



THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES -  
LILLE 1

Spécialité : Mécanique

*Présentée par*

**Nassim DELEND**

*Pour obtenir le grade de*

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE 1

Thème de la thèse :

Instabilités de fluides visco-élastiques en convection mixte de Rayleigh-Bénard-Poiseuille et en convection thermodiffusive dans un milieu poreux

Soutenue le 11 juillet 2016, devant le jury composé de :

• **Rapporteurs :**

**Abdelkader MOJTABI**, Professeur, IMFT, Université Paul Sabatier - Toulouse 3

**Chérif NOUAR**, Directeur de Recherche-CNRS, LEMTA, Université de Lorraine, Vandœuvre-lès-Nancy

• **Examineurs :**

**Alexandre DELACHE**, Maître de Conférences, LMFA, IUT de Saint-Etienne, Université Jean Monnet

**Stefano BERTI**, Maître de Conférences, LML, Polytech'Lille, Université de Lille 1

**Sílvia da Costa HIRATA**, Maître de Conférences, LML, Université de Lille 1

**Mohamed Najib OUARZAZI**, Professeur, LML, Université de Lille 1

Sous la direction de **M. N. OUARZAZI**

et co-encadrement de **S. C. HIRATA**

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier infiniment mon directeur de thèse, monsieur Mohamed Najib OUARZAZI, et ma co-encadrante, madame Sílvia da Costa HIRATA, pour la direction et l'encadrement exceptionnels dont j'ai bénéficié, pour leurs fortes implications personnelles, disponibilité et grande sympathie, tout au long du déroulement de ma thèse.

Je remercie amplement monsieur Abdelkader MOJTABI pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de soutenance. Je voudrais aussi exprimer ma gratitude à lui et à monsieur Chérif NOUAR pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse et d'expertiser minutieusement ce travail de recherche. Ils m'ont permis de bénéficier de leurs solides compétences scientifiques par leurs analyse attentive et très constructive.

Je remercie également messieurs Alexandre DELACHE et Stefano BERTI pour avoir accepté d'examiner méticuleusement mes travaux de thèse et dont la participation à mon jury de soutenance est une grande valorisation de ce travail.

Je tiens à remercier aussi l'ensemble de l'équipe enseignante du Département de Mécanique de l'Université de Lille 1 et l'ensemble des membres du Laboratoire de Mécanique de Lille, pour avoir fait de ces années passées une expérience scientifique et humaine très riche. Mes remerciements vont également à monsieur Lam Loic le Thuc du LML et au personnel de l'école doctorale Sciences Pour l'Ingénieur et tout particulièrement mesdames Thi Nguyen et Malika Debuysschere pour leurs aides et disponibilités.

Enfin, je remercie mes chers amis et collègues Moussa Akeroum, Hocine Remita, Khaled Khechiba, Moussa Mansouri, Ismail Bennamia, Lahcen Abdelhak, Ramzi Messahel, Zhu Kan, Madani Hamlaoui, Ahmed El Moumen et tous ceux qui m'ont aidés et m'ont soutenus pendant ces années de thèse.

---

Cette thèse est dédiée à mes parents, mes soeurs et frères ainsi qu'à toute ma grande famille. Je la dédie également à la petite et grande famille de mon cher ami Hocine. Je souhaite qu'elle apporte une pierre à l'édifice de la recherche scientifique et puisse me servir de tremplin vers le métier que j'affectionne tout particulièrement, celui d'enseignant-chercheur.

Villeneuve d'Ascq, le 18 juillet 2016

*Nassim DELEND*A

delenda.nassim@gmail.com

## Résumé

Dans la *première partie* de cette thèse, les instabilités convective et absolue d'un fluide visco-élastique d'Oldroyd-B dans la configuration de convection mixte de Rayleigh-Bénard-Poiseuille, sont étudiées numériquement et analytiquement. L'analyse de stabilité temporelle de l'état de base montre que dans un régime faiblement visco-élastique, les rouleaux longitudinaux  $LRs$  émergents sont stationnaires tandis qu'ils sont oscillatoires dans un régime fortement visco-élastique. Pour les rouleaux transversaux  $TRs$ , l'étude a montré que dans le régime faiblement visco-élastique, l'effet stabilisant du nombre de Reynolds  $Re$  est plus important comparé à son effet dans des fluides Newtoniens. Dans l'autre régime fortement visco-élastique, l'écoulement imposé de Poiseuille favorise l'émergence de  $TRs$  se propageant dans le sens opposé à la direction principale pour de faibles valeurs de  $Re$ , alors qu'ils sont remplacés par des  $TRs$  se déplaçant dans le même sens que la direction principale lorsque  $Re$  prend de grandes valeurs. L'influence des paramètres rhéologiques sur les courbes de transition « instabilités convective/absolue » dans le plan Reynolds-Rayleigh, est également examinée. De plus, la présente étude montre que le caractère visco-élastique du fluide provoque une transition “accélérée” vers la région de l'instabilité absolue et peut même causer la suppression de la région de l'instabilité convective en entraînant directement le système vers le domaine absolu.

Quand à la *deuxième partie* de thèse, elle est dédiée à l'examen de la possibilité d'opérer une séparation des espèces d'une solution visco-élastique saturant une cavité poreuse horizontale chauffée par le bas. On s'intéresse à des mélanges visco-élastiques avec un rapport de séparation  $\psi$  positif. Pour  $\psi > \psi_{mono} > 0$ , une bifurcation stationnaire au moment de déclenchement de la convection, conduit le système à un écoulement monocellulaire caractérisé par une stratification horizontale en concentration, permettant de ce fait une meilleure séparation d'espèces entre les deux bords de la cavité. L'optimum de séparation est obtenu pour une valeur  $Ra_{opt}$  particulière du nombre de Rayleigh. L'analyse de stabilité linéaire de cet écoulement monocellulaire a également été menée. Cette analyse a montré que, *dépendamment du confinement latéral de la cavité*, l'écoulement monocellulaire peut perdre sa stabilité soit *via* une bifurcation de Hopf donnant naissance à des  $TRs$  se propageant dans l'espace confiné de la cavité, ou soit *via* une bifurcation stationnaire conduisant le système à des  $LRs$  immobiles dans cet même espace. En guise de résultat très intéressant de cette deuxième partie, il s'est révélé qu'en dépit de la nature et de la structure de l'instabilité secondaire émergente, l'écoulement monocellulaire demeure stable bien au-delà de la valeur  $Ra_{opt}$ , ce qui signifie que la séparation optimale des espèces est également possible dans des mélanges binaires visco-élastiques.

**Mots-clés :** Instabilités convective et absolue, fluides visco-élastiques, convection naturelle et mixte, milieu poreux, effet Soret.

## Abstract

In the *first part* of the present thesis, convective and absolute nature of instabilities in Rayleigh-Bénard-Poiseuille mixed convection for viscoelastic Oldroyd-B fluids is examined numerically and analytically. Temporal stability analysis of the basic state showed that in the weakly elastic regime, the emerging longitudinal rolls *LRs* are stationary, while they are oscillatory otherwise. For transverse rolls *TRs*, it is found that in the weakly elastic regime, the stabilization effect of Reynolds number  $Re$  is more important than in Newtonian fluids. In the strongly elastic regime, the effect of the imposed throughflow is to promote the appearance of the up-stream moving *TRs* for low values of  $Re$  which are replaced by the down-stream moving *TRs* for higher values of  $Re$ . The influence of the rheological parameters on the transition curves from convective to absolute instability in the Reynolds-Rayleigh plane is also determined. We show that the viscoelastic character of the fluid hastens the transition to absolute instability and even may suppress the convective/absolute transition.

The *second part* is dedicated to examine the possibility to perform separation of species in viscoelastic solutions saturating a porous cavity heated from below. We focus on viscoelastic mixtures with positive separation ratio  $\psi$ . We find that for  $\psi > \psi_{mono} > 0$  a stationary bifurcation leads to a monocellular flow at the onset of convection, with a horizontal stratification of the concentration, allowing separation of species between the two ends of the cell. The optimum of separation is obtained for a particular value  $Ra_{opt}$  of the Rayleigh number. The linear stability analysis of the monocellular flow is performed. It is found that, *depending on the lateral confinement*, the monocellular flow may lose its stability *via* a Hopf bifurcation giving rise to travelling *TRs* or *via* a stationary bifurcation to fixed *LRs*. Independently of the nature of the secondary instability pattern, it is shown that the monocellular flow remains stable beyond  $Ra_{opt}$  indicating that optimal separation of species is possible for viscoelastic solutions.

**Key words :** Convective and absolute instabilities, viscoelastic fluids, natural and mixed convection, porous medium, Soret effect.

# Avant-propos

Cette thèse est dédiée à l'étude analytique et numérique des instabilités d'origine thermique ou thermodiffusive de fluides visco-élastiques. L'objectif recherché est de contribuer à la compréhension de la dynamique qui résulte de la compétition entre plusieurs moteurs d'instabilités. En plus du caractère visco-élastique du fluide et de la présence d'un gradient de température vertical déstabilisant, d'autres sources d'instabilités viennent s'y ajouter : Le couplage "convection/écoulement de Poiseuille" d'une part, et le couplage "convection/effet Soret" inhérent aux mélanges binaires d'autre part. Deux configurations physiques sont alors considérées. La première partie sera donc consacrée à la configuration de Rayleigh-Bénard-Poiseuille, alors que la deuxième partie a pour objectif d'identifier l'effet de la thermodiffusion sur les instabilités de fluides visco-élastiques saturant un milieu poreux. Le choix d'un milieu poreux en deuxième partie est essentiellement motivé par la suggestion d'un protocole industriel de séparation des constituants d'une solution de polymères.

Les travaux de recherche de la présente thèse de Doctorat ont aboutit à des résultats qui ont fait l'objet de publications dans les journaux : *Journal of Fluid Mechanics* (*JFM*) et *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* (*JNNFM*) portant les références :

1. S. C. Hirata, L. S. de B. Alves, N. Delenda and M. N. Ouarzazi, (2015), Convective and absolute instabilities in Rayleigh-Bénard-Poiseuille mixed convection for viscoelastic fluids, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. **765**, pp. 167–210.
2. N. Delenda, S. C. Hirata and M. N. Ouarzazi, (2012), Primary and secondary instabilities of viscoelastic mixtures saturating a porous medium: Application

---

to separation of species, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. **181-182**, pp. 11–21.

Enfin, nous espérons que notre étude théorique stimulera davantage les recherches expérimentales dans ce domaine, en travaillant avec des solutions de polymères dont les propriétés visco-élastiques seront encore bien définies grâce aux nombreux résultats que fournit la présente thèse.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>4</b>
<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Avant-propos</b>	<b>6</b>
<b>Partie A Instabilités thermiques de fluides visco-élastiques dans la configuration de Rayleigh-Bénard-Poiseuille</b>	<b>20</b>
<b>Introduction</b>	<b>24</b>
<b>I Instabilités spatio-temporelles : Formulation, méthodologie de résolution et validation</b>	<b>30</b>
I.1 Qu'est ce qu'un fluide visco-élastique ? . . . . .	32
I.2 Hydrodynamique et lois de comportement d'un fluide visco-élastique .	35
I.2.1 Équations du mouvement . . . . .	35
I.2.2 Lois de comportement visco-élastique linéaire . . . . .	35
Fluide de Maxwell . . . . .	35
I.2.3 Lois de comportement visco-élastiques différentielles non li- néaires . . . . .	38
Modèle de Maxwell convecté supérieur . . . . .	39
Écriture du modèle : . . . . .	39
Cas d'un cisaillement continu : . . . . .	39
Cas de petite déformation : . . . . .	40
Modèle d'Oldroyd-B . . . . .	40
I.3 Formulation du problème de stabilité linéaire . . . . .	41
I.3.1 Les équations hydrodynamiques . . . . .	42



I.3.2	L'état de base . . . . .	43
I.3.3	L'analyse de stabilité linéaire . . . . .	45
I.4	Méthodologie de résolution . . . . .	49
I.4.1	Méthode de Galerkin . . . . .	49
I.4.2	Méthode de tir (Shooting Method) . . . . .	51
I.4.3	Analyse de stabilité temporelle . . . . .	53
I.4.4	Analyse de stabilité spatio-temporelle . . . . .	58
I.5	Comparaison et validation avec des résultats numériques et expérimentaux antérieurs . . . . .	62
<b>II</b>	<b>Résultats et interprétation physique de l'instabilité</b>	<b>65</b>
II.1	Convection naturelle de Rayleigh-Bénard de fluides visco-élastiques . . . . .	66
II.1.1	Instabilités stationnaires . . . . .	66
II.1.2	Instabilités oscillatoires . . . . .	66
II.2	Convection mixte de Rayleigh-Bénard-Poiseuille de fluides visco-élastiques : Approche temporelle . . . . .	69
II.2.1	Résultats pour les fluides faiblement visco-élastiques . . . . .	70
II.2.2	Résultats pour les fluides fortement visco-élastiques . . . . .	77
II.3	Mécanismes physiques de l'instabilité . . . . .	83
II.3.1	Structures spatiales des instabilités convectives naissantes aux seuils critiques . . . . .	83
II.3.2	Bilan énergétique . . . . .	87
II.4	Transition vers l'instabilité absolue . . . . .	93
II.4.1	Résultats pour les fluides faiblement visco-élastiques . . . . .	95
II.4.2	Résultats pour les fluides fortement visco-élastiques . . . . .	97
	<b>Conclusion de la 1<sup>ère</sup> partie</b>	<b>106</b>
	<b>Partie B Instabilités thermodiffusives de fluides visco-élastiques saturant un milieu poreux - Application au procédé de séparation d'espèces des mélanges</b>	<b>109</b>
	<b>Introduction</b>	<b>114</b>
III	Présentation et formulation du problème de la convection thermodiffusive en milieu poreux	120

III.1	Présentation et caractérisation d'un milieu poreux . . . . .	121
III.1.1	Milieu poreux . . . . .	121
III.1.2	Caractérisation d'un milieu poreux . . . . .	121
	La porosité . . . . .	122
	La perméabilité . . . . .	123
	Volume élémentaire représentatif (V.E.R.) . . . . .	123
III.2	Formulation mathématique du problème de thermodiffusion de fluides visco-élastiques en milieu poreux . . . . .	124
III.3	Adimensionnement et formulation du problème de stabilité linéaire .	129
<b>IV</b>	<b>Résultats et discussion : Instabilités primaire et secondaire</b>	<b>133</b>
IV.1	L'instabilité primaire : la perte de stabilité de l'état de repos purement conductif . . . . .	134
IV.1.1	L'instabilité stationnaire et les effets du confinement latéral . .	134
IV.1.2	La naissance de l'instabilité oscillatoire . . . . .	138
IV.2	L'instabilité secondaire : la perte de stabilité de l'écoulement mono- cellulaire . . . . .	140
	<b>Conclusion de la 2<sup>ème</sup> partie</b>	<b>148</b>
	<b>Perspectives</b>	<b>150</b>
A	Contraintes de perturbation du problème bidimensionnel (cas des <i>TRs</i> )	152
B	L'équation de dispersion approximative (méthode de Galerkin d'ordre-1)	153
	<b>Bibliographie</b>	<b>153</b>

# Table des figures

1	Configuration de Rayleigh-Bénard-Poiseuille : Les rouleaux longitudinaux $LRs$ vs. les rouleaux transversaux $TRs$ (figure extraite de <a href="#">Grandjean (2008)</a> ). . . . .	25
I.1	Silly Putty s'écoulant à travers un trou : réponse sous contrainte constante due aux forces de gravité à un temps relativement long (image extraite du site Wikipédia © Erik Skiff, création : 29 juin 2006). . . . .	32
I.2	Effets typiques d'écoulement de fluides complexes visco-élastiques. Expérience (a) montrant l'effet Weissenberg lié aux contraintes normales : le fluide grimpe le long d'un bâton lorsqu'on lui applique une rotation suffisamment rapide (photographie extraite du site du groupe Gareth McKinley's Non-Newtonian Fluid Dynamics Research Group, M.I.T. © 2009). Expérience (b) montrant le gonflement d'une solution de polymères à l'extrusion également lié aux contraintes normales : cet effet est causé par la relaxation des chaînes de polymère qui ont été préalablement déformées par le cisaillement au sein de la conduite d'amenée (photographie tirée de <a href="#">Boger and Walters (1993)</a> et modifiée par <a href="#">Chevallier (2009)</a> afin de montrer la déformation des chaînes de polymère schématisées avec le modèle des haltères élastiques). Expérience (c) illustrant l'effet siphon ouvert dû aux propriétés élongationnelles exceptionnelles des solutions de polymères : une fois mis en écoulement, le fluide vidant le récipient ne s'arrête pas après l'arrêt de la sollicitation (la séquence montre le développement du siphon à partir du versement initial hors du béccher, photographies tirées de <a href="#">Boger and Walters (1993)</a> ). . . . .	33
I.3	Modèle analogique de Maxwell associant en série un amortisseur visqueux de viscosité $\mu$ et une élasticité de module $G$ . . . . .	36
I.4	Réponses transitoires d'un modèle de Maxwell : (a) relaxation de la contrainte sous une déformation constante $\gamma_0$ ; (b) fluage de la déformation sous une contrainte constante $\tau_0$ . . . . .	37

I.5	La configuration du problème de Rayleigh-Bénard-Poiseuille de fluide visco-élastique : une cellule horizontale de hauteur $h$ , est remplie d'un fluide visco-élastique, soumis simultanément à un gradient de température vertical et un gradient de pression horizontal. Le système se trouve dans le champ gravitationnel terrestre et les paramètres physiques sont exprimés en grandeurs dimensionnées. . . . .	42
I.6	Les modes instables temporelles (points noirs d'intersection des lignes continues et des lignes en pointillés) pour $Re = 0$ , $Pr = 10$ , $\lambda_1 = 0.3$ et $\Gamma = 0.15$ avec $k = 3$ . Les lignes continues en trait plein représentent $\text{Re} [\mathfrak{D}] = 0$ tandis que les lignes en traits pointillés représentent $\text{Im} [\mathfrak{D}] = 0$ , et ce : (a) d'après la <i>relation de dispersion algébrique</i> (I.60) obtenue avec la méthode de Galerkin du 1 <sup>er</sup> ordre ; et (b) d'après la <i>relation de dispersion différentielle</i> (I.69) résolue avec la variante de la méthode de tir. . . . .	56
I.7	Les modes instables spatio-temporelles (points noirs d'intersection des lignes continues et des lignes en pointillés) pour $Re = 0$ , $Pr = 10$ , $\lambda_1 = 0.3$ et $\Gamma = 0.15$ avec $\omega_r = 20$ et $Ra = 511$ . Les lignes continues en trait plein représentent $\text{Re} [\mathfrak{D}] = 0$ tandis que les lignes en traits pointillés représentent $\text{Im} [\mathfrak{D}] = 0$ , et ce : (a) d'après la <i>relation de dispersion algébrique</i> (I.60) obtenue avec la méthode de Galerkin du 1 <sup>er</sup> ordre ; et (b) d'après la <i>relation de dispersion différentielle</i> (I.69) résolue avec la variante de la méthode de tir. . . . .	60
I.8	Le comportement des deux branches spatiales (courbes en couleurs) représentées sur la figure I.7, pour différents nombres de Rayleigh et pour $\omega_r$ compris dans l'intervalle $20 \geq \omega_r \geq 10$ . Les points gris et noir représentent la naissance des instabilités convective et absolue respectivement, et ce : (a) d'après la <i>relation de dispersion algébrique</i> (I.60) (méthode de Galerkin) avec $Ra = 495.97, 520, 523.19$ et $526$ ; et (b) d'après la <i>relation de dispersion différentielle</i> (I.69) (méthode de tir) avec $Ra = 484.57, 509, 512$ et $515$ . . . . .	61

I.9	La courbe de transition de l'instabilité convective vers l'instabilité absolue des $TRs$ avec comme fluide l'huile minérale ( $Pr \approx 450$ ). Les symboles de losanges représentent les résultats du présent travail comparés avec les résultats numériques (la ligne mixte point-tiret) de Carrière and Monkewitz (1999), tandis que la ligne courbe continue est une approximation quadratique par moindres carrés (I.73) du travail expérimental mené par Grandjean and Monkewitz (2009). La ligne horizontale représente le seuil bien connu de l'instabilité de Rayleigh-Bénard, $Ra_c = 1707.762$ (Chandrasekhar, 1961). . . . .	63
II.1	Courbes neutres de stabilité marginale dans la configuration classique de Rayleigh-Bénard ( $Re = 0$ ) et pour $Pr = 10$ , montrant le seuil critique d'instabilité stationnaire ainsi que deux exemples de seuils critiques d'instabilités oscillatoires. Les résultats ont été obtenus avec la méthode de Galerkin basée sur le premier terme. . . . .	67
II.2	La frontière séparant les deux régimes d'instabilités dans le plan $(\Gamma, \lambda_1)$ : les lignes continues (en couleurs) correspondent aux valeurs du paramètre d'élasticité $\lambda_1^f$ définissant le croisement entre les deux régions de bifurcations stationnaires (cas Newtonien et faiblement élastique) et oscillatoires (cas fortement élastique) pour $Re = 0$ et $Pr = 1, 10$ et $100$ . Les résultats ont été obtenus avec le développement de Galerkin basé sur le premier terme (I.60). Les symboles en étoiles indiquent les couples de valeurs $(\Gamma, \lambda_1)$ représentatifs utilisés dans les calculs tout au long de cette partie de thèse. . . . .	68
II.3	Les lignes continues (en couleurs) représentent les valeurs critiques (a) du nombre de Rayleigh, (b) du nombre d'onde, et (c) de la fréquence d'oscillation à la naissance de l'instabilité convective faiblement visco-élastique pour des $TRs$ avec $\lambda_1 = 0.025$ et différentes valeurs de $\Gamma$ , y compris le cas de fluide Newtonien ( $\Gamma = 1$ ). Le seuil des $LRs$ (la ligne pointillée noire) est également présenté. Des comparaisons, dans le cas des $TRs$ , entre la relation de dispersion complète (traits pleins) et la relation de dispersion approximative (lignes pointillées) sont présentées dans les encarts. . . . .	72

II.4	<p>Les lignes continues (en couleurs) représentent les valeurs critiques (a) du nombre de Rayleigh, (b) du nombre d'onde, et (c) de la fréquence d'oscillation à la naissance de l'instabilité convective faiblement visco-élastique pour des <math>TRs</math> avec <math>\lambda_1 = 0.1</math> et <math>\Gamma = 0.75</math> (fluides de Boger). Le cas de fluide Newtonien (<math>\Gamma = 1</math>) et le cas où <math>\lambda_1 = 0.025</math> et <math>\Gamma = 0.75</math>, sont également présentés. Des comparaisons, dans le cas des <math>TRs</math>, entre la relation de dispersion complète (traits pleins) et la relation de dispersion approximative (lignes pointillées) sont présentées dans les encarts insérés. La bifurcation de codimension-deux est localisée au point où <math>Re_{c2} = 0.896791</math>. . . . .</p>	74
II.5	<p>Les lignes (en couleurs) représentent les courbes de stabilité neutre dans (a) le plan <math>(k, Ra)</math> et (b) le plan <math>(k, \omega)</math> pour différentes valeurs du nombre de Reynolds <math>Re</math>, avec <math>\lambda_1 = 0.1</math> et <math>\Gamma = 0.75</math>. Elles montrent la présence de deux modes convectivement instables représentés par des traits pleins et des traits en pointillés. . . . .</p>	76
II.6	<p>Les courbes (en couleurs) représentent (a) le nombre de Rayleigh critique et (b) la fréquence critique associée, correspondant aux trois modes existants d'instabilité convective pour le cas fortement visco-élastique (<math>\lambda_1 = 0.3</math> et <math>\Gamma = 0.75</math>), et ce en fonction du nombre de Reynolds. Les indices supérieurs <math>S</math>, <math>D</math> et <math>U</math> désignent respectivement les trois modes d'ondes : stationnaires, mobiles dans la direction de l'écoulement (en aval) et mobiles dans la direction opposée (en amont). L'encart inséré dans la figure (a) montre que les courbes de Rayleigh critique des deux modes <math>TWU</math> et <math>TWD</math> se croisent au point <math>Re = Re_{c2} \simeq 0.6</math> . . . . .</p>	79
II.7	<p>Les lignes (en couleurs) représentent les courbes de stabilité neutre dans (a) le plan <math>(k, Ra)</math> et (b) le plan <math>(k, \omega)</math>, pour différentes valeurs du nombre de Reynolds <math>Re</math>, avec <math>\lambda_1 = 0.3</math> et <math>\Gamma = 0.75</math>. La courbe de forme parabolique (traits pleins) et celle en forme de doigt (traits en pointillés) représentent les courbes de stabilité neutre pour les deux modes <math>TWU</math> et <math>TWD</math> respectivement. . . . .</p>	80
II.8	<p>Les courbes (en couleurs) représentent les valeurs critiques (a) du nombre de Rayleigh, (b) du nombre d'onde, (c) de la fréquence d'oscillation, et (d) de la vitesse de phase, aux seuils de l'instabilité convective naissante dans le cas des <math>TRs</math> fortement visco-élastiques avec <math>\lambda_1 = 0.3</math> et <math>\Gamma = 0.75</math> (<math>Re_{c2} = 0.603077</math>), <math>\lambda_1 = 0.3</math> et <math>\Gamma = 0.15</math>, ainsi que pour <math>\lambda_1 = 0.1</math> et <math>\Gamma = 0.15</math> (<math>Re_{c2} = 0.41291</math>). Les courbes des <math>TRs</math> faiblement visco-élastiques du cas <math>\lambda_1 = 0.1</math> et <math>\Gamma = 0.75</math> (courbes continues sans symboles) sont également présentées. . . . .</p>	81

II.9	Iso-contours du champ de vitesse $w_p$ dans le plan $(x, z)$ pour $Re = 0.6$ et $Re = 1.4$ . Les paramètres sont $(\lambda_1 = \lambda_2$ et $\Gamma = 1)$ pour un fluide Newtonien, ainsi que $(\lambda_1 = 0.1$ et $\Gamma = 0.75)$ et $(\lambda_1 = 0.3$ et $\Gamma = 0.15)$ pour les solutions faiblement et fortement visco-élastiques, respectivement. (a) Fluide Newtonien, $Re = 0.6$ ; (b) fluide Newtonien, $Re = 1.4$ ; (c) fluide faiblement visco-élastique, $Re = 0.6$ ; (d) fluide faiblement visco-élastique, $Re = 1.4$ ; (e) fluide fortement visco-élastique, $Re = 0.6$ ; (f) fluide fortement visco-élastique, $Re = 1.4$ . . . . .	84
II.10	Les courbes (en couleurs) représentent (a) la valeur absolue et (b) la phase de la vitesse de perturbation au seuil critique, pour plusieurs valeurs de $Re$ . Les courbes sont symétriques par rapport à la ligne médiane $z = 0$ . Les traits pleins et en pointillés correspondent, respectivement, à un fluide faiblement visco-élastique $(\lambda_1 = 0.1$ et $\Gamma = 0.75)$ et à un fluide Newtonien. Notez que les courbes correspondant au fluide Newtonien et au fluide visco-élastique coïncident uniquement pour le cas $Re = 0$ . . . . .	86
II.11	La variation spatiale verticale (i.e., le long de $z$ ) de la valeur absolue du taux d'élongation pour les mêmes paramètres que ceux de la figure II.10. Les deux courbes correspondant au fluide Newtonien et au fluide visco-élastique coïncident uniquement pour le cas $Re = 0$ . . . . .	87
II.12	Les courbes (en couleurs) représentent les différentes contributions de chaque composante de contrainte de perturbation à l'énergie totale de dissipation : $E_D^{(1,1)}/ E_{DN} $ (cercles), $E_D^{(3,3)}/ E_{DN} $ (carrés) et $E_D^{(1,3)}/ E_{DN} $ (triangles). Les lignes en pointillés et les lignes continues correspondent respectivement au cas Newtonien et au cas faiblement visco-élastique $(\lambda_1 = 0.1$ et $\Gamma = 0.75)$ . Notez que $E_D^{(1,1)} = E_D^{(3,3)}$ pour le cas de fluide Newtonien. . . . .	92
II.13	Courbes (en couleurs) identiques à la figure II.12, mais les lignes continues ici correspondent à des solutions de polymères fortement visco-élastiques avec $\lambda_1 = 0.3$ et $\Gamma = 0.75$ . . . . .	94
II.14	Les courbes (en couleurs) donnent les seuils de déclenchement de l'instabilité convective (traits pleins) et de l'instabilité absolue (traits interrompus) pour des solutions faiblement visco-élastiques avec $\lambda_1 = 0.025$ et deux valeurs différentes de $\Gamma$ . À des fins de comparaison, le cas Newtonien est également inclus. Une comparaison entre la relation de dispersion complète (lignes en tirets) et la relation de dispersion approximative (lignes mixtes tiret-point) est présentée dans l'encart inséré. . . . .	96

II.15	Les courbes (en couleurs) donnent les seuils de déclenchement de l'instabilité convective (traits pleins) et de l'instabilité absolue (traits interrompus) pour des solutions faiblement visco-élastiques avec $\Gamma = 0.75$ et deux valeurs différentes de $\lambda_1$ . À des fins de comparaison, le cas Newtonien est également inclus. Une comparaison entre la relation de dispersion complète (lignes en tirets) et la relation de dispersion approximative (lignes mixtes tiret-point) est présentée dans l'encart inséré. . . . .	97
II.16	Les courbes (en couleurs) donnent les seuils de déclenchement de l'instabilité convective et de l'instabilité absolue des deux ondes contre-propagatives $TWD$ et $TWU$ d'un cas représentatif des fluides fortement visco-élastiques ( $\lambda_1 = 0.3$ et $\Gamma = 0.15$ ). L'encart inséré montre l'existence d'une région d'instabilité convective pour $Re = 0$ . . . . .	99
II.17	Les courbes (en couleurs) donnent : (a) les seuils d'apparition des instabilités convectives (traits pleins) et absolues (traits interrompus), et (b) les taux de croissance spatiale aux seuils critiques de l'instabilité absolue, et ce comme fonctions du nombre de Reynolds pour les mêmes cas fortement visco-élastiques et le cas faiblement visco-élastique de la figure II.8. Les deux encarts associés donnent un zoom sur les données d'une ou plusieurs courbes particulières. . . . .	102
II.18	Les courbes (en couleurs) montrent l'étendue relative de la région d'instabilité convective comme fonction du nombre de Reynolds, et ce pour les mêmes cas fortement visco-élastiques et le cas faiblement visco-élastique de la figure II.8. . . . .	103
II.19	Visualisation d'une molécule d'ADN ( $\approx 40 \mu m$ ) attachée à une bille de latex d' $1 \mu m$ (images extraites de Perkins et al. (1994)). Les images successives, avec un intervalle de temps de 5 s entre chacune d'elles, montrent la relaxation de la molécule d'ADN après l'avoir préalablement étirée dans un écoulement uniforme. . . . .	117
III.1	Exemples de milieux poreux naturels et industriels. (a) et (b) des matériaux de génie civil (images tirées de Escoda (2012)) : roche et béton, successivement. (c) une mousse métallique (source El Moumen (2014)). (d) microphotographie électronique à balayage colorisée d'un matériau silicone poreux préparé par une technique originale à partir d'une émulsion concentrée aqueuse (porosité totale : 85%) ; ce matériau monolithique rigide microcellulaire est utilisable en chimie verte, catalyse hétérogène, isolant phonique et thermique, biocapteurs, filtre à particules, dépollution. . . . .	122



III.2	La configuration du problème de Rayleigh-Bénard d'un fluide binaire visco-élastique saturant une cavité poreuse horizontale de hauteur $h$ : le mélange binaire visco-élastique que l'on désire séparer, est soumis uniquement à un gradient extérieur vertical de température. Le système se trouve dans le champ gravitationnel terrestre et les paramètres physiques sont exprimés en grandeurs dimensionnées. . . . .	125
IV.1	Le nombre de Rayleigh critique $Ra_{c1}$ associé à la bifurcation vers les rouleaux transversaux ( $TRs$ ) stationnaires ainsi que vers les rouleaux longitudinaux ( $LRs$ ) stationnaires, avec $Le = 0.01$ . . . . .	136
IV.2	Le nombre d'onde critique des $TRs$ en fonction de $\psi$ , avec $Le = 0.01$ . . . . .	137
IV.3	Le nombre de Rayleigh critique $Ra_{c1}$ associé à la bifurcation vers les $LRs$ en fonction du rapport d'aspect latéral « $a$ » pour différentes valeurs du nombre « $l$ » de rouleaux, avec $Le = 0.01$ . . . . .	138
IV.4	Le nombre de Rayleigh critique $Ra_{c1}$ associé à la bifurcation vers l'instabilité oscillatoire ou vers l'instabilité stationnaire en fonction de $\psi$ , pour $\Gamma = 0.75$ et différentes valeurs de $\lambda_1$ , avec $Le = 0.01$ . . . . .	139
IV.5	Le nombre de Rayleigh critique $Ra_{c1}$ associé à la bifurcation vers l'instabilité oscillatoire ou vers l'instabilité stationnaire en fonction de $\psi$ , pour $\lambda_1 = 0.5$ et différentes valeurs de $\Gamma$ , avec $Le = 0.01$ . . . . .	140
IV.6	Le nombre de Rayleigh critique de l'instabilité secondaire $Ra_{c2}$ associé à la bifurcation vers les $TRs$ oscillatoires en fonction de $\psi$ pour $\lambda_1 = 0.5$ et différentes valeurs de $\Gamma$ , avec $Le = 0.01$ . La courbe continue sans symboles représente le nombre de Rayleigh $Ra_{opt}$ correspondant à la séparation optimale. . . . .	142
IV.7	Les nombres d'ondes correspondant au seuil critique $Ra_{c2}$ de la figure IV.6. Les faibles nombres d'ondes correspondent à un régime où les effets visco-élastiques sont dominants (i.e mode élastique), tandis que les nombres d'ondes élevés correspondent à un régime où l'effet Soret est dominant (i.e. régime thermodiffusif). . . . .	143
IV.8	Les fréquences d'oscillations correspondant au seuil critique $Ra_{c2}$ de la figure IV.6. Les hautes fréquences d'oscillation correspondent à un régime où les effets visco-élastiques sont dominants (i.e mode élastique), tandis que les basses fréquences d'oscillation correspondent à un régime où l'effet Soret est dominant (i.e. régime thermodiffusif). . . . .	143

IV.9	Les courbes de stabilité marginale dans le plan $(k, Ra)$ pour la bifurcation secondaire de l'écoulement monocellulaire vers les $TRs$ oscillatoires; les paramètres sont $\lambda_1 = 0.5$ et $\Gamma = 0.2$ , $Le = 0.01$ et différentes valeurs du rapport de séparation $\psi$ . . . . .	145
IV.10	Le nombre de Rayleigh critique de l'instabilité secondaire $Ra_{c2}$ associé à la bifurcation vers les $TRs$ oscillatoires en fonction de $\psi$ pour $\Gamma = 0.75$ et différentes valeurs de $\lambda_1$ , avec $Le = 0.01$ . La courbe continue sans symboles représente le nombre de Rayleigh $Ra_{opt}$ correspondant à la séparation optimale. . . . .	146
IV.11	L'influence du confinement latéral « $a$ » sur le nombre de Rayleigh critique de l'instabilité secondaire $Ra_{c2}$ associé à la bifurcation vers les $TRs$ oscillatoires ou vers les $LRs$ stationnaires en fonction de $\Gamma$ pour $\lambda_1 = 0.5$ et $\psi = 0.2$ , avec $Le = 0.01$ . . . . .	147

# Liste des tableaux

I.1	Les paramètres critiques pour un fluide <i>faiblement visco-élastique</i> au seuil d'apparition de l'instabilité convective : $Pr = 10$ , $\lambda_1 = 0.025$ et $\Gamma = 0.15$ .	57
I.2	Les paramètres critiques pour un fluide <i>fortement visco-élastique</i> au seuil d'apparition de l'instabilité convective : $Pr = 10$ , $\lambda_1 = 0.1$ et $\Gamma = 0.15$ . . .	57
I.3	La validation de nos schémas numériques de résolution avec les résultats de la simulation numérique directe 2D de <a href="#">Nicolas et al. (1997)</a> et l'expérimental de <a href="#">Ouazzani et al. (1990)</a> , pour $Pr = 6.4$ . . . . .	64
II.1	Bilan des énergies à $Re = 0$ , près des points de bifurcation de codimension-deux : $\lambda_1^f = 0.0436816$ pour $\Gamma = 0.15$ et $\lambda_1^f = 0.205153$ pour $\Gamma = 0.75$ (voir figure II.2). . . . .	90
II.2	Bilan des énergies dans un régime faiblement visco-élastique avec $\lambda_1 = 0.1$ et $\Gamma = 0.75$ . Les valeurs transcrites en gras se réfèrent au mode d'instabilité le plus amplifié (i.e., le mode dominant d'instabilité). . . . .	91
II.3	Bilan des énergies dans un régime fortement visco-élastique avec $\lambda_1 = 0.3$ et $\Gamma = 0.75$ . Les valeurs transcrites en gras se réfèrent au mode d'instabilité le plus amplifié (i.e., le mode dominant d'instabilité). . . . .	94
III.1	Propriétés de quelques matériaux poreux ( <a href="#">Marcoux, 1998</a> ). . . . .	124

## Première partie

# Instabilités thermiques de fluides visco-élastiques dans la configuration de Rayleigh-Bénard-Poiseuille

# Notations de la 1<sup>ère</sup> partie

- **Remarque** : les symboles sont classés par ordre alphabétique romain puis grec, les minuscules avant les majuscules, les scalaires avant les tenseurs (vecteurs et matrices carrées). Les tenseurs, quand à eux, sont notés en gras.

$D$  opérateur de dérivation  $D = d/dz$

$De$  nombre de Deborah

$\mathbf{D}$  tenseur des taux de déformation (ou taux de cisaillement)

$g$  l'accélération gravitationnelle ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

$\mathbf{g}$  vecteur de la pesanteur ( $\mathbf{g} = g \mathbf{e}_z$ )

$h$  hauteur du canal

$k$  nombre d'onde dans une direction quelconque (où  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ )

$k_x$  nombre d'onde dans la direction  $x$

$k_y$  nombre d'onde dans la direction  $y$

$k_0$  nombre d'onde relatif à l'instabilité absolue

$K$  diffusivité thermique

$L$  longueur du canal

$N$  ordre de troncature de la méthode "semi-analytique" de Galerkin

$P$  pression motrice

$Pr$  nombre de Prandtl

$Ra$  nombre de Rayleigh

$Ra_A$  nombre de Rayleigh critique du seuil absolu

$Ra_c$  nombre de Rayleigh critique du seuil convectif

$Ra$  nombre de Rayleigh

$Re$  nombre de Reynolds

$t$  temps

---

$T^*$  température (en grandeur dimensionnée)

$T_0^*$  température de la paroi supérieure

$T_1^*$  température de la paroi inférieure ( $T_1^* > T_0^*$ )

$\Delta T^*$  différence de température entre la plaque inférieure et la plaque supérieure  
(température de référence pour l'adimensionnement)

$\mathbf{u}$  vecteur vitesse du fluide

$U_0^*$  vitesse maximale de l'écoulement de base (au milieu de la couche fluide)

**Symboles grecs :**

$\beta$  coefficient de dilatation thermique

$\boldsymbol{\gamma}^*$  tenseur des taux de déformation pour lequel  $\boldsymbol{\gamma}^* = (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) = 2 \mathbf{D}$

$\lambda_1$  temps de relaxation (ou nombre d'élasticité) du fluide visco-élastique

$\lambda_1^f$  temps de relaxation relatif à la frontière séparant les deux régions faiblement et  
fortement visco-élastique

$\lambda_2$  temps de retardation du fluide visco-élastique

$\Gamma$  rapport entre les deux temps caractéristiques de retardation et de relaxation (com-  
pris dans l'intervalle  $[0, 1]$ )

$\mu$  viscosité dynamique du fluide (solvant + polymère)

$\mu_s$  viscosité dynamique du solvant

$\mu_p$  viscosité dynamique du polymère

$\nu$  viscosité cinématique du fluide (solvant + polymère)

$\omega$  fréquence (ou pulsation) du mode oscillatoire

$\omega_0$  fréquence d'oscillation relative à l'instabilité absolue

$\rho$  masse volumique

$\boldsymbol{\sigma}$  tenseur des contraintes au sein du fluide

$\boldsymbol{\tau}$  déviateur des contraintes qui est un tenseur de trace nulle ( $\text{tr } \boldsymbol{\tau} = 0$ ) et qui re-  
présente la contribution visqueuse au tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$

**Indices inférieurs :**

$A$  relatif au seuil absolu

$b$  relatif à l'état de base

$c$  relatif au seuil convectif

---

$c_2$  relatif au point de bifurcation de codimension-deux

$p$  relatif à la perturbation

**Indices supérieurs :**

$D$  relatif au mode se déplaçant en aval (Downstream)

$o$  relatif à l'instabilité oscillatoire

$s$  ou  $S$  relatif à l'instabilité stationnaire

$U$  relatif au mode se déplaçant en amont (Upstream)

\* relatif aux grandeurs dimensionnées (sauf indication contraire)

# Introduction

Le problème classique de Rayleigh-Bénard-Poiseuille (RBP) consiste en une configuration de convection mixte entièrement développée délimitée par des parois planes horizontales, et qui résulte de l'application simultanée d'un gradient horizontal de pression et d'un gradient vertical de température. Deux types d'instabilités peuvent se développer dans cette configuration : (i) les instabilités d'origine thermogravitationnelle pilotées par le nombre de Rayleigh  $Ra$ , et qui donnent lieu à des structures thermoconvectives en forme de rouleaux ; et (ii) des instabilités d'écoulement de cisaillement régies par le nombre de Reynolds  $Re$ , ce qui produit à des vitesses élevées des ondes dites de Tollmien-Schlichting. Dans cette première partie de thèse, nous nous concentrerons sur les instabilités entraînées par les forces thermiques de flottabilité (c'est-à-dire le premier type d'origine thermogravitationnelle) et, par conséquent, cette étude est limitée à de faibles valeurs du nombre de Reynolds afin de maintenir stables tous les modes de Tollmien-Schlichting <sup>1</sup>.

Dans une configuration de RBP (cf. figure 1) et pour la majorité des cas étudiés, le fluide est uniformément chauffé par le bas et soumis à un écoulement unidirectionnel avec un profil de vitesse parabolique laminaire en raison du faible nombre de Reynolds imposé. À l'état de base de conduction, c'est-à-dire lorsque le nombre de Rayleigh est plus petit que la première valeur critique d'instabilité, un écoulement de Poiseuille est observé. Lorsque les forces thermiques de flottabilité deviennent assez importantes pour surmonter les forces visqueuses, différents types de structures thermoconvectives peuvent y apparaître. Nous n'examinons pas ici les nombreuses études consacrées aux fluides Newtoniens dans cette configuration, mais on peut se référer à la revue bibliographique exhaustive présentée par [Nicolas \(2002\)](#) et qui fournit un résumé détaillé des principaux résultats de l'étude (i.e., RBP en fluides Newtoniens). L'analyse linéaire de la stabilité temporelle d'un tel écoulement dans une conduite d'extension latérale infinie (voir figure 1) montre que la valeur critique du nombre de Rayleigh qui correspond à l'apparition des rouleaux longitudinaux

---

1. Pour des écoulements à grands nombres de Reynolds ( $Re > 7000$ ), des instabilités d'origine visqueuse donnent naissance à des ondes de Tollmien-Schlichting (cf. la section "Introduction" de [Nicolas \(2002\)](#)).



$LRs$  dont les axes sont parallèles à la direction principale de l'écoulement de base, est  $Ra_c \simeq 1708$ . Cette valeur critique est indépendante du nombre de Reynolds et égale à celle trouvée dans le cas du problème classique de Rayleigh-Bénard (RB). D'autre part, le débit imposé stabilise l'état de base (c-à-d l'écoulement purement conductif) vis-à-vis des rouleaux transversaux  $TRs$ , dont les axes sont orthogonaux à la fois à la direction principale de cet écoulement et à la direction du gradient de température imposé. Cette même analyse linéaire a également été en mesure de démontrer que le confinement latéral du canal conduit à la stabilisation de l'écoulement de base mais aussi à la sélection des  $TRs$  pour les petites valeurs du nombre de Reynolds ou des  $LRs$  autrement, i.e. pour les grandes valeurs de  $Re$  (cf. [Nicolas \(2002\)](#) et [Grandjean \(2008\)](#)).

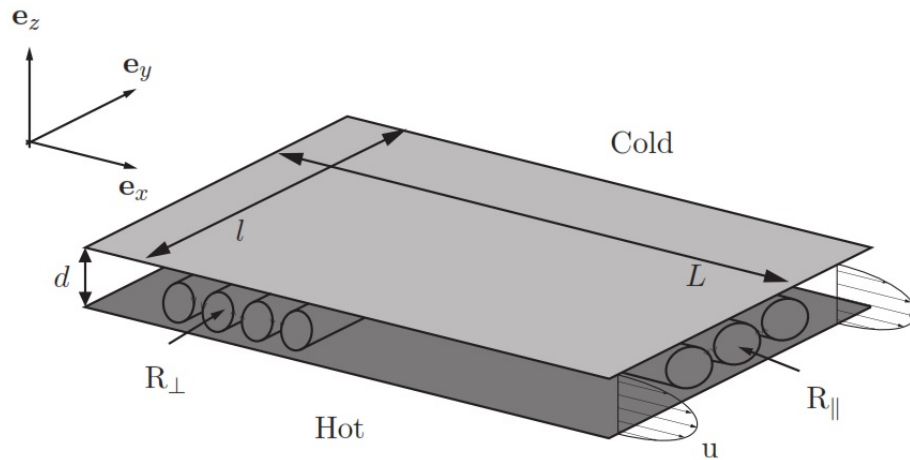


FIGURE 1 – Configuration de Rayleigh-Bénard-Poiseuille : Les rouleaux longitudinaux  $LRs$  vs. les rouleaux transversaux  $TRs$  (figure extraite de [Grandjean \(2008\)](#)).

Contrairement à l'analyse temporelle mentionnée précédemment et dans le cas de systèmes dit "ouverts", on doit considérer à la fois la croissance temporelle et la croissance spatiale des perturbations et il faut opérer de ce fait une distinction entre le caractère convectif et le caractère absolu de l'instabilité ([Briggs, 1964](#)). Pour ce faire, une méthodologie a été appliquée dans le cadre des instabilités hydrodynamiques bidimensionnelles par [Huerre and Monkewitz \(1985, 1990\)](#). Ensuite, elle a été étendue au cas des instabilités tridimensionnelles par [Brevdo \(1991\)](#). Elle consiste à analyser l'évolution et le comportement asymptotique d'un paquet d'ondes qui a été initialement soumis à une excitation par impulsion. Si son amplitude décroît tout en étant advecté en aval par l'écoulement de base, le système se dit **convectivement stable** sinon dans le cas contraire il est qualifié comme étant **instable**. Dès lors, deux possibilités se présentent dans ce dernier cas d'instabilité : pour la première possibilité, lorsque l'amplitude du paquet d'ondes généré initialement suite

---

à une perturbation localisée se décroît — à un temps très grand — du point de vue d'un observateur fixe à n'importe quelle position choisie dans le domaine d'étude, au même moment qu'elle croît lorsqu'elle est observée dans un système de coordonnées se déplaçant avec la vitesse de groupe, le système de ce fait est dit **convectivement instable** ; autrement, pour la seconde possibilité le système en question devient **absolument instable**. Par conséquent, dans un système *convectivement instable* et en l'absence de forçage externe capable de fournir une source constante de perturbations, ces dernières finissent à la longue par quitter le domaine permettant ainsi au système de revenir à son état de base initial (c.-à-d. l'écoulement de Poiseuille purement conducteur). À l'opposé dans un système *absolument instable*, certaines perturbations imposées à l'état de base initial — et qui sont inévitablement présentes dans toute configuration physique — finiront en fin de compte par se développer et s'amplifier à un temps relativement très grand, poussant le système loin de son état de base d'origine. Dans de tels situations, un forçage d'amplitude infinitésimale ou faible joue un rôle marginal car le système devient auto-excité, autrement dit insensible ou très peu sensible au bruit extérieur.

La transition de l'instabilité convective vers l'instabilité absolue dans le problème de convection mixte de RBP de *fluides Newtoniens* a été étudiée par Müller et al. (1992), Carrière and Monkewitz (1999) et Martinand et al. (2006) dans le cas d'un fluide libre de toute matrice poreuse. Ces études ont été étendues par Delache et al. (2007), Delache and Ouarzazi (2008) et Ouarzazi et al. (2008) pour inclure la présence de cette matrice solide, mais poreuse. Dans les deux configurations (*milieu fluide* ou *milieu poreux*) et pour un canal d'extension latérale infinie, il a été montré que le système éprouve uniquement un état d'instabilité convective vis-à-vis des *LRs* tandis qu'il peut connaître, vis-à-vis des *TRs*, une transition vers l'instabilité absolue en plus de l'instabilité convective. Les comparaisons avec les études numériques et expérimentales valident ces résultats. En *milieux fluides*, Carrière and Monkewitz (1999) ont constaté que leur courbe marginale d'instabilité absolue — vis-à-vis des *TRs* — prédit très précisément la transition d'instabilité observée dans les simulations numériques bidimensionnelles effectuées par Nicolas et al. (1997). En outre, des expériences récentes en laboratoire menées par Grandjean and Monkewitz (2009), utilisant de l'eau et de l'huile minérale comme fluides de travail, ont prouvé effectivement que le système subit cette transition vers l'instabilité absolue comme prédit par l'analyse de stabilité linéaire. Dans le cas des *milieux poreux*, Delache et al. (2007) ont parvenu à la même conclusion lorsqu'ils ont comparé leurs prédictions théoriques avec les données expérimentales rapportées par Combarrous and Bories (1975).

---

Même si les instabilités induites par les forces de flottabilité (autrement dit, les instabilités d'origine thermique et qui sont dues à l'effet combiné du gradient de température et de la poussée d'*Archimède*) dans des fluides *Newtoniens* ont été largement étudiées par le passé, on ne peut pas en dire autant de leurs homologues en fluides *non-Newtoniens*. Ceci est probablement dû au fait qu'il existe un couplage souvent non négligeable entre le problème thermo-hydrodynamique et l'équation constitutive rhéologique du fluide. Récemment, des théoriciens ([Coelho et al., 2002](#); [Sheela-Francisca et al., 2012](#); [Mokarizadeh et al., 2013](#)) et des expérimentateurs ([Nouar et al., 2000](#); [Peixinho et al., 2008](#)) ont fait preuve d'un intérêt croissant pour la convection mixte des fluides *non-Newtoniens*. La raison en est qu'on retrouve de tels fluides dans grand nombre d'applications telles que celles rencontrées en industries agro-alimentaires, cosmétiques, pharmaceutiques et pétrolières, entre autres. Et plus précisément, le contrôle de la convection mixte de fluides *visco-élastiques*, passant à travers des canaux et des filières cylindriques, est essentiel dans des opérations de mise en forme de polymères comme celle d'extrusion où la matière en fusion s'écoule à des températures élevées lors du procédé. Afin d'éviter toute apparition d'inhomogénéités dans le produit final, il s'avère donc primordial de contrôler toute instabilité pouvant naître dans l'écoulement du fluide en question. Par conséquent, la compréhension du comportement convectif de l'écoulement se montre également importante lors de la conception du matériel et équipements dédiés à la mise en œuvre et à la fabrication de produits à base de polymères.

Pour les fluides *visco-élastiques*, la plupart des études existantes se sont concentrées soit sur les instabilités hydrodynamiques dans des conditions isothermes (voir [Zhang et al., 2013](#), et les références qui y sont citées), soit sur les instabilités dans la configuration de convection naturelle de Rayleigh-Bénard (RB) (voir par exemple : [Green, 1968](#); [Vest and Arpaci, 1969](#); [Sokolov and Tanner, 1972](#); [Eltayeb, 1977](#); [Rosenblat, 1986](#); [Martinez-Mardones and Perez-Garcia, 1990](#); [Larson, 1992](#); [Martinez-Mardones and Perez-Garcia, 1992](#); [Martinez-Mardones et al., 1996](#); [Park and Lee, 1996](#); [Kolodner, 1998](#); [Li and Khayat, 2005](#)). Dans ce dernier cas d'étude, l'analyse de stabilité linéaire a révélé que l'apparition de la convection de RB en fluides visco-élastiques peut être oscillatoire comme elle peut être stationnaire, et ce, dépend de l'élasticité de fluide. Ce comportement a été confirmé par les résultats expérimentaux de [Kolodner \(1998\)](#) en utilisant un fluide visco-élastique contenant des suspensions d'ADN (l'acide désoxyribonucléique, une macromolécule biologique présente dans toutes les cellules ainsi que chez de nombreux virus et qui contient toute l'information génétique permettant le développement et le fonctionnement des êtres vivants). Une telle instabilité visco-élastique est habituellement observée dans des solutions

---

diluées de polymères, consistant en un solvant Newtonien et un soluté polymère. Ces solutions peuvent être très élastiques tout en conservant une viscosité sensiblement constante. Elles sont, par conséquent, bien représentées par le modèle constitutif d'Oldroyd-B (Bird et al., 1987). Comme l'a affirmé Li and Khayat (2005), deux régimes doivent être distingués dans ce cas de convection de RB d'un fluide d'Oldroyd-B : le régime faiblement visco-élastique et le régime fortement visco-élastique. En l'absence d'écoulement de Poiseuille, les fluides faiblement (ou fortement) élastiques sont identifiés comme étant des fluides avec un coefficient d'élasticité  $\lambda_1$  plus petit (ou plus grand) que  $\lambda_1^f$ , où  $\lambda_1^f$  est le coefficient critique d'élasticité pour l'apparition de la convection oscillatoire. Il est important de souligner que les résultats de stabilité linéaire de la convection de RB dans des fluides visco-élastiques ont été obtenus par une *analyse temporelle* dans toutes les études mentionnées ci-dessus.

Au meilleur de notre connaissance, la convection de RBP d'un fluide visco-élastique n'a pas été envisagée auparavant dans la littérature scientifique. Par conséquent, l'objectif majeur du travail actuel est d'étudier l'influence des effets d'élasticité du fluide sur les mécanismes physiques pilotant les instabilités linéaires spatio-temporelles dans cette configuration d'étude qui présente une grande importance d'un point de vue technologique. On a donc mis l'accent sur une *analyse temporelle* de stabilité linéaire *tridimensionnelle* pour déterminer les seuils de déclenchement de l'instabilité convective. En outre, une *analyse spatiale* de stabilité linéaire *bidimensionnelle* est également menée afin de la distinguer des seuils de déclenchement de l'instabilité absolue, et ce, uniquement dans le cas des *TRs*. Un examen complet comprenant, en plus, l'étude d'apparition de l'instabilité absolue dans le cas des *LRs* ainsi que dans le cas des rouleaux obliques (Oblique Rolls, *ORs*) est bien au-delà de la portée de la présente investigation, mais qui fait l'objet de prochains travaux de recherche au sein de notre équipe. Une telle analyse complète a été présentée par Brevdo (2009) et Diaz and Brevdo (2011) pour l'étude de la convection mixte d'un fluide Newtonien en milieux poreux. Cependant, cela a été rendu possible grâce à la nature algébrique relativement simple de la relation de dispersion dans leur problème. Ceci n'est pas le cas pour la relation de dispersion différentielle obtenue dans la présente étude, et la recherche d'un vecteur d'ondes – correspondant à une vitesse de groupe nulle et vérifiant une condition de pincement simultanément dans deux plans du nombre d'onde complexe – devient alors une tâche énorme et nécessite encore une procédure efficace de calcul (Suslov, 2006).

Notre présente contribution peut être considérée, dans le cas des fluides visco-élastiques, comme un prolongement de l'étude de stabilité de l'état de repos purement conductif de la configuration de convection naturelle (RB), vers l'étude de

---

stabilité de la solution purement conductive (écoulement de Poiseuille) de la configuration de convection mixte de RBP ; aussi elle peut être vue comme étant une extension de l'étude des instabilités du problème de convection mixte RBP en fluides Newtoniens vers son équivalent en fluides visco-élastiques. En revanche, il y a une analogie — d'un point de vue phénoménologique — entre le présent problème et la convection de Rayleigh-Bénard-Poiseuille d'un mélange binaire Newtonien avec effet Soret (Jung et al., 1996; Büchel and Lücke, 2000a; Hu et al., 2007).

Cette première partie est organisée comme suit. Tout d'abord, les équations hydrodynamiques régissant le problème, y compris la solution de base stationnaire (à savoir, l'écoulement de Poiseuille conducteur) et la formulation de sa stabilité linéaire autour de cette solution purement conductive, sont présentées dans la Section I.3. Après une description des méthodes numériques et analytiques dans la Section I.4, les résultats les plus marquants de stabilité linéaire dans le 1<sup>er</sup> cas limite du problème (c.-à-d. le cas de la convection naturelle en fluides visco-élastiques) sont présentés dans la Section II.1. L'influence combinée des paramètres visco-élastiques et des paramètres de l'écoulement de Poiseuille sur les caractéristiques linéaires de l'instabilité à la naissance de la convection, est discutée dans la Section II.2. La Section II.4 présente les régions des instabilités convective et absolue pour les  $TRs$  dans le plan *Reynolds-Rayleigh* pour diverses combinaisons de paramètres rhéologiques du fluide. Dans les deux dernières sections II.2 et II.4, les résultats sont présentés et discutés pour les deux cas de fluides faiblement et fortement élastiques. Les principales conclusions de la présente partie sont résumées dans la Section "Conclusion de la 1<sup>ère</sup> partie".

# Chapitre I

## Instabilités spatio-temporelles : Formulation, méthodologie de résolution et validation

---

*Dans ce chapitre, nous présentons quelques propriétés des fluides visco-élastiques, formulons le problème de stabilité linéaire et les méthodes numériques de sa résolution et validons enfin la méthodologie suivie par comparaison avec des résultats numériques et expérimentaux existants. Les deux premières sections sur les fluides visco-élastiques et leurs lois de comportement ont été largement inspirées de l'ouvrage de *Barthès-Biesel (2010)*.*

---

### Sommaire

---

<b>I.1</b>	<b>Qu'est ce qu'un fluide visco-élastique ?</b>	<b>32</b>
<b>I.2</b>	<b>Hydrodynamique et lois de comportement d'un fluide visco-élastique</b>	<b>35</b>
I.2.1	Équations du mouvement	35
I.2.2	Lois de comportement visco-élastique linéaire	35
	Fluide de Maxwell	35
I.2.3	Lois de comportement visco-élastiques différentielles non linéaires	38
	Modèle de Maxwell convecté supérieur	39
	Écriture du modèle :	39
	Cas d'un cisaillement continu :	39

Cas de petite déformation : . . . . .	40
Modèle d'Oldroyd-B . . . . .	40
<b>I.3 Formulation du problème de stabilité linéaire . . . . .</b>	<b>41</b>
I.3.1 Les équations hydrodynamiques . . . . .	42
I.3.2 L'état de base . . . . .	43
I.3.3 L'analyse de stabilité linéaire . . . . .	45
<b>I.4 Méthodologie de résolution . . . . .</b>	<b>49</b>
I.4.1 Méthode de Galerkin . . . . .	49
I.4.2 Méthode de tir (Shooting Method) . . . . .	51
I.4.3 Analyse de stabilité temporelle . . . . .	53
I.4.4 Analyse de stabilité spatio-temporelle . . . . .	58
<b>I.5 Comparaison et validation avec des résultats numériques et expérimentaux antérieurs . . . . .</b>	<b>62</b>

---

## I.1 Qu'est ce qu'un fluide visco-élastique ?

En dehors des fluides Newtoniens purs (comme l'air, l'eau, l'huile de faible densité), la majorité des fluides naturels et des fluides industriels ne sont pas purs et contiennent des inclusions de plus ou moins grande taille et forment, de ce fait, des fluides dont le comportement n'obéit généralement pas à la loi de Newton : ces fluides micro-structurés sont appelés *fluides complexes non-Newtoniens*. Une certaine classe très importante parmi ces fluides non-Newtoniens est caractérisée par une loi de comportement dite *visco-élastique*. En réponse à une déformation donnée, un fluide visco-élastique présente à la fois un aspect *visqueux* (où les contraintes sont proportionnelles aux taux de déformation (i.e., vitesses de déformation)) et un aspect *élastique* (où les contraintes sont proportionnelles aux déformations), d'où l'origine de l'appellation : *visco-élastique*. La *pâte de silicone*, un polymère à base de silicone connue sous le nom de "Silly-Putty", est un exemple typique des fluides visco-élastiques. En effet, une boule de "Silly-Putty" rebondit sur le sol à la manière d'une balle élastique de caoutchouc (réponse aux temps courts) ; pourtant, si on la pose sur une surface horizontale, elle s'étale comme un fluide visqueux (réponse aux temps longs comme dans le cas de la figure I.1). Les *solutions de polymères*, le *shampooing*, certaines *émulsions* (agro-alimentaires, cosmétiques ou pharmaceutiques) ont eux aussi un comportement visco-élastique.



FIGURE I.1 – Silly Putty s'écoulant à travers un trou : réponse sous contrainte constante due aux forces de gravité à un temps relativement long (image extraite du site Wikipédia © Erik Skiff, création : 29 juin 2006).

Pour un fluide visco-élastique, le comportement à un instant  $t$  dépend souvent du cisaillement imposé dans les instants précédents  $t' < t$ . En contraste avec les fluides purement visqueux ou même à contrainte seuil, on fait donc intervenir l'histoire



du cisaillement et un temps de réponse propre au fluide. Ce temps de réponse est étroitement lié à la physique de la microstructure et à sa déformation sous l'effet de l'écoulement (Barthès-Biesel, 2010).

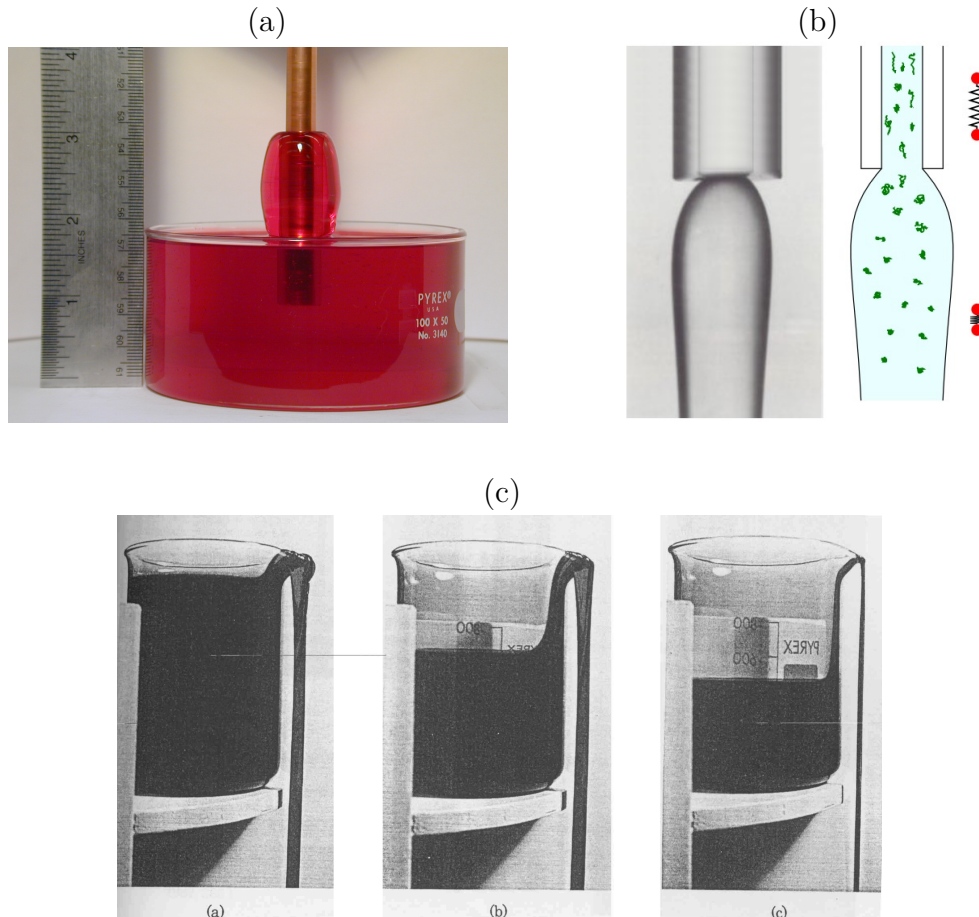


FIGURE I.2 – Effets typiques d'écoulement de fluides complexes visco-élastiques. Expérience (a) montrant l'effet Weissenberg lié aux contraintes normales : le fluide grimpe le long d'un bâton lorsqu'on lui applique une rotation suffisamment rapide (photographie extraite du site du groupe Gareth McKinley's Non-Newtonian Fluid Dynamics Research Group, M.I.T. © 2009). Expérience (b) montrant le gonflement d'une solution de polymères à l'extrusion également lié aux contraintes normales : cet effet est causé par la relaxation des chaînes de polymère qui ont été préalablement déformées par le cisaillement au sein de la conduite d'amenée (photographie tirée de Boger and Walters (1993) et modifiée par Chevallier (2009) afin de montrer la déformation des chaînes de polymère schématisées avec le modèle des haltères élastiques). Expérience (c) illustrant l'effet siphon ouvert dû aux propriétés élongationnelles exceptionnelles des solutions de polymères : une fois mis en écoulement, le fluide vidant le récipient ne s'arrête pas après l'arrêt de la sollicitation (la séquence montre le développement du siphon à partir du versement initial hors du bécher, photographies tirées de Boger and Walters (1993)).

D'une façon assez générale, le comportement d'un fluide visco-élastique se caractérise par un certain nombre d'effets spectaculaires et en apparence paradoxaux

(lorsqu'on le compare au comportement d'un fluide classique Newtonien dans des situations similaires), comme :

**L'effet des contraintes normales inégales en cisaillement simple :** la manifestation de ce phénomène se retrouve par exemple lorsque le blanc d'œuf cru (un liquide non-Newtonien contenant de nombreux polymères en suspension) remonte le long d'un arbre cylindrique en rotation au lieu d'être entraîné vers l'extérieur par la force centrifuge, comme le serait un fluide simple comme le miel liquide ; ce phénomène porte le nom d'effet *Weissenberg* (voir figure I.2(a)). Un autre effet spectaculaire, lié également aux différences des contraintes normales, porte le nom d'effet de gonflement du jet extrudé, « die swell » en anglais, pour lequel une solution de polymères s'écoulant par un orifice peut présenter un gonflement à l'extrusion très supérieur au diamètre de sortie de l'orifice d'injection (voir la figure I.2(b) montrant le gonflement à l'extrusion pour une solution aqueuse <sup>2</sup> de 2 % de polyacrylamide).

**Des effets élastiques :** Une démonstration des effets élastiques dans les liquides est l'expérience du siphon ouvert dans laquelle on peut siphonner un liquide élastique d'un béccher sans utiliser de tuyau (voir la figure I.2(c) qui illustre cette expérience réalisée avec une solution aqueuse de 0,75 % de Polyox WSR 301). Cette manifestation est due aux propriétés élongationnelles exceptionnelles des fluides visco-élastiques. Une autre expérience est celle de la détente élastique où un fluide visco-élastique, s'écoulant d'un récipient, peut même être coupé à l'aide de ciseaux tout en remontant ensuite de manière élastique dans son récipient initial.

**Une réponse transitoire à une variation brusque de l'écoulement :** dans de nombreux liquides, comme les solutions de polymères, les contraintes mettent un certain temps à se développer quand on applique un taux de cisaillement.

**Des effets d'histoire :** pour des conditions données, l'état de contrainte dépend de la manière dont on a mis le fluide en écoulement.

La composition et la microstructure de ces fluides contrôlent leurs propriétés d'écoulement dont la détermination est un enjeu industriel crucial pour leur mise en œuvre et pour le contrôle de qualité.

---

2. En chimie, une solution aqueuse est une solution liquide contenant plusieurs espèces chimiques, dont une ultra-majoritaire (i.e., le solvant) et des espèces ultra-minoritaires (i.e., les solutés ou « espèces chimiques dissoutes »).

## I.2 Hydrodynamique et lois de comportement d'un fluide visco-élastique

### I.2.1 Équations du mouvement

Dans tout ce qui suit le fluide considéré est incompressible :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{I.1})$$

On introduit le déviateur des contraintes  $\boldsymbol{\tau}$  défini par :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} \quad (\text{I.2})$$

ce qui est équivalent à :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (\text{I.3})$$

où par définition,  $\text{tr}(\boldsymbol{\tau}) = 0$ . On retrouve bien que pour un fluide Newtonien, le déviateur des contraintes (I.2) est :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{D} \quad (\text{I.4})$$

avec  $\mathbf{D}$  désignant le tenseur des taux de déformation.

La loi fondamentale de la dynamique appliquée à un fluide non-Newtonien est donc donnée par :

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P' + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad (\text{I.5})$$

ou si la gravité est incorporée à la pression :

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (\text{I.6})$$

Bien entendu, ces équations du mouvement doivent être complétées par la loi de comportement du fluide et par des conditions aux limites.

### I.2.2 Lois de comportement visco-élastique linéaire

Les lois visco-élastiques linéaires sont limitées aux petites déformations.

#### Fluide de Maxwell

Une manière simple de modéliser un comportement visco-élastique, consiste à ajouter les réponses élastiques et visqueuses. Dans le cas de petites déformations,

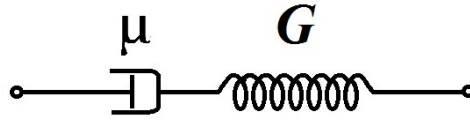


FIGURE I.3 – Modèle analogique de Maxwell associant en série un amortisseur visqueux de viscosité  $\mu$  et une élasticité de module  $G$ .

les contraintes  $\tau_v$  et  $\tau_e$  dues respectivement à une déformation visqueuse et à une déformation élastique sont données par :

$$\tau_v = 2 \mu \mathbf{D}_v \quad \text{et} \quad \tau_e = 2 G \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (\text{I.7})$$

où  $\mu$  et  $G$  sont des coefficients matériels constants (homogènes à une viscosité et à un module d'élasticité, respectivement),  $\mathbf{D}_v$  est le tenseur des vitesses de déformation et  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  est le tenseur des déformations relatives. Il y a alors plusieurs manières d'associer linéairement les réponses visqueuse et élastique selon le type de comportement auquel on s'intéresse. L'une d'entre elles consiste à supposer que la déformation d'un élément visco-élastique est la somme des déformations visqueuses et élastiques sous une même contrainte :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_v = \boldsymbol{\tau}_e \quad \text{et} \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_v + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \quad (\text{I.8})$$

Cette disposition est schématisée sur la figure I.3 où un élément fluide est modélisé par l'association en série d'un élément élastique (ressort de rigidité  $G$ ) et d'un élément visqueux (amortisseur de viscosité  $\mu$ ). Cette représentation est connue sous le terme de 'modèle de Maxwell'. La combinaison de (I.7) et (I.8) conduit à l'équation de Maxwell :

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \dot{\boldsymbol{\tau}} = 2 \mu \mathbf{D} \quad (\text{I.9})$$

où  $\lambda_1 = \mu/G$  représente le temps de réponse caractéristique du fluide. Une expérience classique consiste à soumettre le fluide à un cisaillement simple plan (dans le plan 1-3 par exemple). Le tenseur des déformation a pour seules composantes non nulles :

$$\varepsilon_t^{(1,3)} = \varepsilon_t^{(3,1)} = \frac{\gamma(t)}{2} \quad (\text{I.10})$$

et le déviateur des contraintes a également pour seules composantes non nulles :

$$\tau^{(1,3)} = \tau^{(3,1)} = \tau(t) \quad (\text{I.11})$$

Une mesure de **relaxation** consiste à imposer une déformation  $\gamma(t) = \gamma_0$  constante

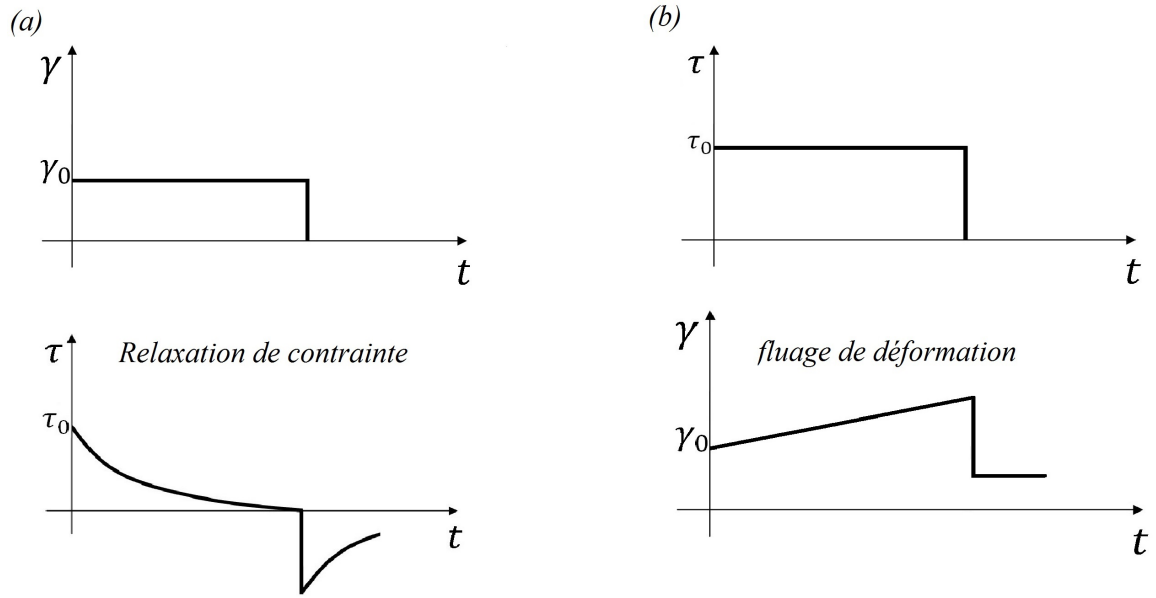


FIGURE I.4 – Réponses transitoires d'un modèle de Maxwell : (a) relaxation de la contrainte sous une déformation constante  $\gamma_0$ ; (b) fluage de la déformation sous une contrainte constante  $\tau_0$ .

à partir de l'instant  $t = 0$ , ce qui crée une contrainte instantanée d'origine élastique  $\tau_0 = G \gamma_0$  à l'instant  $t = 0$ . Comme  $\varepsilon_t$  est constant,  $\mathbf{D} = 0$ , et on observe une décroissance exponentielle de la contrainte à partir de la valeur  $\tau_0$  (figure I.4(a)) :

$$\tau(t) = \tau_0 \exp(-t/\lambda_1) = G \gamma_0 \exp(-t/\lambda_1)$$

Quand on revient à une déformation nulle, la contrainte diminue instantanément de la contribution élastique puis revient exponentiellement à zéro (figure I.4(a)). Une expérience de relaxation est caractérisée par une fonction de relaxation  $\phi(t)$  :

$$\phi(t) = \tau(t)/\gamma_0 = G \exp(-t/\lambda_1) = \frac{\mu}{\lambda_1} \exp(-t/\lambda_1)$$

Inversement, on peut effectuer une expérience de **fluage** où on applique une contrainte constante  $\tau(t) = \tau_0$  au temps  $t = 0$ . Après une réponse élastique instantanée, la déformation du fluide augmente linéairement avec le temps :

$$\gamma(t) = \frac{\tau_0}{G} (1 + t/\lambda_1)$$

Après arrêt de la sollicitation ( $\tau = 0$ ), la déformation diminue instantanément de la contribution élastique puis reste constante (figure I.4(b)). La fonction de fluage  $J(t)$

est définie par :

$$J(t) = \gamma(t)/\tau_0 = \frac{1}{G} (1 + t/\lambda_1)$$

Ces expériences de relaxation ou de fluage sont faciles à réaliser dans un viscosimètre rotatif où l'on imposera soit la déformation (relaxation) soit le couple (fluage) et où l'on mesurera la réponse associée correspondante. L'analyse des courbes expérimentales de relaxation ou de fluage permet de remonter aux paramètres  $\mu$  et  $\lambda_1$  du modèle.

L'intérêt principal du modèle de Maxwell est la prise en compte simple des effets temporels du comportement, mais il reste limité aux petites déformations. Il est facile de vérifier que sous un taux de cisaillement constant, la viscosité apparente est constante et qu'il n'y a pas d'effets de contraintes normales.

Une autre limitation du modèle de Maxwell est qu'il ne présente qu'un seul temps de relaxation, ce qui ne permet pas toujours une bonne correspondance avec les mesures expérimentales en relaxation ou en fluage. Un modèle de Maxwell généralisé avec  $N$  temps de relaxation s'obtient en associant en parallèle  $N$  modèles avec chacun son temps de réponse propre  $\lambda_n$ .

### **I.2.3 Lois de comportement visco-élastiques différentielles non linéaires**

On ne se limite plus aux petites déformations et on cherche maintenant des lois valables quelle que soit la déformation. On entre donc dans le domaine des lois non linéaires dont l'exploitation ne peut être que numérique. Il existe actuellement des codes de calcul commerciaux pour la résolution de problèmes de mécanique des fluides non-Newtoniens où différentes lois de comportement sont programmées.

On se contente ici d'exposer brièvement les lois visco-élastiques différentielles non linéaires qui nous intéressent dans la présente étude, bien qu'il existe dans la littérature de nombreuses autres formes de lois visco-élastiques intégrales non linéaires.

Pour ce qui concerne les lois différentielles non linéaires, on recherche une loi reliant directement  $\boldsymbol{\tau}$  et ses dérivées à la déformation. La loi de Maxwell (I.9) est un bon point de départ avant d'explorer les lois non linéaires. Plusieurs lois différentielles non linéaires ont été proposées dans la littérature, mais on se contente ici de lois à trois paramètres.

### Modèle de Maxwell convecté supérieur

Le modèle de Maxwell convecté supérieur est une généralisation du modèle de Maxwell tenant compte des non-linéarités cinématiques. Ce modèle a été proposé pour la première fois par *James Gardner Oldroyd* (Oldroyd, Feb 1950).

**Écriture du modèle :** Le modèle de Maxwell convecté supérieur (ainsi que le modèle d'Oldroyd-B) présente l'avantage par rapport au modèle linéaire de Maxwell de respecter le principe d'invariance par rapport au repère considéré (i.e., principe d'objectivité, en anglais : frame invariance). L'introduction de cette nouvelle condition mène à la réécriture suivante :

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 (\boldsymbol{\tau})^\nabla = 2 \mu \mathbf{D} \quad (\text{I.12})$$

où :

- $\boldsymbol{\tau}$  est le tenseur des contraintes,
- $\lambda_1$  est le temps de relaxation,
- $(\boldsymbol{\tau})^\nabla$  est la dérivée convectée supérieure temporelle du tenseur des contraintes :

$$(\boldsymbol{\tau})^\nabla = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\tau} - (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{u}) \quad (\text{I.13})$$

- $\mathbf{u}$  est la vitesse du fluide,
- $\mu$  est la viscosité à cisaillement nul,
- $\mathbf{D}$  est le tenseur des taux de déformation.

**Cas d'un cisaillement continu :** Dans ce cas, seule deux composantes du tenseur des contraintes sont non-nulles :

$$\tau^{(1,3)} = \mu \gamma^{(1,3)} \quad \text{et} \quad \tau^{(1,1)} = 2 \mu \lambda_1 \left( \gamma^{(1,3)} \right)^2 \quad (\text{I.14})$$

où  $\gamma^{(1,3)}$  est le taux de cisaillement.

Ainsi, le modèle de Maxwell convecté supérieur prédit, dans le cadre d'un cisaillement continu, que la contrainte de cisaillement est proportionnelle au taux de cisaillement et que la contrainte normale est proportionnelle au carré du taux de cisaillement.

**Différences de contraintes normales** – En ce qui concerne les différences de contraintes normales, la première différence est proportionnelle au carré du taux

de cisaillement et la seconde est toujours nulle :

$$N_1 = \tau^{(1,1)} - \tau^{(2,2)} = 2 \mu \lambda_1 \left( \gamma^{(1,3)} \right)^2 \quad \text{et} \quad N_2 = \tau^{(2,2)} - \tau^{(3,3)} = 0 \quad (\text{I.15})$$

En d'autres termes, ce modèle prédit l'apparition de la première différence de contraintes normales, mais ne prédit ni le comportement non-Newtonien de la viscosité de cisaillement ni la seconde différence de contraintes normales.

Les résultats de ce modèle concernant les contraintes normales sont en accord en première approximation avec ce qui peut être observé pour des mélanges de polymères à des taux de cisaillement modérés (expérimentalement,  $N_2 \ll N_1$ ). Cependant, la viscosité constante avec le taux de cisaillement n'est pas en accord avec les observations expérimentales limitant ainsi l'utilisation du modèle. Néanmoins, dans le cadre de la présente thèse, on ne s'intéresse qu'à des solutions diluées de polymères (consistant en un solvant Newtonien et un soluté polymère) qui peuvent être très élastiques tout en conservant une viscosité sensiblement constante. En conséquence, elles sont bien représentées par le modèle constitutif d'Oldroyd-B (Bird et al., 1987) qui incorpore bien évidemment le modèle de Maxwell convecté supérieur, ce qui justifie – pour la présente étude – le choix et l'intérêt qu'on a porté à ce modèle rhéologique de comportement.

**Cas de petite déformation :** Pour le cas de petite déformation, les non-linéarités introduites par la dérivée convectée supérieure disparaissent et le modèle devient un modèle ordinaire de Maxwell.

### Modèle d'Oldroyd-B

Le modèle d'Oldroyd-B est un modèle constitutif utilisé pour décrire l'écoulement de fluides visco-élastiques. Ce modèle peut être considéré comme une extension du modèle de Maxwell convecté supérieur et est équivalent à un fluide rempli de suspensions présentant des propriétés d'amortisseurs et de ressorts élastiques (modèle des haltères élastiques). Le modèle porte le nom de son créateur *James Gardner Oldroyd* (Oldroyd, Feb 1950).

Le modèle peut être écrit comme :

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 (\boldsymbol{\tau})^\nabla = 2 \mu \left( \mathbf{D} + \lambda_2 (\mathbf{D})^\nabla \right) \quad (\text{I.16})$$

où :

- $\boldsymbol{\tau}$  est le tenseur des contraintes,
- $\lambda_1$  est le temps de relaxation,



- $\lambda_2$  le temps de retardation ( $\lambda_2 = \frac{\mu_s}{\mu} \lambda_1$ ),
- $(\boldsymbol{\tau})^\nabla$  est la dérivée convectée supérieure temporelle (i.e., dérivée d'Oldroyd) du tenseur des contraintes introduite précédemment (cf. équation (I.13)).
- $\mathbf{u}$  est le vecteur vitesse du fluide,
- $\mu$  représente la viscosité totale du fluide visco-élastique composé du solvant et du polymère :  $\mu = \mu_s + \mu_p$ ,
- $\mathbf{D}$  est le tenseur du taux de déformation (ou taux de cisaillement) :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (\text{I.17})$$

Le modèle peut également être écrit divisé en partie polymère (visco-élastique) séparément de la partie solvant Newtonien (se reporter, par exemple, à [Owens and Phillips \(2002\)](#)) :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_s + \boldsymbol{\tau}_p \quad (\text{I.18})$$

où :

$$\boldsymbol{\tau}_s = 2 \mu_s \mathbf{D} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau}_p + \lambda_1 (\boldsymbol{\tau}_p)^\nabla = 2 \mu_p \mathbf{D} \quad (\text{I.19})$$

En combinant les équations (I.18) et (I.19) on retrouve bien l'équation constitutive mentionnée précédemment du modèle d'Oldroyd-B (I.16).

Même si le modèle d'Oldroyd-B donne de bonnes approximations pour des fluides visco-élastiques en écoulement de cisaillement, il présente une singularité non physique dans un écoulement élongationnel, où les suspensions de polymère sont infiniment étirées. Ceci est toutefois spécifique à un écoulement idéalisé ; dans le cas d'un flux à travers une géométrie à fente cruciforme (i.e. à fente en croix), l'écoulement élongationnel n'est pas idéal de sorte que la contrainte, même si singulière, reste intégrable : cela revient à dire que la contrainte est infinie uniquement dans une région correspondante infiniment petite ([Poole et al., Oct 2007](#)).

Dans le cas limite où la viscosité du solvant tend vers zéro, le modèle d'Oldroyd-B se décline sous la forme du modèle de Maxwell convecté supérieur.

### I.3 Formulation du problème de stabilité linéaire

À présent, nous allons présenter la configuration du problème à étudier. Considérons une couche de fluide incompressible avec un comportement visco-élastique décrit par le modèle rhéologique d'Oldroyd-B. La couche fluide est de hauteur  $h$  dans la direction verticale  $z^*$ , avec la cote  $z^* = 0$  en son centre <sup>3</sup>. Cette couche a

3. Comme signalé auparavant, l'indice supérieur \* désigne une grandeur dimensionnée tandis qu'on enlève l'étoile lorsqu'il s'agit de grandeurs adimensionnées.

une étendue infinie dans les deux directions horizontales  $x^*$  et  $y^*$ . Les parois horizontales supérieure et inférieure sont maintenues respectivement à des températures constantes  $T_0^*$  et  $T_1^*$  ( $> T_0^*$ ), et un gradient constant de pression est simultanément imposé dans la direction de l'abscisse  $x^*$ . Toutes les propriétés physiques sont supposées constantes (sauf pour le terme de la masse volumique  $\rho$ ) et sont évaluées à la température de référence  $T_0^*$ . Elles sont désignées comme suit :  $\nu$  pour la viscosité cinématique,  $\mu$  pour la viscosité dynamique,  $K$  pour la diffusivité thermique,  $\rho$  pour la masse volumique,  $\beta$  pour le coefficient de dilatation thermique,  $g$  pour l'accélération gravitationnelle,  $\mathbf{e}_z$ <sup>4</sup> pour le vecteur unitaire dirigé positivement vers le haut, et enfin  $\lambda_1^*$  et  $\lambda_2^*$  respectivement pour les deux temps caractéristiques de relaxation et de retardation du fluide visco-élastique.

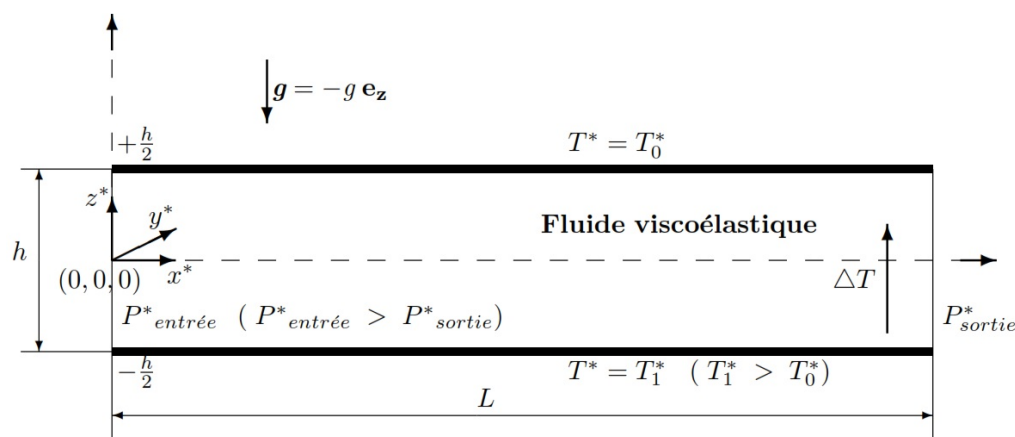


FIGURE I.5 – La configuration du problème de Rayleigh-Bénard-Poiseuille de fluide visco-élastique : une cellule horizontale de hauteur  $h$ , est remplie d'un fluide visco-élastique, soumis simultanément à un gradient de température vertical et un gradient de pression horizontal. Le système se trouve dans le champ gravitationnel terrestre et les paramètres physiques sont exprimés en grandeurs dimensionnées.

### I.3.1 Les équations hydrodynamiques

L'approximation d'*Oberbeck-Boussinesq* est considérée valable dans le cadre du présent travail. Ceci est vrai puisque tous les paramètres physiques du problème, notamment ceux susmentionnés, restent constants dans les conditions d'expérience de la présente étude excepté le terme de la masse volumique  $\rho$  dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Bien que la valeur de cette masse volumique  $\rho$  varie très peu, les mouvements convectifs créés au sein du système

4. On utilise la typographie en gras pour désigner des grandeurs tensorielles (vecteurs et matrices carrées) comme dans ce cas du vecteur unitaire  $\mathbf{e}_z$ .

fluide sont à l'origine dus à cette légère variation.

Ainsi, les équations prises dans cette approximation et qui régissent le problème de cette 1<sup>ère</sup> partie s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (\text{I.20})$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* \right) = -\nabla P^* + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^* + \rho \beta (T^* - T_0^*) g \mathbf{e}_z, \quad (\text{I.21})$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) T^* = K \nabla^2 T^*, \quad (\text{I.22})$$

$$\boldsymbol{\tau}^* + \lambda_1^* (\boldsymbol{\tau}^*)^\nabla = \mu \left( \boldsymbol{\gamma}^* + \lambda_2^* (\boldsymbol{\gamma}^*)^\nabla \right). \quad (\text{I.23})$$

La dérivée temporelle convectée supérieure (dérivée d'Oldroyd) du tenseur des contraintes est définie comme suit :

$$(\boldsymbol{\tau}^*)^\nabla = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \boldsymbol{\tau}^* - (\nabla \mathbf{u}^*)^T \cdot \boldsymbol{\tau}^* - \boldsymbol{\tau}^* \cdot (\nabla \mathbf{u}^*), \quad (\text{I.24})$$

où  $\mathbf{u}^*$ ,  $P^*$  et  $T^*$  représentent respectivement les champs de vecteur vitesses, de la pression motrice et de température,  $\boldsymbol{\tau}^*$  est le tenseur des contraintes et  $\boldsymbol{\gamma}^*$  le tenseur des taux de déformation<sup>5</sup>. Les équations ci-dessus sont soumises aux conditions aux limites imposées au niveau des parois horizontales supérieure et inférieure et qui s'écrivent :

$$\mathbf{u}^* = 0 \quad \text{en } z^* = \pm \frac{h}{2}, \quad (\text{I.25})$$

$$T^* = \begin{cases} T_0^* & \text{en } z^* = +\frac{h}{2} \\ T_1^* & \text{en } z^* = -\frac{h}{2}. \end{cases} \quad (\text{I.26})$$

### I.3.2 L'état de base

Le système (I.20)–(I.24) soumis aux conditions aux limites (I.25) et (I.26), a un état d'équilibre stationnaire qui correspond à une combinaison simultanée d'un écoulement de Poiseuille plan et d'une stratification thermique verticale (i.e., écoulement

5. Sachant que  $\boldsymbol{\gamma}^* = (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) = 2 \mathbf{D}$ .

de Poiseuille purement conductif). Cet état de base s'écrit :

$$\mathbf{u}_b^* = U_0^* \left( 1 - 4 \frac{z^{*2}}{h^2} \right) \mathbf{e}_x, \quad (\text{I.27})$$

$$T_b^* = T_0^* + (T_1^* - T_0^*) \left( \frac{1}{2} - \frac{z^*}{h} \right), \quad (\text{I.28})$$

$$P_b^* = P_0^* + \frac{\rho \beta g h (T_1^* - T_0^*)}{2} \left( \frac{z^*}{h} - \frac{z^{*2}}{h^2} \right) - \frac{8 \mu U_0^*}{h} \left( \frac{z^*}{h} \right), \quad (\text{I.29})$$

avec  $U_0^*$  désignant la vitesse maximale de l'écoulement de base (se situant au milieu de la couche fluide). Le tenseur des contraintes associé à la solution de base s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau}_b^*(z^*) = \begin{pmatrix} 128 \frac{\mu (\lambda_1^* - \lambda_2^*) (U_0^*)^2}{h^2} \frac{z^{*2}}{h^2} & 0 & -8 \frac{U_0^* \mu}{h} \frac{z^*}{h} \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 \frac{U_0^* \mu}{h} \frac{z^*}{h} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{I.30})$$

où les composantes des contraintes de cisaillement  $(\tau_b^*)^{(1,3)} = (\tau_b^*)^{(3,1)} = -8 (U_0^* \mu / h^2) z^*$ , varient linéairement le long de la direction verticale du canal exactement comme dans le cas Newtonien. Pour le modèle visco-élastique d'Oldroyd-B, cette variation linéaire de la **contrainte de cisaillement** induit des variations quadratiques en  $z^*$  au niveau de la **contrainte normale**  $(\tau_b^*)^{(1,1)} = 128 \mu (\lambda_1^* - \lambda_2^*) (U_0^{*2} / h^4) (z^*)^2$ . En comparaison, cette composante normale est nulle dans le cas Newtonien, pour lequel  $\lambda_1^* = \lambda_2^*$  (i.e.  $\Gamma = 1$ ).

À présent, un adimensionnement est appliqué à l'état de base. Cet adimensionnement est basé sur  $h$ ,  $U_0^*$ ,  $\mu U_0^* / h$  et  $\Delta T^* = T_1^* - T_0^*$  comme étant les grandeurs de référence respectivement pour la longueur, la vitesse, les composantes de contraintes et la température. Ainsi, la solution de base (I.27)–(I.30) se réécrit maintenant sous la forme adimensionnelle :

$$\mathbf{u}_b = (1 - 4 z^2) \mathbf{e}_x = f(z) \mathbf{e}_x, \quad (\text{I.31})$$

$$T_b = \frac{1}{2} - z, \quad (\text{I.32})$$

$$\tau_b^{(1,3)} = -8 z, \quad (\text{I.33})$$

$$\tau_b^{(1,1)} = 128 De \left( 1 - \frac{\lambda_2^*}{\lambda_1^*} \right) z^2, \quad (\text{I.34})$$

où  $De$  est le nombre de Deborah :  $De = \lambda_1^* U_0^* / h$ . Ce paramètre est une mesure de l'élasticité du fluide ou, en d'autres termes, une mesure de la réaction retardée du

fluide à sa propre advection. Il est important de noter que les contraintes  $\tau_b^{(1,3)}$  et  $\tau_b^{(1,1)}$  sont reliées l'une à l'autre, *comme évoqué précédemment*, et l'expression qui les relie est donnée par :

$$\tau_b^{(1,1)} = 2 De \left( 1 - \frac{\lambda_2^*}{\lambda_1^*} \right) (\tau_b^{(1,3)})^2. \quad (\text{I.35})$$

### I.3.3 L'analyse de stabilité linéaire

Une fois l'état de base (I.27)–(I.30) défini, on peut vérifier sa stabilité asymptotique ( $t \rightarrow \infty$ ) en suivant le formalisme classique de stabilité linéaire. Pour ce faire, les variables *dépendantes* dans les équations régissant le problème (I.20)–(I.26) sont remplacées par l'état de base *superposé* avec des **perturbations infinitésimales**. Étant donné que ces perturbations sont considérées petites, on peut désormais linéariser les équations résultantes pour en déduire des équations exprimées en termes de perturbations. Il convient ici de noter que le champ de pression est éliminé en appliquant le *rotationnel* deux fois (i.e., le *double rotationnel*) à l'équation de quantité de mouvement exprimée en termes de perturbations. Ces équations sont écrites sous forme adimensionnelle en appliquant cette fois-ci une nouvelle adimensionnalisation basée sur  $h$ ,  $h^2/K$ ,  $K/h$ ,  $\mu K/h^2$  et  $\Delta T^* = T_1^* - T_0^*$  comme grandeurs de référence respectivement pour la longueur, le temps, la vitesse de perturbation, les contraintes et la température. Ces équations de perturbations gouvernant le problème, peuvent être combinées de manière à obtenir en fin de compte un système formé seulement de **deux équations** : une pour la composante verticale de la vitesse de perturbation “ $w_p$ ” et l'autre pour la température de perturbation “ $\theta_p$ ”,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w_p \right) + Re \left( f(z) \nabla^2 - f''(z) \right) \frac{\partial w_p}{\partial x} - Ra \nabla_{\perp}^2 \theta_p \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \tau_p^{(1,1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_p^{(2,2)}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_p^{(1,2)}}{\partial x \partial y} \right) \\ & + \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial \tau_p^{(1,3)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_p^{(2,3)}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \nabla_{\perp}^2 \tau_p^{(3,3)} = 0, \end{aligned} \quad (\text{I.36})$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 + Re Pr f(z) \frac{\partial}{\partial x} \right) \theta_p - w_p = 0, \quad (\text{I.37})$$

avec les opérateurs supplémentaires introduits et qui sont définis respectivement comme :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{et} \quad \nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (\text{I.38})$$

Les deux équations de perturbations précédentes sont soumises aux conditions aux limites imposées au niveau des parois supérieure et inférieure du canal. Ces

conditions aux bords s'écrivent après adimensionnalisation :

$$w_p = \frac{\partial w_p}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = \pm 1/2, \quad (\text{I.39})$$

$$\theta_p = 0 \quad \text{en } z = \pm 1/2. \quad (\text{I.40})$$

la nouvelle adimensionnalisation dont on est en train de décrire ici, a été appliquée à tout l'ensemble des équations hydrodynamiques, aux conditions aux limites et à l'état de base.

Afin d'obtenir les équations de contraintes de perturbation  $\tau_p^{(i,j)}$ , on a été amené d'abord à l'adimensionnement de la relation constitutive (I.23), ensuite à sa linéarisation autour de l'état de base. Ces contraintes dépendent des autres perturbations, et leur dépendance fonctionnelle est donnée en annexe A sous forme modale (i.e., la forme issue de l'analyse par modes normaux de Fourier); elles ont été données pour le cas bidimensionnel 2D. Il est important de remarquer que le caractère *non linéaire* de la relation constitutive (I.23) fait intervenir la vitesse et les contraintes de l'état de base dans les équations gouvernantes du problème. Une telle particularité augmente considérablement la complexité du modèle et, par conséquent, la complexité de son étude et de sa simulation numérique, et ce en comparaison avec les deux cas limites : le cas de la convection de Rayleigh-Bénard (RB) de fluides visco-élastiques d'Oldroyd-B (i.e.,  $Re = 0$  et  $\Gamma \neq 1$ ) et le cas de la convection de Rayleigh-Bénard-Poiseuille (RBP) de fluides Newtoniens (i.e.,  $Re \neq 0$  et  $\Gamma = 1$ ), qui sont relativement moins complexes à l'étude.

Les nombres sans dimensions figurant dans les équations gouvernantes du problème (I.36) et (I.37) sont le nombre de Rayleigh  $Ra$ , le nombre de Reynolds  $Re$ , le nombre de Prandtl  $Pr$ , le temps de relaxation adimensionné  $\lambda_1$  (ou le nombre d'élasticité du fluide) et le temps de retardation adimensionné  $\lambda_2$ . Ils sont définis comme suit :

$$Ra = \frac{g \beta \Delta T^* h^3}{\nu K}, \quad (\text{I.41})$$

$$Re = \frac{U_0^* h}{\nu}, \quad (\text{I.42})$$

$$Pr = \frac{\nu}{K}, \quad (\text{I.43})$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_1^*}{h^2/K}, \quad (\text{I.44})$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_2^*}{h^2/K}, \quad (\text{I.45})$$

où le rapport entre les deux temps caractéristiques de retardation et de relaxation

$$\Gamma = \frac{\lambda_2^*}{\lambda_1^*}, \quad (\text{I.46})$$

est utilisé dans cette étude à la place de  $\lambda_2$ . Les fluides typiques répondant à la relation constitutive d'Oldroyd-B (I.23) sont des solutions composées d'un solvant Newtonien et un soluté polymère ayant des viscosités  $\mu_s$  et  $\mu_p$ , respectivement. La viscosité totale de la solution est donnée par  $\mu = \mu_s + \mu_p$  et, par conséquent, le rapport entre les temps caractéristiques de retardation et de relaxation est  $\Gamma = \mu_s/\mu$  (Bird et al., 1987). En outre, le nombre  $\lambda_1$  est employé à la place du nombre de  $De$  en tant que mesure de l'élasticité de fluide dans presque toute la littérature disponible portant sur l'étude de la *convection thermique de fluides visco-élastiques* (Green, 1968; Vest and Arpaci, 1969; Sokolov and Tanner, 1972; Eltayeb, 1977; Rosenblat, 1986; Martinez-Mardones and Perez-Garcia, 1990; Larson, 1992; Martinez-Mardones and Perez-Garcia, 1992; Martinez-Mardones et al., 1996; Park and Lee, 1996; Kolodner, 1998; Li and Khayat, 2005). Cependant, ce nombre  $\lambda_1$  est maintenant une mesure de la réaction retardée du fluide non pas à sa propre advection, mais plutôt à sa propre diffusion thermique en raison de l'échelle de référence de temps choisie pour l'adimensionnement dans la définition (I.44). Ceci est un choix plus adéquat pour la présente étude, car elle est limitée aux faibles nombres de Reynolds. En conséquence, le nombre de  $De$  est remplacé par  $\lambda_1$  dans la relation (I.34) avec  $De = \lambda_1 Re Pr$ . Enfin, il convient de noter que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$ , c'est-à-dire  $\Gamma \in [0, 1]$  et que le modèle rhéologique de Maxwell est retrouvé lorsque  $\Gamma = 0$  (ou  $\lambda_2 = 0$ ) tandis qu'on retrouve le modèle d'un fluide Newtonien lorsque  $\Gamma = 1$  (ou  $\lambda_1 = \lambda_2$ ).

Nous cherchons ensuite les modes normaux tridimensionnels qui s'écrivent sous la forme :

$$\{w_p, \theta_p, \tau_p^{(i,j)}\}(x, y, z, t) = \{w_n, \theta_n, \tau_n^{(i,j)}\}(z) \exp(i(k_x x + k_y y - \omega t)), \quad (\text{I.47})$$

où  $k_x$  et  $k_y$  sont les nombres d'onde dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement, et  $\omega$  la fréquence. Tous ces trois derniers paramètres sont des nombres complexes, puisque les deux types d'analyses de la présente étude consiste en une analyse de stabilité temporelle et spatiale également.

Lors de la substitution des modes normaux (I.47) dans les équations (I.36) et (I.37), ainsi que dans les équations de perturbation associées aux contraintes, il est possible de réduire le système résultant en un ensemble de deux équations différentielles ordinaires (EDOs) couplées, et exprimées uniquement en fonction des amplitudes des modes normaux de perturbation linéaires  $w_n(z)$  et  $\theta_n(z)$ . Les deux

équations en question sont :

$$\frac{i}{Pr} \left( (k_x Re Pr f(z) - \omega) (D^2 - k^2) - k_x Re Pr f''(z) \right) w_n(z) + k^2 D \tau_n^{(3,3)}(z) + DL(w_n(z)) + (D^2 + k^2) J(w_n(z)) + Ra k^2 \theta_n(z) = 0, \quad (I.48)$$

$$w_n(z) + (D^2 - k^2 - i k_x Re Pr f(z) + i \omega) \theta_n(z) = 0 \quad (I.49)$$

où  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$  et  $D = d/dz$ . De plus, les dépendances des opérateurs  $L$  et  $J$  ainsi que de la composante de contrainte  $\tau_n^{(3,3)}(z)$  en fonction de  $w_n(z)$ , sont données par les expressions :

$$\begin{aligned} L(w_n(z)) &= -k_x^2 \tau_n^{(1,1)}(z) - k_y^2 \tau_n^{(2,2)}(z) - 2 k_x k_y \tau_n^{(1,2)}(z) \quad (I.50) \\ &= \left[ 2 i k_x Re Pr \lambda_1 f'(z) J(w_n(z)) + \left( 2 i k_x Re Pr \lambda_1 (2 \Gamma - 1) f'(z) D^2 \right. \right. \\ &+ 4 k_x^2 Re^2 Pr^2 \lambda_1^2 (1 - \Gamma) (f'(z))^2 + 2 k^2 + 2 i k^2 k_x Re Pr \lambda_1 \Gamma f(z) \\ &- 2 i k^2 \omega \lambda_1 \Gamma D + 4 k_x^2 Re^2 Pr^2 \lambda_1^2 (1 - \Gamma) f'(z) f''(z) \\ &\left. \left. + 2 i k^2 k_x Re Pr \lambda_1 \Gamma f'(z) \right) w_n(z) \right] / \left[ 1 + i k_x Re Pr \lambda_1 f(z) - i \omega \lambda_1 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(w_n(z)) &= i k_x \tau_n^{(1,3)}(z) + i k_y \tau_n^{(2,3)}(z) \quad (I.51) \\ &= \left[ i k_x Re Pr \lambda_1 f'(z) \tau_n^{(3,3)}(z) - \left( 2 i k_x Re Pr \lambda_1 \Gamma f'(z) D - i \omega \lambda_1 \Gamma D^2 \right. \right. \\ &+ (1 + k^2) (1 + i k_x Re Pr \lambda_1 \Gamma f(z)) + i k_x Re Pr \lambda_1 (1 - \Gamma) f''(z) - i \omega k^2 \lambda_1 \Gamma \\ &\left. \left. + 2 k_x^2 Re^2 Pr^2 \lambda_1^2 (1 - \Gamma) (f'(z))^2 \right) w_n(z) \right] / \left[ 1 + i k_x Re Pr \lambda_1 f(z) - i \omega \lambda_1 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_n^{(3,3)}(z) &= \left[ \left( (2 + 2 i k_x Re Pr \lambda_1 \Gamma f(z) - 2 i \omega \lambda_1 \Gamma) D \right. \right. \quad (I.52) \\ &\left. \left. + 2 i k_x Re Pr \lambda_1 (1 - \Gamma) f'(z) \right) / \left( 1 + i k_x Re Pr \lambda_1 f(z) - i \omega \lambda_1 \right) \right] w_n(z), \end{aligned}$$

On rajoute aux deux équations de conservation précédentes, les conditions aux limites imposées aux perturbations de vitesse et de température, et qui s'écrivent :

$$w_n = D w_n = 0 \quad \text{en } z = \pm 1/2, \quad (I.53)$$

$$\theta_n = 0 \quad \text{en } z = \pm 1/2, \quad (I.54)$$

obtenues en substituant la relation (I.47) dans les conditions aux limites (I.39) et (I.40), respectivement.



## I.4 Méthodologie de résolution

### I.4.1 Méthode de Galerkin

Des solutions approximatives du système (I.48)-(I.54) peuvent être obtenues en utilisant la méthode standard de Galerkin, où les amplitudes des modes normaux de perturbation de la vitesse verticale et de température sont développées respectivement comme suit :

$$w_n(z) = \sum_{i=0}^N \psi_i(z) \bar{w}_i \quad \text{avec} \quad \psi_i(z) = (1 - 4z^2)^2 z^i \quad (\text{I.55})$$

et

$$\theta_n(z) = \sum_{i=0}^N \phi_i(z) \bar{\theta}_i \quad \text{avec} \quad \phi_i(z) = (1 - 4z^2) z^i, \quad (\text{I.56})$$

Dans ces expansions,  $\psi_i(z)$  et  $\phi_i(z)$  sont les fonctions propres alors que  $\bar{w}_i$  et  $\bar{\theta}_i$  sont les coefficients des amplitudes de perturbation. En multipliant l'équation (I.48) par  $\psi_i(z)$  ainsi que (I.49) par  $\phi_i(z)$  et en intégrant leurs produits sur la longueur du domaine, cela conduit à :

$$\sum_{j=0}^N \mathcal{A}_{i,j} \bar{w}_j + \sum_{j=0}^N \mathcal{B}_{i,j} \bar{\theta}_j = 0 \quad \text{et} \quad \bar{w}_i + \sum_{j=0}^N \mathcal{C}_{i,j} \bar{\theta}_j = 0, \quad (\text{I.57})$$

qui peuvent être combinées dans l'équation unique :

$$\sum_{j=0}^N \mathcal{D}_{i,j} \bar{\theta}_j = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{D} = \mathcal{B} - \mathcal{A} \mathcal{C}, \quad (\text{I.58})$$

ce qui donne des solutions non-triviales uniquement lorsque l'équation suivante est satisfaite :

$$\mathfrak{D} = \det[\mathcal{D}] = 0 \quad (\text{I.59})$$

Cette équation algébrique qui en résulte représente la *relation de dispersion*.

Dans le présent travail, une première analyse est effectuée en utilisant initialement une approximation de la *relation algébrique de dispersion* obtenue en prenant  $N = 0$ , soit en utilisant une troncature du 1<sup>er</sup> ordre. Une telle approximation a été déjà employée auparavant par [Kolkka and Ierley \(1987\)](#) dans leur analyse de stabilité linéaire qui vise à étudier les seuils d'apparition de la convection de Rayleigh-Bénard (RB) dans des fluides visco-élastiques d'Oldroyd-B. Dans leur étude, ils se sont in-

téressés à différents cas de conditions aux limites y compris celles correspondant à notre cas de configuration (i.e., parois supérieure et inférieure solides avec températures fixes au niveau des parois). Ce problème est similaire à celui de la présente thèse, mais uniquement dans le cas limite de convection naturelle, c.-à-d. lorsque l'écoulement de base est absent. Ils ont également obtenu des solutions numériques encore plus précises en utilisant la méthode spectrale de Chebyshev et ont noté que les solutions de Galerkin du 1<sup>er</sup> ordre étaient précises à 5%, si on regarde uniquement le cas correspondant aux conditions aux limites de notre problème (parois solides avec températures fixes au niveau des parois).

Dans leur travail, [Carrière and Monkewitz \(1999\)](#) ont également utilisé une troncature de Galerkin du 1<sup>er</sup> ordre. Lorsque l'on étudie la convection de RB de fluides Newtoniens, ils ont trouvé un nombre de Rayleigh critique de 1749.98, qui est supérieur de seulement 2,5 % à la valeur exacte. En outre, ces auteurs ont aussi examiné l'influence de l'écoulement de base, et qui a été également explicitée dans leur approximation basée sur le premier mode de Galerkin. Le comportement des seuils d'instabilité élucidé grâce à de cette formule analytique est en excellent accord avec le développement obtenu par [Müller et al. \(1992\)](#) pour de faibles nombres de Reynolds.

Afin d'étudier le présent problème, ces deux études antérieures nous ont motivés en premier lieu pour examiner ce développement basé sur la troncature du 1<sup>er</sup> terme de Galerkin. En raison de sa simplicité, un tel développement permet donc d'obtenir des expressions analytiques qui peuvent guider ultérieurement une analyse plus élaborée en terme de calcul numérique ainsi qu'elles peuvent être utiles pour de futures expériences en laboratoire. Même si les erreurs d'un tel développement sont élevées dans ses prévisions quantitatives, sa prédiction qualitative du comportement des seuils reste suffisamment précise pour guider les calculs numériques supplémentaires menés par la suite. En mettant  $N = 0$  tout en effectuant quelques manipulations symboliques, la relation algébrique de dispersion issue de cette troncature a été obtenue. Son équation est donnée en annexe B, en raison des termes très longs de ses coefficients. Cependant, dans la *limite de petites valeurs du nombre adimensionnel de Deborah* (avec  $De = \lambda_1 Re Pr$ ), cette relation de dispersion peut encore être simplifiée et ainsi réécrite de nouveau comme suit :

$$\mathfrak{D} = G(F_1 + k_x Re F_2) - \frac{27}{4} k^2 Ra (1 - i \omega \lambda_1)^2 = 0, \quad (\text{I.60})$$

où les paramètres supplémentaires sont définis comme :

$$G = 6k_x Re Pr - 7(\omega + i f_1), \quad (\text{I.61})$$

$$F_1 = (1 - i\omega \lambda_1)^2 \frac{\omega}{Pr} f_2 + i(1 - i\omega \lambda_1)(1 - i\omega \lambda_1 \Gamma) f_4, \quad (\text{I.62})$$

$$F_2 = -\frac{2}{11}(1 - i\omega \lambda_1)^2 f_3 + \lambda_1(1 - \Gamma) Pr f_5, \quad (\text{I.63})$$

et qui dépendent des coefficients, fonction du nombre d'onde  $k$ , et qui s'écrivent :

$$f_1 = k^2 + 10, \quad f_2 = k^2 + 12, \quad f_3 = 5k^2 + 22, \quad (\text{I.64})$$

$$f_4 = f_2^2 + 360 \quad \text{et} \quad f_5 = \frac{10}{11}k^4 + 24k^2 + 432. \quad (\text{I.65})$$

Il est important de noter que l'équation (I.60) se réduit à la relation de dispersion obtenue par [Kolkka and Ierley \(1987\)](#) pour le cas de la convection naturelle de RB dans des fluides visco-élastiques d'Oldroyd-B lorsque  $Re = 0$  et  $\Gamma \neq 1$ . En outre, elle se réduit à la relation de dispersion de [Carrière and Monkewitz \(1999\)](#) obtenue dans leur étude de convection mixte de RBP dans le cas des fluides Newtoniens lorsque  $\Gamma = 1$  et  $Re \neq 0$ .

Comme le montrent les prochaines sections du chapitre, le seul terme de la troncature de Galerkin ne présente pas de résultats précis pour toute la gamme de paramètres pris en considération et une troncature d'ordre supérieur devient ainsi nécessaire. Cependant, le développement de Galerkin nécessite le calcul de plusieurs *intégrales* formant les *coefficients* (éléments de construction) des matrices  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ . Ceci est une tâche difficile en raison de la complexité des équations régissant le problème rendant l'évaluation de la relation de dispersion (I.59) une tâche fastidieuse qui requiert un temps de calcul énorme, particulièrement lorsque l'on augmente l'ordre  $N$  de la méthode. Par conséquent, une autre méthode numérique qui est la *méthode de tir* (ou *shooting method* en anglais) sera préférée afin de générer tous les résultats numériques attendus. Des résultats issus de la méthode de Galerkin qui converge jusqu'à l'ordre  $N = 20$  termes, sont présentés uniquement pour vérifier l'exactitude et la précision de la *méthode de tir*, laquelle sera expliquée plus en détail au cours du paragraphe suivant.

## I.4.2 Méthode de tir (Shooting Method)

Les solutions obtenues, en appliquant la troncature de Galerkin présentée dans la section précédente, fournissent des estimations initiales pour l'*algorithme de recherche des racines* fondé à la base sur la *méthode de tir* et développé dans le but

d'obtenir des solutions respectives plus précises, et ce pour tous les modes existants. Un algorithme similaire a été utilisé dans des études antérieures pour étudier l'instabilité linéaire des couches de mélange à développement spatial dans les jets transversaux (de B. Alves et al., 2008; Kelly and de B. Alves, 2008). L'algorithme en question, qui a été fondé sur la méthode de tir, utilise les fonctions intégrées dont dispose le logiciel *Mathematica* (Wolfram, 2003).

Le système d'équations (I.48)-(I.52) formant avec ses deux équations (I.53) et (I.54) un *problème à valeurs aux bords* (ou *problème aux limites*). Il est tout d'abord transformé en un *problème à valeurs initiales* en réécrivant ses conditions aux limites (I.53) et (I.54) respectivement comme suit :

$$w_n = Dw_n = 0, \quad D^2w_n = \mathfrak{C}_1, \quad D^3w_n = \mathfrak{C}_2 \quad \text{en } z = -1/2, \quad (\text{I.66})$$

$$\theta_n = 0 \quad \text{et} \quad D\theta_n = \mathfrak{C}_3 \quad \text{en } z = -1/2, \quad (\text{I.67})$$

Les constantes additionnelles  $\mathfrak{C}_1$ ,  $\mathfrak{C}_2$  et  $\mathfrak{C}_3$  doivent ensuite être choisies de manière à garantir que les solutions  $w_n$  et  $\theta_n$  remplissent les trois conditions aux limites en  $z = +(1/2)$ , celles qu'on a laissées de côté à partir des équations (I.53) et (I.54) lors de l'écriture de leurs conditions initiales homologues (I.66) et (I.67). Dès lors, on a affaire à la résolution d'un problème aux valeurs propres sachant que l'une de ces constantes supplémentaires doit demeurer indéterminée. Ensuite, l'ensemble des équations du problème sera normalisé par la constante  $\mathfrak{C}_3$ . Une telle mise à l'échelle est équivalente à mettre  $\mathfrak{C}_3 = 1$ , qui est faite pour éviter d'avoir à redéfinir nos variables dépendantes. Deux paramètres réels inconnus, appelés ici  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ , peuvent désormais être déterminés (en relation avec les constantes  $\mathfrak{C}_1$  et  $\mathfrak{C}_2$ ) par la résolution de ce système modifié, car  $\mathfrak{C}_3$  est en général un nombre complexe. Cependant, le choix des paramètres à déterminer  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  dépend du problème à résoudre.

Avant de présenter les résultats de la méthode de tir, les deux *procédures numériques* utilisées sont brièvement décrites. La première utilise la fonction intégrée **NDSolve** du logiciel *Mathematica* afin de résoudre les équations différentielles ordinaires (I.48) et (I.49) en partant de  $z = -(1/2)$  jusqu'en  $z = +(1/2)$  et en utilisant les conditions initiales (I.53) et (I.54), tout en donnant au départ les estimations nécessaires pour  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$ ,  $\text{Re}[\mathfrak{C}_1]$ ,  $\text{Im}[\mathfrak{C}_1]$ ,  $\text{Re}[\mathfrak{C}_2]$  et  $\text{Im}[\mathfrak{C}_2]$  ainsi que les valeurs fixes pour les paramètres restants. Cette procédure commute *automatiquement* entre les schémas numériques d'Adams, les schémas numériques BDF (Backwards-Differencing-Formula) et les méthodes de Runge-Kutta selon la raideur locale du problème différentiel à résoudre. En outre, des schémas explicites ou implicites sont

utilisés en fonction de la taille locale du pas d'incrémentation, et qui est ajustée *automatiquement* en fonction des erreurs absolues et relatives prescrites au début. Ces dernières sont imposées *a priori* en fixant le nombre de chiffres (après la virgule) à utiliser dans les calculs. Dans la présente étude, ce nombre a été fixé à 16, 18 et 20 afin d'assurer la convergence de la solution obtenue. Une telle procédure a été programmée grâce à une fonction nommée  $\mathfrak{F}_1$ , et qui produit un vecteur réel dont les six éléments sont les valeurs correspondant aux paramètres  $\text{Re}[w_n]$ ,  $\text{Im}[w_n]$ ,  $\text{Re}[Dw_n]$ ,  $\text{Im}[Dw_n]$ ,  $\text{Re}[\theta_n]$  et  $\text{Im}[\theta_n]$  évalués en  $z = +(1/2)$ . À présent, la seconde procédure numérique peut désormais être appliquée. Elle utilise la fonction intégrée **FindRoot** de *Mathematica* pour rechercher des estimations qui satisfassent  $\mathfrak{F}_1 \simeq 0$  selon les erreurs absolues et relatives prescrites tout au début. C'est la méthode de *Brent* qui est utilisée pour cette fonction, nécessitant deux estimations initiales pour chaque évaluation. La recherche des modes instables est intrinsèquement liée à la recherche d'estimations initiales adéquates. Par conséquent, ce procédé dépend également de la nature du mécanisme de l'instabilité, et qui est décrit plus en détail au cours des deux paragraphes suivants.

### I.4.3 Analyse de stabilité temporelle

La naissance de la convection dans des écoulements à développement spatial peut être induite par des mécanismes d'instabilités convective et/ou absolue. En premier lieu et afin de déterminer l'apparition de l'instabilité convective, une analyse de stabilité temporelle est utilisée : elle ne considère que des perturbations spatialement sinusoïdales, à savoir des modes normaux avec des nombres d'ondes réels  $k_x$  et  $k_y$  et une fréquence complexe  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ . La frontière limite (communément nommé courbe de stabilité neutre ou marginale) séparant les deux régions stable et instable est définie lorsque  $\omega_i = 0$ , où le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  se trouve à son minimum. Cette convection sera dès lors induite par un mode d'instabilité stationnaire lorsque  $\omega_r = 0$ , sinon par un mode d'instabilité oscillatoire lorsque  $\omega_r \neq 0$ . Par conséquent, et conformément aux définitions présentées dans le paragraphe précédent, les paramètres supplémentaires à définir dans cette analyse sont  $\mathcal{P}_1 = \omega_r$  et  $\mathcal{P}_2 = Ra$ .

Nous portons tout d'abord notre attention sur l'instabilité convective des rouleaux longitudinaux (en anglais, Longitudinal Rolls ou en abrégé *LRs*) dont le vecteur d'onde est de support perpendiculaire à la direction de l'écoulement de base, soit  $k_x = 0$ . Puisque le nombre de *Re* ne semble apparaître que multiplié par le nombre d'onde  $k_x$  dans le système d'équations (I.48)-(I.52), les résultats de stabilité pour les *LRs* sont les mêmes que ceux obtenus en l'absence d'écoulement, c'est-à-dire

lorsque  $Re = 0$ . Les deux types d'instabilités : stationnaire ou oscillatoire, peuvent se développer et cela dépend des paramètres visco-élastiques  $\lambda_1$  et  $\Gamma$  du fluide. Une revue de la littérature scientifique de ce cas particulier est présentée au §II.1.

Le théorème de *Squire*, qui stipule que les perturbations bidimensionnelles sont plus instables que celles tridimensionnelles, n'est plus valide dans le cas du présent problème. Pour ce qui concerne les rouleaux transversaux (en anglais, Transverse Rolls ou *TRs*) et les rouleaux obliques (Oblique Rolls, en abrégé *ORs*) qui représentent le cas le plus général des perturbations tridimensionnelles, le nombre d'onde  $k_y$  rentre en jeu dans l'étude par l'intermédiaire du nombre d'onde modifié  $k$ , défini plus haut comme  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ . En conséquence, et pour pouvoir le résoudre, on doit appliquer sur le système d'équations (I.48)-(I.52) la transformation suivante, dite *transformation de Squire* :

$$k_x Re_{3D} = k Re, \quad (\text{I.68})$$

Ainsi, cela permet de réduire le problème général en trois dimensions (3D) — qui est assez complexe à traiter — à son homologue équivalent en deux dimensions (2D) qui correspond au cas des *TRs*, pour lequel le vecteur d'onde des *TRs* est parallèle à la direction principale de l'écoulement de base, soit  $k_y = 0$ .

Afin de déterminer les valeurs de  $\mathcal{P}_1 = \omega_r$  et  $\mathcal{P}_2 = Ra$  pour les modes temporelles les plus instables, des estimations sont d'abord produites en partant de l'équation de dispersion algébrique (I.60). Ceci a été réalisé en déterminant les courbes, construites en regardant dans le plan de variation des paramètres  $\omega_r$  et  $Ra$ , sur lesquelles les parties réelle et imaginaire de cette équation s'annulent. Ainsi, les modes instables apparaissent comme les points où les deux lignes courbes se sont croisées. La figure I.6(a) montre ce croisement pour  $Re = 0$ ,  $Pr = 10$ ,  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.15$  obtenu pour  $k = 3$ , confirmant la présence de trois modes instables pour ce cas de nombre d'onde. Ces trois modes instables se situent aux points dont les coordonnées sont :  $(\omega_r, Ra) \simeq (-14.527, 534.96)$ ,  $(0, 1753.6)$  et  $(+14.527, 534.96)$ .

Après avoir estimé le nombre de modes instables existants ainsi que leurs emplacements respectifs dans le plan  $(\omega_r, Ra)$ , on est en mesure maintenant d'utiliser une *variante* de la méthode de tir pour améliorer ces estimations. Cela est essentiel car l'approximation de *Galerkin* à un seul terme perd sa précision lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds. Dans cette nouvelle *variante*,  $\omega_r$  et  $Ra$  sont également fournis à la fonction  $\mathfrak{F}_1$  avec les paramètres d'entrée originaux. En outre, cette variante de la fonction  $\mathfrak{F}_1$ , nommée  $\mathfrak{F}_2$ , produit un vecteur réel de quatre éléments, qui sont les valeurs des paramètres  $\text{Re}[w_n]$ ,  $\text{Im}[w_n]$ ,  $\text{Re}[Dw_n]$  et  $\text{Im}[Dw_n]$  évalués en  $z = +(1/2)$ . Par conséquent, **FindRoot** de *Mathematica* recherche maintenant  $\text{Re}[\mathfrak{C}_1]$ ,  $\text{Im}[\mathfrak{C}_1]$ ,  $\text{Re}[\mathfrak{C}_2]$  et  $\text{Im}[\mathfrak{C}_2]$  uniquement, résultant ainsi en un taux de convergence de la solu-

tion beaucoup plus amélioré. Dans ce cadre, la *relation de dispersion différentielle* donnée par les équations (I.48) et (I.49) peut être écrite comme :

$$\mathfrak{D} = \theta_n(z = +1/2) = 0, \quad (\text{I.69})$$

fournissant ainsi un système de deux équations à deux inconnues. La figure I.6(b) montre les mêmes résultats que ceux présentés sur la figure I.6(a), mais obtenus cette fois-ci à partir de la *relation de dispersion différentielle* (I.69). Les trois modes instables évoqués précédemment sont là, bien qu'ils se situent à des points légèrement différents. Il est important de noter que cette technique donne également les valeurs respectives des constantes  $\mathfrak{C}_1$  et  $\mathfrak{C}_2$ . Cette information est ensuite réinjectée dans l'algorithme initial de la méthode de tir, c.-à-d. la toute *première variante*, dans le but de trouver la solution "*exacte*" pour chaque mode instable existant, et ce pour le même nombre d'onde  $k$ . Cette technique basée sur la méthode de tir a abouti, par exemple pour ce cas, aux résultats :  $(\omega_r, Ra) \simeq (-14.516, 523.42)$ ,  $(0, 1711.3)$  et  $(+14.516, 523.42)$ . Étant donné l'ampleur de cette procédure globale qui peut déboucher sur un processus de calcul intense, elle n'est répétée qu'une seule fois de plus, et ce pour un nombre d'onde  $k$  légèrement différent. À partir de ce point, l'*extrapolation* est utilisée pour toutes les inconnues afin de générer les estimations supplémentaires lorsqu'on fait varier  $k$  à l'intérieur d'une boucle. Bien qu'une extrapolation *linéaire* est utilisée en premier lieu, elle passe *automatiquement* à une extrapolation *quadratique* puis *cubique*, au fur et à mesure que l'ensemble des résultats accumulés augmente. Enfin, cette "boucle en  $k$ " est limitée aux alentours qu'on a estimés du point critique dans la plupart des cas, mais on revient sporadiquement à une recherche sur tout l'intervalle  $0 \leq k \leq 9$  uniquement lorsqu'on veut confirmer que le point critique  $(k_c, \omega_c, Ra_c)$  provient effectivement d'un minimum global.

Afin de vérifier davantage la précision et l'efficacité de la méthode de tir qu'on vient de décrire, ses résultats ont été donc comparés à leurs correspondants obtenus en appliquant la méthode de Galerkin convergée à un ordre supérieur, et ce pour quelques cas représentatifs sélectionnés. Ces résultats issus du développement de Galerkin ont été générés à l'ordre  $N = 20$  termes, ce qui peut être considéré comme suffisant pour assurer la convergence de la solution pour tous les cas considérés dans cette investigation. Une telle comparaison est présentée dans le tableau I.1 pour un cas d'une solution *faiblement visco-élastique* et dans le tableau I.2 pour un autre cas différent, celui d'une solution *fortement visco-élastique*. La définition de solution *faiblement visco-élastique* et de solution *fortement visco-élastique* est donnée au cours du §II.1, dont il fournit également le contexte et les concepts de base pour justifier les cas choisis pour être ensuite analysés dans la présente étude.

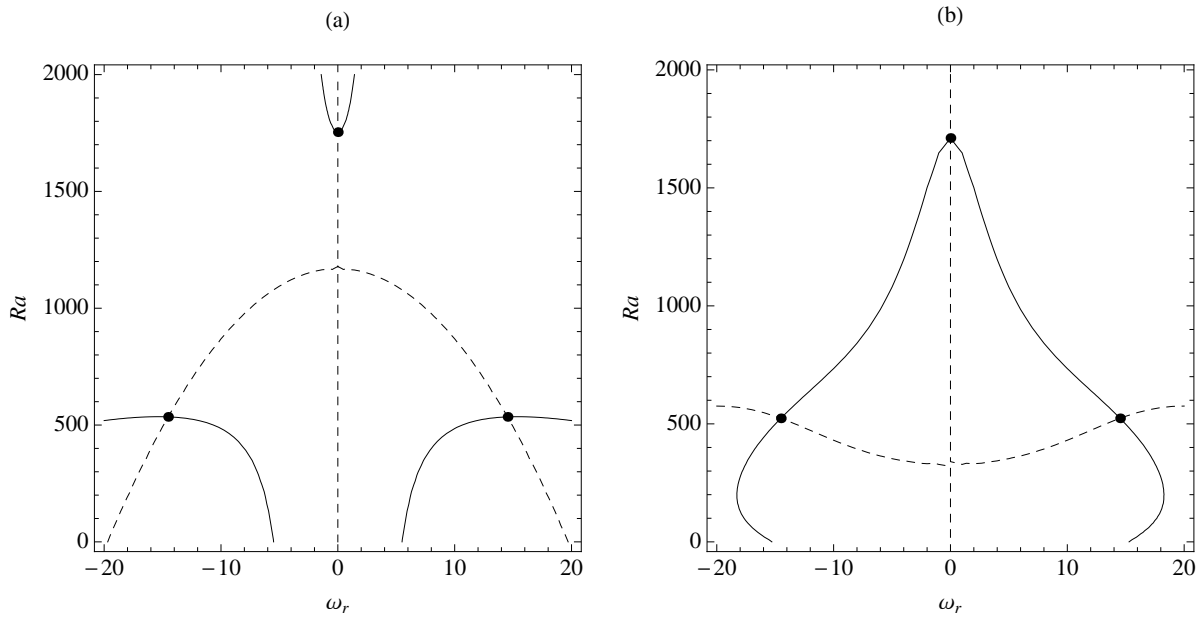


FIGURE I.6 – Les modes instables temporelles (points noirs d’intersection des lignes continues et des lignes en pointillés) pour  $Re = 0$ ,  $Pr = 10$ ,  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.15$  avec  $k = 3$ . Les lignes continues en trait plein représentent  $\text{Re}[\mathfrak{D}] = 0$  tandis que les lignes en traits pointillés représentent  $\text{Im}[\mathfrak{D}] = 0$ , et ce : (a) d’après la *relation de dispersion algébrique* (I.60) obtenue avec la méthode de Galerkin du 1<sup>er</sup> ordre; et (b) d’après la *relation de dispersion différentielle* (I.69) résolue avec la variante de la méthode de tir.

Ces tableaux ne montrent que de faibles écarts entre les résultats des deux méthodes, dans la quatrième décimale au plus, et ce concerne toutes les valeurs calculées des nombres critiques ( $k_c, \omega_c, Ra_c$ ) et pour tous les nombres de Reynolds considérés ici. Résultat : *la méthode de tir peut être jugée comme suffisamment précise.*



TABLE I.1 – Les paramètres critiques pour un fluide *faiblement visco-élastique* au seuil d'apparition de l'instabilité convective :  $Pr = 10$ ,  $\lambda_1 = 0.025$  et  $\Gamma = 0.15$  .

Re	Méthode de tir			Méthode de Galerkin		
	Ra <sub>c</sub>	k <sub>c</sub>	$\omega_c$	Ra <sub>c</sub>	k <sub>c</sub>	$\omega_c$
0.0	1707.7616	3.1163	0	1707.7617	3.1163	0
0.1	1709.3515	3.1148	2.6253	1709.3516	3.1148	2.6253
0.2	1714.1516	3.1105	5.2403	1714.1517	3.1105	5.2404
0.3	1722.2498	3.1030	7.8349	1722.2498	3.1030	7.8349
0.4	1733.7801	3.0924	10.3988	1733.7801	3.0924	10.3989
0.6	1767.8092	3.0607	15.3976	1767.8092	3.0607	15.3976
0.8	1817.6067	3.0150	20.1705	1817.6067	3.0150	20.1705
1.0	1884.2602	2.9562	24.6727	1884.2602	2.9562	24.6726
1.2	1968.3173	2.8869	28.8836	1968.3174	2.8869	28.8834
1.4	2069.7773	2.8106	32.8057	2069.7772	2.8105	32.8056
1.6	2188.2324	2.7303	36.4546	2188.2325	2.7303	36.4548
1.8	2323.0510	2.6491	39.8551	2323.0506	2.6490	39.8548
2.0	2473.5293	2.5689	43.0347	2473.5285	2.5688	43.0337

TABLE I.2 – Les paramètres critiques pour un fluide *fortement visco-élastique* au seuil d'apparition de l'instabilité convective :  $Pr = 10$ ,  $\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.15$  .

Re	Méthode de tir			Méthode de Galerkin		
	Ra <sub>c</sub>	k <sub>c</sub>	$\omega_c$	Ra <sub>c</sub>	k <sub>c</sub>	$\omega_c$
0.0	950.0481	4.2782	-24.8911	950.0490	4.2779	-24.8891
0.1	959.4099	4.2642	-21.4443	959.4115	4.2649	-21.4482
0.2	990.7331	4.2331	-18.4536	990.7336	4.2330	-18.4530
0.3	1043.1696	4.1877	-15.8813	1043.1704	4.1878	-15.8816
0.4	1115.2789	4.1303	-13.6777	1115.2791	4.1300	-13.6765
0.6	1303.9920	4.0954	54.1876	1303.9910	4.0951	54.1833
0.8	1556.6963	3.9979	65.6142	1556.6958	3.9982	65.6193
1.0	1872.7368	3.8929	76.8936	1872.7362	3.8931	76.8969
1.2	2251.4579	3.7813	87.6514	2251.4564	3.7816	87.6593
1.4	2692.4115	3.6652	97.6840	2692.4106	3.6650	97.6789
1.6	3195.3128	3.5474	106.9119	3195.3113	3.5472	106.9058
1.8	3766.6325	3.4706	115.6484	3760.0028	3.4310	115.3556
2.0	4386.3969	3.3165	123.0134	4386.3966	3.3164	123.0111

#### I.4.4 Analyse de stabilité spatio-temporelle

Une fois que le seuil de déclenchement de l'instabilité convective  $Ra_c$  a été identifié comme fonction des paramètres de contrôle  $(Re, Pr, \lambda_1, \Gamma)$ , Il est également important de déterminer le seuil de déclenchement de l'instabilité absolue  $Ra_A(Re, Pr, \lambda_1, \Gamma)$  comme fonction aussi des mêmes paramètres de contrôle. Si les deux seuils coïncident, l'écoulement de fluide transite directement de l'état stable à l'état absolument instable. Sinon, lorsque  $Ra_A(Re, Pr, \lambda_1, \Gamma) > Ra_c(Re, Pr, \lambda_1, \Gamma)$ , il y aura une région finie — dans l'espace des paramètres de contrôle — entre les deux régions stable et absolument instable de l'écoulement. L'instabilité qui se manifeste dans cette région finie est une instabilité convective. Du fait que le comportement de l'écoulement est radicalement différent dans chacune de ces régions (stable, convectivement instable et absolument instable), il est donc essentiel d'identifier les limites qui les séparent.

Au seuil de déclenchement de l'instabilité absolue, la relation de dispersion  $\mathfrak{D}(\omega_0, k_0, Ra, Re, Pr, \lambda_1, \Gamma) = 0$  doit être respectée, ainsi que les conditions mathématiques nécessaires suivantes (Huerre and Monkewitz, 1985; Brevdo, 1991) :

$$\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} = 0 \quad \text{et} \quad \omega_i(k_0) = 0, \quad (\text{I.70})$$

ceci est vrai uniquement pour une transition vers l'instabilité absolue bidimensionnelle. En prenant la dérivée de la relation de dispersion par rapport au nombre d'onde  $k = k_x$  et en appliquant les conditions (I.70) au résultat qui en découle, cela mène à la relation supplémentaire :

$$\left. \frac{d\mathfrak{D}(\omega, k, Ra, Re, Pr, \lambda_1, \Gamma)}{dk} \right|_{k_0} = 0. \quad (\text{I.71})$$

Les parties réelles et imaginaires des deux relations (I.60) et (I.71) conduisent à un système de quatre équations qui est capable de fournir, après sa résolution, des estimations initiales pour les quatre inconnues  $\omega_r^0$ ,  $Ra_A$ ,  $\text{Re}[k_x^0]$  et  $\text{Im}[k_x^0]$ . Leur existence pourrait indiquer une possible apparition de l'instabilité absolue. Ce problème particulier peut également être résolu avec la fonction intégrée **FindRoot** de *Mathematica*. Toutefois, en raison de la nature analytique de ce système d'équations algébriques, la méthode de *Newton* sera donc plutôt préférée ici, et uniquement une seule estimation sera nécessaire pour chaque inconnue. Lorsqu'elle est appliquée à ce problème et avec les mêmes paramètres de contrôle que ceux utilisés pour obtenir

la figure I.6, cette méthode donne les résultats ci-après :

$$\omega_A \simeq 15.66, \quad Ra_A \simeq 523.2, \quad \operatorname{Re}[k_{xA}] \simeq 3.414 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}[k_{xA}] \simeq -0.5481. \quad (\text{I.72})$$

Bien qu'elle soit nécessaire, la condition (I.71) ne suffit pas à elle seule pour que les points critiques qu'elle génère, comme dans le cas du résultat (I.72), soient représentatifs d'une transition vers l'instabilité absolue. En outre, il faut vérifier que les branches spatiales dans le plan complexe du nombre d'onde  $k$  — qui sont des solutions de la relation de dispersion  $\mathfrak{D} = 0$  — satisfassent au critère de collision de Briggs–Bers (Briggs, 1964). Ce critère exige que toutes les branches spatiales impliquées dans le processus de pincement au point de selle, doivent provenir de différents demi-plans imaginaires dans le schéma du nombre d'onde complexe. Par conséquent, nous cherchons des points de pincement *via* le comportement de leurs branches spatiales. En d'autres termes, les paramètres à déterminer par la méthode de tir deviennent  $\mathcal{P}_1 = \operatorname{Re}[k_x]$  et  $\mathcal{P}_2 = \operatorname{Im}[k_x]$ . Un tel calcul est effectué donc pour des valeurs fixes de  $\omega_r$  et  $Ra$ , en plus des paramètres de contrôle restants. Une procédure, similaire à celle décrite précédemment et utilisée dans l'analyse de stabilité temporelle (voir § I.4.3), est répétée ici afin de générer les estimations nécessaires pour la méthode de tir. Elles sont obtenues en identifiant les points de croisement des courbes représentant  $\operatorname{Re}[\mathfrak{D}] = 0$  et  $\operatorname{Im}[\mathfrak{D}] = 0$  issues de la relation de dispersion. La figure I.7(a) montre ces courbes en utilisant l'équation de dispersion algébrique (I.60) pour  $Re = 0$ ,  $Pr = 10$ ,  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.15$  à  $\omega_r = 20$  et  $Ra = 511$ , ce qui est près du résultat (I.72). Deux modes sont retrouvés :  $k_x \simeq 4.732 + 0.2541 i$  et  $k_x \simeq 2.388 - 1.16 i$ .

Maintenant, ces estimations de mode sont améliorées en utilisant une nouvelle variante de la méthode de tir. Elle modifie, en premier, la fonction  $\mathfrak{F}_2$  en une nouvelle fonction  $\mathfrak{F}_3$ , qui reçoit  $\operatorname{Re}[k_x]$  et  $\operatorname{Im}[k_x]$  comme étant les variables d'entrée au lieu de  $\omega_r$  et  $Ra$ . Ensuite, elle résout l'équation de dispersion différentielle (I.69) de la même manière comme expliqué précédemment au § I.4.3, mais en utilisant la fonction  $\mathfrak{F}_3$  au lieu de  $\mathfrak{F}_2$ . La figure I.7(b) présente les courbes respectives de cette relation de dispersion différentielle pour les mêmes paramètres que dans la figure I.7(a). Ces deux modes apparaissent à nouveau, mais avec des valeurs légèrement différentes, en liaison avec leurs constantes respectives  $\mathfrak{C}_1$  et  $\mathfrak{C}_2$ . Cette estimation améliorée est ensuite fournie à l'algorithme initial (ou original) de la méthode de tir, donnant ainsi les modes  $k_x \simeq 4.798 + 0.1979 i$  et  $k_x \simeq 2.364 - 1.137 i$ . Les deux branches sont maintenant construites en faisant varier  $\omega_r$  en même temps que  $Ra$ . Toutefois, cette procédure globale n'est répétée qu'une seule fois, et ce pour un seul paramètre supplémentaire correspondant à un  $\omega_r$  légèrement différent. À partir de ce moment,

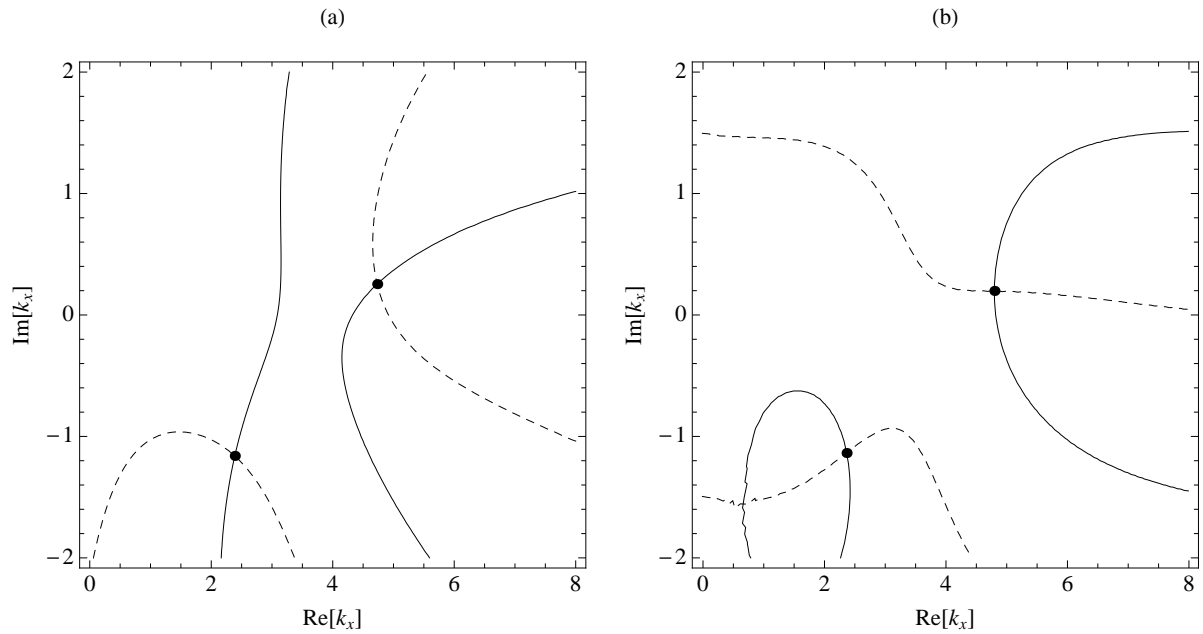


FIGURE I.7 – Les modes instables spatio-temporelles (points noirs d’intersection des lignes continues et des lignes en pointillés) pour  $Re = 0$ ,  $Pr = 10$ ,  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.15$  avec  $\omega_r = 20$  et  $Ra = 511$ . Les lignes continues en trait plein représentent  $Re[\mathcal{Q}] = 0$  tandis que les lignes en traits pointillés représentent  $Im[\mathcal{Q}] = 0$ , et ce : (a) d’après la *relation de dispersion algébrique* (I.60) obtenue avec la méthode de Galerkin du 1<sup>er</sup> ordre; et (b) d’après la *relation de dispersion différentielle* (I.69) résolue avec la variante de la méthode de tir.

des extrapolations linéaire, quadratique et cubique sont utilisées consécutivement, s’arrêtant en cette dernière extrapolation lorsque l’ensemble des résultats accumulés augmente pour générer de nouvelles estimations. Le critère de Briggs-Bers ainsi que le point de pincement sont ensuite identifiés à travers le comportement de ces branches spatiales lorsqu’on fait varier  $Ra$ .

La figure I.8 montre le comportement des deux branches, à l’intérieur de l’espace  $20 \geq \omega_r \geq 10$  pour quatre nombres différents de Rayleigh, obtenues à partir des deux relations de dispersion *algébrique* et *différentielle* et présentées respectivement dans les figures I.8(a) et I.8(b). Le mode dominant en question est celui du bas dans les deux graphiques, où la courbe la plus basse est générée à  $Ra = Ra_c$  et le point gris indique le point critique dans chaque graphe. Comme le nombre de Rayleigh est augmenté un peu plus haut, ce mode traverse dans le demi-plan complexe supérieur et devient de ce fait convectivement instable. En augmentant davantage le nombre de Rayleigh, les deux branches spatiales se pincent au moment précis où la valeur correspondant au point de selle sera atteinte (le point noir localise le point de pincement pour  $Ra = Ra_A$ ). Puisque le critère de collision de Briggs-Bers a été satisfait, ce point représente en effet une transition vers l’instabilité absolue. La

relation de dispersion différentielle donne le résultat  $k_{xA} \simeq 3.42 - 0.5607i$ , qui est obtenu par interpolation du point le plus proche entre les branches spatiales dès que le pincement est observée, avec une erreur de l'ordre de  $\Delta Ra = \pm 0.5$ . Même si les points critiques dans chaque graphe sont différents, cette différence est néanmoins petite et le comportement qualitatif du mode reste similaire. Par conséquent, le développement de Galerkin à un seul terme fournit une estimation initiale valable et précieuse pour détecter le seuil d'apparition de l'instabilité absolue également.

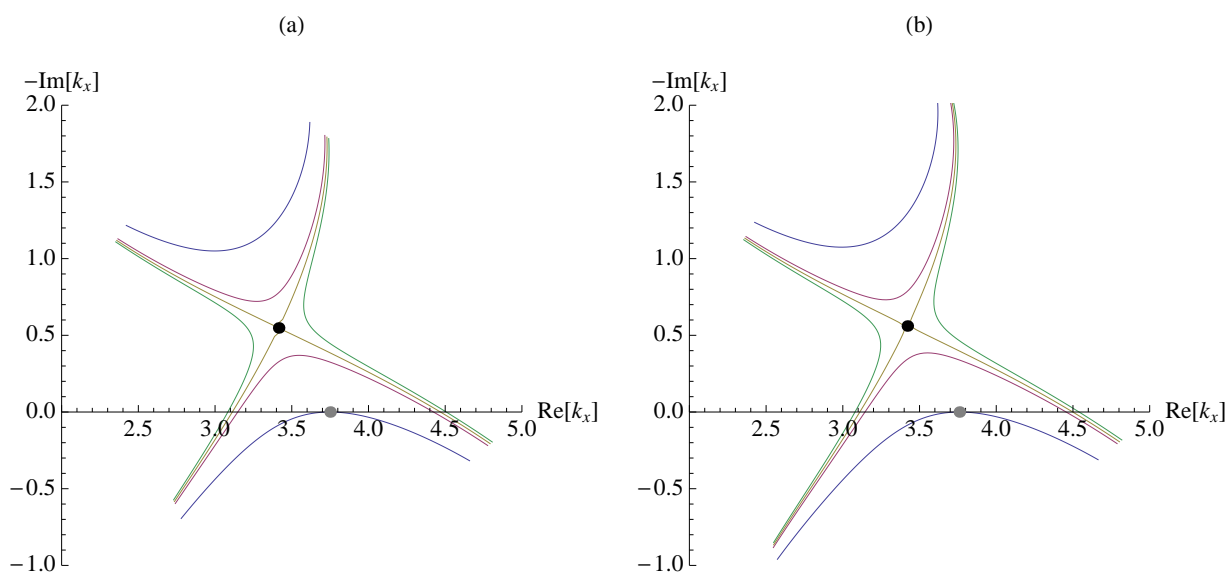


FIGURE I.8 – Le comportement des deux branches spatiales (courbes en couleurs) représentées sur la figure I.7, pour différents nombres de Rayleigh et pour  $\omega_r$  compris dans l'intervalle  $20 \geq \omega_r \geq 10$ . Les points gris et noir représentent la naissance des instabilités convective et absolue respectivement, et ce : (a) d'après la *relation de dispersion algébrique* (I.60) (méthode de Galerkin) avec  $Ra = 495.97, 520, 523.19$  et  $526$ ; et (b) d'après la *relation de dispersion différentielle* (I.69) (méthode de tir) avec  $Ra = 484.57, 509, 512$  et  $515$ .

Une autre tentative a été faite afin de vérifier l'exactitude et la précision de la méthode de tir, mais cette fois-ci pour la naissance de l'instabilité absolue, en comparant ses résultats avec ceux de la méthode de Galerkin. Cependant, pour cette méthode, la dérivation de la relation (I.71) (soumise à la condition (I.70) connue également comme condition de *vitesse de groupe nulle*) à partir de la relation de dispersion algébrique (I.59), nécessite un certain temps de calcul. Ce temps augmente énormément avec le nombre  $N$  des termes de cette méthode de Galerkin. Par conséquent, nous ne sommes pas en mesure de produire des résultats pour  $N > 3$  dans un temps de calcul raisonnable. Néanmoins, les figures I.7 et I.8 fournissent une preuve suffisante sur la précision de la méthode de tir dans l'identification et le calcul des seuils d'apparition pour cette instabilité absolue.

## I.5 Comparaison et validation avec des résultats numériques et expérimentaux antérieurs

Comme nous avons été confrontés à un manque de résultats publiés sur la convection mixte de RBP pour les fluides visco-élastiques, nous avons donc été amenés à tester la validité de nos schémas numériques en comparant leurs résultats avec d'autres obtenus par [Nicolas et al. \(1997\)](#) et [Carrière and Monkewitz \(1999\)](#) dans le cas limite des fluides Newtoniens.

Sur la figure I.9, nous comparons nos résultats (les symboles de losanges) — correspondant à la courbe de transition instabilité convective/absolue des rouleaux transversaux ( $TRs$ ) dans le plan Reynolds-Rayleigh — avec les résultats obtenus par [Carrière and Monkewitz \(1999\)](#) en utilisant une méthode de collocation de *Chebyshev* (la ligne mixte point-tiret). Les deux résultats sont obtenus pour  $Pr = 450$ . Sur cette même figure I.9, la ligne courbe continue représente l'approximation quadratique (l'équation (I.73)) qui correspond aux mesures expérimentales de la transition convective/absolue des  $TRs$  conduites par [Grandjean and Monkewitz \(2009\)](#) avec de l'huile minérale utilisée comme fluide de travail ( $Pr \approx 450$ ), à savoir :

$$Ra_A = 9.296 \times 10^5 Re^2 - 9.897 \times 10^3 Re + 1.723 \times 10^3. \quad (I.73)$$

Comme on peut le constater sur cette figure, nos résultats sont en très bon accord avec le calcul numérique de [Carrière and Monkewitz \(1999\)](#). Néanmoins, elle révèle aussi que la courbe expérimentale de transition convective/absolue est au-dessous des courbes théoriques. Cette différence a déjà été signalée par [Grandjean and Monkewitz \(2009\)](#) et a été attribué, selon eux, à la diffusivité thermique limitée des plaques rigides de la cellule expérimentale, ce qui est différent aux suppositions théoriques qui reposent sur l'hypothèse de plaques rigides parfaitement conductrices de la chaleur.

[Nicolas et al. \(1997\)](#) ont rapporté des résultats sur le comportement des seuils d'instabilité absolue des  $TRs$ , obtenus par une *simulation numérique directe* (DNS) bidimensionnelle du problème de RBP pour  $Pr = 6,4$ . Avec un nombre de Reynolds  $\widetilde{Re}$  calculé en se basant sur la vitesse moyenne de l'écoulement de base, tels que  $\widetilde{Re} < 0.21$  ( $\widetilde{Re} > 0.21$ ), ils ont constaté que la fréquence d'oscillation des  $TRs$  diminue (augmente) lorsque le nombre de Rayleigh augmente. Et quand le nombre de Reynolds prend la valeur  $\widetilde{Re} = 0.21$ , la fréquence reste inchangée lors de la variation du nombre de Rayleigh. Qualitativement, ce résultat se compare d'ailleurs très bien avec les données expérimentales obtenues par mesures basées sur la technique

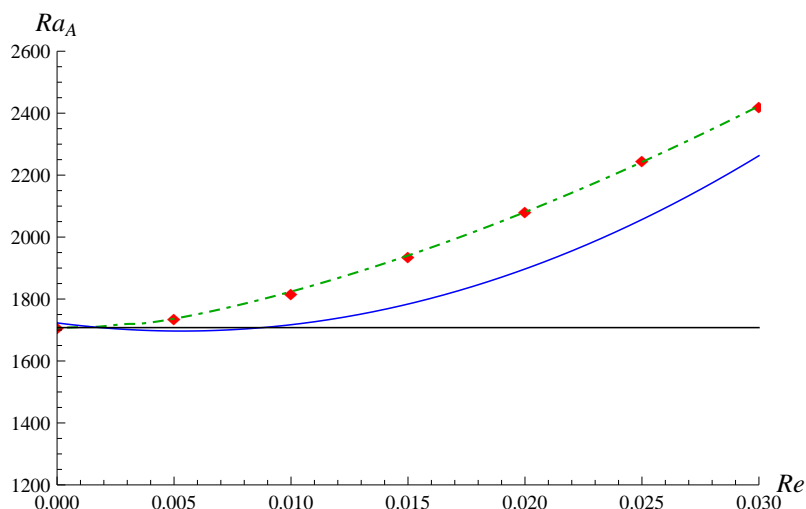


FIGURE I.9 – La courbe de transition de l’instabilité convective vers l’instabilité absolue des  $TRs$  avec comme fluide l’huile minérale ( $Pr \approx 450$ ). Les symboles de losanges représentent les résultats du présent travail comparés avec les résultats numériques (la ligne mixte point-tiret) de Carrière and Monkewitz (1999), tandis que la ligne courbe continue est une approximation quadratique par moindres carrés (I.73) du travail expérimental mené par Grandjean and Monkewitz (2009). La ligne horizontale représente le seuil bien connu de l’instabilité de Rayleigh-Bénard,  $Ra_c = 1707.762$  (Chandrasekhar, 1961).

d’Anémométrie Laser Doppler (souvent désignée par son acronyme anglais, Laser-Doppler Anemometry (LDA)) et réalisées par Ouazzani et al. (1990) en utilisant de l’eau comme fluide de travail (dont son nombre de Prandtl  $Pr = 6.4$ ). En outre, et pour les mêmes raisons de comparaison et de validation avec ces travaux antérieurs, nous avons constaté que la fréquence d’oscillation des  $TRs$ , calculée pour  $Pr = 6.4$  au seuil d’instabilité absolue, vaut  $\omega_A = 5,41$  (exprimée sous forme adimensionnelle) et ce pour  $Re = 0.315$  qui correspond à  $\widetilde{Re} = 0.21$  (noter le facteur multiplicatif de 1,5 entre  $\widetilde{Re}$  et le nombre de Reynolds  $Re$  qu’on a défini antérieurement et qui est basé, dans notre étude, sur la vitesse maximale située au milieu de la couche fluide de l’écoulement de base, voir section I.3.2). Pour la comparaison, cette fréquence est rendue à sa forme dimensionnelle en utilisant la grandeur de référence de temps  $h^2/K$  avec  $h = 4.15 \text{ mm}$  et  $K = 0.145 \text{ mm}^2\text{s}^{-1}$  (Ouazzani et al., 1990).

Dans le tableau I.3 nous comparons — en grandeur dimensionnée — les fréquences d’oscillation des  $TRs$  au seuil de déclenchement de l’instabilité absolue et cela pour  $Re = 0.315$  (l’équivalent de  $\widetilde{Re} = 0.21$ ), obtenues à la fois avec notre prédiction théorique, les résultats du DNS-2D de Nicolas et al. (1997) et les mesures expérimentales de Ouazzani et al. (1990). Ce tableau I.3 montre bien que la fréquence d’oscillation calculée à l’issue de notre analyse de stabilité linéaire est en très bon accord avec celle obtenue par *simulation numérique directe* (DNS-2D) (l’écart entre les deux valeurs est de l’ordre de 1,4 %). De plus, ce tableau montre aussi que

	Présent travail (stabilité linéaire)	Nicolas et al. (1997) (DNS-2D)	Ouazzani et al. (1990) (expérimental)
Fréquence des rouleaux transversaux ( $s^{-1}$ )	$7.25 \times 10^{-3}$	$7.15 \times 10^{-3}$	$6.5 \times 10^{-3}$

TABLE I.3 – La validation de nos schémas numériques de résolution avec les résultats de la simulation numérique directe 2D de Nicolas et al. (1997) et l'expérimental de Ouazzani et al. (1990), pour  $Pr = 6.4$ .

les résultats du présent travail et du DNS ont tendance à surestimer la fréquence d'oscillation en comparaison avec l'expérimental (comme évoqué précédemment, ceci est vraisemblablement dû à la diffusivité thermique limitée des plaques rigides de la cellule expérimentale, ce qui est différent à la supposition théorique de plaques parfaitement conductrices de la chaleur, prise comme hypothèse dans les études théoriques d'analyse de stabilité et de DNS).



# Chapitre II

## Résultats et interprétation physique de l'instabilité

---

*Dans ce chapitre, nous allons présenter les résultats de stabilité linéaire issus des deux approches temporelle et spatio-temporelle et procédons à leur interprétation physique.*

---

### Sommaire

---

<b>II.1 Convection naturelle de Rayleigh-Bénard de fluides visco-élastiques</b> . . . . .	<b>66</b>
II.1.1 Instabilités stationnaires . . . . .	66
II.1.2 Instabilités oscillatoires . . . . .	66
<b>II.2 Convection mixte de Rayleigh-Bénard-Poiseuille de fluides visco-élastiques : Approche temporelle</b> . . . . .	<b>69</b>
II.2.1 Résultats pour les fluides faiblement visco-élastiques . . . . .	70
II.2.2 Résultats pour les fluides fortement visco-élastiques . . . . .	77
<b>II.3 Mécanismes physiques de l'instabilité</b> . . . . .	<b>83</b>
II.3.1 Structures spatiales des instabilités convectives naissantes aux seuils critiques . . . . .	83
II.3.2 Bilan énergétique . . . . .	87
<b>II.4 Transition vers l'instabilité absolue</b> . . . . .	<b>93</b>
II.4.1 Résultats pour les fluides faiblement visco-élastiques . . . . .	95
II.4.2 Résultats pour les fluides fortement visco-élastiques . . . . .	97

---

## II.1 Convection naturelle de Rayleigh-Bénard de fluides visco-élastiques

Avant d'examiner les effets de l'écoulement de Poiseuille sur les instabilités des fluides visco-élastiques, un aperçu des résultats les plus marquants de l'analyse de stabilité linéaire en l'absence de cet écoulement de base, c'est-à-dire lorsque  $Re = 0$  (configuration classique de Rayleigh-Bénard), fera l'objet de la présente section. [Li and Khayat \(2005\)](#) ont distingué deux régimes différents dans cette configuration de convection *naturelle* : un premier régime que l'on qualifie **faiblement visco-élastique** correspond à un jeu de paramètres, où l'état de base de conduction bifurque en premier vers une solution de convection *stationnaire* ; et un autre régime appelé **fortement visco-élastique** dont la convection naissante suite à la déstabilisation de l'état de base, a une nature plutôt *oscillatoire*. Des résultats approximatifs pour les deux régimes peuvent être obtenus avec l'équation de dispersion simplifiée (I.60), en se basant uniquement sur les premiers termes d'un développement de *Galerkin* appliqué aux champs de température et de vitesse.

### II.1.1 Instabilités stationnaires

Dans ce cas, la courbe de stabilité marginale, c'est-à-dire dans le plan  $(k, Ra)$ , qui correspond à l'apparition de la convection stationnaire est indépendante des paramètres visco-élastiques. Il s'agit donc de la même courbe que l'on obtienne dans le cas des fluides Newtoniens (voir la figure II.1), et qui est donnée par la relation :

$$Ra^s = \frac{28}{27} \frac{f_1 f_4}{k^2}, \quad (\text{II.1})$$

ce qui donne les valeurs critiques  $Ra_c^s = 1749.98$  et  $k_c^s = 3.11652$  (obtenues par la méthode de Galerkin basée sur le premier terme).

### II.1.2 Instabilités oscillatoires

Maintenant et pour ce qui concerne l'émergence de la convection oscillatoire, le même constat n'est pas vrai depuis que [Kolkka and Jerley \(1987\)](#) ont montré que :

$$Ra^o = Ra^s - \frac{28\omega^2}{27k^2} \left[ \frac{f_2}{Pr} - \frac{\lambda_1 f_4 (1 - \Gamma)(1 - \lambda_1 f_1)}{1 + \lambda_1^2 \omega^2} \right], \quad (\text{II.2})$$

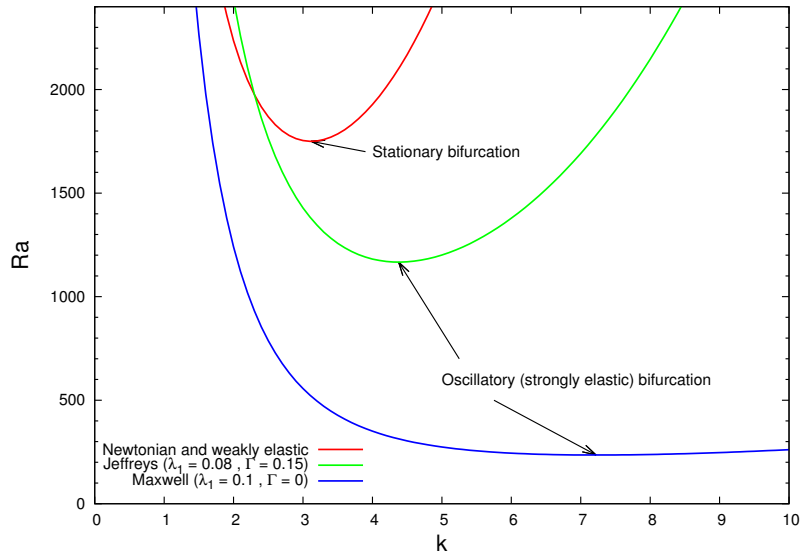


FIGURE II.1 – Courbes neutres de stabilité marginale dans la configuration classique de Rayleigh-Bénard ( $Re = 0$ ) et pour  $Pr = 10$ , montrant le seuil critique d'instabilité stationnaire ainsi que deux exemples de seuils critiques d'instabilités oscillatoires. Les résultats ont été obtenus avec la méthode de Galerkin basée sur le premier terme.

où la fréquence  $\omega$  du mode oscillatoire est obtenue à partir de cette relation :

$$\omega^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} \left( (\lambda_1 f_1 (1 - \Gamma) - 1) f_4 - \frac{f_1 f_2}{Pr} \right) / \left( \Gamma f_4 + \frac{f_1 f_2}{Pr} \right), \quad (\text{II.3})$$

ainsi, les valeurs critiques du nombre de Rayleigh  $Ra_c^o$ , du nombre d'onde  $k_c^o$  et de la fréquence  $\omega_c^o$  pour l'apparition de la convection oscillatoire dépendent des paramètres visco-élastiques  $\lambda_1$  et  $\Gamma$ , mais aussi du nombre de  $Pr$ .

Cette tendance des seuils de déclenchement de la convection — stationnaire et oscillatoire — est illustrée sur la figure II.1, qui montre l'invariabilité du seuil de l'instabilité stationnaire vis-à-vis des paramètres visco-élastiques du fluide (ceci est valable dans le cas des fluides Newtoniens et des fluides faiblement visco-élastiques), à la différence du seuil de l'instabilité oscillatoire qui dépend des valeurs de ces paramètres visco-élastiques (deux cas de fluides fortement visco-élastiques ont été utilisés pour l'illustration : le cas du fluide de Jeffreys et un cas d'un fluide de Maxwell).

À présent, et en utilisant les résultats présentés ci-dessus, il est possible d'estimer le jeu de paramètres qui délimite la frontière séparant les deux régions faiblement et fortement visco-élastique. Pour des valeurs fixes de  $\Gamma$  et  $Pr$ , il existe une valeur de  $\lambda_1 = \lambda_1^f$  pour laquelle  $Ra_c^s = Ra_c^o$ . En d'autres termes, les deux nombres critiques de Rayleigh correspondants aux seuils de déclenchement de la convection stationnaire

et oscillatoire coïncident dans certaines conditions bien définies et, par conséquent, une bifurcation ait lieu au voisinage d'un point appelé point de codimension-deux. En outre, comme le montrent [Martinez-Mardones and Perez-Garcia \(1990\)](#) ainsi que [Li and Khayat \(2005\)](#),  $\lambda_1^f$  diminue avec l'augmentation de  $Pr$ , pour un  $\Gamma$  fixe. Dans le cas limite où  $\Gamma \rightarrow 0$  (fluide de Maxwell) et  $Pr \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_1^f$  atteint la valeur minimum de 0.039. Ce comportement est illustré sur la figure II.2, qui montre  $\lambda_1^f$  sur des lignes continues (en couleurs) dans le plan  $(\Gamma, \lambda_1)$  calculées pour différentes valeurs de  $Pr$  et obtenues à partir de l'approximation de Galerkin évoquée précédemment (I.60) basée uniquement sur le premier terme du développement. Ces études ont guidé notre choix des cas test pour étudier l'influence de l'écoulement de Poiseuille sur les deux solutions faiblement et fortement visco-élastiques. Pour ce faire, trois cas test pour chaque type de solution (faiblement et fortement visco-élastique) plus un cas d'un fluide de Maxwell, tous ont été analysés et ils sont marqués par des astérisques dans la figure II.2. Chaque cas test est en corrélation avec un ou deux autres, ce qui permet une analyse qualitative des tendances. En outre, tout au long de cette thèse, nous supposons  $Pr = 10$ , sauf indication contraire.

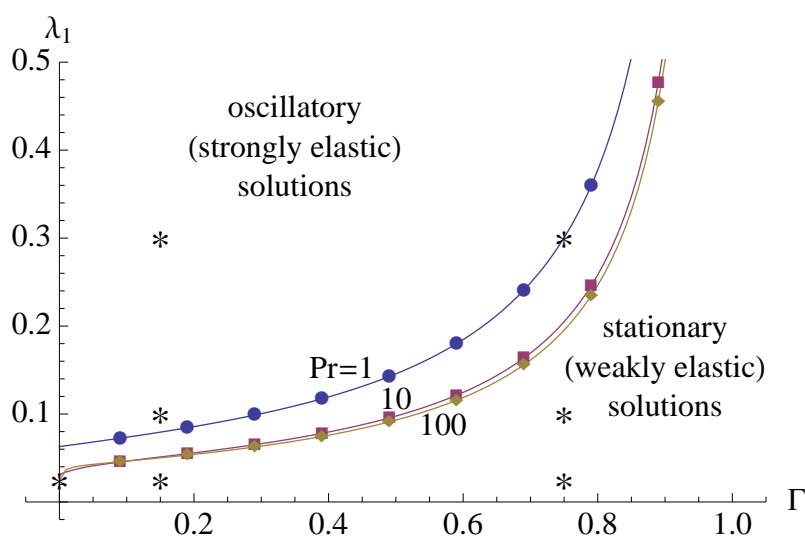


FIGURE II.2 – La frontière séparant les deux régimes d'instabilités dans le plan  $(\Gamma, \lambda_1)$  : les lignes continues (en couleurs) correspondent aux valeurs du paramètre d'élasticité  $\lambda_1^f$  définissant le croisement entre les deux régions de bifurcations stationnaires (cas Newtonien et faiblement élastique) et oscillatoires (cas fortement élastique) pour  $Re = 0$  et  $Pr = 1, 10$  et  $100$ . Les résultats ont été obtenus avec le développement de Galerkin basé sur le premier terme (I.60). Les symboles en étoiles indiquent les couples de valeurs  $(\Gamma, \lambda_1)$  représentatifs utilisés dans les calculs tout au long de cette partie de thèse.

Il convient de souligner que l'influence de l'élasticité du fluide (c.-à-d. son temps de relaxation)  $\lambda_1$  sur la sélection de la structure thermoconvective (appelée aussi motif ou réseau convectif) dans cette configuration de Rayleigh-Bénard, a été également

étudiée en s'appuyant sur une analyse non linéaire. Li and Khayat (2005) ont étudié l'apparition des instabilités stationnaires du régime faiblement visco-élastique, en mettant l'accent sur les deux types de réseaux stables et réguliers en forme de cellules hexagonales et cellules carrées. D'autre part, Martinez-Mardones et al. (1996) ont examiné les bifurcations de Hopf dans la région fortement visco-élastique, démontrant ainsi que les structures périodiques dans le temps, sélectionnées par des effets non linéaires, correspondent à des ondes stationnaires.

## II.2 Convection mixte de Rayleigh-Bénard-Poiseuille de fluides visco-élastiques : Approche temporelle

Après cette brève discussion des principaux mécanismes d'instabilité thermique qui existent pour les fluides visco-élastiques en l'absence d'écoulement, son effet peut maintenant être correctement étudié. Ce faisant, les régimes faiblement et fortement élastiques sont analysés séparément à travers une sélection appropriée de couples formés du nombre d'élasticité  $\lambda_1$  et du rapport de viscosité  $\Gamma$  et ce pour  $Pr = 10$ , tel que discuté dans la section précédente, et pour une large gamme des nombres de Rayleigh et Reynolds :  $Ra \leq 8000$  et  $Re \leq 2$ . À ce stade, le nombre de Reynolds  $Re$  est passé de zéro jusqu'à des valeurs non nulles afin d'étudier l'effet de l'écoulement de Poiseuille sur le déclenchement de l'instabilité. Le début de l'instabilité convective est déterminé en utilisant d'abord une analyse de stabilité temporelle, puisque les taux critiques de croissance spatiale s'annulent dans ce cas d'instabilité convective. En d'autres termes, les perturbations peuvent être décomposées en modes normaux avec des fréquences complexes et nombres d'onde réels.

Comme c'est démontré auparavant, les  $LRs$  ( $k_x = 0, k = k_y$ ), qui sont des rouleaux hélicoïdaux avec leurs axes parallèles à la direction d'écoulement, ne sont pas affectés par l'écoulement de base. Leurs caractéristiques d'instabilité sont les mêmes que celles obtenues sans cet écoulement ( $Re = 0$ ). Par conséquent, ils apparaissent comme des rouleaux stationnaires dans le régime faiblement élastiques et comme des rouleaux oscillatoires dans le régime fortement élastique. Dans le dernier cas, la courbe marginale de stabilité et sa fréquence associée sont données par (II.2) et (II.3), respectivement, selon l'équation de dispersion approximative. Étant donné que ces résultats sont déjà connus, la partie restante se concentre sur les propriétés linéaires des  $TRs$  ( $k = k_x, k_y = 0$ ), dont les axes sont perpendiculaires à la direction d'écoulement. Les caractéristiques des rouleaux obliques 3D peuvent être facilement

déduites à partir des caractéristiques linéaires des  $TRs$  à l'aide de la transformation inverse de Squire.

## II.2.1 Résultats pour les fluides faiblement visco-élastiques

Nous considérons d'abord la transition du régime stable aux régimes convectivement instables de fluides faiblement visco-élastiques. Dans le cadre de la relation algébrique approximative de dispersion (I.60), les résultats de l'analyse suivants sont obtenus pour les rouleaux transversaux :

$$\omega^{(TRs)}(k, Re, Pr, \lambda_1, \Gamma) = k Re Pr F(k^2, Pr, \lambda_1, \Gamma), \quad (\text{II.4})$$

et

$$Ra^{(TRs)}(k^2, Re, Pr, \lambda_1, \Gamma) - Ra(Re = 0) = \frac{4}{27} Re^2 Pr \Phi(k^2, Pr, \lambda_1, \Gamma), \quad (\text{II.5})$$

avec les fonctions supplémentaires qui sont définies comme suit :

$$F(k^2, Pr, \lambda_1, \Gamma) = \frac{6/7 Pr f_4 + 2/11 f_1 f_3 - Pr f_1 f_5 \lambda_1 (1 - \Gamma)}{Pr f_4 + f_1 f_2 - Pr f_1 f_4 \lambda_1 (1 - \Gamma)}, \quad (\text{II.6})$$

et

$$\begin{aligned} \Phi(k^2, Pr, \lambda_1, \Gamma) &= (7F - 6) \left( 2/11 f_3 - f_2 F - Pr f_4 F \lambda_1 (1 + \Gamma) Pr - Pr f_5 \lambda_1 (1 - \Gamma) \right) \\ &+ 7 f_1 F \lambda_1 \left( 4/11 f_3 - 2 f_2 F + Pr f_4 F \lambda_1 (1 - \Gamma) \right), \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

où une inspection minutieuse de (II.4) et (II.5) révèle que ces expressions pour  $\omega^{(TRs)}$  et  $Ra^{(TRs)}$  coïncident exactement avec les équations (4.2) et (4.3) de [Carrière and Monkewitz \(1999\)](#) dans le cas limite des fluides Newtoniens ( $\Gamma = 1$ ).

Depuis que l'écoulement de base a un faible effet sur le nombre d'onde critique dans la limite de petites valeurs du produit  $\lambda_1 Re Pr$ , nous mettons  $k_c^{(TRs)} = k_c^s(Re = 0) = 3.11652$  et ainsi nous en tirons une formule simple pour la fréquence marginale des  $TRs$ , et qui est donnée par :

$$\omega_c^{(TRs)} = Re Pr \frac{0.9480 + 2.6713 Pr - 55.4647 Pr \lambda_1 (1 - \Gamma)}{0.5148 + Pr - 19.7126 Pr \lambda_1 (1 - \Gamma)}, \quad (\text{II.8})$$

qui s'annule pour  $Re = 0$ . Cette expression indique que la fréquence critique croît linéairement avec le nombre de Reynolds, puisque le taux de variation  $\partial \omega_c^{(TRs)} / \partial Re$  est positif pour toutes les combinaisons  $(\Gamma, \lambda_1)$  dans le cas d'un régime faiblement visco-élastique. En outre, l'expression de  $\omega_c^{(TRs)}$  donnée par [Carrière and Monkewitz](#)

(1999) est retrouvée à partir de (II.8) quand  $\Gamma = 1$ .

Sur la base des résultats ci-dessus, la vitesse de phase critique en grandeur adimensionnée est donnée par :

$$\frac{V_\varphi^*}{U_0^*} = \frac{\omega_c^{(TRs)}}{k_c^{(TRs)}} \frac{1}{Re Pr}, \quad (\text{II.9})$$

en utilisant les échelles de longueur et de temps de l'écoulement de base pour  $V_\varphi^*$  pour le membre de gauche de (II.9), mais leurs homologues en perturbation pour son membre de droite. Étant donné que cette vitesse de phase est positive, l'onde progressive, induite par la présence de l'écoulement de base, se propage en aval c.-à-d dans la même direction que cet écoulement. Avec  $Pr = 10$  qu'on a imposé dans cette étude, on trouve  $V_\varphi^*/U_0^* = 0.844$  dans la limite de  $\Gamma = 1$ . Ceci se compare bien avec la valeur de 0.867 obtenue numériquement par [Nicolas et al. \(2000\)](#) (voir tableau 5 du document en question et noter le facteur de 1,5 entre le nombre de Reynolds basé sur la vitesse moyenne de l'écoulement de base et le nombre actuel de Reynolds basé sur la vitesse maximale de cet même écoulement). La différence relative entre les deux valeurs calculées est de 2,6 %. L'effet des paramètres rhéologiques  $\lambda_1$  et  $\Gamma$  sur  $V_\varphi^*/U_0^*$  sera discuté plus tard dans cette section.

Après avoir utilisé la relation de dispersion approchée pour fournir des estimations initiales pour voir l'influence de l'écoulement, des résultats convergés sont ensuite générés en appliquant la méthode de tir sur la relation de dispersion complète et sont analysés en détail dans la suite. La figure II.3 montre des courbes de stabilité critiques pour le nombre de Rayleigh, le nombre d'onde et la fréquence d'oscillation en fonction du nombre de Reynolds pour  $\lambda_1 = 0.025$  et différentes valeurs de  $\Gamma$ . On peut observer à partir de ces figures qu'en absence d'écoulement ( $Re = 0$ ), la faible élasticité du fluide n'a pas d'influence sur l'apparition de l'instabilité convective et les valeurs critiques  $Ra_c$ ,  $k_c$  et  $\omega_c$  sont les mêmes que celles d'un fluide Newtonien ( $\Gamma = 1$ ). Comme prévu dans ce cas, une bifurcation dite « de fourche » (en anglais : « pitchfork ») est observée pour toutes les valeurs de  $\Gamma$ , même dans le cas limite d'un fluide de Maxwell ( $\Gamma = 0$ ) qui est également présenté à titre de comparaison.

Pour tout écoulement avec une vitesse faible mais non nulle ( $Re \neq 0$ ), il est clair à partir de la figure II.3(a) que l'augmentation de  $\Gamma$  conduit à une déstabilisation de l'écoulement de base, à savoir une réduction du nombre de Rayleigh critique respectif. Le cas le moins instable correspond à un fluide de Maxwell  $\Gamma = 0$  alors que le plus instable est celui d'un fluide Newtonien  $\Gamma = 1$ . Il est important de noter qu'une tendance inverse a été observée dans un milieu poreux par [Hirata and Ouarzazi \(2010\)](#). Une telle différence qualitative dans le comportement en ce qui concerne le

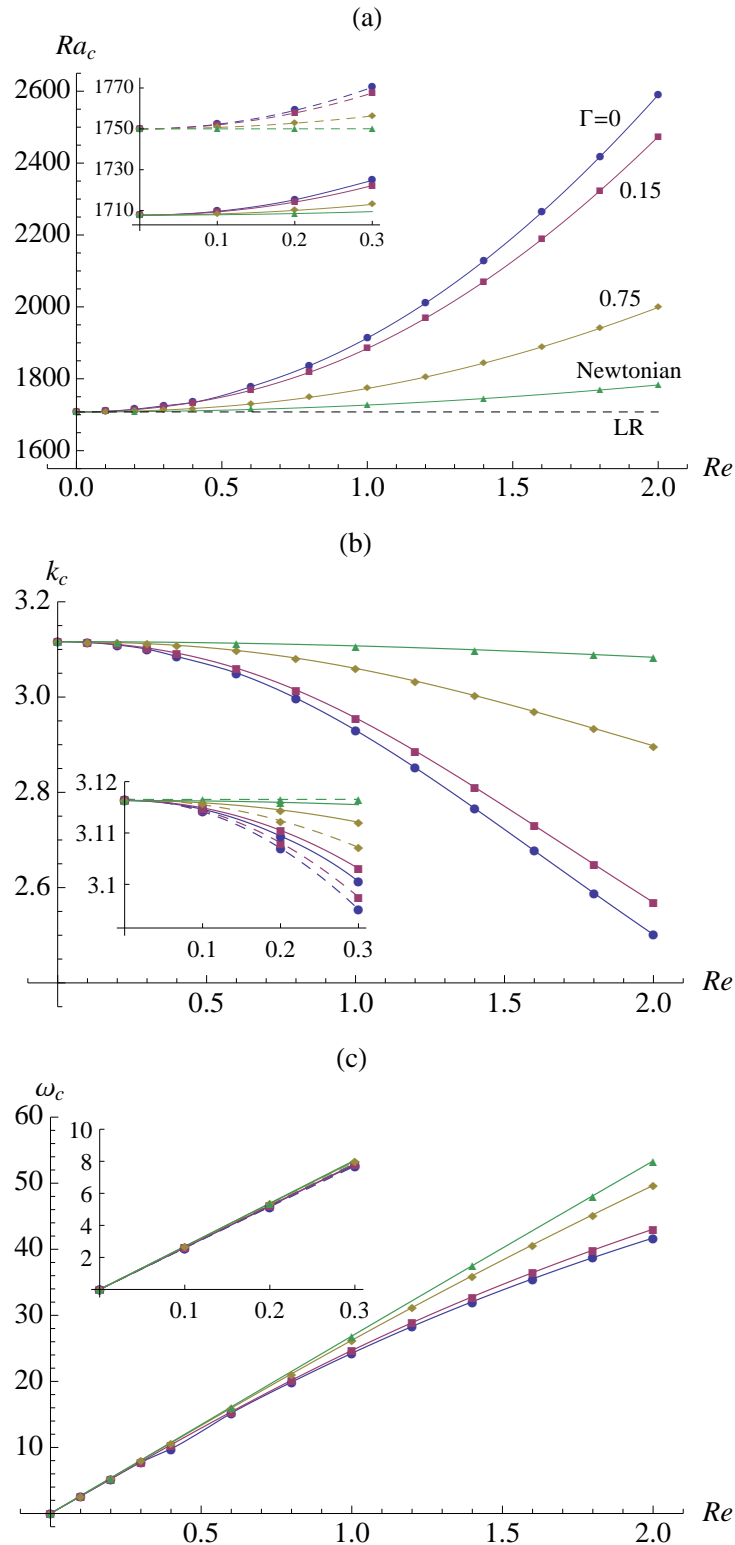


FIGURE II.3 – Les lignes continues (en couleurs) représentent les valeurs critiques (a) du nombre de Rayleigh, (b) du nombre d'onde, et (c) de la fréquence d'oscillation à la naissance de l'instabilité convective faiblement visco-élastique pour des  $TRs$  avec  $\lambda_1 = 0.025$  et différentes valeurs de  $\Gamma$ , y compris le cas de fluide Newtonien ( $\Gamma = 1$ ). Le seuil des  $LRs$  (la ligne pointillée noire) est également présenté. Des comparaisons, dans le cas des  $TRs$ , entre la relation de dispersion complète (traits pleins) et la relation de dispersion approximative (lignes pointillées) sont présentées dans les encarts.



rapport de viscosité  $\Gamma$  est susceptible d'être en raison du caractère linéaire de la loi de Darcy, utilisée pour modéliser les équations de quantité de mouvement dans le cas d'un milieu poreux.

La figure II.3(a) montre également l'effet stabilisant de l'écoulement pour une valeur fixe du rapport des viscosités. Le nombre de Rayleigh critique correspondant à la naissance de l'instabilité convective  $Ra_c$  montre, uniquement pour le cas de fluide Newtonien ( $\Gamma = 1$ ), une faible dépendance vis-à-vis de  $Re$ . Cependant, quand le rapport des viscosités  $\Gamma$  diminue, la stabilisation due à l'écoulement augmente. En d'autres termes,  $Ra_c$  est une fonction croissante de  $Re$ . En outre, plus  $\Gamma$  est petit, plus cet effet stabilisant de l'écoulement est prononcé. La figure II.3(b) d'autre part, montre une diminution du nombre d'onde critique  $k_c$  avec l'augmentation de  $Re$ , aussi bien qu'avec la diminution de  $\Gamma$ , et ce concerne le régime faiblement visco-élastique. Cela implique que les rouleaux transversaux de convection qui émergent ont une section transversale plus grande lorsque le débit d'écoulement est élevé (tout en restant modéré) et/ou lorsque la concentration du polymère est élevée. La dépendance de la fréquence critique d'oscillation  $\omega_c$  vis-à-vis de  $Re$  est représentée sur la figure II.3(c). Sa valeur diminue avec  $\Gamma$ , bien que cet effet est presque négligeable pour des nombres de  $Re$  petit. La vitesse de phase critique en grandeur adimensionnée  $V_\varphi^*/U_0^*$ , moyennée pour la gamme du nombres de Reynolds représentés sur cette figure, varie de 0.83 pour les fluides Maxwelliens ( $\Gamma = 0$ ) à 0,86 pour les fluides Newtoniens ( $\Gamma = 1$ ). Par conséquent, l'ajout de molécules de polymère à une solution avec une élasticité très faible n'a pas d'effet significatif sur la vitesse de phase des  $TRs$ .

Enfin, les encarts insérés dans la figure II.3 permettent des comparaisons entre les résultats numériques convergents obtenus à partir de la relation de dispersion complète en utilisant la méthode de tir et les résultats analytiques approximatifs obtenus à partir de la relation de dispersion algébrique générée en utilisant le développement de Galerkin basé sur le premier terme. Un assez bon accord est observé pour les faibles valeurs du nombre de Reynolds. Les résultats approchés sont en accord qualitatif avec ceux convergés de la méthode de tir, où un excellent accord quantitatif est observée jusqu'à  $Re \leq 0.3$ , avec une erreur relative maximale pour  $Ra_c$  inférieure à 2,5 %. Lorsque le nombre de Reynolds dépasse  $Re = 0.3$ , les résultats approximatifs commencent à diverger considérablement des résultats numériques convergents (i.e., ceux issus de la méthode de tir).

Il est désormais possible d'étudier l'influence de l'élasticité de fluide sur l'instabilité convective en tenant compte de son dépendance vis-à-vis de l'écoulement, et ce maintenant pour une valeur élevée de  $\lambda_1$  tout en fixant la valeur de  $\Gamma$ . La figure II.4

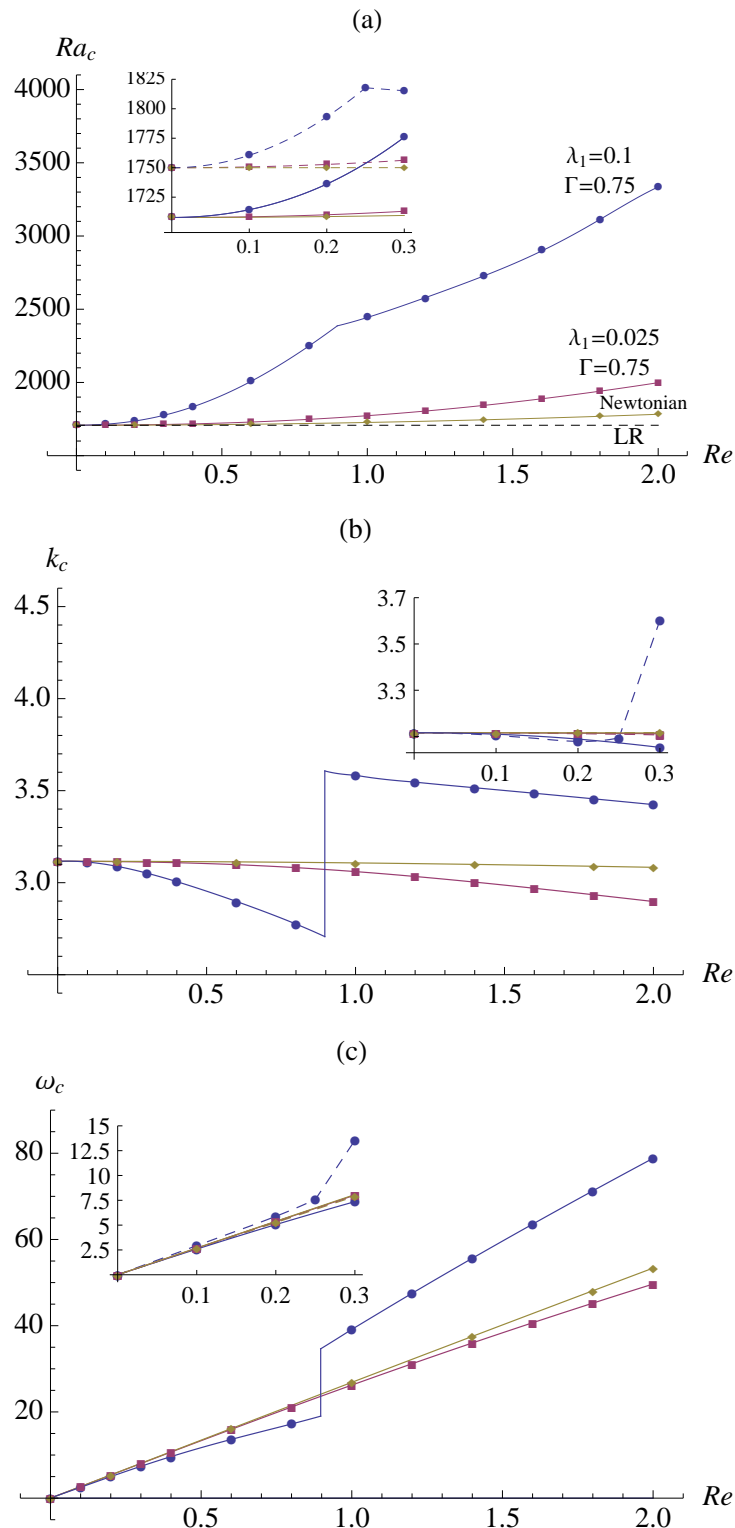


FIGURE II.4 – Les lignes continues (en couleurs) représentent les valeurs critiques (a) du nombre de Rayleigh, (b) du nombre d'onde, et (c) de la fréquence d'oscillation à la naissance de l'instabilité convective faiblement visco-élastique pour des  $TRs$  avec  $\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.75$  (fluides de Boger). Le cas de fluide Newtonien ( $\Gamma = 1$ ) et le cas où  $\lambda_1 = 0.025$  et  $\Gamma = 0.75$ , sont également présentés. Des comparaisons, dans le cas des  $TRs$ , entre la relation de dispersion complète (traits pleins) et la relation de dispersion approximative (lignes pointillées) sont présentées dans les encarts insérés. La bifurcation de codimension-deux est localisée au point où  $Re_{c2} = 0.896791$ .

présente les résultats pour  $\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.75$ , une valeur typique du rapport des viscosités qui correspond aux cas de fluides de Boger. Les courbes des paramètres critiques d'instabilité pour  $\lambda_1 = 0.025$  et  $\Gamma = 0.75$  ainsi que pour le cas Newtonien ( $\Gamma = 1$ ) sont également présentées à des fins de comparaison. La figure II.4(a) montre que pour  $Re = 0$ , encore une fois, la première bifurcation qui se produit est une bifurcation stationnaire ( $\omega_c = 0$ ) et le nombre critique de Rayleigh est le même que celui obtenu dans le cas des fluides Newtoniens. En outre, il est maintenant clair que lorsque  $Re \neq 0$ , l'augmentation de l'élasticité de fluide induit une forte augmentation de la stabilisation de l'état de base vis-à-vis des *TRs*. D'autre part, une différence qualitative est observée entre les figures II.3 et II.4, où des discontinuités apparaissent à présent lors de l'augmentation de  $Re$ . La figure II.4(a) présente une discontinuité dans la dérivée première de la fonction de  $Ra_c$  tandis que les figures II.4(b,c) montrent des discontinuités dans les fonctions elles-mêmes de  $k_c$  et  $\omega_c$ , respectivement. Le nombre d'onde critique  $k_c$  décroît avec l'augmentation de  $Re$ , mais passe brusquement à une valeur bien supérieure lorsque Reynolds atteint approximativement la valeur de  $Re \simeq 0.9$ . Néanmoins, au-delà de ce point de transition, il continue encore à diminuer avec l'augmentation de  $Re$ . Quand à la fréquence critique  $\omega_c$ , elle augmente toujours avec l'augmentation de  $Re$ , d'abord avec une pente similaire au cas du fluide Newtonien, mais ensuite elle passe brusquement à une valeur clairement supérieure lorsque Reynolds prend la valeur approximative de  $Re \simeq 0.9$ . En conséquence, un saut dans la valeur moyenne de  $V_\varphi^*/U_0^*$  est également observé, de 0,8 à 1,13. Cette augmentation dans la vitesse de phase adimensionnée lorsque  $Re \gtrsim 0.9$  signifie que les *TRs* les plus instables qui se déplacent en aval (i.e., dans la même direction que l'écoulement) deviennent plus rapides que l'écoulement de base qui alimente en énergie cette même perturbation. Enfin, les petits encarts insérés dans la figure II.4 fournissent une comparaison similaire à celle représentée sur la figure II.3, c'est-à-dire entre les résultats issus de la relation approximative (premier terme du développement de Galerkin) et la relation de dispersion complète (en utilisant la méthode de tir). Il y a un bon accord qualitatif et quantitatif, mais seulement jusqu'à  $Re \lesssim 0.25$ , où l'erreur relative maximale pour  $Ra_c$  est plus petite que 3,46 %. Cependant, il est important de mentionner que le nombre de Reynolds où la discontinuité se produit, est mal prédit par la relation algébrique approximative de dispersion.

Afin de comprendre l'origine de cette discontinuité, les courbes de stabilité neutre dans les plans  $(k, Ra)$  et  $(k, \omega)$  sont représentées sur la figure II.5, pour différentes valeurs du nombre de Reynolds aux alentours de  $Re = 1$  avec  $\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.75$ . Deux modes peuvent être distingués sur ces figures : le premier est représenté par

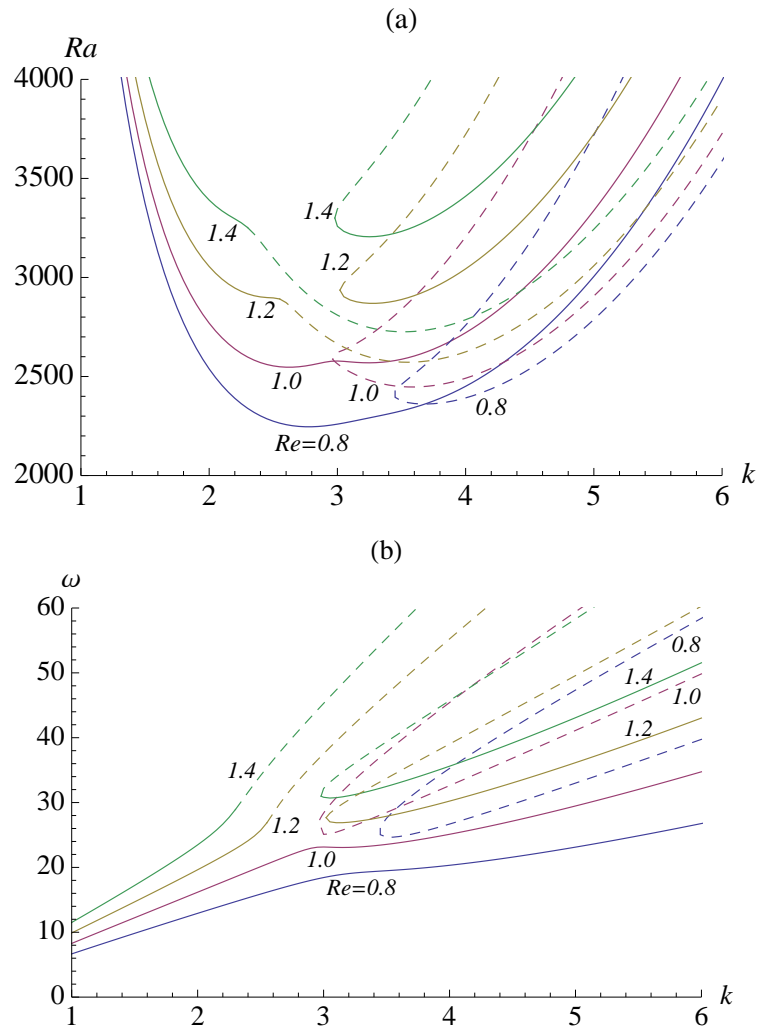


FIGURE II.5 – Les lignes (en couleurs) représentent les courbes de stabilité neutre dans (a) le plan  $(k, Ra)$  et (b) le plan  $(k, \omega)$  pour différentes valeurs du nombre de Reynolds  $Re$ , avec  $\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.75$ . Elles montrent la présence de deux modes convectivement instables représentés par des traits pleins et des traits en pointillés.

une courbe de forme parabolique, au moment où le second par une courbe en forme de doigt. La courbe de stabilité neutre de la figure II.5(a), celle qui est associée au premier mode (i.e., de forme parabolique) est une courbe de forme classique où le taux de croissance temporelle associé à ce mode est négatif en dessous de cette courbe mais qui devient positif au-dessus. D'autre part, sur la même figure II.5(a), un comportement différent est observé pour le second mode (dont la courbe prend une forme de doigt). Ce second mode instable est amplifié à l'intérieur de cette courbe de stabilité neutre et amorti à l'extérieur d'elle. Par conséquent, il existe deux minimums, un pour chaque courbe, et ils sont en compétition entre eux pour occuper la position du minimum global. Quand  $Re = 0.8$ , le premier mode est celui le plus instable, avec un minimum global situé à  $Ra_c = 2246.07$ ,  $k_c = 2.77644$  et

$\omega_c = 17.4039$ . Cependant, c'est le second mode qui devient le plus instable lorsque  $Re = 1.0$ , avec un minimum global situé cette fois-ci à  $Ra_c = 2447$ ,  $k_c = 3.58395$  et  $\omega_c = 39.1393$ . Par conséquent, il existe une bifurcation de codimension-deux et elle se produit à la valeur de  $Re_{c2} = 0.896791$ , qui est le nombre de Reynolds pour lequel les deux modes en question se trouvent au même degré d'instabilité (c.-à-d. qu'ils présentent d'une manière égale le même minima en terme du nombre critique  $Ra_c$ ). Cette permutation entre les deux modes est responsable des discontinuités observées dans la figure II.4 et il semble qu'elles sont dues, vraisemblablement, à l'élasticité élevée du fluide. Les mécanismes physiques qui sont à l'origine de cette transition entre ces deux modes instables, seront élucidés par une analyse énergétique qui sera réalisée au cours du § II.3.2.

## II.2.2 Résultats pour les fluides fortement visco-élastiques

La prédiction des seuils d'instabilité convective est maintenant effectuée pour des solutions fortement visco-élastiques. Une discussion détaillée du cas  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.75$  est avancée en premier. Il existe trois solutions convectivement instables pour bifurquer vers cette instabilité. Leurs seuils respectifs de bifurcation ainsi que leurs fréquences critiques associées, sont présentés dans la figure II.6. En l'absence d'écoulement ( $Re = 0$ ), le seuil de la convection stationnaire, obtenu numériquement avec la méthode de tir, est  $Ra_c^s = 1707.76$ . D'autre part, le seuil de la bifurcation de Hopf pour le même nombre de Reynolds (i.e.,  $Re = 0$ ) est  $Ra_c^o = 1574.77$ , et ce pour les deux paquets d'ondes se propageant à droite ou à gauche – en raison de la symétrie du problème – avec des fréquences critiques de Hopf opposées  $\omega_c = \pm 2.68$ . En l'absence d'écoulement de base et lorsque  $Ra_c^o < Ra_c^s$ , le système subit donc une bifurcation de Hopf, ce qui caractérise le fluide comme étant un fluide fortement visco-élastique.

La présence de l'écoulement rompt la symétrie miroir ( $x \rightarrow -x$ ), mais le processus de sélection est différent de celui observé pour les solutions faiblement visco-élastiques. Afin de faire la distinction entre les trois modes instables pour  $Re > 0$ , nous utilisons les indices supérieurs  $S$ ,  $U$  et  $D$ . L'indice supérieur  $S$  caractérise le mode instable stationnaire du cas limite  $Re = 0$ , à savoir  $\omega_c(Re \rightarrow 0) = 0$ . L'indice  $D$  (ou  $U$ ) identifie le mode pour lequel  $\omega_c(Re \rightarrow 0)$  est positive (ou négative), et les paquets d'ondes associées (qui sont des ondes mobiles se déplaçant dans l'espace confiné de la couche fluide) seront désignés par  $TWD$  (ou  $TWU$ )<sup>6</sup>. Comme le montre la figure II.6(a), les trois modes donnent trois valeurs différentes du nombre de Ray-

---

6.  $TWD$  : Travelling Waves Downstream, en français ondes se déplaçant en aval.  $TWU$  : Travelling Waves Upstream, en français ondes se déplaçant en amont.

leigh critique qui évoluent différemment avec  $Re$ . L'effet stabilisant de l'écoulement se trouve plus important pour le mode  $S$  que pour les modes  $TWD$  et  $TWU$ . Le nombre le plus critique de Rayleigh correspond soit à  $Ra_c^D$  ou à  $Ra_c^U$  en fonction du nombre de Reynolds. Quand  $Re \lesssim 0.6$ , le mode  $TWU$  – dont  $\omega_c < 0$  lorsque  $Re = 0$  (voir figure II.6(b)) – est le plus instable, c.-à-d.  $Ra_c^U < Ra_c^D$ . Pour de grand  $Re$ , et comme  $Ra_c^D < Ra_c^U$ , une transition se produit du mode  $TWU$  vers le mode  $TWD$ . Ainsi, un point de bifurcation de codimension-deux existe lorsque  $Ra_c^U = Ra_c^D$  et qui est, en fait, situé à  $Re_{c2} = 0.603077$ . La transition du mode  $TWU$  au mode  $TWD$  est bien illustrée dans la figure II.7 pour  $Re = 0.4, 0.6$  et  $0.8$ , où la courbe de forme parabolique (trait continu) et celle en forme de doigt (ligne pointillée) représentent les courbes de stabilité neutre pour les deux modes  $TWU$  et  $TWD$  respectivement. Nous insistons sur le fait que la transition observée est accompagnée d'un bond considérable en fréquence d'oscillation, de  $\omega_c = 4.97404$  à  $28.0336$  et en nombre d'onde, à partir de  $k_c = 3.0828$  à  $3.23644$ , conduisant à un changement brusque et discontinu dans la valeur de la vitesse de phase. Ainsi, lorsque  $Re > Re_{c2}$ , un tel saut conduit à une augmentation significative dans la valeur moyenne du rapport  $V_\varphi^*/U_0^*$  de  $0.267539$  à  $1.43628$ , indiquant que les ondes  $TWD$  se déplacent avec une vitesse bien supérieure à la vitesse maximale de l'écoulement de base.

Après avoir analysé en détail le cas fortement visco-élastique  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.75$ , maintenant nous pouvons l'utiliser comme une référence dans l'examen des effets des deux paramètres visco-élastiques sur les propriétés de stabilité de l'écoulement de base. Dans le reste de ce paragraphe, au lieu de présenter les trois modes instables présents, nous nous concentrons uniquement sur les propriétés du mode le plus instable, qui peut être le mode  $TWU$  ou  $TWD$ , et ce dépendamment des paramètres rhéologiques du fluide (à savoir  $\lambda_1$  et  $\Gamma$ ) mais aussi du nombre de Reynolds imposé par l'écoulement. D'abord, et afin d'évaluer en premier l'effet de l'élasticité de fluide sur cette instabilité, les deux cas  $\lambda_1 = 0.1$  et  $\lambda_1 = 0.3$  seront étudiés pour un rapport de viscosités fixe  $\Gamma = 0.15$ . Ensuite, l'effet du rapport de viscosités tout seul, sera étudié cette fois-ci en fixant  $\lambda_1 = 0.3$  et en examinant l'effet de  $\Gamma$  sur l'instabilité en changeant sa valeur entre  $\Gamma = 0.15$  et  $\Gamma = 0.75$ . Les quatre cas différents sont présentés dans la figure II.8, qui donne les valeurs critiques du nombre de Rayleigh, du nombre d'onde, de la fréquence d'oscillation et de la vitesse de phase aux seuils de déclenchement de l'instabilité convective. Cette même figure contient toutes les combinaisons possibles que l'on peut former à partir des paramètres rhéologiques  $\lambda_1 = 0.1$  et  $0.3$ , et  $\Gamma = 0.15$  et  $0.75$ . Il est important de noter que le cas  $\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.75$  représente une solution faiblement visco-élastique (représentée dans la figure II.8 par une ligne continue dénuée de symboles) et qu'il

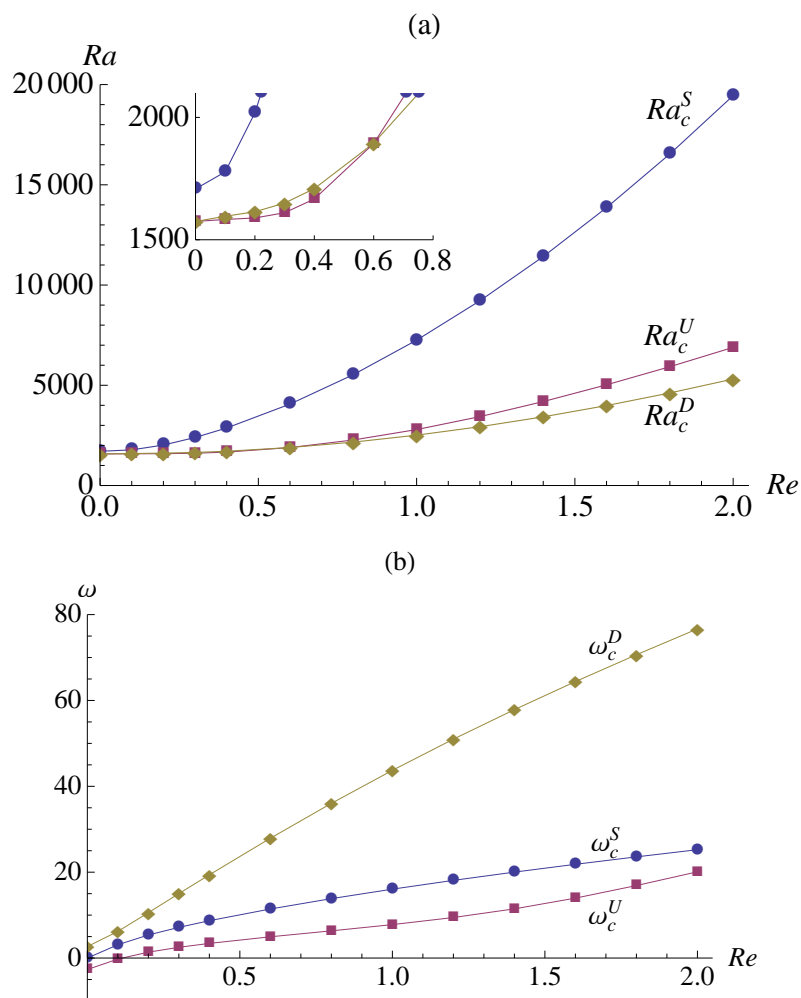


FIGURE II.6 – Les courbes (en couleurs) représentent (a) le nombre de Rayleigh critique et (b) la fréquence critique associée, correspondant aux trois modes existants d'instabilité convective pour le cas fortement visco-élastique ( $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.75$ ), et ce en fonction du nombre de Reynolds. Les indices supérieurs  $S$ ,  $D$  et  $U$  désignent respectivement les trois modes d'ondes : stationnaires, mobiles dans la direction de l'écoulement (en aval) et mobiles dans la direction opposée (en amont). L'encart inséré dans la figure (a) montre que les courbes de Rayleigh critique des deux modes  $TWU$  et  $TWD$  se croisent au point  $Re = Re_{c2} \simeq 0.6$ .

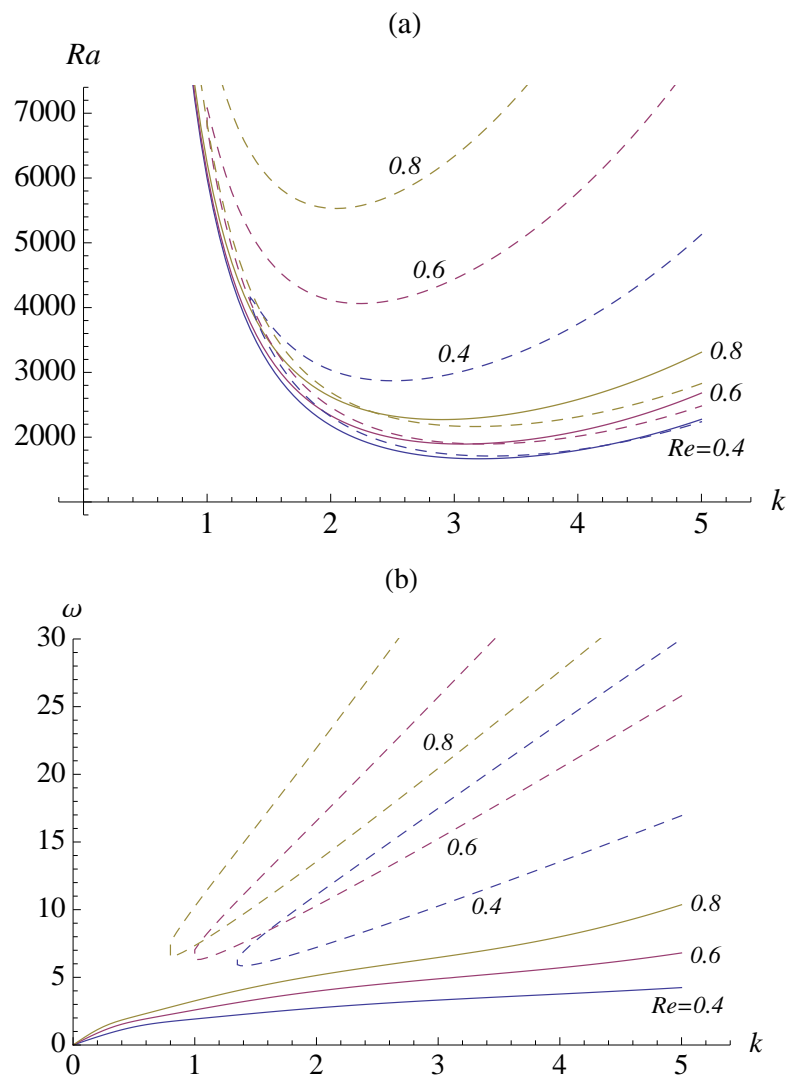


FIGURE II.7 – Les lignes (en couleurs) représentent les courbes de stabilité neutre dans (a) le plan  $(k, Ra)$  et (b) le plan  $(k, \omega)$ , pour différentes valeurs du nombre de Reynolds  $Re$ , avec  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.75$ . La courbe de forme parabolique (traits pleins) et celle en forme de doigt (traits en pointillés) représentent les courbes de stabilité neutre pour les deux modes  $TWU$  et  $TWD$  respectivement.



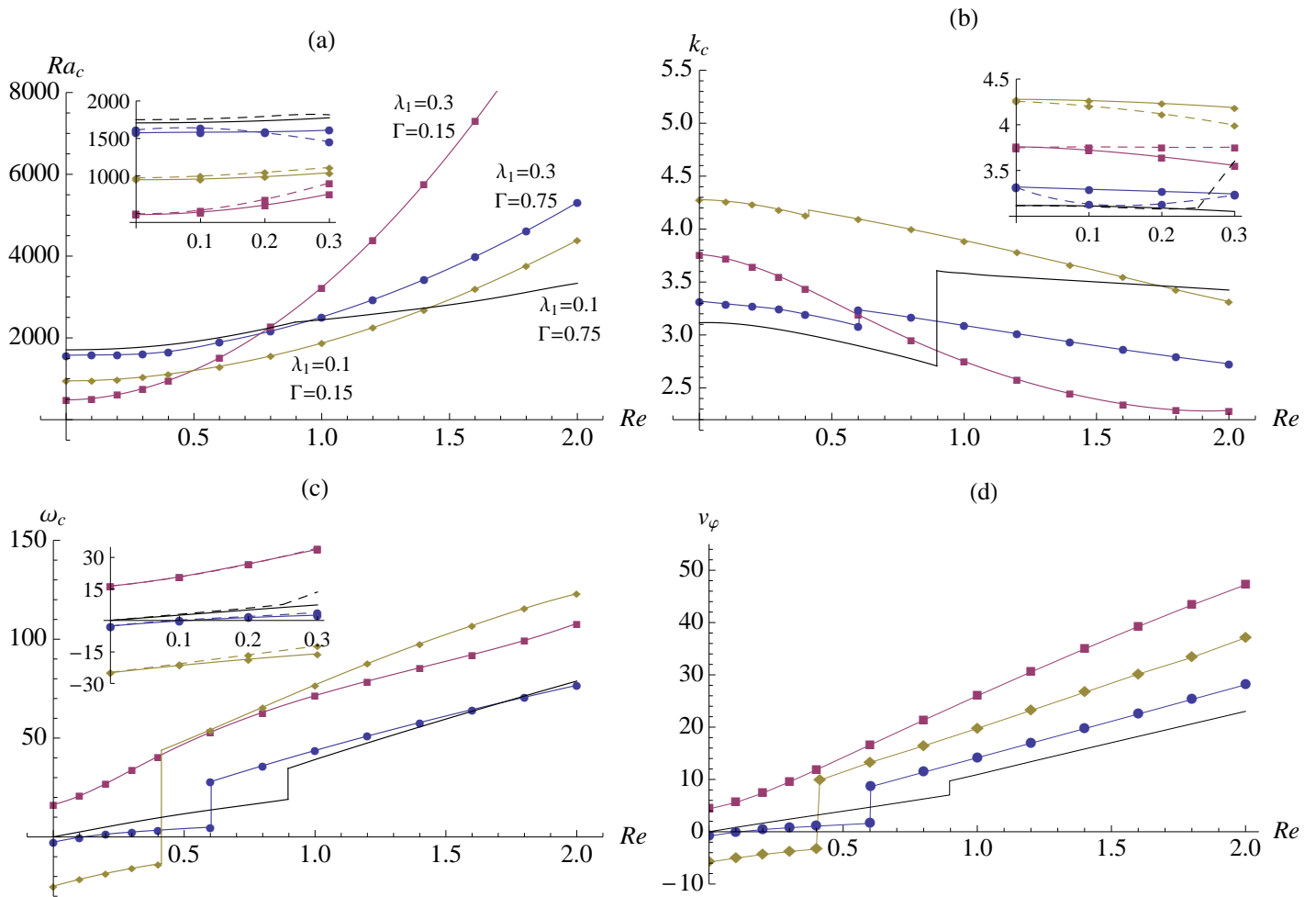


FIGURE II.8 – Les courbes (en couleurs) représentent les valeurs critiques (a) du nombre de Rayleigh, (b) du nombre d'onde, (c) de la fréquence d'oscillation, et (d) de la vitesse de phase, aux seuils de l'instabilité convective naissante dans le cas des  $TRs$  fortement visco-élastiques avec  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.75$  ( $Re_{c2} = 0.603077$ ),  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.15$ , ainsi que pour  $\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.15$  ( $Re_{c2} = 0.41291$ ). Les courbes des  $TRs$  faiblement visco-élastiques du cas  $\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.75$  (courbes continues sans symboles) sont également présentées.

est inclus ici à des fins de comparaison. Comme on s'y attendait pour des solutions fortement visco-élastiques, une bifurcation de Hopf se produit pour les trois combinaisons de paramètres rhéologiques dans la limite du nombre de Reynolds nul ( $Re = 0$ ). Dans cette limite, les nombres de Rayleigh critiques qui marquent le début de l'instabilité convective oscillatoire sont  $Ra_c^o = 950.05$  pour  $\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.15$ ,  $Ra_c^o = 484.57$  pour  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.15$ , et  $Ra_c^o = 1574.77$  pour  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.75$ . Cela nous indique que lorsque le nombre de Reynolds est nul ( $Re = 0$ ),  $Ra_c^o$  diminue avec l'augmentation de  $\lambda_1$ , mais croît avec l'augmentation de  $\Gamma$ . Un tel rôle, respectivement déstabilisant/stabilisant de ces deux paramètres rhéologiques, reste également valable pour des valeurs non nulles mais relativement faibles du nombre de Reynolds, néanmoins il sera inversé au-delà d'une certaine valeur assez grande de Reynolds. La figure II.8(a) montre également cette inversion induite à la fois dans le rôle de l'élasticité de fluide et dans le rôle du rapport de viscosités. Pour les cas de comparaisons présentées ici, l'inversion se produit pour la première comparaison (l'augmentation de  $\lambda_1$ ) au point  $Re = 0.497597$  et pour la deuxième (l'augmentation de  $\Gamma$ ) à  $Re = 0.759447$ .

Deux remarques supplémentaires sur la figure II.8 sont nécessaires. La première est l'absence de discontinuités pour le cas fortement visco-élastique  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.15$ . En second lieu, pour les autres cas, les discontinuités observées induisent un changement substantiel dans l'amplitude de la vitesse de phase. Par exemple, pour le cas  $\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.15$ , la valeur moyenne du rapport  $V_\varphi^*/U_0^*$  saute brusquement de  $-0.78829$  à  $2.54131$  quand  $Re = Re_{c2}$ . En d'autres termes, l'amplitude moyenne de la vitesse de phase relative à ce cas de fluide, passe instantanément d'une valeur d'à peu près deux fois la vitesse maximale de l'écoulement de base en se déplaçant en amont (i.e., contre le courant) lorsque  $Re < Re_{c2}$ , à une valeur d'à peu près deux fois cette même vitesse mais tout en voyageant en aval (i.e., dans la direction du courant) lorsque  $Re > Re_{c2}$ .

Enfin, il est important de noter que le nombre de Rayleigh critique pour les perturbations tridimensionnelles (c.-à-d. les rouleaux obliques, en anglais *ORs* : Oblique Rolls), peut être obtenu à partir de la transformation de Squire (I.68), c'est-à-dire :

$$Ra_c^{3D}(k_x^2 + k_y^2, k_x Re_{3D}) = Ra_c^{2D}(k^2, k Re) \quad \text{avec} \quad Re_{3D} = (k/k_x)Re, \quad (\text{II.10})$$

ce qui signifie des valeurs de  $Re_{3D}$ , élevées comparativement à  $Re$ , sont nécessaires puisque  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 > k_x^2$ . En outre, les résultats de l'analyse de stabilité temporelle indiquent que la courbe  $Ra_c^{2D}$  est ascendante lorsqu'on augmente  $Re$ , et ce pour tous les paramètres visco-élastiques considérés dans la présente étude. De ce fait, la

courbe  $Ra_c^{3D}$  est toujours inférieure à la courbe  $Ra_c^{2D}$  quel qu'en soit le nombre de Reynolds. Cela signifie que les *ORs* sont plus instables que les *TRs*. Cependant, comme indiqué précédemment, le nombre de Rayleigh critique associé aux structures 3D (i.e., *ORs*) est encore plus haut que le seuil correspondant aux *LRs*. Par conséquent, les *LRs* sont plutôt favorisés au moment du déclenchement de l'instabilité convective. Comme c'est bien connu, cette sélection linéaire (c.-à-d. basée sur une analyse linéaire de stabilité) de structures de convection vaut également pour le cas de fluides Newtoniens. De manière générale, un rouleau oscillant peut être une onde qui oscille sur place (*in situ*, qu'on appelle communément onde stationnaire), comme il peut être aussi une onde qui se propage dans le plan  $(x, y)$  (une onde progressive). Dans ce cas, une analyse de stabilité non linéaire s'avère nécessaire pour répondre à la question de savoir si les ondes sélectionnées seront stationnaires ou progressives.

## II.3 Mécanismes physiques de l'instabilité

Les mécanismes physiques, conduisant à l'apparition de chacun des modes instables, sont examinés ici en calculant les champs propres de la perturbation bi-dimensionnelle 2D au voisinage du point de bifurcation de codimension-deux et également en effectuant l'analyse énergétique nécessaire.

### II.3.1 Structures spatiales des instabilités convectives naissantes aux seuils critiques

Dans cette section, nous présentons les structures spatiales des champs propres de la première perturbation qui se déclenche au commencement de la convection naissante. Nous nous concentrons sur le changement qualitatif dans ces structures qui résulte du couplage entre l'écoulement de Poiseuille (i.e., l'écoulement de base) et la visco-élasticité du fluide. À cette fin, la vitesse verticale de la perturbation au seuil critique  $w_p$  ainsi que le taux d'élongation (ou taux d'étirement)  $\partial u_p / \partial x$  sont tous deux calculés. La première variable peut être écrite comme :

$$w_p(x, z, t) = |w_n(z)| \cos(k_c x - \omega_c t + \varphi(z)) \quad (\text{II.11})$$

où  $\varphi(z)$  représente sa phase et  $w_n(z)$  sa fonction propre complexe. Étant donné que la vraie valeur de l'amplitude de cette fonction propre ne peut être déterminée par une analyse de stabilité linéaire, les résultats de calcul de la méthode de tir ont tous été normalisés en mettant  $\mathfrak{C}_3 = 1$  dans la condition aux limites (I.67).

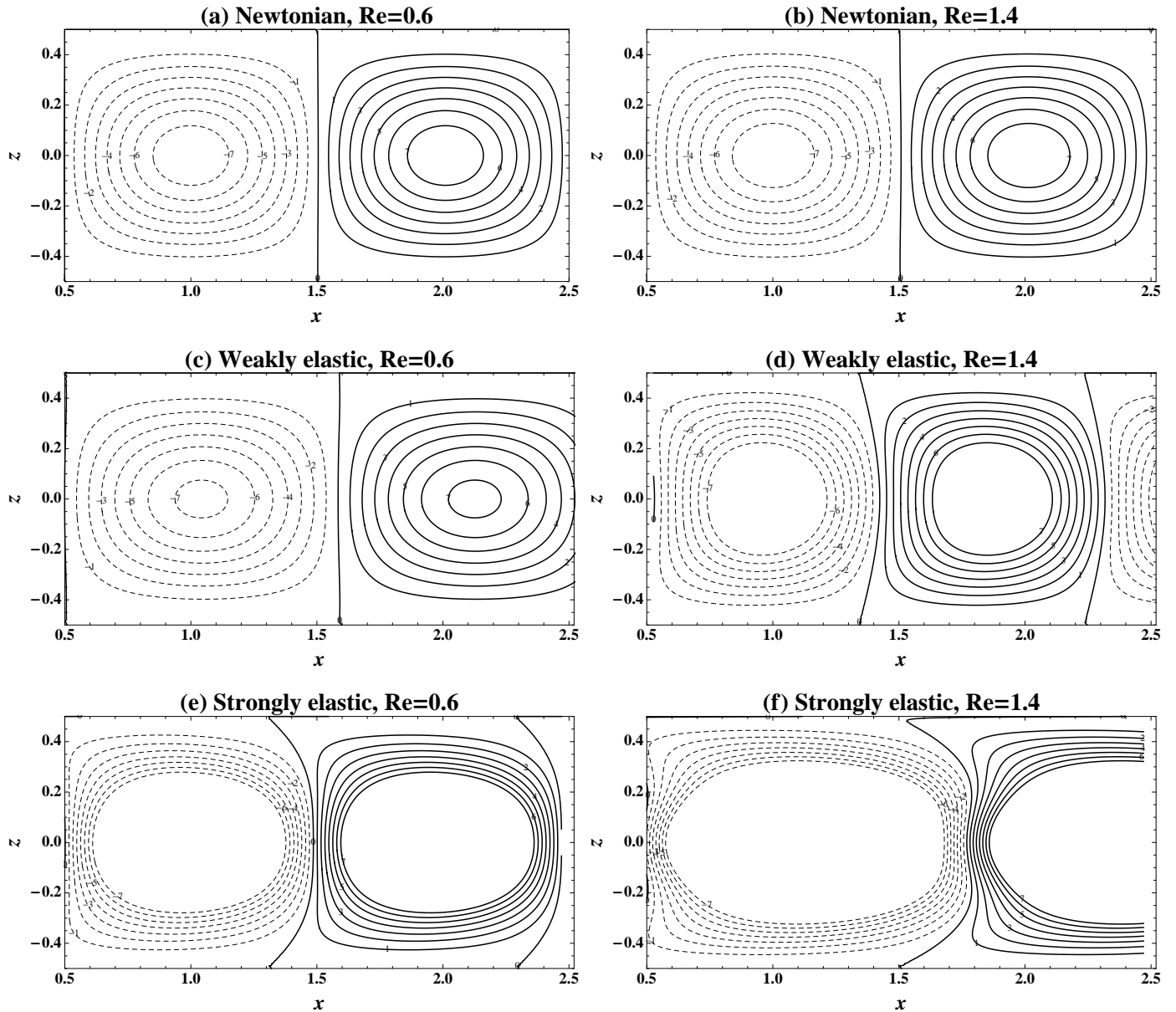


FIGURE II.9 – Iso-contours du champ de vitesse  $w_p$  dans le plan  $(x, z)$  pour  $Re = 0.6$  et  $Re = 1.4$ . Les paramètres sont  $(\lambda_1 = \lambda_2$  et  $\Gamma = 1)$  pour un fluide Newtonien, ainsi que  $(\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.75)$  et  $(\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.15)$  pour les solutions faiblement et fortement visco-élastiques, respectivement. (a) fluide Newtonien,  $Re = 0.6$ ; (b) fluide Newtonien,  $Re = 1.4$ ; (c) fluide faiblement visco-élastique,  $Re = 0.6$ ; (d) fluide faiblement visco-élastique,  $Re = 1.4$ ; (e) fluide fortement visco-élastique,  $Re = 0.6$ ; (f) fluide fortement visco-élastique,  $Re = 1.4$ .

Les différences globales dans les structures spatiales entre celles des fluides Newtoniens et celles des fluides visco-élastiques sont résumées dans la figure II.9 en comparant les iso-contours de  $w_p$  pour  $Re = 0.6$  ( $< Re_{c2} \simeq 0.9$ ) et  $Re = 1.4$  ( $> Re_{c2}$ ). Ici, les valeurs prescrites du nombre d'élasticité et du rapport de viscosités sont respectivement  $\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.75$  pour le régime faiblement visco-élastique et  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.15$  dans le régime fortement visco-élastique. Le tracé des iso-contours de  $w_p$  indique que la structure de convection des fluides Newtoniens est essentiellement non affectée par une augmentation du nombre de Reynolds. Toutefois, pour des fluides non-Newtoniens, deux effets perceptibles de l'élasticité sont évidents : (i) les motifs des cellules de convection perdent leur symétrie, en devenant déformées, et (ii) les cellules changent de taille lorsque  $Re$  augmente. Dans le régime faiblement visco-élastique, le mode dominant d'instabilité pour  $Re = 0.6$  ( $Re = 1.4$ ) est celui qui a le nombre d'onde le plus petit (le plus grand), ce qui implique que les  $TRs$  émergents ont la section la plus grande (la plus petite). D'autre part, le comportement inverse est observé pour les solutions fortement visco-élastiques.

Les évaluations quantitatives peuvent également être effectuées à partir de ces données et elles sont présentées dans les figures II.10 et II.11. Dans la figure II.10, les profils verticaux (a) de la valeur absolue de la fonction propre complexe et (b) de la phase de  $w_p(z)$ , sont tracés pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds. La figure II.11 donne la valeur absolue du taux d'élongation. Ces figures montrent, dans le cas de fluide Newtonien, que l'influence de l'écoulement de base sur  $|w_n(z)|$  et  $|\partial u_p / \partial x|$  est négligeable, et que  $\varphi(z)$  ne varie pas verticalement (i.e., suivant  $z$ ). Un tel comportement est en contraste avec celui observé avec les fluides visco-élastiques. Dans ce cas, il y a une variation verticale dans la phase et qui devient plus prononcée lorsqu'on augmente  $Re$ . Bien que non représenté ici, cet effet est plus marqué pour les fluides fortement visco-élastiques qu'avec les fluides faiblement visco-élastiques. Ainsi, nous en inférons que la variation verticale dans la phase (induite par l'élasticité de fluide) et que la déformation observée sur la forme des cellules de convection, sont reliées l'une à l'autre. En outre,  $|w_n(z)|$  et  $|\partial u_p / \partial x|$  diminuent, tous les deux, avec une augmentation de  $Re$  lorsque  $Re < Re_{c2}$ , mais passent à des valeurs plus élevées lorsque  $Re$  dépasse  $Re_{c2}$  et ensuite ils continuent à augmenter avec l'accroissement de  $Re$ . Physiquement, le changement brusque – de faibles valeurs à des valeurs bien supérieures – dans le taux d'élongation, et ce, lorsque le point de bifurcation de codimension-deux est franchi, indique que les polymères restent dans l'état enroulé quand  $Re < Re_{c2}$  mais qui seront sensiblement allongés pour des valeurs plus élevées du nombre de Reynolds. Par conséquent, l'influence de l'élasticité de fluide sur la transition entre les deux modes d'instabilité,

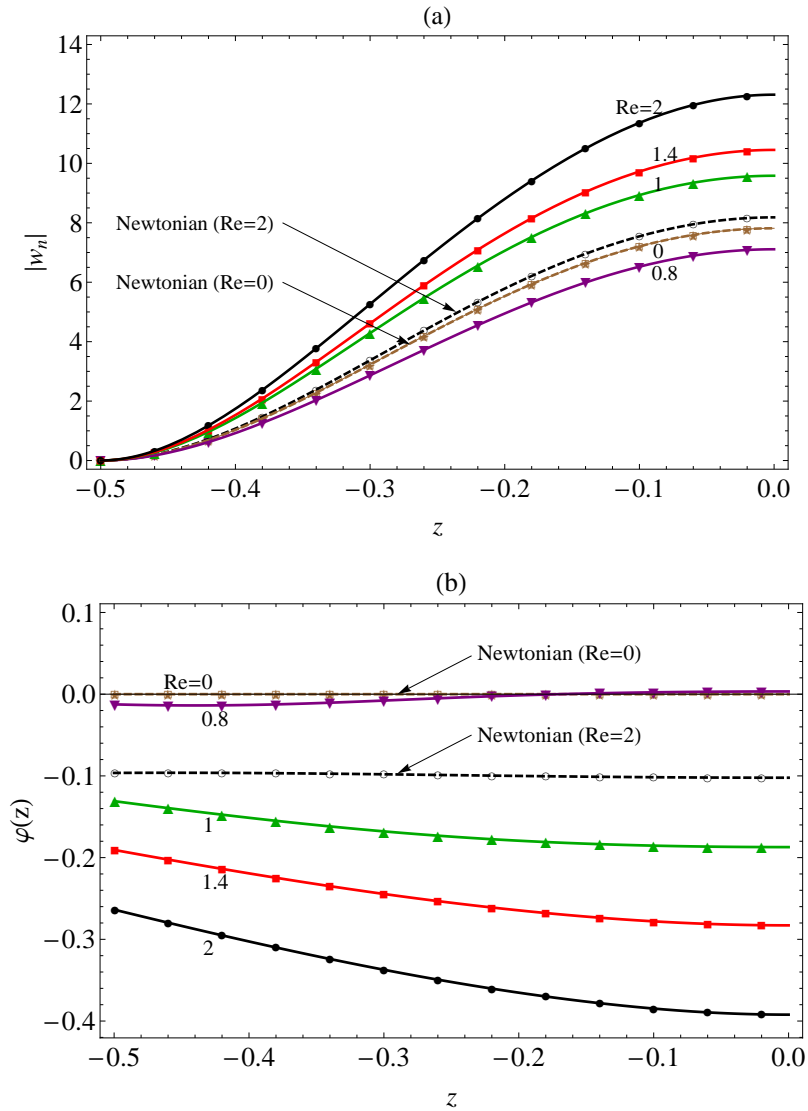


FIGURE II.10 – Les courbes (en couleurs) représentent (a) la valeur absolue et (b) la phase de la vitesse de perturbation au seuil critique, pour plusieurs valeurs de  $Re$ . Les courbes sont symétriques par rapport à la ligne médiane  $z = 0$ . Les traits pleins et en pointillés correspondent, respectivement, à un fluide faiblement visco-élastique ( $\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.75$ ) et à un fluide Newtonien. Notez que les courbes correspondant au fluide Newtonien et au fluide visco-élastique coïncident uniquement pour le cas  $Re = 0$ .

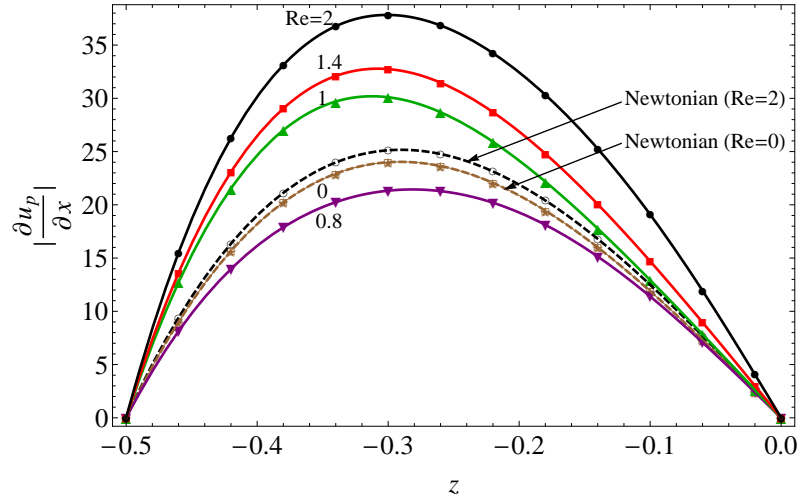


FIGURE II.11 – La variation spatiale verticale (i.e., le long de  $z$ ) de la valeur absolue du taux d'élongation pour les mêmes paramètres que ceux de la figure II.10. Les deux courbes correspondant au fluide Newtonien et au fluide visco-élastique coïncident uniquement pour le cas  $Re = 0$ .

est rendue claire et évidente en regardant les changements (i.e., les sauts) dans la valeur de la vitesse verticale ainsi que dans la valeur du taux d'élongation.

### II.3.2 Bilan énergétique

Afin d'approfondir les connaissances et d'apporter plus d'éclairage sur les mécanismes physiques sous-tendant les instabilités susmentionnées, nous avons effectué une analyse du bilan énergétique (Suslov and Paolucci, 1995; Hu et al., 2007).

Pour commencer, les deux équations bidimensionnelles linéarisées de Navier-Stokes peuvent être écrites à l'aide des modes normaux comme :

$$\begin{aligned} \frac{-i\omega}{Pr} u_n(z) + ik Re f(z) u_n(z) + Re f'(z) w_n(z) & \quad (II.12) \\ & = -ik P_n(z) + ik \tau_n^{(1,1)}(z) + D\tau_n^{(1,3)}(z) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-i\omega}{Pr} w_n(z) + ik Re f(z) w_n(z) - Ra \theta_n(z) & = -DP_n(z) + ik \tau_n^{(1,3)}(z) + D\tau_n^{(3,3)}(z) . \\ & \quad (II.13) \end{aligned}$$

Ensuite, les équations (II.12) et (II.13) sont multipliées par  $\bar{u}_n(z)$  et  $\bar{w}_n(z)$  respectivement, où le symbole de barre supérieure “ $\bar{\phantom{x}}$ ” désigne le complexe conjugué.

Après avoir additionné les deux équations qui en résultent, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & - \frac{i(\omega_r + i\omega_i)}{Pr} (|u_n(z)|^2 + |w_n(z)|^2) + ik \operatorname{Re} f(z) (|u_n(z)|^2 + |w_n(z)|^2) \quad (\text{II.14}) \\
 & + \operatorname{Re} f'(z) w_n(z) \bar{u}_n(z) - Ra \theta_n(z) \bar{w}_n(z) = -ik P_n(z) \bar{u}_n(z) - DP_n(z) \bar{w}_n(z) \\
 & + \{ ik \tau_n^{(1,1)}(z) \bar{u}_n(z) + D\tau_n^{(1,3)}(z) \bar{u}_n(z) + ik \tau_n^{(1,3)}(z) \bar{w}_n(z) + D\tau_n^{(3,3)}(z) \bar{w}_n(z) \},
 \end{aligned}$$

L'intégration de l'équation ci-dessus sur la hauteur de la cavité et moyennant quelques transformations dans le but d'éliminer les termes nuls (identiquement vérifiés) tels que l'intégrale de pression, cela conduit à la relation du taux de variation de l'énergie cinétique fluctuante  $E_K$  (l'énergie cinétique de perturbation spatialement moyennée) :

$$2 \omega_i E_K = E_{Re} + E_T + E_D, \quad (\text{II.15})$$

où les différentes contributions sont données par :

$$E_K = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} (|u_n(z)|^2 + |w_n(z)|^2) dz, \quad (\text{II.16})$$

$$E_{Re} = \operatorname{Re} Pr \int_{-1/2}^{1/2} (8z) \times \operatorname{Real} [w_n(z) \bar{u}_n(z)] dz, \quad (\text{II.17})$$

$$E_T = Ra Pr \int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{Real} [\theta_n(z) \bar{w}_n(z)] dz, \quad (\text{II.18})$$

$$\begin{aligned}
 E_D = Pr \int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{Real} \left[ \right. & i k \tau_n^{(1,1)}(z) \bar{u}_n(z) - \tau_n^{(1,3)}(z) D\bar{u}_n(z) \quad (\text{II.19}) \\
 & \left. + i k \tau_n^{(1,3)}(z) \bar{w}_n(z) - \tau_n^{(3,3)}(z) D\bar{w}_n(z) \right] dz.
 \end{aligned}$$

avec  $E_{Re}$  est la production de l'énergie cinétique de perturbation engendrée par l'écoulement moyen cisailé,  $E_T$  est la contribution thermique (l'effet combiné des forces de flottabilité et de la chaleur) et  $E_D$  correspond à la l'énergie dissipée totale spatialement moyennée. Il est important de noter que l'équation (II.15) pourrait être utilisée pour valider les résultats obtenus jusqu'alors au seuil de l'instabilité où  $\omega_i = 0$ .

Les termes des contraintes de perturbation  $\tau_n^{(1,1)}$ ,  $\tau_n^{(1,3)}$  et  $\tau_n^{(3,3)}$  figurant dans l'équation de l'énergie de dissipation (II.19) sont donnés en annexe A.

Pour mieux comprendre la contribution de chaque contrainte de perturbation à l'énergie dissipée totale, celle-ci est décomposée comme suit :

$$E_D = E_D^{(1,1)} + E_D^{(3,3)} + E_D^{(1,3)}, \quad (\text{II.20})$$



chacune des différentes contributions est définie par :

$$E_D^{(1,1)} = Pr \int_{-1/2}^{1/2} \text{Real} \left[ ik_c \tau_n^{(1,1)}(z) \bar{u}_n(z) \right] dz, \quad (\text{II.21})$$

$$E_D^{(3,3)} = Pr \int_{-1/2}^{1/2} \text{Real} \left[ -\tau_n^{(3,3)}(z) D\bar{w}_n(z) \right] dz \quad (\text{II.22})$$

et

$$E_D^{(1,3)} = Pr \int_{-1/2}^{1/2} \text{Real} \left[ ik_c \tau_n^{(1,3)}(z) \bar{w}_n(z) - \tau_n^{(1,3)}(z) D\bar{u}_n(z) \right] dz; \quad (\text{II.23})$$

En d'autres termes,  $E_D^{(i,j)}$  est l'énergie de perturbation – soit créée ou dissipée – générée par l'action de la contrainte de perturbation  $\tau_p^{(i,j)}$ .

Le tableau II.1 présente les contributions relatives à l'équation de l'énergie cinétique à  $Re = 0$  pour un fluide Newtonien ainsi que pour les quatre cas de fluides visco-élastiques représentatifs. Les couples de valeurs du rapport de viscosités et du nombre d'élasticité sont  $(\Gamma = 0.15, \lambda_1 = 0.025)$  et  $(\Gamma = 0.75, \lambda_1 = 0.1)$  pour le régime faiblement visco-élastique ainsi que  $(\Gamma = 0.15, \lambda_1 = 0.1)$  et  $(\Gamma = 0.75, \lambda_1 = 0.3)$  dans le régime fortement visco-élastique. Toutes les différentes contributions ont été normalisées par l'énergie dissipée totale spatialement moyennée d'un écoulement de fluide Newtonien  $E_{DN}$ . Ce tableau montre que l'élasticité de fluide n'a aucun effet sur les différentes contributions à l'énergie cinétique dans le régime faiblement visco-élastique, où le fluide non-Newtonien se comporte comme un fluide Newtonien. Par conséquent, nous concluons que le mode stationnaire d'instabilité, qui apparaît dans un régime faiblement visco-élastique, se développe uniquement en raison du caractère visqueux du fluide. Un scénario différent émerge dans le régime fortement visco-élastique. La contribution des contraintes normales (contraintes de cisaillement) à l'énergie dissipée totale devient plus prononcée (moins prononcée) en raison de l'élasticité de fluide. D'autre part, les valeurs relatives des contributions de l'énergie dissipée totale et de l'énergie thermique, diminuent avec l'augmentation de l'élasticité. Par conséquent, la déstabilisation observée est donc responsable de l'apparition d'un mode d'instabilité – induit par le caractère élastique du fluide – sous la forme d'une convection oscillatoire, exactement comme prédit par l'analyse de stabilité linéaire.

Il est désormais possible d'étudier la façon dont ces différentes contributions à l'énergie cinétique de perturbation, changent en présence de l'écoulement de Poiseuille pour les deux modes élastique et visqueux de l'instabilité. Les bilans énergétiques associés à la figure II.5(a) sont donnés dans le tableau II.2 pour  $\lambda_1 = 0.1$ ,

$\Gamma$	$\lambda_1$	$E_D^{(1,1)}/ E_{DN} $	$E_D^{(3,3)}/ E_{DN} $	$E_D^{(1,3)}/ E_{DN} $	$E_D/ E_{DN} $	$E_T/ E_{DN} $
Newtonien		-0.278973	-0.278973	-0.442054	-1.	1.
0.15	0.025	-0.278973	-0.278973	-0.442054	-1.	0.999998
	0.1	-0.301215	-0.301215	-0.287624	-0.890054	0.890054
0.75	0.1	-0.278973	-0.278973	-0.442054	-1.	0.999998
	0.3	-0.293584	-0.293584	-0.408187	-0.995355	0.995354

TABLE II.1 – Bilan des énergies à  $Re = 0$ , près des points de bifurcation de codimension-deux :  $\lambda_1^f = 0.0436816$  pour  $\Gamma = 0.15$  et  $\lambda_1^f = 0.205153$  pour  $\Gamma = 0.75$  (voir figure II.2).

$\Gamma = 0.75$  et différentes valeurs du nombre de Reynolds. Les indices inférieurs 1 et 2 pour les différentes contributions présentées dans ce tableau se réfèrent aux deux modes différents d'instabilité : l'un avec un nombre d'onde faible (mode 1) et l'autre avec un nombre d'onde plus élevé (mode 2). Les contributions découlant du terme des contraintes dues à l'intensité de l'écoulement (en anglais : "Reynolds stress") spatialement moyenné, sont très faibles pour les deux modes d'instabilité, laissant la contribution des forces de l'ascendance thermique (i.e., mouvement vertical causé par la poussée d'Archimède due à la différence de température dans le milieu) comme le seul effet déstabilisateur. La dépendance des contributions de l'ascendance thermique (forces de flottabilité) et de l'énergie dissipée totale vis-à-vis du nombre de Reynolds est qualitativement différente pour les deux modes présents. Ces contributions sont des fonctions croissantes avec  $Re$  pour le mode 1, alors qu'elles diminuent (augmentent) avec  $Re$  lorsque  $Re < 0.9$  ( $Re > 0.9$ ) pour le mode 2. Depuis que le mode le moins stable (c.-à-d. le plus instable) est celui avec les plus petites contributions des forces thermiques de flottabilité et de l'énergie de dissipation totale, le système sélectionne donc le mode 1 lorsque  $Re < 0.9$  et le mode 2 autrement. Un autre point important peut être observé dans le tableau II.2 : d'abord, le rapport  $E_{D1}/|E_{DN}|$  est presque égal à  $-1$  pour  $Re < 0.9$ , ce qui indique que ces solutions de polymères sont presque inélastiques et elles évoluent pratiquement comme un fluide Newtonien ; ensuite, comme le nombre de Reynolds  $Re$  continue d'augmenter au-delà de 0,9 et le mode 2 devient le mode qui domine désormais l'instabilité, le rapport  $E_{D2}/|E_{DN}|$  diminue significativement de la valeur  $-1$  avec l'accroissement de  $Re$ , ce qui signifie que les effets élastiques deviennent les plus importants dans ce nouvel éventail de paramètres.

Les raisons physiques sous-jacentes à l'augmentation brusque dans les valeurs de contributions des forces thermiques de flottabilité et de l'énergie dissipée totale

$Re$	$E_{T1}/ E_{DN} $	$E_{T2}/ E_{DN} $	$E_{Re1}/ E_{DN} $	$E_{Re2}/ E_{DN} $	$E_{D1}/ E_{DN} $	$E_{D2}/ E_{DN} $
0.2	<b>1.00481</b>	5.38423	<b><math>0.349073 \times 10^{-5}</math></b>	$-8.83134 \times 10^{-5}$	<b>-1.00481</b>	-5.38426
0.4	<b>1.02756</b>	3.11288	<b><math>1.87397 \times 10^{-5}</math></b>	$-12.8834 \times 10^{-5}$	<b>-1.02758</b>	-3.11275
0.6	<b>1.07713</b>	2.00496	<b><math>11.1504 \times 10^{-5}</math></b>	$-6.91134 \times 10^{-5}$	<b>-1.07724</b>	-2.00527
0.8	<b>1.14832</b>	1.67914	<b><math>35.484 \times 10^{-5}</math></b>	$-40.1118 \times 10^{-5}$	<b>-1.14868</b>	-1.67885
1.0	1.69831	<b>1.69011</b>	$132.203 \times 10^{-5}$	<b><math>-133.746 \times 10^{-5}</math></b>	-1.69963	<b>-1.68877</b>
1.2	1.80074	<b>1.77046</b>	$221.111 \times 10^{-5}$	<b><math>-257.486 \times 10^{-5}</math></b>	-1.80301	<b>-1.76789</b>
1.4	1.99491	<b>1.87941</b>	$327.265 \times 10^{-5}$	<b><math>-410.561 \times 10^{-5}</math></b>	-1.99819	<b>-1.87531</b>
1.6	2.19487	<b>2.01005</b>	$454.373 \times 10^{-5}$	<b><math>-595.792 \times 10^{-5}</math></b>	-2.19947	<b>-2.00409</b>

TABLE II.2 – Bilan des énergies dans un régime faiblement visco-élastique avec  $\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.75$ . Les valeurs transcrites en gras se réfèrent au mode d'instabilité le plus amplifié (i.e., le mode dominant d'instabilité).

au point de bifurcation de codimension-deux, peuvent être élucidées en inspectant minutieusement l'apport de chacun des composantes de contraintes dans la relation (II.20). La figure II.12 montre la dépendance par rapport au nombre de Reynolds des énergies de dissipation issues des trois composantes de contraintes, normalisées par l'énergie totale de dissipation d'un écoulement de fluide Newtonien  $E_{DN}$ . Lorsque  $Re < Re_{c2}$ , l'énergie dissipée par chacune des trois composantes de contraintes  $\tau_p^{(i,j)}$  est équivalente à l'énergie dissipée correspondante dans le cas d'un fluide Newtonien. En d'autres mots, le mode 1 avec un faible nombre d'onde critique et qui est dominant dans cet éventail du nombre de Reynolds, est un mode visqueux du fait que la contribution de l'élasticité de fluide est négligeable pour cette gamme de valeurs de  $Re$ . Comme  $Re$  continue à augmenter au-delà de la valeur critique  $Re_{c2} \simeq 0.9$ , la contribution  $E_D^{(1,1)}$  de l'énergie dissipée due à la contrainte normale longitudinale  $\tau_p^{(1,1)}$  devient nettement plus négative et elle le fait assez brusquement, déviant ainsi fortement de son homologue Newtonienne. Dans le même temps, les deux énergies de perturbation dissipées à cause de la contrainte normale transversale  $\tau_p^{(3,3)}$  et de la contrainte de cisaillement  $\tau_p^{(1,3)}$ , continuent de se comporter comme dans le cas de fluide Newtonien. Par conséquent, le changement dans le comportement qualitatif de la contrainte  $\tau_p^{(1,1)}$  provoque une transition d'un mode d'instabilité visqueux (mode 1) à un mode d'instabilité visco-élastique (mode 2), où les molécules de polymères drainent l'énergie de l'écoulement, ce qui leur permet de s'étirer et d'augmenter leur élongation.

Jusqu'à présent, le nombre d'élasticité  $\lambda_1$  et le nombre de Reynolds  $Re$  ont été pris en compte, dans nos résultats, pour mesurer les effets des contraintes de la

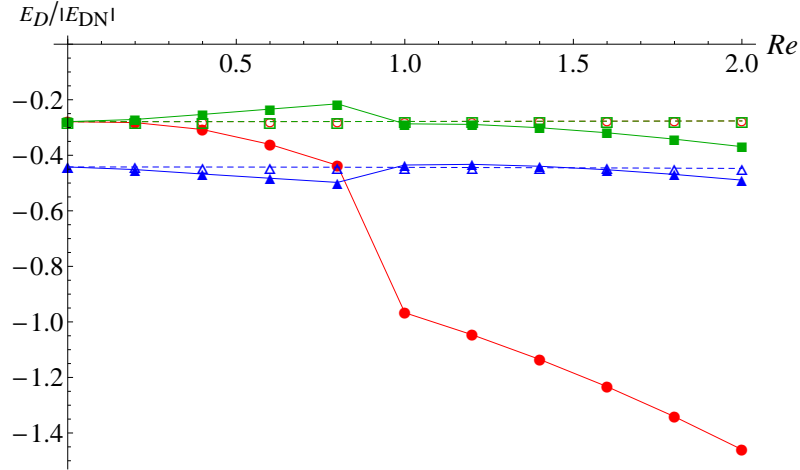


FIGURE II.12 – Les courbes (en couleurs) représentent les différentes contributions de chaque composante de contrainte de perturbation à l'énergie totale de dissipation :  $E_D^{(1,1)}/|E_{DN}|$  (cercles),  $E_D^{(3,3)}/|E_{DN}|$  (carrés) et  $E_D^{(1,3)}/|E_{DN}|$  (triangles). Les lignes en pointillés et les lignes continues correspondent respectivement au cas Newtonien et au cas faiblement visco-élastique ( $\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.75$ ). Notez que  $E_D^{(1,1)} = E_D^{(3,3)}$  pour le cas de fluide Newtonien.

perturbation. Cependant, dans un écoulement de fluide visco-élastique, le rapport entre le temps de relaxation dimensionné  $\lambda_1^*$  et l'échelle caractéristique du temps d'advection  $h/U_0^*$ , est le meilleur moyen représentant les effets des contraintes normales. Le rapport des deux temps caractéristiques donne le nombre de Deborah  $De = \lambda_1^*/(h/U_0^*)$ . Lorsque  $De \ll 1$ , les polymères se détendent relativement rapidement et le fluide se comporte comme un fluide visqueux. D'autre part, lorsque  $De \gg 1$ , le fluide visco-élastique se détend plus lentement en comparaison au temps caractéristique de l'écoulement (i.e., le temps d'advection), agissant ainsi comme un solide élastique. Il est important de souligner que le nombre de Deborah prend approximativement la valeur de l'unité  $De = Pr Re \lambda_1 \simeq 1$ , et ce au point de bifurcation de codimension-deux où s'opère la transition (*switch*, en anglais) entre les deux modes d'instabilité (visqueux et visco-élastique).

Le tableau II.3 montre les différentes contributions à l'équation de l'équilibre énergétique (II.15), obtenues à partir des deux modes d'instabilité et qui se distinguent par les indices inférieurs 1 et 2. Ces différentes contributions d'énergies sont associées à la figure II.7 qui correspond à un régime d'écoulement fortement visco-élastique. Comme c'est le cas dans un régime faiblement visco-élastique, la production de l'énergie cinétique de perturbation  $E_{Re}$  est négligeable à la fois pour le mode d'instabilité *TWU* (mode 1, se propageant en amont) et pour le mode d'instabilité *TWD* (mode 2, se propageant en aval). Une inspection de ce tableau révèle que la contribution découlant du terme des forces thermiques de flottabilité,

augmente pour les deux modes d'instabilité avec l'accroissement de  $Re$ , ce qui rend l'écoulement plus stable. Néanmoins, il montre également que la contribution thermique  $E_{T1}/|E_{DN}|$  est plus petite (plus grande) que son homologue  $E_{T2}/|E_{DN}|$  pour  $Re < Re_{c2} = 0.6$  ( $Re > Re_{c2}$ ), ce qui signifie que le mode de propagation  $TWU$  (le mode de propagation  $TWD$ ) est celui qui est sélectionné à la naissance de la convection. On peut aussi noter que lorsque  $Re = Re_{c2}$ , il y a un saut dans les valeurs des contributions dues aux forces thermiques de flottabilité et à l'énergie totale de dissipation conduisant au changement brusque et discontinu constaté sur les valeurs de la fréquence d'oscillation, du nombre d'onde et de la vitesse de phase, représentées sur la figure II.8. Afin de dévoiler le mécanisme sous-tendant ce saut dans la contribution de l'énergie totale de dissipation, la figure II.13 montre la dépendance par rapport au nombre de Reynolds des énergies de dissipation issues des trois composantes de contraintes, normalisées par l'énergie totale de dissipation d'un écoulement de fluide Newtonien comme cela a été fait dans la figure II.12, mais maintenant pour un régime d'écoulement fortement visco-élastique  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.75$ . La contribution de  $\tau_p^{(3,3)}$  est négative et quasi constante, indiquant une contribution de stabilisation. Pour les contributions de  $\tau_p^{(1,1)}$  et  $\tau_p^{(1,3)}$ , deux comportements différents peuvent être observés dans la figure II.13. Lorsque  $Re < Re_{c2}$ , la stabilisation induite par la composante de la contrainte de cisaillement  $\tau_p^{(1,3)}$  devient plus forte avec l'intensification de la vitesse d'écoulement, alors que la contribution négative de la composante de contrainte normale  $\tau_p^{(1,1)}$  augmente au point où elle devient positive et commence à produire de l'énergie, indiquant un effet déstabilisateur. Cela signifie que l'interaction entre les molécules de polymère et l'écoulement pourrait conduire à un effet déstabilisant dû à la contrainte normale longitudinale mais aussi à une forte stabilisation à travers la contrainte de cisaillement. La situation est différente lorsque  $Re > Re_{c2}$ , dès lors que le mode visco-élastique ici est amplifié en raison de la forte réduction dans la contribution de la contrainte normale longitudinale, accompagnée d'une croissance dans la contribution de la contrainte de cisaillement.

## II.4 Transition vers l'instabilité absolue

Après avoir étudié et déterminé les seuils et conditions d'apparition de l'instabilité convective pour ce type d'écoulement, il est maintenant possible de vérifier s'il peut se produire une transition vers l'instabilité absolue. Dans le présent document, cette transition est uniquement étudiée pour le cas des  $TRs$ . Comme mentionné dans le 7<sup>ème</sup> paragraphe de l'introduction (§ Partie A), on s'est contenté du cas des  $TRs$ , et ce pour une double raison : d'une part, il existe des preuves expéri-

$Re$	$E_{T1}/ E_{DN} $	$E_{T2}/ E_{DN} $	$E_{Re1}/ E_{DN} $	$E_{Re2}/ E_{DN} $	$E_{D1}/ E_{DN} $	$E_{D2}/ E_{DN} $
0.4	<b>1.03571</b>	1.09688	$-85.6739 \times 10^{-5}$	$-40.2807 \times 10^{-5}$	<b>-1.03485</b>	-1.09648
0.6	<b>1.16135</b>	1.2082	$-244.632 \times 10^{-5}$	$-69.0131 \times 10^{-5}$	<b>-1.15954</b>	-1.2077
0.8	1.42025	<b>1.3674</b>	$-579.557 \times 10^{-5}$	$-105.65 \times 10^{-5}$	-1.41488	<b>-1.36635</b>
1.0	1.67193	<b>1.57105</b>	$-907.74 \times 10^{-5}$	$-155.104 \times 10^{-5}$	-1.66305	<b>-1.5695</b>

TABLE II.3 – Bilan des énergies dans un régime fortement visco-élastique avec  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.75$ . Les valeurs transcrites en gras se réfèrent au mode d'instabilité le plus amplifié (i.e., le mode dominant d'instabilité).

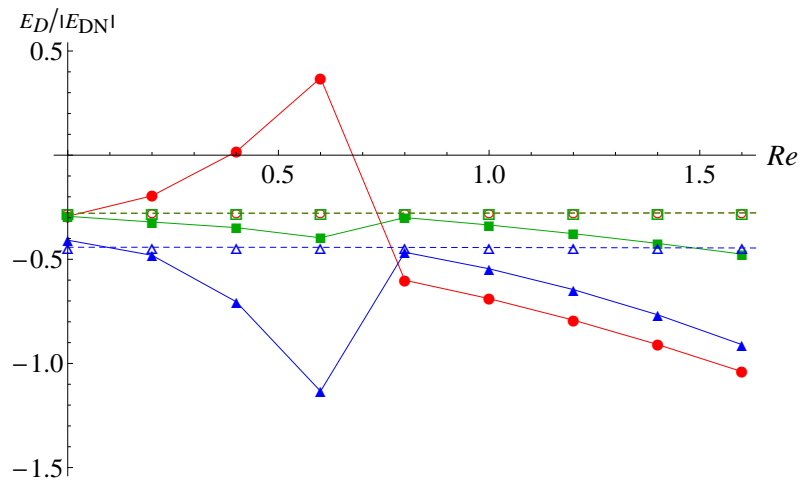


FIGURE II.13 – Courbes (en couleurs) identiques à la figure II.12, mais les lignes continues ici correspondent à des solutions de polymères fortement visco-élastiques avec  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.75$ .

mentales suggérant que les  $TRs$  subissent une transition vers l'instabilité absolue dans le cas des fluides Newtoniens (Delache et al., 2007; Grandjean and Monkewitz, 2009); d'autre part, une relation de dispersion différentielle exige une construction et vérification graphique de la condition de pincement sans l'aide des conditions de vitesse de groupe nulle, rendant ainsi les efforts de calcul une tâche énorme et insurmontable nécessitant encore une procédure efficace de calcul pour les perturbations tridimensionnelles (Suslov, 2006). Mais cela fera l'objet de prochains travaux de recherches au sein de notre équipe. Comme c'est indiqué à la section précédente (§ II.2), des solutions faiblement visco-élastiques sont considérées en premier lieu, suivies de leurs homologues fortement visco-élastiques.  $Pr = 10$  est choisi pour tous les cas examinés ici.

### II.4.1 Résultats pour les fluides faiblement visco-élastiques

La première série de résultats présentés dans cette section implique des fluides avec une faible élasticité où  $\lambda_1 = 0.025$ . L'influence du rapport des viscosités  $\Gamma$  est quantifiée en tenant compte de deux valeurs, à savoir  $\Gamma = 0.15$  et  $\Gamma = 0.75$ , ce qui correspond, respectivement, à des solutions concentrées et des solutions diluées. La figure II.14 montre les seuils d'émergence de l'instabilité convective et absolue pour ces deux cas en fonction du nombre de Reynolds, ainsi que pour le cas d'un fluide Newtonien dans un but de comparaison.  $Ra_c$  correspond au nombre de Rayleigh critique du premier seuil d'instabilité au-delà duquel l'état de base purement conducteur se déstabilise en favorisant l'émergence des rouleaux transversaux ( $TRs$ ) stationnaires convectivement instables quand  $Re = 0$  et des rouleaux transversaux se propageant en aval (i.e.,  $TWD$ ) lorsque  $Re > 0$ . Ces seuils de bifurcation ont déjà été déterminés par une analyse de stabilité temporelle dans la section précédente (§ II.2).  $Ra_A$  correspond au nombre de Rayleigh critique du deuxième seuil d'instabilité au-delà duquel les perturbations convectivement instables deviennent absolument instables. Ce seuil absolu d'instabilité a été obtenu à partir d'une analyse du point de selle (processus de pincement en ce point) de la solution de l'équation différentielle de dispersion, et qui a été obtenue numériquement avec la méthode de tir (shooting method). En d'autres mots, on peut dire que l'état de base est stable lorsque  $Ra < Ra_c$ , convectivement instable lorsque  $Ra_c < Ra < Ra_A$  et absolument instable lorsque  $Ra > Ra_A$ , en admettant que les  $TRs$  sont les premiers à devenir absolument instables. L'instabilité qui apparaît en premier lorsque  $Re = 0$ , est de nature absolue du fait que  $Ra_c = Ra_A$ . Cependant, une région d'instabilité convective est créée en présence de l'écoulement de Poiseuille et cette région s'élargit avec l'augmentation de  $Re$ . En outre, le seuil de l'instabilité absolue  $Ra_A$  augmente avec

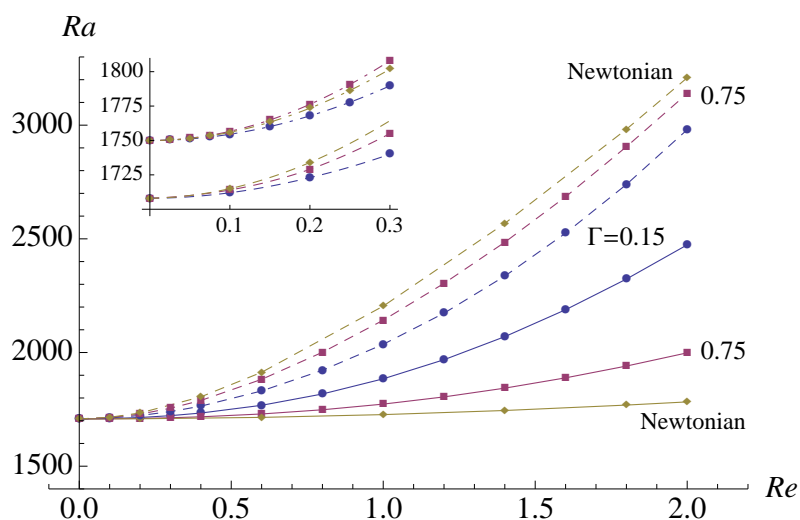


FIGURE II.14 – Les courbes (en couleurs) donnent les seuils de déclenchement de l'instabilité convective (traits pleins) et de l'instabilité absolue (traits interrompus) pour des solutions faiblement visco-élastiques avec  $\lambda_1 = 0.025$  et deux valeurs différentes de  $\Gamma$ . À des fins de comparaison, le cas Newtonien est également inclus. Une comparaison entre la relation de dispersion complète (lignes en tirets) et la relation de dispersion approximative (lignes mixtes tiret-point) est présentée dans l'encart inséré.

l'accroissement de  $\Gamma$ , alors que la tendance inverse a été observée pour le seuil de l'instabilité convective  $Ra_c$ . Cela veut dire qu'un tel comportement réduit la région de l'instabilité convective pour des solutions visco-élastiques concentrées et étend cette même région dans le cas des solutions visco-élastiques diluées. En conséquence, la limite (ou frontière) entre le seuil de l'instabilité convective et celui de l'instabilité absolue pour les fluides faiblement visco-élastiques, reste étroite comparée à celle correspondant à des fluides Newtoniens.

Des remarques mineures supplémentaires devraient également être faites. L'encart inséré dans la figure II.14 présente, pour de petites valeurs du nombre de Reynolds, une comparaison entre les résultats issus de la méthode de tir et ceux de la méthode de Galerkin basée sur le premier mode. Comme c'est le cas dans les sections précédentes de la présente thèse, une bonne concordance a été obtenue comme le montre cette figure insérée. En outre, les résultats numériques indiquent qu'une très petite variation du nombre d'onde  $k_A$  au seuil de l'instabilité absolue, est observée lorsqu'on varie  $Re$ . D'autre part, la fréquence oscillatoire  $\omega_A$  diminue fortement avec l'augmentation de  $Re$ .

L'influence de l'élasticité de fluide sur la transition vers l'instabilité absolue est également étudiée pour un régime faiblement visco-élastique, et qui a été réalisée ici par une augmentation du nombre d'élasticité de la valeur  $\lambda_1 = 0.025$  à 0.1 pour une valeur fixe du rapport des viscosités, à savoir  $\Gamma = 0.75$ . Les variations correspon-



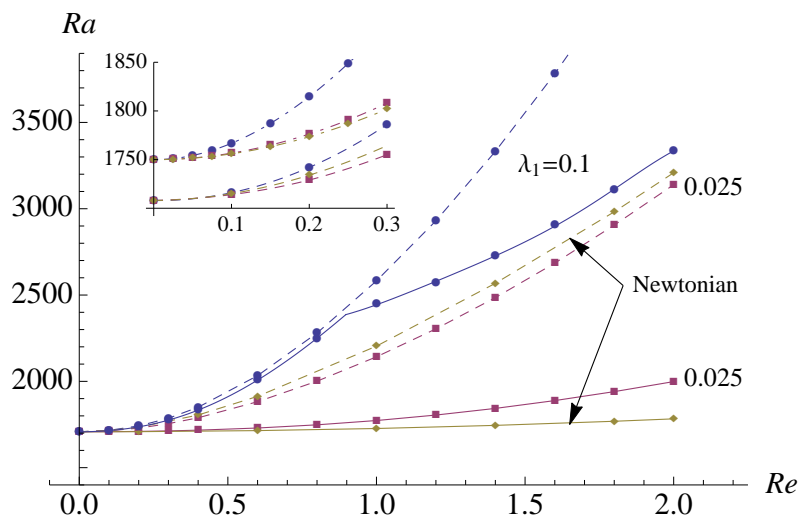


FIGURE II.15 – Les courbes (en couleurs) donnent les seuils de déclenchement de l'instabilité convective (traits pleins) et de l'instabilité absolue (traits interrompus) pour des solutions faiblement visco-élastiques avec  $\Gamma = 0.75$  et deux valeurs différentes de  $\lambda_1$ . À des fins de comparaison, le cas Newtonien est également inclus. Une comparaison entre la relation de dispersion complète (lignes en tirets) et la relation de dispersion approximative (lignes mixtes tiret-point) est présentée dans l'encart inséré.

dantes – en fonction du nombre de Reynolds – du nombre de Rayleigh critique de l'instabilité convective et de l'instabilité absolue  $Ra_c$  et  $Ra_A$  respectivement, sont présentées dans la figure II.15, où le cas Newtonien a été ajouté pour la comparaison. Comme cela est bien connu, l'élargissement (ou l'agrandissement) de la zone d'instabilité convective est mesuré par la différence entre les seuils  $Ra_A$  et  $Ra_c$ . Comme le montre la figure II.15, cette différence augmente avec le nombre de Reynolds pour la valeur  $\lambda_1 = 0.025$ , alors qu'elle reste pratiquement inchangée pour  $\lambda_1 = 0.1$ , mais seulement jusqu'à  $Re = 0.896791$ . Au-delà de cette valeur du nombre de Reynolds, la différence augmente avec l'accroissement de  $Re$ . Par conséquent, il est donc possible de conclure que cette différence diminue avec l'augmentation de l'élasticité de fluide, mais seulement dans le cas où toutes les instabilités convectives et absolues surviennent pour des solutions faiblement visco-élastiques (c.-à-d. des fluides pour lesquels le premier mode d'instabilité était initialement stationnaire lorsque  $Re = 0$ ). L'existence d'un point de codimension-deux change cette donne, et de ce fait la dépendance de cette différence vis-à-vis de l'élasticité de fluide devient très faible.

## II.4.2 Résultats pour les fluides fortement visco-élastiques

L'analyse de stabilité temporelle effectuée au § II.2.2 a révélé que pour les solutions fortement visco-élastiques, l'état de base devient instable vis-à-vis de trois

types différents de perturbations étendues :  $S$ ,  $TWU$  et  $TWD$  aux seuils convectifs de bifurcation  $Ra_c^S$ ,  $Ra_c^U$  et  $Ra_c^D$  respectivement. Les lignes de frontière séparant la région de l'instabilité convective de celle de l'instabilité absolue des trois modes, sont déterminées d'abord pour un cas représentatif  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.15$ . On constate que le seuil d'instabilité absolue correspondant au mode  $S$  augmente rapidement avec  $Re$  et diverge des seuils absolues des deux autres modes, même pour un écoulement à faible débit (i.e., à faible nombre de Reynolds). Comme le seuil de l'instabilité absolue pour le mode  $S$  est beaucoup plus élevé que ceux correspondant à la fois au mode  $TWU$  et au mode  $TWD$  et ce pour tous les nombres de Reynolds considérés ici, la figure II.16 présente donc les courbes de transition de l'instabilité convective vers l'instabilité absolue uniquement pour ces deux modes dont les seuils critiques absolus sont  $Ra_A^U$  et  $Ra_A^D$  respectivement.

La figure II.16 présente quelques traits caractéristiques importants. Le premier trait caractéristique intéressant à remarquer est l'existence d'une région finie (ou étroite) d'instabilité convective pour  $Re = 0$ , ce qui n'est pas le cas avec les fluides faiblement visco-élastiques. En effet, comme le montre l'encart inséré de la figure II.16, le seuil convectif critique des deux modes se propageant en amont et en aval (c.-à-d.  $TWU$  et  $TWD$  respectivement) est  $Ra_c = 484.57$  pour  $Re = 0$ , tandis que le seuil critique correspondant à l'instabilité absolue est  $Ra_A = 512.18$  pour le même nombre de Reynolds (i.e.,  $Re = 0$ ). Cela signifie, qu'en l'absence d'écoulement, les deux ondes contra-propagatives <sup>7</sup> sont simultanément convectivement instables au seuil d'apparition de l'instabilité convective  $Ra = Ra_c$  et un échauffement supplémentaire au-delà de ce point sera donc nécessaire afin de déclencher l'instabilité absolue. Cela est dû à la vitesse de groupe non nulle des ondes se propageant à droite et à gauche au seuil d'apparition de la convection même pour  $Re = 0$ , contrairement au cas des fluides Newtoniens ou faiblement visco-élastiques pour lesquels la vitesse de groupe est nulle lorsque  $Re = 0$ . Cependant, dans des systèmes réels avec une dimension horizontale finie (ou limitée), l'influence combinée des parois verticales aux deux extrémités (à droite et à gauche) et de l'interaction non linéaire entre les deux ondes contra-propagatives, est cruciale sur la dynamique globale comme cela a été observé par Kolodner et al. (1987) dans leur étude expérimentale de la convection naturelle dans une couche horizontale finie de fluide binaire. A titre d'exemple, la paroi verticale de gauche qui est heurtée par les ondes  $TWU$  convectivement instables agit comme une source naturelle de perturbations, ce qui peut déclencher en retour – *via* la non-linéarité du système – les ondes  $TWD$  convectivement instables. Par conséquent, afin de clarifier l'effet combiné des parois verticales et de l'interaction non linéaire entre les deux ondes contra-propagatives, il est donc important d'effectuer

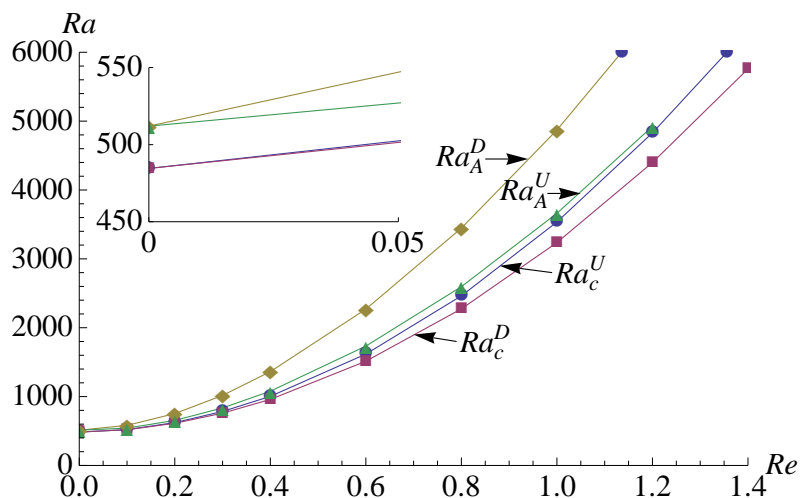


FIGURE II.16 – Les courbes (en couleurs) donnent les seuils de déclenchement de l'instabilité convective et de l'instabilité absolue des deux ondes contra-propagatives  $TWD$  et  $TWU$  d'un cas représentatif des fluides fortement visco-élastiques ( $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.15$ ). L'encart inséré montre l'existence d'une région d'instabilité convective pour  $Re = 0$ .

une simulation numérique directe (communément abrégée en DNS <sup>8</sup>) du problème ou au moins de procéder à une analyse de stabilité faiblement non linéaire dans le cadre d'un modèle non linéaire, à savoir les équations couplées de Ginzburg–Landau, comme cela a été fait par [Suslov and Paolucci \(2004\)](#).

Deuxièmement, en présence d'écoulement ( $Re \neq 0$ ), quatre régions essentielles distinctes existent dans le plan  $(Re, Ra)$  comme cela peut être lu à partir de la figure II.16 : une région stable ( $Ra < Ra_c^D$ ) ; une région où l'état de base est convectivement instable vis-à-vis des  $TWD$  mais stable vis-à-vis des  $TWU$  ( $Ra_c^D < Ra < Ra_c^U$ ) ; une région étroite où l'état de base est convectivement instable à la fois par rapport aux  $TWD$  et aux  $TWU$  ( $Ra_c^U < Ra < Ra_A^U$ ) ; et une région où le système bifurque vers l'instabilité absolue vis-à-vis des  $TWU$  ( $Ra > Ra_A^U$ ). Nous soulignons que le diagramme de stabilité que montre la figure II.16, a été obtenu en traitant chacune des ondes individuelles  $TWU$  et  $TWD$  – séparément de son homologue – puisque nous considérons des canaux avec une extension horizontale infinie. Dans la réalité, les conditions aux limites imposées à l'entrée et en sortie dans ce système à écoulement ouvert, peuvent agir comme des sources de perturbations localisées conduisant finalement à l'amplification des deux ondes  $TWD$  et  $TWU$  dans l'espace des paramètres où les deux ondes contra-propagatives sont individuellement convectivement instables (i.e.,  $Ra_c^U < Ra < Ra_A^U$ ). Par conséquent, à des temps asymptotiquement grands, le domaine d'espace qui est traversé par le flux d'écoulement sera donc tout

7. Deux ondes contra-propagatives : deux ondes qui se propagent en sens inverse l'une de l'autre.

8. DNS : Direct Numerical Simulation, en anglais.

entier perturbé. Une telle situation correspond à la définition de l'instabilité absolue dans un sens asymptotique. Comme pour le cas de la convection naturelle ( $Re = 0$ ), nous croyons – pour ce cas aussi où  $Re \neq 0$  – qu'une simulation numérique directe (DNS) du problème complet sera nécessaire pour comprendre la dynamique complexe et souvent non-triviale liée à l'interaction entre les deux ondes contra-propagatives convectivement instables dans un domaine d'espace d'extension finie. Pour conclure, le système est donc convectivement instable si  $Ra_c^D < Ra < Ra_c^U$ . Il est absolument instable si  $Ra > Ra_A^U$ . Il peut être absolument instable dans un sens asymptotique si  $Ra_c^U < Ra < Ra_A^U$ .

Les seuils critiques de déclenchement de l'instabilité absolue sont maintenant déterminés pour les mêmes quatre combinaisons de paramètres visco-élastiques comme indiqué sur la figure II.8. En présence d'écoulement, le mode  $TWU$  est toujours celui qui devient, en premier lieu, absolument instable dans des fluides fortement visco-élastiques. Cela signifie que le seuil d'instabilité absolue qui correspond au mode de forme parabolique se produit à un certain nombre critique de Rayleigh absolu toujours inférieur à celui associé au mode en forme de doigt<sup>9</sup>. Par conséquent, seules les caractéristiques des  $TWU$  sont discutées dans le reste de cette section. Les figures II.17(a) et II.17(b) présentent les nombres de Rayleigh critique et les taux de croissance spatiale, respectivement, aux seuils d'apparition de l'instabilité absolue comme fonctions du nombre de Reynolds. Les seuils d'apparition de l'instabilité convective sont également inclus à titre de comparaison. Cette figure montre l'existence d'une région finie et étroite d'instabilité convective pour  $Re = 0$ , comme cela a été constaté dans le cas représentatif des fluides fortement visco-élastiques  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.15$ . La figure II.17 montre en outre que les seuils convectifs  $Ra_c$  et absolues  $Ra_A$  de l'instabilité coïncident à  $Re = Re^* = 0.188785$  (voir l'encart inséré de la figure II.17(a) qui correspond au cas  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.75$ ). Par conséquent, à ce nombre particulier de Reynolds, l'état de base devient absolument instable et cela se produit directement sans passer par la région de l'instabilité convective, contrairement à ce qui est observé pour tout le reste des valeurs de  $Re$ . Bien que pas tout à fait clair dans l'encart de la figure II.17(a), ce peut être clarifié en regardant dans la figure II.17(b) et en observant que le taux de croissance spatiale au seuil de l'instabilité absolue doit être égal à zéro dans ces circonstances. Cela peut être interprété physiquement comme un point où la vitesse de groupe s'annule au moment du commencement de la convection (c.-à-d.  $Ra = Ra_c$ ). La région de l'instabilité convective se rétrécit quand  $Re < Re^*$  et s'élargit lorsque  $Re > Re^*$ .

---

9. On rappelle que le mode de forme parabolique est le mode dont la courbe neutre de stabilité a la forme d'une parabole, et le mode en forme de doigt c'est celui dont sa courbe neutre de stabilité prend la forme d'un doigt, comme expliqué dans les sections précédentes.

Il y a une autre façon pour interpréter ces résultats. Dans le régime faiblement visco-élastique, le point-selle (appelé également point-col) est situé dans une région où les modes ont un fort taux de croissance spatiale. Cela est généralement le cas lorsque le passage vers l'instabilité absolue tend à se produire près des modes qui deviennent convectivement instable en premier, et quand à la courbe de stabilité neutre, elle est de forme parabolique. Un tel comportement est caractéristique du mode visqueux. Cependant, ce n'est pas nécessairement le cas dans un régime fortement visco-élastique, tel qu'il est représenté sur la figure II.17(b). Cela se produit en raison de la nature de la courbe de stabilité neutre qui prend la forme de doigt, où sa branche associée au mode  $TWD$  (au mode  $TWU$ ) a des taux de croissance spatiale positifs (négatifs). Par conséquent, le point-selle apparaîtra dans une région où les taux de croissance spatiale sont en fait négatifs, car il est plus probable pour un mode de propagation en amont (i.e.,  $TWU$ ) qu'il soit le premier à devenir absolument instable. Un tel comportement est caractéristique du mode visco-élastique. Dans quelques cas particuliers, tels que  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.75$ , le point-selle commute de la branche  $TWU$  vers la branche  $TWD$  du mode visco-élastique lorsque  $Re$  augmente, en passant par le point dont le taux de croissance spatiale est nul. Cela semble se produire également pour la cas  $\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.15$ , mais à  $Re > 2$ , juste en dehors de l'intervalle qui nous intéresse dans la présente étude. Bien que la recherche de la position de ce point pour tous les cas présentés ici, équivaille à une tâche énorme et donc à une quantité de travail importante, nous pouvons comme même dire que son existence est liée aux modes visco-élastiques, à savoir les régimes d'écoulement fortement visco-élastiques. Du fait que les cas fortement visco-élastiques supplémentaires indiqués dans la figure II.17 se comportent d'une manière qualitativement semblable au cas  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.75$ , il est donc très instructif de comparer leur transitions linéaires vers l'instabilité absolue.

Une attention particulière est accordée à l'étendue de la région d'instabilité convective en fonction du nombre de Reynolds. Cette région représente l'écart qui existe entre le seuil de l'instabilité convective et celui de l'instabilité absolue. Ces résultats sont affichés dans la figure II.18 en utilisant la fonction  $(Ra_A - Ra_c)/Ra_c$ . Au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente en partant de zéro, la région de l'instabilité convective se réduit avant d'atteindre un minimum pour ensuite s'augmenter au-delà, et ceci est vrai pour tous les cas fortement visco-élastiques étudiés. Dans le cas où l'écoulement est absent ( $Re = 0$ ), le fait de fixer le nombre d'élasticité à  $\lambda_1 = 0.3$  tout en augmentant le rapport des viscosités à partir de  $\Gamma = 0.15$  à  $0.75$ , cela tend à réduire la région de l'instabilité convective : en d'autres mots, *les solutions diluées de polymères favorisent davantage la transition rapidement vers la*

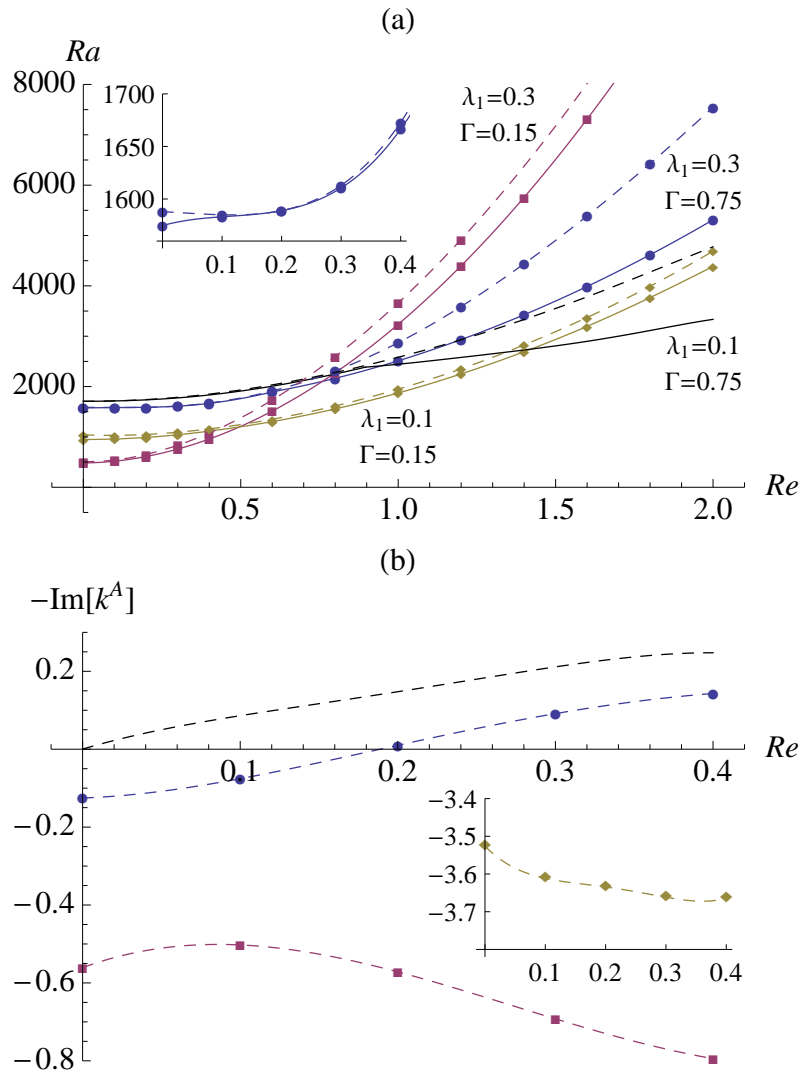


FIGURE II.17 – Les courbes (en couleurs) donnent : (a) les seuils d'apparition des instabilités convectives (traits pleins) et absolues (traits interrompus), et (b) les taux de croissance spatiale aux seuils critiques de l'instabilité absolue, et ce comme fonctions du nombre de Reynolds pour les mêmes cas fortement visco-élastiques et le cas faiblement visco-élastique de la figure II.8. Les deux encarts associés donnent un zoom sur les données d'une ou plusieurs courbes particulières.

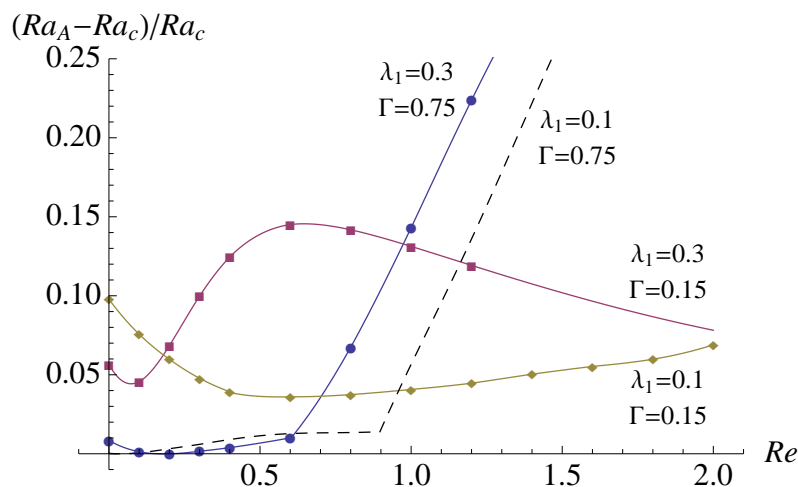


FIGURE II.18 – Les courbes (en couleurs) montrent l'étendue relative de la région d'instabilité convective comme fonction du nombre de Reynolds, et ce pour les mêmes cas fortement visco-élastiques et le cas faiblement visco-élastique de la figure II.8.

*région d'instabilité absolue.* Le même comportement, toujours en l'absence d'écoulement, est observé lorsqu'on augmente le nombre d'élasticité de  $\lambda_1 = 0.1$  à  $0.3$  tout en fixant cette fois-ci le rapport des viscosités à  $\Gamma = 0.15$ . En augmentant le nombre de Reynolds (i.e.,  $Re \neq 0$ ), ce comportement reste tout aussi valide mais jusqu'à une valeur de  $Re$  pour laquelle un minimum de la région d'instabilité convective sera atteint, et ce minimum dépend bien entendu des paramètres rhéologiques des fluides en question. En outre, ce minimum atteint la valeur zéro seulement pour le cas  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.75$  en faisant coïncider, de ce fait, les deux seuils convectif et absolu de l'instabilité (i.e.,  $Ra_c = Ra_A$ ) : en d'autres termes, en ce qui concerne le reste des cas de fluides fortement visco-élastiques autres que le cas  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.75$ , les seuils des instabilités absolue et convective ne coïncident pas à l'intérieur de l'intervalle du nombre de Reynolds qui nous intéresse dans la présente étude. Au-delà de chacun de ces points minimums, l'influence des paramètres visco-élastiques sur l'étendue de la région d'instabilité convective est exactement à l'opposé de celle observée pour le cas de convection naturelle ( $Re = 0$ ). En continuant à augmenter davantage la valeur du nombre de Reynolds, cela mène à un comportement encore plus complexe, puisqu'il existe un maximum à la fois pour le cas  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.15$  ainsi que pour le cas  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.75$ , à l'intérieur de l'intervalle  $0 \leq Re \leq 2$ .

Du point de vue phénoménologique, il y a une analogie assez étroite entre le problème de RBP en fluides visco-élastiques et le même problème (i.e., RBP) avec des mélanges binaires en fluides Newtoniens. En effet, [Jung et al. \(1996\)](#), [Büchel and Lücke \(2000a\)](#) et [Hu et al. \(2007\)](#) ont effectué une analyse linéaire de stabilité spatio-temporelle des écoulements de RBP dans des fluides binaires tout en tenant compte

évidemment de l'effet Soret. De plus, le même problème a été résolu par [Büchel and Lücke \(2000b\)](#) et [Hu et al. \(2009\)](#) grâce à des simulations numériques à deux dimensions (2D) totalement non linéaires et initiées par une perturbation localisée. Dans un tel problème, la dynamique dépend du signe du rapport de séparation, un paramètre sans dimension qui représente le rapport entre la contribution de la diffusion massique et la contribution de la chaleur aux forces de flottabilité. Ce rapport de séparation caractérise et est proportionnel à l'intensité de l'effet Soret. En particulier, pour un rapport de séparation négatif, ces auteurs ont trouvé que :

- (i) Pour  $Re = 0$ , l'analyse de stabilité temporelle montre que le système subit une bifurcation de Hopf au moment de déclenchement de la convection conduisant à deux ondes contra-propagatives avec des fréquences critiques de Hopf opposées. Cette caractéristique est similaire à celle qu'on a observée dans le cas des fluides fortement visco-élastiques. Les simulations numériques indiquent que pour un temps suffisamment court, les deux ondes contra-propagatives restent convectivement instables sur une plage finie des valeurs supercritiques de  $Ra$ . Dans ce cas, les deux paquets d'ondes évoluent séparément dans la région convectivement instable sans aucune interaction entre eux, comme prédit par l'analyse de stabilité linéaire. Dans la réalité, bien que les enveloppes individuelles sont convectivement instables, chacune d'entre elles va induire des distorsions qui se propagent dans le sens opposé une fois qu'elles deviennent suffisamment grandes pour servir comme condition initiale pour l'autre mode contra-propagatif présent dans le système et qui est lui aussi convectivement instable. Cette perturbation atteindra finalement l'origine du domaine de telle sorte que sa stabilité asymptotique lorsque  $t \rightarrow \infty$  ne sera pas conservée. Par conséquent, le système peut devenir absolument instable dans un sens asymptotique s'il y a deux ou plusieurs ondes contra-propagatives convectivement instables.
- (ii) Pour  $Re \neq 0$ , les deux modes  $TWU$  et  $TWD$  évoluent séparément dans le régime convectivement instable. Les simulations numériques montrent que le mode  $TWU$  est le premier qui devient absolument instable tout en se propageant également en aval, tandis que le mode  $TWD$  sera évacué et soufflé hors du domaine. Une fois de plus, il est intéressant de noter que ce mécanisme de sélection entre les modes d'instabilité, et qui est lié à la transition de l'instabilité convective vers l'instabilité absolue, est qualitativement semblable à celui observé dans le cas des fluides fortement visco-élastiques.

Les deux travaux de [Büchel and Lücke \(2000b\)](#) et [Hu et al. \(2009\)](#) montrent que les résultats de la simulation numérique sont en très bon accord avec les prédictions



de l'analyse linéaire de la stabilité spatio-temporelle. Par conséquent, nous nous attendons à ce que les résultats présentés tout au long du présent document peuvent nous aider à mieux saisir les mécanismes physiques de l'instabilité thermique dans des fluides visco-élastiques.

# Conclusion de la 1<sup>ère</sup> partie

Dans le présent travail, nous avons étudié la stabilité linéaire de fluides visco-élastiques soumis simultanément à un écoulement horizontal et à un gradient vertical de température. Dans le cadre du modèle visco-élastique d'Oldroyd-B, nous avons trouvé que le tenseur des contraintes associé à l'état de base est constitué d'une composante de contrainte normale non nulle, en plus de la composante de contrainte de cisaillement induite par l'écoulement de Poiseuille. Les équations linéaires des modes normaux de perturbations sont obtenues avec le logiciel *Mathematica* et sont résolues analytiquement en utilisant un développement de Galerkin à un terme, ainsi que numériquement en utilisant la méthode de tir. Ce faisant, il a été démontré pour la configuration d'étude dont l'extension est infinie dans les deux directions horizontales, que les *LRs* (des rouleaux avec des axes parallèles à la direction de l'écoulement de base de Poiseuille) sont les modes les plus instables au moment de déclenchement de l'instabilité convective, et ce quelque soit le nombre de Reynolds. Le seuil convectif de ces *LRs* est constant et indépendant du nombre choisi de Reynolds  $Re$ . Deux paramètres jouent un rôle pivot et très important lors de la caractérisation du comportement temporel des *LRs*, à savoir le nombre d'élasticité  $\lambda_1$  et le rapport  $\Gamma$  entre la viscosité du solvant et la viscosité totale de la solution de polymères. Ces deux paramètres font distinguer deux régimes différents d'écoulement de fluides visco-élastiques, nommés dans cette étude : régime faiblement visco-élastique et régime fortement visco-élastique. Les *LRs* oscillatoires sont les plus instables dans un régime fortement visco-élastique, alors que la naissance de l'instabilité convective est induite plutôt par des *LRs* stationnaires dans un régime faiblement visco-élastique comme cela est le cas pour des fluides Newtoniens. Même si les *LRs* se sont révélés être les plus instables selon l'analyse de stabilité temporelle, de récentes expériences en laboratoire menées par [Grandjean and Monkewitz \(2009\)](#) avec des fluides Newtoniens ont pu détecter et montrer aussi l'existence des *TRs* (des rouleaux dont les axes sont perpendiculaires à la direction de l'écoulement de base de Poiseuille). C'est la raison pour laquelle la présente analyse s'intéresse également à la détermination des propriétés de la stabilité linéaire des *TRs*.

La stabilisation de l'écoulement de base (i.e., la solution purement conductive) vis-à-vis des  $TRs$  dans un régime faiblement visco-élastique s'est avérée plus prononcée lorsque l'élasticité du fluide est augmentée. Cet effet de stabilisation est également plus prononcé avec des solutions polymériques concentrées plutôt qu'avec des solutions polymériques diluées. En outre, il existe un point de bifurcation de codimension-deux pour un nombre d'élasticité suffisamment grand. En d'autres termes, deux modes deviennent simultanément convectivement instables à une valeur particulière de  $Re$ , conduisant ainsi à un saut dans les valeurs critiques de la fréquence d'oscillation, du nombre d'onde et de la vitesse de phase lorsqu'on passe au-delà de cette valeur particulière de Reynolds. L'évaluation des changements qui se produisent sur les structures spatiales des champs propres de perturbation et sur le taux d'élongation, ensemble avec l'analyse énergétique indispensable, mettent la lumière sur les mécanismes physiques qui sont à l'origine des deux modes instables en compétition : alors que le premier est un mode visqueux d'instabilité avec les mêmes caractéristiques comme pour un fluide Newtonien, le second apparaît plutôt dans un régime dominé par les effets de l'élasticité du fluide. L'étude a montré que la contrainte normale longitudinale joue un rôle clé dans les échanges d'énergie entre l'écoulement et les polymères en suspension dans le fluide, et qu'ils s'étirent et s'allongent considérablement dans un régime d'instabilité dominé et induit par l'élasticité. Dans un régime fortement visco-élastique toutefois, la présence d'écoulement modifie le rôle stabilisant-déstabilisant des paramètres rhéologiques. Lorsque  $Re = 0$ , l'élasticité a un effet déstabilisant alors que le rapport des viscosités rend le système plus stable. Avec l'écoulement imposé de Poiseuille, c'est exactement le contraire qui est observé sur les rôles de l'élasticité et du rapport des viscosités. Enfin, l'instabilité convective naît toujours sous forme de  $TRs$  se propageant en aval ( $TWD$ ) lorsque la valeur de  $Re$  est assez élevée, et ce pour toutes les combinaisons – du nombre d'élasticité  $\lambda_1$  et du rapport des viscosités  $\Gamma$  – traitées dans la présente étude, même s'ils peuvent également apparaître comme des  $TRs$  se propageant en amont ( $TWU$ ) s'il s'agit d'une valeur assez faible de  $Re$ .

La présentation des résultats dans le plan des nombres critiques de Reynolds-Rayleigh, nous a permis de dresser un tableau complet sur les instabilités convective/absolue des  $TRs$ , et ce, en choisissant des combinaisons de paramètres rhéologiques assez représentatives des deux régimes distincts d'écoulement : faiblement et fortement visco-élastique. Sur cette base, il est montré que la transition vers l'instabilité absolue dans un régime faiblement visco-élastique est qualitativement semblable à celle observée dans le cas Newtonien. Quand  $Re = 0$ , la première instabilité naissante au seuil de déclenchement de la convection est une instabilité

absolue, mais une région d'instabilité convective se développe et s'agrandit lorsque  $Re$  est augmentée. En revanche et en contraste avec les fluides Newtoniens, les paramètres visco-élastiques promeuvent et favorisent davantage l'émergence de l'instabilité absolue pour les nombres non nuls de Reynolds. Cette image dressée sera qualitativement modifiée lorsque la transition vers l'instabilité absolue se produit plutôt dans un régime fortement visco-élastique. Dans ce régime, il y a déjà tout au début une apparition de l'instabilité convective lorsque  $Re = 0$ . Ceci veut dire qu'un chauffage supplémentaire sera donc nécessaire afin d'amorcer l'instabilité absolue, et qui apparaît sous la forme d'ondes se déplaçant symétriquement dans des directions opposées. Par contre, en présence d'écoulement, les  $TRs$  se propageant en amont ( $TWU$ ) sont les plus instables au seuil d'amorçage de l'instabilité absolue où aucun point de codimension-deux n'a été détecté. Une analyse comparative entre les seuils de déclenchement des deux instabilités convective et absolue, indique ainsi que l'écoulement de Poiseuille peut réduire et même peut supprimer la région d'instabilité convective délimitée par ces deux seuils. Dans ce dernier cas (c.-à-d. la suppression de la région d'instabilité convective), l'instabilité qui apparaît à la naissance de la convection est une instabilité absolue, même si l'écoulement de Poiseuille est toujours présent.

## Deuxième partie

Instabilités thermodiffusives de  
fluides visco-élastiques saturant un  
milieu poreux - Application au  
procédé de séparation d'espèces  
des mélanges

# Notations de la 2<sup>ème</sup> partie

- **Remarque :** les symboles sont classés par ordre alphabétique romain puis grec, les minuscules avant les majuscules, les scalaires avant les tenseurs (vecteurs et matrices carrées). Les tenseurs, quand à eux, sont notés en gras. Les grandeurs associées au fluide sont indicées par «  $f$  » et celles associées au milieu homogène équivalent du milieu poreux sont notées avec «  $sf$  ».

$a$  rapport d'aspect (i.e., de forme) latéral

$A$  rapport d'aspect longitudinal

$c$  fraction massique (ou concentration) de perturbation de l'espèce la plus lourde du mélange

$C$  fraction massique (totale)

$D$  opérateur de dérivation  $D = \partial/\partial z$

$D$  coefficient de diffusion massique isotherme (sauf indication contraire comme dans la relation définissant la perméabilité  $K$ , où  $D$  est une dimension caractéristique des éléments constituant la matrice poreuse)

$Da$  nombre Darcy

$D_C/k_T$  coefficient de Dufour

$D_T$  coefficient de thermodiffusion (ou diffusion thermique)

$\widetilde{\mathbf{D}}$  tenseur des taux de déformation (ou taux de cisaillement)

$e$  épaisseur de la cavité poreuse

$g$  l'accélération gravitationnelle ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

$\mathbf{g}$  vecteur de la pesanteur ( $\mathbf{g} = g \mathbf{e}_z$ )

$h$  hauteur de la cavité poreuse

$k$  nombre d'onde dans la direction  $x$

$k_{c1}$  nombre d'onde du seuil de l'instabilité primaire

---

$k_{c2}$  nombre d'onde critique correspondant à la transition du régime de convection monocellulaire vers le régime de convection multicellulaire (correspondant au seuil de l'instabilité secondaire)

$k_T$  conductivité thermique

$K$  perméabilité

$l$  un entier désignant le nombre de rouleaux de convection dans l'autre direction horizontale  $y$

$L$  longueur de la cavité poreuse (sauf indication contraire)

$Le$  nombre de Lewis

$m$  un nombre (négatif ou positif) déterminant le sens de rotation (horaire ou anti-horaire) de l'écoulement monocellulaire

$M$  ordre de troncature de la méthode de Galerkin

$P$  pression motrice

$Pr$  nombre de Prandtl

$Pr_D$  nombre de Darcy-Prandtl

$Ra$  nombre de Rayleigh de filtration (i.e., basé sur la vitesse de filtration)

$Ra_{cs}$  nombre de Rayleigh critique correspondant à la transition du régime de conduction vers le régime de convection monocellulaire (seuil de l'instabilité primaire)

$Ra_{c1}$  seuil de l'instabilité primaire

$Ra_{c2}$  seuil de l'instabilité secondaire : nombre de Rayleigh critique correspondant à la transition du régime de convection monocellulaire vers le régime de convection multicellulaire

$Ra_{opt}$  le nombre de Rayleigh pour lequel la séparation est optimale

$S$  paramètre définissant la séparation

$t$  temps

$T$  température

$T_1$  température de la paroi inférieure

$T_2$  température de la paroi supérieure

$\mathbf{U}$  vitesse interstitielle du fluide

$v$  volume spécifique

$\mathbf{v}$  vitesse de filtration de perturbation

$\mathbf{V}$  vitesse de filtration (la vitesse macroscopique fictive du fluide en mouvement à travers le milieu poreux saturé)

---

$\Delta C$  fraction massique (concentration) de référence pour l'adimensionnement

$\Delta T$  différence de température entre la plaque inférieure et la plaque supérieure  
(température de référence pour l'adimensionnement)

**Symboles grecs :**

$\alpha = k_T/(\rho c)_f$  diffusivité thermique effective du milieu poreux

$\beta_T$  coefficient d'expansion thermique

$\beta_C$  coefficient d'expansion massique

$\theta$  température de perturbation

$\eta$  nouvelle variable pour prendre en compte le couplage température-concentration  
de perturbation (avec  $\eta = c - \theta$ )

$\varepsilon$  porosité

$\varepsilon^*$  porosité normalisée (ou adimensionnée)

$\psi$  rapport de séparation

$\psi_{mono}$  le rapport de séparation pour lequel la 1<sup>ère</sup> bifurcation est stationnaire conduisant ainsi le système à un écoulement monocellulaire favorable au procédé de séparation

$\lambda_1$  temps de relaxation (ou nombre d'élasticité) du fluide visco-élastique

$\lambda_2$  temps de retardation du fluide visco-élastique

$\Gamma$  rapport entre les deux temps caractéristiques de retardation et de relaxation (compris dans l'intervalle  $[0, 1]$ )

$\mu$  viscosité dynamique du fluide (solvant + polymère)

$\mu_s$  viscosité dynamique du solvant

$\mu_p$  viscosité dynamique du polymère

$\nu$  viscosité cinématique du fluide (solvant + polymère)

$\omega$  fréquence (ou pulsation) complexe

$\omega_r$  partie réelle de  $\omega$  et qui correspond à la fréquence du mode oscillatoire

$\omega_{c2}$  nombre de fréquence critique correspondant à la transition du régime de convection monocellulaire vers le régime de convection multicellulaire (correspondant au seuil de l'instabilité secondaire)

$\rho$  masse volumique

$(\rho c)$  capacité calorifique volumique

$\sigma$  rapport des capacités thermiques



---

$\tilde{\sigma}$  tenseur des contraintes au sein du fluide

$\tilde{\tau}$  déviateur des contraintes qui est un tenseur de trace nulle ( $\text{tr } \tilde{\tau} = 0$ ) et qui représente la contribution visqueuse au tenseur des contraintes  $\tilde{\sigma}$

**Indices inférieurs :**

0 relatif à l'état de base

*cond* relatif à l'état de base de conduction

*c1* relatif au seuil de l'instabilité primaire

*c2* relatif au seuil de l'instabilité secondaire

*f* relatif à la phase fluide seul

*i* référence (l'état initial)

*sf* relatif à une quantité effective (i.e., équivalente) du milieu poreux

**Indice supérieur :**

\* relatif aux grandeurs dimensionnées (sauf indication contraire)

# Introduction

Dans de nombreuses applications industrielles et biologiques, le procédé de séparation des espèces occupe une place très importante parmi les multiples processus exploités. C'est une technologie utilisée intensivement et consiste à transformer un mélange de substances en deux ou plusieurs composants distincts. Le but recherché peut être : l'extraction et la purification d'un composé d'intérêt (à l'instar de l'ADN), la concentration (i.e. l'élimination d'une partie du solvant) ou le fractionnement (i.e. la séparation d'un mélange complexe en plusieurs mélanges différents comme dans le cas de séparation des solutions de polymères). Le choix du procédé de séparation commence par une bonne connaissance de la composition du mélange et des propriétés des différents composants. Une technique est davantage utilisée pour la séparation des polymères, nommée "Fractionnement d'écoulement par champ thermique". Dans cette technique, on induit un gradient de température à l'aide d'une résistance chauffante et des courants d'eau froide qui passent de part et d'autre du canal. La différence de température crée un gradient de température induisant une diffusion thermique dans laquelle la vitesse du mouvement est liée au coefficient de diffusion thermique des espèces, qui amplifie l'effet de diffusion et augmente ainsi la séparation des analytes dans le canal. Dans ce qui suit, nous allons d'abord commencer par un bref exposé du phénomène physique de thermodiffusion et nous passerons en revue les nombreux travaux précurseurs qui avaient pour ambition de mieux exploiter ce phénomène dans diverses configurations physiques afin d'améliorer ce procédé de séparation.

La thermodiffusion, également connu comme l'effet Ludwig-Soret, est le phénomène physique qui se produit lorsqu'un gradient de température fait naître un gradient de concentration dans un mélange de fluide binaire (Furry et al., 1939; Costesque et al., 2011). Dans les colonnes thermogravitationnelles<sup>10</sup> (TGCs : Thermogravitational Columns), le couplage de la thermodiffusion et de la convection est utilisé pour séparer les espèces d'un fluide constitué de deux composants distincts (Clusius and Dickel, 1938). Cette technique consiste à séparer les espèces dans une

---

10. Connues aussi sous le nom de colonnes de thermodiffusion.

---

cavité délimitée par deux parois verticales maintenues à des températures différentes, et remplie d'un fluide binaire. L'effet de la thermodiffusion provoque la migration d'un composant de fluide vers la paroi chaude, tandis que l'autre composant se sépare du premier en migrant vers la paroi froide. En raison des variations de densité provoquées par les gradients de température et de concentration, un flux convectif se produit principalement le long de la direction verticale et crée – comme résultat du couplage entre la thermodiffusion et la convection – une différence de concentration entre le haut et le bas de la colonne. Un paramètre clé pour obtenir une séparation optimale des espèces est donc la vitesse du courant de convection : si la vitesse est très faible, le flux de convection n'est pas en mesure de briser la compensation horizontale qui existe entre la diffusion et la thermodiffusion ; d'autre part, les courants à grandes vitesses ont tendance à homogénéiser le mélange. Par conséquent, on doit travailler dans une gamme de paramètres où le couplage est optimal conduisant ainsi à une séparation maximale.

Au cours des dernières décennies, de nombreuses études se sont préoccupées de l'amélioration du processus de séparation dans les TGCs. [Debye and Bueche \(1948\)](#) ont proposé l'utilisation d'une colonne TGC chargée avec de la laine de verre dans le but de pouvoir fractionner des solutions de polymères, et ils ont réussi à améliorer la séparation dans cette configuration (i.e., TGC chargée d'une matrice poreuse) comparée à la même colonne sans matrice. [Lorenz and Emery \(1959\)](#) ont démontré que la séparation dépend de la perméabilité intrinsèque du matériau de remplissage poreux. Selon eux, la mise en place d'un garnissage poreux à l'intérieur de la colonne thermogravitationnelle permet de contrôler la vitesse moyenne verticale du flux convectif (qui est fonction de la perméabilité du milieu) et également pour générer un courant de convection homogène, ce qui améliore le procédé de séparation des espèces. [Platten et al. \(2003\)](#) ont incliné la cavité afin d'augmenter la séparation. De plus, de récents travaux ont montré également que la séparation dans une colonne TGC verticale peut être affectée par le coefficient de Soret ([Labrosse, 2003](#)) et par le coefficient de thermodiffusion ([Nasrabadi et al., 2007](#)), et ce du fait de la dépendance de cette séparation à l'égard de ces deux coefficients qui sont eux aussi dépendants l'un de l'autre.

Dans tous les travaux mentionnés ci-dessus, le procédé de séparation a été analysé dans des TGCs verticales. [Elhajjar et al. \(2008\)](#) ont montré qu'il est possible d'effectuer la séparation des espèces d'un mélange binaire dans la configuration classique de Rayleigh-Bénard, à savoir une cavité poreuse horizontale chauffée par le dessous. Dans cette configuration, et pour des valeurs du rapport de séparation  $\psi$  (défini ci-après par l'équation (III.21)) supérieur à une certaine valeur  $\psi_{mono} > 0$ ,

---

une bifurcation stationnaire conduit à un écoulement monocellulaire dès l'apparition de la convection, ce qui permet la séparation des espèces entre les deux bouts de la cellule. Il a été démontré que l'écoulement monocellulaire, obtenu suite à la déstabilisation de l'état de repos purement conductif, demeure stable bien au-delà du nombre de Rayleigh correspondant à la séparation optimale  $Ra_{opt}$ . Par ailleurs, le nombre de Rayleigh optimal  $Ra_{opt}$  dans le cas d'une cavité horizontale est plus grand que celui de la configuration verticale (i.e., TGC), ce qui permet d'effectuer la séparation dans une cavité de plus grande dimension.

L'influence de l'effet Soret *via* sa contribution dans les mouvements de convection dans des *fluides visco-élastiques*, peut jouer un rôle important dans de nombreux processus industriels et biologiques, comme pour les applications de séparation et purification des polymères et biopolymères (i.e., des polymères bio-sourcés), mais aussi pour les applications de la « réaction en chaîne par polymérase »<sup>11</sup> (une méthode de biologie moléculaire d'amplification génique *in vitro*, réalisée pour amplifier des séquences cibles d'acide nucléique à partir d'échantillons génétiques contenant de l'ADN ou de l'ARN (Krishnan et al., 2002)). En rhéologie, l'un des problèmes cruciaux est la formulation des équations constitutives régissant les écoulements de fluides visco-élastiques. En contraste avec les fluides Newtoniens, il existe pour le modèle de fluide de Maxwell, un paramètre sans dimension supplémentaire, à savoir le nombre d'élasticité  $\lambda_1$  qui représente le temps de relaxation de contrainte produite suite à une réponse élastique à la déformation (i.e., à la sollicitation), rapporté au temps caractéristique de la diffusion thermique verticale. Comme mentionné précédemment, le modèle visco-élastique plus général d'Oldroyd-B comprend en plus de  $\lambda_1$ , un autre nouveau paramètre sans dimension  $\lambda_2$  qui représente le temps de retardation de la déformation, rapporté au même temps caractéristique de la diffusion thermique verticale. Dans des fluides visco-élastiques tels que les liquides polymériques, une bifurcation de Hopf ainsi qu'une bifurcation stationnaire peut avoir lieu dans la cavité, et cela dépend fondamentalement des valeurs associées aux paramètres visco-élastiques du fluide (cf. e.g. Park and Lee (1996) et Li and Khayat (2005)). En réalité, la bifurcation de Hopf est difficile à observer en pratique, et cela a été rendu possible depuis une époque relativement récente. Kolodner (1998) a examiné la convection de solutions tampons<sup>12</sup> contenant de longues molécules d'ADN en suspension (voir figure II.19 qui visualise une longue molécule d'ADN

---

11. Appelée également « amplification en chaîne par polymérase » et son abréviation le plus souvent employée est en anglais : PCR, Polymerase Chain Reaction. Elle permet de dupliquer en grand nombre une séquence d'ADN ou d'ARN connue, à partir d'une faible quantité d'acide nucléique et d'amorces spécifiques constituées d'oligonucléotides de synthèse de 20 à 25 nucléotides.

12. En chimie, une solution tampon est une solution qui maintient approximativement le même pH malgré l'addition de petites quantités d'un acide ou d'une base, ou malgré une dilution.

grâce au microscope optique) dans une cavité annulaire remplie purement et entièrement de fluide, c.-à-d. dans un milieu non poreux. Sans l'ADN en suspension, pas d'oscillations observées dans ces expériences contrôlées, et ce quelle que soit l'échelle de temps d'observation sur laquelle elles ont été menées. En présence de molécules suspendues d'ADN, ces mêmes expériences montrent que la première instabilité convective est de nature oscillatoire. Les fréquences critiques mesurées ont été trouvées deux ou trois fois plus petites, en ordres de grandeur, que celles prédites par la théorie. Kolodner a suggéré qu'une origine possible de cette différence serait attribuée aux aspects de fluides binaires et à leur effet Soret inhérent. Voilà pourquoi [Martinez-Mardones et al. \(2000\)](#), [Laroze et al. \(2007\)](#) et [Malashetty and Swamy \(2010\)](#) ont analysé les seuils de convection thermique pour les mélanges binaires avec des propriétés visco-élastiques dans des milieux fluides (i.e., milieux non poreux).

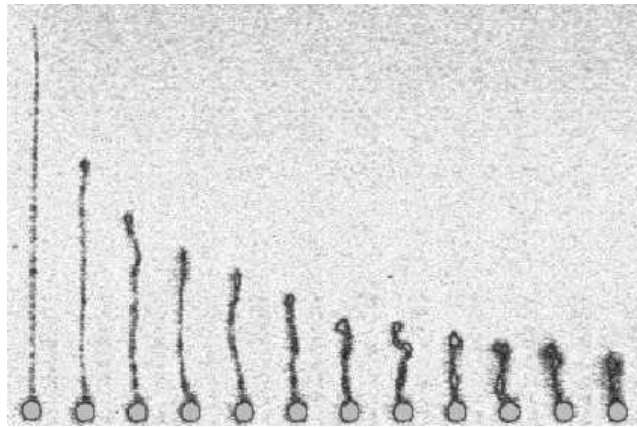


FIGURE II.19 – Visualisation d'une molécule d'ADN ( $\approx 40 \mu m$ ) attachée à une bille de latex d' $1 \mu m$  (images extraites de [Perkins et al. \(1994\)](#)). Les images successives, avec un intervalle de temps de 5 s entre chacune d'elles, montrent la relaxation de la molécule d'ADN après l'avoir préalablement étirée dans un écoulement uniforme.

Cependant, jusqu'à récemment la convection de fluides visco-élastiques dans des milieux poreux n'a pas reçu beaucoup d'attention. [Kim et al. \(2003\)](#) et [Niu et al. \(2010\)](#) ont étudié l'instabilité thermique primaire de fluides visco-élastiques dans des milieux poreux chauffés par le bas. [Malashetty et al. \(2010\)](#) et [Kang et al. \(2011\)](#) ont étudié l'effet de la rotation sur l'apparition de la convection. Les instabilités convectives et absolues tri-dimensionnelles d'un fluide visco-élastique en présence d'un gradient de pression longitudinal ont été analysées par [Hirata and Ouarzazi \(2010\)](#). Récemment, certains auteurs ont élargi l'étude en incluant l'aspect binaire des fluides visco-élastiques ([Wang and Tan, 2008](#); [Awad et al., 2010](#); [Kumar and Bhadauria, 2011](#); [Wang and Tan, 2011](#)). On s'accorde maintenant à reconnaître que la convection double-diffusive des fluides binaires peut correspondre à deux cas dis-

---

tincts. Le premier cas consiste en une convection pilotée par deux gradients verticaux thermique et solutal générés respectivement par les différences de température et de concentration entre les bords inférieur et supérieur de la cavité. Du point de vue expérimental, il sera donc nécessaire de contrôler simultanément la température et la concentration imposées au niveau des parois horizontales, et ce de façon indépendante. Le deuxième cas de convection double-diffusive des fluides binaires consiste à imposer uniquement un gradient vertical de température entre les deux parois, une configuration qui est plus aisée et plus accessible aux expériences de laboratoire. Le gradient de température vertical imposé induit intrinsèquement un gradient de concentration en raison de l'effet de thermodiffusion (i.e., l'effet Soret). Les dernières références mentionnées (Wang and Tan, 2008; Awad et al., 2010; Kumar and Bhardauria, 2011; Wang and Tan, 2011) ont mis l'accent sur le premier cas de convection double-diffusive et étaient préoccupées par l'étude de l'instabilité primaire.

Ainsi, l'objectif principal de cette deuxième partie de thèse est la détermination et l'examen minutieux des seuils d'apparition des instabilités *primaires* et *secondaires* tridimensionnelles <sup>13</sup> d'un mélange binaire visco-élastique, en tenant compte de l'influence combinée de : *l'effet Soret*, des *paramètres visco-élastiques* et du *confinement latéral* du milieu poreux. Nous considérons le cas où seul un gradient vertical de température entre les frontières de la cavité est imposé (c'est-à-dire le deuxième cas évoqué précédemment). En plus de l'intérêt théorique de cette étude, nous espérons également que notre analyse stimulera davantage les recherches expérimentales dans ce domaine et nous prétendons que nos résultats peuvent être utiles pour des applications industrielles comme pour des applications en biologie et génie biologique, intéressées par la séparation des espèces dans des solutions visco-élastiques. Pour cette raison, la présente contribution représente une extension aux cas de fluides visco-élastiques du travail accompli par les auteurs Elhajjar et al. (2008) sur la séparation d'espèces (et qui a été fait avec des mélanges Newtoniens).

Cette deuxième partie est organisée de la manière suivante. Après la présentation des équations régissant le problème dans la Section III.3, la stabilité du premier état de base (l'état de repos purement conducteur) est conduite dans la Section IV.1, en considérant des perturbations tridimensionnelles stationnaires ainsi que oscillatoires (il s'agit là du cas des **instabilités primaires**). La Section IV.2 est consacrée à l'étude et discussion de l'effet combiné de la *contribution de la thermodiffusion* (i.e., l'effet Soret), des *paramètres visco-élastiques* et du *rapport d'aspect latéral* du milieu poreux sur l'apparition des **instabilités secondaires**. Une attention particulière est accordée à la corrélation effective et pertinente entre nos résultats et la possibilité

---

13. Principalement le cas des *TRs* et des *LRs*.

---

d'opérer la séparation des espèces dans des mélanges de fluides visco-élastiques. Enfin, dans la Section "Conclusion de la 2<sup>ème</sup> partie", les principales conclusions de cette dernière partie sont avancées.

# Chapitre III

## Présentation et formulation du problème de la convection thermodiffusive en milieu poreux

---

*Ce chapitre est dédié à la présentation et à la formulation mathématique de la thermodiffusion de fluides visco-élastiques saturant un milieu poreux. La première section sur les milieux poreux et leur caractérisation a été partiellement empruntée de la thèse de [Marcoux \(1998\)](#).*

---

### Sommaire

---

<b>III.1 Présentation et caractérisation d'un milieu poreux . . .</b>	<b>121</b>
III.1.1 Milieu poreux . . . . .	121
III.1.2 Caractérisation d'un milieu poreux . . . . .	121
La porosité . . . . .	122
La perméabilité . . . . .	123
Volume élémentaire représentatif (V.E.R.) . . . . .	123
<b>III.2 Formulation mathématique du problème de thermodiffusion de fluides visco-élastiques en milieu poreux . . . .</b>	<b>124</b>
<b>III.3 Adimensionnement et formulation du problème de stabilité linéaire . . . . .</b>	<b>129</b>

---



## **III.1 Présentation et caractérisation d'un milieu poreux**

Nous allons tout d'abord commencer par un bref exposé sur les milieux poreux en introduisant, au passage, les principaux paramètres qui les caractérisent et qui seront utilisés dans la formulation mathématique du problème de cette seconde partie de thèse.

### **III.1.1 Milieu poreux**

On désigne par milieu poreux un matériau constitué d'une matrice solide de forme complexe à l'intérieur duquel se trouvent des cavités interconnectées ou pores. La matrice solide est dans la plupart des cas, rigide (ou consolidée) mais peut aussi être légèrement déformable. Les pores peuvent contenir une ou plusieurs phases fluides susceptibles de s'écouler et d'échanger entre elles et/ou avec la matrice solide de la matière ou de l'énergie. Nous nous restreindrons ici à l'étude d'écoulements où la matrice poreuse est saturée (totalement remplie) par un mélange binaire d'un fluide visco-élastique, sans qu'il y ait d'échange de matière entre la matrice poreuse et la phase fluide.

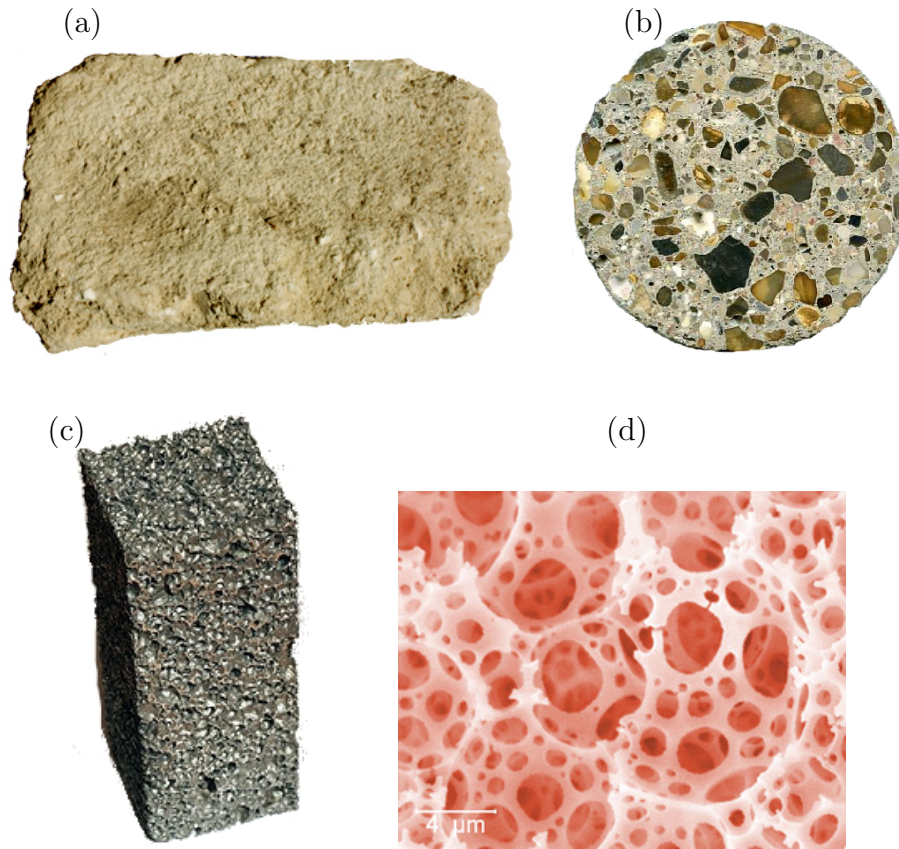
Il existe de nombreux exemples de milieux poreux dans la nature comme dans l'industrie. Le sable, les sols (pierre), les matériaux de construction (chaux), les aliments (pain sec), le papier, le bois, les tissus (poumon humain), etc, sont des exemples de milieux poreux. La figure III.1 donnent quelques photographies de milieux poreux prises à différentes échelles d'observation.

D'une très grande variété de structure et de nature, les milieux poreux occupent une large place et jouent un rôle important dans de nombreux secteurs industriels et phénomènes naturels. On peut notamment citer, comme exemples typiques : le génie pétrolier, le génie chimique, l'hydrogéologie, la géothermie, le génie civil, la médecine...

De part leur implication dans ces divers domaines et phénomènes, les milieux poreux ont été intensivement étudiés pendant les 70 dernières années, et continuent encore à susciter l'intérêt de la communauté scientifique et constituent une discipline à part entière dans de nombreux secteurs de recherche.

### **III.1.2 Caractérisation d'un milieu poreux**

Les phénomènes qui se déroulent dans les milieux poreux dépendent des propriétés du fluide interstitiel mais aussi de la géométrie de la matrice solide. Celle-ci



© CNRS Photothèque/ISM/Hervé DELEUZE/Marc BIROT-Juin 2008

FIGURE III.1 – Exemples de milieux poreux naturels et industriels. (a) et (b) des matériaux de génie civil (images tirées de [Escoda \(2012\)](#)) : roche et béton, successivement. (c) une mousse métallique (source [El Moumen \(2014\)](#)). (d) microphotographie électronique à balayage colorisée d'un matériau silicone poreux préparé par une technique originale à partir d'une émulsion concentrée aqueuse (porosité totale : 85%); ce matériau monolithique rigide microcellulaire est utilisable en chimie verte, catalyse hétérogène, isolant phonique et thermique, biocapteurs, filtre à particules, dépollution.

est caractérisée par un certain nombre de grandeurs moyennes, géométriques ou statistiques.

### La porosité

La porosité  $\varepsilon$  d'un milieu poreux est la fraction du volume total occupé par les pores :

$$\varepsilon = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume total d'un milieu poreux}},$$

Cette définition concerne un milieu poreux idéal où tous les pores sont interconnectés, car elle considère tous les pores, même ceux qui sont fermés et qui ne sont pas envahis par le fluide. Il faudrait en fait utiliser une porosité effective ou accessible

définie comme le rapport des pores connectés à travers lesquels s'effectue l'écoulement sur le volume total. Cette définition n'est possible que si on connaît bien la structure du milieu poreux, elle est peu utilisée en pratique.

### La perméabilité

La perméabilité  $K$  se réfère à la capacité du milieu poreux à laisser passer le ou les fluides à l'intérieur des pores. Elle ne dépend que de la géométrie de la matrice solide, en particulier de la porosité et de la tortuosité. Ainsi le milieu est d'autant plus perméable que les pores sont connectés entre eux. Généralement  $K$  est déterminé par des mesures expérimentales, par le biais de la loi de Darcy régissant le mouvement du fluide dans le milieu poreux.

Il est possible d'évaluer la perméabilité  $K$  grâce à des géométries particulières du milieu, par l'intermédiaire de la porosité  $\varepsilon$  et d'une dimension caractéristique de la matrice solide à l'échelle du pore. On note notamment :

- La relation de Kozeny-Carman (1937) donne une estimation satisfaisante de  $K$  pour un milieu poreux non consolidé constitués d'éléments identiques de géométries simples :

$$K = \frac{D^2 \varepsilon^3}{36 C_0 (1 - \varepsilon)^2}$$

$D$  est une dimension caractéristique des éléments constituant la matrice poreuse,  $C_0$  est un coefficient de forme, il est compris entre 3.6 et 5. Il est égal à 4.8 pour les grains sphériques.

- Le modèle de faisceaux de tubes capillaires ondulés, parallèles en moyenne à une direction donnée est donc fortement anisotrope :

$$K = \varepsilon \frac{D^2}{32 \tau}$$

avec  $\tau$  la tortuosité des tubes capillaires ondulés,  $D$  le diamètre des tubes. Il existe également des modèles statistiques permettant le calcul de la perméabilité. Cela se révèle utile lorsque le milieu poreux présente des inhomogénéités dans une large gamme d'échelle (il n'y a plus de description continue fictive équivalente).

### Volume élémentaire représentatif (V.E.R.)

Lorsqu'on étudie des écoulements en milieu poreux, deux échelles s'imposent pour la description des phénomènes : l'échelle des pores, ou microscopique, à l'intérieur de laquelle les grandeurs locales subissent d'importantes fluctuations, dont l'échelle

Matériau	Porosité	Perméabilité
	$\varepsilon$	$K (m^2)$
Ardoise (en poudre)	0.56 à 0.66	$4.9 \times 10^{-14}$ à $4.4 \times 10^{-13}$
Brique	0.12 à 0.34	$4.8 \times 10^{-15}$ à $1.2 \times 10^{-13}$
Béton	0.02 à 0.07	$10^{-13}$ à $2.3 \times 10^{-11}$
Fibre de verre	0.88 à 0.93	–
Cuir	0.56 à 0.59	$9.5 \times 10^{-14}$ à $1.2 \times 10^{-13}$
Calcaire (dolomite)	0.04 à 0.10	$2 \times 10^{-15}$ à $4.5 \times 10^{-14}$
Sable	0.37 à 0.50	$2 \times 10^{-11}$ à $1.8 \times 10^{-10}$
Grès	0.08 à 0.38	$5 \times 10^{-16}$ à $3 \times 10^{-12}$
Silice (en poudre)	0.37 à 0.49	$1.3 \times 10^{-14}$ à $5.1 \times 10^{-14}$
Sol	0.43 à 0.54	–

TABLE III.1 – Propriétés de quelques matériaux poreux (Marcoux, 1998).

de longueur peut être le diamètre moyen des pores  $d$ , et l'échelle du milieu poreux, ou macroscopique, associée à une dimension géométrique du milieu  $L$ . On peut alors définir un volume, noté VER, suffisamment grand pour être représentatif, c'est-à-dire pour permettre la caractérisation de toute propriété, mais suffisamment petit pour que la grandeur ainsi définie conserve un caractère global. Ainsi, si  $l$  désigne la dimension caractéristique du VER, cette échelle doit satisfaire les contraintes suivantes  $d \ll l \ll L$ . Les propriétés de structure, précédemment définies, sont alors obtenues par prise de moyenne sur le VER.

Lorsque les propriétés locales, définies sur le VER, sont indépendantes de la position de celui-ci au sein de l'échantillon poreux, le milieu est dit homogène, à l'échelle macroscopique.

Le tableau III.1 rassemble les propriétés ainsi définies de quelques matériaux caractéristiques.

## III.2 Formulation mathématique du problème de thermodiffusion de fluides visco-élastiques en milieu poreux

Prenons une cavité poreuse isotrope et homogène de largeur (i.e., d'épaisseur)  $e$ , de hauteur  $h$  et de longueur  $L$  (cf. figure III.2). Le milieu poreux est saturé par un mélange de fluide binaire visco-élastique décrit avec le modèle rhéologique d'Oldroyd-B, et nous supposons que la matrice solide est en équilibre thermique local avec la phase fluide. Le système est chauffé uniformément par le bas et refroidi uniformément

par le haut. Les parois horizontales supérieure et inférieure sont maintenues à des températures constantes  $T_1^*$  et  $T_2^*$  respectivement, tandis que les parois latérales verticales sont considérées comme adiabatiques (c.-à-d. ne présentant aucun échange de chaleur avec le milieu extérieur). Toutes les parois solides du domaine  $\Omega = [0, L] \times [0, e] \times [0, h]$  sont considérées comme imperméables au fluide. Dans les conditions de la présente étude, nous supposons que l'approximation d'Oberbeck-Boussinesq reste valable.

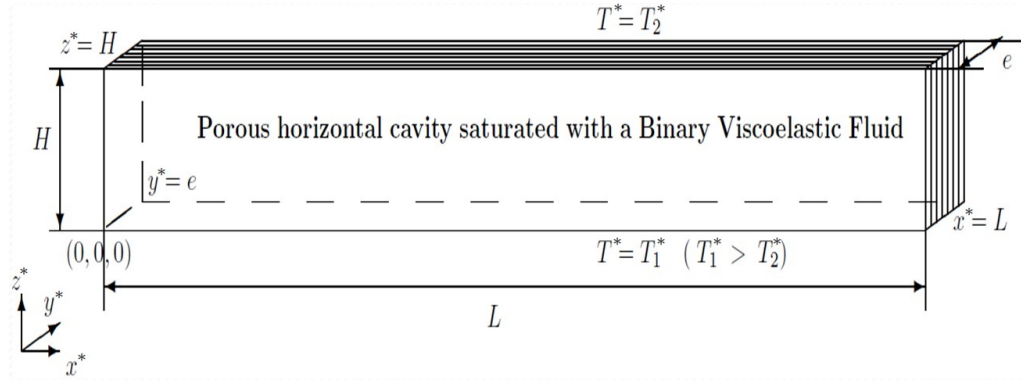


FIGURE III.2 – La configuration du problème de Rayleigh-Bénard d'un fluide binaire visco-élastique saturant une cavité poreuse horizontale de hauteur  $h$  : le mélange binaire visco-élastique que l'on désire séparer, est soumis uniquement à un gradient extérieur vertical de température. Le système se trouve dans le champ gravitationnel terrestre et les paramètres physiques sont exprimés en grandeurs dimensionnées.

Il existe plusieurs façons de procéder pour obtenir des lois macroscopiques pour les écoulements de polymères dans un milieu poreux : par des simulations numériques directes (DNS : Direct Numerical Simulations) d'écoulements visco-élastiques dans un modèle d'une géométrie spécifique de pores (un bonne revue de ces études peut être consultée dans l'article [Skartsis et al. \(1992\)](#)); ou par voies analytiques. En général, la première est la méthode la plus couramment utilisée pour l'obtention des lois macroscopiques. Elle consiste en deux techniques : la technique du VER <sup>14</sup>, et l'autre technique basée sur la théorie d'homogénéisation. Le point de départ pour les deux techniques est la description locale à l'échelle des pores. Le vide des pores est supposé être saturé par un fluide visco-élastique incompressible. Pour de faibles débits (c.-à-d. présentant de faibles vitesses), l'équation de l'équilibre dynamique (i.e., l'équation de conservation de la quantité de mouvement) peut être linéarisée et écrite comme suit :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{U}^*}{\partial t^*} = -\nabla p^* + \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \rho \mathbf{g} \quad (\text{III.1})$$

---

14. En anglais REV method : Representative Elementary Volume method.

où  $\mathbf{U}^*$  définit le champ de vitesses du fluide,  $p^*$  le champ de pressions,  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  le champ de contraintes et  $\mathbf{g}$  le vecteur de la pesanteur.

Dans des fluides Newtoniens incompressibles, la relation constitutive entre le tenseur des contraintes  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  et le tenseur des taux de déformation  $\tilde{\mathbf{D}}$ <sup>15</sup> est la loi Newtonienne linéaire  $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu_N \tilde{\mathbf{D}}$ , où  $\mu_N$  est la viscosité dynamique. Dans ce cas, la relation  $\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \mu_N \nabla^2 \mathbf{U}^*$  est obtenue.

Le modèle rhéologique reliant  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  et  $\tilde{\mathbf{D}}$  pour des fluides visco-élastiques, comme dans le cas d'une solution polymérique composée d'un solvant Newtonien de viscosité "Newtonienne"  $\mu_s$  et d'un soluté de polymère de viscosité "élastique"  $\mu_p$  (c.f. [Joseph \(1990\)](#)), est donné par :

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_s + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_p \quad (\text{III.2})$$

avec

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_s = 2\mu_s \tilde{\mathbf{D}} \quad (\text{III.3})$$

et

$$\left(1 + \lambda_1^* \frac{\partial}{\partial t^*}\right) \tilde{\boldsymbol{\tau}}_p = 2\mu_p \tilde{\mathbf{D}} \quad (\text{III.4})$$

où  $\lambda_1^*$  représente le temps caractéristique de relaxation. Puis, en combinant les équations (III.2)-(III.4) on obtient l'équation constitutive :

$$\left(1 + \lambda_1^* \frac{\partial}{\partial t^*}\right) \tilde{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu \left(1 + \lambda_2^* \frac{\partial}{\partial t^*}\right) \tilde{\mathbf{D}} \quad (\text{III.5})$$

la viscosité dynamique  $\mu$  et le temps caractéristique de retardation  $\lambda_2^*$  sont liés à  $\mu_s$  et  $\mu_p$  par :  $\mu = \mu_s + \mu_p$  et  $\lambda_2^* = [\mu_s / (\mu_s + \mu_p)] \lambda_1^*$ .

Un fluide d'Oldroyd-B peut ainsi être caractérisé avec trois paramètres : la viscosité dynamique  $\mu$ , le temps de relaxation  $\lambda_1^*$  et le temps de retardation  $\lambda_2^*$ . Le rapport  $\Gamma = \lambda_2^* / \lambda_1^*$  peut également être utilisé à la place de  $\lambda_2^*$ .

Afin d'en tirer une loi de filtration macroscopique basée sur l'équation constitutive d'Oldroyd, nous devons introduire la vitesse de filtration  $\mathbf{V}^*$  définie par l'équation de Dupuit :

$$\mathbf{V}^* = \varepsilon \mathbf{U}^* \quad (\text{III.6})$$

où  $\varepsilon$  est la porosité. En substituant l'équation (III.5) dans (III.1) et en se basant sur la méthode du VER tout en appliquant une moyenne à l'équation résultante et en

---

15. Rappelons que  $\tilde{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^* + (\nabla \mathbf{u}^*)^T)$ .

tenant compte de l'équation (III.6), on obtient :

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \left( 1 + \lambda_1^* \frac{\partial}{\partial t^*} \right) \frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial t^*} + \frac{\mu}{K} \left( 1 + \lambda_2^* \frac{\partial}{\partial t^*} \right) \mathbf{V}^* + \left( 1 + \lambda_1^* \frac{\partial}{\partial t^*} \right) (\nabla P^* - \rho \mathbf{g}) = 0 \quad (\text{III.7})$$

avec  $K$  représentant la perméabilité du milieu poreux.

Dans l'hypothèse d'un faible nombre de Reynolds basé sur la dimension des pores, la loi de Darcy généralisée (III.7) a également été retrouvée par [Khuzhayorov et al. \(2000\)](#) moyennant une théorie d'homogénéisation. Cette loi de Darcy étendue aux cas de fluides visco-élastiques, a été utilisée pour décrire le transfert de quantité de mouvement en milieu poreux par de nombreux auteurs ([Kim et al., 2003](#); [Niu et al., 2010](#); [Malashetty et al., 2010](#); [Kang et al., 2011](#); [Hirata and Ouarzazi, 2010](#); [Wang and Tan, 2008](#); [Awad et al., 2010](#); [Kumar and Bhadauria, 2011](#)).

La densité (masse volumique) du mélange fluide obéit à la loi d'état linéaire :

$$\rho = \rho_0(1 - \beta_T(T^* - T_0^*) - \beta_C(C^* - C_0^*)) \quad (\text{III.8})$$

où  $\rho_0$  est la densité du mélange fluide à l'état de référence caractérisé par la température  $T_0^*$  et la fraction massique  $C_0^*$ .  $\beta_T$  et  $\beta_C$  sont, respectivement, le coefficient de dilatation (ou d'expansion) thermique et le coefficient de dilatation massique (ce dernier est lié à la concentration d'espèce). Comme on a affaire à un mélange binaire de fluide, nous pouvons donc écrire le flux de concentration diffusive sous la forme :

$$J_c = -\rho D \nabla C^* - \rho D_T C_i (1 - C_i) \nabla T^* \quad (\text{III.9})$$

les paramètres  $D$ ,  $D_T$  et  $C_i$  sont, respectivement, le coefficient de diffusion massique (ou isotherme), le coefficient de thermodiffusion (ou de diffusion thermique) et le coefficient de fraction massique initiale de l'espèce la plus lourde du mélange.

Le fait qu'un gradient de température engendre – d'après (III.9) – un courant de concentration (i.e., une migration des espèces du mélange), est connu sous l'appellation de "l'effet Soret". D'une manière analogue, nous pouvons aussi écrire le flux de chaleur diffusive sous la forme :

$$J_h = -k_T \nabla T^* - D_C \nabla C^* \quad (\text{III.10})$$

où  $k_T$  est la conductivité thermique, tandis que  $D_C/k_T$  peut être considéré comme le coefficient de Dufour. Il mesure l'ampleur des variations de température induites par la présence d'un gradient de concentration, ou en d'autres mots, c'est l'établissement d'un gradient de température comme conséquence d'un gradient de concentration, un

phénomène négligeable en dehors des phases gazeuses (se référer, par exemple, aux deux premiers chapitres de la thèse de [Marcoux \(1998\)](#) pour obtenir de plus amples informations au sujet de l'effet Soret et l'effet Dufour en diffusion thermogravitationnelle). Nous notons que l'influence combinée des deux effets Soret et Dufour sur la convection double-diffusive linéaire et non-linéaire dans un milieu poreux saturé par un fluide Newtonien, a été étudiée dans un article récent des auteurs [Malashetty and Biradar \(2012\)](#). Dans la présente étude, on néglige l'effet Dufour (ce qui est justifié dans les liquides <sup>16</sup>) et on restreint notre investigation à l'influence de l'effet Soret. À présent, après avoir introduit et discuté l'équation de conservation de quantité de mouvement, les équations de conservation d'énergie, de conservation des espèces et de continuité peuvent maintenant être introduites et elles s'écrivent comme suit :

$$\frac{(\rho c)_{sf}}{(\rho c)_f} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{V}^* \cdot \nabla T^* = \nabla \cdot (\alpha \nabla T^*) \quad (\text{III.11})$$

$$\varepsilon \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + \mathbf{V}^* \cdot \nabla C^* = D(\nabla^2 C^*) + D_T C_i (1 - C_i) \nabla^2 T^* \quad (\text{III.12})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V}^* = 0 \quad (\text{III.13})$$

Les conditions aux limites sur les parois horizontales imperméables et parfaitement conductrices de la chaleur, et les conditions aux limites des parois latérales (i.e., toutes les parois verticales) imperméables et isolantes (c.-à-d. adiabatiques) sont les suivantes :

$$\begin{aligned} T &= T_0 \quad \text{en } z = 0 \quad \text{et} \quad T = T_1 \quad \text{en } z = h \\ \partial C / \partial z &= -(D_T / D) C_i (1 - C_i) \partial T / \partial z \quad \text{en } z = 0, h \\ \partial T / \partial x &= \partial C / \partial x = 0 \quad \text{en } x = 0, L \\ \partial T / \partial y &= \partial C / \partial y = 0 \quad \text{en } y = 0, e \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sur toute la frontière } \partial \Omega \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Ici,  $\alpha = k_T / (\rho c)_f$ ,  $(\rho c)$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  sont respectivement la diffusivité thermique effective du milieu poreux, la capacité calorifique volumique (i.e., par unité de volume) et la viscosité dynamique et cinématique du mélange de fluide. L'indice inférieur (*sf*) réfère à une quantité effective (c.-à-d. équivalente du milieu poreux), tandis que (*f*) réfère à la phase fluide seul. Dans les équations de transport d'énergie et des espèces

---

16. La différence de température résultant des inhomogénéités de concentration dans un mélange de gaz, est de l'ordre de l'unité Kelvin. Or, elle est seulement de l'ordre de  $10^{-3}$  K dans les mélanges de liquides, ce qui justifie notre hypothèse.



(III.11) et (III.12), le caractère visco-élastique du mélange agit implicitement sur le phénomène du transport à travers la vitesse de filtration  $\mathbf{V}^*$ .

### III.3 Adimensionnement et formulation du problème de stabilité linéaire

La formulation mathématique de la convection thermodiffusive de fluides visco-élastiques saturant un milieu poreux est donnée sous forme dimensionnelle par le système d'équations (III.7), (III.11), (III.12), (III.13) vérifiant les conditions aux limites (III.14).

À l'instar de [Elhajjar et al. \(2008\)](#), nous choisissons  $h$ ,  $k_T/(h(\rho c)_f)$ ,  $h^2(\rho c)_{sf}/k_T$ ,  $k_T\mu/(K(\rho c)_f)$ ,  $\Delta T = T_1 - T_2$  et  $\Delta C = -\Delta TC_i(1 - C_i)(D_T/D)$  comme des échelles appropriées de référence pour la longueur, la vitesse, le temps, la pression, la température et la fraction massique. Avec cette adimensionnement, on obtient l'ensemble suivant des équations adimensionnées (i.e., dont les paramètres sont sans dimensions) :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (\text{III.15})$$

$$\left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{1}{Pr_D} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \left(1 + \Gamma \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{V} + \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) (\nabla P - Ra(T + \psi C) \mathbf{e}_z) = 0 \quad (\text{III.16})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T = \nabla^2 T \quad (\text{III.17})$$

$$\varepsilon^* \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla C = Le \nabla^2 (C - T) \quad (\text{III.18})$$

Les conditions aux limites adimensionnelles sont :

$$\begin{aligned} T = 1 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad T = 0 \quad \text{en} \quad z = 1 \\ \partial T / \partial z = \partial C / \partial z \quad \text{en} \quad z = 0, 1 \\ \partial T / \partial x = \partial C / \partial x = 0 \quad \text{en} \quad x = 0, A \\ \partial T / \partial y = \partial C / \partial y = 0 \quad \text{en} \quad y = 0, a \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur toute la frontière} \quad \partial \Omega \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Le nombre de Darcy-Prandtl  $Pr_D$  est défini comme  $Pr_D = (\varepsilon Pr)/Da$ , avec  $Da = K/h^2$  et  $Pr = \nu/k_T$ . Étant donné que le nombre Darcy  $Da$  est très faible dans les milieux poreux communs, le nombre de Darcy-Prandtl  $Pr_D$  prend donc de très grandes valeurs. Par conséquent, le premier terme de l'équation (III.16) sera

volontairement omis dans ce qui suit. Les paramètres adimensionnels de contrôle <sup>17</sup> restants sont :

le nombre de Rayleigh de filtration (i.e., basé sur la vitesse de filtration)

$$Ra = (Kg\beta_T h \Delta T) / (\alpha \nu) \quad (\text{III.20})$$

le rapport de séparation

$$\psi = -\beta_C D_T C_i (1 - C_i) / (\beta_T D) \quad (\text{III.21})$$

le nombre de Lewis

$$Le = D / \alpha \quad (\text{III.22})$$

la porosité normalisée (ou adimensionnée)

$$\varepsilon^* = \varepsilon(\rho c)_f / (\rho c)_{sf} \quad (\text{III.23})$$

les rapports d'aspect (i.e., de forme) longitudinal et latéral

$$A = L/h, a = e/h \quad (\text{III.24})$$

le temps de relaxation

$$\lambda_1 = \lambda_1^* k_T / (h^2 (\rho c)_{sf}) \quad (\text{III.25})$$

et le rapport  $\Gamma$  qui prend des valeurs fixes impérativement à l'intérieur de l'intervalle  $[0, 1]$

$$\Gamma = \mu_s / (\mu_s + \mu_p) = \lambda_2^* / \lambda_1^* \quad (\text{III.26})$$

Ce modèle visco-élastique d'Oldroyd-B se réduit au modèle de Maxwell dans la limite  $\Gamma \rightarrow 0$ , et au modèle Newtonien lorsque  $\Gamma \rightarrow 1$ .

Dans ce qui suit, nous allons examiner le cas de l'*instabilité primaire*, c'est-à-dire l'instabilité du premier état d'équilibre du système qui est l'état de repos purement conductif. Ensuite, nous examinerons le cas de l'*instabilité secondaire*, ce qui veut dire l'instabilité du second état d'équilibre du système qui est l'état de l'écoulement monocellulaire. Afin d'éviter la répétition, nous formulons le problème de l'instabilité linéaire d'une manière générale, en écrivant l'état de base de la présente étude sous cette forme :

$$\mathbf{V}_0 = U_0(z) \mathbf{e}_x, \quad T_0(z) \quad \text{et} \quad C_0(x, z) \quad (\text{III.27})$$

---

17. C.-à-d. les paramètres les plus pertinents qui pilotent les différents phénomènes du présent problème, et notamment ceux de transition entre les différents états physiques du système.

Pour étudier la stabilité de la solution de base (III.27), des perturbations tri-dimensionnelles infinitésimales sont superposées à cet état de base, et elles s'écrivent de cette manière :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{v}(x, y, z, t), \quad T = T_0 + \theta(x, y, z, t), \quad C = C_0 + c(x, y, z, t) \quad (\text{III.28})$$

Afin d'éviter le couplage entre les perturbations  $\theta(x, y, z, t)$  et  $c(x, y, z, t)$  dans les conditions aux limites, nous introduisons un nouveau champ défini par la nouvelle variable  $\eta = c - \theta$ . Ensuite, nous admettons une configuration de très grand rapport d'aspect longitudinal  $A$  ( $A \rightarrow \infty$ ). Les quantités de perturbations tri-dimensionnelles satisfaisant les conditions aux limites (III.19) sont exprimées en :

$$(u, w, \theta, \eta) = [\tilde{u}(z), \tilde{w}(z), \tilde{\theta}(z), \tilde{\eta}(z)] \exp(ikx - i\omega t) \cos(l\pi y/a) \quad (\text{III.29})$$

$$v = \tilde{v}(z) \exp(ikx - i\omega t) \sin(l\pi y/a) \quad (\text{III.30})$$

où  $k$  est le nombre d'onde dans la direction  $x$ , l'entier  $l$  désigne le nombre de rouleaux de convection dans l'autre direction horizontale  $y$ , et le taux de croissance temporelle des perturbations instables est donné par la partie imaginaire de la fréquence complexe  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ . En conséquence, la courbe de stabilité temporelle neutre (appelée également courbe de stabilité temporelle marginale) est obtenue pour  $\omega_i = 0$ . À partir de cette courbe, le système sélectionne lequel d'entre les modes instables est dominant, et c'est ce mode dominant qui va apparaître en premier à la naissance de la convection.

En substituant les équations (III.28)-(III.30) dans (III.15)-(III.19) (ces dernières représentent les équations de conservations et les conditions aux limites), et après linéarisation autour de la solution de base tout en appliquant le double rotationnel à l'équation de mouvement, on obtient enfin les équations de perturbation :

$$\begin{aligned} (1 - i\omega\Gamma\lambda_1) \left( D^2 - k^2 - \frac{l^2\pi^2}{a^2} \right) \tilde{w} \\ = -Ra(1 - i\omega\lambda_1) \left( k^2 + \frac{l^2\pi^2}{a^2} \right) [\tilde{\theta}(1 + \psi) + \psi\tilde{\eta}] \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

$$-i\omega\tilde{\theta} + \tilde{w} DT_0 + ik\tilde{\theta}U_0 = \left( D^2 - k^2 - \frac{l^2\pi^2}{a^2} \right) \tilde{\theta} \quad (\text{III.32})$$

$$-i\omega\varepsilon^*(\tilde{\eta} + \tilde{\theta}) + ikU_0(\tilde{\eta} + \tilde{\theta}) + \tilde{u}\partial C_0/\partial x + DC_0 \tilde{w} = Le \left( D^2 - k^2 - \frac{l^2\pi^2}{a^2} \right) \tilde{\eta} \quad (\text{III.33})$$

avec  $D = \partial/\partial z$ . Les conditions aux limites correspondantes prennent la forme :

$$\tilde{w} = 0, \quad \tilde{\theta} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0, 1 \quad (\text{III.34})$$

Le système (III.31)-(III.34) est ensuite résolu au moyen de la méthode numérique de Galerkin en utilisant les développements suivants :

$$[\tilde{w}(z), \tilde{\theta}(z)] = \sum_{n=1}^M (w_n, \theta_n) \sin(n\pi z), \quad \tilde{\eta}(z) = \sum_{n=1}^M \eta_{n-1} \cos((n-1)\pi z) \quad (\text{III.35})$$

Dans la suite, le nombre  $M$  des modes de développement de Galerkin est choisi de sorte que la convergence quantitative des résultats de la méthode sera garantie.

# Chapitre IV

## Résultats et discussion : Instabilités primaire et secondaire

---

*Nous présentons dans ce chapitre successivement les résultats de stabilité linéaire de l'état de conduction, de l'écoulement convectif monocellulaire et de la bifurcation de Hopf comme seconde transition. Au regard des résultats obtenus, un protocole de séparation des espèces est proposé.*

---

### Sommaire

---

<b>IV.1 L'instabilité primaire : la perte de stabilité de l'état de repos purement conducteur</b> . . . . .	<b>134</b>
IV.1.1 L'instabilité stationnaire et les effets du confinement latéral	134
IV.1.2 La naissance de l'instabilité oscillatoire . . . . .	138
<b>IV.2 L'instabilité secondaire : la perte de stabilité de l'écoulement monocellulaire</b> . . . . .	<b>140</b>

---

## IV.1 L'instabilité primaire : la perte de stabilité de l'état de repos purement conductif

Dans un régime purement conductif, la solution de base (III.27) est un état stationnaire où les particules fluides restent immobiles (i.e. l'absence de mouvement de matière) tout en diffusant la chaleur par conduction. Dans ce cas,  $U_0(z) = 0$  et le domaine poreux est le siège d'une stratification thermique verticale :

$$T_{cond} = 1 - z \quad (\text{IV.1})$$

ce qui génère également dans le milieu, selon le principe de la thermodiffusion, un gradient vertical de concentration :

$$C_{cond} = 1/2 - z \quad (\text{IV.2})$$

Nous rappelons que le rapport de séparation  $\psi$ , tout en étant proportionnel à l'intensité de l'effet Soret, peut être positif comme il peut être négatif. Dans le cas d'un  $\psi$  positif, le composant le plus léger est entraîné dans la direction de température la plus élevée (le fond de la cavité pour le cas étudié ici), ce qui accentue davantage le gradient de densité existant. Pour  $\psi$  négatif, c'est la situation opposée qui s'installe dans le domaine (le composant le plus léger sera entraîné vers la paroi de faible température, c.-à-d. la paroi supérieure pour la présente configuration). Pour ce qui concerne notre étude, nous nous limitons au premier cas des  $\psi$  positifs, ce qui induit un effet déstabilisateur.

Le but de cette section est d'accomplir une analyse de stabilité temporelle de l'état de repos purement conductif vis-à-vis des perturbations stationnaires (i.e., le cas des cellules de convection immobiles dans le domaine) ainsi que des perturbations oscillatoires (i.e., le cas des cellules de convection mobiles dans le domaine).

### IV.1.1 L'instabilité stationnaire et les effets du confinement latéral

Notons que les paramètres visco-élastiques du fluide ( $\lambda_1$  et  $\Gamma$ ) n'apparaissent que devant une dérivée partielle temporelle dans l'équation de quantité de mouvement (III.16). Par conséquent, l'élasticité des mélanges de fluides peut jouer un rôle uniquement dans le cas des perturbations dépendantes du temps (à l'instar des perturbations oscillatoires). Ainsi, les caractéristiques de l'instabilité stationnaire des mélanges binaires visco-élastiques seront les mêmes que pour les mélanges binaires

Newtoniens. Pour ces fluides Newtoniens, des analyses d’instabilité linéaire ont été conduites par [Sovran et al. \(2001\)](#), [Charrier-Mojtabi et al. \(2007\)](#) et [Elhajjar et al. \(2008\)](#) et ont fourni des informations quantitatives sur la condition de stabilité dans le cas 2D (i.e., lorsque les perturbations dans la direction  $y$  sont ignorées). Ces auteurs ont montré qu’il existe une valeur particulière  $\psi_{mono} = 1 / [(40 / (51 Le)) - 1]$  pour laquelle si  $\psi \geq \psi_{mono}$ , la solution conductrice de chaleur perd sa stabilité *via* une bifurcation stationnaire conduisant à un écoulement monocellulaire (pour lequel  $k = 0$ ) avec un nombre correspondant de Rayleigh critique  $Ra_{cs} = 12 Le / \psi$ . En outre, si  $\psi < \psi_{mono}$ , il existe une valeur particulière supplémentaire  $\psi_0 < 0$  (elle est négative dans le cas Newtonien) telle que : lorsque  $\psi_{mono} > \psi > \psi_0$ , une bifurcation également de nature stationnaire se produit mais en donnant naissance cette fois-ci à des rouleaux (i.e. une solution multicellulaire) avec un nombre d’onde  $k \neq 0$ ; néanmoins, pour les valeurs de  $\psi < \psi_0$ , le système subit une bifurcation de Hopf donnant lieu à des structures d’ondes voyageant symétriquement dans les deux sens opposés de la cavité bidimensionnelle (à gauche et à droite). Pour fin de comparaison, il faut noter que le nombre de Lewis défini dans la présente étude est l’inverse de celui utilisé dans les articles mentionnés précédemment ([Sovran et al., 2001](#); [Charrier-Mojtabi et al., 2007](#); [Elhajjar et al., 2008](#)). Dans ce qui suit, notre objectif est d’étendre cette analyse à des perturbations en trois dimensions (3D) et de déterminer l’influence du rapport d’aspect latéral “ $a$ ” sur la sélection du mode le plus instable.

Nous considérons d’abord des perturbations en forme de rouleaux stables (permanents ou immobiles dans le domaine) avec des axes perpendiculaires à la direction  $x$  (i.e.  $l = 0$  et  $\omega_r = 0$ ) que nous appellerons des rouleaux transversaux<sup>18</sup> permanents (*TRs*). Après avoir utilisé le développement de Galerkin (III.35) avec  $M = 10$ , nous obtenons des résultats avec un très bon accord avec ceux obtenus par [Sovran et al. \(2001\)](#). Les figures IV.1 et IV.2 illustrent ces résultats, où le nombre de Rayleigh critique  $Ra_{c1}$  et le nombre d’onde critique correspondant  $k_{c1}$  sont tracés en fonction du rapport de séparation  $\psi$  pour  $Le = 0.01$ , un certain nombre de Lewis assez représentatif dans le cas des mélanges liquides. Dans cette figure IV.1, la ligne pointillée dotée de symboles “•” représente nos résultats numériques tandis que la ligne continue représente l’expression analytique  $Ra_{cs} = 12 Le / \psi$  au dessus de laquelle les *TRs* stables peuvent apparaître. Dans le cas d’un fluide pur (i.e. en l’absence de mélange  $\psi = 0$ ), l’état conducteur perd sa stabilité vis-à-vis des *TRs* à partir de  $Ra_{c1} = 4\pi^2$  avec un nombre d’onde  $k_{c1} = \pi$ . Pour  $\psi > 0$  (le cas des mélanges binaires), les figures IV.1 et IV.2 montrent, respectivement, l’effet désta-

---

18. On dit également des rouleaux transverses.

bilisateur de  $\psi$  (c.-à-d.  $Ra_{c1}$  diminue avec l'augmentation de  $\psi$ ) et la forte chute du nombre d'onde  $k_{c1}$  avec l'accroissement de  $\psi$  avant de s'annuler carrément à partir de la valeur  $\psi = \psi_{mono} = 0.0129$ . La dépendance du nombre d'onde  $k_{c1}$  par rapport au taux de séparation  $\psi$  n'a pas été prédite dans les références (Wang and Tan, 2008; Awad et al., 2010; Kumar and Bhadauria, 2011; Wang and Tan, 2011) dans lesquelles ces auteurs ont trouvé une valeur fixe  $k_{c1} = \pi$ . On attribue ce désaccord à la différence qui existe entre les conditions aux limites appliquées dans (Wang and Tan, 2008; Awad et al., 2010; Kumar and Bhadauria, 2011; Wang and Tan, 2011) et celles appliquées dans notre étude (cf. la section Introduction Partie B). En plus des conditions aux limites thermiques et mécaniques, on peut aussi imposer des conditions aux limites sur le champ de concentration. Dans les références (Wang and Tan, 2008; Awad et al., 2010; Kumar and Bhadauria, 2011; Wang and Tan, 2011), on suppose que la concentration est imposée aux limites et ne peut donc fluctuer au niveau de ces parois. Dans notre étude, nous considérons que seul un gradient de température est imposé et que les parois sont imperméables à la matière, ce qui implique un flux de masse nulle à travers les frontières (III.19). Dans des expériences de laboratoire avec une cavité horizontale de dimension finie, la disparition du nombre d'onde signifie que la structure convective naissante consiste donc en un écoulement monocellulaire occupant toute la cavité le long de la direction  $x$ .

L'étape suivante consiste à s'assurer que le confinement latéral de la cavité poreuse – existant forcément dans des expériences réelles en laboratoire – ne favorise

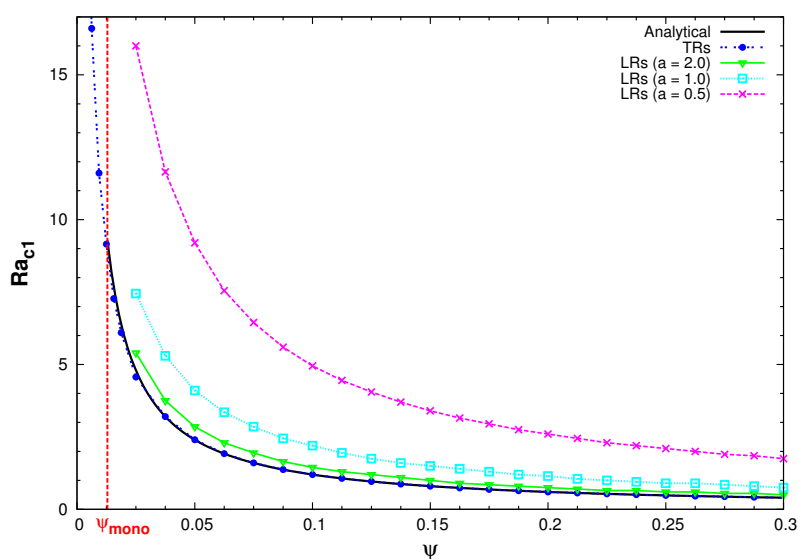


FIGURE IV.1 – Le nombre de Rayleigh critique  $Ra_{c1}$  associé à la bifurcation vers les rouleaux transversaux ( $TRs$ ) stationnaires ainsi que vers les rouleaux longitudinaux ( $LRs$ ) stationnaires, avec  $Le = 0.01$ .



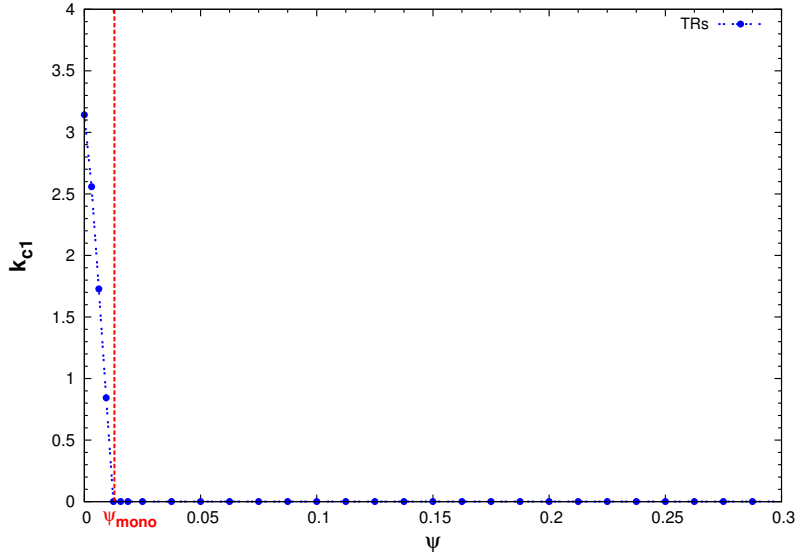


FIGURE IV.2 – Le nombre d’onde critique des  $TRs$  en fonction de  $\psi$ , avec  $Le = 0.01$ .

pas l’émergence d’un autre type de structure thermoconvective autre que l’écoulement monocellulaire (suivant l’abscisse  $x$ ) prédit par l’analyse bidimensionnelle. Par conséquent, nous étudions maintenant la stabilité de l’état de conduction vis-à-vis de rouleaux stationnaires (immobiles dans la cavité) d’axes de rotation parallèles à la direction  $x$ , des rouleaux dits longitudinaux (en anglais  $LRs$ , *Longitudinal Rolls*). Ces rouleaux longitudinaux stables sont identifiés lorsque  $k = 0$ ,  $l \neq 0$  et  $\omega_r = 0$ . La dépendance du nombre de Rayleigh critique des  $LRs$  en fonction du rapport de forme (ou rapport d’aspect) latérale “ $a$ ” pour différentes valeurs du nombre “ $l$ ” des rouleaux, est montrée dans la figure IV.3 pour une valeur de  $\psi = 0.025$  supérieure à  $\psi_{mono} = 0.0129$ . Pour fin de comparaison, nous représentons également dans la même figure le seuil des  $TRs$  stationnaires. Le seuil des structures tridimensionnelles en forme de rouleaux obliques est borné par les seuils des deux cas limites des structures stationnaires :  $TRs$  et  $LRs$ . De plus, nous constatons que le mode  $l = 1$  est le mode le plus instable parmi les modes longitudinaux ( $LRs$ ). Ce mode pour lequel  $l = 1$  correspond physiquement à un écoulement monocellulaire dans la direction  $y$ . Notons également que le confinement latéral stabilise davantage l’état de conduction à l’égard des  $LRs$  (c.-à-d. que lorsqu’on diminue la valeur de “ $a$ ”, ce qui correspond à un confinement latéral plus important, les seuils des  $LRs$  augmentent de plus en plus avec cette diminution). En conséquence, nous ne pouvons nous attendre à l’émergence de l’écoulement monocellulaire suivant la direction  $x$  que pour des valeurs modérées de “ $a$ ” (à titre d’exemple, le paramètre “ $a$ ” doit être choisi tout au plus égal à 2). Autrement dit, quand “ $a$ ” est assez grand, l’état de base peut devenir simultanément instable vis-à-vis d’un nombre infini de modes. En outre, nous avons

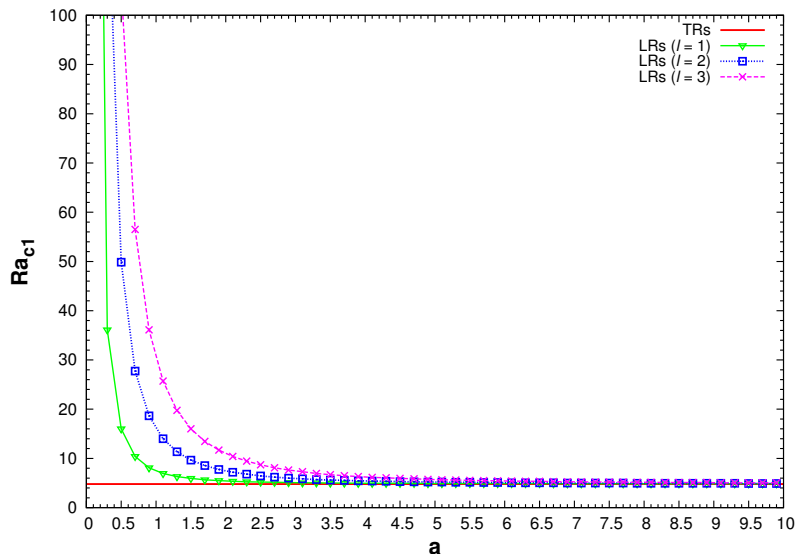


FIGURE IV.3 – Le nombre de Rayleigh critique  $Ra_{c1}$  associé à la bifurcation vers les  $LRs$  en fonction du rapport d’aspect latéral « $a$ » pour différentes valeurs du nombre « $l$ » de rouleaux, avec  $Le = 0.01$ .

vérifié que cette prédiction demeure valable pour différentes valeurs du rapport de séparation  $\psi$  plus grandes que  $\psi_{mono}$ , comme le montre clairement la figure IV.1 pour  $a = 0.5$ ,  $a = 1$  et  $a = 2$ .

Nous concluons de cette première analyse tridimensionnelle d’instabilité qu’un rapport d’aspect latéral “ $a$ ” relativement modéré (correspondant à un confinement latéral adéquat et pas très faible) sera donc nécessaire pour que le système sélectionne l’écoulement monocellulaire suivant la direction  $x$  pour les  $\psi > \psi_{mono}$ . Ainsi, ce constat et ces résultats seront d’une grande utilité lors de la conception (design) et le calcul des dimensions de la cavité, dans le but de pouvoir réaliser la séparation des composants de la manière la plus efficace comme nous le verrons plus tard.

### IV.1.2 La naissance de l’instabilité oscillatoire

Les instabilités tridimensionnelles oscillatoires sont caractérisées par des valeurs non nulles de  $k$ ,  $l$  et  $\omega_r$ . Les résolutions numériques réalisées pour de faibles valeurs du paramètre d’élasticité  $\lambda_1$  indiquent que seule une bifurcation stationnaire peut avoir lieu, une situation similaire au cas des mélanges binaires Newtoniens. Cependant, pour une élasticité de fluide suffisamment grande, le système peut éprouver une bifurcation stationnaire conduisant à un régime de convection stable et permanent (qui est un deuxième état d’équilibre que le système peut connaître) comme il peut également subir une bifurcation de Hopf conduisant à un autre régime de convection qui est un régime oscillatoire sous forme de rouleaux transversaux (i.e.

$l = 0$ ) voyageant dans le domaine de la cavité. Ce régime de convection oscillatoire découle d'une compétition entre l'effet Soret et le caractère visco-élastique du fluide. D'après les résultats présentés dans la figure IV.4 pour  $\Gamma = 0.75$  (une valeur typique des solutions de Boger),  $\varepsilon^* = 0.5$  et  $Le = 0.01$ , on peut aisément observer que la bifurcation vers l'instabilité oscillatoire peut précéder la bifurcation vers la convection stationnaire (cela vient du fait que le nombre de Rayleigh critique de l'instabilité oscillatoire se trouve inférieur à sa valeur associée à l'instabilité stationnaire). La figure IV.4 montre également que le nombre de Rayleigh critique annonçant la naissance de l'instabilité oscillatoire diminue avec l'augmentation de  $\lambda_1$ , attestant ainsi de l'effet déstabilisant de l'élasticité du fluide visco-élastique. Nous notons également que lorsqu'on augmente  $\lambda_1$ , la courbe neutre de l'instabilité de Hopf croise la courbe neutre de l'instabilité stationnaire en un point qui se déplace vers le bas et à droite dans le plan  $(\psi, Ra)$ . À partir de là, nous pourrions en conclure que l'augmentation de l'élasticité du mélange fluide a pour effet de favoriser et promouvoir la convection oscillatoire, tout en sachant que cela se produit pour des valeurs positives du rapport de séparation  $\psi$  relativement faibles.

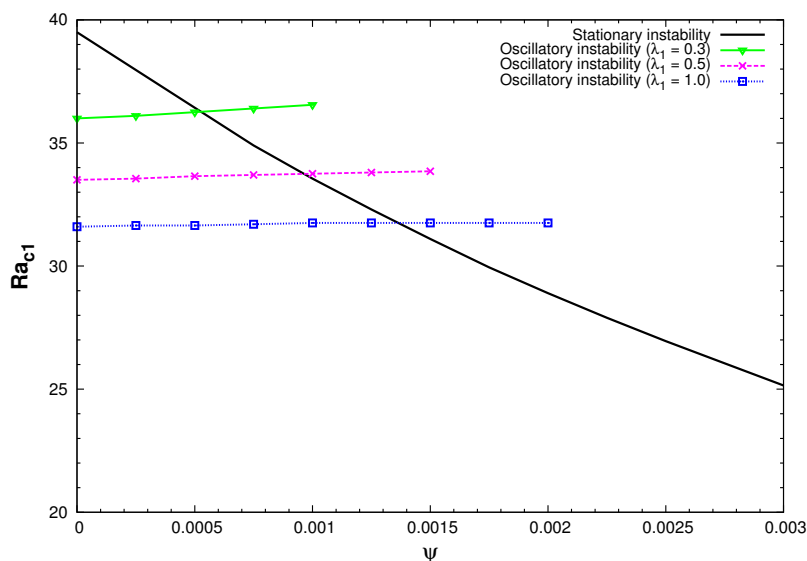


FIGURE IV.4 – Le nombre de Rayleigh critique  $Ra_{c1}$  associé à la bifurcation vers l'instabilité oscillatoire ou vers l'instabilité stationnaire en fonction de  $\psi$ , pour  $\Gamma = 0.75$  et différentes valeurs de  $\lambda_1$ , avec  $Le = 0.01$ .

Maintenant, l'effet du rapport  $\Gamma$  est illustré à la figure IV.5 pour  $\lambda_1 = 0.5$ ,  $\varepsilon^* = 0.5$  et  $Le = 0.01$ . Cette figure révèle que l'intervalle du rapport de séparation, où une bifurcation de Hopf survient avant la bifurcation stationnaire, augmente avec la diminution du paramètre  $\Gamma$ . Pour le travail qui suit dans la présente étude, il est très important de constater que pour des valeurs réalistes des paramètres visco-

élastiques, la bifurcation de Hopf peut se développer au sein de la cavité, seulement que cela ne se produit que pour de faibles valeurs positives du rapport de séparation  $\psi$  inférieures à  $\psi_{mono}$ . Autrement dit, si  $\psi > \psi_{mono}$  – selon les résultats de la section précédente IV.1.1 – la cavité poreuse sera le siège d’un écoulement monocellulaire constant qui apparaît et s’installe comme première instabilité (on dit aussi instabilité primaire). Désormais, l’étude de stabilité du deuxième état d’équilibre qui est le régime convectif monocellulaire, doit être considérée tout en tenant compte également de la question qui concerne la possibilité de séparation optimale des espèces des mélanges binaires visco-élastiques. Cette tâche fera l’objet de la section suivante.

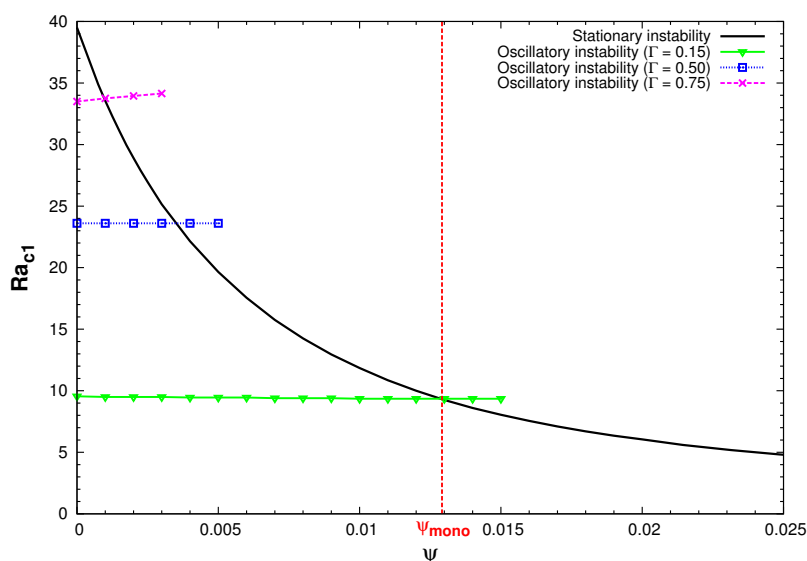


FIGURE IV.5 – Le nombre de Rayleigh critique  $Ra_{c1}$  associé à la bifurcation vers l’instabilité oscillatoire ou vers l’instabilité stationnaire en fonction de  $\psi$ , pour  $\lambda_1 = 0.5$  et différentes valeurs de  $\Gamma$ , avec  $Le = 0.01$ .

## IV.2 L’instabilité secondaire : la perte de stabilité de l’écoulement monocellulaire

D’après l’analyse de stabilité linéaire exposée précédemment, nous avons trouvé que – dans le cas de l’instabilité primaire – seulement une bifurcation stationnaire se produit en donnant naissance à une structure convective sous la forme d’un écoulement monocellulaire, et ce quel que soit le comportement du fluide qu’il soit visco-élastique ou Newtonien à condition que  $\psi > \psi_{mono}$ . En prenant une cavité de très faible épaisseur (très mince en largeur) et de très grande longueur  $A \gg 1$  et en s’appuyant sur l’approximation de l’écoulement parallèle, [Elhajjar et al. \(2008\)](#) ont montré que la solution analytique pour l’écoulement monocellulaire consiste en :

- une vitesse horizontale antisymétrique avec une moyenne nulle sur toute section verticale,

$$\mathbf{V}_0 = (Ra\ m\ \psi(1/2 - z))\mathbf{e}_x \quad (\text{IV.3})$$

- une stratification thermique verticale,

$$T_0 = 1 - z \quad (\text{IV.4})$$

- et une stratification verticale et horizontale de concentration,

$$\begin{aligned} C_0 = mx + (m^2\ Ra\ Le^{-1}\ \psi(3z^2 - 2z^3))/12 - z \\ - (m^2\ Ra\ Le^{-1}\ \psi)/24 + (1 - mA)/2 \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

avec :

$$m = \pm \sqrt{(10Le^{-1}\ Ra\ \psi - 120)/(Le^{-1}\ Ra\ \psi)} \quad (\text{IV.6})$$

où  $m$  est négatif ou positif selon que l'écoulement est dans le sens de rotation horaire ou anti-horaire et les deux solutions sont possibles en dépendant des conditions initiales de l'expérience. La séparation  $S$  est définie comme étant la différence des fractions massiques de l'espèce la plus dense (la plus lourde) entre les deux extrémités gauche et droite de la cellule  $S = mA$ , de sorte que la condition qu'il faut vérifier pour que la séparation soit maximale a été obtenue pour :  $Ra_{opt} = 24\ Le/\psi$ . Comme les paramètres visco-élastiques ( $\lambda_1$  et  $\Gamma$ ) dans l'équation (III.16) apparaissent uniquement dans les termes transitoires (i.e. dans les termes où figure la dérivée partielle temporelle), l'état stationnaire donné ci-dessus représente donc une autre solution de base (en plus de l'état de conduction) du problème visco-élastique étudié, et nous allons dès à présent étudier la stabilité linéaire de ce second état de base.

Les équations régissant le problème de stabilité forment le système (III.31)-(III.34) où nous substituons  $T_0$ ,  $C_0$  et  $U_0$  par leurs expressions explicites (IV.3)-(IV.5). Le problème de stabilité linéaire obtenu est ensuite résolu au moyen de la méthode de Galerkin, en utilisant les développements (III.35) portés à l'ordre  $M = 19$ . En outre, pour tous les résultats présentés ici, les paramètres suivants ont été maintenus fixes :  $Le = 0.01$  et  $\varepsilon^* = 0.5$ .

Nous admettons d'abord que l'instabilité secondaire est une instabilité bidimensionnelle ( $l = 0$ ). La première partie de cette section sera donc consacrée pour obtenir les propriétés linéaires des perturbations dont la structure est organisée sous forme de rouleaux avec des axes orthogonaux à la direction de l'écoulement monocellulaire ( $TRs$ ). Pour la gamme des paramètres étudiés dans la présente analyse d'instabilité secondaire, le système éprouve toujours une transition *via* une bifurcation de

Hopf conduisant aux  $TRs$ . Les figures IV.6-IV.8 présentent successivement le seuil  $Ra_{c2}$  de l'instabilité secondaire, le nombre d'onde critique correspondant  $k_{c2}$  et la fréquence critique  $\omega_{c2}$ , en fonction du rapport de séparation  $\psi$  ( $\geq \psi_{mono}$ ), et ce pour un  $\lambda_1$  fixe et différentes valeurs de  $\Gamma$ . Pour fin de comparaison, le cas des mélanges binaires Newtoniens ( $\Gamma = 1$ ) est également représenté dans la figure IV.6, ainsi que la courbe correspondant à la séparation optimale  $Ra_{opt}$  (courbe en trait plein dénuée de symboles). La zone ombrée correspond à l'état de conduction. En inspectant les figures IV.6-IV.8, quelques conclusions peuvent être tirées :

- (i) L'augmentation de  $\Gamma$  tend à stabiliser le système comme cela a déjà été mis en évidence par de précédents travaux dont les chercheurs se sont intéressés à l'étude de stabilité des fluides visco-élastiques d'Oldroyd-B dans des milieux poreux (Hirata and Quarzazi, 2010).
- (ii) Pour des solutions de polymères très diluées pour lesquelles les valeurs du rapport  $\Gamma$  sont proches de 1 ( $\Gamma = 0.9$  dans les figures), le comportement de  $Ra_{c2}$ ,  $k_{c2}$  et  $\omega_{c2}$  est presque identique à ce qui est observé pour les mélanges binaires Newtoniens. Les paramètres visco-élastiques n'influencent pas qualitativement les propriétés linéaires de l'instabilité secondaire. Nous allons donc appeler ce mode de convection *mode thermodiffusif* qui se développe dans un régime où les propriétés des fluides binaires sont dominantes. D'autre part, nous notons que  $Ra_{c2}$  diminue avec  $\psi$ , ce qui signifie que la thermodiffusion déstabilise

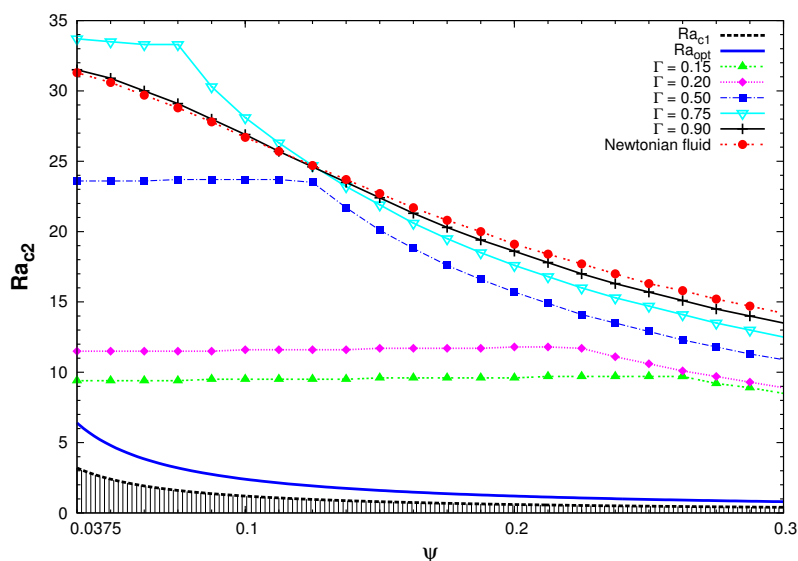


FIGURE IV.6 – Le nombre de Rayleigh critique de l'instabilité secondaire  $Ra_{c2}$  associé à la bifurcation vers les  $TRs$  oscillatoires en fonction de  $\psi$  pour  $\lambda_1 = 0.5$  et différentes valeurs de  $\Gamma$ , avec  $Le = 0.01$ . La courbe continue sans symboles représente le nombre de Rayleigh  $Ra_{opt}$  correspondant à la séparation optimale.

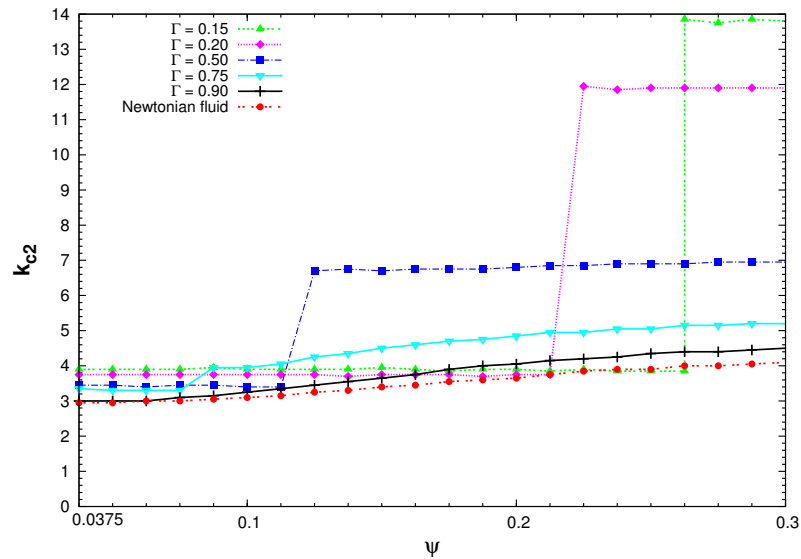


FIGURE IV.7 – Les nombres d’ondes correspondant au seuil critique  $Ra_{c2}$  de la figure IV.6. Les faibles nombres d’ondes correspondent à un régime où les effets visco-élastiques sont dominants (i.e mode élastique), tandis que les nombres d’ondes élevés correspondent à un régime où l’effet Soret est dominant (i.e. régime thermodiffusif).

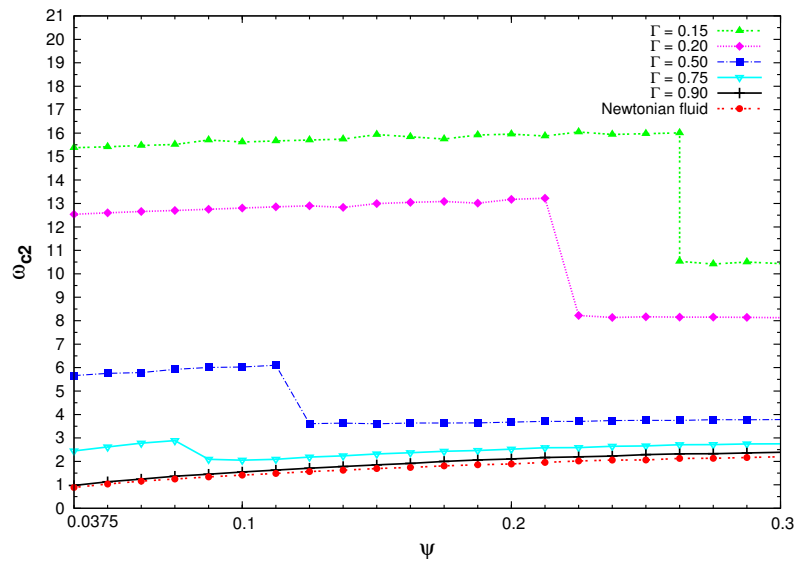


FIGURE IV.8 – Les fréquences d’oscillations correspondant au seuil critique  $Ra_{c2}$  de la figure IV.6. Les hautes fréquences d’oscillation correspondent à un régime où les effets visco-élastiques sont dominants (i.e mode élastique), tandis que les basses fréquences d’oscillation correspondent à un régime où l’effet Soret est dominant (i.e. régime thermodiffusif).

l'écoulement monocellulaire.

- (iii) Lorsque le rapport  $\Gamma$  est passé de  $\Gamma = 0.9$  à  $\Gamma = 0.75$ , deux régimes de convection sont identifiés. En plus du régime dans lequel le mode thermodiffusif est dominant à  $\psi$  relativement grand, un deuxième régime instable s'installe pour des valeurs inférieures de  $\psi$  où le nombre de Rayleigh critique  $Ra_{c2}$  montre peu de dépendance à l'égard de  $\psi$ , ce qui indique que la thermodiffusion joue un rôle secondaire comparé au rôle que joue la contribution élastique. Nous ferons référence à ce mode comme étant le *mode élastique*, qui se caractérise par de petits nombres d'ondes (i.e. des cellules de convection de grandes longueurs d'ondes) et de hautes fréquences d'oscillations, comme représenté dans les figures IV.7 et IV.8 respectivement. Au fur et à mesure que le rapport de séparation augmente, la thermodiffusion commence à jouer un rôle important : le *mode thermodiffusif* avec des nombres d'ondes plus élevés et des fréquences plus petites, domine dans ce cas. Nous notons également, en regardant la figure IV.6, qu'en diminuant  $\Gamma$ , le *mode élastique* va dominer la dynamique linéaire dans un intervalle plus grand de  $\psi$ .
- (iv) Enfin, on remarque que la courbe de  $Ra_{opt}$  est située sous la courbe de la bifurcation secondaire (i.e. la courbe de transition de l'écoulement monocellulaire vers les *TRs* oscillatoires), en nous assurant ainsi qu'une séparation optimale est également possible dans des liquides visco-élastiques allant des solutions diluées aux solutions très concentrées.

Afin d'élucider complètement le phénomène de transition (ou switch) entre les deux modes de convection observés, on a tracé des courbes typiques de stabilité marginale qui donnent le nombre de Rayleigh en fonction du nombre d'onde, pour un nombre croissant du rapport de séparation  $\psi$ . La figure IV.9 montre  $Ra(k)$  pour  $\lambda_1 = 0.5$  et  $\Gamma = 0.2$ , pour différentes valeurs de  $\psi$  près de la transition. Deux minima peuvent être observés dans les courbes, correspondant aux deux modes différents de convection. Pour les petites valeurs de  $\psi$ , le minimum global se trouve dans la région du petit nombre d'onde, et les structures de convection se caractérisent donc par des cellules de grandes longueurs d'ondes : le mode élastique domine (car c'est lui le mode le plus critique dans cette situation). Quand  $\psi$  augmente, le deuxième minima local diminue, alors que le premier reste pratiquement inchangé. Un phénomène de bistabilité est observé pour  $\psi = 0.2375$  et les deux modes de convection peuvent se développer simultanément. En augmentant  $\psi$  au-dessus de  $\psi = 0.2375$ , le deuxième minima local devient le minima global. Par la suite, ce minima global se trouve dans la région du grand nombre d'onde, et le mode thermodiffusif devient le plus critique (i.e. le mode dominant) : la convection est alors caractérisée par des cellules



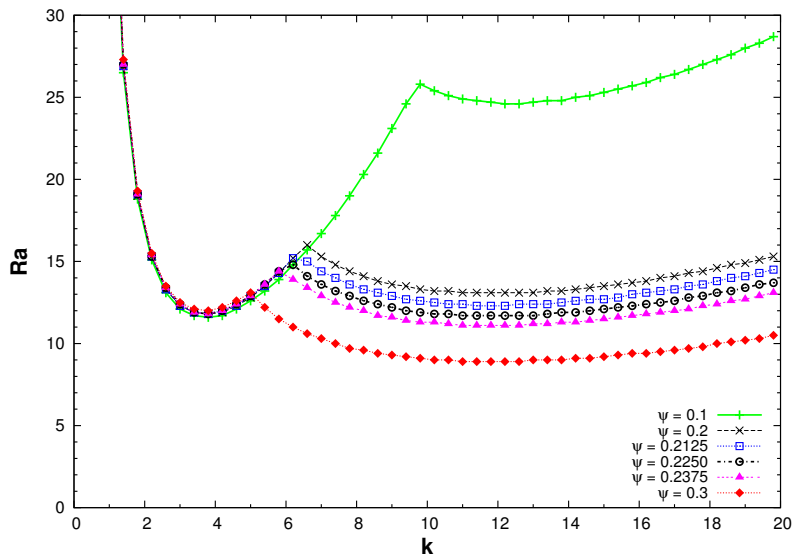


FIGURE IV.9 – Les courbes de stabilité marginale dans le plan  $(k, Ra)$  pour la bifurcation secondaire de l'écoulement monocellulaire vers les  $TRs$  oscillatoires ; les paramètres sont  $\lambda_1 = 0.5$  et  $\Gamma = 0.2$ ,  $Le = 0.01$  et différentes valeurs du rapport de séparation  $\psi$ .

thermoconvectives de petites longueurs d'ondes.

Nous présentons maintenant les résultats de l'influence du paramètre d'élasticité  $\lambda_1$  sur le seuil  $Ra_{c2}$  d'apparition des  $TRs$  oscillatoires et les conséquences sur le procédé de séparation. La figure IV.10 montre que l'augmentation de  $\lambda_1$  précipite le système pour transiter, *via* la bifurcation secondaire, de l'écoulement monocellulaire vers les  $TRs$  oscillatoires. Le caractère déstabilisant du paramètre d'élasticité  $\lambda_1$  illustré par la figure IV.10 est en accord avec les résultats précédents pour des fluides d'Oldroyd-B en milieux poreux (Hirata and Quarzazi, 2010). Notez que pour des solutions diluées avec  $\Gamma = 0.75$ , l'écoulement monocellulaire reste stable vis-à-vis des  $TRs$  oscillatoires même pour  $\lambda_1 = 1$ , et qui est un nombre d'élasticité assez grand. En conséquence, la séparation optimale est également possible pour de tels mélanges visco-élastiques en combinant la thermodiffusion et la convection.

Enfin, nous présentons dans la deuxième partie de cette section, les résultats de l'instabilité secondaire dans le cas où les perturbations sont supposées sous forme de rouleaux longitudinaux dont les axes de rotation sont parallèles à la direction de l'écoulement monocellulaire ( $LRs$ ). Pour des raisons de brièveté, nous illustrons l'effet du rapport d'aspect latéral «  $a$  » sur la sélection de la structure thermoconvective pour  $\psi = 0.2$  et  $\lambda_1 = 0.5$  et ce pour différentes valeurs du paramètre  $\Gamma$ . La figure IV.11 rassemble les principaux résultats et illustre la dépendance du seuil  $Ra_{c2}$  des  $LRs$  en fonction du paramètre  $\Gamma$ , pour  $a = 0.4$ ,  $a = 1$  et  $a = 2$ . A titre de comparaison, nous traçons aussi le nombre de Rayleigh critique  $Ra_{c2}$  correspondant aux  $TRs$

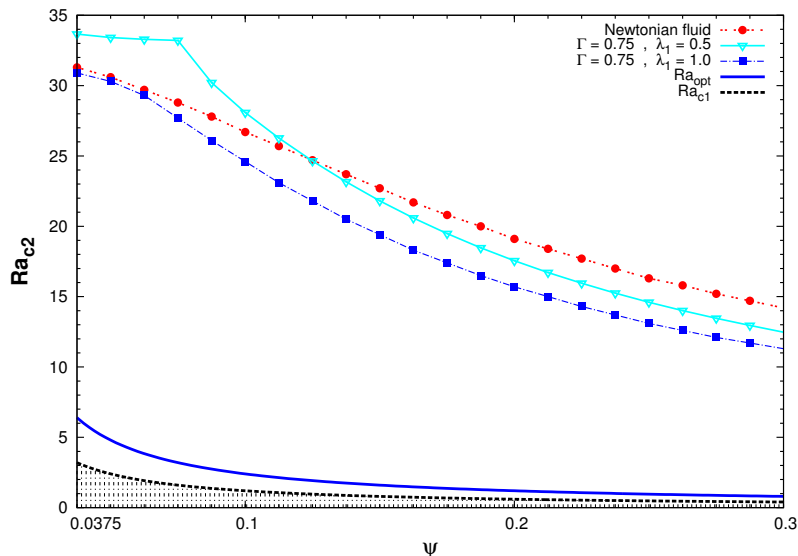


FIGURE IV.10 – Le nombre de Rayleigh critique de l’instabilité secondaire  $Ra_{c2}$  associé à la bifurcation vers les  $TRs$  oscillatoires en fonction de  $\psi$  pour  $\Gamma = 0.75$  et différentes valeurs de  $\lambda_1$ , avec  $Le = 0.01$ . La courbe continue sans symboles représente le nombre de Rayleigh  $Ra_{opt}$  correspondant à la séparation optimale.

oscillatoires. Bien que le travail actuel se concentre sur le cas des mélanges binaires visco-élastiques, un examen des résultats de l’analyse bidimensionnelle linéaire de stabilité et de son extension à l’analyse tridimensionnelle dans le cas des mélanges binaires Newtoniens est très utile pour comprendre l’effet du rapport d’aspect latéral «  $a$  » sur la sélection du mode le plus instable. Par conséquent, nous discutons d’abord les résultats obtenus associés au cas limite des fluides Newtoniens ( $\Gamma = 1$ ). D’après la figure IV.11, nous pouvons voir que pour  $\Gamma = 1$ , le nombre de Rayleigh critique de l’instabilité bidimensionnelle ( $TRs$ ) est  $Ra_{c2} = 19$ , une valeur qui a été obtenue auparavant par Elhajjar et al. (2008) pour  $\psi = 0.2$ ,  $Le = 0.01$  et  $\varepsilon^* = 0.5$ . Pour un grand confinement latéral  $a = 0.4$  (et qui est une tâche toutefois difficile à réaliser expérimentalement dans une cavité poreuse à cause de la présence de la matrice solide), le mode le plus instable consiste, en effet, en une structure convective bidimensionnelle. Mais comme «  $a$  » est augmentée successivement à  $a = 1$  puis à  $a = 2$ , l’instabilité secondaire prend la forme de  $LRs$  stationnaires (fixes dans le domaine) parce que leurs seuils correspondants sont à moins de  $Ra_{c2} = 19$  qui est le seuil des  $TRs$ .

À présent, dans le cas des mélanges binaires visco-élastiques, nous remarquons d’après la même figure IV.11 que pour  $a = 0.4$ , le seuil des  $LRs$  stationnaires se situe toujours au-dessus du seuil d’apparition des  $TRs$  oscillatoires et ce pour toutes les valeurs du paramètre  $\Gamma$ . Nous avons vérifié que le seuil correspondant aux instabilités tridimensionnelles en forme de rouleaux obliques ( $ORs$ , Oblique Rolls

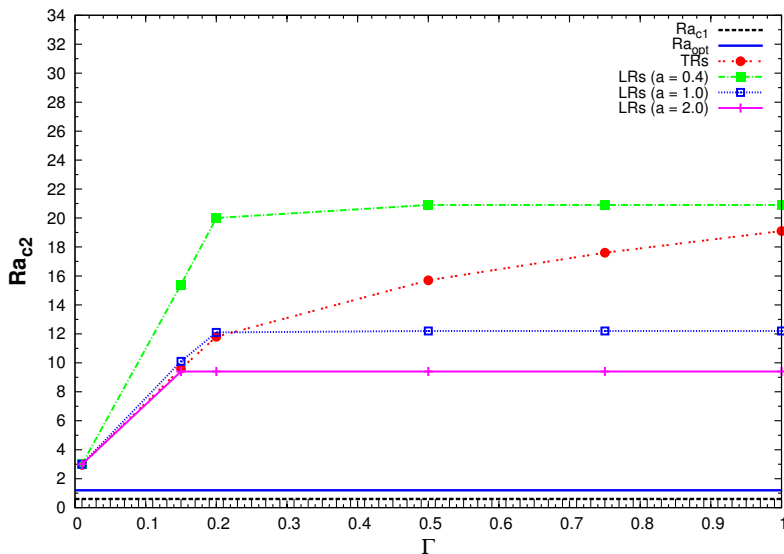


FIGURE IV.11 – L’influence du confinement latéral «  $a$  » sur le nombre de Rayleigh critique de l’instabilité secondaire  $Ra_{c2}$  associé à la bifurcation vers les  $TRs$  oscillatoires ou vers les  $LRs$  stationnaires en fonction de  $\Gamma$  pour  $\lambda_1 = 0.5$  et  $\psi = 0.2$ , avec  $Le = 0.01$ .

en anglais) se trouve toujours compris et borné entre les seuils des  $TRs$  oscillatoires et des  $LRs$  stationnaires. Ce résultat est conforme à ce qui est généralement admis qu’il est toujours possible d’éliminer à la fois les rouleaux obliques et les  $LRs$  en confinant suffisamment la couche poreuse dans la direction  $y$  avec des parois latérales imperméables et isolantes. Cette situation change lorsque le rapport d’aspect latéral du milieu est porté à  $a = 1$  et  $a = 2$ . Pour  $a = 1$ , il existe une valeur critique de  $\Gamma$  en dessous de laquelle les  $TRs$  oscillatoires deviennent instables en premier ; alors que pour  $\Gamma$  supérieur à cette valeur critique, les perturbations les plus instables sont les perturbations en forme de rouleaux longitudinaux ( $LRs$ ). Pour  $a = 2$ , le système ne connaît pas ce type de transition et le mode le plus instable, pour cette valeur de  $a$ , correspond toujours aux  $LRs$  stationnaires. Il est très intéressant de noter que dans tous les cas présentés par la figure IV.11, le nombre de Rayleigh critique de l’instabilité secondaire demeure au-dessus du nombre de Rayleigh  $Ra_{opt}$  associé à la séparation optimale des espèces du mélange visco-élastique (N.B. : il en va de même pour les mélanges Newtoniens).

## Conclusion de la 2<sup>ème</sup> partie

Dans cette deuxième partie de thèse, nous avons étudié – moyennant une méthode numérique de Galerkin – la stabilité de mélanges binaires visco-élastiques dans une cavité poreuse chauffée uniformément par le bas et refroidie uniformément par le haut. En vertu de l’effet Soret, la présence d’un gradient de température vertical génère un gradient vertical de concentration. Le nombre sans dimension  $\psi$  est alors introduit et qui représente le rapport entre la contribution de la diffusion massique et la contribution de la chaleur aux forces de flottabilité. Dans ce travail, l’étude s’est focalisée sur les rapports de séparation  $\psi$  positifs. Ainsi, le composant le plus léger du mélange binaire est déplacé vers la plaque inférieure, déstabilisant davantage le système. Des perturbations tridimensionnelles sont prises en compte afin d’étudier la stabilité de la solution de base purement conductive. Les résultats indiquent que si le confinement latéral de la couche poreuse est assez faible, une dégénérescence est observée de sorte que les rouleaux transversaux, obliques ou longitudinaux deviennent simultanément instables. En revanche, un rapport d’aspect latéral modéré dans une expérience réaliste de laboratoire sélectionne au seuil critique de l’instabilité plutôt les rouleaux transversaux que les rouleaux obliques ou les rouleaux longitudinaux. En fonction de l’élasticité du mélange et de  $\psi$ , ces rouleaux transversaux les plus amplifiés peuvent avoir un comportement oscillatoire ou stationnaire. Pour de faibles valeurs positives de  $\psi$  et pour des fluides suffisamment élastiques, l’instabilité primaire se comporte de manière oscillatoire dans le temps. Autrement, la première bifurcation donne naissance à des rouleaux transversaux stationnaires, analogue à ce qui est observé en fluides Newtoniens. Dans ce cas, il est bien connu que le nombre d’onde critique s’annule lorsque  $\psi$  dépasse une valeur particulière  $\psi_{mono}$ , indiquant de ce fait que l’instabilité primaire est structurée sous forme d’un écoulement monocellulaire. En utilisant l’approximation de l’écoulement parallèle, on détermine les caractéristiques de la solution non linéaire de l’écoulement monocellulaire. On montre notamment que cet écoulement monocellulaire est accompagné d’une stratification horizontale de la concentration. Cette configuration permet alors d’envisager la possibilité d’opérer une séparation des espèces du mélange entre les

deux extrémités de la cellule. L'optimum de la séparation est obtenu pour une valeur particulière du nombre de Rayleigh désignée par  $Ra_{opt}$ .

Nous avons ensuite mené une étude de stabilité de la solution non linéaire que constitue l'écoulement monocellulaire. L'influence combinée des paramètres visco-élastiques et du rapport de séparation  $\psi$  a révélé l'existence de deux régimes distincts. Lorsque la visco-élasticité domine les effets de thermodiffusion, une bifurcation de Hopf se produit donnant naissance à des structures convectives caractérisées par des nombres d'ondes modérés et des fréquences d'oscillation élevées. En revanche, lorsque l'effet Soret l'emporte sur le caractère élastique du fluide, la bifurcation de Hopf donne naissance à des motifs convectifs avec des nombres d'ondes élevés (i.e. des cellules convectives présentant de très courtes longueurs d'ondes) et des fréquences d'oscillation relativement faibles. Le passage d'un mode à l'autre, au voisinage du point de bifurcation de codimension-deux a été mis en évidence et expliqué en explorant les courbes neutres de stabilité dans le plan (nombre d'onde, Rayleigh).

Les seuils de transition de l'écoulement parallèle (un écoulement favorisant la séparation des espèces) à un écoulement secondaire multicellulaire ont été déterminés pour les différents paramètres du problème. Les résultats obtenus montrent que ces seuils de déstabilisation demeurent supérieurs à la valeur du nombre de Rayleigh  $Ra_{opt}$  correspondant à une séparation optimum. Nous concluons donc que la séparation optimale des espèces est également possible en combinant la thermodiffusion et la convection pour des solutions binaires visco-élastiques.

# Perspectives

La transition d'une instabilité convective à une instabilité absolue dans la configuration d'un écoulement de Rayleigh-Bénard-Poiseuille de fluides visco-élastiques a été déterminée en supposant que les structures de convection mixte sont des rouleaux transversaux. L'extension de cette étude à des structures tridimensionnelles, à savoir des rouleaux obliques ou longitudinaux reste une perspective intéressante. Lorsque le fluide est Newtonien, il a été démontré dans la littérature, que ce genre de structures tridimensionnelles demeurent convectivement instables et n'expérimentent aucune transition à une instabilité absolue quelque soit la valeur non nulle du nombre de Reynolds. La question qui se pose est de savoir si ce résultat important pour les fluides Newtoniens reste valable et n'est pas affecté par le caractère visco-élastique du fluide. Une étude de stabilité spatio-temporelle tridimensionnelle est alors nécessaire pour répondre à cette question. Cette étude sera entreprise en étendant la procédure de résolution 2D basée sur le développement de Galerkin. Cette méthode est puissante à la fois lorsqu'on veut identifier les points de pincement des branches spatiales dans le cas tridimensionnel ou utiliser le critère de la nullité de la vitesse de groupe.

Par ailleurs, il est admis que le critère linéaire associé à la transition instable convectif/absolu est pertinent si et seulement si la bifurcation d'un état de conduction à un régime de convection est supercritique. Il est alors primordial d'étudier le problème non linéaire et de déterminer la nature supercritique ou sous-critique de la bifurcation. Dans cette perspective, un calcul analytique de la solution non linéaire du système est généralement impossible. Pour rendre compte du rôle des non linéarités, une alternative à la simulation numérique directe est possible. Elle consiste à chercher un développement de la solution non linéaire suffisamment près du seuil d'apparition des structures convectives. L'utilisation de méthodes asymptotiques appropriées permet d'obtenir une équation modèle relativement simple par rapport aux équations d'origine, souvent référée dans la littérature "équation de Ginzburg-Landau". Les non linéarités dominantes qui apparaissent dans cette équation régissant l'évolution de l'amplitude de l'instabilité dépendent du caractère supercritique

ou sous-critique de la bifurcation. La détermination des coefficients associés à l'équation de Ginzburg-Landau, permet aussi d'évaluer le transfert de chaleur à travers l'estimation du nombre de Nusselt.

Lorsque le système opère loin des conditions critiques de l'émergence de structures convectives, la simulation numérique directe est alors complètement nécessaire. Les objectifs recherchés des essais numériques seront :

- Identifier les solutions non linéaires du problème en fonction des paramètres visco-élastiques, en plus du nombre de Rayleigh, du nombre de Reynolds et de nombre de Prandtl.
- Discuter la loi d'échelle d'établissement des structures saturées de convection mixte.
- Comparer les fréquences d'oscillations, les nombres d'onde ainsi que les vitesses de propagation du mode global avec la théorie linéaire d'instabilité absolue.
- Estimer le transfert de chaleur global et le comparer à celui obtenu grâce à l'équation de Ginzburg-Landau.

Concernant les perspectives liées à la deuxième partie de cette thèse, des simulations numériques directes sont à envisager afin d'évaluer l'influence d'un rapport de forme transversal modéré de la cavité poreuse sur les caractéristiques de la transition d'un régime monocellulaire à un régime multicellulaire. En effet, l'approximation d'écoulement parallèle qui a permis la résolution analytique du problème non linéaire est totalement justifiée pour des rapports de forme de la cavité très grands, alors qu'elle est à écarter lorsque ceux-ci deviennent modérés voire petits.

## Annexe A

# Contraintes de perturbation du problème bidimensionnel (cas des $TRs$ )

Les contraintes de perturbation du cas 2D sont données par :

$$\begin{aligned}
 \tau_n^{(1,1)} &= \left[ \frac{2 \lambda_1 D u_b}{1 + \lambda_1 i k u_b - i \omega \lambda_1} \right] \tau_n^{(1,3)} & (A.1) \\
 &+ \left[ \frac{(2 \lambda_1 D u_b)(1 - 2 \Gamma) D + 4 \lambda_1^2 (1 - \Gamma) i k (D u_b)^2 + 2 i k}{1 + \lambda_1 i k u_b - i \omega \lambda_1} \right] u_n \\
 &+ \left[ \frac{2 \lambda_1 \Gamma \omega k - 2 \lambda_1 \Gamma k^2 u_b}{1 + \lambda_1 i k u_b - i \omega \lambda_1} \right] u_n \\
 &+ \left[ \frac{-4 \lambda_1^2 (1 - \Gamma) D u_b D^2 u_b - 2 \lambda_1 \Gamma i k D u_b}{1 + \lambda_1 i k u_b - i \omega \lambda_1} \right] u_n,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_n^{(1,3)} &= \left[ \frac{\lambda_1 D u_b}{1 + \lambda_1 i k u_b - i \omega \lambda_1} \right] \tau_n^{(3,3)} & (A.2) \\
 &+ \left[ \frac{D + (\lambda_1 \Gamma)(i k u_b - i \omega) D + \lambda_1 (1 - \Gamma) i k D u_b}{1 + \lambda_1 i k u_b - i \omega \lambda_1} \right] u_n \\
 &+ \left[ \frac{(\lambda_1 D u_b)(1 - 3 \Gamma) D + 2 \lambda_1^2 (1 - \Gamma) i k (D u_b)^2 + i k}{1 + \lambda_1 i k u_b - i \omega \lambda_1} \right] u_n \\
 &+ \left[ \frac{\lambda_1 \Gamma \omega k - \lambda_1 \Gamma k^2 u_b - \lambda_1 (1 - \Gamma) D^2 u_b}{1 + \lambda_1 i k u_b - i \omega \lambda_1} \right] u_n,
 \end{aligned}$$

$$\tau_n^{(3,3)} = \left[ \frac{2 D + (2 \lambda_1 \Gamma)(i k u_b - i \omega) D + 2 \lambda_1 (1 - \Gamma) i k D u_b}{1 + \lambda_1 i k u_b - i \omega \lambda_1} \right] u_n, \quad (A.3)$$

où la vitesse de l'état de base est donnée par :  $u_b = PrRe(1 - 4z^2)$ .



## Annexe B

# L'équation de dispersion approximative (méthode de Galerkin d'ordre-1)

L'équation de dispersion provenant de la troncature de Galerkin d'ordre-1 s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} & \frac{256 i k^2 Ra}{525525} \left[ 320 k_x^3 Re^3 Pr^3 \lambda_1^3 - 1040 i k_x^2 Re^2 Pr^2 \lambda_1^2 (1 - i \omega \lambda_1) \right. \\ & \left. - 1144 k_x Re Pr \lambda_1 (1 - i \omega \lambda_1)^2 + 429 i (1 - i \omega \lambda_1)^3 \right] \\ & + \frac{128}{765765 Pr} \left( \frac{16}{3} + \frac{8}{15} k^2 + \frac{16}{35} i k_x Re Pr - \frac{8}{15} i \omega \right) \\ & \times \left[ 4352 k_x^4 Re^4 (k^2 + 30) Pr^5 (\Gamma - 1) \lambda_1^4 - 2431 (k^2 + 12) (1 - i \omega \lambda_1)^3 i \omega \right. \\ & + 221 Pr (1 - i \omega \lambda_1)^2 (10 i k^2 k_x Re (1 - 4 i \omega \lambda_1) + 44 i k_x Re (1 - 10 i \omega \lambda_1) \\ & + 5544 (1 - i \omega \lambda_1 \Gamma) + 264 k^2 (1 - i \omega \lambda_1 \Gamma) + 11 k^4 (1 - i \omega \lambda_1 \Gamma)) \\ & + 34 i k_x Re Pr^2 \lambda_1 (1 - i \omega \lambda_1) (312 i k_x Re (3 - 11 i \omega \lambda_1) \\ & + 180 i k^2 k_x Re (1 - 2 i \omega \lambda_1) + (30888 + 1716 k^2 + 65 k^4) (2 + \Gamma - 3 i \omega \lambda_1 \Gamma)) \\ & - 16 i k_x^3 Re^3 Pr^4 \lambda_1^3 (680 i k_x Re + 112 i k^2 k_x Re + 119 k^4 \Gamma \\ & + 340 k^2 (-1 + 2 i \omega \lambda_1 + \Gamma (11 - 2 i \omega \lambda_1)) + 5304 (-1 + 6 i \omega \lambda_1 \\ & + \Gamma (11 - 6 i \omega \lambda_1))) - 136 k_x^2 Re^2 Pr^3 \lambda_1^2 (14 i k^2 k_x Re (3 - 4 i \omega \lambda_1) \\ & + 40 i k_x Re (6 - 11 i \omega \lambda_1) + 15 k^4 (1 + 2 \Gamma - 3 i \omega \lambda_1 \Gamma) \\ & + 26 k^2 (13 + 2 i \omega \lambda_1 + 2 \omega^2 \lambda_1^2 + \Gamma (35 - 50 i \omega \lambda_1 - 2 \omega^2 \lambda_1^2))) \\ & \left. + 572 (9 + 4 \omega^2 \lambda_1^2 + \Gamma (27 - 36 i \omega \lambda_1 - 4 \omega^2 \lambda_1^2)) \right] = 0. \end{aligned} \tag{B.1}$$

# Bibliographie

- Awad, F. G., Sibanda, P., Motsa, S. S., 2010. On the linear stability analysis of a Maxwell fluid with double-diffusive convection. *Applied Mathematical Modelling* **34**, 3509–3517. [117](#), [118](#), [127](#), [136](#)
- Barthès-Biesel, D., 2010. *Microhydrodynamique et fluides complexes*. Les Éditions de l'École Polytechnique. [30](#), [33](#)
- Bird, R. B., Armstrong, R. C., Hassager, O., 1987. *Dynamics of Polymeric Liquids*. John Wiley & Sons. [28](#), [40](#), [47](#)
- Boger, D. V., Walters, K., 1993. *Rheological Phenomena in Focus*. Elsevier Science Publishers, Amsterdam. [11](#), [33](#)
- Brevdo, L., 1991. Three-dimensional absolute and convective instabilities and spatially amplifying waves in parallel shear flows. *Z. Angew. Math. Phys.* **42** (2), 911–942. [25](#), [58](#)
- Brevdo, L., 2009. Three-dimensional absolute and convective instabilities at the onset of convection in a porous medium with inclined temperature gradient and vertical throughflow. *Journal of Fluid Mechanics* **641**, 475–487. [28](#)
- Briggs, R. J., 1964. *Electron-stream interaction with plasmas*. M.I.T. Press, Cambridge. [25](#), [59](#)
- Büchel, P., Lücke, M., 2000a. Influence of through-flow on binary fluid convection. *Physical Review E* **61**, 3793. [29](#), [103](#)
- Büchel, P., Lücke, M., 2000b. Localized perturbations in binary fluid convection with and without throughflow. *Physical Review E* **63**, 01016307. [104](#)
- Carrière, P., Monkewitz, P. A., 1999. Convective versus absolute instability in mixed Rayleigh-Bénard-Poiseuille convection. *Journal of Fluid Mechanics* **384**, 243–262, United Kingdom. [13](#), [26](#), [50](#), [51](#), [62](#), [63](#), [70](#)

- Chandrasekhar, S., 1961. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Clarendon Press, Oxford. [13](#), [63](#)
- Charrier-Mojtabi, M.-C., Elhajjar, B., Mojtabi, A., 2007. Analytical and numerical stability analysis of Soret-driven convection in a horizontal porous layer. *Phys. Fluids* **19** (12), 124104. [135](#)
- Chevallier, C., 2009. *Écoulements élongationnels de solutions diluées de polymères*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, France. [11](#), [33](#)
- Clusius, K., Dickel, G., 1938. New process for separation of gas mixtures and isotopes. *Naturwiss* **26**, 546. [114](#)
- Coelho, P. M., Pinho, F. T., Oliveira, P. J., 2002. Fully developed forced convection of the Phan-Thien-Tanner fluid in ducts. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **45** (7), 1413–1423. [27](#)
- Combarous, M., Bories, S. A., 1975. Hydrothermal convection in saturated porous media. *Advances in Hydrosciences* **10**, 231–307. [26](#)
- Costesque, P., Mojtabi, A., Platten, J. K., 2011. Thermodiffusion phenomena. *C. R. Mécanique* **339** (5), 275–279. [114](#)
- de B. Alves, L. S., Kelly, R. E., Karagozian, A. R., 2008. Transverse Jet Shear Layer Instabilities. Part II : Linear Analysis for Large Jet-to-Crossflow Velocity Ratios. *Journal of Fluid Mechanics* **602**, 383–401. [52](#)
- Debye, P., Bueche, A. M., 1948. *High Polymer Physics*. Chemical Publishing Co., Brooklyn. [115](#)
- Delache, A., Ouarzazi, M. N., 2008. Weakly nonlinear interaction of mixed convection patterns in porous media heated from below. *International Journal of Thermal Sciences* **47**, 709–722. [26](#)
- Delache, A., Ouarzazi, M. N., Combarous, M., 2007. Spatio-temporal stability analysis of mixed convection flows in porous media heated from below : comparison with experiments. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **50**, 1485–1499. [26](#), [95](#)
- Diaz, E., Brevdo, L., 2011. Absolute/convective instability dichotomy at the onset of convection in a porous layer with either horizontal or vertical solutal and inclined thermal gradients, and horizontal throughflow. *Journal of Fluid Mechanics* **681**, 567–596. [28](#)

- El Moumen, A., 2014. *Prévision du comportement des matériaux hétérogènes basée sur l'homogénéisation numérique : modélisation, visualisation et étude morphologique*. Thèse de Doctorat N°41515, Université des Sciences et Technologies, Lille 1, France. [16](#), [122](#)
- Elhajjar, B., Charrier-Mojtabi, M.-C., Mojtabi, A., 2008. Separation of a binary fluid mixture in a porous horizontal cavity. *Phys. Rev. E* **77** (2), 026310. [115](#), [118](#), [129](#), [135](#), [140](#), [146](#)
- Eltayeb, I. A., 1977. Nonlinear thermal convection in an elastiviscous layer heated from below. *Proc R Soc London Ser A* **356** (1685), 161–176. [27](#), [47](#)
- Escoda, J., 2012. *Modélisation morphologique et micromécanique 3D de matériaux cimentaires*. Thèse de Doctorat. [16](#), [122](#)
- Furry, W. H., Jones, R. C., Onsager, L., 1939. On the theory of isotope separation by thermal diffusion. *Phys. Rev.* **55**, 1083–1095. [114](#)
- Grandjean, E., 2008. *Experimental Investigation into Localized Instabilities of Mixed Rayleigh-Bénard-Poiseuille Convection*. Thèse de Doctorat N°4144, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse. [11](#), [25](#)
- Grandjean, E., Monkewitz, P. A., 2009. Experimental investigation into localized instabilities of mixed Rayleigh-Bénard-Poiseuille convection. *Journal of Fluid Mechanics* **640**, 401–419. [13](#), [26](#), [62](#), [63](#), [95](#), [106](#)
- Green, III, T., 1968. Oscillating convection in an elasticoviscous liquid. *Physics of Fluids* **11** (7), 1410–1412. [27](#), [47](#)
- Hirata, S. C., Ouarzazi, M. N., 2010. Three-dimensional absolute and convective instabilities in mixed convection of a viscoelastic fluid through a porous medium. *Physics Letters, Section A : General, Atomic and Solid State Physics* **374** (26), 2661–2666. [71](#), [117](#), [127](#), [142](#), [145](#)
- Hu, J., Ben Hadid, H., Henry, D., 2007. Linear stability analysis of Poiseuille-Rayleigh-Bénard flows in binary fluids with Soret effect. *Physics of Fluids* **19**, 034101(1)–034101(17). [29](#), [87](#), [103](#)
- Hu, J., Yin, X. Y., Henry, D., Ben Hadid, H., 2009. Spatiotemporal evolution of Poiseuille-Rayleigh-Bénard flows in binary fluids with Soret effect under initial pulselike disturbances. *Physical Review E* **80**, 026312. [104](#)

- Huerre, P., Monkewitz, P. A., 1985. Absolute and convective instabilities in free shear layers. *Journal of Fluid Mechanics* **159**, 151–168. [25](#), [58](#)
- Huerre, P., Monkewitz, P. A., 1990. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annual Review of Fluid Mechanics* **22** (1), 473–537. [25](#)
- Joseph, D. D., 1990. *Fluid Dynamics of viscoelastic liquids, Chaps. 1 and 2, Appl. Math. Sci.* Vol. **84**. Springer, New York. [126](#)
- Jung, C., Lücke, M., Büchel, P., 1996. Influence of through-flow on linear pattern formation properties in binary mixture convection. *Physical Review E* **54**, 1510. [29](#), [103](#)
- Kang, J., Fu, C. J., Tan, W. C., 2011. Thermal convective instability of viscoelastic fluids in a rotating porous layer heated from below. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **166**, 93–101. [117](#), [127](#)
- Kelly, R. E., de B. Alves, L. S., 2008. A Uniformly Valid Asymptotic Solution for the Transverse Jet and its Linear Stability Analysis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences* **366**, 2729–2744. [52](#)
- Khuzhayorov, B., Auriault, J. L., Royer, P., 2000. Derivation of macroscopic filtration law for transient linear viscoelastic fluid flow in porous media. *Int. J. Eng. Sci.* **38**, 487–504. [127](#)
- Kim, M. C., Lee, S. B., Kim, S., Chung, B. J., 2003. Thermal instability of viscoelastic fluids in porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer* **46** (26), 5065–5072. [117](#), [127](#)
- Kolkka, R. W., Ierley, G. R., 1987. On the convected linear stability of a viscoelastic Oldroyd-B fluid heated from below. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **25** (2), 209–237, Amsterdam. [49](#), [51](#), [66](#)
- Kolodner, P., 1998. Oscillatory convection in viscoelastic DNA suspensions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **75** (2-3), 167–192. [27](#), [47](#), [116](#)
- Kolodner, P., Surko, C. M., Passner, A., Williams, H. L., 1987. Pulses of oscillatory convection. *Physical Review A* **36** (5), 2499–2502. [98](#)
- Krishnan, M., Ugaz, V. M., Burns, M. A., 2002. PCR in a Rayleigh-Bénard convection cell. *Science* **298** (5594), 793. [116](#)

- Kumar, A., Bhadauria, B. S., 2011. Double diffusive convection in a porous layer saturated with viscoelastic fluid using a thermal non-equilibrium model. *Phys. Fluids* **23**, 054101. [117](#), [118](#), [127](#), [136](#)
- Labrosse, G., 2003. Free convection of binary liquid with variable Soret coefficient in thermogravitational column: the steady parallel base states. *Phys. Fluids* **15** (9), 2694–2727. [115](#)
- Laroze, D., Martinez-Mardones, J., Bragard, J., Pérez-Garcia, C., 2007. Realistic rotating convection in a DNA suspension. *Physica A*. **385**, 433–438. [117](#)
- Larson, R. G., 1992. Instabilities in viscoelastic flows. *Rheologica Acta* **31** (3), 213–263. [27](#), [47](#)
- Li, Z., Khayat, R. E., 2005. Finite-amplitude Rayleigh-Bénard convection and pattern selection for viscoelastic fluids. *Journal of Fluid Mechanics* **529**, 221–251. [27](#), [28](#), [47](#), [66](#), [68](#), [69](#), [116](#)
- Lorenz, M., Emery, A. H., 1959. The packed thermal diffusion column. *Chem. Eng. Sci.* **11**, 16–23. [115](#)
- Malashetty, M. S., Biradar, B. S., 2012. Linear and nonlinear double-diffusive convection in a fluid-saturated porous layer with cross-diffusion effects. *Trans. Porous Med.* **91**, 649–675. [128](#)
- Malashetty, M. S., Swamy, M. S., 2010. The onset of double diffusive convection in a viscoelastic fluid layer. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **165**, 1129–1138. [117](#)
- Malashetty, M. S., Swamy, M. S., Sidram, W., 2010. Thermal convection in a rotating viscoelastic fluid saturated porous layer. *Int. J. Heat Mass Transfer* **53**, 5747–5756. [117](#), [127](#)
- Marcoux, M., 1998. *Contribution à l'étude de la diffusion thermogravitationnelle en milieu poreux*. Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse III, France. [19](#), [120](#), [124](#), [128](#)
- Martinand, D., Carrière, P., Monkewitz, P. A., 2006. Three-dimensional global instability modes associated with a localized hot spot in Rayleigh-Bénard-Poiseuille convection. *Journal of Fluid Mechanics* **551**, 275–301. [26](#)
- Martinez-Mardones, J., Perez-Garcia, C., 1990. Linear instability in viscoelastic fluid convection. *Journal of Physics: Condensed Matter* **2** (5), 1281–1290. [27](#), [47](#), [68](#)

- Martinez-Mardones, J., Perez-Garcia, C., 1992. Bifurcation analysis and amplitude equations for viscoelastic convective fluids. *Il Nuovo Cimento D* **14** (9), 961–975. [27](#), [47](#)
- Martinez-Mardones, J., Tiemann, R., Walgraef, D., 2000. Thermal convection thresholds in viscoelastic solutions. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **93**, 1–15. [117](#)
- Martinez-Mardones, J., Tiemann, R., Walgraef, D., Zeller, W., 1996. Amplitude equations and pattern selection in viscoelastic convection. *Physical Review E* **54** (2), 1478–1488. [27](#), [47](#), [69](#)
- Mokarizadeh, H., Asgharian, M., Raisi, A., 2013. Heat transfer in Couette-Poiseuille flow between parallel plates of the Giesekus viscoelastic fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **196**, 95–101. [27](#)
- Müller, H. W., Lücke, M., Kamps, M., 1992. Transversal convection patterns in horizontal shear flow. *Physical Review A* **45** (6), 3714–3726. [26](#), [50](#)
- Nasrabadi, H., Hoteit, H., Firoozabadi, A., 2007. An analysis of species separation in a thermogravitational column filled with a porous medium. *Transp. Porous Media* **67** (3), 473–486. [115](#)
- Nicolas, X., 2002. Bibliographical review on the Poiseuille-Rayleigh-Bénard flows: The mixed convection flows in horizontal rectangular ducts heated from below. *International Journal of Thermal Sciences* **41** (10), 961–1016. [24](#), [25](#)
- Nicolas, X., Luijks, J. M., Platten, J. K., 2000. Linear stability of mixed convection flows in horizontal rectangular channels of finite transversal extension heated from below. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **43**, 589–610. [71](#)
- Nicolas, X., Mojtabi, A., Platten, J. K., 1997. Two-dimensional numerical analysis of the Poiseuille-Bénard flow in a rectangular channel heated from below. *Physics of Fluids* **9**, 337–348. [19](#), [26](#), [62](#), [63](#), [64](#)
- Niu, J., Fu, C. J., Tan, W. C., 2010. Thermal convection of a viscoelastic fluid in an open-top porous layer heated from below. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **165**, 203–211. [117](#), [127](#)
- Nouar, C., Benaouda-Zouaoui, B., Desaubry, C., 2000. Laminar mixed convection in a horizontal annular duct. case of thermodependent non-Newtonian fluid. *European Journal of Mechanics, B/Fluids* **19** (3), 423–452. [27](#)

- Oldroyd, J. G., Feb 1950. On the Formulation of Rheological Equations of State. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **200** (1063), 523–541. [39](#), [40](#)
- Ouarzazi, M. N., Mejni, F., Delache, A., Labrosse, G., 2008. Nonlinear global modes in inhomogeneous mixed convection flows in porous media. *Journal of Fluid Mechanics* **595**, 367–377. [26](#)
- Ouazzani, M. T., Platten, J. K., Mojtabi, A., 1990. Experimental study of mixed convection between two horizontal plates at different temperatures - II. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **33**, 1417–1427. [19](#), [63](#), [64](#)
- Owens, R. G., Phillips, T. N., 2002. *Computational Rheology*. Imperial College Press. [41](#)
- Park, H. M., Lee, H. S., 1996. Hopf bifurcations of viscoelastic fluids heated from below. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **66** (1), 1–34. [27](#), [47](#), [116](#)
- Peixinho, J., Desaubry, C., Lebouché, M., 2008. Heat transfer of a non-newtonian fluid (carbopol aqueous solution) in transitional pipe flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **51** (1-2), 198–209. [27](#)
- Perkins, T. T., Quake, S. R., Smith, D. E., Chu, S., 1994. Relaxation of a single DNA molecule observed by optical microscopy. *Science* **264** (5160), 822–826. [16](#), [117](#)
- Platten, J. K., Bou-Ali, M. M., Dutrieux, J. F., 2003. Enhanced molecular separation in inclined thermogravitational columns. *J. Phys. Chem. B* **107** (42), 11763–11767. [115](#)
- Poole, R. J., Alves, M. A., Oliveira, P. J., Oct 2007. Purely Elastic Flow Asymmetries. *Physical Review Letters* **99** (16), 164503. [41](#)
- Rosenblat, S., 1986. Thermal convection in a viscoelastic liquid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **21** (2), 201–223. [27](#), [47](#)
- Sheela-Francisca, J., Tso, C. P., Hung, Y. M., Rilling, D., 2012. Heat transfer on asymmetric thermal viscous dissipative Couette-Poiseuille flow of pseudo-plastic fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **169-170**, 42–53. [27](#)
- Skartsis, L., Khomami, B., Kardos, J. L., 1992. Polymeric flow through fibrous media. *J. Rheology* **36** (4), 589–620. [125](#)



- Sokolov, M., Tanner, R. I., 1972. Convective stability of a general viscoelastic fluid heated from below. *Physics of Fluids* **15** (4), 534–539. [27](#), [47](#)
- Sovran, O., Charrier-Mojtabi, M.-C., Mojtabi, A., 2001. Onset on Soret-driven convection in an infinite porous layer. *C. R. Acad. Sci., Ser. Iib Mec.* **329** (4), 287–293. [135](#)
- Suslov, S. A., 2006. Numerical aspects of searching convective/absolute instability transition. *Journal of Computational Physics* **212**, 188–217. [28](#), [95](#)
- Suslov, S. A., Paolucci, S., 1995. Stability of mixed-convection flow in a tall vertical channel under non-Boussinesq conditions. *Journal of Fluid Mechanics* **303**, 91–115. [87](#)
- Suslov, S. A., Paolucci, S., 2004. Stability of non-Boussinesq convection via the complex Ginzburg-Landau model. *Fluid Dynamics Research* **35**, 159–203. [99](#)
- Vest, C., Arpaci, V., 1969. Overstability of a viscoelastic fluid layer heated from below. *Journal of Fluid Mechanics* **36** (3), 613–623. [27](#), [47](#)
- Wang, S., Tan, W. C., 2008. Stability analysis of double-diffusive convection of Maxwell fluid in a porous medium heated from below. *Phys. Lett. A* **372**, 3046–3050. [117](#), [118](#), [127](#), [136](#)
- Wang, S., Tan, W. C., 2011. Stability analysis of Soret-driven double-diffusive convection of Maxwell fluid in a porous medium. *Int. J. Heat Fluid Flow* **32**, 88–94. [117](#), [118](#), [136](#)
- Wolfram, S., 2003. *The Mathematica Book*, 5th Edition. Wolfram Media. Cambridge University Press, New York. [52](#)
- Zhang, M., Lashgari, I., Zaki, T. A., Brandt, L., 2013. Linear stability analysis of channel flow of viscoelastic Oldroyd-B and FENE-P fluids. *Journal of Fluid Mechanics* **737**, 249–279. [27](#)

*BIBLIOGRAPHIE*

---