant des principes de base, il est possible de conclure que par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite.

Cet assemblage, quelqu'original qu'il soit, doit donc être reconnu comme logique si les éléments qui le composent et les principes qui lient ces éléments entre eux sont évidents ou sont les bases posées pour fonder la Géométrie ; ce qui est réalisé dans la démonstration du Postulat d'Euclide.

Alors, pourquoi cet acharnement à vouloir reconnaître ce postulat comme étant indémontrable ? Telle est la proposition que je veux vous soumettre dans la présente lettre.

Vous pourriez peut-être objecter que le Postulat d'Euclide n'admet pas de démonstration, aussi je me tient (sic) à votre disposition pour vous envoyer la démonstration dont j'ai voulu parler plus haut. Vous pourrez remarquer, comme moi et comme tous les membres d'une vaste organisation dont je suis le centre, que l'enchaînement des propositions y est rigoureuse et que le Postulat d'Euclide, malgré sa démonstration originale, peut être placé, tant du point de vue logique que beauté, au même rang que n'importe quel théorème qui compose la géométrie.

Veuillez agréer, Messieurs, avec mes remerciements anticipés, l'assurance de ma parfaite considération.

Lettre de Jules Carton à l'Académie des Sciences de Paris, présentée dans la séance du Lundi 5 Juillet 1869 [231].

Dans cette lettre, Jules Carton fait référence au mémoire qu'il vient alors présenter à l'Académie, intitulé par lui provisoirement "*Nouveau moyen de lever la difficulté de la théorie des parallèles*" mais qui sera finalement publié un an plus tard sous un autre nom ([**Carton 1870**] [232]). Au cours de l'année 1869, Carton s'est en fait adressé à de nombreuses reprises à Joseph Bertrand pour que son mémoire soit présenté et examiné à l'Académie des Sciences. Comme le raconte Darboux, Bertrand commence par refuser tout net mais doit finalement céder :

> Quand ce Monsieur Carton qui est extrêmement tenace est venu présenter sa démonstration à M. Bertrand, celui-ci l'a envoyé promener. Mais enfin Bertrand a été obligé par la persistance de M. Carton d'examiner la proposition et la démonstration présentée. Il l'a trouvée juste [...]
>
> Lettre non datée (Décembre 1869) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

231. Une retranscription de cette lettre de 1869 a été faite et signée par Maurice Carton, un descendant de Jules Carton. Elle a été datée du 22 Mars 1948 et se trouve dans les archives de l'Académie de Bruxelles. Cette lettre est également évoquée dans [**Henry Nabonnand 2016**, 23].

232. Dans la publication finale de 1870, Carton aura enrichi son travail de deux nouvelles "démonstrations" du postulatum.

Face à l'insistance de Jules Carton, Bertrand finit donc par examiner la démonstration du postulatum d'Euclide proposée par le professeur de Saint-Omer : son mémoire est présenté à l'Académie le 5 Juillet 1869, et une commission formée de Bertrand lui-même, Chasles et Bonnet se voit chargée de l'examiner et d'en écrire un rapport. Après avoir lu le travail de Jules Carton en détail, Bertrand se trouve convaincu de la justesse de celui-ci, et pour s'assurer qu'il ne commet pas d'erreur de jugement, il le fait examiner dans un premier temps par Serret qui ne fait pourtant pas partie de la commission [233]. Serret, comme Bertrand, est convaincu que la démonstration du postulatum de Carton est correcte, et le mémoire du professeur de lycée passe donc entre les mains de Bonnet et de Chasles.

Après leur examen, Chasles Bonnet et Bertrand - qui constituent la commission - ne trouvent rien à redire à la démonstration du postulatum de Carton, et Bertrand, qui pense enfin détenir la preuve clef du bien-fondé de la géométrie euclidienne face aux géométries imaginaires, en écrit un excellent rapport qu'il présentera à l'Académie dans la séance du Lundi 13 Décembre 1869. Darboux précise dans sa lettre à Hoüel : "*comme la situation de M. Carton est intéressante, [Bertrand] en a profité pour faire un rapport très élogieux à l'Académie. Il faut vous dire que M. Bertrand ne croit pas à la géométrie imaginaire*". La lecture de ces propos doit interpeller Hoüel, puisque Bertrand l'a deux ans auparavant soutenu dans son rejet d'une prétendue démonstration du postulatum écrite par un collègue bordelais de Hoüel membre de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux [234]. Pourtant Darboux précisera plus tard que Bertrand avait rejeté la géométrie imaginaire après avoir buté sur la traduction écrite par Hoüel du travail de Lobatchevsky : "*Bertrand avait lu "Geometrische Untersuchungen" et il avait buté au point que je vous ai indiqué, il ne comprenait pas, et il m'avait signalé ce point qui l'a empêché de croire Lobatchevsky*" [235].

C'est ainsi le 13 Décembre 1869 que Bertrand présente dans son rapport les conclusions, élogieuses, de la commission suite à l'étude de la démonstration faite par Carton du postulatum d'Euclide. Dans cette séance, les physiciens Wolf et Sainte-Claire Deville doivent également présenter des notes sur un appareil d'astronomie créé par Léon Foucault et exceptionnellement présenté à l'Institut devant les académiciens : le sidérostat. Les deux jeunes journalistes scientifiques Henri de Parville (31 ans) et Stanislas Meunier (26 ans), ainsi que l'Abbé François Moigno (65 ans) assistent à cette séance ; le premier pour la rédaction du "*Journal Officiel de l'Empire Français*", le second pour l'hebdomadaire "*Cosmos*" et le dernier pour l'hebdomadaire "*Les mondes*". La présentation du rapport de Bertrand va durant la séance susciter une polémique entre les membres de la commission et les deux mathématiciens Liouville et Bienaymé qui s'opposent à ce rapport. Voici le compte-rendu effectué par Henri de Parville au "*Journal Officiel*" et publié quatre jours après ladite séance :

> **M. Bertrand** fait un rapport sur un théorème nouveau transmis par M. Carton, professeur de mathématiques, à Saint-Omer, pour simplifier la théorie des parallèles. L'auteur s'est proposé d'établir la théorie des parallèles sans passer par le postulatum d'Euclide, en montrant directement que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits.

233. Ceci est appuyé par la note manuscrite de Serret retrouvée par P. Henry et P. Nabonnand dans le mémoire original de Carton à l'Académie des Sciences ([**Henry Nabonnand 2016**, 24]).
234. Voir à ce sujet [**Gispert 1987**, 80-81].
235. Lettre non datée (Juillet 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, citée dans [**Pont 1986**, 658-659].

Les conclusions du rapport sont favorables et M. Bertrand demande que l'Académie recommande l'auteur au ministre pour le récompenser d'avoir montré dans un sujet si délicat un esprit ingénieux et subtil.

M. Liouville. Permettez ; ce n'est pas d'aujourd'hui que l'on présente de nouvelles propositions qui ont toutes pour but de remplacer le postulatum d'Eculide par un théorème plus simple. On s'est toujours aperçu ensuite que la proposition renfermait un point qui n'avait pas d'abord choqué, mais qui contenait implicitement, lui aussi, un vrai postulatum ; il doit en être ainsi cette fois encore, et je ne suis pas d'avis que l'Académie prenne sous sa responsabilité de telles questions ; aussi je m'élève formellement contre vos conclusions.

M. Bertrand. Vous tenez en ce moment le langage que j'ai tenu à M. Carton ; moi aussi, je ne voulais même pas lire sa démonstration. Puis, sur ses instances, je l'ai lu et j'ai examiné, puis j'en ai parlé à mes collègues MM. Chasles, Serret et Bonnet, qui ne voulaient pas plus que moi entendre parler du théorème de l'auteur. Ils sont restés ensuite convaincus du mérite de la solution.

M. Liouville. Faut-il rappeler que Legendre avait cru trouver un biais, que des esprits de premier ordre, que Lagrange aussi est venu lire à cette Académie une solution du postulatum d'Euclide ; à peine l'avait-il communiquée qu'il la mettait dans sa poche pour n'en plus jamais parler. A la lecture, le point faible de la démonstration lui était sans doute apparu. Il y a toujours un cercle vicieux dans ces démonstrations là.

Je vous citerais bien d'autres exemples : Bertrand, de Genève, a imaginé une solution, elle a le même défaut que les autres ; elle s'appuie sur un point de départ également hypothétique.

Un homme qui s'y connaissait tout spécialement, Lejeune Dirichlet, est mort sans publier ses longues méditations sur les définitions et les postulatum de la géométrie ; dans les conversations que j'ai eues avec lui, il s'était laissé aller à me dire qu'à côté de la géométrie d'Euclide, de la géométrie de Lobatchevsky, il y avait encore place pour une troisième ; tout dépendait de l'hypothèse du point de départ, des définitions fondamentales. Euclide a montré que la somme des angles d'un triangle égale deux droits ; on peut partir d'autres hypothèses, soit qu'elle est plus petite ou plus grande ; de là autant de déductions nouvelles et trois géométries distinctes qui, pour nous, conduiront aux mêmes conclusions parce que nous avons des dimensions trop exigües et nous raisonnons sur des figures trop réduites pour que les différences s'accusent.

Le savant géomètre rappelle à ce propos le curieux système géométrique de Dirichlet, les idées de Gauss, etc. pour mieux démontrer qu'il est impossible de ne pas admettre un postulatum quelconque, une définition ne souffrant pas de démonstration, dans la chaîne des différentes propositions de la géométrie.

M. Bertrand. Je ne dirai pas que, pour moi, le postulatum d'Euclide ne me paraît pas plus simple à invoquer pour établir la théorie des parallèles que le théorème que je défends ; mais, enfin, cela ne retire en rien au mérite de la démonstration de M. Carton. Je n'y ai rien trouvé qui ne fût rigoureux, ni moi, ni la commission, et les suppositions de M. Liouville ne peuvent passer pour des arguments. Je ne puis répondre à M. Carton que d'autres ont échoué, et qu'il a dû échouer sur un point qui m'échappe. La responsabilité retombe, en définitive, sur la commission et sur son rapporteur.

M. Liouville. Je désirerais que vous ne vous mépreniez pas sur ma pensée. Je veux bien reconnaître un grand mérite à M. Carton ; j'ai cité des noms illustres à côté du sien. On dépense beaucoup de talent et de recherches pour résoudre cette question ; le lendemain du jour où l'on a trouvé la solution, on est obligé d'avouer qu'elle était fausse. C'est qu'elle n'est pas soluble en effet, et je voudrais que l'Académie la rangeât parmi les problèmes dont elle n'admet pas l'examen, comme la quadrature du cercle, le mouvement perpétuel. En un mot, je serais désolé que l'Académie fût mêlée à tout ceci, et qu'elle encourageât des travaux de cette nature.

M. Bienaimé. La question est simple : les trente-deux propositions d'Euclide étant données, le nouveau théorème de M. Carton remplace-t-il le postulatum, sans introduire de nouvelle supposition ? Cela me paraît difficile ; mais c'est ce que je désirerais qu'il fût établi par M. Bertrand.

M. le président [Claude Bernard]. Je crois que le meilleur moyen de donner satisfaction à tout le monde, c'est d'adjoindre M. Liouville à la commission, et de reporter à plus tard la lecture du rapport.

M. Liouville. Non, je m'y refuse. J'ai un parti pris à cet égard ; je n'admets pas que la solution soit possible. Encore une fois, le problème posé est de même ordre que celui de la quadrature du cercle ; on ne peut pas trouver de carré équivalent à un cercle.

M. le baron Dupin. Il ne faut pas définir ainsi la quadrature du cercle. Il s'agit de trouver, en prenant le rayon du cercle pour unité un nombre représentant exactement la circonférence ; or on ne trouve jamais de nombre exact. Les inventeurs nous ont envoyé je ne sais combien de solutions, en disant que les nombres obtenus différaient si peu du vrai résultat que ce n'était pas la peine de s'occuper du reliquat. Voilà pourquoi nous avons renoncé à examiner les solutions que l'on nous apportait, l'esprit du problème n'étant même pas compris.

M. le baron Dupin entre à ce propos dans des considérations très justes sur les définitions géométriques et sur la notion de l'espace et de l'infini.

Le débat menaçait de s'éterniser, M. Bertrand défendant les conclusions de son rapport et M. Liouville les attaquant, quand après une heure et demie de discussion, M. Sainte-Claire Deville a très bien levé la difficulté.

M. Henri Sainte-Claire Deville. Je propose que le débat soit continué lundi prochain, pour cas de force majeure ; j'ai en effet à présenter le sidérostat de Léon Foucault, et l'appareil placé sous les yeux de l'Académie ne pourrait être apporté de nouveau à l'Académie.

> Les deux parties adverses admettent très bien cet armistice, et la discussion est ajournée.
>
> Henri de Parville, "*Journal Officiel de l'Empire Français*", Vendredi 17 Décembre 1869.[236]

Le compte-rendu de De Parville est très factuel et reste tout à fait objectif, en accord avec le rôle qui échoit au "*Journal Officiel*". Ce n'est pas tout à fait le cas de Stanislas Meunier dont l'article dans l'hebdomadaire "*Cosmos*" semble soutenir Bienaymé et Liouville dans leur opposition au théorème de Jules Carton. Meunier prête par ailleurs à Liouville d'autres arguments relatifs à la considération de l'infini que de Parville n'avait pas relaté :

> Un professeur de l'Université, M. Carton, ayant tenté, après force gens illustres, de démontrer le Postulatum d'Euclide, c'est-à-dire l'égalité à deux droits des trois angles d'un triangle, M. Bertrand vient dans un rapport des plus favorables, demander à l'Académie de féliciter l'auteur et de le recommander au ministre.
>
> Cette conclusion soulève une discussion plus philosophique que mathématique qui, pendant deux heures entières, captive l'attention du public d'ordinaire si peu recueilli de l'Institut.
>
> M. Liouville, s'inspirant surtout des idées de Dirichlet, pense que le Postulatum est indémontrable, parce qu'il suppose la notion entièrement hypothétique de l'univers infini, c'est-à-dire du plan infini et de la ligne droite coïncidant partout avec elle-même. Mais on peut, au même titre, supposer qu'entre deux points, on peut faire passer une infinité de lignes droites, c'est-à-dire des lignes telles qu'elles représentent la plus courte distance entre les points. Dans ce cas, le Postulatum n'est plus vrai et l'on peut avoir pour les trois angles d'un triangle une somme soit plus grande, soit plus petite que deux droits. Le premier cas est réalisé par la sphère ; l'autre à l'intérieur de celle-ci. Or, quelle que soit la supposition que l'on adopte et pourvu qu'on raisonne logiquement, jamais on arrive à une contradiction et par conséquent à un criterium : il y a donc trois géométries également vraisemblables.
>
> Cette conclusion n'est pas absolument l'avis de M. Ch. Dupin qui, tout en reconnaissant l'impossibilité de démontrer les axiomes fondamentaux de la géométrie, déclare de pareilles démonstrations inutiles. Nous avons de nous-mêmes le sentiment inébranlables de l'infini, et les mathématiques nous y ramènent constamment ; la géométrie euclidienne est donc seule vraie et le Postulatum doit être admis sans démonstration spéciale, laquelle d'ailleurs est impossible. On se demande même pourquoi les travaux relatifs à ce théorème n'ont pas été l'objet de la même mesure d'exception que ceux relatifs à la quadrature du cercle et au mouvement perpétuel dont l'Académie ne daigne pas depuis longtemps enregistrer la réception.
>
> M. Bien-Aymé insiste aussi sur l'impossibilité de la démonstration en question et en résumé, le rapporteur [Bertrand] devra attendre huit jours

236. Retrouvez ce compte-rendu en ligne : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6496625d/f7.zoom.r=Carton.langEN.

> le vote sur ses conclusions dont il sera sans doute obligé de modifier les termes. [...]
>
> Stanislas Meunier, "*Cosmos. Revue encyclopédique hebdomadaire des progrès des sciences*", Samedi 18 Décembre 1869, Série 3 Vol. 5 (Juillet-Décembre 1869), pp.684-685. [237]

Une troisième version de la discussion des académiciens lors de la présentation du rapport de Bertrand le 13 Décembre est donnée par l'Abbé François Moigno, mathématicien et rédacteur scientifique ayant fondé la revue "*Cosmos*" en 1852 puis l'ayant quittée pour fonder en 1862 "*Les Mondes*" [238]. Pour cette-dernière, il rend compte de la séance du 13 Décembre - à laquelle il a lui-même assisté - en attaquant le fait même de vouloir démontrer le postulatum d'Euclide :

> Presque toute la séance a été remplie par une discussion qui ne fait pas grand honneur à l'Académie. Alors que tant de mémoires importants restent oubliés dans ses archives ou dans le cabinet de travail encombré de ses membres, M. Bertrand s'est cru obligé d'appeler l'attention de l'illustre corps, dans un rapport très favorable, sur une démonstration de la théorie des parallèles, présentée par un professeur de lycée, M. Carton. Ses conclusions étaient que, par l'habileté dont il avait fait preuve, M. Carton méritait que l'Académie le recommandât d'une manière toute particulière à la bienveillance de M. le ministre de l'instruction publique. Il s'agissait de démontrer que la somme des trois angles d'un triangle ne peut pas être plus petite que deux droits. Au lieu de raisonner sur le triangle lui-même, M. Carton va chercher sa démonstration par l'absurde dans la considération d'un nombre indéfini de triangles égaux entre eux dispersés sur un plan, et circonscrits par un polygone convexe. Le passage de l'unité à la multiplicité, du simple au composé, du fini à l'indéfini, cache nécessairement une pétition de principes, ou implique du moins la notion de l'infini ; la démonstration de M. Carton ne vaut donc pas mieux que tant d'autres rejetées tour à tour et aujourd'hui oubliées. M. Liouville a fait remarquer avec beaucoup de justesse et aussi de modération, qu'il n'y avait pas là matière à un rapport et surtout à un rapport avec recommandation de l'illustre corps tout entier. M. Bertrand maintient la rigueur de la démonstration de M. Carton, rigueur constatée par ses deux collègues MM. Chasles et Bonnet ; il trouverait étrange qu'en s'associant à l'opinion de M. Liouville, l'Académie sembla faire au postulatum d'Euclide un sort tout à fait exceptionnel, en admettant qu'il ne peut pas être démontré à l'égal des propositions qui précèdent. Comment M. Bertrand n'a-t-il pas vu que c'est surtout son rapport qui place le postulatum d'Euclide dans ces conditions exceptionnelles. Jusque-là Euclide, pour démontrer les propriétés des lignes perpendiculaires, obliques, etc., raisonnait sur la figure elle-même, et voici que M. Carton, se déclarant impuissant à démontrer sur le triangle proposé sa propriété fondamentale, raisonne sur un nombre indéfini de triangles. Sa démonstration vaut

237. Retrouvez cet article en ligne : `http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=nyp.33433057764403;view=1up;seq=688`.

238. Ces deux revues créées par l'Abbé Moigno fusionneront en 1874 sous sa direction.

> moins évidemment que celle de Bertrand de Genève, et surtout que celle qui résulte de la construction même du triangle dont les angles extérieurs font nécessairement quatre droits, et les angles intérieurs par conséquent deux droits. Nous l'avons déjà dit ailleurs, toute la difficulté vient de ce que, dans la notion de la ligne droite, Euclide n'a pas introduit l'idée primitive de direction, et n'a pas défini les parallèles, deux lignes qui ont la même direction. Cette remarque que nous avons faite, il y a longtemps, frappe aujourd'hui beaucoup d'esprits. La proposition que, par un point d'un plan ou de l'espace on ne peut mener qu'une seule droite parallèle à une autre ou ayant la même direction, est évidente, puisque toutes les droites menées par un même point divergent entre elles. Nous n'insisterons pas sur le douloureux spectacle d'un désaccord absolu entre les savants géomètres de l'Académie des sciences sur les premiers principes de la géométrie ! Que la raison humaine est peu de chose, et qu'elle a besoin d'auxiliaires !
>
> M. l'Abbé Moigno, "*Les mondes, revue hebdomadaires des sciences*", Jeudi 16 Décembre 1869, Tome 21 (1869), pp.706-707.[239]

Pour Moigno, le postulatum doit purement et simplement être admis, c'est une proposition "*évidente*" qui ne peut ni ne doit être démontrée : il rejoint en cela tout à fait l'avis exprimé par Charles Dupin. C'est en vertu de son évidence qu'il convient d'en rejeter toute tentative de démonstration. Mais admettre le postulatum, tout en en rejetant l'idée de preuve, revient *in fine* à en accepter l'énoncé, ce que Moigno ne souligne pas.

Une version encore différente sera rapportée dans le "*Journal Général de l'Instruction Publique et des Cultes*" quelques jours plus tard par un autre journaliste, Jules Desmasures. Celui-ci n'a pas assisté à la séance de l'Académie des Sciences, mais il a lu attentivement le compte-rendu effectué par Henri de Parville au "*Journal Officiel*" et l'utilise comme source primaire pour son article de la partie non officielle du "*Journal Général*". A l'instar de l'Abbé Moigno, et donc contrairement à Stanislas Meunier, Jules Desmasures prend ouvertement parti contre Liouville et sa volonté affichée de ne pas examiner les preuves d'un postulat qu'il tient pour indémontrable. Ses attaques contre Liouville sont néanmoins encore plus franches que celles de Moigno :

> La dernière séance de l'Académie des sciences a présenté un incident du plus grand intérêt, à propos d'une communication de M. Carton, professeur de mathématiques au lycée de Saint-Omer, sur un théorème nouveau ayant pour but de simplifier la théorie des parallèles.
>
> M. Bertrand s'était chargé du rapport. Il a exposé que l'auteur a eu en vue d'établir la théorie des parallèles sans passer par le postulatum d'Euclide, en montrant directement que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits ; et il a demandé que l'Académie veuille bien recommander M. Carton au ministre de l'instruction publique, pour le récompenser d'avoir fait preuve dans un sujet si délicat, d'un esprit ingénieux et subtil.
>
> M. Liouville s'est élevé contre les conclusions du rapport, en disant que ce n'est pas d'aujourd'hui que l'on présente de nouvelles propositions

239. Retrouvez cet article en ligne : http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=hvd.hn4jvb;view=1up;seq=714.

ayant pour but de remplacer le postulatum d'Euclide par un théorème plus simple ; que chaque fois, on a été conduit a un autre postulatum ; qu'il doit encore en être ainsi aujourd'hui, et que par conséquent l'Académie ne doit pas prendre la responsabilité de telles questions. Il a cité les essais de Legendre, de Lagrange, de Bertrand de Genève, de Dirichlet, qui n'aboutirent à aucun résultat, parce que leurs solutions s'appuyèrent toujours sur un point de départ également hypothétique. "Euclide, dit-il, montre que la somme des angles d'un triangle égale deux droits ; on peut partir d'autres hypothèses, soit qu'elle est plus petite ou plus grande ; de là autant de déductions nouvelles et trois géométries distinctes qui, pour nous, conduiront aux même conclusions, parce que nous avons des dimensions trop exigües et que nous raisonnons sur des figures trop réduites pour que les différences s'accusent".

M. Bertrand ne voulut pas admettre qu'on condamnât ainsi sur de simples suppositions un travail que la commission avait trouvé rigoureux, et M. Claude Bernard, qui présidait, allait trancher la difficulté en adjoignant M. Liouville à la commission, lorsque celui-ci déclara qu'il s'y refusait, qu'il avait "un parti pris à cet égard", et qu'il n'admettait pas du reste que la solution fût possible, le problème étant du même ordre que celui de la quadrature du cercle.

Le débat menaçait de s'éterniser, M. Bertrand défendant les conclusions de son rapport, M. Liouville les attaquant, quand M. Sainte-Claire Deville vint proposer le renvoi de la discussion à la prochaine séance, afin d'avoir encore le temps de présenter à l'Académie le sidérostat de Léon Foucault, cet autre problème scientifique si admirablement résolu et qui fut la dernière oeuvre du savant célèbre que la France a perdu il y a peu de temps.

L'appareil, qui, selon l'expression de M. de Parville, transporte le ciel dans le cabinet de l'astronome, et qui fut construit aux frais de l'Empereur, sous la direction de M. Wolf, de l'observatoire impérial, eut bien vite fait oublier le problème abstrait du modeste professeur de Saint-Omer, dont le théorème ne manquera pourtant pas d'exciter la curiosité du monde savant.

M. Laugier, qui ne croyait pas qu'on pût obtenir un miroir réellement plein, a vu tous ses doutes levés par l'examen du sidérostat ; peut-être M. Liouville reviendrait-il aussi avec une opinion meilleure et moins définitive sur le théorème de M. Carton, s'il consentait à l'examiner avec la même bienveillance que MM. Serret, Chasles, Bonnet et Bertrand, membres de la commission. Nous sommes d'ailleurs contre les partis pris, comme étant les plus implacables ennemis du progrès scientifique, et nous les déplorons encore davantage quand ils s'adressent aux travaux toujours courageusement exécutés, des membres de l'Université.

Jules Desmasures, "*Journal Général de l'Instruction Publique et des Cultes*", Mercredi 22 Décembre 1869, Vol.39 (1869), p.798.[240]

240. Retrouvez cet article en ligne : https://books.google.fr/books?id=nI5LAAAAcAAJ&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false.

Desmasures, qui n'est pas un mathématicien, prend donc fait et cause pour Bertrand, accusant Liouville d'un manque de bienveillance et de l'adoption d'un parti pris au sujet du postulatum qui irait selon lui à l'encontre du progrès scientifique même.

Enfin une dernière [241] (au sens chronologique) courte mention de la polémique suscitée lors de la séance du 13 Décembre 1869 par le rapport de Bertrand sur le mémoire de Carton sera faite par le chimiste Gustave Augustin Quesneville. Dans son "*Moniteur Scientifique*", celui-ci se contentera de remarquer que :

> Le "*Compte-Rendu*" [de l'Académie des Sciences] ne fait aucune mention d'une discussion qui s'est élevée à propos d'un rapport lu par M. Bertrand, et qui a duré, dit-on, deux heures. Il s'agissait d'une nouvelle démonstration du théorème en vertu duquel les trois angles d'un triangle font ensemble deux droits. Le rapport, signé de MM. Bertrand, Chasles et Bonnet, invitait l'Académie à recommander au ministre de l'instruction publique l'auteur de cette démonstration, un M. Carton, professeur de lycée. M. Liouville n'a pas laissé passer ce rapport ; de là discussion et ajournement.
>
> Gustave Quesneville, "*Le Moniteur scientifique*", Samedi 1er Janvier 1870, Tome 12 (1870), p.53. [242]

Quoique très répandu, le "*Moniteur de Quesneville*" comme on le surnomme alors, ne paraît que de manière bihebdomadaire. Aussi ce compte-rendu de la séance du 13 Décembre 1869 ne sera pas publié avant le 1er Janvier 1870, date à laquelle l'affaire aura pris, on le verra, une toute autre ampleur.

Durant la semaine qui suit la séance du 13 Décembre, Bertrand prépare la défense de la démonstration du postulatum faite par Carton, défense qu'il sait devoir assurer devant Liouville et l'Académie toute entière lors de la prochaine séance. Pour mieux convaincre les académiciens du bien-fondé de la démonstration de Jules Carton, il rédige dans le détail le contenu de cette démonstration, en la présentant comme une petite note indépendante qu'il compte présenter lui-même au tableau devant les académiciens. Sûr de son fait, il y ajoute un avant-propos très critique envers les partisans de la géométrie non euclidienne qu'il accuse de poursuivre après Lobatchevsky "*le caprice de cette débauche de logique*". Pourtant il reçoit déjà au cours de cette semaine quelques communications lui soulignant l'existence de la géométrie dite imaginaire, existence qui devrait logiquement assurer l'indémontrabilité du postulatum. A l'Académie des Sciences, on reçoit ainsi notamment de la part de Jules Hoüel sa traduction des "*Geometrische Untersuchungen*" de Lobatchevsky, ainsi que celle du "*Tentamen*" de Bolyai ; et le professeur Fleury de Marseille envoie son mémoire intitulé "*la géométrie affranchie du postulatum d'Euclide*" [243]. Pour Bertrand cependant, cela ne fait que rajouter au mérite de Jules Carton dont la justesse de la démonstration montre que les adeptes de la géométrie non euclidienne sont dans leur tort. Le Lundi 20 Décembre

241. Le corpus de périodiques pris en compte pour cette étude a regroupé les journaux suivants : "*Le Journal Officiel de l'Empire Français*", "*Cosmos*", "*Les mondes*", "*Le Journal Général de l'Instruction Publique*", "*Le Journal des Débats*", "*Le Journal des Savants*", "*La Revue des Deux Mondes*", "*Le moniteur scientifique*", "*La revue des cours scientifiques*", "*Le Temps*", "*Le Figaro*" et "*La Presse*".

242. Retrouvez cet article en ligne : http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=coo.31924096347814;view=1up;seq=61;size=150.

243. L'Académie mentionne la réception de ces mémoires dans la séance du Lundi 20 Décembre 1869, voir les "*Comptes-Rendus*" Tome 69 (2nd Semestre 1869), pp.1386(Hoüel)-1331(Fleury).

1869, Bertrand reprend donc la parole à l'Académie pour présenter la démonstration de Carton. Henri de Parville raconte au "*Journal Officiel*" :

> **M. Bertrand**. L'Académie se rappelle que, dans la dernière séance, j'ai fait un rapport sur un théorème de M. Carton relatif à la somme des angles d'un triangle. Les conclusions étaient favorables ...
>
> **M. le Maréchal Vaillant**. M. Bertrand, j'ai à ce sujet quelques mots à dire qui faciliteront peut-être la décision que l'Académie aura à prendre après la lecture du rapport.
>
> Lundi dernier, j'ai été abordé par M. Carton ; il m'a parlé des objections que l'on faisait à sa méthode. Je lui ai répondu qu'il ne devait pas attendre de moi que je formule une opinion dans une question si spéciale ; mais, ai-je ajouté, les conclusions du rapport portaient sur deux points distincts ; d'abord il s'agissait de vous féliciter, ensuite de vous recommander à la bienveillance du ministre de l'instruction publique [Olivier Bourbeau].
>
> Le premier point est du ressort de l'Académie, quant au second, il me semblerait difficile et non pas sans inconvénient que l'Académie recommandât au ministre un savant, quelle que fût sa valeur. M. Carton a reconnu qu'il y aurait en effet dans cette mesure un précédent fâcheux. Voulez-vous, ai-je demandé, que j'appelle moi-même sur vous la bienveillance toute spéciale de M. le ministre de l'instruction publique ? Et comme il m'a répondu que je le rendrais ainsi très heureux, dès le lendemain j'ai vu le ministre.
>
> Je suis heureux de pouvoir dire qu'il a pris beaucoup d'intérêt au travail de M. Carton, et qu'il fera appeler près de lui le savant professeur. Je crois que ces quelques détails simplifient la question posée lundi par M. Bertrand.
>
> **M. Bertrand**. Je remercie M. le maréchal de sa bienveillante intervention... La question scientifique seule subsiste maintenant ; il faut qu'elle soit éclairée ; aussi je demande à l'Académie la permission de lui exposer la démonstration de M. Carton. C'est une simple note que je vais communiquer. Les géomètres auront tout le temps d'en prendre connaissance, de faire connaître leurs objections. Puis, dans quinze jours, trois semaines, si la rigueur de la démonstration n'a pu être entamée, je soumettrai de nouveau mon rapport à l'Académie.
>
> Et M. Bertrand donne au tableau la démonstration du nouveau théorème de M. Carton. Il admet, bien entendu, toutes les notions acquises relatives au plan et à la ligne droite, et, étant données les trente-deux premières propositions d'Euclide, il établit les autres sans passer par la trente-troisième, c'est-à-dire sans qu'il lui soit besoin de faire intervenir le postulatum d'Euclide.
>
> Le postulatum est d'une entière évidence, et je pensais, dit M. Bertrand, que Lobatchevsky, qui voulait le contester, n'avait aucun disciple, mais il m'est arrivé depuis la dernière séance, des observations nombreuses sur cette théorie ; la géométrie imaginaire de Gauss a des adeptes. C'est une raison de plus pour bien montrer avec les ingénieux lemmes

> et le théorème de M. Carton, que la somme des angles d'un triangle ne peut pas être plus petite que deux droits.
>
> La démonstration faite au tableau par M. Bertrand ne souffre pas l'analyse ; nous sommes donc obligé de passer outre. Elle ne soulève d'ailleurs aucune objection de la part des membres de l'Académie.
>
> Henri de Parville, "*Journal Officiel de l'Empire français*", Mercredi 22 Décembre 1869. [244]

La démonstration de Jules Carton présentée par Joseph Bertrand ne suscite donc pas de nouveau débat lors de sa présentation dans la séance du 20 Décembre 1869. Jules Carton, qui assiste à cette séance tout comme il avait assisté à la précédente, jubile : "*à l'Institut, il était superbe il causait à tout le monde*" racontera Darboux, "*le jour où Bertrand exposait sa démonstration au tableau, il rayonnait*" [245]. Néanmoins Bertrand avait précisé que le but qu'il poursuivait n'était pas de la faire accepter immédiatement mais bien de laisser le temps à ses détracteurs d'étudier la démonstration et de revenir ensuite quelques semaines plus tard pour, une fois les critiques dissipées - du moins espère-t-il - présenter à nouveau son rapport favorable. La note présentée par Bertrand est donc intégralement publiée dans les "*Comptes-Rendus*" relatifs à cette séance du 20 Décembre ([**Bertrand 1869**]), ce qui marque la première trace de cette "affaire" au sein de ce recueil officiel dans lequel rien n'avait été mentionné à propos du débat ayant eu lieu lors de la séance précédente du 13 Décembre.

C'est donc à partir du Dimanche 26 Décembre 1869 que les mathématiciens, français et étrangers, prendront connaissance à la lecture de l'hebdomadaire de l'Académie des Sciences [246] du contenu de la preuve du postulatum de Carton et Bertrand. Si la présentation au tableau de ce-dernier n'a pas suscité de réaction, elle n'a pas pour autant achevé de convaincre de son bien-fondé comme le raconte Darboux.

> [...] on a décidé d'envoyer la démonstration aux "*Comptes Rendus*" où vous la verrez dimanche. Entre nous, je crois que cela va être une source d'ennuis pour M. Bertrand. [...] Je sais seulement que [la démonstration] est fondée sur une considération employée autrefois par Legendre, celles de triangles égaux juxtaposés. [...] Je vous tiendrai si vous voulez bien au courant de l'affaire Carton qui va passionner tout le monde ici. J'ai déjà aperçu l'Abbé Moigno qui trouve la démonstration inexacte.
>
> Lettre non datée (Décembre 1869) de Gaston Darboux à Jules Hoüel. [**Archives épistolaires Darboux**]

A la lecture de son article dans "*les Mondes*", il n'est pas étonnant que Moigno trouve la démonstration inexacte : le postulatum ne peut pas, selon lui, être prouvé ; il ne saurait être qu'admis.

244. Retrouvez ce compte-rendu en ligne : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6496630q/f9.zoom.r=Carton.langEN.

245. Extraits de la lettre datée du 4 Juillet 1871 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Hoüel**]. Les correspondances de Darboux et Hoüel contenues dans les [**Archives épistolaires Hoüel**] ont été étudiées et citées dans [**Henry Nabonnand 2016**].

246. Les séances de l'Académie des Sciences se tiennent les lundis et les comptes-rendus paraissent le dimanche suivant, de telle sorte que les comptes-rendus d'une séance sont publiés la veille de la tenue de la séance suivante.

A Bologne en Italie, le mathématicien Eugenio Beltrami apprend les premières discussions relatives à cette "affaire Carton" en lisant le numéro de "*Cosmos*" du Samedi 19 Décembre dont le compte-rendu écrit par Meunier relate la longue discussion de la séance du 13 Décembre. Correspondant avec Hoüel, Beltrami est partagé : d'une part il se félicite de l'intérêt nouveau que cette affaire peut apporter sur la géométrie non euclidienne, et d'autre part il craint les possibles retombées négatives pour son correspondant français qui s'apprête à faire publier en France les traductions de ses travaux sur la géométrie non euclidienne [247] :

> Je viens d'apprendre, par un court extrait inséré dans le "*Cosmos*", qu'il y a eu à l'Académie des Sciences de Paris une petite bataille au sujet du postulat d'Euclide. M. Bertrand ayant lu un Rapport très favorable à une démonstration prétendue de ce postulat par un M. Carton, une discussion s'est élevée parmi MM. Bertrand, Liouville, Dupin et Bienaymé, dans laquelle MM. Liouville et Bienaymé ont soutenu l'impossibilité de démontrer le fameux postulat, contre MM. Bertrand et Dupin [...] Il paraît qu'à la suite de cette discussion toute délibération sur le rapport de M. Bertrand a été suspendue. Le Compte-rendu de la séance du 13, successive à celle du 6 où l'affaire a eu lieu, ne fait point mention d'aucune décision prise, du moins le sommaire ne dit rien.
>
> [...] Quoiqu'il en soit, je suis content que ce fait ait rappelé en France l'attention sur le sujet en question. En même temps je dois vous faire une ample déclaration : c'est que s'il vous paraissait que l'insertion de la traduction de mes deux Mémoires dans le Recueil de l'Ecole Normale Supérieure (Recueil officiel en quelque sorte) pût froisser les convictions de quelques personnes haut-placées dans la science et dans l'enseignement, donner lieu à des désapprobations, ou altérer vos bons rapports avec des savant éminents qui ont été peut-être vos maîtres d'autrefois, je vous dégagerais complètement de votre promesse [...]
>
> Lettre datée du 23 Décembre 1869 d'Eugenio Beltrami à Jules Hoüel reproduite dans [**Boi Giacardi Tazzioli 1998**, 109-110]

Beltrami se trompe de date concernant la séance de l'Académie des Sciences : la discussion a eu lieu le 13 et non le 6. Cette erreur ne vient cependant pas de lui mais du journaliste scientifique Stanislas Meunier qui, dans ses comptes-rendus pour "*Cosmos*", a inscrit par erreur "*Séance du 6 Décembre*" en lieu et place de "*Séance du 13 Décembre*" [248]. Il critique par ailleurs les propos de Liouville rapportés par Meunier dans le "*Cosmos*" selon lesquels la négation du postulatum ne se vérifie que lorsqu'on "*renonce à l'hypothèse de l'espace infini*". En effet, Beltrami a étudié la possibilité de représenter la géométrie décrite par Lobatchevsky et Bolyai par une géométrie sur une surface de courbure négative de l'espace euclidien, la *pseudosphère*, où le postulatum d'Euclide n'est pas vérifié. Or comme il le mentionne à Hoüel, "*il est peu admissible que M. Liouville [...] n'ait pas vu que l'espace est infini pour [la géométrie pseudosphérique]*". La possibilité d'étendre à

247. Les travaux de Beltrami traduits en français par Hoüel paraissent dans les "*Annales Scientifiques*" durant les premiers jours de l'année 1870 : il s'agit de [**Beltrami 1869a**] et [**Beltrami 1869b**].

248. Dans le Tome 5, Série 3 de "*Cosmos*", on constate quà la page 654 commence le compte-rendu de la "vraie" séance du Lundi 6 Décembre 1869, alors que page 680 commence celui de la séance du 13 Décembre, malgré l'en-tête erroné qui annonce à nouveau la date du 6 Décembre 1869.

l'infini la surface pseudosphérique , soutenue par Beltrami, est en fait alors au centre d'une polémique qui oppose le mathématicien italien d'abord à Hermann von Helmholtz puis également à Angelo Gennochi, ces-derniers contestant cette possibilité [249].

Par ailleurs, la démonstration de Carton n'étant pas encore parue dans les "*Comptes-Rendus*" de l'Académie des Sciences lorsque Beltrami écrit cette lettre, ses détracteurs ne peuvent encore percevoir où la mettre en défaut. On peut néanmoins déjà remarquer la différence entre les remarques des mathématiciens et les comptes-rendus des périodiques de la séance du 13 Décembre 1869 : aucun article n'a évoqué l'impossibilité de prouver le postulatum en invoquant l'existence et la consistance [250] des géométries "*imaginaires*", alors que c'est précisément le sens des remarques de Beltrami et de l'envoi par Hoüel de ses traductions.

C'est le Dimanche 26 Décembre 1869 que la parution des "*Comptes-Rendus*" relatifs à la séance du 20 Décembre permet à tous les géomètres de découvrir enfin la démonstration proposée par Carton et Bertrand. Il ne faut que peu de temps pour que les premières critiques apparaissent. Hoüel, ayant travaillé le sujet des géométries non euclidiennes, avait affirmé à Darboux l'impossibilité de démontrer le postulatum avant même de connaître la démonstration proposée. Darboux, en revanche, méconnaissait alors totalement les géométries non euclidiennes et il ne lui paraissait alors pas inconcevable d'arriver à prouver le postulatum. A la lecture de la démonstration de Jules Carton, il trouve sans peine la faille et se laisse convaincre par les arguments que lui soutient Hoüel :

> On n'a pas encore reçu d'objection à la démonstration de M. Bertrand. Après y avoir bien réfléchi je crois que cette démonstration est inexacte, mais je vous prie de ne pas faire mention de mon opinion à ce sujet. La démonstration est du reste très spécieuse, vous trouverez sans peine le point où elle est en défaut. Je me range dorénavant tout à fait à l'opinion que vous avez émise et dont je n'étais pas très convaincu : il est impossible de démontrer le postulatum.
>
> Lettre non datée (Décembre 1869) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Plus tard, Darboux ajoutera : "*la Pangéométrie m'a bien fait comprendre [la géométrie non euclidienne], et je n'ai eu quant à moi plus rien à objecter*" [251] : il aura pris acte du bien-fondé de la géométrie imaginaire.

Beltrami trouve également les points faibles de la démonstration de Carton. Dans un premier temps, il se félicite que Bertrand, par la critique qu'il écrit dans sa note [**Bertrand 1869**], ne conteste pas la cohérence de l'existence de la géométrie imaginaire. Il montre cependant une opinion contrastée quant à l'opposition à Bertrand incarnée à l'Académie par Joseph Liouville : "*M. Bertrand admet, à proprement parler, le défaut d'une base rationnelle en ce qui concerne la théorie des parallèles, et il s'incline devant la synthèse de Lobatcheffsky ; seulement il la regarde comme une débauche de logique, et comme une œuvre de dialecticien. C'est déjà quelque chose. Le différend n'est déjà plus que d'appréciation, et*

249. A propos de ces polémiques autour de l'extension indéfinie de la surface pseudosphérique, voir [**Boi Giacardi Tazzioli 1998**, 23-31] et [**Fenoglio Giacardi 1991**].

250. La "consistance" d'un modèle - ou d'une géométrie - signifie que ce modèle - cette géométrie - ne renferme pas de contradiction logique. Voir les remarques de Bernard Vitrac sur la consistance des géométries non euclidiennes [**Euclide 1990**, 178].

251. Lettre non datée (Juillet 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, citée dans [**Pont 1986**, 659].

toute débauche n'est en somme qu'une affaire de morale" dit-il à Hoüel avant d'ajouter : "*je suis bien content qu'un géomètre de la force et de l'autorité (bien justement acquise) de M. Liouville partage les idées que nous croyons exactes. Seulement, à mon point de vue, un peu égoïste à la vérité, j'aurais préféré que ce fût un autre ; car je sais que M. Liouville a une antipathie très décidée pour l'Italie et pour les Italiens [...] Cela m'a été assuré par mon ami M. Dini qui a fait un long séjour à Paris"* [252]. Quelques jours plus tard, Beltrami revient vers Hoüel avec les arguments mathématiques mettant en avant les erreurs de la démonstration de Jules Carton :

> Je viens d'examiner avec attention la prétendue démonstration Bertrand-Carton, et de m'assurer qu'on y tourne dans un cercle vicieux. Quoique vous deviez être suffisamment édifié sur ce sujet, par vos propres réflexions, je vais cependant vous communiquer mes remarques.
>
> L'erreur provient de ce que l'on admet, sans le démontrer, que la droite KX (je suppose que vous ayez sous les yeux le cahier [des "*Comptes-Rendus*"] du 20 Xbre) puisse toujours (savoir quelque éloigné que soit le sommet C_{n-1}) être rencontrée par une droite $C_{n-1}D_{n-2}$ tirée par C_{n-1} au-dessus de $C_{n-1}C_{n-2}$.
>
> Lettre datée du 4 Janvier 1870 d'Eugenio Beltrami à Jules Hoüel reproduite dans [**Boi Giacardi Tazzioli 1998**, 119-120]

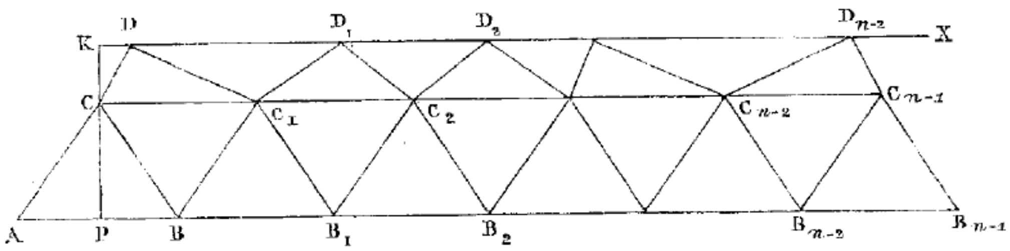


FIGURE 34. Figure donnée par Joseph Bertrand dans sa démonstration [**Bertrand 1869**, 1269]

Beltrami est loin d'être le seul à remarquer cette erreur. Hoüel lui-même rédige durant les derniers jours du mois de Décembre 1869 une longue note sur l'impossibilité de démontrer le postulatum au moyen de figures géométriques planes dans laquelle il utilise les travaux de Beltrami reliant la géométrie de Lobatchevsky et celle des surfaces courbes. Le géomètre de Bordeaux affirme que "*ces constructions, pour être concluantes, doivent être faites sans s'appuyer sur le principe que l'on veut établir [...] Or, dans ce cas, comme l'ont établi Lobatchefsky et Bolyai, la Géométrie du plan rentrera, comme cas particulier, dans celle des surfaces de courbure constante négative, et les constructions faites sur le plan ne pourront jamais conduire à des conclusions autres que celles qu'on en tirerait si elles étaient faites sur ces surfaces courbes de l'espace euclidien.*
Mais on sait que, sur une surface de courbure constante négative, la somme des angles de tout triangle géodésique est moindre que deux angles droits. Donc les constructions dont il

252. Extraits de la lettre datée du 30 Décembre 1869 d'Eugenio Beltrami à Jules Hoüel, reproduite dans [**Boi Giacardi Tazzioli 1998**, 111-113].

s'agit, ne pouvant amener à une conclusion contraire sur la surface courbe, ne le pourront jamais non plus sur le plan.
Cette assertion se vérifie facilement par un examen attentif de la démonstration présentée récemment par M. Carton à l'Académie des Sciences de Paris"[253].

Hoüel présente cette note à la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux le 30 Décembre 1869, puis en envoie une version plus courte[254] à l'Académie des Sciences où elle n'est reçue que dans la séance du 10 Janvier 1870[255]. Si son contenu ne sera jamais imprimée dans les "*Comptes-Rendus*", les amis de Hoüel que sont Justin Bourget et Guiseppe Battaglini se chargeront en revanche rapidement de la faire publier dans leurs recueils, respectivement les "*Nouvelles Annales*" et le "*Giornale di Matematiche*" ([**Hoüel 1870a**]).

Outre la Note de Hoüel, Bertrand reçoit également une lettre du mathématicien Angelo Genocchi relative à sa démonstration du postulatum. A la lecture de la preuve exposée dans les "*Comptes-Rendus*", Genocchi est en effet surpris de retrouver une preuve qu'il avait lui-même communiquée 20 ans plus tôt au mathématicien français Olry Terquem. En 1849, le géomètre italien avait ainsi découvert dans un livre de géométrie cette même preuve du postulatum basée sur une construction récursive de triangles semblables, rédigée par le mathématicien de Bologne Camillo Minarelli. Genocchi, trouvant la démonstration juste, lui donna une nouvelle rédaction et l'envoya à Terquem qui la publia dans ses "*Nouvelles Annales*" ([**Minarelli 1849**]). Mais quelques semaines plus tard, cette démonstration avait été réfutée par le professeur de Paris Eugène Lionnet dans une note elle aussi insérée par Terquem dans son périodique ([**Lionnet 1850**]). Les idées de Lionnet en 1850, quoique moins détaillées, rejoignent celles que Beltrami expose dans ses lettres de 1870 : la construction présentée par Bertrand et Carton repose implicitement sur des postulats autorisant le tracé de quadrilatères dont les dimensions sont aussi grandes que l'on souhaite ($(PKXB_n)_{n\in\mathbb{N}}$) ou le tracé de lignes droites séparant indéfiniment les deux séries de triangles ($(C_kC_{k+1}B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(C_kC_{k+1}D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour [**Bertrand 1869**, 1269], voir la figure 34) présentées par la démonstration de Bertrand. Plusieurs autres mathématiciens français avaient en 1850 émis ces reproches à l'égard de la démonstration de Minarelli[256], et Genocchi s'était rendu à l'évidence : la preuve qu'il avait présentée était erronée. Genocchi avait d'ailleurs continué à étudier plus tard la question du postulatum d'Euclide et de la validité des géométries non euclidiennes dans le cadre de ses recherches sur les principes de la mécanique et de la géométrie ([**Genocchi 1869**]). Aussi à la lecture des "*Comptes-Rendus*" comportant la démonstration Bertrand-Carton Genocchi écrit-il directement à Joseph Bertrand pour l'informer que cette démonstration n'est pas nouvelle, qu'il l'avait déjà communiquée vingt ans auparavant. Il poursuit sa lettre en ajoutant que cette

253. [**Hoüel 1870a**, 95-96].

254. Pour être insérées dans les "*Comptes-rendus*", les notes ne doivent excéder 4 pages pour les non membres et 8 pages pour les membres ou membres correspondants de l'Académie.

255. La réception de la Note de Hoüel à l'Académie des Sciences est mentionnée dans les "*Comptes-Rendus*", Tome 70 (1er Semestre 1870), p.90. Hoüel a en fait envoyé sa note à Antoine d'Abbadie à Paris alors que ce-dernier n'y était plus pendant les vacances d'hiver, ce qui a retardé la présentation de la note à l'Académie ([**Henry Nabonnand 2016**, 36]). Hoüel décrira en effet à Angelo Genocchi : "*La Note que j'ai envoyée à l'Académie des Sciences, et qui, par suite de l'absence du membre de cette assemblée que j'avais prié de la transmettre [d'Abbadie], sera présentée seulement dans la séance de demain 10 Janvier, est un résumé d'une Note plus détaillée que j'ai lue le 30 décembre [...]*"([**Fenoglio Giacardi 1991**, 195]).

256. La note des "*Nouvelles Annales*" mentionne Victor Amédée Le Besgue, professeur à Bordeaux, le polytechnicien Paul Emile Breton de Champ et Pierre Joseph Etienne Finck, professeur à Strasbourg.

démonstration avait alors été source de plusieurs objections et que lui-même s'était aperçu qu'elle était incorrecte. Loin de vouloir obtenir la paternité de la preuve, Genocchi écrit ainsi "*renoncer volontiers à la priorité d'une bévue*".

Après qu'il a reçu cette lettre de Genocchi, Bertrand répond au mathématicien italien en infléchissant sa position, accordant que la démonstration se révèle fausse pour les surfaces pseudosphériques, "*mais s'agit-il du plan et de la réalité*", dit-il, "*le droit d'invoquer l'évidence et la possibilité de la figure me paraît alors incontestable*" [257].

Eugène Lionnet qui s'était élevé contre la démonstration de Minarelli en 1849, écrit à l'Académie des Sciences une lettre au soir même du 20 Décembre 1869, date de la présentation de la démonstration au tableau par Bertrand. Il y souligne les mêmes points faibles dans ladite démonstration que ceux pointés du doigt par Beltrami à Hoüel. Sa lettre ne sera ouverte que lors de la séance du 10 Janvier 1870 - à sa demande [258] - mais Lionnet enverra une seconde communication pour rappeler que la démonstration de Carton coïncide avec celle de Minarelli exposée en 1849, et souligner que les objections qu'il avait alors formulées à l'encontre de cette preuve étaient restées sans réponse.

Cette seconde communication paraîtra dans les "*Comptes-Rendus*" de la séance du 3 Janvier 1870 ([**Lionnet 1870**]) où elle sera accompagnée par une note du professeur Fleury où ce-dernier, se rapportant à son mémoire envoyé à l'Académie deux semaines plus tôt, martèle que "*le postulatum n'est pas démontrable*" [259]. La semaine suivante, outre la note de Hoüel, une communication du mathématicien et astronome Alexis Boillot parvient à l'Académie remettant en question un nouveau point de la démonstration de Carton et Bertrand : la possibilité d'affirmer que si la somme des angles des triangles est strictement inférieure à 180°, elle sera toujours inférieure à $(180° - \alpha)$, où α est une quantité positive fixée. A ces notes niant la démonstration du postulatum viennent par ailleurs s'ajouter plusieurs autres qui, au contraire, veulent apporter d'autres preuves du postulatum d'Euclide, comme par exemple celle du professeur Fuix d'Amiens [260]. Hoüel déplorera cet afflux de communications où les critiques adressées à la démonstration de Bertrand sont noyées dans les notes apportant *a contrario* d'autres démonstrations du postulatum : "*[ma note] arriva en même temps qu'une demi-douzaine de démonstrations du postulatum, les postulateurs ayant vu que le moment était favorable pour placer leurs produits auxquels on faisait un si bon accueil*" [261].

Face à ces nombreuses communications soulignant l'invalidité de la preuve du postulatum de Jules Carton, Bertrand décide rapidement de publier une seconde note où, à l'image de sa réponse à Genocchi, il tempère ses propos et cherche à définir le cadre de validité de la démonstration du postulatum de Carton pour ne pas renier ses idées tout en ménageant ses contradicteurs partisans de la géométrie imaginaire. Cette note [**Bertrand 1870a**], présentée lors de la séance du Lundi 3 Janvier 1870 et insérée dans les "*Comptes-Rendus*", est l'occasion pour Bertrand de se montrer diplomate en exposant objectivement les critiques qui lui ont été adressées :

257. Les échanges entre Genocchi et Bertrand sont rapportés par Beltrami, voir [**Boi Giacardi Tazzioli 1998**, 121].
258. [**Henry Nabonnand 2016**, 30].
259. "*Comptes-Rendus*", tome 70 (1er Semestre 1870), p.32.
260. Voir la mention de la réception des différentes notes dans la séance du Lundi 10 Janvier 1870 dans les "*Comptes-Rendus*" Tome 70 (1er Semestre 1870), pp.90-91.
261. Lettre datée du 17 Avril 1870 de Jules Hoüel à Joseph de Tilly reproduite dans [**Henry Nabonnand 2016**, 109-112].

> Celui qui prétend démontrer le postulatum d'Euclide s'adresse naturellement aux esprits assez difficiles pour n'en pas admettre l'évidence, et cherche à leur montrer, dans le cas où ils refuseraient de l'accepter, des conséquences tellement absurdes, qu'il soit impossible à personne de s'y arrêter.
>
> Cette manière d'envisager la question est formellement contestée par plusieurs géomètres fort distingués, qui m'ont fait l'honneur de m'écrire à ce sujet.
>
> [**Bertrand 1870a**, 18]

Détaillant les objections faites à la démonstration de Jules Carton, Bertrand insiste également sur le fait que les partisans de la géométrie imaginaire rejettent systématiquement l'intervention de la notion d'évidence : pour eux, "*toute phrase qui commence par :* Il est évident que ... *est absolument interdite, on n'en écoute pas la fin, et la démonstration où elle figure est par cela même déclarée insuffisante*". C'est ce qui le sépare des "*admirateurs de Lobatchevsky*" : les évidences qui sont liées à la notion de ligne droite doivent pour Bertrand être acceptées dans le cadre de la preuve, mais elles sont rejetées par les adeptes de la géométrie non euclidienne. Aussi conclut-il sa note sur cette concession :

> Le *postulatum* d'Euclide, dont, pour ma part, l'évidence me satisfait complètement, équivaut à cette idée, inséparable de celle de la ligne droite [...] ce sentiment intime relatif à la ligne droite, dont il est impossible d'affranchir le géomètre.
>
> [...] En résumé, les objections produites contre la démonstration de M. Carton ne m'empêchent pas de la trouver ingénieuse et exacte, mais il n'a pas satisfait, il faut en convenir, aux conditions posées depuis longtemps par les partisans de la géométrie imaginaire, d'après lesquels il ne s'agit pas, pour eux, d'établir l'entière certitude d'une vérité, mais de la rattacher à certaines autres arbitrairement choisies à l'avance.
>
> [**Bertrand 1870a**, 19-20]

Cette "réponse" de Bertrand, effectuée devant un Jules Carton déconfit [262], paraît dans les "*Comptes-Rendus*" le Dimanche 9 Janvier 1870 et suscitera des avis divers chez ses détracteurs. Genocchi dira qu'"*on voit que Bertrand revient déjà un peu en arrière*" [263]. Darboux quant à lui prendra conscience que Bertrand, après avoir réalisé sa méprise, s'en sera sorti à moindre frais en faisant habilement preuve de diplomatie :

> Pour ce qui concerne M. Bertrand, la question est jugée et je crois si c'était à refaire il se garderait bien de publier la note de M. Carton. Il a imprimé dans les Comptes Rendus à peu près ce qu'il a écrit à M. Genocchi.
>
> [...]
>
> M. Bertrand a fait amende honorable au moins en ce qui concerne la démonstration car, tout en rendant justice aux travaux de Lobatchefsky, il garde ses idées sur le postulatum d'Euclide. Il doit en être maintenant à regretter les expressions qu'il a employées dans son rapport et qui me paraissent comme à vous un peu fortes.

262. Darboux décrira à Hoüel : "*Dame ! il ne rayonnait plus du tout*".
263. "*Ella vede che il Bertrand se ritira già un poco*", cité dans [**Boi Giacardi Tazzioli 1998**, 121].

Lettres non datées (Janvier 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Nous reviendrons ultérieurement sur les avis des mathématiciens sur Bertrand suite à cette affaire. Le point important, selon Darboux et tout comme le soulignait Beltrami à Hoüel, est surtout que "*cette affaire a[it] appelé l'attention sur la géométrie non euclidienne, et bien des personnes profitent de l'occasion pour faire des études sérieuses sur ce sujet*". Quelques semaines plus tard, Darboux rapportera ainsi par exemple à Hoüel : "*Hier encore je causais avec de la Gournerie qui est convaincu de l'impossibilité de démontrer le postulatum*" [264]. Écho aux polémiques de l'Académie parisienne, ce sujet est également repris dans diverses sociétés scientifiques, en France comme à l'étranger [265].

Après cette seconde note de Bertrand, l'affaire Carton restera sans suite à l'Académie : les partisans de Carton et de sa démonstration pourront ainsi se targuer d'avoir obtenu un rapport favorable de la part de la commission représentée par son rapporteur Bertrand, du moins dans les séances du 13 et du 20 Décembre 1869. Les opposants à cette démonstration pourront quant à eux affirmer que ce rapport n'a finalement pas été validé à l'Académie, et ils s'appuieront sur la conclusion de la seconde note de Bertrand où il est précisé que la démonstration n'est pas satisfaisante du point de vue de la rigueur qui caractérise la construction des géométries non euclidiennes. Surtout l'Académie va tout faire pour essayer d'"*enterrer*" - selon les termes de Hoüel - cette affaire et étouffer les polémiques suscitées par les interventions de Bertrand. Une Commission spéciale est créée en ce sens dès le 3 Janvier 1870 pour étudier tout ce qui sera relatif à "*la question de la théorie des parallèles*" [266]. Toutes les notes adressées à l'Académie à partir de cette séance et relatives au postulatum d'Euclide seront officiellement "*renvoyées à l'examen de cette Commission nommée*" pour cette question, commission que De Tilly désignera par l'expression "*commission des parallèles*" et qui sera vraisemblablement toujours composée de Bertrand, Chasles et Bonnet. Ces notes ne seront en fait ni examinées ni publiées dans les "*Comptes-Rendus*". Ce sera donc le sort réservé aux notes de Lionnet, Fleury, Boillot, Fuix, Hoüel, et à une note ultérieure de De Tilly "*sur la théorie des parallèles*" envoyée à l'Académie pour la séance du 28 Février 1870 [267]. Hoüel, réalisant le rôle de cette commission des parallèles, condamnera l'Académie dans une lettre à De Tilly, autre victime de cette commission fantôme :

> On a profité de la circonstance pour renvoyer ma note avec les autres à la Commission [des parallèles], c'est-à-dire pour l'enterrer, attendu qu'elle aurait pu causer quelque peine à certains membres de ladite commission.

264. Lettre non datée (Février 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

265. [**Henry Nabonnand 2016**] mentionne en particulier, outre Hoüel à Bordeaux, les présentations de Flye Sainte-Marie à la "*Société Philomathique de Paris*" et de Richard Baltzer à l'Académie des Sciences de Leipzig. A plus long terme, on peut également mentionner les commentaires de Hoüel cinq ans plus tard : "*Les livres et les brochures sur la géométrie non-euclidienne pleuvent de tous côtés depuis quelques temps. Je viens d'en recevoir deux d'Italie, plus quatre d'Allemagne et d'Autriche. C'est comme une averse météorique. La chose commence pourtant à s'acclimater et je ne suis pas peu satisfait d'avoir été un des premiers (chronologiquement) ouvriers de la vigne du seigneur*", lettre datée du 11 Janvier 1875 de Hoüel à Darboux, [**Henry Nabonnand 2016**, 450-1].

266. Cette commission apparaît pour la première fois dans les "*Comptes-Rendus*" de la séance du Lundi 3 Janvier 1870, voir le volume 70 (1870) p.32.

267. Cette note, dont l'Académie accuse réception dans les "*Comptes-Rendus*" (Tome 70 (1er semestre 1870) p.442), est reproduite dans [**Henry Nabonnand 2016**, 403-408].

> [...] vous avez éprouvé le même sort, de manière que, pour n'être pas désagréable à certains membres, l'Académie laissera, dans ses Comptes rendus, le dernier mot à M. Carton et à ses apologistes.
>
> Lettre datée du 17 Avril 1870 de Jules Hoüel à Joseph De Tilly, reproduite dans [**Henry Nabonnand 2016**, 109-112].

Quelques semaines plus tôt, Hoüel se plaignait déjà auprès de Genocchi du rôle de l'Académie parisienne qui, soutenant farouchement Joseph Bertrand, avait mis sur pied cette Commission d'apparat pour se débarrasser de toutes les communications relatives au postulatum :

> Ma Note [[**Hoüel 1870a**]] ayant eu le malheur d'arriver en même temps que trois ou quatre démonstrations du postulatum, l'Académie lui a fait expier impartialement son crime de se trouver en pareille compagnie, et, malgré les sollicitations de quelques membres, elle n'a pas été insérée au Compte rendu, comme je l'aurais vivement souhaité. Peut-être ce que le résultat auquel j'arrive aurait eu de désagréable pour M. Bertrand n'a-t-il pas été étranger à la décision qui l'a renvoyée à une Commission, comme qui dirait aux calendes grecques. Ainsi le dernier mot est resté au parti Carton, et il faut convenir que ce dernier mot n'a pas été heureux.
>
> Lettre datée du 23 Février 1870 de Jules Hoüel à Angelo Genocchi, reproduite dans [**Fenoglio Giacardi 1991**, 197-199].

La réaction des journalistes scientifiques suite à la séance du 3 Janvier 1870 marquant la fin de l'affaire - dans le cadre des séances de l'Académie des Sciences de Paris - reste également très contrastée. Dans le "*Cosmos*" du 8 Janvier, Stanislas Meunier se contentera ainsi, sans prendre position, de remarquer :

> Il paraît que la démonstration récemment proposée du postulatum d'Euclide a soulevé beaucoup d'objections. M. Bertrand dépose, pour y répondre, une note qui prendra place aux "*Comptes-Rendus*" ; il annonce que d'ailleurs M. Carton n'a pas la priorité pour sa démonstration ; elle a été faite dès 1849 par un géomètre italien.
>
> Stanislas Meunier, "*Cosmos, revue encyclopédique hebdomadaire*", Samedi 8 Janvier 1870, Série 3 Vol. 6 (Janvier-Juin 1870), pp.52. [268]

Cette courte notice intervient deux jours après la parution du "*Journal Général de l'Instruction Publique*". Après y avoir fermement condamné Liouville dans son premier article, Jules Desmasures réitère son soutien à Joseph Bertrand et Jules Carton, et revient sur le succès obtenu par ceux-ci contre l'"*intolérance académique*" à laquelle ils sont confrontés. Relatant en réalité le contenu de la séance du 20 Décembre 1869 (et non du 3 Janvier 1870), le rédacteur interprète l'absence d'objection lors de la présentation de la preuve au tableau faite par Bertrand comme le signe du succès de celle-ci. Il se gardera bien, dans cet article comme dans les numéros ultérieurs du périodique, de mentionner les propos adoucis et la seconde note empreinte de diplomatie de Bertrand de la séance du 3 Janvier.

268. Retrouvez ce compte-rendu en ligne : http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=nyp.33433057764395;view=1up;seq=54.

> L'Académie des Sciences s'est de nouveau occupée lundi [269] [20 Décembre 1869] du théorème de M. Carton. M. Bertrand n'a pas abandonné son rapport, et il commençait à le développer lorsque M. le maréchal Vaillant a demandé à dire un mot.
>
> M. le maréchal a déclaré avoir vu M. Carton et avoir eu avec lui une conversation au sujet de sa commission. Le rapport tendant à deux choses : à féliciter d'abord le professeur et à le recommander ensuite au ministre, M. le maréchal a fait comprendre à M. Carton que si le premier point était du ressort de l'Académie, le second ne pouvait être réalisé par elle sans inconvénient, à cause du précédent fâcheux que cette démarche établirait. Ils convinrent ensemble que M. le maréchal appellerait lui-même l'attention du ministre sur la question, afin de ne laisser à l'Académie que le rôle qui lui appartient réellement. M. le maréchal a vu M. Bourbeau le lendemain, et il apporte à l'Académie l'assurance que M. Carton sera l'objet de l'intérêt tout particulier du ministre.
>
> M. Bertrand a ensuite donné au tableau la démonstration du nouveau théorème, sans soulever cette fois aucune objection de la part de ses collègues. Admettant au préalable toutes les notions acquises relatives au plan et à la ligne droite et étant données les trente-deux premières propositions d'Euclide, il établit les autres sans passer par la trente-troisième, c'est-à-dire sans qu'il lui soit besoin de faire intervenir le postulatum d'Euclide. « Le postulatum est d'une entière évidence, dit M. Bertrand, et je pensais que Lobatchewski, qui voulait le contester, n'avait aucun disciple ; mais il m'est arrivé depuis la dernière séance des observations nombreuses sur cette théorie ; la géométrie imaginaire de Gauss a des adeptes. C'est une raison de plus pour bien montrer, avec les ingénieux lemmes et le théorème de M. Carton, que la somme des angles d'un triangle ne peut pas être plus petite que deux droites.»
>
> Ainsi s'est terminé, à l'honneur de l'Académie et de M. Carton, un incident qui menaçait d'avoir une issue toute différente, en créant une nouvelle espèce d'intolérance : l'intolérance académique, et en faisant l'obscurité sur une question scientifique qui avait tout à gagner à être mise à la lumière.
>
> Jules Desmasures, "*Journal Général de l'Instruction Publique et des Cultes*", Jeudi 6 Janvier 1870, Vol. 40 (1870), p.9. [270]

Deux jours plus tard, l'hebdomadaire intitulée la "*Revue des cours scientifiques de la France et à l'étranger*" entre à son tour dans la danse des commentateurs de l'affaire Carton. S'il avait passé jusqu'alors sous silence les épisodes houleux des 13 et 20 Décembre 1869, le rédacteur scientifique Emile Algave, qui dirige alors cette revue avec Eugène Yung, prend fermement position contre les défenseurs des géométries non euclidiennes. Ceux-ci sont

269. Desmasures ne donne volontairement pas la date précise de la séance. Or, son article paraissant le 6 Janvier 1870, cela laisse croire au lecteur, à tort, qu'il s'agit de la séance du 3 Janvier 1870 lors de laquelle l'affaire Carton connut son "dénouement", au moins au sein des séances de l'Académie des Sciences de Paris.

270. Retrouvez cet article en ligne : https://books.google.ca/books?id=tI1LAAAAcAAJ&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false.

présentés comme des "*profanes*" coupables selon lui de "*marcher sur la foi du postulatum*" en voulant en écarter l'étude de manière systématique, voire dogmatique. Algave, à l'instar de Desmasures, prend soin de ne pas mentionner la seconde note de Bertrand où les critiques acerbes ont pourtant fait place aux propos tempérés.

On connaît le fameux postulatum d'Euclide, à l'aide duquel on établit que les trois angles d'un triangle sont égaux à deux angles droits, et qui est la base de la géométrie. Quoique ce postulatum n'ait jamais pu être démontré, son évidence est assez frappante pour qu'on n'ait jamais pu le contester sérieusement.

Cependant un géomètre de Kasan, Lobatchewski, avait eu l'idée en 1829 de se demander ce que deviendrait la géométrie si le postulatum d'Euclide était faux, et, partant de cette hypothèse, il avait constitué d'une manière fort logique une géométrie nouvelle qu'il appela géométrie imaginaire. Gauss déclara qu'elle était construite de main de maître, et que, depuis longtemps déjà (1792), lui-même en avait déterminé les traits principaux. Il lui donna le nom de géométrie non euclidienne, et elle trouva bientôt un certain nombre d'adeptes qui en développèrent les conséquences parallèlement à celles de la géométrie ordinaire, comme si la géométrie devait se diviser en deux sciences rivales. Il y en a un certain nombre aujourd'hui, et il n'y a pas longtemps que l'Académie des sciences de Bruxelles a reçu de M. de Tilly, tout un traité de géométrie et de mécanique non euclidiennes qui paraîtra prochainement dans ses "*Mémoires*". Le plus curieux de l'affaire, c'est que ces deux géométries, qui sembleraient devoir être toujours la négation l'une de l'autre, s'accordent sur un grand nombre de points, et que les différences sont d'un ordre tout à fait négligeable en pratique.

Une telle controverse semble un véritable scandale dans la plus infaillible des sciences, et les mathématiciens auraient assurément quelque plaisir à l'étouffer en démontrant une bonne fois le postulatum d'Euclide. Mais ceux qui l'ont essayé jusqu'ici n'y sont point parvenus.

L'Académie des sciences de Paris vient de recevoir un travail de M. Carton, qui a fait une nouvelle tentative dans ce sens, et qui prétend tenir enfin une véritable démonstration. C'est aussi l'avis de M. J. Bertrand, et il a fait une note contenant cette démonstration. Mais un certain nombre d'académiciens, qui la croient nécessairement impossible, voulaient lui appliquer la mesure qui écarte par la question préalable toutes les prétendues solutions de la quadrature du cercle. Cependant, M. J. Bertrand a fini par obtenir, malgré M. Liouville, que la démonstration de M. Carton serait publiée, et les géomètres pourront décider. En attendant, les profanes continueront à marcher sur la foi du postulatum d'Euclide.

(Emile Algave)[271], "*Revue des cours scientifiques de la France et à l'étranger*", Samedi 8 Janvier 1870, N. 6 (1870), p.81.[272]

Une semaine plus tard, l'Abbé Moigno souligne en revanche que Bertrand a commis dans un premier temps une erreur en soutenant la démonstration du postulatum, erreur qu'il a été contraint de reconnaître dans sa seconde note. Convaincu de l'évidence du postulatum, Moigno continue pour sa part de ne pas faire mention dans ses articles des géométries non euclidiennes, persévérant au contraire dans sa volonté de voir le postulatum définitivement accepté de par son évidence même. Il en appelle pour cela à "*l'oeil de l'esprit*" :

> M. Joseph Bertrand a été forcé de reconnaître que la prétendue démonstration du postulatum d'Euclide de M. Carton était loin d'être nouvelle ; qu'une démonstration semblable, reposant identiquement sur les mêmes principes, avait été publiée sous le nom de M. Minarelli, géomètre italien, dans les "*Nouvelles Annales*" de M. Terquem ; et qu'à la suite d'objections soulevées par MM. Lionnet, professeur au lycée Louis-le-Grand, Le Besgue, professeur à la Faculté des sciences de Bordeaux, et Breton de Champ, ingénieur en chef des ponts et chaussées, elle avait été considérée comme non avenue. C'est donc en définitive une bien mauvaise campagne pour M. Bertrand et pour l'Académie ; M. Liouville était bien inspiré quand il pressait son confrère de s'arrêter au début. Puisqu'en géométrie le grand critérium, le moyen dernier de démonstration est la vue intérieure de l'esprit ou l'évidence, et que le caractère distinctif de la ligne droite est que l'oeil de l'esprit la voit toute entière quand il voit deux de ses points ou un de ses points et sa direction ; pourquoi les géomètres ne s'accorderaient-ils pas à reconnaître une fois pour toutes l'évidence du postulatum d'Euclide ? L'oeil de l'esprit ne peut pas voir la perpendiculaire et l'oblique sans voir en même temps le point de rencontre, et sans assigner sa place ; donc le point de rencontre existe.

M. l'Abbé Moigno, "*Les mondes, revue hebdomadaires des sciences*", Jeudi 13 Janvier 1870, Tome 22 (1870), pp.61-62.[273]

---

271. Le compte-rendu n'est pas signé, cependant d'Algave et de Yung, c'est bien le premier qui s'occupe régulièrement des comptes-rendus de l'Académie des Sciences. Algave prendra en charge la "*Revue scientifique de la France et de l'étranger*" à partir de 1871, issue de la division de la "*Revue des cours scientifiques de la France et à l'étranger*" après la guerre de 1870. Dans son éditorial du 1er Juillet 1871, il fera part de sa volonté de vulgariser la science dans son périodique : "*On a beaucoup parlé de vulariser la science. Le mot était mal choisi, et il faisait prévoir les défauts de bien des publications qui prenaient cet objectif. Il faut augmenter autant que possible le nombre de ceux qui cultivent la science ou du moins s'y intéressent ; mais il faut viser à ce but sans la déguiser ou la frelater. Il faut la montrer telle qu'elle est, en élevant jusqu'à elle les hommes capables de cet effort sans chercher à la mettre au niveau de ceux qui ne peuvent ou ne veulent pas monter. Il faut la populariser en faisant un peuple scientifique. Pour atteindre ce but, il ne suffit pas de divulguer les connaissances scientifiques qui se faussent bien souvent dans des intelligences mal préparées et mal dirigées ; il faut avant tout et surtout répandre l'esprit scientifique.*", Emile Algave, "*Revue scientifique*", 1er Juillet 1871, Série 2 Vol. 1, p.1 (http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=njp.32101078255237;view=1up;seq=9).

272. Retrouvez cette article en ligne : http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=njp.32101078255229;view=1up;seq=91

273. Retrouvez cet article en ligne : http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=hvd.hn4k8b;view=1up;seq=69.

Si l'Abbé Moigno rejette la démonstration de Carton et de Bertrand, c'est ainsi uniquement pour mieux faire accepter la nécessité d'adopter le postulatum par son évidence. Les arguments de rejet d'une preuve du postulatum en raison de la cohérence de la géométrie non-euclidienne n'apparaissent en fait que dans le dernier[274] article consacré à ce sujet dans les périodiques scientifiques : le compte-rendu du docteur Quesneville dans son "*Moniteur scientifique*". Bihebdomadaire, le numéro comportant cet article ne sera publié que le Samedi 15 Janvier 1870. Non content d'y décrire la lacune mathématique sous-jacente à la démonstration présentée par Bertrand, Gustave Quesneville va plus loin en faisant ouvertement dans son recueil une publicité pour les travaux de géométrie non euclidienne :

> **Séance du 20 décembre 1869.** Quand le président donne la parole à M. Bertrand pour achever sa communication de lundi dernier [13 décembre 1869], le maréchal Vaillant se lève et fait savoir qu'il a pris les devants, en recommandant M. Carton à la bienveillance de son collègue de l'Instruction publique ; il n'y aurait plus lieu, selon lui, de demander à l'Académie la recommandation en quelque sorte officielle que le rapport de M. Bertrand proposait d'accorder à ce professeur.
>
> M. Bertrand se montre satisfait de cette solution, et se met en devoir d'expliquer au tableau noir la démonstration que M. Carton (professeur à Saint-Omer) a donnée du célèbre postulatum d'Euclide. Cette démonstration sera affichée pendant quinze jours aux portes de l'Institut, pardon, insérée aux "*Compte-rendu*" de la séance, après quoi les signataires du rapport (MM. Chasles, Bonnet et Bertrand) viendront demander à l'Académie d'en approuver les conclusions.
>
> Le problème auquel s'attaque M. Carton, et qui se ramène au postulatum d'Euclide, c'est la détermination de la somme des trois angles d'un triangle. Le point de départ sont les notions fondamentales relatives à la ligne droite et au plan : la ligne droite est indéfinie, deux de ses parties peuvent s'appliquer l'une sur l'autre ; deux droites ne peuvent se couper qu'en un seul point ; le plan est indéfini, et l'on peut y juxtaposer un nombre illimité de figures égales entre elles. Il s'agit maintenant de prouver que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits.
>
> Legendre était déjà parvenu à démontrer rigoureusement qu'elle ne peut être plus grande : M. Carton veut prouver qu'elle ne peut être moindre.
>
> [Quesneville donne ensuite les étapes détaillées de la preuve exposée par Bertrand, qui se conclut par l'absurdité de la négativité des angles de l'hexagone $ACDD_{n-2}B_{n-1}$ de la figure 34.]
>
> Cette conclusion est loin d'être exacte. En effet, il ne s'agit pas ici d'un hexagone donné, mais d'un hexagone à construire ; si la somme des angles est négative, cela signifie tout simplement que la construction projetée n'est pas possible. Elle n'est possible que si le postulatum est une vérité, c'est-à-dire s'il ne reste plus rien à démontrer.
>
> La démonstration pourrait se présenter plus simplement comme il suit. Soient AP, BQ deux droites perpendiculaires à AB. Portons sur

274. S'entend ici naturellement le dernier article consacré à la preuve de Jules Carton discutée dans les séances de l'Académie des 13, 20 Décembre 1869 et 3 Janvier 1870.

AP n longueurs égales AA', $A'A''$, ..., et aux points A', A'', ... élevons les perpendiculaires $A'B'$, ... de longueur égale à AB. En joignant les points B, B', B'', ... par des droites, nous aurons n quadrilatères rectangles, dans lesquels les angles en B, B', ... seront aigus (ou droits). Dès lors, s'il est possible de former des triangles en dehors de ces quadrilatères, en joignant les points B', B'', ... à d'autres points C, C', ... situés sur BQ, nous pourrons former la somme de tous les triangles de manières différentes, et il en résultera encore que la somme des angles d'un triangle ne peut être inférieure à deux droits.

Sous cette forme, on saisira mieux l'objection que l'on peut faire à la démonstration de M. Carton, en se plaçant au point de vue de la géométrie imaginaire de Lobatschewsky. La ligne brisée $BB'B''$... forme le contour d'un polygone convexe, et il n'est pas prouvé que les droites $B'C'$, ... seront toutes en dehors du polygone. La possibilité de la construction de M. Carton dépend donc du postulatum d'Euclide.

Les objections que nous avons développées ici, plusieurs géomètres les ont faites à M. Bertrand ; dans une note insérée au "*Compte-rendu*" de la séance du 3 Janvier, il reconnaît qu'elles sont fondées lorsqu'on se place au point de vue de la géométrie imaginaire, mais il persiste à déclarer que « l'assertion de M. Carton conserve une entière évidence », et à trouver la démonstration « ingénieuse et exacte ». Cela nous étonne, car, tout bien pesé, la démonstration de M. Carton ne vaut pas mieux que les vingt-huit réunies par Klugel en 1763, ou que les dix-sept exposées par Hoffmann en 1807. Elle invoque, en dernier ressort, l'évidence ; mais alors on retombe toujours sur un postulatum.

[Quesneville indique ensuite les remarques d'Eugène Lionnet concernant la preuve de Minarelli et la réfutation qu'il en a présentée.]

Ceux qui voudront se familiariser avec les idées de Gauss, de Lobatchewski, de Bolyai, sur les bases de la géométrie, les trouveront exposées dans la brochure de M. Hoüel, intitulée : *Etudes géométriques sur la théories des parallèles*.

Gustave Quesneville, "*Le Moniteur scientifique*", Samedi 15 Janvier 1870, Tome 12 (1870), pp.97-99.[275]

On constate via l'étude des articles des rédacteurs scientifiques commentant l'affaire Carton que le spectre des positions adoptées est extrêmement vaste. Seuls les lecteurs du "*Moniteur*" de Quesneville percevront cette affaire comme une déconvenue pour Bertrand, et auront obtenu des renseignements sur la géométrie non euclidienne. Les lecteurs de "*Cosmos*" ou des "*Mondes*" n'auront eux, en parcourant les analyses de Meunier et de Moigno, que bien peu d'éléments pour se forger une opinion. S'ils suivent l'avis de l'Abbé Moigno, ils condamneront Bertrand ainsi que tous ceux se penchant sur le sujet d'un postulatum qu'ils appréhenderont comme une proposition dont l'évidence doit en entraîner l'adoption *de facto*. Ils n'auront absolument rien appris de la géométrie non euclidienne et continueront probablement d'en ignorer l'existence. Ces lecteurs auront néanmoins été

275. Retrouvez cet article en ligne : http://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=coo.31924096347814;view=1up;seq=105;size=150.

informés de l'existence d'une "affaire Carton", ce qui n'est pas le cas des lecteurs de "*La Revue des Deux Mondes*", de ceux du "*Journal des Débats*" ou encore de ceux du "*Journal des Savants*", ce-dernier comptant pourtant Bertrand lui-même comme collaborateur. Rien en effet, selon nos recherches, n'est écrit dans ces importants journaux à propos de l'affaire Carton. Il en va de même pour les quotidiens "*Le Figaro*" et "*La Presse*"[276]. L'absence de commentaires sur cette affaire est en soi un témoignage montrant sinon la division des opinions (au sein de la rédaction), du moins la difficulté de se forger un avis à ce sujet. Elle peut également révéler une réticence chez les rédacteurs quant à l'exposition publique de leur avis sur cette question.

A la lecture des articles de Jules Desmasures et d'Emile Algave dans le "*Journal Général de l'Instruction Publique*" et la "*Revue Scientifique*", le lecteur non initié aura quant à lui perçu cette "affaire Carton" à l'inverse de bon nombre de mathématiciens étrangers, croyant voir triompher Carton et Bertrand sur la résolution d'un sujet dont d'autres, Liouville et les "*profanes*" développant délictueusement la géométrie imaginaire, voulaient par leur intolérance proscrire jusqu'à l'étude même. La géométrie non euclidienne leur sera apparue comme résultant d'errements fautifs dont certains mathématiciens se seront rendus coupables, et dont l'entêtement aura presque eu raison de la tentative légitime de Carton et Bertrand de les remettre dans le droit chemin grâce à une preuve valable du postulatum d'Euclide. Ces lecteurs ne seront alors pas surpris, lors de la parution du mémoire de Jules Carton ([**Carton 1870**]) en Juin 1870, de lire l'avant-propos élogieux qui l'accompagne :

> Le 5 Juillet 1869, j'ai eu l'honneur de remettre au secrétariat de l'Académie des Sciences, Institut de France, un manuscrit sur un nouveau moyen de lever la difficulté de la théorie des parallèles.
>
> A ce sujet, un rapport favorable, approuvé par MM. les membres de la section de géométrie, fut lu, le 13 décembre dernier, au sein de cette Académie qui s'est occupée des parties principales de ce manuscrit pendant trois séances, celles du 13 et du 17 (sic)[277] décembre 1869 et celle du 3 janvier 1870.
>
> [**Carton 1870**, V]

On peut ainsi raisonnablement penser, à la lecture des articles de périodiques, qu'en France l'affaire Carton n'aura causé que peu de tort à Bertrand, y compris parmi les mathématiciens de premier ordre. Si comme Bertrand de nombreux géomètres préfèrent encore en 1870 délaisser la géométrie imaginaire, à l'instar de la commission à laquelle il prit part pour examiner la démonstration de Jules Carton, l'atténuation des propos de sa

276. Parmi les quotidiens, seul "*Le Temps*" mentionne dans son numéro du 6 Janvier 1870 la séance de l'Académie des Sciences du 3 Janvier, et rapporte "*M. Bertrand reprend la fameuse question du Postulatum d'Euclide. La démonstration de M. Carton a provoqué un grand nombre de lettres signées par des géomètres éminents. L'un d'eux annonce qu'en 1849 un Italien émit des idées analogues dans les "*Annales de mathématiques*" rédigées par MM. Terquem et Gérono*". Le lecteur du "*Temps*" aura peut-être été décontenancé puisqu'aucun compte-rendu n'avait été fait relativement aux séances précédentes. La simple mention de "*M. Carton*" lui sera ainsi étrangère.

277. Carton fait ici une erreur de date : la seconde séance a eu lieu le Lundi 20 Décembre 1869 et non le Vendredi 17. Cette erreur pourrait s'expliquer par le fait que le compte-rendu de la première séance dans le "*Journal Officiel*", écrit par Henri de Parville, a été publié le Vendredi 17 Décembre 1869. Il paraît vraisemblable que Jules Carton ait interprété cette date comme correspondant à une séance de l'Académie des Sciences, dont il est néanmoins bien connu qu'elle se réunit les lundis. Cette méprise est d'autant plus étonnante que, comme on l'a noté dans les lettres de Darboux, Jules Carton a assisté aux séances de l'Académie des Sciences des 13 et 20 Décembre 1869, et du 3 Janvier 1870.

seconde note et le flou entretenu au sujet de cette affaire dans les périodiques auront permis à Bertrand de faire bonne figure en dépit d'une erreur qu'il aura heureusement rapidement réalisée. On a vu par exemple que Darboux ne tenait pas rigueur à Bertrand de son attitude lors de cette affaire, simplement regrettait-il que son maître se soit momentanément mis dans l'embarras. En fait Darboux en voudra à Jules Carton qu'il n'apprécie pas :

> Je l'ai vu ce petit homme [Carton], il est singulièrement collant. Il voulait m'exposer ses démonstrations et une fois que j'étais avec Bonnet nous avons eu toutes les peines du monde à nous en débarrasser. C'est qu'il n'a jamais voulu reconnaître qu'il s'était trompé.
>
> Lettre datée du 4 Juillet 1871 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Hoüel**].

Naturellement Hoüel ne tiendra pas Carton en plus haute estime que Darboux, et les deux rédacteurs du "*Bulletin des Sciences*" se feront un malin plaisir à ignorer dans leur périodique la parution du mémoire de Carton :

> Quant à [ce mémoire de Carton], je me dispenserai de le lire, et sa place est trouvée dans ma collection de curiosa, entre une quadrature du cercle et une démonstration de l'immobilité de la Terre. A fortiori garderons-nous, dans le Bulletin, le silence le plus complet sur cet intrépide auteur.
>
> Lettre datée du 12 Avril 1872 de Jules Hoüel à Joseph De Tilly, reproduite dans [**Henry Nabonnand 2016**, 197-200].

Contrairement à Darboux, les partisans actifs de la géométrie non euclidienne, contradicteurs de Bertrand, conserveront une vive rancœur envers ce-dernier. Ils ont en effet souffert du mépris conjugué de Bertrand dans ses notes et de l'Académie toute entière de par la mise en place de la commission des parallèles ayant eu vocation à écarter leurs remarques pour mieux étouffer l'affaire Carton. Hoüel se montrera à cet égard encore plus critique que De Tilly en lui écrivant :

> Vous avez aussi, soit dit entre nous, donné au jeune M. B... [Bertrand] une leçon de convenances bien méritée, à cause de la légèreté avec laquelle il s'est exprimée à l'endroit des imitateurs de Gauss [...] La Note de décembre est donc un spécimen rare de légèreté. Celle du 3 Janvier, je ne saurais la qualifier, de crainte de tomber sous le coup des reproches d'irrévérence [...]
>
> Lettre datée du 19 Avril 1870 de Jules Hoüel à Joseph De Tilly, reproduite dans [**Henry Nabonnand 2016**, 113-116].

En Italie les mathématiciens se rappelleront longtemps de cette affaire qui discrédita Bertrand à leurs yeux, tout du moins eu égard à la géométrie. On retrouve ainsi les échos de l'opinion négative de Genocchi à l'encontre de Bertrand dans ses échanges avec Beltrami et Hoüel ([**Fenoglio Giacardi 1991**]), Hoüel renchérissant de plus belle en répondant à Genocchi : "*Vous voyez, Monsieur, que je suis absolument de votre avis sur la conduite scientifique de ce géomètre, qui entre si prématurément aux Invalides, quoique la science eût encore tant de beaux travaux à espérer de lui*" [278]. Les mathématiciens transalpins Brioschi

278. Lettre datée du 23 Février 1870 de Jules Hoüel à Angelo Genocchi, reproduite dans [**Fenoglio Giacardi 1991**, 197-199].

et Cremona ne sont pas en reste contre Bertrand, comme le rapporte leur compatriote Beltrami - qui partage leur animosité - dans une lettre à Hoüel :

> Je suppose que vous aurez envoyé un exemplaire de la Note à M. Cremona, ou à M. Brioschi. Je vous dis cela car ces messieurs auraient voulu que je fisse paraître une réponse aux ironies de M. Bertrand, qui semblent avoir beaucoup déplu à M. Brioschi surtout. [...] si vous trouverez convenable à l'avenir, de protester contre quelqu'autre tirade de M. Bertrand, ce sera à la porte de M. Hermite qu'il vous faudra frapper.
>
> Lettre datée du 23 Janvier 1870 d'Eugenio Beltrami à Jules Hoüel, reproduite dans [**Boi Giacardi Tazzioli 1998**, 125-128].

Si selon Beltrami c'est Brioschi qui fut le plus irrité face aux attaques de Bertrand, c'est bien Luigi Cremona qui mentionnera encore trois ans plus tard l'attitude du mathématicien français durant l'affaire Carton :

> [...] il est très regrettable qu'en France, à l'exception de [vous], M. Darboux, prédomine l'esprit conservateur, c'est-à-dire l'esprit hostile aux idées nouvelles. Lorsque j'ai le premier en Italie, par la publication d'une traduction des Elements de M. Baltzer, vulgarisé les idées de Gauss, de Lobatchevsky et de Bolyai sur la géométrie non euclidienne et que mon ami Beltrami a publié ses importants mémoires sur l'interprétation réelle de cette géométrie, j'ai reçu quelques lettres d'éminents géomètres français où l'on déplorait ces égarements métaphysiques ou même phantastiques (sic). Maintenant, grâce aussi aux efforts louables de M. Hoüel, il n'y a peut-être plus aucun géomètre qui oserait soutenir ce que M. Bertrand a affirmé de son autorité à propos du postulatum d'Euclide.
>
> Lettre datée du 24 Décembre 1872 de Luigi Cremona à Gaston Darboux, [**Archives épistolaires Cremona**]

Si l'étude des réactions des mathématiciens familiers de la géométrie non euclidienne en 1869 face à l'affaire Carton révèle à la fois une grande connaissance des travaux de géométrie non euclidienne et des jugements sévères envers l'attitude de Joseph Bertrand, le traitement médiatique de cette affaire dans les périodiques scientifiques de l'époque est bien plus nuancé. De nombreux rédacteurs prennent ainsi position en faveur de Bertrand et Carton dans leur tentative de démonstration du postulatum, et condamnent fermement l'opposition de leurs contradicteurs. Les arguments de ces-derniers faisant prévaloir l'existence d'autres géométries, imaginaires, semblent aux yeux de ces journalistes vouloir mépriser les efforts faits pour obtenir une telle démonstration en en rejettant la possibilité de manière systématique. Parmi tous les articles, seul Quesneville dans son "*Moniteur*" prend fait et cause pour les contradicteurs de Bertrand et promeut les travaux de géométrie non euclidienne. C'est bien peu comparé aux critiques féroces des rédacteurs rejetant une géométrie non euclidienne qu'ils ne comprennent pas et ses adeptes jugés comme des "*profanes*". Cette affaire Carton ressemble ainsi dans les journaux à une guerre de religion entre ceux qui ont la "*foi du postulatum d'Euclide*" et les autres qui lui "*marche[nt] dessus*". On en appelle alors à "*l'œil de l'esprit*" pour justifier que l'évidence ait valeur de vérité et même au-delà : c'est une vérité sacrée.

Bertrand, qui soutient la démonstration de Carton et qui est ainsi le personnage central de cette affaire, s'en tire à bon compte en nuançant quelque peu ses propos dans sa seconde communication. Il bénéficie du soutien de l'Académie qui décide d'étouffer le scandale par la création de la commission des parallèles, et d'une opinion très divisée - voire de l'absence d'opinion - chez les mathématiciens et les lecteurs des journaux scientifiques dont l'opinion dépend directement de l'avis exprimé par les rédacteurs. Bertrand ne souffrira finalement que d'une mauvaise opinion des mathématiciens qui auront voulu directement le confronter en adressant des contradictions à sa démonstration, ainsi que celle des mathématiciens italiens qui, eux, seront plus sévères à son égard. En France, la guerre franco-prussienne qui éclate en 1870 a vite fait de faire oublier cette polémique du début de l'année, d'autant plus que les événements provoqueront de la sympathie pour Bertrand. Ayant dans un premier temps participé à la défense de Paris pendant les quatre mois de siège, il sera en effet victime des incendies ravageurs lors de la Semaine sanglante mettant un terme à la Commune de Paris. Sa maison de la rue de Rivoli et sa riche bibliothèque seront totalement anéanties [279]. Celui qui fut à 11 ans le plus jeune auditeur des cours de l'Ecole Polytechnique aura donc traversé l'affaire Carton sans que son prestige ne soit vraiment entamé. La protection des académiciens dont Bertrand aura bénéficié continuera de perdurer, et quatre ans plus tard ceux-ci le porteront au rang de Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences.

279. A propos du rôle de Bertrand pendant le siège de Paris de 1870 et des dommages qu'il subit durant les incendies de la Semaine sanglante, voir le discours de Darboux [**Darboux 1912**, 45-46]. Dans cet incendie disparaît notamment le mémoire originel d'Edmond Bour sur les surfaces développables et applicables sur d'autres surfaces, qui lui avait fait gagner le prix académique de 1861 (voir [Chap.2,7.3]), ainsi que le troisième volume du *Traité de Calcul Différentiel et Intéral* que Bertrand ne réécrira jamais.

8. Quelques repères historiques (1859-1879)

Dans cette ultime annexe, nous présentons quelques éléments historiques qui permettent de mieux saisir le contexte et les événements géopolitiques des années 1860-70. Ces événements forment souvent la toile de fond des échanges épistolaires de Gaston Darboux que nous avons consultés et cités dans notre travail. Ils sont également à prendre en compte pour bien appréhender la période de lancement du *Bulletin des Sciences* [Chap.5,3], ainsi que la construction du statut international de Darboux [Chap.4,2] et [Chap.6,3].

Il ne s'agit pas ici de prétendre à un travail historique rigoureux et complet. Pour cela, on consultera le travail de *vrais* historiens tel [**Choisel 2015**] et [**Miquel 2008**] [280]. La visée de cette annexe est plutôt de fournir les grandes lignes des évolutions historiques de la scène européenne. Par ailleurs, pour mieux correspondre au vécu de Darboux lui-même, nous insisterons particulièrement sur les années de guerre 1870-71. Le géomètre nîmois vit alors dans un Paris tourmenté, et ses commentaires nous accompagneront pour tenter de ressentir les événements à travers sa plume.

Cette annexe permet ainsi de faciliter la lecture de notre travail de thèse. Mais elle montre aussi comment Darboux perçoit la guerre de 1870, son dénouement et la Commune de Paris. En dépit de quelques accès de colère, son esprit pacifiste et internationaliste s'y manifestera. D'une certaine manière, ceci préfigure son action et son engagement institutionnel ultérieurs, notamment en lien avec l'Association Internationale des Académies (1899-1913) [281].

1817 : Le contexte de la Confédération Germanique

Après la défaite de Napoléon Bonaparte en 1815, le congrès de Vienne vient réorganiser les puissances européennes. La dissolution du Saint-Empire Germanique laisse place à de nombreux états dont le plus important est le royaume de Prusse. Néanmoins l'équilibre des puissances européennes est à l'avantage de l'Empire Autrichien, qui est inclus dans la nouvelle Confédération germanique créée en 1817 par le Deutsche Bundesakte. Si les empereurs d'Autriche étaient officiellement les présidents de cette nouvelle Confédération, cela ne reflétait pourtant en rien l'influence - grandissante au fil du temps - du royaume de Prusse dans les affaires impériales.

280. On pourra également consulter le site `histoire-fr.com` dont nous avons tiré de nombreuses sources et plusieurs documents.

281. Voir à ce sujet [**Croizat Tazzioli 2014**].

FIGURE 35. Les frontières (rouge) de la Confédération germanique 1817-1866

1859 : La Campagne d'Italie

En 1859, les troupes autrichiennes franchissent la frontière de la région de Lombardie-Vénitie, alors sous domination autrichienne. Pour répondre à cette invasion du royaume de Piémont de la part des Autrichiens, l'Empereur français Napoléon III vient diriger lui-même au côté du roi du Piémont Victor-Emmanuel II les troupes franco-piémontaises. Ils remportent de nombreuses victoires, libèrent le Piémont, envahissent la Lombardie et progressent vers le Nord en faisant constamment reculer les Autrichiens. Menacés par une intervention de la Prusse au côté de l'Autriche, Français, Piémontais et Autrichiens négocient un accord de Paix à Zurich qui marque, en Novembre 1859, le début de l'unification du royaume d'Italie. C'est la fin de ce que l'on appellera la campagne d'Italie. La Lombardie devient sous contrôle piémontais, bien que la Vénitie reste sous domination autrichienne. Grâce à des plébiscites pour l'unification de l'Italie par des duchés du centre du futur territoire italien, le Piémont acceptera de céder à la France en Mars 1860, comme convenu avant l'intervention armée, la Savoie et le comté de Nice.

FIGURE 36. Unification italienne après la guerre de 1859

1862 : Les nouveaux hommes forts de la Prusse

L'échec de la campagne piémontaise affaiblit le rayonnement de l'Autriche dans la Confédération germanique. Au contraire, la Prusse continue de s'affirmer sur les plans diplomatiques et militaires. En Septembre 1862, le jeune Empereur de Prusse Guillaume Ier nomme Otto von Bismarck au poste de Ministre-Président. Celui-ci réorganise l'armée prussienne et rend les questions relatives au budget militaire indépendantes du Parlement. Ce-faisant, le chancelier Bismarck s'octroie avec le Ministre de la Guerre Von Roon et le chef d'Etat-Major Von Moltke le contrôle total de toutes les opérations concernant l'armée.

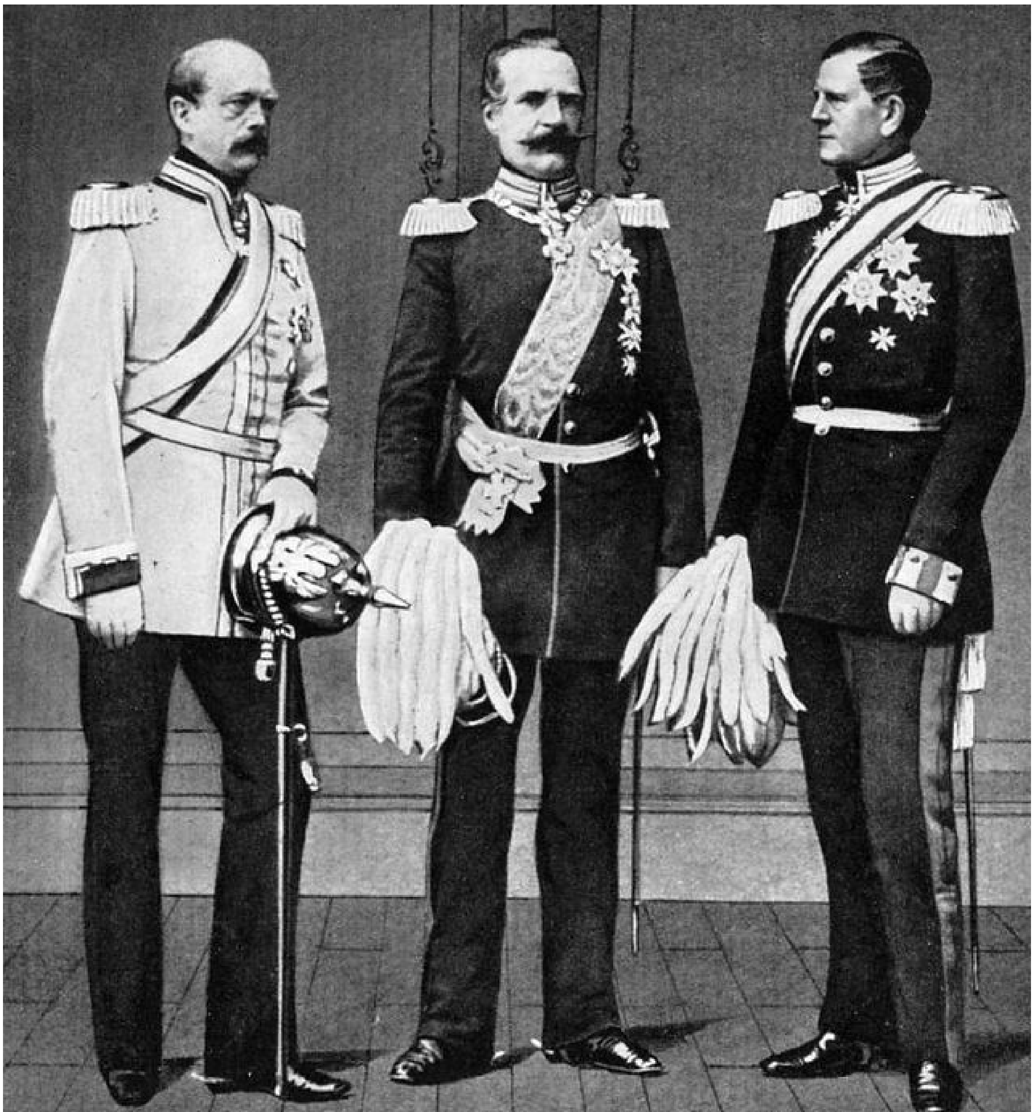


Figure 37. Les trois hommes forts de la montée en puissance de l'armée prussienne : Bismarck, von Roon, von Moltke (de gauche à droite)

La Prusse va alors réaliser l'ambition partagée par les trois hommes forts de l'armée prussienne : affirmer sa domination sur la Confédération germanique et entraîner sous son influence la construction de l'Empire Allemand. Cela va s'effectuer en trois temps grâce à autant de victoires militaires successives : contre le Danemark en 1864, l'Autriche en 1866, et enfin la France en 1870.

1864 : La Guerre des Duchés

La première intervention militaire est relative au statut particulier de la péninsule de Schleswig-Holstein, à la pointe Nord de la Confédération germanique, frontière avec le royaume du Danemark. Cette péninsule se compose au Sud du duché de Holstein et au Nord du duché de Schleswig. Depuis 1852 le protocole de Londres stipulait l'indépendance des duchés de Schleswig et d'Holstein du royaume danois, le duché d'Holstein étant compris dans la grande Confédération germanique. Fin 1863, Christian IX, devenu roi du Danemark, déclare dans sa nouvelle Constitution l'appartenance du duché de Schleswig à son royaume. Ce n'est pas uniquement la Prusse mais la Confédération germanique toute entière qui se trouve offensée par cette nouvelle Constitution, et les troupes prussiennes de Bismarck trouvent naturellement une alliance avec les troupes autrichiennes pour franchir la frontière du Holstein et envahir le Schleswig en infligeant une sévère défaite aux danois. Cette guerre des duchés se conclura par le Traité de Vienne en Octobre 1864, scellant la prise de contrôle de la confédération germanique sur l'ensemble de la région du Schleswig-Holstein.

Figure 38. Les 3 territoires en jeu lors de la guerre des duchés (avec l'emplacement actuel de la frontière germano-danoise)

1866 : La Guerre Austro-Prussienne

La gestion administrative des duchés de Holstein et de Schleswig, dont la conquête fut menée main dans la main par la Prusse et l'Autriche, va cristalliser les tensions grandissantes entre les deux puissances. Bismarck souhaite mettre à mal la Confédération germanique dont la Prusse accepte de plus en plus mal la gestion commune avec l'Autriche, alors que celle-ci représente sa principale rivale. Il rêve de pouvoir unifier les états de la

Confédération germanique (à l'exception, bien sûr, de l'Autriche) en les plaçant tous sous la domination de la Prusse.

En Août 1865, une convention est organisée à Gastein, en Autriche, pour statuer sur la gestion des duchés annexés au Danemark quelques mois plus tôt. Il est décidé d'un commun accord que la Prusse contrôle le duché de Schleswig (au Nord) et que l'Autriche contrôle celui du Holstein (au Sud). Cependant, l'Autriche continue de reconnaître Frederick VIII, le roi danois, comme duc de Schleswig-Holstein. Bismarck, quant à lui, refuse de prêter quelque droit que ce soit au roi danois sur les deux provinces annexées. Il voit dans cette divergence l'opportunité d'attaquer son meilleur ennemi autrichien. Bismarck doit alors s'assurer que lorsque le conflit sera déclaré, son ennemi sera esseulé. Pour y parvenir, il rencontre début Avril 1866 Napoléon III à Biarritz et obtient sa neutralité dans le futur conflit en échange de l'association au territoire français du Luxembourg, alors sous domination du roi des Pays-Bas. Puis il obtient du roi d'Italie Victor-Emmanuel II, quelques jours plus tard et avec les recommandations de Napoléon, un accord qui oblige les italiens à s'allier à la Prusse en cas de conflit contre l'Autriche avant la mi-Juillet.

Le 1er Juin 1866, l'Autriche demande la résolution de la question de la gestion du duché de Holstein par la Conseil de la Confédération germanique. Bismarck saisit immédiatement l'opportunité : considérant cette initiative comme une rupture de la convention de Gastein, il envoie les troupes prussiennes envahir le duché de Holstein, sous contrôle autrichien, le 10 Juin. Le Conseil de la Confédération germanique donne tort à Bismarck, et certains états déclarent en conséquence la guerre à la Prusse. Bismarck, signalant la fin de la Confédération germanique, déclare la guerre à l'Autriche le 14 Juin, s'assurant ainsi à temps l'appui des troupes italiennes.

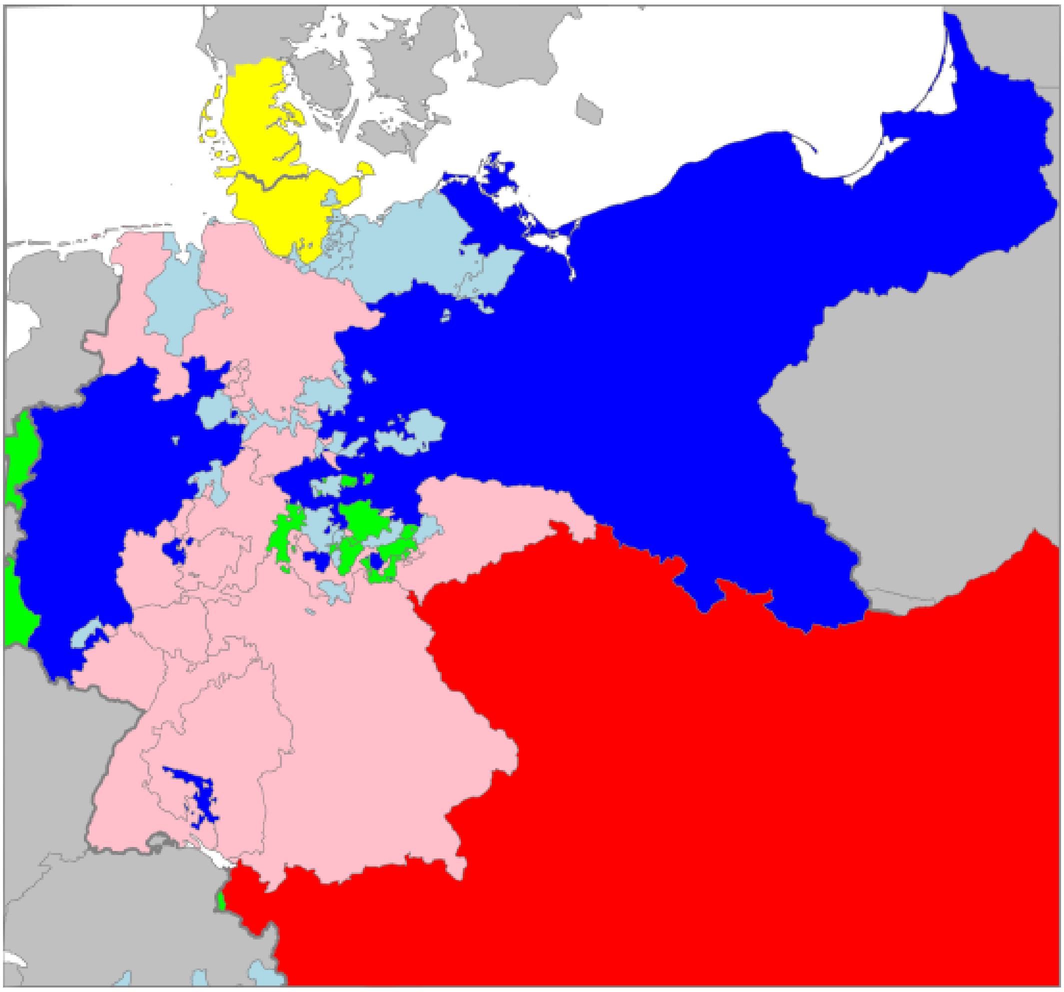


Figure 39. Les alliances (rouge et rose) contre la Prusse, l'Italie et leurs alliés (bleus foncé et clair) en Juin 1866

Les forces en présence laissent présager d'un conflit militaire beaucoup plus équilibré que lors de la guerre des duchés, où les forces danoises étaient vraiment trop faibles. Néanmoins, ce conflit va révéler à l'Europe entière la puissance nouvelle de l'armée prussienne, renforcée depuis plusieurs années par le trio Bismarck-von Roon-von Moltke.

Les états allemands alliés à l'Autriche contre la Prusse sont rapidement écrasés par le demi-million de soldats prussiens, qui menés de main de maître par von Moltke, parviennent rapidement en Bohème, territoire autrichien. Une partie des soldats autrichiens doit défendre la frontière Sud du territoire contre les italiens. Néanmoins, ce manque de contingence est compensé par l'aide de l'armée de la Saxe, seul état de la Confédération dont l'engagement militaire contre la Prusse est significatif. Le 3 Juillet, à Königgrätz en Bohème, les forces prussiennes infligent alors une défaite décisive et sans appel à l'armée autrichienne, dont l'ampleur frappe les esprits partout en Europe.

Alors que les troupes prussiennes sont stationnées à Nikolsbourg près de Vienne, l'armistice y est signée le 22 Juillet, puis les accords de paix de Prague sont signés un moins plus tard avec la médiation de Napoléon. L'Autriche perd la province de Vénitie qui est donnée à l'Italie, et toute son influence sur les états allemands. L'empire autrichien se transformera en empire d'Autriche-Hongrie l'année suivante. La Prusse s'adjoint la totalité de la région de Schleswig-Holstein. Surtout, elle profite de l'exclusion de l'Autriche des affaires administratives relatives aux états allemands pour former la grande Confédération d'Allemagne du Nord, première étape de la grande unification pensée par Bismarck. Cette nouvelle Confédération d'Allemagne du Nord unit tous les états allemands situés au Nord du fleuve Main. Le Traité donnant naissance à cette Confédération est signé quelques jours avant les accords de Prague, mais c'est en Avril 1867 qu'une Constitution est ratifiée. L'homme fort de l'exécutif est évidemment le Bundeskanzler Bismarck.

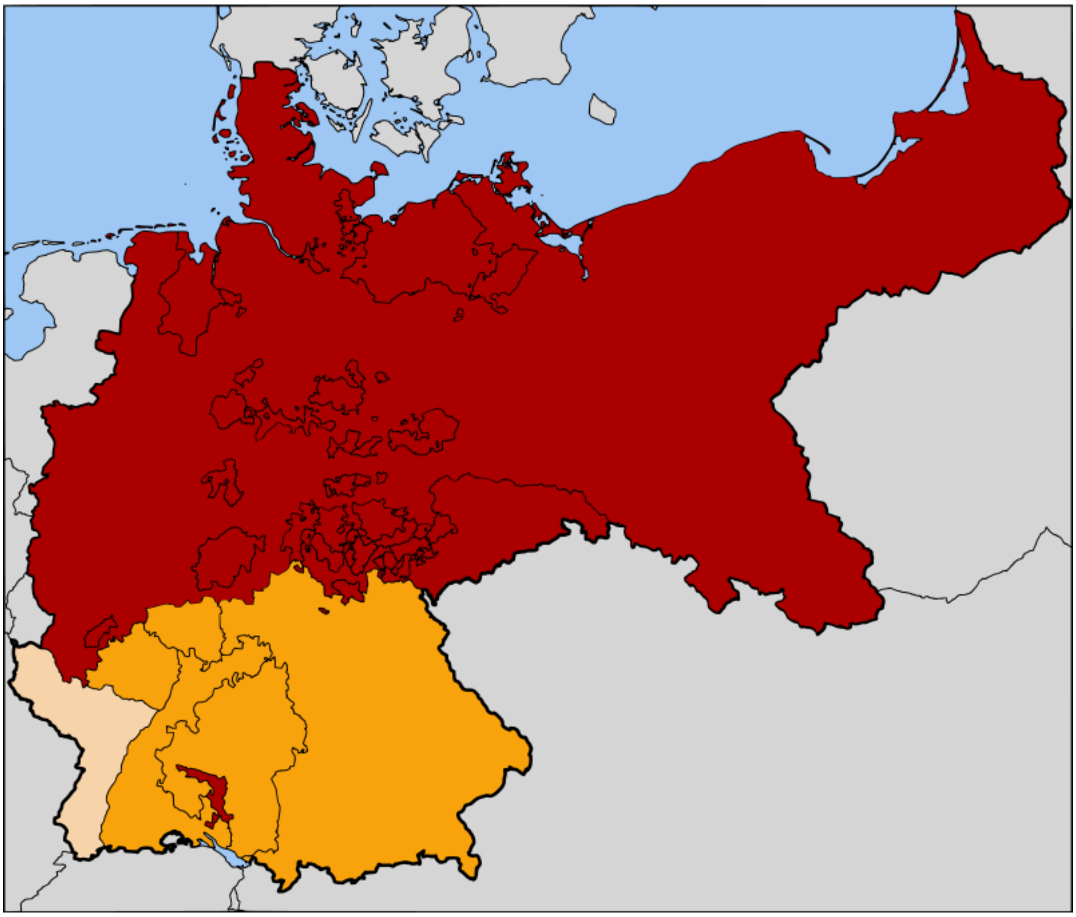


FIGURE 40. La Confédération d'Allemagne du Nord (brun)

1867 - 1870 : Les tensions à l'origine de la guerre franco-prussienne

Après la guerre Bismarck tombe malade quelques mois et les négociations relatives à la cession du Luxembourg à la France ne reprennent, après avoir été laissées en suspens lors des accords de Prague, qu'en décembre 1866 lors du retour du Bundeskanzler aux affaires. Profitant de la position de force acquise par la Prusse et la Confédération d'Allemagne du Nord, il commence par se désengager et laisser seul Napoléon face au roi des Pays-Bas pour négocier le statut du Luxembourg. Puis, en Avril 1867 au moment où les négociations franco-hollandaises sont tout de même sur le point d'aboutir, il fait savoir à Guillaume III, roi des Pays-Bas, que la cession à la France de ses droits de souveraineté sur le Luxembourg serait immanquablement une cause de guerre. Une guerre entre la France et la Prusse est alors toute proche. Mais les Pays-Bas apeurés, conscients de la puissance militaire de Bismarck, préfèrent faire volte-face et s'opposent finalement à céder leur droit souverain sur le Luxembourg à la France : le conflit paraît évité, mais l'annexion française échoue. Finalement en Mai 1867 un compromis est trouvé à Londres : les troupes prussiennes quittent le Luxembourg, qui conserve cependant toute son indépendance.

Cette épisode, non-content d'irriter la diplomatie napoléonienne, rend les opinions publiques prusses et françaises méfiantes les unes vis-à-vis des autres. En France surtout, la volte-face de Bismarck est vécue comme une humiliation et la guerre, bien qu'évitée en Avril, semble à terme inévitable.

Un second événement va venir cristalliser les tensions franco-prusses. En Septembre 1868, une révolution provoquée par une mutinerie de généraux à Cadix gagne en Espagne la population et une grande partie des dirigeants. Abandonnée par son Président et son Ministre en Chef, la reine Isabelle II quitte son trône, fuit l'Espagne et gagne Paris en exil. Suite à la vacance du trône, Bismarck propose en Juin 1870 la candidature du Prince Léopold de Hohenzollern-Sigmaringen, cousin du roi de Prusse Guillaume Ier et membre, plus éloigné, de la famille de Napoléon III. Il sait que, par la parenté du prince et du roi de Prusse, cette candidature déjà proposée en Avril mais rejetée par le roi Guillaume, va froisser la France et être perçue comme une tentative d'encerclement. Eviter cette provocation était la cause du premier refus du roi, dont les aspirations ne sont pas aussi belliqueuses que celles de Bismarck. Lorsque la candidature du cousin du roi est remise sur le devant de la scène par Bismarck, Napoléon demande à son ambassadeur en Prusse, Vincent Benedetti, de se rendre à Ems, ville d'eau où le roi Guillaume se trouve en vacances, négocier auprès du roi le retrait de Léopold. Le ton monte en France, où l'opinion publique s'indigne et les parlementaires insistent sur l'orgueil national bafoué. Devant l'ampleur des réactions, Guillaume Ier obtient de son cousin qu'il déclare son retrait, ce que celui-ci fit savoir par son père le 12 Juillet 1870.

L'incident diplomatique semblait clos, mais c'était sans compter sur une demande supplémentaire de la diplomatie française, un brin arrogante. Elle demande à Benedetti d'apporter du roi Guillaume des garanties écrites qu'il s'oppose à la candidature de la famille Hohenzollern. Devant cette insistance, le roi, las mais toujours diplomate, annonce simplement qu'il ne peut mieux faire qu'approuver le retrait officiel de Léopold. Ne pouvant apporter plus de satisfaction à Benedetti, il lui enjoint dans l'éventualité de futures négociations de ne plus traiter directement avec lui, mais auprès de son aide-de-camp ou de Berlin, c'est-à-dire de Bismarck. Le lendemain, 13 Juillet 1870, une dépêche parvient d'Ems à Bismarck, relatant les faits. Il y est écrit que lors de la demande de garanties de Benedetti, Guillaume a rétorqué que ne pouvant donner plus de satisfaction que son approbation du retrait, il n'y avait pas lieu pour le monarque de recevoir à nouveau l'ambassadeur.

Bismarck est bien sûr en compagnie de von Moltke et de von Roon lorsqu'il reçoit cette dépêche d'Ems. Pour provoquer rapidement un conflit qui semble sur le point d'éclater, il décide de publier la dépêche en la modifiant pour qu'elle devienne un affront pour les français. Il annonce : "*Sa Majesté fait dire [à l'ambassadeur] qu'Elle n'avait plus rien d'autre à communiquer à l'ambassadeur*", ce qui sous-entend faussement la rupture du dialogue avec l'ambassadeur.

Prenant connaissance de cette dépêche qui les insulte, les Parisiens se précipitent dans la rue en criant "A Berlin !". La presse, les parlementaires, les élites françaises demandent la guerre. Le mathématicien norvégien Sophus Lie, alors à Paris en compagnie de Gaston Darboux et Camille Jordan, écrit le 16 Juillet 1870 :

> Ils sont tous enthousiastes, unis dans la haine de la Prusse. Le soir, sur les Grands Boulevards, c'est terrible, si noir de monde qu'on est obligé de suivre le flot. Au demeurant, tout fonctionne presque dans le clame et l'ordre. La seule altercation a été provoquée par une petite foule qui criait "Vive la Paix" ! De ces manifestations, on en rit seulement, [...] de ces étranges troupes dont le mot d'ordre est "A Berlin ! Vive la guerre !"
>
> Lettre non datée (16 Juillet 1870) de Sophus Lie à Felix Klein, [**Stubhaug 2006**, 124]

La confiance dans l'armée française est extrême, excessive. Seul Adolphe Thiers, figure de proue de l'opposition libérale, met en garde l'Assemblée : selon lui l'armée française n'est pas prête à faire face à la Prusse. De plus, il préconise de vérifier la véracité de la dépêche directement auprès du roi Guillaume. En vain. Le 17 Juillet, Emile Ollivier, chef du gouvernement, déclare devant la foule réunie à la Bastille la guerre à la Prusse. La déclaration officielle est faite deux jours plus tard, et Ollivier, entièrement confiant dans l'armée française, ajoute qu'il *accepte la guerre d'un coeur léger*.

FIGURE 41. Mobilisation des réservistes français, peinture de P.G. Jeanniot

Bismarck a fait mieux que réussir à provoquer un conflit. En effet, ce sont les français qui déclarent la guerre à la Prusse et non l'inverse. Étant dans le rôle de l'agressée, la Prusse, qui a automatiquement le soutien militaire de la Confédération d'Allemagne du Nord, obtient également le soutien militaire des Etats allemands du Sud qui se rallient à sa cause. L'unification de l'Allemagne, en cas de succès face aux français, lui est assurée !

1870 - 1871 : La guerre Franco-Prussienne

Août-Septembre 1870 : Défaites françaises et République

Suite à la mobilisation dans les deux camps, les combats débutent le 2 Août et rapidement les défaites françaises s'enchaînent. Les soldats prussiens sont mieux préparés, mieux dirigés, et l'art du combat de cavalerie des français est insuffisant face à l'entraînement et l'efficacité de l'armée allemande. Les huit années d'organisation, de hiérarchie et d'entraînement de Bismarck, von Roon et von Moltke portent leurs fruits.

A Paris, Gaston Darboux ne sait rien des premiers combats qui sont alors encore bien éloignés de Paris où il se trouve :

> Et les opérations militaires ? Ici on ne sait rien [...] J'ai envie d'offrir à mes abonnés [du Bulletin des Sciences] le portrait en pied de M. Bénédetti. En voilà un qui mérite de passer à la postérité.
>
> Lettre non datée (Août 1870) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Le 18 Août, l'armée du maréchal Bazaine est partiellement défaite à Saint-Privat, et se retranche dans Metz : c'est un long siège qui commence alors. Puis le 2 Septembre, Napoléon est défait avec le maréchal MacMahon à Sedan par les troupes de von Moltke. Il est fait prisonnier de guerre avec l'ensemble de sa garnison et est emmené en Allemagne. Pour les français, l'Empereur prisonnier devient *l'homme de Sedan*, symbole de son échec.

La nouvelle arrivant à Paris, les parisiens envahissent le 4 Septembre le Palais Bourbon et l'Hôtel de Ville en proclamant la République. Un gouvernement transitoire, dit du 4 Septembre, est mis en place. Ce gouvernement est présidé par Louis Trochu, général de l'armée et gouverneur de Paris. Léon Gambetta, ministre de l'Intérieur et de la Guerre, Jules Favre et Jules Simon sont des membres importants d'un gouvernement dont Adolphe Thiers ne fait pas partie : il a refusé d'occuper le poste des Affaires Etrangères finalement confié à Favre, dont Jules Ferry est le secrétaire.

FIGURE 42. Léon Gambetta proclame la République le 4 Septembre 1870 à l'Hôtel de Ville de Paris

Trochu n'est pas un républicain mais compte-tenu des difficultés militaires de la France, il paraissait opportun de mettre un général d'armée à la présidence du gouvernement. Gambetta et Trochu ont alors la responsabilité de la gestion de la poursuite des combats. Mais les armées de province sont désorganisées et très faibles. Alors que les soldats allemands se rapprochent de Paris, une partie du gouvernement quitte la capitale le 12 Septembre pour se réfugier à Tours. Gambetta et Trochu restent à Paris, où Victor Hugo, symbole de l'opposition à l'Empire Napoléonien, est accueilli en héros de retour de son exil à Guernesey. En revanche, Thiers est envoyé à Londres par Favre pour tenter de persuader les anglais d'intervenir contre les allemands. Thiers poursuivra son voyage en Autriche, en Russie et en Italie. Il ne reviendra pas à Paris avant le 30 Octobre, et ses appels à l'intervention de l'Angleterre, du Danemark, de la Russie et de l'Italie, pourtant hostiles à la Prusse de Bismarck, resteront sans réponse : Bismarck fait peur, la France n'a pas anticipé en négociant des alliances avant la déclaration de guerre, dont elle est, qui plus est, à l'origine !

Le 17 Septembre les combats sont aux portes de Paris. Suite aux manoeuvres d'encerclement Paris devient totalement assiégé le 19 Septembre. La veille, Favre est parti à Ferrières rencontrer Bismarck pour négocier un éventuel armistice. Mais lorsqu'il rentre à Paris le 20, les négociations d'armistice ont échoué : la demande sans condition de Bismarck d'annexion de l'Alsace-Moselle est inacceptable. Le siège de Paris s'organise, tant pour les parisiens que pour les prussiens qui stationnent environ 400 000 hommes autour de la capitale, soit le tiers de leur garnison totale. Darboux écrit :

> Les Prussiens se repentiront d'avoir fait la guerre à une population civile. Car depuis Sedan, nous n'avons plus d'armée. Je sais bien qu'ils peuvent dire que s'ils nous font la guerre, c'est que nous le voulons bien. Nous n'avions qu'à leur donner Metz et Strasbourg. Mais franchement, vous êtes très pacifique et moi aussi : pouvions-nous abandonner l'Alsace et la Lorraine ? Il faut qu'il y ait dans les victoires quelque chose de capiteux qui trouble les cervelles car ces braves allemands, non contents d'avoir fait leur unité, veulent s'attacher aux flancs une nouvelle Vendée avec la France derrière. Les malheureux ne se souviennent pas de l'Autriche en 1866. [...] Je croyais Bismarck fripon, mais je le supposais plus intelligent.

Lettre datée du 29 Octobre 1870 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Octobre 1870 : Début du siège de Paris et réorganisation du gouvernement à Tours

Les sièges de Paris et de Metz se poursuivent, et la désorganisation des armées françaises de province est critique. En particulier, la mobilisation des troupes n'est que mal assurée. Orléans, assiégée aussi, menace de céder. L'enclavement de Gambetta, Ministre de la Guerre, dans Paris devient problématique. Pour le faire rejoindre la partie du gouvernement en exil situé à Tours, on décide d'utiliser le seul moyen d'échapper à la vigilance des allemands : la sortie en ballon monté. C'est également par ce moyen qu'une partie du courrier pouvait être sorti des enceintes de la capitale. Le 7 Octobre, Léon Gambetta réussit son évasion en ballon et rejoint Tours après avoir atterri en Picardie.

FIGURE 43. Ballon monté Neptune quittant Paris pendant le siège [282]

Le 11 Octobre Orléans cède, puis le 27 Octobre c'est Bazaine qui se rend, mettant fin au siège de Metz dont la résistance était source d'espoir pour tout le pays, mais surtout pour les parisiens. Le Général Trochu, souhaitant ne pas altérer le moral de la capitale assiégée, commence par démentir la reddition de Bazaine. Le 29 Octobre, Darboux écrit : "*je tremble en songeant à notre situation si Bazaine capitulait*". Finalement devant l'ampleur des rumeurs, Trochu doit reconnaître que Metz est perdue. Les parisiens se sentent trahis par leur gouverneur militaire. Ils lui reprochent en outre l'immobilisme de la Garde Nationale qu'il dirige, et de manière générale une gestion trop laxiste des ressources (hommes, armes

282. Léon Gambetta s'étant envolé de nuit, on ne dispose pas de photographie de son évasion en ballon monté.

et forts autour de Paris) dont il dispose pour défendre Paris. Une nouvelle défaite de ses hommes au Bourget met le feu aux poudres : une partie des parisiens se révoltent le 31 Octobre contre le gouverneur Trochu, son adjoint le général Davout, et le Gouvernement provisoire que le premier préside. Jules Ferry parvient finalement de justesse à maîtriser l'émeute.

Darboux, malade, n'a pas pris part à l'émeute. Il se montre confiant dans la défense de Paris, mais reste conscient qu'avec le temps, le siège deviendra difficile :

> tout le monde se bat bien, on a inauguré un système de reconnaissances offensives [...] L'espérance grandit tous les jours, seulement il faut convenir que les Prussiens ne nous ont pas encore sérieusement attaqués. On dirait qu'ils n'ont pas de canons de siège. Je n'y comprends rien.
>
> Lettre datée du 2 Novembre 1870 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Tout juste rentré dans Paris grâce à un laisser-passer obtenu en Russie, Thiers assiste à l'émeute et se rend à Versailles pour négocier avec Bismarck, qui y a élu résidence. Mais il se heurte lui aussi à la condition de cession de l'Alsace-Moselle, dont il sait qu'elle sera inacceptable pour le peuple français. Après le soulèvement du 31 Octobre, le gouvernement veut réaffirmer sa légitimité et il organise avec succès un plébiscite à Paris le 3 Novembre : 321 373 parisiens approuvent l'action du Gouvernement provisoire contre 53 584 qui la désapprouvent. Gambetta entame alors une levée de troupes dans les provinces, et des élections municipales ont lieu à Paris donnant une majorité aux radicaux favorables à Clémenceau, alors maire d'arrondissement dans Paris, et à Gambetta. Le renforcement de l'armée de la Loire qui résulte de la levée de troupes orchestrée par Gambetta permet la reprise d'Orléans le 9 Novembre. Dans le même temps néanmoins, l'armée de von Moltke commence le siège de Belfort, défendu par Denfert-Rochereau.

Les "*armées de province*" de Gambetta redonnent un peu d'espoir à Darboux qui pourtant n'en connaît pas grand chose. A cela s'ajoute son ressentiment envers la Prusse pour n'avoir pas déjà accepté la reddition française :

> Quelle chute morale chez ces allemands depuis qu'après le départ de Badinguet [i.e. Napoléon] ils nous ont refusé la paix. S'ils nous laissaient l'Alsace et la Lorraine, quelle ère maginifique s'ouvrirait pour l'Europe ! S'ils croient que nous sommes humiliés du désastre de l'homme de Sedan, ils se trompent singulièrement. Les allemands ont perdu l'occasion de remporter sur nous une victoire morale, plus féconde que toutes celles qu'ils s'imaginent obtenir.
>
> [...]
>
> Vous devez bien avoir une opinion sur les armées de province et sur Gambetta. Vous devriez bien m'en transmettre quelque chose. Ici on l'attaque, on le défend, mais il est difficile de savoir à quoi s'en tenir.
>
> Lettres datée du 2 Novembre 1870 et non datée de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Novembre 1870 : La Sortie de Champigny

Etudiant les stratégies militaires qui s'offrent à lui, Gambetta acquiert la certitude qu'il est nécessaire que les troupes allemandes soient plus nombreuses à être mobilisées autour de Paris pour lui permettre la défense des territoires de province. Il envoie un message à Trochu par pigeon voyageur en ce sens. Trochu organise alors une sortie militaire : le 28 Novembre, une offensive sera menée par le général Ducrot pour rejoindre par l'Est de Paris l'Armée de la Loire. Un ballon monté est mis en place pour en informer Gambetta, qui décolle dans la nuit du 24 au 25 Novembre depuis la Gare du Nord. Ce ballon, dénommé "*Ville d'Orléans*" et piloté par Paul Rolier et Léonard Bézier, va alors subir le cours des vents violents et du brouillard, désorientant complètement ses deux passagers. Lorsqu'ils arrivent à toucher terre en pleine forêt le lendemain après-midi, les deux pilotes sont loin d'imaginer le parcours incroyable qu'ils ont effectué : après un vol d'une quinzaine d'heures, ils sont à présent en Norvège ! La nacèle de ce ballon est toujours conservée dans l'un des musées d'Oslo.

Gambetta sera tout de même informé quelques jours plus tard de la sortie mise sur pied par Trochu, alors que celle-ci débute déjà. Les parisiens parviennent le 30 novembre entre Champigny et Bry-sur-Marne, où les combats commencent. L'artillerie française prend le dessus et les troupes progressent sur les hauteurs de Champigny où elles se heurtent à des divisions allemandes solidement installées. Les combats se poursuivent mais l'avancée est stoppée. L'armée de la Loire progresse néanmoins vers Paris à la rencontre des troupes de Ducrot. Mais si les allemands sont installés dans des positions qu'ils occupent depuis plusieurs semaines, l'installation matérielle des français est précaire, et les températures glaciales font chaque nuit de nombreuses victimes dans le camp français où l'on n'a pas apporté de couvertures pour combattre le froid. Malgré la stabilisation de la ligne de front pendant plusieurs jours, et l'inquiétude grandissante côté allemand, Ducrot décide de mettre un terme à cette bataille de Champigny le 4 décembre, et rentre dans Paris avec une défaite douloureuse et la perte de beaucoup d'hommes.

Figure 44. La bataille de Champigny dans le froid hivernal au début de décembre 1870

L'armée de la Loire, qui devait rencontrer les troupes de Ducrot, est défaite à Orléans. Le moral des parisiens est tombé au plus bas après l'échec de la bataille de Champigny. Le siège n'était pas levé et on avait perdu beaucoup d'hommes. Favre songe alors de plus en plus à négocier l'armistice avec Bismarck, mais Trochu, la Garde Nationale et une partie des parisiens restent favorables à la Résistance à outrance, alors que la nourriture vient à manquer. Darboux ne soutient plus le gouverneur de Paris, mais celui-ci reste tout de même populaire. Il écrira :

> Trochu et Davout ont été l'objet d'une espèce de culte. J'ai failli me faire écharper le 10 Janvier [1871] parce que je soutenais que Trochu nous conduisait à la capitulation.
>
> Lettre non datée (Mars 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Décembre 1870 - Janvier 1871 : Sortie de Buzenval, défaites des armées françaises de province et naissance d'un nouvel Empire Allemand

La prise d'Orléans, des victoires dans le Centre et le Loiret permettent aux allemands d'avancer vers Tours où siège à présent une partie importante du Gouvernement du 4 Septembre. Le 9 Décembre, celui-ci décide de partir pour Bordeaux et ce départ précipite la panique dans la ville, qui ne sera prise par les prussiens que le 20 Décembre. Le lendemain, une sortie de Paris par le Bourget échoue une nouvelle fois, entravant largement à Paris la confiance dans le général Trochu, dont Jules Favre prend petit à petit la place à la tête du Gouvernement.

Le mois de Janvier 1871 va mettre un terme à la résistance française. Le 3 Janvier, l'Armée du Nord de Faidherbe est défaite à Bapaume, précédant la reddition de Péronne une semaine plus tard. Le 19 Janvier, cette même armée sera définitivement défaite à Saint-Quentin : Paris ne pourra pas recevoir d'assistance par le flanc Nord. A l'Est, l'Armée de l'Est de Bourbaki est battue le 15 Janvier dans la bataille de la Lizaine et bat en retraite jusqu'en Suisse. L'Armée de la Loire, surtout, subit une ultime défaite au Mans le 10 Janvier qui a raison de ses espoirs de rallier Paris par le Sud.

Dans Paris, Trochu organise une sortie de Paris importante par l'Ouest vers Versailles. Cette sortie est organisée avec plusieurs généraux dont Ducrot, vaincu à Champigny. La Garde Nationale est mobilisée pour la première fois. Les troupes, formées en trois colonnes, doivent s'emparer du point stratégique qu'est la redoute de Montretout à Saint-Cloud, mais également renverser les forces prussiennes du parc de Buzenval et parvenir à Vaucresson. Cette sortie est programmée pour la nuit du 18 au 19 Janvier.

La journée qui précède l'offensive est marquée par la réunion à Versailles dans la Galerie des Glaces du château des représentants des états allemands. Le rêve de Bismarck devient alors réalité : l'unité totale de l'Allemagne est achevée avec la proclamation de l'Empire Allemand, le Second Reich, qui voit les états du sud (la Saxe, le Wurtenberg et la Bavière) rejoindre l'ancienne Confédération d'Allemagne du Nord. La Prusse domine cet empire, Bismarck en étant le chancelier et Guillaume Ier en étant proclamé, ce 18 Janvier 1871 à Versailles, Empereur.

Figure 45. Sacre de l'Empereur allemand Guillaume Ier dans la Galerie des Glaces de Versailles le 18 Janvier 1871

Lorsque la nuit qui suit cette naissance du nouvel empire allemand tombe, l'offensive de Trochu commence. La Garde Nationale remporte une première victoire la nuit, et l'offensive sur la redoute de Montretout commence au petit matin. Elle sera prise puis perdue à trois reprises durant la journée. Les combats dans le parc de Buzenval sont âpres, d'abord à l'avantage des parisiens, mais la contre-offensive des prussiens dans l'après-midi aura raison de leurs défenses, alors que Montretout est perdu pour la troisième et dernière fois. Le soir, Trochu constatant les renforts des soldats et de l'artillerie parvenus côté ennemi, et ne pouvant renforcer ses propres positions, ordonne la retraite de ses troupes par le flanc du Mont Valérien, sur lequel les prussiens n'auront jamais perdu le fort. Le repli est désordonné, le brouillard le rendant difficile, et certains hommes sont oubliés au moment de battre en retraite. Darboux raconte :

> Les Prussiens avaient des batteries auxquelles on ne pouvait faire de mal. Mais à la bataille de Montretout, rien n'aurait arrêté nos soldats si on leur avait donné une vingtaine de canons. Ils étaient restés, les canons, sans ordre à Rueil. Ah, Trochu, près de Nanterre vous auriez dû être mieux inspiré.
>
> Lettre non datée (Février 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Une nouvelle fois, rentrant à Paris dans la nuit du 19 au 20 Janvier, la défaite est implacable. La population parisienne est exaspérée et à bout de forces. Trochu est rejeté par l'opinion publique et par la Garde Nationale. Suite à cet échec, le Gouvernement du 4 Septembre décide de limoger Trochu, qui souhaitait démissionner, et de le remplacer par le général Vinoy pour le gouvernement militaire de Paris. Le Gouvernement envisage alors des négocations pour parvenir à un armistice et autorise secrètement Favre à entamer des négociations avec Bismarck en ce sens dès le 21 Janvier.

28 Janvier 1871 : Un armistice précipité mal accepté

Des émeutes éclatent alors à Paris les 22 et 23 Janvier : les parisiens sont excédés par la faim, les bombardements et l'insuccès du gouvernement militaire de la capitale. Darboux écrit :

> Au lieu de se poser la question de la manière suivante : Paris a des ressources en tout genre très supérieures à celles de l'ennemi, comment les employer, MM. les militaires de haut grade ont commencé à dire que la défense de Paris était une pure plaisanterie, ils ont découragé tout le monde, ont engagé dans toutes les affaires un nombre d'hommes insuffisant, ont laissé la discipline se relâcher et ont encouragé leurs soldats à se moquer de la défense à outrance et de la garde nationale [...] C'est une honte véritable.

Lettre non datée (Février 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Favre est devenu seul l'homme fort du gouvernement. Il parvient à réprimer par la force les émeutes de Paris, mais négocie rapidement et toujours secrètement un armistice avec Bismarck. Cette armistice est signé le 28 Janvier à Versailles par Favre et Bismarck en la présence de von Moltke : le siège de Paris prend fin avec la capitulation de la capitale et la convention d'armistice. Celle-ci impose à Paris la reddition de tous ses forts, et prévoit pour la France le remboursement d'une réparation de guerre et la cession d'une partie de son territoire.

FIGURE 46. Signature du Traité de Paix à Versailles de Favre, Bismarck et von Moltke

Gambetta apprend de Bordeaux la capitulation de Paris et du Gouvernement. Il est furieux et souhaite poursuivre les combats. Finalement, révoqué du Ministère de l'Intérieur par Jules Simon venu en personne depuis Paris, il démissionne définitivement du Gouvernement quelques jours plus tard. Les parisiens réagissent à l'image de Gambetta : après avoir pour leur résistance enduré de nombreuses souffrances, la privation et les bombardements, ils perçoivent la capitulation comme une humiliation et une trahison. Darboux écrit :

> Attendons-nous à une paix écrasante. Thiers est désolé. Malheureux pays qui ne trouve dans les désastres pour le sauver qu'un partisation de la centralisation, des armées permanentes et du protectionnisme à outrance.
>
> [...] Je doute fort que la masse de la nation reconnaisse les véritables causes de notre défaite. Cela me fait pitié quand j'entends parler de la bravoure traditionnelle de nos soldats.
>
> Lettres non datées (Février 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

La capitulation met fin aux deux sièges qui persistaient encore héroïquement au début du mois de Février : celui de la citadelle de Bitche en Moselle, et celui de Belfort. La résistance du dernier sous la direction de Denfert-Rochereau lui vaudra de sortir de l'Alsace et donc de rester attaché à la France malgré les annexions faisant suite aux conditions d'armistice. Encore aujourd'hui, Belfort garde jalousement dans sa spécificité administrative la gloire de sa résistance passée.

Dans ces mêmes conditions d'armistice, Bismarck demande également la tenue d'élections législatives nationales dans un délai de 15 jours seulement pour établir un nouveau gouvernement légitime. C'est ce qui est effectué, précipitamment, dans la première semaine de Février. Le 8 Février, une nouvelle Assemblée est constituée d'une grande majorité de droite monarchiste et pacifiste. Cette majorité peut largement être attribuée au vote rural, et est en rupture complète avec le vote des parisiens (qui n'aura lieu que le 26 Février) qui craint le retour de la monarchie et refuse les conditions de paix qu'on lui impose.

FIGURE 47. Les élections législatives après l'armistice de 1871

Insurrections et République

Février 1871 : Election de Thiers, Traité de Paix et montée de la colère à Paris

La nouvelle Assemblée, qui siège à Bordeaux dans le Grand Théâtre, se réunit pour la première fois le 12 Février et élit Jules Grévy pour sa présidence. Le 15 Février, la nouvelle

Assemblée décide de supprimer la solde quotidienne de 1,50 F des Gardes Nationaux, appauvrissant ainsi les gardes et leurs familles peu aisées et ayant été à Paris très impliquées dans les combats. Perçue comme une injustice, cette mesure soulève la Garde Nationale de Paris qui s'oppose en réaction formellement à la Paix contre la Prusse.

Le 17 Février, l'Assemblée élit Adolphe Thiers comme chef d'un gouvernement nouveau dit d'Assemblée Nationale, remplaçant ainsi officiellement le général Trochu. Thiers fait de la paix et de la libération du territoire sa priorité. Sitôt son gouvernement formé, il repart de Bordeaux pour aller signer le traité de paix à Versailles avec Bismarck. Le 26 Février, les préliminaires sont signés. Le montant des réparations est fixé à 5 Milliards de francs, Bismarck ayant demandé 6 Milliards mais Thiers ayant réussi à légèrement abaisser cette somme. Tant qu'elle ne sera pas intégralement remboursée, les soldats prussiens seront autorisés à occuper 25 départements dans la partie Nord du territoire français. Quant aux annexions territoriales, le territoire de Belfort reste attribué à la France, mais celle-ci perd l'Alsace et une partie de la Lorraine comprenant le canton de Metz.

Le lendemain, 27 Février, l'Assemblée ratifie le texte des préliminaires de paix de Versailles, ce qui est inacceptable pour les territoires qui se voient ainsi annexés, mais également pour les parisiens. N'acceptant pas l'armistice qu'on lui impose après sa résistance au siège, Paris ne se reconnaît absolument pas dans la nouvelle Assemblée qu'elle juge être une Assemblée de ruraux. La volonté politique de Thiers et de son gouvernement de rassembler le plus vite possible les fonds exorbitants demandés par Bismarck lui paraît être une trahison. La tension monte et le soulèvement prochain des parisiens est perceptible, surtout après les défilés des soldats prussiens sous l'Arc de Triomphe et les Champs Elysées durant les trois premiers jours du mois de Mars, ultime humiliation de Bismarck. Darboux écrit :

> Etonnez-vous après cela que les gens du peuple se disent trahis et qu'ils fassent des choix absurdes.
>
> [...] Gardez [à Bordeaux] notre Assemblée et si vous pouviez mettre tous ces cornichons dans un bocal, y compris la députation parisienne, vous me feriez un sensible plaisir.
>
> [...] C'est navrant, nous n'avons ni hommes politiques, ni hommes de guerre, rien. [...] Ce qui me terrifie, c'est que les Prussiens, qui ont de réelles qualités, ont des défauts insupportables, ils sont rapaces et avides, ils vont pressurer notre pauvre Alsace. Nous criions en 1866 quand ils se faisaient donner jusqu'aux cigares par les Francfortois. Nous voilà obligés de leur en fournir, et qui sait si on nous dit toute la vérité.
>
> Lettres non datées (Février, Mars 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Mars 1871 : l'insurrection de Paris

Redoutant le soulèvement, l'Assemblée décide le 10 Mars 1871 de déplacer officiellement son siège de Bordeaux à Versailles à compter de la réunion du 20 Mars. Les séances de l'Assemblée se tiendront dans la salle de l'Opéra du château de Versailles. Le gouvernement suivra l'Assemblée dans son déplacement de Bordeaux à Versailles, à l'exception notable de Gambetta qui, fatigué et anxieux, préfère partir le jour même pour l'Espagne où il restera jusqu'au mois de Juin. Lors de la même Asemblée du 10 Mars, et répondant aux motivations financières de Thiers, elle signe un pacte avec le Gouvernement, dit pacte de Bordeaux, qui associe les monarchistes aux républicains au commande des institutions pour transcender les clivages institutionnels, faire primer les mesures nécessaires à la paix et honorer au plus vite les obligations contractées dans le traité de paix envers la Prusse. Financièrement, les parisiens déjà à bout de souffle ne sont pas épargnés : la séance du 10 Mars rétablit les obligations de paiement des loyers et des taxes professionnelles à Paris, mesures irréalistes à court terme compte-tenu de la pauvreté des parisiens au sortir du siège. Darboux rappelle : "*Vous dire ce qu'ont souffert sans se plaindre les parisiens est incroyable. Les femmes faisaient la queue sans se plaindre 6, 7 heures par jour dans la boue. Nous avons mangé des choses sans nom. Les épiciers vendaient comme graisse le suif qui sert à graisser les voitures*".

Paris bouillonne, les parisiens les plus pauvres, les ouvriers et une partie des Gardes Nationaux de Paris sont sur le point d'entamer des émeutes révolutionnaires. Thiers réside néanmoins toujours dans la capitale, et anticipant le soulèvement, il décide en accord avec l'Assemblée de désarmer Paris. Le 15 Mars, l'Armée de la Loire est dissoute. Puis il envoie lors de la nuit du 17 au 18 Mars une troupe sous la direction du général Lecomte récupérer l'ensemble des 227 canons de la Garde Nationale entreposés dans Paris sur la colline de Montmartre et à Belleville.

FIGURE 48. La batterie de canons sur la colline de Montmartre, motif du déclenchement de la Commune de Paris le 18 Mars 1871

Mais le transport de ces canons est très lent car l'armée ne dispose pas de suffisamment de chevaux. Lorsque les parisiens se réveillent, ils s'insurgent face à ce qu'ils considèrent comme un vol, ayant payé eux-mêmes les canons de la Garde Nationale. Ces canons représentent en outre un armement conséquent pour défendre Paris d'éventuelles attaques gouvernementales. Devant une opposition qui leur paraît légitime, les troupes du général Lecomte s'allient aux revendications des parisiens, et le général est capturé puis fusillé l'après-midi même. La population parisienne s'en prend alors aux représentants du gouvernement, et commence à élever des barricades dans la ville : c'est le début de l'insurrection. Thiers, qui a déjà vécu semblable insurrection en 1834 à Lyon, préfère fuir et réussit à gagner Versailles, en appelant la masse des parisiens à faire de même.

FIGURE 49. L'insurrection commence dans Paris, les armes à la main, le 18 Mars 1871

18 Mars - 21 Mai 1871 : La Commune de Paris

Nombre de parisiens, craignant la violence de cette insurrection, imitent Thiers et fuient la ville. De nombreux fonctionnaires, monarchistes, pacifistes et membres des classes aisées prennent la fuite tant que cela leur est encore possible. Les forces de l'ordre quittent Paris avec Thiers, et les manifestants envisahissent l'Hôtel de Ville et décident de la tenue prochaine d'élections municipales : elles se tiendront le 26 Mars. Entre le 18 et le 26 Mars, des insurrections similaires ont lieu à Lyon, à Marseille et dans quelques autres villes. Elles seront toutes maîtrisées en deux semaines, ce qui ne sera pas le cas de la capitale. Les bourgeois ayant fuit, la majorité revient le 26 Mars aux classes populaires dont sont issus une grande partie des membres du nouveau Conseil de la *Commune* qui voit le jour. Darboux comprend le ressentiment des parisiens, mais minimise les événements à l'œuvre :

> Vous avez dû entendre parler des barricades [...] Il n'y a là, je l'espère, rien de sérieux. Mais c'est égal, j'aimerais mieux qu'on en finit, nous avons besoin de sagesse et d'union. Ce que je vous ai dit plus haut doit vous expliquer la fermentation parisienne. Ici, c'est un axiome que Trochu a trahi, et donc avec le roi Guillaume [de Prusse]. Pourvu que ces MM. de Montmartre ne nous ramènent pas quelque Badinguet.
>
> Lettre non datée (Mars 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Une série de mesures est immédiatement prise pour remédier aux difficultés financières des parisiens les plus pauvres. Les échéances des paiements des loyers sont prolongées et le non-paiement des taxes ne donne plus lieu à des poursuites. Les pensions sont rétablies pour les familles des Gardes Nationaux tombés à la guerre. Dans l'enseignement, un décret adopte la séparation de l'église et de l'état, la laïcité et la gratuité de l'enseignement. Parallèlement à ces mesures sociales, certaines mesures symboliques sont adoptées comme le rétablissement du calendrier révolutionnaire ou les destructions de la colonne Vendôme et de la résidence parisienne de Thiers, symboles du despotisme et de la trahison des républicains au pouvoir.

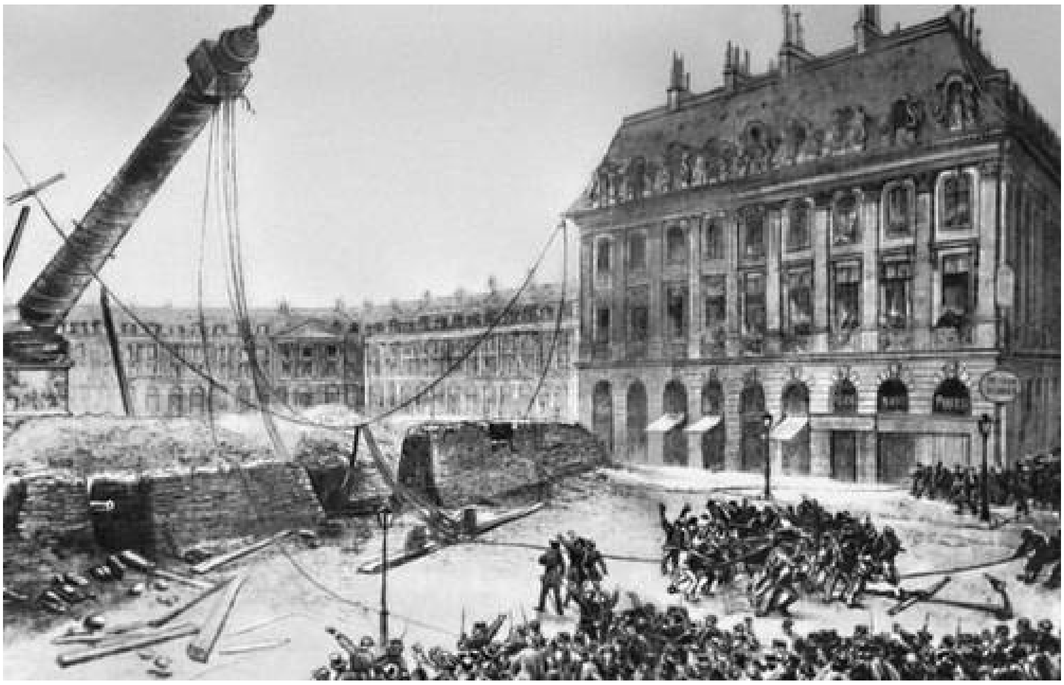


FIGURE 50. La destruction de la colonne de Vendôme le 16 mai 1871 sous la commune de Paris

De son côté, Thiers travaille pour abolir le régime de la Commune. Il s'est assuré du rétablissement de l'ordre dans toutes les autres villes sièges d'insurrections. Il s'attache le soutien du général MacMahon, libéré par Bismarck qui soutient directement et ouvertement Thiers dans sa volonté de rétablissement de l'ordre à Paris et donc de mettre fin à la Commune. Thiers et MacMahon lèvent progressivement une grande armée, l'armée de Versailles, qui dépasse 100 000 hommes grâce aux libérations massives de prisonniers de guerre sur l'ordre direct de Bismarck.

Des offensives sont menées dès le début du mois d'Avril pour repousser les limites Ouest de la Commune depuis le Mont Valérien jusqu'aux limites de Neuilly, l'Est de Paris étant contrôlé par les forces prussiennes. En réponse, les Communards adoptent des mesures de plus en plus extrêmes et violentes. La presse favorable à Thiers est largement censurée, et le décret des otages est adopté, stipulant l'exécution de trois otages pour chaque exécution d'un communard. L'institution d'un Comité de Salut Public permettait également un meilleur contrôle de la population, accompagnant la mobilisation obligatoire de tous les parisiens âgés de 19 à 40 ans. Ce renforcement du régime fera dire à Darboux : "*les communards étaient bien drôles ; à la fin seulement ils ont été terribles*".

Au milieu du mois de mai, Thiers et MacMahon sont suffisamment organisés pour entamer la reconquête militaire de Paris. Le 8 Mai déjà, ils avaient réussi à faire placarder dans Paris des affiches informant les parisiens d'une intervention prochaine de l'armée régulière pour les libérer. Ils ordonnent le bombardement des quartiers ouest de Paris pour préparer une entrée militaire, et font parvenir un ultimatum aux communards.

21 - 28 Mai 1871 : La Semaine Sanglante met fin au régime de la Commune parisienne

Finalement, c'est le dimanche 21 Mai 1871, au soir, que les troupes versaillaises pénètrent dans Paris par Auteuil et Passy. C'est le début de la Semaine Sanglante qui verra la libération de la capitale et la fin de la Commune de Paris. Dès les combats commmencés, la désorganisation des communards est flagrante et de tous les parisiens censés être mobilisés, seule une minorité s'engage effectivement dans la bataille. Les Gardes nationaux sont systématiquement fusillés par les troupes de Versailles. Darboux raconte :

> Dimanche soir, je me promenais à huit heures à la place de la Concorde. Tout était tranquille. Je vis passer Dombrowski à cheval, fumant tranquillement un cigare et allant au pas. Je ne me serais jamais imaginé qu'en ce moment, les Versaillais cannonnaient le palais de l'Industrie de l'arc de Triomphe de l'Etoile.
>
> [...] Je me montrais imprudent sans me gêner. Il y a des quartiers où on a fait des perquisitions où on a enrôlé de force.
>
> Lettre non datée (Juin 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Dans la journée du Lundi 22 Mai, les Versaillais progressent et s'emparent de l'Elysée, de la gare Saint-Lazare et de l'Ecole Militaire où étaient rassemblés les canons détenus par la Commune. Au soir les combats commencent aux abords de la Gare Montparnasse et du Jardin du Luxembourg.

> Je m'attendais à voir tout fini le soir même, pas de barricades, pas de fédérés, rien. En revenant du lycée [le Lundi soir] mon impression changea. Je tombai dans des groupes à pied et à cheval, m'en tirant comme je pouvais. Rue de Rennes, le canon avait commencé la partie.
>
> Lettre non datée (Juin 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

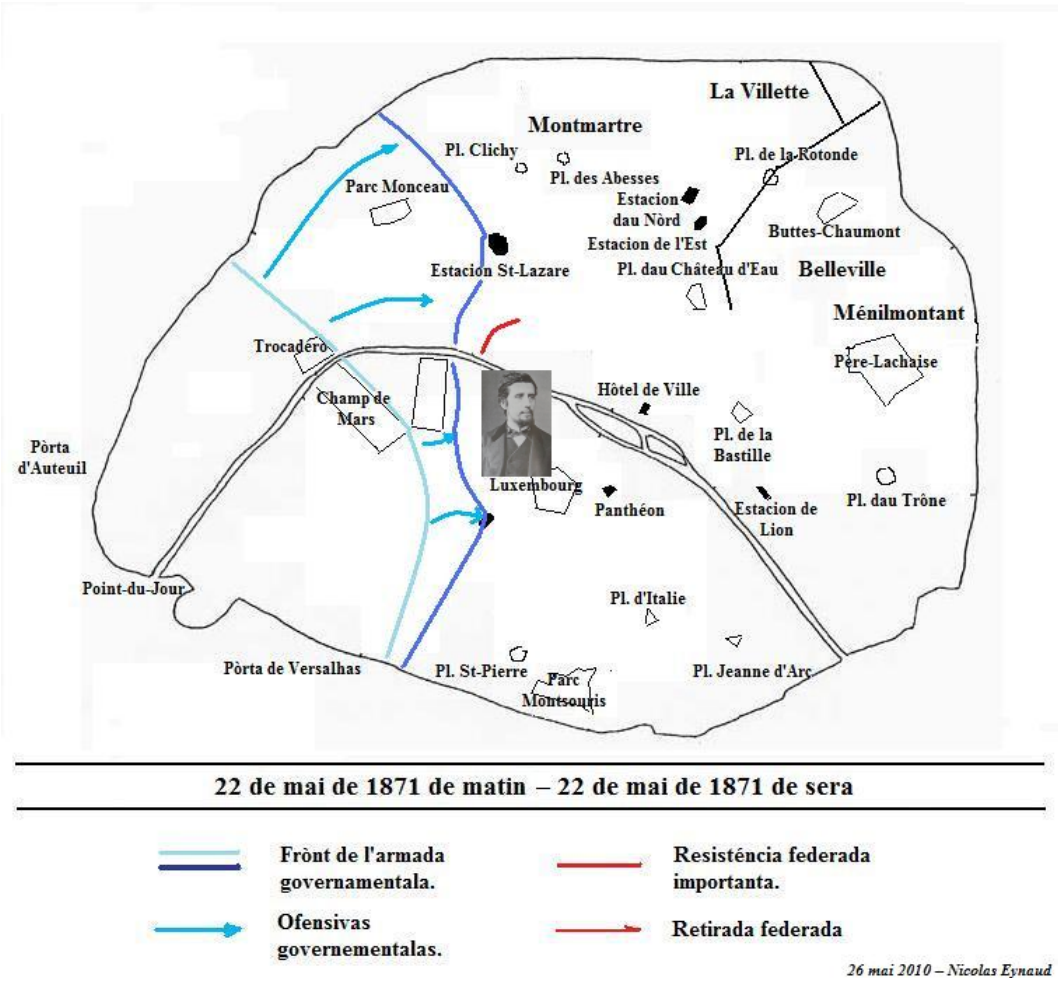


FIGURE 51. Les positions des versaillais et des communards durant la journée du Lundi 22 Mai 1871 (avancées des lignes de front en bleu)

Le Mardi 23 Mai les combats progressent au Sud de Paris où les troupes versaillaises parviennent au Parc Montsouris. Entre la gare Montparnasse et le jardin du Luxembourg, la ligne de front n'évolue que peu car les communards défendent ardemment la poudrière du Luxembourg, la rue Soufflot et le Panthéon où sont également entreposées de la poudre et des munitions. Au Nord de la Seine, les Versaillais prennent l'Opéra, la Concorde et Montmartre.

Dans la nuit du Mardi 23 Mai, les communards lancent volontairement des incendies sur les bâtiments qu'ils sont sur le point de perdre. Dans la nuit de Mardi à Mercredi, le Palais d'Orsay et le Palais des Tuileries sont incendiés. Le Louvre est mis à feu mais les versaillais parviennent de justesse à contenir les flammes.

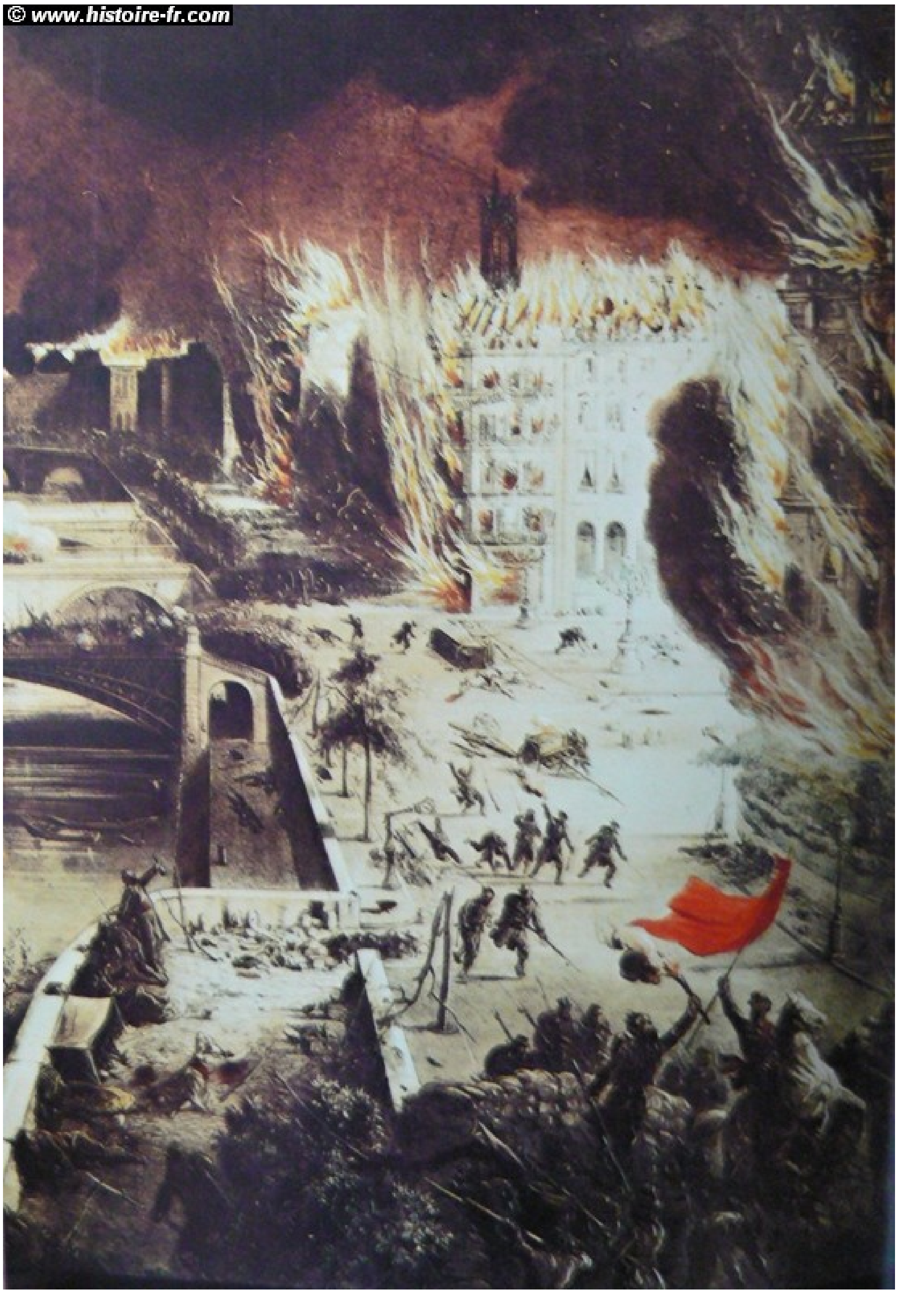


FIGURE 52. Les incendies sur l'île de la Cité à Paris le Mercredi 24 Mai durant la Semaine Sanglante

Le mercredi 24 Mai les incendies se poursuivent et se propagent dans Paris. Le matin, les communards perdent l'Hôtel de Ville mais ils y mettent le feu avant de l'évacuer, tout comme ils font au palais de Justice et à la préfecture de Police. Toutes les archives de Paris, de la police et de l'état civil sont perdues dans les incendies. Une avancée décisive est faite au Luxembourg : les versaillais prennent vers midi la rue d'Assas - où réside Darboux - et la rue Saint-Jacques. La poudrière du Luxembourg explose, mais les versaillais progressent et prennent le Panthéon dans l'après-midi malgré une âpre défense des communards qui y défendront des poches de résistance jusqu'au lendemain. Au Nord, la Gare du Nord est prise et les combats se concentrent autour de la Gare de l'Est. Darboux raconte ce long Mercredi :

> Les fédérés s'en allèrent, les troupes vinrent, nous nous croyions sauvés. A midi et demie première explosion : la poudrière du Luxembourg, à deux pas de chez moi. On nous promet pour le soir l'explosion du Panthéon, on a mis le feu rue Vavin, chez Debray en particulier. Comme je sais que le Panthéon contient un nombre incalculable de tonneaux de poudre, je m'attends à recevoir la calotte du Panthéon sur la tête. Enfin le Panthéon est pris, nous voilà rassurés de ce côté.
>
> Pendant la nuit, j'ai vu le plus épouvantable spectacle. On attaquait l'hôtel de ville, la bataille était furieuse au centre de Paris, on tirait plus de cent coups de canon par minute et en outre nous voyions Paris brûler de tous les côtés. Tout l'hôtel de Ville, les maisons voisines ont brûlé, l'appartement de [Joseph] Bertrand n'existe plus. On est venu mettre le feu dans sa bibliothèque[283]. Toutes ses notes, tous ses effets ont brûlé. Un volume fini sur la théorie de la chaleur n'existe plus. Je connais au moins quatre à cinq personnes dans le même cas.
>
> Lettre non datée (Juin 1871) de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

283. La grande bibliothèque de Joseph Bertrand était située dans la rue de Rivoli ; elle sera totalement brûlée. Bertrand était parti pour Tours lors du déclenchement de l'insurrection, où l'Ecole Polytechnique dont il était un des professeurs avait été déplacée.

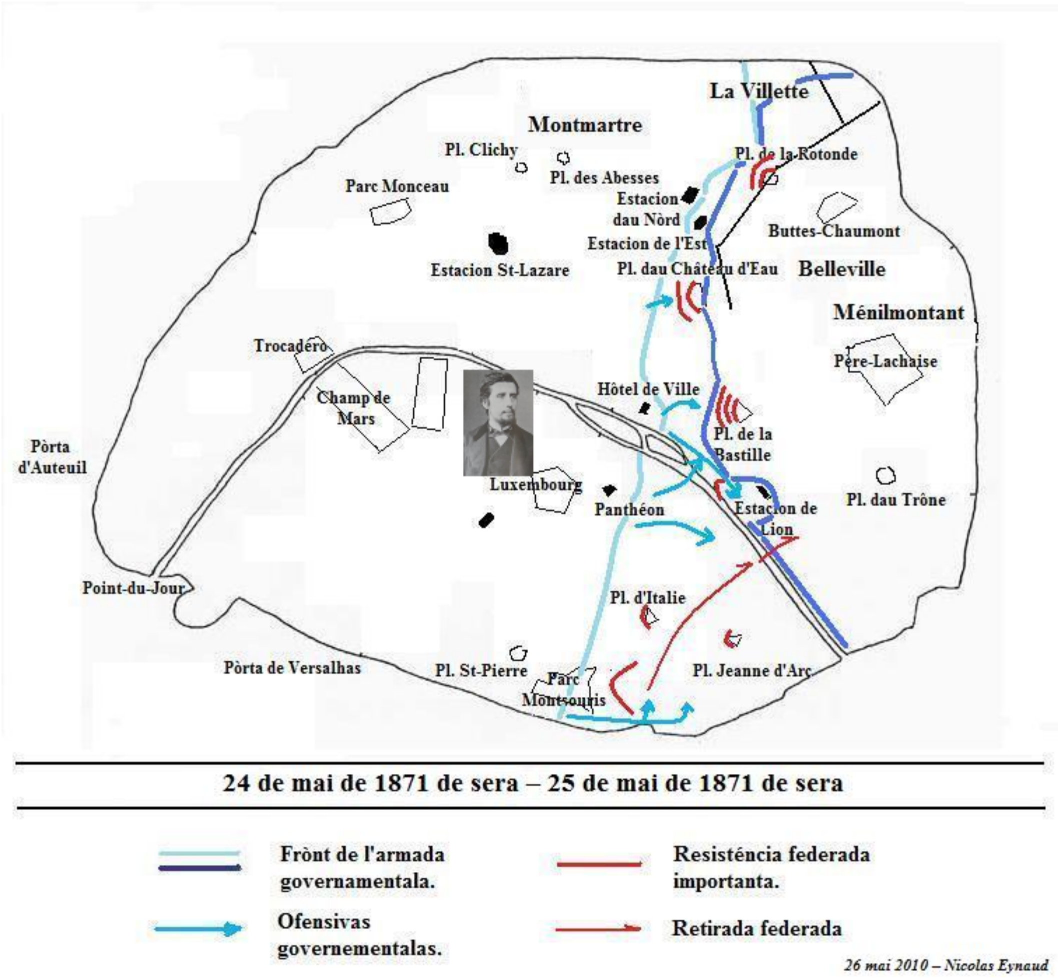


FIGURE 53. Les positions des versaillais et des communards au soir du Mercredi 24 et durant le Jeudi 25 Mai 1871 (positions des lignes de front en bleu)

Le Jeudi 25 Mai, une vaste offensive est menée par les Versaillais sur la place d'Italie et la Butte-aux-Cailles. A la fin de l'après-midi, toute la rive gauche de Paris, au Sud de la Seine, est sous contrôle des Versaillais.

Les dernières résistances des communards aux Buttes Chaumont, au Père Lachaise - où les communards avaient installé une partie de leur artillerie - et dans Belleville sont progressivement anéanties au cours du Vendredi 26 et du Samedi 27. Durant la journée du Dimanche 28, les dernières barricades tenues par les communards dans Belleville tombent : la Commune est terminée. Le Maréchal MacMachon et le duc de Magenta font imprimer et distribuer dans Paris des affiches proclamant leur victoire et la libération de Paris.

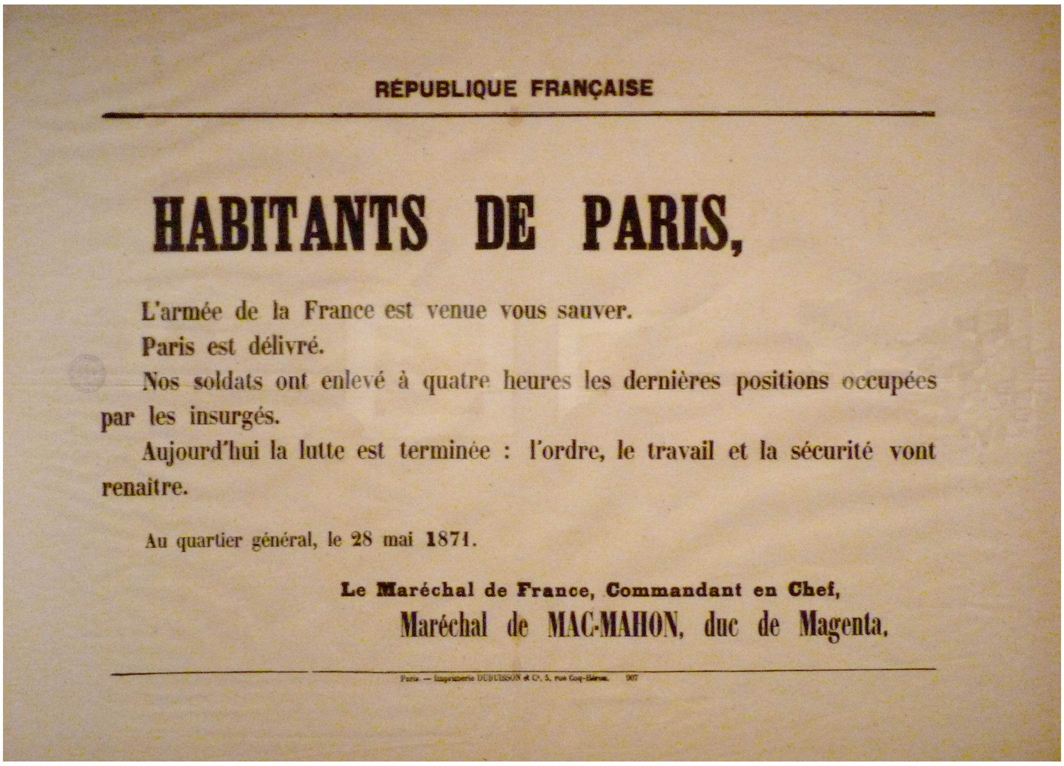


FIGURE 54. L'affiche de la libération de Paris du dimanche 28 Mai 1871

Durant la libération de la Semaine Sanglante et les jours qui suivirent, la répression envers les communards menée par Thiers et les troupes versaillaises fut sans pitié. Dès que les positions étaient conquises, de nombreux communards étaient fusillés sur place. Cette répression fit en moins d'un mois environ 30 000 victimes, deux fois plus que lors de l'année 1792-1793 de la Terreur. Environ 20 000 communards furent tués dans les combats, et 10 000 furent exécutés. S'ajoutent à ceux-ci les 45 000 communards qui furent emprisonnés et, pour certains, déportés.

1871 - 1879 : Pérennisation de la Troisième République aux dépens des partisans de la Restauration, retour du pouvoir de Versailles à Paris

La reconstruction de Paris commence alors que de nombreux conseils de guerre sont mis en place pour juger les communards incarcérés. L'Assemblée, que l'on appelle alors la Chambre, reste installée dans la salle de l'Opéra Royal du château de Versailles, et le 31 Août cette même Assemblée s'y déclare Constituante. Elle promulgue le même jour la loi Rivet qui désigne Adolphe Thiers comme le premier Président de la République, chef du pouvoir exécutif. Si l'Assemblée reste fortement divisée entre les monarchistes (orléanistes dont Thiers est issu, et légitimistes du duc de Broglie et du maréchal MacMahon) et les républicains (Gambetta, Simon, Grévy), les pouvoirs de Thiers nouveau Président sont réaffirmés et même augmentés. Mais la République reste majoritairement perçue comme un régime transitoire, vouée à céder la place tôt ou tard à un nouveau régime monarchique.

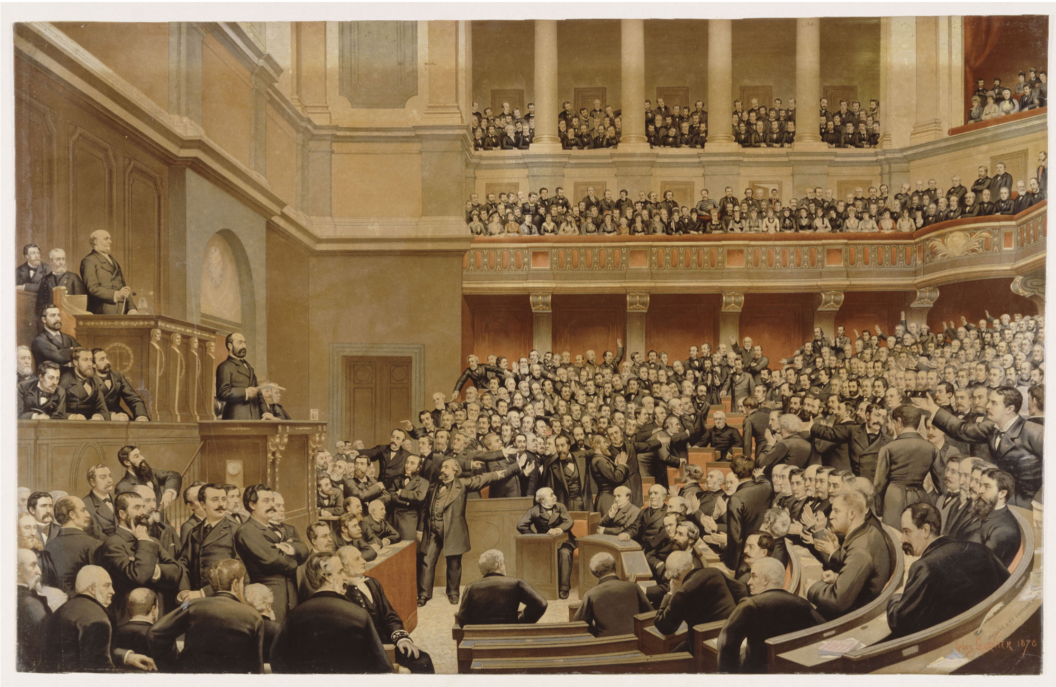


FIGURE 55. Séance de la Chambre en Juin 1877 dans l'actuelle Salle du Congrès du château de Versailles ; les députés se tournent vers Adolphe Thiers, désigné Liberateur du Territoire

En Avril et en Mai 1873, Thiers sera désavoué par les parisiens lors de l'élection législative partielle qui préféreront élire Barodet, du parti radical, contre Rémusat pourtant soutenu ouvertement par Thiers. La pression à l'Assemblée (la *Chambre*) mise par le gouvernement et les partisans du courant de l'Ordre Moral, le duc de Broglie en tête, entraînera la démission de Thiers après les séances mouvementées du Vendredi 23 et Samedi 24 Mai. La manoeuvre politique semble réussie par les partisans d'une restauration de la monarchie, qui souhaitent le retour du prétendant légitime Henri comte d'Artois alors en exil au château de Frohsdorf en Autriche. Quelques jours avant la démission de Thiers, Darboux décrivait encore le pessimisme de son maître Charles Hermite et redoutait lui-même la descente vers le retour de la monarchie :

> Je ne m'étonne pas qu'Hermite vous ait écrit en vous faisant prévoir la ruine totale de la France. Il joue de cette corde-là depuis longtemps, et quand tout va bien, il dit que Thiers est malade. "*Tout irait bien si on se décidait à prendre du Frohsdorf après les repas et avant*". Mais que voulez-vous ?
>
> [...]
>
> Dans quel gâchis politique nous trouvons-nous ? Je m'en console, ou essaie de m'en consoler, en pensant que tout finira comme les autres fois :

> Thiers fera des concessions, et la Chambre sera un peu plus forte que par le passé. Je vous assure que cela continuera comme cela jusqu'à ce qu'ont ait Henri V ou autre chose...
>
> Lettres datées du 13 et du 22 Mai 1873 de Gaston Darboux à Jules Hoüel, [**Archives épistolaires Darboux**]

Finalement, le nouveau Président MacMahon, représentant du courant de l'Ordre Moral élu avec le soutien du duc de Broglie dès le 25 Mai, s'opposera en Novembre 1873 au retour du comte d'Artois prétendant au trône et fera ainsi échouer la tentative de restauration monarchique. La troisième République s'installera durablement, et les dernières troupes prussiennes de Bismarck auront quitté le nord du territoire français le 16 Septembre 1873 après le paiement complet des 5 Milliards de francs dus depuis le traité de paix. Quelques semaines plus tôt, l'Assemblée aura décidé la construction d'une basilique commémorative sur la butte de Montmartre à l'endroit même où étaient situés les canons de la Garde Nationale de Paris dont la récupération avait fait l'objet de l'incident à l'origine de l'insurrection déclanchant la Commune. Les travaux de cette nouvelle basilique, le Sacré-Coeur, commenceront en Juin 1875.

Figure 56. Construction de la basilique du Sacré-Cœur sur la colline de Montmartre, commémorant l'incident des canons de la Garde Nationale du 18 Mars 1871 déclencheur de la Commune

En Mars 1876, la Chambre des députés se scinde pour donner naissance à la Chambre et au Sénat. Les deux assemblées parlementaires siégeront dans le Château de Versailles jusqu'en Novembre 1879 où elles viendront s'installer définitivement dans les locaux de Paris qu'elles occupent toujours, le palais Bourbon et le palais du Luxembourg. MacMahon démissionnera en Janvier 1879 après avoir notamment installé le mandat de sept ans du Président de la République. Il est remplacé par Jules Grévy qui présidait la Chambre, suite à la large majorité obtenue par l'Union républicaine lors des élections législatives d'Octobre 1877, victoire éclatante des républicains Gambetta, Grévy, Ferry et Clémenceau, acquise un mois après la mort de Thiers qui était alors pressenti pour succéder à nouveau à MacMahon. Grévy, élu à la Présidence de la République le 30 Janvier 1879, partage son pouvoir avec son successeur à la présidence de la Chambre, l'homme fort du parti radical que l'on ne représente que selon son profil gauche du fait de sa borgnitude : Léon Gambetta. Avec Jules Ferry et le *tigre* Clémenceau, ce sont les nouveaux piliers d'un nouveau régime républicain qui, pour la première fois, s'installe durablement en France.

FIGURE 57. Léon Gambetta, Président de la Chambre des députés durant les 33 premiers mois du mandat de Jules Grévy

Bibliographie

Sources d'Archives publiques

Archives de l'Académie des Sciences de Paris

[Archives épistolaires Darboux] Lettres de Gaston Darboux à Jules Hoüel (1869-1886). Dossier Hoüel (426 lettres).

[Archives épistolaires Ohrtmann] Lettres de Carl Ohrtmann à Jules Hoüel (1871-1880). Dossier Hoüel, pochette Ohrtmann (11 lettres).

Archives de la Bibliothèque de l'Institut de Paris

[Archives épistolaires Beltrami] Lettres de Eugenio Beltrami à Gaston Darboux (1870-1898). Dossier Ms 2719, *Dossiers de Jean-Gaston Darboux*, pochette Beltrami (18 lettres).

[Archives épistolaires Cremona] Lettres de Luigi Cremona à Gaston Darboux (1870-1898). Dossier Ms 2719, *Dossiers de Jean-Gaston Darboux*, pochette Cremona (14 lettres).

[Archives épistolaires Lie] Lettres de Sophus Lie à Gaston Darboux (1871-1888). Dossier Ms 2720, *Dossiers de Jean-Gaston Darboux*, pochette Lie (25 lettres).

[Archives épistolaires Lipschitz] Lettres de Rudolf Lipschitz à Gaston Darboux (1872-1898). Dossier Ms 2720, *Dossiers de Jean-Gaston Darboux*, pochette Lipschitz (11 lettres).

Archives de l'Institut Mittag-Leffler de Djursholm

[Archives Darboux Mittag-Leffler] Lettres de Gaston Darboux à Gösta Mittag-Leffler (1882-1917). Correspondance reçue, dossier Darboux.

[Archives Hoüel Mittag-Leffler] Lettres de Jules Hoüel à Gösta Mittag-Leffler (1873-1886). Correspondance reçue, dossier Hoüel.

Archives Nationales de Pierrefitte-sur-Seine relatives à l'Ecole Pratique des Hautes Etudes

[F/17/4023] Ecole Pratique des Hautes Etudes : Comptabilité 1868-1897. Publications. Section sciences mathématiques, section sciences naturelles, section philologie et histoire : pièces justificatives des dépenses 1869-1881. Publications et rapports annuels 1882-1886.

[F/17/13614] Ecole Pratique des Hautes Etudes. Création, organisation, annexes dans les départements (1867-1873). Commissions de patronage (1868-1915). Nomination d'élèves (1868-1873).

[F/17/13616] Ecole Pratique des Hautes Etudes. 1ère, 2ème et 3ème sections (mathématiques, physique et chimie, sciences naturelles) : commissions de patronage, élèves, professeurs, rapports, laboratoires.

Autres archives

[Archives épistolaires Hoüel] Correspondances de Jules Hoüel, Bibliothèque Municipale de Caen. Dossier Ms in-4° 333.

[Archives épistolaires Weierstraß] Correspondances de Karl Wilhelm Weierstraß, Geheimes Staatsarchiv Preußischer Kulturbesitz, VI. HA Familienarchive und Nachlässe, NI Karl Weierstraß, 14195 Berlin.

Archives d'Etat Civil numérisées

[Archives Gard] Archives départementales du Gard, registres d'état civil numérisés : en ligne http://archives.gard.fr/accueil.html.

[Archives Léonore] Archives Nationales, base de données Léonore : dossiers de l'Ordre de la Légion d'honneur (1802-1977). En ligne http://www.culture.gouv.fr/documentation/leonore/recherche.htm.

[Archives Oise] Archives départementales de l'Oise, archives en lignes : état civil. En ligne http://archives.oise.fr/archives-en-ligne/etat-civil/.

[Archives Paris] Archives numérisées de Paris, Etat civil complet 1860-1902. En ligne http://canadp-archivesenligne.paris.fr/archives_etat_civil/.

Articles, Ouvrages et documents imprimés

Abel, Niels Henrik

[Abel 1829] Abel N.H., Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 4 (1829), pp.200-202.

[Abel 1841] Abel N.H., Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes, *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, Tome 7 (1841), Paris, pp. 176-264.

Amiot, Benjamin

[Amiot 1843a] Amyot B., Remarques de M. Amyot à l'occasion des réflexions présentées par M. Chasles à la séance précédente, *Comptes-rendus hebdomadaires des séances de l'Académie*, tome 41 (1843 1er semestre), pp.938-393.

[Amiot 1843b] Amiot B., Mémoire sur une nouvelle méthode de génération et de discussion des surfaces du second ordre, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome 8 (1843), pp.161-208.

[Amiot 1845] Amiot B., Mémoire sur les diverses propriétés des surfaces du deuxième ordre déduites de la théorie des focales, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome 10 (1845), pp.109-136.

Aoust, l'Abbé

[Aoust 1867] Aoust, Des surfaces du second degré ayant une même intersection, *Comptes-rendus des séances de l'Académie*, Tome 64 (1867 1er Sem.), pp. 746-749.

Appell, Paul

[Appell 1893] Appell P., Notice sur la vie et les travaux de Pierre-Ossian Bonnet, *Comptes-rendus hebdomadaires des séances de l'Académie*, tome 117 (1893 2e Sem.), pp.1014-1024.

Archibald, Tom

[Archibald 2003] Archibald T., *Differential Equations : a historical overview to circa 1900*, In : [**Jahnke 2003**, Chap.11], pp. 325-353.

[Archibald 2011] Archibald T., Differential equations and algebraic transcendents : french efforts at the creation of a galois theory of differential equations 1880-1910, *Revue d'histoire des mathématiques*, 17 (2011), pp. 373-401.

Arnold, Vladimir

[Arnold 1989] Arnold V., Vogtman K., Weinstein A., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mathematics (Springer), 2nd edition, 1989.

August, Friedrich

[August 1873] August F., Recension : Darboux G., Mémoire sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires, *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Band 5 Heft 2 (1873), Berlin (Reimer) 1875, pp.399-408.

Baire, René

[Baire 1990] Baire R., Lettres de René Baire à Emile Borel, *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, Tome 11 (1990), pp. 33-120.

Baltzer, Richard

[Baltzer 1861] Baltzer R., *Théorie et applications des déterminants, avec l'indication des sources originales. Traduit de l'allemand par Jules Hoüel*, Paris (Mallet-Bachelier), 1861. Disponible en ligne : https://archive.org/stream/thorieetapplic00baltuoft.

Barberousse, Anouk

[Barberousse et al. 2011] Barberousse A., Bonnay D., Cozic M., *Précis de Philosophie des Sciences*, Paris (Vuibert), 2011.

Barbin, Evelyne & Godet, Jean-Luc & Stenger, Gerhardt

[Barbin et al. 2009] Barbin E., Godet J.-L., Stenger G., *1867 : l'année de tous les Rapports. Les lettres et les sciences à la fin du Second Empire*, Paris (Ed. du Temps), 2009.

Barbin, Evelyne & Guitart, René

[Barbin Guitart 1998] Barbin E., Guitart R., *La pulsation entre les conceptions optiques, algébriques, articulées et projectives, des ovales cartésiennes* In : Tournès (Dominique) éd., *L'océan indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes*, Saint-Denis : IUFM de La Réunion, 1998, pp.359–394. Disponible en ligne : http://rene.guitart.pagesperso-orange.fr/textespublications/barbinguitart98.pdf.

[Barbin Guitart 2001] Barbin E., Guitart R., Algèbre des fonctions elliptiques et géométrie des ovales cartésiennes, *Revue d'histoire des mathématiques*, Tome 7 (2001) Num. 2, pp.161-205.

Barrow-Green, June

[Barrow-Green 1997] Barrow-Green J.E., *Poincaré and the Three Body Proble*, AMS/LMS, Providence, 1997.

Bastl, Bohumir

[Bastl et al. 2014] Bastl B., Jüttler B., Lávička M., Schulz T., Šír Z., On the Parameterization of Rational Ringed Surfaces and Rational Canal Surfaces, *Mathematics in Computer Science*, Vol. 8 Issue 2 (June 2014), pp. 299-319.

Battaglini, Giuseppe

[Battaglini 1868] Battaglini G.., Sulla scienza della spazio assolutamente vera, *Giornale di Matematiche*, Tome 6 (1868), pp.97-115. Traduction de [**Bolyai J. 1832**].

Belhoste, Bruno

[Belhoste 1991] Belhoste B., *Augustin-Louis Cauchy. A Biography.*, New York (Springer-Verlag), 1991.

[Belhoste 2001a] Belhoste B., La préparation aux grandes écoles scientifiques au xix^e siècle : établissements publics et institutions privées, *Histoire de l'Education*, Vol. 90 (2001, 2nd Issue), pp. 101-130.

[Belhoste 2001b] Belhoste B., *The Ecole Polytechnique and Mathematics in Nineteenth-Century France*, in : [**Bottazzini Dalmedico 2001**], Chap.1, pp. 15-30.

Beltrami, Eugenio

[Beltrami 1869a] Beltrami E., Essai d'interprétation de la géométrie non euclidienne. Traduction par Jules Hoüel., *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale*, Tome 6 (1869), pp.251-288.

[Beltrami 1869b] Beltrami E., Théorie fondamentale des espaces de courbure constante. Traduction par Jules Hoüel., *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale*, Tome 6 (1869), pp.347-375.

Berger, Marcel ; Gostiaux, Bernard

[Berger Gostiaux 1992] Berger M., Gostiaux B., *Géométrie différentielle : Variétés, Courbes et Surfaces*, Paris (PUF), 1992.

Bertrand, Joseph

[Bertrand 1843a] Bertrand J., Développement sur quelques points de la théorie des surfaces isothermes orthogonales, *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, tome 17 (1843), pp.80-82, pp.290-292 (Rapport de MM. Liouville et Lamé).

[Bertrand 1843b] Bertrand J., Démonstration de quelques théorèmes sur les surfaces orthogonales, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Tome 17 (Cahier 29) (1843), pp.157-173.

[Bertrand 1844a] Bertrand J., Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome 9 (1844), pp.117-132.

[Bertrand 1844b] Bertrand J., Mémoire sur la théorie des surfaces, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome 9 (1844), pp.132-154.

[Bertrand 1857] Bertrand J., Note sur la théorie des équations différentielles du premier ordre, *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, tome 45 (1857 2nd Sem.), pp.617-619.

[Bertrand 1864] Bertrand J., *Traité de Calcul Différentiel et Intégral. Volume 1 : Calcul Différentiel*, Paris (Gauthier-Villars), 1864.

[Bertrand 1867] Bertrand J., *Rapport sur les progrès les plus récents de l'Analyse Mathématique*, Paris (Imprimerie Impériale), 1867.

[Bertrand 1868] Bertrand J., Etude des surfaces algébriques, *Nouvelles annales de mathématiques*, Ser. 2 tome 7 (1868), pp. 5-16, 49-56.

[Bertrand 1869] Bertrand J., Sur la somme des angles d'un triangle, *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris*, Tome 69 (1869), pp. 1265–1269.

[Bertrand 1870a] Bertrand J., Sur la démonstration relative à la somme des angles d'un triangle, *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris*, Tome 70 (1870), pp. 17-20.

[Bertrand 1870b] Bertrand J., *Traité de Calcul Différentiel et Intégral. Volume 2 : Calcul Intégral. Intégrales définies et indéfinies*, Paris (Gauthier-Villars), 1870.

[Bertrand 1878] Bertrand J., *Eloge de Gabriel Lamé*, Lue dans la séance publique du 28 Janvier 1878. Disponible en ligne : http://www.academie-sciences.fr/pdf/eloges/lame_vol3255.pdf.

[Bertrand 1899] Bertrand J., Biographies Scientifiques : Vie et travaux de Félix Tisserand. Notice lue par Joseph Bertrand dans la séance annuelle de l'Académie des Sciences du 18 Décembre 1899, *Revue Scientifique*, 4ème série Tome XIII (1900), 20 Janvier 1900.

Biermann, Kurt-Reinhard

[Biermann 1966] Biermann K.-R., Karl Weierstraß, Ausgewählte Aspekte seiner Biographie, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 223 (19666), pp.191-220.

[Biermann 1988] Biermann K.-R.., *Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810-1933*, Berlin (Akademie-Verlag), 1988.

Blaschke, Wilhelm & Bol, Gerrit

[Blaschke Bol 1938] Blaschke W., Bol G.,*Geometrie der Gewebe*, Berlin(Springer), 1938.

Bo, Pengbo

[Bo et al. 2011] Bo, P., Potmann, H., Kilian, M., Wang, W., Wallner, J., Circular arc structures, *ACM Trans. Graphics*, Vol. 30 (2011) n.101, pp.1-11.

Bobillier, Etienne

[Bobillier 1827] Bobillier E., Sur les foyers dans les surfaces du second ordre, *Correspondance mathématique et physique*, Tome 4 (1827), pp.157-163.

Boi, Luciano & Giacardi, Livia & Tazzioli, Rossana

[Boi Giacardi Tazzioli 1998] Boi L., Giacardi L., Tazzioli R., *La découverte de la géométrie non-euclidienne sur la pseudosphère. Les lettres d'Eugenio Beltrami à Jules Hoüel (1868-1881)*, Paris (Albert Blanchard), 1998.

du Bois-Reymond, Paul

[du Bois-Reymond 1875] du Bois-Reymond P., Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 79 (1875), pp.21-37.

[du Bois-Reymond 1882] du Bois-Reymond P., *Die allgemeine Functionentheorie* Erster Theil, Tübingen (Lauppschen Buchhandlung), 1882.

Bölling, Reinhard

[Bölling 1993] Bölling R., *Briefwechsel Zwischen Karl Weierstrass Und Sofja Kowalewskaja*, Berlin (Akademie Verlag), 1993.

[Bölling 1994] Bölling R., *Das Fotoablum für Weierstraß / A Photo Album for Weierstrass*, Braunschweig and Wiesbaden (Vieweg), 1994.

[Bölling 1998] Bölling R., Weierstrass and some members of his circle : Kovalevskaia, Fuchs, Schwarz, Schottky, in : *Mathematics in Berlin*, Berlin (Springer), 1998, pp.71-82.

Bolyai, Farkas

[Bolyai F. 1832] Bolyai W.F., Tentamen juventutem studiosam in elementa Matheseos purae, elementaris et sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi, *Maros Vasarhely* 1 (1832), pp.XCVIII-502.

Bolyai, János

[Bolyai J. 1832] Bolyai J., Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens, Appendice de [**Bolyai F. 1832**], 1832.

Bolzano, Bernhard

[Bolzano 1816] Bolzano B., *Der binomische Lehrsatz, und aus Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung des Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erwiesen.*, Prag (C.W. Enders), 1816.

[Bolzano 1817] Bolzano B., *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegensetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Prag (Gottliebe Haase), 1817.

[Bolzano 1930] Bolzano B., *Functionenlehre. Herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von Dr Karel Rychlík*, Prag, Königliche böhmische Gesellschaft der Wissenschaften, 1930.

Boniface, Jacqueline

[Boniface 2007] Boniface J., *The Concept of Number from Gauss to Kronecker* In : [**Goldstein Schappacher Schwermer 2007**], Chapter 5, Section 1, pp.315-342.

Bonnay, Denis & Dubucs, Jacques

[Bonnay Dubucs 2011] Bonnay D., Dubusc J., *Philosophie des mathématiques*, in : [**Barberousse et al. 2011**], Chapitre IX, pp. 293-349.

Bonnet, Pierre-Ossian

[Bonnet 1845] Bonnet P.-O., Mémoire sur la théorie des surfaces isothermes orthogonales, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Tome 18 (Cahier 30) (1845), pp.141-164.

[Bonnet 1849] Bonnet P.-O., Sur les surfaces isothermes et orthogonales, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, Tome 14 (1849), pp.401-416.

[Bonnet 1857] Bonnet P.-O., Sur un théorème de Jacobi relatif à l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, Tome 45 (1857 2nd Semestre) pp.581-585.

[Bonnet 1862] Bonnet P.-O., Mémoire sur les surfaces orthogonales, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, Tome 54 (1862 1er Semestre) pp.554-559, 655-659.

Boole, George

[Boole 1859] Boole G., *A treatise on differential equations*, Cambridge (MacMillan & Co), 1859.

Bottazzini, Umberto

[Bottazzini 1986] Bottazzini U., *The Higher Calculus. A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass.* New-York (Springer), 1986.

[Bottazzini 1992] Bottazzini U., *The influence of Weierstrass's Analytical Methods in Italy* In Demidov S., Folkerts M., Rowe D.E., Scriba C.J., *Amphora : Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag*, Basel (Birkhäuser), 1992, pp.67-90.

[Bottazzini 2001] Bottazzini U., *From Paris to Berlin : Contrasted Images of Mathematics*, in : [**Bottazzini Dalmedico 2001**], Chap.2, pp. 31-48.

[Bottazzini 2003] Bottazzini U., *Complex Function Theory, 1780-1900* In [**Jahnke 2003**] Chapter 8, pp.213-260.

Bottazzini, Umberto & Dalmedico, Amy Dahan

[Bottazzini Dalmedico 2001] Bottazzini U. & Dalmedico A.D., *Changing Images in Mathematics. From the French Revolution to the New Millenium*, London New-York (Routledge), Studies in the History of Science Technology and Medicine, 2001.

Bottazzini, Umberto & Gray, Jeremy

[Bottazzini Gray 2013] Bottazzini U. & Gray J., *Hidden Harmony - Geometric Fantasies. The Rise of Complex Function Theory.* New-York (Springer), 2013.

Bostock, David

[Bostock 2009] Bostock D., *Philosophy of Mathematics : an Introduction*, Singapore (Wiley-Blackwell), 2009.

Bouquet, Jean-Claude

[Bouquet 1846a] Bouquet J.-C., Note sur les surfaces orthogonales, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, Tome XI (1846), pp.446-450.

[Bouquet 1846b] Bouquet J.-C., Remarques sur les systèmes de droites dans l'espace, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, Tome XI (1846), pp.125-128.

Bour, Edmond

[Bour 1861] Bour E., Théorie de la déformation des surfaces, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Cahier XXXIX (Tome 22, 1862), pp.1-148.

[Bour 1862] Bour E., Sur les équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Cahier XXXIX (Tome 22, 1862), pp.149-192.

Boyer, Carl

[Boyer 1968] Boyer C., *A history of mathematics*, New York (John Wiley & Sons), 1968.

Briot, Charles & Bouquet, Jean-Claude

[Briot Bouquet 1856] Briot C. & Bouquet J.-C., Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, tome 21 Cahier 36 (1856), pp.133-190.

[Briot Bouquet 1862] Briot C. & Bouquet J.-C., *Briot und Bouquet's Theorie der doppeltperiodischen Functionen und insbesondere der elliptischen Transcendenten mit Benutzung dahin einschlagender Arbeiten deutscher Mathematiker dargestellt von H. Fischer*, Halle (H.W. Schmidt), 1862.

Bru, Bernard & Martin, Thierry

[Bru Martin 2005] Bru B., Martin Th., Le baron de Ferussac, la couleur de la statistique et la topologie des sciences, *Journal Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, Ser. 1 Vol. 2 (2005), Novembre 2005. En ligne : http://www.jehps.net/Novembre2005/BruMartin.pdf.

Calleri, Paula & Giacardi, Livia

[Calleri Giacardi 1995] Calleri P., Giacardi L., Le lettere di Giuseppe Battaglini a Jules Hoüel (1867-1878). La diffusione delle geometrie non euclidee in Italia, *Rivista di Storia della Scienza*, (2) 3.1, pp. 127-209.

[Calleri Giacardi 1996] Calleri P., Giacardi L., Le lettere di Giuseppe Battaglini a Angelo Genocchi (1867-1881), in : Castellana M., Palladino F., *Giuseppe Battaglini. Raccolta di lettere (1854-1891) di un matematico al tempo del Risorgimento d'Italia*, Bari (Levante Editori), pp. 161-173.

Cantor, Georg

[Cantor 1870a] Cantor G., Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 72 (1870), pp.130-138 in *Ges. Abh* pp. 71-79.

[Cantor 1870b] Cantor G., Beweis, dass für jeden reellen Werth von x durch trigonometrische Reihe gegebene function $f(x)$ [etc]. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 72 (1870), pp.139-142 in *Ges. Abh* pp. 80-83.

[Cantor 1871] Cantor G., Notiz zu dem Aufsatz : Beweis, dass eine für jeden reellen Werth [etc]. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 73 (1871), pp.298-300 in *Ges. Abh* pp. 84-86.

[Cantor 1872] Cantor G., Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen* 5 (1872), pp.123-132 in *Ges. Abh* pp. 92-102.

Carton, Jules

[Carton 1870] Carton J., *Vrais principes de la géométrie euclidienne et preuves de l'impossibilité de la géométrie non euclidienne*, Paris (Cusset et Cie), 1870.

Casas-Alvero Eduardo

[Casas-Alvero 2012] Casas-Alvero E., Roots of complex polynomials and foci of real algebraic curves, *L'enseignement mathématique*, Vol. 58 Série 2 (2012), pp.223-248.

Casey, John

[Casey 1871] Casey J., On Cyclides and Sphero-Quartics, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol.CLXI (1871), pp.585-721.

Castelnuovo, Guido & Enriques, Federigo

[Castelnuovo Enriques 1908] Castelnuovo G., Enriques F., *Grundeigenschaften der algebraischen Flächen*, In : *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*, Band 3-2-1 (Geometrie), Leipzig (Teubner), 1908, pp.635-673.

Catalan, Eugène

[Catalan 1870] Catalan E., Remarques sur une Note de M. Darboux relative à la surface des centres de courbure d'une surface algébrique, *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, Vol. 71 (1870 2nd Sem.), 4 Juillet 1870, pp.50-53.

Cauchy, Augustin-Louis

[Cauchy 1825] Cauchy A.-L., *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires*, Paris (De Bure Frères), 1825.

[Cauchy 1841] Cauchy A.-L., *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique. Tome Deuxième.*, Paris (Bachelier), 1841.

Cayley, Arthur

[Cayley 1849] Cayley A., On the triple tangent planes of surfaces of third order, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, Vol.IV (1849), pp.118-132.

[Cayley 1850] Cayley A., On the developable surfaces which arise from two surfaces of the second order, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, Vol.V (1850), pp.46-57.

[Cayley 1862] Cayley A., On the conics which pass through the four foci of a given conic, *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol.V (1862), pp.275-280.

[Cayley 1864] Cayley A., A second memoir on skew surfaces, otherwise scrolls, *Philosophical Transactions of the royal society of London*, Vol. 154 (1864), pp.559-577.

[Cayley 1866] Cayley A., Note on the tetrahedron, *Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics*, Vol.3 (1866), pp.8-10.

[Cayley 1868a] Cayley A., On polyzomal curves, otherwise the curves $\sqrt{U} + \sqrt{V} + \&c. = 0$, *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, Vol.xxv (1868), pp.1-110.

[Cayley 1868b] Cayley A., Démonstration nouvelle du théorème de M. Casey par rapport aux cercles qui touchent à trois cercles donnés, *Annali di Matematica pura ed applicata*, Série 2 Vol.1 (1867-68), pp.132-134.

[Cayley 1872a] Cayley A., Sur les surfaces divisibles en carrés par leurs courbes de courbures et sur la théorie de Dupin, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, Tome 74 (1872 1er Semestre), pp.1445-1449.

[Cayley 1872b] Cayley A., Sur la condition pour qu'une famille de surfaces données puisse faire partie d'un système orthogonal, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, Tome 75 (1872 2ème Semestre), pp.177-185, 246-250, 324-330, 381-385, 1800-1803.

[Cayley 1872c] Cayley A., Sur une surface quartique aplatie, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, Tome 74 (1872 1er Semestre), pp. 1393-1395.

[Cayley 1873a] Cayley A., On the cyclide, *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol.XII (1873), pp.148-164.

[Cayley 1873b] Cayley A., On the theory of the singular solutions of differential equations of first order, *The Messenger of Mathematics*, Vol. II (1873), pp.6-12.

[Cayley 1877] Cayley A., On the theory of the singular solutions of differential equations of first order, *The Messenger of Mathematics*, Vol. VI (1877), pp.23-27.

[Cayley 1890] Cayley A., On the focals of a quadric surface, *Messenger of Mathematics*, Vol.19 (1890), pp.113-117.

Charle, Christophe

[Charle 1994] Charle C., *La république des universitaires 1870-1940*, Paris (Seuil), 1994.

Charle, Christophe & Telkes, Eva

[Charle Telkes 1989] Charle C., Telkes E., *Les professeurs de la faculté des sciences de Paris. Dictionnaire biographique 1901-1939*, Paris (Editions du CNRS), 1989.

Charle, Christophe & Verger, Jacques

[Charle Verger 1994] Charle C., Verger J., *Histoire des Universités*, Paris (PUF), 2nde édition, 2007.

Chasles, Michel

[Chasles 1829] Chasles M., Recherches de géométrie pure sur les lignes et les surfaces du second degré, *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles*, tome V, Bruxelles (Hayez), 1829.

[Chasles 1830] Chasles M., Mémoire de géométrie pure sur les propriétés générales des cônes du second degré, *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles*, tome VI, Bruxelles (Hayez), 1830.

[Chasles 1831] Chasles M., Mémoire de géométrie sur les propriétés générales des coniques sphériques, *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles*, tome VI, Bruxelles (Hayez), 1831.

[Chasles 1837a] Chasles M., *Aperçu sur l'origine historique et le développement des méthodes en Géométrie. I.*, Bruxelles (Hayez), 1837. Disponible en ligne : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k290445/f1.table.

[Chasles 1837b] Chasles M., Mémoire sur l'attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Tome 15 (Cahier 25) (1837), pp.266-317.

[Chasles 1843] Chasles M., Observations de M. Chasles suite à la lecture d'un Rapport sur un Mémoire de M. Amyot, *Comptes-rendus hebdomadaires des séances de l'Académie*, Vol.16 (1843 1er semestre), pp.828-833, pp.1105-1109.

[Chasles 1844] Chasles M., Construction géométrique des amplitudes dans les fonctions elliptiques, Propriétés nouvelles des sections coniques, *Comptes-rendus hebdomadaires des séances de l'Académie*, Vol.19 (1844 2ème semestre), pp.1239-1261.

[Chasles 1846a] Chasles M., Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, Tome 11 (1846), pp.5-20.

[Chasles 1846b] Chasles M., Nouvelles démonstrations des deux équations relatives aux tangentes communes à deux surfaces du second degré homofocales *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, Tome 11 (1846), pp.105-119.

[Chasles 1852] Chasles M., *Traité de Géométrie supérieure*, Paris (Bachelier), 1852. Disponible en ligne : https://books.google.fr/books?id=iusj3sKcXFEC&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

[Chasles 1860a] Chasles M., Résumé d'une théorie des coniques sphériques, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* t.50, 21 Mars 1860, pp.623-633.

[Chasles 1860b] Chasles M., Résumé d'une théorie des surfaces du second ordre homofocales, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* t.50, 11 Juin - 18 Juin, pp.1055-1063, 1110-1115.

[Chasles 1861] Chasles M., Description des courbes de tous les ordres situées sur les surfaces réglées du troisième et quatrième ordres, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, tome 53 (1861 2nd semestre), p. 888.

[Chasles 1865] Chasles M., *Traité des sections coniques*, Paris (Gauthier-Villars), 1865.

[Chasles 1870] Chasles M., *Rapport sur les progrès de la géométrie*, Paris (Imprimerie Nationale), 1870.

Choisel, Francis

[Choisel 2015] Choisel F., *La Deuxième République et le Second Empire au jour le jour. Chronologie.*, Paris (CNRS Editions), 2015.

Chorlay, Renaud

[Chorlay 2007] Chorlay R., *L'émergence du couple local / global dans les théories géométriques, de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux 1851-1953.* Thèse de doctorat, Université Paris 7, 2007.

Clairaut, Alexis-Claude

[Clairaut 1734] Clairaut A.-C., Solutions de plusieurs problèmes, où il s'agit de trouver des courbes dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leurs branches, exprimées par une équation donnée, *Histoire de l'Académie royale des sciences pour l'année 1734, avec les mémoires de mathématiques et de physique pour la même année*, Paris (Imprimerie Royale), 1736, pp. 196-215.

Clebsch, Alfred

[Clebsch 1868] Clebsch A., Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 69 (1868), pp.142-184.

Cogliati, Alberto

[Cogliati 2014] Cogliati A., On Jacobi's transformation theory of elliptic functions, *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 68 Issue 4 (Juillet 2014), pp.529-545.

Comberousse, Charles de & Rouché, Eugène

[Comberousse Rouché 1922] Comberousse C., Rouché E., *Traité de Géométrie*, Deuxième édition, Deuxième Partie, Paris (Gauthier-Villars), 1922. Disponible en ligne : https://archive.org/stream/traitdegom02roucuoft.

Combescure, Edouard

[Combescure 1867] Combescure E., Sur les déterminants fonctionnels et les coordonnées curvilignes, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale*, tome 4 (1867), pp. 93-131.

Conte, Alberto & Giacardi, Livia

[Conte Giacardi 1991] Conte A., Giacardi L., *Angelo Genocchi e suoi interlocutori scientifici. Contributi dall'epistolario*, Miscellanea di storia italiana, Torino (Palazzo Carignano), 1991.

Coolidge, Julian Lowell

[Coolidge 1916] Coolidge J.L., *A treatise on the Circle and the Sphere*, Oxford, 1916.

[Coolidge 1931] Coolidge J.L., *A treatise on Algebraic Plane Curves*, Oxford (Clarendon Press), 1931.

[Coolidge 1963] Coolidge J.L., *A history of Geometrical Methods*, New York (Dover Publications), 1963.

Court, Nathan Altshiller

[Court 1928] Court N.A., On Five Mutually Orthogonal Spheres, *Annals of Mathematics*, Serie 2 Vol. 30 (1928-29), pp.613-620.

[Court 1934] Court N.A., Notes on the orthocentric tetrahedron, *American Mathematical Monthly*, Vol. 41 (1934), pp.499–502.

Crawford, Elisabeth

[Crawford 1980] Crawford E., *The prize system of the Academy of Sciences, 1850-1914*, In : [**Fox Weisz 1980**], Chap. III, pp. 283-308.

Crilly, Tony

[Crilly 1986] Crilly T., The rise of Cayley's invariant theory (1841-1862), *Historia Mathematica*, Vol. 13 (1986), pp. 241-254.

[Crilly 1988] Crilly T., The decline of Cayley's invariant theory (1863-1895), *Historia Mathematica*, Vol. 15 (1988), pp. 332-347.

[Crilly 2006] Crilly T., *Arthur Cayley : Mathematician Laureate of the Victorian Age*, Baltimore (John Hopkins University Press), 2006.

Croizat, Barnabé & Tazzioli, Rossana

[Croizat Tazzioli 2014] Croizat B., Tazzioli R., Il y a cent ans : Volterra et Darboux échangent sur la grande guerre, *Image des Mathématiques, CNRS*, Du côté des lettres (3), 2014, en ligne : http://images.math.cnrs.fr/Du-cote-des-lettres-3-Il-y-a-cent-ans-Volterra-et-Darboux-echangent-sur-la.html.

Dandelin, Germinal Pierre

[Dandelin 1825] Dandelin G.P., Géométrie pure. Recherches nouvelles sur les sections du cônes et sur les hexagones inscrits et circonscrits à ces sections, *Annales de Mathématiques*, Vol. 15 (1824-1825), pp.387-396.

[Dandelin 1826] Dandelin G.P., Mémoire sur l'hyperboloïde de révolution, et sur les hexagones de Pascal et de M. Brianchon, *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, Vol. 3 (1826), pp.3-16.

Darboux, Gaston

[Darboux 1859] Darboux G., Solution de la question 467. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, Sér. 1, 18 (1859), pp. 232-233

[Darboux 1861a] Darboux G., Seconde solution de la question 503. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, Sér. 1, 20 (1861), pp. 436-438

[Darboux 1861b] Darboux G., Solution de la question 537. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, Sér. 1, 20 (1861), pp. 458-464

[Darboux 1864a] Darboux G., Sur les sections du tore, *Nouvelles annales de mathématiques* 2ème série, tome 3 (1864), p.156-165.

[Darboux 1864b] Darboux G., Théorèmes sur l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré, *Nouvelles annales de mathématiques* 2ème série, tome 3 (1864), p.199-202.

[Darboux 1864c] Darboux G., Remarques sur la théorie des surfaces orthogonales, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* t.58, 1er Août 1864, pp.240-242, pp.269-270.

[Darboux 1865] Darboux G., Recherches sur les surfaces orthogonales, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale* t.2, 1865, pp.55-69.

[Darboux 1866] Darboux G., Sur les surfaces orthogonales, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale* t.3, 1866, p.97-141.

[Darboux 1867] Darboux G., Note sur une classe de courbes du quatrième ordre et sur l'addition des fonctions elliptiques, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale* t.4, 1867, p.81-91.

[Darboux 1868] Darboux G., Sur un mode de transformation des figures, *Bulletin de la Société Philomathique de Paris* t.5, 1868, pp. 72-80.

[Darboux 1869a] Darboux G., Sur la représentation sphérique des surfaces, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* t.68, 1er Février 1869, pp.253-256.

[Darboux 1869b] Darboux G., Mémoire sur une classe de courbes et de surfaces (Extrait par l'auteur), *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* t.68, 7 Juin 1869, pp.1311-1313.

[Darboux 1870a] Darboux G., Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale* t.7, 1870, p.163-173.

[Darboux 1870b] Darboux G., Sur la surface des centres de courbure d'une surface algébrique, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* t.70, 20 Juin 1870, p.1328-1333.

[Darboux 1870c] Darboux G., Réponse aux observations de M. Catalan, du 4 Juillet dernier, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* t.71, 25 Juillet 1870, p.267-270.

[Darboux 1872a] Darboux G., Sur un théorème relatif à la continuité des fonctions, *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques (BSMA)*, T.3 (1872) p.307-313.

[Darboux 1872b] Darboux G., Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale*, Série 2 Vol.1 (1872), pp.323-392.

[Darboux 1872c] Darboux G., *Sur les théorèmes d'Ivory relatifs aux surfaces homofocales du second degré* , Paris (Gauthier-Villars), 1872.

[Darboux 1872d] Darboux G., Recension du mémoire [**Heine 1872**], *Bulletin des Sciences Math. et Astr.*, Tome 3, Septembre 1872, pp. 264-265.

[Darboux 1873a] Darboux G., *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires*, Paris (Gauthier-Villars), 1873.

[Darboux 1873b] Darboux G., Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre, *BSMA*, T. 4 (1873), Mars 1873, p.158-173.

[Darboux 1873c] Darboux G., Sur l'équation du troisième ordre dont dépend le problème des surfaces orthogonales, *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, Tome 76 (1873), pp. 41, 83, 160.

[Darboux 1875a] Darboux G., Mémoire sur l'existence de l'intégrale dans les équations aux dérivées partielles contenant un nombre quelconque de fonctions et de variables indépendantes., *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, Tome 80 (1875), pp.101-104.

[Darboux 1875b] Darboux G., Mémoire sur les fonctions discontinues, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale* Série 2 Vol. 4 (1875) pp.57-112.

[Darboux 1876] Darboux G., Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre, *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, 2ème Série Vol. 27 (1883), N.2, pp.193-434.

[Darboux 1878a] Darboux G., Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes, et des systèmes orthogonaux, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale*, Tome 7 2ème Série (1878), pp.101-150, 227-260, 275-348.

[Darboux 1878b] Darboux G., Sur la rectification des ovales de Descartes, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, Tome 87 (1878 2nd Semestre), pp.595-597, p.741 (Addition).

[Darboux 1879] Darboux G., Addition au mémoire sur les fonctions discontinues , *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale* Série 2 Vol. 8 (1879) pp.195-202. Addition au mémoire sur les fonctions discontinues

[Darboux 1882] Darboux G., *Le problème de Pfaff*, Paris (Gauthier-Villars), 1882.

[Darboux 1884] Darboux G., *Notice sur les travaux scientifiques*, Paris (Gauthier-Villars), 1884.

[Darboux 1887] Darboux G., *Leçons sur la théorie générale des surfaces. Volume 1*, Livres 1,2,3 ; Paris (Gauthier-Villars), Deuxième Edition, 1914.

[Darboux 1889] Darboux G., *Leçons sur la théorie générale des surfaces. Volume 2*, Livres 4,5 ; Paris (Gauthier-Villars), Deuxième Edition, 1915.

[Darboux 1894] Darboux G., *Leçons sur la théorie générale des surfaces. Volume 3*, Livres 6,7 ; Paris (Gauthier-Villars), Deuxième Edition, 1916.

[Darboux 1895] Darboux G., *Leçons sur la théorie générale des surfaces. Volume 4*, Livre 8 ; Paris (Gauthier-Villars), 1895.

[Darboux 1898] Darboux G., *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. Tome I.*, Paris (Gauthier-Villars et Fils), 1898.

[Darboux 1904] Darboux G., *Etude sur le développement des méthodes géométriques ; Lue le 24 Septembre 1904 au Congrès des Sciences et des Arts à Saint-Louis*, Paris (Gauthier-Villars), 1904. Disponible en ligne : https://archive.org/details/tudesurledvelop00darbgoog.

[Darboux 1908] Darboux G., *Les origines, les méthodes et les problèmes de la Géométrie Infinitésimale.* In : Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma, Avril 1908, vol.1, pp.105-122 (1909). Disponible en ligne : http://www.mathunion.org/ICM/ICM1908.1/Main/icm1908.1.0105.0122.ocr.pdf.

[Darboux 1912] Darboux G., *Eloges académiques et Discours. Volume publié par le Comité du Jubilé scientifique de M. Gaston Darboux.*, Paris (Hermann), 1912.

[Darboux 1917] Darboux G., *Principes de géométrie analytique*, Paris (Gauthier-Villars et Cie), 1917. Disponible en ligne : https://archive.org/details/principesdegom00darbuoft.

[Darboux 1933] Darboux G., *Inauguration du buste élevé dans la cour d'honneur du Lycée pour honorer la mémoire de Gaston Darboux.*, Nîmes (Albin Pujolas), 1933. Retranscription de la séance du 22 Octobre 1933 et des discours.

Daston, Lorraine

[Daston 2000] Daston L. (eds.), *Biographies of Scientific Objects*, Chicago (University of Chicago Press), 2000.

Dauben, Joseph-Warren

[Dauben 1970] Dauben J.W., The trigonometric background to Georg Cantor's theory of sets, *Archive for History of Exact Sciences*, 7 (1971), pp.181-216.

[Dauben 1979] Dauben J.W., *Georg Cantor : His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Cambridge (Harvard University Press), Mass., 1979.

[Dauben 1980] Dauben J.W., *The development of Cantorian set theory*, In : [**Grattan-Guinness 1980**], Chap.5, pp.181-219.

De Almeida, Marta & Videira, Antonio

[De Almeida Videira 2013] De Almeida M., Videira A., *Le rôle de la biographie dans l'histoire des sciences*, in : [**Rey 2013a**], pp.321-336.

De Majo, A.

[De Majo 1961] De Majo A., Tetraspheres, *Canadien Journal of Mathematics*, Vol. XIII num. 3 (1961), pp.437-443.

De Morgan, Augustus

[De Morgan 1856] De Morgan A., On some points of the Integral Calculus, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 9 Part II (1856), pp. 107-138.

Decaillot-Laulagnet, Anne-Marie

[Decaillot-Laulagnet 1999] Decaillot-Laulagnet A.-M., *Edouard Lucas (1842-1891) : le parcours original d'un scientifique français dans la deuxième moitié du XIXè siècle*, Thèse de doctorat, Université René Descartes (Paris V), Décembre 1999.

Decorps-Foulquier, Micheline

[Decorps-Foulquier 2015] Decorps-Foulquier M., *Apollonius et le Traité des Coniques*, Images des Mathématiques CNRS, Section Histoire des Mathématiques, 26 Avril 2015. Consultable en ligne : `http://images.math.cnrs.fr/Apollonius-et-le-traite-des.html`.

Del Centina, Andrea

[Del Centina 2002] Del Centina A., The manuscript of Abel's Parisian memoir found in its entirety, *Historia Mathematica*, Vol. 29 (2002), pp.65-69.

Delcourt, Jean

[Delcourt 2011] Delcourt J., Analyse et géométrie, histoire des courbes gauches De Clairaut à Darboux, *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 65 (2011), pp.229-293.

[Delcourt 2014] Delcourt J., *Annales de Gergonne et Nouvelles annales de mathématiques : de la géométrie élémentaire à la géométrie supérieure*, in : [**Gerini Verdier 2014**], pp.183-200.

Demidov, Sergei S.

[Demidov 1982] Demidov S.S., The Study of Partial Differential Equations of the First Order in the 18th and 19th Centuries, *Archive for History of Exact Sciences*, Vol.26 N. 4 (1982), pp. 325-350.

Detlefsen, Michael

[Detlefsen 1992] Detlefsen M., Poincaré against the Logicians, *Synthese*, Vol. 90 (1992), pp. 349-378.

[Detlefsen 1993] Detlefsen M., *Logicism and the Nature of Mathematical Reasoning*, in : Irvine A., Wedekind G. (Eds.), *Russell and Analytical Philosophy*, Toronto (Toronto University Press), 1993, pp. 265–292.

Dhombres, Jean

[Dhombres 1992] Dhombres J., *L'Ecole normale de l'an III. Vol.1, Leçons de mathématiques : Laplace, Lagrange, Monge*, Paris (Editions Rue d'Ulm), 1992.

[Dhombres 1994] Dhombres J., Le journal professionnel au xixe siècle : enjeux généraux d'une enquête en cours, *Rivista di storia della scienza*, II, 2 (2), pp.99-136

Dieudonné, Jean

[Dieudonné 1978] Dieudonné J., *Abrégé d'histoire des mathématiques*, Paris (Hermann), 2 volumes, 1978.

Dingeldey, Friedrich

[Dingeldey 1903] Dingeldey F., *Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme*, In : *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*, Band 3-2-1 (Geometrie), Leipzig (Teubner), 1903, pp.1-161.

Dini, Ulysse

[Dini 1878] Dini U., *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reale*, Pisa, 1878.

Dugac, Pierre

[Dugac 1973] Dugac P., Elements d'analyse de Karl Weierstrass, *Archive for History of Exact Sciences*, 10 (1973), pp.41-176.

[Dugac 1980] Dugac P., Histoire du théorème des accroissements finis, *Archives internationales d'Histoire des Sciences*, 30 (1980), pp.86-101.

[Dugac 2003] Dugac P., *Histoire de l'Analyse, autour de la notion de limite et de ses voisinages*, Paris (Vuibert), 2003.

Dupin, Charles

[Dupin 1813] Dupin C., *Développements de Géométrie*, Paris (Courcier), 1813. Disponible en ligne : https://archive.org/details/dveloppementsde02dupigoog.

[Dupin 1819] Dupin C., *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge*, Paris (Bachelier), 1819. Disponible en ligne : books.google.fr/books?id=KxxVAAAAcAAJ.

[Dupin 1822] Dupin C., *Applications de Géométrie et de Méchanique*, Paris (Bachelier), 1822. Disponible en ligne : https://books.google.fr/books?id=pw8OAAAAQAAJ.

Duruy, Victor

[Duruy 1868a] Duruy V., *Rapport à l'Empereur à l'appui de deux projets de décrets relatifs aux laboratoires d'enseignement et de recherches et à la création d'une école pratique des Hautes Etudes*, Plombières, 31 Juillet 1868.

[Duruy 1868b] Duruy V., *Rapport présenté à l'Empereur par le ministre de l'instruction publique sur la situation de l'enseignement supérieur 1865-1868.*, Paris (Imprimerie Impériale), Décembre 1868.

[Duruy 1901] Duruy V., *Notes et Souvenirs*, Volume 1, Paris (Hachette), 1901.

Ecole des Chartes

[Chartes 1869] Bibliothèque de l'Ecole des Chartes, Vol. 30, Issue 30, 1869.

Ecole Normale Supérieure

[Ecole Normale 1895] Le Centenaire de l'Ecole Normale (1795-1895), Paris (Hachette), 1895.

Ecole Pratique des Hautes Etudes

[Section Math. EPHE 1871] Section des sciences mathématiques de l'EPHE. *Rapport sur l'Ecole Pratique des Hautes Etudes. Section des Sciences. 1871-1872*, 1871, pp. 63-65.

[Section Hist. EPHE 1872] Section des sciences philologiques et historiques de l'EPHE, *Rapport sur l'Ecole Pratique des Hautes Etudes. Section des sciences philologiques et historiques de l'EPHE. 1868-1872.*, 1872.

[Section Math. EPHE 1873] Section des sciences mathématiques de l'EPHE. Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, *Rapport sur l'Ecole Pratique des Hautes Etudes. 1873-1874.*, 1873, pp. 1-2.

[Section Hist. EPHE 1893] Section des sciences philologiques et historiques de l'EPHE, *Bibliothèque de l'Ecole des Hautes Etudes. Sciences Philologiques et historiques. Centième fascicule. Documents pour servir à l'histoire de la section des sciences historiques et philologiques.*, Paris (Emile Bouillon), 1893.

[Section Hist. EPHE 1963] Section des sciences philologiques et historiques de l'EPHE. Documents relatifs à l'Ecole des Hautes Etudes, *Ecole pratique des hautes études. 4ème section, Sciences Philologiques et historiques. Annuaire 1963-1964* 1963, pp.9-17.

Edwards, Harold Mortimer

[Edwards 1998] Edwards H.M., Kummer and Kronecker, in : *Mathematics in Berlin*, Berlin (Springer), 1998, pp.61-70.

second Empire

[Empire 1869-01] *Exposé de la situation de l'Empire présenté au Sénat et au Corps législatif. Janvier 1869.*, Paris (Imprimerie Impériale), Janvier 1869.

[Empire 1869-11] *Exposé de la situation de l'Empire présenté au Sénat et au Corps législatif. Novembre 1869.*, Paris (Imprimerie Impériale), Novembre 1869.

Ehrhardt, Caroline

[Ehrhardt 2010a] Ehrhardt C., *Un concept mathématique, trois notions : Les groupes au XIXe siècle chez Galois, Cayley, Dedekind*, Image des Maths, Histoire des Mathématiques, 2010. Disponible en ligne : http://images.math.cnrs.fr/Un-concept-mathematique-trois.html.

[Ehrhardt 2010b] Ehrhardt C., Histoire sociale des mathématiques, *Revue de synthèse*, Vol. 131 Issue 4 (Décembre 2010), pp.489-493.

[Ehrhardt 2011a] Ehrhardt C., *D'un mémoire mathématique à une théorie. Réélaboration des travaux d'Evariste Galois au XIXème siècle*, Paris, Editions du CTHS, 2011.

[Ehrhardt 2011b] Ehrhardt C., *Evariste Galois : la fabrication d'une icône mathématique*, Paris, Editions EHESS, 2011.

[Ehrhardt 2012] Ehrhardt C., *Approche biographique et biographie en histoire des mathématiques : le cas d'Evariste Galois*, in : [**Nabonnand Rollet 2012**], pp. 95-118.

Epple, Moritz

[Epple 2003] Epple M., *The End of the Science of Quantity : Foundations of Analysis, 1860-1910*, in : [**Jahnke 2003**], Chap.10, pp.291,323.

Euclide, d'Alexandrie

[Euclide 1990] Euclide d'Alexandrie, *Les éléments. Vol.1, Livres I-IV, Géométrie plane.*, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, avec une introduction générale par Maurice Caveing, Paris (Presses Universitaires de France), 1990.

Fenoglio, Lorenza & Giacardi, Livia

[Fenoglio Giacardi 1991] Fenoglio L., Giacardi L., *La polemica Genocchi-Beltrami sulle superficie pseudosferiche : una tappa nella storia del concetto di superficie*, in : [**Conte Giacardi 1991**], pp.155-209.

Feynman, Richard

[Feynman 1980] Feynman R., *La nature de la physique*, Editions du Seuil, 1980.

Fiedler, Wilhelm

[Fiedler 1862] Fiedler W., Zur analytischen Behandlung der Oberflächen zweiter Ordnung insbesondere über homofocale und conjugirte Oberflächen, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Band 7 (1862), pp.285-313.

Fischer, Charles S.

[Fischer 1966] Fischer C.S., The death of a Mathematical Theory : a study in the sociology of knowledge, *Archive for History of Exact Sciences*, Vol.3 Issue 2 (1966), pp.137-159.

Fleury, Michel

[Fleury 1966] Fleury M., Une lettre de Victor Duruy à Edmond About (1868), *Ecole pratique des hautes études. 4ème section, Sciences historiques et philologiques.*, Annuaire 1966-1967 (1966), pp.43-48.

Folta, Jaroslav

[Folta 1981] Folta J., Life and scientific endeavour of Bernard Bolzano, In : Vojtech J. & Novak J. & Folta J. & Jarnik J., *Bolzano and the Foundations of Mathematical Analysis*, Prag (Society of Czechoslovak Mathematicians and Physicists), 1981. pp. 11-32.

Forsyth, Andrew Russell

[Forsyth 1956] Forsyth A.R., *A treatise on differential equations*, Sixth Edition (First edition : 1885), London (MacMillan & Co), 1956.

Fox, Robert

[Fox 2012] Fox R., *The Savant and the State : science and cultural politics in Nineteenth-Century France*, Baltimore (John Hopkins University Press), 2012.

Fox, Robert & Weisz, George

[Fox Weisz 1980] Fox R., Weisz G., *The Organization of Science and Technology in France 1808-1914*, Paris (Maison des sciences de l'homme), 1980.

Frédéricq, Paul

[Frédéricq 1883] Frédéricq P., *L'enseignement supérieur de l'Histoire à Paris. Notes et Impressions de voyage*, Paris, Typographie Georges Chamerot, 1883. Diponible en ligne : https://archive.org/details/lenseignementsu00frgoog.

Fricke, Robert

[Fricke 1913] Fricke R., *Elliptische Funktionen*, in : *Encyklopädie der mathematischen Wissenchaften* Band 2 Theile 3 (1913), pp.177-348.

Geiser, Carl Friedrich

[Geiser 1869] Geiser C.F., Ueber die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 70 (1869), pp.249-257.

Genocchi, Angelo

[Genocchi 1869] Genocchi A., Dei primi principii della meccanica e della geometria in relazione al postulato d'Euclide., *Atti Accad. Reale Sci. Torino*, Vol. 2 No.3 (1869), pp.153-189.

[Genocchi 1875] Genocchi A., Sur la rectification des ovales de Descartes, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, Tome 80 (1875 1er Semestre), pp.112-115.

Gerini, Christian

[Gerini 2013] Gerini C., *Approche transdisciplinaire d'un journal polymorphe. Les Annales de Gergonne, premier grand journal de l'histoire des mathématiques*, in : [**Rey 2013a**], pp. 397-418.

[Gerini 2014] Gerini C., *Les Annales de mathématiques pures et appliquées de Gergonne et l'émergence des journaux de mathématiques dans l'Europe du XIXème siècle*, in : [**Gerini Verdier 2014**], pp.5-36.

Gerini, Christian & Verdier, Norbert

[Gerini Verdier 2014] Gerini C., Verdier N., L'émergence de la presse mathématique en Europe au 19ème siècle, *Cahiers de Logique et d'Epistémologie*, Volume 19, Milton Keynes U.K. (Lightning Source), 2014.

Geslot, Jean-Charles

[Geslot 2009] Geslot J.-C., *Victor Duruy. Historien et ministre (1811-1894)*, Villeneuve d'Ascq (P.U. du Septentrion), 2009.

Goldstein, Catherine & Schappacher, Norbert & Schwermer, Joachim

[Goldstein Schappacher Schwermer 2007] Goldstein C. & Schappacher N. & J. Schwermer, *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin (Springer), 2007.

Ghys, Etienne

[Ghys 2011] Ghys E., Gaspard Monge, *Image des Mathématiques*, CNRS, 2011. Article en ligne : `images.math.cnrs.fr/Gaspard-Monge.html`.

[Ghys 2012] Ghys E., Gaspard Monge, *Image des Mathématiques*, CNRS, 2012. Article en ligne : `http://images.math.cnrs.fr/Gaspard-Monge,1094.html`.

Giacardi, Livia

[Giacardi 1992] Giacardi L., La corrispondenza fra Jules Hoüel e Luigi Cremona (1867-1878), in : La corrispondenza di Luigi Cremona (1830-1903), *Quaderno della Rivista di Storia della Scienza*, vol. I n.24 (1992), Università di Roma "La Sapienza", pp. 77-88.

Gilbert, Philippe Louis

[Gilbert 1872a] Gilbert P., *Cours d'analyse infinitésimale. Partie élémentaire*, Louvain (Peeters), 1872.

[Gilbert 1872b] Gilbert P., Rapport de M. Gilbert : Note sur les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre par M. P. Mansion, *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, XXXIV n.8 (2) (Août 1872), pp. 142-146.

[Gilbert 1873a] Gilbert P., Mémoire sur l'existence de la dérivée dans les fonctions continues, *Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie de Belgique*, XXIII (1873), pp. i-vi, 1-31.

[Gilbert 1873b] Gilbert P., Rectification au sujet d'un mémoire précédent, *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, XXXV (2) (1873), pp. 709-717.

Gispert, Hélène

[Gispert 1983] Gispert H., Sur les fondements de l'analyse en France, *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 28 (1983) pp.37-106.

[Gispert 1984] Gispert H., Image des mathématiques italiennes en 1870 dans le Bulletin des Sciences Mathématiques, *Rivista di Storia delle Scienze*, Vol. 1 (2) (1984), pp. 257-278.

[Gispert 1985] Gispert H., Sur la production mathématique française en 1870 dans le Bulletin des Sciences Mathématiques, *Archives Internationales d'histoires des sciences*, 114-115 Vol. 235 (1985) pp. 380-399.

[Gispert 1987] Gispert H., La correspondance de G. Darboux avec J. Hoüel. Chronique d'un rédacteur (déc. 1869-nov. 1871), *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, tome 8 (1987), pp.67-202.

[Gispert 1989] Gispert H., L'enseignement scientifique supérieur en France et ses enseignants (1860-1900) : les mathématiques, *Histoire de l'Education*, tome 41 (1989), pp.47-78.

[Gispert 1990] Gispert H., Principes de l'analyse chez Darboux et Hoüel (1870-1880) : textes et contextes, *Revue d'histoire des sciences*, Vol. 43 Issue 2 (1990), pp.181-220.

[Gispert 1991] Gispert H., *Le milieu mathématique français et ses journaux en France et en Europe (1870-1914)*, in : E. Aussejo & M. Hormigon (eds), *Messengers of Mathematics : European mathematical journals 1800-1946*, (Madrid : Siglo XXI de Espana Editores, 1993), pp. 133-156. Prépublication du Symposium "Mathematical Journalism", Saragosse, Septembre 1991, disponible en ligne : http://sites.mathdoc.fr/PMO/PDF/G_GISPERT-51.pdf.

[Gispert 1996a] Gispert H., Le Bulletin de la Société mathématique de France, le journal de recherche d'une communauté (1872-1914), *Rivista di Storia della Scienza*, (S. II), Tome 4 (2) (1996), pp. 1-22.

[Gispert 1996b] Gispert H., *Une comparaison des journaux français et italiens dans les années 1860-1875*, in : [**Goldstein Gray Ritter 1996**], Chap.17 : pp. 391-408.

[Gispert 2001] Gispert H., *The German and French Editions of the Klein-Molk Encyclopedia : Contrasted Images*, in : [**Bottazzini Dalmedico 2001**], Chap. 5, pp. 93-112.

[Gispert 2012] Gispert H., *L'entreprise biographique à l'épreuve : écueils, défis, atouts du cas d'Emile Borel*, in : [**Nabonnand Rollet 2012**], pp. 139-176.

Gispert, Hélène & Nabonnand, Philippe & Peiffer, Jeanne

[Gispert Nabonnand Peiffer 2015] Gispert H., Nabonnand P., Peiffer J., Circulations et échanges mathématiques (18è-20è siècles), *Philosophia Scientiae*, 19-2 (2015), Circulations et échanges mathématiques, pp. 7-16.

Gmeiner, Josef Anton

[Gmeiner 1906] Gmeiner J.A., Otto Stolz, *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker vereinigung*, 15 (1906), pp.309-322.

Godeaux, Lucien

[Godeaux 1928] Godeaux L., Le mathématicien Adolphe Quételet (1796-1874), *Bulletin de la Société Belge d'Astronomie*, Vol.44 (1928), pp.60-64.

Goldstein, Catherine

[Goldstein 2010] Goldstein C., Sur quelques pratiques de l'information mathématique, *Philosophia Scientiae*, 5 (2), 2001, pp. 125-160.

Goldstein, Catherine & Gray, Jeremy & Ritter, Jim

[Goldstein Gray Ritter 1996] Goldstein C., Gray, J., Ritter J. (eds.), *L'Europe mathématique / Mathematical Europe*, Paris, Editions de la Maison des Sciences de l'Homme, 1996.

Gournerie, Jules-Antoine-René Maillard De La

[Gournerie 1869] Gournerie J.A.R.M, Mémoire sur les lignes spiriques, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2nde Série Tome 14 (1869), pp.9-64,103-138.

Goursat, Edouard

[Goursat 1898] Goursat E., *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Paris (A. Hermann), 1898. Disponible en ligne : archive.org/details/leonssurlintgra01gourgoog.

Gow, Rod

[Gow 1997] Gow R., George Salmon 1819-1904 : his mathematical work and influence, *Irish Mathematical Society Bulletin*, Vol. 39 (1997), pp.26-76.

Grattan-Guinness, Ivor

[Grattan-Guinness 1980] Grattan-Guinness I., *From the Calculus to Set Theory 1630-1910*, London (Taylor and Francis Ltd), 1980.

[Grattan-Guinness 1990] Grattan-Guinness I., *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840 : From the Calculus and Mechanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics*, Basel Boston Berlin (Birkhäuser Verlag), 1990.

[Grattan-Guinness 1997] Grattan-Guinness I., *The Rainbow of Mathematics : A History of the Mathematical Sciences.*, New-York (Norton), 1997.

Gray, Jeremy

[Gray 1979] Gray J., Non-Euclidean Geometry - A re-interpretation, *Historia Mathematica*, Vol.6 (1979), pp.236-258.

[Gray 2006] Gray J., *János Bolyai, Non-Euclidean Geometry, and the Nature of Space*, Cambridge (Burndy Library Publications), 2006.

[Gray 2007] Gray J., *Worlds out of nothing ; a course in the History of Geometry in the 19th century*, London (Springer), 2007.

[Gray 2008] Gray J., *Plato's Ghost ; the modernist transformation of mathematics*, New-Jersey (Princeton University Press), 2008.

Guichard, Claude

[Guichard 1917] Guichard C., Gaston Darboux, *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, 2ème année, n.7, 15 Avril 1917, pp. 198-200.

Guitart, René

[Guitart 2009] Guitart R., Les coordonnées curvilignes de Gabriel Lamé, représentations des situations physiques et nouveaux objets mathématiques, *Actes du Colloque International Gabriel Lamé Les pérégrinations d'un ingénieur du XIXe siècle*, *Bulletin de la SABIX* Tome 44 (octobre 2009), pp. 119-129

Haag, Jules

[Haag 1911] Haag J., Sur les coordonnées pentasphériques générales, *Nouvelles Annales de mathématiques*, Série 4 Vol. 11 (1911), pp.49-67.

Hadamard, Jacques

[Hadamard 1959] Hadamard J., *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Paris (Librairie scientifique, Albert Blanchard), Première édition française revue et augmentée par l'auteur, 1959.

Halsted, George Bruce

[Halsted 1901] Halsted G.B., Biography : Franz Schmidt., *The American Monthly*, Vol. 8, N. 5 (Mai 1901), pp.107-110.

Hamilton, William Rowan

[Hamilton 1830] Hamilton W.R., Supplement to an Essay on the Theory of Systems of Rays, *Transactions of the Royal Irish Academy*, Vol. 16, part 1 (1830), pp. 1-61.

[Hamilton 2000] Hamilton W.R., *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton*, Vol.IV, Cambridge (University Press), 2000.

Hankel, Hermann

[Hankel 1870] Hankel H., *Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen* Tübingen (L.F. Fues), 1870.

Hawkins, Thomas

[Hawkins 1980] Hawkins T., *The origins of modern theories of integration*, In : [**Grattan-Guinness 1980**], Chap.4, pp. 149-180.

[Hawkins 1991] Hawkins T., Jacobi and the birth of lie's theory of groups, *Archive for History of Exact Sciences*, Volume 42, Issue 3 (1991), pp. 187-278.

[Hawkins 1994] Hawkins T., The birth of lie's theory of groups, *The Mathematical Intelligencer*, Volume 16, Issue 2 (March 1994), pp. 6-17.

[Hawkins 2005] Hawkins T., Frobienius, Cartan, and the Problem of Pfaff, *Archive for History of Exact Sciences*, Volume 59 (2005), pp. 381-436.

Heine, Eduard

[Heine 1870] Heine E., Über trigonometrische Reihen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 71 (1869), pp.353-365.

[Heine 1872] Heine E., Die Elemente der Funktionenlehre, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 74 (1872), pp.172-188.

Heinzmann, Gerhard

[Heinzmann 1985] Heinzmann, G., *Entre intuition et analyse : Poincaré et le concept de prédicativité*, Paris (Blanchard), 1985.

Henry, Philippe & Nabonnand, Philippe

[Henry Nabonnand 2016] Henry P., Nabonnand P., *Conversation avec Jules Hoüel, regards sur la géométrie non euclidienne et l'analyse infinitésimale vers 1875*, Nancy (Archives Henri Poincaré), 2010-2016, ouvrage à paraître.

Hermite, Charles

[Hermite 1984] Hermite C., Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874-1883), *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, tome 5 (1984), pp.49-285.

Hilbert, David

[Hilbert 1993] Hilbert D., *Theory of Algebraic Invariants*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge (Cambridge University Press), 1993.

Hilbert, David & Cohn-Vossen, Stephan

[Hilbert Cohn-Vossen 1932] Hilbert D., Cohn-Vossen S., *Anschauliche Geometrie*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band XXXVII (1932), Berlin (Julius Springer), 1932.

Hill, Micaiah John Muller

[Hill 1887] Hill M.J.M., On the c- and p-discriminants of Ordinary Integrable Differential Equations of the First Order, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. 19 (1887), pp. 561-594.

Hilton, Harold

[Hilton 1920] Hilton H., *Plane Algebraic Curves*, Oxford (Clarendon Press), 1920.

Histoire.fr

[Histoire-fr.com] *L'apogée du second empire*, [en ligne] http://www.histoire-fr.com/second_empire_empire_liberal_1.htm (consulté en Novembre 2014).

[Histoire-fr.com1869] *L'empire menacé* [en ligne] http://www.histoire-fr.com/second_empire_declin_1.htm (consulté en Novembre 2014).

Hoüel, Jules

[Hoüel 1866] Hoüel J., *Etudes géométriques sur la théorie des parallèles*, Paris (Gauthier-Villars), 1866. Traduction de [**Lobatchevsky 1840**] ; également parue dans *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, Tome 4 (1867), pp.83-128.

[Hoüel 1867] Hoüel J., La science absolue de l'espace, *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, Tome 5 (1867), pp.189-248. Traduction de l'appendice [**Bolyai J. 1832**].

[Hoüel 1869] Hoüel J., Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, traduction française de [**Imchenetsky 1864**], *Archiv der Mathematik und Physik*, Band 50 (1869), pp.278-474.

[Hoüel 1870a] Hoüel J., Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe des parallèles, dit Postulatum d'Euclide, *Nouvelles Annales*, 2ème série Vol. 9 (1870), pp.93-96. Egalement publié dans *Giornale di Matematiche*, Vol. 8 (1870), pp.84-89.

[Hoüel 1870b] Hoüel J., Analyse par Jules Hoüel de l'ouvrage de Gaston Darboux intitulé « Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques ... » , *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, Tome 8 (1870), pp. 120-122, 13 Juin 1870.

[Hoüel 1870c] Hoüel J., Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie, *Annali di matematica*, Serie 2 Vol.3 (1870), pp.309–327, traduction française de [**Riemann 1854b**].

[Hoüel 1870d] Hoüel J., Notice sur la vie et les travaux de N.-I. Lobatschefsky, *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, Tome 1 (1870), Octobre 1870, pp. 324-328.

[Hoüel 1872] Hoüel J., Etude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes, traduction française de [**Imchenetsky 1868**], *Archiv der Mathematik und Physik*, Band 54 (1872), pp.209-360.

Houzel, Christian

[Houzel 1978] Houzel C., *Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes*, in : [**Dieudonné 1978**], Vol. II pp.1-113.

Hulin, Nicole

[Hulin 1982] Hulin N., A propos de l'enseignement scientifique : une réforme de l'enseignement secondaire sous le Second Empire : la « bifurcation » (1852-1864), *Revue d'histoire des sciences*, tome 35, n.3 (1982), pp. 217-245.

[Hulin 1985] Hulin N., L'organisation de l'enseignement scientifique au milieu du xixe siècle : L. Pasteur, témoin et acteur, *Revue du Palais de la Découverte*, Vol. 126 (mars 1985), pp. 51-73.

[Hulin 1986] Hulin N., La rivalité Ecole normale-Ecole polytechnique. Un antécédent : l'action de L. Pasteur sous le Second Empire, *Histoire de l'Education*, Vol. 30 (mai 1986), pp. 71-81.

[Hulin 1993] Hulin N., Edouard Branly, la formation d'un physicien parmi d'autres, *Revue d'histoire des sciences*, Tome 46 n.1 (1993), pp. 7-26.

Imchenetsky, Vassili Grigorevitch

[Imchenetsky 1864] Imchenetsky V.G., Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, *Mémoires de l'Université de Kazan*, Tome 2 (1864), Kazan, Russie, 1864, pp. 1-172.

[Imchenetsky 1868] Imchenetsky V.G., Etudes sur les méthodes d'intégrations des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes, *Mémoires de l'Université de Kazan*, Tome 3 (1868), Kazan, Russie, 1868, pp. 111-256.

Jacobi, Carl Jacob

[Jacobi 1838] Jacobi C.J., Sur la réduction de l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre entre un nombre quelconque de variables à l'intégration d'un seul système d'équations différentielles ordinaires, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, Tome 3 (1838) pp. 161-201.

[Jacobi 1839] Jacobi C.J., Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 19 (1839), pp. 309-313. Traduction française : *Journal de mathématiques pures et appliquées*, Tome 6 (1841) pp. 267-272.

[Jacobi 1842] Jacobi C.J., Demonstratio Nova Theorematis Abeliani, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 24 (1842), pp.28-35.

[Jacobi 1846] Jacobi C.J., Über die Additionstheoreme der Abelschen Integrale zweiter und dritter Gattung, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 30 (1846), pp.121-126.

Jahnke, Niels

[Jahnke 2003] Jahnke H. N., *A History of Analysis* History of Mathematics Vol. 24, American Mathematical Society & London Mathematical Society, 2003.

Johnson, William Woolsey

[Johnson 1887] Johnson W.W., On singular solutions of differential equations of the first order, *Annals of Mathematics*, Vol. II N. 2 (April 1887), pp.33-38.

Jordan, Camille

[Jordan 1884] Jordan C., Rapport du Prix Petit d'Ormoy (Sciences Mathématiques) de 1884, *Comptes-rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences*, Tome 98 (1884 1er Semestre), pp.1159-1164 ; 5 Mai 1884.

Karady, Victor

[Karady 1980] Karady V., *Educational qualifications and university careers in science in nineteenth-century France*, in : [**Fox Weisz 1980**, 95-124].

Klein, Felix

[Klein 1926] Klein F., *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band XXIV (1926), Berlin (Julius Springer), 1926.

Kline, Morris

[Kline 1972] Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times : Volume 3*, New York / Oxford (Oxford University Press), 1972.

[Kline 1990] Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, réédition en 1 volume, New-York (Oxford University Press), USA, 1990.

Knörrer, Horst

[Knörrer 1986] Knörrer H., *Die Fresnelsche Wellenfläche*, in : Knörrer H., Schmidt C.-G., Schwermer J., Slodowy P., *Mathematische Miniaturen 3 : Arithmetik und Geometrie. Vier Vorlesungen*, Basel (Springer), 1986, Chap.4 pp. 115-139.

Kolmogorov, Andrei ; Yushkevich Adolf-Andrei

[Kolmogorov Yushkevich 1996] Kolmogorov A., Yushkevich A.-A., *Mathematics of the 19th century : Geometry, Analytic Function Theory*, Basel (Birkhauser Verlag), 1996.

Kovalevskaya, Sofia

[Kovalevskaya 1875] Kovalevskaya S., Zur Theorie der partiellen Differentialgleichung, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 80 (1875), pp.1-32.

Koyré, Alexandre

[Koyré 1961] Koyré A., *Etudes d'histoire de la pensée philosophique*, Paris (Gallimard), Première parution, 1971.

Kracht, Manfred

[Kracht 1990] Kracht M., E. W. von Tschirnhaus : His Role in Early Calculus and His Work and Impact on Algebra, *Historia Mathematica*, Vol. 17 (1990) pp.16-35.

Kummer, Ernst Eduard

[Kummer 1847] Kummer E.E., Ueber Systeme von Curven, welche einander überall rechtwinklig durchschneiden, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 35 (1847), pp.5-12.

[Kummer 1860] Kummer E.E., Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensystem, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 57 (1860), pp.189-230.

[Kummer 1863] Kummer E.E., Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen, *Monatsberichte der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1863, pp.324-336.

[Kummer 1864] Kummer E.E., Ueber die Flächen vierten Grades, mit sechzehn singulären Punkten, *Monatsberichte der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1864, pp.246-259.

Lagrange, Joseph-Louis

[Lagrange 1774] Lagrange J.-L., Sur les intégrales particulières des équations différentielles, *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 1774 (1776), In : Lagrange, *œuvres*, Vol.IV, pp.5-108.

[Lagrange 1806] Lagrange J.-L., *Leçons sur le Calcul des Fonctions*, 2nde édition, Paris (Courcier), 1806. In : Lagrange, *œuvres*, Vol.X, pp.5-451.

Laguerre, Edmond

[Laguerre 1853] Laguerre E., Sur les foyers, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1ère Série, Tome 12 (1853), pp.225-226.

[Laguerre 1865] Laguerre E., Théorèmes généraux sur les courbes planes algébriques, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* t.60, 9 Janvier 1865, pp.70-75.

[Laguerre 1868a] Laguerre E., Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques, *Bulletin de la Société Philomathique de Paris* Série 6 t.5, Janvier 1868, pp.17-21.

[Laguerre 1868b] Laguerre E., Sur les sections circulaires des surfaces anallagmatiques, *Bulletin de la Société Philomathique de Paris* Série 6 t.5, Mars 1868, pp.48-52.

[Laguerre 1870] Laguerre E., Sur l'emploi des imaginaires en géométrie, *Nouvelles Annales de Mathématiques* Série 2 t.9 (1870), pp.163-175,241-254.

[Laguerre 1871] Laguerre E., Recherches géométriques sur la cyclide, *Bulletin de la Société Philomathique de Paris* Série 6 t.7, Octobre 1871, pp.209-219.

[Laguerre 1872] Laguerre E., Sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace, *Nouvelles Annales de Mathématiques* Série 2 t.11 (1872), pp.14-21,108-117,241-254.

Lamé, Gabriel

[Lamé 1833] Lamé G., Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides en équilibre de température, *Annales de Chimie et de Physique*, Tome 53 (1833), pp.190-204.

[Lamé 1834] Lamé G., Mémoire sur les lois de l'équilibre du fluide éthéré, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, tome 14 (Cahier 23) (1834), pp.191-289.

[Lamé 1837] Lamé G., Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome 2 (1837), pp.147-183.

[Lamé 1840] Lamé G., Mémoire sur les coordonnées curvilignes, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome 5 (1840), pp.313-347.

[Lamé 1843] Lamé G., Mémoire sur les surfaces orthogonales et isothermes, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome 8 (1843), pp.397-434.

[Lamé 1857] Lamé G., *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes*, Paris (Mallet-Bachelier), 1857.

[Lamé 1859] Lamé G., *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*, Paris (Mallet-Bachelier), 1859.

Lampe, Emil

[Lampe 1903] Lampe E., Das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Rückblick und Ausblick, *Atti del congresso internazionale di scienze storiche* Vol. XII (1904), pp. 97-104.

Laplace, Pierre-Simon de

[Laplace 1772] Laplace P.S., Sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les équations séculaires des planètes, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, 1772 (1775), pp. 343-489.

Lê, François

[Lê 2015] Lê F., *Vingt-sept droites sur une surface cubique : rencontres entre groupes, équations et géométrie dans la deuxième moitié du XIXème siècle*, Thèse de Doctorat soutenue le 29 Juin 2015, direction : Catherine Goldstein, Université Pierre et Marie Curie.

Lebesgue, Henri

[Lebesgue 1922] Lebesgue H., *Notice sur les travaux scientifiques*, Toulouse (Edouard Privat), 1922.

[Lebesgue 1991] Lebesgue H., Lettres d'Henri Lebesgue à Emile Borel, *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, Tome 12 (1991), pp. 1-506.

Lebon, Ernest

[Lebon 1910] Lebon E., *Gaston Darboux. Biographie, Bibliographie analytique des écrits*, Savants du Jour, Paris (Gauthier-Villars), 10 Janvier 1910.

Legendre, Adrien-Marie

[Legendre 1825] Legendre A.-M., *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes*, Paris (Huzard-Courcier), 3 Volumes, 1825,1826,1828.

Lévy, Lucien

[Lévy 1892] Lévy L., Sur les systèmes triplement orthogonaux où les surfaces d'une même famille sont égales entre elles, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4ème série Tome 8 (1892), pp.351-384.

Lévy, Maurice

[Lévy 1867] Lévy M., *Sur une transformation des coordonnées curvilignes orthogonales et sur les coordonnées curvilignes comprenant une famille quelconque de surfaces du second ordre*, Thèse de Doctorat soutenue en Sorbonne en 1867 sous la direction de Michel Chasles. Disponible en ligne : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1484946.

Libermann, Paulette

[Libermann 1978] Libermann P., *Géométrie différentielle*, in : [**Dieudonné 1978**, Chap.IX], pp. 357-178.

Lie, Sophus

[Lie 1872] Lie S., Ueber Complexe, insbesondere Linien und Kugelcomplexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differential-Gleichungen, *Mathematische Annalen*, Band 5 (1872), pp.145-208.

[Lie 1875] Lie S., Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen, *Mathematische Annalen*, Band 8 (1875), pp.215-303.

Lipschitz, Rudolf

[Lipschitz 1872] Lipschitz R., Extrait d'une lettre de M. R. Lipschitz, *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, Tome 3 (1872), Novembre 1872, pp.349-352.

[Lipschitz 1873] Lipschitz R., Extrait de six mémoires publiés dans le Journal de Mathématiques de M. Borchardt, *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, Tome 4 (1873), pp.97, 142, 212, 297, 308, 314.

[Lipschitz 1874] Lipschitz R., Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 78 (1874), pp. 1-45.

[Lipschitz 1986] Lipschitz R., *Briefwechsel mit Cantor, Dedekind, Helmholtz, Kronecker, Weierstrass und anderen.*, edited by W. Scharlau, Dokumente zur Geschichte der Mathematik, Vol.2 (1986), Wiesbaden (Springer), 1986.

Lionnet, Eugène

[Lionnet 1850] Lionnet E., Note sur la théorie des parallèles, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, Tome 9 (1850), p. 37.

[Lionnet 1870] Lionnet E., Sur le postulatum d'Euclide, *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris*, Tome 70 (1870), pp. 31-32.

Liouville, Joseph

[Liouville 1834] Liouville J., Mémoire sur les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce considérées comme fonctions de leur amplitude, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Cahier 23 (Tome 14) (1834), pp.37-83.

[Liouville 1844] Liouville J., Remarques à l'occasion d'une note de M. Chasles, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, Tome 19 (1844 2ème Sem.), pp.1261-1263.

[Liouville 1846] Liouville J., Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, Tome 11 (1846), pp.345-378.

[Liouville 1847a] Liouville J., Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, Tome 12 (1847), pp.410-444.

[Liouville 1847b] Liouville J., Note au sujet d'un Mémoire de M. Chasles, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, Tome 12 (1847), p.255.

[Liouville 1850] Liouville J., Théorème sur l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2)$, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, Tome XV (1850), p.103.

[Liouville 1851] Liouville J., Sur un théorème de M. Chasles, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, Tome 16 (1851), pp.6-8.

Lobatchevsky, Nikolai Ivanovich

[Lobatchevsky 1840] Lobatchevsky N.I., *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, Berlin, 1840.

[Lobatchevsky 1855] Lobatchevsky N.I., *Pangéométrie*, Mémoires de l'Université de Kazan, Tome 1 (1855), Kazan, 1855.

Locqueneux, Robert

[Locqueneux 2013] Locqueneux R., *L'empathie comme méthode en histoire des sciences*, in : [**Rey 2013a**] pp.185-200.

Lorenat, Jemma

[Lorenat 2015] Lorenat J., Figures real, imagined, and missing in Poncelet, Plücker and Gergonne, *Historia Mathematica* 42 (2015), pp.155-192.

[Lorenat 2016] Lorenat J., Synthetic and analytic geometries in the publications of Jakob Steiner and Julius Plücker (1827-1829), *Archives for History of Exact Sciences* 70 (2016), pp.1-50.

Loria, Gino

[Loria 1896] Loria G., *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche*, Torino (Carlo Clausen), 1896. Disponible en ligne : https://archive.org/details/ilpassatoedilpr00lorigoog.

[Loria 1948] Loria G., Perfectionnements, Évolution, Métamorphoses du concept de "coordonnées" : Contribution à l'Histoire de la Géométrie Analytique, *Osiris*, Vol. 8 (1948), pp.218-288.

Loriga, Sabina

[Loriga 1996] Loriga S., *La biographie comme problème*, in : Jacques Revel (Ed.), *Jeux d'échelles, la micro-analyse à l'expérience*, Paris (Gallimard/Le Seuil), 1996, pp. 209-231.

Lundgreen, Peter

[Lundgreen 1980] Lundgreen P., *The organization of science and technology in France : a German perspective*, in [**Fox Weisz 1980**, 311-323].

Lützen, Jesper

[Lützen 1990] Lützen J., *Joseph Liouville 1809-1882, Master of Pure and Applied Mathematics*, New-York (Springer Verlag), 1990.

[Lützen 1995] Lützen J., Interactions between mechanics and differential geometry in the 19th century, *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 49 (1995), pp.1-72.

[Lützen 2003] Lützen J., *The Foundation of Analysis in the 19th Century* In : [**Jahnke 2003**], Chapter 6, pp.155-196.

MacCullagh, James

[MacCullagh 1843] MacCullagh J., On the surfaces of the Second Order, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, Vol.2 (1840-1844), pp.446-507 (December 1843). Available online : https://www.jstor.org/stable/pdf/20520180.pdf

Magnus, Ludwig Immanuel

[Magnus 1825] Magnus L.I., Géométrie des surfaces courbes. Théorèmes sur l'hyperboloïde à une nappe et sur la surface conique du second ordre, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, Vol. 16 (1825/26), pp.33-39.

Mancosu, Paolo

[Mancosu 2010] Mancosu P., Mathematical Style, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Spring 2010 edition, Edward N. Zalta (ed.). Disponible en ligne : http://plato.stanford.edu/archives/spr2010/entries/mathematical-style/.

Mannheim, Amédée

[Mannheim 1860] Mannheim A., Application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'étude de la surface enveloppe d'une sphère tangente à trois sphères données, *Nouvelles annales de mathématiques*, 1ère série, tome 19 (1860), pp.67-69.

[Mannheim 1871] Mannheim A., Démonstration géométrique d'une propriété de la transformation par rayons vecteurs réciproques, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2ème série, tome 16 (1871), pp.317-320.

Mansion, Paul

[Mansion 1872] Mansion P., Note sur les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre, *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*, XXXIV (2) (1872), pp.149-169.

[Mansion 1873] Mansion P., Notice sur les travaux de Jules Plücker, *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, Tome 5 (1873), pp.313-319.

Maronne, Sébastien

[Maronne 2010] Maronne S., The ovals in the Excerpta Mathematica and the origins of Descartes' method of normals, *Historia Mathematica*, Vol. 37 (2010), pp.460-484.

Maxwell, James Clerk

[Maxwell 1868] Maxwell J.C., On the Cyclide, *Quarterly Journal*, tome 9 (1869), pp. 111-126.

Mayer, Adolph

[Mayer 1872] Mayer A., Ueber unbeschränkt integrable Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen, *Mathematische Annalen*, Band 5 (1872) pp. 448-470.

[Mayer 1875] Mayer A., Directe Begründung der Theorie der Berührungstransformationen. Zusatz zu Lie'schen Abhandlung, *Mathematische Annalen*, Band 8 (1875) pp. 304-312.

Mazliak, Laurent & Tazzioli, Rossana

[Mazliak Tazzioli 2009] Mazliak L., Tazzioli R., *Mathematicians at War : Volterra and His French Colleagues in World War I*, New Studies in the History of Science and Technology, Springer, 2009.

Méray, Charles

[Méray 1869] Méray C., Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données, *Revue des Sociétés Savantes, Sciences mathématiques, physiques et naturelles*, Série 2 Vol.4 (1869), pp. 280-289.

Meschkowski, Herbert

[Meschkowski 1967] Meschkowski H., *Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors.*, Braunschweig (F. Vieweg und Sohn), 1967.

Meschkowski, Herbert & Nilson, Winfried

[Meschkowski Nilson 1991] Meschkowski, H. Nilson, W. *Georg Cantor : Briefe*, Berlin (Springer), 1991.

Meyer, Wilhelm Franz

[Meyer 1930] Meyer W.Fr., *Spezielle algebraische Flächen*, In : *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*, Band 3-2-2b (Geometrie), Leipzig (Teubner), 1928-30, pp.1533-1780.

Minarelli, Camillo

[Minarelli 1849] Minarelli C., Théorie des parallèles, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, Tome 8 (1849), pp.312-314.

Miquel, Pierre

[Miquel 2008] Miquel P., *Le Second Empire*, Paris (Perrin, Tempus), 2008.

Moigno, François (dit l'Abbé)

[Moigno 1844] Moigno F., *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral. Tome 2 : Calcul Intégral*, Paris (Bachelier), 1844.

Möbius, August Ferdinand

[Möbius 1827] Möbius A.F., *Der Barycentrische Calcul*, Leipzig (J.A. Barth), 1827. Disponible en ligne : https://books.google.fr/books?id=eFPluv_UqFEC.

Monge, Gaspard

[Monge 1781] Monge G., Mémoire sur la théorie des déblais et remblais, *Histoire de l'Académie royale des sciences avec les mémoires de mathématique et de physique tirés des registres de cette Académie*, 1781 (1784), pp.666-705. Disponible en ligne : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k35800/f796.

[Monge 1809] Monge G., *Applications de l'Analyse à la Géométrie, à l'usage de l'Ecole Impériale Polytechnique*, Paris (Bernard), 4ème édition, 1809 (1ère édition : 1795). Disponible en ligne : https://books.google.fr/books?id=ZmUSAAAAIAAJ.

Moore, Gregory H.

[Moore 2000] G.H. Moore, Historians and philosophers of logic : Are they compatible ? The Bolzano-Weierstrass theorem as a case study, *History and Philosophy of Logic* 20 (2000), pp. 169-180.

[Moore 2008] G.H. Moore, The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology, *Historia Mathematica* 35 (2008), pp. 220-241.

Moutard, Théodore Florentin

[Moutard 1864a] Moutard T.F., Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques, *Nouvelles annales de mathématiques*, 2ème série, tome 3 (1864), pp.306-309.

[Moutard 1864b] Moutard T.F., Sur les lignes de courbure d'une classe de surfaces du quatrième ordre, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* t.58, 1er Août 1870, p.243-244.

[Moutard 1864c] Moutard T.F., Sur les sufaces anallagmatiques du quatrième ordre, *Nouvelles annales de mathématiques*, 2ème série, tome 3 (1864), pp.536-539.

Müller, Felix

[Müller 1900] Müller F., *Vocabulaire Mathématique Français-Allemand et Allemand-Français, contenant les termes techniques employés dans les mathématiques pures et appliquées*, Leipzig (Teubner), 1900.

[Müller 1904] Müller F., Das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 1869-1904, *Bibliotheca mathematica* Folge 3, Band 5 (1904), pp. 292-297.

Nabonnand, Philippe

[Nabonnand 1995] Nabonnand P., Contribution à l'histoire de la théorie des géodésiques au XIXe siècle, *Revue d'Histoire des mathématiques*, Série 1 Tome 1 Numéro 2 (1995), pp.159-200.

[Nabonnand 2006] Nabonnand P., *Contributions à l'histoire de la géométrie projective au 19e siècle*, Document présenté pour l'HDR, 2006. Disponible en ligne : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01082207.

Nabonnand, Philippe & Rollet, Laurent

[Nabonnand Rollet 2012] Nabonnand P., Rollet L., *Les uns et les autres... Biographies et prosopographies en histoire des sciences*, Nancy (PUN, Editions Universitaires de Lorraine), 2012.

Neuenschwander, Erwin

[Neuenschwander 1979] Neuenschwander E., Der Nachlass von Casorati (1835-1890) in Pavia, *Archive for History of Exact Sciences* 19 (1) (1978/1979), pp. 1-89.

[Neuenschwander 1981] Neuenschwander E., Über die Wechselwirkungen zwischen der französichen Schule, Riemann und Weierstrass. Eine Übersicht mit zwei Quellenstudien, *Archive for History of Exact Sciences* 24 (1) (1981), pp. 221-255.

[Neuenschwander 1996] Neuenschwander E., *Riemann's Einführung in die Funktiontheorie*, Göttingen (Vandenhoeck & Ruprecht), 1996.

Ohrtmann, Carl

[Ohrtmann 1872] Ohrtmann C., *Das Problem der Tautochronen*, Berlin (Hayn), 1872.

Painvin, Louis-Félix

[Painvin 1854] Painvin L.-F., Thèse d'Astronomie : Recherche du dernier multiplicateur pour deux formes spéciales et remarquables des équations différentielles du problème des trois corps, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, Tome XIX (1854), p.88-111.

Pannier, Léopold

[Pannier 1875] Pannier L., Bibliothèque de l'Ecole des Hautes Etudes. Sciences historiques et philologiques, fascicules 2,5,7,8,11,13,16,18 et 19., *Bibliothèque de l'Ecole des Chartes* Tome 36, 1875, pp.481-487.

Parshall, Karen Hunger

[Parshall 1989] Parshall K.H., Toward a History of Nineteenth-Century Invariant Theory, in : McCleary J., Rowe D.E., *The history of Modern Mathematics*, T.1 Ideas and their Receptions, Boston San Diego New-York (Academic Press), 1989, pp. 157-206.

[Parshall 1999] Parshall K.H., Telling the Life of a Mathematician : The Case of J.J. Sylvester, *Revue d'Histoire des mathématiques*, Série 1 Tome 5 Numéro 2 (1999), pp. 281-298.

[Parshall 2004] Parshall K.H., Defining a Mathematical Research School : The Case of Algebra at the University of Chicago, 1892-1945, *Historia Mathematica*, Vol. 31 (2004), pp.263-278.

[Parshall 2006] Parshall K.H., *James Joseph Sylvester : Jewish mathematician in a Victorian world*, Baltimore (Johns Hopkins University Press), 2006.

Parshall, Karen Hunger ; Rowe, David E.

[Parshall Rowe 1994] Parshall K.H., Rowe D.E., *The emergence of the American Mathematical Research Community 1876-1900 : J.J. Sylvester, Felix Klein, and E.H. Moore*, History of Mathematics Vol.8, U.S.A. (American Mathematical Society), 1994.

Pasteur, Louis

[Pasteur 1868] Pasteur L., *Le budget de la science*, in : [**Pasteur 1939**, 199-204]. Initialement parue dans la "*Revue des cours scientifiques*", 1er février 1868, Année V, pp.137-139.

[Pasteur 1900] Pasteur L., Papiers. V. *Correspondance de Louis Pasteur. Lettres reçues. CLXXXI Bourgeois - Du Camp*, Paris (Bibliothèque Nationale de France), 1801-1900.

[Pasteur 1939] Pasteur L., *Oeuvres de Pasteur - Tome 7 - Réunies par Pasteur Vallery-Radot*, Paris (Masson), 1939.

Paty, Michel

[Paty 2013] Paty M., *Du style en sciences et en histoire des sciences*, in : [**Rey 2013a**] pp.57-88.

Paul, Harry

[Paul 1985] Paul H.W., *From knowledge to power : the rise of the science empire in France 1860-1939.*, Cambridge (Cambridge University Press), 1985.

Perelman, Chaïm

[Perelman 1992] Perelman C., *Traité de l'argumentation. La nouvelle réthorique*, Bruxelles (Université Libre de Bruxelles), 5ème édition, 1992.

Petri, Birgit & Schappacher, Norbert

[Petri Schappacher 2007] Petri B. & Schappacher N., *On Arithmetization* In [**Goldstein Schappacher Schwermer 2007**], Chapter 5, Section 2, pp.343-374.

Picard, Emile

[Picard 1917] Picard E., *Notice historique sur Gaston Darboux, lue à la Séance du 10 Décembre 1917*, Institut de France, 1917. Disponible en ligne : http://www.academie-sciences.fr/pdf/eloges/darboux_notice.pdf.

[Picard 1928] Picard E., *Traité d'Analyse. Tome III : Des singularités des équations différentielles, étude du cas où la variable reste réelle, ...*, Troisième édition, Paris (Gauthier-Villars), 1928.

Pincherle, Salvatore

[Pincherle 1880] Pincherle S., Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principi del prof. C. Weierstrass, *Giornale di Matematiche* 18 (1880), pp. 178-254, 317-357.

Pinkal, Manfred

[Pinkal 1995] Pinkal M., *Logic and Lexicon : the semantics of the indefinite*, Dordrecht (Kluwer Academic Publishers), 1995.

Plantade, François

[Plantade 2012] Plantade F., Jules Hoüel : un mathématicien pédagogue du XIXème siècle pour lequel une approche historique est indissociable d'un fondement rigoureux des mathématiques. Exemple des "Quantités Complexes"., *Actes EMF 2012*, [en ligne] http://www.emf2012.unige.ch/images/stories/pdf/Actes-EMF2012/Actes-EMF2012-GT4/GT4-pdf/EMF2012GT4PLANTADE.pdf (consulté en Mai 2015).

Plücker, Julius

[Plücker 1831] Plücker J., *Analytisch-Geometrische Entwicklungen, zweiter Band*, Essen (Baedeker), 1831. Disponible en ligne : https://archive.org/stream/analytischgeome01plgoog.

[Plücker 1833] Plücker J., Über solche Puncte, die bei Curven einer höhern Ordnung als der zweiten den Brennpuncten der Kegelschnitte entsprechen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 10 (1833), pp.84-91.

[Plücker 1835] Plücker J., *System der analytischen Geometrie, auf neue Betrachtungsweisen gegründet*, Berlin (Duncker und Humblot), 1835. Disponible en ligne : https://archive.org/stream/systemderanalyt00plgoog.

[Plücker 1839] Plücker J., *Theorie der algebraischen Curven*, Bonn (A. Marcus), 1839. Disponible en ligne : https://books.google.fr/books?id=CSMOAAAAQAAJ&printsec=frontcover&dq=inauthor:%22Julius+Pl%C3%BCcker%22&hl=en&sa=X&ved=0ahUKEwickuXSzKLLAhXLORQKHZqgDjc4FBDoAQg7MAU#v=onepage&q&f=false.

[Plücker 1846] Plücker J., *System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise, insbesondere die Theorie der Flächen zweiter Ordnung und Classe*, Düsseldorf (Scheller), 1846. Disponible en ligne : https://archive.org/stream/systemdergeometr00pluoft.

[Plücker 1847] Plücker J., Über solche Puncte, die bei Curven einer höhern Ordnung als der zweiten den Brennpuncten der Kegelschnitte entsprechen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 10 (1833), pp.84-91.

[Plücker 1865] Plücker J., Sur une nouvelle Géométrie de l'espace, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, Série 2 Vol. 11 (1866), pp.337-404.

[Plücker 1868] Plücker J., *Neue geometrie des raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*, Leipzig (Teubner), 1868-69.

Poincaré, Henri

[Poincaré 1902] Poincaré H., *La science et l'Hypothèse*, Malesherbes (Champs Sciences, Flammarion), Avril 2014.

[Poincaré 1905] Poincaré H., *La valeur de la Science*, Paris (Eernest Flammarion), 1908. Disponible en ligne : https://archive.org/details/lavaleurdelasci00poingoog.

[Poincaré 1908] Poincaré H., *Science et Méthode*, Paris (Eernest Flammarion), 1920. Disponible en ligne : https://archive.org/stream/scienceetmthod00poin.

Poncelet, Jean Victor

[Poncelet 1822] Poncelet J.V., *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris (Bachelier), 1822. Disponible en ligne : https://books.google.com.au/books?id=82ISAAAAIAAJ&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

[Poncelet 1829] Poncelet J.V., Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 4 (1829), pp.1-71.

Pont, Jean-Claude

[Pont 1986] Pont J.-C., *L'aventure des parallèles : histoire de la géométrie non euclidienne ; précurseurs et attardés.*, Bern (Peter Lang), 1986.

Pottmann, Helmut & Shi, Ling & Skopenkov, Mikhail

[Pottmann Ling Skopenkov 2011] Pottmann H. Shi L. Skopenkov M., Darboux Cyclides and Webs from Circles, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 29 (2012) pp.77-97. Disponible en ligne : https://arxiv.org/abs/1106.1354.

Puiseux, Victor

[Puiseux 1863] Puiseux V., Note sur les systèmes de surfaces orthogonales, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, Série 2 Tome 8 (1863), pp.335-346.

Quételet, Adolphe

[Quételet 1819] Quételet A., *Dissertatio mathematica inauguralis de quibusdam locis geometricis nec non de curva focali*, dissertation pour le grade de docteur soutenue à l'Université de Gand le 24 Juillet 1819. Disponible en ligne : https://books.google.fr/books?id=x2pJAAAAcAAJ.

[Quételet 1822] Quételet A., Mémoire sur une nouvelle théorie des sections coniques considérées dans le solide, *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, Vol. 2 (1823), pp.123-153.

[Quételet 1825] Quételet A., Mémoire sur une nouvelle manière de considérer les caustiques, produites soit par réflexion soit par réfraction, *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, Vol. 3 (1825), pp.89-119.

[Quételet 1829] Quételet A., Démonstration et développement des principes fondamentaux de la théorie des caustiques secondaires, *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, Vol. 5 (1829), pp.2-52.

Rams, Slawomir & Schütt, Matthias

[Rams Schütt 2015] Rams S., Schütt M., 64 lines on smooth quartic surfaces, *Mathematische Annalen*, Band 362 (2015), pp.679-698. Disponible en ligne : http://arxiv.org/abs/1212.3511.

Reich, Karin

[Reich 1973] Reich K, The history of differential geometry of Gauss and Riemann from 1828 to 1868, *Archive for History of Exact Sciences*, Vol 11 (1973), pp. 273–382.

Rey, Anne-Lise

[Rey 2013a] Rey A.-L. (Éd.), *Méthode et histoire : quelle histoire font les historiens des sciences et des techniques ?*, Paris (Classiques Garnier), 2013.

[Rey 2013b] Rey A.-L., *Style et méthode dans la dynamique de Leibniz*, in : [**Rey 2013a**], pp.89-104..

Riemann, Bernhard

[Riemann 1854a] Riemann B., Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, "Habilitationsschrift", *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Bd 13 (1867), Göttingen, 1854.

[Riemann 1854b] Riemann B., Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen, "Habilitationsvortrag", *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Bd 13 (1867), Göttingen, 1854.

Roberts, William

[Roberts 1861] Roberts W., Sur quelques systèmes de surfaces orthogonales, obtenus par la méthode des coordonnées elliptiques, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, Tome 53 (1861 2nd Semestre), pp.546-552.

[Roberts 1863] Roberts W., Application des coordonnées elliptiques à la recherche des surfaces orthogonales, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 62 (1863), pp.50-60.

Rocke, Alan J.

[Rocke 2001] Rocke A.J., *Nationalizing Science : Adolphe Wurtz and the Battle for French Chemistry*, Cambrdige Massachusetts (The MIT Press), 2001.

Romera-Lebret, Pauline

[Romera-Lebret 2009] Romera-Lebret P., *La nouvelle géométrie du triangle : passage d'une mathématique d'amateurs à une mathématique d'enseignants (1873-1929)*, Thèse de doctorat soutenue à Nantes en 2009, sous la direction d'Evelyne Barbin.

[Romera-Lebret 2014] Romera-Lebret P., *La circulation des savoirs dans les journaux et les publications périodiques à la fin du XIXe siècle. Le cas de la nouvelle géométrie du triangle*, in : [**Gerini Verdier 2014**], pp. 201-224.

Rouse Ball, Walter William

[Rouse Ball 1906] Rouse Ball W.W., *Histoire des Mathématiques. Tome Deuxième, Les mathématiques modernes depuis Newton jusqu'à nos jours - Note complémentaire de M. G. Darboux*, Paris (A. Hermann), 1907. Disponible en ligne : `https://archive.org/details/histoiredesmath02balluoft`.

Rouxel, Bernard

[Rouxel 1980] Rouxel B., L'œuvre mathématique d'Albert Ribaucour, *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 23 (1980), pp. 159-177.

Rowe, David

[Rowe 1989] Rowe D.E., *The early geometrical works of Sophus Lie and Felix Klein*, in : Rowe D., McCleary J., *Ideas and Their Reception. Proceedings of the Symposium on the History of Modern Mathematics*, San Diego (Academic Press), 1989, pp.209-274.

[Rowe 2003] Rowe D.E., *Mathematical School, Communities and Networks*, Cambridge History of Science (Cambridge University Press), 2003

[Rowe 2013] Rowe D.E., Mathematical Models as artefacts for research : Felix Klein and the case of Kummer Surfaces, *Mathematische Semesterberichte*, Band 60 (2013), pp. 1-24.

Russ, Steve

[Russ 2010] Russ S., *The mathematical works of Bernard Bolzano*, Oxford (Oxford University Press), 2010.

Saint-Martin, Arnaud

[Saint-Martin 2007] Saint-Martin A., Une constitution pour l'astronomie française au tournant du siècle. Socio-genèse d'un champ scientifique, *Cahiers d'Histoire, Revue d'histoire critique*, Vol. 102 (2007), pp.49-63.

Salmon, George

[Salmon 1848] Salmon G., *A treatise on Conic Sections*, Dublin (Hodges and Smith), 2nd edition 1850. Disponible en ligne : `https://books.google.fr/books?id=96ZXAAAAYAAJ`.

[Salmon 1849] Salmon G., On the triple tangent planes to a surface of the third order, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, Vol.IV (1849), pp.252-260.

[Salmon 1852] Salmon G., *A treatise on Higher Plane Curves*, Dublin (Hodges and Smith), 1852. Disponible en ligne : https://archive.org/stream/atreatiseonhigh01salmgoog.

[Salmon 1862] Salmon G., *A treatise on the analytic geometry of three dimensions*, Dublin (Hodges, Smith & Co), 1862. Disponible en ligne : https://archive.org/details/atreatiseonanal00rogegoog.

Saltykov, Nikolaï Nikolaïevitch

[Saltykov 1930] Saltykov N.N., Etude bibliographique sur le mémoire inédit de Charpit. Première partie, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, Série 2 Tome 54 Partie 1 (1930), pp. 255-264.

[Saltykov 1937] Saltykov N.N., Etude bibliographique de la seconde partie du mémoire inédit de Charpit, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, Série 2 Tome 61 Partie 1 (1937), pp. 55-65.

Schubring, Gert

[Schubring 2010] Schubring G., *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition*, Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, New-York (Springer), 2010.

Schur, Friedrich

[Schur 1882] Schur F., Ueber eine besondre Classe von Flächen vierter Ordnung, *Mathematische Annalen*, Band 20 (1882), pp. 254-296.

Schwarz, Hermann Amandus

[Schwarz 1871] Schwarz H.A., Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{x^2} + \frac{\partial^2 u}{y^2} = 0.$, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 74 (1872), pp. 218-253 In [**Schwarz 1890**, 341-343]

[Schwarz 1873] Schwarz H.A., Nouvel exemple d'une fonction continue qui n'admet pas de dérivée, *Archives des sciences physiques et naturelles*, 48 (1873), pp.33-38. In [**Schwarz 1890**, 269-274].

[Schwarz 1890] Schwarz H.A., *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Band 2, Berlin (Springer), 1890.

Schwartz, Laurent

[Schwartz 1997] Schwartz L., *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Paris (Odile Jacob), 1997.

Segre, Beniamino

[Segre 1943] Segre B., The maximum number of lines lying on a quartic surface, *Quarterly Journal of Mathematics*, Oxford Ser. 14 (1943), pp.86-96.

Serret, Joseph-Alfred

[Serret 1847] Serret J.-A., Mémoire sur les surfaces orthogonales, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, Tome XII (1847), pp.241-254.

[Serret 1853] Serret J.-A., Mémoire sur une classe d'équations différentielles simultanées qui se rattachent à la théorie des courbes à double courbure, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, Tome XVIII (1853), pp.1-40.

[Serret 1866] Serret J.-A., Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale*, Tome 3 (1866), pp.143-161.

[Serret 1868] Serret J.A., *Cours de Calcul Différentiel et Intégral. Tome Second : Calcul Intégral*, Paris (Gauthier-Villars), 1868.

Siebeck, Paul

[Siebeck 1863] Siebeck P., Ueber die Determinante, deren Elemente die Quadrate der sechzehn Verbindungslinien der Eckpunkte zweier beliebiger Tetraeder sind, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 62 (1863), pp.151-159.

[Siebeck 1864] Siebeck P., Ueber eine neue analytische Behandlungsweise der Brennpunkte, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 64 (1864), pp.175-183.

Simon, Charles

[Simon 1865] Simon C., De l'application de l'analyse mathématique à l'économie politique, *Revue Contemporaine*, Sér. 2 T. 43 (1865), Janvier-Février 1865, p.38-59.

[Simon 1869] Simon C., Revue de Publication : *Théorie Mathématique des Opérations financières* de Hippolyte Charlon, *Nouvelles Annales*, Sér. 2 T. 8 (1869), 1869, p.331-334.

[Simon 1871] Simon C., Note sur la formule de Gompertz et sur son application au calcul des probabilités de la vie humaine, *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, Vol. 2 (1871), Septembre 1871, p.282-288.

Smith, Henry J. Stephen

[Smith 1869] Smith H.J.S., On some geometrical constructions, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. II (1866-68), read on May 28th 1868, pp. 85-100.

Spalt, Detlef D.

[Spalt 1991] Spalt D.D., Die mathematischen und philosophischen Grundlagen des Weiestraßschen Zahlbegriffs zwischen Bolzano und Cantor, *Archive for History of Exact Sciences* 41 (1991), pp.311-362.

Steiner, Jakob

[Steiner 1826] Steiner J., Einige geometrische Sätze, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 1 (1826), pp.38-52.

Stolz, Otto

[Stolz 1881] Stolz O., B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung, *Mathematische Annalen* 18 (1881), pp. 255-279.

[Stolz 1885] Stolz O., *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik*, Erster Theil, Leipzig (Teubner), 1885.

Stubhaug, Arild

[Stubhaug 2006] Stubhaug A., *Sophus Lie : une pensée audacieuse* Paris, Springer, 2006.

Tannery, Jules

[Tannery 1886] Tannery J., *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, Paris (Hermann), 1886.

[Tannery 1901] Tannery J., *Notice sur les travaux scientifiques de M. Jules Tannery*, Paris (Gauthier-Villars), 1901. Disponible en ligne : archive.org/stream/noticesurlestrav00tannuoft.

Taton, René

[Taton 1947] Taton R., Les mathématiques dans le Bulletin de Férussac, *Archives internationales d'histoire des sciences*, Vol. 26 (ou Vol. 1 selon numérotation) (1947), pp. 100-125.

[Taton 1951] Taton R., *L'œuvre scientifique de Monge*, Thèse de doctorat soutenue en 1951, Paris (Presses Universitaires de France), 1951.

Tazzioli, Rossana

[Tazzioli 1993] Tazzioli R., Ether and Theory of Elasticity in Beltrami's Work, *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 46 (1993), pp.1-37.

[Tazzioli 1997] Tazzioli R., The Role of Differential Parameters in Beltrami's Work, *Historia Mathematica*, Vol. 24 (1997), pp.25-45.

[Tazzioli 2009] Tazzioli R., Théorie de l'élasticité et philosophie naturelle, *Actes du Colloque International Gabriel Lamé Les pérégrinations d'un ingénieur du XIXe siècle*, *Bulletin de la SABIX* Tome 44 (octobre 2009), pp. 65-72.

Thomae, Johannes

[Thomae 1870] Thomae J., *Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen*, Halle (L. Norbert), 1870.

Townsend, Richard

[Townsend 1848] Townsend R., On a principle in the theory of surfaces of the second ordre, and its application to M. Jacobi's method of generating the ellipsoid, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* Vol. 3 (1848), pp.1-28, 97-108, 148-159. Available online : https://books.google.fr/books?id=JrQ4AAAAMAAJ

Ullrich, Peter

[Ullrich 1989] Ullrich P., Weierstraß' Vorlesung zur „Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen", *Archive for History of Exact Sciences* 40 (1989), pp. 143-172.

Uribe-Vargas, Ricardo

[Uribe-Vargas 2005] Uribe-Vargas R., On vertices, focal curvatures and differential geometry of space curves, *Bull. Braz. Math. Soc.*, New Series Vol. 36 (2005), pp.285-307.

Valiron, Georges

[Valiron 1986] Valiron G., *The classical differential geometry of Curves and Surfaces*, Lie Groups : History, Frontiers and Applications Vol.XV, Traduction de James Glazebrook, Massachussetts (Math Sci Press), 1986.

Verdier, Norbert

[Verdier 2007] Verdier N., *Les démonstrations de l'axiome d'Euclide, la théorie des parallèles.*, consultable en ligne : www.apmep.fr/IMG/ppt/PRESENTATION_EUCLIDE_PARALLELES.ppt, Besançon, 2007.

[Verdier 2009a] Verdier N., *Joseph Liouville (1809-1882), son journal (1836-1874) et la presse de son temps : une entreprise éditoriale au service des mathématiques*, Thèse de doctorat soutenue le 25 Juin 2009 sous la direction d'Hélène Gispert.

[Verdier 2009b] Verdier N., Les journaux de mathématiques dans la première moitié du xixe siècle en Europe, *Philosophia Scientiae*, 13-2 (2009), pp. 97-126.

[Verdier 2014] Verdier N., *Joseph Liouville (1809-1882) : lecteur, auteur et successeur de Joseph-Diez Gergonne (1771-1859)*, in : [**Gerini Verdier 2014**], pp.37-62.

Voelke, Jean-Daniel

[Voelke 2005] Voelke J.-D., *Renaissance de la géométrie non euclidienne entre 1860 et 1900*, Bern (Peter Lang), 2005.

von Zahn, Wilhelm

[von Zahn 1874] von Zahn W., Einige Worte zum Andenken an Hermann Hankel, *Mathematische Annalen* 7 (1874), pp.583-590.

Weierstraß, Karl Wilhelm

[Weierstrass 1861] Weierstrass K., *Differentialrechnung, Sommer Semester 1861*, lecture notes taken by H. Schwarz, Mittag-Leffler Institute, Djursholm, Sweden.

[Weierstrass 1866] Weierstrass K., *Principien der Theorie der analytischen Funktionen, Wintersemester 1865-1866*, lecture notes taken by M. Pasch, Bibliothek der Universität Giessen, Giessen, Germany.

[Weierstrass 1868] Weierstrass K., *Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen, nach einer Vorlesungsmitschrift von Wilhelm Killing aus dem Jahr 1868*, Bibliothek des Mathematischen Instituts der Universität Münster, Münster, Germany, 1986.

[Weierstrass 1872] Weierstrass K., Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen, *gelesen in der königlischen Akademie der Wissenschaften am 18 Juli 1872*, Berlin, 1872.

[Weierstrass 1874] Weierstrass K., *Einleitung in die Theorien der analytischen Funktionen. Nach der Vorlesungen im Sommer Semester 1874*, ausgarbeitet von G. Hettner, Bibliothek der mathematischen Institut, Göttingen, Germany, 1988.

[Weierstrass 1876] Weierstrass K., *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*, (Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1876), [**Weierstrass 1897**] pp.77-124.

[Weierstrass 1878] Weierstrass K., *Einleitung in die Theorien der analytischen Funktionen. Vorlesungen Berlin 1878*, in einer Mitschrift von Adolf Hurwitz bearbeitet von Peter Ullrich, Dokumente zur Geschichte der Mathematik, Band 4, Braunschweig/Wiesbaden (Vieweg), 1988.

[Weierstrass 1880] Weierstrass K., *Zur Functionenlehre*, (Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 12. August 1880), [**Weierstrass 1897**] pp.201-223.

[Weierstrass 1886] Weierstrass K., *Ausgewählte Kapitel aus der FunktionenLehre*, Vorlesung gehalten in Berlin 1886, kommentiert und mit einem Anhang versehen von R. Siegmund-Schultze, Teubner-Archiv zur Mathematik, Band 9, Leipzig (Teubner), 1988.

[Weierstrass 1897] Weierstrass K., *Mathematische Werke*, Vol. 2, Berlin (Mayer und Müller), 1897.

[Weierstrass 1903] Weierstrass K., *Mathematische Werke*, Vol. 3, Berlin (Mayer und Müller), 1903.

Weisz, George

[Weisz 1977] Weisz G., Le corps professoral de l'enseignement supérieur et l'idéologie de la réforme universitaire en France, 1860-1885, *Revue française de sociologie*, Vol. 18 (2) (1977), pp.201-232.

Williams, Leslie Pearce

[Williams 1991] Williams L.P., The Life of Science and Scientific Lives, *Physis*, Vol. 28 (1991), pp. 199–213.

Wunderlich, Walter

[Wunderlich 1938] Wunderlich W., Uber ein besonderes Dreiecksnetz aus Kreisen, *Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien*, Band 147 (1938), pp. 385-399.

Wurtz, Charles-Adlophe

[Wurtz 1870] Wurtz C.-A., *Rapport sur les hautes études pratiques en Allemagne*, Paris (Imprimerie Impériale), 1870.

Zwerling, Craig

[Zwerling 1980] Zwerling C., *The emergence of the Ecole Normale Supérieure as a centre of scientific education in the nineteenth century*, in : [**Fox Weisz 1980**, 31-60].