

École doctorale Sciences pour l'Ingénieur de l'Université de Lille

# THÈSE DE DOCTORAT

Discipline

**Mathématiques**

Numéro d'ordre : 42009

présentée par

Landry LAVOINE

---

## PROLONGEMENT DE REVÊTEMENTS ANALYTIQUES

---

dirigée par Serguei IVACHKOVITCH

Soutenue publiquement le 7 juin 2016 devant le jury composé de

M. Gerd DETHLOFF	Université de Brest	rapporteur
M. Serguei IVACHKOVITCH	Université de Lille	directeur
M. Jean-Jacques LOEB	Université d'Angers	président
M. Karl OELJEKLAUS	Université d'Aix-Marseille	rapporteur
M. Stepan OREVKOV	Université de Toulouse	examineur
M. Alexandre SUKHOV	Université de Lille	examineur

Laboratoire Paul Painlevé  
Cité Scientifique  
CNRS U.M.R. 8524  
59 655 Villeneuve d'Ascq Cedex

EDSPI  
Ecole Doctorale Sciences pour l'Ingénieur  
Université Lille Nord-de-France  
Bât. P3 – bureau 304-306  
59655 Villeneuve d'Ascq cedex

# Remerciements

Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse Serguei Ivachkovitch qui m'a initié depuis le Master au monde de la recherche. Il m'a donné la chance de travailler sur un sujet passionnant de l'analyse complexe. Sa patience, sa disponibilité et ses encouragements constants m'ont porté jusqu'au bout.

Je tiens à remercier Gerd Dethloff et Karl Oeljeklaus pour leurs lectures attentives de mon travail et pour leurs précieuses remarques. Je remercie également Jean-Jacques Loeb, Stepan Orevkov et Alexandre Sukhov d'avoir accepté d'être membres du jury.

J'ai passé au sein du Laboratoire Painlevé quatre années inoubliables. Je tiens donc à remercier tous ses membres et en particulier l'équipe du séminaire d'analyse complexe et équations différentielles.

Cette thèse a aussi été marquée par des rencontres. Je garderai un excellent souvenir des moments passés avec les doctorants, notamment les « anciens » comme Andrea, Antoine, Daoud, Émilie, Hubert, Maxime, Pierre, Roberto, Sinan..., les prochains : Claire, Florian, Jacques, Najib, Pierre-Louis, Roberta... et tous les autres qui, je l'espère, me pardonneront de les avoir involontairement omis.

La préparation à l'agrégation externe m'a très certainement encouragé à continuer dans le monde des mathématiques. Je tiens donc à remercier les formateurs, en particulier Vincent, Léa et Olivier (qui me pardonnera, que dans ce manuscrit, il n'y ait pas assez de belle poésie); ainsi que mes amis enseignants avec qui j'ai passé une année assez intense notamment Adrien, Benjamin 1 et Benjamin 2.

Cette thèse n'existerait pas sans mes parents (c'est évident...). Ils m'ont toujours encouragé à aller jusqu'au bout de mon parcours sans vraiment comprendre l'utilité de mon travail et pour cela, je les admire.

Je remercie également Rudy, mes amis, mes sœurs, ma famille et tous ceux qui ont souhaité se rendre à ma soutenance.

Enfin, j'ai écrit plus haut qu'une thèse est marquée par des rencontres. La plus belle de toutes restera la notre, Adeline. Merci à toi de me supporter, même dans les moments difficiles et d'illuminer mon quotidien.



# Résumé

## Prolongement de revêtements analytiques

On s'intéresse dans cette thèse aux propriétés de prolongements des revêtements analytiques. La problématique se formule de la manière suivante. Soit  $X_0$  un domaine d'un espace complexe normal  $X_1$  et  $\tilde{X}_0$  un revêtement analytique sur  $X_0$ . Peut-on prolonger  $\tilde{X}_0$  en un revêtement analytique  $\tilde{X}_1$  sur  $X_1$  et comment le nombre de ses feuillets varie-t-il par rapport à celui de  $\tilde{X}_0$ ? On montre au chapitre 1 un théorème de prolongement qui garde le nombre de feuillets constant. Au chapitre 2, on prouve des résultats de prolongement où le nombre de feuillets du revêtement analytique peut diminuer. On énonce également quelques résultats relatifs aux revêtements analytiques à deux feuillets. On donne enfin au troisième chapitre quelques exemples qui répondent aux questions dans différentes situations montrant la rigidité des résultats obtenus.

Mots-clefs : Prolongement, revêtement analytique,  $q$ -convexité.

## Extension of analytic covers

This thesis deals with the extension properties of analytic covers. The general question can be stated as follows. Let  $X_0$  be a domain in a normal complex space  $X_1$  and let  $\tilde{X}_0$  be an analytic cover over  $X_0$ . Can  $\tilde{X}_0$  be extended to an analytic cover  $\tilde{X}_1$  over  $X_1$ ? What is the number of sheets of  $\tilde{X}_1$  in comparison with that of  $\tilde{X}_0$ ? We prove in chapter 1 an extension theorem where the number of the sheets is constant. In chapter 2 we give extension results of analytic covers showing that the degree of the sheets may decrease. We prove also some extension results of the two-sheeted analytic covers. We give in the last chapter examples answering our questions in different situations.

Keywords : Extension, analytic covers,  $q$ -convexity.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
1 Résultats principaux . . . . .	9
2 Structure de la thèse . . . . .	15
3 Notes historiques . . . . .	16
<b>1 Structure et topologie des revêtements</b>	<b>17</b>
1.1 Préliminaires . . . . .	17
1.2 Prolongement topologique . . . . .	22
1.3 Théorème de GRAUERT et REMMERT . . . . .	26
1.4 Prolongement de type THULLEN . . . . .	28
<b>2 Prolongement aux domaines de <math>\mathbb{C}^n</math></b>	<b>33</b>
2.1 Résultat principal . . . . .	33
2.2 Prolongement sur le polydisque . . . . .	38
2.3 Prolongement de type HARTOGS . . . . .	44
2.4 Revêtements à deux feuillets . . . . .	49
<b>3 Exemples</b>	<b>55</b>
3.1 Prolongement sur une hypersurface . . . . .	55
3.2 Prolongement réel . . . . .	56
3.3 Unicité du prolongement de STEIN . . . . .	56

3.4	Prolongements faibles . . . . .	58
3.5	Prolongements faibles galoisiens . . . . .	62
3.6	Prolongement faible non trivial . . . . .	65
3.7	Prolongement non surjectif . . . . .	67
3.8	Prolongement de type HARTOGS . . . . .	70
<b>A</b>	<b>Espaces complexes et prolongements de RIEMANN</b>	<b>71</b>
<b>B</b>	<b>Ensembles analytiques globalement définis</b>	<b>75</b>
	<b>Index</b>	<b>79</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>81</b>

# Introduction

Les revêtements analytiques jouent un rôle fondamental en analyse complexe. Le travail de cette thèse consiste à étudier l'existence de prolongements de revêtements analytiques.

## 1 Résultats principaux

Soient  $\tilde{X}$ ,  $X$  deux espaces complexes normaux. Un revêtement analytique est un triplet  $(\tilde{X}, c, X)$  où  $c : \tilde{X} \rightarrow X$  est une application holomorphe, propre, surjective aux fibres discrètes. D'après les théorèmes de SARD et de REMMERT, il existe un ensemble analytique  $\mathcal{R} \subset X$  de codimension 1 tel que, en notant  $\tilde{\mathcal{R}} = c^{-1}(\mathcal{R})$ , la restriction  $c : \tilde{X} \setminus \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow X \setminus \mathcal{R}$  induit un revêtement régulier *i.e.*, un revêtement topologique non ramifié. Par des arguments de simple connexité, on peut supposer lorsque  $X \subset \mathbb{C}^n$  est un domaine que l'ensemble  $\mathcal{R}$  des points ramifiés est vide ou de codimension pure égale à un. Dans ce cas, on l'appelle diviseur de ramification du revêtement et sa pré-image  $\tilde{\mathcal{R}}$ , diviseur de branchement. Par hypothèse sur  $c$ , le nombre de pré-images de tout point de  $X \setminus \mathcal{R}$  est borné et maximal. Cette borne  $b$  s'appelle le degré (ou le nombre de feuillets) du revêtement. On dira qu'un revêtement  $(\tilde{X}, c, X)$  est connexe si l'espace  $\tilde{X}$  est lui-même connexe.

Soit  $X_0$  un ouvert dans un espace complexe normal  $X_1$  et  $(\tilde{X}_0, c_0, X_0)$  un revêtement analytique. Un prolongement de ce revêtement sur  $X_1$  est un revêtement analytique  $(\tilde{X}_1, c_1, X_1)$  pour lequel il existe une application holomorphe  $\tilde{i} : \tilde{X}_0 \rightarrow \tilde{X}_1$  faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_0 & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{X}_1 \\ c_0 \downarrow & & \downarrow c_1 \\ X_0 & \xrightarrow{i} & X_1 \end{array} \quad (1)$$

*i.e.*,  $c_1 \circ \tilde{i} = i \circ c_0$ . Ici  $i : X_0 \hookrightarrow X_1$  désigne l'inclusion naturelle. Si l'espace  $\tilde{X}_1$  est connexe, on dira que le prolongement est connexe. Il existe deux types de prolongement, au sens fort ou au sens faible selon l'injectivité, ou non, de l'application  $\tilde{i} : \tilde{X}_0 \rightarrow \tilde{X}_1$ . On dira que le prolongement est surjectif si  $\tilde{i}(\tilde{X}_0) = c_1^{-1}(i(X_0))$ . Dans ce cas, le nombre de feuillet de  $\tilde{X}_1$  n'excède pas celui de  $\tilde{X}_0$ . Un revêtement analytique  $(\tilde{X}_0, c_0, X_0)$  peut toujours se prolonger faiblement au-dessus de  $X_1$  en posant dans les notations du diagramme (1)  $\tilde{X}_1 = X_1$ ,  $\tilde{i} = i \circ c_0$  et  $c_1 = \text{ld}_{X_1} : X_1 \rightarrow X_1$  l'application identité. Il existe des situations où ce revêtement est le seul prolongement connexe possible comme le montre cet exemple.

**Exemple 1.** Soit  $(\tilde{X}_0, c_0, \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2)$  un revêtement analytique régulier connexe de degré  $b \geq 2$ . Le seul prolongement connexe possible sur  $\mathbb{C}^2$  est le revêtement trivial  $(\mathbb{C}^2, \text{ld}, \mathbb{C}^2)$ .

L'objectif de cette thèse est de déterminer sous quelles conditions un revêtement analytique admet un prolongement fort ou avec un nombre de feuillet au moins égal à deux. Par exemple, l'existence d'un prolongement fort est assurée dans le cas suivant.

**Théorème 1.** Soient  $A$  un ensemble analytique d'un ouvert  $D_1 \subset \mathbb{C}^n$  et  $D_0$  un ouvert contenant  $D_1 \setminus A$  qui intersecte toute branche de codimension 1 de  $A$ . Alors tout revêtement analytique au-dessus de  $D_0$  se prolonge fortement et surjectivement à  $D_1$ . Ce prolongement est unique à équivalence de revêtements près.

Deux revêtements analytiques  $(\tilde{X}, c, X)$  et  $(\tilde{X}', c', X)$  définis au-dessus d'un même espace complexe normal sont équivalents s'il existe un biholomorphisme  $\tilde{i} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$  faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{X}' \\
 & \searrow c & \swarrow c' \\
 & X &
 \end{array} \tag{2}$$

*i.e.*,  $c' \circ \tilde{i} = c$ .

Le théorème 1 qui est appelé le théorème d'extension de type THULLEN est montré implicitement dans [GR58]. La preuve que nous rappelons ici suit l'approche de DETHLOFF dans [Det90] et [DG94].

Soit  $(\tilde{X}_1, c_1, X_1)$  un prolongement connexe d'un revêtement analytique  $(\tilde{X}_0, c_0, X_0)$ . Pour que le nombre  $b_1$  de feuillet de  $(\tilde{X}_1, c_1, X_1)$  soit au moins égal à 2,

il est nécessaire que l'ensemble de ramification de  $(\tilde{X}_0, \mathfrak{c}_0, X_0)$  se prolonge dans  $X_1$  ce qui, en tout généralité, n'est pas le cas.

**Exemple 2.** Soit  $A$  la droite complexe de  $\mathbb{C}^2$  définie par l'équation  $z_1 = 0$  et posons  $X_0 := \mathbb{C}^2 \setminus A$ . Le revêtement analytique  $(\tilde{X}_0, \mathfrak{c}_0, X_0)$  défini par

$$\tilde{X}_0 = \left\{ (z, w) \in X_0 \times \mathbb{C} : w^2 = z_2 - e^{\frac{1}{z_1}} \right\}$$

et  $\mathfrak{c}_0$  la restriction à  $\tilde{X}_0$  de la projection  $X_0 \times \mathbb{C} \rightarrow X_0$ , ne se prolonge pas fortement au-dessus de  $\mathbb{C}^2$  puisque son diviseur de ramification n'est pas prolongeable dans  $\mathbb{C}^2$ . Le seul prolongement connexe possible est donc le revêtement trivial  $(\mathbb{C}^2, \text{Id}, \mathbb{C}^2)$ .

On verra par la suite que la condition de prolongement du diviseur de ramification est loin d'être suffisante.

**Théorème 2.** Soit  $(\tilde{D}_0, \mathfrak{c}_0, D_0)$  un revêtement analytique connexe de degré  $b_0$  au-dessus d'un domaine  $D_0 \subset \mathbb{C}^n$ . Supposons que son diviseur de ramification  $\mathcal{R}_0$  se prolonge en une hypersurface  $\mathcal{R}_1$  dans un domaine  $D_1 \supset D_0$  et que pour tout  $z_* \in D_0 \setminus \mathcal{R}_0$  le morphisme

$$\mathfrak{i}_* : \pi_1(D_0 \setminus \mathcal{R}_0, z_*) \rightarrow \pi_1(D_1 \setminus \mathcal{R}_1, z_*) \quad (3)$$

induit par l'inclusion naturelle  $D_0 \setminus \mathcal{R}_0 \subset D_1 \setminus \mathcal{R}_1$  est surjectif. Alors le revêtement se prolonge faiblement en un revêtement analytique connexe  $(\tilde{D}_1, \mathfrak{c}_1, D_1)$  au-dessus de  $D_1$  de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_1$ . Il vérifie les propriétés suivantes :

- (i) Le prolongement est surjectif i.e., nombre  $b_1$  de ses feuillets est inférieur à  $b_0$ ,
- (ii) si  $b_1 = b_0$  alors le prolongement est fort,
- (iii) tout prolongement connexe  $(\tilde{D}'_1, \mathfrak{c}'_1, D_1)$  de  $(\tilde{D}_0, \mathfrak{c}_0, D_0)$  de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_1$  est surjectif et le nombre  $b'_1$  de ses feuillets n'excède pas  $b_1$ ,
- (iv) si  $b'_1 = b_1$  alors  $(\tilde{D}'_1, \mathfrak{c}'_1, D_1)$  et  $(\tilde{D}_1, \mathfrak{c}_1, D_1)$  sont équivalents.

Si dans les conditions du théorème 2, le morphisme défini dans (3) n'est pas surjectif, il peut exister un prolongement connexe faisant croître le nombre de ses feuillets comme l'illustre l'exemple suivant.

**Exemple 3.** Soient  $n$  et  $m$  deux entiers vérifiant  $n \geq 3$  et  $m \geq n+2$  et  $D_0 = \Delta^m$  le polydisque unité de  $D_1 = \mathbb{C}^m$ . Alors il existe un revêtement analytique connexe  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$  de degré  $n$  tel que :

- le diviseur de ramification  $\mathcal{R}_0$  se prolonge en une hypersurface  $\mathcal{R}_1 \subset D_1$ ,
- le morphisme défini en (3) n'est pas surjectif et
- $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$  se prolonge en un revêtement analytique connexe de degré  $m$  au-dessus de  $D_1$  de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_1$ .

Lorsque les conditions du théorème 2 sont satisfaites, il existe, d'après les propriétés (i) et (iii) un prolongement connexe « maximal » pour lequel le nombre de feuilletés  $b_1$  est le plus grand possible. Illustrons ce théorème aux revêtements analytiques définis dans les exemples suivants.

**Exemple 4.** Soit  $\Omega$  le disque ouvert  $\{z_1 \in \mathbb{C} : |z_1 - 1| < 1\}$  et désignons par  $D_0$  le produit  $\Omega \times \mathbb{C}$ . Soit  $f(z_1)$  la détermination holomorphe de  $\sqrt[3]{z_1}$  sur  $\Omega$  telle que  $f(1) = 1$ . Définissons l'ensemble

$$\tilde{D}_0 := \left\{ (z, w) \in D_0 \times \mathbb{C} : w^3 + \frac{f(z_1)}{\sqrt[3]{4}}w + \frac{iz_2}{\sqrt{27}} = 0 \right\}$$

et  $\mathbf{c}_0$  la restriction à  $\tilde{D}_0$  de la projection  $D_0 \times \mathbb{C} \rightarrow D_0$ . Alors  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$  est un revêtement analytique de degré 3 dont le seul prolongement connexe possible au-dessus de  $D_1$  est le revêtement trivial bien que son diviseur de ramification  $\mathcal{R}_0 := \{z \in D_0 : z_1 - z_2^2 = 0\}$  se prolonge dans  $D_1$ .

Le théorème 2 s'applique aux revêtements galoisiens de la manière suivante : si le revêtement initial est galoisien *i.e.*, sa restriction au-dessus de l'ensemble des points non ramifiés induit un revêtement galoisien, alors le prolongement maximal construit  $(\tilde{D}_1, \mathbf{c}_1, D_1)$  l'est également, voir le corollaire 2.6. Mais comme dans l'exemple 4 précédent, il peut exister des revêtements analytiques galoisiens qui ne se prolongent que faiblement.

**Exemple 5.** Dans les notations de l'exemple 4, on pose  $g(z_1)$  la détermination holomorphe de la racine carrée sur  $\Omega$  telle que  $g(1) = 1$ . On définit

$$\tilde{D}_0 := \left\{ (z, w) \in D_0 \times \mathbb{C} : w^3 - (z_1 - z_2^2)(g(z_1) - z_2) = 0 \right\}$$

et  $\mathbf{c}_0 : \tilde{D}_0 \rightarrow D_0$  la projection induite. Alors  $\tilde{D}_0$  possède une structure d'espace complexe normal de sorte que  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$  est un revêtement analytique galoisien. Le seul prolongement connexe de  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$  sur  $D_1$  est le revêtement trivial.

Dans l'exemple suivant, on construit un revêtement analytique pour lequel le prolongement obtenu est faible mais de degré strictement supérieur à 1.

**Exemple 6.** Dans les hypothèses de l'exemple 5 précédent, posons

$$\tilde{D}_0 := \left\{ (z, w) \in D_0 \times \mathbb{C} : w^4 - (g(z_1) - z_2)(g(z_1) + z_2)^3 = 0 \right\} \quad (4)$$

et  $c_0 : \tilde{D}_0 \rightarrow D_0$  la projection naturelle. Alors  $\tilde{D}_0$  possède une structure d'espace complexe normal de sorte que  $(\tilde{D}_0, c_0, D_0)$  est un revêtement analytique galoisien à 4 feuillets qui se prolonge en un revêtement analytique connexe de degré 2 au-dessus de  $D_1$ . Ce prolongement est donné par l'application suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{i}} : \quad \tilde{D}_0 &\longrightarrow \tilde{D}_1 \\ (z, w) &\longmapsto (z, w^2(g(z_1) - z_2)) \end{aligned} \quad (5)$$

où

$$\tilde{D}_1 := \left\{ (z, W) \in D_1 \times \mathbb{C} : W^2 = (z_1 - z_2^2)^3 \right\}. \quad (6)$$

Lorsque les domaines  $D_0$  et  $D_1$  sont des polydisques respectivement égaux à  $\Delta_R^{n-1} \times \Delta$  et  $\Delta^n$ , où  $0 < R < 1$ , il existe une condition qui valide automatiquement la surjectivité du morphisme (3) dans le théorème 2.

**Lemme 1.** *Soit  $\Delta^n \subset \mathbb{C}^n$  le polydisque unité,  $\Gamma := \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$  et  $\mathcal{R} \subset \Delta^n \times \Gamma$  une hypersurface analytique qui n'intersecte pas  $\Delta^n \times \partial\Gamma$ . Il existe un sous-ensemble  $A \subset \Delta^n$  nulle part dense tel que pour tout  $z_* \in \Delta^n \setminus A$  et tout  $Z_* = (z_*, w_*) \in (\Delta^n \times \Gamma) \setminus \mathcal{R}$ , l'homomorphisme*

$$\mathbf{i}_* : \pi_1 [(\{z_*\} \times \Gamma) \setminus \mathcal{R}, Z_*] \rightarrow \pi_1 [(\Delta^n \times \Gamma) \setminus \mathcal{R}, Z_*] \quad (7)$$

*induit par l'inclusion naturelle est surjectif.*

La preuve de ce résultat utilise les techniques de démonstration du lemme 2.7 de PICARD et SIMART donnée dans [Nis01]. Ce lemme énonce que, dans les hypothèses du lemme 1 précédent, toute courbe  $\gamma$  de  $(\Delta^n \times \Gamma) \setminus \mathcal{R}$  peut être continûment déformée en un lacet inclus dans  $(\{z_*\} \times \Gamma) \setminus \mathcal{R}$ . Le lemme 1 précise donc que cette déformation peut-être réalisée à extrémités fixées dès lors qu'on suppose  $\gamma(0) = \gamma(1) = Z_*$ . Ce résultat fondamental utilisé à de nombreux recours permet grâce au théorème 2 de montrer le suivant.

**Théorème 3.** Soit  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$  un revêtement analytique connexe de degré  $b_0$  au-dessus du polydisque  $D_0 := \Delta_R^{n-1} \times \Delta$  où  $0 < R < 1$ . Supposons que le diviseur de ramification  $\mathcal{R}_0$  se prolonge en une hypersurface complexe  $\mathcal{R}_1$  dans  $\Delta^n$  telle que

$$\mathcal{R}_1 \cap (\Delta^{n-1} \times \partial\Delta) = \emptyset. \quad (8)$$

Alors il existe un revêtement analytique connexe au-dessus de  $D_1$  de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_1$  qui prolonge faiblement et surjectivement  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$ . Ce prolongement est maximal, en ce sens qu'il vérifie les assertions du théorème 2.

Le lemme 1 permet également de montrer qu'un revêtement analytique de degré 2 se prolonge en général fortement et surjectivement.

**Théorème 4.** Soient  $D_0 \subset D_1$  deux domaines de  $\mathbb{C}^n$  et  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$  un revêtement analytique connexe à 2 feuillets au-dessus de  $D_0$ . Supposons que son diviseur de ramification  $\mathcal{R}_0$  se prolonge en une hypersurface  $\mathcal{R}_1$  dans  $D_1$  globalement définie par une seule équation i.e., il existe un fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(D_1)$  telle que

$$\mathcal{R}_1 := \{z \in D_1 : f(z) = 0\}.$$

Alors  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$  se prolonge fortement et surjectivement au-dessus de  $D_1$ . Ce prolongement est unique à équivalence de revêtements près.

En particulier, si le revêtement analytique initial du théorème 3 est de degré 2 alors il se prolonge fortement sur  $\Delta^n$ . Énonçons enfin ce résultat de prolongement des revêtements analytiques au-dessus des figures de HARTOGS. Rappelons qu'une figure de HARTOGS  $q$ -convexe de rayon  $r \in ]0, 1[$  et le domaine

$$H_r^{n, n-q} := \Delta_r^{n-q} \times \Delta^q \cup \Delta^{n-q} \times (\Delta^q \setminus \overline{\Delta_{1-r}^q}).$$

**Corollaire 1.** Soit  $q \geq 2$  et  $(\tilde{H}, \mathbf{c}_0, H_r^{n, n-q})$  un revêtement analytique connexe au-dessus d'une figure de HARTOGS  $q$ -convexe, où  $n \geq 3$ . Il existe alors un revêtement analytique connexe au-dessus du polydisque unité  $D_1 = \Delta^n$  qui prolonge faiblement et surjectivement  $(\tilde{H}, \mathbf{c}_0, H_r^{n, n-q})$ . Ce prolongement vérifie les assertions du théorème 2.

D'après le théorème 4, si le nombre de feuillets de  $(\tilde{H}, \mathbf{c}_0, H_r^{n, n-q})$  est égal à 2, alors le prolongement construit est fort.

## 2 Structure de la thèse

L'objectif du premier chapitre de cette thèse est de démontrer le théorème 1 (théorème 1.28) de prolongement de type THULLEN de revêtement analytique. Au premier paragraphe, on introduit la notion de revêtement régulier en donnant les propriétés topologiques fondamentales vérifiées par ces objets, comme par exemple le théorème 1.2 de relèvement des chemins, ainsi que les caractérisations données aux théorèmes 1.4 et 1.5. On définit ensuite les notions de revêtement analytique, d'équivalence et de prolongement de revêtement analytique. Au paragraphe 1.2, on énonce le théorème 1.17 de prolongement topologique dû à STEIN qui permet de prolonger topologiquement un revêtement analytique régulier à travers une hypersurface complexe. Dans le paragraphe 1.3 consacré au théorème 1.19, on montre que l'espace topologique construit au théorème 1.17 peut être muni d'une structure d'espace complexe normal, c'est le théorème 1.23, montrant ainsi l'équivalence des définitions d'espace normal données par CARTAN et BEHNKE-STEIN. On démontre enfin à la section 1.4 quelques résultats de prolongement de revêtement analytique comme les théorèmes 1.23, 1.25 et le théorème 1.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de prolongement de revêtement analytique au-dessus de domaines de  $\mathbb{C}^n$ . On commence par démontrer le théorème 2 (théorème 2.1) qui est à l'origine de tous les autres résultats qui suivront. Le corollaire 2.6 montre que, si dans les conditions du théorème 2, le revêtement est galoisien alors le prolongement construit est galoisien. On montre ensuite le lemme 1 et le théorème 3 (théorème 2.12) de prolongement dans le cas du polydisque. A la section 2.3, on s'intéresse aux prolongements des revêtements analytiques sur les figures de HARTOGS. Le résultat principal de ce paragraphe est le corollaire 1 (corollaire 2.20) dont la preuve est basée sur l'exhaustion par des domaines  $(n - q + 1)$ -concaves du polydisque. Enfin, on montre le théorème 2.25 montrant que les revêtements à deux feuillets de même diviseur de ramification sont toujours équivalents. On en déduit alors le théorème 4 (théorème 2.27).

Le dernier chapitre donne quelques exemples de prolongements de revêtements. Dans le paragraphe 3.1, on détaille l'exemple 2 du revêtement analytique qui ne se prolonge que trivialement à travers une hypersurface, puis dans la section 3.2, on détaille l'exemple 1 concernant les revêtements réguliers qui ne se prolongent pas fortement sur  $\mathbb{R}^2$ . On applique ensuite au paragraphe 3.3 le

théorème 1.17 de STEIN sur des exemples qui montrent la particularité de la construction du revêtement, voir les exemples 3.3 et 3.4. Dans les sections 3.4, 3.5 et 3.6 on détaille les exemples 4, 5 et 6 qui montrent qu'en général le revêtement prolongé est de degré inférieur bien que le diviseur se prolonge. Le paragraphe 3.7 est consacré au contre-exemple 3 qui utilise quelques outils de base en théorie des tresses.

### 3 Notes historiques

Les espaces complexes normaux généralisent la notion de surface de RIEMANN. En 1951, une classe d'espaces complexes a d'abord été introduite par BEHNKE et STEIN comme revêtements ramifiés de degrés finis au-dessus d'un domaine de  $\mathbb{C}^n$ . A la même période, CARTAN a introduit dans les séminaires donnés à l'École Normale Supérieure, les espaces complexes normaux. En 1958, GRAUERT et REMMERT ont montré dans [GR58] que les espaces de BEHNKE et STEIN pouvaient être munis d'une structure complexe normale. La preuve de ce résultat a été simplifiée des années plus tard par DETHLOFF dans [Det90].

# Chapitre 1

## Structure et topologie des revêtements

L'objectif du premier chapitre de cette thèse est de démontrer le théorème 1.28 de prolongement de type THULLEN de revêtement analytique. Au premier paragraphe, on introduit les revêtements réguliers en donnant quelques propriétés topologiques fondamentales vérifiées par ces objets. On rappelle en particulier le théorème 1.2 de relèvement des chemins et les caractérisations données aux théorèmes 1.4 et 1.5. On donne ensuite les définitions de revêtement analytique et de prolongement de revêtement analytique.

On démontre au paragraphe 1.2 le théorème 1.17 de prolongement topologique d'un revêtement régulier dû à STEIN.

Au paragraphe 1.3 consacré au théorème 1.19, on montre qu'un espace de revêtement peut être muni d'une structure d'espace complexe normal, c'est le théorème 1.23, montrant ainsi l'équivalence des définitions de CARTAN et BEHNKE-STEIN.

Enfin, on énonce et démontre quelques résultats de prolongement de revêtement analytique comme les théorèmes 1.23, 1.25 et en particulier le théorème 1.28 de prolongement de type THULLEN.

### 1.1 Préliminaires

#### 1.1.1 Revêtements réguliers

**Définition 1.1.** Soit  $\tilde{X}$  et  $X$  deux espaces topologiques séparés. Un revêtement régulier ou revêtement non ramifié est un triplet  $(\tilde{X}, c, X)$  où  $c : \tilde{X} \rightarrow X$  est une

application continue vérifiant la propriété suivante. Pour tout  $x \in X$  il existe un voisinage  $U$  de  $x$ , un espace discret  $E$  non vide et un homéomorphisme  $h : \tilde{U} \rightarrow U \times E$  où  $\tilde{U} := c^{-1}(U)$  tels que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{h} & U \times E \\ & \searrow c & \swarrow \pi \\ & & U \end{array} \quad (1.1)$$

commute, i.e.,  $\pi \circ h = c$ ,  $\pi : U \times E \rightarrow U$  désignant ici la projection canonique.

On appelle  $X$  la base du revêtement et  $\tilde{X}$  l'espace de revêtement. Si l'ensemble  $E$  est fini, son cardinal  $b$  est appelé degré ou nombre de feuilletts du revêtement régulier  $(\tilde{X}, c, X)$ . La fibre d'un point  $x \in X$  désigne l'ensemble  $c^{-1}(x)$  de ses pré-images par  $c$ .

D'une manière équivalente, une application continue  $c : \tilde{X} \rightarrow X$  entre espaces séparés induit un revêtement régulier  $(\tilde{X}, c, X)$  si et seulement si  $X$  possède un recouvrement ouvert  $\{U_\alpha\}_\alpha$  ayant la propriété suivante : pour tout  $\alpha$ , il existe une famille d'ouverts deux à deux disjoints  $\{V_e\}_{e \in E}$  dans  $\tilde{X}$  paramétrée par un ensemble  $E$  discret non vide telle que  $c^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_{e \in E} V_e$  et la restriction de  $c$  à chacun des ouverts  $V_e$  induit un homéomorphisme sur  $U_\alpha$ .

Un revêtement régulier est un homéomorphisme local satisfaisant la propriété fondamentale suivante.

**Théorème 1.2** (Relèvement des chemins). *Soit  $(\tilde{X}, c, X)$  un revêtement régulier et  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  un chemin<sup>1</sup>. Pour toute pré-image  $\tilde{x}$  de  $\gamma(0)$ , il existe un unique chemin  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  d'origine  $\tilde{x}$  tel que  $c \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ .*

En particulier si  $(\tilde{X}, c, X)$  est un revêtement régulier dont la base  $X$  est simplement connexe alors la restriction de  $c$  à toute composante connexe de  $\tilde{X}$  induit un homéomorphisme sur  $X$ .

**Définition 1.3.** Deux revêtements réguliers  $(\tilde{X}, c, X)$  et  $(\tilde{X}', c', X)$  ayant la même base sont équivalents s'il existe un homéomorphisme  $\tilde{i} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$  tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{X}' \\ & \searrow c & \swarrow c' \\ & & X \end{array} \quad (1.2)$$

commute i.e.,  $c' \circ \tilde{i} = c$ .

1. Dans cette thèse, tous les chemins seront paramétrés sur  $[0, 1]$ .

Soit  $(\tilde{X}, c, X)$  un revêtement régulier de degré fini entre espaces de HAUSDORFF connexes par arcs où  $X$  est localement simplement connexe. Soit également  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  une pré-image fixée d'un élément  $x \in X$  par  $c$ . On désigne par  $\pi_1(X, x)$  et  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$  les groupes fondamentaux des espaces  $X$  et  $\tilde{X}$  basés respectivement en  $x$  et  $\tilde{x}$ . L'application  $c : \tilde{X} \rightarrow X$  induit alors un monomorphisme de groupes

$$c_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, x). \quad (1.3)$$

Le théorème suivant montre que ce morphisme caractérise les revêtements réguliers de degrés finis sur  $X$ .

**Théorème 1.4.** *Dans les hypothèses ci-dessus, l'image  $H = \text{Im}c_*$  est un sous-groupe d'indice  $b$ . Réciproquement, à tout sous-groupe  $H < \pi_1(X, x)$  d'indice  $b$ , correspond un revêtement régulier  $(\tilde{X}, c, X)$  à  $b$  feuillets tel que  $\tilde{X}$  est connexe par arcs et  $H = \text{Im}c_*$ . Ce revêtement est unique à équivalence de revêtements près.*

La preuve de ce résultat se trouve dans [Hat02] ou [Dèb01].

On définit l'action de monodromie de  $\pi_1(X, x)$  sur la fibre  $c^{-1}(x)$  constituée des pré-images de  $x$  de la manière suivante : à toute classe d'homotopie  $[\gamma]$  d'un lacet  $\gamma \subset X$  basé en  $x$ , correspond une unique permutation  $\rho([\gamma])$  qui, à toute pré-image  $\tilde{x}$  associe l'unique pré-image  $\tilde{x}' = \tilde{\gamma}(1)$  où  $\tilde{\gamma}$  désigne le relevé de  $\gamma$  d'origine  $\tilde{x}$  défini dans le théorème 1.2. Cette action que l'on note  $\rho$  est transitive et on appelle  $\rho(\pi_1(X, x))$  le groupe de monodromie du revêtement. Le résultat suivant montre la réciproque et, de surcroît permet une classification des revêtements réguliers de degrés finis par les actions sur le groupe de permutation, voir [Hat02] et [Dèb01] pour les détails.

**Théorème 1.5.** *A toute action transitive  $\rho : \pi_1(X, x) \rightarrow S_b$ , où  $S_b$  est le groupe des permutations à  $b$  éléments, correspond un revêtement régulier  $(\tilde{X}, c, X)$  à  $b$  feuillets tel que l'espace  $\tilde{X}$  est connexe par arcs et  $\rho$  coïncide avec l'action de monodromie de  $c$ . Ce revêtement est unique à équivalence de revêtements près.*

### 1.1.2 Revêtements analytiques

**Définition 1.6.** Soit  $\tilde{X}$  et  $X$  deux espaces complexes normaux. Un revêtement analytique régulier est un revêtement régulier  $(\tilde{X}, c, X)$  où l'application  $c : \tilde{X} \rightarrow X$  est holomorphe.

Une application continue  $c : X \rightarrow Y$  entre deux espaces de HAUSDORFF localement compacts est **propre** si l'image réciproque de tout compact de  $Y$  est compacte. De manière équivalente, une application continue  $c : X \rightarrow Y$  entre espaces localement compacts est propre si et seulement si elle est fermée et les fibres sont compactes, voir par exemple [GR84].

**Définition 1.7.** Soit  $\tilde{X}$  et  $X$  deux espaces complexes normaux. Un **revêtement analytique** est un triplet  $(\tilde{X}, c, X)$  où  $c : \tilde{X} \rightarrow X$  est une application holomorphe, propre, surjective aux fibres discrètes.

**Remarque 1.8.** Par hypothèse, l'application  $c : \tilde{X} \rightarrow X$  est finie *i.e.*, les fibres sont finies et bornées. Désignons par  $\tilde{\mathcal{R}}$  l'ensemble des points critiques de  $\tilde{X}$ . C'est un ensemble analytique qui, d'après le théorème de SARD appliqué aux espaces complexes normaux est de codimension au moins égale à 1, voir [Man82]. Comme  $c$  est propre, le théorème de REMMERT implique que l'image  $\mathcal{R} := c(\tilde{\mathcal{R}})$  est analytique dans  $X$ , voir [Rem57], de sorte que la restriction  $c : \tilde{X} \setminus \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow X \setminus \mathcal{R}$  est localement biholomorphe. On en déduit que  $(\tilde{X} \setminus \tilde{\mathcal{R}}, c, X \setminus \mathcal{R})$  est un revêtement analytique régulier fini de degré  $b$ . L'espace  $\tilde{\mathcal{R}}$  est un ensemble analytique nulle part dense qui, par normalité de  $\tilde{X}$ , ne le **sépare pas localement**, *i.e.*, tout point  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  possède une base de voisinages  $\{\tilde{U}_\alpha\}_\alpha$  tels que pour tout  $\alpha$  le complémentaire  $\tilde{U}_\alpha \setminus \tilde{\mathcal{R}}$  est connexe (voir le théorème A.11). L'ensemble  $\mathcal{R}$  est appelé **l'ensemble de ramification** du revêtement et  $\tilde{\mathcal{R}}$  son **ensemble de branchement**.

Lorsque  $X \subset \mathbb{C}^n$  est un domaine, l'ensemble  $\mathcal{R}$  peut être choisi vide ou bien de codimension pure égale à 1. En effet, tout point  $p \in \mathcal{R}$  pour lequel  $\text{codim}_p \mathcal{R} \geq 2$  n'est pas un point ramifié puisqu'il existe un voisinage  $U$  tel que  $U \setminus \mathcal{R}$  est simplement connexe. Dans ce cas, on dit que  $\mathcal{R}$  est le **diviseur de ramification** du revêtement analytique et  $\tilde{\mathcal{R}}$  son **diviseur de branchement**. Mais en tout généralité, il peut exister des revêtements analytiques dont le diviseur de ramification est de codimension supérieure comme l'illustre cet exemple.

**Exemple 1.9.** Considérons l'hypersurface  $X := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : z^2 = xy\}$ . Puisque  $\text{Sing } X = \{(0, 0, 0)\}$  est de codimension 2 dans  $X$ , le théorème d'OKA implique que  $X$  est un espace complexe normal, voir par exemple [Bec75]. L'application  $c : \mathbb{C}^2 \rightarrow X$  définie par  $c(s, t) = (s^2, t^2, st)$  induit un revêtement analytique de degré 2 sur  $X$  tel que  $\mathcal{R} := \{(0, 0, 0)\}$  est de codimension 2.

**Définition 1.10.** Un revêtement (analytique ou régulier)  $(\tilde{X}, c, X)$  est **connexe** si l'espace de revêtement  $\tilde{X}$  est connexe.

**Définition 1.11.** Soit  $(\tilde{X}_0, c_0, X_0)$  un revêtement analytique au-dessus d'un ouvert connexe  $X_0$  d'un espace complexe connexe normal  $X_1$ . On dit qu'il se **prolonge** au-dessus de  $X_1$  s'il existe un revêtement analytique  $(\tilde{X}_1, c_1, X_1)$  et une application holomorphe  $\tilde{i} : \tilde{X}_0 \rightarrow \tilde{X}_1$  tels que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_0 & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{X}_1 \\ c_0 \downarrow & & \downarrow c_1 \\ X_0 & \hookrightarrow & X_1 \end{array} \quad (1.4)$$

commute *i.e.*,  $c_1 \circ \tilde{i} = i \circ c_0$ , l'application  $i : X_0 \hookrightarrow X_1$  désignant ici l'inclusion naturelle.

Si l'application  $\tilde{i}$  est de plus injective, on dira que le prolongement est **fort**. Sinon, le prolongement est **faible**. On dit de plus que le prolongement est **surjectif** si  $\tilde{i}(\tilde{X}_0) = c_1^{-1}(i(X_0))$ . Si l'espace  $\tilde{X}_1$  est connexe, on dit que le prolongement est **connexe**.

- Remarques 1.12.**
- (i) Le degré d'un prolongement surjectif n'excède pas celui du revêtement initial.
  - (ii) Tout revêtement analytique admet un prolongement faible et connexe. Il suffit de prendre dans les notations de la définition 1.11 l'application identité  $\text{ld}_{X_1} : X_1 \rightarrow X_1$  et  $\tilde{i} = i \circ c_0$ . Le prolongement ainsi construit  $(X_1, \text{ld}_{X_1}, X_1)$  est le revêtement trivial à un feuillet.
  - (iii) Soit  $(\tilde{X}_0, c_0, X_0)$  un revêtement analytique au-dessus d'un domaine  $X_0$  d'un espace complexe normal  $X_1$ . On déduit du point précédent que pour tout entier  $b_1 \geq 2$ , il existe un prolongement faible non connexe à  $b_1$  feuillets de  $(\tilde{X}_0, c_0, X_0)$  défini par  $\tilde{X}_1 = X_1 \times \{1, \dots, b_1\}$  et  $c_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X_1$  la projection naturelle.
  - (iv) Une condition nécessaire pour qu'un prolongement connexe de degré supérieur ou égal à 2 existe est que l'ensemble de ramification  $\mathcal{R}_0$  de  $(\tilde{X}_0, c_0, X_0)$  se prolonge dans  $X_1$ .

Comme pour les revêtements réguliers, on définit l'équivalence des revêtements analytiques.

**Définition 1.13.** Deux revêtements analytiques  $(\tilde{X}, c, X)$  et  $(\tilde{X}', c', X)$  au-dessus d'un même espace complexe normal  $X$  sont **équivalents** s'il existe un biholomor-

phisme  $\tilde{i}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{X}' \\ & \searrow c & \swarrow c' \\ & & X \end{array}$$

commute *i.e.*,  $c' \circ \tilde{i} = c$ .

**Remarques 1.14.** (i) Si deux revêtements analytiques sont équivalents, les revêtements réguliers associés le sont aussi. On montrera au théorème 1.23 que la réciproque est vraie.

(ii) Pour que deux revêtements analytiques soient équivalents, il suffit qu'ils le soient topologiquement *i.e.*, l'application  $\tilde{i}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$  dans la définition 1.13 est un homéomorphisme.

### 1.1.3 Revêtements analytiques galoisiens

**Définition 1.15.** Soit  $(\tilde{X}, c, X)$  un revêtement régulier de degré  $b$  entre deux espaces topologiques  $\tilde{X}$  et  $X$  connexes par arcs, localement connexes par arcs et localement simplement connexes. Un **automorphisme** de revêtement est un homéomorphisme  $\Phi: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  tel que  $c \circ \Phi = c$ . Muni de la composition, l'ensemble de ces automorphismes  $\text{Aut}(c)$  forment un groupe d'ordre au plus égal à  $b$ . Le revêtement  $(\tilde{X}, c, X)$  est dit **galoisien** si ce groupe possède exactement  $b$  éléments.

On utilisera le fait suivant pour caractériser les revêtements galoisiens. Les détails se trouvent dans [Dèb01]. Soit  $(\tilde{X}, c, X)$  un revêtement régulier fini et  $\tilde{x}_*$  une pré-image fixée d'un élément  $x_* \in X$  par  $c$ . Désignons par  $H < \pi_1(X, x_*)$  le sous-groupe défini dans le théorème 1.4. Alors  $(\tilde{X}, c, X)$  est galoisien si et seulement si  $H$  est distingué.

**Définition 1.16.** Soit  $(\tilde{X}, c, X)$  un revêtement analytique d'ensemble de ramification  $\mathcal{R}$ . On dit qu'il est **galoisien** si le revêtement régulier associé *i.e.*, le revêtement induit par sa restriction au-dessus de  $X \setminus \mathcal{R}$ , est galoisien.

## 1.2 Prolongement topologique

Le théorème suivant est un résultat de prolongement topologique d'un revêtement régulier dû à STEIN dans [Ste56]. La démonstration proposée ici est

différente de la preuve originelle, elle repose sur une construction provenant de [Nis01].

Un sous-ensemble fermé  $A$  d'un espace topologique  $X$  est dit **propre** s'il est distinct de  $X$ .

**Théorème 1.17.** *Soient  $X$  un espace topologique de HAUSDORFF localement compact, localement connexe et  $(\tilde{X}_0, \mathbf{c}_0, X \setminus \mathcal{R})$  un revêtement régulier de degré  $b$  où  $\mathcal{R}$  est un fermé propre de  $X$  qui ne le sépare pas localement. Alors il existe un espace topologique séparé  $\tilde{X}_1$  localement compact et localement connexe, une injection continue  $\tilde{\mathbf{i}} : \tilde{X}_0 \rightarrow \tilde{X}_1$  et une application continue  $\mathbf{c}_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$  propre, surjective aux fibres finies telle que  $\tilde{\mathcal{R}} := \mathbf{c}_1^{-1}(\mathcal{R})$  est un fermé propre de  $\tilde{X}$  qui ne le sépare pas localement et de sorte que le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_0 & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{i}}} & \tilde{X}_1 \\ \mathbf{c}_0 \downarrow & & \downarrow \mathbf{c}_1 \\ X \setminus \mathcal{R} & \xrightarrow{\mathbf{i}} & X \end{array} \quad (1.5)$$

commute i.e.,  $\mathbf{c}_1 \circ \tilde{\mathbf{i}} = \mathbf{i} \circ \mathbf{c}_0$ . De plus, l'application  $\tilde{\mathbf{i}}$  vérifie  $\tilde{\mathbf{i}}(\tilde{X}_0) = \mathbf{c}_1^{-1}(X \setminus \mathcal{R})$  et l'espace  $\tilde{X}_1$  est unique en ce sens que si  $(\tilde{X}'_1, \mathbf{c}'_1, X)$  vérifie les mêmes conclusions, il existe un homéomorphisme  $h : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}'_1$  vérifiant  $\mathbf{c}'_1 \circ h = \mathbf{c}_1$ .

**Preuve.** Supposons sans perte de généralité que les espaces  $X$  et  $\tilde{X}_0$  sont connexes. Soit  $p \in \mathcal{R}$  fixé. Par hypothèse sur  $\mathcal{R}$ , il existe une base de voisinages  $\{U_\alpha\}_\alpha$  tels que  $U_\alpha \setminus \mathcal{R}$  est connexe. Si pour tout  $\alpha$ , il existe une composante connexe  $\delta_\alpha$  de  $\mathbf{c}_0^{-1}(U_\alpha \setminus \mathcal{R})$  telle que

$$\delta_\alpha \subset \delta_{\alpha+1} \text{ et } \bigcap_{\alpha} \delta_\alpha = \emptyset,$$

on dit que la suite  $\{\delta_\alpha\}_\alpha$  définit un **point bord**  $\tilde{p}$  de  $p$  dans  $\tilde{X}_0$ . Cette suite est alors appelée **système fondamental** de  $\tilde{p}$  dans  $\tilde{X}_0$ . Deux systèmes  $\{\delta_\alpha\}_\alpha$  et  $\{\eta_\beta\}_\beta$  définissent le même point bord si pour tout  $\alpha$  (respectivement pour tout  $\beta$ ), il existe  $\beta_0$  (respectivement  $\alpha_0$ ) tel que  $\eta_{\beta_0} \subset \delta_\alpha$  (respectivement  $\delta_{\alpha_0} \subset \eta_\beta$ ). Pour tout  $\alpha$ , on dit qu'un point bord  $\tilde{q}$  de  $q \in \mathcal{R} \cap U_\alpha$  dans  $\tilde{X}_0$  **touche**  $\delta_\alpha$  s'il existe un système fondamental  $\{\eta_\beta\}_\beta$  de  $\tilde{q}$  dans  $\tilde{X}_0$  tel que  $\eta_\beta \subset \delta_\alpha$  pour tout  $\beta \gg 1$ . Désignons par  $\tilde{\mathcal{R}}$  l'ensemble des points bords au-dessus de  $\mathcal{R}$  et posons  $\tilde{X}_1 := \tilde{X}_0 \cup \tilde{\mathcal{R}}$ . On définit aussi pour tout  $\alpha$ , l'ensemble suivant

$$\tilde{\delta}_\alpha := \delta_\alpha \cup \left\{ \tilde{q} \in \tilde{\mathcal{R}} \text{ tel que } q \in \mathcal{R} \cap U_\alpha \text{ et } \tilde{q} \text{ touche } \delta_\alpha \right\}.$$

La suite  $\{\tilde{\delta}_\alpha\}_\alpha$  est alors appelée **système de voisinages fondamentaux** de  $\tilde{p}$  dans  $\tilde{X}_1$ . Muni de cette topologie, l'espace  $\tilde{X}_1$  est un espace de HAUSDORFF. Soient en effet deux points bords distincts  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in \tilde{X}_1$ . Si l'un de ces points est dans  $\tilde{X}_0$  ou s'ils ne sont les points bords d'aucun même point  $p \in \mathcal{R}$ , on peut aisément les séparer par deux voisinages disjoints. Supposons qu'ils sont les points bords d'un même point  $p \in \mathcal{R}$  et soient  $\{\delta_\alpha^1\}_\alpha$  et  $\{\delta_\alpha^2\}_\alpha$  leurs systèmes fondamentaux dans  $\tilde{X}_0$ . On peut supposer qu'il existe  $\alpha_0$  tel que pour tout  $\alpha$ ,  $\delta_\alpha^2 \not\subset \delta_{\alpha_0}^1$  et en particulier  $\delta_{\alpha_0}^2 \not\subset \delta_{\alpha_0}^1$ . Les ensembles  $\delta_{\alpha_0}^1$  et  $\delta_{\alpha_0}^2$  étant deux composantes connexes distinctes de  $c_0^{-1}(U_\alpha \setminus \mathcal{R})$ , ils sont donc disjoints. De plus, tout point bord  $\tilde{q} \in \tilde{\mathcal{R}}$  qui touche  $\delta_{\alpha_0}^2$  ne peut pas toucher  $\delta_{\alpha_0}^1$ . Il s'en suit que  $\tilde{\delta}_{\alpha_0}^1$  et  $\tilde{\delta}_{\alpha_0}^2$  sont deux voisinages séparant  $\tilde{p}_1$  et  $\tilde{p}_2$ , ce qui montre que  $\tilde{X}_1$  est séparé. Par construction, l'espace  $\tilde{X}_1$  est localement connexe. Montrons qu'il est par ailleurs connexe. Supposons l'existence de deux ouverts  $E$  et  $F$  disjoints de  $\tilde{X}_1$  tels que  $\tilde{X}_1 = E \cup F$ . Puisque  $\tilde{X}_0$  est connexe, on peut le supposer inclus dans  $E$ . Si l'ouvert  $F$  est non vide, il contient un point  $\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{R}}$  et par conséquent un voisinage connexe  $\tilde{U}$  de ce point puisque  $\tilde{X}_1$  est localement connexe. Les ouverts  $\tilde{U} \cap E$  et  $\tilde{U} \cap F$  ne seraient alors pas disjoints ce qui contredit l'hypothèse. Donc  $\tilde{X}_1$  est connexe.

On définit l'application  $c_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$  de la manière suivante.

$$c_1(\tilde{p}) = \begin{cases} c_0(\tilde{p}) & \text{si } \tilde{p} \in \tilde{X}_0, \\ p & \text{si } \tilde{p} \in \tilde{\mathcal{R}} \text{ est un point bord de } p. \end{cases} \quad (1.6)$$

Cette application est continue et surjective. Montrons qu'elle est ouverte. Soit  $\tilde{U} \subset \tilde{X}_1$  un ouvert,  $U := c_1(\tilde{U})$  et soit  $\tilde{p} \in \tilde{U}$  d'image  $p \in U$  par  $c_1$ . Si  $p \notin \mathcal{R}$ , il est évident que  $U$  contient un voisinage de  $p$ . Si  $p \in \mathcal{R}$ , il existe un système de voisinages  $\{\tilde{\delta}_\alpha\}_\alpha$  inclus dans  $\tilde{U}$  de sorte que  $U_\alpha := c_1(\tilde{\delta}_\alpha)$  est un voisinage de  $p$  dans  $U$ . On en déduit que  $U = c_1(\tilde{U})$  est un ouvert de  $X$ .

L'application  $c_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$  est fermée. Soit en effet un fermé  $\tilde{F} \subset \tilde{X}_1$ ,  $p \in X \setminus F$  où  $F := c_1(\tilde{F})$  et  $\{U_\alpha\}$  une base de voisinages de  $p$  dans  $X$ . Supposons par l'absurde qu'il existe une infinité de  $\alpha$  pour lesquels  $U_\alpha \cap F \neq \emptyset$ . Il existe alors une pré-image  $\tilde{p}$  de  $p$  pour laquelle  $\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{F} \neq \emptyset$  où  $\tilde{U}_\alpha$  est la composante de  $c_1^{-1}(U_\alpha)$  qui contient  $\tilde{p}$ . Ceci est impossible puisque  $\tilde{p}$  n'appartient pas au fermé  $\tilde{F}$ . L'application  $c_1$  est donc fermée.

Par ailleurs, chaque fibre  $c_1^{-1}(p)$  contient au plus  $b$  points de sorte que l'application  $c_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$  est propre. L'ensemble  $\tilde{\mathcal{R}}$  est clairement fermé et distinct de  $\tilde{X}_1$  par construction. Montrons qu'il ne le divise pas localement. Soit  $\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{R}}$  un point bord,  $\tilde{U}$  un voisinage et  $\{\tilde{\delta}_\alpha\}_\alpha$  une base de voisinages inclus dans  $\tilde{U}$ . Alors par définition,  $\tilde{\delta}_\alpha \setminus \tilde{\mathcal{R}} = \delta_\alpha$  est connexe.

Montrons que l'espace  $\tilde{X}_1$  est localement compact. Soit  $\tilde{p} \in \tilde{X}_1$  et pour tout  $\alpha$ , désignons par  $\tilde{K}_\alpha$  la composante connexe de  $c_1^{-1}(K_\alpha)$  contenant  $\tilde{p}$ , où  $K_\alpha$  est un voisinage compact de  $p$  dans  $U_\alpha$ . Alors  $\tilde{K}_\alpha$  est compact. Soit en effet un recouvrement ouvert  $\tilde{\mathcal{V}} = \{\tilde{V}_i : i \in I\}$  de  $\tilde{K}_\alpha$ . Puisque  $c_1$  est une application ouverte, l'image  $\mathcal{V} := \{c_1(\tilde{V}_i) : i \in I\}$  forme un recouvrement ouvert du compact  $K_\alpha$ . On peut finalement extraire de la famille  $\tilde{\mathcal{V}}$  un nombre fini de ses ouverts recouvrant  $\tilde{K}_\alpha$  montrant ainsi la compacité de  $\tilde{K}_\alpha$ . Reste à prouver que l'espace  $\tilde{X}_1$  est unique, à homéomorphisme près. Soient  $c_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$  et  $c'_1 : \tilde{X}'_1 \rightarrow X$  deux prolongements vérifiant les conclusions du théorème et  $\tilde{i} : \tilde{X}_0 \rightarrow \tilde{X}_1$ ,  $\tilde{i}' : \tilde{X}_0 \rightarrow \tilde{X}'_1$  les injections associées. Notons  $\tilde{\mathcal{R}} = c_1^{-1}(\mathcal{R})$  et  $\tilde{\mathcal{R}}' = c'_1{}^{-1}(\mathcal{R})$ . Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{X}'_1 & \xleftarrow{\tilde{i}'} & \tilde{X}_0 & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{X}_1 \\
 c'_1 \downarrow & & \downarrow c_0 & & \downarrow c_1 \\
 X & \xleftarrow{i} & X \setminus \mathcal{R} & \xrightarrow{i} & X
 \end{array} \tag{1.7}$$

est commutatif *i.e.*,  $c_1 \circ \tilde{i} = c_0 = c'_1 \circ \tilde{i}'$ . Pour tout  $\tilde{z} = \tilde{i}(\zeta) \in \tilde{i}(\tilde{X}_0)$ , on pose  $h(\tilde{z}) = \tilde{i}'(\zeta)$ . Alors  $h : \tilde{i}(\tilde{X}_0) \rightarrow \tilde{i}'(\tilde{X}_0)$  est bien définie. C'est un homéomorphisme qui vérifie l'égalité  $h \circ \tilde{i} = \tilde{i}'$ . Il se prolonge continûment à  $\tilde{X}_1$  de la manière suivante : Pour tout  $\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{R}}$ , soit  $\{\tilde{\delta}_\alpha\}_\alpha$  une base de voisinages tels que  $\tilde{\delta}_\alpha \setminus \tilde{\mathcal{R}}$  est connexe. Fixons  $\tilde{p}_\alpha \in \tilde{\delta}_\alpha \setminus \tilde{\mathcal{R}}$  et  $\tilde{p}'_\alpha = h(\tilde{p}_\alpha)$ . Par construction la suite  $(\tilde{p}_\alpha)_\alpha$  converge vers  $\tilde{p}$  et par continuité de  $h : \tilde{X} \setminus \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \tilde{X}' \setminus \tilde{\mathcal{R}}'$ , on en déduit que la suite  $((c'_1 \circ h)(\tilde{p}_\alpha))_\alpha$  converge vers  $p = c_1(\tilde{p})$ . Compte tenu de la connexité de  $\tilde{\delta}_\alpha \setminus \tilde{\mathcal{R}}$ , il existe une unique pré-image  $\tilde{p}'$  de  $p$  par  $c'_1$  vérifiant  $\lim_\alpha \tilde{p}'_\alpha = \tilde{p}' \in \tilde{\mathcal{R}}'$ . Un tel  $\tilde{p}'$  ne dépend pas du choix de  $\tilde{p}_\alpha$ . En posant alors  $h(\tilde{p}) = \tilde{p}'$ , l'application  $h$  se prolonge en un homéomorphisme  $\tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}'_1$ . Le théorème 1.17 est ainsi prouvé.

□

**Remarques 1.18.** 1. Si dans les hypothèses du théorème,  $\mathcal{R}$  désigne une hypersurface d'un espace complexe normal  $X$ , le théorème 1.17 permet de prolonger topologiquement un revêtement analytique régulier au-dessus de  $\mathcal{R}$ .

2. Lorsque le nombre  $b$  de feuilletés est égal à 1, le prolongement  $c_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$  est un homéomorphisme.
3. Si dans les hypothèses du théorème 1.17 l'espace  $\tilde{X}_0$  est connexe alors  $\tilde{X}_1$  l'est également.

L'énoncé du théorème 1.17 est précis. L'espace  $\tilde{X}_1$  en effet construit est tel que  $\tilde{\mathcal{R}}$  ne le sépare pas localement. On verra dans la section suivante que, si  $X$  est un espace complexe normal alors  $\tilde{X}_1$  possède lui-même une structure d'espace complexe normal. L'exemple 3.3 du chapitre 3 montre que le prolongement de STEIN n'est pas nécessairement l'espace le plus « naturel » à considérer.

### 1.3 Théorème de GRAUERT et REMMERT

On énonce dans cette section le théorème 1.19 de GRAUERT et REMMERT puis on montre au théorème 1.21 qu'un espace de revêtement peut-être muni d'une structure d'espace complexe normal.

Soit  $D$  un domaine borné pseudoconvexe de  $\mathbb{C}^n$  muni de la norme polycirculaire

$$\|(z_1, \dots, z_n)\| := \max\{|z_j| : j = 1, \dots, n\}. \quad (1.8)$$

Soit  $\mathcal{R}$  un ensemble analytique propre non vide de  $D$ ,  $\tilde{D}$  un espace de HAUSDORFF connexe localement compact et  $c : \tilde{D} \rightarrow D$  une application continue et propre. Notons  $Y = D \setminus \mathcal{R}$  et  $\tilde{Y} = c^{-1}(Y)$ . Supposons de plus que  $\tilde{\mathcal{R}} = c^{-1}(\mathcal{R})$  ne sépare pas localement  $\tilde{D}$  et que la restriction  $c|_{\tilde{Y}} : \tilde{Y} \rightarrow Y$  induit un revêtement régulier fini de degré  $b$ . En utilisant les arguments donnés à la remarque 1.8, on peut supposer que  $\mathcal{R}$  est une hypersurface de codimension pure égale à 1. Par hypothèse, l'espace  $\tilde{Y}$  hérite d'une structure naturelle de variété complexe de sorte que  $c|_{\tilde{Y}}$  est holomorphe, voir par exemple [GR65]. On dit qu'une fonction continue  $h : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{C}$  est continûment faiblement holomorphe si sa restriction à  $\tilde{Y}$  est holomorphe. On lui associe alors son polynôme de WEIERSTRASS

$$\forall (z, \zeta) \in D \setminus \mathcal{R} \times \mathbb{C}, \quad \omega_f(z, \zeta) := \prod_{w \in c^{-1}(z)} (\zeta - f(w)) = \zeta^b + \sum_{i=1}^b a_i(z) \zeta^{b-i}. \quad (1.9)$$

à coefficients holomorphes dans  $D \setminus \mathcal{R}$ . Le théorème suivant est dû à GRAUERT et REMMERT dans [GR58].

**Théorème 1.19.** *Soit  $D \subset \mathbb{C}^n$  un domaine borné, pseudoconvexe et  $c : \tilde{D} \rightarrow D$  une application continue, propre vérifiant les hypothèses ci-dessus. Alors pour tout  $z_* \in Y$ , il existe une fonction continûment faiblement holomorphe  $h$  sur  $\tilde{D}$  qui sépare les pré-images  $w_1, \dots, w_b$  de  $z_*$  par  $c$  i.e.,  $h(w_i) \neq h(w_j)$  pour tout  $i \neq j$ .*

DETHLOFF a redémontré de résultat dans [Det90] en utilisant le théorème 1.20 ci-dessous aux estimées  $L^2$ .

Soit  $d\nu := c^*(d\lambda)$  où  $d\lambda := \left(\frac{i}{2}\right)^n dz \wedge d\bar{z}$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{C}^n$ . On désigne par  $\mathcal{C}^\infty(\tilde{Y})_{(0,1)}$  l'ensemble des  $(0,1)$ -formes sur  $\tilde{Y}$  à coefficients  $\mathcal{C}^\infty$

$$\mathcal{C}^\infty(\tilde{Y})_{(0,1)} := \left\{ g = \sum_{i=1}^n g_i d\bar{z}_i \text{ où } g_i \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{Y}) \right\}.$$

On note  $\mathcal{C}_0^\infty(\tilde{Y})_{(0,1)}$  le sous-espace des  $(0,1)$ -formes de  $\mathcal{C}^\infty(\tilde{Y})_{(0,1)}$  à support compact. Soit  $|g| := \sqrt{\sum_{i=1}^n |g_i|^2}$  et posons  $\varphi_0(z) := 2n \ln \|z\|$  où  $z \in \mathbb{C}^n$ . Notons enfin le diamètre  $\text{diam } Y := \sup \{\|z - w\| : z, w \in Y\}$ .

**Théorème 1.20.** *Soit  $g \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{Y})_{(0,1)}$  une  $(0,1)$ -forme sur  $\tilde{Y}$  telle que  $\bar{\partial}g = 0$  et  $\lambda_0 := \int_{\tilde{Y}} |g|^2 e^{-\varphi_0 \circ c} d\nu < +\infty$ . Alors il existe une fonction  $u \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{Y})$  telle que  $\bar{\partial}u = g$  et*

$$\int_{\tilde{Y}} |u|^2 e^{-\varphi_0 \circ c} d\nu \leq k \lambda_0$$

où  $k := (1 + (\text{diam } Y)^2)^2$ .

On peut se reporter au théorème 1.7 de [Det90] pour la preuve de ce théorème. Il existe dans le cas des domaines de  $\mathbb{C}^n$  un résultat similaire, voir par exemple le théorème 4.4.2 dans [Hör73].

Le théorème 1.19 permet de munir l'espace  $\tilde{D}$  d'une structure d'espace complexe normal. L'ensemble des fonctions continûment faiblement holomorphes sur  $\tilde{D}$  forme un faisceau noté  $\mathcal{O}'_{\tilde{D}}$ . La démonstration de ce résultat s'inspire d'une construction donnée dans [DG94].

**Théorème 1.21.** *Dans les conditions du théorème 1.19, l'espace  $\tilde{D}$  hérite d'une structure d'espace complexe normal de sorte que  $c : \tilde{D} \rightarrow D$  est holomorphe,  $\tilde{\mathcal{R}} \subset \tilde{D}$  est une hypersurface analytique et  $(\tilde{D}, c, D)$  est un revêtement analytique à  $b$  feuilletés.*

**Preuve.** Montrons que l'espace  $(\tilde{D}, \mathcal{O}'_{\tilde{D}})$  est normal en chacun de ses points. Soit  $w_0 \in \tilde{\mathcal{R}}$  un point fixé et  $\tilde{U}$  un voisinage connexe tel que  $\tilde{U} \setminus \tilde{\mathcal{R}}$  est connexe. On montre que ce voisinage, muni du faisceau restreint  $\mathcal{O}'_{\tilde{U}} = \mathcal{O}'_{\tilde{D}}|_{\tilde{U}}$  est homéomorphe à un espace complexe normal. Quitte à réduire  $\tilde{U}$ , on peut supposer que son image  $U = c(\tilde{U})$  est un polydisque. Fixons un point  $z_* \in U \setminus \mathcal{R}$ . D'après le théorème 1.19 de GRAUERT et REMMERT appliqué au revêtement restreint  $(\tilde{U}, c, U)$ , il existe une fonction continûment faiblement holomorphe  $h$  sur  $\tilde{U}$  qui sépare les pré-images de  $z_*$ . Soit  $\omega_h(z, \zeta)$  son polynôme de WEIERSTRASS à coefficients

holomorphes dans  $U \setminus \mathcal{R}$  et  $\sigma$  le lieu des points où son discriminant s'annule. Définissons alors  $\tilde{\sigma} := \mathbf{c}^{-1}(\sigma)$  et  $M := \{(z, \zeta) \in U \times \mathbb{C} : \omega_h(z, \zeta) = 0\}$ . Considérons l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \tilde{U} &\longrightarrow U \times \mathbb{C} \\ w &\longmapsto (\mathbf{c}(w), h(w)) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Elle est continûment faiblement holomorphe sur  $\tilde{U}$  et son image  $\Phi(\tilde{U})$  est égale à  $M$  qui est un ensemble analytique connexe de  $U \times \mathbb{C}$ . De plus,  $z \in \sigma$  si et seulement si  $h$  ne sépare pas au moins deux pré-images de  $z$  par  $\mathbf{c}$ . En posant  $M_\sigma = M \cap (\sigma \times \mathbb{C})$ , on en déduit que la restriction  $\Phi_1 = \Phi|_{\tilde{U} \setminus \tilde{\sigma}} : \tilde{U} \setminus \tilde{\sigma} \rightarrow M \setminus M_\sigma$  est un homéomorphisme. De plus, par le théorème de normalisation d'OKA, voir le théorème A.12, il existe un espace complexe normal  $N$ , une application holomorphe  $\Psi : N \rightarrow M$  et un ensemble analytique  $A$  dans  $M$  inclus dans  $M_\sigma$  tel que

- $\Psi^{-1}(A)$  est nulle part dense dans  $N$ ,
- la restriction  $\Psi : \Psi^{-1}(A) \rightarrow A$  est finie et
- $\Psi : N \setminus \Psi^{-1}(A) \rightarrow M \setminus A$  est biholomorphe.

On en déduit un biholomorphisme  $t : N \setminus \Psi^{-1}(M_\sigma) \rightarrow \tilde{U} \setminus \tilde{\sigma}$ . Par ailleurs,  $\tilde{\sigma}$  ne sépare pas localement  $\tilde{U}$ . Soit en effet  $w \in \tilde{\sigma}$  et  $\tilde{W}$  un voisinage. Il existe une base de voisinages  $V_\alpha \subset t(\tilde{W})$  de  $t(w)$  tels que qui se prolonge continûment en  $\bar{t} : N \rightarrow U$  puisque les ensembles  $\Psi^{-1}(M_\sigma)$  et  $\Phi^{-1}(M_\sigma)$  ne séparent pas localement  $N$  et  $\tilde{U}$  respectivement.

Par unicité du théorème 1.17 appliquée au revêtement régulier à un feuillet

$$\left( \tilde{U} \setminus \Phi^{-1}(M_\sigma), t, N \setminus \Psi^{-1}(M_\sigma) \right),$$

on en déduit que  $\bar{t} : N \rightarrow \tilde{U}$  est un biholomorphisme ce qui montre le résultat.

□

## 1.4 Prolongement de type THULLEN

Dans cette section, on donne quelques théorèmes de prolongement fort de revêtements analytiques. Le nombre de feuillets est donc constant. Le dernier résultat de ce paragraphe est un théorème de prolongement de type THULLEN.

Rappelons le résultat préliminaire suivant qui caractérise les revêtements analytiques, voir [DG94] pour les détails et la preuve.

**Proposition 1.22.** *Soient  $\tilde{X}$  un espace topologique et  $c : \tilde{X} \rightarrow X$  une application continue. Alors  $(\tilde{X}, c, X)$  est un revêtement analytique si et seulement si pour tout  $z \in X$  il existe un voisinage ouvert  $U \subset X$  et un revêtement analytique  $(U, \pi, V)$  au-dessus d'un domaine  $V \subset \mathbb{C}^n$  tel que  $(\tilde{U}, \pi \circ c, V)$  est un revêtement analytique, où  $\tilde{U} := c^{-1}(U)$ .*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & & \\ \downarrow c & \searrow \pi \circ c & \\ U & \xrightarrow{\pi} & V \end{array} \quad (1.11)$$

**Théorème 1.23.** *Soit  $\mathcal{R} \subset X$  un ensemble analytique propre d'un espace complexe normal  $X$  et  $(\tilde{X}_0, c_0, X \setminus \mathcal{R})$  un revêtement analytique régulier de degré fini au-dessus de  $X \setminus \mathcal{R}$ . Alors il se prolonge fortement et surjectivement au-dessus de  $X$ . Ce prolongement est unique à équivalence de revêtements analytiques près.*

**Preuve.** D'après le théorème 1.17 de STEIN, on peut prolonger topologiquement le revêtement au-dessus de  $X$ . Soit  $z \in X$  un point fixé. Si  $X$  est un domaine borné pseudoconvexe dans  $\mathbb{C}^n$ , le théorème 1.21 donne le résultat. Sinon, il existe d'après le théorème 7.2.2 de [GR84] un voisinage ouvert  $U$  de  $z$ , un polydisque  $V \subset \mathbb{C}^n$  et une application holomorphe  $\pi : U \rightarrow V$  tels que  $(U, \pi, V)$  soit un revêtement analytique. Il suffit d'après la proposition 1.22 précédente de montrer que la composition  $\pi \circ c_1$  induit un revêtement analytique  $(\tilde{U}, \pi \circ c_1, V)$ , où  $\tilde{U}$  est une composante connexe de  $c_1^{-1}(U)$ . Par normalité de  $X$ , l'ensemble  $\text{Sing } X$  des points critiques est analytique de codimension supérieure ou égale à 2. La réunion  $\mathcal{R} \cup \text{Sing } X$  est donc analytique et puisque  $\pi$  est propre, l'image  $\pi[(\mathcal{R} \cup \text{Sing } X) \cap U]$  est, d'après le théorème de REMMERT, analytique. Désignons par  $\mathcal{R}_V$  le diviseur de ramification du revêtement analytique  $(U, \pi, V)$  et notons  $\mathcal{R}_1 := \mathcal{R}_V \cup \pi[(\mathcal{R} \cup \text{Sing } X) \cap U]$  qui est propre. Alors la composée  $\pi \circ c_1$  induit un revêtement analytique régulier fini au-dessus de  $V \setminus \mathcal{R}_1$  qui, d'après le cas précédent, se prolonge fortement en un revêtement analytique  $(\tilde{V}, c_V, V)$  au-dessus de  $V$ . Désignons par  $\tilde{\mathcal{R}}_1$  l'image réciproque par  $\pi \circ c_1$  de  $\mathcal{R}_1$ . Il existe une application holomorphe injective  $\tilde{i}_V : \tilde{U} \setminus \tilde{\mathcal{R}}_1 \rightarrow \tilde{V}$  telle que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{U} & \xleftarrow{\tilde{i}_U} & \tilde{U} \setminus \tilde{\mathcal{R}}_1 & \xrightarrow{\tilde{i}_V} & \tilde{V} \\ \downarrow \pi \circ c_1 & & \downarrow \pi \circ c_1 & & \downarrow c_V \\ V & \xleftarrow{i} & V \setminus \mathcal{R}_1 & \xrightarrow{i} & V \end{array} \quad (1.12)$$

commute, les applications  $i$  et  $\tilde{i}_U$  désignant ici les inclusions naturelles. Par unicité

du théorème 1.17 les revêtements  $(\tilde{U}, \pi \circ c_1, V)$  et  $(\tilde{V}, c_V, V)$  sont topologiquement équivalents. On en déduit que  $(\tilde{U}, \pi \circ c_1, V)$  est un revêtement analytique ce qui prouve le théorème. □

**Remarque 1.24.** Si dans les hypothèses du théorème 1.23 l'espace  $\tilde{X}_0$  est connexe alors  $\tilde{X}_1$  est également connexe, en vertu de la remarque 1.18.3.

On en déduit le résultat suivant, énoncé dans [DG94].

**Théorème 1.25.** *Soit  $A$  un ensemble analytique propre d'un espace complexe normal  $X$  et  $(\tilde{X}_0, c_0, X \setminus A)$  un revêtement analytique au-dessus de  $X \setminus A$ . Supposons que la fermeture topologique  $\bar{\mathcal{R}}$  de son diviseur de ramification  $\mathcal{R} \subset X \setminus A$  est un ensemble analytique propre de  $X$ . Alors  $(\tilde{X}_0, c_0, X \setminus A)$  se prolonge fortement et surjectivement au-dessus de  $X$ . Ce prolongement est unique à équivalence de revêtements analytiques près.*

**Preuve.** Posons  $Y := X \setminus \bar{\mathcal{R}}$  et  $\tilde{Y} := c_0^{-1}(Y)$ . La restriction  $c_0 : \tilde{Y} \rightarrow Y$  induit un revêtement analytique régulier fini qui, en vertu du théorème 1.23 précédent se prolonge fortement au-dessus de  $X$ . Par unicité, le revêtement analytique construit prolonge fortement et surjectivement  $(\tilde{X}_0, c_0, X \setminus A)$  ce qui prouve le théorème. □

En particulier, si dans les hypothèses du théorème 1.25 précédent, l'ensemble analytique  $A$  est de codimension supérieure ou égale à 2, un tel prolongement est toujours possible en vertu du résultat suivant dû à REMMERT et STEIN dans [RS53] :

**Théorème 1.26.** *Soit  $X$  un espace complexe,  $A$  un ensemble analytique de  $X$  et  $Z$  un sous-ensemble analytique de  $X \setminus A$  de codimension pure égale à  $p$ . Si  $\dim A < p$  alors la fermeture  $\bar{Z}$  de  $Z$  dans  $X$  est un sous-ensemble analytique.*

Le théorème suivant est dû à THULLEN, REMMERT et STEIN.

**Théorème 1.27.** *Soit  $A$  un ensemble analytique d'un espace complexe  $X$  de dimension au plus égale à  $k$  et  $X_0$  un ouvert de  $X$  qui intersecte toute branche irréductible de  $A$ . Si  $\mathcal{R}$  est un ensemble analytique dans  $(X \setminus A) \cup X_0$  de dimension pure égale à  $k$  alors  $X \cap \bar{\mathcal{R}}$  est analytique dans  $X$ .*

Il a d'abord été prouvé par THULLEN dans le cas où  $X$  est un domaine de  $\mathbb{C}^n$  et  $k = 1$ . Une démonstration dans le cas général figure par exemple dans [RS53; Siu74]. On en déduit le théorème d'extension de type THULLEN suivant.

**Théorème 1.28.** *Soient  $A$  un ensemble analytique d'un ouvert  $D_1 \subset \mathbb{C}^n$  et  $D_0$  un ouvert contenant  $D_1 \setminus A$  qui intersecte toute branche de codimension 1 de  $A$ . Alors tout revêtement analytique au-dessus de  $D_0$  se prolonge fortement et surjectivement à  $D_1$  de manière unique à équivalence de revêtements près.*

**Preuve.** Soit  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$  un tel revêtement et désignons par  $\mathcal{R}$  son diviseur de ramification. D'après le théorème 1.27, il se prolonge en un ensemble analytique  $\overline{\mathcal{R}}$  propre de  $D_1$ . Posons  $Y := D_1 \setminus \overline{\mathcal{R}}$  et  $\tilde{Y} := \mathbf{c}_0^{-1}(Y)$ . La restriction  $\mathbf{c} : \tilde{Y} \rightarrow Y$  induit un revêtement analytique régulier qui d'après le théorème 1.23 se prolonge fortement au-dessus de  $D_1$ . Par unicité, ce revêtement construit prolonge fortement et surjectivement  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$  ce qui prouve le théorème.

□



# Chapitre 2

## Prolongement aux domaines de $\mathbb{C}^n$

Dans ce chapitre, on s'intéresse au prolongement des revêtements analytiques définis au-dessus d'un domaine de  $\mathbb{C}^n$ . Le premier paragraphe est consacré au principal théorème de ce chapitre montrant l'existence d'un prolongement faible, sous certaines conditions.

Au deuxième paragraphe, on montre le lemme 2.8 permettant d'en déduire le théorème 2.12 de prolongement de revêtement analytique au-dessus du polydisque. Au troisième paragraphe, on s'intéresse aux revêtements analytiques définis au-dessus d'une figure de HARTOGS et à leurs prolongement sur le polydisque, voir le corollaire 2.20. À la dernière section de ce chapitre, on montre que les revêtements à deux feuilletés définis au-dessus d'un même domaine sont équivalents, ce qui permet d'en déduire l'existence d'un prolongement fort dans ce cas, voir le théorème 2.27.

### 2.1 Résultat principal

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant.

**Théorème 2.1.** *Soit  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$  un revêtement analytique connexe à  $b_0$  feuilletés défini au-dessus d'un domaine  $D_0 \subset \mathbb{C}^n$ . Supposons que son diviseur de ramification  $\mathcal{R}_0$  se prolonge en une hypersurface  $\mathcal{R}_1$  dans un domaine  $D_1 \supset D_0$  et que pour tout  $z_* \in D_0 \setminus \mathcal{R}_0$ , le morphisme*

$$\pi_1(D_0 \setminus \mathcal{R}_0, z_*) \rightarrow \pi_1(D_1 \setminus \mathcal{R}_1, z_*) \quad (2.1)$$

*induit par l'inclusion naturelle  $D_0 \setminus \mathcal{R}_0 \subset D_1 \setminus \mathcal{R}_1$  est surjectif. Alors il existe un revêtement analytique connexe  $(\tilde{D}_1, \mathbf{c}_1, D_1)$  de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_1$  qui prolonge faiblement  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$ . Il vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) *Le prolongement est surjectif i.e., le nombre  $b_1$  de ses feuilletts est inférieur ou égal à  $b_0$ ,*
- (ii) *si  $b_1 = b_0$ , le prolongement est fort,*
- (iii) *tout autre prolongement connexe  $(\tilde{D}'_1, \mathbf{c}'_1, D_1)$  de  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$  de diviseur  $\mathcal{R}_1$  est surjectif et le nombre  $b'_1$  de ses feuilletts n'excède pas  $b_1$ ,*
- (iv) *si  $b'_1 = b_1$  alors les prolongements  $(\tilde{D}_1, \mathbf{c}_1, D_1)$  et  $(\tilde{D}'_1, \mathbf{c}'_1, D_1)$  sont équivalents.*

Il existe dans ces conditions un prolongement connexe « maximal » de  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$  pour lequel le nombre de feuilletts est le plus grand possible.

Avant de prouver le théorème 2.1, donnons quelques définitions. Posons  $Y_1 := D_1 \setminus \mathcal{R}_1$ ,  $Y_0 := D_0 \setminus \mathcal{R}_0$ ,  $\tilde{\mathcal{R}}_0 := \mathbf{c}_0^{-1}(\mathcal{R}_0)$  et  $\tilde{Y}_0 := \mathbf{c}_0^{-1}(Y_0)$  de sorte que  $(\tilde{Y}_0, \mathbf{c}_0, Y_0)$  est un revêtement analytique régulier à  $b_0$  feuilletts. On fixe une pré-image  $w_*$  d'un point  $z_* \in Y_0$  par  $\mathbf{c}_0$ . Pour tout chemin  $\alpha \subset Y_0$  d'origine  $z_*$ , on désigne par  $\mathbf{c}_0^* \alpha$  son unique relevé par  $\mathbf{c}_0$  d'origine  $w_*$ , comme défini au théorème 1.2. On note enfin  $H$  le sous-groupe de  $\pi_1(Y_0, z_*)$  d'indice  $b_0$  défini au théorème 1.4.

**Définition 2.2.** Soient  $\alpha_{z_*z}^1$  et  $\alpha_{z_*z}^2$  deux chemins dans  $Y_1$  reliant  $z_*$  à un point  $z \in Y_1$ . On dit qu'ils sont équivalents si  $\alpha_{z_*z}^2 \cdot (\alpha_{z_*z}^1)^{-1} \in \mathbf{i}_*(H)$  i.e., s'il existe un lacet  $\gamma \subset Y_0$  basé en  $z_*$  homotope à  $\alpha_{z_*z}^2 \cdot (\alpha_{z_*z}^1)^{-1}$  dans  $Y_1$  tel que son relevé  $\mathbf{c}_0^* \gamma$  par  $\mathbf{c}_0$  est fermé.

On remarque qu'en général, un lacet  $\gamma \subset Y_0$  peut être homotope dans  $Y_1$  au lacet constant alors que le relevé de  $\gamma$  par  $\mathbf{c}_0$  n'est, en aucune de ses pré-images, fermé. On obtient alors une relation d'équivalence entre les chemins dans  $Y_1$  d'origine  $z_*$ . La classe d'un tel chemin  $\alpha_{z_*z}$  est notée  $[\alpha_{z_*z}]$ .

**Remarque 2.3.** Deux lacets  $\alpha_{z_*}^1$  et  $\alpha_{z_*}^2$  homotopes dans  $Y_1$  sont équivalents au sens de la définition 2.2.

**Preuve du théorème 2.1.** La construction du prolongement est similaire à celle du revêtement universel. Posons  $\tilde{Y}_1 := \{[\alpha_{z_*z}] : z \in Y_1\}$  et définissons la projection  $\mathbf{c}_1 : \tilde{Y}_1 \rightarrow Y_1$  par  $\mathbf{c}_1([\alpha_{z_*z}]) := z$ . On munit  $\tilde{Y}_1$  de la topologie suivante. Un sous-ensemble  $\tilde{U} \subset \tilde{Y}_1$  est ouvert si pour toute classe de chemin  $[\alpha_{z_*z}]$  dans  $\tilde{U}$ , il existe un ouvert simplement connexe  $V \subset Y_1$  contenant  $z$  tel que l'ensemble

$$[\alpha_{z_*z}] \cdot V := \{[\alpha_{z_*z} \cdot \beta] : \beta \text{ est un chemin dans } V \text{ d'origine } z\} \quad (2.2)$$

est contenu dans  $\tilde{U}$ .

Montrons que l'espace  $\tilde{Y}_1$  est connexe par arcs. Pour tout  $[\alpha_{z_*z}] \in \tilde{Y}_1$  et pour tout  $(s, t) \in [0, 1]^2$ , on pose  $\alpha_s(t) := \alpha_{z_*z}(st)$ . L'application  $s \mapsto [\alpha_s]$  est un chemin dans  $\tilde{Y}_1$  reliant  $[z_*]$  à  $[\alpha_{z_*z}]$  où  $[z_*]$  est la classe du lacet constant égal à  $z_*$ .

Montrons que  $\tilde{Y}_1$  est de HAUSDORFF. Soient  $[\alpha_{z_*z_1}^1] \neq [\alpha_{z_*z_2}^2]$  deux points distincts dans  $\tilde{Y}_1$  où  $z_1, z_2 \in Y_1$ . Si  $z_1$  et  $z_2$  sont distincts, on peut les séparer par des voisinages simplement connexes  $V_1$  et  $V_2$  dans  $Y_1$  de sorte que les ensembles  $[\alpha_{z_*z_1}^1] \cdot V_1$  et  $[\alpha_{z_*z_2}^2] \cdot V_2$ , définis dans (2.2), sont des voisinages disjoints de  $[\alpha_{z_*z_1}^1]$  et  $[\alpha_{z_*z_2}^2]$ . Supposons maintenant que  $z_1 = z_2 = z \in Y_1$  et désignons par  $V$  un voisinage ouvert simplement connexe de  $z$ . Alors les ensembles  $[\alpha_{z_*z}^1] \cdot V$  et  $[\alpha_{z_*z}^2] \cdot V$  sont disjoints. En effet, supposons au contraire qu'il existe  $\tilde{z} \in V$  et deux chemins  $\beta_{z\tilde{z}}^1, \beta_{z\tilde{z}}^2$  reliant  $z$  à  $\tilde{z}$  tels que

$$[\alpha_{z_*z}^1 \cdot \beta_{z\tilde{z}}^1] = [\alpha_{z_*z}^2 \cdot \beta_{z\tilde{z}}^2]. \quad (2.3)$$

Puisque  $\alpha_{z_*z}^2 \cdot \beta_{z\tilde{z}}^2 \cdot (\alpha_{z_*z}^1 \cdot \beta_{z\tilde{z}}^1)^{-1}$  est homotope à  $\alpha_{z_*z}^2 \cdot (\alpha_{z_*z}^1)^{-1}$  dans  $Y_1$ , l'égalité (2.3) implique que  $\alpha_{z_*z}^2 \cdot (\alpha_{z_*z}^1)^{-1} \in i_*(H)$  ce qui contredit le fait que  $[\alpha_{z_*z}^1] \neq [\alpha_{z_*z}^2]$  et on en déduit le résultat.

Montrons que  $(\tilde{Y}_1, c_1, Y_1)$  est un revêtement régulier. Soit  $\{[\alpha_{z_*z}^i] : i \in I\}$  l'ensemble des pré-images d'un point  $z \in Y_1$  où  $I$  désigne un ensemble au plus dénombrable et  $V$  un voisinage ouvert simplement connexe de  $z$ . Alors

$$c_1^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} ([\alpha_{z_*z}^i] \cdot V).$$

D'après ce qui a été montré ci-dessus, les ouverts  $[\alpha_{z_*z}^i] \cdot V$  sont deux à deux disjoints et la restriction de  $c_1$  à chacun de ces ouverts induit un homéomorphisme sur  $V$  ce qui prouve que  $(\tilde{Y}_1, c_1, Y_1)$  est un revêtement régulier.

On pose pour tout  $w \in \tilde{Y}_0$ ,  $\tilde{i}(w) := [c_0 \circ \lambda_{w_*w}]$  où  $\lambda_{w_*w}$  est un chemin dans  $\tilde{Y}_0$  liant  $w_*$  à  $w$ . L'application  $\tilde{i} : \tilde{Y}_0 \rightarrow \tilde{Y}_1$  est bien définie puisque par hypothèse l'espace  $\tilde{Y}_0$  est connexe par arcs et que pour tous chemins  $\lambda$  et  $\lambda'$  reliant  $w_*$  à  $w$ ,  $[c_0 \circ \lambda] = [c_0 \circ \lambda']$ . Elle est par ailleurs continue et vérifie  $c_1 \circ \tilde{i} = c_0$ . De plus, la restriction sur les fibres  $\tilde{i} : c_0^{-1}(z_*) \rightarrow c_1^{-1}(z_*)$  est surjective puisque pour toute classe  $[\alpha]$  de lacet basé en  $z_*$ , la surjectivité du morphisme défini dans (2.1) implique qu'il existe un lacet  $\gamma \subset Y_0$  tel que  $\alpha$  et  $\gamma$  sont équivalents au sens de la définition 2.2. En notant  $w := c_0^*\gamma(1)$ , on en déduit que  $\tilde{i}(w) = [\gamma] = [\alpha]$  en vertu de la remarque 2.3. Le théorème 1.2 de relèvement des chemins permet

d'en déduire enfin que l'application  $\tilde{\mathfrak{i}} : \tilde{Y}_0 \rightarrow \tilde{Y}_1$  est surjective. On munit l'espace  $\tilde{Y}_1$  d'une structure de variété complexe de sorte que l'application  $\mathfrak{c}_1 : \tilde{Y}_1 \rightarrow Y_1$  est holomorphe. On en déduit ainsi que  $(\tilde{Y}_1, \mathfrak{c}_1, Y_1)$  est un revêtement analytique régulier de degré  $b_1 \leq b_0$ . D'après le théorème 1.23, il se prolonge fortement en un revêtement analytique  $(\tilde{D}_1, \mathfrak{c}_1, D_1)$  à  $b_1$  feuillet de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_1$ . Montrons que le revêtement  $(\tilde{D}_1, \mathfrak{c}_1, D_1)$  est un prolongement faible et surjectif de  $(\tilde{D}_0, \mathfrak{c}_0, D_0)$  i.e., l'application  $\tilde{\mathfrak{i}}$  se prolonge en une application holomorphe  $\tilde{\mathfrak{i}} : \tilde{D}_0 \rightarrow \tilde{D}_1$  telle que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{D}_0 & \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{i}}} & \tilde{D}_1 \\ \mathfrak{c}_0 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \mathfrak{c}_1 \\ D_0 & \xrightarrow{\mathfrak{i}} & D_1 \end{array} \quad (2.4)$$

commute. Soit  $w_0 \in \tilde{\mathcal{R}}_0$  une pré-image fixée de  $z_0 \in \mathcal{R}_0$  par  $\mathfrak{c}_0$ ,  $\tilde{U}$  un voisinage ouvert connexe de  $w_0$  tel que  $\tilde{U} \setminus \tilde{\mathcal{R}}_0$  est connexe et  $\tilde{V} \subset \tilde{D}_1$  la composante connexe de  $\mathfrak{c}_1^{-1}(U)$  telle que  $\tilde{\mathfrak{i}}(\tilde{U} \setminus \tilde{\mathcal{R}}_0) \subset \tilde{V}$ , où  $U := \mathfrak{c}_0(\tilde{U})$ . Quitte à réduire  $\tilde{U}$ , on peut supposer que l'espace complexe  $\tilde{V}$  est biholomorphe à un ensemble analytique  $A$  d'un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{C}^m$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ , cf définition A.5. Par conséquent, on peut remplacer  $\tilde{\mathfrak{i}}$  par  $m$  fonctions holomorphes bornées  $\tilde{\mathfrak{i}}_k : \tilde{U} \setminus \tilde{\mathcal{R}}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $k = 1, \dots, m$ . D'après le théorème A.10 de prolongement de RIEMANN, chaque fonction  $\tilde{\mathfrak{i}}_k$  se prolonge holomorphiquement en  $\tilde{\mathfrak{i}}_k : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}$ . L'application  $(\tilde{\mathfrak{i}}_1, \dots, \tilde{\mathfrak{i}}_m) : \tilde{U} \rightarrow A$  induit un prolongement  $\tilde{\mathfrak{i}} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  dans un voisinage de  $w_0$ . Il existe alors une application  $\tilde{\mathfrak{i}} : \tilde{D}_0 \rightarrow \tilde{D}_1$  faisant commuter le diagramme (2.4) et l'assertion (i) du théorème 2.1 est prouvée.

Si  $b_1 = b_0$ , l'application  $\tilde{\mathfrak{i}}$  induit une bijection entre les fibres  $\mathfrak{c}_0^{-1}(z_*)$  et  $\mathfrak{c}_1^{-1}(z_*)$ . On en déduit que l'application  $\tilde{\mathfrak{i}} : \tilde{D}_0 \rightarrow \tilde{D}_1$  est biholomorphe. Le revêtement analytique  $(\tilde{D}_1, \mathfrak{c}_1, D_1)$  est dans ce cas un prolongement fort de  $(\tilde{D}_0, \mathfrak{c}_0, D_0)$ .

Montrons les deux dernières assertions du théorème. Soit  $(\tilde{D}'_1, \mathfrak{c}'_1, D_1)$  un prolongement connexe de  $(\tilde{D}_0, \mathfrak{c}_0, D_0)$  de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_1$ . Il existe une application  $\tilde{\mathfrak{i}}' : \tilde{D}_0 \rightarrow \tilde{D}'_1$  holomorphe telle que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{D}'_1 & \xleftarrow{\tilde{\mathfrak{i}}'} & \tilde{D}_0 & \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{i}}} & \tilde{D}_1 \\ \mathfrak{c}'_1 \downarrow & & \downarrow \mathfrak{c}_0 & & \downarrow \mathfrak{c}_1 \\ D_1 & \xleftarrow{\mathfrak{i}} & D_0 & \xrightarrow{\mathfrak{i}} & D_1 \end{array}$$

commute i.e.,  $\mathfrak{c}'_1 \circ \tilde{\mathfrak{i}}' = \mathfrak{c}_0 = \mathfrak{c}_1 \circ \tilde{\mathfrak{i}}$ . Posons  $\tilde{Y}'_1 := \mathfrak{c}'_1{}^{-1}(Y_1)$  de sorte que  $(\tilde{Y}'_1, \mathfrak{c}'_1, Y_1)$  est un revêtement analytique régulier. Fixons  $\zeta_* \in \tilde{Y}'_1$  une pré-image de  $z_*$  par

$c'_1$ . Pour tout chemin  $\alpha$  dans  $Y_1$  d'origine  $z_*$ , on note  $c'_1{}^*\alpha$  son unique relevé par  $c'_1$  d'origine  $\zeta_*$ . On définit alors  $\Psi([\alpha]) := c'_1{}^*\alpha(1)$ . Montrons que l'application  $\Psi : \tilde{Y}_1 \rightarrow \tilde{Y}'_1$  est bien définie. Soient deux chemins  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  équivalents au sens de la définition 2.2. Alors il existe un lacet  $\gamma \subset Y_0$  homotope à  $\alpha_2 \cdot \alpha_1^{-1}$  tel que  $c_0^*\gamma$  est fermé. On en déduit que  $c'_1{}^*\gamma$  est fermé et par conséquent  $c'_1{}^*\alpha_1(1) = c'_1{}^*\alpha_2(1)$ . L'application  $\Psi$  est par ailleurs continue, holomorphe, surjective et vérifie  $c'_1 \circ \Psi = c_1$ . Elle se prolonge en une application holomorphe  $\Psi : \tilde{D}_1 \rightarrow \tilde{D}'_1$  de sorte que  $(\tilde{D}'_1, c'_1, D_1)$  est un prolongement faible et surjectif de  $(\tilde{D}_1, c_1, D_1)$  de degré  $b'_1 \leq b_1$ . De plus, si  $b'_1 = b_1$  alors  $\Psi : \tilde{D}_1 \rightarrow \tilde{D}'_1$  est un biholomorphisme tel que  $c'_1 \circ \Psi = c_1$ . Le théorème 2.1 est prouvé. □

**Remarque 2.4.** Lorsque le morphisme (2.1) n'est pas surjectif, il peut exister un prolongement non surjectif du revêtement analytique  $(\tilde{D}_0, c_0, D_0)$ . On montrera en effet au paragraphe 3.7 que pour tous entiers  $n < m$ , il existe un revêtement analytique à  $n$  feuillets qui se prolonge en un revêtement à  $m$  feuillets.

On déduit du théorème 2.1 le résultat suivant :

**Corollaire 2.5.** *Si dans les hypothèses du théorème 2.1 le morphisme (2.1) est un isomorphisme de groupes alors le prolongement  $(\tilde{D}_1, c_1, D_1)$  construit est fort.*

**Preuve.** Dans les notations de la preuve du théorème 2.1, montrons que l'application  $\tilde{i} : \tilde{Y}_0 \rightarrow \tilde{Y}_1$  est injective. Soient  $w$  et  $w'$  deux points de  $\tilde{Y}_0$  tels que  $\tilde{i}(w) = \tilde{i}(w')$ . Pour tous chemins  $\lambda$  et  $\lambda'$  reliant  $w_*$  respectivement à  $w$  et à  $w'$  dans  $\tilde{Y}_0$ , on a  $[c_0 \circ \lambda] = [c_0 \circ \lambda']$  ce qui implique que  $c_0(w) = c_0(w') = z \in Y_0$ . Il existe alors un lacet  $\gamma$  dans  $Y_0$  basé en  $z_*$  homotope à  $(c_0 \circ \lambda') \cdot (c_0 \circ \lambda)^{-1}$  dans  $Y_1$  tel que son relevé par  $c_0$  d'origine  $w_*$  est fermé. Par hypothèse sur le morphisme (2.1), cette homotopie existe dans  $Y_0$ , on en déduit que les relevés de  $c_0 \circ \lambda$  et  $c_0 \circ \lambda'$  par  $c_0$  d'origine  $w_*$  ont les mêmes extrémités *i.e.*,  $w = w'$ . Par construction, l'application  $\tilde{i} : \tilde{D}_0 \rightarrow \tilde{D}_1$  est également injective ce qui prouve le résultat. □

Le résultat suivant énonce que dans les hypothèses du théorème 2.1, si le revêtement analytique initial est galoisien, alors le prolongement construit l'est également.

**Corollaire 2.6.** *Soit  $(\tilde{D}_0, c_0, D_0)$  un revêtement analytique galoisien de degré  $b_0$  au-dessus d'un domaine  $D_0 \subset \mathbb{C}^n$ . Supposons que le diviseur de ramification*

$\mathcal{R}_0$  se prolonge en une hypersurface  $\mathcal{R}_1$  dans un domaine  $D_1$  contenant  $D_0$  et que pour tout  $z_* \in D_0 \setminus \mathcal{R}_0$  le morphisme (2.1) induit par l'inclusion naturelle  $D_0 \setminus \mathcal{R}_0 \subset D_1 \setminus \mathcal{R}_1$  est surjectif. Alors le revêtement se prolonge faiblement et surjectivement en un revêtement analytique galoisien au-dessus de  $D_1$  de diviseur  $\mathcal{R}_1$  qui vérifie les propriétés du théorème 2.1.

**Preuve.** Posons  $Y_0 := D_0 \setminus \mathcal{R}_0$ ,  $Y_1 := D_1 \setminus \mathcal{R}_1$  et  $\tilde{Y}_0 := c_0^{-1}(Y_0)$ . Et fixons une pré-image  $w_*$  d'un point  $z_* \in Y_0$ . Soit  $c_1 : \tilde{Y}_1 \rightarrow Y_1$  l'application définie dans la preuve du théorème 2.1. Elle induit un revêtement régulier de degré  $b_1$  sur  $Y_1$ , il existe alors des lacets  $\alpha_*^1, \dots, \alpha_*^{b_1}$  basés en  $z_*$  tels que

$$c_1^{-1}(z_*) = \{ [\alpha_*^i] : i = 1, \dots, b_1 \}.$$

Fixons une telle pré-image  $[\alpha_*^i]$  et définissons les groupes  $H_0 = c_{0,*} [\pi_1(\tilde{Y}_0, w_*)]$  et  $H_1 = c_{1,*} [\pi_1(\tilde{Y}_1, [\alpha_*^i])]$ , images des monomorphismes de groupes induits par  $c_0$  et  $c_1$ . Notons que pour tout lacet  $\alpha$  en  $z_*$ , son relevé par  $c_1$  basé en  $[\alpha_*^i]$  est le chemin

$$t \mapsto [\alpha_*^i \cdot \alpha|_{[0,t]}]. \quad (2.5)$$

On en déduit que  $\alpha \in H_1$  si et seulement si  $[\alpha_*^i] = [\alpha_*^i \cdot \alpha]$  i.e., il existe un lacet  $\alpha_0$  dans  $Y_0$  homotope à  $\alpha_1$  tel que  $[\alpha_0] \in H_0$ . Montrons que le groupe  $H_1$  est distingué dans  $G := \pi_1(Y_1, z_*)$ . Soient deux lacets  $\gamma \subset Y_1$  et  $\alpha \subset Y_1$  tels que  $[\alpha] \in H_1$ . Par hypothèse,  $\gamma$  est homotope à un lacet  $\gamma_0 \subset Y_0$  et, en utilisant la construction précédente il existe un lacet  $\alpha_0$  dans  $Y_0$  homotope à  $\alpha$  tel que  $[\alpha_0] \in H_0$ . Le produit  $\gamma^{-1} \cdot \alpha \cdot \gamma$  est donc homotope à  $\gamma_0^{-1} \cdot \alpha_0 \cdot \gamma_0$  dont le relevé par  $c_0$  (et donc par  $c_1$ ) est fermé puisque le revêtement  $(\tilde{Y}_0, c_0, Y_0)$  est galoisien. Le théorème 2.6 est prouvé.

## 2.2 Prolongement sur le polydisque

On montre dans ce paragraphe que l'énoncé du théorème 2.1 se simplifie lorsque les domaines  $D_0$  et  $D_1$  sont des polydisques.

On appelle **polydisque unité** de  $\mathbb{C}^n$  la boule ouverte de rayon 1 pour la norme polycirculaire définie en (1.8) i.e., le domaine suivant :

$$\Delta^n := \{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_i| < 1, i = 1, \dots, n \}.$$

On désigne par  $\Gamma$  le disque unité  $\{ w \in \mathbb{C} : |w| < 1 \}$  et on se donne une hypersurface  $\mathcal{R}$  de  $\Delta^n \times \Gamma$  qui n'intersecte pas  $\Delta^n \times \partial\Gamma$ . D'après le théorème B.4,  $\mathcal{R}$

est l'ensemble des zéros d'un polynôme de WEIERSTRASS  $P(z, w)$  en  $w$  de degré  $\nu \geq 1$  et à coefficients holomorphes dans  $\Delta^n$ . Désignons enfin par  $\sigma$  l'ensemble analytique constitué des points qui annulent le discriminant du polynôme :

$$\sigma := \{z \in \Delta^n : \text{Discr}_z P(z, w) = 0\}. \quad (2.6)$$

**Lemme 2.7.** *Dans les conditions ci-dessus, soit  $z_* \in \Delta^n \setminus \sigma$  fixé. Alors toute courbe fermée  $\gamma \subset (\Delta^n \times \Gamma) \setminus \mathcal{R}$  peut être continûment déformée en un lacet dans  $(\{z_*\} \times \Gamma) \setminus \mathcal{R}$ .*

Ce résultat est initialement dû à PICARD et SIMART dans [PS71]. Plus récemment, NISHINO en a donné une preuve dans [Nis01]. En s'inspirant de cette preuve, on obtient un résultat similaire plus précis sur la surjectivité du morphisme entre les groupes fondamentaux.

**Lemme 2.8.** *Dans les hypothèses ci-dessus, il existe un sous-ensemble  $A \subset \Delta^n$  nulle part dense tel que pour tout  $z_* \in \Delta^n \setminus A$  et tout  $Z_* = (z_*, w_*) \in (\Delta^n \times \Gamma) \setminus \mathcal{R}$ , l'homomorphisme*

$$i_* : \pi_1[(\{z_*\} \times \Gamma) \setminus \mathcal{R}, Z_*] \rightarrow \pi_1[(\Delta^n \times \Gamma) \setminus \mathcal{R}, Z_*] \quad (2.7)$$

*induit par l'inclusion naturelle est surjectif i.e., tout lacet dans  $(\Delta^n \times \Gamma) \setminus \mathcal{R}$  basé en  $Z_*$  se déforme continûment dans  $(\{z_*\} \times \Gamma) \setminus \mathcal{R}$  à extrémités fixées.*

**Preuve.** On note  $z = (z_1, \dots, z_n) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \in \Delta^n$  et  $w = u + iv \in \Gamma$ . Soit

$$P(z, w) = w^\nu + \sum_{i=1}^{\nu} a_i(z)w^{\nu-i}$$

le polynôme de WEIERSTRASS définissant l'hypersurface  $\mathcal{R}$ . D'après le théorème de représentation conforme de RIEMANN on peut remplacer le disque unité  $\Delta$  par le carré unité  $\{z = x + iy : -1 < x < 1 \text{ et } -1 < y < 1\}$  et  $\Delta^n$  par le cube à  $n$  dimensions. Prouvons le théorème par récurrence sur  $n$ .

**Cas 1 :**  $n = 1$ . Pour plus de convenance, on identifie  $(x + iy, u + iv)$  avec  $(x, y, u, v)$ . On a le résultat suivant, dont la preuve figure dans [Nis01].

**Lemme 2.9.** *Soit  $D$  un domaine de  $\mathbb{C}^{n+1}$  dont les points ont pour coordonnées  $(z, w)$  où  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  et  $w \in \mathbb{C}$  et  $\mathcal{R} = \{f(z, w) = 0\}$  une hypersurface analytique de  $D$ . Il existe une transformation linéaire  $\varphi : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$  telle que pour tout  $(a_1, \dots, a_n, b) \in \mathbb{C}^{n+1}$ ,*

$$f \circ \varphi^{-1}(a_1, \dots, a_n, b) = 0 \Rightarrow \exists w : f \circ \varphi^{-1}(a_1, \dots, a_n, w) \neq 0.$$

On peut donc supposer, quitte à appliquer une transformation linéaire, que  $\mathcal{R}$  ne contient aucun hyperplan complexe d'équation  $w = d$ , où  $d \in \Gamma$ . L'ensemble  $\sigma \subset \Delta$  défini dans (2.6) est constitué d'un nombre au plus dénombrable de points  $A_k = (A'_k, A''_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Définissons

$$A := \left\{ z = (x, y) \in \Delta : \exists k \in \mathbb{N}, x = A'_k \text{ ou } y = A''_k \right\}.$$

Soit  $Z_* = (x_*, y_*, u_*, v_*) \in (\Delta \times \Gamma) \setminus \mathcal{R}$  tel que  $(x_*, y_*) \notin A$  et  $\gamma$  un lacet basé en  $Z_*$  dans  $(\Delta \times \Gamma) \setminus \mathcal{R}$ . On peut supposer que cette courbe est analytique réelle et que sa projection sur chacun des axes  $x, y, u$  et  $v$  n'est pas réduite à un point. Pour tout point  $M = (x_M, y_M, u_M, v_M)$  de la courbe, on définit le segment  $X_M := \{y = y_M\} \cap \Delta$  et le cylindre  $\mathcal{X}_M = X_M \times \Gamma$ . Énonçons le résultat suivant dont les détails et la démonstration sont donnés dans [Nis01].

**Lemme 2.10.** *Pour tout point  $M$  de la courbe, il existe dans les notations précédentes un segment réel  $L(M)$  contenant  $M$  inclus dans le cylindre fermé  $\overline{\mathcal{X}_M}$  de la forme*

$$L(M) := \{(x, y_M, u_M + \alpha_M(x - x_M), v_M + \beta_M(x - x_M)) : -1 \leq x \leq 1\}, \quad (2.8)$$

où  $\alpha_M, \beta_M$  sont des constantes réelles telles que

- (1)  $L(M) \cap \mathcal{R} = \emptyset$  et
- (2)  $L(M) \cap [\{|x| \leq 1\} \times \{y_M\} \times \partial\Gamma] = \emptyset$ .

Soit  $M_0 \in \gamma$  et  $\alpha_0, \beta_0$  les constantes réelles définissant  $L(M_0)$  dans (2.8). Il existe un sous-arc  $[M'_0 M''_0]$  de  $\gamma$  contenant  $M_0$  dans son intérieur tel que pour tout  $M \in [M'_0 M''_0]$ , le segment  $L(M)$  défini avec pour choix de constantes  $\alpha_M = \alpha_0$  et  $\beta_M = \beta_0$  vérifie les assertions du lemme 2.10. Par compacité de la courbe  $\gamma$ , il existe un nombre fini de points  $M_i = (x_i, y_i, u_i, v_i)$ , ( $i = 0, \dots, q$ ) tels que :

- (1)  $M_0 = M_q = Z_*$ ,
- (2)  $\gamma = \bigcup_{i=0}^{q-1} [M_i M_{i+1}]$  et
- (3) pour tout point  $M \in [M_i M_{i+1}]$  on peut prendre  $\alpha_M = \alpha_i$  et  $\beta_M = \beta_i$  où  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  dans la définition (2.8) de  $L(M)$ .

À tout point  $M \in [M_i M_{i+1}]$ , on note  $L_i(M)$  le segment défini avec les constantes de l'assertion (3). Comme la projection de la courbe  $\gamma$  sur chacun des axes  $x, y, u$  et  $v$  n'est pas réduite à un point, on peut supposer que  $M_i \notin A \times \Gamma$ , pour tout

$i = 1, \dots, q$ . On définit pour tout  $M \in [M_i M_{i+1}]$ , le projeté sur l'hyperplan réel  $\{x = x_*\}$  :

$$p_i(M) := L_i(M)|_{x=x_*} = (x_*, y_M, u_M + \alpha_i(x_* - x_M), v_M + \beta_i(x_* - x_M)). \quad (2.9)$$

Définissons en particulier  $p'_i := p_i(M_i)$  et  $p''_i := p_i(M_{i+1})$ . Le point  $M_i$  possède en particulier deux projetés  $p'_i$  et  $p''_{i-1}$  dans  $\{x_*, y_i\} \times \Gamma$  de sorte que  $M \mapsto p_i(M)$  induit une déformation continue de l'arc  $[M_i M_{i+1}]$  sur

$$[p'_i p''_i] := \{p_i(M) : M \in [M_i M_{i+1}]\},$$

voir la figure 2.1. Compte tenu des hypothèses sur le segment  $L(M)$ , cette déformation a lieu dans  $(\Delta \times \Gamma) \setminus \mathcal{R}$ . Par ailleurs l'arc  $[Z_* M_1]$  se déforme, à origine fixée, en  $[Z_* p''_0]$  et d'une façon similaire,  $[M_{q-1} Z_*]$  se déforme en  $[p'_{q-1} Z_*]$ .

Désignons par  $\lambda'_i$  le chemin reliant  $p''_{i-1}$  et  $M_i$  tracé sur le segment  $L_{i-1}(M_i)$  et  $\lambda''_i$  reliant  $M_i$  et  $p'_i$  le long de  $L_i(M_i)$ . En posant  $\lambda_i := \lambda'_i \cdot \lambda''_i \subset \mathcal{X}_{M_i} \setminus \mathcal{R}$ , on en déduit que la courbe  $\gamma$  est homotope dans  $(\Delta \times \Gamma) \setminus \mathcal{R}$  au lacet

$$\hat{\gamma} := [Z_* p''_0] \cdot \lambda_1 \cdot [p'_1 p''_1] \cdots \lambda_{q-1} \cdot [p'_{q-1} Z_*].$$

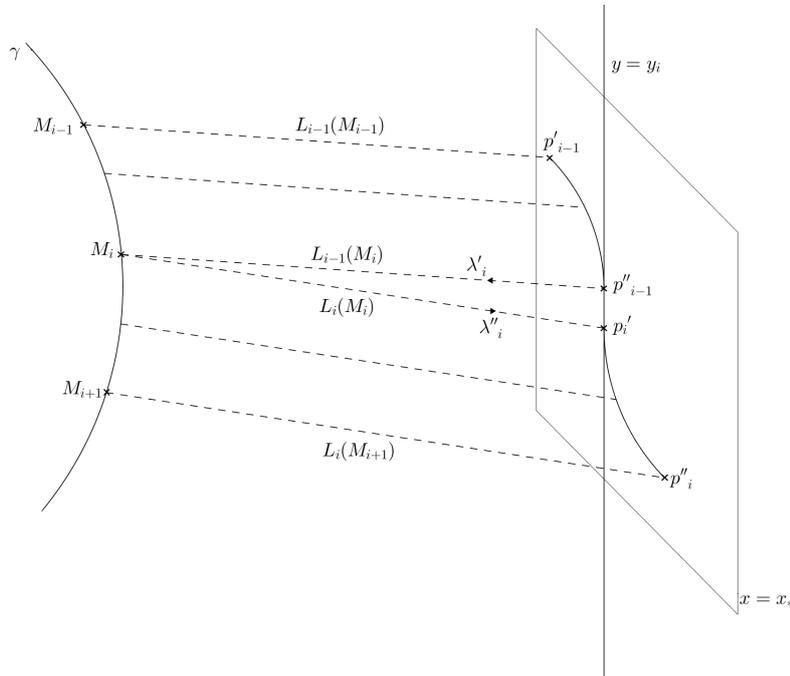


FIGURE 2.1 – Construction de la déformation de la courbe

**Lemme 2.11.** *Soit  $D$  le cylindre  $] -1, 1[ \times \Gamma \subset \mathbb{R}^3$  et considérons une famille d'arcs réguliers disjoints  $\mathcal{L}_j : t \in [-1, 1] \mapsto (t, u_j(t), v_j(t))$  dans  $\overline{D}$ , ( $j = 1, \dots, \nu$ ), dont la réunion  $\bigcup_{j=1}^{\nu} \mathcal{L}_j$  est notée  $\mathcal{L}$ . Supposons que chacun de ces arcs n'intersecte pas  $[-1, 1] \times \partial\Gamma$ . Alors pour tout  $t_0 \in ] -1, 1[$ , tout chemin  $\lambda$  reliant deux points de  $\{t_0\} \times \Gamma$  dans  $D \setminus \mathcal{L}$  est homotope à un chemin inclus dans  $\{t_0\} \times \Gamma$  à extrémités fixées.*

La preuve de ce lemme repose sur l'existence d'un homéomorphisme  $\Phi : D \rightarrow D$  vérifiant les trois assertions suivantes.

- (1)  $\forall t \in ] -1, 1[$ ,  $\Phi(\{t\} \times \Gamma) = \{t\} \times \Gamma$ ,
- (2) il existe une famille de couples  $\{(a_j, b_j) : j = 1, \dots, \nu\}$  deux à deux distincts tels que  $\Phi(\mathcal{L}_j) = ] -1, 1[ \times \{(a_j, b_j)\}$  et
- (3) la restriction  $\Phi : \{t_0\} \times \Gamma \rightarrow \{t_0\} \times \Gamma$  est l'identité.

Soit  $i \in \{1, \dots, \nu\}$  fixé. Puisque  $(x_i, y_i) \notin A$ , l'intersection  $\mathcal{X}_{M_i} \cap \sigma$  est vide donc  $\mathcal{X}_{M_i} \cap \mathcal{R}$  est une réunion disjointe d'arcs analytiques réels vérifiant les hypothèses du lemme 2.11 précédent. Le chemin  $\lambda_i \subset \mathcal{X}_{M_i} \setminus \mathcal{R}$  ayant pour extrémités  $p''_{i-1}$  et  $p'_i$  dans  $(\{x_*, y_i\} \times \Gamma) \setminus \mathcal{R}$ , on peut donc lui appliquer le lemme. Il existe un chemin  $\tilde{\lambda}_i \subset (\{x_*, y_i\} \times \Gamma) \setminus \mathcal{R}$  joignant  $p''_{i-1}$  et  $p'_i$  homotope à  $\lambda_i$  dans  $\mathcal{X}_{M_i} \setminus \mathcal{R}$ . L'arc  $\hat{\gamma}_i$ , et par conséquent  $\gamma_i$ , se déforment continûment dans  $(\Delta \times \Gamma) \setminus \mathcal{R}$  en

$$\tilde{\gamma}_i := [Z_* p''_0] \cdot \tilde{\lambda}_1 \cdot [p'_1 p''_1] \cdots \tilde{\lambda}_{q-1} \cdot [p'_{q-1} Z_*] \subset \mathcal{Y}(z_*) \setminus \mathcal{R}. \quad (2.10)$$

où  $\mathcal{Y}(z_*) := (\Delta \times \Gamma) \cap \{x = x_*\}$ . Finalement, on applique à nouveau le lemme 2.11 au lacet (2.10) défini ci-dessous en prenant  $t = y$  montrant l'existence d'un chemin  $\gamma^* \subset \{x_*, y_*\} \times \Gamma$  qui montre alors le lemme 2.8 dans le cas  $n = 1$ .

**Cas 2 :**  $n \geq 1$ . Soit  $z_* = (z_1^*, \dots, z_n^*) \in \Delta^n \setminus \sigma$  où  $z_n^* = x_n^* + iy_n^*$ . D'après le lemme 2.9 on peut supposer que  $\mathcal{R}$  ne contient aucune droite complexe d'équation  $\{z_1 = c_1, \dots, z_{n-1} = c_{n-1}, w = d\}$  où  $(c_1, \dots, c_{n-1}) \in \Delta^{n-1}$  et  $d \in \Gamma$  sont constants. Soit  $\gamma$  un lacet basé en  $Z_* = (z_*, w_*) \in (\Delta^n \times \Gamma) \setminus \mathcal{R}$ . De même que précédemment, on peut supposer que cette courbe est analytique réelle d'équation

$$\gamma(t) = (\varphi(t), \xi'(t), \xi''(t), \varphi'(t), \varphi''(t)),$$

où  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \Delta^{n-1}$  et  $\xi', \xi'', \varphi', \varphi'' : [0, 1] \rightarrow ] -1, 1[$  sont des fonctions analytiques réelles telles que la projection de  $\gamma$  sur chacun des axes  $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, u$  et  $v$  n'est pas réduite à un point. Soit

$$M := (z'_M, x_M, y_M, u_M, v_M) = (\varphi(s), \xi'(s), \xi''(s), \varphi'(s), \varphi''(s))$$

un point fixé de la courbe. On définit le segment

$$X_M := \left\{ (\varphi(s), x, \xi''(s)) \in \Delta^n : -1 \leq x \leq 1 \right\}$$

et le cylindre  $\mathcal{X}_M := X_M \times \Gamma$ . Comme dans le cas précédent, il existe un segment  $L(M) \subset \overline{\mathcal{X}_M}$  contenant  $M$  de la forme :

$$L(M) := \left\{ (z', x, y_M, u_M + \alpha_M(x - x_M), v_M + \beta_M(x - x_M)) : -1 \leq x \leq 1 \right\}, \quad (2.11)$$

où  $\alpha_M, \beta_M$  sont des réels vérifiant :

- (1)  $L(M) \cap \mathcal{R} = \emptyset$  et
- (2)  $L(M) \cap [\{z'_M\} \times \{|x| \leq 1\} \times \{y_M\} \times \partial\Gamma] = \emptyset$ .

Soient les ensembles

$$\begin{aligned} \Lambda_{x_n^*} &:= \Delta^{n-1} \times \{x_n^*\} \times \{|y_n| \leq 1\} \times \Gamma, \\ \mathcal{Y}_M(z_*) &:= \{(\phi(s), x_n^*, y) \in \Delta^n : -1 \leq y \leq 1\} \times \Gamma \text{ et} \\ \tilde{\mathcal{Y}}_\gamma &= \bigcup_{M \in \gamma} \mathcal{Y}_M(z_*). \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes méthodes que dans le cas  $n = 1$ , on en déduit l'existence d'un sous-ensemble  $A' \subset \{|x_n| < 1, |y_n| < 1\}$  tel que pour tout  $(x_n^*, y_n^*) \notin A'$ , le chemin  $\gamma$  est homotope à un lacet  $\tilde{\gamma} : t \mapsto (\varphi(t), x_n^*, y(t), u(t), v(t))$  dans  $\tilde{\mathcal{Y}}_\gamma \setminus \mathcal{R}$  où les fonctions  $y, u$  et  $v$  sont continues. Ce même chemin  $\tilde{\gamma}$  peut être continûment déformé dans  $\Lambda_{x_n^*} \setminus \mathcal{R}$  en une courbe  $\hat{\gamma} \subset \left( \bigcup_{M \in \gamma} \{(\phi(t), x_n^*, y_n^*)\} \times \Gamma \right) \setminus \mathcal{R}$ . En notant  $\Lambda^{n-1} := \Delta^{n-1} \times \{z_n^*\} \times \Gamma$  et  $\mathcal{R}^{n-1} := \mathcal{R} \cap \Lambda^{n-1}$ , le lacet  $\hat{\gamma} \subset \Lambda^{n-1} \setminus \mathcal{R}^{n-1}$  et la preuve du lemme se réduit au cas  $n - 1$ . Par récurrence, le lemme 2.8 est montré. □

On déduit de ce lemme le théorème 3 de l'introduction.

**Théorème 2.12.** *Soit  $D_0 := \Delta_R^{n-1} \times \Delta$  un polydisque où  $0 < R < 1$  et  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$  un revêtement analytique connexe de degré  $b_0$ . Supposons que son diviseur de ramification  $\mathcal{R}_0$  se prolonge en une hypersurface complexe  $\mathcal{R}_1$  de  $\Delta^n$  qui n'intersecte pas cette partie du bord  $\Delta^{n-1} \times \partial\Delta$ . Alors  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$  se prolonge faiblement et surjectivement en un revêtement analytique connexe  $(\tilde{D}_1, \mathbf{c}_1, D_1)$  de degré  $b_1 \leq b_0$  qui vérifie les assertions du théorème 2.1.*

**Preuve.** Ce résultat est une conséquence du théorème 2.1 puisque, compte tenu des hypothèses, il existe d'après le lemme 2.8 un  $z_* \in D_0 \setminus \mathcal{R}_0$  tel que le morphisme

$$\mathbf{i}_* : \pi_1(D_0 \setminus \mathcal{R}, z_*) \rightarrow \pi_1(\Delta^n \setminus \mathcal{R}, z_*)$$

est surjectif.

□

## 2.3 Prolongement de type HARTOGS

Les figures de HARTOGS ont été introduites en 1906 dans [Har06]. Elles généralisent les domaines pseudoconvexes. On s'intéresse dans cette section au prolongement des revêtements analytiques définis au-dessus d'une figure de HARTOGS. Par un procédé de construction établi dans la preuve du corollaire 2.20, on montre qu'un prolongement faible est possible sans l'hypothèse de surjectivité du morphisme défini dans l'équation (2.1).

**Définition 2.13.** Pour tout entier  $q \in \{1, \dots, n-1\}$ , on appelle figure de HARTOGS  $q$ -convexe de rayon  $r \in ]0, 1[$  le domaine suivant de  $\mathbb{C}^n$

$$H_r^{n,n-q} := \Delta_r^{n-q} \times \Delta^q \cup \Delta^{n-q} \times (\Delta^q \setminus \overline{\Delta_{1-r}^q}). \quad (2.12)$$

**Définition 2.14.** Soit  $\rho$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ . Pour tout point  $z \in \Omega$ , on définit sa forme de LEVI par

$$L_{\rho,z} : a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n \mapsto \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} a_i \bar{a}_j. \quad (2.13)$$

La forme de LEVI « mesure » la convexité d'une fonction.

**Définition 2.15.** Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{C}^n$  et  $q \in \{1, \dots, n-1\}$ . Une fonction  $\rho \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$  est dite (strictement)  $q$ -convexe en un point  $z \in \Omega$  si sa forme de LEVI (2.13) possède  $n - q + 1$  valeurs propres (strictement) positives.

En particulier, une fonction 1-convexe est pluri-sous-harmonique. On dira que  $\rho$  est  $q$ -convexe sur  $\Omega$  si elle l'est en tout point de  $\Omega$ . Si  $\rho$  est strictement  $q$ -convexe en un point  $z_0 \in \Omega$  tel que  $\nabla \rho(z_0) \neq 0$ , il existe  $n - q$  valeurs propres strictement positives dans l'espace tangent  $\Sigma_{\rho,z_0}$  à la surface d'équation  $\rho(z) = \rho(z_0)$  au point  $z_0$ .

La notion de  $q$ -convexité se généralise aux espaces complexes de la façon suivante.

**Définition 2.16.** Une fonction  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un espace complexe  $X$  est dite (strictement)  $q$ -convexe en un point  $x_0 \in X$  s'il existe un voisinage  $U \subset X$  de  $x_0$ , un domaine  $V \subset \mathbb{C}^n$ , une application  $\mathbf{i} : U \rightarrow V$  holomorphe, injective et une fonction  $\rho'$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $V$  (strictement)  $q$ -convexe en  $\mathbf{i}(x_0)$  vérifiant  $\rho = \rho' \circ \mathbf{i}$ .

**Définition 2.17.** Soit  $X$  un espace complexe. Un domaine  $\Omega \subset X$  est dit (strictement)  $q$ -concave en  $x_0 \in \partial\Omega$  s'il existe une fonction  $\rho$  (strictement)  $q$ -convexe dans un voisinage  $U \subset X$  de  $x_0$  telle que  $\Omega \cap U = \{z \in U : \rho(z) > 0\}$ .

Les figures de HARTOGS vérifie la propriété suivante de prolongement d'ensembles analytiques. Le résultat suivant est dû à ROTHSTEIN dans [Rot55]. Une autre démonstration est également donné dans [Siu74].

**Théorème 2.18.** Soient  $q \geq 2$  et  $A$  un ensemble analytique de dimension pure au moins égale à  $n - q + 1$  dans la figure de HARTOGS  $q$ -convexe  $H_r^{n,n-q}$  où  $0 < r < 1$ . Alors  $A$  se prolonge en un ensemble analytique de même dimension dans  $\Delta^n$ .

Ce théorème devient faux dans  $H_r^{n,n-1}$  car il y existe des hypersurfaces qui ne se prolongent pas au polydisque  $\Delta^n$ .

Le théorème 2.18 ne s'applique pas aux domaines  $q$ -convexes d'un espace complexe en général mais il existe un résultat de prolongement local dont la démonstration figure dans [ST71].

**Théorème 2.19.** Soit  $X$  un espace complexe réduit et  $\Omega \subset X$  un domaine  $(n - q)$ -concave en un point  $x_0 \in \partial\Omega$ . Soit  $A \subset \Omega$  un ensemble analytique de dimension pure au moins égale à  $n - q + 1$ . Alors dans un voisinage  $U$  de  $x_0$ ,  $A$  se prolonge de manière unique en un ensemble analytique dans  $U \cup D$ .

Montrons maintenant le corollaire 1 de l'introduction.

**Corollaire 2.20.** Soit  $q \geq 2$  et  $(\tilde{H}, \mathbf{c}_0, H_r^{n,n-q})$  un revêtement analytique connexe de degré  $b_0$  au-dessus d'une figure de HARTOGS  $q$ -convexe, où  $n \geq 3$ . Il existe alors un revêtement analytique connexe de degré  $b_1 \leq b_0$  au-dessus du polydisque unité  $D_1 = \Delta^n$  qui prolonge faiblement et surjectivement le revêtement  $(\tilde{H}, \mathbf{c}_0, H_r^{n,n-q})$ . Ce prolongement vérifie les quatre assertions du théorème 2.1.

**Preuve.**

Étape 1 : Prouvons d'abord le résultat de prolongement local suivant des revêtements analytiques au-dessus des domaines convexes.

**Lemme 2.21.** Soient  $q \in \{2, \dots, n\}$  un entier et  $M = \{z \in D : \rho(z) = 0\}$  une hypersurface réelle dans un domaine  $D \subset \mathbb{C}^n$  où  $\rho$  est une fonction strictement  $(n - q + 1)$ -convexe de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Soit  $(\tilde{D}^+, \mathbf{c}_0, D^+)$  un revêtement analytique

connexe de degré  $b_0$  au-dessus de  $D^+ := \{z \in D : \rho(z) > 0\}$ . Supposons que le diviseur de ramification  $\mathcal{R}$  se prolonge dans un voisinage d'un point  $p \in M$ . Il existe alors pour tout point  $p \in D$  un voisinage  $U_p \subset D$  tel que  $(\tilde{D}^+, \mathbf{c}_0, D^+)$  se prolonge faiblement et surjectivement en un revêtement analytique connexe de degré  $b_1 \leq b_0$  au-dessus de  $D^+ \cup U_p$ . Il vérifie les propriétés du théorème 2.1.

**Remarque 2.22.** D'après le théorème 2.19, la condition de prolongement de  $\mathcal{R}$  est toujours vérifiée si  $q \geq 3$ .

**Preuve.** Soit  $V$  un voisinage de  $p$  dans lequel  $\mathcal{R}$  se prolonge. On peut supposer sans perte de généralité que  $p = 0$  et qu'il appartient à toute branche de  $\mathcal{R}$ . Soit  $\Sigma$  l'espace complexe tangent à  $M$  en 0. Il existe un sous-espace  $S \subset \Sigma$  non réduit à 0 où la forme de LEVI  $L_{\rho,0}$  est définie positive. On peut alors trouver un disque ouvert  $\Delta \Subset D^+$  de dimension complexe égale à 1, centré en 0 et suffisamment proche de  $S$  tel que  $\Delta \cap \mathcal{R} = \{0\}$ . Soit  $L$  une direction orthogonale complexe de  $\Delta$  en 0 et notons  $z = (z_1, \dots, z_n)$  les coordonnées associées à une base dans  $L \times \Delta$ . Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\Delta_\varepsilon^{n-1} \times \Delta \subset D$  et  $\mathcal{R} \cap (\Delta_\varepsilon^{n-1} \times \partial\Delta) = \emptyset$ . Par ailleurs, puisque  $\{0\} \times \bar{\Delta}^* \subset D^+$ , on peut trouver un polydisque  $W \subset \Delta^{n-1}$  tel que  $W \times \Delta \subset D^+$ . En appliquant le théorème 2.12 à la restriction du revêtement  $(\tilde{D}^+, \mathbf{c}_0, D^+)$  au-dessus de  $W \times \Delta$ , on obtient le résultat. □

Étape 2 : Le résultat précédent permet d'en déduire

**Lemme 2.23.** *Supposons dans les notations du lemme 2.21 que le diviseur de ramification  $\mathcal{R}$  se prolonge au voisinage de tout point  $p \in M$ . En désignant par  $U$  la réunion  $\bigcup_{p \in M} U_p$  où les ouverts  $U_p$  sont des voisinages de  $p$  sur lesquels le revêtement se prolonge, on en déduit que  $(\tilde{D}^+, \mathbf{c}_0, D^+)$  se prolonge faiblement surjectivement en un revêtement analytique connexe au-dessus de  $D^+ \cup U$  à  $b_U \leq b_0$  feuilletés qui vérifie les assertions du théorème 2.1.*

**Preuve.** Soit  $U_p$  et  $U_q$  deux polydisques centrés respectivement en  $p \in M$  et  $q \in M$  vérifiant les conclusions du lemme 2.21 et tels que :

1.  $U_p \cap U_q \cap M \neq \emptyset$ ,
2. il existe un revêtement analytique connexe  $(\tilde{U}_p, \mathbf{c}_p, D^+ \cup U_p)$  de degré  $b_p \leq b_0$  qui prolonge surjectivement  $(\tilde{D}^+, \mathbf{c}_0, D^+)$  et
3. il existe un revêtement analytique connexe  $(\tilde{U}_q, \mathbf{c}_q, D^+ \cup U_q)$  de degré  $b_q \leq b_0$  qui prolonge surjectivement  $(\tilde{D}^+, \mathbf{c}_0, D^+)$ .

Soient  $W = U_p \cup U_q$ ,  $W^+ := W \cap D^+$ ,  $U_p^+ := U_p \cap D^+$  et  $U_q^+ := U_q \cap D^+$ . Il suffit de montrer l'existence d'un revêtement analytique connexe au-dessus de  $D^+ \cup W$  qui prolonge  $\mathfrak{c}_p$  et  $\mathfrak{c}_q$ . Par construction, il existe  $z_* \in U_p \cap U_q \cap D^+$  tel que les morphismes

$$\mathfrak{i}_{p,*} : \pi_1(U_p^+ \setminus \mathcal{R}, z_*) \rightarrow \pi_1(U_p \setminus \mathcal{R}, z_*)$$

et

$$\mathfrak{i}_{q,*} : \pi_1(U_q^+ \setminus \mathcal{R}, z_*) \rightarrow \pi_1(U_q \setminus \mathcal{R}, z_*)$$

sont surjectifs. Rappelons le résultat suivant qui est la version faible du théorème de VAN KAMPEN. La démonstration figure par exemple dans [Hat02].

**Théorème 2.24.** *Soit  $X$  un espace topologique et supposons qu'il s'écrit comme la réunion de deux espaces topologiques connexes par arcs  $X_1$  et  $X_2$  tels que l'intersection  $X_1 \cap X_2$  est connexe par arcs. Soit  $x_* \in X_1 \cap X_2$  fixé. Alors le morphisme naturel*

$$\pi_1(X_1, x_*) * \pi_1(X_2, x_*) \rightarrow \pi_1(X, x_*)$$

est surjectif, où  $\pi_1(X_1, x_*) * \pi_1(X_2, x_*)$  désigne le produit libre.

On en déduit que tout lacet  $\alpha$  dans  $W \setminus \mathcal{R}$  est homotope à un mot fini  $\alpha_1^{n_1} \cdots \alpha_p^{n_p}$  où pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$ ,  $n_k$  est un entier relatif non nul et  $\alpha_k$  un chemin inclus dans  $U_p^+ \setminus \mathcal{R}$  ou dans  $U_q^+ \setminus \mathcal{R}$ . Le morphisme

$$\mathfrak{i}_{p,q,*} : \pi_1(W^+ \setminus \mathcal{R}, z_*) \rightarrow \pi_1(W \setminus \mathcal{R}, z_*)$$

est donc surjectif. Par construction, on en déduit que pour tout point  $z_* \in D^+ \setminus \mathcal{R}$ , le morphisme

$$\mathfrak{i}_* : \pi_1(D^+ \setminus \mathcal{R}, z_*) \rightarrow \pi_1((D^+ \cup U) \setminus \mathcal{R}, z_*)$$

est surjectif où  $U = \bigcup_{p \in M} U_p$ . D'après le théorème 2.1, le revêtement analytique  $(\tilde{D}^+, \mathfrak{c}_0, D^+)$  se prolonge surjectivement au-dessus de  $D^+ \cup U$  avec un nombre  $b_U$  de feuillettes qui n'excède pas  $b_0$ , ce qui prouve le lemme 2.23. □

**Étape 3 : Exhaustion.** Dans les notations du corollaire 2.20, on pose pour tout  $z \in \Delta^n$ ,  $w_1 = (z_1, \dots, z_{n-q})$  et  $w_2 = (z_{n-q+1}, \dots, z_n)$ . Soit pour tout  $\alpha > 0$  la fonction  $\rho_\alpha$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  définie de la manière suivante :

$$\rho_\alpha(z) = -|w_1|^2 + \frac{r^2}{4} + \left(1 - \frac{r^2}{4}\right) |w_2|^{2\alpha} \quad (2.14)$$

où  $|w|$  désigne la norme euclidienne. La forme de LEVI de cette fonction a pour matrice

$$H_{\rho_\alpha} = \left( \begin{array}{c|c} -2 \cdot \mathbb{1}_{n-q} & 0 \\ \hline 0 & \left(1 - \frac{r^2}{4}\right) H_{f_\alpha} \end{array} \right) \quad (2.15)$$

où  $H_{f_\alpha}$  est la matrice de la forme de LEVI associée à la fonction strictement pluri-sous-harmonique suivante :

$$f_\alpha : (z_{n-q+1}, \dots, z_n) \mapsto (|z_{n-q+1}|^2 + \dots + |z_n|^2)^\alpha. \quad (2.16)$$

La fonction  $\rho_\alpha$  est donc strictement  $(n - q + 1)$ -convexe et par conséquent, le domaine  $D_\alpha^+ := \{\rho_\alpha > 0\}$  est strictement  $(n - q + 1)$ -concave. Désignons par  $\Sigma_\alpha$  l'hypersurface dans  $\Delta^n$  d'équation  $\rho_\alpha(z) = 0$ . On remarque que pour tout  $\alpha \gg 1$ , le domaine  $D_\alpha^+$  est inclus dans la figure de HARTOGS  $H_r^{n,n-q}$  et que

$$\bigcup_{\alpha > 0} D_\alpha^+ = \Delta^n \setminus \left( A_{\frac{r}{2}, 1}^{n-q} \times \{0\} \right), \quad (2.17)$$

où  $A_{\frac{r}{2}, 1}^{n-q} = \left\{ |z_1, \dots, z_{n-q}| \in \Delta^{n-q} : |z_1|^2 + \dots + |z_{n-q}|^2 \geq \frac{r}{2} \right\}$ , voir figure 2.2.

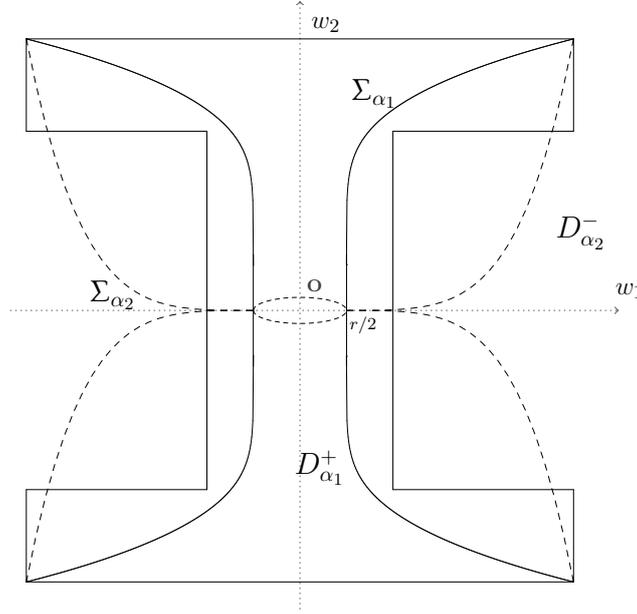


FIGURE 2.2 – Si  $\alpha_1 \gg 1$  l'hypersurface  $\Sigma_{\alpha_1}$  (en continu) est incluse dans  $H_r^{n,n-q}$  alors que  $\Sigma_{\alpha_2}$  se rapproche l'axe  $\{w_2 = 0\}$  quand  $\alpha_2 \searrow 0$  (en tirets).

D'après le lemme 2.23, le revêtement analytique  $(\tilde{H}, \mathbf{c}_0, H_r^{n,n-q})$  se prolonge surjectivement en un revêtement analytique  $(\tilde{\Delta}, \mathbf{c}_1, \Delta^n \setminus (A_{\frac{r}{2}, 1}^{n-q} \times \{0\}))$  de degré  $b_1 \leq b_0$ . Ce prolongement vérifie de plus les assertions du théorème 2.1.

Par ailleurs, l'ensemble  $\Delta^{n-q} \times \{0\}$  est analytique dans  $\Delta^n$  de codimension supérieure égale à 2. Toute hypersurface de  $\Delta^n \setminus \left(\Delta_{\frac{r}{2},1}^{n-q} \times \{0\}\right)$  se prolonge donc à  $\Delta^n$  et on en déduit que la restriction de  $c_1$  au-dessus de  $\Delta^n \setminus \left(\Delta_{\frac{r}{2},1}^{n-q} \times \{0\}\right)$  induit un revêtement analytique qui, d'après le théorème 1.25, se prolonge fortement au-dessus de  $\Delta^n$ . Il prolonge également le revêtement construit  $\left(\tilde{\Delta}, c_1, \Delta^n \setminus \left(\Delta_{\frac{r}{2},1}^{n-q} \times \{0\}\right)\right)$  ce qui achève la démonstration du corollaire 2.20. □

## 2.4 Revêtements à deux feuillets

On s'intéresse dans ce paragraphe au prolongement des revêtements analytiques de degré 2. Le premier résultat donné par le théorème 2.25 montre que les revêtements analytiques de degré 2 au-dessus d'un même domaine sont équivalents. Cela permet de montrer par la suite qu'en général, un tel revêtement se prolonge fortement, voir le théorème 2.27.

**Théorème 2.25.** *Soient  $(\tilde{D}, c, D)$  et  $(\tilde{D}', c', D)$  deux revêtements analytiques connexes de degré 2 au-dessus d'un domaine  $D \subset \mathbb{C}^n$  de même diviseur de ramification. Alors ils sont équivalents i.e., il existe un biholomorphisme  $\tilde{i} : \tilde{D}' \rightarrow \tilde{D}$  tel que  $c' \circ \tilde{i} = c$ .*

**Preuve.** Désignons par  $\mathcal{R} \subset D$  le diviseur de ramification de ces revêtements.

**Étape 1 :** Prouvons le résultat lorsque  $D = \Delta^n$  et  $\mathcal{R} \subset \Delta^n$  n'intersecte pas  $\Delta^{n-1} \times \partial\Delta$  et d'après le théorème B.4, il existe un polynôme de WEIERSTRASS de degré  $\nu$  en la variable  $z_n$  qui définit globalement  $\mathcal{R}$ . D'après le lemme 2.8, il existe  $z'_* \in \Delta^{n-1}$  tel que pour tout  $z_* = (z'_*, z_n) \in \Delta^n \setminus \mathcal{R}$ , le morphisme

$$i_* : \pi_1(\Delta_{z'_*} \setminus \mathcal{R}, z_*) \rightarrow \pi_1(\Delta^n \setminus \mathcal{R}, z_*) \quad (2.18)$$

est surjectif, l'ensemble  $\Delta_{z'_*}$  désignant ici le produit  $\{z'_*\} \times \Delta$ . Définissons  $\tilde{Y} := c^{-1}(\Delta^n \setminus \mathcal{R})$  et  $\tilde{Y}' := c'^{-1}(\Delta^n \setminus \mathcal{R})$ . Fixons deux préimages  $w_*$  et  $w'_*$  de  $z_*$  par  $c$  et  $c'$  respectivement. L'ensemble  $\Delta_{z'_*} \cap \mathcal{R}$  est réduit à  $\nu$  éléments distincts que l'on note  $a_1, \dots, a_\nu$ . Le revêtement étant de degré 2, il existe pour tout  $i = 1, \dots, \nu$  un voisinage  $U_i \subset \Delta_{z'_*}$  de  $a_i$  tel que  $c^{-1}(U_i \setminus \mathcal{R})$  est connexe. Quitte à réduire  $U_i$ , on peut supposer que pour tout  $z_i \in U_i \setminus \mathcal{R}$ , le groupe fondamental  $\pi_1(U_i \setminus \mathcal{R}, z_i)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . Il existe alors un lacet  $\alpha_i$  basé en  $z_i$  dans  $U_i \setminus \mathcal{R}$  tel que

$\pi_1(U_i \setminus \mathcal{R}, z_i)$  est engendré par  $[\alpha_i]$ . Ce lacet est tel qu'aucun de ces relevés par  $c$  ou  $c'$  n'est fermé.

Désignons par  $\lambda_i$  un chemin fixé reliant  $z_*$  à  $z_i$  dans  $\Delta_{z_*}' \setminus \mathcal{R}$ , voir figure 2.3. Par construction, le relevé basé en  $w_i$  du lacet  $\gamma_i := \lambda_i \cdot \alpha_i \cdot \lambda_i^{-1}$  par  $c$  n'est pas fermé.

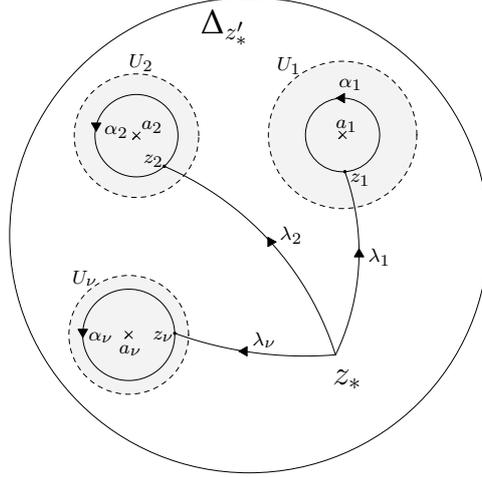


FIGURE 2.3 – Construction des générateurs de  $\pi_1(\Delta_{z_*}' \setminus \mathcal{R}, z_*)$

On en déduit que  $\pi_1(\Delta_{z_*}' \setminus \mathcal{R}, z_*)$  est le groupe libre engendré par les classes  $[\gamma_1], \dots, [\gamma_\nu]$ . Il s'en suit par récurrence que le relevé en  $w_*$  d'un mot  $\gamma_{i_1}^{n_1} \cdots \gamma_{i_s}^{n_s} \subset \Delta_{z_*}' \setminus \mathcal{R}$  est fermé si et seulement si la somme  $n_1 + \cdots + n_s$  est paire.

Par conséquent, si deux lacets produits  $\gamma_{i_1}^{n_1} \cdots \gamma_{i_s}^{n_s}$  et  $\gamma_{j_1}^{m_1} \cdots \gamma_{j_{s'}}^{m_{s'}}$  sont homotopes dans  $\Delta^n \setminus \mathcal{R}$ , alors  $n_1 + \cdots + n_s - (m_1 + \cdots + m_{s'})$  est un entier pair. Par surjectivité du morphisme (2.18), tout lacet  $\gamma$  basé en  $z_*$  dans  $\Delta^n \setminus \mathcal{R}$  est homotope à un produit  $\gamma_{i_1}^{n_1} \cdots \gamma_{i_s}^{n_s} \subset \Delta_{z_*}' \setminus \mathcal{R}$  ( $n_j \in \mathbb{Z}^*$ ). La remarque précédente implique alors que la parité de  $n_1 + \cdots + n_s$  ne dépend pas de la décomposition choisie. La nature du relevé d'un lacet ne dépend donc pas du choix du revêtement en ce sens que  $c^* \gamma$  est fermé si et seulement si  $c'^* \gamma$  est fermé. Les revêtements réguliers  $(\tilde{Y}, c, D \setminus \mathcal{R})$  et  $(\tilde{Y}', c', D \setminus \mathcal{R})$  sont donc équivalents. D'après le théorème 1.23, on en déduit l'équivalence des revêtements analytiques  $(\tilde{D}, c, D)$  et  $(\tilde{D}', c', D)$ , ce qui prouve le théorème 2.25 dans ce cas.

Étape 2 : Montrons le théorème 2.25 dans le cas général. Prouvons d'abord le résultat suivant :

**Lemme 2.26.** *Dans les hypothèses du théorème 2.25, il existe pour tout  $p \in \mathcal{R}$ , un voisinage  $U_p \subset D$  et un point  $z_p \in U_p \setminus \mathcal{R}$  tels que le groupe fondamental  $\pi_1(U_p \setminus \mathcal{R}, z_p)$  est engendré par  $\nu_p$  lacets  $\gamma_1, \dots, \gamma_{\nu_p}$  basés en  $z_p$ . Par ailleurs, pour tout  $j = 1, \dots, \nu_p$  et pour toutes pré-images  $w_p$  et  $w'_p$  de  $z_p$  par  $\mathfrak{c}$  et  $\mathfrak{c}'$  respectivement, les relevés de  $\gamma_j$  par  $\mathfrak{c}$  et  $\mathfrak{c}'$  basés en  $w_p$  et  $w'_p$  ne sont pas fermés.*

**Preuve.**

Soit  $p \in \mathcal{R}$  que l'on suppose sans perte de généralité égal à 0. Comme dans la démonstration du lemme 2.21, il existe une droite complexe  $L$  passant par 0 et un voisinage  $\Delta$  de 0 dans  $L$  tel que  $\Delta \cap \mathcal{R} = \{0\}$ . Quitte à réduire, on peut supposer que  $\Delta$  est un disque ouvert centré en 0. Soit  $L^\perp$  un sous-espace de  $\mathbb{C}^n$  orthogonal à  $L$  en  $p$  et notons  $z = (z_1, \dots, z_n)$  les coordonnées correspondant à  $L \times L^\perp$ . Il existe alors  $\varepsilon > 0$  tel que  $\Delta_\varepsilon^{n-1} \times \Delta \subset D$  et  $(\Delta_\varepsilon^{n-1} \times \partial\Delta) \cap \mathcal{R} = \emptyset$ . Le résultat se déduit alors de la construction utilisée à l'étape précédente.  $\square$

On remarque que les ouverts  $U_p$  peuvent être choisis de sorte que  $\{U_p : p \in \mathcal{R}\}$  forme un recouvrement de  $D$ .

**Étape 3 :** Preuve du théorème 2.25. Soient  $w_*$  et  $w'_*$  deux pré-images fixées d'un point  $z_* \in D \setminus \mathcal{R}$  par  $\mathfrak{c}$  et  $\mathfrak{c}'$  respectivement. Pour tout lacet  $\alpha \subset D \setminus \mathcal{R}$ , il existe d'après le point précédent un nombre fini de points  $p_1, \dots, p_N$  dans  $\mathcal{R}$  tels que  $\alpha \subset (U_1 \cup \dots \cup U_N) \setminus \mathcal{R}$  où  $U_k := U_{p_k}$  ( $k = 1, \dots, N$ ) est l'ouvert défini dans le lemme 2.26. Il existe alors une décomposition  $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_q$  où  $\alpha_i$  est un chemin inclus dans un certain  $U_{k(i)} \setminus \mathcal{R}$  où  $1 \leq k(i) \leq N$  tel que  $\alpha_i(1) = \alpha_{i+1}(0)$ , pour tout  $i = 1, \dots, q-1$ . Fixons  $i \in \{1, \dots, q\}$  et un point  $z_i \in U_i \setminus \mathcal{R}$  vérifiant les hypothèses du lemme 2.26. Soient  $\lambda_i$  et  $\mu_i$  deux chemins dans  $U_i \setminus \mathcal{R}$  reliant respectivement  $\alpha_i(0)$  à  $z_i$  et  $\alpha_i(1)$  à  $z_i$ . Alors le lacet  $\lambda_i^{-1} \cdot \alpha_i \cdot \mu_i$  est homotope dans  $U_i \setminus \mathcal{R}$  à un lacet du type  $\gamma_{i,j_1}^{n_{i,1}} \cdots \gamma_{i,j_{s_i}}^{n_{i,s_i}}$  où  $\gamma_{i,j_k}$  vérifie les conclusions du lemme 2.26 et  $n_{i,k} \in \mathbb{Z}^*$  pour tout  $1 \leq k \leq s_i$ . Une telle décomposition n'est pas unique en général mais de la même manière que dans l'étape 1, on remarque que le relevé de  $\lambda_i^{-1} \cdot \alpha_i \cdot \mu_i$  en n'importe quelle pré-image est un chemin fermé si et seulement si  $n_{i,1} + \dots + n_{i,s_i}$  est pair. Finalement, le lacet  $\alpha$  est homotope dans  $D \setminus \mathcal{R}$  à

$$\lambda_1 \cdot \left( \gamma_{1,j_1}^{n_{1,1}} \cdots \gamma_{1,j_{s_1}}^{n_{1,s_1}} \right) \cdot \mu_1^{-1} \cdot \lambda_2 \cdot \left( \gamma_{2,j_1}^{n_{2,1}} \cdots \gamma_{2,j_{s_2}}^{n_{2,s_2}} \right) \cdots \\ \cdots \mu_{q-1}^{-1} \cdot \lambda_q \cdot \left( \gamma_{q,j_1}^{n_{q,1}} \cdots \gamma_{q,j_{s_q}}^{n_{q,s_q}} \right) \cdot \mu_q^{-1}. \quad (2.19)$$

Par récurrence, on montre que si  $\alpha$  est homotope au lacet trivial dans  $D \setminus \mathcal{R}$ , alors la quantité

$$S := \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^{s_i} n_{i,k}$$

est paire. Il s'en suit que la parité de  $S$  ne dépend pas du choix de la décomposition de  $\alpha$  donnée dans (2.19). Le relevé de  $\alpha$  est fermé si seulement si  $S$  est pair. Les deux revêtements  $c$  et  $c'$  sont donc équivalents ce qui prouve le théorème 2.25.

□

On en déduit alors le théorème 4 de l'introduction.

**Théorème 2.27.** *Soient  $D_0 \subset D_1$  deux domaines de  $\mathbb{C}^n$  et  $(\tilde{D}_0, c_0, D_0)$  un revêtement analytique connexe à 2 feuillets au-dessus de  $D_0$ . Supposons que son diviseur de ramification  $\mathcal{R}_0$  se prolonge en une hypersurface  $\mathcal{R}_1$  dans  $D_1$  globalement définie par une seule équation i.e., il existe une fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(D_1)$  telle que*

$$\mathcal{R}_1 := \{z \in D_1 : f(z) = 0\}.$$

*Alors  $(\tilde{D}_0, c_0, D_0)$  se prolonge fortement et surjectivement au-dessus de  $D_1$ . Ce prolongement est unique à équivalence de revêtements près.*

**Preuve.** Par hypothèse, l'ensemble  $\mathcal{R}_0$  est également globalement défini par l'équation  $f(z) = 0$  dans  $D_0$ . On peut choisir la fonction  $f$  de multiplicité un i.e., telle qu'elle engendre l'idéal suivant

$$I := \{h \in \mathcal{O}(D_1) : h|_{\mathcal{R}_1} \equiv 0\}$$

Il s'en suit alors que l'ensemble  $\tilde{D}'_0 = \{(z, w) \in D_0 \times \mathbb{C} : w^2 = f(z)\}$ , muni du faisceau des fonctions faiblement holomorphes, est un espace complexe normal puisque dans ces conditions, la projection  $c'_0 : \tilde{D}'_0 \rightarrow D_0$  induit un revêtement analytique de degré 2 de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_0$ . D'après le théorème 2.25, les revêtements  $(\tilde{D}'_0, c'_0, D_0)$  et  $(\tilde{D}_0, c_0, D_0)$  sont équivalents. Puisque le premier se prolonge fortement au-dessus de  $D_1$ , on en déduit que l'autre s'y prolonge également ce qui prouve le théorème.

□

En particulier, le théorème B.5 permet d'en déduire le corollaire suivant.

**Corollaire 2.28.** *Soit  $(\tilde{D}_0, c_0, D_0)$  un revêtement analytique connexe à 2 feuillets au-dessus d'un domaine  $D_0 \subset \mathbb{C}^n$ . Supposons que le diviseur de ramification*

$\mathcal{R}_0$  se prolonge en une hypersurface  $\mathcal{R}_1$  dans un domaine pseudoconvexe  $D_1$  contenant  $D_0$  tel que le deuxième groupe de cohomologie  $H^2(D_1, \mathbb{Z}) = 0$ . Alors  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$  se prolonge fortement en un revêtement analytique au-dessus de  $D_1$  de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_1$ . Ce prolongement est unique à équivalence de revêtements près.

**Remarque 2.29.** En particulier, si dans les hypothèses du théorème 2.12 et du corollaire 2.20, le revêtement initial est de degré 2 alors le prolongement est fort.

□

Le théorème 2.27 se généralise de la manière suivante.

**Corollaire 2.30.** Soient  $D_0 \subset D_1$  deux domaines de  $\mathbb{C}^n$  et  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$  un revêtement analytique connexe à 2 feuillets au-dessus de  $D_0$ . Supposons que son diviseur de ramification se prolonge en une hypersurface  $\mathcal{R}_1$  dans  $D_1$  et qu'il existe un revêtement analytique de degré 2 au-dessus de  $D_1$  et de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_1$ . Alors  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$  se prolonge fortement au-dessus de  $D_1$ .

**Preuve.** Désignons par  $(\tilde{D}_1, \mathbf{c}_1, D_1)$  un revêtement analytique de degré 2 et de diviseur  $\mathcal{R}_1$ . D'après le théorème 2.25, sa restriction au-dessus de  $D_0$  est équivalente au revêtement initial  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$  ce qui prouve le résultat.

□



# Chapitre 3

## Exemples

Le dernier chapitre de cette thèse est consacré à des exemples illustrant la rigidité des résultats obtenus dans les deux premiers chapitres. Les deux premiers paragraphes étudient le problème de prolongement au-dessus d'un ensemble maigre nulle part dense, d'abord dans le cas d'une hypersurface, puis dans le cas de  $\mathbb{R}^2$ . A la section 3.3 on étudie deux exemples de prolongement topologique relatifs au théorème 1.17 de STEIN. Aux paragraphes 3.4 et 3.5, on donne explicitement des exemples de revêtement analytique qui ne se prolonge qu'au revêtement trivial. On montre ensuite à la section 3.6 l'existence de revêtement analytique qui se prolonge faiblement avec un nombre de feuillets strictement supérieur à un. On étudie au paragraphe 3.7 un contre-exemple relatif au théorème 2.1 lorsque l'hypothèse de surjectivité du morphisme (2.1) de groupes n'est pas vérifiée. On montre dans ce cas l'existence d'un prolongement non surjectif. Enfin, on donne à la section 3.8 un contre-exemple au corollaire 2.20 dans le cas des figures de HARTOGS 1-convexes.

### 3.1 Prolongement sur une hypersurface

Soit  $X$  un espace complexe normal. L'exemple suivant montre qu'en général, un revêtement analytique défini au-dessus de  $X \setminus A$ , où  $A$  est une hypersurface de  $X$ , ne se prolonge pas fortement sur  $X$ .

**Exemple 3.1.** Soit  $A$  la droite d'équation  $z_1 = 0$  dans  $\mathbb{C}^2$ . Définissons  $X_0 := \mathbb{C}^2 \setminus A$  et

$$\tilde{X}_0 = \left\{ (z, w) \in X_0 \times \mathbb{C} : w^2 = z_2 - e^{\frac{1}{z_1}} \right\}$$

En désignant par  $c_0 : \tilde{X}_0 \rightarrow X_0$  la projection induite sur  $z$ , on en déduit que

$(\tilde{X}_0, \mathfrak{c}_0, X_0)$  est un revêtement analytique connexe de degré 2 de diviseur de ramification

$$\mathcal{R}_0 = \left\{ (z_1, z_2) \in X_0 : z_2 = e^{\frac{1}{z_1}} \right\}.$$

Il n'existe pas de prolongement connexe de ce revêtement au-dessus de  $\mathbb{C}^2$  puisque la fermeture topologique  $\overline{\mathcal{R}_0}$  dans  $\mathbb{C}^2$  de son diviseur n'est pas un ensemble analytique. En effet, si  $\overline{\mathcal{R}_0}$  était analytique, il existerait en tout point  $a \in A$  un voisinage unidimensionnel de  $a$  dans lequel  $\overline{\mathcal{R}_0}$  serait discret, ce qui est impossible d'après le théorème de CASORATI-WEIERSTRASS appliqué à la fonction  $z \mapsto e^{1/z}$  qui présente une singularité essentielle en 0.

Le revêtement trivial  $\text{Id} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  est donc, à équivalence près, le seul prolongement connexe possible de  $(\tilde{X}_0, \mathfrak{c}_0, X_0)$ .

### 3.2 Prolongement réel

**Exemple 3.2.** Soit  $(\tilde{X}_0, \mathfrak{c}_0, \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{R}^2)$  un revêtement analytique connexe régulier de degré  $b \geq 2$ . Alors le seul prolongement connexe possible de ce revêtement à  $\mathbb{C}^2$  est le revêtement trivial  $(\mathbb{C}^2, \text{Id}, \mathbb{C}^2)$ .

Supposons au contraire qu'il existe un prolongement connexe  $(\tilde{X}_1, \mathfrak{c}_1, \mathbb{C}^2)$  avec au moins deux feuillet de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_1$ . S'il est vide alors le prolongement est un revêtement régulier et par simple connexité de  $\mathbb{C}^2$ , on en déduit que  $\tilde{X}_1$  n'est pas connexe ce qui est impossible. L'hypersurface  $\mathcal{R}_1$  est donc incluse dans  $\mathbb{R}^2$  ce qui est également impossible. D'où une contradiction.

En revanche, on a un résultat d'extension forte dans le cas suivant. soit un revêtement analytique connexe  $(\tilde{X}_0, \mathfrak{c}_0, \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n)$  au-dessus de  $\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$  où  $n \geq 3$ . On déduit du théorème 2.18 que son diviseur de ramification  $\mathcal{R}_0$  se prolonge en une hypersurface  $\mathcal{R}_1$  dans  $\mathbb{C}^n$ , voir le théorème 2.21 dans [Siu74]. Il s'en suit que le revêtement se prolonge fortement au-dessus de  $\mathbb{C}^n$ .

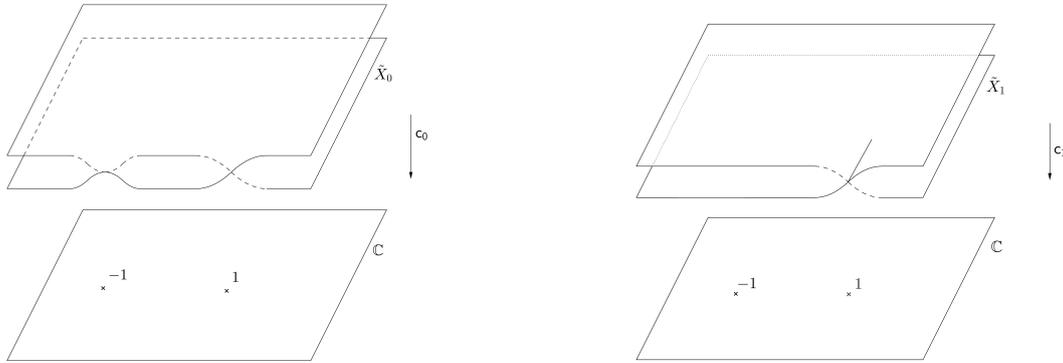
### 3.3 Unicité du prolongement de STEIN

Dans cette section, on donne deux exemples concernant le théorème 1.17 de STEIN. L'exemple qui suit étudie le cas du prolongement topologique d'un revêtement régulier de degré 2 sur une hypersurface. L'espace  $\tilde{X}_1$  construit ne coïncide pas avec le prolongement canonique de ce revêtement.

**Exemple 3.3.** Soit l'espace complexe

$$\tilde{D}_0 = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : w^2 = (z - 1)(z + 1)^2\}$$

et désignons par  $c_0$  la restriction à  $\tilde{D}_0$  de la projection  $(z, w) \rightarrow z$ . En désignant par  $X_0$  l'ouvert  $\mathbb{C} \setminus \{-1, +1\}$ , la restriction de  $c_0$  à  $\tilde{X}_0 := c_0^{-1}(X_0)$  induit un revêtement régulier d'ordre 2 qui, d'après le théorème 1.17, se prolonge topologiquement au-dessus de  $\mathbb{C}$ . Mais ce prolongement ne coïncide pas avec  $\tilde{D}$  puisque  $c_0^{-1}(\{-1\})$  le sépare localement. En effet, pour tout  $r < 1$ , la pré-image  $\tilde{U}$  du disque centré en  $-1$  et de rayon  $r$  est un voisinage de  $(-1, 0) \in \tilde{\mathcal{R}}$  tel que  $\tilde{U} \setminus \tilde{\mathcal{R}}$  n'est pas connexe. En revanche, le prolongement au sens de STEIN de  $(\tilde{X}_0, c_0, X_0)$



(a) L'espace  $\tilde{D}$  n'est pas normal puisque la pré-image de  $-1$  le sépare localement

(b) Le revêtement prolongé devient régulier au-dessus de  $-1$

FIGURE 3.1 – Le prolongement de Stein ne coïncide pas avec la construction naturelle

est donné par

$$\tilde{\mathbf{i}} : \begin{array}{ccc} \tilde{X}_0 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (z, w) & \longmapsto & \left(z, \frac{w}{z+1}\right) \end{array} .$$

L'application  $\tilde{\mathbf{i}}$  est holomorphe, injective à images dans

$$\tilde{X}_1 := \{(z, W) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : W^2 = z - 1\}$$

qui, contrairement à  $\tilde{D}$ , possède une structure d'espace complexe normal. Tout prolongement de STEIN de  $(\tilde{X}_0, c_0, X_0)$  est donc équivalent à  $(\tilde{X}_1, c_1, \mathbb{C})$  où  $c_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow \mathbb{C}$  désigne la projection sur  $z$ , voir les figures 3.1.

On observe un phénomène analogue lorsque le nombre de feuilletts est égal à 1 comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 3.4.** Soit  $X := \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : z = w^2\}$  et  $c : X \rightarrow \mathbb{C}$  la projection sur la première coordonnée  $(z, w) \mapsto z$ . Alors  $(X, c, \mathbb{C})$  est un revêtement analytique à deux feuillets de diviseur de ramification  $\mathcal{R} = \{0\}$ . La fonction définie par  $h(z, w) = (z - 1)w$  sépare les pré-images de  $z = -1$  mais ne sépare pas celles de  $z = 1$ . Soit  $\omega(z, \zeta)$  le polynôme de WEIERSTRASS de cette fonction comme défini dans (1.9).

$$\omega(z, \zeta) = \prod_{w: z=w^2} [\zeta - (z - 1)w][\zeta + (z - 1)w] = \zeta^2 - z(z - 1)^2.$$

Considérons l'ensemble  $M$  constitué des points de  $\mathbb{C}^2$  qui annulent  $\omega$  et désignons par  $\sigma$  le lieu où le discriminant s'annule *i.e.*,  $\sigma = \{z \in \mathbb{C} : z(z - 1)^2 = 0\}$ . La fonction

$$\begin{aligned} \Phi : X &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (z, w) &\longmapsto (z, (z - 1)w) \end{aligned}$$

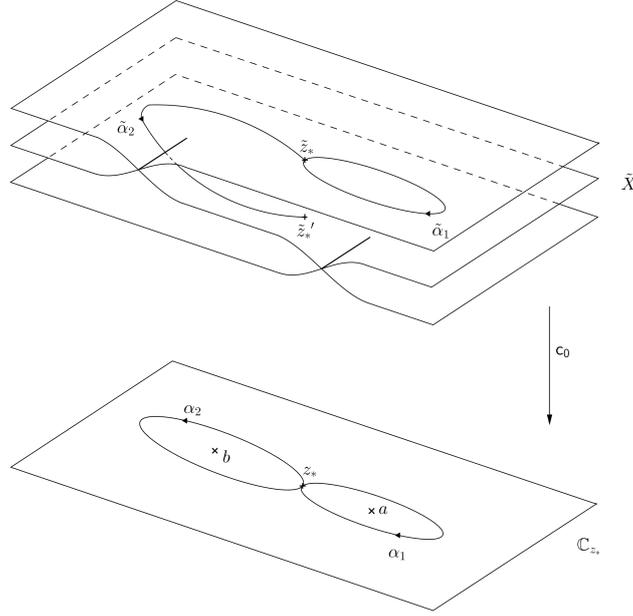
est continue à images dans  $M$  et sa restriction au-dessus de  $M \setminus \{(1, 0)\}$  induit un homéomorphisme. Son application réciproque  $\Psi : M \setminus \{(1, 0)\} \rightarrow X \setminus \{(1, 1); (1, -1)\}$  induit un revêtement régulier à un feuillet donc, d'après la remarque 1.18, le prolongement topologique de STEIN associé est un homéomorphisme  $\Psi_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ . Le fait que  $\Phi^{-1}(1, 0) = \{(1, 1); (1, -1)\}$  implique que  $\Phi : X \rightarrow M$  n'est pas globalement injective. On en déduit donc que  $\Psi_1^{-1}$  n'est pas équivalent à  $\Phi$ .

### 3.4 Prolongements faibles

Dans l'exemple qui suit, on construit un revêtement analytique de degré 3 qui ne se prolonge qu'en l'identité *i.e.*, le revêtement trivial alors que son diviseur de ramification se prolonge.

**Exemple 3.5.** Soit  $z_* \in \mathbb{C}^*$  fixé et définissons  $\mathbb{C}_{z_*} := \{z_*\} \times \mathbb{C}$  dans  $D_1 = \mathbb{C}^2$ . On considère l'hypersurface  $\mathcal{R}_1$  de  $D_1$  d'équation  $z_1 = z_2^2$ . L'intersection  $\mathcal{R}_1 \cap \mathbb{C}_{z_*}$  est constituée de deux points  $a$  et  $b$  identifiés aux racines carrées  $z_*$ . On construit le revêtement analytique  $(\tilde{X}, c_0, \mathbb{C}_{z_*})$  de degré 3 comme illustré dans la figure 3.2. Le groupe  $\pi_1(\mathbb{C}_{z_*} \setminus \{a, b\}, z_*)$  est librement engendré par les classes de deux lacets  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  basés en  $z_*$  qui peuvent être choisis de sorte que :

- le relevé de  $\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2$  par  $c_0$  en une certaine pré-image  $\tilde{z}_*$  de  $z_*$  n'est pas un chemin fermé dans  $\tilde{X}$  et


 FIGURE 3.2 – Revêtement sur  $\Delta(z_*)$ 

— le lacet  $\alpha$  est homotope dans  $D_1 \setminus \mathcal{R}_1$  au chemin constant égal à  $z_*$ , voir le lemme 3.8.

On en déduit que le revêtement ne se prolonge pas fortement au-dessus de  $D_1$ . Il existe cependant un prolongement fort au-dessus de  $D_0 = \Omega \times \mathbb{C}$  où  $\Omega$  est un voisinage de  $z_*$  ne contenant pas 0 de sorte que  $\pi_1(D_0 \setminus \mathcal{R}_0, z_*) = \pi_1(\mathbb{C}_{z_*} \setminus \{a, b\}, z_*)$ , où  $\mathcal{R}_0 := \mathcal{R}_1 \cap D_0$ , voir figure 3.3.

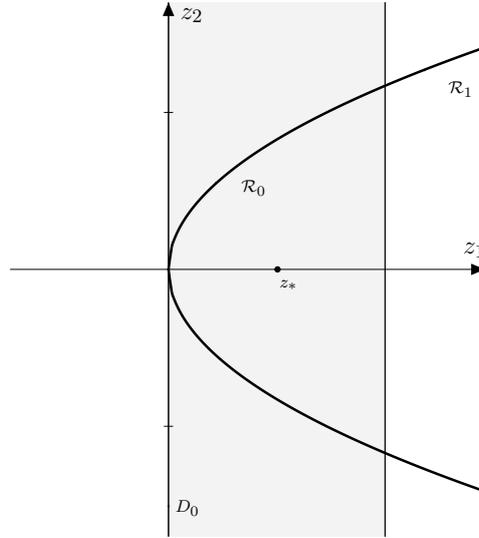
Ce revêtement analytique que l'on note  $(\tilde{D}_0, c_0, D_0)$  est défini explicitement de la manière suivante. Désignons par  $\Omega$  le disque  $\{z_1 \in \mathbb{C} : |z_1 - 1| < 1\}$  et considérons la détermination holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  de la racine cubique sur  $\Omega$  telle que  $f(1) = 1$ . Définissons  $D_0 := \Omega \times \mathbb{C}$  et

$$\tilde{D}_0 := \left\{ (z, w) \in D_0 \times \mathbb{C} : w^3 + \frac{f(z_1)}{\sqrt[3]{4}} w + \frac{iz_2}{\sqrt{27}} = 0 \right\} \quad (3.1)$$

la sous-variété de  $D_0 \times \mathbb{C}$ . Soit  $c_0 : \tilde{D}_0 \rightarrow D_0$  la restriction à  $\tilde{D}_0$  de la projection  $D_0 \times \mathbb{C} \rightarrow D_0$ .

**Lemme 3.6.** *On a les assertions suivantes :*

- (i)  $(\tilde{D}_0, c_0, D_0)$  est un revêtement analytique connexe de degré 3 de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_0 := \mathcal{R}_1 \cap D_0$  et
- (ii) tout prolongement connexe de ce revêtement à  $D_1$  est de degré 1.


 FIGURE 3.3 – Construction de  $D_0$ 

**Preuve.** L'application  $c_0 : \tilde{D}_0 \rightarrow D_0$  est holomorphe, propre et surjective. Puisque  $\tilde{D}_0$  est une variété complexe, l'espace  $\tilde{\mathcal{R}}_0 := c_0^{-1}(\mathcal{R}_0)$  ne le sépare pas localement. De plus, le discriminant du polynôme  $w^3 + \frac{f(z_1)}{\sqrt[3]{4}}w + \frac{iz_2}{\sqrt{27}}$  en l'indéterminée  $w$  est  $z_2^2 - z_1$ , on en déduit que  $(\tilde{D}_0, c_0, D_0)$  est un revêtement analytique à 3 feuillets de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_0$ .

Montrons l'assertion (ii). L'hypersurface  $\mathcal{R}_1$  prolonge  $\mathcal{R}_0$  dans  $D_1$  et le groupe fondamental de  $D_1 \setminus \mathcal{R}_1$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . En désignant par  $z_*$  le point de coordonnées  $(1, 0)$ , le groupe  $\pi_1(D_0 \setminus \mathcal{R}_0, z_*)$  est librement engendré par les deux lacets suivants

$$\begin{aligned} \alpha_1 : t \in [0, 1] &\mapsto (1, 1 - e^{-i2\pi t}) \\ \alpha_2 : t \in [0, 1] &\mapsto (1, -1 + e^{i2\pi t}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Le morphisme (2.1) étant surjectif, il existe d'après le théorème 2.1 un prolongement connexe surjectif maximal  $(\tilde{D}_1, c_1, D_1)$  de  $(\tilde{D}_0, c_0, D_0)$  au-dessus de  $D_1$  de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_1$  et de degré  $b_1 \leq 3$ . Montrons par l'absurde que  $b_1 = 1$ .

Si  $b_1 = 3$ , le prolongement obtenu est fort. Montrons le résultat suivant.

**Lemme 3.7.** *Il existe une pré-image  $x_*$  de  $z_*$  par  $c_1$  telle que le relevé de  $\alpha_1$  en  $x_*$  est fermé.*

**Preuve.** On remarque que tout point de  $\mathcal{R}_0$  possède exactement deux pré-images

### 3.4. PROLONGEMENTS FAIBLES

par  $c_0$  car pour tout  $z \in \mathcal{R}_0$ , il existe  $\xi \in \mathbb{C}$  tel que  $z_2 = 2\xi^3$  et  $f(z_1) = \sqrt[3]{4}\xi^2$  et

$$w^3 + \xi^2 w + 2i \frac{\xi^3}{\sqrt{27}} = \left( w - \frac{2i\xi}{\sqrt{3}} \right) \left( w + \frac{i\xi}{\sqrt{3}} \right)^2. \quad (3.3)$$

En particulier, il existe une pré-image d'ordre un du point  $(1,1)$  i.e., dans un voisinage  $V$  de ce point, il existe une composante connexe  $\tilde{V}$  de  $c_0^{-1}(V)$  telle que la restriction de  $c_0$  à  $\tilde{V}$  induit un homéomorphisme sur  $V$ . Pour tout chemin  $\lambda$  joignant  $z \in V \setminus \mathcal{R}_0$  à  $z_*$ , il existe un lacet  $\alpha'_1 \subset V \setminus \mathcal{R}_0$  homotope à  $\lambda \cdot \alpha_1 \cdot \lambda^{-1}$  dans  $D_0 \setminus \mathcal{R}_0$ . En désignant par  $\tilde{\lambda}$  le relevé de  $\lambda$  basé en l'unique pré-image  $x \in \tilde{V}$  de  $z$  par  $c_0|_{\tilde{V}}$ , le point  $x_* := \tilde{\lambda}(1)$  est la pré-image désirée. □

**Lemme 3.8.** *Le lacet  $\alpha := \alpha_1 \cdot \alpha_2$  est homotope au lacet constant dans  $D_1 \setminus \mathcal{R}_1$ .*

**Preuve.** L'application suivante

$$H_1 : (s, t) \in [0, 1]^2 \mapsto \left[ s + (1-s)e^{-i2\pi t}, \sqrt{s}(1 - e^{-i2\pi t}) \right]$$

induit une homotopie entre  $\alpha_1$  et le lacet  $\beta : t \mapsto (e^{-i2\pi t}, 0)$  dans  $D_1 \setminus \mathcal{R}_1$ . D'une manière analogue, le chemin  $\alpha_2$  est homotope à  $\beta^{-1} : t \mapsto \beta(1-t)$  dans  $D_1 \setminus \mathcal{R}_1$  via l'application

$$H_2 : (s, t) \in [0, 1]^2 \mapsto \left[ s + (1-s)e^{i2\pi t}, \sqrt{s}(-1 + e^{i2\pi t}) \right].$$

ce qui prouve le lemme 3.8. □

En désignant par  $x_*$  la pré-image de  $z_*$  par  $c_1$  qui vérifie la conclusion du lemme 3.7, le relevé de  $\alpha := \alpha_1 \cdot \alpha_2$  en  $x_*$  par  $c_1$  ne peut pas être fermé, voir figure 3.2, car sinon le relevé de tout lacet  $\gamma \subset D_0 \setminus \mathcal{R}_0$  serait fermé ce qui est impossible puisque  $\tilde{\mathcal{R}}_0$  ne sépare pas localement  $\tilde{D}_0$ . Compte tenu du lemme 3.8, on aboutit à une contradiction et on en déduit que  $b_1 < 3$ .

Si  $b_1 = 2$ , on peut supposer d'après le théorème 2.25 que

$$\tilde{D}_1 = \left\{ (z, \zeta) \in D_1 \times \mathbb{C} : \zeta^2 = z_1 - z_2^2 \right\}$$

et que  $c_1 : \tilde{D}_1 \rightarrow D_1$  est la projection sur  $z$ . Il existe alors une application holomorphe

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{i}} : \tilde{D}_0 &\longrightarrow \tilde{D}_1 \\ (z, w) &\longmapsto [z, \varphi(z, w)] \end{aligned}$$

telle que  $c_1 \circ \tilde{\mathbf{i}} = c_0$  où  $\varphi$  est une fonction holomorphe sur  $\tilde{D}_0$  vérifiant  $\varphi(z, w)^2 = z_1 - z_2^2$ . Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $z_1 = 4\varepsilon^3 \in \Omega$ . La projection

$$\begin{aligned} \pi : \tilde{D}_0 \cap \{z_1 = 4\varepsilon^3\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (4\varepsilon^3, z_2, w) &\longmapsto w \end{aligned}$$

induit un biholomorphisme sur  $\mathbb{C}$  d'inverse  $\pi^{-1} : w \mapsto [4\varepsilon^3, i\sqrt{27}(w^3 + \varepsilon w), w]$ . La fonction holomorphe  $g = \varphi \circ \pi^{-1}$  vérifie la relation suivante  $g(w)^2 = 4\varepsilon^3 + 27(w^3 + \varepsilon w)^2$  ce qui est impossible car l'image de  $g$  contient 0 (prendre  $w^2 = -\varepsilon/3$ ). On en déduit ainsi une contradiction. Le nombre  $b_1$  de feuilletts est nécessairement égal à 1 et d'après le théorème 2.1.(iii), tout autre prolongement de  $(\tilde{D}_0, c_0, D_0)$  sur  $D_1$  est équivalent au revêtement trivial ce qui prouve le lemme 3.6. □

### 3.5 Prolongements faibles galoisiens

Il existe des revêtements analytiques galoisiens qui ne se prolongent pas fortement. On donne un exemple où le degré est égal à 3 dans ce paragraphe.

**Exemple 3.9.** Comme dans les conditions de l'exemple 3.5, on définit le disque  $\Omega = \{z_1 \in \mathbb{C} : |z_1 - 1| < 1\}$ ,  $D_0 = \Omega \times \mathbb{C}$  et

$$\tilde{D}_0 := \{(z, w) \in D_0 \times \mathbb{C} : w^3 - (z_1 - z_2^2)(g(z_1) - z_2) = 0\},$$

où  $g$  désigne la détermination holomorphe de la racine carrée sur  $\Omega$  telle que  $g(1) = 1$ . On définit  $\mathcal{R}_1$  l'hypersurface de  $D_1 = \mathbb{C}^2$  d'équation  $z_1 = z_2^2$  et  $\mathcal{R}_0 := \mathcal{R}_1 \cap D_0$ . Désignons par  $c_0$  la restriction à  $\tilde{D}_0$  de la projection naturelle  $D_0 \times \mathbb{C} \rightarrow D_0$ .

**Lemme 3.10.** *On a les assertions suivantes*

- (i)  $\tilde{D}_0$  possède une structure d'espace complexe normal de sorte que  $(\tilde{D}_0, c_0, D_0)$  est un revêtement analytique galoisien connexe de degré 3 de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_0$  et
- (ii) le seul prolongement connexe possible de ce revêtement au-dessus de  $D_1$  est le revêtement trivial.

**Preuve.** Montrons d'abord que pour tout  $r > 0$ ,

$$\tilde{\Delta} := \{(z, w) \in \Delta_{2r}^* \times \mathbb{C} : w^3 = z^2\}$$

est connexe, où  $\Delta_{2r}^*$  désigne le disque ouvert de rayon  $2r$  épointé en 0. La projection  $c_\Delta : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta_{2r}^*$  sur  $z$  induit un revêtement régulier et en désignant par  $\gamma$  le chemin  $t \in [0, 1] \rightarrow re^{i2\pi t}$ , on en déduit que son relevé  $(\tilde{\gamma}, \gamma)$  par  $c_\Delta$  basé en  $(\tilde{\gamma}(0), r)$  vérifie

$$\tilde{\gamma}(1) = j^2 \cdot \tilde{\gamma}(0)$$

où  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ . Il s'en suit que toutes les pré-images de  $z_0 = r$  par ce revêtement peuvent être reliées par un chemin dans  $\tilde{\Delta}$  ce qui prouve d'après le théorème 1.2 la connexité de  $\tilde{\Delta}$ . On en déduit que l'espace  $\tilde{\mathcal{R}}_0 := c_0^{-1}(\mathcal{R}_0)$  ne sépare pas localement  $\tilde{D}_0$ . Soit en effet  $(z_1, z_2) \in \mathcal{R}_0$  où  $z_1 \in \Omega$  que l'on suppose, sans perte de généralité, égal à 1.

Si  $z_2 = 1$ , on désigne pour tout  $r > 0$  le polydisque  $U_r$  centré en  $(1, 1)$  de rayon  $r$ . Il existe  $r_0 > 0$  tel que pour tout  $r < r_0$ ,  $\tilde{U}_r := c_0^{-1}(U_r)$  est biholomorphe à

$$\{(z, W) \in U \setminus \mathcal{R}_0 \times \mathbb{C} : W^3 = (g(z_1) - z_2)^2\}.$$

Et en utilisant la même construction que ci-dessus, on en déduit que cet espace est connexe par arcs.

Si  $z_2 = -1$ , on montre dans les mêmes notations que précédemment que l'espace  $\tilde{U}_r$  est biholomorphe à

$$\{(z, W) \in U \setminus \mathcal{R}_0 \times \mathbb{C} : W^3 = (g(z_1) + z_2)\}$$

qui est également connexe. D'après le théorème 1.21, l'espace  $\tilde{D}_0$  peut-être muni d'une structure d'espace complexe tel que  $(\tilde{D}_0, c_0, D_0)$  est un revêtement analytique. Ce revêtement est de plus connexe par construction et galoisien puisque les automorphismes sont données par les applications

$$\Phi_k : (z, w) \in \tilde{D}_0 \setminus \mathcal{R}_0 \mapsto (z, j^k w), k = 0, 1, 2.$$

La première assertion du lemme est donc montrée.

D'après le théorème 2.1, il existe un revêtement analytique  $(\tilde{D}_1, c_1, D_1)$  connexe de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_1$  et de degré  $b_1 \leq 3$  qui prolonge surjectivement  $(\tilde{D}_0, c_0, D_0)$ . Montrons par l'absurde que  $b_1 = 1$ .

Si  $b_1 = 3$ , le prolongement est fort. Remarquons que la fibre de  $z_* := (1, 0)$  s'identifie à l'ensemble des racines cubiques de l'unité  $\{1, j, j^2\}$ . Comme dans l'exemple 3.5, désignons par  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les lacets définis dans (3.2) qui engendrent le groupe  $\pi_1(D_0 \setminus \mathcal{R}_0, z_*)$ .

$$\begin{aligned} \alpha_1 : t \in [0, 1] &\mapsto (1, 1 - e^{-i2\pi t}) \\ \alpha_2 : t \in [0, 1] &\mapsto (1, -1 + e^{i2\pi t}) \end{aligned}$$

On montre par le calcul que la dernière composante  $\tilde{\alpha}_1$  du relevé de  $\alpha_1$  par  $c_0$  vérifie la relation suivante :

$$\tilde{\alpha}_1(t)^3 = \left(e^{-i2\pi t}\right)^2 \left(2 - e^{-i2\pi t}\right),$$

et donc

$$\tilde{\alpha}_1(1) = \tilde{\alpha}_1(0) \cdot j.$$

En utilisant les mêmes notations pour  $\alpha_2$ , on en déduit que :

$$\tilde{\alpha}_2(1) = \tilde{\alpha}_2(0) \cdot j.$$

Il s'en suit que le relevé du chemin  $\alpha := \alpha_1 \cdot \alpha_2$  n'est pas fermé, voir la figure 3.4. D'après le lemme 3.8 montré à l'exemple précédent, on a une contradiction puisque le lacet  $\alpha$  est homotope au lacet constant dans  $D_1 \setminus \mathcal{R}_1$ . Le prolongement est donc faible et  $b_1 \leq 2$ .

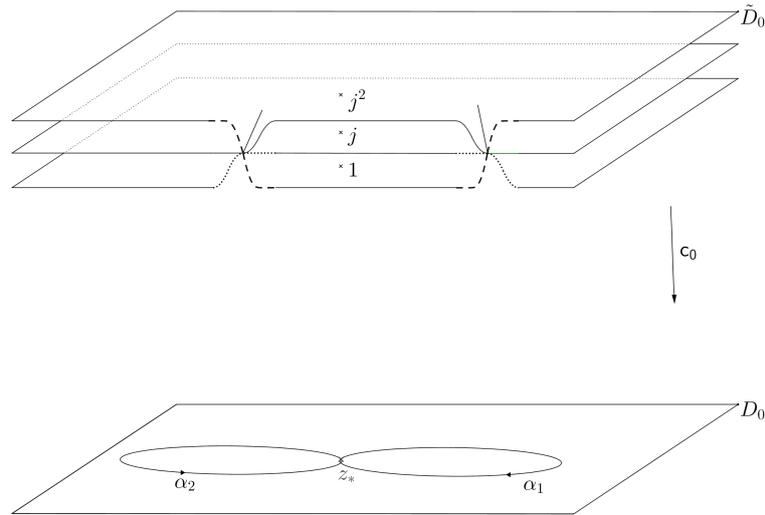


FIGURE 3.4 – Le relevé du chemin  $\alpha$  par ce revêtement galoisien n'est pas fermé

Supposons que  $b_1 = 2$ . Il existe d'après le théorème 2.25 une application holomorphe  $\tilde{i} : \tilde{D}_0 \rightarrow D_1 \times \mathbb{C}$  à valeurs dans

$$\tilde{D}_1 := \left\{ (z, \zeta) \in D_1 \times \mathbb{C} : \zeta^2 = z_1 - z_2^2 \right\}.$$

telle que  $c_1 \circ \tilde{i} = c_0$  où  $c_1$  est la restriction de la projection  $D_1 \times \mathbb{C} \rightarrow D_1$  à  $\tilde{D}_1$ . Il existe alors une fonction  $\varphi$  holomorphe sur  $\tilde{D}_0$  telle que

$$\forall (z, w) \in \tilde{D}_0, \varphi(z, w)^2 = z_1 - z_2^2.$$

Définissons l'ouvert suivant :

$$W := \left\{ w \in \mathbb{C} : \left( \frac{w^3 + 1}{2} \right)^2 \in \Omega \right\}$$

de sorte que pour tout  $w \in W$ , le point de coordonnées  $\left( \left( \frac{w^3 + 1}{2} \right)^2, \frac{w^3 - 1}{2}, w \right)$  appartient à  $\tilde{D}_0$ . On en déduit que la fonction

$$h : w \in W \mapsto \varphi \left( \left( \frac{w^3 + 1}{2} \right)^2, \frac{w^3 - 1}{2}, w \right)$$

est holomorphe sur  $W$  et vérifie la relation  $h(w)^2 = \left( \frac{w^3 + 1}{2} \right)^2 - \left( \frac{w^3 - 1}{2} \right)^2 = w^3$  ce qui est impossible puisque  $W$  contient 0. On en déduit que  $b_1 = 1$ , et d'après le théorème 2.1.(iii), tout autre prolongement est équivalent au revêtement trivial ce qui prouve le lemme 3.10.

□

### 3.6 Prolongement faible non trivial

On a construit aux paragraphes 3.4 et 3.5 des revêtements analytiques tels que les seuls prolongements possibles étaient les revêtements triviaux. L'exemple ci-dessous montre que ce n'est pas le cas en général.

**Exemple 3.11.** Comme dans les conditions de l'exemple 3.5, on définit le disque  $\Omega = \{z_1 \in \mathbb{C} : |z_1 - 1| < 1\}$ ,  $D_0 = \Omega \times \mathbb{C}$  et

$$\tilde{D}_0 := \left\{ (z, w) \in D_0 \times \mathbb{C} : w^4 - (g(z_1) - z_2)(g(z_1) + z_2)^3 = 0 \right\}$$

où  $g$  désigne la détermination holomorphe de la racine carrée sur  $\Omega$  telle que  $g(1) = 1$ . On définit  $\mathcal{R}_1$  l'hypersurface de  $D_1 = \mathbb{C}^2$  d'équation  $z_1 = z_2^2$  et  $\mathcal{R}_0 := \mathcal{R}_1 \cap D_0$ . Désignons par  $\mathbf{c}_0$  la restriction à  $\tilde{D}_0$  de la projection naturelle  $D_0 \times \mathbb{C} \rightarrow D_0$ .

**Lemme 3.12.** *On a les assertions suivantes :*

- (i)  $\tilde{D}_0$  possède une structure d'espace complexe normal de sorte que  $(\tilde{D}_0, \mathbf{c}_0, D_0)$  est un revêtement analytique connexe galoisien de degré 4 de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_0$ ,

- (ii) *il ne se prolonge pas fortement sur  $D_1$  mais il existe un revêtement analytique connexe galoisien de degré 2 sur  $D_1$  de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_1$  qui le prolonge.*

**Preuve.** La preuve de la première assertion du lemme est similaire à celle du lemme 3.10. On remarque en effet par les mêmes méthodes que la restriction à  $\mathfrak{c}_0$  au-dessus de  $D_0 \setminus \mathcal{R}_0$  induit un revêtement galoisien de degré 4, que  $\tilde{D}_0$  est connexe et que  $\tilde{\mathcal{R}}_0 := \mathfrak{c}^{-1}(\mathcal{R}_0)$  ne le sépare pas localement. Les automorphismes de revêtements sont par ailleurs donnés par les applications

$$\Phi_k : (z, w) \mapsto (z, i^k w), \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Montrons l'assertion (ii) : Soit  $z_*$  le point de coordonnées  $(1, 0) \notin \mathcal{R}_0$ . Le morphisme

$$\pi_1(D_0 \setminus \mathcal{R}_0, z_*) \rightarrow \pi_1(D_1 \setminus \mathcal{R}_1, z_*)$$

est surjectif donc il existe d'après le théorème 2.1.(i) un revêtement analytique  $(\tilde{D}_1, \mathfrak{c}_1, D_1)$  de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_1$  qui prolonge  $(\tilde{D}_0, \mathfrak{c}_0, D_0)$ . Le nombre  $b_1$  de ses feuillettes est inférieur ou égal à 4. Ce revêtement est par ailleurs galoisien d'après le corollaire 2.6. Montrons que l'extension n'est pas forte *i.e.*, que  $b_1 < 4$ . Le groupe fondamental  $\pi_1(D_0 \setminus \mathcal{R}_0, z_*)$  est en effet libre à deux générateurs donnés par les lacets définis en (3.2) :

$$\alpha_1 : t \mapsto (1, 1 - e^{-i2\pi t})$$

et

$$\alpha_2 : t \mapsto (1, -1 + e^{i2\pi t})$$

En désignant par  $\tilde{\alpha}_1$  la deuxième composante du relevé de  $\alpha_1$  par  $\mathfrak{c}_0$  en un point  $(\alpha_1(0), \tilde{\alpha}_1(0))$ , on a la relation suivante

$$\tilde{\alpha}_1(1) = -i \cdot \tilde{\alpha}_1(0).$$

De même, en utilisant les mêmes notations pour  $\alpha_2$ ,

$$\tilde{\alpha}_2(1) = -i \cdot \tilde{\alpha}_2(0).$$

On en déduit que le relevé du produit  $\alpha := \alpha_1 \cdot \alpha_2$  par  $\mathfrak{c}_0$  n'est pas fermé alors qu'il est homotope au lacet constant dans  $D_1 \setminus \mathcal{R}_1$ , d'après le lemme 3.8 ce qui implique que  $b_1 < 4$ .

En revanche, il existe un prolongement de degré 2 sur  $D_1$  via l'application holomorphe suivante

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{i}}: \quad \tilde{D}_0 &\longrightarrow \tilde{D}_1 \\ (z, w) &\longmapsto (z, w^2(g(z_1) - z_2)) \end{aligned}$$

où

$$\tilde{D}_1 := \left\{ (z, W) \in \mathbb{C} \times D_1 : W^2 = (z_1 - z_2^2)^3 \right\}.$$

L'espace  $\tilde{D}_1$  possède en effet d'après le théorème 1.23 une structure d'espace complexe normal de sorte que  $(\tilde{D}_1, \mathfrak{c}_1, D_1)$  est un prolongement connexe de  $(\tilde{D}_0, \mathfrak{c}_0, D_0)$  ce qui prouve le lemme 3.12.

**Remarque 3.13.** On peut généraliser cette construction de la manière suivante : Pour tout entier  $n$  divisible par  $d \in \mathbb{N}$ , il existe un revêtement analytique à  $n$  feuillets qui ne se prolonge pas fortement mais qui admet un prolongement faible à  $d$  feuillets. on définit en gardant les mêmes notations que dans l'exemple 3.11

$$\tilde{D}_0 := \left\{ (z, w) \in D_0 \times \mathbb{C} : w^n - (g(z_1) - z_2)(g(z_1) + z_2)^{d+1} = 0 \right\}.$$

Alors  $(\tilde{D}_0, \mathfrak{c}_0, D_0)$  est un revêtement analytique de degré  $n$  qui ne se prolonge pas fortement à  $D_1$ . En revanche, le revêtement analytique à  $d$  feuillets suivant le prolonge :

$$\tilde{D}_1 := \left\{ (z, W) \in \mathbb{C} \times D_1 : W^d - (z_1 - z_2^2)^{d+1} = 0 \right\}$$

via l'application holomorphe suivante

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{i}}: \quad \tilde{D}_0 &\longrightarrow \tilde{D}_1 \\ (z, w) &\longmapsto (z, w^{n/d}(g(z_1) - z_2)) \end{aligned}$$

### 3.7 Prolongement non surjectif

Sans l'hypothèse de surjectivité du morphisme (2.1) défini au théorème 2.1, il peut exister un revêtement analytique qui ne se prolonge pas surjectivement. Dans l'exemple ci-dessous, on montre que pour tous entiers  $n$  et  $m$  vérifiant  $n \geq 3$  et  $m \geq n + 2$ , il existe un revêtement analytique de degré  $n$  dont le prolongement associé possède  $m$  feuillets.

**Exemple 3.14.** Soit  $m \geq 5$  un entier et désignons par  $X_m$  l'espace de configuration de  $m$  points complexes *i.e.*, le quotient de  $\mathbb{C}^m$  par la relation d'équivalence suivante :

$$(z_1, \dots, z_m) \sim (z'_1, \dots, z'_m) \Leftrightarrow \exists \sigma \in S_m : z'_i = z_{\sigma(i)}, \forall i = 1, \dots, m,$$

où  $S_m$  désigne l'ensemble des permutations de  $\{1, \dots, m\}$ .  $X_m$  s'identifie avec  $\mathbb{C}^m$  via l'ensemble des polynômes unitaires de degré  $m$ .

$$(z_1, \dots, z_m) \in X_m \mapsto (Z - z_1) \dots (Z - z_m) = Z^m + \sum_{k=0}^{m-1} w_k Z^k \mapsto (w_0, \dots, w_{m-1}) \in \mathbb{C}^m \quad (3.4)$$

à coefficients holomorphes en  $z$  donnés par les fonctions symétriques élémentaires

$$w_0 = (-1)^m z_1 \dots z_m, \dots, w_{m-1} = -(z_1 + \dots + z_m).$$

On définit l'hypersurface

$$\mathcal{R}_1 := \left\{ w \in \mathbb{C}^m : \text{Discr}_Z \left( Z^m + \sum_{k=0}^{m-1} w_k Z^k \right) = 0 \right\} \quad (3.5)$$

vue comme l'ensemble des  $w \in \mathbb{C}^m$  pour lesquels le polynôme (3.4) possède des racines multiples, ou de manière équivalente, l'ensemble des uplets  $(z_1, \dots, z_m)$  non tous distincts dans l'espace de configuration  $X_m$  :

$$\mathcal{R}_1 = \left\{ z \in X_m : \prod_{i < j} (z_i - z_j)^2 = 0 \right\}. \quad (3.6)$$

Posons  $D_1 = X_m$  et fixons un point  $p := (\underbrace{1, \dots, 1}_n, 1 + \frac{1}{m}, \dots, 1 + \frac{m-n}{m}) \in \mathcal{R}_1$  où  $3 \leq n \leq m-2$ . Soit  $D_0$  un voisinage de  $p$  et notons  $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_1 \cap D_0$ . Alors pour tout  $z_* \in D_0 \setminus \mathcal{R}_0$ , le groupe fondamental  $\pi_1(D_1 \setminus \mathcal{R}_1, z_*)$  est isomorphe au groupe de tresses  $B_m$  à  $m$  brins, voir [KT08]. Quitte à réduire  $D_0$ , on a d'une manière similaire  $\pi_1(D_0 \setminus \mathcal{R}_0, z_*) = B_n$ . À toute tresse, on associe naturellement une permutation via l'homomorphisme canonique  $\mathfrak{g}_0 : B_n \rightarrow S_n$ .

D'après le théorème 1.5 il existe un revêtement régulier  $(\tilde{D}'_0, \mathfrak{c}_0, D_0 \setminus \mathcal{R}_0)$  de degré  $n$  associé à  $\mathfrak{g}_0$ . Il se prolonge fortement d'après le théorème 1.23 en un revêtement analytique connexe  $(\tilde{D}_0, \mathfrak{c}_0, D_0)$  à  $n$  feuillet de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_0$ . Ce diviseur se prolonge en  $\mathcal{R}_1$  dans  $D_1$ . Supposons l'existence d'un prolongement fort  $(\tilde{D}_1, \mathfrak{c}_1, D_1)$  de  $(\tilde{D}_0, \mathfrak{c}_0, D_0)$ . En notant  $i_* : B_n \rightarrow B_m$  l'homomorphisme

induit par l'inclusion  $i : D_0 \setminus \mathcal{R}_0 \rightarrow D_1 \setminus \mathcal{R}_1$ , il existerait alors un morphisme  $g_1 : B_m \rightarrow S_n$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{i_*} & B_m \\ g_0 \downarrow & & \downarrow g_1 \\ S_n & \xrightarrow{\text{Id}} & S_n \end{array} \quad (3.7)$$

commute i.e.,  $g_1 \circ i_* = g_0$ .

**Lemme 3.15.** *Un tel morphisme  $g_1$  n'existe pas.*

**Preuve.** Supposons le contraire. Soient  $\{\sigma_i\}_{1 \leq i \leq m-1}$  l'ensemble des tresses élémentaires engendrant le groupe  $B_m$  et posons pour tout  $i$ ,  $t_i = g_1(\sigma_i) \in S_n$ . En appliquant  $g_0 = g_1 \circ i_*$  à  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ , on peut supposer que  $t_i = (i \ i+1)$  pour tout  $i = 1, \dots, n-1$ . Puisque tous les  $\sigma_i$  sont deux à deux conjugués dans  $B_m$ , on en déduit que les  $t_i$  le sont aussi dans  $S_n$ . En particulier, l'élément  $t_{m-1}$  est une transposition de  $S_n$  qui doit commuter avec tous les  $(i \ i+1)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , ce qui est impossible. □

**Remarques 3.16.** 1. En désignant par  $g_1$  le morphisme naturel  $B_m \rightarrow S_m$  et  $\tilde{i}_* : S_n \rightarrow S_m$  l'inclusion naturelle, on en déduit que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{i_*} & B_m \\ g_0 \downarrow & & \downarrow g_1 \\ S_n & \xrightarrow{\tilde{i}_*} & S_m \end{array}$$

est bien défini et commute montrant ainsi qu'il existe un prolongement connexe à  $m$  feuillets de  $(\tilde{D}_0, c_0, D_0)$  au-dessus de  $D_1$ .

2. Le revêtement analytique  $(\tilde{D}_0, c_0, D_0)$  construit se prolonge faiblement en un revêtement de degré 2 puisqu'il y a commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{i_*} & B_m \\ g_0 \downarrow & & \downarrow g_1 \\ S_n & \xrightarrow{\tilde{i}_*} & \{-1, +1\}, \end{array}$$

où  $\tilde{i}_*$  est le morphisme qui associe à une permutation sa signature et  $g_1$  est le morphisme égal à  $-1$  sur chaque tresse élémentaire de  $B_m$ .

### 3.8 Prolongement de type HARTOGS

L'exemple suivant met en défaut le corollaire 2.20 dans les cas des figures de HARTOGS 1-convexes.

**Exemple 3.17.** Soit  $\mathcal{R}_1$  l'hypersurface dans  $D_1 = \mathbb{C}^2$  d'équation  $-4z_1^3 - 27z_2^2 = 0$  et considérons le point  $z_*$  de coordonnées  $(-3, 2) \in \mathcal{R}_1$ . En désignant par  $\tilde{D}_1$  l'espace  $\{(z, w) \in D_1 \times \mathbb{C} : w^3 + z_1 w + z_2 = 0\}$  et  $c_1$  la restriction à  $\tilde{D}_1$  de la projection  $D_1 \times \mathbb{C} \rightarrow D_1$ , on en déduit que  $(\tilde{D}_1, c_1, D_1)$  est un revêtement analytique connexe de degré 3 et de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_1$ .

On remarque par ailleurs que le point  $w = 1$  est un zéro d'ordre deux de la fonction  $w^3 - 3w + 2 = (w - 1)^2(w + 2)$ . Par continuité, il existe un voisinage connexe  $D_0$  de  $(-3, 2)$  tel que la composante connexe  $\tilde{D}_0$  de  $c_1^{-1}(D_0)$  contenant  $(-3, 2, 1)$  induit au-dessus de  $D_0$  un revêtement analytique de degré 2 et de diviseur de ramification  $\mathcal{R}_0 := \mathcal{R}_1 \cap D_0$ . Ce revêtement se prolonge en  $(\tilde{D}_1, c_1, D_1)$  de degré 3 ce qui rend le prolongement non surjectif. Cependant, d'après le théorème 2.25, il existe un prolongement fort d'ordre 2 de ce revêtement au-dessus de  $D_1$ .

# Annexe A

## Espaces complexes et prolongements de RIEMANN

Dans cette première annexe, on rappelle quelques notions fondamentales d'analyse complexe en plusieurs variables utilisées tout au long de cette thèse. On donne également quelques généralisations du théorème de prolongement des fonctions holomorphes de RIEMANN appliqué d'abord aux domaines de  $\mathbb{C}^n$  afin d'introduire les espaces complexes normaux, au sens de CARTAN. La plupart de ces résultats sont issus du chapitre 7 de [GR84].

Le résultat suivant est le théorème de prolongement dû RIEMANN en 1851.

**Théorème A.1.** *Soit  $p$  un point d'un domaine  $D \subset \mathbb{C}$  et  $f$  une fonction holomorphe bornée sur  $D \setminus \{p\}$ . Alors  $f$  se prolonge de manière unique en une fonction holomorphe sur  $D$  tout entier.*

**Définition A.2.** Soit  $A$  un sous-ensemble fermé d'une variété complexe  $X$ . On dit que  $A$  est **analytique** en  $x \in X$  s'il existe un voisinage  $U$  et un nombre fini de fonctions holomorphes  $f_1, \dots, f_k$  dans  $U$  telles que

$$A \cap U := \{z \in U : f_1(z) = \dots = f_k(z) = 0\}.$$

On dit que  $A$  est **analytique** s'il est analytique en tout point  $x \in X$ .

Le théorème A.1 se généralise en plusieurs variables de la manière suivante :

**Théorème A.3.** *Soit  $A$  un ensemble analytique d'une variété complexe  $X$  et  $f \in \mathcal{O}(X \setminus A)$  une fonction holomorphe. Supposons que tout point  $a \in A$  possède un voisinage  $U \subset X$  tel que  $f$  est bornée sur  $U \setminus A$ , Alors il existe une unique fonction holomorphe  $\hat{f}$  sur  $X$  qui prolonge  $f$ .*

Une fonction holomorphe étant nécessairement (localement) bornée sur  $X \setminus A$  dès que  $\dim A \leq \dim X - 2$ , on en déduit le résultat suivant.

**Théorème A.4.** *Soit  $A$  un ensemble analytique de codimension au moins égale à 2 d'une variété complexe  $X$  et  $f \in \mathcal{O}(X \setminus A)$  une fonction holomorphe. Alors il existe une unique fonction holomorphe  $\hat{f}$  sur  $X$  qui prolonge  $f$ .*

Introduisons maintenant la notion d'espace complexe, généralisant celle de domaines et de variétés.

**Définition A.5.** Soit  $X$  un espace de HAUSDORFF muni d'un faisceau  $\mathcal{O}_X$  de fonctions continues sur  $X$ , et d'un recouvrement ouvert  $\{U_\alpha\}_\alpha$  de  $X$ . Alors  $X$  est un **espace complexe** si pour tout  $\alpha$ , il existe un homéomorphisme  $F_\alpha : U_\alpha \rightarrow A_\alpha$  où  $A_\alpha$  est un ensemble analytique d'un domaine  $D_\alpha$  de l'espace  $\mathbb{C}^{n_\alpha}$ , pour un certain  $n_\alpha \in \mathbb{N}^*$  tel que le co-morphisme  $F_\alpha^* : \mathcal{O}_{A,\alpha} \rightarrow \mathcal{O}_X|_{U_\alpha}$  est un isomorphisme de faisceaux d'anneaux.  $\mathcal{O}_X$  est appelé la **structure faisceau** de  $X$ .

On peut définir sur les espaces complexes les objets de fonctions holomorphes ou de sous-ensembles analytiques. En particulier  $\text{Sing}(X)$  est un sous-ensemble analytique de  $X$ .

**Définition A.6.** Un espace complexe est **réduit** si tout point  $x \in X$  est réduit, c'est-à-dire s'il n'existe aucun germe  $\mathcal{O}_{X,x}$  possédant une fonction non nulle nilpotente.

En particulier, tous les espaces localement irréductibles sont réduits.

**Définition A.7.** Soit  $X$  un espace complexe. Une fonction faiblement holomorphe  $f$  sur  $X$  est une fonction holomorphe sur  $\text{Reg}(X)$  telle que tout point de  $\text{Sing}(X)$  possède un voisinage  $V$  pour lequel  $f$  est bornée sur  $\text{Reg}(X) \cap V$ . On note  $\tilde{\mathcal{O}}_{X,x}$  l'anneau des germes de fonctions faiblement holomorphe au voisinage de  $x$  et  $\tilde{\mathcal{O}}_X$  le faisceau associé.

En toute généralité, une fonction faiblement holomorphe n'est pas holomorphe comme le montre cet exemple classique.

**Exemple A.8.** Considérons la parabole de NEIL  $N = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1^3 = z_2^2\}$  ayant une singularité en  $(0,0)$ . Pour toute fonction holomorphe  $f$  au point  $(0,0)$  dans  $N$ , il existe un bi-disque  $U \subset \mathbb{C}^2$  centré en  $(0,0)$  et une fonction  $F$  holomorphe sur  $U$  telle que

$$f|_U = F|_N.$$

---

Définissons l'application holomorphe  $p : t \in \mathbb{C} \rightarrow (t^2, t^3) \in N$ . Alors la composée  $h = f \circ p$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$  et vérifie l'égalité  $h'(0) = 0$  puisque  $h = F \circ p$  et donc  $h'(t) = dF_{(t^2, t^3)}(2t, 3t^2)$  ce qui implique que  $h'(0) = 0$ .

Le quotient

$$q(z_1, z_2) = \frac{z_2}{z_1}$$

est une fonction faiblement holomorphe sur  $N$  qui n'est pas holomorphe en  $(0, 0)$  puisque dans les notations ci-dessus,  $h(t) = t$  et  $h'(0) \neq 0$ .

**Définition A.9.** Un espace complexe  $X$  est **normal en un point**  $x \in X$  si  $(X, x)$  est irréductible et  $\tilde{\mathcal{O}}_{X,x} = \mathcal{O}_{X,x}$ . L'ensemble des points normaux de  $X$  est noté  $\text{Norm}(X)$ . On dit que  $X$  est **normal** s'il l'est en tous ses points.

Cette définition a été introduite par CARTAN dans ses séminaires données à L'École Normale Supérieure. D'une manière équivalente, un espace complexe normal est donc un espace complexe réduit sur lequel les théorèmes d'extension de RIEMANN sont valables.

**Théorème A.10.** *Soit  $X$  un espace complexe normal,  $A \subset X$  un ensemble analytique et  $f \in \mathcal{O}(X \setminus A)$ . Supposons l'une de ces assertions vraies.*

- $f$  est bornée dans un voisinage de tout point de  $A$ ,
- $A$  est de codimension supérieure ou égale à 2.

*Alors il existe une unique fonction holomorphe  $\hat{f}$  sur  $X$  qui prolonge  $f$ .*

Rappelons aussi que tout espace complexe normal est localement irréductible et de dimension pure. On en déduit qu'un tel espace est localement l'espace de revêtement analytique au-dessus d'un domaine de  $\mathbb{C}^n$ , voir le théorème 7.2.2 de [GR84]. Par ailleurs, l'ensemble des points singuliers d'un espace normal est de codimension au moins 2, on déduit du théorème A.10 précédent que toute fonction holomorphe sur  $\text{Reg}(X)$  se prolonge holomorphiquement à  $X$ .

Une autre application du théorème de prolongement de RIEMANN est le résultat suivant.

**Théorème A.11.** *Soit  $X$  un espace complexe normal connexe. Alors pour tout ensemble analytique  $A$  nulle part dense, le complémentaire  $X \setminus A$  est connexe.*

Rappelons enfin le résultat de normalisation dû à OKA qui énonce que le faisceau  $\tilde{\mathcal{O}}_X$  d'un espace complexe réduit peut définir la structure faisceau  $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$  d'un espace complexe normal  $\tilde{X}$ .

**Théorème A.12.** *Soit  $X$  un espace complexe réduit. Il existe un espace complexe normal  $\tilde{X}$ , une fonction holomorphe  $c : \tilde{X} \rightarrow X$  telle que :*

1.  $c : \tilde{X} \rightarrow X$  est propre, surjective, dont les fibres sont discrètes et
2. L'ensemble  $\tilde{S} := c^{-1}(\text{Sing}(X))$  est nulle part dense dans  $\tilde{X}$  et la restriction  $c : \tilde{X} \setminus \tilde{S} \rightarrow X \setminus \text{Sing}(X)$  induit un biholomorphisme.

*L'espace  $\tilde{X}$  est unique à isomorphisme près en ce sens que si  $c' : \tilde{X}' \rightarrow X$  est une autre normalisation, alors il existe un biholomorphisme  $\Phi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$  tel que  $c' \circ \Phi = c$ .*

# Annexe B

## Ensembles analytiques globalement définis

Au cours des chapitres précédents, on a montré certains théorèmes de prolongement lorsque le diviseur de ramification  $\mathcal{R}$  était globalement défini, c'est-à-dire

$$\mathcal{R} = \{z \in D : f_1(z) = \dots f_p(z) = 0\}.$$

Le but de cette annexe est de donner quelques précisions sur ces ensembles analytiques.

En général, les ensembles analytiques comme introduits dans la définition A.2 ne peuvent pas être globalement définis comme l'illustre le contre-exemple donné dans [GF02].

**Exemple B.1.** Soit  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  la figure de HARTOGS définie par

$$\begin{aligned}\Omega_1 &:= \left\{ z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < \frac{1}{2} \text{ et } |z_2| < 1 \right\}, \\ \Omega_2 &:= \left\{ z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1 \text{ et } \frac{1}{2} < |z_2| < 1 \right\}.\end{aligned}$$

L'ensemble  $\mathcal{R} := \{z \in \Omega_2 : z_1 = z_2\}$  est analytique dans  $\Omega$  puisque  $\mathcal{R} \cap \Omega_1 = \emptyset$ . Toute fonction  $f$  holomorphe sur  $\Omega$  qui s'annule sur  $\mathcal{R}$  se prolonge holomorphiquement au polydisque  $\Delta^2$ , d'après le théorème de prolongement de HARTOGS, voir [Har06]. On en déduit en particulier que l'ensemble des zéros  $Z_f := \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$  contiendrait nécessairement  $\mathcal{R}' := \{z \in \Omega : z_1 = z_2\}$  ce qui prouve que  $\mathcal{R}$  ne peut pas être défini par des fonctions holomorphes sur  $\Omega$ .

Cette propriété devient vraie si  $\Omega$  est un domaine d'holomorphic *i.e.*, s'il existe une fonction  $f$  holomorphe sur  $\Omega$  non prolongeable à tout domaine  $\Omega' \supsetneq \Omega$ .

**Théorème B.2.** *Soit  $\mathcal{R}$  un ensemble analytique dans un domaine d'holomorphic  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ . Il existe  $n+1$  fonctions holomorphes  $f_1, \dots, f_{n+1}$  sur  $\Omega$  telles que*

$$\mathcal{R} = \{z \in \omega : f_1(z) = \dots = f_{n+1}(z) = 0\}$$

Les détails de ce résultat sont données dans [GF02; GF76]. Néanmoins, une hypersurface de codimension pure égale à 1 n'est pas globalement définie par une seule équation en général dans un domaine d'holomorphic. Le contreexemple suivant est dû à SERRE dans [Ser53].

**Exemple B.3.** Soit  $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^3 : |z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 1| < 1\}$ . C'est un domaine d'holomorphic puisqu'en tout point du bord, on peut trouver une fonction barrière. Posons  $\mathcal{R} := \{z_1 = iz_2\}$ . Alors  $\mathcal{R} \cap D$  possède deux composantes connexes. Chacune d'entre elle est une hypersurface analytique de codimension 1 qui ne peut s'écrire comme l'ensemble des zéros d'une seule fonction holomorphic.

En revanche, une hypersurface d'un polydisque peut, sous certaines conditions, s'écrire comme l'ensemble des zéros d'un polynôme de WEIERSTRASS comme le montre ce résultat.

**Théorème B.4.** *Soit  $\mathcal{R}$  une hypersurface de codimension pure égale à 1 dans le polydisque unité  $\Delta^n$  n'interceptant pas cette partie du bord  $\Delta^{n-1} \times \partial\Delta$ . Alors il existe un polynôme de WEIERSTRASS  $P(z) = z_n^\nu + \sum_{k=1}^{\nu} a_k(z_1, \dots, z_{n-1})z_n^{\nu-k}$  tel que  $\mathcal{R} = \{z \in \Delta^n : P(z) = 0\}$ .*

**Preuve.** Définissons pour tout point  $z' \in \Delta^{n-1}$ , l'ensemble  $\Delta_{z'} := \{z'\} \times \Delta$ . Alors  $\mathcal{R} \cap \Delta_{z'}$  est un ensemble analytique qui, d'après l'hypothèse, ne possède aucun point limite sur la frontière. Il est donc fini et son cardinal  $\nu(z')$  est borné et maximal en tout point  $z' \in \Delta^{n-1} \setminus \sigma$  où  $\sigma$  est un ensemble analytique propre. On en déduit que la restriction de la projection  $\pi : (z', z_n) \in \mathcal{R} \mapsto z' \in \Delta^{n-1}$  au-dessus de  $\Delta^{n-1} \setminus \sigma$  induit un revêtement régulier fini de degré noté  $\nu \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $z'_* \in \Delta^{n-1} \setminus \sigma$ . Il existe un voisinage  $V'$  de  $z'_*$  dans  $\Delta^{n-1} \setminus \sigma$  tel que

$$\pi^{-1}(V') = \{(z', z_n) \in \mathcal{R} \cap (V' \times \Delta) : (z_n - \alpha_1(z')) \dots (z_n - \alpha_\nu(z')) = 0\},$$

où les fonctions  $\alpha_i$  sont holomorphes sur  $V'$ . Il existe donc un polynôme de WEIERSTRASS de degré  $\nu$  par rapport à  $z_n$  et à coefficients  $a_k$  holomorphes sur  $V'$  qui définit globalement  $\pi^{-1}(V')$ . Chaque coefficient  $a_k$  ne dépend pas de l'ordre de  $\alpha_i$ , on peut donc le prolonger en une fonction holomorphic sur  $\Delta^{n-1} \setminus \sigma$ .

---

Par ailleurs,  $a_k$  est uniformément bornée sur  $\Delta^{n-1} \setminus \sigma$ , on en déduit d'après le théorème A.3 de prolongement de RIEMANN, qu'il existe un unique prolongement holomorphe de  $a_k$  sur  $\Delta^{n-1}$ . Par conséquent,

$$\mathcal{R} = \left\{ z \in \Delta^n : z_n^\nu + \sum_{k=1}^{\nu} a_k(z') z_n^{\nu-k} = 0 \right\}$$

ce qui achève ainsi la preuve du théorème B.4. □

Le résultat peut se généraliser dans le cas suivant, voir [GR65] pour les détails.

**Théorème B.5.** *Soit  $(X, \mathcal{O})$  une variété de Stein telle que son deuxième groupe de cohomologie  $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$ . Alors toute hypersurface  $\mathcal{R} \subset X$  de codimension pure égale à 1 est défini par une équation  $f(z) = 0$  dans  $X$ .*



# Index

- $(p, q)$ -formes, 27
- $q$ -convexité, 44
- équivalence entre les chemins, 34
- action de monodromie, 19
- application
  - homéomorphisme, 18
  - propre, 20
- automorphisme de revêtement, 22
- chemin, 18
- degré, 18
- diamètre, 27
- divise localement, 23
- diviseur
  - de branchement, 20
  - de ramification, 20
- domaine, 11, 33, 37
  - d'holomorphic, 75
  - pseudoconvexe, 26
- ensemble
  - analytique, 71
  - de branchement, 20
  - de ramification, 20
- espace
  - de configuration, 68
  - complexe, 72
  - complexe normal, 19, 73
  - complexe réduit, 72
  - discret, 18
- feuillet, *voir* degré
- fibre, 18
- figure de HARTOGS, 44
- fonction
  - continûment faiblement holomorphe, 26
  - faiblement holomorphe, 72
  - pluri-sous-harmonique, 44
- forme de LEVI, 44
- groupe
  - fondamental, 19
  - monodromie, 19
  - tresses, 68
- lemme de PICARD-SIMART, 39
- mesure de Lebesgue, 27
- norme polycirculaire, 26
- parabole de NEIL, 72
- point bord, 23
- polydisque, 13, 38, 43
- polynôme de WEIERSTRASS, 27
- pré-image, 19
- prolongement
  - connexe, 21

ensemble analytique, 21  
faible, 21  
fort, 21  
revêtement analytique, 21  
surjectif, 21  
topologique, 22

relèvement, 18

revêtement

équivalence de revêtements, 21  
analytique, 20  
analytique régulier, 19  
automorphisme, 22  
connexe, 20  
galoisien, 22  
régulier, 18

théorème

RIEMANN, 71  
DETHLOFF-GRAUERT, 30  
GRAUERT-REMMERT, 26  
OKA(normalisation), 73  
REMMERT-STEIN, 30  
SIU-TRAUTMANN, 45  
THULLEN-REMMERT-STEIN, 30  
VAN KAMPEN, 47  
ROTHSTEIN, 45  
STEIN, 23

voisinage fondamental, 24

# Bibliographie

- [Bec75] J. BECKER. “Normal hypersurfaces”. In : *Pacific J. Math.* 61.1 (1975), p. 17–19.
- [BS51] H. BEHNKE et K. STEIN. “Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete.” In : *Mathematische Annalen* 124 (1951).
- [Dèb01] P. DÈBES. “Revêtements topologiques”. In : *Arithmétique de revêtements algébriques (Saint-Étienne, 2000)*. T. 5. Sémin. Congr. Soc. Math. France, Paris, 2001, p. 163–214.
- [Det90] G-E. DETHLOFF. “A new proof of a theorem of Grauert and Remmert by  $L^2$ -methods”. In : *Math. Ann.* 286.1-3 (1990), p. 129–142.
- [DG94] G-E. DETHLOFF et H. GRAUERT. “Seminormal Complex Spaces”. In : *Several Complex Variables VII : Sheaf-Theoretical Methods in Complex Analysis*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer, 1994.
- [GF02] H. GRAUERT et K. FRITZSCHE. *From Holomorphic Functions to Complex Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2002.
- [GF76] H. GRAUERT et K. FRITZSCHE. *Several Complex Variables*. T. 38. Springer-Verlag, 1976.
- [GR58] H. GRAUERT et R. REMMERT. “Komplexe Räume.” In : *Mathematische Annalen* 136 (1958), p. 245–318.
- [GR65] R C. GUNNING et H. ROSSI. *Analytic functions of several complex variables*. Prentice-Hall, 1965.
- [GR84] H. GRAUERT et R. REMMERT. *Coherent Analytic Sheaves*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 1984.

- 
- [Har06] F. HARTOGS. *Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen*. German. München : Verl.d.K.B. Akad.d. Wiss., 1906.
- [Hat02] A. HATCHER. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Hör73] L. HÖRMANDER. *An introduction to complex analysis in several variables*. Amsterdam London : North-Holland, 1973.
- [KT08] C. KASSEL et V. TURAEV. *Braid groups*. T. 247. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2008.
- [Man82] M. MANARESI. “Sard and Bertini type theorems for complex spaces”. In : *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* 131 (1982), p. 265–279. ISSN : 0003-4622.
- [Nis01] T. NISHINO. *Function theory in several complex variables*. T. 193. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [PS71] É. PICARD et G. SIMART. *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes : tome I*. reprint. Chelsea Publishing Company, 1971, p. 68–69.
- [Rem57] R. REMMERT. “Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume”. In : *Math. Ann.* 133 (1957), p. 328–370. ISSN : 0025-5831.
- [Rot55] W. ROTHSTEIN. “Zur Theorie der analytischen Mannigfaltigkeiten im Räume von  $n$  komplexen Veränderlichen.” In : *Mathematische Annalen* 129 (1955), p. 96–138.
- [RS53] R. REMMERT et K. STEIN. “Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen”. In : *Mathematische Annalen* 126 (1953), p. 263–306.
- [Ser53] J-P. SERRE. “Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein”. In : *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, tenu à Bruxelles*. Georges Thone, Liège ; Masson & Cie, Paris, 1953, p. 57–68.
- [Siu74] Y T. SIU. *Techniques of extension of analytic objects*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 8. Marcel Dekker, Inc., New York, 1974.
- [ST71] Y T. SIU et G. TRAUTMANN. *Gap-sheaves and extension of coherent analytic subsheaves*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 172. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [Ste56] K. STEIN. “Analytische Zerlegungen komplexer Räume”. In : *Mathematische Annalen* 132 (1956), p. 63–93.
- [Thu35] P. THULLEN. “Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raume von  $n$  komplexen Veränderlichen”. In : *Math. Ann.* 111.1 (1935), p. 137–157.