

Université Lille 1 - Laboratoire Paul Painlevé

École Doctorale Sciences pour l'Ingénieur

THÈSE DE DOCTORAT
discipline : Mathématiques

présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur par :

Mohamed Rafik MAMMERI

le 14 décembre 2016

**Descente de Cartier et torseurs sous le noyau de
Frobenius**

sous la direction de **Niels BORNE**

Composition du jury

Niels BORNE	Université Lille 1	directeur
Pierre DEBES	Université Lille 1	
João Pedro P. DOS SANTOS	Université Paris 6	rapporteur
Michel EMSALEM	Université Lille 1	
Ariane MEZARD	Université Paris 6	
Cédric PEPIN	Université Paris 13	
Matthieu ROMAGNY	Université Rennes 1	rapporteur
Antoine TOUZÉ	Université Lille 1	



Remerciements

En premier lieu, je remercie mon directeur de thèse, Niels Borne, d'avoir encadré ce travail doctoral, pour ses multiples conseils et le nombre d'heures incalculables qu'il a consacrées à diriger cette recherche. J'aimerais lui dire à quel point j'ai apprécié sa grande disponibilité, et que j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension.

Je remercie chaleureusement João Pedro dos Santos et Matthieu Romagny d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse, ainsi que Pierre Dèbes, Michel Emsalem, Ariane Mézard, Cédric Pépin et Antoine Touzé pour avoir bien voulu faire partie du jury.

J'aimerais également remercier Lorenzo Ramero de m'avoir initié, durant les premières années de ma thèse, au monde de la géométrie non-archimédienne, que j'ai pris énormément de plaisir à découvrir. Je souhaiterais aussi exprimer ma gratitude à Pierre Dèbes d'avoir été à l'origine des premiers contacts avec mon directeur de thèse, et pour son bon accueil au sein du laboratoire Paul Painlevé, dont je remercie tous les membres.

Durant ces dernières années j'ai eu le plaisir de rencontrer des doctorants qui sont devenus des amis, je pense notamment à Amjad, Adel, Fadil, Loic et Thomas. Je remercie mes camarades de bureau : Emilie, Florian, avec qui j'ai eu le plaisir d'organiser le séminaire des doctorants, et Pierre, pour le cadre de travail agréable qu'ils m'ont permis d'avoir. Mes remerciements vont aussi à tous les doctorants, post-doctorants, enseignants-chercheurs et personnels de l'UFR de mathématiques de Lille 1.

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à la descente de Cartier en vue d'une application à la caractérisation de G^F -torseurs fppf en termes de formes différentielles, où G^F est le noyau de Frobenius d'un groupe lisse affine G sur un corps de caractéristiques $p > 0$.

Pour cela nous utilisons la dualité de Tannaka pour montrer une version analogue du théorème de descente de Cartier pour les toseurs. Ce dernier nous permet d'avoir une caractérisation de ces G^F -torseurs, qui généralise des résultats déjà connus pour les cas μ_p et α_p .

Abstract

In this thesis we are interested in Cartier descent and an application to the characterization of fppf G^F -torsors in terms of differential forms, where G^F is the Frobenius kernel of some smooth affine group scheme over a field of characteristic $p > 0$.

For this, we use Tannaka duality to prove an analog version of Cartier descent theorem for torsors. This will allow us to have a characterization of these G^F -torsors, which will generalize already known results for the cases μ_p and α_p .

Table des matières

Introduction	7
0.1. Descente de Cartier	8
0.2. Produit semi-direct	9
0.3. Cas d'un groupe affine et lisse	10
0.4. Organisation	11
Chapitre 1. Descente fppf et toseurs	13
1.1. Toseurs sur un site	13
1.1.1. Produit contracté	14
1.1.2. Schémas en groupes	15
1.1.3. Frobenius	18
1.2. Descente fppf de faisceaux quasi-cohérents	19
1.3. Descente le long d'un toseur	20
1.4. Gerbes	22
Chapitre 2. Toseurs et connexions	25
2.1. Généralités sur les connexions	25
2.1.1. Descente de Cartier	30
2.1.2. Opérateur de Cartier	31
2.2. Toseurs sous le noyau de Frobenius de certains groupes	33
2.2.1. Le groupe GL_n	33
2.2.2. Le groupe G_m	35
2.2.3. Le groupe T_n	37
2.2.4. Le groupe G_a	40
2.2.5. Le groupe $G_m \ltimes G_a$	44
Chapitre 3. Connexions sur les toseurs	49
3.1. Algébroïdes de Lie	49
3.2. Suite exacte d'Atiyah	53
3.3. L'algébroïde de Lie définie par la suite exacte d'Atiyah	55
3.4. Courbure et p -courbure	58
3.5. Comparaison des connexions	58
3.6. Comparaison des courbures	60

3.7. Changement de groupe	61
Chapitre 4. Descente de Cartier et les toreseurs sous les noyaux de Frobenius	63
4.1. Foncteurs fibre et toreseurs	63
4.2. Connexion sur un foncteur fibre	64
4.3. Horizontalité de la p -courbure	68
4.4. Descente de Cartier pour les toreseurs	69
4.5. Torseurs sous le noyau de Frobenius	71
4.6. Cas d'un groupe commutatif	75
4.7. Produit semi-direct	75
Bibliographie	77

Introduction

Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $S = \operatorname{Spec} k$ et X un schéma lisse sur k . Les toseurs considérés dans cette introduction sont des toseurs sur le site fppf.

Il est connu que les groupes $H_{\text{fppf}}^1(X, \mu_p)$ et $H_{\text{fppf}}^1(X, \alpha_p)$ peuvent être décrits en termes de sections globales de $\Omega_{X/S}^1$ par :

$$H_{\text{fppf}}^1(X, \mu_p) \simeq \{\omega \in \Gamma(X, \Omega_{X/S}^1) \mid d\omega = 0 \text{ et } C\omega = \omega\} \quad (1)$$

et

$$H_{\text{fppf}}^1(X, \alpha_p) \simeq \{\omega \in \Gamma(X, \Omega_{X/S}^1) \mid d\omega = 0 \text{ et } C\omega = 0\} \quad (2)$$

où C est l'opérateur de Cartier, [17, chap III, Proposition 4.14]. Ces deux descriptions s'obtiennent via les suites exactes sur $X_{\text{ét}}$:

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{F} F_{X*} \mathbb{G}_m \xrightarrow{d \log} F_{X*} Z(\Omega_{X/S}^1) \xrightarrow{C - \text{Id}} \Omega_{X/S}^1 \rightarrow 0 \quad (3)$$

et

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_a \xrightarrow{F} F_{X*} \mathbb{G}_a \xrightarrow{d} F_{X*} Z(\Omega_{X/S}^1) \xrightarrow{C} \Omega_{X/S}^1 \rightarrow 0, \quad (4)$$

où F_X est le Frobenius absolu, et la suite spectrale de Leray pour $f : X_{\text{fl}} \rightarrow X_{\text{ét}}$, voir [17, III §4].

Ces deux cas ont été généralisés par Artin et Milne dans [1] au cas d'un schéma en groupes abélien de hauteur 1.

Une des idées principales de cette thèse est l'utilisation d'une approche basée sur la descente de Cartier pour généraliser les isomorphismes (1) et (2), et donner une description analogue des toseurs sous le noyau de Frobenius d'un schéma en groupes affine lisse sur k .

Pour illustrer cette approche, commençons par faire un petit rappel sur la descente de Cartier.

0.1. Descente de Cartier

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 X & & \xrightarrow{F_X} & & X \\
 & \searrow F & & & \downarrow \\
 & & X^{(p)} & \xrightarrow{\quad} & X \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & S & \xrightarrow{F_S} & S
 \end{array} \tag{5}$$

où F_X est le Frobenius absolu et F le Frobenius relatif. Une connexion sur un faisceau quasi-cohérent $\mathcal{E}$ sur X est la donnée d'un morphisme de faisceaux abéliens :

$$\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \Omega_{X/S}^1 \otimes \mathcal{E}$$

tel que :

$$\nabla(fe) = f\nabla(e) + df \otimes e,$$

pour toutes sections locales f et e de $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{E}$ respectivement. La catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur X munis de connexion est notée $\text{MC}(X)$. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau quasi-cohérent sur $X^{(p)}$, le faisceau $F^*\mathcal{F}$ est muni canoniquement d'une connexion ∇_{can} , de plus on a :

THÉORÈME 0.1 ([14, Theorem 5.1]). *La catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur $X^{(p)}$ est équivalente à la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur X , munis d'une connexion intégrable de p -courbure nulle via les foncteurs :*

$$\mathcal{F} \mapsto (F^*\mathcal{F}, \nabla_{can})$$

et

$$(\mathcal{E}, \nabla) \mapsto \mathcal{E}^\nabla$$

où $\mathcal{E}^\nabla$ est le noyau du morphisme donné par la connexion $\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \Omega_{X/S}^1 \otimes \mathcal{E}$.

Pour les μ_p -torseurs, $H_{\text{fppf}}^1(X, \mu_p)$ est isomorphe au groupe donné par les classes d'isomorphie des couples $(\mathcal{L}, \alpha)$ où $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur X , et α un isomorphisme $\mathcal{L}^{\otimes p} \rightarrow \mathcal{O}_X$. Comme k est parfait, la projection $X^{(p)} \rightarrow X$ est un isomorphisme, on peut donc considérer les couples $(\mathcal{L}, \alpha)$ tels que $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur $X^{(p)}$, et α un isomorphisme $F^*\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_X$. Pour un tel couple $(\mathcal{L}, \alpha)$, la descente de Cartier permet de munir le faisceau $F^*\mathcal{L}$ d'une connexion canonique ∇_{can} puis, en utilisant α , de transférer cette dernière en une connexion $\nabla_{(\mathcal{L}, \alpha)}$ intégrable de p -courbure nulle sur $\mathcal{O}_X$. Il est facile de voir qu'une connexion ∇ sur $\mathcal{O}_X$ est entièrement déterminée par la section globale :

$$\omega = \nabla(1) \in \Gamma(X, \Omega_{X/S}^1)$$

de plus, ∇ est intégrable (resp. de p -courbure nulle) si et seulement si $d\omega = 0$ (resp. $C\omega = \omega$). En associant à chaque couple $(\mathcal{L}, \alpha)$ la section ω obtenue comme ci-dessus, nous retrouvons l'isomorphisme (1).

0.2. Produit semi-direct

Considérons maintenant le cas non-commutatif des $\mu_p \ltimes \alpha_p$ -torseurs. Ces derniers sont en bijection avec les classes d'isomorphie des couples $(\mathcal{E}^\dagger, \alpha)$, où $\mathcal{E}^\dagger$ est une suite exacte dans $\mathrm{QCoh}(X^{(p)})$:

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_{X^{(p)}} \rightarrow 0 \quad (6)$$

où $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible, et α un isomorphisme de suites exactes de la forme :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F^* \mathcal{L} & \longrightarrow & F^* \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{Id} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{O}_X^{\oplus 2} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X \longrightarrow 0. \end{array} \quad (7)$$

D'autre part on obtient par le théorème de descente de Cartier une suite exacte :

$$0 \rightarrow (F^* \mathcal{L}, \nabla_1) \rightarrow (F^* \mathcal{E}, \nabla_2) \rightarrow (\mathcal{O}_X, d) \rightarrow 0 \quad (8)$$

de faisceaux quasi-cohérents munis de connexions intégrables de p -courbure nulle. La trivialisation α donnée dans le couple $(\mathcal{E}^\dagger, \alpha)$ permet de transférer les connexions de la suite exacte (8) et d'obtenir une suite exacte :

$$0 \rightarrow (\mathcal{O}_X, \nabla_1) \rightarrow (\mathcal{O}_X^{\oplus 2}, \nabla_2) \rightarrow (\mathcal{O}_X, d) \rightarrow 0. \quad (9)$$

De la même manière que dans le cas des μ_p -torseurs, nous obtenons une bijection entre classes d'isomorphie de $\mu_p \ltimes \alpha_p$ -torseurs et couples (ω, ω') , où $\omega, \omega' \in \Gamma(X, \Omega_{X/S}^1)$, telles que la connexion $d + \Omega$ sur $\mathcal{O}_X^{\oplus 2}$ est intégrable de p -courbure nulle, où

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cela se traduit par le résultat suivant :

THÉORÈME 0.2. *L'ensemble des classes d'isomorphie de $\mu_p \ltimes \alpha_p$ -torseurs sur X est en bijection avec l'ensemble des couples (ω, ω') , où $\omega, \omega' \in \Gamma(X, \Omega_{X/S}^1)$, telles que :*

- (1) $d\omega = d\omega' + \omega \wedge \omega' = 0$,
- (2) $C\omega = \omega$,
- (3) *pour tout ouvert U de X et $f \in \mathbb{G}_m(U)$ tels que $\omega|_U = df/f$, on a $C(f\omega'_U) = 0$.*

0.3. Cas d'un groupe affine et lisse

Dans le cas d'un schéma en groupes affine et lisse quelconque G sur k , pour pouvoir utiliser cette méthode nous devons définir la notion de connexion sur un G -torseur, puis montrer une version du théorème de descente de Cartier.

Si $p : P \rightarrow X$ un G -torseur sur X , pour définir ce qu'est une connexion sur P on s'inspire de [2]. On associe à P ce qu'on appelle la suite exacte d'Atiyah :

$$0 \rightarrow \mathrm{ad}(P) \rightarrow p_*^G \mathcal{T}_{P/S} \rightarrow \mathcal{T}_X \rightarrow 0. \quad (10)$$

Une connexion sur P est alors la donnée d'une section s de cette suite exacte, on note $\mathrm{At}(G, X)$ la catégorie des couples (P, s) où P est un G -torseur et s une connexion sur P . Si maintenant P est un G -torseur sur $X^{(p)}$, le G -torseur sur X donné par $P \times_{X^{(p)}} X$ est muni d'une connexion canonique s_{can} . Le théorème de descente de Cartier pour les toseurs s'énonce comme suit :

THÉORÈME 0.3 (Descente de Cartier). *Le foncteur :*

$$\begin{aligned} F^* : G\text{-Torseurs} / X^{(p)} &\rightarrow \mathrm{At}(G, X)^{K=\psi=0} \\ P &\mapsto (P \times_{X^{(p)}} X, s_{can}) \end{aligned} \quad (11)$$

est une équivalence de catégories.

Pour montrer ce théorème, on se ramène au cas de la descente de Cartier pour les faisceaux quasi-cohérents, pour ce faire on utilise le théorème suivant :

THÉORÈME 0.4 ([6, Theorem 3.2]). *La catégorie des G -torseurs sur X est équivalente à la catégorie des foncteurs fibre sur $\mathrm{Rep}_k(G)$ à valeurs dans $\mathrm{QCoh}(X)$.*

On rappelle qu'un foncteur fibre est un foncteur tensoriel k -linéaire exact $\mathrm{Rep}_k(G) \rightarrow \mathrm{QCoh}(X)$. En utilisant cette caractérisation des G -torseurs, on peut donner une autre définition de connexion sur un toseur, qui ne suppose pas G lisse :

DÉFINITION 0.1. *On appelle G -torseur sur X muni d'une connexion tout foncteur tensoriel k -linéaire exact*

$$\mathrm{Rep}_k(G) \rightarrow \mathrm{MC}(X).$$

On note $\mathrm{Tan}(G, X)$ la catégorie formée de tels objets.

Lorsque G est lisse on montre au chapitre 4 que les deux catégories $\mathrm{At}(G, X)$ et $\mathrm{Tan}(G, X)$ sont équivalentes.

En appliquant la descente de Cartier à la description des toseurs sous le noyau de Frobenius d'un schéma en groupes G affine et lisse sur k , on obtient le théorème 4.3, qui montre en particulier qu'il existe une bijection naturelle :

$$\mathrm{H}^1(X, G^F) \rightarrow \mathrm{H}^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes \mathrm{Lie} G)^{K=\psi=0} \quad (12)$$

où $H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes \text{Lie } G)^{K=\psi=0}$ est formé des éléments de $H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes \text{Lie } G)$ dont la connexion associée sur le G -torseur trivial est intégrable de p -courbure nulle. Ce résultat nous permet, étant donnée une section globale Ω de $H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes \text{Lie } G)^{K=\psi=0}$, d'avoir des équations étale localement de G^F -torseurs, et de pouvoir les recoller pour obtenir le G^F -torseur associé à Ω . Lorsque le groupe G est spécial on obtient ces équations Zariski localement.

Durant la rédaction de cette thèse, nous avons appris que Chen et Zhu ont aussi formulé et utilisé la descente de Cartier pour les G -torseurs pour les besoins de la théorie de Hodge non abélienne en caractéristique positive [4]. Cependant aussi bien leur motivation que leur approche diffèrent complètement de la notre.

0.4. Organisation

Le chapitre 1 est consacré à des rappels et définitions de résultats dont nous aurons besoin par la suite : schémas en groupes, toseurs, descente fppf de faisceaux quasi-cohérents, G -faisceaux et gerbes.

Le chapitre 2 est constitué de deux parties. Dans la première partie on donnera la définition ainsi que les premières propriétés de la notion de connexion et d'opérateur de Cartier. Dans la deuxième partie on traite le cas de certains groupes spécifiques G , où l'on peut définir une connexion sur un G -torseur d'une manière naturelle, puis on donne une description des classes d'isomorphie des G^F -torseurs pour ces groupes là.

Dans le chapitre 3 on définit la notion de connexion sur un toseur lorsque le groupe G est affine et lisse. On associe ensuite à chaque G -torseur P , un algèbroïde de Lie, ou un algèbroïde de Lie restreint si car $k > 0$. Cela permet de définir une connexion comme étant une section de la suite exacte d'Atiyah. Dans le reste du chapitre on définit la courbure et la p -courbure d'une telle connexion, puis on compare ces définitions dans le cas d'un GL_n -torseur P , avec les définitions classiques sur le faisceau localement libre associé à P .

Au chapitre 4 nous donnons une preuve du théorème de descente pour les toseurs, puis on montre que les classes d'isomorphie de toseurs sous le noyau de Frobenius d'un groupe affine et lisse G sont en bijection naturelle avec les connexion intégrables de p -courbure nulle sur le G -torseur trivial.

Chapitre 1

Descente fppf et toseurs

Ce premier chapitre est consacré entièrement à des rappels de résultats dont nous aurons besoin par la suite sur les schémas en groupes, les toseurs et la descente fppf de faisceaux quasi-cohérents.

1.1. Toseurs sur un site

Soient $\mathcal{C}$ un site et $\mathcal{G}$ un faisceau de groupes sur $\mathcal{C}$. Une action de $\mathcal{G}$ sur un faisceau $\mathcal{F}$ est un morphisme $\mathcal{G} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ tel que pour tout objet U de $\mathcal{C}$ le groupe $\mathcal{G}(U)$ agit sur $\mathcal{F}(U)$ via l'application $\mathcal{G}(U) \times \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$.

DÉFINITION 1.1. *Un pseudo- $\mathcal{G}$ -toseur est un faisceau $\mathcal{F}$ muni d'une action de $\mathcal{G}$ tel que pour tout objet U de $\mathcal{C}$, ou bien $\mathcal{F}(U)$ est vide, ou bien l'action de $\mathcal{G}(U)$ sur $\mathcal{F}(U)$ est simplement transitive. On dit que $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{G}$ -toseur si pour tout objet U de $\mathcal{C}$ il existe un recouvrement $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ telle que $\mathcal{F}(U_i)$ est non-vide pour tout i .*

1.1.0.1. Morphismes entre toseurs. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux pseudo- $\mathcal{G}$ -toseurs. Un morphisme de pseudo- $\mathcal{G}$ -toseurs est un morphisme de faisceaux compatible avec l'action de $\mathcal{G}$, i.e. tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G} \times \mathcal{F}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}' \end{array}$$

commute. Un morphisme entre $\mathcal{G}$ -toseurs est un morphisme de pseudo- $\mathcal{G}$ -toseurs. Le lemme suivant montre qu'un tel morphisme est toujours un isomorphisme, on parlera donc dans la suite d'isomorphismes de $\mathcal{G}$ -toseurs plutôt que de morphismes.

LEMME 1.1. *Tout morphisme de $\mathcal{G}$ -toseurs est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux $\mathcal{G}$ -toseurs et $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ un morphisme de $\mathcal{G}$ -toseurs. Soit U un objet de $\mathcal{C}$. Par définition d'un $\mathcal{G}$ -toseur et par le fait que deux recouvrements possèdent toujours un raffinement commun, il existe un recouvrement $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ dans $\mathcal{C}$ tel que pour tout $i \in I$, $\mathcal{F}(U_i)$ et $\mathcal{F}'(U_i)$ sont non vides. Pour tout $i \in I$ l'application $\varphi(U_i) : \mathcal{F}(U_i) \rightarrow \mathcal{F}'(U_i)$ est une bijection car c'est une application équivariante entre deux ensembles munis d'une action simplement

transitive de $\mathcal{G}(U_i)$. Il s'ensuit donc que $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}'(U)$ est une bijection et donc que $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ est un isomorphisme de foncteurs. $\square$

1.1.0.2. *Torseurs triviaux.* Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{G}$ -torseur. On appelle section globale de $\mathcal{F}$ un morphisme de pré-faisceaux sur $\mathcal{C}$

$$\{*\} \rightarrow \mathcal{F}$$

où $\{*\}$ est le faisceau qui à chaque objet de $\mathcal{C}$ associe un singleton. On note $\Gamma(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ l'ensemble des sections globales de $\mathcal{F}$. Si la catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet final S , alors l'ensemble des sections globales est donné par $\mathcal{F}(S)$.

Le $\mathcal{G}$ -torseur $\mathcal{F}$ est dit trivial s'il est isomorphe à $\mathcal{G}$ avec l'action à gauche sur lui-même. Cette condition est équivalente à ce que $\Gamma(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ soit non vide.

1.1.1. Produit contracté. Une référence pour cette partie est [7].

1.1.1.1. *Faisceautisation.* Soit $\mathcal{F}$ un pré-faisceau sur $\mathcal{C}$ muni d'une action $\mathcal{G} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ telle que pour tout objet U de $\mathcal{C}$ tel que $\mathcal{F}(U)$ est non-vide, l'action de $\mathcal{G}(U)$ sur $\mathcal{F}(U)$ est simplement transitive. Le pré-faisceau $\mathcal{F}$ est alors séparé et l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique sur le faisceau associé à $\mathcal{F}$. Si s est une section sur U du faisceau associé $\mathcal{F}^\#$, il existe un recouvrement $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ et des sections $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ telles que l'image de tout s_i dans $\mathcal{F}^\#(U)$ est $s|_{U_i}$. L'action d'un $g \in \mathcal{G}(U)$ sur s est alors donnée par le recollement des images des sections $g|_{U_i} s_i$ dans $\mathcal{F}^\#(U_i)$. De plus, pour tout objet U de $\mathcal{C}$, l'action de $\mathcal{G}(U)$ sur $\mathcal{F}^\#(U)$ est simplement transitive dès que $\mathcal{F}^\#(U)$ est non-vide. Le faisceau $\mathcal{F}^\#$ muni de cette action est donc un pseudo- $\mathcal{G}$ -torseur.

1.1.1.2. *Cas de deux faisceaux.* Soit $\mathcal{C}$ un site. Soient $\mathcal{G}$ un faisceau de groupes, $\mathcal{F}$ un faisceau muni d'une action à gauche de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{K}$ un faisceau muni d'une action à droite de $\mathcal{G}$.

DÉFINITION 1.2. On appelle produit contracté de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{K}$ et on note $\mathcal{F} \wedge^{\mathcal{G}} \mathcal{K}$ le faisceau associé au pré-faisceau

$$U \mapsto (\mathcal{F}(U) \times \mathcal{K}(U)) / \sim$$

où la relation $\sim$ est donnée par $(gx, k) \sim (x, kg)$. On note $x \wedge k$ la classe d'une section locale (x, k) .

1.1.1.3. *Changement de groupe.* Soient $\mathcal{H}$ un faisceau de groupes sur $\mathcal{C}$ et $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ un morphisme de faisceaux de groupes. On munit $\mathcal{H}$ de l'action à droite de $\mathcal{G}$ donnée par $h \cdot g := h\varphi(g)$. Le produit contracté $\mathcal{F} \wedge^{\mathcal{G}} \mathcal{H}$ est alors muni d'une action à gauche de $\mathcal{H}$ donnée par $h(f \wedge h') := f \wedge hh'$. Le morphisme naturel $i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \wedge^{\mathcal{G}} \mathcal{H}$ tel que $x \mapsto x \wedge 1$ est φ -équivariant. Soient $\mathcal{X}$ un faisceau sur $\mathcal{C}$ muni d'une action à gauche de $\mathcal{H}$ et $f \in \text{Hom}_{\varphi}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$. On associe à f un morphisme $f \wedge^{\mathcal{G}} \mathcal{H} \in \text{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{F} \wedge^{\mathcal{G}} \mathcal{H}, \mathcal{X})$ en envoyant une section $x \wedge h$ sur $hf(x)$. Ce morphisme est bien défini, les sections

$gx \wedge h$ et $x \wedge h\varphi(g)$ s'envoient tous les deux sur $h\varphi(g)f(x)$, il est aussi clairement $\mathcal{H}$ -équivariant.

LEMME 1.2. *L'application $f \mapsto f \wedge^{\mathcal{G}} \mathcal{H}$ définit une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\varphi}(\mathcal{F}, \mathcal{X}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{F} \wedge^{\mathcal{G}} \mathcal{H}, \mathcal{X}) \quad (13)$$

fonctorielle en $\mathcal{X}$, dont l'inverse est donnée par $g \mapsto g \circ i$, qui caractérise $(\mathcal{F} \wedge^{\mathcal{G}} \mathcal{H}, i)$ à unique isomorphisme près. De plus, si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{G}$ -torseur alors le produit contracté $\mathcal{F} \wedge^{\mathcal{G}} \mathcal{H}$ est un $\mathcal{H}$ -torseur.

Supposons maintenant $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ surjectif. Notons $\mathcal{K}$ le noyau de φ . Pour tout objet U de $\mathcal{C}$ le groupe $\mathcal{K}(U)$ agit sur $\mathcal{F}(U)$ via l'action de $\mathcal{G}(U)$ sur $\mathcal{F}(U)$. Soit $\mathcal{F}/\mathcal{K}$ le faisceau associé au pré-faisceau $U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{K}(U)$. Le faisceau $\mathcal{F}/\mathcal{K}$ est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{H}$ -torseur. De plus, on vérifie facilement que le $\mathcal{H}$ -torseur $\mathcal{F}/\mathcal{K}$, muni de la projection naturelle $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{K}$, satisfait la propriété universelle du produit contracté $\mathcal{F} \wedge^{\mathcal{G}} \mathcal{H}$ donnée dans (13), on a donc un isomorphisme $\mathcal{F}/\mathcal{K} \simeq \mathcal{F} \wedge^{\mathcal{G}} \mathcal{H}$.

1.1.1.4. *Cas d'un toseur et d'un faisceau de groupes.* Soient $\mathcal{F}$ un $\mathcal{G}$ -torseur et $\mathcal{O}$ un faisceau de groupes muni d'une action à droite de $\mathcal{G}$ par automorphismes i.e. $(aa') \cdot g = (a \cdot g)(a' \cdot g)$. On peut définir une structure de faisceau de groupes sur $\mathcal{F} \wedge^{\mathcal{G}} \mathcal{O}$ comme suit : $(x \wedge a) \cdot (x' \wedge a') = x \wedge (a \cdot a'g)$ où g est unique telle que $x' = gx$. Si $\mathcal{O}$ est commutatif alors $\mathcal{F} \wedge^{\mathcal{G}} \mathcal{O}$ l'est aussi.

1.1.2. Schémas en groupes. Une référence sur les schémas en groupes est [26].

Soit S un schéma. Un schéma en groupes G sur S est un objet en groupes dans la catégorie des S -schémas. Par le lemme de Yoneda cela revient à se donner pour tout S -schéma T , une structure de groupe sur $G(T) := \mathrm{Hom}_S(T, G)$ fonctorielle en T . On obtient donc un morphisme de S -schémas

$$m : G \times_S G \rightarrow G$$

tel que la loi de groupe de $G(T)$ est donnée par $m : G(T) \times G(T) \rightarrow G(T)$.

1.1.2.1. *Morphismes de schémas en groupes.* Un morphisme entre schémas en groupes G et G' sur S est un morphisme de S -schémas $G \rightarrow G'$ tel que pour tout S -schéma T le morphisme induit $G(T) \rightarrow G'(T)$ est un morphisme de groupes. Cela revient donc à se donner un morphisme de S -schémas $G \rightarrow G'$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} G \times_S G & \longrightarrow & G' \times_S G' \\ \downarrow m & & \downarrow m' \\ G & \longrightarrow & G' \end{array}$$

1.1.2.2. *Changement de base.* Soit $S' \rightarrow S$ un morphisme de schémas. Le S' -schéma $G_{S'} = G \times_S S'$ est alors un S' -schéma en groupes.

1.1.2.3. *Action d'un schéma en groupes.* Une action à gauche de G sur un S -schéma X est un morphisme

$$a_X : G \times_S X \rightarrow X$$

tel que pour tout S -schéma T , le groupe $G(T)$ agit sur $X(T)$ via

$$a_X(T) : G(T) \times X(T) \rightarrow X(T).$$

Si G agit sur un autre S -schéma Y via une action a_Y , on dit qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est G -équivariant si pour tout S -schéma T l'application $X(T) \rightarrow Y(T)$ induite par f est $G(T)$ -équivariante, ou de manière équivalente si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} G \times_S X & \xrightarrow{id \times f} & G \times_S Y \\ \downarrow a_X & & \downarrow a_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

1.1.2.4. *Torseurs sous les schémas en groupes.* Soit G un S -schéma en groupes et X un S -schéma sur lequel G agit à gauche. On dit que X est un pseudo- G -torseur si le morphisme $(a, \text{pr}_2) : G \times_S X \rightarrow X \times_S X$ est un isomorphisme. Cette définition est compatible avec la définition de pseudo-torseur pour les faisceaux de groupes. En effet, X est un pseudo- G -torseur si et seulement si le faisceau représenté par X est un pseudo-torseur pour le faisceau de groupes représenté par G . Un pseudo- G -torseur est dit trivial s'il existe un isomorphisme G -équivariant $G \rightarrow X$.

1.1.2.5. *Suites exactes de schémas en groupes et toseurs.* On considère la topologie $fppf$ sur le schéma S . En utilisant le lemme de Yoneda on va identifier les schémas sur S avec la sous-catégorie pleine des faisceaux représentables de la catégorie des faisceaux sur le site $fppf$ de S .

Soit

$$1 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 1$$

une suite exacte de schémas en groupes sur S et P un G -torseur. D'après 1.1.1.2 la réduction $P \wedge^G H$ de P à H est isomorphe à P/K . Ainsi, si X est un K -torseur, la réduction de $X \wedge^K G$ à H est isomorphe à $(X \wedge^K G)/K$. En associant à une section locale du type $x \wedge g$ de $X \wedge^K G$ la section $\bar{g}$ de H on obtient un morphisme de faisceaux bien défini entre $X \wedge^K G$ et H , invariant relativement au morphisme $G \rightarrow H$. Ce dernier correspond donc par la propriété universelle du produit contracté à un isomorphisme de H -torseurs $\alpha_X : (X \wedge^K G)/K \rightarrow H$.

Considérons maintenant la catégorie des couples (P, α) où P est un G -torseur et $\alpha : P \wedge^G H \rightarrow H$ une trivialisaton de $P \wedge^G H$. Un morphisme entre deux couples (P, α) et (P', α') est un isomorphisme de H -torseurs $f : P \rightarrow P'$ tel que le diagramme

suivant

$$\begin{array}{ccc} P \wedge^G H & \xrightarrow{\alpha} & H \\ \downarrow f \wedge^G H & & \downarrow 1 \\ P' \wedge^G H & \xrightarrow{\alpha'} & H \end{array}$$

commute.

LEMME 1.3. *Il existe une équivalence de catégories entre la catégorie des K -torseurs et la catégorie des couples (P, α) décrite ci-dessus.*

DÉMONSTRATION. En associant à un K -torseur X le couple $(X \wedge^K G, \alpha_X)$ on obtient un foncteur. En effet, soit $f : X \rightarrow X'$ un isomorphisme de K -torseurs, notons encore f le morphisme $K \rightarrow G$ équivariant $X \rightarrow X' \rightarrow X' \wedge^K G$. Par la propriété universelle du produit contracté f correspond à l'isomorphisme de G -torseurs $f \wedge^K G$ envoyant une section locale $x \wedge g$ sur $f(x) \wedge g$.

Ce foncteur est pleinement fidèle. Si f_1 et f_2 sont deux isomorphismes de H -torseurs $X \rightarrow X'$ tels que $f_1 \wedge^K G = f_2 \wedge^K G$ alors pour toute section locale x de X l'égalité $f_1(x) \wedge 1 = f_2(x) \wedge 1$ implique $f_1(x) = f_2(x)$, ainsi on voit que $f_1 = f_2$. Soit maintenant $g : X \wedge^K G \rightarrow X' \wedge^K G$ un isomorphisme de G -torseurs faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \wedge^K G & \longrightarrow & H \\ \downarrow g & & \downarrow 1 \\ X' \wedge^K G & \longrightarrow & H \end{array} \tag{14}$$

où les morphismes horizontaux sont déduits de α_X et $\alpha_{X'}$ par la propriété universelle du produit contracté. Une section locale du type $x \wedge 1$ de $X \wedge^K G$ s'envoie donc nécessairement vers une section locale de $X' \wedge^K G$ qui peut s'écrire de manière unique sous la forme $x' \wedge 1$. En associant à une section locale x de X la section x' ainsi définie, on obtient un morphisme de K -torseurs $X \rightarrow X'$ qui induit g .

Il reste à montrer que ce foncteur est essentiellement surjectif. Soit P un G -torseur et $\alpha : P \wedge^G H \rightarrow H$ un isomorphisme de H -torseurs. Soit X le sous-faisceau de P engendré par les sections locales de P s'envoyant sur 1 via le morphisme équivariant $P \rightarrow H$ qui correspond à la trivialisatoin α . L'action de G sur P induit une structure de K -torseur sur X telle que $(X \wedge^K G, \alpha_X) \simeq (P, \alpha)$.

□

1.1.2.6. *Groupes algébriques.* Soit k un corps.

DÉFINITION 1.3. *Un groupe algébrique sur k est un objet en groupes dans la catégorie des k -schémas de type fini.*

PROPOSITION 1.1 ([18, Proposition 6.21.]). Soit $\varphi : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes algébriques affines. Les propositions suivantes sont équivalentes.

- (1) Le morphisme φ est fidèlement plat.
- (2) Le morphisme de faisceaux de groupes induit par φ est surjectif.

PROPOSITION 1.2 ([18, 6.23.]). Soit $\varphi : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes algébriques où H est réduit. Les propositions suivantes sont équivalentes.

- (1) Le morphisme φ est fidèlement plat.
- (2) Le morphisme φ est surjectif sur les espaces topologiques sous-jacents.

1.1.3. Frobenius. Supposons S de caractéristique $p > 0$ et soit X un S -schéma. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 X & & \xrightarrow{F_X} & & X \\
 & \searrow F & & \searrow \text{pr} & \\
 & & X^{(p)} & \xrightarrow{\text{pr}} & X \\
 & \searrow f & \downarrow & & \downarrow f \\
 & & S & \xrightarrow{F_S} & S
 \end{array}$$

où $X^{(p)}$ est le produit fibré $X \times_{f,S,F_S} S$. Le morphisme $F = (F_X, f)$ est appelé Frobenius relatif. C'est un homéomorphisme sur les espaces topologiques sous-jacents.

EXEMPLE 1.1. Prenons $S = \text{Spec } A$ et $X = \mathbb{A}_S^n$. On a alors $X^{(p)} = \mathbb{A}_S^n$ car $A[x_1, \dots, x_n] \otimes_{F_A} A \simeq A[x_1, \dots, x_n]$. Pour tout $a \in A$, la projection pr_1 est donnée par $a \mapsto a^p$ et $x_i \mapsto x_i$, $i = 1, \dots, n$, le morphisme F est donné par $a \mapsto a$ et $x_i \mapsto x_i^p$, $i = 1, \dots, n$. L'image de F est $F(A[x_1, \dots, x_n]) = A[x_1^p, \dots, x_n^p] \subseteq A[x_1, \dots, x_n]$ et $A[x_1, \dots, x_n]$ est libre sur $A[x_1^p, \dots, x_n^p]$ de base $x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}$ avec $i_k = 0, \dots, p-1$, $k = 1, \dots, n$.

LEMME 1.4. Soit X un schéma sur un corps k parfait de caractéristique $p > 0$. Si X est réduit alors le Frobenius relatif $F : X \rightarrow X^{(p)}$ est un épimorphisme.

DÉMONSTRATION. Soient $f_1, f_2 : X^{(p)} \rightarrow T$ deux morphismes de k -schémas tels que $f_1 \circ F = f_2 \circ F$. Comme le corps k est parfait, la projection $\text{pr} : X^{(p)} \rightarrow X$ est un isomorphisme. Pour montrer que $f_1 = f_2$ il suffit donc de montrer que $f_1 \circ \text{pr}^{-1} = f_2 \circ \text{pr}^{-1}$. Sur les espaces topologiques sous-jacents on a clairement $f_1 \circ \text{pr}^{-1} = f_2 \circ \text{pr}^{-1}$ puisque le Frobenius absolu est égal à l'identité et $f_1 \circ \text{pr}^{-1} \circ F_X = f_2 \circ \text{pr}^{-1} \circ F_X$. Maintenant comme X est réduit, pour tout ouvert U de X le Frobenius $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ est injectif, on en déduit que les morphismes sur les faisceaux $(f_1 \circ \text{pr}^{-1})_*$ et $(f_2 \circ \text{pr}^{-1})_*$ sont égaux. On a donc bien $f_1 \circ \text{pr}^{-1} = f_2 \circ \text{pr}^{-1}$. $\square$

Soit G un S -schéma en groupes. Le Frobenius relatif $F : G \rightarrow G^{(p)}$ est un morphisme de schémas en groupes.

$$\begin{array}{ccccc}
 G & & \xrightarrow{F_G} & & G \\
 & \searrow F & & & \downarrow \\
 & & G^{(p)} & \xrightarrow{\quad} & G \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & S & \xrightarrow{F_S} & S
 \end{array}$$

LEMME 1.5. *Soit P un G -torseur. Les $G^{(p)}$ -torseurs $P \wedge^G G^{(p)}$ et $F_S^* P$ sont isomorphes.*

DÉMONSTRATION. Le faisceau $F_S^* P$ est représenté par $P^{(p)}$. Il suffit donc d'avoir un isomorphisme de $G^{(p)}$ -torseurs $P \wedge^G G^{(p)} \rightarrow P^{(p)}$. Par la propriété universelle du produit contracté il suffit d'avoir un morphisme F -équivariant $P \rightarrow P^{(p)}$. Un tel morphisme est donné par le Frobenius relatif, encore noté F , de P sur S . En effet, cela provient du fait que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 G \times P & \xrightarrow{F \times F} & G^{(p)} \times P^{(p)} \\
 \downarrow a & & \downarrow a \\
 P & \xrightarrow{F} & P^{(p)}
 \end{array}$$

commute. □

1.2. Descente fppf de faisceaux quasi-cohérents

Soit S -un schéma et $\{f_i : S_i \rightarrow S\}_{i \in I}$ une famille de morphismes vers S .

DÉFINITION 1.4. *Une donnée de descente de faisceaux quasi-cohérents relativement à la famille $\{f_i : S_i \rightarrow S\}_{i \in I}$ est une donnée $(\mathcal{F}_i, \varphi_{ij})_{i,j \in I}$ où $\mathcal{F}_i$ est un faisceau quasi-cohérent sur S_i et*

$$\varphi_{ij} : pr_1^* \mathcal{F}_i \rightarrow pr_2^* \mathcal{F}_j$$

est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{S_i \times_S S_j}$ -modules, tel que pour tout $i, j, k \in I$, le diagramme de $\mathcal{O}_{S_i \times_S S_j \times_S S_k}$ -modules suivant

$$\begin{array}{ccc}
 pr_1^* \mathcal{F}_i & \xrightarrow{pr_{13}^* \varphi_{ik}} & pr_3^* \mathcal{F}_k \\
 & \searrow pr_{12}^* \varphi_{ij} \quad pr_{23}^* \varphi_{jk} \nearrow & \\
 & pr_2^* \mathcal{F}_j &
 \end{array}$$

commute. On appelle cette dernière condition la condition de cocycle.

DÉFINITION 1.5. *Un morphisme entre deux données de descente $(\mathcal{F}_i, \varphi_{ij})_{i,j \in I}$ et $(\mathcal{F}'_i, \varphi'_{ij})_{i,j \in I}$ relativement à la famille de morphismes $\{f_i : S_i \rightarrow S\}_{i \in I}$ est une famille de morphismes de $\mathcal{O}_{S_i}$ -modules $\psi_i : \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}'_i$ telle que le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} pr_1^* \mathcal{F}_i & \xrightarrow{\varphi_{ij}} & pr_2^* \mathcal{F}_j \\ \downarrow pr_1^* \psi_i & & \downarrow pr_2^* \psi_j \\ pr_1^* \mathcal{F}'_i & \xrightarrow{\varphi'_{ij}} & pr_2^* \mathcal{F}'_j \end{array}$$

commute.

Un faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur S définit une donnée de descente pour toute famille de morphismes $\{f_i : S_i \rightarrow S\}_{i \in I}$, il suffit de prendre $\mathcal{F}_i := f_i^* \mathcal{F}$ et φ_{ij} l'isomorphisme canonique $pr_1^* f_i^* \mathcal{F} \rightarrow pr_2^* f_j^* \mathcal{F}$. Une donnée de descente de faisceaux quasi-cohérents est dite effective si elle est isomorphe à une donnée de descente provenant d'un faisceau quasi-cohérent sur S .

THÉORÈME 1.1 ([8]). *Soit S un schéma et $\{f_i : S_i \rightarrow S\}_{i \in I}$ un recouvrement fpqc de S . On a une équivalence entre faisceaux quasi-cohérents sur S et données de descente de faisceaux quasi-cohérents relativement à $\{f_i : S_i \rightarrow S\}_{i \in I}$.*

LEMME 1.6 ([24, Tag 05B2]). *Soit S un schéma et $\{f_i : S_i \rightarrow S\}_{i \in I}$ un recouvrement fpqc de S . Soit $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur S tel que pour tout $i \in I$, $f_i^* \mathcal{F}$ est localement libre de rang fini sur S_i . Le faisceau $\mathcal{F}$ est alors localement libre de rang fini sur S .*

1.3. Descente le long d'un toreur

Voir [25] pour une référence sur la descente le long d'un toreur.

Soient S un schéma et G un schéma en groupes sur S . Soit X un G -torseur sur S pour la topologie fppf et $a : G \times_S X \rightarrow X$ l'action de G sur X .

DÉFINITION 1.6. *Un G -faisceau sur X est un couple $(\mathcal{F}, \alpha)$ où $\mathcal{F}$ est un faisceau quasi-cohérent sur X et α un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules*

$$\alpha : a^* \mathcal{F} \rightarrow pr_2^* \mathcal{F}$$

où pr_2 est la seconde projection $pr_2 : G \times_S X \rightarrow X$, vérifiant les conditions suivantes :

(1) le diagramme suivant de $\mathcal{O}_{G \times_S G \times_S X}$ -modules commute

$$\begin{array}{ccc} (1_G \times a)^* a^* \mathcal{F} & \xrightarrow{(m \times 1_X)^* \alpha} & pr_3^* \mathcal{F} \\ & \searrow (1_G \times a)^* \alpha \quad \nearrow pr_{23}^* \alpha & \\ & (1_G \times a)^* pr_2^* \mathcal{F} & \end{array}$$

sachant que $(m \times 1_X)^* a^* \mathcal{F} = (1_G \times a)^* a^* \mathcal{F}$ et $(1_G \times a)^* pr_2^* \mathcal{F} = pr_{23}^* a^* \mathcal{F}$.
 (2) le morphisme $(e \times 1_X)^* \alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ est l'identité.

REMARQUE 1.1. La condition (2) est une conséquence de la condition (1) et du fait que α est un isomorphisme. En effet, le morphisme $(e, 1_X) : X \rightarrow G \times_S X$ est tel que $a \circ (e \times 1_X) = pr_2 \circ (e \times 1_X) = \text{Id}_X$. Le morphisme $(e \times 1_X)^* \alpha$ est donc un automorphisme de $\mathcal{F}$. Pour voir que c'est l'identité on considère le morphisme $\Delta = (e \times e \times 1_X) : X \rightarrow G \times_S G \times_S X$ et on tire en arrière le diagramme de la condition (2), on trouve alors $(e \times 1_X)^* \alpha \circ (e \times 1_X)^* \alpha = (e \times 1_X)^* \alpha$, ce qui montre que $(e \times 1_X)^* \alpha = \text{Id}_{\mathcal{F}}$.

REMARQUE 1.2. La notion de donnée de descente définie dans (1.4) ne dépend pas du choix des produits fibrés considérés. Dans le cas d'un G -torseur X sur S pour la topologie $fppf$, on peut donc considérer les données de descente le long du morphisme structurel $X \rightarrow S$ en utilisant l'isomorphisme $(a, pr_2) : G \times_S X \rightarrow X \times_S X$ et l'isomorphisme $G \times_S G \times_S X \rightarrow X \times_S X \times_S X$ donné par $(g_1, g_2, x) \mapsto (g_1 g_2 x, g_2 x, x)$. Les morphismes

$$pr_{12}, pr_{13} \text{ et } pr_{23} : X \times_S X \times_S X \rightarrow X \times_S X$$

correspondent alors aux morphismes

$$1_G \times a, m \times 1_X \text{ et } pr_{23} : G \times_S G \times_S X \rightarrow G \times_S X$$

respectivement, et les morphismes

$$pr_1, pr_2 \text{ et } pr_3 : X \times_S X \times_S X \rightarrow X$$

correspondent à

$$a \circ (1_G \times a), pr_2 \circ (1_G \times a) \text{ et } pr_3 : G \times_S G \times_S X \rightarrow X$$

respectivement.

LEMME 1.7. *Il existe une équivalence de catégories entre la catégorie des G -faisceaux sur X et la catégorie des données de descente le long du morphisme $X \rightarrow S$. Si $\mathcal{F}$ est un G -faisceau, on notera $p_*^G \mathcal{F}$ le faisceau quasi-cohérent sur S obtenu via la descente $fppf$ de la donnée descente associée à $\mathcal{F}$ via cette équivalence.*

DÉMONSTRATION. Se donner une donnée de descente relativement au morphisme structurel $X \rightarrow S$ en utilisant les isomorphismes de la remarque (1.2) revient à se donner un couple $(\mathcal{F}, \varphi)$ où $\mathcal{F}$ est un faisceau quasi-cohérent et φ un isomorphisme de $\mathcal{O}_{G \times_S X}$ -modules

$$\varphi : a^* \mathcal{F} \rightarrow \mathrm{pr}_2^* \mathcal{F}$$

tel que le diagramme suivant de $\mathcal{O}_{G \times_S G \times_S X}$ -modules

$$\begin{array}{ccc} (1_G \times a)^* a^* \mathcal{F} & \xrightarrow{(m \times 1_X)^* \varphi} & \mathrm{pr}_3^* \mathcal{F} \\ & \searrow (1_G \times a)^* \varphi \quad \nearrow \mathrm{pr}_{23}^* \varphi & \\ & (1_G \times a)^* \mathrm{pr}_2^* \mathcal{F} & \end{array}$$

commute. Par définition d'un G -faisceau et par la remarque (1.1) le couple $(\mathcal{F}, \varphi)$ est un G -faisceau. De même par définition un G -faisceau est une donnée de descente relativement au morphisme structurel $X \rightarrow S$ en utilisant les isomorphismes de la remarque (1.2)

□

1.4. Gerbes

DÉFINITION 1.7. Une gerbe sur un site $\mathcal{S}$ est un champ en groupoïdes $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ tel que pour tout objet U de $\mathcal{S}$:

- (1) Il existe un recouvrement $\{U_i \rightarrow U\}$ tel que $\mathcal{C}(U_i)$ est non vide pour tout i .
- (2) Pour tout $x, y \in \mathcal{C}(U)$, il existe un recouvrement $\{U_i \rightarrow U\}$ tel que $x|_{U_i} \simeq y|_{U_i}$ pour tout i .

EXEMPLE 1.2 (Gerbe de toseurs). Soit $\mathcal{G}$ un faisceau de groupes sur le site fppf d'un schéma S . On définit une catégorie $\mathcal{G}$ -Torseurs sur S_{fppf} comme suit :

- Les objets sont les couples $(U, \mathcal{F})$ où U est un S -schéma et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{G}|_U$ -torseur sur le site fppf de U .
- Un morphisme $(U, \mathcal{F}) \rightarrow (V, \mathcal{H})$ entre deux couples est donné par un couple (f, φ) où $f : U \rightarrow V$ est un morphisme de S -schémas et $\varphi : f^{-1} \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}$ un isomorphisme de $\mathcal{G}|_U$ -torseurs.

Le foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\text{-Torseurs} &\rightarrow S_{\mathrm{fppf}} \\ (U, \mathcal{F}) &\mapsto U \end{aligned} \tag{15}$$

est un champ en groupoïdes sur S_{fppf} : [24, Tag 04UK]. La catégorie fibre au-dessus d'un S -schéma U est la catégorie des $\mathcal{G}|_U$ -torseurs sur le site fppf de U . L'existence du toseur trivial montre que la condition (1) de la définition d'une gerbe est vérifiée, la seconde condition découle du fait que tout toseur est localement isomorphe au toseur trivial. Le foncteur (15) définit donc une gerbe au dessus de S_{fppf} .

Soit $p : \mathcal{C} \rightarrow S_{\text{fppf}}$ une gerbe sur le site fppf d'un schéma S telle que $\mathcal{C}(S)$ est non vide. Fixons un objet $\xi \in \mathcal{C}(S)$. Soit $\mathcal{G} := \underline{\text{Aut}}(\xi)$ le faisceau de groupes sur S_{fppf} défini par

$$T \mapsto \text{Aut}(\xi|_T). \quad (16)$$

Soit $y \in \mathcal{C}$ et $U = p(y)$. On peut associer à y un $\mathcal{G}|_U$ -torseur $\underline{\text{Isom}}(\xi|_U, y)$ comme suit : pour tout U -schéma $f : T \rightarrow U$ on pose

$$\underline{\text{Isom}}(\xi|_U, y)(T) := \text{Isom}(\xi|_T, f^*y).$$

Soit $s \in \text{Isom}(\xi|_T, f^*y)$ et $g \in \text{Aut}(\xi|_T)$, on définit l'action de g sur s par $g \cdot s := s \circ g^{-1}$. Si s' est un autre isomorphisme dans $\text{Isom}(\xi|_T, f^*y)$, il existe alors un unique $g \in \text{Aut}(\xi|_T)$ donné par $s \circ s'^{-1}$ tel que $s = g \cdot s'$. Muni de cette action, et en utilisant la condition (2) de la définition d'une gerbe, on voit que le faisceau $\underline{\text{Isom}}(\xi|_U, y)$, est un $\mathcal{G}|_U$ -torseur sur le site fppf de U .

LEMME 1.8 ([16, Lemme 3.21]). *Soit $p : \mathcal{C} \rightarrow S_{\text{fppf}}$ une gerbe sur S_{fppf} telle que $\mathcal{C}(S)$ est non vide. Fixons un objet $\xi \in \mathcal{C}(S)$. Soit $\mathcal{G} := \underline{\text{Aut}}(\xi)$. Le foncteur*

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}\text{-Torseurs}$$

$$y \mapsto (U, \underline{\text{Isom}}(\xi|_U, y))$$

où $U = p(y)$, est une équivalence de catégories sur S_{fppf} .

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que si x et y sont deux objets de la catégorie fibre au dessus d'un S -schéma U et $\varphi : \underline{\text{Isom}}(\xi|_U, y) \rightarrow \underline{\text{Isom}}(\xi|_U, x)$ est un isomorphisme de $\mathcal{G}|_U$ -torseurs, alors φ provient d'un unique isomorphisme $x \rightarrow y$ au-dessus de U . Soit φ un tel isomorphisme et $\{U_i \rightarrow U\}$ un recouvrement dans S_{fppf} trivialisant $\underline{\text{Isom}}(\xi|_U, y)$. Pour tout i soit s_i un isomorphisme dans $\text{Isom}(\xi|_{S_i}, y|_{S_i})$ et $t_i : x|_{S_i} \rightarrow y|_{S_i}$ l'isomorphisme donné par $s_i \circ \varphi(s_i)^{-1}$. Les isomorphismes t_i se recollent alors en un unique isomorphisme $t : x \rightarrow y$ au dessus de U induisant l'isomorphisme φ .

Montrons maintenant que F est pleinement fidèle. Soient x et y deux objets de $\mathcal{C}$. Notons $U = p(x)$ et $V = p(y)$. Soit (f, φ) un morphisme $F(x) \rightarrow F(y)$ de sorte que $f : U \rightarrow V$ est un morphisme de S -schémas et $\varphi : f^{-1} \underline{\text{Isom}}(\xi|_V, y) \rightarrow \underline{\text{Isom}}(\xi|_U, x)$ est un isomorphisme de $\mathcal{G}|_U$ -torseurs. Le $\mathcal{G}|_U$ -torseur $f^{-1} \underline{\text{Isom}}(\xi|_V, y)$ est canoniquement isomorphe au $\mathcal{G}|_U$ -torseur $\underline{\text{Isom}}(\xi|_U, f^*y)$, l'isomorphisme φ vient donc d'un unique isomorphisme $\theta : x \rightarrow f^*y$ dans $\mathcal{C}(U)$. Par la propriété universelle du morphisme fortement cartésien $f^*y \rightarrow y$, le couple (f, θ) provient d'un unique morphisme $\psi : x \rightarrow y$ dans $\mathcal{C}$.

Montrons que F est essentiellement surjectif. Soit $(U, \mathcal{T})$ dans $\mathcal{G}$ -Torseurs. Soit $\{U_i \rightarrow U\}$ un recouvrement trivialisant $\mathcal{T}$ et fixons pour tout i , s_i dans $\mathcal{T}(U_i)$. Pour tout i, j il existe une unique section $g_{ij} \in \text{Aut}(\xi|_{U_i \times_U U_j})$ telle que $s_i = g_{ij} \cdot s_j$. On obtient la donnée de descente suivante $(\xi|_{U_i}, g_{ij})$, soit y l'objet dans $\mathcal{C}(U)$ obtenu par le recollement de cette donnée de descente. Les $\mathcal{G}|_U$ -torseurs $\mathcal{T}$ et $\underline{\text{Isom}}(x|_U, y)$

sont alors isomorphes. D'après [10, Exposé VI Proposition 4.2] le foncteur F est donc une équivalence de catégories sur S_{fppf} .

□

Chapitre 2

Torseurs et connexions

2.1. Généralités sur les connexions

Les définitions et résultats de cette section, consacrée à des rappels sur les connexions, peuvent être trouvés dans [14], [12] et [5].

Fixons S un schéma et X un S -schéma lisse.

DÉFINITION 2.1. *On appelle S -connexion, ou simplement connexion, sur un faisceau quasi-cohérent $\mathcal{E}$ sur X la donnée d'un morphisme de faisceaux abéliens :*

$$\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \Omega_{X/S}^1 \otimes \mathcal{E}$$

tel que

$$\nabla(fe) = f\nabla(e) + df \otimes e$$

pour toutes sections locales f et e de $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{E}$ respectivement. Le noyau de ∇ est appelé le faisceau des sections horizontales et est noté $\mathcal{E}^\nabla$.

Fixons pour le reste de cette section un faisceau quasi-cohérent $\mathcal{E}$ sur X , et ∇ une connexion sur $\mathcal{E}$.

EXEMPLE 2.1. Si $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X^{\oplus n}$ alors la connexion ∇ est complètement déterminée par l'image des vecteurs e_i de la base canonique. En effet, pour toute section locale $f = (f_1, \dots, f_n)$ de $\mathcal{O}_X^{\oplus n}$ on a

$$\nabla(f) = (df_1, \dots, df_n) + \sum_{i=1}^n f_i \nabla(e_i).$$

Une telle connexion est notée $d + \Omega$ où Ω est la matrice $n \times n$ à coefficients dans $\Gamma(X, \Omega_{X/S}^1)$ donnée par les vecteurs $\nabla(e_i)$.

La connexion $(\mathcal{E}, \nabla)$ permet de définir des morphismes de faisceaux abéliens

$$\nabla_i : \Omega_{X/S}^i \otimes \mathcal{E} \rightarrow \Omega_{X/S}^{i+1} \otimes \mathcal{E}$$

par

$$\nabla_i(\omega \otimes e) = d\omega \otimes e + (-1)^i \omega \wedge \nabla(e).$$

DÉFINITION 2.2. La courbure de la connexion ∇ , notée $K(\mathcal{E}, \nabla)$, ou simplement K si aucune confusion n'est possible, est le morphisme défini par

$$K(\mathcal{E}, \nabla) := \nabla_1 \circ \nabla : \mathcal{E} \rightarrow \Omega_{X/S}^2 \otimes \mathcal{E}.$$

La connexion ∇ est dite intégrable lorsque sa courbure est nulle.

LEMME 2.1. La courbure $K : \mathcal{E} \rightarrow \Omega_{X/S}^2 \otimes \mathcal{E}$ est un morphisme $\mathcal{O}_X$ -linéaire.

DÉMONSTRATION. Soient f et e des sections locales de $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{E}$ respectivement. Si $\nabla(e) = \sum_i \omega_i \otimes e_i$ alors

$$\begin{aligned} K(fe) &= \nabla_1(f\nabla(e) + df \otimes e) \\ &= \nabla_1 \left(\left(\sum_i \omega_i \otimes fe_i \right) + df \otimes e \right) \\ &= \left(\sum_i d\omega_i \otimes fe_i - \omega_i \wedge \nabla(fe_i) \right) - df \wedge \nabla(e) \\ &= \sum_i d\omega_i \otimes fe_i - \omega_i \wedge f\nabla(e_i) - \omega_i \wedge df \otimes e_i - df \wedge \omega_i \otimes e_i \\ &= \sum_i d\omega_i \otimes fe_i - \omega_i \wedge f\nabla(e_i) \\ &= fK(e) \end{aligned}$$

□

LEMME 2.2 ([5, (3.2.2)]). Soit ∇ une connexion sur $\mathcal{O}_X^{\oplus n}$ donnée par $d + \Omega$ où $\Omega = (\omega_{ij})_{i,j=1..n}$. La courbure :

$$K(\mathcal{O}_X^{\oplus n}, \nabla) : \mathcal{O}_X^{\oplus n} \rightarrow (\Omega_{X/S}^2)^{\oplus n}$$

est donnée par la matrice $d\Omega + \Omega \wedge \Omega$ où $d\Omega = (d\omega_{ij})_{i,j=1..n}$ et $\Omega \wedge \Omega$ est la matrice $n \times n$ à coefficients dans $\Omega_{X/S}^2$ dont le coefficient d'indice (i, j) est donné par $\sum_{k=1}^n \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$.

DÉMONSTRATION. Comme la courbure est un morphisme $\mathcal{O}_X$ -linéaire il suffit de vérifier que la i -ième composante du vecteur $K(e_j)$ est donnée par $d\omega_{ij} + \sum_{k=1}^n \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$. Soit $(e_i)_{i=1..n}$ la base canonique de $\mathcal{O}_X^{\oplus n}$. Pour $1 \leq j \leq n$ on a $\nabla(e_j) = \sum_{k=1}^n \omega_{kj} \otimes e_k$. Par définition de la courbure on a donc

$$\begin{aligned}
K(e_j) &= \sum_{k=1}^n d\omega_{kj} \otimes e_k - \sum_{k=1}^n \omega_{kj} \wedge \nabla(e_k) \\
&= \sum_{k=1}^n d\omega_{kj} \otimes e_k - \sum_{k=1}^n \omega_{kj} \wedge \left(\sum_{p=1}^n \omega_{pk} \otimes e_p \right) \\
&= \sum_{k=1}^n d\omega_{kj} \otimes e_k + \sum_{k,p=1}^n (\omega_{pk} \wedge \omega_{kj}) \otimes e_p.
\end{aligned}$$

Ainsi on voit que la i -ième composante du vecteur $K(e_j)$ est $d\omega_{ij} + \sum_{k=1}^n \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$. $\square$

DÉFINITION 2.3. On appelle *faisceau tangent de X sur S* et on note $\mathcal{T}_{X/S}$ le faisceau des S -dérivations de $\mathcal{O}_X$ dans lui même. C'est un faisceau de $f^{-1}\mathcal{O}_S$ -algèbres de Lie. Comme $\mathcal{O}_X$ -module ce faisceau est isomorphe au faisceau $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/S}^1, \mathcal{O}_X)$.

Notons $f : X \rightarrow S$ le morphisme structurel. Pour tout faisceau quasi-cohérent $\mathcal{E}$ sur X on note $\mathrm{End}_S(\mathcal{E})$ le faisceau des $f^{-1}\mathcal{O}_S$ -endomorphismes de $\mathcal{E}$, qui est aussi un faisceau de $f^{-1}\mathcal{O}_S$ -algèbres de Lie. Pour une dérivation D de $\in \mathcal{T}_{X/S}$ on note $\nabla(D)$ la composition :

$$\nabla(D) : \mathcal{E} \rightarrow \Omega_{X/S}^1 \otimes \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{E} = \mathcal{E},$$

où le premier morphisme est ∇ et le second est $D \otimes 1$.

REMARQUE 2.1. Comme X est lisse sur S , tout point de X possède un voisinage ouvert U , avec des coordonnées locales $x_1, \dots, x_n$, données par un S -morphisme étale $U \rightarrow \mathbb{A}_S^n$. Notons pour $i = 1..n$, ∂_i la dérivation $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Sur un tel ouvert toute dérivation D s'écrit $D = \sum_i f_i \partial_i$ et, si e est une section locale de $\mathcal{E}$ sur U alors :

$$\nabla(e) = \sum_i dx_i \otimes \nabla(\partial_i)(e).$$

LEMME 2.3 ([14, §I]). Soit $\tilde{\nabla} : \mathcal{T}_{X/S} \rightarrow \mathrm{End}_S(\mathcal{E})$ un morphisme $\mathcal{O}_X$ -linéaire tel que pour toutes sections locales f , e et D de $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{T}_{X/S}$ respectivement on a :

$$\tilde{\nabla}(D)(fe) = f \tilde{\nabla}(D)(e) + D(f)e.$$

Le morphisme de faisceaux abéliens donné localement, sur un ouvert avec des coordonnées locales $x_1, \dots, x_n$, par

$$\begin{aligned}
\nabla : \mathcal{E} &\rightarrow \Omega_{X/S}^1 \otimes \mathcal{E} \\
e &\mapsto \sum_i dx_i \otimes \tilde{\nabla}(\partial_i)(e)
\end{aligned} \tag{17}$$

définit une connexion sur $\mathcal{E}$. De plus, toute connexion provient d'un unique tel morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules.

DÉMONSTRATION. Vérifions que le morphisme donné dans (17) définit une connexion. Soient f et e des sections locales de $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{E}$ respectivement sur un ouvert avec des coordonnées locales $x_1, \dots, x_n$. On a

$$\begin{aligned} \nabla(fe) &= \sum_i dx_i \otimes \tilde{\nabla}(\partial_i)(fe) \\ &= \sum_i dx_i \otimes f \tilde{\nabla}(\partial_i)(e) + \sum_i dx_i \otimes (\partial_i f)e \\ &= f\nabla(e) + df \otimes e. \end{aligned}$$

Soit maintenant ∇ une connexion sur $\mathcal{E}$. L'unique morphisme $\mathcal{O}_X$ -linéaire $\tilde{\nabla}$ induisant ∇ comme ci-dessus est donné par :

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} : \mathcal{T}_{X/S} &\rightarrow \text{End}_S(\mathcal{E}) \\ D &\mapsto \tilde{\nabla}(D) := \nabla(D). \end{aligned}$$

On vérifie alors pour des sections f , e et D de $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{T}_{X/S}$ respectivement que

$$\nabla(D)(fe) = (D \otimes 1)(\nabla(fe)) = (D \otimes 1)(f\nabla(e) + df \otimes e) = f\nabla(D)(e) + D(f)e.$$

□

Le lemme suivant est bien connu et permet de voir qu'une connexion est intégrable précisément lorsque le morphisme associé $\tilde{\nabla} : \mathcal{T}_{X/S} \rightarrow \text{End}_S(\mathcal{E})$ est un morphisme d'algèbres de Lie.

LEMME 2.4 ([14, §I]). Pour toute paire de dérivations D, D' dans $\mathcal{T}_{X/S}$ on a :

$$[\nabla(D), \nabla(D')] - \nabla([D, D']) = (D \wedge D')(K).$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer le lemme localement, supposons donc que nous disposons d'un système de coordonnées locales $x_1, \dots, x_n$. Soient e une section locale de $\mathcal{E}$, $D = \sum_i f_i \partial_i$ et $D' = \sum_i f'_i \partial_i$ deux dérivations de $\mathcal{T}_{X/S}$. Notons $e_i := \nabla(\partial_i)(e)$ et $e_{ij} := \nabla(\partial_i)(e_j)$. On a alors

$$\begin{aligned} \nabla(e) &= dx_i \otimes \sum_i \nabla(\partial_i)(e) = \sum_i dx_i \otimes e_i \\ K(e) &= \sum_{i < j} dx_i \wedge dx_j \otimes (e_{ij} - e_{ji}) \\ (D \wedge D')(K)(e) &= \sum_{i < j} (f_i f'_j - f_j f'_i)(e_{ij} - e_{ji}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla(D)(e) &= \sum_i f_i(\nabla(\partial_i)(e)) = \sum_i f_i e_i \\
\nabla(D') \circ \nabla(D)(e) &= \sum_j f'_j \nabla(\partial_j) \left(\sum_i f_i e_i \right) \\
&= \sum_{ij} f'_j (\partial_j f_i) \nabla(\partial_i)(e) + f'_j f_i \nabla(\partial_j)(\nabla(\partial_i)(e)) \\
&= \sum_{ij} f'_j (\partial_j f_i) e_i + f'_j f_i e_{ji}, \\
(\nabla(D) \circ \nabla(D') - \nabla(D') \circ \nabla(D))(e) &= \sum_{ij} f_j (\partial_j f'_i) e_i + f_j f'_i e_{ji} - f'_j (\partial_j f_i) e_i - f'_j f_i e_{ji}, \\
(D \circ D' - D' \circ D)(x_i) &= D(f'_i) - D'(f_i) = \sum_j f_j (\partial_j f'_i) - f'_j (\partial_j f_i) \\
\nabla(D \circ D' - D' \circ D)(e) &= \sum_{i,j} f_j (\partial_j f'_i) e_i - f'_j (\partial_j f_i) e_i \\
[\nabla(D), \nabla(D')] - \nabla([D, D'])(e) &= \sum_{i,j} f_j (\partial_j f'_i) e_i + f_j f'_i e_{ji} - f'_j (\partial_j f_i) e_i - f'_j f_i e_{ji} \\
&\quad - \sum_{i,j} f_j (\partial_j f'_i) e_i - f'_j (\partial_j f_i) e_i \\
&= \sum_{i,j} f_j f'_i e_{ji} - f'_j f_i e_{ji} = \sum_{i < j} (f_j f'_i - f'_j f_i) (e_{ij} - e_{ji}) \\
&= (D \wedge D')(K)(e).
\end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 2.1. *Une connexion ∇ est intégrable si et seulement si le morphisme associé $\tilde{\nabla} : \mathcal{T}_{X/S} \rightarrow \text{End}_S(\mathcal{E})$ est un morphisme d'algèbres de Lie.*

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 2.4 il suffit de montrer que si $(D \wedge D')(K) = 0$ pour toutes dérivations D et D' de $\mathcal{T}_{X/S}$ alors la courbure est nulle. On peut se restreindre à un ouvert avec des coordonnées locales. Soit e une section de $\mathcal{E}$ sur un tel ouvert. On a alors

$$K(e) = \sum_{i < j} dx_i \wedge dx_j \otimes e_{ij}$$

et donc pour tout $i, j = 1, \dots, n$

$$(\partial_i \wedge \partial_j)(K)(e) = e_{ij} = 0.$$

□

DÉFINITION 2.4. *Un morphisme horizontal entre deux $\mathcal{O}_X$ -modules munis de connexions $(\mathcal{E}, \nabla)$ et $(\mathcal{F}, \nabla')$ est un morphisme $\mathcal{O}_X$ -linéaire $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ faisant commuter le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{F} \\ \downarrow \nabla & & \downarrow \nabla' \\ \mathcal{E} \otimes \Omega_{X/S}^1 & \xrightarrow{\varphi \otimes 1} & \mathcal{F} \otimes \Omega_{X/S}^1. \end{array}$$

Munis des morphismes horizontaux, les $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents avec S -connexion forment une catégorie abélienne noté $\text{MC}(X/S)$. La sous-catégorie pleine des $\mathcal{O}_X$ -modules avec connexion intégrable est une catégorie abélienne notée $\text{MIC}(X/S)$, [14, (1.1)].

Supposons maintenant S de caractéristique $p > 0$. Pour chaque $D \in \mathcal{T}_{X/S}$, g et h sections de $\mathcal{O}_X$ on a :

$$D^p(gh) = hD^p(g) + gD^p(h).$$

Ceci veut dire que D^p est une dérivation.

DÉFINITION 2.5. *On appelle p -courbure d'une connexion $(\mathcal{E}, \nabla)$ dans $\text{MIC}(X/S)$ le morphisme :*

$$\psi : \mathcal{T}_{X/S} \rightarrow \text{End}_S(\mathcal{E})$$

défini par

$$\psi(D) = (\nabla(D))^p - \nabla(D^p).$$

REMARQUE 2.2. Pour toute section D de $\mathcal{T}_{X/S}$ le morphisme $\psi(D)$ est $\mathcal{O}_X$ -linéaire, voir [14, § 5], la p -courbure est donc un morphisme :

$$\psi : \mathcal{T}_{X/S} \rightarrow \text{End}_X(\mathcal{E}).$$

PROPOSITION 2.1 ([14, Proposition 5.2]). *La p -courbure ψ est un morphisme additif p -linéaire i.e. pour toutes sections f et D de $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{T}_{X/S}$ on a $\psi(fD) = f^p\psi(D)$.*

REMARQUE 2.3. D'après la proposition 2.1 on peut voir la p -courbure comme un morphisme $\mathcal{O}_X$ -linéaire $\mathcal{T}_{X/S} \rightarrow F_{X*} \text{End}_S(\mathcal{E})$.

2.1.1. Descente de Cartier. Reprenons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & & \xrightarrow{F_X} & & X \\ & \searrow F & & & \downarrow f \\ & & X^{(p)} & \xrightarrow{\text{pr}_1} & X \\ & & \downarrow \text{pr}_2 & & \downarrow f \\ & & S & \xrightarrow{F_S} & S \end{array}$$

où S est de caractéristique $p > 0$ et $f : X \rightarrow S$ lisse. Soit $(\mathcal{E}, \nabla)$ un faisceau quasi-cohérent sur X muni d'une connexion intégrable de p -courbure nulle. Le faisceau des sections horizontales $\mathcal{E}^\nabla$ vu comme $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ -module est quasi-cohérent. Si $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur $X^{(p)}$, il existe une connexion canonique ∇_{can} sur $F^* \mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F} \subset (F^* \mathcal{F})^{\nabla_{\text{can}}}$. On a alors pour une section locale $f \otimes s$ de $F^* \mathcal{F}$ où f est une section locale de $\mathcal{O}_X$:

$$\nabla_{\text{can}}(f \otimes s) = \nabla_{\text{can}}(f(1 \otimes s)) = f \nabla_{\text{can}}(1 \otimes s) + df \otimes (1 \otimes s) = df \otimes (1 \otimes s),$$

cette formule détermine ∇_{can} de manière unique. La courbure

$$K(F^* \mathcal{F}, \nabla_{\text{can}}) : F^* \mathcal{F} \rightarrow F^* \mathcal{F} \otimes \Omega_{X/S}^2$$

de ∇_{can} associe à chaque section locale du type $f \otimes s$ de $F^* \mathcal{F}$ la section nulle $d^2 f \otimes (1 \otimes s) - df \wedge \nabla_{\text{can}}(1 \otimes s)$, la connexion ∇_{can} est donc intégrable. Soit maintenant D une dérivation de $\mathcal{O}_X$. Le $\mathcal{O}_S$ -endomorphisme $\nabla_{\text{can}}(D)$ de $F^* \mathcal{F}$ envoie $f \otimes s$ sur $D(f) \otimes s$, il s'ensuit donc clairement que la p -courbure de ∇_{can} est nulle aussi.

On obtient donc une correspondance entre faisceaux quasi-cohérents sur X munis d'une connexion intégrable de p -courbure nulle, et faisceaux quasi-cohérents sur $X^{(p)}$.

THÉORÈME 2.1 ([14, Theorem 5.1]). *La correspondance décrite ci-dessus est une équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur $X^{(p)}$ et la sous-catégorie pleine de $\text{MIC}(X/S)$ des $\mathcal{O}_X$ -modules munis d'une connexion intégrable de p -courbure nulle.*

2.1.2. Opérateur de Cartier. On utilise [12] comme référence pour la notion d'opérateur de Cartier. Soit S un schéma de caractéristique p et X un S -schéma. On considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \searrow F & & \searrow F_X & \\ & & X^{(p)} & \xrightarrow{W} & X \\ & & \downarrow pr_2 & & \downarrow f \\ & & S & \xrightarrow{F_S} & S \end{array}$$

où W est la projection canonique.

Soit $\Omega_{X/S}^\bullet$ le complexe de de Rham associé à X/S . La différentielle $d : \Omega_{X/S}^i \rightarrow \Omega_{X/S}^{i+1}$ est $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ -linéaire, donc $Z\Omega_{X/S}^i := \ker d^i$ et $B\Omega_{X/S}^i := \text{im } d^{i-1}$ sont des $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ -modules.

D'après [14, 7.1] il existe un unique morphisme d'algèbres graduées :

$$C_{X/S}^{-1} : \Omega_{X/S}^\bullet \rightarrow W_* H^*(\Omega_{X/S}^\bullet)$$

donné par F_X en degré 0 et tel que pour toute section locale f de $\mathcal{O}_X$:

$$C_{X/S}^{-1}(df) = [f^{p-1}df] \in H^1(\Omega_{X/S}^\bullet)$$

où $[f^{p-1}df]$ désigne la classe de $f^{p-1}df$ dans $H^1(\Omega_{X/S}^\bullet)$. Par adjonction on a donc aussi un morphisme :

$$C_{X/S}^{-1} : W^*\Omega_{X/S}^\bullet = \Omega_{X^{(p)}/S}^\bullet \rightarrow H^*(\Omega_{X/S}^\bullet).$$

donné par F en degré 0 et tel que :

$$C_{X/S}^{-1}(W^*(df)) = [f^{p-1}df]$$

pour toute section locale f de $\mathcal{O}_X$.

THÉORÈME 2.2 ([14, Theorem 7.2]). *Si X/S est lisse alors le morphisme $C_{X/S}^{-1}$ est un isomorphisme.*

DÉFINITION 2.6. *Si X/S est lisse on appelle opérateur de Cartier le morphisme :*

$$C_{X/S} : Z(\Omega_{X/S}^\bullet) \rightarrow \Omega_{X^{(p)}/S}^\bullet$$

dont le noyau est $B(\Omega_{X/S}^\bullet)$ et qui est défini par l'inverse de $C_{X/S}^{-1}$.

2.1.2.1. Calcul sur les 1-formes. On note

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Omega_{X/S}^1 \times \mathcal{T}_{X/S} \rightarrow \mathcal{O}_X$$

le morphisme de dualité. Pour tout ouvert U de X , $\omega \in Z\Omega_{X/S}^1(U)$ et $D \in \mathcal{T}_{X/S}(U)$ on a [12, (2.1.12)] :

$$F^\sharp \langle C\omega, W^*D \rangle = \langle \omega, D^p \rangle - D^{p-1}(\langle \omega, D \rangle). \quad (18)$$

Soient $t_1, \dots, t_d \in \mathcal{O}_X(U)$ définissant un système de coordonnées locales et $\partial_1, \dots, \partial_d$ les dérivations correspondantes. Les dt_i , $i = 1, \dots, d$ forment une base de $\Omega_{X/S}^1(U)$. Si

$$\omega = \sum a_i dt_i \in Z\Omega_{X/S}^1(U)$$

alors

$$C\omega = \sum c_i W^*(dt_i)$$

avec $c_i \in \mathcal{O}_{X^{(p)}}(U)$ et, comme $\partial_i^p = 0$, $\langle \omega, \partial_i \rangle = a_i$ et $\langle C\omega, W^*\partial_i \rangle = c_i$, alors :

$$F^\sharp(c_i) = -\partial_i^{p-1}a_i$$

ce qui détermine les c_i car $F^\sharp$ est injectif.

2.1.2.2. *Lien avec la p -courbure.* Soit ∇ une connexion sur $\mathcal{O}_U$ où U est un ouvert de X . On a pour toute section f de $\mathcal{O}_U$: $\nabla(f) = df + f\nabla(1)$. La connexion ∇ est donc donnée de manière unique par $\nabla = d + \omega$ où $\omega = \nabla(1) \in \Omega_{X/S}^1(U)$.

Soit $D \in \mathcal{T}_{X/S}$. L'endomorphisme $\nabla(D)$ est la composée $D \circ \nabla$, on peut donc écrire $\nabla(D) = D + \langle \omega, D \rangle$. La p -courbure ψ_∇ et $C\omega$ sont reliés par la formule :

$$\psi_\nabla(D) = L_a, \quad (19)$$

où $a = F^\sharp \langle W^*\omega - C\omega, W^*D \rangle$, et L_a est la multiplication par a . En effet, il suffit de montrer que :

$$(D + \langle \omega, D \rangle)^p = D^p + \langle \omega, D \rangle^p + D^{p-1} \langle \omega, D \rangle.$$

Or cette dernière égalité provient du lemme suivant :

LEMME 2.5 ([23, Corollaire de la proposition 4]). *Soit A un anneau de caractéristique $p > 0$, D une dérivation de A , $a \in A$. Pour tout $x \in A$ on note L_x la multiplication par x . On a*

$$(D + L_a)^p = D^p + L_{a^p} + L_{D^{p-1}(a)}.$$

On termine cette section en donnant un résultat qui nous sera utile par la suite.

THÉORÈME 2.3. [12, (2.1.17)] *Soient U un ouvert de X , et $\omega \in \Omega_{X/S}^1(U)$ telle que $d\omega = 0$. On a alors $C\omega = W^*\omega$ si et seulement si il existe localement des sections inversibles f de $\mathcal{O}_X$ telles que $\omega = df/f$.*

2.2. Torseurs sous le noyau de Frobenius de certains groupes

2.2.1. **Le groupe GL_n .** Soit X un schéma quelconque et QCoh le champ des faisceaux quasi-cohérents sur le site X_{fppf} voir : [25] ou [24, Tag 03YL].

DÉFINITION 2.7. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{C}_{\mathrm{GL}_n}$ la sous-catégorie de QCoh telle que les objets sont donnés par les couples $(U, \mathcal{F})$ où U est un X -schéma et $\mathcal{F}$ est un faisceau localement libre de rang n sur U , et telle que un morphisme $(U, \mathcal{F}) \rightarrow (V, \mathcal{E})$ est donné par un couple (f, φ) où $f : U \rightarrow V$ et $\varphi : f^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ un isomorphisme de $\mathcal{O}_U$ -modules.*

LEMME 2.6. *La sous-catégorie $\mathcal{C}_{\mathrm{GL}_n}$ de QCoh est un sous-champ qui définit une gerbe sur X_{fppf} .*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que $\mathcal{C}_{\mathrm{GL}_n}$ forme un champ sur X_{fppf} . Pour cela il suffit de vérifier que la descente de faisceaux localement libres de rang n sur un X -schéma relativement à un recouvrement fppf est un faisceau localement libre de rang n , cela provient alors du lemme 1.6. $\square$

Le faisceau de groupes GL_n sur X_{fppf} est isomorphe au faisceau de groupes $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{O}_X^{\oplus n})$ sur le site X_{fppf} . On déduit donc du lemme 1.8 et du lemme 2.6 l'équivalence suivante :

LEMME 2.7. *La catégorie $\mathcal{C}_{\mathrm{GL}_n}$ est équivalente à la catégorie GL_n -Torseurs comme gerbe sur X_{fppf} .*

Supposons maintenant X lisse sur $S = \mathrm{Spec} k$ où k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$.

LEMME 2.8. *Soit $\nabla : \mathcal{O}_X^{\oplus n} \rightarrow \Omega_{X/S}^1 \otimes \mathcal{O}_X^{\oplus n}$ une connexion sur $\mathcal{O}_X^{\oplus n}$, de matrice de formes Ω . La connexion $(\mathcal{O}_X^{\oplus n}, \nabla)$ est isomorphe à $(\mathcal{O}_X^{\oplus n}, d)$ si et seulement si il existe $M \in \mathrm{GL}_n(X)$ telle que $\Omega = M^{-1}dM$, on dit alors que Ω est logarithmique.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $(\mathcal{O}_X^{\oplus n}, \nabla)$ est isomorphe à $(\mathcal{O}_X^{\oplus n}, d)$ via un automorphisme f de $\mathcal{O}_X^{\oplus n}$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X^{\oplus n} & \xrightarrow{\nabla} & \Omega_{X/S}^1 \otimes \mathcal{O}_X^{\oplus n} \\ \downarrow f & & \downarrow \mathrm{Id} \otimes f \\ \mathcal{O}_X^{\oplus n} & \xrightarrow{d} & \Omega_{X/S}^1 \otimes \mathcal{O}_X^{\oplus n} . \end{array}$$

Soit M la matrice de l'automorphisme f et Ω la matrice des formes de la connexion ∇ . La commutativité du diagramme ci-dessus induit alors $M\Omega = dM$ d'où $\Omega = M^{-1}dM$. Si maintenant M est une matrice comme dans le lemme alors l'automorphisme f associé à cette matrice est horizontal et induit donc un isomorphisme $(\mathcal{O}_X^{\oplus n}, \nabla) \simeq (\mathcal{O}_X^{\oplus n}, d)$. $\square$

La proposition suivante est un cas particulier de [20, Theorem 4.1].

PROPOSITION 2.2. *Une connexion ∇ sur $\mathcal{O}_X^{\oplus n}$ est intégrable de p -courbure nulle si et seulement si la matrice des formes Ω de la connexion ∇ est Zariski localement de la forme $M^{-1}dM$ où M est une matrice inversible à coefficients dans $\mathcal{O}_X$, i.e. si et seulement si Ω est localement logarithmique.*

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 2.8 il suffit de montrer que ∇ est intégrable de p -courbure nulle si et seulement si $(\mathcal{O}_X^{\oplus n}, \nabla)$ est localement isomorphe à $(\mathcal{O}_X^{\oplus n}, d)$.

Supposons $(\mathcal{O}_X^{\oplus n}, \nabla)$ intégrable de p -courbure nulle. Le faisceau quasi-cohérent $(\mathcal{O}_X^{\oplus n})^\nabla$ sur $X^{(p)}$ obtenu via descente de Cartier est localement libre, la connexion canonique $(F^*(\mathcal{O}_X^{\oplus n})^\nabla, \nabla_{\mathrm{can}})$ est donc localement triviale et isomorphe à la connexion $(\mathcal{O}_X^{\oplus n}, \nabla)$, cette dernière est donc aussi localement triviale i.e. localement isomorphe à $(\mathcal{O}_X^{\oplus n}, d)$.

Comme les conditions intégrable et de p -courbure nulle sont locales, si $(\mathcal{O}_X^{\oplus n}, \nabla)$ est localement triviale alors ∇ est intégrable de p -courbure nulle. $\square$

2.2.2. Le groupe $\mathbb{G}_m$. Soit X un schéma lisse sur $S = \operatorname{Spec} k$ parfait de caractéristique $p > 0$. On considère la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mu_p \rightarrow \mathbb{G}_{m,X} \rightarrow \mathbb{G}_{m,X}^{(p)} \rightarrow 0 \quad (20)$$

où $\mathbb{G}_{m,X} \rightarrow \mathbb{G}_{m,X}^{(p)}$ est le Frobenius relatif, et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F_X} & X \\ \downarrow F & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow \\ X^{(p)} & \xrightarrow{\text{pr}_1} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{F_S} & S \end{array}$$

La catégorie des μ_p -torseurs sur X_{fppf} est équivalente à la catégorie des couples $(\mathcal{L}, \alpha)$ où $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur X et $\alpha : \mathcal{L}^{\otimes p} \rightarrow \mathcal{O}_X$ une trivialisation de $\mathcal{L}^{\otimes p}$, et tel qu'un morphisme entre deux couples $(\mathcal{L}, \alpha)$ et $(\mathcal{L}', \alpha')$ est donné par un isomorphisme $\varphi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^{\otimes p} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{O}_X \\ \downarrow \varphi^{\otimes p} & & \downarrow \\ (\mathcal{L}')^{\otimes p} & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{O}_X, \end{array} \quad (21)$$

[24, Tag 040Q]. On en déduit le lemme suivant :

LEMME 2.9. *La catégorie des μ_p -torseurs sur X_{fppf} est équivalente à la catégorie des couples $(\mathcal{L}, \alpha)$ où $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur $X^{(p)}$ et $\alpha : F^* \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_X$ une trivialisation de $F^* \mathcal{L}$, et telle qu'un morphisme entre deux couples $(\mathcal{L}, \alpha)$ et $(\mathcal{L}', \alpha')$ est donné par un isomorphisme $\varphi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} F^* \mathcal{L} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{O}_X \\ \downarrow F^* \varphi & & \downarrow \\ F^* (\mathcal{L}') & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{O}_X. \end{array} \quad (22)$$

DÉMONSTRATION. Comme k est parfait la projection $\text{pr}_1 : X^{(p)} \rightarrow X$ est un isomorphisme, de plus pour tout faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X on a $\mathcal{L}^{\otimes p} \simeq F_X^* \mathcal{L}$, le lemme découle alors de la caractérisation des μ_p -torseurs donnée plus haut. $\square$

Le groupe $H_{\text{fppf}}^1(X, \mu_p)$ s'identifie canoniquement au groupe des classes d'isomorphie des μ_p -torseurs sur X_{fppf} et ce dernier s'identifie au groupe des classes

d'isomorphie des couples $(\mathcal{L}, \alpha)$ données dans le lemme ci-dessus, on obtient donc l'identification suivante :

$$H_{\text{fppf}}^1(X, \mu_p) \simeq \{(\mathcal{L}, \alpha) \mid \alpha : F^* \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_X \text{ est un isomorphisme}\} \quad (23)$$

où l'on note encore $(\mathcal{L}, \alpha)$ la classe d'isomorphie du couple $(\mathcal{L}, \alpha)$.

PROPOSITION 2.3. *Les classes d'isomorphie des μ_p -torseurs sur X_{fppf} sont en bijection avec les connexions intégrables de p -courbure nulle sur $\mathcal{O}_X$.*

DÉMONSTRATION. Soit $(\mathcal{L}, \alpha)$ un couple comme dans le lemme 2.9. Le faisceau $\mathcal{L}$ étant quasi-cohérent sur $X^{(p)}$, par le théorème de descente de Cartier 2.1 on peut associer une unique connexion $\nabla_{\mathcal{L}}$ à $F^*(\mathcal{L})$ telle que $\mathcal{L} \simeq F^*(\mathcal{L})^{\nabla_{\mathcal{L}}}$. L'isomorphisme $\alpha : F^*(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{O}_X$ nous permet de définir une connexion $\nabla_{(\mathcal{L}, \alpha)}$ sur $\mathcal{O}_X$ en composant :

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\alpha^{-1}} F^*(\mathcal{L}) \rightarrow F^*(\mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1 \xrightarrow{\alpha \otimes 1} \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1 \rightarrow \Omega_{X/S}^1.$$

Cette connexion ne dépend pas du représentant de la classe d'isomorphie de $(\mathcal{L}, \alpha)$. En effet, si $\varphi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ est un isomorphisme faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F^*(\mathcal{L}) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{O}_X \\ \downarrow F^*\varphi & & \downarrow 1 \\ F^*(\mathcal{L}') & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{O}_X \end{array}$$

il suffit de vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F^*(\mathcal{L}) & \xrightarrow{\nabla_{\mathcal{L}}} & F^*(\mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1 \\ \downarrow F^*\varphi & & \downarrow (F^*\varphi) \otimes 1 \\ F^*(\mathcal{L}') & \xrightarrow{\nabla_{\mathcal{L}'}} & F^*(\mathcal{L}') \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/S}^1 \end{array}$$

commute, or cela provient du fait que $F^*\varphi$ induit un isomorphisme entre le faisceau des sections horizontales de $\nabla_{\mathcal{L}}$ et celui de $\nabla_{\mathcal{L}'}$ et du théorème de descente de Cartier 2.1.

Soit maintenant ∇ une connexion intégrable de p -courbure nulle sur $\mathcal{O}_X$. On associe à ∇ le couple $(\mathcal{O}_X^{\nabla}, \alpha_{\nabla})$ où $\alpha_{\nabla} : F^*(\mathcal{O}_X^{\nabla}) \rightarrow \mathcal{O}_X$ est le morphisme naturel qui est un isomorphisme par le théorème de descente de Cartier 2.1. Le faisceau $\mathcal{O}_X^{\nabla}$ est inversible par le lemme 1.6 et par le fait que le Frobenius relatif est un recouvrement fppf de $X^{(p)}$. Les deux applications que nous venons de construire sont inverses l'une de l'autre. $\square$

Nous retrouvons maintenant un résultat déjà connu, [17, chap III, Proposition 4.14], mais avec une preuve différente.

PROPOSITION 2.4. *On a un isomorphisme de groupes*

$$H_{\text{fppf}}^1(X, \mu_p) \simeq \{\omega \in \Gamma(X, \Omega_{X/S}^1) \mid d\omega = 0 \text{ et } C\omega = \omega\}$$

DÉMONSTRATION. Les connexions sur $\mathcal{O}_X$ sont données de manière unique par les sections globales $\Gamma(X, \Omega_{X/S}^1)$, pour avoir une identification il suffit donc par le lemme 2.3 de montrer qu'une connexion ∇_ω est intégrable de p -courbure nulle si et seulement si $d\omega = 0$ et $C\omega = \omega$. D'après le lemme 2.2 la connexion ∇_ω est intégrable si et seulement si $d\omega = 0$. D'après la proposition 2.2, ∇_ω est de p -courbure nulle si et seulement si ω est localement de la forme df/f pour des sections inversibles f dans $\mathcal{O}_X$, donc par le théorème 2.3 si et seulement si $C\omega = \omega$ ¹.

□

2.2.3. Le groupe $\mathbb{T}_n$. Soit X un schéma quelconque et $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{T}_n$ le sous-groupe de GL_n des matrices triangulaires supérieures.

DÉFINITION 2.8. *On appelle drapeau complet sur X une famille de faisceaux quasi-cohérents $(\mathcal{E}_i)_{i=1..n}$ telle que pour tout $i = 1..n-1$, $\mathcal{E}_i$ est localement libre de rang i , $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{E}_{i+1}$ et $\mathcal{E}_{i+1}/\mathcal{E}_i$ est inversible. On note D_n le drapeau trivial donné par*

$$\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{O}_X^{\oplus 2} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{O}_X^{\oplus n} \quad (24)$$

où chaque inclusion $\mathcal{O}_X^{\oplus i} \subseteq \mathcal{O}_X^{\oplus i+1}$ est donnée par l'inclusion sur les i premiers facteurs de $\mathcal{O}_X^{\oplus i+1}$.

DÉFINITION 2.9. • On note $\mathcal{C}_{\mathbb{T}_n}(X)$ le groupoïde dont les objets sont les drapeaux complets sur X , et tel que les morphismes entre deux drapeaux complets $(\mathcal{E}_i)_{i=1..n}$ et $(\mathcal{F}_i)_{i=1..n}$ sont donnés par des $(\varphi_i)_{i=1..n}$ où les φ_i sont des isomorphismes $\mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{F}_i$ compatibles avec les inclusions de $(\mathcal{E}_i)_{i=1..n}$ et $(\mathcal{F}_i)_{i=1..n}$.

• On note $\mathcal{C}_{\mathbb{T}_n}$ la catégorie dont les objets sont les couples $(U, (\mathcal{E}_i)_{i=1..n})$ où U est un schéma sur X et $(\mathcal{E}_i)_{i=1..n}$ est un drapeau complet sur U , et tel que les morphismes entre deux $(U, (\mathcal{E}_i)_{i=1..n})$ et $(V, (\mathcal{F}_i)_{i=1..n})$ sont donnés par des couples (f, φ) où f est un morphisme $U \rightarrow V$ sur X et $\varphi = (\varphi_i)_{i=1..n}$ est un morphisme $f^*(\mathcal{F}_i)_{i=1..n} \rightarrow (\mathcal{E}_i)_{i=1..n}$ dans $\mathcal{C}_{\mathbb{T}_n}(U)$.

On considère $\mathcal{C}_{\mathbb{T}_n}$ comme catégorie sur X_{fppf} via le foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathbb{T}_n} &\rightarrow X_{\text{fppf}} \\ (U, (\mathcal{E}_i)_{i=1..n}) &\mapsto U. \end{aligned} \quad (25)$$

LEMME 2.10. *La catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{T}_n}$ est une catégorie fibrée en groupoïdes sur X_{fppf} .*

¹On écrit $C\omega = \omega$ au lieu de $C\omega = W^*\omega$ dans le théorème 2.3.

DÉMONSTRATION. Soit $(V, (\mathcal{E}_i)_{i=1..n})$ un objet dans $\mathcal{C}_{\mathbb{T}_n}$ et $f : U \rightarrow V$ un morphisme de X -schémas. Le morphisme $(f, \text{Id}) : (U, f^*(\mathcal{E}_i)_{i=1..n}) \rightarrow (V, (\mathcal{E}_i)_{i=1..n})$ est fortement cartésien. En effet, pour tout objet $(W, (\mathcal{F}_i)_{i=1..n})$ dans $\mathcal{C}_{\mathbb{T}_n}$, les morphismes

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}_{\mathbb{T}_n}}((W, (\mathcal{F}_i)_{i=1..n}), (U, f^*(\mathcal{E}_i)_{i=1..n}))$$

sont donnés par

$$\begin{aligned} & \{(h, \varphi) \mid h \in \text{Mor}_X(W, U), \varphi \in \text{Mor}_{\mathcal{C}_{\mathbb{T}_n}(W)}(h^*(f^*(\mathcal{E}_i)_{i=1..n}), (\mathcal{F}_i)_{i=1..n})\} = \\ & \{(h, \varphi) \mid h \in \text{Mor}_X(W, U), \varphi \in \text{Mor}_{\mathcal{C}_{\mathbb{T}_n}(W)}(f \circ h)^*(\mathcal{E}_i)_{i=1..n}, (\mathcal{F}_i)_{i=1..n})\} = \\ & \{((g, \varphi), h) \mid f \circ h = g\} \end{aligned}$$

où $(g, \varphi) \in \text{Mor}_{\mathcal{C}_{\mathbb{T}_n}}((W, (\mathcal{F}_i)_{i=1..n}), (V, (\mathcal{E}_i)_{i=1..n}))$, et $h \in \text{Mor}_X(W, U)$. La catégorie fibre au dessus d'un X -schéma U est donnée par le groupoïde $\mathcal{C}_{\mathbb{T}_n}(U)$. D'après [24, Tag 003V] la catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{T}_n}$ est donc une catégorie fibrée en groupoïdes sur X_{fppf} . $\square$

LEMME 2.11. *Se donner un drapeau complet sur X revient à se donner une suite d'inclusions*

$$\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{E}_n$$

Zariski localement isomorphe à D_n i.e. Zariski localement il existe des isomorphismes $\mathcal{E}_{i|U} \rightarrow \mathcal{O}_U^{\oplus i}$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{E}_{1|U} & \hookrightarrow & \mathcal{E}_{2|U} & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & \mathcal{E}_{n|U} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \mathcal{O}_U & \hookrightarrow & \mathcal{O}_U^{\oplus 2} & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & \mathcal{O}_U^{\oplus n} \end{array}$$

pour des ouverts U recouvrant X .

DÉMONSTRATION. Soit $(\mathcal{E}_i)_{i=1..n}$ un drapeau complet, montrons qu'il est Zariski localement isomorphe à D_n . Par récurrence supposons que la propriété est vérifiée pour $n-1$. On considère le diagramme suivant sur un ouvert U de X assez petit

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}_{n-1|U} & \hookrightarrow & \mathcal{E}_{n|U} & \twoheadrightarrow & \mathcal{E}_n / \mathcal{E}_{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \simeq & & & & \downarrow \simeq \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_U^{\oplus n-1} & \hookrightarrow & \mathcal{O}_U^{\oplus n} & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_U^{\oplus n} / \mathcal{O}_U^{\oplus n-1} \longrightarrow 0, \end{array}$$

quitte à restreindre encore U il existe un isomorphisme $\mathcal{E}_{n|U} \rightarrow \mathcal{O}_U^{\oplus n}$ faisant commuter le diagramme ci-dessus. $\square$

PROPOSITION 2.5. *La catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{T}_n}$ est une gerbe sur X_{fppf} .*

DÉMONSTRATION. La catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{T}_n}$ est un champ sur X_{fppf} via le théorème de descente fppf de faisceaux quasi-cohérents 1.1, et du lemme 1.6. L'existence du drapeau trivial et le lemme 2.11 montrent que $\mathcal{C}_{\mathbb{T}_n}$ est une gerbe sur X_{fppf} . $\square$

LEMME 2.12. *Le faisceau de groupes $\mathbb{T}_n$ sur X_{fppf} est isomorphe au faisceau de groupes des automorphismes de D_n .*

DÉMONSTRATION. En effet pour tout X -schéma Y le groupe $\mathbb{T}_n(Y)$ est isomorphe à $\text{Aut}(D_n(Y))$. $\square$

COROLLAIRE 2.2. *La gerbe $\mathbb{T}_n$ -Torseurs est équivalente à la gerbe $\mathcal{C}_{\mathbb{T}_n}$ sur X_{fppf} .*

DÉMONSTRATION. Découle du lemme 1.8. $\square$

Supposons maintenant X lisse sur un schéma $S = \text{Spec } k$ où k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$.

DÉFINITION 2.10. *Une connexion $(\nabla_i)_{i=1..n}$ sur un drapeau complet $(\mathcal{E}_i)_{i=1, \dots, n}$ sur X est la donnée pour tout $i = 1, \dots, n$ d'une connexion ∇_i sur chaque $\mathcal{E}_i$ compatible avec les inclusions $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{E}_{i+1}$. Elle est dite intégrable (resp. de p -courbure nulle) si toutes les connexions ∇_i sont intégrables (resp. de p -courbure nulle).*

REMARQUE 2.4. Soit $(\mathcal{O}_X^{\oplus i}, \nabla') \rightarrow (\mathcal{O}_X^{\oplus i+1}, \nabla)$ un morphisme dans $\text{MC}(X/S)$ tel que $\mathcal{O}_X^{\oplus i} \rightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus i+1}$ est donné par l'inclusion dans les i premiers facteurs. Si ∇ est donnée par une matrice des formes $\Omega = (\omega_{mn})_{m=1..i+1, n=1..i+1}$ alors la matrice des formes de la connexion ∇' sur $\mathcal{O}_X^{\oplus i}$ est donnée par $\Omega_1 = (\omega_{mn})_{m=1..i, n=1..i}$.

Soit $F_{\mathbb{T}_n}$ le Frobenius relatif sur $\mathbb{T}_n$ et $K = \ker F_{\mathbb{T}_n}$.

LEMME 2.13. *La catégorie des K -torseurs sur X_{fppf} est équivalente à la catégorie des couples $(\mathcal{E}, \alpha)$ où $\mathcal{E}$ est un drapeau complet sur $X^{(p)}$ et $\alpha : F^* \mathcal{E} \rightarrow D_n$ une trivialisation de $F^* \mathcal{E}$, et telle qu'un morphisme entre deux couples $(\mathcal{E}, \alpha)$ et $(\mathcal{E}', \alpha')$ est donné par un isomorphisme $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} F^* \mathcal{E} & \xrightarrow{\alpha} & D_n \\ \downarrow F^* \varphi & & \downarrow \text{Id} \\ F^*(\mathcal{E}') & \xrightarrow{\alpha'} & D_n \end{array} \quad (26)$$

DÉMONSTRATION. Cette caractérisation découle des lemmes 1.5, 1.3, de la caractérisation des $\mathbb{T}_n$ -torseurs dans le corollaire 2.2 et du fait que la projection pr_1 est un isomorphisme car k est parfait. $\square$

La proposition suivante est analogue à la proposition 2.3 pour les μ_p -torseurs.

PROPOSITION 2.6. *Les classes d'isomorphie de K -torseurs sur X_{fppf} sont en bijection avec les connexions intégrables de p -courbure nulle $(\nabla_i)_{i=1..n}$ sur D_n .*

DÉMONSTRATION. Soit $((\mathcal{E}'_i)_{i=1..n}, \alpha)$ un K -torseur donné via l'équivalence du lemme 2.13. Le drapeau $(F^* \mathcal{E}'_i)_{i=1..n}$ sur X est muni d'une connexion canonique par descente de Cartier, cette dernière détermine une connexion ∇ intégrable de p -courbure nulle sur D_n via l'isomorphisme α .

Soit maintenant ∇ une connexion intégrable de p -courbure nulle sur D_n . La connexion ∇ détermine un K -torseur via la descente de Cartier donné par le couple (D_n^∇, α) où D_n^∇ est donné par

$$\mathcal{O}_X^{\nabla_1} \subseteq (\mathcal{O}_X^{\oplus 2})^{\nabla_2} \subseteq \dots \subseteq (\mathcal{O}_X^{\oplus n})^{\nabla_n}$$

et α est donné par les isomorphismes canoniques $\alpha_i : F^*(\mathcal{O}_X^{\oplus i})^{\nabla_i} \rightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus i}$. $\square$

LEMME 2.14. *Les connexions intégrables de p -courbure nulle $(\nabla_i)_{i=1..n}$ sur D_n sont données par les connexions sur $\mathcal{O}_X^{\oplus n}$ dont la matrice des formes Ω est localement de la forme $M^{-1}dM$ où $M \in \mathbb{T}_n(X)$.*

DÉMONSTRATION. Analogie à la preuve de la proposition 2.2. $\square$

2.2.4. Le groupe $\mathbb{G}_a$. Soit X un schéma quelconque.

DÉFINITION 2.11.

- On note $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a}(X)$ le groupoïde dont les objets sont les suites exactes dans $\mathrm{QCoh}(\mathcal{O}_X)$ de la forme

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0,$$

qu'on notera simplement $\mathcal{E}^a$, et dont les morphismes $\mathcal{E}^a \rightarrow \mathcal{F}^a$ sont donnés par les isomorphismes de $\mathcal{O}_X$ -modules $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \mathrm{Id} & & \downarrow \varphi & & \downarrow \mathrm{Id} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X \longrightarrow 0. \end{array}$$

- On note $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a}$ la catégorie dont les objets sont les couples $(U, \mathcal{E}^a)$ où U est un schéma sur X , $\mathcal{E}^a$ est dans $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a}(U)$, et dont les morphismes sont donnés par des couples

$$(f, \varphi) : (U, \mathcal{E}^a) \rightarrow (V, \mathcal{F}^a)$$

où $f : U \rightarrow V$ est un morphisme sur X et $\varphi : f^* \mathcal{F}^a \rightarrow \mathcal{E}^a$ un morphisme dans $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a}(V)$

On considère $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a}$ comme une catégorie sur X_{fppf} via le foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathbb{G}_a} &\rightarrow X_{\mathrm{fppf}} \\ (U, \mathcal{E}^a) &\mapsto U. \end{aligned} \tag{27}$$

On note $\mathcal{O}_X^\dagger$ la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus 2} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0 \quad (28)$$

où le morphisme $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus 2}$ est donné par $x \mapsto (x, 0)$ et $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus 2}$ est donné par $(x, y) \mapsto y$. Si $f : U \rightarrow V$ est un morphisme de schémas et $\mathcal{E}^a \in \mathcal{C}_{\mathbb{G}_a}(V)$, on note $f^* \mathcal{E}^a$ la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_U \rightarrow f^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_U \rightarrow 0$$

dans $\mathrm{QCoh}(\mathcal{O}_U)$.

LEMME 2.15. *La catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a}$ est une catégorie fibrée en groupoïdes sur X_{fppf} .*

DÉMONSTRATION. La preuve est la même que celle du lemme 2.10. $\square$

LEMME 2.16. *Soit U un X -schéma et $\mathcal{U} = \{f_i : U_i \rightarrow U\}$ un recouvrement dans X_{fppf} . Le foncteur qui envoie un objet $\mathcal{E}^a \in \mathcal{C}_{\mathbb{G}_a}(U)$ vers la donnée de descente canonique associée relativement au recouvrement $\mathcal{U}$ est une équivalence de catégories.*

DÉMONSTRATION. Ce lemme découle de la descente fppf. Plus précisément une donnée de descente $(\mathcal{E}_i^a, \varphi_{ij}^a)$ dans $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a}$ relativement au recouvrement $\mathcal{U}$ est donnée de manière unique par une suite exacte de données de descente de faisceaux quasi-cohérents relativement au recouvrement $\mathcal{U}$ du type

$$0 \rightarrow (\mathcal{O}_{U_i}, \mathrm{can}) \rightarrow (\mathcal{E}_i, \varphi_{ij}) \rightarrow (\mathcal{O}_{U_i}, \mathrm{can}) \rightarrow 0$$

où $(\mathcal{O}_{U_i}, \mathrm{can})$ est la donnée de descente canonique associée à $\mathcal{O}_U$ relativement au recouvrement $\mathcal{U}$. Le résultat s'ensuit alors par le théorème 1.1. $\square$

LEMME 2.17. *La catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a}$ est une gerbe au-dessus de X_{fppf} .*

DÉMONSTRATION. Par le lemme [24, Tag 02ZF], le lemme 2.15 et le lemme 2.23 on voit que $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a}$ est un champ en groupoïdes sur X_{fppf} . L'existence de la suite exacte $\mathcal{O}_X^\dagger$ donnée dans (28) montre que la condition (1) dans la définition d'une gerbe est vérifiée. Soit maintenant $(U, \mathcal{E}^a)$ un objet dans $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a}$ donné par une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_U \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_U \rightarrow 0$$

dans $\mathrm{QCoh}(\mathcal{O}_U)$. La suite exacte ci-dessus est alors localement isomorphe à la suite exacte (28) pour tout recouvrement affine de X , ce qui montre que la condition (2) de la définition d'une gerbe est vérifiée. $\square$

LEMME 2.18. *Le faisceau de groupes $\mathbb{G}_a$ est isomorphe au faisceau de groupes $\underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{O}_X^\dagger)$ des automorphismes de $\mathcal{O}_X^\dagger$ sur X_{fppf} .*

DÉMONSTRATION. Soit T un X -schéma. Un automorphisme de $\mathcal{O}_T^\dagger$ dans $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a}(T)$ est donné par une matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{G}_a(T)$. Le morphisme $\mathbb{G}_a \rightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{O}_X^\dagger)$

qui envoie une section locale a vers $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de groupes sur X_{fppf} . $\square$

On déduit du lemme 1.8, du lemme 2.17 et du lemme 2.18 l'équivalence

LEMME 2.19. *La catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a}$ est équivalente à la catégorie $\mathbb{G}_a$ -Torseurs comme gerbe sur X_{fppf} .*

REMARQUE 2.5. On déduit en particulier du lemme précédent que pour un X -schéma U , on a une équivalence de catégories entre la catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a}(U)$ et la catégorie des $\mathbb{G}_a$ -Torseurs sur U_{fppf} .

Supposons maintenant X lisse sur un schéma $S = \text{Spec } k$ où k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$. On procède dans cette section de manière analogue aux cas précédents pour donner une caractérisation des α_p -torseurs sur X_{fppf} . Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow \alpha_p \rightarrow \mathbb{G}_a \xrightarrow{F} \mathbb{G}_a^{(p)} \rightarrow 0$$

et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F_X} & X \\ \text{\scriptsize } F \swarrow & & \downarrow \text{\scriptsize } \text{pr}_1 \\ X^{(p)} & \xrightarrow{\text{\scriptsize } \text{pr}_1} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{F_S} & S \end{array}$$

LEMME 2.20. *La catégorie des α_p -torseurs sur X_{fppf} est équivalente à la catégorie des couples $(\mathcal{E}^a, \alpha)$ où $\mathcal{E}^a \in \mathcal{C}_{\mathbb{G}_a}(X^{(p)})$ et α est une trivialisation de $F^* \mathcal{E}^a$ dans $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a}(X)$ telle qu'un morphisme entre deux couples $(\mathcal{E}^a, \alpha)$ et $(\mathcal{F}^a, \beta)$ est donné par un morphisme $\varphi : \mathcal{E}^a \rightarrow \mathcal{F}^a$ dans $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a}(X^{(p)})$ faisant commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} F^* \mathcal{E}^a & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{O}_X^\dagger \\ \downarrow F^* \varphi & & \downarrow \\ F^* \mathcal{F}^a & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{O}_X^\dagger \end{array} \quad (29)$$

DÉMONSTRATION. Cette caractérisation découle des lemmes 1.5, 1.3, de la caractérisation des $\mathbb{G}_a$ -torseurs dans le lemme 2.19 et du fait que la projection pr_1 est un isomorphisme car k est parfait. $\square$

Le groupe $H_{\text{fppf}}^1(X, \alpha_p)$ s'identifie canoniquement au groupe des classes d'isomorphie des α_p -torseurs sur X_{fppf} et ce dernier d'identifie au groupe des classes

d'isomorphie des couples $(\mathcal{E}^a, \alpha)$ données dans le lemme ci-dessus, on obtient donc l'identification suivante

$$H_{\text{fppf}}^1(X, \alpha_p) \simeq \{(\mathcal{E}^a, \alpha) \mid \alpha : F^* \mathcal{E}^a \rightarrow \mathcal{O}_X^\dagger \text{ est un isomorphisme}\} \quad (30)$$

où l'on note encore $(\mathcal{E}^a, \alpha)$ la classe d'isomorphie du couple $(\mathcal{E}^a, \alpha)$.

LEMME 2.21. *L'ensemble des classes d'isomorphie des α_p -torseurs sur X_{fppf} est en bijection avec l'ensemble des connexions intégrables de p -courbure nulle ∇ sur $\mathcal{O}_X^{\oplus 2}$ telles que les morphismes*

$$(\mathcal{O}_X, d) \rightarrow (\mathcal{O}_X^{\oplus 2}, \nabla) \rightarrow (\mathcal{O}_X, d)$$

sont horizontaux.

DÉMONSTRATION. Soit $(\mathcal{E}^a, \alpha)$ un couple représentant une classe d'isomorphie d'un α_p -torseur sur X_{fppf} . La suite exacte $\mathcal{E}^a$ donnée par

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X^{(p)}} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_{X^{(p)}} \rightarrow 0$$

dans $\text{QCoh}(\mathcal{O}_{X^{(p)}})$ induit via le théorème de descente de Cartier 2.1 une suite exacte

$$0 \rightarrow (\mathcal{O}_X, d) \rightarrow (F^* \mathcal{E}, \nabla') \rightarrow (\mathcal{O}_X, d) \rightarrow 0$$

dans $\text{MIC}(X/S)^{\psi=0}$. En utilisant la trivialisatoin α , on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow (\mathcal{O}_X, d) \rightarrow (\mathcal{O}_X^{\oplus 2}, \nabla) \rightarrow (\mathcal{O}_X, d) \rightarrow 0$$

dans $\text{MIC}(X/S)^{\psi=0}$. Par définition d'un isomorphisme entre deux couples $(\mathcal{E}^a, \alpha)$ et $(\mathcal{E}^b, \beta)$, la connexion ∇ sur $\mathcal{O}_X^{\oplus 2}$ ne dépend pas du choix du représentant de la classe d'isomorphie considérée. Dans le sens inverse, si ∇ est une connexion sur $\mathcal{O}_X^{\oplus 2}$ comme dans le lemme, alors par le théorème de descente de Cartier on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X^{(p)}} \rightarrow (\mathcal{O}_X^{\oplus 2})^\nabla \rightarrow \mathcal{O}_{X^{(p)}} \rightarrow 0$$

notée $(\mathcal{O}_X^\dagger)^\nabla$ dans $\text{QCoh}(\mathcal{O}_{X^{(p)}})$ telle que $F^*(\mathcal{O}_X^\dagger)^\nabla$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{O}_X^\dagger$ via un isomorphisme qu'on note α_∇ , on obtient donc un couple $((\mathcal{O}_X^\dagger)^\nabla, \alpha_\nabla)$ représentant une classe d'isomorphie d'un α_p -torseur. $\square$

Comme pour le cas μ_p , nous retrouvons maintenant le résultat [17, chap III, Proposition 4.14] pour le cas α_p , via une preuve utilisant la descente de Cartier.

PROPOSITION 2.7. *On a un isomorphisme de groupes*

$$H_{\text{fppf}}^1(X, \alpha_p) \simeq \{\omega \in \Gamma(X, \Omega_{X/S}^1) \mid d\omega = 0 \text{ et } C\omega = 0\}. \quad (31)$$

DÉMONSTRATION. A chaque connexion ∇ caractérisant une classe d'isomorphie de α_p -torseurs comme dans le lemme 2.21, on associe l'unique section localement

exacte $\omega \in \Gamma(X, \Omega_{X/S}^1)$ telle que $\nabla = \nabla_\omega$, où ∇_ω est la connexion dont la matrice des formes est donnée par

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La connexion ∇_ω est intégrable si et seulement si $d\omega = 0$. Il suffit maintenant de montrer que ∇_ω est de p -courbure nulle si et seulement $C\omega = 0$, ou de manière équivalente si et seulement si ω est localement exacte, en utilisant le lemme 2.18, et de manière analogue à la preuve de la proposition 2.2, ∇_ω est de p -courbure nulle si et seulement s'il existe localement des sections M de GL_2 de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

telles que $\Omega = M^{-1}dM$. Cette dernière condition est équivalente à la condition ω localement exacte. □

2.2.5. Le groupe $\mathbb{G}_m \ltimes \mathbb{G}_a$. Soit X un schéma quelconque.

DÉFINITION 2.12. • On note $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \ltimes \mathbb{G}_m}(X)$ le groupoïde dont les objets sont les suites exactes dans $\mathrm{QCoh}(\mathcal{O}_X)$ de la forme

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

où $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible, qu'on notera simplement $\mathcal{E}^\dagger$, et dont les morphismes $\varphi^\dagger = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathcal{E}^\dagger \rightarrow \mathcal{F}^\dagger$ sont donnés par des isomorphismes de $\mathcal{O}_X$ -modules $\varphi_1 : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ et $\varphi_2 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \mathrm{Id} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}' & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X \longrightarrow 0. \end{array}$$

Si $f : U \rightarrow V$ est un morphisme de schémas et $\mathcal{E}^\dagger \in \mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \ltimes \mathbb{G}_m}(V)$, on note $f^* \mathcal{E}^\dagger$ la suite exacte

$$0 \rightarrow f^* \mathcal{L} \rightarrow f^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_U \rightarrow 0$$

dans $\mathrm{QCoh}(\mathcal{O}_U)$.

- On note $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \ltimes \mathbb{G}_m}$ la catégorie dont les objets sont les couples $(U, \mathcal{E}^\dagger)$ où U est un schéma sur X , $\mathcal{E}^\dagger$ est dans $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \ltimes \mathbb{G}_m}(U)$, et dont les morphismes sont donnés par des couples

$$(f, \varphi^\dagger) : (U, \mathcal{E}^\dagger) \rightarrow (V, \mathcal{F}^\dagger)$$

où $f : U \rightarrow V$ est un morphisme sur X et $\varphi^\dagger : f^* \mathcal{F}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}^\dagger$ un morphisme dans $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m}(U)$.

On considère $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m}$ comme une catégorie sur X_{fppf} via le foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m} &\rightarrow X_{\text{fppf}} \\ (U, \mathcal{E}^\dagger) &\mapsto U. \end{aligned} \tag{32}$$

LEMME 2.22. *La catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m}$ est une catégorie fibrée en groupoïdes sur X_{fppf} .*

DÉMONSTRATION. La preuve est la même que celle du lemme 2.10. $\square$

LEMME 2.23. *Soit U un X -schéma et $\mathcal{U} = \{f_i : U_i \rightarrow U\}$ un recouvrement dans X_{fppf} . Le foncteur qui envoie un objet $\mathcal{E}^\dagger \in \mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m}(U)$ vers la donnée de descente canonique associée dans $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m}$ relativement au recouvrement $\mathcal{U}$ est une équivalence de catégories.*

DÉMONSTRATION. Une donnée de descente $(\mathcal{E}_i^\dagger, \varphi_{ij}^\dagger)$ dans $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m}$ relativement au recouvrement $\mathcal{U}$ est donnée de manière unique par une suite exacte de données de descente de faisceaux quasi-cohérents relativement au recouvrement $\mathcal{U}$ du type

$$0 \rightarrow (\mathcal{L}_i, \psi_{ij}) \rightarrow (\mathcal{E}_i, \varphi_{ij}) \rightarrow (\mathcal{O}_{U_i}, \text{can}) \rightarrow 0$$

où $\mathcal{L}_i$ est un faisceau inversible pour tout i et $(\mathcal{O}_{U_i}, \text{can})$ est la donnée de descente canonique associée à $\mathcal{O}_S$ relativement au recouvrement $\mathcal{U}$. Le résultat s'ensuit alors par le théorème 1.1 et le lemme 1.6. $\square$

LEMME 2.24. *La catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m}$ est une gerbe au-dessus de X_{fppf} .*

DÉMONSTRATION. Par le lemme [24, Tag 02ZF], le lemme 2.15 et le lemme 2.23 on voit que $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m}$ est un champ en groupoïdes sur X_{fppf} . L'existence de la suite exacte $\mathcal{O}_X^\dagger$ donnée dans (28) montre que la condition (1) dans la définition d'une gerbe est vérifiée. Soit maintenant $(U, \mathcal{E}^\dagger)$ un objet dans $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m}$ donné par une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_U \rightarrow 0$$

dans $\text{QCoh}(\mathcal{O}_U)$. La suite exacte ci-dessus est alors isomorphe à la suite exacte $\mathcal{O}_U^\dagger$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_U \rightarrow \mathcal{O}_U^{\oplus 2} \rightarrow \mathcal{O}_U \rightarrow 0,$$

sur un recouvrement affine trivialisant $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$. La condition (2) de la définition d'une gerbe est donc vérifiée. $\square$

LEMME 2.25. *Le faisceau de groupes $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ est isomorphe au faisceau de groupes $\underline{\text{Aut}}(\mathcal{O}_X^\dagger)$ des automorphismes de $\mathcal{O}_X^\dagger$ sur X_{fppf} .*

DÉMONSTRATION. Soit T un X -schéma. Soit $\varphi^\dagger$ un automorphisme de $\mathcal{O}_T^\dagger$ dans $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m}(T)$. Par définition $\varphi^\dagger$ est la donnée d'un couple d'automorphismes (φ_1, φ_2) faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_T & \longrightarrow & \mathcal{O}_T^{\oplus 2} & \longrightarrow & \mathcal{O}_T \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \text{Id} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_T & \longrightarrow & \mathcal{O}_T^{\oplus 2} & \longrightarrow & \mathcal{O}_T \longrightarrow 0. \end{array}$$

Soit $f \in \mathbb{G}_m(T)$ la section inversible induisant l'automorphisme φ_1 et $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ la section globale de $\text{GL}_2(\mathcal{O}_T)$ induisant l'automorphisme φ_2 . La commutativité du premier carré du diagramme ci-dessus montre que $a_{11} = f$ et $a_{21} = 0$. La commutativité du second carré montre que $a_{22} = 1$. L'automorphisme $\varphi^\dagger$ est donc déterminé par une matrice $\begin{pmatrix} f & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui induit l'automorphisme φ_2 tel que f est la section inversible induisant l'automorphisme φ_1 . Le morphisme $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m \rightarrow \underline{\text{Aut}}(\mathcal{O}_X^\dagger)$ qui envoie une section locale (f, a) vers $\begin{pmatrix} f & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de faisceaux de groupes sur X_{fppf} . $\square$

On déduit du lemme 1.8, du lemme 2.24 et du lemme 2.25 l'équivalence

LEMME 2.26. *La catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m}$ est équivalente à la catégorie $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ -Torseurs comme gerbe sur X_{fppf} .*

REMARQUE 2.6. On déduit en particulier du lemme précédent que pour un X -schéma U , on a une équivalence de catégories entre la catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m}(U)$ et la catégorie des $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ -Torseurs sur le site fppf du X -schéma U .

Supposons X lisse sur $S = \text{Spec } k$ où k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$. On procède dans cette section de manière analogue au cas des μ_p -torseurs et des α_p -torseurs pour donner une caractérisation des $\mu_p \rtimes \alpha_p$ -torseurs sur X_{fppf} en termes de formes différentielles. Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow \mu_p \rtimes \alpha_p \rightarrow \mathbb{G}_m \rtimes \mathbb{G}_a \xrightarrow{F} (\mathbb{G}_m \rtimes \mathbb{G}_a)^{(p)} \rightarrow 0$$

et le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 X & & \xrightarrow{F_X} & & X \\
 & \searrow F & & \searrow \text{pr}_1 & \\
 & & X^{(p)} & \xrightarrow{\text{pr}_1} & X \\
 & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & S & \xrightarrow{F_S} & S.
 \end{array}$$

LEMME 2.27. *La catégorie des $\mu_p \ltimes \alpha_p$ -torseurs sur X_{fppf} est équivalente à la catégorie des couples $(\mathcal{E}^\dagger, \alpha)$ où $\mathcal{E}^\dagger \in \mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \ltimes \mathbb{G}_m}(X^{(p)})$ et $\alpha : F^* \mathcal{E}^\dagger \rightarrow \mathcal{O}_X^\dagger$ une trivialisation de $F^* \mathcal{E}^\dagger$ dans $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \ltimes \mathbb{G}_m}(X)$ et telle qu'un morphisme entre deux couples $(\mathcal{E}^\dagger, \alpha)$ et $(\mathcal{F}^\dagger, \beta)$ est donné par un morphisme $\varphi : \mathcal{E}^\dagger \rightarrow \mathcal{F}^\dagger$ dans $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \ltimes \mathbb{G}_m}(X^{(p)})$ faisant commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
 F^* \mathcal{E}^\dagger & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{O}_X^\dagger \\
 \downarrow F^* \varphi & & \downarrow \text{Id} \\
 F^* \mathcal{F}^\dagger & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{O}_X^\dagger
 \end{array} \tag{33}$$

dans $\mathcal{C}_{\mathbb{G}_a \ltimes \mathbb{G}_m}(X^{(p)})$.

DÉMONSTRATION. Cette caractérisation découle des lemmes 1.5, 1.3, de la caractérisation des $\mathbb{G}_m \ltimes \mathbb{G}_a$ -torseurs dans le lemme 2.26 et du fait que la projection pr_1 est un isomorphisme. $\square$

PROPOSITION 2.8. *Les classes d'isomorphie de $\mu_p \ltimes \alpha_p$ -torseurs sur X_{fppf} sont en bijection avec l'ensemble des connexions intégrables de p -courbure nulle ∇ sur $\mathcal{O}_X^{\oplus 2}$ dont la matrice des formes est du type*

$$\begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

DÉMONSTRATION. Les classes d'isomorphie des $\mu_p \ltimes \alpha_p$ -torseurs sur X_{fppf} s'identifient aux classes d'isomorphie des couples $(\mathcal{E}^\dagger, \alpha)$ données dans le lemme 2.27. Soit $(\mathcal{E}^\dagger, \alpha)$ un tel couple où $\mathcal{E}^\dagger$ est donné par

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_{X^{(p)}} \rightarrow 0.$$

Par l'équivalence de catégories du théorème de descente de Cartier 2.1, la suite exacte $\mathcal{E}^\dagger$ correspond à une suite exacte

$$0 \rightarrow (F^* \mathcal{L}, \nabla'_1) \rightarrow (F^* \mathcal{E}, \nabla'_2) \rightarrow (\mathcal{O}_X, d) \rightarrow 0$$

dans $\mathrm{MIC}(X/S)^{\psi=0}$. La trivialisaton $\alpha : F^* \mathcal{E}^\dagger \rightarrow \mathcal{O}_X^\dagger$ permet de transférer ces connexions à $\mathcal{O}_X^\dagger$ et d'obtenir une suite exacte

$$0 \rightarrow (\mathcal{O}_X, \nabla_1) \rightarrow (\mathcal{O}_X^{\oplus 2}, \nabla_2) \rightarrow (\mathcal{O}_X, d) \rightarrow 0 \quad (34)$$

dans $\mathrm{MIC}(X/S)^{\psi=0}$. La connexion ∇_2 est donnée par une matrice des formes

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

telle que $\nabla_1 = d + \omega$. Par le théorème de descente de Cartier 2.1 les connexions ∇_1 et ∇_2 sont intégrables de p -courbure nulle. La connexion recherchée sur $\mathcal{O}_X^{\oplus 2}$ est ∇_2 .

Soit maintenant ∇ une connexion intégrable de p -courbure nulle sur $\mathcal{O}_X^{\oplus 2}$ dont la matrice des formes est donnée par

$$\begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le noyau du morphisme $(\mathcal{O}_X^{\oplus 2}, \nabla) \rightarrow (\mathcal{O}_X, d)$ dans $\mathrm{MIC}(X/S)^{\psi=0}$ est donné par $(\mathcal{O}_X, \nabla')$ où $\nabla' = d + \omega$. On obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow (\mathcal{O}_X, \nabla') \rightarrow (\mathcal{O}_X^{\oplus 2}, \nabla) \rightarrow (\mathcal{O}_X, d) \rightarrow 0,$$

et par descente de Cartier on a une suite exacte $\mathcal{E}^\dagger$ dans $\mathrm{QCoh}(\mathcal{O}_{X(p)})$

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_{X(p)} \rightarrow 0. \quad (35)$$

Notons α l'isomorphisme naturel $F^* \mathcal{E}^\dagger \rightarrow \mathcal{O}_X^\dagger$ donné par descente de Cartier. Le couple $(\mathcal{E}^\dagger, \alpha)$ est alors le $\mu_p \ltimes \alpha_p$ -torseur correspondant à ∇ . $\square$

REMARQUE 2.7. Nous reviendrons à la fin du chapitre 4 sur cet exemple, où nous donnerons une description plus explicite des connexions intégrables de p -courbure nulle données par des matrices des formes du type

$$\begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sur $\mathcal{O}_X^{\oplus 2}$.

Chapitre 3

Connexions sur les toseurs

On note dans ce chapitre X un schéma lisse sur $S = \text{Spec } k$ où k est un corps.

3.1. Algébroïdes de Lie

DÉFINITION 3.1 ([3, 1.2]). On appelle algébroïde de Lie sur X la donnée d'un faisceau quasi-cohérent $\mathcal{L}$ sur X , d'un morphisme $\mathcal{O}_X$ -linéaire $\sigma : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{T}_{X/S}$ appelé ancre et d'un crochet k -linéaire $[\cdot] : \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) $(\mathcal{L}, [\cdot])$ est un faisceau de $\mathcal{O}_S$ -algèbres de Lie et σ est compatible avec les crochets.
- (2) pour toutes sections l_1, l_2 de $\mathcal{L}$ et f section de $\mathcal{O}_X$ on a :

$$[l_1, fl_2] = f[l_1, l_2] + \sigma(l_1)(f)l_2.$$

On note $\mathcal{L}^{(0)}$ le faisceau de $\mathcal{O}_X$ -algèbres de Lie donné par $\ker \sigma$.

Nous fixons pour le reste de cette section un algébroïde de Lie $(\mathcal{L}, \sigma, [\cdot])$ sur X .

DÉFINITION 3.2. On appelle connexion sur $(\mathcal{L}, \sigma, [\cdot])$ toute section $\mathcal{O}_X$ -linéaire $s : \mathcal{T}_{X/S} \rightarrow \mathcal{L}$ de l'ancre $\sigma : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{T}_{X/S}$.

LEMME 3.1. Soit s une connexion sur $(\mathcal{L}, \sigma, [\cdot])$. Le morphisme :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{X/S} \times \mathcal{T}_{X/S} &\rightarrow \mathcal{L}^{(0)} \\ (D, D') &\mapsto [s(D), s(D')] - s([D, D']) \end{aligned} \tag{36}$$

est $\mathcal{O}_X$ -bilinéaire et antisymétrique.

DÉMONSTRATION. La $\mathcal{O}_X$ -bilinéarité découle d'un calcul direct et l'antisymétrie est claire par antisymétrie du crochet de Lie. $\square$

DÉFINITION 3.3. On appelle courbure d'une connexion s sur $(\mathcal{L}, \sigma, [\cdot])$ le morphisme :

$$\begin{aligned} K(s) : \bigwedge^2 \mathcal{T}_{X/S} &\rightarrow \mathcal{L}^{(0)} \\ D \wedge D' &\mapsto [s(D), s(D')] - s([D, D']) \end{aligned} \tag{37}$$

induit via le lemme 3.1. Par dualité la courbure peut être vue comme une section globale du faisceau $\Omega_{X/S}^2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{(0)}$.

PROPOSITION 3.1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur k telle qu'il existe un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$ -algèbres de Lie $\mathcal{L}^{(0)} \simeq \mathcal{O}_X \otimes_k \mathfrak{g}$. Soit $s : \mathcal{T}_{X/S} \rightarrow \mathcal{L}$ une connexion telle que pour tout élément g de $\mathfrak{g}$ et toute section D de $\mathcal{T}_{X/S}$ on a $[s(D), 1 \otimes g] = 0$. Soit $\Omega \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{T}_{X/S}, \mathcal{L}^{(0)})$. Si $\text{car } k \neq 2$ on a alors :

$$K(s + \Omega) = K(s) + d\Omega + \frac{1}{2}[\cdot]\Omega \wedge \Omega \quad (38)$$

dans $H^0(X, \Omega_{X/S}^2 \otimes_k \mathfrak{g})$, où l'on considère Ω dans $H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes_k \mathfrak{g})$.

DÉMONSTRATION. Soit $(g_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de $\mathfrak{g}$. Notons $\tilde{\Omega}$ l'élément de $H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes_k \mathfrak{g})$ correspondant à Ω . Il existe alors une famille de 1-formes ω_i sur X telles que $\tilde{\Omega} = \sum_{i=1}^n \omega_i \otimes g_i$. Pour toute section D de $\mathcal{T}_{X/S}$, nous notons $\tilde{D}$ la section de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/S}^1, \mathcal{O}_X)$ correspondante. Le morphisme $\Omega : \mathcal{T}_{X/S} \rightarrow \mathcal{O}_X \otimes_k \mathfrak{g}$ est alors donné par $D \mapsto \sum_{i=1}^n \tilde{D}(\omega_i) \otimes g_i$. On a alors pour toutes sections D et D' de $\mathcal{T}_{X/S}$:

$$\begin{aligned} K(s + \Omega)(D \wedge D') &= [(s + \Omega)(D), (s + \Omega)(D')] - (s + \Omega)([D, D']) \\ &= \left[s(D) + \sum_{i=1}^n \tilde{D}(\omega_i) \otimes g_i, s(D') + \sum_{i=1}^n \tilde{D}'(\omega_i) \otimes g_i \right] \\ &\quad - s([D, D']) - \sum_{i=1}^n [\widetilde{[D, D']}](\omega_i) \otimes g_i. \end{aligned} \quad (39)$$

D'après la condition (2) de la définition 3.1 on a pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} [s(D), \tilde{D}'(\omega_i) \otimes g_i] &= \tilde{D}'(\omega_i)[s(D), 1 \otimes g_i] + \sigma(s(D))(\tilde{D}'(\omega_i)) \otimes g_i \\ &= D(\tilde{D}'(\omega_i)) \otimes g_i \end{aligned}$$

car s est une section de σ et d'après les hypothèses de la proposition pour toutes sections g de $\mathfrak{g}$ et D de $\mathcal{T}_{X/S}$ on a $[s(D), 1 \otimes g] = 0$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \left[s(D) + \sum_{i=1}^n \tilde{D}(\omega_i) \otimes g_i, s(D') + \sum_{i=1}^n \tilde{D}'(\omega_j) \otimes g_j \right] &= [s(D), s(D')] + \sum_{i=1}^n D(\tilde{D}'(\omega_i)) \otimes g_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^n D'(\tilde{D}(\omega_i)) \otimes g_i \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \tilde{D}(\omega_i) \tilde{D}'(\omega_j) \otimes [g_i, g_j]. \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation (39) on obtient :

$$\begin{aligned} K(s + \Omega)(D \wedge D') &= K(s)(D \wedge D') + \sum_{i=1}^n D(\tilde{D}'(\omega_i)) \otimes g_i - \sum_{i=1}^n D'(\tilde{D}(\omega_i)) \otimes g_i \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \tilde{D}(\omega_i) \tilde{D}'(\omega_j) \otimes [g_i, g_j] - \sum_{i=1}^n [\widetilde{D, D'}](\omega_i) \otimes g_i. \end{aligned} \quad (40)$$

Comme $\tilde{\Omega} = \sum_{i=1}^n \omega_i \otimes g_i$ dans $H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes_k \mathfrak{g})$, on a :

$$[\cdot] \tilde{\Omega} \wedge \tilde{\Omega} = \sum_{i,j=1}^n \omega_i \wedge \omega_j \otimes [g_i, g_j]$$

et

$$d \tilde{\Omega} = \sum_{i=1}^n d \omega_i \otimes g_i$$

dans $H^0(X, \Omega_{X/S}^2 \otimes_k \mathfrak{g})$. Ainsi en considérant $([\cdot] \tilde{\Omega} \wedge \tilde{\Omega})$ et $d \tilde{\Omega}$ dans $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\bigwedge^2 \mathcal{T}_{X/S}, \mathcal{O}_X \otimes_k \mathfrak{g})$ on a :

$$\begin{aligned} ([\cdot] \tilde{\Omega} \wedge \tilde{\Omega})(D \wedge D') &= \sum_{i,j=1}^n (\widetilde{D \wedge D'}) (\omega_i \wedge \omega_j) \otimes [g_i, g_j] \\ &= \sum_{i,j=1}^n (\tilde{D}(\omega_i) \tilde{D}'(\omega_j) - \tilde{D}(\omega_j) \tilde{D}'(\omega_i)) \otimes [g_i, g_j] \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^n \tilde{D}(\omega_i) \tilde{D}'(\omega_j) \otimes [g_i, g_j] \end{aligned} \quad (41)$$

et

$$\begin{aligned} (d \tilde{\Omega})(D \wedge D') &= \sum_{i=1}^n (\widetilde{D \wedge D'}) (d \omega_i) \otimes g_i \\ &= \sum_{i=1}^n D(\tilde{D}'(\omega_i)) - D'(\tilde{D}(\omega_i)) - [\widetilde{D, D'}](\omega_i) \otimes g_i. \end{aligned} \quad (42)$$

Les équations (40), (41) et (42) donnent le résultat de la proposition. $\square$

Supposons pour la suite de cette section car $k = p > 0$. On rappelle la définition d'algèbre de Lie restreinte sur k :

DÉFINITION 3.4 ([13, Chapter V §7]). *Une algèbre de Lie restreinte $(\mathfrak{g}, (\cdot)^{[p]})$ sur k est la donnée d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur k et d'un morphisme $(\cdot)^{[p]} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, appelé puissance p -ième, tels que pour tout $a \in k$ et $x, y \in \mathfrak{g}$ on a :*

- (1) $(ax)^{[p]} = a^p x^{[p]}$
- (2) $\text{ad}_{x^{[p]}} = \text{ad}_x^p$
- (3) $(x + y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x, y)$

où pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $\text{ad}_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ est donnée par $y \mapsto [x, y]$ et les $s_i(x, y)$ sont tels que $\text{ad}_{\lambda x + y}^{p-1}(x) = \sum_{i=1}^{p-1} i s_i(x, y) \lambda^{i-1}$ où λ est une variable indéterminée.

REMARQUE 3.1. Les $s_i(x, y)$ sont appelés polynômes de Lie universels en x et y , voir [13, Chapter V §7].

EXEMPLE 3.1. Soit A une k -algèbre associative. Munie du crochet donné par $[a, b] = ab - ba$ et du morphisme $(\cdot)^{[p]} : A \rightarrow A$ donné par $a \mapsto a^p$ l'algèbre A est une algèbre de Lie restreinte. En particulier l'algèbre des dérivations de A est aussi une algèbre de Lie restreinte où le morphisme puissance p -ième est donné par $D \mapsto D^p$, on a donc pour toutes dérivations D et D' de A :

$$(D + D')^p = D^p + D'^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(D, D'), \quad (43)$$

voir [13, Chapter V §7].

DÉFINITION 3.5 ([15, Definition 4.2.]). Une algébroïde de Lie restreint $(\mathcal{L}, \sigma, [\cdot], (\cdot)^{[p]})$ sur X est la donnée d'un algébroïde de Lie $(\mathcal{L}, \sigma, [\cdot])$ sur X et d'un morphisme $(\cdot)^{[p]} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, appelé puissance p -ième, vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) $(\mathcal{L}, (\cdot)^{[p]})$ est un faisceau de $\mathcal{O}_S$ -algèbres de Lie restreintes et σ commute avec $(\cdot)^p$,
- (2) pour toutes sections f de $\mathcal{O}_X$ et l de $\mathcal{L}$ on a :

$$(fl)^{[p]} = f^p l^{[p]} + \sigma(fl)^{p-1}(f)l.$$

Fixons un algébroïde de Lie restreint $(\mathcal{L}, \sigma, [\cdot], (\cdot)^{[p]})$ sur X .

DÉFINITION 3.6. Une connexion sur $(\mathcal{L}, \sigma, [\cdot], (\cdot)^{[p]})$ est la donnée d'une connexion sur l'algébroïde de Lie $(\mathcal{L}, \sigma, [\cdot])$. Soit s une telle connexion. On appelle p -courbure de la connexion s le morphisme ψ_s donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{X/S} &\rightarrow \mathcal{L}^{(0)} \\ D &\mapsto s(D)^{[p]} - s(D^p). \end{aligned} \quad (44)$$

PROPOSITION 3.2. Soit s une connexion intégrable sur $(\mathcal{L}, \sigma, [\cdot], (\cdot)^{[p]})$. La p -courbure $\psi_s : \mathcal{T}_{X/S} \rightarrow \mathcal{L}^{(0)}$ est un morphisme p -linéaire i.e. ψ_s est un morphisme additif tel que pour toute section f de $\mathcal{O}_X$ on a :

$$\psi_s(fD) = f^p \psi_s(D).$$

DÉMONSTRATION. Soient D et D' deux sections de $\mathcal{T}_{X/S}$. Comme $(\mathcal{L}, (\cdot)^{[p]})$ est un faisceau d'algèbres de Lie restreintes on a :

$$s(D + D')^{[p]} = (s(D) + s(D'))^{[p]} = s(D)^{[p]} + s(D')^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(s(D), s(D')). \quad (45)$$

En appliquant maintenant s à l'équation (43) on obtient :

$$s((D + D')^p) = s(D^p) + s(D'^p) + \sum_{i=1}^{p-1} s(s_i(D, D')). \quad (46)$$

Comme la connexion s est intégrable, elle commute aux crochets. Par construction des polynômes de Lie universels, on a pour tout $i = 1, \dots, p-1$, $s(s_i(D, D')) = s_i(s(D), s(D'))$. D'après l'équation (46) on obtient :

$$s((D + D')^p) = s(D^p) + s(D'^p) + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(s(D), s(D')). \quad (47)$$

En soustrayant l'équation (47) à l'équation (45) on obtient l'additivité de ψ_s .

Soit maintenant f une section de $\mathcal{O}_X$ et D une section de $\mathcal{T}_{X/S}$. D'après la condition (2) de la définition 3.5 on a :

$$\begin{aligned} s(fD)^{[p]} &= (fs(D))^{[p]} = f^p s(D)^{[p]} + \sigma(fs(D))^{p-1}(f)s(D) \\ &= f^p s(D)^{[p]} + (fD)^{p-1}(f)s(D). \end{aligned} \quad (48)$$

D'autre part d'après [14, (5.4.)] on a :

$$(fD)^p = f^p D^p + (fD)^{p-1}(f)D. \quad (49)$$

Ainsi en appliquant s à l'équation (49) on obtient :

$$s((fD)^p) = f^p s(D^p) + (fD)^{p-1}(f)s(D). \quad (50)$$

En soustrayant l'équation (50) à l'équation (48) on obtient la p -homogénéité de ψ_s . $\square$

3.2. Suite exacte d'Atiyah

Fixons pour le reste du chapitre G un schéma en groupes lisse affine sur k , et $p : P \rightarrow X$ un G -torseur sur X_{fppf} . On note q le morphisme $P \rightarrow S$.

On parlera dans la suite simplement de G -torseurs sans préciser la topologie pour les G -torseurs sur le site fppf.

Pour toute représentation linéaire finie V de G , le faisceau quasi-cohérent q^*V est muni d'une structure naturelle de G -faisceau de P sur X , voir [19, § 2.2].

DÉFINITION 3.7. Soit $\mathrm{Lie}(G)$ la représentation adjointe de G . On note $\mathrm{ad}(P)$ le faisceau localement libre sur X obtenu par descente du G -faisceau $q^* \mathrm{Lie}(G)$.

LEMME 3.2. Les modules des différentielles $\Omega_{P/S}^1$ et $\Omega_{P/X}^1$ sont munis d'une structure de G -faisceau rendant la suite exacte :

$$0 \rightarrow p^* \Omega_{X/S}^1 \rightarrow \Omega_{P/S}^1 \rightarrow \Omega_{P/X}^1 \rightarrow 0 \quad (51)$$

une suite exacte de G -faisceaux.

DÉMONSTRATION. Comme G est lisse, et que la propriété lisse est fppf locale, $P \rightarrow X$ est lisse. L'exactitude de la suite (51) découle alors de [24, Tag 02K4]. Soit $\alpha : G_X \times_X P \rightarrow G_X \times_X P$ l'isomorphisme donné par $(g, x) \rightarrow (g, gx)$. On considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} G_X \times_X P & \xrightarrow{\alpha} & G_X \times_X P & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & P \\ & & \downarrow \mathrm{pr}_1 & & \downarrow \\ & & G_X & \longrightarrow & X \end{array}$$

On a alors :

$$a^* \Omega_{P/X}^1 \simeq \alpha^* \mathrm{pr}_2^* \Omega_{P/X}^1 \simeq \alpha^* \Omega_{G_X \times_X P/G}^1 \simeq \Omega_{G_X \times_X P/G}^1 \simeq \mathrm{pr}_2^* \Omega_{P/X}^1.$$

De la même manière on obtient un isomorphisme $a^* \Omega_{P/S}^1 \simeq \mathrm{pr}_2^* \Omega_{P/S}^1$ sur $G \times_S P$. $\square$

LEMME 3.3. Le G -faisceau $q^* \mathrm{Lie}(G)^\vee$ est isomorphe au G -faisceau $\Omega_{P/X}^1$.

DÉMONSTRATION. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} G & \xleftarrow{\mathrm{pr}_1} & G \times_S P & \xrightarrow{a \times \mathrm{pr}_2} & P \times_S P & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & P \\ e \uparrow \downarrow & & e' \uparrow \downarrow & & \Delta \uparrow \downarrow & & \downarrow \\ S & \xleftarrow{q} & P & \xlongequal{\quad} & P & \longrightarrow & X. \end{array}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} q^* \mathrm{Lie}(G)^\vee &\simeq q^* e^* \Omega_{G/S}^1 \\ &\simeq e'^* \Omega_{G \times_S P/P}^1 \\ &\simeq \Delta^* \Omega_{P \times_S P/P}^1 \\ &\simeq \Omega_{P/X}^1. \end{aligned}$$

$\square$

LEMME 3.4 ([2, Theorem 1]). On a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathrm{ad}(P) \rightarrow p_*^G \mathcal{T}_{P/S} \rightarrow \mathcal{T}_X \rightarrow 0. \quad (52)$$

DÉMONSTRATION. Cette suite exacte est obtenue en utilisant l'isomorphisme du lemme 3.3, puis en passant au dual la suite exacte obtenue par descente de G -faisceaux de la suite exacte (51). $\square$

DÉFINITION 3.8. On appelle suite exacte d'Atiyah associée au G -torseur P sur X la suite exacte du lemme 3.4.

3.3. L'algèbre de Lie définie par la suite exacte d'Atiyah

DÉFINITION 3.9. Une section $D : \mathcal{O}_P \rightarrow \mathcal{O}_P$ de $\mathcal{T}_{P/S}$ est dite G -invariante si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_P & \xrightarrow{D} & \mathcal{O}_P \\ \downarrow a_{\#} & & \downarrow a_{\#} \\ a_*(\mathcal{O}_{G \times_S P}) & \xrightarrow{a_*(D \otimes \text{Id})} & a_*(\mathcal{O}_{G \times_S P}). \end{array}$$

LEMME 3.5. Une section $D : \mathcal{O}_P \rightarrow \mathcal{O}_P$ de $\mathcal{T}_{P/S}$ est G -invariante si et seulement si le morphisme $\mathcal{O}_P$ -linéaire correspondant $\tilde{D} : \Omega_{P/S}^1 \rightarrow \mathcal{O}_P$ est G -équivalent i.e. si et seulement si D est une section de $p_*^G \mathcal{T}_{P/S}$.

DÉMONSTRATION. Par adjonction $\tilde{D}$ est équivalente si et seulement si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{P/S}^1 & \xrightarrow{\tilde{D}} & \mathcal{O}_P \\ \downarrow & & \downarrow \\ a_* \text{pr}_2^* \Omega_{P/S}^1 & \xrightarrow{a_* \text{pr}_2^* \tilde{D}} & a_* \text{pr}_2^* \mathcal{O}_P \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont donnés par les structures de G -faisceaux de $\Omega_{P/S}^1$ et $\mathcal{O}_P$. Comme les morphismes sont $\mathcal{O}_P$ -linéaires et $\Omega_{P/S}^1$ est engendré Zariski-localement par l'image de $d : \mathcal{O}_P \rightarrow \Omega_{X/S}^1$ il suffit de vérifier la commutativité sur l'image de d , mais cela découle de la définition 3.9. $\square$

LEMME 3.6. Notons σ le morphisme $p_*^G \mathcal{T}_{P/S} \rightarrow \mathcal{T}_{X/S}$ donné par la suite exacte d'Atiyah associée au toseur P . Soit D une section de $p_*^G \mathcal{T}_{P/S}$. Il existe alors une unique section $p_*^G D$ de $\mathcal{T}_{X/S}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} p_* \mathcal{O}_P & \xrightarrow{p_* D} & p_* \mathcal{O}_P \\ p_{\#} \uparrow & & p_{\#} \uparrow \\ \mathcal{O}_X & \xrightarrow{p_*^G D} & \mathcal{O}_X, \end{array}$$

le morphisme $\sigma : p_*^G \mathcal{T}_{P/S} \rightarrow \mathcal{T}_{X/S}$ est donné par $D \mapsto p_*^G D$.

DÉMONSTRATION. Ce lemme découle des définitions et du lemme 3.5. $\square$

LEMME 3.7. *Le faisceau $p_*^G \mathcal{T}_{P/S}$ est un faisceau d'algèbres de Lie tel que pour toutes sections D_1, D_2 dans $p_*^G \mathcal{T}_{P/S}$ la section $[D_1, D_2]$ est définie via le crochet de Lie du faisceau $\mathcal{T}_{P/S}$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier que si D_1 et D_2 sont des sections de $p_*^G \mathcal{T}_{P/S}$ alors $[D_1, D_2]$ est aussi une section de $p_*^G \mathcal{T}_{P/S}$, or cela découle de la définition 3.9 et du lemme 3.5. $\square$

PROPOSITION 3.3. *Le faisceau $p_*^G \mathcal{T}_{P/S}$ muni du morphisme $\sigma : p_*^G \mathcal{T}_{P/S} \rightarrow \mathcal{T}_{X/S}$ et du crochet de Lie défini dans le lemme 3.7 est un algébroïde de Lie sur X .*

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 3.7 $p_*^G \mathcal{T}_{P/S}$ est un faisceau d'algèbres de Lie. La compatibilité du morphisme $\sigma : p_*^G \mathcal{T}_{P/S} \rightarrow \mathcal{T}_{X/S}$ avec les structures d'algèbres de Lie découle du lemme 3.6. Soit maintenant f une section de $\mathcal{O}_X$ et D_1 et D_2 deux sections de $p_*^G \mathcal{T}_{P/S}$, notons f' l'image de f dans $p_* \mathcal{O}_P$ via $p_\#$, on a alors :

$$[D_1, fD_2] = [D_1, f'D_2] \quad (53)$$

$$= f'[D_1, D_2] + D_1(f')D_2 \quad (54)$$

or d'après le lemme 3.6 on a $D_1(f') = p_\#(p_*^G D_1(f))$ où l'on note $p_\#(p_*^G D_1(f))$ l'image de $p_*^G D_1(f)$ via le morphisme structurel $p_\#$, ainsi :

$$[D_1, fD_2] = f'[D_1, D_2] + p_\#(p_*^G D_1(f))D_2 \quad (55)$$

$$= f[D_1, D_2] + \sigma(D_1)(f)D_2. \quad (56)$$

$\square$

LEMME 3.8. *Supposons car $k = p > 0$. Le faisceau $p_*^G \mathcal{T}_{P/S}$ est muni d'un morphisme puissance p -ième obtenu via le morphisme puissance p -ième $(\cdot)^p : \mathcal{T}_{P/S} \rightarrow \mathcal{T}_{P/S}$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que pour toute section D de $p_*^G \mathcal{T}_{P/S}$ la section D^p considérée dans $\mathcal{T}_{P/S}$ est invariante, or cela découle de la définition 3.9 et du lemme 3.5. $\square$

REMARQUE 3.2. Supposons car $k = p > 0$. D'après l'exemple 3.1 le faisceau $\mathcal{T}_{P/S}$ est un faisceau d'algèbres de Lie restreintes.

PROPOSITION 3.4. *Si car $k = p > 0$ alors $(p_*^G \mathcal{T}_{P/S}, \sigma, [\cdot], (\cdot)^p)$ est un algébroïde de Lie restreint sur X où $(\cdot)^p$ est le morphisme puissance p -ième obtenu via le lemme 3.8.*

DÉMONSTRATION. Le faisceau $p_*^G T_{P/S}$ muni du crochet de Lie et du morphisme $(\cdot)^p$ est un faisceau d'algèbres de Lie restreintes. En effet cela découle du lemme 3.8 et de la remarque 3.2. Soient maintenant f une section de $\mathcal{O}_X$ et D une section de $p_*^G T_{P/S}$, on a alors :

$$\begin{aligned} (fD)^p &= (f'D)^p \\ &= f'^p D^p + (f'D)^{p-1} (f')D \\ &= f^p D^p + (fp_*^G D)^{p-1} (f)D \\ &= f^p D^p + \sigma(fD)^{p-1} (f)D. \end{aligned}$$

où f' est l'image de f dans $p_* \mathcal{O}_P$ via $p_\#$ et la deuxième égalité est un cas particulier du lemme plus général [11, Lemma 1]. $\square$

DÉFINITION 3.10. Une connexion sur le G -torseur $P \rightarrow X$ est une connexion sur l'algèbroïde $(p_*^G \mathcal{T}_{P/S}, \sigma, [\cdot])$ i.e. une section :

$$s : \mathcal{T}_X \rightarrow p_*^G \mathcal{T}_{P/S} \quad (57)$$

de la suite exacte d'Atiyah associée à P . On note $\text{At}(G, X)$ la catégorie des G -torseurs avec connexion telle qu'un morphisme entre deux couples (P, s) et (P', s') est donné par un morphisme de G -torseurs $P \rightarrow P'$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_{X/S} & \xrightarrow{s} & p_*^G \mathcal{T}_{P/S} \\ & \searrow s' & \downarrow \\ & & p_*^G \mathcal{T}_{P'/S}. \end{array} \quad (58)$$

Toute section $\sigma : X \rightarrow P$ définit une connexion s_σ sur P . En effet, σ induit un morphisme $\sigma^* \Omega_{P/S}^1 \simeq p_*^G \Omega_{P/S}^1 \rightarrow \Omega_{X/S}^1$, puis une section $s_\sigma : \mathcal{T}_{X/S} \rightarrow p_*^G \mathcal{T}_{P/S}$. En particulier, la section triviale e du toseur trivial définit une connexion s_e sur $G \times_S X$. Si g est un élément de $G(X)$, la section s_g est l'unique section telle que le morphisme $R_g : (G \times_S X, s_e) \rightarrow (G \times_S X, s_g)$ est un morphisme dans $\text{At}(G, X)$.

DÉFINITION 3.11. Pour tout élément g de $G(X)$ notons Ω_g la section de $H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes_k \text{Lie}(G))$ donnée par $s_{g^{-1}} - s_e$. On définit l'application $d \log$ par :

$$d \log : G(X) \rightarrow H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes_k \text{Lie}(G)) \quad (59)$$

$$g \mapsto \Omega_g \quad (60)$$

LEMME 3.9. Soit $\Omega \in H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes_k \text{Lie}(G))$. Il existe alors $g \in G(X)$ tel que $\Omega = \Omega_g$ si et seulement si $(G \times X, s_e + \Omega) \simeq (G \times X, s_e)$.

DÉMONSTRATION. Soit $g \in G(X)$ tel que $\Omega = \Omega_g$. On a un isomorphisme $R_g : (G \times_S X, s_{g^{-1}}) \rightarrow (G \times_S X, s_e)$, et $s_e + \Omega = s_e + s_{g^{-1}} - s_e = s_{g^{-1}}$. D'autre part si on a un isomorphisme $(G \times X, s_e + \Omega) \simeq (G \times X, s_e)$ il est de la forme R_g pour un certain $g \in G(X)$, on a donc $s_e + \Omega = s_{g^{-1}}$, ainsi $\Omega = s_{g^{-1}} - s_e = \Omega_g$. $\square$

3.4. Courbure et p -courbure

DÉFINITION 3.12 (Courbure). *On appelle courbure d'une connexion sur le toreur P donnée par une section s la courbure de s vue comme connexion sur l'algébroïde $(p_*^G T_{P/S}, \sigma, [\cdot, \cdot])$, elle est donnée par le morphisme :*

$$\begin{aligned} K(s) : \bigwedge^2 \mathcal{T}_{X/S} &\rightarrow \text{ad}(P) \\ D \wedge D' &\mapsto [s(D), s(D')] - s([D, D']). \end{aligned} \quad (61)$$

La connexion s est dite intégrable lorsque la courbure $K(s)$ est nulle. On note $\text{At}(G, X)^{K=0}$ la sous-catégorie pleine de $\text{At}(G, X)$ des toreurs munis d'une connexion intégrable.

Supposons maintenant k de caractéristique $p > 0$. Soit $s : \mathcal{T}_X \rightarrow p_*^G \mathcal{T}_{P/S}$ une connexion intégrable sur P .

DÉFINITION 3.13 (p -courbure). *On appelle p -courbure de la connexion s et on note encore ψ_s la p -courbure de s vue comme connexion sur l'algébroïde de Lie restreint $(p_*^G \mathcal{T}_{P/S}, \sigma, [\cdot, \cdot], ()^p)$, elle est donnée par le morphisme :*

$$\begin{aligned} \psi_s : \mathcal{T}_{X/S} &\rightarrow \text{ad}(P) \\ D &\mapsto s(D)^p - s(D^p). \end{aligned} \quad (62)$$

On note $\text{At}(G, X)^{K=\psi=0}$ la sous-catégorie pleine de $\text{At}(G, X)$ des toreurs munis d'une connexion intégrable de p -courbure nulle.

LEMME 3.10. *La p -courbure ψ_s de la connexion s est un morphisme p -linéaire et est à valeurs dans $\text{ad}(P)$.*

DÉMONSTRATION. Découle de la proposition 3.2 et de la proposition 3.3. $\square$

3.5. Comparaison des connexions

Soit $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre de rang n sur X et $p : P \rightarrow X$ un schéma sur X représentant le GL_n -torseur $\text{Isom}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X^{\oplus n})$.

REMARQUE 3.3. Si P est un G -torseur quelconque alors pour tout faisceau quasi-cohérent $\mathcal{E}$ sur X et tout G -faisceau $\mathcal{F}$ sur P on a :

$$\text{Hom}_{G\text{-eq}}(p^* \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, p_*^G \mathcal{F}).$$

Cette bijection est donnée via une factorisation par le morphisme naturel $p_*^G \mathcal{F} \rightarrow p_* \mathcal{F}$.

LEMME 3.11. *Il existe un unique morphisme $\mathcal{O}_S$ -linéaire :*

$$p_*^{\mathrm{GL}_n} \mathcal{O}_P^{\oplus n} \rightarrow p_*^{\mathrm{GL}_n} (\Omega_{P/S}^1 \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_P^{\oplus n}) \quad (63)$$

faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} p_* \mathcal{O}_P^{\oplus n} & \longrightarrow & p_*(\Omega_{P/S}^1 \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_P^{\oplus n}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ p_*^{\mathrm{GL}_n} \mathcal{O}_P^{\oplus n} & \longrightarrow & p_*^{\mathrm{GL}_n} (\Omega_{P/S}^1 \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_P^{\oplus n}). \end{array} \quad (64)$$

DÉMONSTRATION. Un morphisme faisant commuter le diagramme ci-dessus est unique s'il existe, il suffit donc de montrer l'existence d'un tel morphisme Zariski localement. Comme $\mathcal{E}$ est localement libre, on peut supposer $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X^{\oplus n}$ où dans ce cas la structure de GL_n -faisceau sur $\mathcal{O}_P^{\oplus n}$ est triviale i.e. $p_*^{\mathrm{GL}_n} \mathcal{O}_P^{\oplus n} \simeq \mathcal{O}_X^{\oplus n}$. On considère maintenant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} p_* \mathcal{O}_P^{\oplus n} & \longrightarrow & p_*(\Omega_{P/S}^1 \otimes \mathcal{O}_P^{\oplus n}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}_X^{\oplus n} & \longrightarrow & \Omega_{X/S}^1 \otimes \mathcal{O}_X^{\oplus n} \end{array}$$

obtenu via la remarque 3.3, où les morphismes horizontaux sont donnés par les dérivations canoniques. Le morphisme $p^* \Omega_{X/S}^1 \rightarrow \Omega_{P/S}^1$ est GL_n -équivariant, il induit donc encore via la remarque 3.3 un morphisme $\Omega_{X/S}^1 \rightarrow p_*^G \Omega_{P/S}^1$, ce dernier induit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} p_* \mathcal{O}_P^{\oplus n} & \longrightarrow & p_*(\Omega_{P/S}^1 \otimes \mathcal{O}_P^{\oplus n}) & \longleftarrow & p_*^{\mathrm{GL}_n} (\Omega_{P/S}^1 \otimes \mathcal{O}_P^{\oplus n}) \\ \uparrow & & \uparrow & \nearrow & \\ \mathcal{O}_X^{\oplus n} & \longrightarrow & \Omega_{X/S}^1 \otimes \mathcal{O}_X^{\oplus n} & & \end{array}$$

Le morphisme recherché dans le lemme est alors donné localement par le morphisme

$$\mathcal{O}_X^{\oplus n} \rightarrow \Omega_{X/S}^1 \otimes \mathcal{O}_X^{\oplus n} \rightarrow p_*^{\mathrm{GL}_n} (\Omega_{P/S}^1 \otimes \mathcal{O}_P^{\oplus n}).$$

□

PROPOSITION 3.5. *Il y a une correspondance entre connexions sur le faisceau localement libre $\mathcal{E}$ et connexions sur le torseur P .*

DÉMONSTRATION. Cette correspondance est donnée comme suit. Soit ∇ une connexion sur P donnée par une rétraction $s : \Omega_{P/S}^1 \rightarrow p^*\Omega_{X/S}^1$. En composant $(s \otimes \text{Id}) \circ d$ on obtient un morphisme

$$(s \otimes \text{Id}) \circ d : \mathcal{O}_P^{\oplus n} \rightarrow \Omega_{P/S}^1 \otimes \mathcal{O}_P^{\oplus n} \rightarrow p^*\Omega_{X/S}^1 \otimes \mathcal{O}_P^{\oplus n}. \quad (65)$$

Le lemme 3.11 montre que ce morphisme se descend en un morphisme $\mathcal{O}_S$ -linéaire

$$\nabla' : \mathcal{E} \rightarrow \Omega_{X/S}^1 \otimes \mathcal{E}$$

qui est une connexion sur $\mathcal{E}$.

Soit maintenant $\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \Omega_{X/S}^1 \otimes \mathcal{E}$ une connexion sur $\mathcal{E}$. L'image inverse de la connexion ∇ est une connexion $p^*\nabla : \mathcal{O}_P^{\oplus n} \rightarrow \Omega_{P/S}^1 \otimes \mathcal{O}_P^{\oplus n}$ sur $\mathcal{O}_P^{\oplus n}$ car $p^*\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_P^{\oplus n}$. La matrice des formes de $p^*\nabla$ définit un morphisme $\mathcal{O}_P$ -linéaire GL_n -équivariant $M_n(\mathcal{O}_P) \rightarrow \Omega_{P/S}^1$ qui définit une rétraction de la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{ad}(P) \rightarrow p_*^G \mathcal{T}_{P/S} \rightarrow \mathcal{T}_X \rightarrow 0,$$

et par conséquent une section définissant une connexion sur le GL_n -torseur. $\square$

3.6. Comparaison des courbures

D'après la définition 3.12 la courbure d'une connexion donnée par une section :

$$s : \mathcal{T}_X \rightarrow p_*^G \mathcal{T}_{P/S}$$

sur le GL_n -torseur P est le morphisme $\mathcal{O}_X$ -linéaire

$$\begin{aligned} K(s) : \bigwedge^2 \mathcal{T}_{X/S} &\rightarrow \text{ad}(P) = \text{End}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}) \\ D \wedge D' &\mapsto [s(D), s(D')] - s([D, D']). \end{aligned} \quad (66)$$

Soit $\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \Omega_{X/S}^1 \otimes \mathcal{E}$ la connexion sur $\mathcal{E}$ associée à la connexion s sur le toseur P via la proposition 3.5. Cette connexion est entièrement déterminée par le morphisme :

$$\tilde{\nabla} : \mathcal{T}_X \rightarrow \text{End}_S(\mathcal{E}).$$

D'après la preuve du corollaire 2.1 la courbure de la connexion ∇ est entièrement déterminée par le morphisme :

$$\begin{aligned} K(\nabla) : \bigwedge^2 \mathcal{T}_{X/S} &\rightarrow \text{End}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}) \\ D \wedge D' &\mapsto K(D \wedge D') = [\nabla(D), \nabla(D')] - \nabla([D, D']). \end{aligned} \quad (67)$$

PROPOSITION 3.6. *Les morphismes $K(s)$ et $K(\nabla) : \bigwedge^2 \mathcal{T}_{X/S} \rightarrow \text{End}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E})$ coïncident.*

DÉMONSTRATION. Il existe un morphisme $L : p_*^{\mathrm{GL}_n} \mathcal{T}_{P/S} \rightarrow \mathrm{End}_S(\mathcal{E})$ compatible avec les crochets de Lie et avec la puissance p -ième faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{End}_S(\mathcal{E}) & & \\ & \nearrow & \uparrow L & \nwarrow & \\ \mathrm{End}_X(\mathcal{E}) & \hookrightarrow & p_*^{\mathrm{GL}_n} \mathcal{T}_{P/S} & \xleftarrow{s} & \mathcal{T}_X \end{array} \quad (68)$$

En effet, soit $p_*^{\mathrm{GL}_n} \mathcal{O}_P^{\oplus n} \rightarrow p_*^{\mathrm{GL}_n} (\Omega_{P/S}^1 \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_P^{\oplus n})$ le morphisme du lemme 3.11. Comme $p_*^{\mathrm{GL}_n} \mathcal{O}_P^{\oplus n} \simeq \mathcal{E}$, toute section de $p_*^{\mathrm{GL}_n} \mathcal{T}_{P/S}$ donnée par un morphisme équivariant $D : \Omega_{P/S}^1 \rightarrow \mathcal{O}_P$ induit un endomorphisme S -linéaire de $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} \rightarrow p_*^{\mathrm{GL}_n} (\Omega_{P/S}^1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{p_*^{\mathrm{GL}_n} D \otimes 1} \mathcal{E}.$$

On obtient un morphisme $p_*^{\mathrm{GL}_n} \mathcal{T}_{P/S} \rightarrow \mathrm{End}_S(\mathcal{E})$ vérifiant les conditions du lemme. La proposition découle de la commutativité du diagramme (68) et du fait que $L \circ s = \tilde{\nabla}$. $\square$

3.7. Changement de groupe

Soit G' un schéma en groupes affine lisse sur k et $G \rightarrow G'$ un morphisme de schémas en groupes sur k . Soit $P' = P \wedge^G G'$ le G' -torseur induit par P et le morphisme $G \rightarrow G'$.

LEMME 3.12. *Il existe des morphismes naturels $p_*^G \mathcal{T}_{P/S} \rightarrow p_*^{G'} \mathcal{T}_{P'/S}$, compatibles avec les crochets de Lie et la puissance p -ième, et $\mathrm{ad}(P) \rightarrow \mathrm{ad}(P')$, faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{ad}(P) & \longrightarrow & p_*^G \mathcal{T}_{P/S} & \longrightarrow & \mathcal{T}_X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{Id} \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{ad}(P') & \longrightarrow & p_*^{G'} \mathcal{T}_{P'/S} & \longrightarrow & \mathcal{T}_X \longrightarrow 0. \end{array} \quad (69)$$

DÉMONSTRATION. Notons h le morphisme naturel $P \rightarrow P'$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & p^* \Omega_{X/S}^1 & \longrightarrow & \Omega_{P/S}^1 & \longrightarrow & \Omega_{P/X}^1 \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & p^* \Omega_{X/S}^1 & \longrightarrow & h^* \Omega_{P'/S}^1 & \longrightarrow & h^* \Omega_{P'/X}^1 \longrightarrow 0. \end{array}$$

Comme le morphisme $h : P \rightarrow P'$ est $G \rightarrow G'$ -équivariant le lemme découle du diagramme ci-dessus par descente de G -faisceaux et du lemme 3.3. $\square$

COROLLAIRE 3.1. *Toute connexion sur le G -torseur P induit une connexion sur le G' -torseur P' .*

DÉMONSTRATION. Par définition une connexion sur P est donnée par une section $s : \mathcal{T}_X \rightarrow p_*^G \mathcal{T}_{P/S}$, la connexion sur P' induite par s est alors donnée par la section $s' : \mathcal{T}_X \rightarrow p_*^G \mathcal{T}_{P/S} \rightarrow p_*^{G'} \mathcal{T}_{P'/S}$. $\square$

Fixons une connexion s sur le G -torseur P .

LEMME 3.13. *Soit $K(s) : \bigwedge^2 \mathcal{T}_{X/S} \rightarrow \text{ad}(P)$ la courbure de la connexion s sur P . La courbure de la connexion s' sur P' induite par s est donnée par le morphisme*

$$\bigwedge^2 \mathcal{T}_{X/S} \rightarrow \text{ad}(P) \rightarrow \text{ad}(P')$$

donné par la composée de la courbure $K(s)$ de s et du morphisme $\text{ad}(P) \rightarrow \text{ad}(P')$.

DÉMONSTRATION. Découle immédiatement du diagramme (69) et de la définition de la courbure d'une connexion sur un toseur. $\square$

LEMME 3.14. *Supposons s intégrable. Soit $\psi_s : \mathcal{T}_{X/S} \rightarrow \text{ad}(P)$ la p -courbure de la connexion s sur P . Alors la connexion s' sur P' induite par s est intégrable et sa p -courbure est donnée par le morphisme :*

$$\mathcal{T}_{X/S} \rightarrow \text{ad}(P) \rightarrow \text{ad}(P')$$

donné par la composée de la p -courbure ψ_s de s et du morphisme naturel $\text{ad}(P) \rightarrow \text{ad}(P')$.

DÉMONSTRATION. Découle immédiatement du diagramme (69) et de la définition de la p -courbure d'une connexion sur un toseur. $\square$

LEMME 3.15. *Soit $(P, s) \in \text{At}(G, P)$. L'annulation de la courbure (resp. de la p -courbure si s est intégrable) est une propriété étale locale.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{F} = \Omega_{X/S}^2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{ad}(P)$ (resp. $\mathcal{F} = F_X^*(\Omega_{X/S}^1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{ad}(P)$). Comme $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent le foncteur $(f : X' \rightarrow X) \mapsto H^0(X', f^* \mathcal{F})$ est un faisceau sur $X_{\text{ét}}$. De plus la formation des faisceaux $\Omega_{X/S}^1$ et $\text{ad}(P)$ commutent aux changements de bases étales, on a donc pour tout morphisme étale $f : X' \rightarrow X$, $f^* \mathcal{F} = \Omega_{X'/S}^2 \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \text{ad}(P')$. Le morphisme de restriction $H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X', f^* \mathcal{F})$ envoie $K(s)$ vers $K(s')$ (resp. ψ_s vers $\psi_{s'}$) où s' est la connexion induite par s sur le G -torseur $P' \rightarrow X'$. $\square$

Chapitre 4

Descente de Cartier et les toiseurs sous les noyaux de Frobenius

Soit G un schéma en groupes affine sur un corps k , et X un schéma sur $S = \text{Spec } k$. Dans ce chapitre nous allons utiliser l'équivalence entre G -toiseurs et foncteurs fibre sur la catégorie des représentations $\text{Rep}_k(G)$ de G , puis utiliser cette équivalence pour généraliser la notion de connexion sur les toiseurs.

4.1. Foncteurs fibre et toiseurs

Soit C une catégorie et $\otimes : C \times C \rightarrow C, (X, Y) \mapsto X \otimes Y$ un foncteur.

DÉFINITION 4.1 ([6, 1.1.]). *On dit que $(C, \otimes)$ est une catégorie tensorielle si le foncteur $\otimes$ est muni de contraintes d'associativité et de commutativité ϕ et ψ données par des isomorphismes fonctoriels :*

$$\begin{aligned}\phi_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) &\rightarrow (X \otimes Y) \otimes Z \\ \psi_{X,Y} : X \otimes Y &\rightarrow Y \otimes X\end{aligned}$$

vérifiant des axiomes de cohérence : voir [6].

DÉFINITION 4.2. *Soit $(C', \otimes)$ une catégorie tensorielle. Un foncteur tensoriel $(C, \otimes) \rightarrow (C', \otimes)$ est la donnée d'un couple (F, c) où F est un foncteur $F : C \rightarrow C'$, et pour tout X, Y objets de C , $c_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \rightarrow F(X \otimes Y)$ est un isomorphisme fonctoriel satisfaisant certaines conditions de compatibilité : voir [6, Définition 1.8].*

On note $\text{Vec}(X)$ la catégorie des faisceaux localement libres de rang fini sur X .

DÉFINITION 4.3. *On appelle foncteur fibre de la catégorie $\text{Rep}_k(G)$ sur X , ou simplement foncteur fibre sur X , tout foncteur tensoriel k -linéaire exact :*

$$\eta : \text{Rep}_k(G) \rightarrow \text{QCoh}(X)$$

à valeurs dans $\text{Vec}(X)$. On note $\text{Fib}(\text{Rep}_k(G), \text{QCoh}(X))$ la catégorie des foncteurs fibre sur X . Pour tout morphisme $u : T \rightarrow X$ on note u^η le foncteur fibre sur T obtenu en composant η et $u^* : \text{QCoh}(X) \rightarrow \text{QCoh}(T)$.*

REMARQUE 4.1. (1) Tout foncteur tensoriel k -linéaire exact $\eta : \text{Rep}_k(G) \rightarrow \text{QCoh}(X)$ est à valeurs dans $\text{Vec}(X)$, voir [19, § 2.2].

- (2) Toute transformation tensorielle entre foncteurs fibre est un isomorphisme i.e. si η' est un autre foncteur fibre sur X alors $\mathrm{Hom}^\otimes(\eta, \eta') = \mathrm{Isom}^\otimes(\eta, \eta')$, voir [18, Proposition 1.13.]

DÉFINITION 4.4. Soient η et η' deux foncteurs fibre sur X . On note $\underline{\mathrm{Hom}}^\otimes(\eta, \eta')$ le faisceau sur X_{fppf} donné par $u : T \rightarrow X \mapsto \mathrm{Hom}^\otimes(u^*\eta, u^*\eta') = \mathrm{Isom}^\otimes(u^*\eta, u^*\eta')$.

PROPOSITION 4.1 ([6, Proposition 2.8.]). Soit $\omega : \mathrm{Rep}_k(G) \rightarrow \mathrm{Vec}_k$ le foncteur oubli obtenu en associant à chaque représentation de G le k -espace vectoriel sous-jacent. Le faisceau de groupes donné par $\underline{\mathrm{Aut}}^\otimes(\omega)$ est isomorphe à G .

Notons encore ω le foncteur obtenu en composant le foncteur oubli $\mathrm{Rep}_k(G) \rightarrow \mathrm{Vec}_k$ et le foncteur $\mathrm{Vec}_k \rightarrow \mathrm{QCoh}(X)$. Soit η un foncteur fibre sur X . D'après la remarque 4.1 le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}^\otimes(\eta, \omega)$ est un toreur sous le groupe $\underline{\mathrm{Aut}}^\otimes(\omega)$, donc par la proposition 4.1 un toreur sous le groupe G .

Soit maintenant $p : P \rightarrow X$ un G -torseur sur X . Pour toute représentation V de G , le faisceau quasi-cohérent p^*V est muni d'une structure naturelle de G -faisceau sur $P \rightarrow X$. Notons V_P le faisceau quasi-cohérent sur X descendu du G -faisceau p^*V . On obtient un foncteur η_P associé au toreur P :

$$\begin{aligned} \eta_P : \mathrm{Rep}_k(G) &\rightarrow \mathrm{QCoh}(X) \\ V &\mapsto V_P. \end{aligned} \tag{70}$$

Le foncteur η_P est un foncteur fibre sur X , voir [19, § 2.2.].

THÉORÈME 4.1. La correspondance décrite ci-dessus définit une équivalence de catégories

$$\begin{aligned} \phi : G\text{-Torseurs}/X &\rightarrow \mathrm{Fib}(\mathrm{Rep}_k(G), \mathrm{QCoh}(X)) \\ P &\mapsto \eta_P \end{aligned} \tag{71}$$

de quasi-inverse :

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{Fib}(\mathrm{Rep}_k(G), \mathrm{QCoh}(X)) &\rightarrow G\text{-Torseurs}/X \\ \eta &\mapsto \underline{\mathrm{Hom}}^\otimes(\eta, \omega) \end{aligned} \tag{72}$$

entre la catégorie des G -torseurs sur X et la catégorie des foncteurs fibre sur X .

DÉMONSTRATION. Voir [19, Proposition 2.9] ou [6, Theorem 3.2]. $\square$

4.2. Connexion sur un foncteur fibre

L'équivalence de catégories donnée par le théorème 4.1 permet de donner une autre définition de la notion de connexion sur un toreur :

DÉFINITION 4.5. *On appelle foncteur fibre à connexion sur X tout foncteur tensoriel k -linéaire exact :*

$$\eta : \text{Rep}_k(G) \rightarrow \text{MC}(X).$$

On note $\text{Tan}(G, X)$ la catégorie des foncteurs fibre à connexion sur X et $\text{Tan}(G, X)^{K=0}$ (resp. $\text{Tan}(G, X)^{K=\psi=0}$) la sous-catégorie pleine de $\text{Tan}(G, X)$ des foncteurs fibres à connexion sur X à valeurs dans $\text{MIC}(X)$ (resp. $\text{MIC}(X)^{\psi=0}$).

REMARQUE 4.2. En composant un foncteur fibre à connexion $\text{Rep}_k(G) \rightarrow \text{MC}(X)$ avec le foncteur oubli $\text{MC}(X) \rightarrow \text{QCoh}(X)$ on obtient un foncteur fibre sur X comme défini dans 4.3.

Supposons pour le reste de cette section G lisse sur k . Soient (P, s) un objet de $\text{At}(G, X)$. Soit V une représentation de dimension finie de G donnée par un morphisme $\alpha : G \rightarrow \text{GL}(V)$, et P_V le $\text{GL}(V)$ -torseur donné par $P \wedge^G \text{GL}(V)$. D'après le corollaire 3.1 la connexion s sur P induit une connexion s_V sur P_V . Comme V est de dimension finie, d'après la proposition 3.5, le $\text{GL}(V)$ -torseur à connexion (P_V, s_V) correspond à un faisceau localement libre de rang fini muni d'une connexion $(\mathcal{E}_V, \nabla_V)$. On peut donc associer au couple (P, s) le foncteur :

$$\begin{aligned} \eta_{(P,s)} : \text{Rep}_k(G) &\rightarrow \text{MC}(X) \\ V &\mapsto (\mathcal{E}_V, \nabla_V). \end{aligned} \tag{73}$$

LEMME 4.1. *Soit $(P, s) \in \text{At}(G, X)$. La connexion s est de courbure (resp. p -courbure) nulle si et seulement si pour toute représentation $G \rightarrow \text{GL}(V)$ la connexion $s \wedge^G \text{GL}(V)$ sur $P \wedge^G \text{GL}(V)$ induite par changement de groupe est de courbure (resp. p -courbure) nulle.*

DÉMONSTRATION. Si la connexion s est intégrable (resp. de p -courbure nulle) alors le résultat découle du lemme 3.13 (resp. du lemme 3.14). Dans le sens inverse comme G est lisse et affine sur k c'est un groupe algébrique affine sur k , il admet donc une représentation fidèle $\alpha : G \rightarrow \text{GL}(V)$. Notons P_V le $\text{GL}(V)$ -torseur $P \wedge^G \text{GL}(V)$. La représentation α induit un morphisme $\text{ad}(P) \rightarrow \text{ad}(P_V)$, et par suite des morphismes :

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\bigwedge^2 \mathcal{T}_{X/S}, \text{ad}(P)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\bigwedge^2 \mathcal{T}_{X/S}, \text{ad}(P_V)) \tag{74}$$

et

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F_X^* \mathcal{T}_{X/S}, \text{ad}(P)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F_X^* \mathcal{T}_{X/S}, \text{ad}(P_V)). \tag{75}$$

Comme α est fidèle les morphismes (74) et (75) sont des monomorphismes, si $s \wedge^G \text{GL}(V)$ est intégrable (resp. de p -courbure nulle) il s'ensuit alors que s est aussi intégrable (resp. de p -courbure nulle). $\square$

PROPOSITION 4.2. *Le foncteur donné par :*

$$\begin{aligned} \Phi : \text{At}(G, X) &\rightarrow \text{Tan}(G, X) \\ (P, s) &\mapsto \eta_{(P,s)} \end{aligned} \quad (76)$$

est une équivalence de catégories. De plus pour un couple $(P, s) \in \text{At}(G, X)$ la connexion s est intégrable (resp. de p -courbure nulle) si et seulement si $\eta_{(P,s)}$ est à valeurs dans $\text{MIC}(X)$ (resp. $\text{MIC}(X)^{\psi=0}$).

DÉMONSTRATION. On construit un quasi-inverse de Φ . Soit $\eta \in \text{Tan}(G, X)$ i.e. η est un foncteur tensoriel k -linéaire exact $\text{Rep}_k(G) \rightarrow \text{MC}(X)$. En composant avec le foncteur oubli $\text{MC}(X) \rightarrow \text{QCoh}(X)$ on obtient un foncteur tensoriel k -linéaire exact $\eta_0 : \text{Rep}_k(G) \rightarrow \text{QCoh}(X)$ i.e. un foncteur fibre sur X , notons $p : P \rightarrow X$ le G -torseur correspondant via le théorème 4.1.

On adjoint maintenant à P une connexion en construisant une section G -équivariante du morphisme $T_{P/S} \rightarrow P \times_X T_{X/S}$ correspondant au morphisme de faisceaux $\mathcal{T}_{P/S} \rightarrow p^* \mathcal{T}_{X/S}$ de la suite exacte d'Atiyah associée au toseur P . Considérons pour cela le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ \swarrow s(t,v) & \downarrow (t,v) & \searrow u \\ T_{P/S} & \longrightarrow P \times_X T_{X/S} & \\ & \downarrow & \\ & X & \end{array} \quad (77)$$

où l'on va associer à chaque morphisme $(t, v) : T \rightarrow P \times_X T_{X/S}$ un morphisme $s(t, v) : T \rightarrow T_{P/S}$ qui va déterminer une section du morphisme $T_{P/S} \rightarrow P \times_X T_{X/S}$.

Soit $\omega : \text{Rep}_k(G) \rightarrow \text{QCoh}(X)$ le foncteur obtenu en composant le foncteur oubli $\text{Rep}_k(G) \rightarrow \text{Vec}_k$ et le foncteur $\text{Vec}_k \rightarrow \text{QCoh}(X)$. Par construction du toseur P la section $t \in P(T)$ est un isomorphisme dans $\text{Isom}^{\otimes}(u^* \eta_0, u^* \omega)$.

Soit $(t, v) : T \rightarrow P \times_X T_{X/S}$ un morphisme comme dans le diagramme (77). Par définition de l'espace tangent on a $T_{X/S}(T) = X(T[\epsilon])$ où $T[\epsilon] = \text{Spec}_T(\mathcal{O}_T[\epsilon]/\epsilon^2)$, ainsi v définit un morphisme $T[\epsilon] \rightarrow X$ que l'on note encore v . Pour construire $s(t, v) : T \rightarrow T_{P/S}$ comme dans le diagramme (77) il suffit d'avoir un morphisme $T[\epsilon] \rightarrow P$ i.e. un isomorphisme $w \in \text{Isom}^{\otimes}(v^* \eta_0, v^* \omega)$ tel que $i^* w = t$ où i^* est donné

comme dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \text{QCoh}(T[\epsilon]) \\
 & \nearrow^{v^*\omega} & \downarrow i^* \\
 \text{Rep}_k(G) & \xrightarrow[\eta_0]{\omega} \text{QCoh}(X) & \xrightarrow{u^*} \text{QCoh}(T) \\
 & \searrow_{u^*\eta_0} & \uparrow_{u^*\omega} \\
 & & \text{QCoh}(T)
 \end{array}
 \quad (78)$$

On construit w de la manière suivante, soit V une représentation de G donnée par un morphisme $G \rightarrow \text{GL}(V)$, $\eta(V)$ est alors donné par un faisceau localement libre muni d'une connexion $(\mathcal{E}_V, \nabla_V)$ qui correspond d'après la proposition 3.5 à un $\text{GL}(V)$ -torseur muni d'une connexion (P_V, s_V) . Le toseur P_V est donné par $P \wedge^G \text{GL}(V)$ et représente le faisceau $\text{Isom}(\mathcal{E}_V, \mathcal{O}_X \otimes V)$ sur X . Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & T & \\
 \swarrow^{s_V(t_V, v)} & \downarrow (t_V, v) & \searrow u \\
 T_{P_V/S} & \longrightarrow P_V \times_X T_{X/S} & \\
 & \downarrow & \\
 & X &
 \end{array}
 \quad (79)$$

Le morphisme $s_V(t_V, v) : T \rightarrow T_{P_V/S}$ est défini par un morphisme $T[\epsilon] \rightarrow P_V$, qui correspond à une section de $P_V = \text{Isom}(\mathcal{E}_V, \mathcal{O}_X \otimes V)$ sur $T[\epsilon]$, donc à un isomorphisme $v^* \mathcal{E}_V \rightarrow v^* \mathcal{O}_X \otimes V = \mathcal{O}_{T[\epsilon]} \otimes V$ qui est l'isomorphisme recherché. On obtient un foncteur :

$$\Psi : \text{Tan}(G, X) \rightarrow \text{At}(G, X). \quad (80)$$

Pour voir que Ψ et Φ sont quasi-inverses, notons pour tout $\eta \in \text{Tan}(G, X)$, η_0 le foncteur fibre sur X obtenu en composant η avec le foncteur oubli $\text{MC}(X) \rightarrow \text{QCoh}(X)$. Soit $\eta \in \text{Tan}(G, X)$ et $(P, s) = \Psi(\eta) \in \text{At}(G, X)$. Par construction de Φ le toseur P est isomorphe à $\psi(\eta_0)$ où ψ est le foncteur défini dans le théorème 4.1. Comme $(P, s) \in \text{At}(G, X)$, alors $\eta_{(P, s)_0}$ est donné par $\phi(P)$ où ϕ est le quasi-inverse de ψ donné dans le théorème 4.1. Il suffit maintenant de montrer que les foncteurs Φ et Ψ préservent les connexions, or cela découle de la construction de Φ et Ψ et de la proposition 3.5.

La deuxième partie de la proposition découle du lemme 4.1 et de la proposition 3.5.

□

4.3. Horizontalité de la p -courbure

Supposons G lisse sur k . Soient $(P, s) \in \text{At}(G, X)$ un G -torseur muni d'une connexion intégrable s et $\eta_{(P,s)} \in \text{Tan}(G, X)$ le foncteur fibre à connexion associé via la proposition 4.2. Notons $(\mathcal{E}, \nabla)$ le faisceau localement libre muni d'une connexion intégrable donné par l'image de la représentation adjointe via $\eta_{(P,s)}$ i.e. $(\mathcal{E}, \nabla) = \eta_{(P,s)}(\text{Lie}(G))$. Par définition $\text{ad}(P)$ est isomorphe à $\mathcal{E}$, on peut donc le munir de la connexion ∇ . Soit $\psi_s : \mathcal{T}_{X/S} \rightarrow F_{X*} \text{ad}(P)$ la p -courbure de la connexion s . Par adjonction on peut voir ψ_s comme un morphisme $\mathcal{O}_X$ -linéaire $F_X^* \mathcal{T}_{X/S} \rightarrow \text{ad}(P)$. Le faisceau $F_X^* \mathcal{T}_{X/S}$ est alors muni d'une connexion canonique ∇_{can} .

PROPOSITION 4.3. *La p -courbure $\psi_s : F_X^* \mathcal{T}_{X/S} \rightarrow \text{ad}(P)$ est un morphisme horizontal si l'on munit $F_X^* \mathcal{T}_{X/S}$ de la connexion ∇_{can} et $\text{ad}(P)$ de la connexion ∇ , comme définis ci-dessus.*

DÉMONSTRATION. Comme G est affine et lisse, c'est un groupe algébrique affine sur k , il admet donc une représentation fidèle $\alpha : G \rightarrow \text{GL}(V)$. Soit $(\mathcal{E}_V, \nabla_V) = \eta_{(P,s)}(V)$. La représentation α induit un morphisme $\text{Lie } \alpha : \text{Lie } G \hookrightarrow \text{Lie } \text{GL}(V) = \text{End}(V)$ et un diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{ad}(P) & \xleftarrow{\hspace{2cm}} & \text{End}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}_V) \\
 & \swarrow \psi_s \quad \searrow \psi_{\nabla_V} & \\
 & F_X^* \mathcal{T}_{X/S} &
 \end{array} \tag{81}$$

où ψ_{∇_V} est la p -courbure de la connexion ∇_V . Le diagramme ci-dessus est commutatif par le lemme 3.13 et la proposition 3.6. Le morphisme $\text{ad}(P) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}_V)$ est horizontal car c'est l'image par $\eta_{(P,s)}$ du morphisme $\text{Lie } \alpha : \text{Lie } G \rightarrow \text{End}(V)$. Il suffit maintenant de montrer que ψ_{∇_V} est un morphisme horizontal, or cela découle de [14, 5.2.3]. $\square$

Supposons P trivial, ou G commutatif, de sorte que $\text{ad}(P) \simeq \mathcal{O}_X \otimes_k \text{Lie}(G)$. Une conséquence de la proposition ci-dessus est que par descente de Cartier la p -courbure ψ_s vue comme section globale de $F_X^* \Omega_{X^{(p)}/S}^1 \otimes_k \text{Lie}(G)$ se descend en une section globale de $\Omega_{X^{(p)}/S}^1 \otimes_k \text{Lie}(G)$ sur $X^{(p)}$. Nous pouvons alors donner la définition suivante :

DÉFINITION 4.6. *On appelle application p -courbure associée au G -torseur trivial l'application définie par :*

$$\psi : H^0(\Omega_{X/S}^1 \otimes_k \text{Lie}(G))^{K=0} \rightarrow H^0(\Omega_{X^{(p)}/S}^1 \otimes_k \text{Lie}(G)) \tag{82}$$

$$\Omega \mapsto \psi_{s_e + \Omega}. \tag{83}$$

où $H^0(\Omega_{X/S}^1 \otimes_k \text{Lie}(G))^{K=0}$ désigne l'ensemble des éléments Ω de $H^0(\Omega_{X/S}^1 \otimes_k \text{Lie}(G))$ tels que la connexion $s_e + \Omega$ est intégrable.

4.4. Descente de Cartier pour les toseurs

Supposons G et X lisses sur k et $\text{car } k = p > 0$. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 X & & \xrightarrow{F_X} & & X \\
 & \searrow F & & \searrow \text{pr}_1 & \\
 & & X^{(p)} & \xrightarrow{\quad} & X \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & S & \xrightarrow{F_S} & S
 \end{array}$$

LEMME 4.2. *Pour tout G -torseur P sur $X^{(p)}$ le G -torseur $P \times_{X^{(p)}} X$ sur X est muni d'une connexion canonique s_{can} .*

DÉMONSTRATION. Soient $p : P \rightarrow X^{(p)}$ un toseur sur $X^{(p)}$ et $q : P' = P \times_{X^{(p)}} X \rightarrow X$ le toseur sur X obtenu via le Frobenius relatif. On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{ad}(P') & \longrightarrow & q_*^G(\mathcal{T}_{P'/S}) & \longrightarrow & \mathcal{T}_{X/S} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow 0 \\
 0 & \longrightarrow & F^* \text{ad}(P) & \longrightarrow & F^* p_*^G(\mathcal{T}_{P/S}) & \longrightarrow & F^* \mathcal{T}_{X^{(p)}/S} \longrightarrow 0.
 \end{array} \tag{84}$$

Comme le morphisme $\mathcal{T}_{X/S} \rightarrow F^* \mathcal{T}_{X^{(p)}/S}$ est nul, le morphisme $q_*^G(\mathcal{T}_{P'/S}) \rightarrow F^* p_*^G(\mathcal{T}_{P/S})$ se factorise via $F^* \text{ad}(P) \rightarrow F^* p_*^G(\mathcal{T}_{P/S})$ et permet de définir une rétraction de la suite exacte d'Atiyah associée au toseur P' ou de manière équivalente une connexion sur P' . $\square$

LEMME 4.3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc}
 \text{At}(\text{GL}_n, X) & \longrightarrow & \text{MC}(X) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{GL}_n\text{-Torseurs} / X^{(p)} & \longrightarrow & \text{QCoh}(X^{(p)})
 \end{array} \tag{85}$$

est 2-commutatif.

DÉMONSTRATION. Le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{At}(\text{GL}_n, X) & \longrightarrow & \text{QCoh}(X) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{GL}_n\text{-Torseurs} / X^{(p)} & \longrightarrow & \text{QCoh}(X^{(p)})
 \end{array}$$

obtenu via le diagramme (85) en composant avec le foncteur oubli $\mathrm{MC}(X) \rightarrow \mathrm{QCoh}(\mathcal{O}_X)$ est 2-commutatif, il suffit donc de vérifier la compatibilité des connexions. Il s'agit d'une propriété Zariski locale, il suffit donc de vérifier la comptabilité pour le torseur trivial $\mathrm{GL}_n \times X^{(p)}$ mais cela découle de $(F^*(\mathrm{GL}_n \times X^{(p)}), s_{can}) \simeq (\mathrm{GL}_n \times X, s_e)$ et $(F^* \mathcal{O}_{X^{(p)}}^{\oplus n}, \nabla_{can}) \simeq (\mathcal{O}_X^{\oplus n}, d)$. $\square$

Le lemme 4.2 permet de définir un foncteur :

$$\begin{aligned} F^* : G\text{-Torseurs} / X^{(p)} &\rightarrow \mathrm{At}(G, X) \\ P &\mapsto (P \times_{X^{(p)}} X, s_{can}), \end{aligned} \quad (86)$$

le lemme suivant montre que ce foncteur est à valeurs dans $\mathrm{At}(G, X)^{K=\psi=0}$.

LEMME 4.4. *Pour tout torseur P sur $X^{(p)}$, la connexion s_{can} sur $P \times_{X^{(p)}} X$ est intégrable de p -courbure nulle.*

DÉMONSTRATION. Ce lemme découle du théorème de descente de Cartier 2.1, du lemme 4.3 ci-dessus, et de la proposition 4.2. $\square$

THÉORÈME 4.2 (Descente de Cartier). *Le foncteur :*

$$\begin{aligned} F^* : G\text{-Torseurs} / X^{(p)} &\rightarrow \mathrm{At}(G, X)^{K=\psi=0} \\ P &\mapsto (P \times_{X^{(p)}} X, s_{can}) \end{aligned} \quad (87)$$

donné par (86) est une équivalence de catégories.

DÉMONSTRATION. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{At}(G, X)^{K=\psi=0} & \xrightarrow{\Phi} & \mathrm{Tan}(G, X)^{K=\psi=0} \\ F^* \uparrow & & \uparrow \circ F^* \\ G\text{-Torseurs} / X^{(p)} & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Fib}(\mathrm{Rep}_k(G), \mathrm{QCoh}(X^{(p)})) \end{array} \quad (88)$$

où Φ est la restriction du foncteur Φ donné par la proposition 4.2 à $\mathrm{At}(G, X)^{K=\psi=0}$, ϕ le foncteur donné par le théorème 4.1 et $\circ F^*$ le foncteur qui associe à chaque foncteur fibre η sur $X^{(p)}$ le foncteur fibre à connexion sur X obtenu en composant avec le foncteur $F^* : \mathrm{QCoh}(X^{(p)}) \rightarrow \mathrm{MIC}(X)^{\psi=0}$. D'après le lemme 4.3 le diagramme ci-dessus est 2-commutatif.

Les foncteurs ϕ et Φ sont des équivalences de catégories par le théorème 4.1 et la proposition 4.2. Le foncteur $\circ F^*$ est une équivalence de catégories par le théorème de descente de Cartier 2.1. Il s'ensuit que le foncteur $F^* : G\text{-Torseurs} / X^{(p)} \rightarrow \mathrm{At}(G, X)^{K=\psi=0}$ est une équivalence de catégories. $\square$

PROPOSITION 4.4. *Soit $(P, s) \in \mathrm{At}(G, X)$. La connexion s est intégrable de p -courbure nulle si et seulement si étale localement (P, s) est isomorphe à $(G \times X, s_e)$.*

DÉMONSTRATION. Si (P, s) est étale localement isomorphe à $(G \times X, s_e)$, comme s_e est intégrable de p -courbure nulle alors s est aussi intégrable de p -courbure nulle par le lemme 3.15.

Supposons maintenant s intégrable de p -courbure nulle. D'après le théorème 4.2 il existe un G -torseur $\hat{P} \rightarrow X^{(p)}$ tel que $(P, s) \simeq (\hat{P} \times_{X^{(p)}} X, s_{can})$. Comme G est lisse il existe un recouvrement étale $X_i^{(p)} \rightarrow X^{(p)}$ trivialisant $\hat{P}$ [21, Lemme XIV 1.4], en tirant ce recouvrement vers X on obtient un recouvrement étale trivialisant (P, s) . $\square$

COROLLAIRE 4.1. *Soit $\Omega \in H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes \text{Lie } G)$. La connexion $s_e + \Omega$ sur $G \times X$ est intégrable de p -courbure nulle si et seulement si Ω est étale localement dans l'image de l'application $d \log : G(X) \rightarrow H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes_k \text{Lie}(G))$.*

DÉMONSTRATION. Découle de la proposition 4.4 et du lemme 3.9. $\square$

4.5. Torseurs sous le noyau de Frobenius

On garde les hypothèses de la section précédente.

DÉFINITION 4.7. *Soit $*$ la catégorie discrète avec un unique objet. On définit la catégorie $\text{At}(G \times X)$ comme étant la catégorie donnée par le 2-produit fibré :*

$$\begin{array}{ccc} \text{At}(G \times X) & \longrightarrow & \text{At}(G, X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & G\text{-Torseurs}/X \end{array}$$

où le foncteur vertical à droite est le foncteur oubli et le foncteur horizontal en bas est le foncteur qui envoie l'unique objet de $*$ vers le toseur trivial $G \times X \rightarrow X$.

Par définition les objets de la catégorie $\text{At}(G \times X)$ sont donnés par les couples $((P, s), \alpha)$ où $(P, s) \in \text{At}(G, X)$ et $\alpha : P \rightarrow G \times X$ un isomorphisme de G -torseurs. Un morphisme entre deux objets $((P, s), \alpha)$ et $((P', s'), \alpha')$ de $\text{At}(G \times X)$ est un morphisme $\beta : (P, s) \rightarrow (P', s')$ dans $\text{At}(G, X)$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\alpha} & G \times X \\ \downarrow \beta & & \downarrow \text{Id} \\ P' & \xrightarrow{\alpha'} & G \times X. \end{array}$$

REMARQUE 4.3. Un objet $((P, s), \alpha)$ de $\text{At}(G \times X)$ est isomorphe à l'objet $((G \times X, s'), \text{Id})$ où s' est l'unique connexion sur $G \times X$ rendant α un morphisme de

torseurs avec connexions $(P, s) \rightarrow (G \times X, s')$. Cet isomorphisme est donné par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\alpha} & G \times X \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \text{Id} \\ G \times X & \xrightarrow{\text{Id}} & G \times X. \end{array}$$

LEMME 4.5. *En considérant $H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes \text{Lie } G)$ comme une catégorie discrète, le foncteur :*

$$\begin{aligned} s_e + : H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes \text{Lie } G) &\rightarrow \text{At}(G \times X) \\ \Omega &\mapsto ((G \times X, s_e + \Omega), \text{Id}) \end{aligned} \quad (89)$$

est une équivalence de catégories.

DÉMONSTRATION. D'après la remarque 4.3 les classes d'isomorphie des objets de la catégorie $\text{At}(G \times X)$ sont en bijection avec les connexions s sur le torseur trivial $G \times X$. Il suffit donc de montrer que les connexions sur $G \times X$ sont en bijection avec $H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes \text{Lie } G)$ via l'application qui envoie Ω vers la connexion $s_e + \Omega$ sur $G \times X$. En associant à une connexion s sur $G \times X$ la section $s - s_e \in H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes \text{Lie } G)$ on obtient une application inverse de l'application ci-dessus. $\square$

On considère maintenant le groupe G^F donné par le noyau du Frobenius relatif $F : G \rightarrow G^{(p)}$, on a donc une suite exacte de groupes :

$$1 \rightarrow G^F \rightarrow G \rightarrow G^{(p)} \rightarrow 1.$$

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} X & & \xrightarrow{F_X} & & X \\ & \searrow F & & \searrow \text{pr}_1 & \\ & & X^{(p)} & \xrightarrow{\text{pr}_1} & X \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & S & \xrightarrow{F_S} & S \end{array}$$

Soit $T \rightarrow X$ un G^F -torseur. Le $G^{(p)}$ -torseur $F_X^*(T \wedge^{G^F} G)$ est muni d'une connexion canonique via l'isomorphisme $F^* \text{pr}_1^*(T \wedge^{G^F} G) \simeq F_X^*(T \wedge^{G^F} G)$ et le lemme 4.2, cette connexion est intégrable de p -courbure nulle par le lemme 4.4. De plus, on a des isomorphismes canoniques de $G^{(p)}$ -torseurs via le lemme 1.5 :

$$F_X^*(T \wedge^{G^F} G) \simeq (T \wedge^{G^F} G) \wedge^G G^{(p)} \simeq G^{(p)} \times X. \quad (90)$$

On obtient donc un diagramme 2-commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G^F\text{-Torseurs}/X & \longrightarrow & \text{At}(G^{(p)}, X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & G^{(p)}\text{-Torseurs}/X \end{array}$$

qui permet de définir un foncteur :

$$G^F\text{-Torseurs}/X \rightarrow \text{At}(G^{(p)} \times X). \quad (91)$$

Soit $\text{At}(G^{(p)} \times X)^{K=\psi=0}$ la sous-catégorie pleine de $\text{At}(G^{(p)} \times X)$ des objets dont la connexion est intégrable de p -courbure nulle. Par construction le foncteur (91) se factorise via $\text{At}(G^{(p)} \times X)^{K=\psi=0}$.

LEMME 4.6. *Si k est parfait le foncteur :*

$$G^F\text{-Torseurs}/X \rightarrow \text{At}(G^{(p)} \times X)^{K=\psi=0} \quad (92)$$

défini ci-dessus est une équivalence de catégories.

DÉMONSTRATION. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} G\text{-Torseurs}/X & \longrightarrow & G^{(p)}\text{-Torseurs}/X^{(p)} & \longrightarrow & \text{At}(G^{(p)}, X)^{K=\psi=0} & \longrightarrow & G^{(p)}\text{-Torseurs}/X \\ \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\ G^F\text{-Torseurs}/X & \longrightarrow & \text{At}(G^{(p)} \times X)^{K=\psi=0} & \longrightarrow & * & & \end{array}$$

Le diagramme à l'extérieur du diagramme ci-dessus est 2-cartésien par exactitude de $1 \rightarrow G^F \rightarrow G \rightarrow G^{(p)} \rightarrow 1$. Le diagramme à droite est aussi 2-cartésien, il en découle que le diagramme à gauche est 2-cartésien. Comme k est parfait la projection $\text{pr}_1 : X^{(p)} \rightarrow X$ est un isomorphisme, le foncteur $G\text{-Torseurs}/X \rightarrow G^{(p)}\text{-Torseurs}/X^{(p)}$ est donc une équivalence de catégories. Le foncteur $G^{(p)}\text{-Torseurs}/X^{(p)} \rightarrow \text{At}(G^{(p)}, X)^{K=\psi=0}$ est une équivalence de catégories par le théorème 4.2, on en déduit l'équivalence du lemme. $\square$

DÉFINITION 4.8. *En considérant $G^{(p)}(X)$ comme une catégorie discrète, on peut définir un foncteur $\partial : G^{(p)}(X) \rightarrow G^F\text{-Torseurs}/X$ comme suit : à toute section $g \in G^{(p)}(X)$ on associe $\partial(g) = X \times_{g, G^{(p)}} G$ vu comme G^F -torseur sur X .*

LEMME 4.7. *Le diagramme suivant est 2-commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} G^F\text{-Torseurs}/X & \longrightarrow & \text{At}(G^{(p)} \times X) \\ \partial \uparrow & & s_e + \uparrow \\ G^{(p)}(X) & \xrightarrow{d\log} & H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes \text{Lie } G^{(p)}). \end{array} \quad (93)$$

DÉMONSTRATION. Soient $g \in G^{(p)}(X)$ et $T = X \times_{g, G^{(p)}} G$. Le G -torseur $T \wedge^{G^F} G$ sur X est isomorphe au G -torseur trivial $G^{(p)} \times X$, via l'isomorphisme $((x, g), g') \mapsto (gg', x)$ qui induit un isomorphisme :

$$(F_X^*(T \wedge^{G^F} G), s_{can}) \simeq (G^{(p)} \times X, s_e).$$

Notons ψ la trivialisation donnée par (90), en composant ψ avec l'isomorphisme ci-dessus, l'isomorphisme :

$$G^{(p)} \times X \rightarrow F_X^*(T \wedge^{G^F} G) \rightarrow G^{(p)} \times X$$

est donné par $R_g : G^{(p)} \times X \rightarrow G^{(p)} \times X$. Ainsi on a :

$$\psi^* s_{can} - s_e = R_g^* s_e - s_e = d \log(g).$$

□

THÉORÈME 4.3. *Supposons k parfait. Notons encore ∂ l'application $G^{(p)}(X) \rightarrow H^1(X, G^F)$ obtenue via le foncteur $\partial : G^{(p)}(X) \rightarrow G^F\text{-Torseurs}/X$. Il existe une unique bijection :*

$$H^1(X, G^F) \rightarrow H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes \text{Lie } G^{(p)})^{K=\psi=0},$$

qui commute aux changements de base étales sur X et telle que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, G^F) & \longrightarrow & H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes \text{Lie } G^{(p)})^{K=\psi=0} \\ \partial \uparrow & \nearrow d \log & \\ G^{(p)}(X) & & \end{array}$$

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 4.6 et le lemme 4.7 on a un diagramme 2-commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G^F\text{-Torseurs}/X & \xrightarrow{\sim} & \text{At}(G^{(p)} \times X)^{K=\psi=0} \\ \partial \uparrow & & \wr \uparrow \\ G^{(p)}(X) & \xrightarrow{d \log} & H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes \text{Lie } G^{(p)})^{K=\psi=0}. \end{array}$$

La catégorie $G^F\text{-Torseurs}/X$ est alors équivalente à la catégorie discrète $H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes \text{Lie } G^{(p)})^{K=\psi=0}$, on peut donc remplacer $G^F\text{-Torseurs}/X$ par la catégorie discrète donnée par $H^1(X, G^F)$. La bijection recherchée est alors donnée par le diagramme ci-dessus. L'unicité découle du corollaire 4.1. □

REMARQUE 4.4. Soit G un schéma en groupes quelconque sur un corps k , et X un schéma sur k . Un G -torseur fpqc $P \rightarrow X$ est dit localement isotrivial si tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U et un recouvrement fini étale $U' \rightarrow U$ tel que $P \times_U U' \rightarrow U'$ est un G -torseur trivial. Lorsque G est affine et lisse sur k , tout fpqc toseur est localement isotrivial : [21, Lemme XIV 1.4]. Le groupe G est dit spécial si tout G -torseur fpqc localement isotrivial est trivial pour la topologie de Zariski : [22, §4.4] ou [9, §3]. Si G est un groupe affine et lisse, spécial sur k , alors nous pouvons remplacer le mot "étale" par "Zariski" dans le théorème 4.3 et le corollaire 4.1.

4.6. Cas d'un groupe commutatif

Supposons k parfait de caractéristique $\neq 2$ et G affine lisse et abélien. Soit $\Omega \in H^0(X, \Omega_{X/S}^1 \otimes \text{Lie } G)$. D'après la proposition 3.1 la courbure de la connexion $s_e + \Omega$ sur le toseur trivial $G \times X$ est donnée par $K(s_e + \Omega) = d\Omega$. L'ensemble de départ de l'application p -courbure, définition 4.6, est alors donné par $H^0(X, Z(\Omega_{X/S}^1)) \otimes_k \text{Lie}(G)$. Dans ce cas particulier l'application p -courbure peut être décrite comme suit :

PROPOSITION 4.5. *L'application p -courbure :*

$$H^0(X, Z(\Omega_{X/S}^1)) \otimes_k \text{Lie}(G) \rightarrow H^0(\Omega_{X^{(p)}/S}^1 \otimes_k \text{Lie}(G)) \quad (94)$$

est donnée par : $W^ \otimes \cdot^p - C \otimes \text{Id}$, où W est la projection $X^{(p)} \rightarrow X$, $\cdot^p$ est l'application puissance p -ième sur $\text{Lie}(G)$, et C l'opérateur de Cartier.*

DÉMONSTRATION. Voir [4, A.8] ou [1, Lemma 2.2]. $\square$

4.7. Produit semi-direct

Nous retournons maintenant pour terminer cette section à l'exemple des $\mu_p \ltimes \alpha_p$ -torseurs. Supposons k parfait et $G = \mathbb{G}_a \ltimes \mathbb{G}_m$.

On sait par la proposition 2.8, ou par lemme 4.6, que les classes d'isomorphie de $\mu_p \ltimes \alpha_p$ -torseurs sont en bijection avec les connexions intégrables de p -courbure nulle sur le G -torseur trivial. Une connexion sur le G -torseur trivial est donnée par une matrice :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $\omega, \omega' \in \Gamma(X, \Omega_{X/S}^1)$. La courbure associée à une telle connexion est donnée par :

$$K(s_e + \Omega) = d\Omega + \Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} d\omega & d\omega' + \omega \wedge \omega' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

via le lemme 2.2 ou la proposition 3.1.

PROPOSITION 4.6. *Gardons les notations ci-dessus. Supposons $K(s_e + \Omega) = 0$, donc $d\omega = 0$. La p -courbure $\psi_{s_e + \Omega}$ est nulle si et seulement si $C\omega = \omega$ et, pour tout ouvert U de X et tout $f \in \mathbb{G}_m(U)$ tel que $\omega = df/f$, on a $C(f\omega') = 0$.*

DÉMONSTRATION. Pour pouvoir écrire $C(f\omega') = 0$ il faut que $f\omega'$ soit fermée, or cela est une conséquence de la condition $d\omega' + \omega \wedge \omega' = 0$. D'après le corollaire 4.1, la p -courbure $\psi_{s_e + \Omega}$ est nulle si et seulement si Ω est Zariski localement dans l'image de l'application $d \log$. Si

$$g = \begin{pmatrix} f & f' \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

est une section de $G = \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$, $g^{-1}dg$ est donné par :

$$\begin{pmatrix} f^{-1}df & f^{-1}df' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La p -courbure $\psi_{s_e + \Omega}$ est donc nulle si et seulement si Zariski localement il existe des sections f et f' de $\mathbb{G}_m$ et $\mathbb{G}_a$ respectivement telles que $\omega = df/f$ et $\omega' = f^{-1}df'$. Il s'ensuit, par les cas $G = \mathbb{G}_m$ et $G = \mathbb{G}_a$, que si la deuxième condition de la proposition est vérifiée on a $\psi_{s_e + \Omega} = 0$.

Dans le sens inverse, il découle du cas $G = \mathbb{G}_m$ que $C\omega = \omega$. Soit maintenant U un ouvert de X et $f \in \mathbb{G}_m(U)$ tel que sur U on a $\omega = df/f$. Par hypothèse, il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ et pour tout $i \in I$ une paire $(f_i, f'_i) \in G(U_i)$, telle que $\omega|_{U_i} = df_i/f_i$ et $\omega'|_{U_i} = f_i^{-1}df'_i$. Sur tout $U \cap U_i$, comme X est lisse sur k , il existe $f''_i \in \mathbb{G}_m((U \cap U_i)^{(p)})$ telle que $f|_{U \cap U_i} = F^*(f''_i)f_i|_{U \cap U_i}$. Ainsi, par p^{-1} -linéarité de l'opérateur de Cartier, pour tout $i \in I$, on a : $C(f|_{U \cap U_i}\omega'|_{U \cap U_i}) = f''_i C(f_i|_{U \cap U_i}\omega'|_{U \cap U_i}) = 0$, on obtient donc $C(f\omega'_U) = 0$. $\square$

COROLLAIRE 4.2. *L'ensemble des classes d'isomorphie de $\mu_p \rtimes \alpha_p$ -torseurs sur X est en bijection avec l'ensemble des couples (ω, ω') , où $\omega, \omega' \in \Gamma(X, \Omega_{X/S}^1)$, tels que :*

- (1) $d\omega = d\omega' + \omega \wedge \omega' = 0$,
- (2) $C\omega = \omega$,
- (3) *pour tout ouvert U de X et $f \in \mathbb{G}_m(U)$ tels que $\omega|_U = df/f$, on a $C(f\omega'_U) = 0$.*

DÉMONSTRATION. Découle des propositions 2.8 et 4.6. $\square$

Bibliographie

- [1] M. Artin and J. S. Milne, *Duality in the flat cohomology of curves*, Invent. Math. **35** (1976), 111–129. MR0419450
- [2] M. F. Atiyah, *Complex analytic connections in fibre bundles*, Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957), 181–207. MR0086359
- [3] A. Beilinson and J. Bernstein, *A proof of Jantzen conjectures*, I. M. Gel’fand Seminar, 1993, pp. 1–50.
- [4] Tsao-Hsien Chen and Xinwen Zhu, *Non-abelian Hodge theory for algebraic curves in characteristic p* , Geom. Funct. Anal. **25** (2015), no. 6, 1706–1733. MR3432156
- [5] P. Deligne, *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, 1st ed., Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1970.
- [6] P. Deligne and J. S. Milne, *Tannakian categories*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 900, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1981.
- [7] M. Demazure and P. Gabriel, *Groupes algébriques. Tome I: Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*, Masson & Cie, Éditeur, Paris, 1970.
- [8] A. Grothendieck, *Technique de descente et théorèmes d’existence en géométrie algébrique. I. Généralités. Descente par morphismes fidèlement plats*, Séminaire Bourbaki **5** (1958), 299–327.
- [9] ———, *Torsion homologique et sections rationnelles*, Séminaire Claude Chevalley **3** (1958), 1–29.
- [10] ———, *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Lecture notes in mathematics, vol. 224, Springer-Verlag, 1971.
- [11] G. Hochschild, *Simple algebras with purely inseparable splitting fields of exponent 1*, Trans. Amer. Math. Soc. **79** (1955), 477–489. MR0070961
- [12] Luc Illusie, *Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline*, Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure **12** (1979), no. 4, 501–661.
- [13] N. Jacobson, *Lie algebras*, Dover books on advanced mathematics, Dover, 1979.
- [14] Nicholas M. Katz, *Nilpotent connections and the monodromy theorem : applications of a result of turrittin*, Publications Mathématiques de l’IHÉS **39** (1970), 175–232 (eng).
- [15] Adrian Langer, *Semistable modules over Lie algebroids in positive characteristic*, Doc. Math. **19** (2014), 509–540. MR3218782
- [16] Gérard Laumon and L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, 1st ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 39, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
- [17] James S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.
- [18] ———, *Algebraic groups (v2.00)*, 2015. Available at www.jmilne.org/math/.
- [19] Madhav V. Nori, *The fundamental group-scheme*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **91** (1982), no. 2, 73–122. MR682517

- [20] A. Ogus and V. Vologodsky, *Nonabelian Hodge theory in characteristic p* , Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **106** (2007), 1–138. MR2373230
- [21] Michel Raynaud, *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 119, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970. MR0260758
- [22] J.-P. Serre, *Espaces fibrés algébriques*, Séminaire Claude Chevalley **3** (1958), 1–37 (fre).
- [23] C.S. Seshadri, *L'opération de cartier. applications*, Séminaire Claude Chevalley **4** (Unknown Month 1958), 1–26 (fre).
- [24] The Stacks Project Authors, *stacks project*, 2016.
- [25] Angelo Vistoli, *Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*, Fundamental algebraic geometry, 2005, pp. 1–104. MR2223406
- [26] W.C. Waterhouse, *Introduction to affine group schemes*, 1st ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 66, Springer-Verlag New York, 1979.