





THÈSE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE 1

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGENIEUR

DOMAINE DE RECHERCHE : AUTOMATIQUE

Koffi Mawussé Djidula Motchon

Caractérisation de la discernabilité des systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires affines en la commande

Présentée et soutenue publiquement le 19 mai 2016 Devant la Commission d'Examen composée de :

Rapporteurs :	Didier Maquin	Professeur, Université de Lorraine
	Michel Kinnaert	Professeur, Université Libre de Bruxelles
Examinateurs :	Frédéric Kratz	Professeur, INSA Centre-Val de Loire, Bourges
	Jean-Philippe Cassar	Professeur, Université de Lille 1 (Directeur de thèse)
	Stephan De Bièvre	Professeur, Université de Lille 1 (Co-directeur)
	Komi Midzodzi Pekpe	Maître de conférences, Université de Lille 1 (Co-directeur)
Invité :	Vincent Cocquempot	Professeur, Université de Lille 1

Remerciement

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre le Laboratoire CRIStAL et le Laboratoire Paul Painlevé. Elle doit son aboutissement à des personnes qui m'ont entouré et conseillé à qui j'aimerais adresser mes sincères remerciements.

D'abord, je remercie très sincèrement Prof. Jean-Philippe Cassar, pour avoir accepté de diriger mes travaux. Vous avez su le faire avec beaucoup de patience et de justesse et je vous en remercie. Votre grande implication dans ce projet du début jusqu'à la fin malgré vos nombreuses occupations liées au poste de vice-président que vous occupez à l'Université de Lille 1 a été très déterminant dans l'aboutissement de ce projet. Je n'oublierai pas le cadeau de meilleur vœux 2014 que vous m'avez fait, les premiers calculs qui ont posés les bases de la condition nécessaire et suffisante de discernabilité de notre papier IEEE-TAC. Merci pour toute la confiance que vous m'avez accordée en me laissant beaucoup d'autonomie dans l'exploration de ce sujet. J'ai beaucoup appris auprès de vous tant sur le plan humain que professionnel et je vous en suis très reconnaissant.

Je remercie de manière équivalente Prof. Stephan De Bièvre, coordinateur scientifique du Labex CEMPI pour avoir accepté de co-diriger ce travail. Merci aussi pour toute la confiance que vous m'avez accordée durant ces trois longues années. Vous avez toujours été à mon écoute durant toute la période de ma thèse. Votre humour a su me remonter le moral toutes les fois que j'arrivais désespéré dans votre bureau à cause d'un problème que je n'arrivais pas à résoudre. J'ai également beaucoup appris auprès de vous. Merci pour nos échanges scientifiques et toute votre disponibilité lors des relectures à la "loupe" de nos différents articles.

J'exprime également mes remerciements au Docteur Midzodzi Komi Pekpe, Maître de Conférence à l'Université de Lille 1 qui a aussi co-encadré ce travail. Cette thèse n'aurait pas vu le jour sans votre implication dans la réussite de mon projet professionnel à l'issue de ma Maî-

Remerciements

trise ès-science Mathématiques. Je vous en serai éternellement reconnaissant. Les nombreux échanges scientifiques qu'on a pu avoir ensemble ont également beaucoup contribué à l'aboutissement de cette thèse. Merci pour les différentes suggestions et critiques essentielles que vous avez apportées à ce travail.

Je suis honoré et je remercie sincèrement Prof. Didier Maquin et Prof. Michel Kinnaert, d'avoir accepté de rapporter sur cette thèse. Je remercie également Prof. Frédéric Kratz pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens également à remercier Prof. Vincent Cocquempot pour avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse et pour m'avoir accueilli en 2012 au sein de son équipe, l'équipe STF (Systèmes Tolérants au Fautes) qui est devenue l'équipe DICOT du Laboratoire CRIStAL. Merci également pour les discussions que nous avons pu avoir sur le sujet, notamment sur votre fameuse condition de rang de discernabilité qui nous a occupé au tout début de cette thèse. J'adresse également mes remerciements à tous les membres de l'équipe DICOT et ceux de l'équipe voisine, l'équipe MOCIS pour leur sympathie. Particulièrement, je remercie mes amis thésards de ces deux équipes pour les bons moments passés ensemble.

Mes remerciement vont aussi à mon ami Yinoussa Adagolodjo avec qui nous avons partagé les bons et mauvais moments de notre vie de thésard. Merci également pour m'avoir accueilli chez toi pendant les vacances d'été 2015. J'ai pu profiter du calme de ta chambre pour corriger ma thèse et rédiger les grandes lignes du chapitre 5. Je te souhaite bonne chance et bon courage pour les années restantes de ta thèse. Merci aussi à Abdoukerim Assanti, Issa Chérif Geraldo, Kokou Anoukou, Kwami Seyram Sossoe, Emmanuelle et maman Joséphine pour leurs encouragements et différents conseils qui ont joués un rôle dans l'aboutissement de ce projet.

Cette thèse n'aurait atteint sa fin sans les encouragements de mes frères, sœurs, tantes et oncles qui n'ont cessé de me soutenir dans tous mes projets. Je vous en suis profondément reconnaissant. J'adresse aussi particulièrement mes remerciements à mon père pour tous les sacrifices qu'il a fait afin que je réussisse dans ma vie et dans mes études. Je n'oublie pas de dire merci à ma très chère et douce mère pour toute l'attention dont elle a su m'entourer durant les vingt-deux années qu'elle m'a vu grandir. Comme j'aurais voulu que tu sois à mes côtés aujourd'hui!

Enfin, je remercie ma compagne Zénabou et mon fils Emmanuel pour la patience dont ils ont su faire preuve à mon égard tout au long de ces trois dernières années. Merci pour m'avoir supporté et soutenu durant toute ma thèse. A ma mère pour tout son amour et tous ses sacrifices. J'y suis presque ! Repose en paix maman.

Table des matières

Table des matières

Ta	able o	des fig	ures		ix
Li	iste d	les tab	leaux		xi
Li	iste d	les syn	nboles et	abréviations	xiii
In	trod	uction	générale	2	1
1	Not	ions ir	ntroducti	ives	5
	1.1	Descri	ption des	systèmes	6
	1.2	Notion	n de sortie	es admissibles d'un système relativement à une commande $\ . \ . \ .$	8
	1.3	Discer	nabilité p	ar comparaison des ensembles de sorties admissibles $\ldots \ldots \ldots$	10
		1.3.1	Stricte d	liscernabilité de deux systèmes dynamiques	10
		1.3.2	Discerna	ıbilité stricte : état de l'art	13
		1.3.3	Zone d'i	ndiscernabilité des systèmes non perturbés	16
		1.3.4	Discerna	ıbilité contrôlable de deux systèmes dynamiques	20
			1.3.4.1	Faible discernabilité contrôlable	20
			1.3.4.2	Forte discernabilité contrôlable	24
			1.3.4.3	Discernabilité contrôlable : etat de l'art	26
	1.4	Discer	nabilité à	travers les résidus de parité	28
		1.4.1	Méthode	e de génération des résidus de parité d'un système	28
		1.4.2	Discerna	bilité de deux systèmes à travers leurs résidus de parité	34
			1.4.2.1	Faible résidu-discernabilité	34
			1.4.2.2	Forte résidu-discernabilité	38

Table	des	matières
-------	----------------------	----------

	1.5	Conclu	usion	39
2	Car	actéris	sation de la discernabilité faible des SDL non perturbés	41
	2.1	Faible	résidu-discernabilité des systèmes linéaires non perturbés	43
		2.1.1	Généralisation de la condition de rang de Cocquempot <i>et al.</i>	43
		2.1.2	Lien entre la faible résidu-discernabilité et les indices d'observabilité des	
			systèmes	47
		2.1.3	Lien entre la résidu-discernabilité et l'équivalence de systèmes $\ .\ .\ .$.	49
	2.2	Faible	discernabilité contrôlable des systèmes linéaires non perturbés \ldots .	58
		2.2.1	Équivalence entre résidu-discernabilité et discernabilité contrôlable	58
		2.2.2	Caractérisation de la faible discernabilité contrôlable des systèmes non	
			perturbés	62
	2.3	Conclu	usion	64
3	Car	actéris	sation de la zone d'indiscernabilité des SDL non perturbés	65
	3.1	Conce	pts fondamentaux et résultats préliminaires	67
		3.1.1	De l'équation intégrale à l'équation algébrique	67
		3.1.2	Solutions homogènes et particulières de l'équation algébrique	69
		3.1.3	Quelques propriétés fondamentales de l'opérateur $\mathbb F$	72
		3.1.4	Indice de similarité des paramètres de Markov	74
	3.2	Carac	térisation de la zone d'indiscernabilité	79
		3.2.1	Zone d'indiscernabilité : cas $\rho = 2n$ et $\rho = +\infty$	79
		3.2.2	Zone d'indiscernabilité : cas $0 \le \rho \le 2n - 1$	84
			3.2.2.1 Détermination des solutions homogènes	87
			3.2.2.2 Détermination d'une solution particulière	93
			3.2.2.3 Caractérisation de la zone d'indiscernabilité : cas $0 \le \rho \le 2n - 1$	99
	3.3	Quelq	ues applications de la zone d'indiscernabilité	102
		3.3.1	Conditions de discernabilité stricte des systèmes SISO et MISO $\ . \ . \ .$	102
		3.3.2	Conditions de forte discernabilité contrôlable	106
	3.4	Conclu	usion	109
4	For	te disc	ernabilité contrôlable des SDL perturbés	113
	4.1	Introd	luction	113
	4.2	Quelq	ues éléments de Topologie et d'analyse fonctionnelle	116
		4.2.1	Notions de distance et de norme	116
		4.2.2	Espace métrique complet	118

		4.2.3	Ouverts et fermés d'un espace métrique
2	4.3	Équiva	dence entre forte discernabilité et forte résidu-discernabilité $\ldots \ldots \ldots 121$
2	4.4	Caract	érisation géométrique de la forte discernabilité $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 124$
		4.4.1	Condition de forte résidu-discernabilité
		4.4.2	Indice de forte résidu-discernabilité
4	4.5	Robus	tesse de la forte discernabilité vis-à-vis des perturbations 137
2	4.6	Conclu	$1 sion \ldots 144$
5	Disc	ernab	ilité des systèmes non-linéaires affines en la commande 145
[5.1	Quelqu	les éléments de géométrie différentielle
		5.1.1	Dérivée de Lie et crochet de Lie
		5.1.2	Système de changement de coordonnées locales et globales 151
		5.1.3	Sous-variété différentielle
į	5.2	Forme	normale du système augmenté
		5.2.1	Degré relatif du système augmenté
		5.2.2	Forme normale du système augmenté : cas $\rho < 2n$
		5.2.3	Forme normale du système augmenté : cas $\rho = 2n$
[5.3	Caract	érisation de la zone d'indiscernabilité $\ldots \ldots 166$
		5.3.1	Zone d'indiscernabilité : cas $\rho = 2n$
		5.3.2	Zone d'indiscernabilité : cas $\rho < 2n$
		5.3.3	Résolution de l'équation fonctionnelle (5.33)
		5.3.4	Caractérisation de la zone d'indiscernabilité
ļ	5.4	Condit	tions de discernabilité stricte et de forte discernabilité des systèmes SISO
		et MIS	30
		5.4.1	Conditions de discernabilité stricte des systèmes SISO et MISO \ldots 185
		5.4.2	Condition de discernabilité contrôlable
	5.5	Conclu	$1 sion \ldots 188$
Coi	nclu	sion g	énérale et perspectives 191
An	nexe	e A In	versibilité de $M_2^{-1} - M_1^{-1}$ et preuve de l'égalité $H = M_2^{-1} K_2 - M_2^{-1} G$ 195
L	A.1	Inversi	bilité de la matrice $M_2^{-1} - M_1^{-1}$
L	A.2	Preuve	e de l'égalité $H = M_2^{-1} K_2 - M_2^{-1} G \dots $

Annexe B Formule explicite de la fonction de projection des écarts de sorties 197

Annexe C	Preuve du lemme 2.1.1	199
Annexe D S_2	Décomposition de Kalman en forme observable des systèmes S_1	et 201
Annexe E	Preuve de la proposition 3.1.5	205
Annexe F	Généralisation des résultats des théorèmes 3.2.2 et 3.2.8	207
Annexe G	Preuve du lemme 3.2.17	2 11
Annexe H	Preuve de la relation (3.38)	215
Annexe I	Système hydraulique à deux cuves	219
Bibliograp	hie	223

Table des figures

1.1	Illustration graphique de la stricte discernabilité
1.2	Premier cas de faible discernabilité contrôlable
1.3	Second cas de faible discernabilité contrôlable
1.4	Troisième cas de discernabilité contrôlable
1.5	Forte discernabilité contrôlable
1.6	Indice d'observabilité κ_i
1.7	Lien entre la stricte discernabilité, la discernabilité contrôlable et la résidu-
	discernabilité
3.1	Système masse-ressort
3.2	Commandes de la zone d'indiscernabilité : cas $\rho = 2n \dots $
3.3	Représentation graphique de $\boldsymbol{\gamma}^{\mathbb{F}}$
4.1	Influence des perturbations sur la propriété de forte discernabilité 115
4.2	Distance de ξ à l'image de la matrice M
4.3	Système hydraulique
5.1	Définition d'une sous-variété par redressement
5.2	Pendule S_i
5.3	Commande u qui rend indiscernable les pendules S_1 et S_2
5.4	Trajectoire d'état des pendules S_1 et S_2
5.5	Écart entre les sorties des pendules S_1 et S_2
5.6	Commande u qui rend indiscernable les pendules S_1 et S_2
5.7	Trajectoire d'état des pendules S_1 et S_2

5.8 Écart entre les sorties des pendules S_1 et S_2	184
---	-----

Liste des tableaux

1.1	Définition de la discernabilité stricte et de la discernabilité contrôlable 10
1.2	Définition de la faible et de la forte résidu-discernabilité
1.3	Discernabilité des systèmes dynamiques linéaires non perturbés $\ldots \ldots \ldots 40$
3.1	Zone d'indiscernabilité des systèmes linéaires
3.2	Caractérisation des domaines $\mathscr{U}_{\text{dis}}^{\text{frt}}(S_1, S_2), \mathscr{X}_{\text{ind}}^o(S_1, S_2)$ et $\mathscr{U}_{\text{ind}}^{str}(S_1, S_2)$ 110
3.3	État de stricte discernabilité et de forte discernabilité des systèmes mono-sortie
	suivant les valeurs de ρ
3.4	Conditions de stricte discernabilité et de forte discernabilité des systèmes li-
	néaires
5.1	Zone d'indiscernabilité des systèmes non-linéaires affines en la commande 189
5.2	Caractérisation des domaines $\mathscr{U}_{dis}^{frt}(S_1, S_2), \mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$ et $\mathscr{U}_{ind}^{str}(S_1, S_2)$ 189
5.3	État de stricte discernabilité et de forte discernabilité des SNAC suivant les
	valeurs de ρ
5.4	Conditions de stricte discernabilité et de forte discernabilité des SNAC 190

Liste des symboles et abréviations

Liste des symboles et abréviations

Liste des symboles

Ensembles					
Ø	Ensemble vide				
\mathbb{N}	Ensemble des nombres entiers naturels				
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels				
\mathbb{R}_+	Ensemble des nombres réels positifs				
J	Sous-intervalle de \mathbb{R}_+ contenant l'origine $(0 \in \mathcal{I})$				
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes				
\mathbb{R}^k	Espace euclidien canonique de dimension k				
$\mathbb{R}^{k imes s}$	Ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb R$ possédant				
	k lignes et s colonnes				
$\mathbb{R}^{k imes (ullet)}$	Ensemble des matrices ayant k lignes				
$\mathrm{GL}_{k}\left(\mathbb{R} ight)$	Ensemble des matrices inversibles de $\mathbb{R}^{k\times k}$				
$\mathscr{C}\left(\mathscr{D},\mathbb{R}^{s} ight)$	Ensemble des fonctions continues de ${\mathscr D}$ vers ${\mathbb R}^s$				
$\mathscr{C}^k\left(\mathscr{D},\mathbb{R}^s ight)$	Ensemble des fonctions continues de ${\mathscr D}$ vers ${\mathbb R}^s$				
	qui sont k fois différentiables sur ${\mathscr D}$				
$\mathscr{M}\left(\mathfrak{I},\mathbb{R}^{s} ight)$	Ensemble des fonctions continues par morceaux sur ${\mathbb J}$				
	et à valeurs dans \mathbb{R}^s				
$\mathscr{C}^{1}_{\mathrm{exp}}\left(\mathbb{R}_{+},\mathbb{R}^{s} ight)$	Ensemble des fonctions continues de \mathbb{R}_+ vers \mathbb{R}^s , dérivables				
	sur \mathbb{R}_+ et ayant un ordre exponentiel à l'infini				

$\mathscr{A}\left(\mathfrak{I},\mathbb{R}^{s} ight)$	Ensemble des fonctions de ${\mathbb J}$ vers ${\mathbb R}^s$ qui sont analytiques
$\mathrm{L}^{1}\left(\mathcal{I},\mathbb{R}^{s} ight)$	Ensemble des fonctions de ${\mathfrak I}$ vers ${\mathbb R}^s$ dont la valeur
	absolue est intégrable sur $\mathcal I$
\mathscr{H}_{γ}	Demi-plan complexe à droite de l'axe vertical $\Re(p) = \gamma$
U	Espace fonctionnel des commandes
\mathscr{X}^o_i	Ensemble des états initiaux du système dynamique ${\cal S}_i$
\mathscr{W}_i	Espace fonctionnel des entrées déterministes inconnues
	du système dynamique S_i
$\mathscr{S}_{i, \mathtt{I}}\left(u, \mathscr{X}_{i}^{o}, \mathscr{W}_{i}\right)$	Ensemble des sorties u -compatibles avec le modèle d'état
	du systèmes dynamique S_i
$\mathscr{S}_{i, \mathtt{I}}\left(u, \mathscr{X}_{i}^{o}, \{0_{\mathscr{W}}\}\right)$	Ensemble des sorties u -compatibles avec le modèle nominal
	du système dynamique S_i
$\mathscr{Z}_{\mathrm{ind}}\left(S_{1},S_{2}\right)$	Zone d'indiscerna bilité de S_1 et S_2
$\mathscr{U}_{\mathrm{ind}}^{str}\left(S_{1},S_{2} ight)$	Ensemble des commandes qui rendent indiscernables S_1 et S_2
$\mathscr{U}_{\mathrm{dis}}^{\mathrm{fbe}}\left(S_{1},S_{2}\right)$	Ensemble des commandes qui rendent faiblement indiscernables
	les systèmes S_1 et S_2
$\mathscr{U}_{\mathrm{dis}}^{\mathrm{frt}}\left(S_{1},S_{2} ight)$	Ensemble des commandes qui rendent fortement discernables
	les systèmes S_1 et S_2
	Variables scalaires
t	Variable continue indiquant le temps
p	Variable complexe de l'opérateur de Laplace
n	Nombre de variables d'état des systèmes dynamiques S_1 et S_2
m	Nombre de mesures des systèmes dynamiques S_1 et S_2
l	Nombre de commandes des systèmes dynamiques S_1 et S_2

Nombre de variables du vecteur des perturbations des systèmes dynamiques S_1 et S_2

Indice	d'obsei	rvabilit	é du	système	dynai	mique ,	S_i	

Indice de similarité des paramètres de Markov de S_1 et S_2

Matrices et opérations sur les matrices

0_s	Vecteur nul de \mathbb{R}^s
$0_{k imes s}$	Matrice nulle de $\mathbb{R}^{k \times s}$
I_k	Matrice identité de $\mathbb{R}^{k \times k}$
A_i	Matrice d'état du système dynamique ${\cal S}_i$

 \mathbf{d}

 $oldsymbol{\kappa}_i$

ρ

A	Matrice d'état du système augmenté
B_i	Matrice de commande de S_i
В	Matrice de commande du système augmenté
C_i	Matrice d'observation de S_i
C	Matrice d'observation du système augmenté
D_i	Matrice d'action de S_i
D	Matrice d'action du système augmenté
$\mathbb{O}_i^{[k]}$	Matrice d'observabilité d'ordre k de S_i
$\mathbb{O}_i = \mathbb{O}_i^{[n-1]}$	Matrice d'observabilité de S_i
$\mathbb{O}_{i\perp}^{[k]}$	Matrice de parité d'ordre k du système S_i
$\mathrm{Im}\left(M ight)$	Image de la matrice M
$\operatorname{Ker}\left(M\right)$	Noyau de la matrice M
$\operatorname{rang}\left(M\right)$	Rang de la matrice M
$M^{ op}$	Transposée de la matrice M
M^{-1}	Inverse de la matrice M
M^{\dagger}	Pseudo-inverse de la matrice M
$\det\left(M\right)$	Déterminant de la matrice M
$\sigma\left(M ight)$	Spectre de la matrice M
$oldsymbol{\lambda}_M$	Rayon spectral de la matrice M

Fonctions et opérateurs

x_i	Variable d'état du système dynamique S_i
x	Variable d'état du système augmenté associé à S_1 et S_2
u	Commande du système dynamique S_i
y_i	Signal des sorties du système dynamique S_i
y	Variable de sortie du système augmenté associé à S_1 et S_2
w_i	Variable des entrées déterministes inconnues de S_i
w	Variable des entrées déterministes inconnues du système augmenté
$\mathfrak{R}_i^{[k]}$	Résidu de parité d'ordre k du système S_i
$L_{\psi}\varphi$	Dérivée de Lie de φ dans la direction de ψ
$L^k_\psi \varphi$	Dérivée de Lie d'ordre k de φ dans la direction de ψ
$[\varphi, \psi]$ ou $ad_\psi \varphi$	Crochet de Lie de φ et ψ
$ad^k_\psi arphi$	Crochet de Lie d'ordre k de φ et ψ
∇	Opérateur gradient
\mathcal{L}^{-1}	Opérateur inverse de la transformée de Laplace

\Re	Fonction partie réelle
*	Produit de convolution
Ē	Symbole d'égalité de fonctions sur ${\mathbb J}$
\langle,\rangle	Produit scalaire canonique

Liste des abréviations

SDL	Système Dynamique Linéaire
SNAC	Système Non-linéaire Affine en la Commande
SISO	Single-Input, Single-Output
MISO	Multiple-Input, Single-Output
MIMO	Multiple-Input, Multiple-Output

Introduction générale

La complexité dans la description de certains systèmes physiques a donné naissance aux modèles hybrides. Ces modèles mathématiques sont adaptés pour représenter les systèmes dynamiques dont le comportement fait intervenir à la fois des phénomènes continus et discrets. De tels systèmes sont appelés systèmes dynamiques hybrides. La dynamique continue de ces systèmes est décrite par un ensemble fini de systèmes d'équations différentielles. Chaque système d'équations différentielles représente un mode de fonctionnement du système et il modélise ce dernier dans certaines conditions données. La dynamique discrète décrit le passage d'un mode de fonctionnement à un autre. L'évolution globale du système résulte de l'interaction entre la dynamique continue et la dynamique discrète.

La question de l'identification ou de la détection du mode actif (reconstruction de l'évolution discrète) à partir des données entrées-sorties a retenu ces dernières années l'attention de la communauté scientifique pour ses nombreuses applications dont la synthèse de certaines lois de commande, l'analyse de la stabilité ainsi que la surveillance des systèmes dynamiques hybrides. Or, ce problème d'identification ne peut être *a priori* résoluble que si les modes de fonctionnement ont des comportement entrées-sorties discernables.

Pour mieux cerner la question de l'identification du mode actif des systèmes hybrides, il est nécessaire de déterminer les propriétés structurelles des modes qui expliquent leurs aptitudes à avoir des comportement entrées-sorties différents ou identiques. Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans ce cadre. Ils viennent également compléter les recherches sur la discernabilité des modes de fonctionnement des systèmes hybrides menées par l'équipe STF (qui est l'actuelle équipe DICOT du CRISTAL) du LAGIS¹. La principale motivation de l'équipe STF pour

^{1.} Depuis le 1^{er} janvier 2015, le LAGIS (Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal) est une composante du CRIStAL (Centre de Recherche en Informatique, Signal et Automatique)

Introduction générale

l'étude de cette thématique réside dans son application dans la surveillance (détection, isolation et diagnostic des défaillances) des systèmes hybrides comportant des modes de fonctionnement sains et défaillants. Pour ces systèmes, la discernabilité des modes sains par rapport aux modes défaillants assure la détection des défauts et la discernabilité des modes défaillants garantit la diagnosticabilité des défauts.

Dans la littérature, les travaux de recherche de [Lou and Si, 2009], [Lou and Yang, 2014], [Babaali and Pappas, 2004] et [Cocquempot et al., 2004] sur cette problématique ont permis de spécifier des conditions nécessaires et suffisantes de discernabilité des modes des systèmes hybrides linéaires. Ces conditions caractérisent trois concepts différents de discernabilité. Celles de [Lou and Si, 2009] et [Lou and Yang, 2014] (voir théorèmes 1.3.5 et 1.3.6) caractérisent la discernabilité des modes quelque soit la commande appliquée au système alors que la condition de [Babaali and Pappas, 2004] (voir théorème 1.44), lorsqu'elle est satisfaite, garantit l'existence d'au moins une commande permettant de discerner les modes du système. La condition de [Cocquempot et al., 2004] (voir théorème 1.65) caractérise la discernabilité des modes à travers les résidus issus de la méthode d'espace de parité.

Cependant les conditions établies dans [Lou and Si, 2009] et [Lou and Yang, 2014] ne sont pas faciles à tester et celle de [Cocquempot et al., 2004] est obtenue sous certaines hypothèses qui limitent son champ d'application. Le premier objectif de cette thèse est de proposer pour la classe des systèmes hybrides à modes linéaires des conditions de discernabilité simples à tester et qui ont un champ d'application plus large. Une généralisation de ces conditions aux systèmes hybrides à modes non-linéaires fait également partie du cahier des charges de cette thèse. Aussi, nous analysons la question de la discernabilité des modes en présence de perturbations déterministes. En plus des différentes conditions de discernabilité que nous établissons dans ce mémoire, nous proposons une forme de distance permettant de quantifier le degré de discernabilité entre les modes.

Nous introduisons notamment dans cette thèse les concepts de **stricte discernabilité**, de **discernabilité contrôlable** et de **résidu-discernabilité**. Ces trois notions de discernabilité englobent celles de [Lou and Si, 2009], [Lou and Yang, 2014], [Babaali and Pappas, 2004] et [Cocquempot et al., 2004].

Notons qu'une étude de la discernabilité des systèmes hybrides à modes linéaires en présence de paramètres incertains a également été faite dans le cadre des travaux associés à cette thèse mais elle n'est pas présentée ici. Dans ce contexte, pour caractériser la discernabilité des modes, nous utilisons une estimation des sorties admissibles des modes. Cette estimation est basée sur les méthodes d'estimation d'état des systèmes à paramètres incertains développées dans [Kieffer and Walter, 2006], [Meslem, 2008]. Les résultats de cette étude sont publiés dans

[Motchon et al., 2014].

Dans tout le manuscrit, nous nous plaçons dans un cadre abstrait où nous considérons deux modes quelconques représentés par des systèmes dynamiques S_1 et S_2 . Ces deux systèmes feront l'objet de notre étude de discernabilité.

Le manuscrit est organisé en cinq chapitres :

Chapitre 1

Ce chapitre introduit le vocabulaire de base nécessaire à la compréhension du manuscrit. Nous y définissons principalement les trois concepts de discernabilité qui feront l'objet de notre étude : la **stricte discernabilité**, la **discernabilité contrôlable** et la **résidu-discernabilité**. Une étude bibliographique sur la discernabilité est également présentée dans ce chapitre. Notamment, nous y rappelons

- Les conditions de discernabilité de [Lou and Si, 2009] et [Lou and Yang, 2014] auxquelles nous apportons des contributions significatives dans le cas SISO et MISO : les conditions de discernabilité stricte des théorèmes 3.3.3 et 3.3.6 que nous généralisons plus loin dans le chapitre 5 au cas non-linéaire affine en la commande (voir théorème 5.4.4);
- La condition de discernabilité de [Babaali and Pappas, 2004] que nous généralisons également dans le chapitre 5 au cas non-linéaire affine en la commande (voir théorème 5.4.5);
- La condition de discernabilité de [Cocquempot et al., 2004] sur laquelle portera notre étude de résidu-discernabilité.

Aussi, nous établissons dans ce chapitre le lien entre les trois concepts précédents de discernabilité et celles étudiées dans [Lou and Si, 2009], [Lou and Yang, 2014], [Babaali and Pappas, 2004] et [Cocquempot et al., 2004].

Chapitre 2

Le second chapitre traite de la caractérisation de la discernabilité contrôlable et de la résidudiscernabilité des systèmes linéaires non perturbés. Nous y établissons différentes conditions de résidu-discernabilité et de discernabilité contrôlable. Notamment, nous donnons dans ce chapitre une condition nécessaire et suffisante de discernabilité qui généralise celle établie dans [Cocquempot et al., 2004].

Chapitre 3

Le troisième chapitre est dédié à la détermination d'une condition de discernabilité plus simple à tester que celles proposées dans [Lou and Si, 2009] et [Lou and Yang, 2014]. Il traite également de la question de la caractérisation de la **zone d'indiscernabilité** des systèmes linéaires. Cette zone correspond à l'ensemble des états initiaux et des commandes des systèmes qui génèrent des sorties identiques. La preuve des théorèmes 3.3.3 et 3.3.6 qui caractérisent la discernabilité stricte repose sur l'identification de cette zone. Les résultats issus de la caractérisation de la zone d'indiscernabilité de [Babaali and Pappas, 2004]. Nous nous baserons principalement sur cette dernière application de la caractérisation de la zone d'indiscernabilité pour généraliser la condition de [Babaali and Pappas, 2004] au cas non-linéaire affine en la commande.

Chapitre 4

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de la discernabilité contrôlable des systèmes linéaires en présence de perturbations (entrées inconnues) déterministes. Dans ce chapitre, nous établissons une condition de discernabilité contrôlable des systèmes pour une commande quelconque. Nous nous intéressons également dans ce chapitre à la question de la quantification du degré de discernabilité des systèmes linéaires. Nous terminons ce chapitre par une analyse de l'influence des perturbations déterministes sur la propriété de discernabilité des systèmes. Nous montrons dans ce contexte que, pour que les systèmes linéaires perturbés soient discernables, le degré de discernabilité de leurs modèles nominaux (modèles en absence de perturbation) doit être supérieur à une valeur donnée.

Chapitre 5

Le cinquième chapitre traite de la discernabilité stricte et de la discernabilité contrôlable des systèmes non-linéaires affines en la commande. A partir de la caractérisation de la zone d'indiscernabilité de ces systèmes, nous généralisons dans ce chapitre à cette classe de non linéarité, les conditions de discernabilité stricte des théorèmes 3.3.3 et 3.3.6 ainsi que la condition de discernabilité contrôlable de [Babaali and Pappas, 2004].

Chapitre 1

Notions introductives

Sommaire

1.1	Desc	cription des systèmes	
1.2	1.2 Notion de sorties admissibles d'un système relativement à une		
	com	mande	
1.3	\mathbf{Disc}	ernabilité par comparaison des ensembles de sorties admissibles 10	
	1.3.1	Stricte discernabilité de deux systèmes dynamiques 10	
	1.3.2	Discernabilité stricte : état de l'art	
	1.3.3	Zone d'indiscernabilité des systèmes non perturbés 16	
	1.3.4	Discernabilité contrôlable de deux systèmes dynamiques 20	
1.4	\mathbf{Disc}	ernabilité à travers les résidus de parité	
	1.4.1	Méthode de génération des résidus de parité d'un système 28	
	1.4.2	Discernabilité de deux systèmes à travers leurs résidus de parité \ldots 34	
1.5	Con	clusion	

Ce chapitre a pour objectif de présenter les différentes notions de discernabilité que nous étudierons dans ce mémoire. Il est également consacré à l'introduction des notations générales que nous adopterons dans tout le document.

Après une présentation du modèle d'état général des systèmes dynamiques sur lesquels portera notre étude, nous introduirons le vocabulaire nécessaire à la définition des trois grandes formes de discernabilité qui feront l'objet de cette étude : la discernabilité stricte, la discernabilité contrôlable et la résidu-discernabilité. Les généralités sur ces trois concepts de discernabilité sont présentés dans les deux avant-dernières parties du chapitre. Notamment, nous établirons un lien entre ces notions de discernabilité et celles qui existent dans la littérature.

Afin de facilité la compréhension de ces notions, des exemples seront donnés pour illustrer ces différents concepts.

1.1 Description des systèmes

Dans tout ce qui suit, \mathfrak{I} est un sous-intervalle de \mathbb{R}_+ tel que $0 \in \mathfrak{I}$ ($\mathfrak{I} = [0;T], T > 0$ ou $\mathfrak{I} = [0;T[, T \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\})$ et S_1 et S_2 sont deux systèmes dynamiques continus dont les comportements durant la période d'observation \mathfrak{I} sont décrits par les représentations d'état suivantes :

$$S_{i} \begin{cases} \dot{x}_{i}(t) = \mathbf{f}_{i}(x_{i}(t), u(t), w_{i}(t)), \\ y_{i}(t) = \mathbf{h}_{i}(x_{i}(t), u(t), w_{i}(t)), \\ x_{i}(0) = x_{i}^{o}, \end{cases}$$
(1.1)

où pour tout instant $t \in \mathcal{J}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{l}$ représente le vecteur des entrées connues (commande) conjointement appliquées à S_{1} et S_{2} , $x_{i}(t) \in \mathbb{R}^{n}$ le vecteur d'état de S_{i} , $y_{i}(t) \in \mathbb{R}^{m}$ le vecteur des sorties de S_{i} et $w_{i}(t) \in \mathbb{R}^{d}$ le vecteur des perturbations (entrées déterministes inconnues) qui agissent sur S_{i} . Les fonctions \mathbf{f}_{i} et \mathbf{h}_{i} sont telles que $\mathbf{f}_{i} \in \mathscr{C}\left(\mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{l} \times \mathbb{R}^{d}, \mathbb{R}^{n}\right)$, $\mathbf{h}_{i} \in$ $\mathscr{C}\left(\mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{l} \times \mathbb{R}^{d}, \mathbb{R}^{m}\right)$ et $\mathbf{h}_{i}(0_{n}, 0_{l}, 0_{d}) = 0_{m}$. En particulier, lorsque S_{1} et S_{2} sont des systèmes linéaires ces fonctions sont de la forme

$$\mathbf{f}_{i}(x_{i}(t), u(t), w_{i}(t)) = A_{i} x_{i}(t) + B_{i} u(t) + E_{i} w_{i}(t)$$
(1.2)

et

$$\mathbf{h}_{i}(x_{i}(t), u(t), w_{i}(t)) = C_{i} x_{i}(t) + D_{i} u(t) + H_{i} w_{i}(t)$$
(1.3)

avec $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_i \in \mathbb{R}^{n \times l}, C_i \in \mathbb{R}^{m \times n}, D_i \in \mathbb{R}^{m \times l}, E_i \in \mathbb{R}^{n \times d}$ et $H_i \in \mathbb{R}^{m \times d}$.

Dans toute la suite du mémoire, nous désignerons par \mathscr{U} l'espace des commandes admissibles qu'on peut conjointement appliquer à S_1 et S_2 . Le domaine des états initiaux du systèmes S_i sera noté \mathscr{X}_i^o et \mathscr{W}_i désignera l'espace des perturbations déterministes qui agissent sur S_i . L'ensemble \mathscr{X}_i^o des états initiaux de S_i est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n c'est-à-dire $\mathscr{X}_i^o \subseteq \mathbb{R}^n$. Les domaines \mathscr{U} et \mathscr{W}_i sont des espaces fonctionnels. Notamment, les commandes que nous allons considérer sont Lebesgue intégrables ($\mathscr{U} \subseteq L^1(\mathfrak{I}, \mathbb{R}^l)$) ou analytiques ($\mathscr{U} \subseteq \mathscr{A}(\mathfrak{I}, \mathbb{R}^l)$) ou régulières $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{C}^{\infty}(\mathfrak{I}, \mathbb{R}^l)$. Nous supposons que les domaines $\mathscr{U}, \mathscr{X}_i^o$ et \mathscr{W}_i satisfont les conditions suivantes :

- La commande nulle notée $0_{\mathscr{U}}$ est une commande admissible de S_1 et S_2 ;
- Les systèmes S_1 et S_2 peuvent partir de la position initiale nulle 0_n ;
- Le modèle d'état (1.1) inclut le modèle nominal du système S_i (modèle (1.1) ne prenant pas en compte les perturbations w_i) c'est-à-dire la perturbation nulle appartient à \mathscr{W}_i . On la notera $0_{\mathscr{W}_i}$.

Ces trois conditions sont résumées dans l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1.1.1. Pour tout $i = 1, 2, 0_{\mathscr{U}} \in \mathscr{U}, 0_n \in \mathscr{X}_i^o$ et $0_{\mathscr{W}_i} \in \mathscr{W}_i$

Nous supposons de plus que le triplet trivial $(0_n, 0_{\mathscr{U}}, 0_{\mathscr{W}_i})$ est un point de fonctionnement du système S_i c'est-à-dire

Hypothèse 1.1.2. Pour tout $i = 1, 2, \mathbf{f}_i(0_n, 0_{\mathscr{U}}, 0_{\mathscr{W}_i}) = 0_n$

Pour des raisons de clarté dans la présentation,

- la variable d'état x_i de S_i correspondant à l'état initial x_i^o et aux influences u et w_i du milieu extérieur sur S_i sera notée x_i (\cdot, x_i^o, u, w_i)
- la variable de sortie y_i de S_i correspondant à l'état initial x_i^o et aux actions u et w_i du milieu extérieur sera notée y_i (\cdot, x_i^o, u, w_i)

D'autre part, dans la présentation de certains résultats, nous utiliserons parfois **le système dynamique augmenté** S associé à S_1 et S_2 . Sa dynamique contient la dynamique de chacun des systèmes S_1 et S_2 et sa sortie est l'écart des sorties de S_1 et S_2 . Il est défini par le modèle d'état suivant :

$$S \begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{f}(x(t), u(t), w(t)), \\ y(t) = \mathbf{h}(x(t), u(t), w(t)), \\ x(0) := x^{o}, \end{cases}$$
(1.4)

où pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} ; w(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} ; \mathbf{f}(x(t), u(t), w(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(x(t), u(t), w_1(t)) \\ \mathbf{f}_2(x(t), u(t), w_2(t)) \end{bmatrix}$$
(1.5)

 et

$$\mathbf{h}(x(t), u(t), w(t)) = \mathbf{h}_1(x_1(t), u(t), w_1(t)) - \mathbf{h}_2(x_2(t), u(t), w_2(t))$$
(1.6)

Notamment, dans le cas linéaire, le système augmenté associé aux systèmes linéaires S_1 et S_2 définis par les équations (1.1), (1.2) et (1.3) est également un système linéaire qui a pour modèle d'état

$$S \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + E w(t), \\ y(t) = C x(t) + D u(t) + H w(t), \\ x(0) = x^{o}, \end{cases}$$
(1.7)

avec

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0_n \\ 0_n & A_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

 et

$$D = D_1 - D_2$$
; $E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$; $H = \begin{bmatrix} H_1 & -H_2 \end{bmatrix}$ (1.9)

Nous désignons par $x(\cdot, x^o, u, w)$ le vecteur d'état du système augmenté, de position initial x^o , commandé par l'entrée u et soumis aux perturbations w. La sortie y du système augmenté associée à l'évolution $x(\cdot, x^o, u, w)$ de son état est notée $y(\cdot, x^o, u, w)$. En utilisant l'opérateur π d'empilement de variables

$$\boldsymbol{\pi}\left(v_{1}, v_{2}\right) = \begin{bmatrix} v_{1} \\ v_{2} \end{bmatrix},\tag{1.10}$$

nous pouvons réécrire l'état $x(\cdot, x^o, u, w)$ et la sortie $y(\cdot, x^o, u, w)$ du système augmenté en ressortant leurs dépendances explicite en les variables x_1^o, x_2^o, w_1 et w_2 des systèmes S_1 et S_2 comme suit :

$$x\left(\cdot, x^{o}, u, w\right) \equiv x\left(\cdot, \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right), u, \boldsymbol{\pi}\left(w_{1}, w_{2}\right)\right)$$
(1.11)

 et

$$y(\cdot, x^{o}, u, w) \equiv y(\cdot, \boldsymbol{\pi}(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}), u, \boldsymbol{\pi}(w_{1}, w_{2})).$$

$$(1.12)$$

où le symbole \equiv est mis pour l'égalité de fonctions sur l'intervalle \mathcal{I} .

1.2 Notion de sorties admissibles d'un système relativement à une commande

Dans cette section, nous introduisons la notion de sorties admissibles des systèmes S_1 et S_2 . Toutes les notions de discernabilité que nous présenterons dans les sections suivantes sont basées sur ce concept.

Les sorties admissibles d'un système relativement à une commande u fixée est l'ensemble de toutes les réponses qu'on peut obtenir du système lorsqu'on l'excite par cette commande. Elles se définissent à partir de la notion de u-compatibilité que nous introduisons comme suit :

Définition 1.2.1 (u-compatibilité). Soit $u \in \mathscr{U}$. On dira d'un signal $z \in \mathscr{C}(\mathfrak{I}, \mathbb{R}^m)$ qu'il est u-compatible avec le système S_i sur le domaine $\mathscr{X}_i^o \times \mathscr{W}_i$ durant la période d'observation \mathfrak{I} s'il existe un couple $(x_i^o, w_i) \in \mathscr{X}_i^o \times \mathscr{W}_i$ tel que $z \equiv_{\mathfrak{I}} y_i(\cdot, x_i^o, u, w_i)$.

On note $\mathscr{S}_{i,\mathfrak{I}}(u, \mathscr{X}_{i}^{o}, \mathscr{W}_{i})$ l'ensemble de tous les signaux u-compatibles avec S_{i} sur le domaine $\mathscr{X}_{i}^{o} \times \mathscr{W}_{i}$ durant la période d'observation \mathfrak{I} c'est-à-dire

$$\mathscr{S}_{i,\mathfrak{I}}\left(u,\mathscr{X}_{i}^{o},\mathscr{W}_{i}\right) = \left\{z \in \mathscr{C}\left(\mathfrak{I},\mathbb{R}^{m}\right) : \exists \left(x_{i}^{o},w_{i}\right) \in \mathscr{X}_{i}^{o} \times \mathscr{W}_{i}, \ z \equiv y_{i}\left(\cdot,x_{i}^{o},u,w_{i}\right)\right\}.$$

$$(1.13)$$

1.1.2 Notion de sorties admissibles d'un système relativement à une commande

Le domaine $\mathscr{S}_{i,\mathfrak{I}}(u, \mathscr{X}_i^o, \{0_{\mathscr{W}_i}\})$ représente l'espace de toutes les sorties admissibles du modèle nominal de S_i relativement à la commande u.

Puisque le modèle d'état (1.1) de S_i inclut son modèle nominal (voir hypothèse 1.1.1), on a l'inclusion suivante :

Proposition 1.2.2. Pour tout $u \in \mathscr{U}$, $\mathscr{S}_{i,\mathcal{I}}(u, \mathscr{X}_i^o, \{0_{\mathscr{W}_i}\}) \subseteq \mathscr{S}_{i,\mathcal{I}}(u, \mathscr{X}_i^o, \mathscr{W}_i)$.

Généralement, pour des systèmes S_i non-linéaires, il n'est pas possible de déterminer l'expression analytique de la sortie y_i . Le domaine $\mathscr{S}_{i,\mathcal{I}}(u, \mathscr{X}_i^o, \mathscr{W}_i)$ ne peut donc être caractérisé analytiquement. Cependant, pour les systèmes linéaires, on a la caractérisation suivante :

Proposition 1.2.3. Soient $i \in \{1, 2\}$ et S_i le système linéaire défini par les équations (1.1), (1.2) et (1.3). Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $z \in \mathscr{S}_{i, \mathfrak{I}}(u, \mathscr{X}_i^o, \mathscr{W}_i)$
- (ii) il existe un couple $(x_i^o, w_i) \in \mathscr{X}_i^o \times \mathscr{W}_i$ tel que pour tout $t \in \mathfrak{I}$,

$$z(t) = C_i e^{tA_i} x_i^o + C_i \int_0^t e^{(t-\tau)A_i} \left[B_i u(\tau) + E_i w_i(\tau) \right] d\tau + D_i u(t) + H_i w_i(t) \quad (1.14)$$

Exemple 1.2.4. Soit S_1 le système linéaire non perturbé modélisé par les équations (1.1), (1.2) et (1.3) avec

$$A_{1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B_{1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad C_{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad D_{1} = 0 \quad ; \quad E_{1} = 0_{2 \times d} \quad ; \quad H_{1} = 0_{1 \times d}$$

De la relation (1.14), il est facile de vérifier que $z \in \mathscr{S}_{1,\mathbb{R}_+}(u,\mathbb{R}^2,\{0_{\mathscr{W}_1}\})$ si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$z(t) = a e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(\tau) d\tau.$$

Par conséquent,

$$\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}_+}\left(u,\mathbb{R}^2,\{0_{\mathscr{W}_1}\}\right) = \left\{a\,\phi + \psi_u \colon a \in \mathbb{R}\right\}$$

où les fonctions ϕ et ψ_u sont définies par

$$\phi(t) = e^{-t}$$
; $\psi_u(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(\tau) d\tau$.

L'ensemble de toutes les sorties admissibles du système S_i se définit à partir de la notion de *u*-compatibilité comme suit :

Définition 1.2.5. L'ensemble de toutes les sorties admissibles du système dynamique S_i que l'on note \mathscr{Y}_i est l'ensemble de toutes les sorties u-compatibles avec S_i lorsque u parcourt le domaine $\mathscr U$ des commandes admissibles c'est-à-dire

$$\mathscr{Y}_{i} = \bigcup_{u \in \mathscr{U}} \mathscr{S}_{i,\mathcal{I}}\left(u, \mathscr{X}_{i}^{o}, \mathscr{W}_{i}\right).$$
(1.15)

Dans la suite, pour tout sous-ensemble $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{C}(\mathfrak{I}, \mathbb{R}^m)$ nous adopterons la notation suivante

$$y_i^{-1}(u,\mathscr{S}) := \{ (x_i^o, w_i) \in \mathscr{X}_i^o \times \mathscr{W}_i \colon y_i(\cdot, x_i^o, u, w_i) \in \mathscr{S} \}$$
(1.16)

Le domaine $y_i^{-1}(u, \mathscr{S})$ représente donc l'ensemble des états initiaux et des perturbations qui génèrent des signaux qui sont *u*-compatibles avec S_i et qui sont localisés dans \mathscr{S} .

1.3 Discernabilité par comparaison des ensembles de sorties admissibles

Dans cette partie, nous introduisons les notions de discernabilité stricte, de forte discernabilité contrôlable et de faible discernabilité contrôlable. Ces trois notions sont basées sur une comparaison directe des ensembles de sorties admissibles de S_1 et S_2 . Elles sont brièvement présentées par le tableau ci-dessous :

	4	$\mathscr{Y}_{u} \neq 0_{\mathscr{U}}, \mathscr{S}_{1, \mathbb{J}}(u, \mathscr{X}_{1}^{o}, \mathscr{W}_{1}) \cap \mathscr{S}_{2, \mathbb{J}}(u, \mathscr{X}_{2}^{o}, \mathscr{W}_{2}) = \emptyset$
Discernabilité stricte		et
	$\forall i = 1, 2, y_i^-$	$ ^{-1} \left(0_{\mathscr{U}}, \mathscr{S}_{1, \mathfrak{I}} \left(0_{\mathscr{U}}, \mathscr{X}_{1}^{o}, \mathscr{W}_{1} \right) \cap \mathscr{S}_{2, \mathfrak{I}} \left(0_{\mathscr{U}}, \mathscr{X}_{2}^{o}, \mathscr{W}_{2} \right) \right) = \left\{ \left(0_{n}, 0_{\mathscr{W}_{i}} \right) \right\} $
Discernabilité contrôlable	Sens fort	$\exists u \in \mathscr{U}, \mathscr{S}_{1, \mathbb{I}}\left(u, \mathscr{X}_{1}^{o}, \mathscr{W}_{1}\right) \cap \mathscr{S}_{2, \mathbb{I}}\left(u, \mathscr{X}_{2}^{o}, \mathscr{W}_{2}\right) = \emptyset$
	Sens faible	$\exists u \in \mathscr{U}, \mathscr{S}_{1, \mathfrak{I}}\left(u, \mathscr{X}_{1}^{o}, \mathscr{W}_{1}\right) \neq \mathscr{S}_{2, \mathfrak{I}}\left(u, \mathscr{X}_{2}^{o}, \mathscr{W}_{2}\right)$

 Table 1.1 – Définition de la discernabilité stricte et de la discernabilité contrôlable

Le lecteur pourra se référer le plus souvent à ce tableau pour éviter toutes éventuelles confusions entre ces trois notions de discernabilité et celles que nous introduirons dans la section 1.4.

1.3.1 Stricte discernabilité de deux systèmes dynamiques

La discernabilité au sens strict de deux systèmes est la propriété structurelle des deux systèmes à générer des sorties différentes quelques soient leurs conditions initiales et leurs entrées inconnues. Elle est donc une généralisation au cas continu du concept de discernabilité absolue définie dans [Rosa and Silvestre, 2011] pour les systèmes dynamiques discrets.

Définition 1.3.1 (Stricte discernabilité). On dira des systèmes dynamiques S_1 et S_2 qu'ils sont strictement ($\mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$)-discernables sur \mathfrak{I} si seul le quintuplet nul ($u, x_1^o, x_2^o, w_1, w_2$) = $(0_{\mathscr{U}}, 0_n, 0_n, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2})$ génère des sorties $y_1(\cdot, x_1^o, u, w_1)$ et $y_2(\cdot, x_2^o, u, w_2)$ identiques sur \mathfrak{I} c'està-dire si

$$\forall u \neq 0_{\mathscr{U}}, \quad \mathscr{S}_{1,\mathcal{I}}\left(u, \mathscr{X}_{1}^{o}, \mathscr{W}_{1}\right) \bigcap \mathscr{S}_{2,\mathcal{I}}\left(u, \mathscr{X}_{2}^{o}, \mathscr{W}_{2}\right) = \emptyset$$
(1.17)

et

$$\forall i = 1, 2, \quad y_i^{-1} \left(0_{\mathscr{U}}, \mathscr{S}_{1, \mathfrak{I}} \left(0_{\mathscr{U}}, \mathscr{X}_1^o, \mathscr{W}_1 \right) \bigcap \mathscr{S}_{2, \mathfrak{I}} \left(0_{\mathscr{U}}, \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_2 \right) \right) = \left\{ (0_n, 0_{\mathscr{W}_i}) \right\}. \tag{1.18}$$

Ainsi, lorsqu'elle est satisfaite, la stricte discernabilité de S_1 et S_2 assure qu'en appliquant n'importe quelle commande non nulle u à S_1 et à S_2 , on peut distinguer sur \mathcal{I} la sortie $y_1(\cdot, x_1^o, u, w_1)$ de S_1 de la sortie $y_2(\cdot, x_2^o, u, w_1)$ de S_2 quels que soient les états initiaux x_1^o et x_2^o et quelles que soient les entrées inconnues w_1 et w_2 . Il n'existe donc aucune commande qui empêche de les discerner.

Une illustration graphique de la stricte discernabilité est donnée par la figure 1.1 ci-dessous :



Figure 1.1 – Illustration graphique de la stricte discernabilité

La figure 1.1 représente les ensembles \mathscr{Y}_1 et \mathscr{Y}_2 des sorties admissibles de S_1 et S_2 . Sur la figure 1.1-(a), la sortie nulle est le seul signal de sortie commun à ces deux ensembles.

Exemple 1.3.2. Considérons les systèmes linéaires S_1 et S_2 décrits par les équations (1.1),

(1.2) et (1.3) avec

$$A_{1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B_{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad C_{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad D_{1} = 0 \quad ; \quad E_{1} = 0_{2 \times d} \quad ; \quad H_{1} = 0_{1 \times d}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B_2 = B_1 \quad ; \quad C_2 = C_1 \quad ; \quad D_2 = 0 \quad ; \quad E_2 = 0_{2 \times d} \quad ; \quad H_2 = 0_{1 \times d}$$

Supposons que toutes les commandes admissibles de S_1 et S_2 sont continues sur \mathbb{R}_+ et admettent une transformée de Laplace. Nous allons montrer que les systèmes dynamiques S_1 et S_2 sont strictement ($\mathscr{U}, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}$)-discernables sur \mathbb{R}_+ . Supposons par l'absurde qu'ils ne le sont pas. Alors il existe un triplet non nul $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathscr{U}$ tel que $y_1(\cdot, x_1^o, u, 0_{\mathscr{W}_1}) \equiv$ $y_2(\cdot, x_2^o, u, 0_{\mathscr{W}_2})$. Désignons par r_u , l'abscisse de convergence de la commande u c'est-à-dire

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left[u\right]\left(p\right) < \infty & si \quad \Re\left(p\right) > r_{u}, \\ \mathcal{L}\left[u\right]\left(p\right) & n'existe \ pas & si \quad \Re\left(p\right) < r_{u}, \end{cases}$$

où $\mathcal{L}[u]$ est la transformée de Laplace de u. Posons $\gamma_u = \max\{r_u, 0\}$. Pour tout $p \in \mathscr{H}_{\gamma_u} := \{p \in \mathbb{C} : \Re(p) > \gamma_u\}$, on peut vérifier que

$$\mathcal{L}\left[y_{1}\left(\cdot, x_{1}^{o}, u, 0_{\mathscr{W}_{1}}\right)\right](p) = \frac{a_{1} p}{p^{2} + 1} + \frac{b_{1}}{p^{2} + 1} + \frac{1}{p^{2} + 1} \mathcal{L}\left[u\right](p)$$

et

$$\mathcal{L}\left[y_{2}\left(\cdot, x_{2}^{o}, u, 0_{\mathscr{W}_{2}}\right)\right](p) = \frac{a_{2} p}{p^{2} + 2} + \frac{b_{2}}{p^{2} + 2} + \frac{1}{p^{2} + 2} \mathcal{L}\left[u\right](p)$$

où pour tout $i = 1, 2, \begin{bmatrix} a_i & b_i \end{bmatrix}^{\top} = x_i^o$. De plus, comme l'égalité des sorties entraîne que

$$\mathcal{L}\left[y_1\left(\cdot, x_1^o, u, 0_{\mathscr{W}_1}\right)\right](p) - \mathcal{L}\left[y_2\left(\cdot, x_2^o, u, 0_{\mathscr{W}_2}\right)\right](p) = 0, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\gamma_u},$$

on obtient alors

$$\frac{a_1 p}{p^2 + 1} - \frac{a_2 p}{p^2 + 2} + \frac{b_1}{p^2 + 1} - \frac{b_2}{p^2 + 2} + \left(\frac{1}{p^2 + 1} - \frac{1}{p^2 + 2}\right) \mathcal{L}\left[u\right](p) = 0, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\gamma_u}.$$
 (1.19)

D'après la continuité de u et le théorème de la valeur initiale (voir lemme 3.2.6 ou [Schiff, 1999]) on a $\lim_{\mathbb{R}\ni p\to+\infty} p\mathcal{L}[u](p) = u(0) < \infty$. Par conséquent, en multipliant (1.19) par $p \in \mathbb{R}$ puis en

1.1.3 Discernabilité par comparaison des ensembles de sorties admissibles

faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient $a_1 = a_2$. L'équation (1.19) devient alors

$$\frac{a_1 p}{(p^2+1) (p^2+2)} + \frac{b_1}{p^2+1} - \frac{b_2}{p^2+2} + \left(\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+2}\right) \mathcal{L}\left[u\right](p) = 0, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\gamma_u}.$$
(1.20)

En multipliant la relation (1.20) par p^2 (avec $p \in \mathbb{R}$) puis en faisant tendre p vers $+\infty$ on obtient $b_1 = b_2$. Par conséquent, (1.20) devient

$$\frac{a_1 p}{(p^2+1) (p^2+2)} + \frac{b_1}{(p^2+1) (p^2+2)} + \frac{1}{(p^2+1) (p^2+2)} \mathcal{L}[u](p) = 0, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\gamma_u}$$

qui est encore équivalent à

$$\mathcal{L}[u](p) = -a_1 p - b_1, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\gamma_u}$$

La commande u étant continue par hypothèse, l'égalité précédente n'est vraie que si $a_1 = b_1 = 0$. Il s'ensuit que $x_1^o = x_2^o = 0_2$ et $u = 0_{\mathscr{U}}$. Ceci est absurde car le triplet (x_1^o, x_2^o, u) est non nul par hypothèse.

On conclut que S_1 et S_2 sont strictement $(\mathscr{U}, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernables sur \mathbb{R}_+ . Plus loin dans le chapitre 3 nous verrons qu'on peut établir ce résultat d'une manière beaucoup plus simple en utilisant le théorème 3.3.3 qui caractérise la discernabilité stricte des systèmes SISO.

1.3.2 Discernabilité stricte : état de l'art

La discernabilité au sens strict joue un rôle important dans l'observation des systèmes à commutation. En effet, la stricte discernabilité de tous les couples de modes d'un système à commutation garantit qu'à partir des variables mesurées (entrée et sortie), le mode actif peut en principe être identifié à chaque instant quelle que soit la commande non nulle appliquée à l'entrée du système à commutation et quels que soient l'état initial et les entrées inconnues du système.

Dans la littérature, la $(\mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernabilité des systèmes linéaires continus a été largement étudiée dans [Lou and Si, 2009] et [Lou and Yang, 2014] pour les classes \mathscr{U} de commandes Lebesgue intégrables, analytiques et régulières. Ces études portent principalement sur la détermination des conditions nécessaires et/ou suffisantes permettant de déterminer si deux systèmes linéaires continus sont $(\mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernables ou pas. Parmi les nombreuses conditions qui ont été établies dans [Lou and Si, 2009], on trouve la condition nécessaire suivante :

Théorème 1.3.3. Soient S_1 et S_2 les systèmes dynamiques linéaires modélisés par les équations (1.1), (1.2) et (1.3). Si S_1 et S_2 sont ($\mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}$)-discernables sur [0; T]alors S_1 et S_2 sont observables.

Cette condition implique que seuls les systèmes linéaires observables peuvent être strictement discernables. En plus de ces contraintes sur l'observabilité des systèmes, [Lou and Si, 2009] montre également que la $(\mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernabilité impose des contraintes sur les nombres de sorties et d'entrées des systèmes linéaires :

Théorème 1.3.4. Soient S_1 et S_2 les systèmes dynamiques linéaires modélisés par les équations (1.1), (1.2) et (1.3). Si S_1 et S_2 sont ($\mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}$)-discernables durant la période [0;T] alors $m \leq l$.

Ainsi, en absence de perturbations, deux systèmes linéaires quelconques ayant chacun plus d'entrées que de sorties ne sont pas strictement discernables. En particulier, il n'existe pas de couple de systèmes linéaires MISO qui soient $(\mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernables.

Outre les deux conditions nécessaires des théorèmes 1.3.3 et 1.3.4, il est démontré dans [Lou and Si, 2009] que les trois notions de $(\mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernabilité correspondant aux classes \mathscr{U} de commandes Lebesgue intégrables (L¹([0;T], $\mathbb{R}^l)$), analytiques ($\mathscr{A}([0;T], \mathbb{R}^l)$) et régulières peuvent être caractérisées par la condition (1.21) ci-dessous :

Théorème 1.3.5. Soient S_1 et S_2 les systèmes dynamiques linéaires modélisés par les équations (1.1), (1.2) et (1.3). Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) S_1 et S_2 sont $\left(L^1\left([0;T], \mathbb{R}^l\right), \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ -discernables durant la période d'observation [0;T].
- (ii) S_1 et S_2 sont $\left(\mathscr{A}\left([0;T],\mathbb{R}^l\right),\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\{0_{\mathscr{W}_1}\}\times\{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ -discernables durant la période d'observation [0;T].
- (iii) $S_1 \text{ et } S_2 \text{ sont} \left(\mathscr{C}^{\infty} \left([0;T], \mathbb{R}^l \right), \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\} \right)$ -discernables durant la période d'observation [0;T].
- (iv) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

 $\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_{1}^{[k]} & \mathbb{O}_{2}^{[k]} & \mathbb{T}_{1}^{[k]} - \mathbb{T}_{2}^{[k]} \end{bmatrix}\right) = 2n + l \ (k+1)$ (1.21)

où les matrices d'observabilité $\mathbb{O}_i^{[k]}$ d'ordre k de S_i et les matrices de Toeplitz $\mathbb{T}_i^{[k]}$ sont

définies par

$$\mathbb{O}_{i}^{[k]} = \begin{bmatrix} C_{i} \\ C_{i}A_{i} \\ \vdots \\ C_{i}A_{i}^{k-1} \\ C_{i}A_{i}^{k} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbb{T}_{i}^{[k]} = \begin{bmatrix} D_{i} & 0_{m \times l} & \cdots & 0_{m \times l} & 0_{m \times l} \\ C_{i}B_{i} & D_{i} & \cdots & 0_{m \times l} & 0_{m \times l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{i}A_{i}^{k-2}B_{i} & C_{i}A_{i}^{k-3}B_{i} & \cdots & D_{i} & 0_{m \times l} \\ C_{i}A_{i}^{k-1}B_{i} & C_{i}A_{i}^{k-2}B_{i} & \cdots & C_{i}B_{i} & D_{i} \end{bmatrix} . \quad (1.22)$$

Ainsi, les trois notions de $(\mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernabilité correspondant aux classes \mathscr{U} de commandes Lebesgue intégrables, analytiques et régulières sont équivalentes et ne dépendent pas de l'instant final T de la période [0; T] d'observation.

La dernière assertion du théorème 1.3.5 est donc un critère de stricte discernabilité pour les systèmes dynamiques linéaires. Cependant elle peut être difficilement utilisable en pratique puisqu'elle consiste à vérifier une infinité de conditions de rang. Une condition de stricte discernabilité moins difficilement testable est proposée dans [Lou and Yang, 2014] (voir théorème 1.3.6 ci-dessous). Cette condition peut être exprimée à partir de la matrice de Rosenbrock [Antsaklis and Michel, 2007] du système augmenté de S_1 et S_2 comme suit :

Théorème 1.3.6. Soient S_1 et S_2 les systèmes dynamiques linéaires modélisés par les équations (1.1), (1.2) et (1.3). Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) S_1 et S_2 sont $\left(L^1\left([0;T], \mathbb{R}^l\right), \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ -discernables durant la période d'observation [0;T]
- (ii) Pour tout nombre $p \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{rang}\left(\mathbf{R}\left(p\right)\right) = 2n + l \tag{1.23}$$

où la matrice de Rosenbrock $\mathbf{R}(p)$ est définie par

$$\mathbf{R}(p) = \begin{bmatrix} p I_{2n} - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}.$$
(1.24)

avec A, B, C, D les matrices qui définissent la représentation d'état (1.7) du système augmenté associé à S_1 et S_2 .

La condition nécessaire et suffisante du théorème 1.3.6 peut être aussi difficile à tester car elle repose sur le calcul du rang de la matrice de Rosenbrock pour toutes les valeurs du paramètre complexe p. Dans le chapitre 3, nous établirons pour les systèmes SISO une condition plus simple à manipuler que celle du théorème 1.3.6.

1.3.3 Zone d'indiscernabilité des systèmes non perturbés

Un concept important que nous utiliserons dans la l'étude de la discernabilité stricte des systèmes S_1 et S_2 non perturbés est la zone d'indiscernabilité. Cette zone représente l'ensemble des états initiaux et des commandes de S_1 et S_2 qui produisent des sorties y_1 et y_2 identiques.

Définition 1.3.7. La zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 sur \mathfrak{I} notée $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2, \mathfrak{I})$ est le sousensemble de $\mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o \times \mathscr{U}$ défini par :

$$\mathscr{Z}_{ind}\left(S_{1}, S_{2}, \mathfrak{I}\right) = \left\{ \left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}, u\right) \in \mathscr{X}_{1}^{o} \times \mathscr{X}_{2}^{o} \times \mathscr{U} : y_{1}\left(\cdot, x_{1}^{o}, u, 0_{\mathscr{W}_{1}}\right) \equiv y_{2}\left(\cdot, x_{2}^{o}, u, 0_{\mathscr{W}_{2}}\right) \right\}.$$
(1.25)

Dans le manuscrit, nous nous intéresserons à l'identification de la zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 sur \mathbb{R}_+ tout entier. Nous la noterons simplement $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$:

Notation 1.3.8. $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2) := \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2, \mathbb{R}_+)$

Exemple 1.3.9. Considérons les systèmes masse-ressort S_1 et S_2 définis par :

$$S_{i} \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{q}_{i}\left(t\right) \\ \ddot{q}_{i}\left(t\right) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{r \times r} & I_{r} \\ -M_{i}^{-1} K_{i} & 0_{r \times r} \end{bmatrix}}_{A_{i}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_{i}\left(t\right) \\ \dot{q}_{i}\left(t\right) \end{bmatrix}}_{x_{i}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{r \times r} \\ M_{i}^{-1} \end{bmatrix}}_{B_{i}} u\left(t\right)$$
$$y_{i}\left(t\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{r} & 0_{r \times r} \end{bmatrix}}_{C_{i}} \begin{bmatrix} q_{i}\left(t\right) \\ \dot{q}_{i}\left(t\right) \end{bmatrix} = q_{i}\left(t\right)$$
$$(1.26)$$

où pour tout $i = 1, 2, M_i \in \mathbb{R}^{r \times r}$ et $K_i \in \mathbb{R}^{r \times r}$ sont des matrices symétriques définies positives représentant respectivement la matrice des masses et des constantes de raideur de S_i . Nous allons déterminer la zone d'indiscernabilité de ces deux systèmes.

Soit $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$. Alors $q_1 \underset{\mathbb{R}_+}{\equiv} q_2 := q$ et ceci implique que $\dot{q}_1 \underset{\mathbb{R}_+}{\equiv} \dot{q}_2 \underset{\mathbb{R}_+}{\equiv} \dot{q}$. D'après le modèle d'état (1.26) du système S_i , on a

$$\ddot{q}_i(t) = -M_i^{-1} K_i q_i(t) + M_i^{-1} u(t), \quad i = 1, 2.$$
(1.27)

Réécrivant la relation $\dot{q}_1 \underset{\mathbb{R}_+}{\equiv} \dot{q}_2 \underset{\mathbb{R}_+}{\equiv} \dot{q}$ en utilisant les expressions précédentes de \ddot{q}_1 et \ddot{q}_2 . On obtient alors

$$\left(M_2^{-1} K_2 - M_1^{-1} K_1\right) q(t) = \left(M_2^{-1} - M_1^{-1}\right) u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$
(1.28)

Supposons que la matrice $M_2 - M_1$ est inversible. Alors $M_2^{-1} - M_1^{-1}$ est aussi inversible (voir annexe A) et on déduit de la relation (1.28) que la commande u est de la forme :

$$u(t) = G q(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$
(1.29)

avec

$$G = \left(M_2^{-1} - M_1^{-1}\right)^{-1} \left(M_2^{-1} K_2 - M_1^{-1} K_1\right).$$

Dans l'équation (1.27), en remplaçant q_i par q puis u par son expression donnée par (1.29), il vient que q est solution de l'équation différentielle du second ordre :

$$\ddot{q}(t) = -H q(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$
(1.30)

avec

$$H = M_1^{-1} K_1 - M_1^{-1} G. (1.31)$$

Supposons que \sqrt{H} existe et est inversible. Alors une résolution de l'équation différentielle (1.30) donne :

$$q(t) = \cos\left(t\sqrt{H}\right) q^{o} + \left(\sqrt{H}\right)^{-1} \sin\left(t\sqrt{H}\right) \dot{q}^{o}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}$$

avec $q^o = q(0)$ et $\dot{q}^o = \dot{q}(0)$. L'expression (1.29) de la commande devient :

$$u(t) = G \cos\left(t\sqrt{H}\right) q^{o} + G \left(\sqrt{H}\right)^{-1} \sin\left(t\sqrt{H}\right) \dot{q}^{o}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}.$$
 (1.32)

Ainsi, si $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ alors $x_1^o = x_2^o$ (c'est-à-dire $q_1^o = q_2^o = q^o$ et $\dot{q}_1^o = \dot{q}_2^o = \dot{q}^o$) et la commande u est donnée par (1.32).

Réciproquement, supposons que $x_1^o = x_2^o$ et que u satisfait la condition (1.32). Alors on peut écrire u sous la forme (1.29) avec q solution de l'équation différentielle (1.30). En remplaçant dans (1.30) H par son expression donnée par (1.31), on obtient

$$\ddot{q}(t) = -M_1^{-1} K_1 q(t) + M_1^{-1} G q(t) = -M_1^{-1} K_1 q(t) + M_1^{-1} u(t)$$

Ainsi, q est solution de l'équation différentielle (1.27) écrite pour i = 1. L'unicité de la solution de cette équation implique que $q \equiv q_1$.

D'autre part, comme $H = M_2^{-1} K_2 - M_2^{-1} G$ (voir annexe A), l'équation (1.30) peut être réécrite sous la forme

$$\ddot{q}(t) = -M_2^{-1} K_2 q(t) + M_2^{-1} G q(t) = -M_2^{-1} K_2 q(t) + M_2^{-1} u(t).$$

La fonction q est alors solution de l'équation différentielle (1.27) écrite pour i = 2. Par unicité de la solution de cette équation on obtient $q \equiv q_2$. D'où l'égalité des sorties $y_1 := q_1$ et $y_2 := q_2$. En somme, sous l'hypothèse d'inversibilité de la différence $M_1 - M_2$ des matrices de masse et sous l'hypothèse d'existence de la racine carrée de la matrice H définie par (1.31), la zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 est donnée par

$$\mathscr{Z}_{ind}\left(S_{1},S_{2}\right) = \begin{cases} \left(\boldsymbol{\pi}\left(q^{o},\dot{q}^{o}\right),\boldsymbol{\pi}\left(q^{o},\dot{q}^{o}\right),u\right): & \left(q^{o},\dot{q}^{o}\right)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ et\ \forall t\in\mathbb{R}_{+}\\ u(t) = G\ \cos\left(t\sqrt{H}\right)q^{o} + G\left(\sqrt{H}\right)^{-1}\sin\left(t\sqrt{H}\right)\dot{q}^{o} \end{cases}$$

La sortie du système augmenté étant la différence des sorties de S_1 et S_2 , $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ peut être également définie comme suit :

$$\mathscr{Z}_{\text{ind}}(S_1, S_2) = \{ (x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o \times \mathscr{U} : \forall t \in \mathbb{R}_+ \ y \left(t, \boldsymbol{\pi} \left(x_1^o, x_2^o \right), u, \boldsymbol{\pi} \left(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2} \right) \right) = 0_m \}.$$
(1.33)

Cette définition sera principalement utilisée dans les chapitres 3 et 5. Elle montre que la détermination de la zone d'indiscernabilité est un **problème d'annulation de la sortie** du système augmenté de S.

Remarque 1.3.10. Il est clair que S_1 et S_2 sont strictement $(\mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ discernables sur \mathbb{R}_+ si et seulement si $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2) = \{(0_n, 0_n, 0_{\mathscr{U}})\}$. L'étude de la trivialité de $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ suffit donc pour caractériser la discernabilité stricte des modèles nominaux de S_1 et S_2

En utilisant le théorème de blocage de transmission [MacFalane and Karcanias, 1976], Gomez-Gutierrez *et. al* montrent qu'on peut construire des éléments de la zone d'indiscernabilité des systèmes linéaires à partir de l'algorithme suivant [Gómez-Gutiérrez et al., 2010b] :

Théorème 1.3.11. Soient S_1 et S_2 les systèmes dynamiques linéaires décrits par les équations (1.1), (1.2) et (1.3) avec $D_1 = D_2 = 0_{m \times l}$ et soit $(p, x_1^o, x_2^o, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ une solution de l'équation

$$\mathbf{R}(p) \begin{bmatrix} x_1^o \\ x_2^o \\ \xi \end{bmatrix} = 0_{2n+m}$$

où la matrice de Rosenbrock $\mathbf{R}(p)$ est donnée par (1.24). Si $\mathscr{X}_1^o = \mathscr{X}_2^o = \mathbb{R}^n$ alors pour la commande u définie par $u(t) = e^{tp} \xi$, $t \in \mathbb{R}_+$, on obtient $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$.

Notons que ce résultat n'identifie pas $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$. Une caractérisation de la zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 fera l'objet des chapitres 3 et 5. Pour cette étude, nous aurons à manipuler
les projections de $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ sur $\mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o$ et \mathscr{U} .

La projection de $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ sur $\mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o$ que nous notons $\mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$ est définie par :

$$\mathscr{X}_{\text{ind}}^{o}(S_{1}, S_{2}) = \{ (x_{1}^{o}, x_{2}^{o}) \in \mathscr{X}_{1}^{o} \times \mathscr{X}_{2}^{o} : \exists u \in \mathscr{U}, \ (x_{1}^{o}, x_{2}^{o}, u) \in \mathscr{Z}_{\text{ind}}(S_{1}, S_{2}) \}.$$
(1.34)

Elle correspond à l'ensemble des états initiaux de S_1 et de S_2 qui peuvent générer des sorties identiques. Dans [Gómez-Gutiérrez et al., 2010a], [Gómez-Gutiérrez et al., 2012], elle est désignée sous le nom d'espace d'indiscernabilité.

Lorsque S_1 et S_2 sont des systèmes linéaires tels que $D_1 = D_2 = 0_{m \times l}$, Gomez-Gutierrez *et. al* ont prouvé dans [Gómez-Gutiérrez et al., 2010a], [Gómez-Gutiérrez et al., 2012] que $\mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$ est un espace (A, B)-invariant c'est-à-dire :

$$\exists F \in \mathbb{R}^{l \times 2n}, \quad (A + B F) \ \mathscr{X}^{o}_{\text{ind}} \left(S_1, S_2 \right) \subseteq \mathscr{X}^{o}_{\text{ind}} \left(S_1, S_2 \right). \tag{1.35}$$

Une interprétation de cette caractérisation géométrique est que l'espace $\mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$ possède la propriété de contenir la trajectoire d'état $x(\cdot, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o), u_F, \boldsymbol{\pi}(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}))$ du système augmenté S lorsqu'on excite ce dernier depuis une position initiale $(x_1^o, x_2^o) \in \mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$ par un retour d'état $u_F(t) = F x(t)$ avec F solution de (1.35).

Outre ce résultat, Gomez-Gutierrez *et. al* montrent que $\mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$ est le plus grand élément de l'ensemble $\mathscr{I}(A, B; \text{Ker}(C))$ de tous les espace (A, B)-invariants contenus dans Ker(C):

$$\mathscr{X}_{\mathrm{ind}}^{o}\left(S_{1}, S_{2}\right) = \sup \mathscr{I}\left(A, B; \mathrm{Ker}\left(C\right)\right).$$

$$(1.36)$$

En utilisant ce résultat et la méthode proposée par [Murray Wonham, 1979] pour calculer le plus grand espace sup $\mathscr{I}(A, B; \operatorname{Ker}(C))$ de $\mathscr{I}(A, B; \operatorname{Ker}(C))$, [Gómez-Gutiérrez et al., 2012] établit que l'espace $\mathscr{X}^{o}_{\operatorname{ind}}(S_1, S_2)$ peut être calculé à partir de l'algorithme récursif suivant :

Théorème 1.3.12. Soient S_1 et S_2 les systèmes dynamiques linéaires décrits par les équations (1.1), (1.2) et (1.3) avec $D_1 = D_2 = 0_{m \times l}$ et soit $(\mathscr{V}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, la suite de sous-ensembles de \mathbb{R}^{2n} définie par

$$\mathscr{V}_{0} = \operatorname{Ker}\left(C\right) \quad et \quad \mathscr{V}_{k} = \operatorname{Ker}\left(C\right) \cap A^{-1}\left(\mathscr{V}_{k-1} + \operatorname{Im}\left(B\right)\right), \ \forall k \ge 1$$

оù

$$A^{-1} \mathscr{V} := \left\{ v \in \mathbb{R}^{2n} \colon A \, v \in \mathscr{V} \right\}, \quad \forall \mathscr{V} \subseteq \mathbb{R}^{2n}.$$

Si $\mathscr{X}_1^o = \mathscr{X}_2^o = \mathbb{R}^n$ alors $\mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2) = \mathscr{V}_{\dim(\operatorname{Ker}(C))}$.

Dans le chapitre 3, nous proposons une méthode directe pour le calcul de l'espace d'indiscernabilité $\mathscr{X}_{ind}^{o}(S_1, S_2)$ des systèmes linéaires mono-sortie. Plus précisément, nous verrons dans ce chapitre que lorsque $\mathscr{X}_1^{o} = \mathscr{X}_2^{o} = \mathbb{R}^n$, $\mathscr{X}_{ind}^{o}(S_1, S_2)$ s'identifie au noyau de la matrice d'observabilité (à un ordre approprié) du système augmenté dans le cas linéaire mono-sortie. Pour les systèmes affines en la commande, nous établirons dans le chapitre 5 que $\mathscr{X}_{ind}^{o}(S_1, S_2)$ est une sous-variété différentielle de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Nous utiliserons principalement ces propriétés pour caractériser la discernabilité stricte des systèmes linéaires et non-linéaires affines en la commande.

Notons que la détermination de l'espace d'indiscernabilité $\mathscr{X}_{ind}^{o}(S_1, S_2)$ est d'une grande importance dans l'étude de la discernabilité pour toutes les trajectoires d'état des systèmes [Gómez-Gutiérrez et al., 2012]. Cette forme de discernabilité assure que seuls les états initiaux nuls peuvent générer des sorties identiques. En d'autres termes, les systèmes discernables pour toutes les trajectoires d'état sont les systèmes qui ont un espace d'indiscernabilité trivial. La notion de discernabilité stricte implique donc celle de discernabilité pour toutes les trajectoires d'état.

La projection de la zone d'indiscernabilité sur \mathscr{U} sera notée $\mathscr{U}_{ind}^{str}(S_1, S_2)$. Elle correspond à l'ensemble des commandes qui produisent des sorties y_1 et y_2 identiques :

$$\mathscr{U}_{\text{ind}}^{str}\left(S_{1}, S_{2}\right) = \left\{ u \in \mathscr{U} : \exists \left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right) \in \mathscr{X}_{1}^{o} \times \mathscr{X}_{2}^{o}, \ \left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}, u\right) \in \mathscr{Z}_{\text{ind}}\left(S_{1}, S_{2}\right) \right\}.$$
(1.37)

Le problème de la détermination de $\mathscr{U}_{ind}^{str}(S_1, S_2)$ se pose uniquement pour des systèmes S_1 et S_2 qui ne sont pas strictement discernables. Pour les systèmes qui sont strictement discernables, elle est réduite à la commande nulle.

1.3.4 Discernabilité contrôlable de deux systèmes dynamiques

La discernabilité contrôlable des systèmes S_1 et S_2 est la propriété structurelle des deux systèmes d'admettre au moins une commande u pour laquelle S_1 et S_2 génèrent des sorties différentes. Suivant l'influence des états initiaux et des perturbations sur la différence des sorties y_1 et y_2 , nous distinguerons dans le présent mémoire deux grandes formes de discernabilité contrôlable : la faible discernabilité contrôlable et la forte discernabilité contrôlable.

1.3.4.1 Faible discernabilité contrôlable

Définition 1.3.13 (Faible discernabilité contrôlable). On dira du système S_1 qu'il est contrôlablement $(\mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernable de S_2 au sens faible sur \mathfrak{I} ou que le système S_1 est faiblement $(\mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernable de S_2 sur \mathfrak{I} s'il existe une commande $u \in \mathscr{U}$ telle que

$$\mathscr{S}_{1,\mathcal{I}}\left(u,\mathscr{X}_{1}^{o},\mathscr{W}_{1}\right) \not\subseteq \mathscr{S}_{2,\mathcal{I}}\left(u,\mathscr{X}_{2}^{o},\mathscr{W}_{2}\right).$$

$$(1.38)$$

On dira des systèmes S_1 et S_2 qu'ils sont faiblement $(\mathcal{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernables durant la période d'observation \mathfrak{I} si S_1 est faiblement $(\mathcal{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernable de S_2 sur \mathfrak{I} ou si S_2 est faiblement $(\mathcal{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernable de S_1 sur \mathfrak{I} .

La faible discernabilité contrôlable des systèmes S_1 et S_2 se traduit donc par l'existence d'une commande u qui génère au moins une sortie de S_1 qui n'est pas u-compatible avec S_2 ou vice versa :

$$\mathscr{S}_{1,\mathfrak{I}}\left(u,\mathscr{X}_{1},\mathscr{W}_{1}\right)\neq\mathscr{S}_{2,\mathfrak{I}}\left(u,\mathscr{X}_{2},\mathscr{W}_{2}\right).$$
(1.39)

On peut distinguer les trois cas typiques suivants de faible discernabilité contrôlable :

— Cas 1 : S_1 n'est pas faiblement ($\mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$)-discernable de S_2 sur J tandis que S_2 est faiblement ($\mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$)-discernable de S_1 sur J. Une illustration de cette première forme de faible discernabilité contrôlable est donnée par la figure 1.2 ci-dessous :



Figure 1.2 – Premier cas de faible discernabilité contrôlable

Dans ce cas de discernabilité contrôlable, l'ensemble des sorties admissibles de S_2 contient celui de S_1 .

— Cas 2 : S_2 n'est pas faiblement $(\mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernable de S_1 sur \mathfrak{I} tandis que S_1 est faiblement $(\mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernable de S_2 sur \mathfrak{I} . La figure 1.3 suivante représente l'ensemble des sorties de S_1 et S_2 dans ce cas de discernabilité contrôlable :



Figure 1.3 – Second cas de faible discernabilité contrôlable

Ici, la configuration des ensembles de sorties admissibles est l'inverse de celle qu'on a obtenu dans le cas 1 c'est-à-dire $\mathscr{Y}_2 \subset \mathscr{Y}_1$.

— Cas 3 : S_1 est faiblement $(\mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernable de S_2 sur \mathfrak{I} et S_2 est faiblement $(\mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernable de S_1 sur \mathfrak{I} .



Figure 1.4 – Troisième cas de discernabilité contrôlable

Dans ce cas de discernabilité, il existe au moins une commande $u \in \mathscr{U}$ telle que $\mathscr{S}_{1,\mathcal{I}}(u, \mathscr{X}_1^o, \mathscr{W}_1)$ n'est pas contenu dans $\mathscr{S}_{2,\mathcal{I}}(u, \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_2)$ et vice versa.

L'exemple suivant permet d'illustrer les deux premiers cas de faible discernabilité contrôlable que nous venons d'énumérer.

1.1.3 Discernabilité par comparaison des ensembles de sorties admissibles

Exemple 1.3.14. En plus du système linéaire non perturbé S_1 de l'exemple 1.2.4, considérons le système linéaire S_2 modélisé par les équations (1.1), (1.2) et (1.3) avec

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad ; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad D_2 = 0 \quad ; \quad E_2 = 0_{2 \times d} \quad ; \quad H_2 = 0_{1 \times d}.$$

Rappelons que dans l'exemple 1.2.4, nous avons montré que

$$\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}_{+}}\left(u,\mathbb{R}^{2},\{0_{\mathscr{W}_{1}}\}\right) = \left\{a\phi + \psi_{u} \colon a \in \mathbb{R}, u \in \mathscr{U}\right\}$$

avec les fonctions ϕ et ψ définies par

$$\phi(t) = e^{-t} \quad ; \quad \psi_u(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(\tau) \, \mathrm{d}\tau$$

De la proposition (1.2.3), on peut établir sans peine que

$$\mathscr{S}_{2,\mathbb{R}_{+}}\left(u,\mathbb{R}^{2},\left\{0_{\mathscr{W}_{2}}\right\}\right)=\left\{\beta\,\phi+\gamma\,\phi^{2}+\psi_{u}\colon\beta\in\mathbb{R},\ \gamma\in\mathbb{R},\ u\in\mathscr{U}\right\}.$$

Par conséquent,

$$\forall u \in \mathscr{U}, \quad \mathscr{S}_{1,\mathbb{R}_{+}}\left(u,\mathbb{R}^{2},\left\{0_{\mathscr{W}_{1}}\right\}\right) \subset \mathscr{S}_{2,\mathbb{R}_{+}}\left(u,\mathbb{R}^{2},\left\{0_{\mathscr{W}_{2}}\right\}\right).$$

Ceci signifie que S_1 n'est pas faiblement $(\mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernable de S_2 sur \mathbb{R}_+ et que S_2 est faiblement $(\mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernable de S_1 sur \mathbb{R}_+ . On conclut que les systèmes S_1 et S_2 sont faiblement $(\mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernables sur \mathbb{R}_+ .

Remarque 1.3.15. L'expression "être faiblement discernable de" n'est pas forcément symétrique c'est-à-dire que la faible discernabilité de S_1 par rapport à S_2 n'implique pas forcément la faible discernabilité de S_2 par rapport à S_1 . Pour illustrer cela, on pourra considérer les systèmes S_1 et S_2 de l'exemple 1.3.14. Dans le prochain chapitre, nous montrerons que cette expression est symétrique pour les systèmes linéaires observables qui ne sont pas soumis aux perturbations déterministes (systèmes non perturbés).

Remarque 1.3.16. Il est immédiat que des systèmes qui sont strictement discernables sont également faiblement discernables. La notion de discernabilité stricte implique donc celle de faible discernabilité contrôlable.

Dans la suite, nous désignerons par $\mathscr{U}_{dis}^{fbe}(S_1, S_2)$ l'ensemble des commandes qui rendent

faiblement discernable les systèmes S_1 et S_2 :

$$\mathscr{U}_{\rm dis}^{\rm fbe}\left(S_{1}, S_{2}\right) = \left\{ u \in \mathscr{U} : \mathscr{S}_{1, \mathbb{J}}\left(u, \mathscr{X}_{1}^{o}, \{0_{\mathscr{W}_{1}}\}\right) \neq \mathscr{S}_{2, \mathbb{J}}\left(u, \mathscr{X}_{2}^{o}, \{0_{\mathscr{W}_{2}}\}\right) \right\}.$$
(1.40)

Pour les systèmes S_1 et S_2 non perturbés, $\mathscr{U}_{\text{dis}}^{\text{fbe}}(S_1, S_2)$ est un sous-ensemble du complémentaire de $\mathscr{U}_{\text{ind}}^{str}(S_1, S_2)$ dans \mathscr{U} c'est-à-dire $\mathscr{U}_{\text{dis}}^{\text{fbe}}(S_1, S_2) \subset \mathscr{U} \setminus \mathscr{U}_{\text{ind}}^{str}(S_1, S_2)$. Nous analyserons plus loin dans le chapitre 3, le problème de caractérisation du domaine $\mathscr{U}_{\text{dis}}^{\text{fbe}}(S_1, S_2)$ des systèmes linéaires non-perturbés.

1.3.4.2 Forte discernabilité contrôlable

La forte discernabilité contrôlable correspond à la situation où il existe une commande ususceptible de produire des signaux de sorties qui ne sont pas à la fois u-compatibles avec S_1 et S_2 :

Définition 1.3.17 (Forte discernabilité contrôlable). On dira des systèmes S_1 et S_2 qu'ils sont contrôlablement $(\mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernables au sens fort sur \mathfrak{I} ou qu'ils sont simplement fortement $(\mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernables sur \mathfrak{I} s'il existe une commande $u \in \mathscr{U}$ telle que

$$\mathscr{S}_{1,\mathfrak{I}}\left(u,\mathscr{X}_{1}^{o},\mathscr{W}_{1}\right)\bigcap\mathscr{S}_{2,\mathfrak{I}}\left(u,\mathscr{X}_{2}^{o},\mathscr{W}_{2}\right)=\emptyset.$$
(1.41)

La forte discernabilité contrôlable assure donc l'existence d'une commande u, qui appliquée à l'entrée des systèmes S_1 et S_2 génère des sorties $y_1(\cdot, x_1^o, u, w_1)$ et $y_2(\cdot, x_2^o, u, w_2)$ différentes quels que soient les valeurs des états initiaux x_1^o et x_2^o et quelles que soient les perturbations w_1 et w_2 qui agissent sur S_1 et S_2 . Nous désignerons dans la suite par $\mathscr{U}_{\text{dis}}^{\text{frt}}(S_1, S_2)$, l'ensemble des commandes qui rendent fortement discernables les systèmes S_1 et S_2 :

$$\mathscr{U}_{\mathrm{dis}}^{\mathrm{frt}}\left(S_{1}, S_{2}\right) = \left\{ u \in \mathscr{U} : \mathscr{S}_{1, \mathfrak{I}}\left(u, \mathscr{X}_{1}^{o}, \mathscr{W}_{1}\right) \bigcap \mathscr{S}_{2, \mathfrak{I}}\left(u, \mathscr{X}_{2}^{o}, \mathscr{W}_{2}\right) = \emptyset \right\}.$$
(1.42)

Pour les systèmes non perturbés, $\mathscr{U}_{dis}^{frt}(S_1, S_2)$ peut être défini à partir de la zone d'indiscernabilité comme suit :

$$\mathscr{U}_{\text{dis}}^{\text{frt}}(S_1, S_2) = \{ u \in \mathscr{U} : \forall (x_1^o, x_2^o) \in \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, (x_1^o, x_2^o, u) \notin \mathscr{U}_{\text{ind}}(S_1, S_2) \}$$

$$= \mathscr{U} \setminus \mathscr{U}_{\text{ind}}^{str}(S_1, S_2).$$
(1.43)

Nous reviendrons dans le chapitre 3 sur la question de la détermination de $\mathscr{U}_{dis}^{frt}(S_1, S_2)$.

La figure ci-dessous est un exemple d'illustration graphique des ensembles de sorties admissibles des systèmes qui sont fortement discernables.



Figure 1.5 – Forte discernabilité contrôlable

Sur cette figure, les commandes qui permettent de discerner fortement les systèmes S_1 et S_2 sont localisées dans les domaines $\mathscr{U}_{\text{dis},1}^{\text{frt}}$ et $\mathscr{U}_{\text{dis},2}^{\text{frt}}$.

Exemple 1.3.18. Soient S_1 et S_2 les systèmes dynamiques linéaires modélisés par les équations (1.1), (1.2) et (1.3) avec

$$A_{1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; B_{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; C_{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} ; D_{1} = 0 ; E_{1} = 0_{2 \times d} ; H_{1} = 0_{1 \times d}$$
$$A_{2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} ; B_{2} = B_{1} ; C_{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} ; D_{2} = 0 ; E_{2} = 0_{2 \times d} ; H_{2} = 0_{1 \times d}$$

Il découle de la structure des matrices de la représentation d'état de S_1 et S_2 que ces deux systèmes sont positifs [Farina and Rinaldi, 2000]. Ainsi, pour que S_1 et S_2 aient des variables d'état et de sortie positives, nous supposons que le domaine \mathscr{U} est composé de commandes positives et que les états initiaux de S_1 et S_2 sont dans l'orthant positif de \mathbb{R}^2 ($\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$). Nous supposons de plus que les états initiaux de S_1 et S_2 sont bornés :

$$\mathscr{X}_1^o = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le a_1 \le \overline{\mathbf{a}}_1, \ 0 \le b_1 \le \overline{\mathbf{b}}_1 \right\}$$

et

$$\mathscr{X}_{2}^{o} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{2} & b_{2} \end{bmatrix}^{\top} \in \mathbb{R}^{2} \colon 0 \le a_{2} \le \overline{\mathbf{a}}_{2}, \ 0 \le b_{2} \le \overline{\mathbf{b}}_{2} \right\}.$$

En appliquant un échelon positif u^* d'amplitude $u_0 > 0$ ($u^*(t) = u_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$), on peut déduire sans peine de la proposition 1.2.3 que

$$\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}}\left(u^{\star},\mathscr{X}_{1}^{o},\{0_{\mathscr{W}_{1}}\}\right) = \left\{ \left((b_{1}-u_{0}) \ \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{+}} + a_{1} - 2 u_{0} \right) \phi + 2 u_{0} \colon 0 \le a_{1} \le \overline{\mathbf{a}}_{1}, \ 0 \le b_{1} \le \overline{\mathbf{b}}_{1} \right\}$$

 $et \ que$

$$\mathscr{S}_{2,\mathbb{R}}\left(u^{\star},\mathscr{X}_{2}^{o},\{0_{\mathscr{W}}\}\right)\left\{0_{\mathscr{W}_{2}}\right\} = \left\{\left(a_{2}+b_{2}-2\,u_{0}\right)\,\phi+2\,u_{0}\colon 0\leq a_{2}\leq\overline{\mathbf{a}}_{2},\ 0\leq b_{2}\leq\overline{\mathbf{b}}_{2}\right\}$$

où on rappelle que ϕ est définie dans l'exemple 1.2.4 et que $\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$ désigne la fonction identité sur \mathbb{R}_+ . De plus en choisissant l'amplitude u_0 de l'échelon tel que $u_0 > \overline{\mathbf{b}}_1$, il découle des expressions de $\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}}$ $(u^*, \mathscr{X}_1^o, \{0_{\mathscr{W}_1}\})$ et $\mathscr{S}_{2,\mathbb{R}}$ $(u^*, \mathscr{X}_2^o, \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ que $\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}}$ $(u^*, \mathscr{X}_1^o, \{0_{\mathscr{W}_1}\}) \cap \mathscr{S}_{2,\mathbb{R}}$ $(u^*, \mathscr{X}_2^o, \{0_{\mathscr{W}_2}\}) =$ \emptyset . En effet si on suppose que $\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}}$ $(u^*, \mathscr{X}_1^o, \{0_{\mathscr{W}}\})$ et $\mathscr{S}_{2,\mathbb{R}}$ $(u^*, \mathscr{X}_2^o, \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ ne sont pas disjoints alors il existe des nombres a_1 , b_1 , a_2 et b_2 tels que $0 \leq a_s \leq \overline{\mathbf{a}}_s$ et $0 \leq b_s \leq \overline{\mathbf{b}}_s$, s = 1, 2 et

$$(b_1 - u_0) t + a_1 - 2 u_0 = a_2 + b_2 - 2 u_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Par conséquent, $u_0 = b_1 \leq \overline{\mathbf{b}}_1$. Ceci est absurde. On conclut que S_1 et S_2 sont fortement $(\mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernables sur \mathbb{R}_+ .

Il découle des définitions 1.3.1 et 1.3.17 que la discernabilité stricte est plus forte que la forte discernabilité contrôlable. En d'autres termes, si S_1 et S_2 sont strictement discernables alors ils sont également fortement discernables. Par ailleurs, la forte discernabilité contrôlable est une forme particulière du troisième cas de faible discernabilité contrôlable. Par conséquent, elle implique la faible discernabilité contrôlable.

1.3.4.3 Discernabilité contrôlable : etat de l'art

Comme la discernabilité au sens strict, la discernabilité contrôlable est un concept important dans l'étude de l'observabilité des systèmes à commutation. En effet, la discernabilité contrôlable de tous les sous-systèmes ou modes d'un système à commutation garantit l'existence d'une commande qui assure à chaque instant l'identification du mode actif du système. Comme exemples de travaux qui traitent de l'application de l'étude de la discernabilité contrôlable à l'observation des systèmes à commutation, on peut citer [Babaali and Pappas, 2004] et [Cocquempot et al., 2004]. Dans [Babaali and Pappas, 2004], l'identification du mode initial des systèmes linéaires à commutation excités par des commandes analytiques a été caractérisée par la condition (1.44) suivante de forte discernabilité contrôlable.

Théorème 1.3.19. Soient S_1 et S_2 les systèmes linéaires modélisés par les équations (1.1), (1.2) et (1.3). Les systèmes S_1 et S_2 sont fortement $\left(\mathscr{A}\left([0;T],\mathbb{R}^l\right),\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\{0_{\mathscr{W}_1}\}\times\{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ discernables sur [0;T] si et seulement si

$$\mathbb{T}_{1}^{[2n]} \neq \mathbb{T}_{2}^{[2n]}.$$
 (1.44)

où $\mathbb{T}_1^{[2n]}$ et $\mathbb{T}_2^{[2n]}$ sont les matrices de Toeplitz définies par (1.22)

Il découle de la condition (1.44) que lorsque \mathscr{U} est la classe des commandes analytiques, la forte discernabilité contrôlable des systèmes linéaires non perturbés ne dépend pas non plus de l'instant final T de la période d'observation [0;T] des systèmes. Notons que la condition (1.44) de forte discernabilité contrôlable est facilement testable et est un critère d'évaluation de la similarité des paramètres de Markov des systèmes S_1 et S_2 . Une conséquence du théorème 1.3.19 est que lorsque S_1 et S_2 sont linéaires, la seule situation où il n'existe pas de commande analytique u telle que les ensembles de sorties $\mathscr{S}_{1,\mathcal{I}}(u, \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\})$ et $\mathscr{S}_{2,\mathcal{I}}(u, \mathbb{R}^n, 0_{\mathscr{W}_2})$ soient disjoints est le cas où S_1 et S_2 ont les mêmes paramètres de Markov. Une autre conséquence de ce théorème est la condition nécessaire suivante de discernabilité contrôlable.

Proposition 1.3.20. Soient S_1 et S_2 les systèmes dynamiques linéaires modélisés par les équations (1.1), (1.2) et (1.3). Si $\mathscr{A}([0;T],\mathbb{R}^l) \subseteq \mathscr{U}$ et si $\mathbb{T}_1^{[2n]} \neq \mathbb{T}_2^{[2n]}$ alors les systèmes S_1 et S_2 sont fortement $(\mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernables sur [0;T].

Démonstration. La preuve est une conséquence immédiate du théorème 1.3.19 et de la définition 1.3.13 de discernabilité contrôlable.

Outre son importance dans l'analyse de l'observabilité des systèmes à commutation, la discernabilité contrôlable peut jouer un rôle déterminant dans l'estimation des paramètres des systèmes. En effet, la faible (\mathscr{U} , { 0_n } × { 0_n }, { $0_{\mathscr{W}_1}$ } × { $0_{\mathscr{W}_2}$ })-discernabilité des systèmes linéaires a été utilisée dans [Grewal and Glover, 1976] pour étudier l'indentifiabilité¹ des paramètres [Jacquez and Greif, 1985], [Delforge, 1982] des systèmes linéaires et non linéaires, propriété sans laquelle le problème d'estimation des paramètres de ces systèmes peut être mal posé. Dans ce contexte, il est prouvé dans [Grewal and Glover, 1976] que pour la classe $\mathscr{U} = \mathscr{M}([0;T], \mathbb{R}^l)$ des commandes continues par morceaux sur [0;T] on a la caractérisation suivante de la faible discernabilité contrôlable :

^{1.} propriété qui permet de déterminer de manière unique les paramètres du systèmes à partir des données entrée-sortie

Théorème 1.3.21. Les systèmes linéaires S_1 et S_2 modélisés par les équations (1.1), (1.2) et (1.3) sont faiblement $(\mathscr{M}([0;T],\mathbb{R}^l), \{0_n\} \times \{0_n\}, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernables sur [0;T] si et seulement si $\mathbb{T}_1^{[2n]} \neq \mathbb{T}_2^{[2n]}$.

Cette condition s'applique notamment pour les systèmes linéaires non perturbés qui ont une position initiale nulle. Elle ne dépend pas non plus de l'instant final T de la période [0; T]d'observation et elle peut être également testée en comparant les paramètres de Markov des deux systèmes.

1.4 Discernabilité à travers les résidus de parité

Les systèmes dynamiques ne sont pas à l'abri des défaillances. Il peut s'agir par exemple de défauts actionneurs ou de défauts capteurs. La détection et la localisation de ces défauts reposent généralement sur la construction et l'analyse d'un résidu qui est un signal reflétant la cohérence entre les valeurs mesurées (données d'entrée et sortie) et le modèle mathématique du système lorsqu'il est en état de fonctionnement normal. Afin de caractériser le mode de fonctionnement (normal ou défaillant) du système en absence de perturbations, le résidu doit être construit de sorte à être nul en mode de fonctionnement normal et différent de zéro en mode défaillant. Une des techniques employées pour générer les résidus d'un système est la méthode d'espace de parité. Cette méthode est apparue vers les années 1980 avec les travaux de Chow et Willsky [Chow and Willsky, 1984]. Les résidus construits en utilisant la méthode d'espace de parité sont appelés les résidus de parité. Ils sont obtenus par une élimination appropriée de l'influence de la variable d'état sur la variable des sorties et ses dérivées.

Dans la littérature, les résidus de parité ont été utilisés dans [Cocquempot et al., 2003], [Cocquempot et al., 2004], [Domlan et al., 2007b], [Domlan et al., 2007a] pour l'identification du mode actif des systèmes à commutation. Un concept important dans ce processus d'identification est la discernabilité des systèmes dynamiques à travers leurs résidus de parité (résidudiscernabilité). Cette forme de discernabilité permet de comparer les ensembles de sorties admissibles des systèmes via les résidus de parité. Avant de définir les différentes notions de résidu-discernabilité que nous étudierons dans ce mémoire, nous allons brièvement rappeler la méthode de construction des résidus de parité des systèmes dynamiques de la forme (1.1).

1.4.1 Méthode de génération des résidus de parité d'un système

Dans cette section, nous donnons une brève présentation des différentes étapes de génération des résidus de parité. Nous illustrons les différentes étapes de cette méthode dans le cas particu-

lier des systèmes linéaires qui feront dans les chapitres 2 et 4, l'objet de notre étude de résidudiscernabilité. Pour plus de détails sur la méthode de génération des résidus de parité, le lecteur intéressé pourra consulter les références suivantes : [Chow and Willsky, 1984], [Gertler, 1997], [Frank, 1990], [Chen and Patton, 1999], [Staroswiecki et al., 1991] (pour les systèmes dynamiques linéaires), [Yu et al., 1995], [M.Wurtenberger and Hoffing, 1995] (cas des systèmes dynamiques bilinéaires) et [Frisk, 2000], [Staroswiecki and Comtet-Varga, 2001], [Zhang et al., 1998], [Bokor and Szabó, 2009] (pour les systèmes dynamiques polynomiaux).

En dérivant le signal de sortie y_i puis en substituant dans l'expression de \dot{y}_i obtenue, \dot{x}_i par sa formule donnée par l'équation d'état (première équation de (1.1)) on obtient :

$$\dot{y}_{i}(t) = \frac{\partial h_{i}}{\partial x_{i}} (x_{i}(t), u(t), w_{i}(t)) f_{i}(x_{i}(t), u(t), w_{i}(t)) + \frac{\partial h_{i}}{\partial u} (x_{i}(t), u(t), w_{i}(t)) \dot{u}(t) + \frac{\partial h_{i}}{\partial w_{i}} (x_{i}(t), u(t), w_{i}(t)) \dot{w}_{i}(t)$$

En répétant cette opération jusqu'à un ordre $k \in \mathbb{N}$ de dérivation, les dérivées $y_i^{(s)}$, $s = 0, 1, \ldots, k$ peuvent être concaténées sous la forme vectorielle suivante :

$$Y_{i}^{[k]}(t) = \varphi_{i}^{[k]}\left(x_{i}(t), U^{[k]}(t), W_{i}^{[k]}(t)\right)$$
(1.45)

où les variables $Y_i^{[k]}, U^{[k]}$ et $W_i^{[k]}$ sont définies par

$$Y_{i}^{[k]}(t) = \begin{bmatrix} y_{i}(t) \\ \dot{y}_{i}(t) \\ \vdots \\ y_{i}^{(k)}(t) \end{bmatrix}; U^{[k]}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \\ \vdots \\ u^{(k)}(t) \end{bmatrix}; W_{i}^{[k]}(t) = \begin{bmatrix} w_{i}(t) \\ \dot{w}_{i}(t) \\ \vdots \\ w_{i}^{(k)}(t) \end{bmatrix}$$
(1.46)

et la fonction $\varphi_i^{[k]}$ est telle que $\varphi_i^{[k]} \in \mathscr{C}\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{l\,(k+1)} \times \mathbb{R}^{d\,(k+1)} \times \mathbb{R}^{d\,(k+1)}, \mathbb{R}^{m\,(k+1)}\right)$ avec

$$\varphi_{i}^{[0]}\left(x_{i}\left(t\right), U^{[0]}\left(t\right), W_{i}^{[0]}\left(t\right)\right) = h_{i}\left(x_{i}\left(t\right), u\left(t\right), w_{i}\left(t\right)\right)$$

En particulier, dans le cas du système linéaire S_i modélisé par les équations (1.1), (1.2) et (1.3), la fonction $\varphi^{[k]}$ est définie par :

$$\varphi_i^{[k]}\left(x_i\left(t\right), U^{[k]}\left(t\right), W_i^{[k]}\left(t\right)\right) = \mathbb{O}_i^{[k]} x_i\left(t\right) + \mathbb{T}_i^{[k]} U^{[k]}\left(t\right) + \overline{\mathbb{T}}_i^{[k]} W_i^{[k]}\left(t\right)$$
(1.47)

où la matrice d'observabilité $\mathbb{O}_i^{[k]}$ et la matrice de Toeplitz $\mathbb{T}_i^{[k]}$ sont données par (1.22) et $\overline{\mathbb{T}}_i^{[k]}$

est la matrice de Toeplitz définie par

$$\overline{\mathbb{T}}_{i}^{[k]} = \begin{bmatrix} H_{i} & 0_{m \times d} & \cdots & 0_{m \times d} & 0_{m \times d} \\ C_{i} E_{i} & H_{i} & \cdots & 0_{m \times d} & 0_{m \times d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{i} A_{i}^{k-2} E_{i} & C_{i} A_{i}^{k-3} E_{i} & \cdots & H_{i} & 0_{m \times d} \\ C_{i} A_{i}^{k-1} E_{i} & C_{i} A_{i}^{k-2} E_{i} & \cdots & C_{i} E_{i} & H_{i} \end{bmatrix}$$

La matrice $\overline{\mathbb{T}}_{i}^{[k]}$ est la matrice de Toeplitz des paramètres qui traduisent l'influence des perturbations sur S_{i} .

La seconde étape dans la génération des résidus de parité consiste à trouver une transformation $\Pi_i^{[k]} \colon \mathbb{R}^{m(k+1)} \longmapsto \mathbb{R}^{r_i(k)}$ telle que $\Pi_i^{[k]} \circ \varphi_i^{[k]} \left(x_i(t), U^{[k]}(t), W_i^{[k]}(t) \right)$ est indépendant de $x_i(t)$ c'est-à-dire

$$\Pi_{i}^{[k]} \circ \varphi_{i}^{[k]} \left(x_{i}\left(t\right), U^{[k]}\left(t\right), W_{i}^{[k]}\left(t\right) \right) =: \widehat{\varphi}_{i}^{[k]} \left(U^{[k]}\left(t\right), W_{i}^{[k]}\left(t\right) \right)$$
(1.48)

avec $r_i(k)$ le nombre de résidus qui seront générés. Rappelons que dans l'égalité précédente, le symbole \circ est la loi de composition des fonctions. La transformation $\Pi_i^{[k]}$ permet d'éliminer la variable inconnue x_i dans l'équation (1.45). L'existence d'une telle transformation dépend du choix de l'ordre final k de dérivation de la sortie y_i .

Dans le cas linéaire par exemple, k est déterminé de telle sorte que l'on puisse trouver une matrice $\mathbb{O}_{i\perp}^{[k]} \in \mathbb{R}^{r_i(k) \times m(k+1)}$ telle que

$$\mathbb{O}_{i\perp}^{[k]} \mathbb{O}_{i}^{[k]} = 0_{r_i(k) \times n} \quad \text{et} \quad \text{Ker}\left(\mathbb{O}_{i\perp}^{[k]}\right) = \text{Im}\left(\mathbb{O}_{i}^{[k]}\right). \tag{1.49}$$

Notons que le théorème de Cayley-Hamilton garantit l'existence d'au moins un ordre k de dérivation de la sortie qui satisfasse (1.49). Généralement, l'ordre k est choisi au moins égal à l'**indice d'observabilité** du système [Chow and Willsky, 1984], [Kratz et al., 1998], [Ding et al., 1999]. Rappelons que l'indice d'observabilité des systèmes linéaires décrits par les équations (1.1), (1.2) se définit comme suit [Antsaklis and Michel, 2007], [Sundaram and Hadjicostis, 2013].

Définition 1.4.1. L'indice d'observabilité du système nominal associé au système linéaire S_i décrit par les équations (1.1), (1.2) et (1.3) est le nombre entier $\kappa_i \in \mathbb{N}^*$ défini par

$$\boldsymbol{\kappa}_i = 1 + \min \mathcal{Q}_i \tag{1.50}$$

оù

$$\mathcal{Q}_i = \left\{ s \in \mathbb{N} \colon \operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_i^{[s]}\right) = \operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_i^{[s+1]}\right) \right\}.$$
(1.51)

Le nombre $\kappa_i - 1$ correspond donc au plus petit ordre k à partir duquel le rang de la matrice d'observabilité $\mathbb{O}_i^{[k]}$ arrête de croître.



Figure 1.6 – Indice d'observabilité κ_i

La matrice $\mathbb{O}_{i\perp}^{[k]}$ solution de (1.49) est appelée **matrice de parité**. Les colonnes de la transposée de la matrice de parité engendrent l'espace orthogonal à $\operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{i}^{[k]}\right)$ (c'est-à-dire $\operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{i}^{[k]}\right)^{\perp}$) qui est appelé **l'espace de parité** du système S_i . La transformation $\Pi_i^{[k]}$ que l'on utilise dans le cas linéaire pour éliminer la variable d'état

La transformation $\Pi_i^{[k]}$ que l'on utilise dans le cas linéaire pour éliminer la variable d'état est la projection :

$$\Pi_{i}^{[k]}\left(\xi\right) = \mathbb{O}_{i\perp}^{[k]}\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^{m\,(k+1)}$$

L'élimination de la variable d'état par cette projection se traduit par la relation suivante :

$$\Pi_{i}^{[k]} \circ \varphi_{i}^{[k]} \left(x_{i}\left(t\right), U^{[k]}\left(t\right), W_{i}^{[k]}\left(t\right) \right) = \mathbb{O}_{i\perp}^{[k]} \left[\mathbb{T}_{i}^{[k]} U^{[k]}\left(t\right) + \overline{\mathbb{T}}_{i}^{[k]} W_{i}^{[k]}\left(t\right) \right].$$
(1.52)

Une fois la transformation $\Pi_i^{[k]}$ construite, on calcule l'image de $Y_i^{[k]}$ par $\Pi_i^{[k]}$ à partir des relations (1.45) et (1.48). On obtient alors

$$\Pi_{i}^{[k]}\left(Y_{i}^{[k]}(t)\right) - \hat{\varphi}_{i}^{[k]}\left(U^{[k]}(t), 0_{\mathrm{d}\,(k+1)}\right) = \hat{\varphi}_{i}^{[k]}\left(U^{[k]}(t), W_{i}^{[k]}(t)\right) - \hat{\varphi}_{i}^{[k]}\left(U^{[k]}(t), 0_{\mathrm{d}\,(k+1)}\right)$$
(1.53)

La relation (1.53) constitue une relation de parité et il en découle que le signal $\mathcal{R}_i^{[k]}$ défini par

$$\mathcal{R}_{i}^{[k]}(t) = \Pi_{i}^{[k]}\left(Y_{i}^{[k]}(t)\right) - \widehat{\varphi}_{i}^{[k]}\left(U^{[k]}(t), 0_{\mathrm{d}(k+1)}\right) := \mathcal{R}_{i}^{[k]}\left[u, y_{i}\right](t)$$
(1.54)

est nul en absence des entrées inconnues. Ainsi, $\mathcal{R}_i^{[k]}$ définit un résidu dont k est l'ordre. De

l'égalité (1.53) et de la définition (1.54) de $\mathcal{R}_i^{[k]}$ on a :

$$\mathcal{R}_{i}^{[k]}(t) = \widehat{\varphi}_{i}^{[k]}\left(U^{[k]}(t), W_{i}^{[k]}(t)\right) - \widehat{\varphi}_{i}^{[k]}\left(U^{[k]}(t), 0_{\mathrm{d}(k+1)}\right) := \overline{\mathcal{R}}_{i}^{[k]}\left[u, w_{i}\right](t).$$
(1.55)

Pour des valeurs réelles des entrées et sorties connues à chaque instant t de même que celles de leurs dérivées jusqu'à l'ordre k, on peut calculer le résidu $\mathcal{R}_i^{[k]}$ du système S_i à partir de l'expression (1.54). Le signal $\mathcal{R}_i^{[k]}[u, y_i]$ est appelé **forme de calcul** du résidu de parité $\mathcal{R}_i^{[k]}$ de S_i [Chow and Willsky, 1984]. Il est nul si les données u et y_i sont recueillies sur le système S_i dans un état de fonctionnement normal. Cependant la forme (1.55) du résidu $\mathcal{R}_i^{[k]}$ ne peut être calculée numériquement car elle dépend des entrées inconnues w_i de S_i . Elle montre l'influence des perturbations w_i sur le résidu. Elle est appelée forme d'évaluation du résidu [Chow and Willsky, 1984].

Dans le cas linéaire, la formule explicite du résidu de parité $\mathcal{R}_i^{[k]}[u, y_i]$ calculé avec les variables connues u et y_i est donnée par la relation suivante :

$$\mathcal{R}_{i}^{[k]}\left[u, y_{i}\right](t) = \mathbb{O}_{i\perp}^{[k]}\left[Y_{i}^{[k]}\left(t\right) - \mathbb{T}_{i}^{[k]}U^{[k]}\left(t\right)\right].$$
(1.56)

La fonction $\overline{\mathcal{R}}_i^{[k]}[u, w_i]$ qui permet d'évaluer l'influence des perturbations sur le résidu est de la forme :

$$\overline{\mathcal{R}}_{i}^{[k]}\left[u,w_{i}\right]\left(t\right) = \mathbb{O}_{i\perp}^{[k]} \overline{\mathbb{T}}_{i}^{[k]} W_{i}^{[k]}\left(t\right).$$

$$(1.57)$$

Avant de présenter les différentes notions de résidu-discernabilité que nous étudierons dans ce mémoire, nous allons introduire quelques notations nécessaires pour le reste de notre analyse.

Dans tout ce qui suivra, pour une commande $u \in \mathscr{U} \subseteq \mathscr{C}^{\infty}(\mathfrak{I}, \mathbb{R}^l)$ fixée et un signal $z \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathfrak{I}, \mathbb{R}^m), \mathfrak{R}_i^{[k]}[u, z]$ représente le résidu de S_i calculé avec la commande u et le signal z. C'est une fonction définie sur \mathfrak{I} à valeurs dans $\mathbb{R}^{r_i(k)}$ par :

$$\mathcal{R}_{i}^{[k]}\left[u,z\right]\left(t\right) = \Pi_{i}^{[k]}\left(Z^{[k]}\left(t\right)\right) - \hat{\varphi}_{i}^{[k]}\left(U^{[k]}\left(t\right), 0_{d\left(k+1\right)}\right), \quad \forall t \in \mathcal{I}$$
(1.58)

avec

$$Z^{[k]}(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ \vdots \\ z^{(k)}(t) \end{bmatrix}.$$

Pour $u \in \mathscr{U} \subseteq \mathscr{C}^{\infty}(\mathfrak{I}, \mathbb{R}^{l})$ fixée, $\mathcal{R}_{i}^{[k]}[u, \cdot] : z \longmapsto \mathcal{R}_{i}^{[k]}[u, z]$ définit une fonction de $\mathscr{C}^{\infty}(\mathfrak{I}, \mathbb{R}^{m})$ à valeurs dans $\mathscr{C}(\mathfrak{I}, \mathbb{R}^{r_{i}(k)})$. Pour tout ensemble $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{C}(\mathbb{R}_{+}, \mathbb{R}^{m})$, nous notons $\mathcal{R}_{i}^{[k]}[u, \mathscr{S}]$, l'image de \mathscr{S} par la fonction $\mathcal{R}_{i}^{[k]}\left[u,\cdot\right]$:

$$\mathcal{R}_{i}^{[k]}\left[u,\mathscr{S}\right] = \left\{ v \in \mathscr{C}\left(\mathfrak{I}, \mathbb{R}^{r_{i}(k)}\right) : \exists z \in \mathscr{S}, \ v \equiv_{\mathfrak{I}} \mathcal{R}_{i}^{[k]}\left[u, z\right] \right\}.$$
(1.59)

Lorsque $\mathscr{S} = \mathscr{S}_{j,\mathfrak{I}}\left(u, \mathscr{X}_{j}^{o}, \mathscr{W}_{j}\right), j \in \{1, 2\}, \mathfrak{R}_{i}^{[k]}\left[u, \mathscr{S}_{j,\mathfrak{I}}\left(u, \mathscr{X}_{j}^{o}, \mathscr{W}_{j}\right)\right], j \in \{1, 2\}$ représente l'ensemble de tous les résidus de parité de S_{i} que l'on peut calculer à partir de la commande uet des sorties qui sont u-compatibles avec le système S_{j} sur la période d'observation \mathfrak{I} .

De la relation (1.53) qui traduit l'égalité entre la forme de calcul et la forme d'évaluation des résidus de parité de S_i , il vient que l'ensemble $\mathcal{R}_i^{[k]}\left[u, \mathscr{S}_{i,\mathcal{I}}\left(u, \mathscr{X}_j^o, \mathscr{W}_i\right)\right]$, de tous les résidus de parité de S_i qu'on peut calculer avec la commande u et les sorties u-compatibles avec S_i possèdent la propriété suivante :

$$\mathcal{R}_{i}^{[k]}\left[u,\mathscr{S}_{i,\mathcal{I}}\left(u,\mathscr{X}_{i}^{o},\mathscr{W}_{i}\right)\right] = \left\{v\in\mathscr{C}\left(\mathfrak{I},\mathbb{R}^{r_{i}(k)}\right): \exists \widetilde{w}\in\mathscr{W}_{i}, \ v\equiv\overline{\mathfrak{I}}\,\overline{\mathcal{R}}_{i}^{[k]}\left[u,\widetilde{w}\right]\right\}$$
(1.60)

où $\overline{\mathcal{R}}_{i}^{[k]}\left[u,\widetilde{w}\right]$ est la fonction définie sur \mathbb{R}_{+} par

$$\overline{\mathcal{R}}_{i}^{[k]}\left[u,\widetilde{w}\right]\left(t\right) = \widehat{\varphi}_{i}^{[k]}\left(U^{[k]}\left(t\right),\widetilde{W}^{[k]}\left(t\right)\right) - \widehat{\varphi}_{i}^{[k]}\left(U^{[k]}\left(t\right),0_{\mathrm{d}\left(k+1\right)}\right).$$
(1.61)

avec

$$\widetilde{W}^{[k]} = \begin{bmatrix} \widetilde{w}(t) \\ \dot{\widetilde{w}}(t) \\ \vdots \\ \widetilde{w}^{(k)}(t) \end{bmatrix}.$$

Lorsque le système S_i n'est soumise à aucune perturbation ($\mathscr{W}_i = \{0_{\mathscr{W}_i}\}$), la relation (1.60) devient

$$\mathcal{R}_{i}^{[k]}\left[u,\mathscr{S}_{i,\mathcal{I}}\left(u,\mathscr{X}_{i}^{o},\left\{0_{\mathscr{W}_{i}}\right\}\right)\right] = \left\{\mathbf{0}^{[r_{i}(k)]}\right\}$$
(1.62)

où $\mathbf{0}^{[r_i(k)]}$ est la fonction nulle, définie par $\mathbf{0}^{[r_i(k)]} \colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^{r_i(k)}, t \longmapsto \mathbf{0}_{r_i(k)}$. Cette dernière égalité signifie qu'en absence de perturbation dans le modèle d'état de S_i , le résidu de parité de S_i calculé avec tout couple de signaux d'entrée et de sortie (u, y_i) provenant de S_i est identiquement nul. Par conséquent, lorsque l'ensemble $\mathscr{S}_{j,\mathfrak{I}}\left(u, \mathscr{X}_j^o, \left\{\mathbf{0}_{\mathscr{W}_j}\right\}\right)$ des sorties *u*-compatibles avec le modèle nominal de S_j est tel que

$$\mathcal{R}_{i}^{[k]}\left[u,\mathscr{S}_{j,\mathfrak{I}}\left(u,\mathscr{X}_{j}^{o},\left\{0_{\mathscr{W}_{j}}\right\}\right)\right]\neq\left\{\mathbf{0}^{[r_{i}(k)]}\right\},\tag{1.63}$$

alors il existe un signal de sortie qui est u-compatible avec S_j mais qui ne l'est pas avec S_i .

La relation (1.63) entraîne que les ensembles de sorties admissibles de S_1 et S_2 sont différents. Les résidus de parité de S_1 et S_2 peuvent donc être utilisés pour distinguer les sorties des deux systèmes. En partant de cette observation, [Cocquempot et al., 2004] définit la résidudiscernabilité de S_j par rapport à S_i comme étant la capacité du système S_j à générer une sortie y_j qui est compatible avec une commande appropriée u et qui n'annule pas le résidu $\mathcal{R}_i^{[k]}[u, y_j]$ de S_i calculé avec les données u et y_j provenant de S_j . Dans la section suivante, nous définirons des notions de discernabilité à travers les résidus de parité qui prennent en compte les effets des perturbations sur les systèmes S_1 et S_2 . Nous établirons un lien entre ces notions de résidu-discernabilité et celle de [Cocquempot et al., 2004].

Dans tout ce qui suivra, k_1 et k_2 désignent respectivement des ordres quelconques de génération des résidus de parité de S_1 et S_2 .

1.4.2 Discernabilité de deux systèmes à travers leurs résidus de parité

Les notions de résidu-discernabilité que nous introduisons dans ce mémoire sont la faible résidu-discernabilité et la forte résidu-discernabilité. Ces deux notions sont brièvement présentées dans le tableau ci-dessous :

Résidu-discernabilité	Sens faible	$\exists u \in \mathscr{U}, \mathfrak{R}_{1}^{[k_{1}]}\left[u, \mathscr{S}_{2, \mathbb{J}}\left(u, \mathscr{X}_{2}^{o}, \mathscr{W}_{2}\right)\right] \nsubseteq \mathfrak{R}_{1}^{[k_{1}]}\left[u, \mathscr{S}_{1, \mathbb{J}}\left(u, \mathscr{X}_{1}^{o}, \mathscr{W}_{1}\right)\right]$
		ou
		$\exists u \in \mathscr{U}, \mathfrak{R}_{2}^{[k_{2}]}\left[u, \mathscr{S}_{1, \mathfrak{I}}\left(u, \mathscr{X}_{1}^{o}, \mathscr{W}_{1}\right)\right] \nsubseteq \mathfrak{R}_{2}^{[k_{2}]}\left[u, \mathscr{S}_{2, \mathfrak{I}}\left(u, \mathscr{X}_{2}^{o}, \mathscr{W}_{2}\right)\right]$
	Sens fort	$\exists u \in \mathscr{U}, \mathcal{R}_{1}^{[k_{1}]}\left[u, \mathscr{S}_{1, \mathbb{J}}\left(u, \mathscr{X}_{1}^{o}, \mathscr{W}_{1}\right)\right] \cap \mathcal{R}_{1}^{[k_{1}]}\left[u, \mathscr{S}_{2, \mathbb{J}}\left(u, \mathscr{X}_{2}^{o}, \mathscr{W}_{2}\right)\right] = \emptyset$
		ou
		$\exists u \in \mathscr{U}, \mathcal{R}_2^{[k_2]}\left[u, \mathscr{S}_{1, \mathbb{J}}\left(u, \mathscr{X}_1^o, \mathscr{W}_1\right)\right] \cap \mathcal{R}_2^{[k_2]}\left[u, \mathscr{S}_{2, \mathbb{J}}\left(u, \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_2\right)\right] = \emptyset$

 Table 1.2 – Définition de la faible et de la forte résidu-discernabilité

1.4.2.1 Faible résidu-discernabilité

Définition 1.4.2 (Faible résidu-discernabilité). Soient $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$. On dira du système S_i qu'il est faiblement $(\Re_j^{[k_j]}, \mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernable du système S_j sur \Im s'il existe une commande $u \in \mathscr{U}$ telle que

$$\mathfrak{R}_{j}^{[k_{j}]}\left[u,\mathscr{S}_{i,\mathfrak{I}}\left(u,\mathscr{X}_{i}^{o},\mathscr{W}_{i}\right)\right] \nsubseteq \mathfrak{R}_{j}^{[k_{j}]}\left[u,\mathscr{S}_{j,\mathfrak{I}}\left(u,\mathscr{X}_{j}^{o},\mathscr{W}_{j}\right)\right].$$
(1.64)

On dira que les systèmes S_1 et S_2 sont $(\mathfrak{R}_1^{[k_1]}, \mathfrak{R}_2^{[k_2]}, \mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernables sur \mathfrak{I} si le système S_1 est $(\mathfrak{R}_2^{[k_2]}, \mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernable du système S_2 sur \mathfrak{I} ou si le système S_2 est $(\mathfrak{R}_1^{[k_1]}, \mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernable du système S_1 sur \mathfrak{I}

La résidu-discernabilité de S_1 et S_2 assure donc l'existence d'une commande u qui permet de différencier les images des ensembles $\mathscr{S}_{1,\mathcal{I}}(u, \mathscr{X}_1^o, \mathscr{W}_1)$ et $\mathscr{S}_{2,\mathcal{I}}(u, \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_2)$ par les fonctions de calcul de résidus $\mathscr{R}_1^{\lfloor k_1 \rfloor}[u, \cdot]$ et $\mathscr{R}_2^{\lfloor k_2 \rfloor}[u, \cdot]$. En pratique, elle garantit l'existence d'une sortie admissible $y_1(\cdot, x_1^o, u, w_1)$ de S_1 qui permet de distinguer le signal $\mathscr{R}_2^{\lfloor k_2 \rfloor}[u, y_1(\cdot, x_1^o, u, w_1)]$ du signal $\mathscr{R}_2^{\lfloor k_2 \rfloor}[u, y_2(\cdot, x_2^o, u, w_2)]$ quel que soit l'état initial x_2^o et quel que soit l'entrée inconnue w_2 .

Pour les systèmes S_1 et S_2 non soumis à des perturbations, l'inclusion (1.64) est équivalente à

$$\mathcal{R}_{j}^{[k_{j}]}\left[u,\mathscr{S}_{i,\mathcal{I}}\left(u,\mathscr{X}_{i}^{o},\left\{0_{\mathscr{W}_{j}}\right\}\right)\right]\neq\left\{\mathbf{0}^{[r(k_{j})]}\right\}$$

car d'après (1.62), $\Re_{j}^{[k_{j}]}\left[u, \mathscr{S}_{j, \mathcal{I}}\left(u, \mathscr{X}_{j}^{o}, \left\{0_{\mathscr{W}_{j}}\right\}\right)\right]$ est réduit au signal nul $\mathbf{0}^{[r(k_{j})]}$. On retrouve donc la condition (1.63) qui traduit la définition de [Cocquempot et al., 2004] de la discernabilité de S_{i} par rapport à S_{j} à travers les résidus de parité de S_{j} . Plus précisément, la notion de résidu-discernabilité de [Cocquempot et al., 2004] est l'équivalent de la notion de faible $\left(\Re_{1}^{[k]}, \Re_{2}^{[k]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n}, \left\{0_{\mathscr{W}_{1}}\right\} \times \left\{0_{\mathscr{W}_{2}}\right\}\right)$ -discernabilité. On obtient donc le critère suivant de faible résidu-discernabilité [Cocquempot et al., 2004], [Cocquempot et al., 2003] :

Théorème 1.4.3. Soit k un ordre de génération de résidu des systèmes linéaires S_1 et S_2 modélisés par les équations (1.1), (1.2) et (1.3). Alors les systèmes dynamiques S_1 et S_2 ne sont pas faiblement $(\Re_1^{[k]}, \Re_2^{[k]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernables sur [0; T] si et seulement si

$$\operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{1}^{[k]}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_{1}^{[k]} & \mathbb{O}_{2}^{[k]} & \mathbb{T}_{12}^{[k]}\end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{2}^{[k]}\right)$$
(1.65)

avec

$$\mathbb{T}_{12}^{[k]} = \mathbb{T}_1^{[k]} - \mathbb{T}_2^{[k]}$$

Une conséquence de ce théorème est que la faible $\left(\mathcal{R}_{1}^{[k]}, \mathcal{R}_{2}^{[k]}, \mathcal{U}, \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n}, \{0_{\mathscr{W}_{1}}\} \times \{0_{\mathscr{W}_{2}}\}\right)$ discernabilité ne dépend pas de l'instant final T de la période d'observation [0; T] des systèmes.

D'après la relation fondamentale (1.64) qui définit la faible résidu-discernabilité de S_i par rapport à S_i , on peut distinguer les trois cas typiques suivants de faibles résidu-discernabilité :

- Cas 1 : S_1 est $(\mathscr{U}, \mathscr{R}_2^{[k_2]}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernable de S_2 sur \mathfrak{I} tandis que S_2 n'est pas $(\mathscr{U}, \mathscr{R}_1^{[k_1]}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernable de S_1 sur \mathfrak{I} .
- $\operatorname{Cas} 2: S_2 \operatorname{est} \left(\mathscr{U}, \mathfrak{R}_2^{[k_2]}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2 \right) \text{-discernable de } S_1 \operatorname{sur} \mathfrak{I} \operatorname{tandis que} S_1 \operatorname{n'est} \\ \operatorname{pas} \left(\mathscr{U}, \mathfrak{R}_1^{[k_1]}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2 \right) \text{-discernable de } S_2 \operatorname{sur} \mathfrak{I}.$
- Cas 3 : le système S_1 est $(\mathscr{U}, \mathfrak{R}_2^{[k_2]}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernable du système S_2 sur \mathfrak{I} et S_2 est $(\mathscr{U}, \mathfrak{R}_1^{[k_1]}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernable de S_1 sur le domaine $\mathscr{X}_1^o \times \mathscr{W}_1$.

La condition fondamentale (1.64) est encore équivalente à l'existence d'un couple $(x_i^o, w_i) \in \mathscr{X}_i^o \times \mathscr{W}_i$ tel que

$$\mathcal{R}_{j}^{[k_{j}]}\left[u, y_{i}\left(\cdot, u, x_{i}^{o}, u, w_{i}\right)\right] \neq \mathcal{R}_{j}^{[k_{j}]}\left[u, y_{j}\left(\cdot, u, x_{j}^{o}, u, w_{j}\right)\right], \quad \forall \left(x_{j}^{o}, w_{j}\right) \in \mathscr{X}_{j}^{o} \times \mathscr{W}_{j}.$$
(1.66)

En désignant par $\Psi_{ji}^{[k_j]}[x_i^o, u, w_1, w_2]$ la fonction écart des résidus $\mathcal{R}_j^{[k_j]}[u, y_i(\cdot, u, x_i^o, u, w_i)]$ et $\mathcal{R}_j^{[k_j]}[u, y_j(\cdot, u, x_j^o, u, w_j)]$ c'est-à-dire

$$\Psi_{ji}^{[k_j]}[x_i^o, u, w_1, w_2] = \mathcal{R}_j^{[k_j]}[u, y_i(\cdot, u, x_i^o, u, w_i)] - \mathcal{R}_j^{[k_j]}\left[u, y_j\left(\cdot, u, x_j^o, u, w_j\right)\right],$$
(1.67)

la faible résidu-discernabilité peut être définie de manière équivalente à la définition 1.4.2 à partir des fonctions $\Psi_{12}^{[k_1]}$ et $\Psi_{21}^{[k_2]}$ comme suit :

Proposition 1.4.4. Soit $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$. Alors le système dynamique S_i est faiblement $\left(\mathfrak{R}_j^{[k_j]}, \mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2\right)$ -discernable du système S_j sur \mathfrak{I} si et seulement s'il existe une commande $u \in \mathscr{U}$ et un couple $(x_i^o, w_i) \in \mathscr{X}_i^o \times \mathscr{W}_i$ tels que la fonction $\Psi_{ji}^{[k_j]}[x_i^o, u, w_1, w_2]$ est non identiquement nulle sur \mathfrak{I} , pour tout $(x_j^o, w_j) \in \mathscr{X}_j^o \times \mathscr{W}_j$.

Notons que dans la définition (1.67) de la fonction $\Psi_{ji}^{[k_j]}[x_i^o, u, w_1, w_2]$, la non dépendance de cette fonction de l'état initial x_j^o de S_j est liée au fait que x_j^o est éliminé par projection de la sortie y_j et ses dérivées dans l'espace de parité de S_j . Dans le cas linéaire par exemple, $\Psi_{ji}^{[k_j]}[x_i^o, u, w_1, w_2]$ est explicitement définie par :

$$\Psi_{ji}^{[k_j]}\left[x_i^{o}, u, w_1, w_2\right](t) = \mathbb{O}_{j\perp}^{[k_j]}\left[\mathbb{O}_{i}^{[k_j]} x_i\left(t, x_i^{o}, u, w_i\right) + \mathbb{T}_{ij}^{[k_j]} U^{[k_j]}\left(t\right) + \overline{\mathbb{T}}_{i}^{[k_j]} W_i^{[k_j]}\left(t\right) - \overline{\mathbb{T}}_{j}^{[k_j]} W_j^{[k_j]}\left(t\right)\right]$$

où on rappelle que

$$x_{i}(t, x_{i}^{o}, u, w_{i}) = C_{i} e^{tA_{i}} x_{i}^{o} + C_{i} \int_{0}^{t} e^{(t-\tau)A_{i}} \left[B_{i} u(\tau) + E_{i} w_{i}(\tau)\right] d\tau + D_{i} u(t) + H_{i} w_{i}(t).$$

Pour plus de détails sur ce calcul, nous renvoyons le lecteur à l'annexe B.

A partir de l'égalité (1.58) qui définit la fonction $\mathcal{R}_j^{[k_j]}[u, \cdot]$ de calcul de résidu de S_j , la relation (1.67) peut être réécrite comme suit :

$$\Psi_{ji}^{[k_j]}\left[x_i^o, u, w_1, w_2\right] = \Pi_j^{[k_j]}\left(Y_i^{[k_j]}\left(\cdot, x_i^o, u, w_i\right)\right) - \Pi_j^{[k_j]}\left(Y_j^{[k_j]}\left(\cdot, x_j^o, u, w_j\right)\right)$$

En particulier, lorsque S_1 et S_2 sont linéaires, $\Pi_j^{[k_j]}$ est la l'application linéaire $\xi \mapsto \mathbb{O}_{j\perp}^{[k_j]} \xi$, et on obtient dans ce cas

$$\Psi_{ji}^{[k_j]}[x_i^o, u, w_1, w_2] = \mathbb{O}_{j\perp}^{[k_j]}\left[Y_i^{[k_j]}(\cdot, x_i^o, u, w_i) - Y_j^{[k_j]}(\cdot, x_j^o, u, w_j)\right].$$

Ainsi, dans le cas linéaire, $\Psi_{ji}^{[k_j]}$ représente la fonction de projection des écarts des sorties de S_1 et S_2 ainsi que ceux de leurs dérivées sur l'espace de parité de S_j .

Le théorème 1.4.6 établit un lien entre la notion de faible résidu-discernabilité et celle de faible discernabilité contrôlable. Plus précisement, il montre que la faible résidu-discernabilité implique la faible discernabilité contrôlable. Pour plus de clarté dans la présentation de la preuve de ce théorème, nous allons utiliser la proposition suivante. Cette proposition est un résultat d'algèbre qui donne quelques propriétés élémentaires sur l'image des ensembles par une fonction.

Proposition 1.4.5. Soient \mathscr{F} et \mathscr{G} deux ensembles et soit ψ une fonction définie sur \mathscr{F} à valeurs dans \mathscr{G} . Alors pour tous sous-ensembles \mathscr{F}_1 et \mathscr{F}_2 de \mathscr{F} on a :

- (i) Si $\mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}_2$ alors $\psi(\mathscr{F}_1) \subseteq \psi(\mathscr{F}_2)$.
- (*ii*) $\psi(\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2) \subseteq \psi(\mathscr{F}_1) \cap \psi(\mathscr{F}_2)$

Démonstration. La preuve est triviale.

Théorème 1.4.6. Si S_1 et S_2 sont faiblement $\left(\mathcal{R}_1^{[k_1]}, \mathcal{R}_2^{[k_2]}, \mathcal{U}, \mathcal{X}_1^o \times \mathcal{X}_2^o, \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2\right)$ -discernables sur \mathfrak{I} alors S_1 et S_2 sont faiblement $(\mathcal{U}, \mathcal{X}_1^o \times \mathcal{X}_2^o, \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2)$ -discernables sur \mathfrak{I} .

Démonstration. Nous ferons un raisonnement par contraposée. Pour cela, supposons que S_1 et S_2 ne sont pas faiblement $(\mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernables sur J. Alors pour toute commande $u \in \mathscr{U}, \mathscr{S}_{1,\mathcal{I}}(u, \mathscr{X}_1^o, \mathscr{W}_1) = \mathscr{S}_{2,\mathcal{I}}(u, \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_2)$. On en déduit, grâce à la proposition 1.4.5 que

$$\forall u \in \mathscr{U}, \quad \mathfrak{R}_{2}^{[k_{2}]}\left[u, \mathscr{S}_{1, \mathbb{J}}\left(u, \mathscr{X}_{1}^{o}, \mathscr{W}_{1}\right)\right] = \mathfrak{R}_{2}^{[k_{2}]}\left[u, \mathscr{S}_{2, \mathbb{J}}\left(u, \mathscr{X}_{2}^{o}, \mathscr{W}_{2}\right)\right]$$

 et

$$\forall u \in \mathscr{U}, \quad \mathfrak{R}_{1}^{[k_{1}]}\left[u, \mathscr{S}_{2, \mathfrak{I}}\left(u, \mathscr{X}_{2}^{o}, \mathscr{W}_{2}\right)\right] = \mathfrak{R}_{1}^{[k_{1}]}\left[u, \mathscr{S}_{1, \mathfrak{I}}\left(u, \mathscr{X}_{1}^{o}, \mathscr{W}_{1}\right)\right]$$

Ces deux relations impliquent que les systèmes dynamiques S_1 et S_2 ne sont pas faiblement $\left(\mathfrak{R}_1^{[k_1]}, \mathfrak{R}_2^{[k_2]}, \mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2\right)$ -discernables sur J. Ceci achève notre preuve.

Dans le chapitre suivant, nous montrerons que pour les systèmes linéaires non perturbés, la réciproque de l'assertion du théorème 1.4.6 est aussi vraie c'est-à-dire si deux systèmes linéaires non perturbés sont faiblement discernables alors ils sont aussi faiblement résidu-discernables.

1.4.2.2 Forte résidu-discernabilité

Comme son nom l'indique, la forte résidu-discernabilité est par définition une notion de résidu-discernabilité plus forte que la faible résidu-discernabilité. Elle assure l'existence d'une commande u telle que les ensembles $\mathcal{R}_1^{[k_1]}[u, \mathscr{S}_{1,J}(u, \mathscr{X}_1^o, \mathscr{W}_1)]$ et $\mathcal{R}_1^{[k_1]}[u, \mathscr{S}_{2,J}(u, \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_2)]$ d'une part ou les ensembles $\mathcal{R}_2^{[k_2]}[u, \mathscr{S}_{1,J}(u, \mathscr{X}_1^o, \mathscr{W}_1)]$ et $\mathcal{R}_2^{[k_2]}[u, \mathscr{S}_{2,J}(u, \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_2)]$ d'une part ou les ensembles $\mathcal{R}_2^{[k_2]}[u, \mathscr{S}_{1,J}(u, \mathscr{X}_1^o, \mathscr{W}_1)]$ et $\mathcal{R}_2^{[k_2]}[u, \mathscr{S}_{2,J}(u, \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_2)]$ d'une part ou les ensembles $\mathcal{R}_2^{[k_2]}[u, \mathscr{S}_{1,J}(u, \mathscr{X}_1^o, \mathscr{W}_1)]$ et $\mathcal{R}_2^{[k_2]}[u, \mathscr{S}_{2,J}(u, \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_2)]$ d'autre part soient disjoints.

Définition 1.4.7 (Forte résidu-discernabilité). Soit $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$. On dira du système S_i qu'il est fortement $(\mathcal{R}_j^{[k_j]}, \mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernable du système S_j sur \mathfrak{I} s'il existe une commande $u \in \mathscr{U}$ telle que

$$\mathcal{R}_{j}^{[k_{j}]}\left[u,\mathscr{S}_{i,\mathcal{I}}\left(u,\mathscr{X}_{i}^{o},\mathscr{W}_{i}\right)\right]\bigcap\mathcal{R}_{j}^{[k_{j}]}\left[u,\mathscr{S}_{j,\mathcal{I}}\left(u,\mathscr{X}_{j}^{o},\mathscr{W}_{j}\right)\right]=\emptyset.$$
(1.68)

On dira que S_1 et S_2 sont fortement $\left(\mathcal{R}_1^{[k_1]}, \mathcal{R}_2^{[k_2]}, \mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2\right)$ -discernables sur \mathfrak{I} si S_1 est fortement $\left(\mathcal{R}_2^{[k_2]}, \mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2\right)$ -discernable de S_2 sur \mathfrak{I} ou si S_2 est fortement $\left(\mathcal{R}_1^{[k_1]}, \mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2\right)$ -discernable de S_1 sur \mathfrak{I} .

La forte résidu-discernabilité de S_1 par rapport à S_2 garantit donc l'existence d'une commande u qui appliquée à l'entrée de S_1 et S_2 permet de distinguer en temps réel le signal $\mathcal{R}_2^{[k_2]}[u, y_1(x_1^o, u, w_1)]$ du signal $\mathcal{R}_2^{[k_2]}[u, y_2(x_2^o, u, w_2)]$ quels que soient les états initiaux x_1^o et x_2^o et quelles que soient les entrées inconnues w_1 et w_2 .

Comme la faible résidu-discernabilité, la forte résidu-discernabilité peut également être définie à partir des fonctions $\Psi_{12}^{[k_1]}$ et $\Psi_{21}^{[k_2]}$ de projection de l'écart des sorties de S_1 et S_2 sur leurs espaces de parités :

Proposition 1.4.8. Soient $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$. Alors le système dynamique S_i est fortement $(\mathcal{R}_j^{[k_j]}, \mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernable du système S_j sur \mathfrak{I} si et seulement s'il existe une commande $u \in \mathscr{U}$ telle que la fonction $\Psi_{ji}^{[k_j]}[x_i^o, u, w_1, w_2]$ définie par (1.67) est non identiquement nulle sur \mathfrak{I} pour tout $(x_i^o, w_1, w_2) \in \mathscr{X}_i^o \times \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$.

Démonstration. La preuve découle du fait que la condition qui traduit la forte résidu-discernabilité de S_i par rapport à S_j est équivalente à : $\forall \left(x_i^o, x_j^o, w_i, w_j\right) \in \mathscr{X}_i^o \times \mathscr{X}_j^o \times \mathscr{W}_i \times \mathscr{W}_j$,

$$\mathcal{R}_{j}^{[k_{j}]}\left[u, y_{i}\left(\cdot, u, x_{i}^{o}, u, w_{i}\right)\right] - \mathcal{R}_{j}^{[k_{j}]}\left[u, y_{j}\left(\cdot, u, x_{j}^{o}, u, w_{j}\right)\right] \neq \mathbf{0}^{[r_{j}(k_{j})]}.$$

Le théorème suivant montre que la forte résidu-discernabilité implique la forte discernabilité contrôlable. L'implication inverse est prouvée dans le chapitre 2 pour les systèmes linéaires.

Théorème 1.4.9. Si S_1 et S_2 sont fortement $\left(\mathfrak{R}_1^{[k_1]}, \mathfrak{R}_2^{[k_2]}, \mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2\right)$ -discernables sur \mathfrak{I} alors S_1 et S_2 sont fortement $(\mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernables sur \mathfrak{I} .

Démonstration. Supposons que S_1 et S_2 sont fortement $\left(\mathfrak{R}_1^{[k_1]}, \mathfrak{R}_2^{[k_2]}, \mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2\right)$ discernables sur J. Alors il existe $j \in \{1, 2\}$ et une commande $u \in \mathscr{U}$ telle que

$$\mathfrak{R}_{j}^{[k_{j}]}\left[u,\mathscr{S}_{1,\mathfrak{I}}\left(u,\mathscr{X}_{1}^{o},\mathscr{W}_{1}\right)\right]\bigcap\mathfrak{R}_{j}^{[k_{j}]}\left[u,\mathscr{S}_{2,\mathfrak{I}}\left(u,\mathscr{X}_{2}^{o},\mathscr{W}_{2}\right)\right]=\emptyset.$$

On en déduit grâce au point (ii) de la proposition 1.4.5 que

$$\mathcal{R}_{j}^{[k_{j}]}\left[u,\mathscr{S}_{1,\mathcal{I}}\left(u,\mathscr{X}_{1}^{o},\mathscr{W}_{1}\right)\bigcap\mathscr{S}_{2,\mathcal{I}}\left(u,\mathscr{X}_{2}^{o},\mathscr{W}_{2}\right)\right]=\emptyset.$$

Ceci implique que $\mathscr{S}_{1,\mathfrak{I}}(u, \mathscr{X}_1^o, \mathscr{W}_1) \cap \mathscr{S}_{2,\mathfrak{I}}(u, \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_2) = \emptyset$. D'où les systèmes dynamiques S_1 et S_2 sont fortement $(\mathscr{U}, \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernables sur \mathfrak{I} .

1.5 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation des notions de discernabilité stricte, de discernabilité contrôlable et de résidu-discernabilité qui feront l'objet de l'étude de ce mémoire. Nous nous sommes reposés sur la notion de sorties admissibles des systèmes pour introduire chacune de ces trois concepts de discernabilité.

Nous avons ensuite montré que parmi ces trois formes de discernabilité, certaines impliquent d'autres. Toutes ces implications que nous avons répertoriées sont schématiquement représentées par le graphe suivant :

Chapitre 1. Notions introductives



 ${\bf Figure} \ {\bf 1.7}-{\rm Lien \ entre \ la \ stricte \ discernabilité, \ la \ discernabilité \ contrôlable \ et \ la \ résidu-discernabilité}$

Des liens entre ces notions de discernabilité et celles étudiées dans [Grewal and Glover, 1976], [Lou and Si, 2009], [Lou and Yang, 2014], [Babaali and Pappas, 2004], [Cocquempot et al., 2003] et [Cocquempot et al., 2004] ont été établis dans ce chapitre. Ils sont résumés dans le tableau ci-dessous :

	Discernabilité			Résidu-discernabilité	
Sens	Strict	Fort	Faible	Faible	
	$\mathscr{Z}_{\mathrm{ind}}\left(S_1,S_2\right)$	$\mathscr{U}_{\mathrm{dis}}^{\mathrm{frt}}\left(S_{1},S_{2}\right)$	$\mathscr{U}_{\mathrm{dis}}^{\mathrm{fbe}}\left(S_{1},S_{2} ight)$	$\mathcal{R}_{j}^{[k]}\left[u,\mathscr{S}_{i,\mathbb{J}}\left(u,\mathscr{X}_{i}^{o},\left\{0_{\mathscr{W}_{j}}\right\}\right)\right]$	
Définition	est	\mathbf{est}	\mathbf{est}	\neq	
	triviale	non vide	non vide	$\left\{ 0^{[r(k)]} ight\}$	
Référence	Lou et. al	Babaali et. al	Grewal et. al	Cocquempot <i>et. al</i>	
U	$\mathrm{L}^{1}\left(\mathfrak{I},\mathbb{R}^{l} ight)$	$\mathscr{A}\left(\mathfrak{I},\mathbb{R}^{l} ight)$		$\mathscr{C}^{\infty}\left(\mathfrak{I},\mathbb{R}^{l} ight)$	
	$\forall p \in \mathbb{C}$	$\mathbb{T}_1^{[2n]} \neq \mathbb{T}_2^{[2n]}$		$\mathrm{rang}\left(\mathbb{O}_{1}^{\left[k ight]} ight)$	
	la matrice			II	
Condition	$\mathbf{R}\left(p\right)$ est			$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_{1}^{[k]} & \mathbb{O}_{2}^{[k]} & \mathbb{T}_{12}^{[k]} \end{bmatrix}\right)$	
	de plein			II	
	rang colonne			$\operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{2}^{\left[k ight]} ight)$	

Table 1.3 – Discernabilité des systèmes dynamiques linéaires non perturbés

Chapitre 2

Caractérisation de la discernabilité faible des systèmes dynamiques linéaires non perturbés

Sommaire

2.1	Faible résidu-discernabilité des systèmes linéaires non perturbés .43				
	2.1.1	Généralisation de la condition de rang de Cocquempot <i>et al.</i>	43		
	2.1.2	Lien entre la faible résidu-discernabilité et les indices d'observabilité			
		des systèmes	47		
	2.1.3	Lien entre la résidu-discernabilité et l'équivalence de systèmes	49		
2.2	2.2 Faible discernabilité contrôlable des systèmes linéaires non per-				
	${f turb{f es}}$				
	2.2.1	Équivalence entre résidu-discernabilité et discernabilité contrôlable $% \mathcal{L}^{(n)}$.	58		
	2.2.2	Caractérisation de la faible discernabilité contrôlable des systèmes non			
		perturbés	62		
2.3 Conclusion					

Dans ce chapitre, nous considérons les systèmes dynamiques linéaires S_1 et S_2 définis par les équations (1.1), (1.2) et (1.3) en absence de perturbations (voir équation (1.7) avec $E_i = 0_{n \times d}$ et $H_i = 0_{m \times d}$) :

$$S_{i} \begin{cases} \dot{x}_{i}(t) = A_{i} x_{i}(t) + B_{i} u(t), \\ y_{i}(t) = C_{i} x_{i}(t) + D_{i} u(t), \\ x_{i}(0) = x_{i}^{o}. \end{cases}$$

Nous nous intéressons à l'étude de la faible discernabilité et à l'étude de la faible résidudiscernabilité de ces deux systèmes.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la faible discernabilité des deux systèmes a été caractérisée dans [Grewal and Glover, 1976] sous l'hypothèse que les deux systèmes partent d'un

Chapitre 2. Caractérisation de la discernabilité faible des SDL non perturbés

même état initial nul ($\mathscr{X}_1^o = \mathscr{X}_2^o = \{0_n\}$) et que la faible résidu-discernabilié de S_1 et S_2 a été étudiée dans [Cocquempot et al., 2004] dans le cadre où les résidus de parité des deux systèmes sont générés à un même ordre. Ces hypothèses limitent donc le champ d'application des conditions de discernabilité données dans [Cocquempot et al., 2004] et [Grewal and Glover, 1976]. Ce chapitre propose des conditions de discernabilité faible plus générales que celles données dans [Cocquempot et al., 2004] et [Grewal and Glover, 1976]. Il est organisé en deux grandes parties.

La première partie est consacrée à la caractérisation de la faible résidu-discernabilité de S_1 et S_2 . Dans un premier temps, nous déterminons une condition nécessaire et suffisante de faible résidu-discernabilité (corollaire 2.1.4) qui a un champ d'application plus large que la condition de rang donnée dans [Cocquempot et al., 2004] (théorème 1.65). Nous montrons ensuite que l'utilisation des résidus de parité $\mathcal{R}_1^{[\kappa_1]}$ et $\mathcal{R}_2^{[\kappa_2]}$ générés à des ordres correspondants aux indices d'observabilité κ_1 et κ_2 de S_1 et S_2 est à privilégier pour discerner faiblement S_1 et S_2 à travers les résidus de parité des deux systèmes. En effet, nous prouvons que lorsque S_1 et S_2 n'ont pas le même indice d'observabilité ($\kappa_1 \neq \kappa_2$) alors ils sont faiblement discernables à travers les résidus $\mathcal{R}_1^{[\kappa_1]}$ et $\mathcal{R}_2^{[\kappa_2]}$. Finalement, nous montrons dans cette première partie que lorsque S_1 et S_2 sont tous deux observables, le seul cas où ils ne sont pas faiblement discernables à travers les résidus $\mathcal{R}_1^{[\kappa_1]}$ et $\mathcal{R}_2^{[\kappa_2]}$ est le cas où ils ont le même indice d'observabilité ($\kappa_1 = \kappa_2$) et des représentations d'état équivalentes.

La seconde partie du chapitre est dédiée à la caractérisation de la faible discernabilité contrôlable. Nous savons grâce à la proposition 1.4.6 que la résidu-discernabilité contrôlable entraîne la faible discernabilité contrôlable. Nous prouvons dans cette partie que ces deux notions de discernabilité faible sont équivalentes. A partir de cette équivalence et des résultats de la première partie, nous donnons des conditions nécessaires et/ou suffisantes de faible discernabilité contrôlable.

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet

- d'une communication [Motchon et al., 2013a] dans la conférence nationale avec comité de lecture "5ème Journées Doctorales/Journées Nationales MACS, 11-13 juillet 2013, Strasbourg, France",
- d'une communication [Motchon et al., 2013b] dans la conférence internationale avec comité de lecture "52nd IEEE Conference on Decision and Control, December 10-13, 2013 at Palazzo dei Congressi, Florence, Italy".

Pour que les résidus de parité des systèmes S_1 et S_2 soient bien définis sur la période d'observation [0; T], les commandes appliquées conjointement aux deux systèmes doivent être suffisamment régulières. Nous supposons donc que : **Hypothèse 2.0.1.** $\mathscr{A}\left([0;T],\mathbb{R}^l\right) \subseteq \mathscr{U} \subseteq \mathscr{C}^{\infty}\left([0;T],\mathbb{R}^l\right).$

2.1 Faible résidu-discernabilité des systèmes linéaires non perturbés

Cette section a pour objectif de déterminer des conditions permettant de caractériser la faible résidu-discernabilité des systèmes S_1 et S_2 .

Les conditions que nous allons établir reposent principalement sur la caractérisation de la faible résidu-discernabilité donnée par la proposition 1.4.4. Rappelons que cette proposition définit la faible résidu-discernabilité de S_1 et S_2 à partir des fonctions $\Psi_{12}^{[k_1]}$ et $\Psi_{21}^{[k_2]}$ qui représentent respectivement la fonction de projection des écarts de sorties de S_1 et S_2 sur l'espace de parité de S_1 et la fonction de projection des écarts de sorties de S_1 et S_2 sur l'espace de parité de S_2 . Pour les systèmes S_1 et S_2 qui ne sont soumises à aucune perturbation, ces fonctions sont définies par (voir annexe B pour les détails de calcul) :

$$\Psi_{ij}^{[k_i]} \left[x_j^o, u, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2} \right] (t) = \mathbb{O}_{i\perp}^{[k_i]} \left[\mathbb{O}_j^{[k_i]} x_j \left(t, x_j^o, u, 0_{\mathscr{W}_j} \right) + \mathbb{T}_{ji}^{[k_i]} U^{[k_i]} \left(t \right) \right]$$
(2.1)

où $\mathbb{O}_{i\perp}^{[k_i]}$ est une matrice de parité de S_i , $\mathbb{O}_j^{[k_i]}$ la matrice d'observabilité de S_j d'ordre k_i et $\mathbb{T}_{12}^{[k]} = \mathbb{T}_1^{[k]} - \mathbb{T}_2^{[k]} = -\mathbb{T}_{21}^{[k]}$ avec $k \in \{k_1, k_2\}$ est la matrice de Toeplitz formée des paramètres de Markov D et $C A^s B$, $s = 0, 1, \ldots, k - 1$ du système augmenté S associé à S_1 et S_2 .

2.1.1 Généralisation de la condition de rang de Cocquempot *et al.*

La première condition de faible résidu-discernabilité que nous établissons est donnée par le corollaire 2.1.4. Elle généralise la condition de rang de Cocquempot *et al.* (voir théorème 1.4.3) qui a été obtenue dans le cas où les résidus de parité des deux systèmes ont été générés à un même ordre $(k_1 = k_2)$.

Pour établir cette condition, en plus de la définition de faible résidu-discernabilité et de la proposition 1.4.4, nous utilisons le théorème 2.1.2 ci-dessous dont la preuve repose sur le lemme 2.1.1 suivant :

Lemme 2.1.1. Soient M_1 , M_2 et M_3 trois matrices ayant le même nombre de lignes. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\operatorname{Im}(M_2) \subseteq \operatorname{Im}(M_1)$ et $\operatorname{Im}(M_3) \subseteq \operatorname{Im}(M_1)$
- (*ii*) rang (M_1) = rang $\left(\begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix} \right)$

Démonstration. Voir Annexe C

Le théorème suivant caractérise la faible résidu-discernabilité du système S_1 (resp. S_2) par rapport à S_2 (resp. S_1).

Théorème 2.1.2. Pour tout $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$, les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) S_i n'est pas faiblement $\left(\mathcal{R}_j^{[k_j]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ -discernable de S_j durant la période d'observation [0; T].
- (ii) Les matrices d'observabilité $\mathbb{O}_{i}^{[k_{j}]}$ et $\mathbb{O}_{j}^{[k_{j}]}$ et la matrice de Toeplitz $\mathbb{T}_{ij}^{[k_{j}]}$ satisfont les deux conditions suivantes :

$$\operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{i}^{[k_{j}]}\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{j}^{[k_{j}]}\right) \quad et \quad \operatorname{Im}\left(\mathbb{T}_{ij}^{[k_{j}]}\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{j}^{[k_{j}]}\right).$$
(2.2)

(iii) Les matrices d'observabilité $\mathbb{O}_{i}^{[k_{j}]}$ et $\mathbb{O}_{j}^{[k_{j}]}$ et la matrice de Toeplitz $\mathbb{T}_{ij}^{[k_{j}]}$ satisfont la condition suivante :

$$\operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{j}^{[k_{j}]}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_{j}^{[k_{j}]} & \mathbb{O}_{i}^{[k_{j}]} & \mathbb{T}_{ij}^{[k_{j}]}\end{bmatrix}\right).$$
(2.3)

Démonstration. L'équivalence entre les assertions (ii) et (iii) est une conséquence immédiate du lemme 2.1.1. Ainsi, pour conclure la preuve du théorème nous allons montrer que les assertions (i) et (ii) sont équivalentes.

D'après la proposition 1.4.4, S_i n'est pas faiblement $(\mathcal{R}_j^{[k_j]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ discernable de S_j sur [0;T] si et seulement si pour tout $(x_i^o, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathscr{U}$, la fonction de projection $\Psi_{ji}^{[k_j]}[x_i^o, u, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}]$ n'est pas identiquement nulle sur [0;T]. Il s'ensuit d'après l'expression (2.1) de $\Psi_{ji}^{[k_j]}[x_i^o, u, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}]$ que montrer que les assertions (*i*) et (*ii*) sont équivalentes revient à prouver que (*ii*) est équivalente à l'assertion (2.4) suivante :

$$\forall (t, x_i^o, u) \in [0; T] \times \mathbb{R}^n \times \mathscr{U}, \quad \mathbb{O}_{j\perp}^{[k_j]} \left[\mathbb{O}_i^{[k_j]} x_i (t, x_i^o, u) + \mathbb{T}_{ij}^{[k_j]} U^{[k_j]} (t) \right] = 0_{r(k_j)}$$
(2.4)

où $r(k_j) = m(k_j + 1) - \operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_j^{[k_j]}\right)$ est le nombre de fonctions composantes de $\mathcal{R}_j^{[k_j]}$.

Supposons dans un premier temps que l'assertion (2.4) est vraie. En écrivant (2.4) pour la commande nulle $(u = 0_{\mathscr{U}})$ et pour t = 0 on obtient

$$\mathbb{O}_{j\perp}^{[k_j]} \mathbb{O}_i^{[k_j]} x_i^o = 0_{r(k_j)}, \quad \forall x_i^o \in \mathbb{R}^n$$

donc

$$\operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{i}^{[k_{j}]}\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(\mathbb{O}_{j\perp}^{[k_{j}]}\right) = \operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{j}^{[k_{j}]}\right).$$

$$(2.5)$$

Ainsi, on vient d'obtenir la première inclusion de (ii). En prenant en compte l'inclusion (2.5) dans la relation (2.4), il s'en suit que

$$\forall (t, u) \in [0; T] \times \mathscr{U}, \quad \mathbb{O}_{j \perp}^{[k_j]} \mathbb{T}_{ij}^{[k_j]} U^{[k_j]}(t) = 0_{r(k_2)}.$$
(2.6)

En réécrivant (2.6) pour les commandes polynomiales u de degré k_j c'est-à-dire pour u de la forme

$$u(t) = a_0 + a_1 t + \frac{a_2}{2!} t^2 + \dots + \frac{a_{k_j}}{k_j!} t^{k_j}, \quad a_s \in \mathbb{R}^m, s = 0, 1, \dots, k_j$$

et pour t = 0, il vient que

$$\mathbb{O}_{j\perp}^{[k_j]} \mathbb{T}_{ij}^{[k_j]} \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{k_j} \end{bmatrix}^\top = \mathbb{O}_{r(k_j)}, \quad \forall a_s \in \mathbb{R}^m, \ s = 0, 1, \dots, k_j$$

Par conséquent,

$$\operatorname{Im}\left(\mathbb{T}_{ij}^{[k_j]}\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(\mathbb{O}_{j\perp}^{[k_j]}\right) = \operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{j}^{[k_j]}\right)$$
(2.7)

d'où on obtient la seconde inclusion de (ii).

Réciproquement si on suppose que l'assertion (ii) est vraie c'est-à-dire si les inclusions (2.5) et (2.7) sont vraies alors la relation (2.4) est toujours vérifiée. D'où les assertions (2.4) et (ii) sont équivalentes.

Exemple 2.1.3. Considérons les systèmes S_1 et S_2 des exemples 1.2.4 et 1.3.14. On obtient

$$\mathbb{O}_{2}^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbb{O}_{1}^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbb{T}_{12}^{[2]} = 0_{3\times 3}$$

qui implique que

$$\operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{2}^{[2]}\right) = 2 = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_{2}^{[2]} & \mathbb{O}_{1}^{[2]} & \mathbb{T}_{12}^{[2]}\end{bmatrix}\right); 1 = \operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{1}^{[1]}\right) \neq \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_{2}^{[1]} & \mathbb{O}_{1}^{[1]} & \mathbb{T}_{12}^{[1]}\end{bmatrix}\right) = 2$$

Par conséquent, S_1 n'est pas faiblement $(\mathfrak{R}_2^{[2]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernable de S_2 sur [0;T] et S_2 est faiblement $(\mathfrak{R}_1^{[1]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernable de S_1 sur [0;T]. On conclut que les systèmes S_1 et S_2 sont $(\mathfrak{R}_1^{[1]}, \mathfrak{R}_2^{[2]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernables sur [0;T]. Du théorème 2.1.2 et de la définition de la faible résidu-discernabilité (définition 1.4.2) on obtient donc la caractérisation suivante de la faible résidu-discernabilité.

Corollaire 2.1.4. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Les systèmes S_1 et S_2 ne sont pas faiblement $\left(\mathfrak{R}_1^{[k_1]}, \mathfrak{R}_2^{[k_2]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ discernables sur [0; T]
- (ii) Les matrices $\mathbb{O}_1^{[k]}$, $\mathbb{O}_2^{[k]}$ et $\mathbb{T}_{12}^{[k]}$, $k = k_1, k_2$ satisfont les deux conditions suivantes

$$\operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{2}^{[k_{2}]}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_{2}^{[k_{2}]} & \mathbb{O}_{1}^{[k_{2}]} & \mathbb{T}_{12}^{[k_{2}]}\end{bmatrix}\right)$$
(2.8)

et

$$\operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{1}^{[k_{1}]}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_{1}^{[k_{1}]} & \mathbb{O}_{2}^{[k_{1}]} & \mathbb{T}_{12}^{[k_{1}]}\end{bmatrix}\right).$$
(2.9)

Il découle du corollaire 2.1.4 que si $k_1 = k_2 = \mathbf{k}$ alors une condition nécessaire et suffisante pour que les systèmes S_1 et S_2 ne soient pas faiblement $(\mathcal{R}_1^{[\mathbf{k}]}, \mathcal{R}_2^{[\mathbf{k}]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ discernables sur [0; T] est

$$\operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{2}^{[\mathbf{k}]}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_{2}^{[\mathbf{k}]} & \mathbb{O}_{1}^{[\mathbf{k}]} & \mathbb{T}_{12}^{[\mathbf{k}]}\end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{2}^{[\mathbf{k}]}\right)$$

On obtient ainsi la condition de rang de discernabilité établie dans [Cocquempot et al., 2004] (théorème 1.65).

De manière équivalente au corollaire 2.1.4, la faible résidu-discernabilité des systèmes S_1 et S_2 peut être caractérisée comme suit :

Corollaire 2.1.5. Les systèmes S_1 et S_2 sont faiblement $\left(\mathcal{R}_1^{[k_1]}, \mathcal{R}_2^{[k_2]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ -discernables sur [0; T] si et seulement si

$$\operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{2}^{[k_{2}]}\right) < \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_{2}^{[k_{2}]} & \mathbb{O}_{1}^{[k_{2}]} & \mathbb{T}_{12}^{[k_{2}]}\end{bmatrix}\right)$$
(2.10)

ou

$$\operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{1}^{[k_{1}]}\right) < \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_{1}^{[k_{1}]} & \mathbb{O}_{2}^{[k_{1}]} & \mathbb{T}_{12}^{[k_{1}]}\end{bmatrix}\right).$$
(2.11)

 $D\acute{e}monstration$. La preuve s'obtient en prenant la négation de l'assertion du corollaire 2.1.4 puis en utilisant le fait qu'on a toujours les deux inégalités suivantes :

$$\operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{2}^{[k_{2}]}\right) \leq \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{2}^{[k_{2}]} & \mathbb{O}_{1}^{[k_{2}]} & \mathbb{T}_{12}^{[k_{2}]} \end{bmatrix} ; \quad \operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{1}^{[k_{1}]}\right) \leq \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_{1}^{[k_{1}]} & \mathbb{O}_{2}^{[k_{1}]} & \mathbb{T}_{12}^{[k_{1}]} \end{bmatrix}\right).$$

2.2.1 Faible résidu-discernabilité des systèmes linéaires non perturbés

Il découle des conditions (2.10) et (2.11) que la faible résidu-discernabilité des systèmes linéaires non perturbés ne dépend pas de l'instant T final de la période d'observation des systèmes. A cet effet, dans la suite du chapitre, nous dirons simplement que "les systèmes S_1 et S_2 sont $\left(\mathcal{R}_1^{[k_1]}, \mathcal{R}_2^{[k_2]}, \mathcal{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ -discernables" au lieu de "les systèmes S_1 et S_2 sont faiblement $\left(\mathcal{R}_1^{[k_1]}, \mathcal{R}_2^{[k_2]}, \mathcal{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ -discernables sur [0; T]".

Les indice d'observabilité κ_1 et κ_2 étant les ordres minimal de dérivation des signaux entréesortie qu'on doit considérer pour générer les résidus de parité de S_1 et S_2 , dans la suite, nous nous focaliserons sur la discernabilité des systèmes S_1 et S_2 à travers les résidus $\mathcal{R}_1^{[\kappa_1]}$ et $\mathcal{R}_2^{[\kappa_2]}$.

2.1.2 Lien entre la faible résidu-discernabilité et les indices d'observabilité des systèmes

Dans cette partie, nous montrons que les indices d'observabilité κ_1 et κ_2 peuvent renseigner sur la possibilité de distinguer S_1 et S_2 à travers les résidus de parité $\mathcal{R}_1^{[\kappa_1]}$ et $\mathcal{R}_2^{[\kappa_2]}$.

Le résultat principal de cette partie est le théorème 2.1.7 qui donne une condition suffisante de faible résidu-discernabilité. La preuve de ce théorème utilise le lemme suivant

Lemme 2.1.6. Soit $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$ et soit $r \in \mathbb{N}^{\star}$. Si $\operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{i}^{[r]}\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{j}^{[r]}\right)$ alors pour tout $s \in \mathbb{N}^{\star}$ tel que $s \leq r$, $\operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{i}^{[s]}\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{j}^{[s]}\right)$.

Démonstration. Supposons que $\operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{i}^{[r]}\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{j}^{[r]}\right)$ et soit $s \in \mathbb{N}^{\star}$ tel que $s \leq r$. Si s = ralors le résultat est immédiat. Supposons que s < r. Alors les matrices $\mathbb{O}_{i}^{[r]}$ et $\mathbb{O}_{j}^{[r]}$ s'écrivent respectivement en fonction de $\mathbb{O}_{i}^{[s]}$ et $\mathbb{O}_{j}^{[s]}$ comme suit :

$$\mathbb{O}_{i}^{[r]} = \begin{bmatrix}
\mathbb{O}_{i}^{[s]} \\
C_{i} A_{i}^{s+1} \\
C_{i} A_{i}^{s+2} \\
\vdots \\
C_{i} A_{i}^{r}
\end{bmatrix} ;
\mathbb{O}_{j}^{[r]} = \begin{bmatrix}
\mathbb{O}_{j}^{[s]} \\
C_{j} A_{j}^{s+1} \\
C_{j} A_{j}^{s+2} \\
\vdots \\
C_{j} A_{j}^{r}
\end{bmatrix}.$$
(2.12)

Soit $v \in \text{Im}\left(\mathbb{O}_{i}^{[s]}\right)$. Alors il existe un vecteur $\xi \in \mathbb{R}^{n}$ tel que $v = \mathbb{O}_{i}^{[s]} \xi$. Posons $\hat{v} = \mathbb{O}_{i}^{[r]} \xi$. On a $\hat{v} \in \text{Im}\left(\mathbb{O}_{i}^{[r]}\right) \subseteq \text{Im}\left(\mathbb{O}_{j}^{[r]}\right)$ et par conséquent il existe $\hat{\xi} \in \mathbb{R}^{n}$ tel que

$$\mathbb{O}_i^{[r]}\xi =: \hat{v} = \mathbb{O}_j^{[r]}\hat{\xi}.$$
(2.13)

Il découle des égalités (2.12) et (2.13) que

$$v := \mathbb{O}_i^{[s]} \xi = \mathbb{O}_j^{[s]} \widehat{\xi}$$
(2.14)

et ceci implique que $v \in \operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{j}^{[s]}\right)$. D'où $\operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{i}^{[s]}\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{j}^{[s]}\right)$.

Théorème 2.1.7. Si S_1 et S_2 n'ont pas le même indice d'observabilité ($\kappa_1 \neq \kappa_2$) alors ils sont faiblement $\left(\mathcal{R}_1^{[\kappa_1]}, \mathcal{R}_2^{[\kappa_2]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ -discernables.

Démonstration. Nous ferons une démonstration par l'absurde. Pour cela, supposons que $\kappa_1 < \kappa_2$ et que les systèmes S_1 et S_2 ne sont pas faiblement $\left(\mathfrak{R}_1^{[\kappa_1]}, \mathfrak{R}_2^{[\kappa_2]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ discernables. Du théorème 2.1.2, on obtient les deux inclusions suivantes :

$$\operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{1}^{[\boldsymbol{\kappa}_{2}]}\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{2}^{[\boldsymbol{\kappa}_{2}]}\right) \quad ; \quad \operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{2}^{[\boldsymbol{\kappa}_{1}]}\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{1}^{[\boldsymbol{\kappa}_{1}]}\right). \tag{2.15}$$

Puisque $\kappa_1 - 1 < \kappa_1 < \kappa_2$, les inclusions (2.15) et le lemme 2.1.6 entraînent que

$$\operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{1}^{[\kappa_{1}-1]}\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{2}^{[\kappa_{1}-1]}\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{1}^{[\kappa_{1}-1]}\right)$$

et il s'ensuit que

$$\operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{1}^{[\boldsymbol{\kappa}_{1}-1]}\right) = \operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{2}^{[\boldsymbol{\kappa}_{1}-1]}\right).$$
(2.16)

D'autre part, comme $\kappa_1 < \kappa_2$, les inclusions (2.15) et le lemme 2.1.6 impliquent les inclusions suivantes

$$\operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{1}^{[\boldsymbol{\kappa}_{1}]}\right)\subseteq\operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{2}^{[\boldsymbol{\kappa}_{1}]}\right)\subseteq\operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{1}^{[\boldsymbol{\kappa}_{1}]}\right)$$

qui sont équivalentes à

$$\operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{1}^{[\kappa_{1}]}\right) = \operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{2}^{[\kappa_{1}]}\right).$$
(2.17)

Il découle des égalités (2.16) et (2.17) que

$$\operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{2}^{[\boldsymbol{\kappa}_{1}-1]}\right) = \operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{1}^{[\boldsymbol{\kappa}_{1}-1]}\right) \quad ; \quad \operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{1}^{[\boldsymbol{\kappa}_{1}]}\right) = \operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{2}^{[\boldsymbol{\kappa}_{1}]}\right). \tag{2.18}$$

Par ailleurs, par définition de l'indice d'observabilité κ_1 , on a :

$$\operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{1}^{[\kappa_{1}-1]}\right) = \operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{1}^{[\kappa_{1}]}\right).$$
(2.19)

Les relations (2.18) et (2.19) impliquent donc que rang $\left(\mathbb{O}_{2}^{[\kappa_{1}-1]}\right) = \operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{2}^{[\kappa_{1}]}\right)$. Par conséquent, $\kappa_{2} - 1 \leq \kappa_{1} - 1 \operatorname{car} \kappa_{2} - 1$ est le plus petit indice k à partir duquel le rang de la matrice

 $\mathbb{O}_2^{[k]}$ cesse de croître (voir définition (1.50) de l'indice d'observabilité). On vient ainsi de prouver que $\kappa_2 \leq \kappa_1$ et ceci est absurde d'après notre hypothèse de départ. Notons pour conclure la preuve qu'en supposant $\kappa_1 > \kappa_2$ dans l'hypothèse de départ, le raisonnement serait similaire à celui que nous venons de proposer.

Les indices d'observabilité κ_1 et κ_2 peuvent donc jouer un rôle décisif dans l'étude de la faible résidu-discernabilité des systèmes S_1 et S_2 . En comparant leurs valeurs sans pour autant tester les conditions de rang (2.10) et (2.11), on peut *a priori* savoir s'il est possible de distinguer S_1 et S_2 en utilisant les résidus $\mathcal{R}_1^{[\kappa_1]}$ et $\mathcal{R}_2^{[\kappa_2]}$. Afin d'illustrer les résultats du théorème 2.1.7, considérons l'exemple suivant :

Exemple 2.1.8. Soient S_1 et S_2 les systèmes dynamiques définis dans les exemples 1.2.4 et 1.3.14. Dans cet exemple, une simple comparaison de leurs indices d'observabilité nous permet d'aboutir à la conclusion suivant laquelle S_1 et S_2 sont faiblement résidu-discernables.

L'indice d'observabilité de S_1 est $\boldsymbol{\kappa}_1 = 1$ et celui de S_2 est $\boldsymbol{\kappa}_2 = 2$. Puisque $\boldsymbol{\kappa}_1 \neq \boldsymbol{\kappa}_2$, on conclut donc que S_1 et S_2 sont faiblement $\left(\mathfrak{R}_1^{[\boldsymbol{\kappa}_1]}, \mathfrak{R}_2^{[\boldsymbol{\kappa}_2]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \{\mathbf{0}_{\mathscr{W}_1}\} \times \{\mathbf{0}_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ -discernables.

On déduit du théorème 2.1.7 et du corollaire 2.1.4, le résultat suivant qui caractérise la discernabilité de S_1 et S_2 à travers les résidus de parité $\mathcal{R}_1^{[\kappa_1]}$ et $\mathcal{R}_2^{[\kappa_2]}$.

Corollaire 2.1.9. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) S_1 et S_2 ne sont pas faiblement $\left(\mathcal{R}_1^{[\kappa_1]}, \mathcal{R}_2^{[\kappa_2]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ -discernables (ii) S_1 et S_2 ont le même indice d'observabilité κ ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$) et

$$\operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{1}^{[\boldsymbol{\kappa}]}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_{1}^{[\boldsymbol{\kappa}]} & \mathbb{O}_{2}^{[\boldsymbol{\kappa}]} & \mathbb{T}_{12}^{[\boldsymbol{\kappa}]}\end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{2}^{[\boldsymbol{\kappa}]}\right).$$
(2.20)

Démonstration. La preuve est une conséquence immédiate du théorème 2.1.7 et du corollaire 2.1.4. $\hfill \Box$

La condition (2.20) montre les différentes contraintes que doivent satisfaire les matrices $\mathbb{O}_1^{[\kappa]}$, $\mathbb{O}_2^{[\kappa]}$ et $\mathbb{T}_{12}^{[\kappa]}$ lorsque les systèmes S_1 et S_2 ne sont pas faiblement résidu-discernables. Dans la section suivante, nous allons prouver que ces contraintes imposent une structure particulière aux matrices de la représentation d'état de S_1 et S_2 .

2.1.3 Lien entre la résidu-discernabilité et l'équivalence de systèmes

Dans cette section nous donnons une interprétation de la condition (2.20) en termes de propriétés des systèmes S_1 et S_2 . Nous déterminons dans un premier temps la structure des

Chapitre 2. Caractérisation de la discernabilité faible des SDL non perturbés

matrices de la représentation d'état des systèmes S_1 et S_2 satisfaisant la condition (2.20). Nous montrons ensuite que les systèmes linéaires observables vérifiant cette condition sont les systèmes dont les représentations d'état sont équivalentes. Pour établir ces résultats, nous aurons besoin des lemmes 2.1.10 et 2.1.11 suivants.

Le lemme 2.1.10 est un résultat classique d'automatique des systèmes dynamiques linéaires. Il s'agit de la décomposition de Kalman en forme observable [Antsaklis and Michel, 2007], [Larminat, 2007], [Antsaklis and Michel, 2006] des systèmes S_1 et S_2 . Sous l'hypothèse de non observabilité de S_1 et S_2 , cette décomposition permet de transformer par un changement de base approprié, la dynamique de chacun des deux systèmes en deux dynamiques dont l'une est observable.

Lemme 2.1.10. Pour tout $i \in \{1, 2\}$, si rang $\left(\mathbb{O}_{i}^{[\kappa_{i}]}\right) = r_{i} < n$ alors il existe cinq matrices $Q_{i} \in \operatorname{GL}_{n}(\mathbb{R}), A_{i,11} \in \mathbb{R}^{r_{i} \times r_{i}}, A_{i,21} \in \mathbb{R}^{(n-r_{i}) \times r_{i}}, A_{i,22} \in \mathbb{R}^{(n-r_{i}) \times (n-r_{i})}$ et $C_{i,1} \in \mathbb{R}^{m \times r_{i}}$ telles que

$$A_{i} = Q_{i} \begin{bmatrix} A_{i,11} & 0_{r_{i} \times (n-r_{i})} \\ & & \\ A_{i,21} & A_{i,22} \end{bmatrix} Q_{i}^{-1} \quad ; \quad C_{i} = \begin{bmatrix} C_{i,1} & 0_{m \times (n-r_{i})} \end{bmatrix} Q_{i}^{-1}$$
(2.21)

et

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} C_{i,1} \\ C_{i,1} A_{i,11} \\ \vdots \\ C_{i,1} A_{i,11}^{\kappa_i - 1} \end{bmatrix} \right) = r_i$$
(2.22)

Démonstration. Voir annexe D.

Le lemme 2.1.11 est une conséquence du lemme 2.1.10. Il permet de réécrire la matrice d'observabilité $\mathbb{O}_i^{[\kappa_i]}$, de S_i , $i \in \{1, 2\}$ en utilisant deux matrices appropriées \hat{A}_i et \hat{C}_i dont la paire (\hat{C}_i, \hat{A}_i) est observable. Dans les preuves des théorèmes 2.1.12, 2.1.17 et 2.1.19, cette nouvelle expression de la matrice d'observabilité $\mathbb{O}_i^{[\kappa_i]}$ nous permettra d'éviter de distinguer les cas S_i observable et S_i non observable.

Lemme 2.1.11. Pour tout $i \in \{1, 2\}$, soit $r_i = \operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_i^{[\kappa_i]}\right)$ et soient $\widehat{A}_i \in \mathbb{R}^{r_i \times r_i}$, $\widehat{C}_i \in \mathbb{R}^{m \times r_i}$ et $\mathbb{M}_i \in \mathbb{R}^{r_i \times n}$ les matrices définies par

$$\left(\hat{A}_{i}, \hat{C}_{i}, \mathbb{M}_{i}\right) = \begin{cases} (A_{i}, C_{i}, I_{n}) & si \quad r_{i} = n, \\ (A_{i,11}, C_{i,1}, Q_{i,1}) & si \quad r_{i} < n, \end{cases}$$
(2.23)

où $A_{i,11}$ et $C_{i,1}$ sont définies par le lemme 2.1.10 et $Q_{i,1}$ est la matrice des r_i premières lignes de la matrice Q_i^{-1} du lemme 2.1.10. Alors on a

$$\mathbb{O}_i^{[\kappa_i]} = \widehat{\mathbb{O}}_i^{[\kappa_i]} \mathbb{M}_i \tag{2.24}$$

et

$$\operatorname{rang}\left(\mathbb{M}_{i}\right) = \operatorname{rang}\left(\widehat{\mathbb{O}}^{\left[\boldsymbol{\kappa}_{i}-1\right]}\right) = r_{i} \tag{2.25}$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice $\widehat{\mathbb{O}}_i^{[k]} \in \mathbb{R}^{m(k+1) \times r_i}$ est définie par

$$\widehat{\mathbb{O}}_{i}^{[k]} = \begin{bmatrix} \widehat{C}_{i} \\ \widehat{C}_{i} \widehat{A}_{i} \\ \vdots \\ \widehat{C}_{i} \widehat{A}_{i}^{k} \end{bmatrix}.$$
(2.26)

Démonstration. Pour montrer les résultats de ce lemme nous allons distinguer deux cas : le cas $r_i = n$ et le cas $r_i < n$.

Dans le premier cas on a $\widehat{A}_i = A_i$, $\widehat{C}_i = C_i$ et $\mathbb{M}_i = I_n$. Par conséquent $\mathbb{O}_i^{[\kappa_i]} = \widehat{\mathbb{O}}_i^{[\kappa_i]} = \widehat{\mathbb{O}}_i^{[\kappa_i]} \mathbb{M}_i$ et on obtient ainsi la condition (2.24). La condition (2.25) découle du fait que $\mathbb{O}_i^{[\kappa_i-1]} = \widehat{\mathbb{O}}_i^{[\kappa_i-1]}$, rang $(\mathbb{O}_i^{[\kappa_i-1]}) = \operatorname{rang}(\mathbb{O}_i^{[\kappa_i]}) = r_i = n$ et rang $(\mathbb{M}_i) = \operatorname{rang}(I_n) = n$.

Dans le second cas, on obtient la condition (2.24) à partir de la décomposition (D.1) des matrices A_i et C_i . En effet, la décomposition (D.1) implique que

$$\mathbb{O}_{i}^{[\boldsymbol{\kappa}_{i}]} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbb{O}}_{i}^{[\boldsymbol{\kappa}_{i}]} & 0_{m(\boldsymbol{\kappa}_{i}+1)\times(n-r_{i})} \end{bmatrix} Q_{i}^{-1} = \widehat{\mathbb{O}}_{i}^{[\boldsymbol{\kappa}_{i}]} \mathbb{M}_{i},$$

avec $\widehat{A}_i = A_{i,11}$ et $\widehat{C}_i = C_{i,1}$. Par ailleurs, \mathbb{M}_i est de plein rang ligne r_i par construction et d'après la condition (D.2), $\widehat{\mathbb{O}}_i^{[\kappa_i-1]}$ est de plein rang colonne r_i . D'où \mathbb{M}_i et $\widehat{\mathbb{O}}_i^{[\kappa_i-1]}$ satisfont la condition (2.25).

Le premier résultat que nous allons donner dans cette partie est le théorème 2.1.12. Il établit que l'égalité des paramètres de Markov qui définissent les matrices de Toeplitz $\mathbb{T}_1^{[\kappa]}$ et $\mathbb{T}_2^{[\kappa]}$ avec $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2$ est une condition nécessaire pour que les systèmes S_1 et S_2 ne soient pas faiblement résidu-discernables.

Théorème 2.1.12. Pour tout $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$, si le système S_i n'est pas faiblement

 $\left(\mathcal{R}_{j}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n}, \{0_{\mathscr{W}_{1}}\} \times \{0_{\mathscr{W}_{2}}\}\right)$ -discernable de S_{j} alors

$$\mathbb{T}_i^{[\kappa_j]} = \mathbb{T}_j^{[\kappa_j]}.$$
(2.27)

Démonstration. Supposons que S_i n'est pas faiblement $\left(\mathfrak{R}_j^{[\kappa_j]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ discernable de S_j . Soient $\mathbb{T}_{ij}^{[\kappa_j]}(1), \mathbb{T}_{ij}^{[\kappa_j]}(2), \ldots, \mathbb{T}_{ij}^{[\kappa_2]}(\kappa_j+1)$ les blocs de colonnes suivantes qui sont issus de $\mathbb{T}_{ij}^{[\kappa_j]} = \mathbb{T}_i^{[\kappa_j]} - \mathbb{T}_j^{[\kappa_j]}$:

$$\mathbb{T}_{ij}^{[\kappa_j]}(1) = \begin{bmatrix} 0_{m\kappa_j \times l} \\ D_i - D_j \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbb{T}_{ij}^{[\kappa_j]}(s) = \begin{bmatrix} 0_{m(\kappa_j - s + 1) \times l} \\ D_i - D_j \\ C_i B_i - C_j B_j \\ \vdots \\ C_i A_i^{s-3} B_i - C_j A_j^{s-3} B_j \\ C_i A_i^{s-2} B_i - C_j A_j^{s-2} B_j \end{bmatrix}, s = 2, 3, \dots, \kappa_j$$

 et

$$\mathbb{T}_{ij}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}(\boldsymbol{\kappa}_j+1) = \begin{bmatrix} D_i - D_j \\ C_i B_i - C_j B_j \\ \vdots \\ C_i A_i^{\boldsymbol{\kappa}_j-1} B_i - C_j A_j^{\boldsymbol{\kappa}_j-1} B_j \end{bmatrix}$$

Nous allons montrer par récurrence que les blocs $\mathbb{T}_{ij}^{[\kappa_j]}(s)$ sont tous nuls. Pour commencer il est nécessaire de remarquer que d'après le théorème 2.1.2, pour tout $s = 1, 2, \ldots, \kappa_j + 1$,

$$\operatorname{Im}\left(\mathbb{T}_{ij}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}\left(s\right)\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(\mathbb{T}_{ij}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_{j}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}\right).$$
(2.28)

Montrons dans un premier temps que la matrice $\mathbb{T}_{ij}^{[\kappa_j]}(1)$ est nulle. On déduit de l'inclusion (2.28) écrite pour s = 1 qu'il existe une matrice $V_1 \in \mathbb{R}^{n \times l}$ telle que $\mathbb{T}_{ij}^{[\kappa_j]}(1) = \mathbb{O}_j^{[\kappa_j]} V_1$. Par conséquent, de la définition de $\mathbb{T}_{ij}^{[\kappa_j]}(1)$ et de la décomposition (2.24) de la matrice $\mathbb{O}_j^{[\kappa_j]}$, on obtient les deux égalités suivantes :

$$0_{m\kappa_j \times l} = \widehat{\mathbb{O}}_j^{[\kappa_j - 1]} \mathbb{M}_j V_1 \tag{2.29}$$

et

$$D_i - D_j = \widehat{C}_j \,\widehat{A}_j^{\kappa_j} \,\mathbb{M}_j \,V_1. \tag{2.30}$$

La matrice $\widehat{\mathbb{O}}_{j}^{[\kappa_{j}-1]}$ étant de plein rang colonne (voir relation (2.25)), on déduit de (2.29) que

la matrice $\mathbb{M}_j V_1$ est nulle et par conséquent, l'équation (2.30) devient $D_i - D_j = 0_{m \times l}$. D'où la matrice $\mathbb{T}_{ij}^{[\kappa_j]}(1)$ est nulle.

Soit $s \in \{2, \ldots, \kappa_j + 1\}$ tel que la matrice de bloc de colonnes $\mathbb{T}_{ij}^{[\kappa_j]}(s-1)$ est nulle. Nous allons prouver que la matrice $\mathbb{T}_{ij}^{[\kappa_j]}(s)$ est aussi nulle. Puisque la matrice $\mathbb{T}_{ij}^{[\kappa_j]}(s-1)$ est nulle, la matrice $D_i - D_j$ et les matrices $C_i A_i^k B_i - C_j A_j^k B_j$, $k = 0, 1, \ldots, s - 3$ sont aussi nulles et il en résulte que

$$\mathbb{T}_{ij}^{[\kappa_j]}(s) = \begin{bmatrix} 0_{m\kappa_2 \times l} \\ \\ C_i A_i^{s-2} B_i - C_j A_j^{s-2} B_j \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, on déduit de l'inclusion (2.28) et de la décomposition (2.24) de $\mathbb{O}_{j}^{[\kappa_{j}]}$ qu'il existe une matrice $V_{s} \in \mathbb{R}^{n \times l}$ telle que

$$\begin{cases} 0_{m \kappa_{2} \times l} = \widehat{\mathbb{O}}_{j}^{[\kappa_{j}-1]} \mathbb{M}_{j} V_{s}, \\ C_{i} A_{i}^{s-2} B_{i} - C_{j} A_{j}^{s-2} B_{j} = \widehat{C}_{j} \widehat{A}_{j}^{\kappa_{j}} \mathbb{M}_{j} V_{s}. \end{cases}$$

D'où $C_i A_i^{s-2} B_i - C_j A_j^{s-2} B_j$ est nulle car \mathbb{M}_j est de plein rang colonne. Ceci achève notre preuve.

Exemple 2.1.13. Considérons les systèmes dynamiques S_1 et S_2 des exemples 1.2.4 et 1.3.14. Le système S_2 a un indice d'observabilité $\kappa_2 = 2$ (voir l'exemple 2.1.8) et on sait que S_1 n'est pas faiblement $(\mathcal{R}_2^{[\kappa_2]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernable de S_2 (voir exemple 2.1.3). On peut vérifier que

$$\mathbb{T}_{1}^{[\boldsymbol{\kappa}_{2}]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{T}_{2}^{[\boldsymbol{\kappa}_{2}]}.$$

 $D'où S_1$ et S_2 satisfont la condition nécessaire de faible résidu-discernabilité du théorème 2.1.12.

Exemple 2.1.14. Soient S_1 et S_2 les systèmes dynamiques définis par les matrices suivantes

$$A_{1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1.5 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}; B_{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; C_{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; D_{1} = 0_{2 \times 1}; G_{1} = 0_{3 \times d}; H_{1} = 0_{2 \times d}; H_{2} = 0_{3 \times d}; H_{2} = 0_{2 \times d}; H_{2} = 0_{3 \times d}; H_{2} = 0_{3 \times d}; H_{2} = 0_{2 \times d}; H_{2} = 0_{3 \times d}; H_{2} = 0_{2 \times$$

Chapitre 2. Caractérisation de la discernabilité faible des SDL non perturbés

Les systèmes S_1 et S_2 correspondent respectivement aux modes de fonctionnement 2 et 4 du système à commutation considéré dans l'exemple académique de [Cocquempot et al., 2004]. Ces deux systèmes ne sont pas faiblement $(\mathcal{R}_2^{[\kappa_2]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernables car $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ et

$$\operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{1}^{[1]}\right) = 2 = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_{1}^{[1]} & \mathbb{O}_{2}^{[1]} & \mathbb{T}_{12}^{[1]}\end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{2}^{[1]}\right).$$

Le calcul des matrices de Toeplitz $\mathbb{T}_1^{[1]}$ et $\mathbb{T}_2^{[1]}$ donne

$$\mathbb{T}_{1}^{[1]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{T}_{2}^{[1]}.$$

Grâce au théorème 2.1.12, la condition de rang de faible résidu-discernabilité du théorème 2.1.2 peut être réécrite simplement comme suit :

Corollaire 2.1.15. Pour tout $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$, le système dynamique S_i n'est pas faiblement $(\mathcal{R}_j^{[\kappa_j]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernable de S_j si et seulement si

$$\operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{j}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_{i}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]} & \mathbb{O}_{j}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}\end{bmatrix}\right) \quad et \quad \mathbb{T}_{i}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]} = \mathbb{T}_{j}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}.$$
(2.31)

Démonstration. La preuve découle des théorème 2.1.2 et 2.1.12.

Ainsi, lorsque S_1 et S_2 ont le même indice d'observabilité, on a la caractérisation suivante de la faible résidu-discernabilité :

Corollaire 2.1.16. Si S_1 et S_2 ont le même indice d'observabilité $\boldsymbol{\kappa}$ ($\boldsymbol{\kappa}_1 = \boldsymbol{\kappa}_2 = \boldsymbol{\kappa}$) et si $\mathbb{T}_1^{[\boldsymbol{\kappa}]} \neq \mathbb{T}_2^{[\boldsymbol{\kappa}]}$ alors S_1 et S_2 sont faiblement $(\mathfrak{R}_1^{[\boldsymbol{\kappa}]}, \mathfrak{R}_2^{[\boldsymbol{\kappa}]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernables. Démonstration. La preuve est une conséquence immédiate du théorème 2.1.12.

Le théorème suivant montre que la condition (2.31) de faible résidu-discernabilité n'est vraie que si les matrices de la représentation d'état de S_1 et S_2 satisfont la relation (2.32) ci-dessous.

Théorème 2.1.17. Pour tout $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$, si le système dynamique S_i n'est pas faiblement $(\mathcal{R}_j^{[\kappa_j]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernable de S_j alors $D_1 = D_2$ et il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que

$$\begin{cases}
\mathbb{M}_{j} P A_{i} = \mathbb{M}_{j} A_{j} P, \\
\mathbb{M}_{j} P B_{i} = \mathbb{M}_{j} B_{j}, \\
C_{i} = C_{j} P,
\end{cases}$$
(2.32)
où la matrice $\mathbb{M}_j \in \mathbb{R}^{r_j \times n}$ est la matrice de plein rang ligne $r_j = \operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_j^{[\kappa_j]}\right)$ définie par le lemme 2.1.11.

Démonstration. Supposons que S_i n'est pas faiblement $\left(\mathcal{R}_j^{[\kappa_j]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ discernable de S_j . Puisque Im $\left(\mathbb{O}_i^{[\kappa_j]}\right) \subseteq \text{Im}\left(\mathbb{O}_j^{[\kappa_j]}\right)$ (voir théorème 2.1.2), il existe donc une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que

$$\mathbb{O}_i^{[\kappa_j]} = \mathbb{O}_j^{[\kappa_j]} P \tag{2.33}$$

Ainsi, la matrice P vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} C_i = C_j P \\ \mathbb{O}_i^{[\kappa_j - 1]} A_i = \mathbb{O}_j^{[\kappa_j - 1]} A_j P. \end{cases}$$
(2.34)

La première équation de (2.34) correspond à la troisième équation de (2.32). Nous allons utiliser la seconde équation de (2.34) pour montrer la première équation de (2.32). D'après (2.33) on a $\mathbb{O}_i^{[\kappa_j-1]} = \mathbb{O}_j^{[\kappa_j-1]} P$ et puisque $\mathbb{O}_j^{[\kappa_j-1]} = \widehat{\mathbb{O}}_j^{[\kappa_j-1]} \mathbb{M}_j$ (voir lemme 2.1.11) donc $\mathbb{O}_i^{[\kappa_j-1]} = \widehat{\mathbb{O}}_j^{[\kappa_j-1]} \mathbb{M}_j P$. La seconde équation de (2.34) devient alors

$$\widehat{\mathbb{O}}_{j}^{[\kappa_{j}-1]} \mathbb{M}_{j} P A_{i} = \widehat{\mathbb{O}}_{j}^{[\kappa_{j}-1]} \mathbb{M}_{j} A_{j} P.$$

D'où on obtient la première équation de (2.32) car $\widehat{\mathbb{O}}_{j}^{[\kappa_{j}-1]}$ est de plein rang colonne (voir lemme 2.1.11).

Pour conclure cette preuve, nous allons maintenant montrer que $D_1 = D_2$ et que B_i et B_j sont liées par la deuxième équation de (2.32). L'égalité $D_1 = D_2$ est une conséquence du théorème 2.1.12. De plus, le même théorème entraîne que

$$C_i A_i^s B_i = C_j A_j^s B_j, \quad s = 0, 1, \dots, \kappa_j - 1$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{O}_i^{[\kappa_j - 1]} B_i = \mathbb{O}_j^{[\kappa_j - 1]} B_j.$$
(2.35)

Comme nous l'avions fait précédemment pour la seconde équation de (2.34), en remplaçant dans (2.35) $\mathbb{O}_i^{[\kappa_j-1]}$ par $\widehat{\mathbb{O}}_j^{[\kappa_j-1]} \mathbb{M}_j P$ et $\mathbb{O}_j^{[\kappa_j-1]}$ par $\widehat{\mathbb{O}}_j^{[\kappa_j-1]} \mathbb{M}_j$ on a

$$\widehat{\mathbb{O}}_{j}^{[\kappa_{j}-1]} \mathbb{M}_{j} P B_{i} = \widehat{\mathbb{O}}_{j}^{[\kappa_{j}-1]} \mathbb{M}_{j} B_{j}.$$

D'où B_i et B_j satisfont la seconde condition de (2.32) car $\widehat{\mathbb{O}}_j^{[\kappa_j-1]}$ est de plein rang colonne. Si le système $S_j, j \in \{1, 2\}$ est observable alors d'après le lemme 2.1.11, la matrice \mathbb{M}_j est

Chapitre 2. Caractérisation de la discernabilité faible des SDL non perturbés

réduite à la matrice identité de \mathbb{R}^n ($\mathbb{M}_j = I_n$). Dans ce cas particulier, le corollaire suivant réécrit les contraintes (2.32) qu'impose la condition (2.31) de faible résidu-discernabilité aux matrices de la représentation d'état de S_1 et S_2 .

Corollaire 2.1.18. Pour tout $(i, j) \in \{(1, 2), 2, 1\}$, si le système S_j est observable et si S_i n'est pas faiblement $(\mathcal{R}_j^{[\kappa_j]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernable de S_j alors $D_1 = D_2$ et il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $PA_i = A_j P$, $PB_i = B_j$ et $C_i = C_j P$.

Lorsque S_i n'est pas faiblement résidu-discernable de S_j , sous l'hypothèse d'observabilité de S_j , le corollaire 2.1.18 garantit l'existence d'une matrice P qui lie les matrices d'état, les matrices de commande et les matrices d'observation de S_1 et S_2 . Dans le théorème suivant, nous donnons l'expression de la matrice P lorsque $\mathbb{O}_i^{[\kappa_j-1]}$ est de plein rang colonne. Nous montrons en plus qu'elle est inversible et nous établissons l'expression de son inverse.

Théorème 2.1.19. Pour tout $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$ si rang $\left(\mathbb{O}_{i}^{[\kappa_{j}-1]}\right) = \operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{j}^{[\kappa_{j}-1]}\right) = n$ et si S_{i} n'est pas faiblement $\left(\mathcal{R}_{j}^{[\kappa_{j}]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n}, \{0_{\mathscr{W}_{1}}\} \times \{0_{\mathscr{W}_{2}}\}\right)$ -discernable de S_{j} alors $D_{1} = D_{2}$, $A_{i} = P^{-1}A_{j}P, B_{i} = P^{-1}B_{j}$ et $C_{i} = C_{j}P$ où la matrice $P \in \operatorname{GL}_{n}(\mathbb{R})$ et son inverse P^{-1} sont définies par

$$P = \left(\mathbb{O}_{j}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}-1]} \right)^{\dagger} \mathbb{O}_{i}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}-1]} \quad ; \quad P^{-1} = \left(\mathbb{O}_{i}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}-1]} \right)^{\dagger} \mathbb{O}_{j}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}-1]}.$$

Démonstration. Supposons que $\mathbb{O}_i^{[\kappa_j-1]}$ et $\mathbb{O}_j^{[\kappa_j-1]}$ sont de plein rang colonne et que S_i n'est pas faiblement $(\mathcal{R}_j^{[\kappa_j]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernable de S_j . Rappelons que l'hypothèse rang $(\mathbb{O}_j^{[\kappa_j-1]}) = n$ traduit l'observabilité du système S_j .

Du théorème 2.1.12, on déduit que $D_1 = D_2$. Il ne nous reste qu'à montrer que les matrices de la représentation d'état des deux systèmes satisfont les conditions du théorème. Par un raisonnement similaire à celui de la preuve du théorème 2.1.17 on peut montrer qu'on a la relation (2.35) et qu'il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vérifiant les conditions (2.33). Ainsi, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbb{O}_i^{[\kappa_j]} = \mathbb{O}_j^{[\kappa_j]} P, \\ \mathbb{O}_i^{[\kappa_j-1]} B_i = \mathbb{O}_j^{[\kappa_j-1]} B_j. \end{cases}$$
(2.36)

De la première relation de (2.36) on a

$$\begin{cases} C_i = C_j P, \\ \mathbb{O}_i^{[\kappa_j - 1]} A_i = \mathbb{O}_j^{[\kappa_j - 1]} A_j P, \\ \mathbb{O}_i^{[\kappa_j - 1]} = \mathbb{O}_j^{[\kappa_j - 1]} P. \end{cases}$$
(2.37)

De la dernière équation de (2.37) on obtient

$$P = \left(\mathbb{O}_{j}^{[\kappa_{j}-1]}\right)^{\dagger} \mathbb{O}_{i}^{[\kappa_{j}-1]} \quad ; \quad I_{n} = \left(\mathbb{O}_{i}^{[\kappa_{j}-1]}\right)^{\dagger} \mathbb{O}_{j}^{[\kappa_{j}-1]} P$$

Par conséquent P est inversible d'inverse $P^{-1} = \left(\mathbb{O}_i^{[\kappa_j - 1]}\right)^{\dagger} \mathbb{O}_j^{[\kappa_j - 1]}$. En multipliant la seconde équation de (2.36) et la seconde équation de (2.37) par $\left(\mathbb{O}_i^{[\kappa_j - 1]}\right)^{\dagger}$ on a finalement

$$B_i = \left(\mathbb{O}_i^{[\kappa_j - 1]}\right)^{\dagger} \mathbb{O}_j^{[\kappa_j - 1]} B_j = P^{-1} B_j$$

 et

$$A_i = \left(\mathbb{O}_i^{[\kappa_j - 1]}\right)^{\dagger} \mathbb{O}_j^{[\kappa_j - 1]} A_j P = P^{-1} A_j P$$

d'où le résultat.

Grâce au théorème 2.1.19, nous allons à présent prouver que lorsque S_1 et S_2 sont tous deux observables et ont le même indice d'observabilité, l'équivalence de leurs représentations d'état est une condition nécessaire et suffisante pour qu'ils ne soient pas faiblement discernables à travers les résidus $\mathcal{R}_1^{[\kappa_1]}$ et $\mathcal{R}_2^{[\kappa_2]}$.

Corollaire 2.1.20. Si S_1 et S_2 sont observables et ont le même indice d'observabilité κ ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$) alors les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) S_1 n'est pas faiblement $\left(\mathfrak{R}_2^{[\kappa]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ -discernable de S_2 .
- (ii) S_1 et S_2 sont équivalents c'est-à-dire $D_1 = D_2$ et il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A_1 = P^{-1} A_2 P$$
 ; $B_1 = P^{-1} B_2$; $C_1 = C_2 P$.

- (iii) S_1 et S_2 ne sont pas faiblement $\left(\mathfrak{R}_1^{[\kappa]}, \mathfrak{R}_2^{[\kappa]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ -discernables.
- (iv) S_2 n'est pas faiblement $\left(\mathfrak{R}_1^{[\kappa_1]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ -discernable de S_1 .

Démonstration. Supposons que $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ et que S_1 et S_2 sont observables. Avant de prouver l'équivalence entre les assertions (i), (ii) et (iii), rappelons tout d'abord que par définition de l'indice d'observabilité on a rang $\left(\mathbb{O}_i^{[\kappa_i-1]}\right) = \operatorname{rang}(\mathbb{O}_i)$. Par conséquent, il découle des hypothèses d'observabilité et d'égalité des indices d'observabilité que les matrices $\mathbb{O}_1^{[\kappa_1-1]}$, $\mathbb{O}_1^{[\kappa_2-1]}$, $\mathbb{O}_2^{[\kappa_1-1]}$ et $\mathbb{O}_2^{[\kappa_2-1]}$ sont de plein rang colonne.

(*i*) \implies (*ii*) Cette implication est une conséquence immédiate du théorème 2.1.19. En effet, l'hypothèse d'observabilité de S_1 et l'hypothèse d'égalité des indices d'observabilité de S_1 et S_2 impliquent que rang $\left(\mathbb{O}_1^{[\kappa_2-1]}\right) = \operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_2^{[\kappa_2-1]}\right) = n.$

Chapitre 2. Caractérisation de la discernabilité faible des SDL non perturbés

- $(ii) \implies (iii) \text{ Supposons que } (ii) \text{ est vraie. Il en résulte que la matrice de Toeplitz } \mathbb{T}_{12}^{[\kappa]} \text{ est nulle et qu'il existe une matrice } P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \mathbb{O}_1^{[\kappa]} = \mathbb{O}_2^{[\kappa]} P.$ Ainsi, les matrices $\mathbb{O}_1^{[\kappa]}, \mathbb{O}_2^{[\kappa]} \text{ et } \mathbb{T}_{12}^{[\kappa]} \text{ satisfont la condition de rang } (2.20) \text{ du corollaire } 2.1.9.$ D'où S_1 et S_2 ne sont pas faiblement $(\mathcal{R}_1^{[\kappa]}, \mathcal{R}_2^{[\kappa]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernables.
- $(iii) \implies (iv)$ Cette implication est une conséquence immédiate de la définition de la faible $(\mathcal{R}_1^{[\kappa]}, \mathcal{R}_2^{[\kappa]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernabilité.
- $(iv) \implies (i)$ Supposons que (iv) est vraie. Alors il découle du théorème 2.1.19 qu'il existe une matrice $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathbb{O}_2^{[\kappa_1]} = \mathbb{O}_1^{[\kappa_1]} P$ et $\mathbb{T}_1^{[\kappa_1]} = \mathbb{T}_2^{[\kappa_1]}$. Par conséquent les matrices $\mathbb{O}_1^{[\kappa_1]}, \mathbb{O}_2^{[\kappa_1]}, \mathbb{T}_1^{[\kappa_1]}$ et $\mathbb{T}_2^{[\kappa_1]}$ satisfont les conditions de (2.31) (réécrite pour i = 2et j = 1) qui expriment la non faible $(\Re_1^{[\kappa_1]}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernabilité de S_2 par rapport à S_1 .

D'où l'équivalence entre les quatre assertions.

Il découle donc du corollaire 2.1.20 que pour les systèmes linéaires non perturbés qui sont observables et qui ont le même indice d'observabilité, la relation "être faiblement résidudiscernable de" est symétrique. Rappelons qu'en général ceci n'est pas forcément le cas comme nous l'avons déjà mentionné dans le chapitre précédent.

Nous savons grâce à la proposition 1.4.6 que la faible résidu-discernabilité implique la faible discernabilité contrôlable. Ainsi, les conditions nécessaires et suffisantes de faible résidudiscernabilité que nous venons d'établir constituent des conditions suffisantes de faible discernabilité contrôlable. Dans la section suivante, nous allons montrer qu'elles constituent en plus des conditions nécessaires de faible discernabilité contrôlable.

2.2 Faible discernabilité contrôlable des systèmes linéaires non perturbés

2.2.1 Équivalence entre résidu-discernabilité et discernabilité contrôlable

Le but de la présente sous-section est de montrer que la notion de faible discernabilité et la notion de faible résidu-discernabilité sont équivalentes. Pour aboutir à ce résultat nous utilisons les lemmes 2.2.1 et 2.2.2 suivants.

Le lemme 2.2.1 réécrit plus simplement la définition 1.4.2 de faible résidu-discernabilité dans le cas des systèmes dynamique linéaires non soumis aux perturbations.

2.2.2 Faible discernabilité contrôlable des systèmes linéaires non perturbés

Lemme 2.2.1. Pour tout $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$ les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) S_i n'est pas faiblement $\left(\mathcal{R}_j^{[k_j]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ -discernable de S_j (ii) Pour tout $u \in \mathscr{U}, \mathcal{R}_j^{[\kappa_j]}\left[u, \mathscr{S}_{i,\mathbb{R}_+}\left(u, \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\}\right)\right] = \left\{\mathbf{0}^{[r(\kappa_j)]}\right\}$

où $\mathbf{0}^{[r(\kappa_j)]}$ désigne la fonction nulle définie sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans $\mathbb{R}^{r(\kappa_j)}$.

Démonstration. D'après la définition 1.4.2, (i) est équivalent à

$$\forall u \in \mathscr{U}, \quad \mathfrak{R}_{j}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}\left[u, \mathscr{S}_{i,\mathbb{R}_{+}}\left(u, \mathbb{R}^{n}, \{0_{\mathscr{W}_{i}}\}\right)\right] \subseteq \mathfrak{R}_{j}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}\left[u, \mathscr{S}_{j,\mathbb{R}_{+}}\left(u, \mathbb{R}^{n}, \{0_{\mathscr{W}_{2}}\}\right)\right].$$

De plus, comme d'après (1.62) les données provenant du système S_j annule son résidu de parité c'est-à-dire

$$\mathcal{R}_{j}^{[k_{j}]}\left[u,\mathscr{S}_{j,\mathcal{I}}\left(u,\mathbb{R}^{n},\left\{0_{\mathscr{W}_{j}}\right\}\right)\right]=\left\{\mathbf{0}^{[r(\boldsymbol{\kappa}_{j})]}\right\},$$

on conclut donc que les assertions (i) et (ii) sont équivalentes.

Le lemme 2.2.2 donne deux propriétés de la fonction $\mathcal{R}_i^{[\kappa_i]}[u,\cdot]$ de calcul du résidu du système S_i non perturbé et commandé par l'entrée u. Pour les systèmes linéaires soumis à des perturbations, un résultat plus général que celui du lemme 2.2.2 est établit dans le chapitre 4 (voir lemme 4.3.1).

Lemme 2.2.2. Soient $u \in \mathscr{U}$ et $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$. Pour tout $i \in \{1, 2\}$, la fonction $\mathfrak{R}_i^{[\kappa_i]}[u, \cdot]$ possède les propriétés suivantes :

- (i) Si $z \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ tel que $\mathcal{R}_i^{[\kappa_i]}[u, z]$ est identiquement nulle sur \mathbb{R}_+ alors z est ucompatible avec S_i c'est-à-dire $z \in \mathscr{S}_{i\mathbb{R}_+}(u, \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_i}\}).$
- (*ii*) Si $\mathfrak{R}_i^{[\kappa_i]}[u,\mathscr{S}] = \left\{ \mathbf{0}^{[r(\kappa_i)]} \right\} alors \mathscr{S} \subseteq \mathscr{S}_{i,\mathbb{R}_+}(u,\mathbb{R}^n,\{0_{\mathscr{W}_i}\}).$

Démonstration.

(i) Supposons que $\mathcal{R}_i^{[\kappa_i]}[u, z]$ est identiquement nulle sur \mathbb{R}_+ . D'après l'expression (1.56) de $\mathcal{R}_{i}^{[\kappa_{i}]}[u,z]$, on a

$$\mathbb{O}_{i,\perp}^{[\kappa_i]} \left[Z^{[\kappa_i]}(t) - \mathbb{T}_i^{[\kappa_i]} U^{[\kappa_i]}(t) \right] = 0_{r(\kappa_i)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Par conséquent, on obtient la relation suivante :

$$Z^{[\kappa_i]}(t) - \mathbb{T}_i^{[\kappa_i]} U^{[\kappa_i]}(t) \in \operatorname{Ker}\left(\mathbb{O}_{i,\perp}^{[\kappa_i]}\right) = \operatorname{Im}\left(\mathbb{O}_i^{[\kappa_i]}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

On déduit de cette relation qu'il existe une fonction ξ de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}^n telle que

$$Z^{[\kappa_i]}(t) - \mathbb{T}_i^{[\kappa_i]} U^{[\kappa_i]}(t) = \mathbb{O}_i^{[\kappa_i]} \xi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$
(2.38)

La matrice de Toeplitz $\mathbb{T}_i^{[\kappa_i]}$ des paramètres de Markov de S_i s'exprime en fonction des matrices \hat{A}_i , \hat{C}_i du lemme 2.1.11 comme suit

$$\mathbb{T}_{i}^{[\boldsymbol{\kappa}_{i}]} = \begin{bmatrix}
D_{i} & 0_{m \times l} & \cdots & 0_{m \times l} & 0_{m \times l} \\
\widehat{C}_{i} \,\widehat{B}_{i} & D_{i} & \cdots & 0_{m \times l} & 0_{m \times l} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\widehat{C}_{i} \,\widehat{A}_{i}^{\boldsymbol{\kappa}_{i}-2} \,\widehat{B}_{i} & \widehat{C}_{i} \,\widehat{A}_{i}^{\boldsymbol{\kappa}_{i}-3} \,\widehat{B}_{i} & \cdots & D_{i} & 0_{m \times l} \\
\widehat{C}_{i} \,\widehat{A}_{i}^{\boldsymbol{\kappa}_{i}-1} \,\widehat{B}_{i} & \widehat{C}_{i} \,\widehat{A}_{i}^{\boldsymbol{\kappa}_{i}-2} \,\widehat{B}_{i} & \cdots & \widehat{C}_{i} \,\widehat{B}_{i} & D_{i}
\end{bmatrix}$$
(2.39)

avec $\hat{B}_i = \mathbb{M}_i B_i$ où \mathbb{M}_i est également définie par le lemme 2.1.11. Il découle de la formule (2.24) de $\mathbb{O}_i^{[\kappa_i]}$ et de la formule (2.39) de $\mathbb{T}_i^{[\kappa_i]}$ que la relation (2.38) est équivalente à :

$$\begin{cases} z(t) = \hat{C}_{i} \mathbb{M}_{i} \xi(t) + D_{i} u(t), \\ \dot{z}(t) = \hat{C}_{i} \hat{A}_{i} \mathbb{M}_{i} \xi(t) + \hat{C}_{i} \hat{B}_{i} u(t) + D_{i} \dot{u}(t), \\ z^{(2)}(t) = \hat{C}_{i} \hat{A}_{i}^{2} \mathbb{M}_{i} \xi(t) + \hat{C}_{i} \hat{A}_{i} \hat{B}_{i} u(t) + \hat{C}_{i} \hat{B}_{i} \dot{u}(t) + D_{i} u^{(2)}(t), \\ z^{(k)}(t) = \hat{C}_{i} \hat{A}_{i}^{k} \mathbb{M}_{i} \xi(t) + \sum_{s=0}^{k-1} \hat{C}_{i} \hat{A}_{i}^{k-1-s} \hat{B}_{i} u^{(s)}(t) + D_{i} u^{(s)}(t), k = 3, 4, \dots, \kappa_{i} \end{cases}$$

$$(2.40)$$

Le membre de gauche de l'égalité (2.38) étant dérivable sur \mathbb{R}_+ , on en déduit que la fonction ξ est aussi dérivable sur \mathbb{R}_+ . En dérivant l'expression de z donnée par la première égalité de (2.40) puis en égalant l'expression obtenue avec celle de \dot{z} donnée par la seconde égalité de (2.40) on a

$$\widehat{C}_{i}\left[\mathbb{M}_{i}\dot{\xi}\left(t\right)-\widehat{A}_{i}\mathbb{M}_{i}\xi\left(t\right)-\widehat{B}_{i}u\left(t\right)\right]=0_{m}.$$

En dérivant maintenant l'expression de \dot{z} donnée par la seconde égalité de (2.40) puis en égalant l'expression obtenue avec celle de $z^{(2)}$ donnée par la troisième égalité de (2.40) on obtient

$$\widehat{C}_{i}\,\widehat{A}_{i}\,\left[\mathbb{M}_{i}\,\dot{\xi}\left(t\right)-\widehat{A}_{i}\,\mathbb{M}_{i}\,\xi\left(t\right)-\widehat{B}_{i}\,u\left(t\right)\right]=0_{m}.$$

En itérant κ_i fois le processus précédent on obtient par récurrence que

$$\widehat{C}_{i} \widehat{A}_{i}^{k} \left[\mathbb{M}_{i} \dot{\xi}(t) - \widehat{A}_{i} \mathbb{M}_{i} \xi(t) - \widehat{B}_{i} u(t) \right] = 0_{m}, \quad k = 0, 1, \dots, \kappa_{i} - 1$$

et ceci est équivalent à

$$\widehat{\mathbb{O}}_{i}^{[\kappa_{i}-1]}\left[\mathbb{M}_{i}\dot{\xi}\left(t\right)-\hat{A}_{i}\,\mathbb{M}_{i}\,\xi\left(t\right)-\hat{B}_{i}\,u\left(t\right)\right]=0_{m\,\kappa_{2}}.$$
(2.41)

Puisque la matrice $\widehat{\mathbb{O}}_{i}^{[\kappa_{i}-1]}$ est de plein rang colonne (voir lemme 2.1.11), il résulte de la relation (2.41) que $\mathbb{M}_{i}\dot{\xi}(t) = \widehat{A}_{i}\mathbb{M}_{i}\xi(t) + \widehat{B}_{i}u(t)$. Le signal z est donc la sortie du système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \mathbb{M}_{i} \dot{\xi}(t) = \widehat{A}_{i} \mathbb{M}_{i} \xi(t) - \widehat{B}_{i} u(t), \\ z(t) = \widehat{C}_{i} \mathbb{M}_{i} \xi(t) + D_{i} u(t). \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient la formule explicite suivante de z :

$$z(t) = \widehat{C}_i e^{t \widehat{A}_i} \mathbb{M}_i \xi(0) + \widehat{C}_i \int_0^t e^{(t-\tau) \widehat{A}_i} \widehat{B}_i u(\tau) d\tau + D_i u(t)$$

D'autre part, il découle des définitions des matrices \widehat{A}_i , \widehat{B}_i , \widehat{C}_i et \mathbb{M}_i que pour tout $(t, \tau, x_i^o) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, on a les deux égalités suivantes

$$C_i e^{tA_i} x_i^o = \widehat{C}_i e^{t\widehat{A}_i} \mathbb{M}_i x_i^o \quad ; \quad C_i e^{(t-\tau)A_i} B_i = \widehat{C}_i e^{(t-\tau)\widehat{A}_i} \widehat{B}_i$$

La formule explicite suivante de la sortie de S_i correspondant à la commande u et à un état initial quelconque x_i^o

$$y_i(t, x_i^o, u, 0_{\mathscr{W}_1}) = C_i e^{t A_i} x_i^o + \int_0^t C_i e^{(t-\tau) A_i} B_i u(t) d\tau + D_i u(t)$$

peut donc être réécrite en fonction des matrices \hat{A}_i , \hat{B}_i , \hat{C}_i et \mathbb{M}_i comme suit

$$y_{i}(t, x_{i}^{o}, u, 0_{\mathscr{W}_{1}}) = \widehat{C}_{i} e^{t \widehat{A}_{i}} \mathbb{M}_{i} x_{i}^{o} + \widehat{C}_{i} \int_{0}^{t} e^{(t-\tau) \widehat{A}_{i}} \widehat{B}_{i} u(\tau) d\tau + D_{i} u(t)$$

Il vient donc que $z \underset{\mathbb{R}_{+}}{\equiv} y_i(\cdot, \xi(0), u, 0_{\mathscr{W}_1}) \in \mathscr{S}_{i,\mathbb{R}_{+}}(u, \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\})$. D'où le résultat.

(*ii*) Supposons que $\mathcal{R}_{i}^{[\kappa_{i}]}[u,\mathscr{S}] = \left\{\mathbf{0}^{[r(\kappa_{i})]}\right\}$ et soit $z \in \mathscr{S}$. Alors la fonction $\mathcal{R}_{i}^{[\kappa_{i}]}[u,z]$ est identiquement nulle sur \mathbb{R}_{+} et on déduit du point (*i*) que $z \in \mathscr{S}_{i,\mathbb{R}_{+}}(u,\mathbb{R}^{n},\{0_{\mathscr{W}_{1}}\})$. D'où le résultat.

Nous pouvons maintenant établir l'équivalence entre la faible résidu-discernabilité et la faible discernabilité contrôlable.

Chapitre 2. Caractérisation de la discernabilité faible des SDL non perturbés

Théorème 2.2.3. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) S_1 et S_2 sont faiblement $\left(\mathfrak{R}_1^{[\kappa_1]}, \mathfrak{R}_2^{[\kappa_2]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ -discernables.
- (ii) S_1 et S_2 sont faiblement $(\mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernables.

Démonstration. L'assertion "(i) \implies (ii)" est une conséquence de la proposition 1.4.6. Il ne nous reste plus qu'à montrer que (ii) \implies (i). Nous allons prouver la contraposée de cette proposition. Supposons que S_1 et S_2 ne sont pas faiblement $\left(\mathcal{R}_1^{[\kappa_1]}, \mathcal{R}_2^{[\kappa_2]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ discernables. Alors d'après le lemme 2.2.1 on obtient les deux relations suivantes :

$$\forall u \in \mathscr{U}, \quad \mathfrak{R}_{1}^{[\kappa_{1}]}\left[u, \mathscr{S}_{2, \mathfrak{I}}\left(u, \mathbb{R}^{n}, \{0_{\mathscr{W}_{2}}\right)\}\right] = \left\{\mathbf{0}^{[r(\kappa_{1})]}\right\}$$

 et

$$\forall u \in \mathscr{U}, \quad \mathcal{R}_2^{[\kappa_2]}\left[u, \mathscr{S}_{1, \mathcal{I}}\left(u, \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\}\right)\right] = \left\{\mathbf{0}^{[r(\kappa_2)]}\right\}$$

D'après le lemme 2.2.2, la première relation impliquent que

$$\forall u \in \mathscr{U}, \quad \mathscr{S}_{2, \mathfrak{I}}\left(u, \mathbb{R}^{n}, \{0_{\mathscr{W}_{2}}\right)\} \subseteq \mathscr{S}_{1, \mathfrak{I}}\left(u, \mathbb{R}^{n}, \{0_{\mathscr{W}_{1}}\right)\}.$$

De plus, la seconde relation et le lemme 2.2.2 entraînent que

$$\forall u \in \mathscr{U}, \quad \mathscr{S}_{1,\mathcal{I}}\left(u, \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\}\right) \subseteq \mathscr{S}_{2,\mathcal{I}}\left(u, \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right).$$

Des deux inclusions précédentes, il vient que

$$\forall u \in \mathscr{U}, \quad \mathscr{S}_{1,\mathcal{I}}\left(u, \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\}\right) = \mathscr{S}_{2,\mathcal{I}}\left(u, \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right).$$

D'où S_1 et S_2 ne sont pas faiblement $(\mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{\{0_{\mathscr{W}_1}\}\} \times \{\{0_{\mathscr{W}_2}\}\})$ -discernables.

2.2.2 Caractérisation de la faible discernabilité contrôlable des systèmes non perturbés

Dans la sous-section précédente, on a établi dans le théorème 2.2.3 que la notion de faible discernabilité contrôlable est équivalente à la notion de faible résidu-discernabilité. Ainsi, les conditions que nous avons données dans la section 2.1 pour caractériser la faible résidu-discernabilité de S_1 et S_2 suffisent entièrement pour caractériser la faible discernabilité contrôlable des deux systèmes.

D'après le théorème 2.1.7, la non égalité des indices d'observabilité de S_1 et S_2 est une

condition suffisante de faible résidu-discernabilité de S_1 et S_2 . A partir de ce résultat et du théorème 2.2.3, on obtient donc la condition suivante de faible discernabilité :

Corollaire 2.2.4. Si $\kappa_1 \neq \kappa_2$ alors S_1 et S_2 sont faiblement $(\mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernables.

Une interprétation de ce résultat est que la non égalité des indices d'observabilité κ_1 et κ_2 garantit l'existence d'une commande u telle que les ensembles $\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}_+}(u,\mathbb{R}^n,\{0_{\mathscr{W}_1}\})$ et $\mathscr{S}_{2,\mathbb{R}_+}(u,\mathbb{R}^n,\{0_{\mathscr{W}_2}\})$ des sorties u-compatibles avec S_1 et S_2 sont différents.

La seconde condition de faible discernabilité que nous allons déduire du théorème 2.2.3 et des résultats de la section 2.1 est donnée par le corollaire 2.2.5 ci-dessous. Le résultat de la section 2.1 sur lequel repose sa preuve est le corollaire 2.1.15 qui simplifie la condition de rang de [Cocquempot et al., 2004] dans le cas où les ordre de génération des résidu-de parité de S_1 et S_2 correspondent à leurs indices d'observabilité.

Corollaire 2.2.5. Si les systèmes S_1 et S_2 ont le même indice κ ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$) d'observabilité alors S_1 et S_2 sont faiblement ($\mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}$)-discernables si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est vraie :

(i) rang $\left(\mathbb{O}_{1}^{[\kappa]}\right) \neq$ rang $\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_{1}^{[\kappa]} & \mathbb{O}_{2}^{[\kappa]}\end{bmatrix}\right)$ (ii) rang $\left(\mathbb{O}_{2}^{[\kappa]}\right) \neq$ rang $\left(\begin{bmatrix}\mathbb{O}_{1}^{[\kappa]} & \mathbb{O}_{2}^{[\kappa]}\end{bmatrix}\right)$ (iii) $\mathbb{T}_{1}^{[\kappa]} \neq \mathbb{T}_{2}^{[\kappa]}$.

Lorsque les systèmes S_1 et S_2 sont observables et on le même indice d'observabilité, nous avons vu dans la section 2.1 (corollaire 2.1.20) que l'équivalence de leurs représentation d'état est une condition nécessaire et suffisante pour qu'ils ne soient pas faiblement résidu-discernables. Grâce au théorème 2.2.3, on conclut que ce résultat est également valable pour caractériser la faible discernabilité et est résumé dans le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.6. Si S_1 et S_2 sont observables et ont le même indice κ d'observabilité ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$) alors S_1 et S_2 ne sont pas faiblement ($\mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}$)-discernables si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(*i*) $D_1 = D_2$

(*ii*) Il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A_1 = P^{-1}A_2P$, $B_1 = P^{-1}B_2$ et $C_1 = C_2P$.

Ainsi, lorsque les systèmes S_1 et S_2 sont observables et ont le même indice d'observabilité, pour garantir l'existence une commande u telle que les ensembles $\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}_+}(u,\mathbb{R}^n,\{0_{\mathscr{W}}\})$ et $\mathscr{S}_{2,\mathbb{R}_+}(u,\mathbb{R}^n,\{0_{\mathscr{W}}\})$ de sorties u-compatibles avec S_1 et S_2 soient différents, il faut et il suffit que les représentations d'état de S_1 et S_2 ne soient pas équivalentes.

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la faible résidu-discernabilité et la faible discernabilité contrôlable des systèmes linéaires non perturbés. Plus précisément, nous nous sommes intéressés à la détermination des conditions nécessaires et/ou suffisantes qui permettent de caractériser ces deux propriétés de faible discernabilité.

Nous avons d'abord établi une condition nécessaire et suffisante de faible résidu-discernabilité (voir corollaire 2.1.4) qui a un champ d'application plus large que la condition de rang donnée dans [Cocquempot et al., 2004]. Nous avons ensuite montré que les indices d'observabilité peuvent renseigner sur la faible résidu-discernabilité et que les systèmes observables qui sont faiblement résidu-discernables sont les systèmes dont les représentations d'état ne sont pas équivalentes. Enfin, nous avons prouvé que la faible résidu-discernabilité et la faible discernabilité contrôlable sont équivalentes. Grâce à cette équivalence, nous avons pu caractériser la faible discernabilité que nous avons établies.

Chapitre 3

Caractérisation de la zone d'indiscernabilité des systèmes dynamiques linéaires non perturbés

Sommaire

3.1 Con	cepts fondamentaux et résultats préliminaires 67
3.1.1	De l'équation intégrale à l'équation algébrique 67
3.1.2	Solutions homogènes et particulières de l'équation algébrique $\ldots \ldots 69$
3.1.3	Quelques propriétés fondamentales de l'opérateur $\mathbb F$
3.1.4	Indice de similarité des paramètres de Markov
3.2 Caractérisation de la zone d'indiscernabilité	
3.2.1	Zone d'indiscernabilité : cas $\rho = 2n$ et $\rho = +\infty$
3.2.2	Zone d'indiscernabilité : cas $0 \le \rho \le 2n - 1$
3.3 Quelques applications de la zone d'indiscernabilité	
3.3.1	Conditions de discerna bilité stricte des systèmes SISO et MISO 102
3.3.2	Conditions de forte discernabilité contrôlable $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 106$
3.4 Conclusion	

Dans les chapitres 1 et 2, nous avons énuméré des conditions de discernabilité contrôlable (forte et faible) et des conditions de discernabilité stricte pour les systèmes linéaires non perturbés S_1 et S_2 . Les conditions de faible (resp. forte) discernabilité contrôlable garantissent l'existence d'au moins une commande u telle que les ensembles de sorties admissibles $\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}_+}(u,\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\})$ et $\mathscr{S}_{2,\mathbb{R}_+}(u,\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ sont différents (resp. disjoints). Si les conditions de discernabilité stricte ne sont pas satisfaites, il existe de façon certaine au moins une commande non nulle u telle que les ensembles de sorties admissibles $\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}_+}(u,\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ ne sont pas disjoints. Ainsi, outre la détermination des conditions de discernabilité, trois autres problèmes qui se posent quand on étudie la discernabilité stricte

et la discernabilité contrôlable des systèmes non perturbés (pour un rappel des définitions de ces notions, voir le tableau 1.3) sont :

Problème 3.0.1. Lorsque S_1 et S_2 sont contrôlablement discernables au sens faible, déterminer u telle que $\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}_+}(u,\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\{0_{\mathscr{W}_1}\})\neq \mathscr{S}_{2,\mathbb{R}_+}(u,\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\{0_{\mathscr{W}_2}\}).$

Problème 3.0.2. Lorsque S_1 et S_2 sont contrôlablement discernables au sens fort, déterminer u telle que $\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}_+}(u,\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\{0_{\mathscr{W}_1}\})\cap\mathscr{S}_{2,\mathbb{R}_+}(u,\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\{0_{\mathscr{W}_2}\})=\emptyset.$

Problème 3.0.3. Lorsque S_1 et S_2 ne sont pas strictement discernables, déterminer u telle que $\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}_+}(u,\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\{0_{\mathscr{W}_1}\})\cap\mathscr{S}_{2,\mathbb{R}_+}(u,\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\{0_{\mathscr{W}_2}\})\neq\emptyset.$

Dans le premier chapitre, nous avons montré que les commandes u solutions des problèmes 3.0.1, 3.0.2 et 3.0.3 sont localisées respectivement dans les domaines $\mathscr{U}_{dis}^{fbe}(S_1, S_2)$, $\mathscr{U}_{dis}^{frt}(S_1, S_2)$ et $\mathscr{U}_{ind}^{str}(S_1, S_2)$ et que la caractérisation de la zone d'indiscernabilité $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ suffit pour déterminer ces trois domaines (voir les relations (1.37), (1.40) et (1.43)). Nous nous intéressons dans ce chapitre à la caractérisation de la zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 . Le chapitre est organisé en trois grandes parties.

Dans la première partie, nous allons nous appuyer sur le fait que la caractérisation de \mathscr{Z}_{ind} peut être ramenée à un problème de résolution d'une équation intégrale. Grâce à la transformation de Laplace, cette équation intégrale peut être transformée en une équation linéaire algébrique plus facile à manipuler. Nous introduirons aussi dans cette partie, les notions et les résultats préliminaires que nous utiliserons pour caractériser la zone d'indiscernabilité. Parmi ces notions, celle qui va jouer un rôle déterminant dans la méthode que nous proposons pour caractériser $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ est l'indice $\rho \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ de similarité des paramètres de Markov de S_1 et S_2 . Il n'est fini que lorsque les deux systèmes n'ont pas les mêmes paramètres de Markov.

La seconde partie est consacrée à la caractérisation de la zone d'indiscernabilité. Pour cette caractérisation nous distinguons deux grands cas. Le cas où les deux systèmes ont les mêmes paramètres de Markov et le cas où ils ont des paramètres de Markov différents. Dans le premier cas nous montrons que toutes les commandes peuvent conduire S_1 et S_2 à générer des sorties identiques. Dans le second cas nous prouvons que S_1 et S_2 génèrent des sorties identiques si et seulement si la commande u appliquée conjointement aux deux systèmes a une structure particulière que nous déterminons et si les états initiaux des deux systèmes appartiennent à un domaine donné.

La troisième partie donne quelques applications de la caractérisation de la zone d'indiscernabilité. Nous y montrons qu'en utilisant les résultats de la caractérisation de la zone d'indiscernabilité, on peut retrouver

- le résultat de [Lou and Si, 2009], [Lou and Yang, 2014] qui stipule que les systèmes MISO ne sont jamais strictement discernables
- la condition de forte discernabilité contrôlable de [Babaali and Pappas, 2004]

Une autre contribution de ce chapitre que nous déduisons de la caractérisation de la zone d'indiscernabilité est le théorème 3.3.3 qui établit une condition nécessaire et suffisante de strict discernabilité des systèmes SISO. Nous montrons dans ce théorème que lorsque S_1 et S_2 sont des systèmes SISO, ils sont strictement discernables si et seulement si l'indice de similarité de leurs paramètres de Markov vaut 2n ($\rho = 2n$). Cette condition de discernabilité stricte est plus simple à tester comparativement à la condition de [Lou and Yang, 2014] dont le test requiert le calcul du rang de la matrice de Rosenbrock \mathbf{R} (p) du système S quelques soient les valeurs du paramètre $p \in \mathbb{C}$. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication [Motchon et al., 2015a] dans la revue IEEE Transactions on Automatic Control.

3.1 Concepts fondamentaux et résultats préliminaires

3.1.1 De l'équation intégrale à l'équation algébrique

D'après la définition de la zone d'indiscernabilité, on a $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ si et seulement si x_1^o, x_2^o et u sont solutions du problème d'annulation de la sortie du système augmenté : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$0_{m} = y(t, \boldsymbol{\pi}(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}), u, \boldsymbol{\pi}(0_{\mathscr{W}_{1}}, 0_{\mathscr{W}_{2}})) = C e^{tA} \boldsymbol{\pi}(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}) + C \int_{0}^{t} e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau + D u(t),$$
(3.1)

où on rappelle que les matrices $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $B \in \mathbb{R}^{2n \times l}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times 2n}$ et $D \in \mathbb{R}^{m \times l}$ représentent respectivement les matrices d'état, de commande, d'observation et d'action directe du système augmenté S associé à S_1 et S_2 et que π est l'opérateur d'empilement de variables défini par $\pi(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$. Pour résoudre l'équation intégrale (3.1), nous allons utiliser la transformée de Laplace pour la mettre sous la forme d'une équation algébrique linéaire.

Dans tout ce qui suivra, pour un nombre quelconque $\theta \in \mathbb{R}$, nous désignerons par \mathscr{H}_{θ} le demi-plan complexe situé à droite de l'axe $\Re(p) = \theta$ c'est-à-dire

Notation 3.1.1. $\mathscr{H}_{\theta} = \{p \in \mathbb{C} : \Re(p) > \theta\}$

Nous adopterons aussi les notations suivantes :

Notation 3.1.2. Le domaine $\mathscr{C}^1_{exp}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^q)$ désigne l'ensemble des fonctions φ de \mathbb{R}_+ à valeurs dans \mathbb{R}^q possédant les propriétés suivantes :

- (i) $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^q)$ c'est-à-dire φ est continue et dérivable sur \mathbb{R}_+
- (ii) φ est d'ordre exponentiel [Schiff, 1999], [Weber and Arfken, 2003] à l'infini c'est-a-dire il existe deux nombres réels $\kappa_{\varphi} > 0$ et θ_{φ} tels que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$|\varphi_j(t)| \le \kappa_{\varphi} e^{t \theta_{\varphi}}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, q$$

où φ_j , $j = 1, 2, \ldots, q$ désigne la $j^{\text{ème}}$ fonction composante de φ . Le nombre θ_{φ} est un "ordre exponentiel de la fonction φ ".

Les commandes que nous considérons sont dérivables sur \mathbb{R}_+ ($\mathscr{U} \subseteq \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$). Pour garantir l'existence de la transformée de Laplace de ces commandes nous supposons qu'elles sont d'ordre exponentiel à l'infini. Le domaine \mathscr{U} des commandes admissibles satisfait donc l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.1.3. $\mathscr{U} = \mathscr{C}^1_{exp}\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^l\right).$

Le théorème de Lerch [Schiff, 1999] (voir lemme 3.1.4) et la proposition 3.1.5 ci-dessous sont les résultats préliminaires que nous utilisons pour transformer l'équation intégrale en une équation algébrique linéaire.

Le théorème de Lerch donne une condition nécessaire sur l'unicité de la transformée de Laplace inverse d'une fonction.

Lemme 3.1.4. Soient φ et ψ deux fonctions continues par morceau sur \mathbb{R}_+ et d'ordre exponentiel θ_{φ} et θ_{ψ} . S'il existe un nombre $\theta > \max{\{\theta_{\varphi}, \theta_{\psi}\}}$ tel que

$$\mathcal{L}\left[\varphi\right]\left(p
ight) = \mathcal{L}\left[\psi
ight]\left(p
ight), \quad \forall p \in \mathscr{H}_{ heta}$$

alors $\varphi(t) = \psi(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ tel que φ et ψ sont continues en t.

Une conséquence immédiate du lemme 3.1.4 est que si deux fonctions continues sur \mathbb{R}_+ et d'ordre exponentiel ont la même transformée de Laplace alors elles sont identiques sur \mathbb{R}_+ .

La proposition suivante montre que la sortie $y(\cdot, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o), u, \boldsymbol{\pi}(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}))$ du système augmenté possède les mêmes propriétés que la commande u (continuité, dérivabilité et propriété d'ordre exponentiel).

Proposition 3.1.5. Soit $u \in \mathscr{U}$ et soit θ_u un ordre exponentiel de u. Pour tout $(x_1^o, x_2^o) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $y(\cdot, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o), u, \boldsymbol{\pi}(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2})) \in \mathscr{C}_{exp}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ et $\theta_u + \boldsymbol{\lambda}_A$ est un ordre exponentiel de $y(\cdot, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o), u, \boldsymbol{\pi}(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}))$ où $\boldsymbol{\lambda}_A$ désigne le rayon spectral de A.

 $D\acute{e}monstration.$ Voir annexe E.

La sortie $y(\cdot, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o), u, \boldsymbol{\pi}(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}))$ étant continue et d'ordre exponentiel $\theta_u + \boldsymbol{\lambda}_A$, nous déduisons du théorème de Lerch qu'elle est identiquement nulle sur \mathbb{R}_+ si et seulement s'il existe $\theta > \theta_u + \boldsymbol{\lambda}_A$, tel que

$$\mathcal{L}\left[y\left(\cdot, \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right), u, \boldsymbol{\pi}\left(0_{\mathscr{W}_{1}}, 0_{\mathscr{W}_{2}}\right)\right)\right](p) = 0_{m}, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\theta}.$$
(3.2)

A partir de l'équation d'état du système augmenté ou à partir de l'expression explicite de la sortie y (voir équation (3.1)), on a pour tout $p \in \mathscr{H}_{\theta_u + \lambda_A}$,

$$\mathcal{L}\left[y\left(\cdot, \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right), u, \boldsymbol{\pi}\left(0_{\mathscr{W}_{1}}, 0_{\mathscr{W}_{2}}\right)\right)\right](p) = \frac{\mathbb{F}\left(p, D, C, A, B\right) \mathcal{L}\left[u\right](p) + \mathbb{F}\left(p, 0, C, A, \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right)\right)}{\det\left(p \, I_{2n} - A\right)}$$
(3.3)

où pour tout $p \in \mathscr{H}_{\lambda_A}$ et pour tout $(M, N) \in \mathbb{R}^{m \times q} \times \mathbb{R}^{n \times q}, q \in \mathbb{N}^{\star}$,

$$\mathbb{F}(p, M, C, A, N) = \det\left(p I_{2n} - A\right) M + C \operatorname{adj}\left(p I_{2n} - A\right) N$$
(3.4)

avec

adj
$$(p I_{2n} - A) = \det (p I_{2n} - A) (p I_{2n} - A)^{-1}$$

En remplaçant dans (3.2) $\mathcal{L}\left[y\left(\cdot, \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right), u, \boldsymbol{\pi}\left(0_{\mathscr{W}_{1}}, 0_{\mathscr{W}_{2}}\right)\right)\right]$ par sa formule explicite donnée par la relation (3.3), il vient alors que la zone d'indiscernabilité de S_{1} et S_{2} peut être caractérisée par le lemme suivant.

Lemme 3.1.6. Soit $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathscr{U}$ et soit θ_u un ordre exponentiel de u. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Le triplet (x_1^o, x_2^o, u) appartient à la zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 .
- (ii) Il existe un nombre réel $\theta > \theta_u + \lambda_A$ tel que

$$\mathbb{F}(p, D, C, A, B) \mathcal{L}[u](p) + \mathbb{F}(p, 0, C, A, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o)) = 0_m, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\theta}.$$
(3.5)

Démonstration. La preuve découle de (3.2) et (3.3).

3.1.2 Solutions homogènes et particulières de l'équation algébrique

D'après le lemme 3.1.6, les triplets (x_1^o, x_2^o, u) de la zone d'indiscernabilité sont les solutions de l'équation algébrique linéaire (3.5). Lorsqu'on fixe les valeurs de x_1^o et x_2^o , (3.5) est une équation linéaire fonctionnelle en la variable u. Le lemme 3.1.9 montre que toute commande u

solution de cette équation peut être décomposée en une somme de deux commandes admissibles dont l'une est une "solution homogène de (3.5)" (voir définition 3.1.7) et l'autre, une "solution particulière de (3.5)" (voir définition 3.1.8).

Définition 3.1.7 (Solution homogène de (3.5)). On dira d'une fonction $u^{\text{hom}} \in \mathscr{U}$ d'ordre exponentiel $\theta_{u^{\text{hom}}}$ qu'elle est une solution homogène de l'équation (3.5) s'il existe $\theta_1 > \theta_{u^{\text{hom}}} + \lambda_A$ tel que

$$\mathbb{F}(p, D, C, A, B) \mathcal{L}\left[\boldsymbol{u}^{\text{hom}}\right](p) = 0_m, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\theta_1}.$$
(3.6)

Définition 3.1.8 (Solution particulière de (3.5)). Une fonction $\boldsymbol{u}^{\text{par}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^l)$, $(x_1^o, x_2^o) \longmapsto \boldsymbol{u}^{\text{par}}[x_1^o, x_2^o]$ est une fonction génératrice de solutions particulières de (3.5) si elle possède les propriétés suivantes :

- (i) $\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}\left[x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right] \in \mathscr{U} \text{ pour tout } (x_{1}^{o}, x_{2}^{o}) \in \mathscr{X}_{ind}^{o}\left(S_{1}, S_{2}\right)$
- (ii) Pour tout $(x_1^o, x_2^o) \in \mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$, il existe $\theta_2 > \theta_{\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}[x_1^o, x_2^o]} + \boldsymbol{\lambda}_A$ tel que la transformée de Laplace de $\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}[x_1^o, x_2^o]$ vérifie la condition suivante :

$$\mathbb{F}(p, D, C, A, B) \mathcal{L}\left[\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}\left[x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right]\right](p) + \mathbb{F}(p, 0_{m}, C, A, \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right)\right) = 0_{m}, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\theta_{2}}.$$
(3.7)

où $\mathscr{X}_{ind}^{o}(S_1, S_2)$ défini par (1.34) est la projection de $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Rappelons que le domaine $\mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$ décrit l'ensemble des configurations initiales x_1^o et x_2^o de S_1 et S_2 à écarter pour pouvoir discerner les sorties des deux systèmes.

Lemme 3.1.9. Soit $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathscr{U}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$
- (ii) $(x_1^o, x_2^o) \in \mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$ et il existe une solution homogène $\boldsymbol{u}^{\text{hom}}$ de (3.5) telle que

$$u = \boldsymbol{u}^{\text{hom}} + \boldsymbol{u}^{\text{par}} \left[x_1^o, x_2^o \right] \tag{3.8}$$

où u^{par} est une fonction génératrice de solutions particulières de (3.5).

Démonstration.

 $(i) \implies (ii): \text{ Supposons que } (x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{\text{ind}}(S_1, S_2). \text{ Alors } (x_1^o, x_2^o) \in \mathscr{X}_{\text{ind}}^o(S_1, S_2) \text{ et } \\ \text{ on déduit de la définition 3.1.8 qu'il existe } \theta_2 > \theta_{\boldsymbol{u}^{\text{par}}[x_1^o, x_2^o]} + \boldsymbol{\lambda}_A \text{ tel que } \boldsymbol{u}^{\text{par}}[x_1^o, x_2^o] \\ \text{ satisfasse la condition (3.7). De plus, d'après le lemme 3.1.6, il existe } \theta > \theta_u + \boldsymbol{\lambda}_A \text{ tel que } \\ x_1^o, x_2^o \text{ et } \mathcal{L}[u] \text{ vérifient la condition (3.5). Nous allons montrer dans un premier temps que } \\ u - \boldsymbol{u}^{\text{par}}[x_1^o, x_2^o] \text{ est une solution homogène de (3.5). Il est clair que max } \left\{ \theta_u, \theta_{\boldsymbol{u}^{\text{par}}[x_1^o, x_2^o]} \right\}$

est un ordre exponentiel de $u-\boldsymbol{u^{\mathrm{par}}}\left[x_{1}^{o},x_{2}^{o}\right]$ c'est-à-dire

$$\max\left\{\theta_u, \theta_{\boldsymbol{u}^{\mathrm{par}}\left[x_1^o, x_2^o\right]}\right\} := \theta_{u-\boldsymbol{u}^{\mathrm{par}}\left[x_1^o, x_2^o\right]}.$$

Posons $\theta_1 = \max{\{\theta, \theta_2\}}$. Il résulte de la définition de θ , θ_1 et θ_2 que

$$heta_1 > \max\left\{ heta_u, heta_{u^{\operatorname{par}}\left[x_1^o, x_2^o\right]}
ight\} + oldsymbol{\lambda}_A = heta_{u-u^{\operatorname{par}}\left[x_1^o, x_2^o\right]} + oldsymbol{\lambda}_A.$$

De plus, puisque $\mathscr{H}_{\theta_1} \subset \mathscr{H}_{\theta} \cap \mathscr{H}_{\theta_2}$, la différence des relations (3.5) et (3.7) donne

$$\mathbb{F}\left(p, D, C, A, B\right) \mathcal{L}\left[u - \boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}\left[x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right]\right](p) = 0_{m}, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\theta_{1}}$$

On conclut donc que $u - u^{\text{par}}[x_1^o, x_2^o]$ est une solution homogène de l'équation (3.5). Pour conclure, il suffit de remarquer que la commande u peut être réécrite en fonction de la solution homogène $u - u^{\text{par}}[x_1^o, x_2^o]$ comme suit :

$$u = (u - u^{\text{par}}[x_1^o, x_2^o]) + u^{\text{par}}[x_1^o, x_2^o].$$

 $\begin{array}{l} (ii) \implies (i): \mbox{ Supposons que } (x_1^o, x_2^o) \in \mathscr{X}_{\rm ind}^o \, (S_1, S_2) \mbox{ et que la commande } u \mbox{ admet une décomposition de la forme (3.8). Posons } \theta = \max \left\{ \theta_1, \theta_2 \right\} \mbox{ où les réels } \theta_1 \mbox{ et } \theta_2 \mbox{ sont donnés par les définitions 3.1.7 et 3.1.8. D'après la décomposition (3.8) de } u, \max \left\{ \theta_{u^{\rm hom}}, \theta_{u^{\rm par}[x_1^o, x_2^o]} \right\} \mbox{ est un ordre exponentiel de } u \mbox{ c'est-à-dire } \end{array}$

$$\max\left\{\theta_{\boldsymbol{u}^{\mathrm{hom}}}, \theta_{\boldsymbol{u}^{\mathrm{par}}\left[x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right]}\right\} := \theta_{u}$$

Il s'ensuit donc que

$$\theta > \max\left\{ heta_{u^{\text{hom}}}, heta_{u^{\text{par}}\left[x_{1}^{o}, x_{2}^{o}
ight]}
ight\} + oldsymbol{\lambda}_{A} = heta_{u} + oldsymbol{\lambda}_{A}$$

De plus, puisque $\mathscr{H}_{\theta} \subset \mathscr{H}_{\theta_1} \cap \mathscr{H}_{\theta_2}$, on peut donc sommer les relations (3.6) et (3.7) pour $p \in \mathscr{H}_{\theta}$. Ceci conduit à la relation suivante

$$\mathbb{F}\left(p, D, C, A, B\right) \mathcal{L}\left[u\right]\left(p\right) + \mathbb{F}\left(p, 0_m, C, A, \boldsymbol{\pi}\left(x_1^o, x_2^o\right)\right) = 0_m, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\boldsymbol{\theta}}$$

et on conclut grâce au lemme 3.1.6 que $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$.

3.1.3 Quelques propriétés fondamentales de l'opérateur \mathbb{F}

Les lemmes 3.1.6 et 3.1.9 sont les principaux résultats préliminaires que nous allons utiliser dans les sections suivantes pour déterminer $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$. Dans l'utilisation de ces résultats, nous manipulerons le plus souvent les fonctions $\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B)$ et $\mathbb{F}(\cdot, 0_m, C, A, \pi(x_1^o, x_2^o))$. Dans cette partie, nous allons donner quelques propriétés de ces fonctions.

La proposition 3.1.11 montre que $\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B)$ et $\mathbb{F}(\cdot, 0_m, C, A, \pi(x_1^o, x_2^o))$ sont des fonctions polynomiales. Pour établir ce résultat, nous allons utiliser l'algorithme de Le Verrier-Souriau [Leyva-Ramos, 1991], [Réaud et al., 2000], [Helmberg et al., 1993], [Brezinski, 2002] qui permet de calculer la résolvante ($p I_{2n} - A$)⁻¹ de la matrice A.

Lemme 3.1.10. Pour tout $p \in \mathscr{H}_{\lambda_A}$,

adj
$$(p I_{2n} - A) = K_{2n-1} p^{2n-1} + K_{2n-2} p^{2n-2} + \dots + K_1 p + K_0$$
 (3.9)

où les matrices $K_s \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $s = 0, 1, \dots, 2n - 1$ sont définies par

$$\mathbf{K}_{2n-s} = \begin{cases} I_{2n} & si \ s = 1, \\ \alpha_{2n-s+1} I_{2n} + \mathbf{K}_{2n-s+1} A & si \ s = 2, 3, \dots, 2n, \end{cases}$$
(3.10)

avec α_s , $s = 0, 1, \dots, 2n - 1$, les coefficients du polynôme caractéristique de A :

$$\det (p I_{2n} - A) = p^{2n} + \alpha_{2n-1} p^{2n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0.$$
(3.11)

Proposition 3.1.11. Soient $q \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathbb{R}^{m \times q}$ et $N \in \mathbb{R}^{n \times q}$. Pour tout $p \in \mathscr{H}_{\lambda_A}$, on a :

$$\mathbb{F}(p, M, C, A, N) = \sum_{s=0}^{2n} \widehat{K}_{2n-s}(M, C, A, N) p^{2n-s}$$
(3.12)

où les coefficients matriciels $\widehat{K}_{2n-s}(M, C, A, N)$ sont définis par

$$\widehat{K}_{2n-s}(M,C,A,N) = \begin{cases} M & si \ s = 0, \\ \alpha_{2n-s}M + \sum_{k=0}^{s-1} \alpha_{2n-s+k+1}CA^kN & si \ s = 1,2,\dots,2n, \end{cases}$$
(3.13)

où $\alpha_{2n} = 1$ et les autres coefficients α_s , $s = 0, 1, \ldots, 2n - 1$ sont définis par la relation (3.11).

Démonstration. Soient $M \in \mathbb{R}^{m \times q}$, $N \in \mathbb{R}^{n \times q}$ et $p \in \mathscr{H}_{\lambda_A}$. Dans la formule (3.4) de $\mathbb{F}(p, M, C, A, N)$, en remplaçant respectivement det $(p I_{2n} - A)$ et adj $(p I_{2n} - A)$ par les expressions (3.9) et (3.11), on obtient

$$\mathbb{F}(p, M, C, A, N) = M p^{2n} + \sum_{s=1}^{2n} (\alpha_{2n-s} M + C \operatorname{K}_{2n-s} N) p^{2n-s} = \sum_{s=0}^{2n} \widehat{\operatorname{K}}_{2n-s}(M, C, A, N) p^{2n-s}$$

avec

$$\widehat{K}_{2n-s}(M, C, A, N) = \begin{cases} M & \text{si } s = 0, \\ \alpha_{2n-s} M + C K_{2n-s} N & \text{si } s = 1, 2, \dots, 2n. \end{cases}$$

Ainsi, pour montrer que les coefficients $\hat{K}_s(M, C, A, N)$ ainsi définis satisfont les conditions (3.13) nous allons prouver par récurrence que les coefficients K_s vérifient la relation suivante :

$$K_{2n-s} = \sum_{k=0}^{s-1} \alpha_{2n-s+k+1} A^k, \quad \forall s = 1, \dots, 2n.$$
(3.14)

Pour s = 1, la relation (3.14) entraîne que $K_{2n-1} = \alpha_{2n} A^0 = I_{2n}$. Par conséquent, on conclut d'après la définition (3.10) de K_{2n-1} que (3.14) est vraie pour s = 1. Soit $s \in \{2, 3, ..., 2n\}$ tel que (3.14) est vraie à l'ordre s - 1 c'est-à-dire

$$\mathcal{K}_{2n-s+1} = \sum_{k=0}^{s-2} \alpha_{2n-s+k+2} A^k = \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_{2n-s+k+1} A^{k-1}$$

En remplaçant cette expression de K_{2n-s+1} dans la formule (3.10) de K_{2n-s} , on obtient

$$K_{2n-s} = \alpha_{2n-s+1} I_{2n} + \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_{2n-s+k+1} A^k = \sum_{k=0}^{s-1} \alpha_{2n-s+k+1} A^k.$$

D'où le résultat.

La proposition 3.1.12 donne une condition nécessaire et suffisante pour que les coefficients successifs des polynômes $\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B)$ et $\mathbb{F}(\cdot, 0_m, C, A, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o))$ soient nuls.

Proposition 3.1.12. Soient $M \in \mathbb{R}^{m \times q}$, $N \in \mathbb{R}^{n \times q}$ et $s_0 \in \{1, \ldots, 2n\}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\widehat{K}_{2n-s}(M, C, A, N) = 0_{m \times q}$ pour tout $s = 0, 1, \dots, s_0$.
- (*ii*) $M = 0_{m \times q}$ et $C A^s N = 0_{m \times q}$ pour tout $s = 0, 1, \dots, s_0 1$.

Démonstration.

 $(ii) \implies (i)$: Supposons qu'on a (ii). Il clair que $\widehat{K}_{2n-0}(M, C, A, N)$ est nulle car d'après (3.12), $\widehat{K}_{2n}(M, C, A, N) = M$ et M est nulle par hypothèse. Soit maintenant $s \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq s \leq s_0$. Ainsi, $0 \leq s-1 \leq s_0-1$ et on déduit de (ii) que les matrices M et

 $C A^k N, k = 0, 1, ..., s - 1$ sont nulles. Par conséquent, $\widehat{K}_{2n-s}(M, C, A, N)$ est nulle car $\widehat{K}_{2n-s}(M, C, A, N)$ dépend linéairement des matrices M et $C A^k N, k = 0, 1, ..., s - 1$.

 $(i) \implies (ii)$: Supposons qu'on a (i). D'après (3.10), on a $\widehat{K}_{2n}(M, C, A, N) = M$. De plus, $\widehat{K}_{2n}(M, C, A, N)$ est nulle par hypothèse. D'où la matrice M est nulle. Nous allons maintenant montrer par récurrence sur s que

$$C A^{s} N = 0_{m \times q}, \quad \forall s = 0, 1, \dots, s_{0} - 1.$$
 (3.15)

La relation (3.15) est vraie pour s = 0 car M étant nulle, d'après (3.10) et l'hypothèse (i), on a

$$0_{m \times q} = \widehat{K}_{2n-1} (M, C, A, N) = \alpha_{2n-1} M + \alpha_{2n} C N = C N.$$

Soit $s \in \{1, 2, ..., s_0 - 1\}$ tel que la proposition (3.15) est vraie au rang s - 1 c'est-àdire $C A^k N = 0_{m \times q}, k = 0, 1, ..., s - 2$. Nous allons montrer que la matrice $C A^{s-1} N$ est nulle. Puisque $s \leq s_0 - 1 < s_0$, on déduit de l'hypothèse (3.10) que le coefficient $\widehat{K}_{2n-s}(M, C, A, N)$ est nul et par conséquent, on obtient grâce à (3.10) que

$$\alpha_{2n-s} M + \sum_{k=0}^{s-2} \alpha_{2n-s+k+1} C A^k N + \alpha_{2n} C A^{s-1} N = 0_{m \times l}$$

Il en résulte que la matrice $C A^{s-1} N$ est nulle car $\alpha_{2n} = 1$, $M = 0_{m \times q}$ et $C A^k N = 0_{m \times q}$, $k = 0, 1, \ldots, s - 2$. D'où le résultat.

3.1.4 Indice de similarité des paramètres de Markov

Un concept qui joue un rôle important dans l'approche que nous proposons pour résoudre l'équation algébrique linéaire (3.5) est l'indice de similarité des paramètres de Markov des systèmes S_1 et S_2 . Il est défini comme suit.

Définition 3.1.13 (Indice de similarité des paramètres de Markov). On appelle indice de similarité des paramètres de Markov des systèmes S_1 et S_2 , le nombre entier ρ défini par

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{cases} 0 & si \quad D \neq 0_{m \times l}, \\ \min\{k \colon k \in \mathscr{P}\} & si \quad D = 0_{m \times l} \text{ et } \mathscr{P} \neq \emptyset, \\ +\infty & si \quad D = 0_{m \times l} \text{ et } \mathscr{P} = \emptyset, \end{cases}$$
(3.16)

où P est défini par

$$\mathscr{P} = \left\{ k \in \mathbb{N}^* \colon C \, A^{k-1} \, B \neq 0_{m \times l} \right\}. \tag{3.17}$$

Remarque 3.1.14. D'après la définition de \mathscr{P} , \mathscr{P} est vide si et seulement si pour tout $s \in \mathbb{N}$, la matrice $C A^s B$ est nulle.

D'autre part, il résulte du théorème de Cayley-Hamilton [Serre, 2002] que pour tout $s \ge 2n$, il existe $a_j(s), j = 0, 1, ..., 2n - 1$ tels que

$$C A^{s} B = a_{1}(s) C B + a_{2}(s) C A B + \dots + a_{2n-1}(s) C A^{2n-1} B,$$

on conclut donc que \mathscr{P} est vide si et seulement si

$$C A^s B = 0_{m \times l}, \quad s = 0, 1, \dots, 2n - 1.$$

Par conséquent, les valeurs des 2n matrices, $C A^s B$, s = 0, 1, ..., 2n - 1 suffisent pour savoir si \mathscr{P} est vide ou pas.

Exemple 3.1.15. Considérons les systèmes masse-ressort S_1 et S_2 (voir figure 3.1 ci-dessous) définis par les matrices suivantes

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_i}{m_i} & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_i} \end{bmatrix} \quad ; \quad C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad D_i = 0$$

avec i = 1, 2. Les constantes m_1 et m_2 représentent respectivement la masse de S_1 et S_2 et les constantes k_1 et k_2 désignent respectivement les constantes de raideur des ressorts de S_1 et S_2 .



Figure 3.1 – Système masse-ressort

Les paramètres de Markov du système augmenté de S_1 et S_2 sont :

$$D = 0 \quad ; \quad C B = 0 = C A^2 B \quad ; \quad C A B = \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \quad ; \quad C A^3 B = \frac{k_2}{m_2^2} - \frac{k_1}{m_1^2}$$

Il en résulte que :

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{cases} 2 & si \ m_1 \neq m_2, \\ 4 & si \ m_1 = m_2 \ et \ k_1 \neq k_2, \\ +\infty & si \ m_1 = m_2 \ et \ k_1 = k_2. \end{cases}$$

L'indice de similarité est nul lorsque les systèmes S_1 et S_2 ont la même matrice d'action directe $(D_1 = D_2)$. Il est différent de zéro et de l'infini dans le cas où S_1 et S_2 n'ont pas les mêmes paramètres de Markov. Il est égal à l'infini lorsque les systèmes S_1 et S_2 ont les mêmes paramètres de Markov. C'est le cas par exemple lorsque S_1 et S_2 sont équivalents. Cependant, comme le montre l'exemple suivant, deux systèmes non équivalents peuvent avoir un indice de similarité égal à l'infini.

Exemple 3.1.16. Considérons les systèmes S_1 et S_2 définis par les matrices suivantes :

$$A_{1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B_{1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad C_{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad D_{1} = 0$$
$$A_{2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B_{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad C_{2} = C_{1} \quad ; \quad D_{2} = D_{1}$$

Pour tout k = 0, 1, 2, 3, on a $C_1 A_1^k B_1 = (-1)^k = C_2 A_2^k B_2$. Par conséquent $\rho = +\infty$. De plus, puisque les matrices A_1 et A_2 n'ont pas le même spectre, les systèmes S_1 et S_2 ne sont pas équivalents.

La proposition suivante donne les valeurs possibles de l'indice de similarité si la matrice D est nulle et lorsque S_1 et S_2 n'ont pas les mêmes paramètres de Markov.

Proposition 3.1.17. Si $D = 0_{m \times l}$ et si $\mathscr{P} \neq \emptyset$ alors $1 \leq \rho \leq 2n$.

Démonstration. Supposons que $D = 0_{m \times l}$ et que $\mathscr{P} \neq \emptyset$. L'inégalité $\rho \geq 1$ découle du fait lorsque $\mathscr{P} \neq \emptyset$, $\rho \in \mathscr{P} \subset \mathbb{N}^*$. Pour montrer que $\rho \leq 2n$, nous allons faire une démonstration par contraposée c'est-à-dire nous allons montrer que si $\rho > 2n$ alors l'ensemble \mathscr{P} est vide. Supposons que $\rho > 2n$. Alors d'après la définition 3.16 de l'indice ρ , on a $CA^sB = 0_{m \times l}$, $s = 0, 1, \ldots, 2n - 1$. Ceci implique que \mathscr{P} est vide. D'où le résultat.

A partir de l'indice de similarité, la proposition 3.1.18 donne la forme générale la plus simple possible du polynôme $\mathbb{F}(\cdot, 0_{m \times l}, C, A, B)$ lorsque S_1 et S_2 n'ont pas les mêmes paramètres de Markov. **Proposition 3.1.18.** Si $1 \leq \rho \leq 2n$ alors pour tout $p \in \mathscr{H}_{\lambda_A}$,

$$\mathbb{F}(p, 0_{m \times l}, C, A, B) = \sum_{s=\rho}^{2n} \widehat{K}_{2n-s}(0_{m \times l}, C, A, B) p^{2n-s}$$
(3.18)

où pour tout $s = \rho, \rho + 1, \dots, 2n$

$$\widehat{K}_{2n-s}(0_{m\times l}, C, A, B) = \sum_{k=\rho-1}^{s-1} \alpha_{2n-s+k+1} C A^k B.$$
(3.19)

Démonstration. Supposons que $1 \leq \rho \leq 2n$. D'après la définition de ρ , toutes les matrices $C A^s B$, $s = 0, 1, \ldots, \rho - 2$ sont nulles et on déduit de la proposition 3.1.12 que

$$\widehat{K}_{2n-s}(0_{m \times l}, C, A, B) = 0_{m \times l}, \quad \forall s = 0, 1, \dots, \rho - 1.$$

Par conséquent, pour tout $p \in \mathscr{H}_{\lambda_A}$, la formule (3.12) de $\mathbb{F}(p, 0_{m \times l}, C, A, B)$ devient

$$\mathbb{F}(p, 0_{m \times l}, C, A, B) = \sum_{s=0}^{2n} \widehat{K}_{2n-s}(0_{m \times l}, C, A, B) \ p^{2n-s} = \sum_{s=\rho}^{2n} \widehat{K}_{2n-s}(0_{m \times l}, C, A, B) \ p^{2n-s}.$$

D'où on obtient la formule (3.18). D'après la relation (3.13), pour tout $s = \rho, \rho + 1, \dots, 2n$, on a

$$\widehat{\mathrm{K}}_{2n-s}\left(0_{m\times l}, C, A, B\right) = \sum_{k=0}^{\rho-2} \alpha_{2n-s+k+1} C A^{k} B + \sum_{k=\rho-1}^{s-1} \alpha_{2n-s+k+1} C A^{k} B.$$

On obtient finalement la formule (3.19) en remarquant que $\sum_{k=0}^{\rho-2} \alpha_{2n-s+k+1} C A^k B = 0_{m \times l}$. \Box

Dans le cas où S_1 et S_2 ont les mêmes paramètres de Markov ($\rho = +\infty$), la forme la plus simple possible de $\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B)$ est donnée par la proposition 3.1.19. Cette proposition montre précisément que dans ce cas, la fonction $\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B)$ est identiquement nulle.

Proposition 3.1.19. La fonction $\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B)$ est identiquement nulle sur \mathscr{H}_{λ_A} si et seulement si $\rho = +\infty$.

Démonstration. Nous savons grâce à la définition 3.1.13 et la remarque 3.1.14 que $\rho = +\infty$ si et seulement si les matrices D et $C A^s B$, $s = 0, 1, \ldots, 2n - 1$ sont nulles. Nous allons donc prouver que $\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B)$ est identiquement nulle si et seulement si les matrices D et $C A^k B$, $s = 0, 1, \ldots, 2n - 1$ sont nulles.

Il découle de la formule (3.12) que la fonction polynomiale $\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B)$ est identiquement nulle si et seulement si tous coefficients sont nuls c'est-à-dire

$$\widehat{\mathbf{K}}_{2n-s}(D, C, A, B) = 0, \quad s = 0, 1, \dots, 2n.$$

Ainsi, on obtient grâce à la proposition 3.1.12 que $\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B)$ est identiquement nulle si et seulement si $D = 0_{m \times l}$ et $C A^s B = 0_{m \times l}$, $s = 0, 1, \ldots, 2n - 1$. D'où le résultat.

Lorsque la matrice d'action directe du système augmenté est nulle $(D = 0_{m \times l})$ et lorsque S_1 et S_2 n'ont pas les mêmes paramètres de Markov, l'indice de similarité ρ correspond à l'ordre minimal k de dérivation de la sortie qu'on doit atteindre pour faire apparaître explicitement udans l'expression de $y^{(k)}$. En effet, par définition de ρ , on a $C A^{k-1} B = 0_{m \times l}, \ k = 1, 2, \dots, \rho - 2$ et $C A^{\rho-1} B \neq 0_{m \times l}$. Par conséquent, par un simple calcul de dérivation de la sortie y, on obtient

$$\begin{array}{rclrcl} y^{(1)}\left(t\right) &=& C\,\dot{x}\left(t\right) &=& C\,A\,x\left(t\right) + C\,B\,u\left(t\right) &=& C\,A\,x\left(t\right) \\ y^{(2)}\left(t\right) &=& C\,A\,\dot{x}\left(t\right) &=& C\,A^{2}\,x\left(t\right) + C\,A\,B\,u\left(t\right) &=& C\,A^{2}\,x\left(t\right) \\ \vdots &\vdots &\vdots &\vdots &\vdots &\vdots \\ \vdots &\vdots &\vdots &\vdots &\vdots \\ y^{(\rho-1)}\left(t\right) &=& C\,A^{\rho-2}\,\dot{x}\left(t\right) &=& C\,A^{\rho-1}\,x\left(t\right) + C\,A^{\rho-2}\,B\,u\left(t\right) &=& C\,A^{\rho-1}\,x\left(t\right) \\ y^{(\rho)}\left(t\right) &=& C\,A^{\rho-1}\,\dot{x}\left(t\right) &=& C\,A^{\rho}\,x\left(t\right) + C\,A^{\rho-1}\,B\,u\left(t\right). \end{array}$$

Ainsi, lorsque S_1 et S_2 sont des systèmes SISO (m = 1) ayant la même matrice d'action (D = 0), l'indice de similarité représente le degré relatif [Isidori, 1989], [Khalil, 1996b], [Ilchmann and Mueller, 2007] du système augmenté S.

Dans [Ilchmann and Mueller, 2007] et [Isidori, 1989] on montre que le degré relatif d'un système linéaire SISO ayant une matrice d'action nulle correspond au degré de sa matrice de transfert. Par conséquent, lorsque S_1 et S_2 sont des systèmes SISO ayant la même matrice d'action et des paramètres de Markov différents, l'indice de similarité représente le degré de la matrice de transfert du système augmenté. Cette interprétation de l'indice de similarité reste valable pour les systèmes S_1 et S_2 qui ne sont pas SISO ou qui n'ont pas la même matrice d'action ou qui ont les même paramètres de Markov. En effet, d'après les expressions de $\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B)$ données par les propositions 3.1.11, 3.1.19 et 3.1.18, on a

$$\deg\left(\mathbb{F}\left(\cdot, D, C, A, B\right)\right) = \begin{cases} 2n & \text{si} \quad D \neq 0_{m \times l}, \\ 2n - \rho & \text{si} \quad D = 0_{m \times l} \text{ et } \mathscr{P} \neq \emptyset, \\ -\infty & \text{si} \quad D = 0_{m \times l} \text{ et } \mathscr{P} = \emptyset. \end{cases}$$

D'autre part, puisque $\rho = 0$ lorsque $D \neq 0_{m \times l}$ et $\rho = +\infty$ lorsque S_1 et S_2 ont les mêmes paramètres de Markov (c'est-à-dire $D = 0_{m \times l}$ et $\mathscr{P} = \emptyset$) on peut donc généralement écrire que

$$\deg\left(\mathbb{F}\left(\cdot, D, C, A, B\right)\right) = 2n - \boldsymbol{\rho}.\tag{3.20}$$

De plus, comme la matrice de transfert du système augmenté peut être exprimée comme suit

$$H(p) = C (p I_{2n-A})^{-1} B + D = \frac{\mathbb{F}(p, D, C, A, B)}{\det (p I_{2n} - A)}, \quad p \in \mathscr{H}_{\lambda_A}$$

il vient donc que

$$\deg (H) = \deg \left(\det \left(\cdot I_{2n} - A\right)\right) - \deg \left(\mathbb{F}\left(\cdot, D, C, A, B\right)\right) = 2n - (2n - \rho) = \rho$$

Nous reviendrons sur la notion de degré relatif d'un système dans le chapitre 5.

3.2 Caractérisation de la zone d'indiscernabilité

Il découle de la définition 3.1.13 de l'indice de similarité et de la proposition 3.1.17 que ρ peut prendre les valeurs possibles suivantes :

$$\rho \in \{0, 1, \dots, 2n - 1, 2n, +\infty\}.$$

Pour déterminer $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$, nous allons distinguer les trois cas possibles suivants : $\rho \leq 2n-1$, $\rho = 2n$ et $\rho = +\infty$. Dans la suite du document, nous adopterons les notations suivantes :

Notation 3.2.1. Nous désignerons par $\mathbb{O}^{[k]}$, $k \in \mathbb{N}$, la matrice d'observabilité d'ordre k du système augmenté :

$$\mathbb{O}^{[k]} := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_1^{[k]} & -\mathbb{O}_2^{[k]} \end{bmatrix}.$$

La matrice d'observabilité du système augmenté sera notée \mathbb{O} c'est-à-dire $\mathbb{O} := \mathbb{O}^{[2n-1]}$.

3.2.1 Zone d'indiscernabilité : cas $\rho = 2n$ et $\rho = +\infty$

Lorsque $\rho = +\infty$, la zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 est donnée par le théorème suivant.

Théorème 3.2.2. Si $\rho = +\infty$ alors $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ si et seulement si

$$\begin{bmatrix} x_1^o \\ x_2^o \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker}\left(\mathbb{O}\right). \tag{3.21}$$

Démonstration. Supposons que $\rho = +\infty$. Alors d'après la proposition 3.1.19, la fonction $\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B)$ est identiquement nulle sur \mathscr{H}_{λ_A} et on obtient donc grâce au lemme 3.1.6 que $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}$ si et seulement si

$$\exists \theta > \theta_u + \lambda_A, \, \forall p \in \mathscr{H}_{\theta}, \quad \mathbb{F}\left(p, 0_m, C, A, \boldsymbol{\pi}\left(x_1^o, x_2^o\right)\right) = 0_m. \tag{3.22}$$

Pour conclure la preuve, nous allons montrer que les relations (3.21) et (3.22) sont équivalentes. D'après la proposition 3.1.11, la relation (3.22) est équivalente à

$$\widehat{K}_{2n-s}(0_m, C, A, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o)) = 0_m, \quad s = 0, 1, \dots, 2n.$$
(3.23)

De plus, puisqu'il résulte de la proposition 3.1.12 que (3.23) est équivalente à

$$C A^{s} \boldsymbol{\pi} (x_{1}^{o}, x_{2}^{o}) = 0_{m}, \quad s = 0, 1, \dots, 2n - 1.$$

on conclut donc que (3.22) et (3.21) sont équivalentes. D'où le résultat.

Ainsi, il résulte du théorème 3.2.2 que lorsque S_1 et S_2 ont les mêmes paramètres de Markov, l'égalité des sorties $y_1(\cdot, x_1^o, u, 0_{\mathscr{W}_1})$ et $y_2(\cdot, x_2^o, u, 0_{\mathscr{W}_2})$ ne dépend pas du choix de la commande u. Plus précisément, pour générer des sorties $y_1(\cdot, x_1^o, u, 0_{\mathscr{W}_1})$ et $y_2(\cdot, x_2^o, u, 0_{\mathscr{W}_2})$ identiques, il faudrait démarrer les systèmes S_1 et S_2 à partir des états initiaux x_1^o et x_2^o qui vérifient la condition (3.21). Comme le montre le corollaire suivant, ces états initiaux sont ceux qui génèrent des réponses libres $y_1(\cdot, x_1^o, 0_{\mathscr{W}}, 0_{\mathscr{W}_1})$ et $y_2(\cdot, x_2^o, 0_{\mathscr{W}}, 0_{\mathscr{W}_2})$ identiques.

Corollaire 3.2.3. Si $\rho = +\infty$ alors $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ si et seulement si

$$C_1 e^{tA_1} x_1^o = C_2 e^{tA_2} x_1^o, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$
(3.24)

Démonstration. Pour montrer ce résultat, nous allons prouver que les relations (3.21) et (3.24) sont équivalentes. Il découle du théorème de Cayley-Hamilton que pour tout $s \ge 2n$, il existe des nombres réels $a_j(s)$, $s = 0, 1, \ldots, 2n - 1$ tels que

$$C A^{s} \boldsymbol{\pi} (x_{1}^{o}, x_{2}^{o}) = a_{1} (s) C \boldsymbol{\pi} (x_{1}^{o}, x_{2}^{o}) + a_{2} (s) C A \boldsymbol{\pi} (x_{1}^{o}, x_{2}^{o}) + \dots + a_{2n-1} (s) C A^{2n-1} \boldsymbol{\pi} (x_{1}^{o}, x_{2}^{o}).$$

Par conséquent, la relation (3.21) est équivalente à

$$C A^k \boldsymbol{\pi} (x_1^o, x_2^o) = 0_m, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Il s'ensuit grâce à la définition de l'exponentiel de matrice que (3.21) est équivalente à

$$C e^{tA} \boldsymbol{\pi} (x_1^o, x_2^o) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} C A^k \boldsymbol{\pi} (x_1^o, x_2^o) = 0_m, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $C e^{tA} \pi (x_1^o, x_2^o) = C_1 e^{tA_1} x_1^o - C_2 e^{tA_2} x_2^o$.

Exemple 3.2.4. Considérons les systèmes S_1 et S_2 de l'exemple 3.1.15. Nous avons déjà montré que pour ces deux systèmes, $\rho = +\infty$. La matrice d'observabilité du système augmenté associé à S_1 et S_2 est

$$\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

On en déduit que Ker (\mathbb{O}) = Span $\{v_1, v_2\}$ avec $v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\top}$ et $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\top}$. Il s'ensuit que

$$\mathscr{Z}_{ind}\left(S_{1}, S_{2}\right) = \left\{ \left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}, u\right) \in \mathbb{R}^{2} \times \mathbb{R}^{2} \times \mathscr{U} : u \in \mathscr{U} \ et \ \exists \xi_{1}, \xi_{2} \in \mathbb{R}, \ x_{1}^{o} = \begin{bmatrix} \xi_{1} \\ \xi_{2} \end{bmatrix}, \ x_{2}^{o} = \begin{bmatrix} \xi_{1} + \xi_{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Remarque 3.2.5. Les résultats du théorème 3.2.2 sont toujours valables lorsque les commandes du domaine \mathscr{U} ne sont pas Laplace-Transformables. En effet, dans l'annexe F nous avons montré que lorsque $\rho = +\infty$, on peut résoudre directement l'équation intégrale (3.1) sans utiliser la transformation de Laplace.

Nous allons maintenant donner une caractérisation de la zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 dans le cas où $\rho = 2n$. Cette caractérisation est donnée par le théorème 3.2.8 dont la preuve repose sur le lemme suivant. Ce lemme est connu sous le nom du théorème de la valeur initiale [Schiff, 1999], [Cohen, 2007].

Lemme 3.2.6. Soit φ une fonction d'ordre exponentiel et continue par morceau sur \mathbb{R}_+ . Si $\dot{\varphi}$ est continue par morceau sur \mathbb{R}_+ alors

$$\lim_{p \to +\infty} p \mathcal{L} \left[\varphi\right](p) = \varphi\left(0^{+}\right) \qquad (p \in \mathbb{R})$$
(3.25)

 $où \varphi(0^+)$ désignent la limite de φ à droite de 0.

Remarque 3.2.7. Il est important de noter que lorsque la fonction φ est continue sur \mathbb{R}_+ , la relation (3.25) devient

$$\lim_{p \to +\infty} p \mathcal{L} \left[\varphi\right](p) = \varphi(0) \qquad (p \in \mathbb{R})$$

Théorème 3.2.8. Si $\rho = 2n$ alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}$
- (ii) x_1^o et x_2^o satisfont la condition (3.21) et

$$u \in \left\{ v \in \mathscr{U} : \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad v(t) \in \operatorname{Ker}\left(C A^{2n-1} B\right) \right\}$$
(3.26)

Démonstration. Supposons que $\rho = 2n$. Pour cette valeur de ρ , la matrice D est nulle (voir définition 3.1.13) et par conséquent, grâce à la proposition 3.1.18, $\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B)$ est le monôme constant :

$$\mathbb{F}(p, D, C, A, B) = \mathbb{F}(p, 0_{m \times l}, C, A, B) = \widehat{K}_0(D, C, A, B) = C A^{2n-1} B, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\lambda_A}.$$
 (3.27)

 $(i) \implies (ii)$: Soit $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$. D'après la relation (3.27) et le lemme 3.1.6, il existe $\theta > \theta_u + \lambda_A$ tel que

$$C A^{2n-1} B \mathcal{L} [u] (p) = -\mathbb{F} (p, 0_m, C, A, \boldsymbol{\pi} (x_1^o, x_2^o)), \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\theta}.$$

$$(3.28)$$

De plus, puisque la commande u est continue, on obtient grâce au théorème de la valeur initiale que

$$C A^{2n-1} B u (0) = -\lim_{p \to +\infty} p \mathbb{F} (p, 0_{m \times n}, C, A, \pi (x_1^o, x_2^o)).$$

Il en résulte que $\mathbb{F}(\cdot, 0_m, C, A, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o))$ est identiquement nulle car tous les coefficients de $C A^{2n-1} B u(0)$ sont finis. Ainsi, tous les coefficients $\widehat{K}_{2n-s}(0_m, C, A, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o)), s = 0, 1, \ldots, 2n$ de la fonction polynomiale $\mathbb{F}(\cdot, 0_m, C, A, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o))$ sont nuls et on conclut grâce à la proposition 3.1.12 que

$$C A^{s} \boldsymbol{\pi} (x_{1}^{o}, x_{2}^{o}) = 0_{m}, \quad \forall s = 0, 1, \dots, 2n - 1.$$

D'où les vecteurs x_1^o et x_2^o satisfont la condition (3.21). La fonction $\mathbb{F}(\cdot, 0_m, C, A, \pi(x_1^o, x_2^o))$

étant identiquement nulle, la relation (3.28) devient

$$C A^{2n-1} B \mathcal{L} [u] (p) = 0_m, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\theta} \subseteq \mathscr{H}_{\theta_u + \lambda_A} \subseteq \mathscr{H}_{\theta_u},$$

et on conclut grâce au théorème de Lerch que

$$C A^{2n-1} B u(t) = 0_m, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

D'où la commande u vérifie la condition (3.26).

 $(ii) \implies (i)$: Soit un triplet $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathscr{U}$ dont les éléments x_1^o, x_2^o et u satisfont les conditions (3.21) et (3.26). D'après la proposition 3.1.12, la relation (3.21) entraîne que

$$\mathbb{F}\left(p, 0_m, C, A, \boldsymbol{\pi}\left(x_1^o, x_2^o\right)\right) = 0_m, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\boldsymbol{\lambda}_A}$$

De plus, puisqu'il découle des relations (3.26) et (3.27) que

$$\mathbb{F}(p, D, C, A, B) \ \mathcal{L}\left[u\right](p) = C A^{2n-1} B \mathcal{L}\left[u\right](p) = 0_m, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\theta_u} \cap \mathscr{H}_{\lambda_A},$$

on conclut que pour tout $\theta > \theta_u + \lambda_A$,

$$\mathbb{F}\left(p, D, C, A, B\right) \mathcal{L}\left[u\right]\left(p\right) + \mathbb{F}\left(p, 0_m, C, A, \boldsymbol{\pi}\left(x_1^o, x_2^o\right)\right) = 0_m, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\theta}.$$

On conclut grâce au lemme 3.1.6 que le triplet (x_1^o, x_2^o, u) appartient à la zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 .

Ainsi, le théorème 3.2.8 établit que seules les commandes ayant une trajectoire contenue dans le noyau du paramètre de Markov $C A^{2n-1} B$ peuvent générer des sorties $y_1(\cdot, x_1^o, u, 0_{\mathscr{W}_1})$ et $y_2(\cdot, x_2^o, u, 0_{\mathscr{W}_2})$ identiques.



Figure 3.2 – Commandes de la zone d'indiscernabilité : cas $\rho = 2n$

Remarque 3.2.9. Lorsque les commandes du domaine \mathscr{U} ne sont pas Laplace-transformables,

nous avons les mêmes résultats que ceux du théorème 3.2.8. En effet, nous avons prouvé dans l'annexe F que lorsque $\rho = 2n$, on peut résoudre directement l'équation intégrale (3.1) sans utiliser la transformation de Laplace.

3.2.2 Zone d'indiscernabilité : cas $0 \le \rho \le 2n - 1$

Dans ce cas, pour caractériser le zone d'indiscernabilité, nous allons rechercher les solutions homogènes et particulières de l'équation algébrique (3.5). Dans tout ce qui suit, nous adopterons les notations suivantes :

Notation 3.2.10.

- $D = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^1 & \mathbf{D}^2 & \cdots & \mathbf{D}^l \end{bmatrix}$ où $\mathbf{D}^j \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, 2, \dots, l$ sont les colonnes de D.
- $B = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^1 & \mathbf{B}^2 & \cdots & \mathbf{B}^l \end{bmatrix}$ où $\mathbf{B}^j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, \dots, l$ sont les colonnes de B.
- $C = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^\top & \mathbf{C}_2^\top \cdots \mathbf{C}_m^\top \end{bmatrix}^\top$ où $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m$ sont les matrices ligne de C.

Nous savons grâce à la relation (3.20) que deg $(\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B)) = 2n - \rho$. Par conséquent, de la décomposition matricielle suivante de $\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B)$

$$\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B) = \left[\mathbb{F}(\cdot, \mathbf{D}^{1}, C, A, \mathbf{B}^{1}) \quad \mathbb{F}(\cdot, \mathbf{D}^{2}, C, A, \mathbf{B}^{2}) \quad \cdots \quad \mathbb{F}(\cdot, \mathbf{D}^{l}, C, A, \mathbf{B}^{l})\right], \quad (3.29)$$

on obtient

$$\deg\left(\mathbb{F}\left(\cdot, D, C, A, B\right)\right) := \max_{1 \le j \le l} \deg\left(\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{j}, C, A, \mathbf{B}^{j}\right)\right) = 2n - \boldsymbol{\rho}.$$

Dans le lemme suivant, nous allons montrer que le degré de $\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B)$ correspond au degré de ses fonctions composantes $\mathbb{F}(\cdot, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k)$ dont l'indice de colonne k appartient au domaine J défini par la relation (3.30) ci-dessous.

Lemme 3.2.11. Soit $\mathfrak{J} \subseteq \{1, 2, \dots, l\}$ l'ensemble défini par

$$\mathfrak{J} = \begin{cases} \mathfrak{J}_D & si \quad \boldsymbol{\rho} = 0, \\ \mathfrak{J}_{CA^{\boldsymbol{\rho}-1}B} & si \quad 1 \le \boldsymbol{\rho} \le 2n-1, \end{cases}$$
(3.30)

avec $\mathfrak{J}_D = \{j \in \{1, 2, \dots, l\} : \mathbf{D}^j \neq 0_m\}$ et $\mathfrak{J}_{CA^{\rho-1}B} = \{j \in \{1, 2, \dots, l\} : CA^{\rho-1}\mathbf{B}^j \neq 0_m\}$. Si $\rho \neq +\infty$ alors

- (i) pour tout $k \notin \mathfrak{J}$, deg $\left(\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k \right) \right) < 2n \boldsymbol{\rho}$
- (ii) pour tout $k \in \mathfrak{J}$, deg $\left(\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k}\right)\right) = 2n \boldsymbol{\rho}$.

Démonstration. Nous allons considérer le cas où $D \neq 0_{m \times l}$ et le cas où $D = 0_{m \times l}$.

Supposons dans un premier temps que $D \neq 0_{m \times l}$. Alors $\boldsymbol{\rho} = 0$ et d'après la définition de \mathfrak{J} , on a $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_D$. D'après la proposition 3.1.12 qui donne l'expression polynômiale de $\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B)$, on a

$$\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k}\right) = \mathbf{D}^{k} p^{2n} + \sum_{s=1}^{2n} \widehat{\mathrm{K}}_{2n-s}\left(\mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k}\right) p^{2n-s}$$

Ainsi, lorsque $k \notin \mathfrak{J} = \mathfrak{J}_D$, le monôme en p^{2n} de $\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k\right)$ s'annule (car $\mathbf{D}^k = 0_{m \times l}$) et on obtient (*i*). Lorsque $k \in \mathfrak{J} = \mathfrak{J}_D$ on obtient dans ce cas (*ii*) car la condition $\mathbf{D}^k \neq 0_{m \times l}$ entraîne que le monôme en p^{2n} de $\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k\right)$ est non nul.

Supposons maintenant que $D = 0_{m \times l}$. Alors $1 \le \rho \le 2n - 1$ et par définition de \mathfrak{J} on a $\mathfrak{J} = J_{CA^{\rho-1}B}$. D'après la proposition 3.1.18 qui donne la forme polynômiale générale la plus simple possible de $\mathbb{F}(\cdot, 0_{m \times l}, C, A, B)$, on obtient

$$\mathbb{F}\left(p,\mathbf{D}^{k},C,A,\mathbf{B}^{k}\right) = \mathbb{F}\left(p,0_{m},C,A,\mathbf{B}^{k}\right) = C A^{\boldsymbol{\rho}-1} \mathbf{B}^{k} p^{2n-\boldsymbol{\rho}} + \sum_{s=\boldsymbol{\rho}+1}^{2n} \widehat{\mathrm{K}}_{2n-s}\left(0_{m},C,A,\mathbf{B}^{k}\right) p^{2n-s}.$$

Dans ce cas, (i) et (ii) découlent du fait que $C A^{2n-\rho} \mathbf{B}^k = 0_m$ si $k \notin \mathfrak{J}$ et du fait que $C A^{2n-\rho} \mathbf{B}^k \neq 0_m$ si $k \in \mathfrak{J}$.

Lorsque S_1 et S_2 ont la même matrice d'action directe $(D_1 = D_2)$, une interprétation de \mathfrak{J} est qu'il renseigne sur les composantes de la commande u qui apparaissent explicitement dans l'expression de la dérivée d'ordre ρ de la sortie du système augmenté. En effet, on a

$$y^{(\rho)}(t) = C A^{\rho} x(t) + C A^{\rho-1} B u(t) = C A^{\rho} x(t) + \sum_{j \in \mathfrak{J}} C A^{\rho-1} \mathbf{B}^{j} u_{j}(t)$$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du lemme 3.2.11. Il établit une propriété fondamentale du domaine \mathfrak{J} que nous allons utiliser dans cette section pour identifier les solutions homogènes et particulières de (3.5).

Corollaire 3.2.12. Si $\rho \neq +\infty$ et si $\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B)$ est à valeurs dans \mathbb{C} alors pour tout $k \in \mathfrak{J}$ et pour tout $k' \in \{1, 2, \dots, l\}$ la fraction rationnelle $\frac{\mathbb{F}(\cdot, \mathbf{D}^{k'}, C, A, \mathbf{B}^{k'})}{\mathbb{F}(\cdot, \mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k})}$ est bien définie et est propre.

Démonstration. Supposons que $\boldsymbol{\rho} \neq +\infty$ et que $\mathbb{F}(p, D, C, A, B) \in \mathbb{C}$, pour tout $p \in \mathscr{H}_{\boldsymbol{\lambda}_{A}}$. Soient $k \in \mathfrak{J}$ et $k' \in \{1, 2, \dots, l\}$. Comme $\boldsymbol{\rho} \neq +\infty$, la fonction polynômiale $\mathbb{F}(\cdot, \mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k})$ est non nulle et par conséquent la fraction rationnelle $\frac{\mathbb{F}(\cdot, \mathbf{D}^{k'}, C, A, \mathbf{B}^{k'})}{\mathbb{F}(\cdot, \mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k})}$ est bien définie. Elle

est propre car d'après le lemme 3.2.11,

$$\deg\left(\mathbb{F}\left(\cdot,\mathbf{D}^{k'},C,A,\mathbf{B}^{k'}\right)\right) \leq 2n - \boldsymbol{\rho} = \deg\left(\mathbb{F}\left(\cdot,\mathbf{D}^{k},C,A,\mathbf{B}^{k}\right)\right)$$

Avant de déterminer les solutions homogènes et particulières de (3.5), remarquons tout d'abord que les systèmes S_1 et S_2 peuvent être décomposés en systèmes mono-sorties (SISO ou MISO) S_{1k} et S_{2k} , k = 1, 2, ..., m définis par

$$i = 1, 2, S_{ik} \begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \\ y_{ik}(t) = C_{ik} x_i(t) + D_{ik} u(t), \quad k = 1, 2, \dots, m \\ x_i(0) = x_i^o \end{cases}$$

où pour tout i = 1, 2 et pour tout $k = 1, 2, ..., m, C_{ik}$ (resp. D_{ik}) désignent la $k^{\text{ème}}$ ligne de la matrice C_i (resp. D_i); y_{ik} correspond donc à la $k^{\text{ème}}$ sortie du système S_i .

Il découle donc de cette décomposition des systèmes S_1 et S_2 que la zone d'indiscernabilité peut être mise sous la forme suivante :

$$\mathscr{Z}_{\mathrm{ind}}(S_1, S_2) = \bigcap_{k=1}^m \mathscr{Z}_{\mathrm{ind}}(S_{1k}, S_{2k}).$$

où on rappelle que $\mathscr{Z}_{ind}(S_{1k}, S_{2k})$ désigne la zone d'indiscernabilité des systèmes mono-sortie S_{1k} et S_{2k} .

La caractérisation de la zone d'indiscernabilité des systèmes mono-sortie suffit donc pour déterminer la zone d'indiscernabilité des systèmes multi-sortie. Ainsi, sans perte de généralité, nous allons traiter le cas complexe $0 \le \rho \le 2n - 1$ sous l'hypothèse que S_1 et S_2 sont des systèmes mono-sortie (m = 1). Sous cette hypothèse, nous adoptons la notation suivante

Notation 3.2.13.
$$\gamma^{\mathbb{F}} = \max_{1 \le k \le l} \left\{ \Re(p) : p \in \mathscr{H}_{\lambda_A}, \ \mathbb{F}(p, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k) = 0 \right\}.$$

Le nombre $\gamma^{\mathbb{F}}$ représente la plus grande partie réelle des racines des fonctions composantes du polynôme $\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B)$.

Une illustration représentation graphique de $\gamma^{\mathbb{F}}$ est donnée par la figure 3.3 ci-dessous.



Figure 3.3 – Représentation graphique de $\gamma^{\mathbb{F}}$.

Remarque 3.2.14. D'après la définition de $\gamma^{\mathbb{F}}$, les fonctions composantes $\mathbb{F}(\cdot, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k)$ n'admettent pas de racines sur le demi-plan complexe $\mathscr{H}_{\gamma^{\mathbb{F}}}$.

3.2.2.1 Détermination des solutions homogènes

Dans cette sous-section nous déterminons les solutions homogènes de l'équation (3.5). Elles sont données par les théorèmes 3.2.16 et 3.2.18. Le théorème 3.2.16 traite le cas des systèmes SISO et le théorème 3.2.18, le cas des systèmes MISO.

D'après la définition 3.1.7, les solutions homogènes de (3.5) sont les fonctions $\boldsymbol{u}^{\text{hom}} \in \mathscr{U}$ telles que $\mathcal{L}\left[\boldsymbol{u}^{\text{hom}}\right](p)$ appartient au noyau de $\mathbb{F}(p, D, C, A, B)$ pour certaines valeurs appropriées de la variable complexe p. Une caractérisation du noyau de $\mathbb{F}(p, D, C, A, B)$ est donc nécessaire pour pour déterminer les solutions homogènes de (3.5). Le lemme 3.2.15 donne la dimension de l'espace vectoriel Ker ($\mathbb{F}(p, D, C, A, B)$) ainsi qu'une base de cet espace.

Lemme 3.2.15. Soient $j_0 \in \mathfrak{J}$ et $u^{\text{hom}} \in \mathscr{C}^1_{exp}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^l)$, une solution homogène de (3.5). Si $0 \leq \rho \leq 2n-1$ et si m = 1 alors on a :

- (i) $\forall p \in \mathscr{H}_{\gamma^{\mathbb{F}}}, \dim (\operatorname{Ker} (\mathbb{F} (p, D, C, A, B))) = l 1$
- (ii) sil > 1 alors $\forall p \in \mathscr{H}_{\gamma^{\mathbb{F}}}$, Ker $(\mathbb{F}(p, D, C, A, B)) = \operatorname{span}\left\{\widehat{\Psi}_{k}^{j_{0}}(p), k \in \{1, 2, \cdots, l\} \setminus \{j_{0}\}\right\}$ où pour tout $k \in \{1, 2, \dots, l\} \setminus \{j_{0}\}$, les composantes $\widehat{\Psi}_{ki}^{j_{0}}(p), i = 1, 2, \dots, l$ du vecteur

 $\Psi_{k}^{j_{0}}\left(p
ight)\in\mathbb{R}^{l}$ sont définies par

$$\widehat{\Psi}_{k\,i}^{j_{0}}(p) = \begin{cases}
1 & si \quad i = k, \\
-\frac{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k}\right)}{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j_{0}}, C, A, \mathbf{B}^{j_{0}}\right)} & si \quad i = j_{0}, \\
0 & si \quad i \neq k \text{ et } i \neq j_{0}.
\end{cases}$$
(3.31)

(iii) Si l > 1 alors il existe $\theta_1 > \theta_{u^{\text{hom}}} + \lambda_A$ tel que

$$\mathcal{L}\left[\boldsymbol{u}^{\text{hom}}\right](p) = \sum_{1 \le j_0 \ne k \le l} \mathcal{L}\left[\boldsymbol{u}_k^{\text{hom}}\right](p) \ \widehat{\Psi}_k^{j_0}(p), \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\theta_1} \cap \mathscr{H}_{\gamma^{\mathbb{F}}}.$$
(3.32)

où pour tout k = 1, 2, ..., l, $\boldsymbol{u}_k^{\text{hom}}$ désigne la $k^{i \grave{e} m e}$ fonction composante de $\boldsymbol{u}^{\text{hom}}$.

Démonstration. Soit $j_0 \in \mathfrak{J}$ et soit $\boldsymbol{u}^{\text{hom}} \in \mathscr{C}^1_{\exp}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^l)$, une solution homogène de (3.5). Supposons que $0 \leq \boldsymbol{\rho} \leq 2n-1$ et que m = 1.

(i) Soit $p \in \mathscr{H}_{\gamma^{\mathbb{F}}}$. Puisque $m = 1, \mathbb{F}(p, D, C, A, B) \in \mathbb{R}^{1 \times l}$ et il s'ensuit que

$$\dim \left(\operatorname{Ker} \left(\mathbb{F} \left(p, D, C, A, B \right) \right) \right) = l - \operatorname{rang} \left(\mathbb{F} \left(p, D, C, A, B \right) \right).$$

De plus, rang $(\mathbb{F}(p, D, C, A, B)) = 1$ car $\mathbb{F}(p, D, C, A, B) \in \mathbb{R}^{1 \times l}$ et $\mathbb{F}(p, D, C, A, B)$ est non nul (voir remarque 3.2.14). D'où on obtient (*i*).

(*ii*) Supposons que l > 1 et soit $p \in \mathscr{H}_{\gamma^{\mathbb{F}}}$. Puisque dim (Ker ($\mathbb{F}(p, D, C, A, B)$)) = l - 1, pour montrer que les l - 1 vecteurs $\widehat{\Psi}_{k}^{j_{0}}(p)$, $k \in \{1, 2, \ldots, l\} \setminus \{j_{0}\}$ engendrent le noyau de $\mathbb{F}(p, D, C, A, B)$, nous allons prouver qu'ils appartiennent tous à Ker ($\mathbb{F}(p, D, C, A, B)$) et qu'ils sont linéairement indépendants. Soit $k \in \{1, 2, \ldots, l\} \setminus \{j_{0}\}$. On déduit de la décomposition matricielle (3.29) de $\mathbb{F}(p, D, C, A, B)$ et de la définition (3.31) de $\widehat{\Psi}_{k}^{j_{0}}(p)$ que

$$\mathbb{F}(p, D, C, A, B) \ \widehat{\Psi}_{k}^{j_{0}}(p) = \sum_{i=1}^{l} \mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{i}, C, A, \mathbf{B}^{i}\right) \ \widehat{\Psi}_{ki}^{j_{0}}(p)$$

$$= \mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k}\right) - \mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j_{0}}, C, A, \mathbf{B}^{j_{0}}\right) \ \frac{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k}\right)}{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j_{0}}, C, A, \mathbf{B}^{j_{0}}\right)}$$

$$= 0.$$

Ceci prouve que $\widehat{\Psi}_{k}^{j_{0}}(p) \in \text{Ker}(\mathbb{F}(p, D, C, A, B))$. Montrons maintenant que les vecteurs $\widehat{\Psi}_{k_{1}}^{j_{0}}(p), \widehat{\Psi}_{k_{2}}^{j_{0}}(p), \ldots, \widehat{\Psi}_{k_{l-1}}^{j_{0}}(p), k_{i} \neq k_{j} \text{ et } k_{i} \in \{1, 2, \ldots, l\} \setminus \{j_{0}\}$ sont linéairement indé-

pendants. Soient $\beta_{k_1}, \beta_{k_2}, \dots, \beta_{k_{l-1}}$ des nombres réels tels que

$$\sum_{j=1}^{l-1} \beta_{k_j} \,\widehat{\Psi}_{k_j}^{j_0}\left(p\right) = 0_l.$$

Alors pour tout i = 1, 2, ..., l - 1,

$$\sum_{j=1}^{l-1} \beta_{k_j} \,\widehat{\Psi}_{k_j \,k_i}^{j_0}\left(p\right) = \beta_{k_i} \,\widehat{\Psi}_{k_i \,k_i}^{j_0}\left(p\right) = \beta_{k_i} = 0.$$

D'où les vecteurs $\widehat{\Psi}_{k_1}^{j_0}(p)$, $\widehat{\Psi}_{k_2}^{j_0}(p)$, ..., $\widehat{\Psi}_{k_{l-1}}^{j_0}(p)$ sont linéairement indépendants. Ceci achève la preuve de (ii).

(*iii*) Supposons que l > 1. Puisque u^{hom} est une solution homogène de (3.5), il existe $\theta_1 > \theta_{u^{\text{hom}}} + \lambda_A$ tel que

$$\mathcal{L}\left[\boldsymbol{u}^{\text{hom}}\right](p) \in \text{Ker}\left(\mathbb{F}\left(p, D, C, A, B\right)\right), \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\theta_1}$$

Par conséquent, on déduit du point (*ii*) que pour tout $p \in \mathscr{H}_{\theta_1} \cap \mathscr{H}_{\gamma^{\mathbb{F}}}$, il existe des nombres réels $v_k(p), k \in \{1, 2, ..., l\} \setminus \{j_0\}$ tels que

$$\mathcal{L}\left[\boldsymbol{u}^{\text{hom}}\right](p) = \sum_{1 \le j_0 \ne k \le l} v_k\left(p\right) \, \widehat{\Psi}_k^{j_0}\left(p\right)$$

Pour conclure, remarquons que la décomposition précédente de $\mathcal{L}\left[\boldsymbol{u}^{\text{hom}}\right](p)$ implique que

$$\mathcal{L}\left[\boldsymbol{u}_{i}^{\text{hom}}\right](p) = \sum_{1 \le j_{0} \ne k \le l} v_{k}(p) \ \widehat{\Psi}_{ki}^{j_{0}}(p) = v_{i}(p) \ \widehat{\Psi}_{ii}^{j_{0}}(p) = v_{i}(p), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, l\} \setminus \{j_{0}\}.$$

D'où on obtient l'égalité (3.32).

Grâce au résultat du lemme 3.2.15 nous montrons le théorème 3.2.16 ci-dessous qui établit que lorsque S_1 et S_2 sont des systèmes SISO, la solution triviale est l'unique solution homogène de (3.5).

Théorème 3.2.16. Si $0 \le \rho \le 2n - 1$ et si l = 1 = m alors toute solution homogène de (3.5) est nulle.

Démonstration. Supposons que $0 \leq \rho \leq 2n-1$ et que l = 1 = m. Soit u^{hom} une solution

homogène de (3.5). Alors il existe $\theta_1 > \theta_{\boldsymbol{u}^{\text{hom}}} + \boldsymbol{\lambda}_A$ tel que pour tout $p \in \mathscr{H}_{\theta_1}, \mathcal{L}[\boldsymbol{u}^{\text{hom}}](p) \in \text{Ker}(\mathbb{F}(p, D, C, A, B))$. Il s'ensuit que

$$\mathcal{L}\left[\boldsymbol{u}^{\mathrm{hom}}\right](p) = 0, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\theta_1} \cap \mathscr{H}_{\gamma^{\mathbb{F}}}$$

car d'après le lemme 3.2.15-(i), on a dim (Ker ($\mathbb{F}(p, D, C, A, B)$)) = l - 1 = 0. On conclut grâce au théorème de Lerch que u^{hom} est identiquement nulle sur \mathbb{R}_+ .

Pour montrer le théorème 3.2.18 qui caractérise les solutions homogènes de (3.5) lorsque S_1 et S_2 sont des systèmes MISO, en plus du lemme (3.2.15) nous utilisons le résultat suivant :

Lemme 3.2.17. Soient ϑ_1 et ϑ_2 deux fonctions polynomiales à coefficients réels telles que ϑ_2 est non identiquement nulle sur \mathbb{C} et deg $(\vartheta_1) \leq \deg(\vartheta_2)$. Alors la fraction rationnelle propre φ définie par

$$\varphi(p) = \frac{\vartheta_1(p)}{\vartheta_2(p)}, \quad p \in \mathbb{C}$$

admet une transformée de Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1}[\varphi]$ qui possède les propriétés suivantes :

- (i) Si φ est strictement propre c'est-à-dire si deg $(\vartheta_1) < \deg(\vartheta_2)$ alors $\mathcal{L}^{-1}[\varphi] \in \mathscr{C}^1_{exp}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}).$
- (ii) Pour tout $\omega \in \mathscr{C}^{1}_{exp}(\mathbb{R}_{+},\mathbb{R}), \ \omega * \mathcal{L}^{-1}[\varphi] \in \mathscr{C}^{1}_{exp}(\mathbb{R}_{+},\mathbb{R}) \ avec$

$$\omega * \mathcal{L}^{-1}[\varphi](t) = \int_0^t \omega(t-\tau) \mathcal{L}^{-1}[\varphi](\tau) \, \mathrm{d}\tau.$$

Démonstration. Voir annexe G

Nous allons maintenant déterminer l'expression des solutions homogènes u^{hom} lorsque S_1 et S_2 sont MISO.

Théorème 3.2.18. Soit $j_0 \in \mathfrak{J}$ et soit $u^{\text{hom}} \in \mathscr{U}$. Si l > 1, m = 1 et si $0 \le \rho \le 2n - 1$ alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) u^{hom} est une solution homogène de l'équation (3.5).
- (ii) Il existe l-1 fonctions $\omega_k \in \mathscr{C}^1_{exp}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}), k \in \{1,2,\ldots,l\} \setminus \{j_0\}$ telles que

$$\boldsymbol{u}_{k}^{\text{hom}}\left(t\right) = \omega_{k}, \quad k \in \left\{1, 2, \dots, l\right\} \setminus \left\{j_{0}\right\}$$

$$(3.33)$$

et

$$\boldsymbol{u}_{j_{0}}^{\text{hom}}\left(t\right) = -\sum_{j_{0}\neq k=1}^{l} \omega_{k} \ast \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k}\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{j_{0}}, C, A, \mathbf{B}^{j_{0}}\right)}\right)$$
(3.34)

où pour tout $k \in \{1, 2, ..., l\}$, u_k^{hom} désigne la $k^{i \grave{e}m e}$ fonction composante de u^{hom}
Démonstration. Supposons que $0 \le \rho \le 2n - 1$ et que l > 1 = m. Soit $j_0 \in \mathfrak{J}$.

(i) \implies (ii) : Supposons que u^{hom} est une solution homogène de l'équation (3.5). D'après le lemme 3.2.15, il existe $\theta_1 > \theta_{u^{\text{hom}}} + \lambda_A$ tel que pour tout $p \in \mathscr{H}_{\theta_1} \cap \mathscr{H}_{\gamma^{\mathbb{F}}}$,

$$\mathcal{L}\left[\boldsymbol{u}_{j_{0}}^{\mathrm{hom}}\right](p) = \sum_{1 \leq j_{0} \neq k \leq l} \mathcal{L}\left[\boldsymbol{u}_{k}^{\mathrm{hom}}\right](p) \ \widehat{\Psi}_{k j_{0}}(p) = -\sum_{1 \leq j_{0} \neq k \leq l} \mathcal{L}\left[\boldsymbol{u}_{k}^{\mathrm{hom}}\right](p) \ \frac{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k}\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{j_{0}}, C, A, \mathbf{B}^{j_{0}}\right)}$$
(3.35)
Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, l\} \setminus \{j_{0}\}$ puisque la fraction rationnelle $\frac{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k}\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{j_{0}}, C, A, \mathbf{B}^{j_{0}}\right)}$ est propre (voir lemme 3.2.11) et puisque $u_{k} \in \mathscr{C}_{\exp}^{1}(\mathbb{R}_{+}, \mathbb{R})$, on a

 $\boldsymbol{u}_{k}^{\text{hom}} \ast \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k}\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{j_{0}}, C, A, \mathbf{B}^{j_{0}}\right)} \right] \in \mathscr{C}_{\exp}^{1}\left(\mathbb{R}_{+}, \mathbb{R}\right), \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, l\} \setminus \{j_{0}\},$

ce qui implique que

$$\sum_{j_0 \neq k=1}^{l} \boldsymbol{u}_k^{\text{hom}} \ast \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{j_0}, C, A, \mathbf{B}^{j_0}\right)} \right] \in \mathscr{C}_{\exp}^1\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\right).$$
(3.36)

Grâce à la linéarité de l'opérateur $\mathcal{L} [\cdot]$ et grâce à la formule de la transformée de Laplace de la convolution de fonctions, on obtient :

$$\mathcal{L}\left[\sum_{j_0\neq k=1}^{l} \boldsymbol{u}_k^{\text{hom}} \ast \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{j_0}, C, A, \mathbf{B}^{j_0}\right)}\right]\right] = \sum_{j_0\neq k=1}^{l} \mathcal{L}\left[\boldsymbol{u}_k^{\text{hom}}\right] \frac{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{j_0}, C, A, \mathbf{B}^{j_0}\right)}$$
(3.37)

D'après le théorème de Lerch, (3.35), (3.36) et (3.37) impliquent que

$$\boldsymbol{u}_{j_0}^{\mathbf{hom}} = -\sum_{j_0 \neq k=1}^{l} \boldsymbol{u}_k^{\mathbf{hom}} * \mathcal{L}^{-1} \left[rac{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k
ight)}{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{j_0}, C, A, \mathbf{B}^{j_0}
ight)}
ight].$$

Pour conclure, il suffit de poser $\omega_k = \boldsymbol{u}_k^{\text{hom}}, k \in \{1, 2, \dots, l\} \setminus \{j_0\}.$

 $(ii) \implies (i)$: Supposons qu'il existe des fonctions $\omega_k \in \mathscr{C}^1_{\exp}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), k \in \{1, 2, \dots, l\} \setminus \{j_0\}$ qui satisfont les conditions (3.33) et (3.34). Appliquons la transformée de Laplace aux égalités (3.33) et (3.34). On obtient les deux relations suivantes

$$\mathcal{L}\left[\boldsymbol{u}_{k}^{\text{hom}}\right](p) = \mathcal{L}\left[\omega_{k}\right](p), \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{u}^{\text{hom}}}} \text{ et } \forall k \in \{1, 2, \dots, l\} \setminus \{j_{0}\}$$

 et

$$\mathcal{L}\left[\boldsymbol{u}_{j_{0}}^{\mathbf{hom}}\right](p) = -\sum_{j_{0} \neq k=1}^{l} \mathcal{L}\left[\omega_{k}\right](p) \ \frac{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k}\right)}{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j_{0}}, C, A, \mathbf{B}^{j_{0}}\right)}, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{u}}\mathbf{hom}}$$

Ces deux relations impliquent que pour tout $p \in \mathscr{H}_{\theta_{u^{\text{hom}}}}$, la relation (3.35) est vraie. En multipliant maintenant (3.35) par $\mathbb{F}(p, \mathbf{D}^{j_0}, C, A, \mathbf{B}^{j_0})$, il vient que

$$\mathbb{F}(p, D, C, A, B) \ \mathcal{L}\left[\boldsymbol{u}^{\text{hom}}\right](p) = 0, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{u}^{\text{hom}}}}.$$

D'où u^{hom} est une solution homogène de l'équation (3.5).

Remarque 3.2.19. D'après les expressions (3.33) et (3.34) des composantes u_k^{hom} de u^{hom} , on a

$$\boldsymbol{u}^{\text{hom}} = \sum_{1 \le j_0 \ne k \le l} \omega_k * \mathcal{L}^{-1} \left[\widehat{\Psi}_k^{j_0} \right].$$
(3.38)

La formule de \mathbf{u}^{hom} dépend donc du choix de la base $\left(\widehat{\Psi}_{k}^{j_{0}}\right)_{1\leq j_{0}\neq k\leq l}$ de Ker $(\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B))$. Cependant, pour tout $j'_{0} \in \mathfrak{J}$ tel que $j'_{0} \neq j_{0}$, on peut passer de la base $\left(\widehat{\Psi}_{k}^{j_{0}}\right)_{1\leq j_{0}\neq k\leq l}$ à la base $\left(\widehat{\Psi}_{k}^{j'_{0}}\right)_{1\leq j'_{0}\neq k\leq l}$ grâce à la relation (3.39) suivante dont la preuve est donnée dans l'annexe H.

$$k \in \{1, 2, \dots, l\} \setminus \{j_0\}, \quad \widehat{\Psi}_k^{j_0} = \begin{cases} \widehat{\Psi}_k^{j_0'} - \frac{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{j_0'}, C, A, \mathbf{B}^{j_0}\right)} \widehat{\Psi}_{j_0}^{j_0'} & si \quad k \neq j_0', \\ -\frac{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{j_0'}, C, A, \mathbf{B}^{j_0'}\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{j_0}, C, A, \mathbf{B}^{j_0}\right)} \widehat{\Psi}_{j_0}^{j_0'} & si \quad k = j_0'. \end{cases}$$
(3.39)

Ainsi, pour tout $j'_0 \neq j_0$, la relation (3.38) est équivalente à

$$\boldsymbol{u^{\text{hom}}} = \sum_{1 \le j'_0 \ne k \le 1} \omega_k \ast \mathcal{L}^{-1} \left[\widehat{\Psi}_k^{j'_0} \right] - \sum_{1 \le j_0 \ne k \le l} \omega_k \ast \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\mathbb{F} \left(\cdot, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k \right)}{\mathbb{F} \left(\cdot, \mathbf{D}^{j_0}, C, A, \mathbf{B}^{j_0} \right)} \widehat{\Psi}_{j_0}^{j'_0} \right].$$

Exemple 3.2.20. Soient S_1 et S_2 les systèmes linéaires définis par les matrices suivantes :

$$A_{1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} ; B_{2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; C_{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} ; D_{1} = 0$$
$$A_{2} = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} ; B_{2} = B_{1} ; C_{2} = C_{1} ; D_{2} = D_{1}.$$

Les paramètres de Markov du système augmenté S associé à S_1 et S_2 sont

$$D = 0 ; CB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} ; CAB = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} ; CA^2B = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & 5 \end{bmatrix} ; CA^3B = \begin{bmatrix} \frac{41}{8} & \frac{-31}{2} \end{bmatrix}.$$

L'indice de similarité de S_1 et S_2 est alors $\boldsymbol{\rho} = 2$. La première colonne de CAB étant non nulle, on a $\mathfrak{J} = \{1\}$. On a det $(pI_4 - A) = p^4 + \frac{11}{2}p^3 + \frac{17}{2}p^2 + 2p - 2$. Par conséquent, $\alpha_0 = -2$, $\alpha_1 = 2, \ \alpha_2 = \frac{17}{2}$ et $\alpha_3 = \frac{11}{2}$. Par application de de la formule (3.19) de calcul des coefficients $\widehat{K}_{4-s}(D, C, A, B), \ s = 2, 3, 4$ de $\mathbb{F}(\cdot, D, C, A, B)$, on obtient

$$\widehat{\mathbf{K}}_{2}(D, C, A, B) = C A B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} ; \ \widehat{\mathbf{K}}_{1}(D, C, A, B) = \alpha_{3} C A B + C A^{2} B = \begin{bmatrix} -4 & 5 \end{bmatrix}$$

et

$$\widehat{K}_{0}(D, C, A, B) = \alpha_{2} C A B + \alpha_{3} C A^{2} B + C A^{3} B = \begin{bmatrix} -6 & 10 \end{bmatrix}$$

Il s'ensuit que $\mathbb{F}(p, \mathbf{D}^1, C, A, \mathbf{B}^1) = -\frac{1}{2}p^2 - 4p - 6 = -\frac{1}{2}(p+2)(p+6)$ et $\mathbb{F}(p, \mathbf{D}^2, C, A, \mathbf{B}^2) = 5p + 10$. Ainsi, on obtient

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbb{F}\left(\cdot,\mathbf{D}^{2},C,A,\mathbf{B}^{2}\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot,\mathbf{D}^{1},C,A,\mathbf{B}^{1}\right)}\right] = -10 \,\mathrm{e}^{-6 \,t}$$

et on conclut que les solutions homogènes u^{hom} de (3.5) sont de la forme

$$\boldsymbol{u^{\text{hom}}}\left(t\right) = \begin{bmatrix} 10 \ \int_{0}^{t} \widehat{\omega}\left(\tau\right) \ e^{-6\left(t-\tau\right)} \, \mathrm{d}\tau \\ \widehat{\omega}\left(t\right) \end{bmatrix}, \quad \widehat{\omega} \in \mathscr{C}_{exp}^{1}\left(\mathbb{R}_{+}, \mathbb{R}\right).$$

3.2.2.2 Détermination d'une solution particulière

Pour déterminer la fonction u^{par} génératrice de solutions particulières de (3.5), nous allons d'abord montrer les lemmes 3.2.21 et 3.2.22 suivants.

Lemme 3.2.21. Supposons que m = 1. Soit $j \in \mathfrak{J}$ et soit $\Upsilon(\cdot, \mathbf{D}^j, C, A, \mathbf{B}^j, x_1^o, x_2^o)$ la fraction rationnelle définie par

$$\Upsilon\left(p, \mathbf{D}^{j}, C, A, \mathbf{B}^{j}, x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right) = \frac{\mathbb{F}\left(p, 0, C, A, \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right)\right)}{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j}, C, A, \mathbf{B}^{j}\right)}.$$
(3.40)

La fraction rationnelle $\Upsilon(\cdot, \mathbf{D}^{j}, C, A, \mathbf{B}^{j}, x_{1}^{o}, x_{2}^{o})$ possède les deux propriétés suivantes :

(i) Si $\rho = 0$ alors pour tout $(x_1^o, x_2^o) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\Upsilon(\cdot, \mathbf{D}^j, C, A, \mathbf{B}^j, x_1^o, x_2^o)$ est strictement

propre. (ii) $Si \ 1 \le \boldsymbol{\rho} \le 2n-1 \ alors \ \Upsilon(\cdot, \mathbf{D}^j, C, A, \mathbf{B}^j, x_1^o, x_2^o) \ est \ strictement \ propre \ si \ est \ seulement$ $\begin{bmatrix} x_1^o \\ x_2^o \end{bmatrix} \quad (-1)$

$$\begin{bmatrix} x_1^o \\ x_2^o \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker} \left(\mathbb{O}^{[\rho-1]} \right)$$
(3.41)

Démonstration. Supposons que m = 1 et soit $j \in \mathfrak{J}$.

(i) Supposons que $\boldsymbol{\rho} = 0$ et soit $(x_1^o, x_2^o) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. D'après le lemme 3.2.11, on a deg $(\mathbb{F}(p, \mathbf{D}^j, C, A, \mathbf{B}^j)) = 2n$. De plus, d'après la proposition 3.1.11, la formule explicite de $\mathbb{F}(\cdot, 0, C, A, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o))$ est

$$\mathbb{F}(p, 0, C, A, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o)) = \sum_{s=1}^{2n} \widehat{K}_{2n-s}(0, C, A, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o)) \ p^{2n-s}.$$
 (3.42)

Ceci implique que deg $(\mathbb{F}(\cdot, 0, C, A, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o))) \leq 2n - 1$. Ainsi, on vient de prouver que deg $(\mathbb{F}(\cdot, 0, C, A, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o))) < \deg(\mathbb{F}(p, \mathbf{D}^j, C, A, \mathbf{B}^j))$. D'où $\Upsilon(\cdot, \mathbf{D}^j, C, A, \mathbf{B}^j, x_1^o, x_2^o)$ est strictement propre.

(*ii*) Supposons que $1 \le \rho \le 2n-1$. D'après le lemme 3.2.11, on a deg ($\mathbb{F}(\cdot, \mathbf{D}^{j}, C, A, \mathbf{B}^{j})$) = $2n - \rho$. Il s'ensuit que $\Upsilon(\cdot, \mathbf{D}^{j}, C, A, \mathbf{B}^{j}, x_{1}^{o}, x_{2}^{o})$ est strictement propre si et seulement si

$$\deg\left(\mathbb{F}\left(\cdot, 0, C, A, \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right)\right)\right) \le 2n - \boldsymbol{\rho} - 1 = 2n - (\boldsymbol{\rho} + 1)$$
(3.43)

Nous allons montrer que les relations (3.41) et (3.43) sont équivalentes. D'après la formule (3.42) de $\mathbb{F}(\cdot, 0, C, A, \pi(x_1^o, x_2^o))$, la relation (3.43) est équivalente à

$$\widehat{K}_{2n-s}(0, C, A, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o)) = 0, \quad \forall s = 0, 1, \dots, \boldsymbol{\rho}.$$
(3.44)

De plus, d'après la proposition 3.1.12, la relation (3.44) est équivalente à

$$C A^{s} \boldsymbol{\pi} (x_{1}^{o}, x_{2}^{o}) = 0, \quad \forall s = 0, 1, \dots, \boldsymbol{\rho} - 1.$$

D'où l'équivalence entre (3.41) et (3.43). Ceci achève notre preuve.

Le lemme suivant montre que la fonction u^{par} définie par (3.45) est une fonction candidate génératrice de solutions particulières. La preuve de ce résultat repose sur le lemme 3.2.21.

Lemme 3.2.22. Supposons que $0 \leq \rho \leq 2n-1$ et que m = 1. Soit $u^{par} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow$

 $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^l)$, la fonction dont les fonctions composantes u_j^{par} , j = 1, 2, ..., l sont définies par

$$\boldsymbol{u}_{j}^{\mathbf{par}}\left[\boldsymbol{x}_{1}^{o},\boldsymbol{x}_{2}^{o}\right] = \begin{cases} 0 & si \quad j \notin \mathfrak{J}, \\ -\frac{1}{\operatorname{card}\left(\mathfrak{J}\right)} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbb{F}\left(\cdot,0,C,A,\boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{x}_{1}^{o},\boldsymbol{x}_{2}^{o}\right)\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot,\mathbf{D}^{j},C,A,\mathbf{B}^{j}\right)}\right] & si \quad j \in \mathfrak{J}. \end{cases}$$
(3.45)

Alors u^{par} possède les propriétés suivantes

(i) Si $\boldsymbol{\rho} = 0$ alors pour tout $(x_1^o, x_2^o) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u}^{\text{par}}[x_1^o, x_2^o] \in \mathscr{U}$ et $\mathcal{L}[\boldsymbol{u}^{\text{par}}[x_1^o, x_2^o]]$ vérifie

$$\mathbb{F}(p, D, C, A, B) \mathcal{L}[\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}[x_1^o, x_2^o]] + \mathbb{F}(p, 0, C, A, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o)) = 0, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\gamma^{\mathbb{F}}}.$$
 (3.46)

(ii) Si $1 \leq \boldsymbol{\rho} \leq 2n-1$ alors $\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}[x_1^o, x_2^o] \in \mathscr{U}$ si et seulement si (x_1^o, x_2^o) vérifie (3.41). De plus, pour tout les couples (x_1^o, x_2^o) qui satisfont la condition (3.41), $\mathcal{L}[\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}[x_1^o, x_2^o]]$ vérifie l'équation (3.46).

Démonstration. Supposons que $0 \le \rho \le 2n - 1$ et que m = 1.

(i) Supposons que $\boldsymbol{\rho} = 0$ et soit $(x_1^o, x_2^o) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. D'après le lemme 3.2.21-(i), la fraction rationnelle $\frac{\mathbb{F}(\cdot, 0, C, A, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o))}{\mathbb{F}(\cdot, \mathbf{D}^j, C, A, \mathbf{B}^j)} = \Upsilon(\cdot, \mathbf{D}^j, C, A, \mathbf{B}^j)$ est strictement propre pour tout $j \in \mathfrak{J}$. Par conséquent, on déduit du lemme 3.2.17-(i) que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbb{F}\left(\cdot,0,C,A,\boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o},x_{2}^{o}\right)\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot,\mathbf{D}^{j},C,A,\mathbf{B}^{j}\right)}\right] \in \mathscr{C}_{\exp}^{1}\left(\mathbb{R}_{+},\mathbb{R}\right), \quad \forall j \in \mathfrak{J},$$

et ceci implique que $\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}[x_1^o, x_2^o] \in \mathscr{U}$. D'après la définition de $\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}[x_1^o, x_2^o]$, on a

$$\forall p \in \mathscr{H}_{\gamma^{\mathbb{F}}}, \quad \mathcal{L}\left[\boldsymbol{u}_{j}^{\mathbf{par}}\left(\boldsymbol{x}_{1}^{o}, \boldsymbol{x}_{2}^{o}\right)\right]\left(p\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \notin \mathfrak{J}, \\ -\frac{1}{\operatorname{card}\left(\mathfrak{J}\right)} \frac{\mathbb{F}\left(p, 0, C, A, \boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{x}_{1}^{o}, \boldsymbol{x}_{2}^{o}\right)\right)}{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j}, C, A, \mathbf{B}^{j}\right)} & \text{si} \quad j \in \mathfrak{J}. \end{cases}$$

On en déduit que pour tout $p \in \mathscr{H}_{\gamma^{\mathbb{F}}}$,

$$\begin{split} \mathbb{F}\left(p, D, C, A, B\right) \,\mathcal{L}\left[\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}\left[\boldsymbol{x}^{o}_{1}, \boldsymbol{x}^{o}_{2}\right]\right](p) &= \sum_{j \in \mathfrak{J}} \mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j}, C, A, \mathbf{B}^{j}\right) \,\mathcal{L}\left[\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}_{j}\left(\boldsymbol{x}^{o}_{1}, \boldsymbol{x}^{o}_{2}\right)\right][p] \\ &= -\mathbb{F}\left(p, 0, C, A, \boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{x}^{o}_{1}, \boldsymbol{x}^{o}_{2}\right)\right). \end{split}$$

D'où on obtient la relation (3.46).

(*ii*) La preuve du point (*ii*) est analogue à celle de (*i*). Ici, pour montrer que la condition (3.41) est une condition nécessaire et suffisante pour que $\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}(x_i^o, x_2^o) \in \mathscr{U}$ on utilisera le lemme 3.2.21-(ii) et le lemme 3.2.17-(i).

Ainsi, lorsque $\boldsymbol{\rho} = 0$, la fonction $\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}$ est à valeurs dans \mathscr{U} et elle vérifie l'équation algébrique linéaire (3.5). Ces deux propriétés de $\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}$ suffisent dans le cas $\boldsymbol{\rho} = 0$ pour conclure qu'elle est une fonction génératrice de solutions particulières de (3.5). En effet, d'après la définition pour conclure que $\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}$ est une fonction génératrice de solutions particulières il faut prouver que sa restriction sur $\mathscr{X}^{o}_{ind}(S_1, S_2)$ vérifie l'équation algébrique linéaire (3.5) c'est-à-dire $\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}[x_1^o, x_2^o]$ vérifie l'équation algébrique linéaire (3.5) pour tout $(x_1^o, x_2^o) \in \mathscr{X}^{o}_{ind}(S_1, S_2)$. Cette propriété est satisfaite par $\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}$ car d'après le lemme 3.2.22-(i), $\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}[x_1^o, x_2^o]$ vérifie (3.5) pour tout $(x_1^o, x_2^o) \in$ $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $\mathscr{X}^{o}_{ind}(S_1, S_2)$ est par définition un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Ainsi, nous avons le résultat suivant

Théorème 3.2.23. Si $\rho = 0$ et si m = 1 alors la fonction u^{par} définie par la relation (3.45) est une fonction génératrice de solutions particulières de l'équation linéaire (3.5).

Comme nous venons de le mentionner, le domaine $\mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$ est par définition un sousensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Le résultat suivant montre que dans le cas $\rho = 0$, il est égal à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tout entier.

Théorème 3.2.24. Si m = 1 et si $\boldsymbol{\rho} = 0$ alors $\mathscr{X}_{ind}^{o}(S_1, S_2) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Démonstration. Supposons que m = 1 et que $\boldsymbol{\rho} = 0$. Puisque $\mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$ est par définition un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, nous allons juste prouver que $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$. Soit $(x_1^o, x_2^o) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Considérons la commande u définie par $u = \boldsymbol{u}^{\text{par}}[x_1^o, x_2^o]$ où $\boldsymbol{u}^{\text{par}}$ est la fonction génératrice définie par (3.45). D'après le lemme $3.2.22, x_1^o, x_2^o$ et u vérifient l'équation (3.5). On conclut grâce au lemme 3.1.6 que $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{X}_{ind}(S_1, S_2)$. D'où $(x_1^o, x_2^o) \in \mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$.

Lorsque $1 \leq \boldsymbol{\rho} \leq 2n-1$, il découle du lemme 3.2.22-(ii) que la restriction de la fonction $\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}$ sur $\left\{ (x_1^o, x_2^o) : \boldsymbol{\pi} (x_1^o, x_2^o) \in \operatorname{Ker} \left(\mathbb{O}^{[\boldsymbol{\rho}-1]} \right) \right\}$ est à valeurs dans \mathscr{U} et elle vérifie l'équation linéaire (3.5). Pour conclure que $\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}$ est une fonction génératrice de solutions particulières, il suffit de montrer que $\mathscr{X}_{\operatorname{ind}}^o(S_1, S_2)$ est un sous-ensemble de $\left\{ (x_1^o, x_2^o) : \boldsymbol{\pi} (x_1^o, x_2^o) \in \operatorname{Ker} \left(\mathbb{O}^{[\boldsymbol{\rho}-1]} \right) \right\}$. Le théorème suivant montre que ces deux ensembles sont égaux.

Théorème 3.2.25. Si m = 1 et si $1 \le \rho \le 2n - 1$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $(x_1^o, x_2^o) \in \mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2).$
- (ii) x_1^o et x_2^o vérifient la condition (3.41).

Démonstration.

(i) \implies (ii) Supposons que $(x_1^o, x_2^o) \in \mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$. Alors il existe une commande $u \in \mathscr{U}$ et il existe $\theta > \theta_u + \lambda_A$ tel que

$$\mathbb{F}\left(p, D, C, A, B\right) \mathcal{L}\left[u\right]\left(p\right) + \mathbb{F}\left(p, 0, C, A, \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right)\right) = 0, \quad \forall p \in \mathscr{H}_{\theta}.$$

Soit $j \in \mathfrak{J}$. Le polynôme $\mathbb{F}(\cdot, \mathbf{D}^j, C, A, \mathbf{B}^j)$ étant non nul sur $\mathscr{H}_{\gamma^{\mathbb{F}}}$, pour tout $p \in \mathscr{H}_{\theta} \cap \mathscr{H}_{\gamma^{\mathbb{F}}}$ on obtient

$$-\sum_{1\leq j\neq k\leq l}\frac{\mathbb{F}\left(p,\mathbf{D}^{k},C,A,\mathbf{B}^{k}\right)}{\mathbb{F}\left(p,\mathbf{D}^{j},C,A,\mathbf{B}^{j}\right)}\mathcal{L}\left[u_{k}\right]\left(p\right)-\mathcal{L}\left[u_{j}\right]\left(p\right)=\frac{\mathbb{F}\left(p,0,C,A,\boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o},x_{2}^{o}\right)\right)}{\mathbb{F}\left(p,\mathbf{D}^{j},C,A,\mathbf{B}^{j}\right)},$$

et ceci est équivalent à

$$\mathcal{L}\left[\sum_{1\leq j\neq k\leq l} u_k * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^j, C, A, \mathbf{B}^j\right)}\right] - u_j\right] = \frac{\mathbb{F}\left(p, 0, C, A, \boldsymbol{\pi}\left(x_1^o, x_2^o\right)\right)}{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^j, C, A, \mathbf{B}^j\right)}.$$
 (3.47)

D'autre part, d'après le lemme 3.2.11, la fraction rationnelle $\frac{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k}\right)}{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j}, C, A, \mathbf{B}^{j}\right)} \text{ est propre pour tout } k \in \{1, 2, \dots, l\} \setminus \{j\} \text{ et grâce au lemme 3.2.17, on obtient}$

$$-\sum_{1\leq j\neq k\leq l}u_{k}*\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbb{F}\left(\cdot,\mathbf{D}^{k},C,A,\mathbf{B}^{k}\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot,\mathbf{D}^{j},C,A,\mathbf{B}^{j}\right)}\right]-u_{j}\in\mathscr{C}_{\exp}^{1}\left(\mathbb{R}_{+},\mathbb{R}\right).$$

Par conséquent, en multipliant la relation (3.47) par $p \in \mathscr{H}_{\theta} \cap \mathscr{H}_{\gamma^{\mathbb{F}}} \cap \mathbb{R}$ puis en faisant tendre p vers $+\infty$, il vient grâce au théorème de la valeur initiale que

$$-\sum_{1\leq j\neq k\leq l}u_{k}*\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbb{F}\left(\cdot,\mathbf{D}^{k},C,A,\mathbf{B}^{k}\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot,\mathbf{D}^{j},C,A,\mathbf{B}^{j}\right)}\right](0)-u_{j}\left(0\right)=\lim_{p\to+\infty}p\frac{\mathbb{F}\left(p,0,C,A,\boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o},x_{2}^{o}\right)\right)}{\mathbb{F}\left(p,\mathbf{D}^{j},C,A,\mathbf{B}^{j}\right)}$$

Cette dernière égalité n'est vraie que si la fraction rationnelle

$$\frac{\mathbb{F}\left(\cdot, 0, C, A, \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right)\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{j}, C, A, \mathbf{B}^{j}\right)} = \Upsilon\left(\cdot, \mathbf{D}^{j}, C, A, \mathbf{B}^{j}, x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right)$$

est strictement propre. On conclut grâce au lemme 3.2.21 que x_1^o et x_2^o vérifient la condition (3.41).

 $(ii) \implies (i)$ Supposons que x_1^o et x_2^o vérifient la condition (3.41) et soit u la commande définie par $u = u^{\text{par}} [x_1^o, x_2^o]$ où la fonction ψ est définie par la relation (3.45). D'après

le lemme 3.2.22-(ii), x_1^o , x_2^o et u vérifient l'équation (3.5) et on conclut que $(x_1^o, x_2^o) \in \mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$.

Il résulte du lemme 3.2.22 et du théorème 3.2.25 que lorsque $1 \le \rho \le 2n - 1$, la fonction u^{par} possède également toutes les propriétés d'une fonction génératrice de solution particulière de (3.5). Ainsi, on a le résultat suivant.

Théorème 3.2.26. Si $1 \le \rho \le 2n-1$ et si m = 1 alors la fonction u^{par} dont les composantes sont définies par (3.45) est une fonction génératrice de solutions particulières de l'équation (3.5).

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate des théorèmes 3.2.23 et 3.2.26.

Corollaire 3.2.27. Si $0 \le \rho \le 2n - 1$ et si m = 1 alors la fonction u^{par} dont les composantes sont définies par (3.45) est une fonction génératrice de solutions particulières de l'équation (3.5).

L'exemple suivant illustre les résultats du corollaire 3.2.27.

Exemple 3.2.28. Considérons les systèmes S_1 et S_2 de l'exemple 3.2.20. Rappelons que $\rho = 2$ et que $\mathfrak{J} = \{1\}$. On a $\mathbb{O}^{[\rho-1]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ et par application du théorème 3.2.25, on obtient

obtient

$$\mathscr{X}_{ind}^{o}(S_1, S_2) = \left\{ (x_1^o, x_2^o) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \colon x_{11}^o = x_{21}^o = -2 \, x_{22}^o \right\}$$

où x_{ij}^{o} désigne la j^{eme} composante de x_{i}^{o} . Ainsi, lorsque $(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}) \in \mathscr{X}_{ind}^{o}(S_{1}, S_{2})$, par application de la formule (3.1.11) de calcul des coefficients $\widehat{K}_{4-s}(0, C, A, \pi(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}))$, s = 1, 2, 3, 4, on obtient

$$\widehat{\mathbf{K}}_{3}(0, C, A, \boldsymbol{\pi}(x_{1}^{o}, x_{2}^{o})) = 0 \quad ; \quad \widehat{\mathbf{K}}_{2}(0, C, A, \boldsymbol{\pi}(x_{1}^{o}, x_{2}^{o})) = 0$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_{1}\left(0,C,A,\boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o},x_{2}^{o}\right)\right) = -\frac{5}{2}x_{11}^{o} \quad ; \quad \widehat{\mathbf{K}}_{0}\left(0,C,A,\boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o},x_{2}^{o}\right)\right) = -5x_{11}^{o}$$

Il s'ensuit que pour tout $(x_1^o, x_2^o) \in \mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$, $\mathbb{F}(p, 0, C, A, \pi(x_1^o, x_2^o)) = -\frac{5}{2}x_{11}^o p - 5x_{11}^o$. On conclut grâce au théorème 3.2.26 que

$$\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}\left[x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right](t) = \begin{bmatrix} -\mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{F}\left(p, 0, C, A, \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right)\right) \\ \mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{1}, C, A, \mathbf{B}^{1}\right) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{5 x_{11}^{o}\left(p+2\right)}{p^{2}+8 p+12} \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 x_{11}^{o} e^{-6t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.2.2.3 Caractérisation de la zone d'indiscernabilité : cas $0 \le \rho \le 2n - 1$

Connaissant les solutions homogènes (théorème 3.2.16 et 3.2.18) et particulières (corollaire 3.2.27) de l'équation (3.5), nous pouvons maintenant montrer les théorèmes 3.2.29 et 3.2.29 suivants qui donne une caractérisation de la zone d'indiscernabilité lorsque $0 \le \rho \le 2n - 1$. Le théorème 3.2.29 traite le cas des systèmes SISO et le théorème 3.2.29, le cas des systèmes MISO.

Théorème 3.2.29. Si l = 1 = m et si $0 \leq \rho \leq 2n - 1$ alors $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ si et seulement si $(x_1^o, x_2^o) \in \mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$ avec

$$\mathscr{X}_{ind}^{o}\left(S_{1}, S_{2}\right) = \begin{cases} \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n} & si \quad \boldsymbol{\rho} = 0\\ \left\{ \left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right) \in \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n} \colon \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right) \in \operatorname{Ker}\left(\mathbb{O}^{\left[\boldsymbol{\rho}-1\right]}\right) \right\} & sinon \end{cases}$$
(3.48)

 $et \ si$

$$u = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbb{F}\left(\cdot, 0, C, A, \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right)\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot, D, C, A, B\right)}\right].$$
(3.49)

Démonstration. L'expression (3.48) de $\mathscr{X}_{ind}^{o}(S_1, S_2)$ découle des théorèmes 3.2.24 et 3.2.25. D'après le lemme 3.1.9, il existe une solution homogène $\boldsymbol{u}^{\text{hom}}$ telle que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{\text{hom}} + \boldsymbol{u}^{\text{par}}[x_1^o, x_2^o]$. Puisque S_1 et S_2 sont des systèmes SISO, on déduit du théorème 3.2.16 que $\boldsymbol{u}^{\text{hom}}$ est identiquement nulle. Par conséquent, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{\text{par}}[x_1^o, x_2^o]$. D'autre part, puisque $\mathfrak{J} = \{1\}$, on déduit du lemme 3.2.22 que

$$\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}\left[\boldsymbol{x}_{1}^{o},\boldsymbol{x}_{2}^{o}\right] = \boldsymbol{u}_{1}^{\mathbf{par}}\left[\boldsymbol{x}_{1}^{o},\boldsymbol{x}_{2}^{o}\right] = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbb{F}\left(\cdot,\boldsymbol{0},\boldsymbol{C},\boldsymbol{A},\boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{x}_{1}^{o},\boldsymbol{x}_{2}^{o}\right)\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot,\mathbf{D}^{1},\boldsymbol{C},\boldsymbol{A},\mathbf{B}^{1}\right)}\right] = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbb{F}\left(\cdot,\boldsymbol{0},\boldsymbol{C},\boldsymbol{A},\boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{x}_{1}^{o},\boldsymbol{x}_{2}^{o}\right)\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot,\boldsymbol{D},\boldsymbol{C},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\right)}\right]$$

D'où u vérifie la condition (3.49).

Pour illustrer les résultats du théorème 3.2.29, nous considérons à nouveau les systèmes harmoniques de l'exemple 3.1.15.

Exemple 3.2.30. Soient S_1 et S_2 les systèmes masse-ressort de l'exemple 3.1.15. Il résulte des valeurs de ρ que nous avons calculées dans l'exemple 3.1.15 que S_1 et S_2 satisfont la condition $0 \leq \rho \leq 2n - 1$ du théorème 3.2.29 si et seulement si les deux systèmes n'ont pas la même masse. Nous supposons donc dans cet exemple que $m_1 \neq m_2$. Comme $m_1 \neq m_2$, $\rho = 2$ (voir exemple 3.1.15) et on obtient

$$\mathbb{O}^{[\boldsymbol{\rho}-1]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

On déduit du théorème 3.2.25 que

$$\mathscr{X}_{ind}^{o}\left(S_{1}, S_{2}\right) = \left\{ (x_{1}^{o}, x_{2}^{o}) \in \mathbb{R}^{2} \times \mathbb{R}^{2} \colon x_{11}^{o} = x_{21}^{o} \ et \ x_{12}^{o} = x_{22}^{o} \right\}$$

où pour tout $i = 1, 2, x_{ij}^{o}$ désigne la j^{eme} composante de x_{i}^{o} . Par application de la formule (3.12) de calcul de $F(\cdot, M, C, A, N)$, il vient que

$$\mathbb{F}(p, D, C, A, B) = \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right) p^2 + \frac{k_2 - k_1}{m_1 m_2} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 m_2} \left(p^2 + \frac{k_2 - k_1}{m_2 - m_1}\right)$$

et que pour tout $(x_1^o, x_2^o) \in \mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2),$

$$\mathbb{F}(p,0,C,A,\boldsymbol{\pi}(x_1^o,x_2^o)) = \left(\frac{k_2}{m_2} - \frac{k_1}{m_1}\right) x_{11}^o p + \left(\frac{k_2}{m_2} - \frac{k_1}{m_1}\right) x_{12}^o = \left(\frac{k_2}{m_2} - \frac{k_1}{m_1}\right) (x_{11}^o p + x_{12}^o)$$

Ainsi, pour tout $(x_1^o, x_2^o) \in \mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$, on a

$$-\frac{\mathbb{F}\left(p, 0, C, A, \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right)\right)}{\mathbb{F}\left(p, D, C, A, B\right)} = \frac{k_{1} m_{2} - k_{2} m_{1}}{m_{2} - m_{1}} \left(\frac{x_{11}^{o} p + x_{12}^{o}}{p^{2} + \frac{k_{2} - k_{1}}{m_{2} - m_{1}}}\right)$$

Par application du théorème 3.2.29, on conclut que $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ si et seulement si les composantes x_{11}^o , x_{21}^o , x_{21}^o et x_{22}^o de x_1^o et x_2^o sont tels que $x_{11}^o = x_{21}^o$ et $x_{12}^o = x_{22}^o$ et si la commande u est de la forme

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_1 m_2 - k_2 m_1}{m_2 - m_1} \left(\frac{x_{11}^o p + x_{12}^o}{p^2 + \frac{k_2 - k_1}{m_2 - m_1}}\right)\right](t) = x_{11}^o \varphi_1(t) + x_{12}^o \varphi_2(t)$$

où les fonctions φ_1 et φ_2 sont définies par

$$\varphi_{1}(t) = \begin{cases} k_{1} & si \quad k_{1} = k_{2}, \\ \frac{k_{1} m_{2} - k_{2} m_{1}}{m_{2} - m_{1}} \tilde{\varphi}_{1} \left(t \sqrt{\left| \frac{k_{2} - k_{1}}{m_{2} - m_{1}} \right|} \right) & si \quad k_{1} \neq k_{2}, \end{cases}$$

et

$$\varphi_{2}(t) = \begin{cases} k_{1}t & si \quad k_{1} = k_{2}, \\ \frac{k_{1}m_{2} - k_{2}m_{1}}{m_{2} - m_{1}}\sqrt{\left|\frac{m_{2} - m_{1}}{k_{2} - k_{1}}\right|} \quad \tilde{\varphi}_{2}\left(t\sqrt{\left|\frac{k_{2} - k_{1}}{m_{2} - m_{1}}\right|}\right) & si \quad k_{1} \neq k_{2}, \end{cases}$$

avec

et

$$\widetilde{\varphi}_{1}(t) = \begin{cases} \cos & si & (k_{2} - k_{1}) & (m_{2} - m_{1}) > 0, \\ \cosh & si & (k_{2} - k_{1}) & (m_{2} - m_{1}) < 0, \end{cases}$$
$$\widetilde{\varphi}_{2}(t) = \begin{cases} \sin & si & (k_{2} - k_{1}) & (m_{2} - m_{1}) > 0, \\ \sinh & si & (k_{2} - k_{1}) & (m_{2} - m_{1}) < 0. \end{cases}$$

La zone d'indisseernabilité des systèmes MISO est entièrement caractérisée par le résultat suivant :

Théorème 3.2.31. Soit $j_0 \in \mathfrak{J}$. Si $0 \leq \boldsymbol{\rho} \leq 2n-1$, l > 1 et si m = 1 alors $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ si et seulement si x_1^o et x_2^o vérifient la condition (3.48) et s'il existe l-1 fonctions $\omega_k, k \in \{1, 2, \ldots, l\} \setminus \{j_0\}$ telles que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, l\} \setminus \{j_0\}$,

$$u_{k} = \begin{cases} \omega_{k} & \text{si } k \notin \mathfrak{J}, \\ \omega_{k} - \frac{1}{\operatorname{card}\left(J\right)} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbb{F}\left(\cdot, 0, C, A, \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right)\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k}\right)}\right] & \text{si } j_{0} \neq k \in \mathfrak{J}, \end{cases}$$
(3.50)

et

$$u_{j_0} = -\frac{1}{\operatorname{card}\left(J\right)} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\mathbb{F}\left(\cdot, 0, C, A, \boldsymbol{\pi}\left(x_1^o, x_2^o\right)\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{j_0}, C, A, \mathbf{B}^{j_0}\right)} \right] - \sum_{1 \le j_0 \ne k \le l} \omega_k * \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{j_0}, C, A, \mathbf{B}^{j_0}\right)} \right)$$
(3.51)

Démonstration. D'après le lemme 3.1.9, $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ si et seulement si $(x_1^o, x_2^o) \in \mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$ et s'il existe une solution homogène $\boldsymbol{u}^{\text{hom}}$ telle que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{\text{hom}} + \boldsymbol{u}^{\text{par}}[x_1^o, x_2^o]$. On obtient (3.50) et (3.51) en utilisant la formule (3.45) de $\boldsymbol{u}^{\text{par}}[x_1^o, x_2^o]$ et l'expression de $\boldsymbol{u}^{\text{hom}}$ donnée par le théorème 3.2.18 (formules (3.33) et (3.34)). L'expression (3.48) de $\mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$ est donnée par les corollaires 3.2.24 et 3.2.25. □

Exemple 3.2.32. Considérons les systèmes S_1 et S_2 de l'exemple 3.2.20. D'après l'exemple 3.2.20, on a

$$\boldsymbol{u^{\text{hom}}}\left(t\right) = \begin{bmatrix} 10 \ \int_{0}^{t} \widehat{\omega}\left(\tau\right) \ e^{-6\left(t-\tau\right)} \, \mathrm{d}\tau \\ & \widehat{\omega}\left(t\right) \end{bmatrix}, \quad \widehat{\omega} \in \mathscr{C}_{exp}^{1}\left(\mathbb{R}_{+}, \mathbb{R}\right)$$

et d'après l'exemple 3.2.28, on a

$$\mathscr{X}_{ind}^{o}\left(S_{1}, S_{2}\right) = \left\{ \left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right) \in \mathbb{R}^{2} \times \mathbb{R}^{2} \colon x_{11}^{o} = x_{21}^{o} = -2 \, x_{22}^{o} \right\}$$

et

$$\boldsymbol{u^{\text{par}}}\left[x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right](t) = \begin{bmatrix} -5 \, x_{11}^{o} \, \mathrm{e}^{-6 \, t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (x_{1}^{o}, x_{2}^{o}) \in \mathscr{X}_{ind}^{o}\left(S_{1}, S_{2}\right)$$

Ainsi, pour générer des sorties $y_1(\cdot, x_1^o, u, 0_{\mathscr{W}})$ et $y_2(\cdot, x_2^o, u, 0_{\mathscr{W}})$ identiques, les composantes x_{11}^o, x_{21}^o et x_{22}^o de x_1^o et x_2^o doivent vérifier la condition $x_{11}^o = x_{21}^o = -2 x_{22}^o$ et la commande u à choisir doit être de la forme

$$u\left(t\right) = \boldsymbol{u}^{\text{hom}}\left(t\right) + \boldsymbol{u}^{\text{par}}\left[x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right]\left(t\right) = \begin{bmatrix} -5\,x_{11}^{o}\,\mathrm{e}^{-6\,t} + 10\,\int_{0}^{t}\widehat{\omega}\left(\tau\right)\,\,\mathrm{e}^{-6\,(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\\ \widehat{\omega}\left(t\right) \end{bmatrix}, \quad \widehat{w}\in\mathscr{C}_{exp}^{1}\left(\mathbb{R}_{+},\mathbb{R}\right).$$

3.3 Quelques applications de la zone d'indiscernabilité

3.3.1 Conditions de discernabilité stricte des systèmes SISO et MISO

Dans cette partie, nous allons utiliser les résultats de la section précédente pour établir des conditions nécessaires et suffisantes de discernabilité stricte des systèmes SISO et MISO. Ces conditions sont données par les théorèmes 3.3.3 et 3.3.6. Le théorème 3.3.3 établit que deux systèmes SISO sont strictement discernables si et seulement s'ils ont un indice de similarité égal à 2n. Le théorème 3.3.6 confirme le résultat de [Lou and Yang, 2014] qui stipule que les systèmes MISO ne sont jamais strictement discernables. Pour établir ces deux résultats, nous allons d'abord montrer les lemmes 3.3.1 et 3.3.2 suivants.

Le lemme 3.3.1 donne une condition suffisante de non trivialité de la zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 .

Lemme 3.3.1. Si m = 1 et si $\rho \neq 2n$ alors $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2) \neq \{(0_n, 0_n, 0_{\mathscr{U}})\}.$

Démonstration. Supposons que m = 1 et que $\rho \neq 2n$. Nous allons distinguer le cas $0 \leq \rho \leq 2n-1$ et le cas $\rho = +\infty$.

Supposons que $0 \leq \rho \leq 2n-1$ et soient x_1^o et x_2^o deux vecteurs de \mathbb{R}^n tels que

$$\begin{cases} (x_1^o, x_2^o) \neq (0_n, 0_n) & \text{si} \quad \boldsymbol{\rho} = 0\\ 0_{2n} \neq \boldsymbol{\pi} (x_1^o, x_2^o) \in \text{Ker} \left(\mathbb{O}^{[\boldsymbol{\rho} - 1]} \right) & \text{si} \quad 1 \le \boldsymbol{\rho} \le 2n - 1 \end{cases}$$

Notons que lorsque $1 \leq \boldsymbol{\rho} \leq 2n - 1$, l'existence des vecteurs x_1^o et x_2^o non tous nuls que nous venons de définir découle du fait que la matrice $\mathbb{O}^{[\boldsymbol{\rho}-1]} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{\rho}\times n}$ n'est pas de plein rang colonne. D'après les théorèmes 3.2.24 et 3.2.25, le vecteur (x_1^o, x_2^o) appartient à $\mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$. Considérons la commande u définie par $u = \boldsymbol{u}^{\operatorname{par}}[x_1^o, x_2^o]$ où $\boldsymbol{u}^{\operatorname{par}}$ est la fonction génératrice de solutions particulières donnée par lemme 3.2.22. Par construction de x_1^o , x_2^o et u, il découle du lemme 3.1.9 que $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$. De plus, puisque (x_1^o, x_2^o, u) est non nul, on conclut que lorsque $0 \leq \boldsymbol{\rho} \leq 2n - 1$, $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2) \neq \{(0_n, 0_n, 0_{\mathscr{U}})\}$.

Supposons maintenant que $\boldsymbol{\rho} = +\infty$. Soit $u \in \mathscr{U}$ une commande non nulle et soient x_1^o et x_2^o des vecteurs de \mathbb{R}^n qui satisfont la condition (3.21) c'est-à-dire $\boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o) \in \text{Ker}(\mathbb{O})$. D'après le théorème 3.2.2, $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{\text{ind}}(S_1, S_2)$. Le triplet (x_1^o, x_2^o, u) étant non nul par construction, on conclut que lorsque $\boldsymbol{\rho} = +\infty$, $\mathscr{Z}_{\text{ind}}(S_1, S_2) \neq \{(0_n, 0_n, 0_{\mathscr{U}})\}$.

Le lemme 3.3.2 montre que le système augmenté associé aux systèmes SISO ayant un indice de similarité égale à 2n est toujours observable. Un résultat plus général que celui de ce lemme est présenté dans le chapitre 5 (voir théorème 5.2.10).

Lemme 3.3.2. Si m = 1 = l et $\rho = 2n$ alors rang $(\mathbb{O}) = 2n$.

Démonstration. Supposons que m = 1 = l et que $\rho = 2n$. Désignons par M le produit de la matrice d'observabilité et de la matrice de commandabilité de S:

$$M = \mathbb{O} \begin{bmatrix} B & A B & \cdots & A^{2n-1} B \end{bmatrix}.$$

D'après la définition du degré relatif, on a $C A^k B = 0, k = 0, 1, ..., 2n - 2$. La matrice M peut donc être mise sous la forme triangulaire suivante :

$$M = \begin{bmatrix} \mathbb{O} \ B \ \mathbb{O} \ A \ B \ \cdots \ \mathbb{O} \ A^{2n-1} \ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & C \ A^{2n-1} \ B \\ 0 & 0 & \cdots & C \ A^{2n-1} \ B & C \ A^{2n} \ B \\ \vdots & \vdots \\ 0 & C \ A^{2n-1} \ B & \cdots & C \ A^{4n-4} \ B & C \ A^{4n-3} \ B \\ C \ A^{2n-1} \ B & C \ A^{2n} \ B & \cdots & C \ A^{4n-3} \ C \ A^{4n-2} \ B \end{bmatrix}.$$

Le coefficient $C A^{2n-1} B$ définit la diagonale de M. Il est non nul (car $\rho = 2n$) et ceci implique que

$$0 \neq \det(M) = \det(\mathbb{O}) \det\left(\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{2n-1}B\end{bmatrix}\right)$$

Par conséquent, det $(\mathbb{O}) \neq 0$ et ceci est encore équivalent à rang $(\mathbb{O}) = 2n$.

La condition suivante caractérise la discernabilité stricte des systèmes SISO. Ce résultat est une version améliorée de la condition de discernabilité stricte des systèmes SISO que nous avons établie dans [Motchon et al., 2015a].

Théorème 3.3.3. Si l = m = 1 alors les systèmes dynamiques S_1 et S_2 sont strictement $(L^1([0;T], \mathbb{R}^l), \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ - discernables sur [0;T] si et seulement si $\rho = 2n$.

Démonstration. Supposons que l = m = 1. Pour montrer ce résultat, nous allons procéder en deux temps. D'abord, nous allons prouver que lorsque $\rho \neq 2n$, les systèmes S_1 et S_2 ne sont pas strictement discernables. Ensuite, nous allons montrer que les deux systèmes sont strictement discernables lorsque $\rho = 2n$.

Supposons que $\rho \neq 2n$ et soit $(\mathbf{x}_{1}^{o}, \mathbf{x}_{2}^{o}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n} \times \mathscr{U}$ un triplet non nul tel que les sorties $y_{1}(\cdot, \mathbf{x}_{1}^{o}, u, 0_{\mathscr{W}_{1}})$ et $y_{2}(\cdot, \mathbf{x}_{2}^{o}, u, 0_{\mathscr{W}_{2}})$ sont identiques sur \mathbb{R}_{+} . L'existence de $(\mathbf{x}_{1}^{o}, \mathbf{x}_{2}^{o}, \mathbf{u})$ découle du lemme 3.3.1. Puisque $\mathscr{U} \subset \mathscr{C}(\mathbb{R}_{+}, \mathbb{R}^{l})$, la commande u est donc Lebesgue intégrable sur [0; T]. On vient donc de déterminer un triplet non nul $(\mathbf{x}_{1}^{o}, \mathbf{x}_{2}^{o}, \mathbf{u}) \in L^{1}([0; T], \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n}$ tel que $y_{1}(\cdot, \mathbf{x}_{1}^{o}, u, 0_{\mathscr{W}_{1}})$ et $y_{2}(\cdot, \mathbf{x}_{2}^{o}, u, 0_{\mathscr{W}_{2}})$ sont identiques sur [0; T]. On conclut donc que les systèmes S_{1} et S_{2} ne sont pas strictement $(L^{1}([0; T], \mathbb{R}^{l}), \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n}, \{0_{\mathscr{W}_{1}}\} \times \{0_{\mathscr{W}_{2}}\})$ -discernables sur [0; T] lorsque $\rho \neq 2n$.

Supposons maintenant que $\rho = 2n$. D'après la définition de la stricte discernabilité, S_1 et S_2 sont strictement $(L^1([0;T], \mathbb{R}^l), \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernables sur [0;T] si et seulement si on a la relation suivante :

$$\begin{cases} (x_1^o, x_2^o, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times L^1 \left([0; T], \mathbb{R} \right) \\ y_1 \left(t, x_1^o, u, 0_{\mathscr{W}_1} \right) = y_2 \left(t, x_2^o, u, 0_{\mathscr{W}_2} \right), \quad \forall t \in [0; T] \end{cases} \implies \begin{cases} x_1^o = 0_n = x_2^o \\ u \left(t \right) = 0, \quad \forall t \in [0; T] \end{cases}$$

D'autre part, d'après le théorème de caractérisation de la zone d'indiscernabilité dans le cas $\rho = 2n$ (voir théorème 3.2.8 ou le théorème F.0.2), on a

$$\begin{array}{l} (x_{1}^{o}, x_{2}^{o}, u) \in \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n} \times \mathrm{L}^{1}\left([0; T], \mathbb{R}\right) \\ y_{1}\left(t, x_{1}^{o}, u, 0_{\mathscr{W}_{1}}\right) = y_{2}\left(t, x_{2}^{o}, u, 0_{\mathscr{W}_{2}}\right), \quad \forall t \in [0; T] \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right) \in \mathrm{Ker}\left(\mathbb{O}\right) \\ C A^{2n-1} B u\left(t\right) = 0, \quad \forall t \in [0; T] \end{array} \right\}$$

Il vient donc que S_1 et S_2 sont strictement $(L^1([0;T], \mathbb{R}^l), \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernables sur [0;T] si et seulement si on a la relation suivante :

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\pi} \left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o} \right) \in \operatorname{Ker} \left(\mathbb{O} \right) \\ C A^{2n-1} B u \left(t \right) = 0, \quad \forall t \in [0 \, ; T] \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} x_{1}^{o} = 0_{n} = x_{2}^{o} \\ u \left(t \right) = 0, \quad \forall t \in [0 \, ; T]. \end{array} \right.$$
(3.52)

D'après le lemme 3.3.2, comme Ker $(\mathbb{O}) = \{0_{2n}\}$, il vient que

$$\boldsymbol{\pi} \left(x_1^o, x_2^o \right) \in \operatorname{Ker} \left(\mathbb{O} \right) \iff x_1^o = x_2^o = 0_n.$$
(3.53)

Par ailleurs, puisque l = m = 1 et que $\rho = 2n$, on a $C A^{2n-1} B \in \mathbb{R}$ et $C A^{2n-1} B \neq 0$. Par conséquent,

$$C A^{2n-1} B u(t) = 0, \quad \forall t \in [0;T] \iff u(t) = 0, \quad \forall t \in [0;T].$$
 (3.54)

Il découle des relations (3.53) et (3.54) que l'implication (3.52) est toujours vraie dans le cas $\rho = 2n$. D'où le résultat.

Le critère de discernabilité stricte du théorème 3.3.3 est basé sur le calcul des paramètres de Markov des systèmes S_1 et S_2 . Ainsi, il est plus simple à utiliser que la condition de discernabilité stricte de [Lou and Yang, 2014] qui consiste à calculer le rang de la matrice de Rosenbrock $\mathbf{R}(p)$ de S pour tout $p \in \mathbb{C}$.

Exemple 3.3.4. Considérons les systèmes S_1 et S_2 définis par

$$A_{1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B_{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad C_{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad D_{1} = 0$$
$$A_{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B_{2} = B_{1} ; \quad C_{2} = C_{1} ; \quad D_{1} = D_{2}$$

Dans l'exemple 1.3.2, nous avons utilisé la définition de la discernabilité stricte pour montrer que S_1 et S_2 sont strictement (L¹([0;T], \mathbb{R}), $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $\{0_{\#_1}\} \times \{0_{\#_2}\}$)-discernables sur [0;T]. Nous allons retrouver ce résultat grâce au théorème 3.3.3. On a $CB = CAB = CA^2B = 0$ et $CA^3B = 1 \neq 0$. Par conséquent, $\rho = 4 = 2n$ et on conclut grâce au théorème 3.3.3 que S_1 et S_2 sont strictement (L¹([0;T], \mathbb{R}), $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $\{0_{\#_1}\} \times \{0_{\#_2}\}$)-discernables sur [0;T].

Exemple 3.3.5. Considérons les systèmes harmoniques de l'exemple 3.1.15. On a $\rho = 2n = 4$ si et seulement si $m_1 = m_2$ et $k_1 \neq k_2$. On conclut que les deux systèmes harmoniques sont strictement discernables si et seulement s'ils ont la même masse et des constantes de raideurs différentes.

Théorème 3.3.6. Si l > 1 et si m = 1 alors les systèmes dynamiques S_1 et S_2 ne sont pas strictement $(L^1([0;T], \mathbb{R}^l), \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ - discernables sur [0;T].

Démonstration. Nous allons distinguer les deux cas possibles suivants : $\rho \neq 2n$ et $\rho = 2n$.

Supposons que $\rho \neq 2n$. Par un raisonnement analogue à celui de la première partie de la preuve du théorème 3.3.3, on peut construire un triplet non nul $(\mathbf{x}_1^o, \mathbf{x}_2^o, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times$ $\mathrm{L}^1\left([0;T], \mathbb{R}^l\right)$ tel que les sorties $y_1(\cdot, \mathbf{x}_1^o, \mathbf{u}, 0_{\mathscr{W}_1})$ et $y_2(\cdot, \mathbf{x}_2^o, \mathbf{u}, 0_{\mathscr{W}_2})$ sont identiques sur [0;T].

D'où S_1 et S_2 ne sont pas strictement $(L^1([0;T], \mathbb{R}^l), \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernables lorsque $\rho \neq 2n$.

Supposons maintenant que $\rho = 2n$. Puisque $C A^{2n-1} B \in \mathbb{R}^{1 \times l}$ et l > 1, la matrice $C A^{2n-1} B \in \mathbb{R}^{1 \times l}$ n'est pas de plein rang colonne. On en déduit qu'il existe au moins un vecteur non nul $\xi^* \in \mathbb{R}^l$ tel que $\xi^* \in \text{Ker} (C A^{2n-1} B)$. Considérons la commande constante u définie par $u(t) = \xi^*, \forall t \in \mathbb{R}_+$ et soient x_1^o et x_2^o deux vecteurs qui satisfont la condition (3.21) c'est-à-dire $\pi(x_1^o, x_2^o) \in \text{Ker}(\mathbb{O})$. Puisque la commande u et les vecteurs x_1^o et x_2^o satisfont les conditions (3.26) et (3.21) qui caractérisent les éléments de la zone d'indiscernabilité dans le cas $\rho = 2n$ (voir théorème 3.2.8), il vient alors que les sorties $y_1(\cdot, x_1^o, u, 0_{\mathscr{W}_1})$ et $y_2(\cdot, x_2^o, u, 0_{\mathscr{W}_2})$ sont identiques sur \mathbb{R}_+ . Pour conclure, il suffit de remarquer que par construction de u on a $(0_n, 0_n, 0_{\mathscr{W}}) \neq (x_1^o, x_2^o, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times L^1([0; T], \mathbb{R}^l)$.

3.3.2 Conditions de forte discernabilité contrôlable

Dans cette partie, nous allons utiliser les théorèmes 3.2.2, 3.2.8 et 3.2.29 pour retrouver la condition nécessaire et suffisante de forte discernabilité contrôlable de [Babaali and Pappas, 2004] (voir chapitre 1, théorème 1.3.19) : les systèmes dynamiques S_1 et S_2 sont contrôlablement $\left(\mathscr{A}\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^l\right), \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ -discernables au sens fort si et seulement s'ils n'ont pas les mêmes paramètres de Markov (c'est-à-dire $\rho \neq +\infty$). Pour obtenir ce résultat, nous allons distinguer les cas $\rho = +\infty$, $\rho = 2n$ et $0 \leq \rho \leq 2n - 1$ que nous traitons respectivement dans les théorèmes 3.3.7, 3.3.8 et 3.3.9 suivants.

Théorème 3.3.7. Si $\rho = +\infty$ alors pour toute commande $u \in \mathscr{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^l)$,

 $\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}_{+}}\left(u,\mathbb{R}^{n},\{0_{\mathscr{W}_{1}}\}\right)\bigcap\mathscr{S}_{2,\mathbb{R}_{+}}\left(u,\mathbb{R}^{n},\{0_{\mathscr{W}_{2}}\}\right)\neq\emptyset.$

Démonstration. Supposons que $\boldsymbol{\rho} = +\infty$ et soit $u \in \mathscr{A}\left(\mathbb{R}_{+}, \mathbb{R}^{l}\right)$. Soit $(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}) \in \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n}$ tel que $\boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right) \in \text{Ker}\left(\mathbb{O}\right)$ et soit $z = y_{1}\left(\cdot, x_{1}^{o}, u, 0_{\mathscr{W}_{1}}\right)$. D'après le théorème 3.2.2, $y_{1}\left(\cdot, x_{1}^{o}, u, 0_{\mathscr{W}_{1}}\right) \equiv y_{2}\left(\cdot, x_{1}^{o}, u, 0_{\mathscr{W}_{2}}\right)$ car x_{1}^{o} et x_{2}^{o} satisfont la condition (3.21). Il s'ensuit que z appartient à l'intersection de $\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}_{+}}\left(u,\mathbb{R}^{n}, \{0_{\mathscr{W}_{1}}\}\right)$ et $\mathscr{S}_{2,\mathbb{R}_{+}}\left(u,\mathbb{R}^{n}, \{0_{\mathscr{W}_{2}}\}\right)$. D'où le résultat.

Théorème 3.3.8. Si $\rho = 2n$ alors il existe au moins une commande $u \in \mathscr{A}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^l)$ telle que $\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}_+}(u,\mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\}) \cap \mathscr{S}_{2,\mathbb{R}_+}(u,\mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_2}\}) = \emptyset.$

Démonstration. Supposons que $\rho = 2n$. Soit $i \in \{1, 2, ..., m\}$ et soit $j \in \{1, 2, ..., l\}$ tels que $\mathbf{C}_i A^{2n-1} \mathbf{B}^j \neq 0$. L'existence de i et j découle du fait que $C A^{2n-1} B \neq 0_{m \times l}$. Soit **u** la

commande de $\mathscr{A}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^l)$ dont les composantes $\mathbf{u}_k, k = 1, 2, \ldots, l$ sont tels que

$$\mathbf{u}_k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq j, \\ \boldsymbol{\xi} & \text{si} \quad k = j, \end{cases}$$

où $\boldsymbol{\xi}$ est un nombre réel non nul. On a $\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}_+}(\mathbf{u},\mathbb{R}^n,\{0_{\mathscr{W}_1}\})\cap\mathscr{S}_{2,\mathbb{R}_+}(\mathbf{u},\mathbb{R}^n,\{0_{\mathscr{W}_2}\}) = \emptyset$. En effet, si $\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}_+}(\mathbf{u},\mathbb{R}^n,\{0_{\mathscr{W}_1}\})\cap\mathscr{S}_{2,\mathbb{R}_+}(\mathbf{u},\mathbb{R}^n,\{0_{\mathscr{W}_2}\}) \neq \emptyset$ alors, il existe $(x_1^o,x_2^o) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que $(x_1^o,x_2^o,\mathbf{u}) \in \mathscr{Z}_{\mathrm{ind}}(S_1,S_2)$. Donc d'après le théorème 3.2.8, $C A^{2n-1} B \mathbf{u}(t) = 0_m$. Ceci est absurde car par construction de $\mathbf{u}, \mathbf{C}_i A^{2n-1} B \mathbf{u} = \mathbf{C}_i A^{2n-1} \mathbf{B}^j \boldsymbol{\xi} \neq 0$.

Théorème 3.3.9. Si $0 \leq \rho \leq 2n-1$ alors il existe au moins une commande $u \in \mathscr{A}\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^l\right)$ telle que $\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}_+}\left(u, \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\}\right) \cap \mathscr{S}_{2,\mathbb{R}_+}\left(u, \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right) = \emptyset.$

Démonstration. Supposons que $0 \le \rho \le 2n-1$. Alors il existe $i \in \{1, 2, ..., m\}$ et $j \in \{1, 2, ..., l\}$ tels que

 $- \mathbf{D}_{i}^{j} \neq 0 \text{ si } \boldsymbol{\rho} = 0$ $- \mathbf{C}_{i} \mathbf{B}^{j} = \mathbf{C}_{i} A \mathbf{B}^{j} = \dots = \mathbf{C}_{i} A^{\boldsymbol{\rho}-2} \mathbf{B}^{j} = 0 \text{ et } \mathbf{C}_{i} A^{\boldsymbol{\rho}-1} \mathbf{B}^{j} \neq 0 \text{ si } 1 \leq \boldsymbol{\rho} \leq 2n-1$

Soit **u**, la commande dont les composantes \mathbf{u}_k , k = 1, 2, ..., l sont définies par

$$\mathbf{u}_{k}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j, \\ Q(t) e^{t\boldsymbol{\xi}} & \text{si } k = j, \end{cases}$$

où $\boldsymbol{\xi} \in \mathscr{H}_{\gamma^{\mathbb{F}}} \cap \mathbb{R}^{\star}$ et Q désigne une fonction polynôme non identiquement nulle sur \mathbb{R}_{+} . Il est clair que $u \in \mathscr{A}(\mathbb{R}_{+},\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}_{exp}^{1}(\mathbb{R}_{+},\mathbb{R}^{l})$. Pour la commande u ainsi définie, nous allons montrer que pour tout $(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}) \in \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n}, y_{1i}(\cdot, x_{1}^{o}, \mathbf{u}, 0_{\mathscr{H}_{1}})$ et $y_{2i}(\cdot, x_{2}^{o}, \mathbf{u}, 0_{\mathscr{H}_{2}})$ sont différentes sur \mathbb{R}_{+} où on rappelle que y_{1i} et y_{2i} désignent respectivement la $i^{\text{ème}}$ sortie de S_{1} et S_{2} . Supposons par l'absurde qu'il existe $(\mathbf{x}_{1}^{o}, \mathbf{x}_{2}^{o}) \in \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n}$ tel que $y_{1i}(\cdot, \mathbf{x}_{1}^{o}, \mathbf{u}, 0_{\mathscr{H}_{1}}) \underset{\mathbb{R}_{+}}{\equiv} y_{2i}(\cdot, \mathbf{x}_{2}^{o}, \mathbf{u}, 0_{\mathscr{H}_{2}})$. Le triplet $(\mathbf{x}_{1}^{o}, \mathbf{x}_{2}^{o}, \mathbf{u}_{j})$ appartient donc à la zone d'indiscernabilité des systèmes SISO S_{1i}^{j} et S_{2i}^{j} définis par

$$S_{1i}^{j} \begin{cases} \dot{x}_{1}(t) = A_{1} x_{1}(t) + \mathbf{B}_{1}^{j} u(t), \\ y_{1i}(t) = \mathbf{C}_{1i} x_{1}(t) + \mathbf{D}_{i}^{j} u(t), \\ x_{1}(0) = x_{1}^{o} \end{cases} \quad ; \quad S_{2i}^{j} \begin{cases} \dot{x}_{2}(t) = A_{2} x_{2}(t) + \mathbf{B}_{2}^{j} u(t), \\ y_{2i}(t) = \mathbf{C}_{2i} x_{2}(t) + \mathbf{D}_{i}^{j} u(t), \\ x_{2}(0) = x_{2}^{o} \end{cases}$$

où la matrice colonne \mathbf{B}_1^j (resp. \mathbf{B}_2^j) représente la $j^{\text{ème}}$ colonne de B_1 (resp. B_2) et la matrice ligne \mathbf{C}_{1i} (resp. \mathbf{C}_{2i}) désigne la $i^{\text{ème}}$ ligne de C_1 (resp. C_2). Grâce au théorème 3.2.29 qui

caractérise la zone d'indiscernabilité des systèmes SISO, on obtient

$$\mathbf{u}_{j} \equiv_{\mathbb{R}_{+}} -\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\mathbb{F}\left(\cdot, 0, \mathbf{C}_{i}, A, \boldsymbol{\pi}\left(\mathbf{x}_{1}^{o}, \mathbf{x}_{2}^{o}\right)\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}_{i}^{j}, \mathbf{C}_{i}, A, \mathbf{B}^{j}\right)} \right]$$
(3.55)

La formule (G.1) de la transformée de Laplace inverse des fraction rationnelle propre, implique qu'il existe un entier naturel $\bar{\mathbf{k}} \leq 2n - \boldsymbol{\rho}$, des fonctions analytiques $Q_k(\cdot, \mathbf{x}_1^o, \mathbf{x}_2^o), k = 1, 2, \dots, \bar{\mathbf{k}}$ et des fonctions polynômes $\widehat{Q}_k(\cdot, \mathbf{x}_1^o, \mathbf{x}_2^o)$ tels que

$$\left|Q_{k}\left(t, \mathbf{x}_{1}^{o}, \mathbf{x}_{2}^{o}\right)\right| \leq \widehat{Q}_{k}\left(t, \mathbf{x}_{1}^{o}, \mathbf{x}_{2}^{o}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}$$

 et

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathbb{F}\left(\cdot,0,\mathbf{C}_{i},A,\boldsymbol{\pi}\left(\mathbf{x}_{1}^{o},\mathbf{x}_{2}^{o}\right)\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot,\mathbf{D}_{i}^{j},\mathbf{C}_{i},A,\mathbf{B}^{j}\right)}\right](t) = \sum_{k=1}^{\bar{\mathbf{k}}} Q_{k}\left(t,\mathbf{x}_{1}^{o},\mathbf{x}_{2}^{o}\right) e^{t\,\xi_{k}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}$$

où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\bar{\mathbf{k}}}$ sont distincts deux à deux et appartiennent à l'ensemble des parties réels des racines de $\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}_i^j, \mathbf{C}_i, A, \mathbf{B}^j\right)$. On en déduit que la relation (3.55) est équivalente à

$$Q(t) = -\sum_{k=1}^{\bar{\mathbf{k}}} Q_k(t, \mathbf{x}_1^o, \mathbf{x}_2^o) e^{-(\boldsymbol{\xi} - \xi_k)t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$
(3.56)

Pour tout $k = 1, 2, \ldots, \bar{\mathbf{k}}$, on a

$$\left|Q_k\left(t, \mathbf{x}_1^o, \mathbf{x}_2^o\right) \,\mathrm{e}^{-(\boldsymbol{\xi} - \xi_k)\,t}\right| \le \widehat{Q}_k\left(t, \mathbf{x}_1^o, \mathbf{x}_2^o\right) \,\mathrm{e}^{-(\boldsymbol{\xi} - \xi_k)\,t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Puisque $\boldsymbol{\xi} \in \gamma^{\mathbb{F}}, \, \boldsymbol{\xi} > \xi_k, \, \forall k = 1, 2, \dots, \bar{\mathbf{k}}$ par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\lim_{t \to +\infty} Q_k \left(t, \mathbf{x}_1^o, \mathbf{x}_2^o \right) \, \mathrm{e}^{-(\boldsymbol{\xi} - \xi_k) \, t} = 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, \bar{\mathbf{k}}$$

Par conséquent, la relation (3.56) implique que $\lim_{t \to +\infty} Q(t) = 0$ et ceci est absurde car Q est un polynôme non nul.

Nous pouvons maintenant établir la condition suivante de forte discernabilité contrôlable :

Corollaire 3.3.10. Les systèmes S_1 et S_2 sont fortement $\left(\mathscr{A}\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^l\right), \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}\right)$ -discernables si et seulement si $\rho \neq +\infty$.

Démonstration. La condition nécessaire s'obtient à partir de la contraposée du théorème 3.3.7. La condition suffisante s'obtient en distinguant le cas $\rho = 2n$ et le cas $0 \le \rho \le 2n - 1$ puis en utilisant les résultats des théorèmes 3.3.8 et 3.3.9.

3.4 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'étude de la discernabilité stricte et de la discernabilité contrôlable des systèmes linéaires non perturbés. Contrairement aux études menées dans [Lou and Si, 2009], [Lou and Yang, 2011] et [Babaali and Pappas, 2004], dans ce chapitre nous ne nous limitons pas uniquement à la détermination des conditions permettant de tester si deux systèmes linéaires quelconques sont discernables ou pas. Nous nous sommes également intéressés à

- la détermination du domaine $\mathscr{U}_{dis}^{frt}(S_1, S_2)$ des commandes qui permettent de différencier les sorties des systèmes qui sont fortement discernables
- l'identification des domaines \mathscr{X}_{ind}^{o} et $\mathscr{U}_{ind}^{str}(S_1, S_2)$ des états initiaux et des commandes qui génèrent des sorties identiques, rendant les systèmes non strictement discernables

En nous appuyant sur le lien que nous avons établi dans le premier chapitre entre ces trois domaines et la zone d'indiscernabilité, nous avons focalisé notre étude sur la caractérisation de cette zone.

Cette caractérisation consiste à résoudre le problème d'annulation de la sortie du système augmenté. La méthode que nous proposons pour résoudre ce problème est basée sur l'utilisation de la transformée de Laplace pour le ramener à un problème de résolution d'une équation algébrique plus simple à manipuler. Cette équation fait intervenir les états initiaux et la transformée de Laplace des commandes qui rendent indiscernables les sorties des systèmes ainsi que la résolvante de la matrice d'état du système augmenté.

En explicitant la résolvante à partir de l'algorithme de Le Verrier-Souriau [Leyva-Ramos, 1991], [Réaud et al., 2000], [Helmberg et al., 1993], [Brezinski, 2002], nous avons exprimé l'équation algébrique en fonction des paramètres de Markov des systèmes. Ensuite, nous avons résolu l'équation algébrique suivant les valeurs admissibles de l'indice de similarité ρ des paramètres de Markov des systèmes S_1 et S_2 .

Les trois cas possibles $0 \leq \rho < 2n$, $\rho = 2n$ et $\rho = +\infty$ ont été distingués pour caractériser la zone d'indiscernabilité $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ de S_1 et S_2 . Le premier correspond à la situation où les systèmes ont des paramètres de Markov d'ordre inférieur à 2n - 1 non tous égaux. Dans le second cas, seuls les paramètres de Markov d'ordre 2n - 1 sont différents. Le dernier cas correspond à la situation où les systèmes ont les mêmes paramètres de Markov. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant.

Dimension	Valeurs de ρ	Eléments (x_1^o, x_2^o, u) de $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$
SISO	$\boldsymbol{ ho}=0$	$\boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o},x_{2}^{o} ight)\in\mathbb{R}^{2n}$ et $u=\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}\left[x_{1}^{o},x_{2}^{o} ight]$
	$1 \le \boldsymbol{\rho} \le 2n - 1$	$\boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o) \in \operatorname{Ker}\left(\mathbb{O}^{[\rho-1]}\right) \text{ et } u = \boldsymbol{u}^{\operatorname{par}}[x_1^o, x_2^o]$
MISO	$\boldsymbol{\rho}=0$	$\boldsymbol{\pi} \left(x_1^o, x_2^o ight) \in \mathbb{R}^{2n} \text{ et } u = \boldsymbol{u^{\mathrm{hom}}} + \boldsymbol{u^{\mathrm{par}}} \left[x_1^o, x_2^o ight]$
	$1 \le \boldsymbol{\rho} \le 2n - 1$	$\pi(x_1^o, x_2^o) \in \operatorname{Ker}\left(\mathbb{O}^{[\rho-1]}\right)$ et $u = u^{\operatorname{hom}} + u^{\operatorname{par}}[x_1^o, x_2^o]$
Quelconque	$\rho = 2n$	$\boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o) \in \operatorname{Ker}(\mathbb{O}) \text{ et } C A^{2n-1} B u \equiv_{\mathbb{R}_+} 0$
Quelconque	$ ho=+\infty$	$\boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o) \in \operatorname{Ker}(\mathbb{O}) \text{ et } u \in \mathscr{U}$

Chapitre 3. Caractérisation de la zone d'indiscernabilité des SDL non perturbés

Table 3.1 – Zone d'indiscernabilité des systèmes linéaires

De cette identification de la zone d'indiscernabilité, nous obtenons la caractérisation suivante des domaines $\mathscr{U}_{\text{dis}}^{\text{frt}}(S_1, S_2)$, $\mathscr{X}_{\text{ind}}^o(S_1, S_2)$ et $\mathscr{U}_{\text{ind}}^{str}(S_1, S_2)$.

Dimension	Valeurs de ρ	$\mathscr{X}_{\mathrm{ind}}^{o}\left(S_{1},S_{2} ight)$	$\mathscr{U}_{\mathrm{ind}}^{str}\left(S_{1},S_{2} ight)$	$\mathscr{U}_{\mathrm{dis}}^{\mathrm{frt}}\left(S_{1},S_{2} ight)$
SISO	$\boldsymbol{ ho}=0$	\mathbb{R}^{2n}	$oldsymbol{u}^{\mathbf{par}}\left[\mathscr{X}^{o}_{\mathrm{ind}}\left(S_{1},S_{2} ight) ight]$	
	$1 \le \boldsymbol{\rho} \le 2n - 1$	$\operatorname{Ker}\left(\mathbb{O}^{\left[\boldsymbol{\rho}-1\right]}\right)$	$egin{aligned} oldsymbol{u}^{ extbf{hom}}+oldsymbol{u}^{ extbf{par}}\left[\mathscr{X}^{o}_{ extbf{ind}}\left(S_{1},S_{2} ight) ight] \end{aligned}$	
MISO	$\boldsymbol{ ho}=0$	\mathbb{R}^{2n}	$oldsymbol{u}^{ extbf{hom}}+oldsymbol{u}^{ extbf{par}}\left[\mathscr{X}^{o}_{ extbf{ind}}\left(S_{1},S_{2} ight) ight]$	$\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^{str}(S_1, S_2)$
	$1 \le \boldsymbol{\rho} \le 2n - 1$	$\operatorname{Ker}\left(\mathbb{O}^{\left[\boldsymbol{\rho}-1\right]}\right)$	$egin{aligned} oldsymbol{u}^{ extbf{hom}}+oldsymbol{u}^{ extbf{par}}\left[\mathscr{X}^{o}_{ extbf{ind}}\left(S_{1},S_{2} ight) ight] \end{aligned}$	$u \setminus u_{ind} (\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$
Quelconque	$\rho = 2n$	$\operatorname{Ker}\left(\mathbb{O}\right)$	$\left\{ u \colon C A^{2n-1} B u \underset{\mathbb{R}_+}{\equiv} 0 \right\}$	
Quelconque	$oldsymbol{ ho}=+\infty$	$\operatorname{Ker}\left(\mathbb{O}\right)$	U	

 $\textbf{Table 3.2} - \text{Caractérisation des domaines } \mathscr{U}_{\text{dis}}^{\text{frt}}\left(S_{1},S_{2}\right), \, \mathscr{X}_{\text{ind}}^{o}\left(S_{1},S_{2}\right) \text{ et } \, \mathscr{U}_{\text{ind}}^{str}\left(S_{1},S_{2}\right)$

A partir des résultats issus de la caractérisation de la zone d'indiscernabilité, nous avons montré que la valeur de l'indice de similarité ρ suffit pour déterminer l'état de forte discernabilité stricte et de stricte discernabilité des systèmes SISO et MISO :

Dimension	Valeurs de ρ	Strictement discernables	Fortement discernables
SISO	$0 \le \boldsymbol{\rho} < 2n$	Non	Oui
	$\rho = 2n$ Oui		Oui
	$oldsymbol{ ho}=+\infty$	Non	Non
MISO	$0 \le \boldsymbol{\rho} \le 2n$	Non	Oui
	$oldsymbol{ ho}=+\infty$	Non	Non

Table 3.3 – État de stricte discernabilité et de forte discernabilité des systèmes mono-sortie suivant les valeurs de ρ

En d'autres termes,

- seuls les systèmes SISO ayant un indice de similarité $\rho = 2n$ sont strictement discernables
- il n'existe pas de couple de systèmes linéaires MISO qui soient strictement discernables
- les systèmes SISO et MISO fortement discernables sont ceux qui ont des paramètres de Markov différents

Ces conditions de discernabilité sont résumées dans le tableau comparatif suivant.

Discernabilité	Références	Dimension	Condition de discernabilité	
Stricte	Lou <i>et al</i> .	$m \ge l$	$\forall p \in \mathbb{C}, \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} p I_{2n} - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = 2n + l$	
		m < l	Non strictement discernables	
	Motchon <i>et al.</i>	SISO	$\rho = 2n$	
		MISO	Non strictement discernables	
Forte	Babaali <i>et al.</i>	Quelconque	$ ho eq+\infty$	
	Motchon <i>et al.</i>	SISO et MISO	$oldsymbol{ ho} eq+\infty$	

Table 3.4 – Conditions de stricte discernabilité et de forte discernabilité des systèmes linéaires

Nous avons donc retrouvé la condition de forte discernabilité de [Babaali and Pappas, 2004] dans le cas mono-sortie (SISO et MISO) ainsi que le résultat de [Lou and Si, 2009] qui stipule que tous les systèmes MISO ne sont pas strictement discernables. La condition nécessaire et suffisante de strict discernabilité que nous avons établie pour les systèmes SISO repose sur un simple calcul des paramètres de Markov des systèmes. Elle est très simple à tester comparativement au critère de rang de [Lou and Si, 2009], [Lou and Yang, 2011]. Une généralisation des résultats de ce chapitre à la classe des systèmes non-linéaires affines en la commande est présentée dans le chapitre 5.

Chapitre 4

Forte discernabilité contrôlable des systèmes dynamiques linéaires perturbés

Sommaire

4.1 Introduction			
4.2 Quelques éléments de Topologie et d'analyse fonctionnelle 116			
4.2.1 Notions de distance et de norme $\ldots \ldots \ldots$			
4.2.2 Espace métrique complet $\dots \dots \dots$			
4.2.3 Ouverts et fermés d'un espace métrique			
4.3 Équivalence entre forte discernabilité et forte résidu-discernabilité 121			
4.4 Caractérisation géométrique de la forte discernabilité 124			
4.4.1 Condition de forte résidu-discernabilité			
4.4.2 Indice de forte résidu-discernabilité			
4.5 Robustesse de la forte discernabilité vis-à-vis des perturbations . 137			
4.6 Conclusion			

4.1 Introduction

Les études de discernabilité menées dans les deux précédents chapitres ne prennent pas en compte l'effet des incertitudes, des perturbations (entrées inconnues) et des bruits de mesures dans le modèle d'état des systèmes S_1 et S_2 . Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser au problème de discernabilité des systèmes linéaires en présence des perturbations de type déterministe.

Notons d'abord que à la fois les résultats de Lou *et. al* (théorèmes 1.3.3 et 1.3.4) ainsi que les nôtres (théorème 3.3.3) montrent que deux systèmes S_1 et S_2 ne sont que très rarement strictement discernables.

Nous avons donc choisi dans cette étude de nous focaliser sur la caractérisation de forte discernabilité contrôlable des systèmes S_1 et S_2 perturbés.

Dans la littérature, peu de travaux traitent du problème de forte discernabilité contrôlable des systèmes linéaires perturbés. L'une des premières études sur cette problématique a été réalisée dans [Baglietto et al., 2007] pour les systèmes linéaires discrets soumis à des bruits aléatoires. Ces études ont permis de trouver une condition suffisante de forte discernabilité contrôlable des systèmes discrets. Elle repose sur la construction d'une classe de commandes qui permet de distinguer les systèmes discrets perturbés dont les modèles nominaux sont fortement discernables.

D'autres études sur la discernabilité des systèmes discrets perturbés ont été réalisées récemment dans [Baglietto et al., 2013], [Baglietto et al., 2014] pour des systèmes autonomes. Les perturbations considérées dans [Baglietto et al., 2013] et [Baglietto et al., 2014] correspondent à des bruits de mesures bornés en norme et l'accent a été mis dans ces travaux sur la détermination d'un outil pour quantifier le degré de forte discernabilité des systèmes autonomes discrets. Cette quantification du degré de forte discernabilité a conduit à la spécification d'une région du domaine des perturbations où il est toujours possible de discerner fortement les systèmes discrets autonomes.

A notre connaissance, seuls les travaux de [Gómez-Gutiérrez et al., 2012] traitent du problème de forte discernabilité contrôlable des systèmes linéaires continus qui sont soumis à des perturbations. La question de l'existence d'une commande permettant de discerner contrôlablement au sens fort les systèmes continus perturbés a été traitée dans [Gómez-Gutiérrez et al., 2012]. Les perturbations ou entrées inconnues considérées par Gomez-Gutierrez *et. al* agissent uniquement sur la dynamique de la variable d'état des systèmes.

Dans ce chapitre, nous étudions la forte discernabilité contrôlable des systèmes perturbés relativement à une commande u quelconque. Les perturbations déterministes que nous considérons agissent à la fois sur la dynamique de la variable d'état des systèmes et sur leurs sorties. Nous déterminons également un outil permettant de quantifier le degré de forte discernabilité contrôlable des systèmes relativement à toute commande u donnée. Le chapitre est scindé en trois grandes sections.

Dans la première section, nous rappelons les résultats préliminaires que nous utilisons pour caractériser la forte discernabilité contrôlable des systèmes dynamiques perturbés. Ces rappels portent principalement sur des propriétés des ensembles fermés dans les espaces métriques [Schwartz, 1970] et [Kolmogorov and Fomin, 1957].

Dans la seconde section, nous montrons d'abord qu'étudier la forte discernabilité contrôlable

des systèmes linéaires perturbés S_1 et S_2 revient à étudier leurs forte résidu-discernabilité. Grâce à ce résultat, nous nous focalisons sur l'étude de la forte résidu-discernabilité de S_1 et S_2 qui a la particularité de faire intervenir moins de variables inconnues car les états initiaux de S_1 (resp. S_2) sont éliminés par projection dans l'espace de parité de S_1 (resp. S_2). Ensuite nous établissons une condition géométrique permettant de caractériser la forte résidu-discernabilité de S_1 et S_2 relativement à une commande quelconque u. Cette condition repose sur la propriété de stricte positivité d'une fonction positive que nous nommons indice de forte résidu-discernabilité. Nous montrons enfin dans cette section que l'indice de forte résidu-discernabilité peut être utilisée pour quantifier le degré de forte résidu-discernabilité des systèmes S_1 et S_2 relativement à la commande u.

L'avant dernière section traite de la question de l'influence des perturbations sur la discernabilité des systèmes S_1 et S_2 . Plus précisément, nous nous intéressons au problème de robustesse de la propriété de forte discernabilité contrôlable des modèles nominaux de S_1 et S_2 vis-à-vis des perturbations déterministes.

Problème 4.1.1. Lorsque les modèles nominaux des systèmes S_1 et S_2 sont contrôlablement discernables au sens fort, les systèmes perturbés S_1 et S_2 pourraient être non contrôlablement discernables au sens fort à cause des perturbations qui rendent plus grand le domaine des sorties admissibles de S_1 et S_2 .



Figure 4.1 – Influence des perturbations sur la propriété de forte discernabilité

Le problème posé est alors : sous l'hypothèse de forte discernabilité contrôlable des modèles nominaux de S_1 et S_2 relativement à une commande $u \in \mathscr{U}$, déterminer les "tailles maximales" des domaines \mathscr{W}_1 et \mathscr{W}_2 qui préservent la forte discernabilité contrôlable des systèmes perturbés S_1 et S_2 relativement à la même commande u. En partant de l'équivalence que nous avons établie entre la notion de forte discernabilité contrôlable et celle de forte résidu-discernabilité, nous résolvons ce problème de robustesse en spécifiant les tailles maximales des domaines \mathscr{W}_1 et \mathscr{W}_2 qui préservent la forte résidudiscernabilité des systèmes perturbés S_1 et S_2 . Grâce à ce résultat, nous caractérisons entièrement la région du domaine des perturbations déterministes où les systèmes S_1 et S_2 restent discernables pour une commande u donnée.

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une communication [Motchon et al., 2015b] dans la conférence internationale avec comité de lecture "9th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, Arts et Métiers ParisTech, September 2-4, 2015".

4.2 Quelques éléments de Topologie et d'analyse fonctionnelle

Cette section a pour objectif de rappeler brièvement les notions d'espace métrique, de norme, d'ensemble ouvert et d'ensemble fermé. Nous donnons sans preuve certains résultats classiques portant sur ces notions. Ces résultats seront utilisés dans les sections suivantes. Pour une étude plus détaillée sur ces notions, le lecteur pourra par exemple se référer aux livres de topologie et d'analyse fonctionnelle suivants : [Schwartz, 1970] et [Kolmogorov and Fomin, 1957].

4.2.1 Notions de distance et de norme

Définition 4.2.1. Une distance sur un ensemble \mathscr{M} est une application d: $\mathscr{M} \times \mathscr{M} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes, pour tout triplet $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathscr{M} \times \mathscr{M} \times \mathscr{M}$:

(i) positivité : $d(\xi_1, \xi_2) > 0$ si $\xi_1 \neq \xi_2$ et $d(\xi_1, \xi_1) = 0$

- (*ii*) symétrie : $d(\xi_1, \xi_2) = d(\xi_2, \xi_1)$
- (iii) inégalité triangulaire : $d(\xi_1, \xi_3) \leq d(\xi_1, \xi_2) + d(\xi_2, \xi_3)$

Un espace métrique (\mathcal{M}, d) est un ensemble muni d'une distance d.

Exemple 4.2.2. La droite réelle \mathbb{R} munie de la distance usuelle définie par

$$d(\xi_1, \xi_2) = |\xi_1 - \xi_2|$$

est un espace métrique.

L'ensemble $\mathscr{C}([0;T],\mathbb{R})$ muni de l'une des deux distances d_{∞} et d_2 définies par

$$d_{\infty}(\varphi_{1},\varphi_{2}) = \sup_{t \in [0;T]} |\varphi_{1}(t) - \varphi_{2}(t)| \quad ; \quad d_{2}(\varphi_{1},\varphi_{2}) = \left(\int_{0}^{T} |\varphi_{1}(\tau) - \varphi_{2}(\tau)|^{2} d\tau\right)^{1/2}$$

est un espace métrique. La fonction d_{∞} porte le nom de la distance de convergence uniforme et d_2 est appelée distance quadratique.

Définition 4.2.3. Soit \mathscr{V} un espace vectoriel sur un corps \mathscr{K} ($\mathscr{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathscr{K} = \mathbb{C}$). Une norme sur \mathscr{V} est une application $\|\cdot\| : \mathscr{V} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes pour tout $(\xi_1, \xi_2) \in \mathscr{V} \times \mathscr{V}$ et pour tout $\gamma \in \mathscr{K}$:

(i) positivité : $\|\xi_1\| > 0$ si $\xi \neq 0_{\mathscr{V}}$ et $\|0_{\mathscr{V}}\| = 0$

- (*ii*) transformation par homothétie : $\|\gamma \xi_1\| = |\gamma| \|\xi_1\|$
- (*iii*) *inégalité triangulaire* : $\|\xi_1 + \xi_2\| \le \|\xi_1\| + \|\xi_2\|$.

Un espace vectoriel normé $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel muni d'une norme.

Remarque 4.2.4. Soit $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. L'application d définie par

$$d(\xi_1, \xi_2) = ||\xi_1 - \xi_2||, \quad (\xi_1, \xi_2) \in \mathscr{V} \times \mathscr{V}$$

est une distance sur \mathscr{V} . La distance d est la **distance associée** à la norme $\|\cdot\|$.

Exemple 4.2.5. Sur \mathbb{R}^q , on définit la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ par

$$\|\xi\|_2 = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^q . Sur $\mathscr{C}([0;T],\mathbb{R}^q)$, on définit la **norme de la** convergence en moyenne quadratique par

$$\left\|\varphi\right\|_{\mathrm{L}^{2}\left([0;T],\mathbb{R}^{q}\right)} = \left(\int_{0}^{T} \left\|\varphi\left(\tau\right)\right\|_{2}^{2} \mathrm{d}\tau\right)^{1/2}, \quad \varphi \in \mathscr{C}\left([0;T],\mathbb{R}^{q}\right)$$

Dans la pratique, à la place de la norme $\|\cdot\|_{L^2([0;T],\mathbb{R}^q)}$ on utilise souvent la norme RMS (root mean square en anglais) définie par

$$\|\varphi\|_{RMS} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T \|\varphi(\tau)\|_2^2 \,\mathrm{d}\tau\right)^{1/2}, \quad \varphi \in \mathscr{C}\left([0\,;T],\mathbb{R}^q\right).$$
(4.1)

4.2.2 Espace métrique complet

Définition 4.2.6. Soit (\mathcal{M}, d) un espace métrique. On dit d'une suite $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{M} qu'elle converge vers un point $\xi \in \mathcal{M}$ si $d(\xi_k, \xi)$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N} \colon (\forall k \in \mathbb{N}, k \ge N_{\varepsilon}) \implies d(\xi_k, \xi) < \varepsilon$$

$$(4.2)$$

Exemple 4.2.7. Dans \mathbb{R} muni de la distance usuelle, la suite $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}^{\star}}$ converge vers 0.

Remarque 4.2.8. Dans les espaces vectoriels normés $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ qui sont aussi des espaces métriques, on définit la notion de convergence d'une suite en considérant la distance associée à la norme $\|\cdot\|$. La relation (4.2) s'écrit alors dans ce cas

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N} \colon (\forall k \in \mathbb{N}, k \ge N_{\varepsilon}) \implies \|\xi - \xi_k\| < \varepsilon$$

Définition 4.2.9. Soit (\mathcal{M}, d) un espace métrique. On dit d'une suite $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{M} qu'elle est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}, \ (\forall (k,k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \ k \ge N_{\varepsilon}, \ k' \ge N_{\varepsilon}) \implies d(\xi_k, \xi_{k'}) < \varepsilon$$
(4.3)

Exemple 4.2.10. Toute suite $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente dans un espace métrique (\mathcal{M}, d) est une suite de Cauchy. En effet, soit ξ la limite de $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \ge N_{\varepsilon}$, $d(\xi_k, \xi) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $k \ge N_{\varepsilon}$ et pour tout $k' \ge N_{\varepsilon}$ on obtient $d(\xi_k, \xi_{k'}) \le d(\xi_k, \xi) + d(\xi_{k'}, \xi) < \varepsilon$.

Remarque 4.2.11. Dans les espaces vectoriels normés $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$, on utilise la distance associée à la norme $\|\cdot\|$ pour définir la notion de suite de Cauchy. La relation (4.3) s'écrit alors dans ce cas

 $\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N} \colon (\forall (k,k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \ k \ge N_{\varepsilon}, \ k' \ge N_{\varepsilon}) \implies ||\xi_k - \xi_{k'}|| < \varepsilon$

Définition 4.2.12. Un espace métrique (\mathcal{M}, d) est complet si toute suite de Cauchy de \mathcal{M} converge dans (\mathcal{M}, d) . Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Exemple 4.2.13. La droite réel \mathbb{R} munie de la distance usuelle est espace de Banach. Plus généralement, l'espace euclidien \mathbb{R}^q muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ est un espace de Banach.

4.2.3 Ouverts et fermés d'un espace métrique

Dans toute cette section, (\mathcal{M}, d) est un espace métrique.

Définition 4.2.14. Soient $\xi \in \mathcal{M}$ et r > 0. La boule ouverte de centre ξ et de rayon r est l'ensemble

$$\mathscr{B}(\xi, r) = \{\xi' \in \mathscr{M} : d(\xi, \xi') < r\}.$$

La boule fermée de centre ξ et de rayon r est l'ensemble

$$\overline{\mathscr{B}}(\xi, r) = \{\xi' \in \mathscr{M} : d(\xi, \xi') \le r\}.$$

Exemple 4.2.15. Dans \mathbb{R} muni de la distance usuelle, les boules ouvertes sont les intervalles ouverts $]\xi - r; \xi + r[$ avec $\xi \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^*_+$ et les boules fermées sont les intervalles fermés $[\xi - r; \xi + r]$. Dans \mathbb{R}^2 muni de la distance euclidienne, $\mathscr{B}(\xi, r)$ est le disque de centre ξ et de rayon r.

Définition 4.2.16. On dit d'un sous-ensemble Ω de \mathscr{M} qu'il est un ouvert de \mathscr{M} si pour tout $\xi \in \Omega$, il existe r > 0 tel que $\mathscr{B}(\xi, r) \subseteq \Omega$

Exemple 4.2.17. Dans \mathbb{R} muni de la distance usuelle, les intervalles ouverts sont des parties ouvertes de \mathbb{R} . La boule ouverte $\mathscr{B}(\xi, r)$ est une partie ouverte de \mathscr{M} . Pour tout $\xi^* \in \mathscr{M}$ et pour tout r > 0, l'ensemble { $\xi \in \mathscr{M} : d(\xi^*, \xi) > r$ } est une partie ouverte de \mathscr{M} .

Définition 4.2.18. Un sous-ensemble F de \mathscr{M} est fermé dans \mathscr{M} si son complémentaire $\mathscr{M} \setminus F$ est un ouvert de \mathscr{M} .

Exemple 4.2.19. Dans \mathbb{R} muni de la distance usuelle, les intervalles fermés sont fermés dans \mathbb{R} . La boule fermée $\overline{\mathscr{B}}(\xi, r)$ est fermée dans \mathscr{M} . Pour tout $\xi^* \in \mathscr{M}$ et pour tout r > 0, l'ensemble $\{\xi \in \mathscr{M} : d(\xi^*, \xi) \ge r\}$ est fermé dans \mathscr{M} .

Le lemme suivant donne une caractérisation des ensembles fermés en termes de notion de convergence de suites. Nous utiliserons cette caractérisation des ensembles fermés plus loin dans la preuve du lemme 4.4.8 qui est un résultat fondamental pour l'établissement de la condition géométrique de forte résidu-discernabilité.

Lemme 4.2.20. Soit $F \subseteq \mathcal{M}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) \digamma est fermé dans \mathscr{M} .
- (ii) Toute suite d'éléments de F qui converge dans \mathcal{M} a sa limite dans F.

Démonstration.

 $(i) \implies (ii)$ Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers $\xi \in \mathcal{M} \setminus F$. Puisque $\mathcal{M} \setminus F$ est ouvert, il existe donc r > 0 tel que

Chapitre 4. Forte discernabilité contrôlable des SDL perturbés

 $\mathscr{B}(\xi,r) \subseteq \mathscr{M} \setminus F$. D'autre part, d'après la définition de la convergence dans \mathscr{M} , il existe $N_r \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k > N_r$, $\xi_k \in \mathscr{B}(\xi,r)$. Par conséquent, lorsque $k > N_r$, $\xi_k \notin F$. Ceci est absurde car par hypothèse, $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de F.

 $(ii) \implies (i)$ Supposons qu'on a (ii) et que F n'est pas fermé dans \mathscr{M} . Alors $\mathscr{M} \setminus F$ n'est pas ouvert et par conséquent il existe $\xi \in \mathscr{M} \setminus F$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, \mathscr{B}\left(\xi, \frac{1}{k}\right) \not\subseteq \mathscr{M} \setminus F$.

On en déduit qu'il existe une suite $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de l'intersection $F \cap \mathscr{B}\left(\xi, \frac{1}{k}\right)$. Il vient donc que $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de F qui converge vers ξ . Grâce à (ii) on obtient $\xi \in F$. Ceci est absurde car par hypothèse $\xi \in \mathscr{M} \setminus F$.

Définition 4.2.21. Soient $\xi \in \mathcal{M}$ et \mathcal{N} , un sous-ensemble non vide de \mathcal{M} . La distance du point ξ à l'ensemble \mathcal{N} est le nombre

$$d\left(\xi,\mathcal{N}\right) = \inf\left\{d\left(\xi,\tilde{\xi}\right):\tilde{\xi}\in\mathcal{N}\right\}.$$
(4.4)

Exemple 4.2.22.

- Dans \mathbb{R} muni de la distance usuelle on a d(2,]-1; 1[) = 1.
- Soit $M \in \mathbb{R}^{q \times q'}$ une matrice de plein rang colonne et soit $\xi \in \mathbb{R}^{q}$. Le calcul de la distance $d_{2}(\xi, \operatorname{Im}(M))$ est un problème de moindres carrés ayant pour solution

$$d_2\left(\xi, \operatorname{Im}\left(M\right)\right) = \left\| \left(I_q - M \left(M^\top M \right)^{-1} M^\top \right) \xi \right\|_2.$$

Le vecteur $\tilde{\xi} = \left(I_q - M \left(M^{\top} M\right)^{-1} M^{\top}\right) \xi$ est le projeté orthogonale de ξ sur $\operatorname{Im}(M)^{\perp} = \operatorname{Ker}(M^{\top}).$



Figure 4.2 – Distance de ξ à l'image de la matrice M

Le lemme suivant donne une propriété fondamentale des ensembles fermés sur laquelle nous allons nous baser dans la troisième section pour établir la condition géométrique de forte discernabilité. **Lemme 4.2.23.** Soit F un ensemble fermé dans \mathcal{M} et soit $\xi \in \mathcal{M}$. Alors $d(\xi, F) = 0$ si et seulement si $\xi \in F$.

Démonstration. Supposons que $d(\xi, F) = 0$. D'après la définition de la borne inférieure, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ il existe une suite $(\xi_k)_{kin\mathbb{N}^*}$ d'éléments de F telle que

$$0 = d\left(\xi, F\right) \le d\left(\xi_k, \xi\right) < d\left(\xi, F\right) + \frac{1}{k} = \frac{1}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^\star.$$

En faisant tendre k vers l'infini il vient que la suite $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ξ . D'où $\xi \in \mathcal{F}$ car \mathcal{F} est fermé. Réciproquement, si on suppose que $\xi \in \mathcal{F}$ alors $d(\xi, \mathcal{F}) \leq d(\xi, \xi) = 0$. D'où le résultat.

4.3 Équivalence entre forte discernabilité et forte résidudiscernabilité

Dans cette section, nous montrons que l'étude de la forte discernabilité des systèmes linéaires se ramène à l'étude de la forte résidu-discernabilité de ces systèmes. Ce résultat nous permet de nous focaliser dans les sections suivantes sur l'analyse de forte résidu-discernabilité des systèmes linéaires perturbés. La forte résidu-discernabilité conduit à manipuler moins de variables inconnues car les états initiaux x_1^o de S_1 sont éliminés par projection dans l'espace de parité de S_1 et ceux de S_2 sont éliminés par projection dans l'espace de parité de S_2 .

Pour établir l'équivalence entre la notion de forte discernabilité et celle de forte résidudiscernabilité, nous allons uniquement montrer que la forte discernabilité implique la forte résidu-discernabilité car l'implication inverse a déjà été prouvée dans la proposition 1.4.9. Pour arriver à ce résultat, nous utilisons le lemme 4.3.2 qui est une conséquence du lemme 4.3.1 suivant.

Le lemme 4.3.1 donne une propriété liant les fonctions $\mathcal{R}_i^{[\kappa_i]}[\cdot, u]$ et $\overline{\mathcal{R}}_i^{[\kappa_i]}[\cdot, u]$ qui représentent respectivement les fonctions de calcul et d'évaluation des résidus de parité du système S_i commandé par l'entrée u. D'après les équations (1.56) et (1.57), ces fonctions sont définies par

$$\forall z \in \mathscr{C}^{\infty} \left(\mathbb{R}_{+}, \mathbb{R}^{m} \right), \quad \mathfrak{R}_{i}^{\left[\boldsymbol{\kappa}_{i}\right]} \left[u, z \right](t) = \mathbb{O}_{i \perp}^{\left[\boldsymbol{\kappa}_{i}\right]} \left[Z^{\left[\boldsymbol{\kappa}_{i}\right]}\left(t \right) - \mathbb{T}_{i}^{\left[\boldsymbol{\kappa}_{i}\right]} U^{\left[\boldsymbol{\kappa}_{i}\right]}\left(t \right) \right], \quad \forall t \in \mathcal{I}$$

 et

$$\forall w_i \in \mathscr{W}_i, \quad \overline{\mathcal{R}}_i^{[\kappa_i]}[u, w_i](t) = \mathbb{O}_{i\perp}^{[\kappa_i]} \overline{\mathbb{T}}_i^{[\kappa_i]} W_i^{[\kappa_i]}(t), \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

où on rappelle que $\mathbb{O}_{i\perp}^{[\kappa_i]}$ est une matrice de parité de S_i , $\mathbb{T}_i^{[\kappa_i]}$, la matrice de Toeplitz des

Chapitre 4. Forte discernabilité contrôlable des SDL perturbés

paramètres de Markov D_i et $C_i A_i^k B_i$, $i = 0, 1, ..., \kappa_i - 1$ et que $\overline{\mathbb{T}}_i^{[\kappa_i]}$ est la matrice de Toeplitz des paramètres de perturbations H_i et $C_i A_i^k E_i$, $k = 0, 1, ..., \kappa_i - 1$. Le résultat de ce lemme généralisent celui du point (*i*) du lemme 2.2.2 qui a été établi dans le cas où la fonction d'évaluation $\overline{\mathbb{R}}_i^{[\kappa_i]}[\cdot, u]$ est identiquement nulle sur \mathscr{W}_i (cas de S_i non soumis aux perturbations w_i).

Lemme 4.3.1. Soient $i \in \{1, 2\}$, $(u, w_i) \in \mathscr{U} \times \mathscr{W}_i$ et $z \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathfrak{I}, \mathbb{R}^m)$ avec \mathfrak{I} un sous-intervalle de \mathbb{R}_+ contenant l'origine $0 \ (0 \in \mathfrak{I})$. Si les fonctions $\mathcal{R}_i^{[\kappa_i]}[u, z]$ et $\overline{\mathcal{R}}_i^{[\kappa_i]}[u, w_i]$ sont identiques sur \mathfrak{I} alors z est u-compatible avec S_i c'est-à-dire $z \in \mathscr{S}_{i,\mathfrak{I}}(u, \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_i)$.

Démonstration. D'après les expressions de $\mathcal{R}_i^{[\kappa_i]}[u, z]$ et $\overline{\mathcal{R}}_i^{[\kappa_i]}[u, w_i]$ données respectivement par les équations (1.56) et (1.57), l'égalité de ces deux fonctions sur \mathcal{I} est équivalente à

$$\mathbb{O}_{i\perp}^{[\kappa_i]}\left[Z^{[\kappa_i]}\left(t\right) - \mathbb{T}_i^{[\kappa_i]}U^{[\kappa_i]}\left(t\right) - \overline{\mathbb{T}}_i^{[\kappa_i]}W_i^{[\kappa_i]}\left(t\right)\right] = 0_{r(\kappa_i)}, \quad \forall t \in \mathfrak{I}$$

$$(4.5)$$

où $r(\boldsymbol{\kappa}_i)$ est le nombre de fonctions composantes de $\mathcal{R}_i^{[\boldsymbol{\kappa}_i]}[u, z]$. Réécrivons S_i sous la forme suivante :

$$S_{i} \begin{cases} \dot{x}_{i}(t) = A_{i} x_{i}(t) + \widetilde{B}_{i} \widetilde{u}(t), \\ y_{i}(t) = C_{i} x_{i}(t) + \widetilde{D}_{i} \widetilde{u}(t), \\ x_{i}(0) = x_{i}^{o}, \end{cases}$$
(4.6)

avec

$$\widetilde{B}_i = \begin{bmatrix} B_i & E_i \end{bmatrix}$$
; $\widetilde{D}_i = \begin{bmatrix} D_i & H_i \end{bmatrix}$: $\widetilde{u}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ w_i(t) \end{bmatrix}$.

Sous cette forme, S_i a un modèle d'état équivalent à celui d'un système linéaire non perturbé de vecteur d'entrées connues \tilde{u} . La relation (4.5) est équivalente à

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{i}^{[\boldsymbol{\kappa}_{i}]}\left[\widetilde{u},z\right]\left(t\right) := \mathbb{O}_{i\perp}^{[\boldsymbol{\kappa}_{i}]}\left[Z^{[\boldsymbol{\kappa}_{i}]}\left(t\right) - \widetilde{\mathbb{T}}_{i}^{[\boldsymbol{\kappa}_{i}]}\widetilde{U}^{[\boldsymbol{\kappa}_{i}]}\left(t\right)\right] = 0_{r(\boldsymbol{\kappa}_{i})}, \quad \forall t \in \mathcal{I}$$

$$(4.7)$$

où $\widetilde{\mathbb{T}_i}^{[\kappa_i]}$ est la matrice de Toeplitz constituée des paramètres de Markov, \widetilde{D}_i et $C_i A_i^k \widetilde{B}_i$, $k = 0, 1, 2, \dots, \kappa_i - 1$:

$$\widetilde{\mathbb{T}}_{i}^{[\kappa_{i}]} = \begin{bmatrix} D_{i} & 0_{m \times (l+d)} & \cdots & 0_{m \times (l+d)} & 0_{m \times (l+d)} \\ C_{i} \widetilde{B}_{i} & \widetilde{D}_{i} & \cdots & 0_{m \times (l+d)} & 0_{m \times (l+d)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{i} A_{i}^{\kappa_{i}-2} \widetilde{B}_{i} & C_{i} A_{i}^{\kappa_{i}-3} \widetilde{B}_{i} & \cdots & \widetilde{D}_{i} & 0_{m \times (l+d)} \\ C_{i} A_{i}^{\kappa_{i}-1} \widetilde{B}_{i} & C_{i} A_{i}^{\kappa_{i}-2} \widetilde{B}_{i} & \cdots & C_{i} \widetilde{B}_{i} & \widetilde{D}_{i} \end{bmatrix}$$

D'après (1.56), $\widetilde{\mathcal{R}}_{i}^{[\kappa_{i}]}[u,\cdot]$ est une fonction de calcul des résidus de parité du système linéaire de matrice d'état A_{i} , de matrice de commande \widetilde{B}_{i} , de matrice d'observation C_{i} et de matrice d'action \widetilde{D}_{i} . La fonction $\widetilde{\mathcal{R}}_{i}^{[\kappa_{i}]}[\tilde{u}, z]$ étant identiquement nulle (voir équation (4.7)), on conclut grâce au point (*i*) du lemme 2.2.2 que *z* est \tilde{u} -compatible avec le système S_{i} décrit par (4.6) c'est-à-dire qu'il existe $x_{i}^{o} \in \mathbb{R}^{n}$ tel que

$$z(t) = y_i(t, x_i^o, \tilde{u}, 0_{\mathscr{W}_i}) = y_i(t, x_i^o, u, w_i), \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

D'où $z \in \mathscr{S}_{i,\mathcal{I}}(u, \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1).$

Le lemme 4.3.2 donne une condition suffisante pour que l'image de l'ensemble des sorties *u*-compatibles avec S_i par la fonction de calcul de résidu $\mathcal{R}_i^{[\kappa_i]}[u,\cdot]$ ait une intersection non vide avec l'image d'un ensemble quelconque par la même fonction. Cette condition généralise le résultat du point (*ii*) du lemme 2.2.2 qui a été établi dans le cas où S_i n'est soumis à aucune perturbation.

Lemme 4.3.2. Soient $i \in \{1, 2\}$, $u \in \mathscr{U}$ et soit $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{C}^{\infty}(\mathfrak{I}, \mathbb{R}^m)$ avec \mathfrak{I} un sous-intervalle de \mathbb{R}_+ contenant l'origine $0 \ (0 \in \mathfrak{I})$. Si $\mathcal{R}_i^{[\kappa_i]}[u, \mathscr{S}_{i,\mathfrak{I}}(u, \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_i)] \cap \mathcal{R}_i^{[\kappa_i]}[u, \mathscr{S}] \neq \emptyset$ alors on a $\mathscr{S}_{i,\mathfrak{I}}(u, \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_i) \cap \mathscr{S} \neq \emptyset$.

Démonstration. D'après (1.60), on a l'égalité suivante :

$$\mathcal{R}_{i}^{[k]}\left[u,\mathscr{S}_{i,\mathcal{I}}\left(u,\mathscr{X}_{i}^{o},\mathscr{W}_{i}\right)\right] = \left\{v\in\mathscr{C}\left(\mathcal{I},\mathbb{R}^{r_{i}(k)}\right): \exists \widetilde{w}\in\mathscr{W}_{i}, \ v\equiv\overline{\mathcal{R}}_{i}^{[k]}\left[u,\widetilde{w}\right]\right\}.$$

Par conséquent, la relation $\mathcal{R}_{i}^{[\kappa_{i}]}[u, \mathscr{S}_{i, \mathcal{I}}(u, \mathbb{R}^{n}, \mathscr{W}_{i})] \cap \mathcal{R}_{i}^{[\kappa_{i}]}[u, \mathscr{S}] \neq \emptyset$ implique qu'il existe $w_{i} \in \mathscr{W}_{i}$ et $z \in \mathscr{S}$ tels que $\mathcal{R}_{i}^{[\kappa_{i}]}[u, z]$ et $\overline{\mathcal{R}}_{i}^{[\kappa_{i}]}[u, w_{i}]$ sont identiques sur \mathcal{I} . D'après le le lemme 4.3.1, l'égalité de ces deux fonctions entraîne que z est u-compatible avec S_{i} . De plus, comme $z \in \mathscr{S}$, il vient que $z \in \mathscr{S}_{i,\mathcal{I}}(u, \mathbb{R}^{n}, \mathscr{W}_{1}) \cap \mathscr{S}$. D'où le résultat.

Le théorème suivant établit qu'une commande u permettant de discerner fortement S_1 et S_2 à travers leurs résidus de parité permet également de les discerner fortement et vice versa.

Théorème 4.3.3. Soit $u \in \mathscr{U}$. On $a : \mathscr{S}_{1,\mathcal{I}}(u, \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1) \cap \mathscr{S}_{2,\mathcal{I}}(u, \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_2) = \emptyset$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, 2\}, \ \mathcal{R}_i^{[\kappa_i]}[u, \mathscr{S}_{1,\mathcal{I}}(u, \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1)] \cap \mathcal{R}_i^{[\kappa_i]}[u, \mathscr{S}_{2,\mathcal{I}}(u, \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_2)] = \emptyset.$

Démonstration. Lorsque i = 1, l'implication directe s'obtient en prenant la contraposée du lemme 4.3.2 puis en posant $\mathscr{S} = \mathscr{S}_{2,\mathcal{I}}(u, \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_2)$. Pour i = 2, on obtient l'implication directe en prenant toujours la contraposée du lemme 4.3.2 puis en posant dans ce cas $\mathscr{S} = \mathscr{S}_{1,\mathcal{I}}(u, \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1)$. L'implication réciproque est donnée par la proposition 1.4.9.

Chapitre 4. Forte discernabilité contrôlable des SDL perturbés

En conséquence de ce résultat, si S_1 est fortement résidu-discernable de S_2 relativement à la commande u alors S_2 est aussi fortement résidu-discernable de S_1 relativement à la même commande. Il s'ensuit que la relation "être fortement résidu-discernable de" est symétrique contrairement à la relation "être faiblement résidu-discernable de" qui ne l'est pas forcément. Nous pouvons donc énoncer les résultats suivants :

Corollaire 4.3.4. Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) S_1 et S_2 sont fortement $(\mathcal{R}_1^{[\kappa_1]}, \mathcal{R}_2^{[\kappa_2]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernables durant la période d'observation \mathcal{I}
- (ii) S_1 est fortement $\left(\mathcal{R}_1^{[\kappa_1]}, \mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2\right)$ -discernable de S_2 sur \mathfrak{I}
- (iii) S_2 est fortement $\left(\mathcal{R}_2^{[\kappa_2]}, \mathcal{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2\right)$ -discernable de S_1 sur \mathfrak{I}
- (iv) S_1 et S_2 sont fortement $(\mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernables durant la période d'observation \mathfrak{I} .

Une conséquence immédiate du corollaire 4.3.4 et du critère de forte discernabilité contrôlable de [Babaali and Pappas, 2004] est que la non égalité des paramètres de Markov de S_1 et S_2 est une condition nécessaire et suffisante pour que les modèles nominaux de S_1 et S_2 soient fortement résidu-discernables.

Dans la section suivante nous donnons une condition nécessaire et suffisante de forte résidudiscernabilité. Grâce à l'équivalence entre la notion de forte discernabilité contrôlable et celle de forte résidu-discernabilité que nous avons établie, cette condition caractérise donc également la forte discernabilité.

4.4 Caractérisation géométrique de la forte discernabilité

Dans cette section nous donnons une condition géométrique permettant de caractériser la forte résidu-discernabilité de S_1 et S_2 relativement à une commande fixée. Cette condition repose sur la propriété de stricte positivité d'une fonction positive. La particularité de cette fonction est qu'elle n'est strictement positive que si S_1 et S_2 sont fortement résidu-discernables.

Nous utiliserons dans le reste du chapitre la caractérisation de la forte résidu-discernabilité donnée par la proposition 1.4.8. D'après cette proposition, la résidu-discernabilité de S_1 et S_2 peut être caractérisée à partir des fonctions $\Psi_{12}^{[\kappa_1]}$ et $\Psi_{21}^{[\kappa_2]}$ (pour la définition des fonctions $\Psi_{12}^{[\kappa_1]}$ et $\Psi_{21}^{[\kappa_2]}$, voir équation (1.67)) de projection d'écart de sorties de S_1 et S_2 . Plus précisément, d'après cette proposition, S_1 et S_2 sont fortement résidu-discernables sur [0;T] relativement à une commande $u \in \mathscr{U}$ si et seulement si au moins l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- la fonction $\Psi_{21}^{[\kappa_2]}[x_1^o, u, w_1, w_2]$ n'est pas identiquement nulle sur [0; T] pour tout triplet $(x_1^o, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$
- la fonction $\Psi_{12}^{[\kappa_1]}[x_2^o, u, w_1, w_2]$ n'est pas identiquement nulle sur [0; T] pour tout triplet $(x_2^o, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$

La première condition traduit la forte résidu-discernabilité de S_1 par rapport à S_2 relativement à la commande u durant la période d'observation [0;T]. La seconde exprime la forte résidu-discernabilité de S_2 par rapport à S_1 relativement à la commande u durant la période d'observation [0;T]. Les fonctions $\Psi_{21}^{[\kappa_2]}[x_1^o, u, w_1, w_2]$ et $\Psi_{12}^{[\kappa_1]}[x_2^o, u, w_1, w_2]$ sont définies explicitement sur \mathbb{R}_+ comme suit (voir annexe B pour le détail des calculs) :

$$\Psi_{ij}^{[\kappa_i]} \left[x_j^o, u, w_1, w_2 \right] (t) = \Lambda_{ij}^{[\kappa_i]} e^{t A_j} x_j^o + \widehat{\Psi}_{ij}^{[\kappa_i]} \left[u, w_1, w_2 \right] (t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$
(4.8)

avec

$$\widehat{\Psi}_{ij}^{[\boldsymbol{\kappa}_i]}\left[u, w_1, w_2\right](t) = \Lambda_{ij}^{[\boldsymbol{\kappa}_i]} \int_0^t e^{(t-\tau)A_j} \left[B_j u(\tau) + G_j w_j(\tau)\right] d\tau + \mathbb{O}_{i\perp}^{[\boldsymbol{\kappa}_i]} \mathbb{T}_{ji}^{[\boldsymbol{\kappa}_i]} U^{[\boldsymbol{\kappa}_2]}(t) + \\
\mathbb{O}_{i\perp}^{[\boldsymbol{\kappa}_i]} \overline{\mathbb{T}}_j^{[\boldsymbol{\kappa}_i]} W_j^{[\boldsymbol{\kappa}_i]}(t) - \mathbb{O}_{i\perp}^{[\boldsymbol{\kappa}_i]} \overline{\mathbb{T}}_i^{[\boldsymbol{\kappa}_2]} W_i^{[\boldsymbol{\kappa}_i]}(t)$$
(4.9)

en adoptant la notation ci-dessous et on rappelle que $\mathbb{T}_{12}^{[\kappa_i]} = -\mathbb{T}_{21}^{[\kappa_i]} = \mathbb{T}_1^{[\kappa_i]} - \mathbb{T}_2^{[\kappa_i]}$ est la matrice de Toeplitz des paramètres de Markov $D, CA^k B, k = 0, 1, \ldots, \kappa_i - 1$ du système augmenté S associé à S_1 et S_2 .

Notation 4.4.1. $\Lambda_{21}^{[\kappa_2]} = \mathbb{O}_{2\perp}^{[\kappa_2]} \mathbb{O}_{1}^{[\kappa_2]} ; \Lambda_{12}^{[\kappa_1]} = \mathbb{O}_{1\perp}^{[\kappa_1]} \mathbb{O}_{2}^{[\kappa_1]}$

Dans tout ce qui suivra, nous désignerons par $\Psi_{ij}^{[\kappa_i]}[\mathbb{R}^n, u, w_1, w_2]$, l'image de \mathbb{R}^n par l'application $\Psi_{ij}^{[\kappa_i]}[\cdot, u, w_1, w_2]$ c'est-à-dire

$$\Psi_{ij}^{[\kappa_i]}\left[\mathbb{R}^n, u, w_1, w_2\right] = \left\{\Psi_{ij}^{[\kappa_i]}\left[x_j^o, u, w_1, w_2\right] : x_j^o \in \mathbb{R}^n\right\}.$$
(4.10)

Le domaine $\Psi_{ij}^{[\kappa_i]}[\mathbb{R}^n, u, w_1, w_2]$ représente donc la projection sur l'espace de parité de S_i de l'ensemble de tous les écarts de sorties et de dérivées des sorties $Y_1^{[\kappa_i]} - Y_2^{[\kappa_i]}$, des systèmes S_1 et S_2 commandés par l'entrée u en étant soumis aux entrées inconnues w_1 et w_2 .

Nous supposerons dans tout ce qui suivra que

Hypothèse 4.4.2. Pour tout $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$, deux états initiaux x_j^o et \tilde{x}_j^o différents génèrent des signaux $\Psi_{ij}^{[\kappa_i]} \left[x_j^o, 0_{\mathscr{U}}, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2} \right]$ et $\Psi_{ij}^{[\kappa_i]} \left[\tilde{x}_j^o, 0_{\mathscr{U}}, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2} \right]$ différents.

Chapitre 4. Forte discernabilité contrôlable des SDL perturbés

Cette hypothèse signifie que les fonctions de projection d'écarts de sorties $\Psi_{21}^{[\kappa_2]}[\cdot, 0_{\mathscr{U}}, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}]$ et $\Psi_{12}^{[\kappa_1]}[\cdot, 0_{\mathscr{U}}, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_1}]$ associées aux modèles autonomes $(u = 0_{\mathscr{U}}, w_1 = 0_{\mathscr{W}_1})$ et $w_2 = 0_{\mathscr{W}_2})$ de S_1 et S_2 sont injectives.

La définition (4.8) de $\Psi_{ij}^{[\kappa_i]}$ entraı̂ne que pour tout $(x_j^o, \tilde{x}_j^o) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a :

$$\Psi_{ij}^{[\kappa_i]} \left[x_j^o, 0_{\mathscr{U}}, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2} \right] = \Psi_{ij}^{[\kappa_i]} \left[\tilde{x}_j^o, 0_{\mathscr{U}}, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2} \right] \iff \Lambda_{ij}^{[\kappa_i]} e^{tA_j} \left(x_j^o - \tilde{x}_j^o \right) = 0, \quad \forall t \in [0; T]$$

Il s'ensuit que l'implication suivante

$$\Lambda_{ij}^{[\boldsymbol{\kappa}_i]} e^{tA_j} \left(x_j^o - \tilde{x}_j^o \right) = 0 \implies x_j^o = \tilde{x}_j^o$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que l'hypothèse 4.4.2 soit satisfaite par S_1 et S_2 . Cette implication traduit l'observabilité du système dynamique autonome de matrice d'état A_j et de matrice d'observation $\Lambda_{ij}^{[\kappa_i]}$. Ainsi, l'hypothèse 4.4.2 suppose que les paires de matrices $\left(\Lambda_{21}^{[\kappa_2]}, A_1\right)$ et $\left(\Lambda_{12}^{[\kappa_1]}, A_2\right)$ sont observables c'est-à-dire les conditions d'observabilité suivantes de Kalman sont satisfaites :

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}\Lambda_{21}^{[\kappa_2]}\\\Lambda_{21}^{[\kappa_2]}A_1\\\vdots\\\Lambda_{21}^{[\kappa_2]}A_1^{n-1}\end{bmatrix}\right) = n = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}\Lambda_{12}^{[\kappa_1]}\\\Lambda_{12}^{[\kappa_1]}A_2\\\vdots\\\Lambda_{12}^{[\kappa_1]}A_2^{n-1}\end{bmatrix}\right)$$

Pour illustrer les différents notions et les résultats de ce chapitre nous utiliserons les systèmes dynamiques S_1 et S_2 de l'exemple 4.4.3 suivant.

Exemple 4.4.3. Considérons les systèmes dynamiques linéaires S_1 et S_2 définis par les équations (1.1), (1.2) et (1.3) avec

$$A_{1} = \begin{bmatrix} -0.6667 & 0.6667\\ 0.6667 & -0.83333 \end{bmatrix} ; B_{1} = \begin{bmatrix} 1\\ 0 \end{bmatrix} = E_{1} ; C_{1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} ; D_{1} = 0 = H_{1}$$
$$A_{2} = \begin{bmatrix} -0.7813 & 0.7813\\ 0.7813 & -1.0625 \end{bmatrix} ; B_{2} = E_{2} = B_{1} ; C_{2} = C_{1} ; D_{2} = 0 = H_{2}$$

Les systèmes S_1 et S_2 représentent deux modes caractérisant le fonctionnement du système hydraulique de la figure 4.3 ci-dessous. Ils modélisent deux comportements différents du procédé dans la configuration où la vanne 1 est fermée et la vanne 2 est ouverte. Les représentations
d'état de S_1 et S_2 sont obtenues en linéarisant le modèle d'état (I.3) du système hydraulique (voir annexe I pour les détails sur la linéarisation du procédé) autour d'un point de fonctionnement.



Figure 4.3 – Système hydraulique

Les entrées inconnues w_1 et w_2 sont supposées égales et correspondent à des perturbations qui agissent sur la commande (débit de la pompe) du système sous la forme d'un terme additif. Elles peuvent être interprétées comme une classe de défauts actionneurs. Un calcul des matrices d'observabilité des deux systèmes donne

$$\mathbb{O}_{1}^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 \\ 0.6667 & -0.8333 \\ -1.0000 & 1.1389 \end{bmatrix} ; \mathbb{O}_{2}^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 \\ 0.7813 & -1.0625 \\ -1.4404 & 1.7393 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, $\kappa_1 = 2 = \kappa_2$ et on peut choisir comme matrices de parités d'ordre 2 :

$$\mathbb{O}_{1\perp}^{[2]} = \begin{bmatrix} 0.1111 & 1.5000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$
; $\mathbb{O}_{2\perp}^{[2]} = \begin{bmatrix} 0.2197 & 1.8438 & 1.0000 \end{bmatrix}$

On obtient alors

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{12}^{[2]} \\ \Lambda_{12}^{[2]} A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2686 & 0.2566 \\ 0.4103 & -0.4825 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} \Lambda_{21}^{[2]} \\ \Lambda_{21}^{[2]} A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2292 & -0.1778 \\ -0.2713 & 0.3010 \end{bmatrix}$$

et il s'ensuit que

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} \Lambda_{12}^{[2]} \\ \Lambda_{12}^{[2]} A_2 \end{bmatrix} \right) = 2 = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} \Lambda_{21}^{[2]} \\ \Lambda_{21}^{[2]} A_1 \end{bmatrix} \right).$$

Les systèmes S_1 et S_2 satisfont donc l'hypothèse 4.4.2.

4.4.1Condition de forte résidu-discernabilité

Le but de cette partie est de montrer le théorème 4.4.11 qui donne une condition nécessaire et suffisante de forte résidu-discernabilité. Le lemme 4.4.8 est le principal résultat que nous allons utiliser pour établir cette condition.

Ce lemme montre que le domaine $\Psi_{ij}^{[\kappa_i]}[\mathbb{R}^n, u, w_1, w_2]$ de projection des écarts de sorties et des dérivées de sorties de S_1 et S_2 sur l'espace de parité de S_i est fermé. La preuve de ce résultat repose sur lemme 4.2.20 de caractérisation des ensembles fermés et sur les lemmes 4.4.4 et 4.4.7 ci-dessous.

Le lemme 4.4.4 introduit les matrices $\mathbb{G}_{21}^{[\kappa_2]}[T]$ et $\mathbb{G}_{12}^{[\kappa_1]}[T]$ puis énumère leurs propriétés que nous allons utiliser pour montrer le lemme 4.4.8.

Lemme 4.4.4. Soient $\mathbb{G}_{21}^{[\kappa_2]}[T] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\mathbb{G}_{12}^{[\kappa_1]}[T] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ les matrices définies par

$$\mathbb{G}_{ij}^{[\boldsymbol{\kappa}_i]}[T] = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{e}^{\tau A_j^{\top}} \left(\Lambda_{ij}^{[\boldsymbol{\kappa}_i]} \right)^{\top} \Lambda_{ij}^{[\boldsymbol{\kappa}_i]} \mathrm{e}^{\tau A_j} \,\mathrm{d}\tau.$$
(4.11)

Pour tout i, j = 1, 2 tels que $i \neq j$,

- (i) $\mathbb{G}_{ij}^{[\kappa_i]}[T]$ est symétrique. (ii) $\mathbb{G}_{ij}^{[\kappa_i]}[T]$ est semi-définie positive. (iii) $\mathbb{G}_{ij}^{[\kappa_i]}[T]$ est définie positive si et seulement si la paire $\left(\Lambda_{ij}^{[\kappa_i]}, A_j\right)$ est observable.

Démonstration.

- (i) La preuve du point (i) découle du fait que $e^{\tau A_j^{\top}} \left(\Lambda_{ij}^{[\kappa_i]} \right)^{\top} \Lambda_{ij}^{[\kappa_i]} e^{\tau A_j}$ est symétrique pour tout $\tau \in [0; T]$.
- (*ii*) Soit $\xi \in \mathbb{R}^n$. Il découle de la définition de $\mathbb{G}_{i\,j}^{[\kappa_i]}[T]$ que

$$\xi^T \mathbb{G}_{ij}^{[\boldsymbol{\kappa}_i]}[T] \xi = \frac{1}{T} \int_0^T \left\| \Lambda_{ij}^{[\boldsymbol{\kappa}_i]} e^{\tau A_j} \xi \right\|_2^2 d\tau.$$
(4.12)

Ceci entraı̂ne que $\xi^T \mathbb{G}_{ij}^{[\kappa_i]}[T] \xi \ge 0$. D'où $\mathbb{G}_{ij}^{[\kappa_i]}[T]$ est semi-définie positive.

(*iii*) Soit $\xi \in \mathbb{R}^n$. D'après (*ii*), $\mathbb{G}_{ij}^{[\kappa_i]}[T]$ est semi-définie positive. Donc montrer (*iii*) revient à prouver que

$$\left(\xi^{\top} \mathbb{G}_{ij}^{[\kappa_i]}[T] \; \xi = 0 \implies \xi = 0_n\right) \iff \text{la paire}\left(\Lambda_{ij}^{[\kappa_i]}, A_j\right) \text{est observable.}$$
 (4.13)

La fonction $\tau \mapsto \left\| \Lambda_{ij}^{[\kappa_i]} e^{\tau A_j} \xi \right\|_2^2$ étant continue et positive sur [0; T], on déduit de (4.12) que

$$\xi^{\top} \mathbb{G}_{ij}^{[\boldsymbol{\kappa}_i]}[T] \ \xi = 0 \iff \Lambda_{ij}^{[\boldsymbol{\kappa}_i]} e^{\tau A_j} \ \xi = 0, \quad \forall \tau \in [0; T].$$
(4.14)

De plus, en calculant les dérivées successives de la fonction $\tau \mapsto \Lambda_{ij}^{[\kappa_i]} e^{\tau A_j} \xi$ à $\tau = 0$ puis en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton on obtient

$$\Lambda_{ij}^{[\kappa_i]} e^{\tau A_j} \xi = 0, \quad \forall \tau \in [0;T] \iff \Lambda_{ij}^{[\kappa_i]} A^k \xi = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$
(4.15)

Les relations (4.14) et (4.15) impliquent que

$$\xi^{\top} \mathbb{G}_{ij}^{[\kappa_i]}[T] \xi = 0 \iff \Lambda_{ij}^{[\kappa_i]} A^k \xi = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

D'où on obtient l'équivalence (4.13).

Les matrices $T \mathbb{G}_{21}^{[\kappa_2]}[T]$ et $T \mathbb{G}_{12}^{[\kappa_1]}[T]$ sont les grammiens [Kreindler and Sarachik, 1964], [Georges, 1995], [Antsaklis and Michel, 2006], [Kalman, 2011] d'observabilité associés aux paires $\left(\Lambda_{21}^{[\kappa_2]}, A_1\right)$ et $\left(\Lambda_{12}^{[\kappa_1]}, A_2\right)$ durant la période d'observation [0; T].

Il résulte du lemme 4.4.4 et de l'hypothèse 4.4.2 que les matrices $\mathbb{G}_{21}^{[\kappa_2]}[T]$ et $\mathbb{G}_{12}^{[\kappa_1]}[T]$ sont définies positives. Par conséquent, elles sont inversibles et leurs valeurs propres sont strictement positives. Ces propriétés de $\mathbb{G}_{21}^{[\kappa_2]}[T]$ et $\mathbb{G}_{12}^{[\kappa_1]}[T]$ sont résumées dans le corollaire suivant :

Corollaire 4.4.5. Sous l'hypothèse 4.4.2, les matrices $\mathbb{G}_{21}^{[\kappa_2]}[T]$ et $\mathbb{G}_{12}^{[\kappa_1]}[T]$ sont inversibles. De plus leur spectre vérifie $\sigma\left(\mathbb{G}_{21}^{[\kappa_2]}[T]\right) \subset \mathbb{R}^*_+$ et $\sigma\left(\mathbb{G}_{12}^{[\kappa_1]}[T]\right) \subset \mathbb{R}^*_+$.

Exemple 4.4.6. Considérons les systèmes S_1 et S_2 de l'exemple 4.4.3. Pour un temps final d'observation T = 10, on obtient

$$\mathbb{G}_{21}^{[\kappa_2]}[T] = \begin{bmatrix} 0.00281 & -0.0018\\ -0.0018 & 0.00178 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbb{G}_{12}^{[\kappa_1]}[T] = \begin{bmatrix} 0.0031 & -0.00081\\ -0.00081 & 0.00123 \end{bmatrix}$$

On vérifie que les matrices $\mathbb{G}_{21}^{[\kappa_2]}[T]$ et $\mathbb{G}_{12}^{[\kappa_1]}[T]$ sont symétriques et définies positives.

Le lemme 4.4.7 ci-dessous est le théorème de Rayleigh-Ritz [Ortega, 1986], [Zhang, 2011]. Il donne une caractérisation variationnelle de la plus petite et de la plus grande valeur propre des matrices symétriques.

Lemme 4.4.7. Soit $M \in \mathbb{R}^{q \times q}$. Si M est symétrique alors sa plus petite valeur propre $\lambda_{min}(M)$ et sa plus grande valeur propre $\lambda_{max}(M)$ satisfont les relations suivantes

$$\boldsymbol{\lambda}_{\min}\left(M\right) = \min_{\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}_{q}} \frac{\boldsymbol{\xi}^{\top} M \boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|_{2}^{2}} \quad ; \quad \boldsymbol{\lambda}_{\max}\left(M\right) = \max_{\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}_{q}} \frac{\boldsymbol{\xi}^{\top} M \boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|_{2}^{2}} \tag{4.16}$$

Chapitre 4. Forte discernabilité contrôlable des SDL perturbés

Sur la base des résultats des lemmes 4.4.4 et 4.4.7 et des notions de topologie que nous avons introduites dans la seconde section, nous pouvons maintenant montrer que $\Psi_{ij}^{[\kappa_i]}[\mathbb{R}^n, u, w_1, w_2]$ est fermé dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}\left([0; T], \mathbb{R}^{r(\kappa_i)}\right)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{RMS}$ définie par (4.1). Rappelons que

$$r(\boldsymbol{\kappa}_i) = m(\boldsymbol{\kappa}_i + 1) - \operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_i^{[\boldsymbol{\kappa}_i]}\right)$$

est la dimension de l'espace de parité du système S_i .

Lemme 4.4.8. Soient $u \in \mathscr{U}$ et $(w_1, w_2) \in \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$. Alors pour tout $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$, l'ensemble $\Psi_{ij}^{[\kappa_i]}[\mathbb{R}^n, u, w_1, w_2]$ est fermé dans $(\mathscr{C}([0; T], \mathbb{R}^{r(\kappa_i)}), \|\cdot\|_{RMS})$.

Démonstration. La preuve que nous allons donner suit la démarche que propose le lemme 4.2.20 pour montrer qu'un ensemble est fermé dans un espace métrique.

Soit $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$, une suite d'éléments de $\Psi_{ij}^{[\kappa_i]}[\mathbb{R}^n, u, w_1, w_2]$ qui converge vers φ dans l'espace $\left(\mathscr{C}\left([0; T], \mathbb{R}^{r(\kappa_i)}\right), \|\cdot\|_{RMS}\right)$ c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N} \colon \forall k > N_{\varepsilon}, \qquad \|\varphi_k - \varphi\|_{RMS} \le \varepsilon.$$
(4.17)

Puisque $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\Psi_{ij}^{[\kappa_i]}[\mathbb{R}^n, u, w_1, w_2]$, il existe une suite $(x_{jk}^o)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{R}^n telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_k(\tau) = \Lambda_{21}^{[\boldsymbol{\kappa}_2]} e^{\tau A_j} x_{jk}^o + \widehat{\Psi}_{ij}^{[\boldsymbol{\kappa}_i]} [u, w_1, w_2](\tau), \quad \forall \tau \in [0; T].$$

$$(4.18)$$

où $\widehat{\Psi}_{ij}^{[\kappa_i]}[u, w_1, w_2]$ est défini par (4.9). Par conséquent, pour tout $k, k' \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\varphi_k(\tau) - \varphi_{k'}(\tau) = \Lambda_{ij}^{[\kappa_i]} e^{\tau A_j} \left(x_{jk}^o - x_{jk'}^o \right), \quad \forall \tau \in [0;T].$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \|\varphi_{k} - \varphi_{k'}\|_{RMS}^{2} &= \frac{1}{T} \left(x_{jk}^{o} - x_{jk'}^{o} \right)^{\top} \left(\int_{0}^{T} e^{\tau A_{j}^{\top}} \left(\Lambda_{ij}^{[\boldsymbol{\kappa}_{i}]} \right)^{\top} \Lambda_{ij}^{[\boldsymbol{\kappa}_{i}]} e^{\tau A_{j}} d\tau \right) \left(x_{jk}^{o} - x_{jk'}^{o} \right) \\ &= \left(x_{jk}^{o} - x_{jk'}^{o} \right)^{\top} \mathbb{G}_{ij}^{[\boldsymbol{\kappa}_{i}]} [T] \left(x_{jk}^{o} - x_{jk'}^{o} \right). \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{G}_{ij}^{[\kappa_i]}[T]$ est symétrique (voir lemme 4.4.4), on déduit du théorème de Rayleigh-Titz que

$$\left\|x_{jk}^{o}-x_{jk'}^{o}\right\|_{2}^{2}\boldsymbol{\lambda}_{\min}\left(\mathbb{G}_{21}^{[\boldsymbol{\kappa}_{2}]}[T]\right) \leq \left(x_{jk}^{o}-x_{jk'}^{o}\right)^{\top}\mathbb{G}_{ij}^{[\boldsymbol{\kappa}_{i}]}[T]\left(x_{jk}^{o}-x_{jk'}^{o}\right) = \left\|\varphi_{k}-\varphi_{k'}\right\|_{RMS}^{2}.$$

La valeur propre $\lambda_{\min} \left(\mathbb{G}_{21}^{[\kappa_2]}[T] \right)$ étant strictement positive (voir corollaire 4.4.5), il vient que

$$\begin{aligned} \left\| x_{j\,k}^{o} - x_{j\,k'}^{o} \right\|_{2} &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}\left(\mathbb{G}_{i\,j}^{[\kappa_{i}]}[T]\right)}} \, \left\| \varphi_{k} - \varphi_{k'} \right\|_{RMS} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}\left(\mathbb{G}_{i\,j}^{[\kappa_{i}]}[T]\right)}} \, \left\| \varphi_{k} - \varphi \right\|_{RMS} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}\left(\mathbb{G}_{i\,j}^{[\kappa_{i}]}[T]\right)}} \, \left\| \varphi_{k'} - \varphi \right\|_{RMS} \,. \end{aligned}$$

$$(4.19)$$

Soit $\varepsilon' > 0$ et soit $\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon' \sqrt{\lambda_{\min} \left(\mathbb{G}_{ij}^{[\kappa_i]}[T] \right)}$. Des inégalités (4.17) et (4.19) on obtient

$$(\forall (k,k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon k \ge N_{\varepsilon}, \, k' \ge N_{\varepsilon}) \implies \left\| x_{j\,k}^{o} - x_{j\,k'}^{o} \right\|_{2} \le \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} = \varepsilon'$$

Suivant la définition 4.2.9, $(x_{jk}^o)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de \mathbb{R}^n et par conséquent il existe $x_j^o \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lim_{k \to +\infty} x_{jk}^o = x_j^o$. L'existence du vecteur x_j^o découle du fait que \mathbb{R}^n est complet (voir exemple 4.2.13). En passant maintenant à la limite dans la relation (4.18), il vient que

$$\varphi(\tau) = \Lambda_{ij}^{[\kappa_i]} e^{\tau A_j} x_j^o + \widehat{\Psi}_{ij}^{[\kappa_2]} [u, w_1, w_2] (\tau), \quad \forall \tau \in [0; T]$$

On en déduit que $\varphi \in \Psi_{ij}^{[\kappa_2]}[\mathbb{R}^n, u, w_1, w_2]$. D'où le résultat.

Remarque 4.4.9. Pour les systèmes S_1 et S_2 ayant des états initiaux x_1^o et x_2^o qui ne parcourent pas \mathbb{R}^n tout entier mais qui évoluent respectivement dans des domaines fermés $\mathscr{X}_1^o \subset \mathbb{R}^n$ et $\mathscr{X}_2^o \in \mathbb{R}^n$, le résultat du lemme 4.4.8 reste valable lorsqu'on remplace \mathbb{R}^n par \mathscr{X}_j^o .

Le résultat du lemme 4.4.8 est utilisé pour établir la proposition suivant qui caractérise la forte résidu-discernabilité de S_1 et S_2 .

Proposition 4.4.10. Soit $u \in \mathscr{U}$. Pour tout $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) S_i est fortement $\left(\mathcal{R}_j^{[\kappa_j]}, \{u\}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2, \right)$ -résidu discernable de S_j sur [0; T].
- (ii) Pour tout $(w_1, w_2) \in \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$, $\Delta_{i/j}^{[\kappa_j]}(T, u, w_1, w_2) > 0$ où $\Delta_{i/j}^{[\kappa_j]}(T, u, \cdot, \cdot)$ est la fonction définie par

$$\boldsymbol{\Delta}_{i/j}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}(T, u, w_1, w_2) = d_{RMS} \left(\mathbf{0}^{[r(\boldsymbol{\kappa}_j)]}, \Psi_{ji}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]} [\mathbb{R}^n, u, w_1, w_2] \right), \quad (w_1, w_2) \in \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2 \quad (4.20)$$

avec d_{RMS} , la distance associée à la norme $\|\cdot\|_{RMS}$ et $\mathbf{0}^{[r(\kappa_j)]}$: $t \in [0;T] \mapsto 0_{r(\kappa_j)}$, la fonction nulle définie de [0;T] à valeurs dans $\mathbb{R}^{r(\kappa_i)}$.

Chapitre 4. Forte discernabilité contrôlable des SDL perturbés

Démonstration.

- $(i) \implies (ii)$ Supposents que la proposition (i) est vraie et supposents par l'absurde qu'il existe un couple $(w_1, w_2) \in \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$ tel que $\Delta_{i/j}^{[\kappa_j]}(T, u, w_1, w_2) = 0$. Alors d'après la définition (4.20) de $\Delta_{i/j}^{[\kappa_j]}(T, u, w_1, w_2)$ on obtient $d_{\text{RMS}}\left(\mathbf{0}^{[r(\kappa_j)]}, \Psi_{ji}^{[\kappa_j]}[\mathbb{R}^n, u, w_1, w_2]\right) = 0$. De plus, comme d'après le lemme 4.4.8 $\Psi_{ji}^{[\kappa_j]}[\mathbb{R}^n, u, w_1, w_2]$ est fermé dans l'espace normé $\left(\mathscr{C}\left([0;T],\mathbb{R}^{r(\boldsymbol{\kappa}_{j})}\right),\left\|\cdot\right\|_{RMS}\right)$, on déduit du lemme 4.2.23 que $0 \in \Psi_{ji}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}[\mathbb{R}^{n},u,w_{1},w_{2}]$. Par conséquent il existe un état initial $x_i^o \in \mathbb{R}^n$ tel que $\Psi_{ji}^{[\kappa_j]}[x_i^o, u, w_1, w_2] = 0$. Ceci contredit le fait que (i) est vraie.
- $(ii) \implies (i)$ Supposons que (ii) est vraie et soit $(x_i^o, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$. Alors on a

$$\left\|\Psi_{ji}^{[\kappa_{j}]}\left[x_{i}^{o}, u, w_{1}, w_{2}\right]\right\|_{RMS} \geq \inf_{x_{i}^{o} \in \mathbb{R}^{n}} \left\|\Psi_{ji}^{[\kappa_{j}]}\left[x_{i}^{o}, u, w_{1}, w_{2}\right]\right\|_{RMS} = \Delta_{i/j}^{[\kappa_{j}]}\left(T, u, w_{1}, w_{2}\right) > 0.$$

Par conséquent, la fonction $\Psi_{ji}^{[\kappa_j]}[x_i^o, u, w_1, w_2]$ n'est pas identiquement nulle sur [0; T]. D'où on obtient (i).

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la proposition 4.4.10

Théorème 4.4.11.

(i) Le système S_1 est fortement $\left(\mathcal{R}_2^{[\kappa_2]}, \{u\}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2, \right)$ -résidu discernable de S_2 sur [0; T] si et seulement si

$$\mathbb{R}_{+}^{\star} \supseteq \mathbf{\Delta}_{1/2}^{[\kappa_{2}]}(T, u, \mathscr{W}_{1}, \mathscr{W}_{2}) := \left\{ \mathbf{\Delta}_{1/2}^{[\kappa_{2}]}(T, u, w_{1}, w_{2}) : (w_{1}, w_{2}) \in \mathscr{W}_{1} \times \mathscr{W}_{2} \right\}.$$
(4.21)

où $\Delta_{1/2}^{[\kappa_2]}(T, u, \cdot, \cdot)$ est définie par la relation (4.20). (ii) Le système S_2 est fortement $(\mathcal{R}_1^{[\kappa_1]}, \{u\}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernable de S_1 sur [0; T]si et seulement si

$$\mathbb{R}_{+}^{\star} \supseteq \mathbf{\Delta}_{2/1}^{[\kappa_{1}]}(T, u, \mathscr{W}_{1}, \mathscr{W}_{2}) := \left\{ \mathbf{\Delta}_{2/1}^{[\kappa_{1}]}(T, u, w_{1}, w_{2}) : (w_{1}, w_{2}) \times \mathscr{W}_{1} \times \mathscr{W}_{2} \right\}$$
(4.22)

où $\Delta_{2/1}^{[\kappa_1]}(T, u, \cdot, \cdot)$ est définie par la relation (4.20).

(iii) Les systèmes S_1 et S_2 sont fortement ($\{u\}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$,)-résidu discernables sur [0;T] si et seulement si

$$\mathbb{R}_{+}^{\star} \supseteq \mathbf{\Delta}_{12}^{[\boldsymbol{\kappa}_{1},\boldsymbol{\kappa}_{2}]}(T, u, \mathscr{W}_{1}, \mathscr{W}_{2}) := \left\{ \mathbf{\Delta}_{12}^{[\boldsymbol{\kappa}_{1},\boldsymbol{\kappa}_{2}]}(T, u, w_{1}, w_{2}) : (w_{1}, w_{2}) \in \mathscr{W}_{1} \times \mathscr{W}_{2} \right\} \quad (4.23)$$

$$o\hat{u} \ \mathbf{\Delta}_{12}^{[\kappa_1,\kappa_2]}(T, u, \cdot, \cdot) \ est \ la \ fonction \ d\acute{e}finie \ sur \ \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2 \ par \\ \mathbf{\Delta}_{12}^{[\kappa_1,\kappa_2]}(T, u, w_1, w_2) = \min\left\{\mathbf{\Delta}_{1/2}^{[\kappa_2]}(T, u, w_1, w_2) \ , \ \mathbf{\Delta}_{2/1}^{[\kappa_1]}(T, u, w_1, w_2)\right\}.$$
(4.24)

Ainsi, l'étude de la forte discernabilité peut se faire à partir de l'étude de la stricte positivité de la fonction $\Delta_{12}^{[\kappa_1,\kappa_2]}(T, u, \cdot, \cdot)$. Cette propriété de $\Delta_{12}^{[\kappa_1,\kappa_2]}(T, u, \cdot, \cdot)$ traduit la non appartenance de la fonction nulle $\mathbf{0}^{[r(\kappa_1)]}$ au domaine $\Psi_{12}^{[\kappa_1]}[\mathbb{R}^n, u, w_1, w_2]$ puis la non appartenance de la fonction nulle $\mathbf{0}^{[r(\kappa_2)]}$ au domaine $\Psi_{21}^{[\kappa_2]}[\mathbb{R}^n, u, w_1, w_2]$.

4.4.2 Indice de forte résidu-discernabilité

Par définition, $\Delta_{12}^{[\kappa_1,\kappa_2]}(T, u, w_1, w_2)$ est la plus petite valeur entre la distance de la fonction $\mathbf{0}^{[r(\kappa_1)]}$ au domaine $\Psi_{12}^{[\kappa_1]}[\mathbb{R}^n, u, w_1, w_2]$ et la distance de $\mathbf{0}^{[r(\kappa_2)]}$ au domaine $\Psi_{21}^{[\kappa_2]}[\mathbb{R}^n, u, w_1, w_2]$. On propose de l'utiliser pour quantifier le degré de forte résidu-discernabilité de S_i et de S_2 .

Définition 4.4.12. On appelle indice de forte résidu-discernabilité du système S_1 (resp. S_2) par rapport au système S_2 (resp. S_1) relativement à la commande $u \in \mathscr{U}$, la fonction $\Delta_{1/2}^{[\kappa_2]}(T, u, \cdot, \cdot)$ (resp. $\Delta_{2/1}^{[\kappa_1]}(T, u, \cdot, \cdot)$) définie par l'équation (4.20). L'indice de forte résidu-discernabilité des systèmes S_1 et S_2 relativement à la commande $u \in \mathscr{U}$ est la fonction positive $\Delta_{12}^{[\kappa_1,\kappa_2]}(T, u, \cdot, \cdot)$ définie par l'équation (4.24)

La section suivante a pour objectif d'étudier l'influence des tailles des domaines de perturbations \mathscr{W}_1 et \mathscr{W}_2 sur la forte résidu-discernabilité des systèmes S_1 et S_2 . On va pour cela s'appuyer sur le théorème 4.4.11 qui montre que l'étude de la stricte positivité de $\Delta_{12}^{[\kappa_1,\kappa_2]}(T, u, \cdot, \cdot)$ suffit pour caractériser la forte résidu-discernabilité de S_1 et S_2 relativement à la commande u. Une formule explicite de l'indice $\Delta_{12}^{[\kappa_1,\kappa_2]}(T, u, \cdot, \cdot)$ est donc nécessaire et sera donnée par le théorème 4.4.15 ci-dessous.

D'après l'équation (4.20) et la définition 4.2.21 de la distance d'un point à un ensemble, on peut écrire $\Delta_{i/j}^{[\kappa_j]}(T, u, w_1, w_2)$ comme valeur optimale suivante :

$$\boldsymbol{\Delta}_{i/j}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}\left(T, u, w_{1}, w_{2}\right) = \inf_{x_{i}^{o} \in \mathbb{R}^{n}} \left\| \Psi_{j \, i}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}\left[x_{i}^{o}, u, w_{1}, w_{2}\right] \right\|_{RMS}$$

De plus, puisque la fonction $x_i^o \mapsto \left\| \Psi_{ji}^{[\kappa_j]} \left[x_i^o, u, w_1, w_2 \right] \right\|_{RMS}$ est positive, il vient que

$$\left(\Delta_{i/j}^{[\kappa_j]}(T, u, w_1, w_2)\right)^2 = \inf_{x_i^o \in \mathbb{R}^n} \left\|\Psi_{ji}^{[\kappa_j]}[x_i^o, u, w_1, w_2]\right\|_{RMS}^2.$$
(4.25)

Chapitre 4. Forte discernabilité contrôlable des SDL perturbés

La proposition suivante montre que le carré de $\Delta_{i/j}^{[\kappa_j]}(T, u, w_1, w_2)$ est la valeur optimale d'un problème d'optimisation quadratique sans contraintes.

Proposition 4.4.13. Soient $u \in \mathscr{U}$ et $(w_{1,2}) \in \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$. Pour tout $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$,

$$\left\|\Psi_{ji}^{[\kappa_{j}]}\left[x_{i}^{o}, u, w_{1}, w_{2}\right]\right\|_{RMS}^{2} = (x_{i}^{o})^{\top} \mathbb{G}_{ji}^{[\kappa_{j}]}\left[T\right] x_{i}^{o} + 2 \left(\mathbb{L}_{ji}^{[\kappa_{j}]}\left[T, u, w_{1}, w_{2}\right]\right)^{\top} x_{i}^{o} + \left\|\widehat{\Psi}_{ji}^{[\kappa_{j}]}\left[u, w_{1}, w_{2}\right]\right\|_{RMS}^{2}$$

où $\widehat{\Psi}_{ji}^{[\kappa_j]}[u, w_1, w_2]$ est la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par l'équation (4.9) et $\mathbb{L}_{ji}^{[\kappa_j]}[T, u, w_1, w_2] \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur défini par

$$\mathbb{L}_{ji}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}[T, u, w_1, w_2] = \frac{1}{T} \int_0^T e^{\tau A_i^\top} \left(\Lambda_{ji}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]} \right)^\top \widehat{\Psi}_{ji}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}[u, w_1, w_2](\tau) \, \mathrm{d}\tau.$$
(4.26)

Démonstration. Pour tout $\tau \in [0;T]$,

$$\begin{split} \left\| \Psi_{j\,i}^{[\kappa_{j}]} \left[x_{i}^{o}, u, w_{1}, w_{2} \right] (\tau) \right\|_{2}^{2} &= \left\langle \Lambda_{j\,i}^{[\kappa_{j}]} e^{\tau A_{i}} x_{i}^{o} + \widehat{\Psi}_{j\,i}^{[\kappa_{j}]} \left[u, w_{1}, w_{2} \right] (\tau), \Lambda_{j\,i}^{[\kappa_{j}]} e^{\tau A_{i}} x_{i}^{o} + \widehat{\Psi}_{j\,i}^{[\kappa_{j}]} \left[u, w_{1}, w_{2} \right] (\tau) \right\rangle \\ &= \left\| \Lambda_{j\,i}^{[\kappa_{j}]} e^{\tau A_{i}} x_{i}^{o} \right\|_{2}^{2} + \left\| \widehat{\Psi}_{j\,i}^{[\kappa_{j}]} \left[u, w_{1}, w_{2} \right] (\tau) \right\|_{2}^{2} + \\ & 2 \left\langle \Lambda_{j\,i}^{[\kappa_{j}]} e^{\tau A_{i}} x_{i}^{o}, \widehat{\Psi}_{j\,i}^{[\kappa_{j}]} \left[u, w_{1}, w_{2} \right] (\tau) \right\rangle \end{split}$$

c'est-à-dire

$$\begin{split} \left\| \Psi_{j\,i}^{[\kappa_{j}]} \left[x_{i}^{o}, u, w_{1}, w_{2} \right] (\tau) \right\|_{2}^{2} &= \left(x_{i}^{o} \right)^{\top} e^{\tau A_{i}^{\top}} \left(\Lambda_{j\,i}^{[\kappa_{j}]} \right)^{\top} \Lambda_{j\,i}^{[\kappa_{j}]} e^{\tau A_{i}} x_{i}^{o} + \left\| \widehat{\Psi}_{j\,i}^{[\kappa_{j}]} \left[u, w_{1}, w_{2} \right] (\tau) \right\|_{2}^{2} + \\ & 2 \left(\widehat{\Psi}_{j\,i}^{[\kappa_{j}]} \left[u, w_{1}, w_{2} \right] (\tau) \right)^{\top} \Lambda_{j\,i}^{[\kappa_{j}]} e^{\tau A_{i}} x_{i}^{o}. \end{split}$$

On obtient le résultat en intégrant d'abord l'égalité précédente sur [0;T] par rapport à τ puis en multipliant ensuite la relation obtenue après intégration par $\frac{1}{T}$.

Le lemme 4.4.14 [Rustem, 1981], [Ortega, 1986], [Gallier, 2011] ci-dessous est un résultat classique d'optimisation quadratique. Il donne la valeur minimale des formes quadratiques (4.27).

Lemme 4.4.14. Soient $M \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $v \in \mathbb{R}^{q}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ et soit φ , la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^{q} par

$$\varphi\left(\xi\right) = \frac{1}{2}\,\xi^{\top}\,M\,\xi + v^{\top}\,\xi + \gamma, \quad \xi \in \mathbb{R}^{q}. \tag{4.27}$$

Si M est symétrique définie positive alors φ a pour valeur minimale sur \mathbb{R}^q ,

$$\min_{\xi \in \mathbb{R}^q} \varphi\left(\xi\right) = -\frac{1}{2} v^\top M^{-1} v + \gamma.$$

Nous pouvons à présent établir la formule explicite de l'indice de forte résidu-discernabilité de S_i par rapport à S_j donné par l'équation (4.25).

Théorème 4.4.15. Soit $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$ et soit $u \in \mathscr{U}$. Pour tout $(w_1, w_2) \in \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$ on a

$$\boldsymbol{\Delta}_{i/j}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}(T, u, w_{1}, w_{2}) = \sqrt{\left\| \widehat{\Psi}_{ji}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}[u, w_{1}, w_{2}] \right\|_{RMS}^{2} - \left(\mathbb{L}_{ji}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}[T, u, w_{1}, w_{2}] \right)^{\top} \left(\mathbb{G}_{ji}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}[T] \right)^{-1} \mathbb{L}_{ji}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}[T, u, w_{1}, w_{2}] \right)^{1}}$$

où on rappelle que le vecteur $\mathbb{L}_{ji}^{[\kappa_j]}(T, u, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^n$ est défini par l'équation (4.26) et la fonction $\widehat{\Psi}_{ji}^{[\kappa_j]}[u, w_1, w_2] \in \mathscr{C}([0; T], \mathbb{R})$ est définie par (4.9).

Démonstration. Il découle de la proposition 4.4.13 que la forme quadratique $\left\|\Psi_{ji}^{[\kappa_j]}[x_i^o, u, w_1, w_2]\right\|_{RMS}^2$ peut être réécrite comme suit :

$$\left\|\Psi_{ji}^{[\kappa_{j}]}\left[x_{i}^{o}, u, w_{1}, w_{2}\right]\right\|_{RMS}^{2} = 2\,\varphi\left[u, w_{1}, w_{2}\right]\left(x_{i}^{o}\right)$$

où $\varphi[u, w_1, w_2]$ est la forme quadratique définie par

$$\varphi[u, w_1, w_2](x_i^o) = \frac{1}{2} (x_i^o)^\top \mathbb{G}_{ji}^{[\kappa_j]}[T] x_i^o + \left(\mathbb{L}_{ji}^{[\kappa_j]}[T, u, w_1, w_2]\right)^\top x_i^o + \frac{1}{2} \left\|\widehat{\Psi}_{ji}^{[\kappa_j]}[u, w_1, w_2]\right\|_{RMS}^2.$$

Par conséquent, on déduit du lemme 4.4.14 que la borne inférieure $\left(\Delta_{i/j}^{[\kappa_j]}(T, u, w_1, w_2)\right)^2 = \inf_{x_j^o \in \mathbb{R}^n} \left\|\Psi_{ji}^{[\kappa_j]}[x_i^o, u, w_1, w_2]\right\|_{RMS}^2$ est atteinte sur \mathbb{R}^n et que

$$\left(\Delta_{i/j}^{[\kappa_{j}]}(T, u, w_{1}, w_{2}) \right)^{2} = 2 \min_{x_{i}^{o} \in \mathbb{R}^{n}} \varphi \left[u, w_{1}, w_{2} \right] \left(x_{i}^{o} \right)$$

$$= - \left(\mathbb{L}_{ji}^{[\kappa_{j}]}[T, u, w_{1}, w_{2}] \right)^{\top} \left(\mathbb{G}_{ji}^{[\kappa_{j}]}[T] \right)^{-1} \mathbb{L}_{ji}^{[\kappa_{j}]}[T, u, w_{1}, w_{2}] + \left\| \widehat{\Psi}_{ji}^{[\kappa_{j}]}[u, w_{1}, w_{2}] \right\|_{RMS}^{2}.$$

D'où le résultat.

Remarque 4.4.16. Les indices $\Delta_{1/2}^{[\kappa_2]}(T, u, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2})$ et $\Delta_{2/1}^{[\kappa_1]}(T, u, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2})$ des modèles nominaux de S_1 et S_2 peuvent être facilement calculés car leurs formules données par le théorème 4.4.15 dépendent uniquement de la commande u et des matrices connues qui définissent les modèles d'état de S_1 et S_2 .

Chapitre 4. Forte discernabilité contrôlable des SDL perturbés

D'après le lemme 4.4.14, la valeur optimale $\Delta_{i/j}^{[\kappa_j]}(T, u, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2})$ est atteinte en un état initial $x_{i\min}^o$ de S_i :

$$\boldsymbol{\Delta}_{i/j}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}(T, u, 0_{\mathscr{W}_{1}}, 0_{\mathscr{W}_{2}}) = \left\| \Psi_{ji}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]} \left[x_{i \min}^{o}, u, 0_{\mathscr{W}_{1}}, 0_{\mathscr{W}_{2}} \right] \right\|_{RMS}$$

D'autre part, la fonction $\Psi_{ji}^{[\kappa_j]}[x_{i\min}^o, u, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}]$ est par définition l'écart suivant de résidus (voir équation (1.67)):

$$\Psi_{j\,i}^{[\kappa_j]}\left[x_{i\,\min}^o, u, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}\right] = \mathcal{R}_{j}^{[\kappa_j]}\left[u, y_i\left(\cdot, x_{i\,\min}^o, u, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}\right)\right] - \mathcal{R}_{j}^{[\kappa_j]}\left[u, y_j\left(\cdot, x_j^o, u, 0_{\mathscr{W}_j}\right)\right].$$

Le résidu $\Re_j^{[\kappa_j]}\left[u, y_j\left(\cdot, x_j^o, u, 0_{\mathscr{W}_j}\right)\right]$ de S_j calculé avec les données u et y_j du modèle non perturbé S_j étant nul (voir relation (1.62)), on peut alors écrire que

$$\boldsymbol{\Delta}_{i/j}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}\left(T, u, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}\right) = \left\| \mathcal{R}_j^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}\left[y_{i\,\min}, u\right] \right\|_{RMS} = d_{RMS}\left(\mathbf{0}^{[r(\boldsymbol{\kappa}_j)]}, \mathcal{R}_j^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}\left[y_{i\,\min}, u\right] \right)$$

où $y_{i\min} := y_i(\cdot, x_{i\min}^o, u, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2})$. Ainsi, l'indice $\Delta_{i/j}^{[\kappa_j]}(T, u, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2})$ peut être interprété comme la valeur minimale de toutes les énergies totales des résidus $\mathcal{R}_j^{[\kappa_j]}[u, y_i]$ de S_j qu'on peut calculer avec la commande u et les sorties u-compatibles avec le modèle nominal de S_i .

Exemple 4.4.17. Considérons à nouveau les systèmes S_1 et S_2 de l'exemple 4.4.3. Supposons que les domaines \mathscr{W}_1 et \mathscr{W}_2 des perturbations qui agissent sur S_1 et S_2 sont de la forme

$$\mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2 = \{ (w_1, w_2) : w_1(t) = w_2(t) = \gamma \cos(-0.5t) : \gamma \in \mathbb{R} \}.$$
(4.28)

Ainsi, S_1 et S_2 sont soumis aux mêmes perturbations déterministes. Durant la période d'observation [0; 10] (T = 10), appliquons un échelon d'amplitude \mathbf{u}_0 (c'est-à-dire $u(t) = \mathbf{u}_0, \forall t \in \mathbb{R}_+$) aux deux systèmes. On obtient les expressions suivantes des vecteurs $\mathbb{L}_{ij}^{[2]}[T, u, w_1, w_2]$:

$$\mathbb{L}_{12}^{[2]}[T, u, w_1, w_2] = \begin{bmatrix} 0.0014 \,\mathbf{u}_0 - 0.000189 \,\gamma \\ 0.00196 \,\mathbf{u}_0 + 0.000575 \,\gamma \end{bmatrix} ; \ \mathbb{L}_{21}^{[2]}[T, u, w_1, w_2] = \begin{bmatrix} 0.00383 \,\mathbf{u}_0 + 0.0000357 \,\gamma \\ 0.00395 \,\mathbf{u}_0 + 0.0000536 \,\gamma \end{bmatrix}$$

Le calcul des vecteurs $\widehat{\Psi}_{12}^{[2]}[u, w_1, w_2]$ et $\widehat{\Psi}_{21}^{[2]}[u, w_1, w_2]$, donne :

$$\left\|\widehat{\Psi}_{12}^{[2]}\left[u, w_1, w_2\right]\right\|_{RMS}^2 = 0.0198 \,\mathbf{u}_0^2 - 0.00635 \,\gamma \,\mathbf{u}_0 + 0.00525 \,\gamma^2$$

et

$$\left\|\widehat{\Psi}_{21}^{[2]}\left[u, w_1, w_2\right]\right\|_{RMS}^2 = 0.0376 \,\mathbf{u}_0^2 - 0.0098 \,\gamma \,\mathbf{u}_0 + 0.00753 \,\gamma^2.$$

Par application des résultats du théorème 4.4.15, on obtient

$$\boldsymbol{\Delta}_{1/2}^{[2]}\left(u, w_1, w_2\right) = \sqrt{0.00895 \,\mathbf{u}_0^2 - 0.0152 \,\gamma \,\mathbf{u}_0 + 0.00724 \,\gamma^2}$$

et

$$\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{2/1}}^{[2]}\left(u, w_1, w_2\right) = \sqrt{0.00618 \,\mathbf{u}_0^2 - 0.0103 \,\gamma \,\mathbf{u}_0 + 0.00491 \,\gamma^2}.$$

Le discriminant du polynôme $0.00724 \gamma^2 - 0.0152 \gamma \mathbf{u}_0 + 0.00895 \mathbf{u}_0^2 + est - 2.8152 10^{-5} \mathbf{u}_0^2 < 0$ et celui du polynôme $0.00491 \gamma^2 - 0.0103 \gamma \mathbf{u}_0 + 0.00618 \mathbf{u}_0^2$ est $-1.5285 10^{-5} \mathbf{u}_0^2 < 0$. Par conséquent, $\mathbf{\Delta}_{1/2}^{[\kappa_2]}(T, u, \mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2) \subseteq \mathbb{R}_+^{\star}$ et $\mathbf{\Delta}_{2/1}^{[\kappa_1]}(T, u, \mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2) \subseteq \mathbb{R}_+^{\star}$. On conclut que S_1 et S_2 sont fortement résidu-discernables relativement à l'échelon $u(t) = \mathbf{u}_0$. Notons que pour les modèles nominaux de S_1 et S_2 on a l'inégalité suivante

$$\Delta_{1/2}^{[\kappa_2]}(u, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}) = \sqrt{0.00895} |\mathbf{u}_0| > \sqrt{0.00618} |\mathbf{u}_0| = \Delta_{2/1}^{[\kappa_1]}(u, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}).$$

Ceci signifie que le résidu d'énergie minimale de S_2 calculé avec les données u et $y_{1 \min}$ de S_1 ($\Re_2^{[\kappa_2]}[y_{1\min}, u]$) s'écarte plus de la fonction nulle $\mathbf{0}^{[r(\kappa_2)]} = \mathbf{0}^{[r(\kappa_1)]}$ que le résidu d'énergie minimale de S_1 ($\Re_1^{[\kappa_1]}[y_{2\min}, u]$) calculé avec les données u et $y_{2\min}$ de S_2 .

4.5 Robustesse de la forte discernabilité vis-à-vis des perturbations

Dans cette section, nous supposons que les modèles nominaux de S_1 et S_2 sont contrôlablement discernables au sens fort (les modèles nominaux n'ont pas les mêmes paramètres de Markov) et $\mathbf{u}^* \in \mathscr{U}$ est une commande qui les rend contrôlablement discernables au sens fort. Notons que le choix d'une telle commande peut être obtenu grâce à la caractérisation de la zone d'indiscernabilité que nous avons donnée dans chapitre 3. On s'intéresse au problème 4.1.1 de "robustesse" de la forte discernabilité contrôlable des modèles nominaux vis-à-vis des perturbations déterministes. Nous allons déterminer les tailles maximales des domaines des perturbations \mathscr{W}_1 et \mathscr{W}_2 qui préservent la forte discernabilité contrôlable de S_1 et S_2 relativement à la commande \mathbf{u}^* . Ce résultat est donné par le théorème 4.5.4 dont la preuve repose sur les lemmes 4.5.1 et 4.5.2 suivants.

Le lemme 4.5.1 sera utilisé dans la preuve du lemme 4.5.2 pour pouvoir expliciter l'indice de discernabilité $\Delta_{i/j}^{[\kappa_j]}[T, \mathbf{u}^*, \cdot, \cdot]$ des systèmes perturbés en fonction de l'indice de discernabilité $\Delta_{i/j}^{[\kappa_j]}[T, \mathbf{u}^*, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}]$ des modèles nominaux.

Lemme 4.5.1. Soient $(q, s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathbb{R}^{q \times q}$, une matrice symétrique définie positive. L'application $\Theta[M]$ définie sur $\mathbb{R}^q \times \mathscr{C}([0;T],\mathbb{R}^s)$ par

$$\Theta[M](\xi,\varphi) = -\xi^{\top} M^{-1}\xi + \|\varphi\|_{RMS}^{2}, \quad (\xi,\varphi) \in \mathbb{R}^{q} \times \mathscr{C}([0;T],\mathbb{R}^{s})$$

$$(4.29)$$

est telle que pour tout $(\xi_0,\xi) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ et pour tout $(\varphi_0,\varphi) \in \mathscr{C}([0\,;T],\mathbb{R}^s) \times \mathscr{C}([0\,;T],\mathbb{R}^s),$

$$\Theta[M](\xi_0 + \xi, \varphi_0 + \varphi) = \Theta[M](\xi_0, \varphi_0) - \widehat{\Theta}[M]\left(\begin{bmatrix}\varphi_0\\\varphi\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\xi_0\\\xi\end{bmatrix}\right)$$
(4.30)

avec

$$\widehat{\Theta}\left[M\right]\left(\begin{bmatrix}\varphi_{0}\\\varphi\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\xi_{0}\\\xi\end{bmatrix}\right) = \left\|M^{-1/2}\xi\right\|_{2}^{2} - \left\|\varphi\right\|_{RMS}^{2} + 2\left\langle M^{-1/2}\xi, M^{-1/2}\xi_{0}\right\rangle - 2\left\langle\varphi,\varphi_{0}\right\rangle_{RMS}$$
(4.31)

où $M^{-1/2}$ désigne la racine carrée de l'inverse de la racine carrée de M.

Démonstration. Soient $(\xi_0,\xi) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ et $(\varphi_0,\varphi) \in \mathscr{C}([0;T],\mathbb{R}^s) \times \mathscr{C}([0;T],\mathbb{R}^s)$. Puisque M^{-1} est symétrique et $(M^{-1/2})^2 = M^{-1}$, on peut alors écrire que

$$\Theta [M] (\xi_0 + \xi, \varphi_0 + \varphi) = - \left(\xi_0^\top + \xi^\top\right) M^{-1} (\xi_0 + \xi) + \|\varphi_0 + \varphi\|_{RMS}^2$$

$$= -\xi_0^\top M^{-1} \xi_0 - 2 \langle M^{-1} \xi, \xi_0 \rangle - \langle M^{-1} \xi, \xi \rangle + \|\varphi_0\|_{RMS}^2 + 2 \langle \varphi, \varphi_0 \rangle_{RMS} + \|\varphi\|_{RMS}^2$$

$$= \Theta [M] (\xi_0, \varphi_0) + \|\varphi\|_{RMS}^2 - \left\|M^{-1/2} \xi\right\|_2^2 + 2 \langle \varphi, \varphi_0 \rangle_{RMS} - 2 \langle M^{-1/2} \xi, M^{-1/2} \xi_0 \rangle.$$

D'où le résultat.

Le lemme 4.5.2 montre que le domaine $\mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$ des perturbations déterministes qui agissent sur S_1 et S_2 peut être partitionné en deux sous-domaines $\mathscr{W}_{i/j}^-[\mathbf{u}^*]$ et $\mathscr{W}_{i/j}^+[\mathbf{u}^*]$. Le premier correspond à une région du domaine des perturbations où S_i est toujours discernables de S_j . Sur ce domaine les perturbations n'influencent donc pas la forte résidu-discernabilité des modèles nominaux. Les perturbations qui peuvent rendre les systèmes non fortement résidu-discernables sont localisées dans le second domaine.

Lemme 4.5.2. Soit $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$ et soient $\mathscr{W}_{i/j}^{-}[\mathbf{u}^{\star}]$ et $\mathscr{W}_{i/j}^{+}[\mathbf{u}^{\star}]$ les sous-ensembles de $\mathscr{W}_{1} \times \mathscr{W}_{2}$ définis par

$$\mathscr{W}_{i/j}^{-}\left[\mathbf{u}^{\star}\right] = \left\{ (w_1, w_2) : \boldsymbol{\delta}_{i/j}\left(T, \mathbf{u}^{\star}, w_1, w_2\right) \le 0 \right\} \quad et \; \mathscr{W}_{i/j}^{+}\left[\mathbf{u}^{\star}\right] = \left(\mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2\right) \setminus \mathscr{W}_{i/j}^{-}\left[\mathbf{u}^{\star}\right] \tag{4.32}$$

avec $\delta_{i/j}(T, \mathbf{u}^{\star}, \cdot, \cdot)$, la fonction définie sur $\mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$ par

$$\boldsymbol{\delta}_{i/j}\left(T,\mathbf{u}^{\star},w_{1},w_{2}\right) = \widehat{\Theta}\left[\mathbb{G}_{j\,i}^{\left[\boldsymbol{\kappa}_{j}\right]}\left[T\right]\right] \left(\begin{bmatrix} \widehat{\Psi}_{j\,i}^{\left[\boldsymbol{\kappa}_{j}\right]}\left[\mathbf{u}^{\star},0_{\mathscr{W}_{1}},0_{\mathscr{W}_{2}}\right] \\ \widetilde{\Psi}_{j\,i}^{\left[\boldsymbol{\kappa}_{j}\right]}\left[w_{1},w_{2}\right] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbb{L}_{j\,i}^{\left[\boldsymbol{\kappa}_{j}\right]}\left[T,\mathbf{u}^{\star},0_{\mathscr{W}_{1}},0_{\mathscr{W}_{2}}\right] \\ \widetilde{\mathbb{L}}_{j\,i}^{\left[\boldsymbol{\kappa}_{j}\right]}\left[T,w_{1},w_{2}\right] \end{bmatrix} \right)$$
(4.33)

 $\begin{array}{l} o\hat{u} \,\widehat{\Theta} \left[\mathbb{G}_{ji}^{[\kappa_{j}]}\left[T\right]\right] est \, d\acute{e}finie \, par \, l'\acute{e}quation \, (4.31), \, le \, vecteur \, \mathbb{L}_{ji}^{[\kappa_{j}]}\left[T, \mathbf{u}^{\star}, 0_{\mathscr{W}_{1}}, 0_{\mathscr{W}_{2}}\right] \in \mathbb{R}^{n} \, et \, la \, fonction \, \widehat{\Psi}_{ji}^{[\kappa_{j}]}\left[\mathbf{u}^{\star}, 0_{\mathscr{W}_{1}}, 0_{\mathscr{W}_{2}}\right] \in \mathscr{C} \left([0; T], \mathbb{R}^{r(\kappa_{j})}\right) \, sont \, respectivement \, d\acute{e}finis \, par \, les \, \acute{e}quations \, (4.26) \\ et \, (4.9) \, puis \, \widetilde{\Psi}_{ji}^{[\kappa_{j}]}\left[w_{1}, w_{2}\right] \in \mathscr{C} \left([0; T], \mathbb{R}^{r(\kappa_{j})}\right) \, et \, \widetilde{\mathbb{L}}_{ji}^{[\kappa_{j}]}\left[T, w_{1}, w_{2}\right] \in \mathbb{R}^{n} \, sont \, d\acute{e}finis \, comme \, suit \\ \end{array}$

$$\widetilde{\Psi}_{ji}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}[w_1, w_2](t) = \Lambda_{ji}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]} \int_0^t e^{(t-\tau)A_i} E_i w_i(\tau) \, \mathrm{d}\tau + \mathbb{O}_{j\perp}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]} \left[\overline{\mathbb{T}}_i^{[\boldsymbol{\kappa}_j]} W_i^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}(t) - \overline{\mathbb{T}}_j^{[\boldsymbol{\kappa}_j]} W_j^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}(t) \right]$$

$$\tag{4.34}$$

et

$$\widetilde{\mathbb{L}}_{ji}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}[T, w_1, w_2] = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{e}^{\tau A_i^\top} \left(\Lambda_{ji}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]} \right)^\top \widetilde{\Psi}_{ji}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}[w_1, w_2](\tau) \,\mathrm{d}\tau.$$
(4.35)

Les deux assertions suivantes sont vraies :

- (i) Si $\mathscr{W}_{i/j}^{-}[\mathbf{u}^{\star}] \neq \emptyset$ alors S_i est fortement $\left(\mathscr{R}_{j}^{[\kappa_{j}]}, \{\mathbf{u}^{\star}\}, \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n}, \mathscr{W}_{i/j}^{-}[\mathbf{u}^{\star}]\right)$ -discernable de S_{j} sur [0; T]
- (ii) Si $\mathscr{W}_{i/j}^+[\mathbf{u}^\star] \neq \emptyset$ alors S_i est fortement $\left(\mathfrak{R}_j^{[\kappa_j]}, \{\mathbf{u}^\star\}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_{i/j}^+[\mathbf{u}^\star]\right)$ -discernable de S_j si et seulement si

$$\boldsymbol{\Delta}_{i/j}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}\left(T,\mathbf{u}^{\star},0_{\mathscr{W}_{1}},0_{\mathscr{W}_{2}}\right) > \max_{\left(w_{1},w_{2}\right)\in\mathscr{W}_{i/j}^{+}\left[\mathbf{u}^{\star}\right]}\sqrt{\boldsymbol{\delta}_{i/j}\left(T,\mathbf{u}^{\star},w_{1},w_{2}\right)}$$
(4.36)

Démonstration. D'après la formule (4.9) de $\widehat{\Psi}_{ji}^{[\kappa_j]}[\mathbf{u}^{\star}, w_1, w_2]$, on a

$$\widehat{\Psi}_{ji}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}\left[\mathbf{u}^{\star}, w_1, w_2\right] = \widehat{\Psi}_{ji}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}\left[\mathbf{u}^{\star}, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}\right] + \widetilde{\Psi}_{ji}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}\left[w_1, w_2\right].$$

D'autre part, d'après la formule (4.26) de $\mathbb{L}_{j\,i}^{[\kappa_j]}[T, \mathbf{u}^{\star}, w_1, w_2]$, on a

$$\mathbb{L}_{ji}^{[\kappa_{j}]}[T, \mathbf{u}^{\star}, w_{1}, w_{2}] = \mathbb{L}_{ji}^{[\kappa_{j}]}[T, \mathbf{u}^{\star}, 0_{\mathscr{W}_{1}}, 0_{\mathscr{W}_{2}}] + \widetilde{\mathbb{L}}_{ji}^{[\kappa_{j}]}[T, w_{1}, w_{2}].$$

En substituant ces expressions de $\widehat{\Psi}_{ji}^{[\kappa_j]}[\mathbf{u}^{\star}, w_1, w_2]$ et $\mathbb{L}_{ji}^{[\kappa_j]}[T, \mathbf{u}^{\star}, w_1, w_2]$ dans la formule de l'indice $\Delta_{i/j}^{[\kappa_j]}(T, \mathbf{u}^{\star}, w_1, w_2)$ donnée par le théorème 4.4.15, il vient que

$$\left(\boldsymbol{\Delta}_{i/j}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}\left(T,\mathbf{u}^{\star},w_{1},w_{2}\right) \right)^{2} = \Theta \left[\mathbb{G}_{j\,i}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}\left[T\right] \right] \left(\mathbb{L}_{j\,i}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}\left[\mathbf{u}^{\star},0_{\mathscr{W}_{1}},0_{\mathscr{W}_{2}}\right] + \widetilde{\mathbb{L}}_{j\,i}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}\left[T,w_{1},w_{2}\right], \\ \widehat{\Psi}_{j\,i}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}\left[\mathbf{u}^{\star},0_{\mathscr{W}_{1}},0_{\mathscr{W}_{2}}\right] + \widetilde{\Psi}_{j\,i}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}\left[w_{1},w_{2}\right] \right)$$

Par conséquent, en appliquant le résultat du lemme 4.5.1 on obtient

$$\left(\boldsymbol{\Delta}_{i/j}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}\left(T,\mathbf{u}^{\star},w_{1},w_{2}\right)\right)^{2}=\left(\boldsymbol{\Delta}_{i/j}^{[\boldsymbol{\kappa}_{j}]}\left(T,\mathbf{u}^{\star},0_{\mathscr{W}_{1}},0_{\mathscr{W}_{2}}\right)\right)^{2}-\boldsymbol{\delta}_{i/j}\left(T,\mathbf{u}^{\star},w_{1},w_{2}\right)$$

Il s'ensuit donc que suivant la définition (4.32) de $\mathscr{W}_{i/j}^{-}[\mathbf{u}^{\star}]$,

$$\boldsymbol{\Delta}_{i/j}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}\left(T,\mathbf{u}^{\star},w_1,w_2\right)>0,\quad\forall\left(w_1,w_2\right)\in\mathscr{W}_{i/j}^{-}\left[\mathbf{u}^{\star}\right]$$

et que suivant la définition (4.32) de $\mathscr{W}_{i/j}^+[\mathbf{u}^\star]$,

$$\Delta_{i/j}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}(T, \mathbf{u}^{\star}, w_1, w_2) > 0, \\ \forall (w_1, w_2) \in \mathscr{W}_{i/j}^+[\mathbf{u}^{\star}]$$
 $\iff \Delta_{i/j}^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}(T, \mathbf{u}^{\star}, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}) > \max_{(w_1, w_2) \in \mathscr{W}_{i/j}^+[\mathbf{u}^{\star}]} \sqrt{\delta_{i/j}(T, \mathbf{u}^{\star}, w_1, w_2)}$

D'où on obtient (i) et (ii).

Ainsi, la réunion

$$\mathscr{W}_{i/j}^{-}\left[\mathbf{u}^{\star}\right] \bigcup \left\{ (w_{1}, w_{2}) \in \mathscr{W}_{i/j}^{+}\left[\mathbf{u}^{\star}\right] : \mathbf{\Delta}_{i/j}^{\left[\boldsymbol{\kappa}_{j}\right]}\left(T, \mathbf{u}^{\star}, \mathbf{0}_{\mathscr{W}_{1}}, \mathbf{0}_{\mathscr{W}_{2}}\right) > \sqrt{\boldsymbol{\delta}_{i/j}\left(T, \mathbf{u}^{\star}, w_{1}, w_{2}\right)} \right\}$$
(4.37)

correspond entièrement à la région du domaine des perturbations où S_i est fortement résidudiscernable de S_j relativement à la commande \mathbf{u}^* .

Le lemme 4.5.2 donne une caractérisation de la forte résidu-discernabilité sur chacun des sous-domaines $\mathscr{W}_{i/j}^{-}[\mathbf{u}^{\star}]$ et $\mathscr{W}_{i/j}^{+}[\mathbf{u}^{\star}]$ de l'ensemble $\mathscr{W}_{1} \times \mathscr{W}_{2}$ des perturbations qui agissent sur S_{1} et S_{2} . Une généralisation de ces conditions de résidu-discernabilité sur le domaine $\mathscr{W}_{1} \times \mathscr{W}_{2}$ tout entier est donnée par le théorème suivant.

Proposition 4.5.3. Soit $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$ et soit $\mathscr{W}_{i/j}^+[\mathbf{u}^*]$ le sous-ensemble de $\mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$ défini par la relation (4.32). Alors

- (i) Si $\mathscr{W}_{i/j}^+[\mathbf{u}^{\star}] = \emptyset$ alors S_i est fortement $\left(\mathcal{R}_j^{[\kappa_j]}, \{\mathbf{u}^{\star}\}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2\right)$ -résidu discernable de S_j sur [0; T].
- (ii) Si $\mathscr{W}_{i/j}^+[\mathbf{u}^{\star}] \neq \emptyset$ alors S_i est $\left(\mathfrak{R}_j^{[\kappa_j]}, \{\mathbf{u}^{\star}\}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2\right)$ -résidu discernable de S_j sur [0;T] si et seulement si $\Delta_{i/j}^{[\kappa_j]}[T, \mathbf{u}^{\star}, \mathbf{0}_{\mathscr{W}_1}, \mathbf{0}_{\mathscr{W}_2}]$ satisfait la condition (4.36).

Démonstration.

- (*i*) Supposons que $\mathscr{W}_{i/j}^+[\mathbf{u}^{\star}] = \emptyset$. Alors, $\mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2 = \mathscr{W}_{i/j}^-[\mathbf{u}^{\star}] \neq \emptyset$ et on obtient le résultat grâce au point (*i*) du lemme 4.5.2.
- (*ii*) Nous allons distinguer le cas $\mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2 = \mathscr{W}_{i/j}^+ [\mathbf{u}^*]$ et le cas $\mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2 \supset \mathscr{W}_{i/j}^+ [\mathbf{u}^*] \neq \emptyset$. Dans le premier cas, le résultat découle immédiatement du point (*ii*) du lemme 4.5.2. Dans le

second cas, $\mathscr{W}_{i/j}^{-}[\mathbf{u}^{\star}]$ et $\mathscr{W}_{i/j}^{+}[\mathbf{u}^{\star}]$ forment une partition de $\mathscr{W}_{1} \times \mathscr{W}_{2}$. Par conséquent, S_{i} est $\left(\mathcal{R}_{j}^{[\kappa_{j}]}, \{\mathbf{u}^{\star}\}, \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n}, \mathscr{W}_{1} \times \mathscr{W}_{2}\right)$ -résidu discernable par rapport à S_{j} sur [0; T] si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- S_i est fortement $\left(\mathcal{R}_j^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}, \{u\}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_{i/j}^{-}[\mathbf{u}^{\star}]\right)$ -discernable de S_j sur [0;T]- S_i est fortement $\left(\mathcal{R}_j^{[\boldsymbol{\kappa}_j]}, \{u\}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_{i/j}^{+}[\mathbf{u}^{\star}]\right)$ -discernable de S_j sur [0;T]

La première condition étant toujours satisfaite d'après le point (i) du lemme 4.5.2, il vient alors que la seconde condition est une condition nécessaire et suffisante pour que S_i soit $(\mathcal{R}_j^{[\kappa_j]}, \{\mathbf{u}^*\}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -résidu discernable par rapport à S_j sur [0; T]. D'où on obtient le résultat grâce au point (ii) du lemme 4.5.2.

Ainsi, pour que S_i soit fortement résidu-discernable de S_j , leurs modèles nominaux doivent avoir un degré $\Delta_{i/j}^{[\kappa_j]}[T, \mathbf{u}^*, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}]$ de forte résidu-discernabilité qui satisfait l'inégalité (4.36).

Les tailles des domaines \mathscr{W}_1 et \mathscr{W}_2 qui préservent la forte résidu-discernabilité des systèmes S_1 et S_2 relativement à la commande \mathbf{u}^* sont données par le théorème suivant.

Théorème 4.5.4. Soient $\mathscr{W}_{1/2}^+[\mathbf{u}^*]$ et $\mathscr{W}_{2/1}^+[\mathbf{u}^*]$ les-sous ensembles de $\mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$ définis par la relation (4.32). Alors

- (i) Si $\mathscr{W}_{1/2}^{+}[\mathbf{u}^{\star}] = \emptyset$ ou si $\mathscr{W}_{2/1}^{+}[\mathbf{u}^{\star}] = \emptyset$ alors les deux systèmes S_1 et S_2 sont fortement $\left(\mathfrak{R}_{1}^{[\kappa_{1}]}, \mathfrak{R}_{2}^{[\kappa_{2}]}, \{\mathbf{u}^{\star}\}, \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n}, \mathscr{W}_{1} \times \mathscr{W}_{2}\right)$ -discernables sur [0; T].
- (ii) Si $\mathscr{W}_{1/2}^+[\mathbf{u}^{\star}] \neq \emptyset$ et si $\mathscr{W}_{2/1}^+[\mathbf{u}^{\star}] \neq \emptyset$ alors les deux systèmes S_1 et S_2 sont fortement $\left(\mathfrak{R}_1^{[\kappa_1]}, \mathfrak{R}_2^{[\kappa_2]}, \{\mathbf{u}^{\star}\}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2\right)$ -discernables sur [0; T] si et seulement si

$$\mathsf{T}_{\mathbf{u}^{\star}}^{\text{aille}}\left(\mathscr{W}_{1}, \mathscr{W}_{2}\right) < \boldsymbol{\Delta}_{12}^{\left[\boldsymbol{\kappa}_{1}, \boldsymbol{\kappa}_{2}\right]}\left[T, \mathbf{u}^{\star}, \mathbf{0}_{\mathscr{W}_{1}}, \mathbf{0}_{\mathscr{W}_{2}}\right]$$
(4.38)

avec

$$\mathsf{T}_{\mathbf{u}^{\star}}^{\text{aille}}(\mathscr{W}_{1}, \mathscr{W}_{2}) = \min\left\{\max_{\mathscr{W}_{1/2}^{+}[\mathbf{u}^{\star}]} \sqrt{\delta_{1/2}(T, \mathbf{u}^{\star}, w_{1}, w_{2})}, \max_{\mathscr{W}_{2/1}^{+}[\mathbf{u}^{\star}]} \sqrt{\delta_{2/1}(T, \mathbf{u}^{\star}, w_{1}, w_{2})}\right\}.$$
(4.39)

Démonstration.

(i) Supposons que $\mathscr{W}_{1/2}^+[\mathbf{u}^*] = \emptyset$. Alors on déduit du point (i) de la proposition 4.5.3 que S_1 est fortement $(\mathscr{R}_2^{[\kappa_2]}, \mathbf{u}^*, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernable de S_2 sur [0; T]. On conclut grâce au corollaire 4.3.4 que S_1 et S_2 sont fortement $(\mathscr{R}_1^{[\kappa_1]}, \mathscr{R}_2^{[\kappa_2]}, \{\mathbf{u}^*\}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernables sur [0; T]. Lorsque $\mathscr{W}_{2/1}^+[\mathbf{u}^*] = \emptyset$ le raisonnement est le même que celui que

Chapitre 4. Forte discernabilité contrôlable des SDL perturbés

nous avons mené dans le cas $\mathscr{W}_{1/2}^+[\mathbf{u}^*] = \emptyset$. La preuve s'obtient en utilisant le point (i) de la proposition 4.5.3 puis le corollaire 4.3.4.

(*ii*) Supposons que $\mathscr{W}_{1/2}^+[\mathbf{u}^*]$ et $\mathscr{W}_{2/1}^+[\mathbf{u}^*]$ sont tous non vide. Si on suppose que S_1 et S_2 sont fortement $(\mathscr{R}_1^{[\kappa_1]}, \mathscr{R}_2^{[\kappa_2]}, \{\mathbf{u}^*\}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernables sur [0; T] alors il découle de la proposition 4.5.3 et du corollaire 4.3.4 que

$$\begin{split} \mathbf{\Delta}_{1/2}^{[\kappa_{2}]}\left[T,\mathbf{u}^{\star},0_{\mathscr{W}_{1}},0_{\mathscr{W}_{2}}\right] &> \max_{\mathscr{W}_{1/2}^{+}[\mathbf{u}^{\star}]} \sqrt{\boldsymbol{\delta}_{1/2}\left(T,\mathbf{u}^{\star},w_{1},w_{2}\right)} \\ &\geq \min\left\{\max_{\mathscr{W}_{1/2}^{+}[T,\mathbf{u}^{\star}]} \sqrt{\boldsymbol{\delta}_{1/2}\left(T,\mathbf{u}^{\star},w_{1},w_{2}\right)}, \max_{\mathscr{W}_{2/1}^{+}[\mathbf{u}^{\star}]} \sqrt{\boldsymbol{\delta}_{2/1}\left(T,\mathbf{u}^{\star},w_{1},w_{2}\right)}\right\} \end{split}$$

et que

$$\begin{split} \mathbf{\Delta}_{2/1}^{[\kappa_{1}]}\left[T,\mathbf{u}^{\star},0_{\mathscr{W}_{1}},0_{\mathscr{W}_{2}}\right] &> \max_{\mathscr{W}_{2/1}^{+}[\mathbf{u}^{\star}]} \sqrt{\boldsymbol{\delta}_{i/j}\left(T,\mathbf{u}^{\star},w_{1},w_{2}\right)} \\ &\geq \min\left\{\max_{\mathscr{W}_{1/2}^{+}[\mathbf{u}^{\star}]} \sqrt{\boldsymbol{\delta}_{1/2}\left(T,\mathbf{u}^{\star},w_{1},w_{2}\right)}, \max_{\mathscr{W}_{2/1}^{+}[\mathbf{u}^{\star}]} \sqrt{\boldsymbol{\delta}_{2/1}\left(T,\mathbf{u}^{\star},w_{1},w_{2}\right)}\right\}. \end{split}$$

Il s'ensuit donc que

$$\boldsymbol{\Delta}_{12}^{[\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2]}[T,\mathbf{u}^{\star},0_{\mathscr{W}_1},0_{\mathscr{W}_2}] := \min\left\{\boldsymbol{\Delta}_{1/2}^{[\boldsymbol{\kappa}_2]}[T,\mathbf{u}^{\star},0_{\mathscr{W}_1},0_{\mathscr{W}_2}], \, \boldsymbol{\Delta}_{2/1}^{[\boldsymbol{\kappa}_1]}[T,\mathbf{u}^{\star},0_{\mathscr{W}_1},0_{\mathscr{W}_2}]\right\}$$

satisfait la condition (4.38).

Réciproquement, supposons qu'on a la condition (4.38). — Si $\max_{\mathscr{W}_{1/2}^+[T,\mathbf{u}^\star]} \sqrt{\delta_{1/2}(T,\mathbf{u}^\star,w_1,w_2)} < \max_{\mathscr{W}_{2/1}^+[\mathbf{u}^\star]} \sqrt{\delta_{2/1}(T,\mathbf{u}^\star,w_1,w_2)}$ alors la condition (4.38)

et la définition (4.24) de l'indice $\Delta_{12}^{[\kappa_1,\kappa_2]}[T,\mathbf{u}^{\star},0_{\mathscr{W}_1},0_{\mathscr{W}_2}]$ impliquent que

$$\Delta_{1/2}^{[\kappa_2]}[T, \mathbf{u}^{\star}, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}] \ge \Delta_{12}^{[\kappa_1, \kappa_2]}[T, \mathbf{u}^{\star}, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}] > \max_{\mathscr{W}_{1/2}^+[T, \mathbf{u}^{\star}]} \sqrt{\delta_{1/2}(T, \mathbf{u}^{\star}, w_1, w_2)}.$$

Par conséquent on déduit du point (*ii*) de la proposition 4.5.3 que le système S_1 est fortement $\left(\mathcal{R}_2^{[\kappa_2]}, \{\mathbf{u}^{\star}\}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2\right)$ -discernable de S_2 sur [0; T]. On conclut grâce au corollaire 4.3.4 que S_1 et S_2 sont fortement $\left(\mathcal{R}_1^{[\kappa_1]}, \mathcal{R}_2^{[\kappa_2]}, \{\mathbf{u}^{\star}\}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2\right)$ discernables sur [0; T].

$$- \operatorname{si} \max_{\mathscr{W}_{1/2}^{+}[\mathbf{u}^{\star}]} \sqrt{\boldsymbol{\delta}_{1/2}\left(T, \mathbf{u}^{\star}, w_{1}, w_{2}\right)} \geq \max_{\mathscr{W}_{2/1}^{+}[\mathbf{u}^{\star}]} \sqrt{\boldsymbol{\delta}_{2/1}\left(T, \mathbf{u}^{\star}, w_{1}, w_{2}\right)} \text{ alors dans ce cas la condi-$$

tion (4.38) et la définition (4.24) de l'indice $\Delta_{12}^{[\kappa_1,\kappa_2]}[T, \mathbf{u}^{\star}, \mathbf{0}_{\mathscr{W}_1}, \mathbf{0}_{\mathscr{W}_2}]$ impliquent que

$$\boldsymbol{\Delta}_{2/1}^{[\kappa_1]}[T, \mathbf{u}^{\star}, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}] \geq \boldsymbol{\Delta}_{12}^{[\kappa_1, \kappa_2]}[T, \mathbf{u}^{\star}, 0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}] > \max_{\mathscr{W}_{2/1}^+[\mathbf{u}^{\star}]} \sqrt{\boldsymbol{\delta}_{2/1}(T, \mathbf{u}^{\star}, w_1, w_2)}.$$

Il s'ensuit grâce au point (*ii*) de la proposition 4.5.3 que le système dynamique S_2 est fortement $(\mathcal{R}_1^{[\kappa_1]}, \{\mathbf{u}^{\star}\}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ -discernable de S_1 sur [0; T]. On conclut grâce au corollaire 4.3.4 que S_1 et S_2 sont fortement $(\mathcal{R}_1^{[\kappa_1]}, \mathcal{R}_2^{[\kappa_2]}, \{\mathbf{u}^{\star}\}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2)$ discernables sur [0; T].

Exemple 4.5.5. Considérons les modes de fonctionnement S_1 et S_2 du système hydraulique de l'exemple 4.4.3. Comme dans l'exemple 4.4.17, nous supposons que les perturbations déterministes w_1 et w_2 correspondent à des défauts actionneur décrits par les équations (4.28). Pour la commande $\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{u}_0 > 0$, on obtient

$$\boldsymbol{\delta}_{1/2}\left(T,\mathbf{u}^{\star},w_{1},w_{2}\right) = -0.00724\,\gamma^{2} + 0.0152\,\gamma\,\mathbf{u}_{0}\;;\;\boldsymbol{\delta}_{2/1}\left(T,\mathbf{u}^{\star},w_{1},w_{2}\right) = -0.00491\,\gamma^{2} + 0.0103\,\gamma\,\mathbf{u}_{0}$$

Par conséquent, les domaines $\mathscr{W}_{i/j}^{-}[\mathbf{u}^{\star}]$ et $\mathscr{W}_{i/j}^{+}[\mathbf{u}^{\star}]$ sont explicitement définis comme suit :

$$\mathscr{W}_{i/j}^{-}[\mathbf{u}^{\star}] = \left\{ (w_1, w_2) : : w_1(t) = w_2(t) = \gamma \cos(-0.5t), \quad \gamma \in]-\infty; 0 \right] \bigcup [\gamma_i^{\star} \mathbf{u}_0; +\infty[\right\}$$

et

$$\mathscr{W}_{i/j}^{+}\left[\mathbf{u}^{\star}\right] = \left\{ (w_{1}, w_{2}) : : w_{1}\left(t\right) = w_{2}\left(t\right) = \gamma \cos\left(-0.5 t\right), \quad \gamma \in \left]0; \boldsymbol{\gamma}_{i}^{\star} \mathbf{u}_{0}\right] \right\}.$$

avec $\boldsymbol{\gamma}_{1}^{\star} = \frac{0.0152}{0.00724} = 2.0994 \ et \ \boldsymbol{\gamma}_{2}^{\star} = \frac{0.0103}{0.00491} = 2.0978.$

Les fonctions $\sqrt{\delta_{1/2}(T, \mathbf{u}^*, w_1, w_2)}$ et $\sqrt{\delta_{2/1}(T, \mathbf{u}^*, w_1, w_2)}$ atteignent leurs maximums sur les domaines $\mathscr{W}^+_{1/2}[\mathbf{u}^*]$ et $\mathscr{W}^+_{2/1}[\mathbf{u}^*]$ et on obtient

$$\max_{\mathscr{W}_{1/2}^{+}[\mathbf{u}^{\star}]} \sqrt{\boldsymbol{\delta}_{1/2}\left(T, \mathbf{u}^{\star}, w_{1}, w_{2}\right)} = \sqrt{0.0080} \,\mathbf{u}_{0} \quad ; \quad \max_{\mathscr{W}_{2/1}^{+}[\mathbf{u}^{\star}]} \sqrt{\boldsymbol{\delta}_{2/1}\left(T, \mathbf{u}^{\star}, w_{1}, w_{2}\right)} = \sqrt{0.0054} \,\mathbf{u}_{0}.$$

On en déduit que

$$\mathsf{T}^{\text{aille}}_{\mathbf{u}^{\star}}\left(\mathscr{W}_{1},\mathscr{W}_{2}\right)=\sqrt{0.0054}\,\mathbf{u}_{0}.$$

D'autre part, d'après l'exemple 4.4.17,

$$\mathbf{\Delta}_{12}^{[\boldsymbol{\kappa}_1,\boldsymbol{\kappa}_2]}\left[T,\mathbf{u}^{\star},\mathbf{0}_{\mathscr{W}_1},\mathbf{0}_{\mathscr{W}_2}\right] = \sqrt{0.00618}\,\mathbf{u}_0.$$

Chapitre 4. Forte discernabilité contrôlable des SDL perturbés

On a donc l'inégalité $\mathsf{T}_{\mathbf{u}^{\star}}^{\text{aille}}(\mathscr{W}_{1},\mathscr{W}_{2}) < \Delta_{12}^{[\kappa_{1},\kappa_{2}]}[T,\mathbf{u}^{\star},0_{\mathscr{W}_{1}},0_{\mathscr{W}_{2}}]$ qui confirme la forte résidudiscernabilité des systèmes S_{1} et S_{2} que nous avons déjà prouvée dans l'exemple 4.4.17.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons mené une analyse de l'influence des perturbations déterministes sur les propriétés de forte discernabilité contrôlable des systèmes dynamiques perturbés. Pour cette analyse, nous avons utilisé les résidus de parité des systèmes. Plus précisément nous nous sommes focalisés sur l'étude de la forte résidu-discernabilité des systèmes linéaires perturbés. Ce choix est motivé par le fait que les matrices de parité ont la particularité d'éliminer au moins une des variables d'états des systèmes à discerner, réduisant ainsi le nombre de variables inconnues dont on doit tenir compte pour étudier la propriété de forte discernabilité contrôlable. Outre cet aspect de simplicité, nous avons prouvé qu'on ne perd aucune information en utilisant les résidus de parité pour étudier la forte discernabilité contrôlable des systèmes linéaires car les notions de forte résidu-discernabilité et de forte discernabilité contrôlable sont équivalentes.

La première contribution de ce chapitre est une condition nécessaire et suffisante de forte discernabilité contrôlable des systèmes dynamiques perturbés. Il s'agit d'une condition géométrique qui repose sur la stricte positivité d'une fonction positive (indice de forte résidu-discernabilité). Cette condition permet de tester la forte discernabilité contrôlable des systèmes relativement à une commande quelconque.

Nous montrons également dans ce chapitre que l'indice de forte résidu-discernabilité peut être utilisé pour quantifier le degré de forte discernabilité contrôlable des systèmes continus soumis à des perturbations déterministes.

Grâce à l'indice de forte résidu-discernabilité des systèmes, nous spécifions dans un premier temps le domaine des perturbations où les systèmes S_1 et S_2 restent contrôlablement discernables au sens fort. Ce domaine a été caractérisé partiellement dans [Baglietto et al., 2013], [Baglietto et al., 2014] pour les systèmes discrets autonomes avec des bruits de mesures bornées. Nous déterminons ensuite les tailles $T_{\mathbf{u}^*}^{\text{aille}}(\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2)$ des domaines des perturbations \mathscr{W}_1 et \mathscr{W}_2 qui préservent la forte discernabilité contrôlable des systèmes S_1 et S_2 .

Le calcul de la taille $\mathsf{T}_{\mathbf{u}^*}^{\mathrm{aille}}(\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2)$ des perturbations consiste à résoudre un problème d'optimisation ayant $\mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$ comme domaine de contraintes. Il nécessite donc une parfaite connaissance du domaine $\mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$ des perturbations déterministes qui agissent sur S_1 et S_2 . Cette connaissance est notamment disponible lorsque les perturbations sont paramétrées comme dans les exemples illustratifs de ce chapitre.

Chapitre 5

Discernabilité des systèmes non-linéaires affines en la commande

Sommaire

5.1	\mathbf{Que}	lques éléments de géométrie différentielle
	5.1.1	Dérivée de Lie et crochet de Lie
	5.1.2	Système de changement de coordonnées locales et globales 151
	5.1.3	Sous-variété différentielle
5.2	Forn	ne normale du système augmenté $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 155$
	5.2.1	Degré relatif du système augmenté $\ldots \ldots 155$
	5.2.2	Forme normale du système augmenté : cas $\rho < 2n$
	5.2.3	Forme normale du système augmenté : cas $\rho = 2n$
5.3	Cara	actérisation de la zone d'indiscernabilité $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 166$
	5.3.1	Zone d'indiscernabilité : cas $\rho = 2n$
	5.3.2	Zone d'indiscernabilité : cas $\rho < 2n$
	5.3.3	Résolution de l'équation fonctionnelle (5.33)
	5.3.4	Caractérisation de la zone d'indiscernabilité
5.4 Conditions de discernabilité stricte et de forte discernabilité des		
	syste	èmes SISO et MISO 185
	5.4.1	Conditions de discernabilité stricte des systèmes SISO et MISO 185
	5.4.2	Condition de discernabilité contrôlable
5.5	Con	clusion

Dans ce chapitre, nous étudions la discernabilité stricte et la forte discernabilité contrôlable des systèmes non-linéaires. Nous avons choisi de focaliser notre étude sur la classe particulière des systèmes non-linéaires affines en la commande. Le modèle mathématique de ces sys-

Chapitre 5. Discernabilité des systèmes non-linéaires affines en la commande

tèmes s'apparente à celui des systèmes linéaires et englobe celui des systèmes dynamiques bilinéaires [Aganović and Gajić, 1995], [Elliott, 2009], [Mohler, 1991]. Cette classe de non-linéarité permet de décrire le comportement de nombreux procédés physiques dont les échangeurs thermiques [Hangos et al., 2004], les procédés de fermentation [Hangos et al., 2004], les robots mobiles [Tzafestas, 2014] ainsi que le moteur à réluctence [Yang et al., 2010].

Ce chapitre a pour objectif de généraliser au cas des systèmes non-linéaires affines en la commande, les résultats que nous avons établis dans le chapitre 3 pour caractériser la zone d'indiscernabilité des systèmes linéaires ainsi que les différentes conditions de forte discernabilité et de discernabilité stricte que nous avons spécifiées dans le même chapitre.

La zone d'indiscernabilité des systèmes ayant plusieurs sorties pouvant être décomposée en une intersection finie de zones d'indiscernabilité de systèmes mono-sortie (SISO et MISO), nous avons donc choisis de restreindre notre étude aux systèmes mono-sortie affines à la commande. Le chapitre est organisé en quatre grandes parties.

La première partie est consacrée au rappel des notions et résultats de géométrie différentielle que nous aurons à manipuler dans tout le chapitre.

La seconde partie traite du problème de caractérisation de la zone d'indiscernabilité des systèmes non-linéaires affines en la commande. Dans le cas linéaire, la solution que nous avons proposée pour ce problème repose sur la réécriture de la transformée de Laplace de la sortie du système augmenté en fonction de ses paramètres de Markov. Ici, nous utilisons la forme normale du système augmenté pour identifier cette zone.

Dans la troisième partie, nous donnons des conditions nécessaires et/ou suffisantes qui permettent de caractériser la discernabilité stricte et la forte discernabilité contrôlable des systèmes non-linéaires affines en la commande. Précisément, nous généralisons à cette classe de non-linéarité les résultats des théorèmes 3.3.6, 3.3.3 et 1.3.19.

Les systèmes mono-sortie S_1 et S_2 affines en la commande que nous considérons dans toute la suite du chapitre ont une représentation d'état de la forme :

$$S_{i} \begin{cases} \dot{x}_{i}(t) = f_{i}(x_{i}(t)) + g_{i}(x_{i}(t)) u(t), \\ y_{i}(t) = h_{i}(x_{i}(t)), \\ x_{i}(0) = x_{i}^{o} \in \mathscr{X}_{i}^{o}, \end{cases}$$
(5.1)

où pour tout $i = 1, 2, f_i \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), g_i \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$ et $h_i \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Notons que contrairement au cas linéaire, les sorties de S_1 et S_2 ne sont pas influencées directement par l'action de l'entrée u.

Dans tout ce qui suivra, Ω_i désigne une partie ouverte de \mathbb{R}^n contenant toutes les trajectoires

d'état admissibles de S_i c'est-à-dire

Notation 5.0.1. Pour $i = 1, 2, \ \Omega_i \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert tel que $x_i(t, x_i^o, u, 0_{\mathscr{W}_i}) \in \Omega_i$, pour tout $(t, x_i^o, u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathscr{X}_i^o \times \mathscr{U}$.

D'après (5.1), on a les expressions suivantes des fonctions \mathbf{f}_i et \mathbf{h}_i que nous avons introduites dans le chapitre 1 (voir représentation d'état (1.1)) pour décrire le comportement de S_i :

$$\mathbf{f}_{i}\left(x_{i}\left(t\right), u\left(t\right), \mathbf{0}_{\mathscr{W}_{i}}\right) = f_{i}\left(x_{i}\left(t\right)\right) + g_{i}\left(x_{i}\left(t\right)\right) u\left(t\right)$$

et

$$\mathbf{h}_{i}\left(x_{i}\left(t\right), u\left(t\right), \mathbf{0}_{\mathscr{W}_{i}}\right) = h_{i}\left(x_{i}\left(t\right)\right).$$

L'hypothèse 1.1.2 d'annulation des fonction \mathbf{f}_i et \mathbf{h}_i en le triplet $(0_n, 0_{\mathscr{U}}, 0_{\mathscr{W}_i})$ que nous avons faite dans le premier chapitre devient donc dans ce cas :

Hypothèse 5.0.2. Pour $i = 1, 2, f_i(0_n) = 0_n$ et $h_i(0_n) = 0$.

Par ailleurs, pour des raisons de simplicité, nous supposons que les fonctions f_i , g_i et h_i sont lisses sur l'ouvert Ω_i c'est-à-dire

Hypothèse 5.0.3. Pour $i = 1, 2, f_i \in \mathscr{C}^{\infty}(\Omega_i, \mathbb{R}^n), g_i \in \mathscr{C}^{\infty}(\Omega_i, \mathbb{R}^l)$ et $h_i \in \mathscr{C}^{\infty}(\Omega_i, \mathbb{R})$

Les résultats de ce chapitre feront l'objet d'une publication en cours de rédaction.

5.1 Quelques éléments de géométrie différentielle

Cette section a pour objectif d'introduire les différents outils de géométrie différentielle nécessaires à notre analyse. Nous recommandons au lecteur désireux d'approfondir ces connaissances sur les notions et résultats de cette section de se reporter aux ouvrages [Boothby, 1986], [Levine, 2009], [Giaquinta and Modica, 2009] et [Royer, 2014].

Dans tout ce qui suivra q est un nombre naturel non nul (c'est-à-dire $q \in \mathbb{N}^*$) et les ensembles Ω et \mathfrak{V} sont des parties ouvertes de \mathbb{R}^q .

5.1.1 Dérivée de Lie et crochet de Lie

La dérivée de Lie et le crochet de Lie sont des opérateurs différentiels très utilisés pour l'analyse des propriétés structurelles des systèmes dynamiques non-linéaires. La dérivée de Lie est définie comme suit : **Définition 5.1.1.** Étant donnée une fonction $\varphi \in \mathscr{C}(\Omega, \mathbb{R}^q)$, l'opérateur de Lie L_{φ} est l'opérateur différentiel qui appliqué à une fonction scalaire $\psi \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ donne la fonction $L_{\varphi}\psi$ définie par :

$$L_{\varphi}\psi\left(\xi\right) = \left\langle\varphi\left(\xi\right), \nabla\psi\left(\xi\right)\right\rangle = \sum_{k=1}^{q} \varphi_{k}\left(\xi\right) \frac{\partial\psi_{k}}{\partial\xi_{k}}\left(\xi\right)$$
(5.2)

où on rappelle que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel et $\nabla \psi(\xi)$, le gradient de ψ en le point ξ . La fonction $L_{\varphi}\psi: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \ \xi \longmapsto L_{\varphi}\psi(\xi)$, est appelée la dérivée de Lie de ψ le long de φ .

Dans cette définition, la fonction $\varphi \colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^q \longmapsto \mathbb{R}^q$ est un champ de vecteurs, $\varphi(\xi)$ est un vecteur au point ξ et $L_{\varphi}\psi(\xi)$ n'est rien d'autre que la dérivée directionnelle de ψ en le point ξ dans la direction du vecteur $\varphi(\xi)$.

L'opérateur de dérivée de Lie agit donc sur une fonction vectorielle et une fonction scalaire différentiable et retourne comme résultat une fonction scalaire.

Exemple 5.1.2. Considérons les fonctions φ et ψ définies par

$$\varphi\left(\xi\right) = \begin{bmatrix} \sin\left(\xi_{2}\right) \\ \cos\left(\xi_{2}\right) \end{bmatrix} \quad ; \quad \psi\left(\xi\right) = \xi_{1} \, \sin\left(\xi_{2}\right)$$

avec $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^2$. On obtient

$$L_{\varphi}\psi\left(\xi\right) = \begin{bmatrix}\sin\left(\xi_{2}\right) & \xi_{1}\cos\left(\xi_{2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin\left(\xi_{2}\right)\\\cos\left(\xi_{2}\right)\end{bmatrix} = \sin^{2}\left(\xi_{2}\right) + \xi_{1}\cos^{2}\left(\xi_{2}\right).$$

Lorsque la fonction scalaire ψ et la fonction vectorielle φ sont assez-régulières sur l'ouvert Ω , on définit par induction les dérivées de Lie d'ordre supérieur de ψ le long de φ comme suit :

Définition 5.1.3. Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi \in \mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^q)$ et $\psi \in \mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$. La dérivée de Lie d'ordre k de la fonction scalaire ψ le long de la fonction vectorielle φ est la fonction scalaire $L^k_{\varphi}\psi$ définie sur Ω par

$$L^{k}_{\varphi}\psi\left(\xi\right) = L_{\varphi}L^{k-1}_{\varphi}\psi\left(\xi\right), \quad \xi \in \Omega$$

$$(5.3)$$

où on pose par convention

$$L^{0}_{\varphi}\psi\left(\xi\right) = \psi\left(\xi\right), \quad \xi \in \Omega.$$

$$(5.4)$$

Exemple 5.1.4. Pour les fonctions φ et ψ de l'exemple 5.1.2 on a

$$L_{\varphi}^{2}\psi(\xi) = L_{\varphi}L_{\varphi}\psi(\xi) = \left[\cos^{2}(\xi_{2}) \quad (1 - \xi_{1})\sin(2\xi_{2})\right] \begin{bmatrix}\sin(\xi_{2})\\\cos(\xi_{2})\end{bmatrix}$$
$$= \cos^{2}(\xi_{2})\sin(\xi_{2}) + (1 - \xi_{1})\sin(2\xi_{2})\cos(\xi_{2})$$

Pour pouvoir définir le second opérateur différentiel, nous rappelons la définition d'une matrice jacobienne :

Définition 5.1.5. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice jacobienne d'une fonction vectorielle $\varphi \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^r)$ en un point $\xi \in \Omega$ la matrice $J_{\varphi}(\xi) \in \mathbb{R}^{r \times q}$ définie par :

$$J_{\varphi}\left(\xi\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_{1}}{\partial\xi_{1}}\left(\xi\right) & \frac{\partial\varphi_{1}}{\partial\xi_{2}}\left(\xi\right) & \cdots & \frac{\partial\varphi_{1}}{\partial\xi_{q}}\left(\xi\right) \\ \frac{\partial\varphi_{2}}{\partial\xi_{1}}\left(\xi\right) & \frac{\partial\varphi_{2}}{\partial\xi_{2}}\left(\xi\right) & \cdots & \frac{\partial\varphi_{2}}{\partial\xi_{q}}\left(\xi\right) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_{r}}{\partial\xi_{1}}\left(\xi\right) & \frac{\partial\varphi_{r}}{\partial\xi_{2}}\left(\xi\right) & \cdots & \frac{\partial\varphi_{r}}{\partial\xi_{q}}\left(\xi\right) \end{bmatrix}.$$
(5.5)

Si r = q, le déterminant de $J_{\varphi}(\xi)$ est appelé le jacobien de φ en ξ .

Définition 5.1.6. On appelle crochet de Lie des fonctions vectorielles $\varphi \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^q)$ et $\psi \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^q)$ la fonction $[\varphi, \psi]$ définie par :

$$[\varphi,\psi](\xi) = J_{\psi}(\xi) \varphi(\xi) - J_{\varphi}(\xi) \psi(\xi), \quad \xi \in \Omega.$$
(5.6)

Le crochet de Lie construit donc une fonction vectorielle à partir de deux fonctions vectorielle quelconques. On l'appelle aussi le commutateur des champs de vecteurs φ et ψ .

Exemple 5.1.7. Considérons les fonctions vectorielles φ et ψ définies sur \mathbb{R}^3 par

$$\varphi\left(\xi\right) = \begin{bmatrix} -\xi_2\\ \xi_1\\ \xi_3\cos\left(\xi_1\right) \end{bmatrix} \quad ; \quad \psi\left(\xi\right) = \begin{bmatrix} \xi_3\\ 1\\ \xi_2\,\xi_1 \end{bmatrix}$$

Pour ces deux fonctions on obtient

$$\begin{split} \left[\varphi,\psi\right](\xi) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ \xi_2 & \xi_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\xi_2\\ \xi_1\\ \xi_3 \cos\left(\xi_1\right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -\xi_3 \sin\left(\xi_1\right) & 0 & \cos\left(\xi_1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_3\\ 1\\ \xi_2 & \xi_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \xi_3 \cos\left(\xi_1\right) + 1\\ \xi_3 & \xi_3\\ \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 \sin\left(\xi_1\right) - \xi_1 & \xi_2 \cos\left(\xi_1\right) \end{bmatrix}. \end{split}$$

Dans la littérature on utilise également la notation suivante pour représenter le crochet de Lie :

Notation 5.1.8. $[\varphi, \psi] = a d_{\varphi} \psi$

Cette notation permet d'éviter des confusions lorsqu'on compose plusieurs fois des crochets de Lie. En partant de cette notation on définit par induction les crochets de Lie d'ordre supérieur comme suit :

Définition 5.1.9. Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi \in \mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^q)$ et $\psi \in \mathscr{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^q)$. Le crochet de Lie d'ordre $k \ de \ \varphi \ et \ \psi \ est \ la \ fonction \ ad^k_{\varphi} \psi \ définie \ sur \ \Omega \ par$

$$ad_{\varphi}^{k}\psi\left(\xi\right) = \left[\varphi, ad_{\varphi}^{k-1}\psi\right]\left(\xi\right) = ad_{\varphi}ad_{\varphi}^{k-1}\psi\left(\xi\right), \quad \xi \in \Omega,$$
(5.7)

avec $ad^0_{\varphi}\psi = \psi$ par convention.

Exemple 5.1.10. Soient φ et ψ les fonctions définies sur \mathbb{R}^2 par :

$$\varphi(\xi) = \begin{bmatrix} -\xi_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \psi(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 e^{\xi_1} \end{bmatrix}$$

 $On \ obtient$

$$ad_{\varphi}\psi(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ \xi_2 e^{\xi_1} & e^{\xi_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\xi_2\\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1\\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1\\ \xi_2 e^{\xi_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2 (e^{\xi_1} - 1)\\ (1 - \xi_2^2) e^{\xi_1} \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} ad_{\varphi}^{2}\psi\left(\xi\right) &= \begin{bmatrix} \xi_{2} e^{\xi_{1}} & e^{\xi_{1}} - 1\\ \left(1 - \xi_{2}^{2}\right) e^{\xi_{1}} & -2\xi_{2} e^{\xi_{1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\xi_{2}\\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1\\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{2} \left(e^{\xi_{1}} - 1\right)\\ \left(1 - \xi_{2}^{2}\right) e^{\xi_{1}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \left(1 - \xi_{2}^{2}\right) e^{\xi_{1}} - 1\\ -\xi_{2} \left(3 - \xi_{2}^{2}\right) e^{\xi_{1}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Le crochet de Lie et la dérivée de Lie sont liés par la relation suivante connue sous le nom "d'identité de Jacobi" [Khalil, 1996b].

Proposition 5.1.11 (Identité de Jacobi). Pour toutes fonctions vectorielles $\varphi_1 \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^q)$ et $\varphi_2 \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^q)$ et pour toute fonction scalaire $\psi \in \mathscr{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$,

$$L_{[\varphi_1,\varphi_2]}\psi\left(\xi\right) = L_{\varphi_1}L_{\varphi_2}\psi\left(\xi\right) - L_{\varphi_2}L_{\varphi_1}\psi\left(\xi\right), \quad \forall \xi \in \Omega.$$

5.1.2 Système de changement de coordonnées locales et globales

Définition 5.1.12. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dira d'une application $\varphi \colon \Omega \longmapsto \mathcal{O}$ qu'elle est un \mathscr{C}^k difféomorphisme si elle possède les trois propriétés suivantes :

- $(i) \ \varphi \in \mathscr{C}^k\left(\Omega,\mho\right)$
- (ii) φ est bijective
- (*iii*) $\varphi^{-1} \in \mathscr{C}^k(\mathfrak{O}, \Omega)$

 $Un \ {\mathscr C}^1\text{-}difféomorphisme \ est \ simplement \ appelé \ un \ difféomorphisme.$

Les difféomorphismes sont d'une grande importance dans la définition des systèmes de changement de coordonnées. On distingue deux grandes formes de systèmes de changement de coordonnées : le système de changement de coordonnées locales et le système de changement de coordonnées globales.

Définition 5.1.13. Soient $\varphi \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^q)$ et $\xi \in \Omega$. On dira que φ définit un système de changement de coordonnées locales au point ξ s'il existe un voisinage ouvert $\widehat{\Omega}_{\xi}$ de ξ et un voisinage ouvert $\widehat{U}_{\varphi(\xi)}$ de $\varphi(\xi)$ tels que φ est un difféomorphisme de $\widehat{\Omega}_{\xi}$ sur $\widehat{U}_{\varphi(\xi)}$.

Dans la pratique, pour vérifier qu'une application définit localement un système de changement de coordonnées, on utilise le théorème d'inversion locale :

Théorème 5.1.14 (Théorème d'inversion locale). Soient $\varphi \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^q)$ et $\xi \in \Omega$. Si $J_{\varphi}(\xi)$ est inversible c'est-à-dire si $J_{\varphi}(\xi) \in \operatorname{GL}_q(\mathbb{R})$ alors φ définit un système de changement de coordonnées locales au point ξ . **Exemple 5.1.15.** Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\varphi\left(\xi\right) = \begin{bmatrix} \xi_1 - \xi_2\\ \sin\left(\xi_1\right) \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1\\ \xi_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

La matrice jacobienne de φ

$$J_{\varphi}\left(\xi\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1\\ \cos\left(\xi_{1}\right) & 0 \end{bmatrix}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{2}$$

est inversible en tout point ξ tel que $\xi_1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, φ définit un système de changement de coordonnées locales en les points ξ tels que $\xi_1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Exemple 5.1.16. Considérons la fonction φ de passage en coordonnées polaires :

$$\varphi\left(\xi\right) = \begin{bmatrix} \xi_1 \cos\left(\xi_2\right) \\ \xi_1 \sin\left(\xi_2\right) \end{bmatrix}$$

La fonction φ a pour jacobien :

$$\det \left(J_{\varphi} \left(\xi \right) \right) = \begin{vmatrix} \cos \left(\xi_2 \right) & -\xi_1 \sin \left(\xi_2 \right) \\ \sin \left(\xi_2 \right) & \xi_1 \cos \left(\xi_2 \right) \end{vmatrix} = \xi_1.$$

Par conséquent, φ définit un système de changement de coordonnées locales en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\}.$

Un système de changement de coordonnées globales est défini comme suit :

Définition 5.1.17. Soit $\varphi \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^q)$. On dira que φ définit un système de changement de coordonnées globales sur Ω si $\varphi(\Omega)$ est un ouvert de \mathbb{R}^q et la restriction $\varphi_{|\Omega} \colon \Omega \longmapsto \varphi(\Omega)$ de φ sur Ω est un difféomorphisme.

Le théorème d'inversion globale suivant établit une condition nécessaire pour qu'une fonction soit un système de changement de coordonnées globales.

Théorème 5.1.18. Soit $\varphi \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^q)$. Si φ est injective et si $J_{\varphi}(\xi) \in \operatorname{GL}_q(\mathbb{R})$ pour tout $\xi \in \Omega$ alors φ définit un système de changement de coordonnées globales sur Ω .

Exemple 5.1.19.

- (i) Considérons la fonction φ de l'exemple 5.1.15. Le jacobien $J_{\varphi}(\xi)$ de φ en ξ est inversible pour tout point ξ de l'ouvert $\Omega = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi_1| < \frac{\pi}{2} \right\}$. De plus φ est injective sur Ω car la fonction sin est bijective sur $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right]$. Ainsi, φ définit un système de changement de coordonnées globales sur Ω . Cependant, φ ne définit pas un système de changement de coordonnées globales sur \mathbb{R}^2 tout entier car elle n'est pas bijective sur \mathbb{R}^2 . En effet, $\varphi(0_2) = \varphi\left(\begin{bmatrix} 2\pi\\ -2\pi \end{bmatrix} \right)$ donc φ n'est pas injective sur \mathbb{R}^2 .
- (ii) La fonction φ de l'exemple 5.1.16 définit un système de changement de coordonnées globales sur l'ouvert $\Omega = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 \in \mathbb{R}^*_+ \text{ et } \xi_2 \in \left] -\pi; \pi \right[\right\}$

5.1.3 Sous-variété différentielle

Définition 5.1.20. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $r \leq q$. On dira d'un sous-ensemble \mathscr{V} de \mathbb{R}^q qu'il est une sous-variété différentielle de \mathbb{R}^q de dimension r et de classe \mathscr{C}^k si pour tout $\xi \in \mathscr{V}$, il existe un voisinage ouvert $\Omega_{\xi} \subset \mathbb{R}^q$ de ξ , un voisinage ouvert $\mathcal{V}_{0_q} \subseteq \mathbb{R}^q$ de 0_q et un \mathscr{C}^k -difféomorphisme $\varphi \colon \Omega_{\xi} \longmapsto \mathcal{V}_{0_q}$ tel que

$$\varphi\left(\mathscr{V}\cap\Omega_{\xi}\right) = \mho_{0_{q}}\cap\left\{v\in\mathbb{R}^{q}\colon v_{r+1} = v_{r+2} = \dots = v_{q} = 0\right\}$$
(5.8)

Une sous-variété différentielle de dimension r est donc un sous-ensemble de \mathbb{R}^q dont on peut tordre un voisinage de chacun de ses points en utilisant un difféomorphisme approprié pour le transformer en un voisinage 0_r de \mathbb{R}^r .



Figure 5.1 – Définition d'une sous-variété par redressement

Le théorème suivant donne une caractérisation des sous-variétés différentielles en termes d'équation.

Théorème 5.1.21. Soit \mathscr{V} un sous-ensemble de \mathbb{R}^q . Alors \mathscr{V} est une sous-variété différentielle de dimension r et de classe \mathscr{C}^k si et seulement si pour tout point $\xi \in \mathscr{V}$ il existe un voisinage

ouvert $\Omega_{\xi} \subset \mathbb{R}^{q}$ de ξ et une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^{k}(\Omega_{\xi}, \mathbb{R}^{q-r})$ tels que rang $(J_{\varphi}(v)) = q - r$ pour tout $v \in \Omega_{\xi}$ et

$$\mathscr{V} \cap \Omega_{\xi} = \varphi^{-1}\left(0_{q-r}\right) = \left\{ v \in \Omega_{\xi} \colon \varphi\left(v\right) = 0_{q-r} \right\}.$$
(5.9)

Exemple 5.1.22.

(i) Le cercle $\mathcal{C} = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^2 : (\xi_1 - \alpha_0)^2 + (\xi_2 - \beta_0)^2 = R^2 \right\}$ de centre $\xi_0 = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \end{bmatrix}^\top$ et de rayon R > 0 est une sous-variété différentielle de \mathbb{R}^2 . Sa dimension est 1 et il est de classe \mathscr{C}^{∞} . En effet, on pourra définir la fonction φ sur \mathbb{R}^2 par

$$\varphi(\xi) = (\xi_1 - \alpha_0)^2 + (\xi_2 - \beta_0)^2 - R^2$$

Elle est indéfiniment différentiable sur \mathbb{R}^2 et pour tout point $\xi \in \mathbb{R}^2$ on a $J_{\varphi}(\xi) = \begin{bmatrix} 2 (\xi_1 - \alpha_0) & 2 (\xi_2 - \beta_0) \end{bmatrix}$. Ainsi, $J_{\varphi}(\xi)$ est de plein rang ligne sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{\xi_0\}$ et de plus $\mathbb{C} \cap \Omega = \varphi^{-1}(0)$.

(ii) Les sphères de \mathbb{R}^3 sont des sous-variétés de classe \mathscr{C}^{∞} et de dimension 2.

Remarque 5.1.23. Une application différentiable sur un ouvert et ayant une matrice jacobienne de plein rang ligne en tout point de l'ouvert est appelée une **submersion**.

Dans la section 5.4, pour caractériser la discernabilité stricte des systèmes mono-sortie qui sont non-linéaires et affines en la commande, nous utiliserons le théorème 5.1.25 ci-dessous. Ce théorème donne une caractérisation de l'espace tangent à une sous-variété différentielle. Rappelons tout d'abord la définition de l'espace tangent d'une sous-variété différentielle.

L'espace tangent à une sous-variété différentielle en un point est l'ensemble des vecteurs tangents à toutes les courbes qu'on peut tracer sur la sous-variété en passant par ce point.

Définition 5.1.24. Soit \mathscr{V} une sous-variété différentielle de \mathbb{R}^q de dimension r et soit $\xi \in \mathscr{V}$. On dira d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^q$ qu'il est tangent à la sous-variété \mathscr{V} en le point ξ s'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ et une fonction $\gamma:]-\varepsilon; \varepsilon[\longrightarrow \mathscr{V}$ de classe \mathscr{C}^1 tels que $\gamma(0) = \xi$ et $\dot{\gamma}(0) = v$. L'espace tangent à \mathscr{V} en le point ξ noté $\mathscr{T}_{\xi}\mathscr{V}$ est l'ensemble de tous les vecteurs tangents à \mathscr{V} en ξ

Théorème 5.1.25. Si $\mathscr{V} \subset \mathbb{R}^q$ est une sous-variété différentielle de dimension r définie par $\mathscr{V} = \varphi^{-1}(\{0_{q-r}\})$ où φ est une submersion sur \mathscr{V} alors

$$\mathscr{T}_{\xi}\mathscr{V} = \operatorname{Ker}\left(J_{\varphi}\left(\xi\right)\right), \quad \forall \xi \in \mathscr{V}.$$

$$(5.10)$$

Pour identifier la zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 , nous nous baserons sur la méthode développée dans [Isidori, 1989] et [Khalil, 1996b] pour résoudre le problème d'annulation de la

sortie des systèmes non-linéaires affines en la commande. La solution donnée à ce problème dans [Isidori, 1989] et [Khalil, 1996b] repose sur la construction de la **forme normale** des systèmes affines en la commande. Cette forme normale n'est qu'une réécriture du modèle d'état du système sous une forme linéarisée. Notons que la forme linéarisée n'est pas du tout une approximation du modèle d'état du système. Elle s'obtient par un changement approprié de variable d'état. Dans la section suivante, nous donnons la forme normale du système augmenté. Nous utiliserons ce résultat dans la section 5.3 pour caractériser la zone $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$.

5.2 Forme normale du système augmenté

5.2.1 Degré relatif du système augmenté

Du modèle général (1.4) des systèmes augmentés, on obtient la représentation d'état suivante de S dans le cas particulier des systèmes affines S_1 et S_2 décrits par (5.1) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t)) u(t), \\ y(t) = h(x(t)), \\ x(0) = x^{o}, \end{cases}$$
(5.11)

où

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \quad ; \quad f(x(t)) = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t)) \\ f_2(x_2(t)) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \quad ; \quad g(x(t)) = \begin{bmatrix} g_1(x_1(t)) \\ g_2(x_2(t)) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times l}$$

et

$$h(x(t)) = h_1(x_1(t)) - h_2(x_2(t)) \in \mathbb{R}.$$

Dans tout ce qui suivra, \mathbf{g}^k désigne la fonction qui définit les composantes de la $k^{\text{ème}}$ colonne de $g(\xi), \xi \in \mathbf{\Omega}$ c'est-à-dire

Notation 5.2.1. $g = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^1 & \mathbf{g}^2 & \cdots & \mathbf{g}^l \end{bmatrix}$

Les fonctions composantes \mathbf{g}^k , k = 1, 2, ..., l sont des fonctions vectorielles définies sur Ω et à valeurs dans \mathbb{R}^n . L'hypothèse 5.0.3 de régularité de g_1 et g_2 entraîne que les fonctions \mathbf{g}^k sont aussi régulières c'est-à-dire $\mathbf{g}^k \in \mathscr{C}^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ pour tout k = 1, 2, ..., l.

Remarque 5.2.2. Si $g(\xi) = B$ où B est la matrice de commande du système augmenté dans le cas linéaire alors \mathbf{g}^k coïncide avec la fonction constante qui a tout $\xi \in \mathbf{\Omega}$ associe $k^{i \grave{\mathbf{e}} m e}$ colonne \mathbf{B}^k de B.

Chapitre 5. Discernabilité des systèmes non-linéaires affines en la commande

Pour des raisons de clarté dans la présentation, nous utiliserons parfois le symbole " \circ " de composition des fonctions pour éviter des imbrications de parenthèses. Par exemple, nous écrirons parfois $f \circ x(t)$ à la place de f(x(t)). Nous adopterons de plus la notation suivante :

Notation 5.2.3. $\forall \psi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}) \ et \ \forall \xi \in \mathbb{R}^{2n}, \ \mathbb{L}_g\psi(\xi) = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{g}^1}\psi(\xi) & L_{\mathbf{g}^2}\psi(\xi) & \cdots & L_{\mathbf{g}^l}\psi(\xi) \end{bmatrix}$

Un concept important sur lequel repose la construction de la forme normale des systèmes non-linéaires affines en la commande est le degré relatif [Isidori, 1989], [Khalil, 1996b], [Kolavennu et al., 2001], [Liu and Lin, 2011]. Dans la littérature, il est généralement défini pour les systèmes SISO et les systèmes MIMO "carrés"¹ (voir par exemple [Isidori, 1989], [Khalil, 1996b] et [Liu and Lin, 2011]). Pour le système augmenté S qui est un système monosortie (c'est-à-dire SISO ou MISO), nous utiliserons la définition du degré relatif introduite dans [Kolavennu et al., 2001] pour les systèmes MIMO "rectangulaires"². Plus précisément, nous définissons le degré relatif de S comme suit :

Définition 5.2.4. On dira d'un nombre $\rho \in \mathbb{N}^*$ qu'il est un degré relatif du système augmenté sur le domaine Ω si pour tout $\xi \in \Omega$, $\mathbb{L}_g L_f^{r-1}h(\xi) = 0_{1\times l}$ pour tout $r = 1, 2, \ldots, \rho - 1$ et $\mathbb{L}_g L_f^{\rho-1}h(\xi) \neq 0_{1\times l}$.

En dérivant successivement la sortie y du système augmenté, on obtient

$$\begin{array}{lll} y\left(t\right) &=& h\left(x\left(t\right)\right) \\ \dot{y}\left(t\right) &=& L_{f}h\left(x\left(t\right)\right) + \mathbb{L}_{g}h\left(x\left(t\right)\right) \, u\left(t\right) = L_{f}h\left(x\left(t\right)\right) \, , \\ \vdots &=& \vdots \\ y^{\left(\rho-1\right)}\left(t\right) &=& L_{f}^{\rho-1}h\left(x\left(t\right)\right) + \mathbb{L}_{g}L_{f}^{\rho-2}h\left(x\left(t\right)\right) \, u\left(t\right) = L_{f}^{\rho-1}h\left(x\left(t\right)\right) \, , \\ y^{\left(\rho\right)}\left(t\right) &=& L_{f}^{\rho}h\left(x\left(t\right)\right) + \mathbb{L}_{g}L_{f}^{\rho-1}h\left(x\left(t\right)\right) \, u\left(t\right) \, , \end{array}$$

car $\mathbb{L}_g L_f^{r-1}g(x(t)) = 0_{1\times l}$ pour tout $r = 1, 2, ..., \rho - 1$ et $\mathbb{L}_g L_f^{\rho-1}g(x(t)) \neq 0_{1\times l}$. Le degré relatif ρ correspond donc à l'ordre minimal k de dérivation de la sortie y qu'il faut atteindre pour faire apparaître explicitement et pour la première fois au moins une composante de la commande u dans l'expression de la dérivée $y^{(k)}$ de la sortie [Kolavennu et al., 2001].

Si les systèmes S_1 et S_2 sont linéaires c'est-à-dire si les fonctions f, g et h sont définies respectivement par $f(\xi) = A\xi$, $g(\xi) = B$ et $h(\xi) = C\xi$ alors pour tout $r \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \{1, 2, ..., l\}$ on obtient

$$L_{\mathbf{g}^{k}}L_{f}^{r}h\left(\xi\right) = \left\langle \nabla L_{f}^{r}h\left(\xi\right), \mathbf{g}^{k}\left(\xi\right)\right\rangle = C A^{r} \mathbf{B}^{k}.$$

^{1.} Un système MIMO carré est un système qui a un nombre de mesures égale au nombre de commandes

^{2.} Un système MIMO rectangulaire est un système qui a un nombre de mesures inférieur ou égal au nombre de commandes

Par conséquent, pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{L}_{g}L_{f}^{r}h\left(\xi\right) = \begin{bmatrix} C A^{r} \mathbf{B}^{1} & C A^{r} \mathbf{B}^{2} & \cdots & C A^{r} \mathbf{B}^{l} \end{bmatrix} = C A^{r} B$$

Ainsi, le degré relatif du système augmenté correspond à l'indice de similarité des paramètres de Markov de S_1 et S_2 . Dans le cas non linéaire, l'indice ρ permet de comparer les systèmes S_1 et S_2 en termes de similarité des fonctions $\mathbb{L}_{g_1}L_{f_1}^kh_1$ et $\mathbb{L}_{g_2}L_{f_2}^kh_2$ qui définissent $\mathbb{L}_gL_f^kh$:

$$\forall \xi = \pi \left(\xi_1, \xi_2 \right), \ \xi_i \in \mathbb{R}^n, \ i = 1, 2, \quad \mathbb{L}_g L_f^k h\left(\xi \right) = \mathbb{L}_{g_1} L_{f_1}^k h_1\left(\xi_1 \right) - \mathbb{L}_{g_2} L_{f_2}^k h_2\left(\xi_2 \right).$$

Nous l'appellerons donc parfois indice de similarité des systèmes S_1 et S_2 .

Exemple 5.2.5. Considérons deux pendules oscillant S_1 et S_2 entraînés par une force u:

$$S_{i} \quad \left\{ \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_{i}\left(t\right) \\ \ddot{\theta}_{i}\left(t\right) \\ \vdots \\ \dot{x}_{i}(t) \\ y_{i}\left(t\right) = \theta_{i}\left(t\right),}^{i} = \underbrace{\frac{1}{m_{i}L_{i}} \begin{bmatrix} m_{i}L_{i}\dot{\theta}_{i}\left(t\right) \\ -\alpha_{0}m_{i}\sin\left(\theta_{i}\left(t\right)\right) - \mu_{i}L_{i}\dot{\theta}_{i}\left(t\right) \\ f_{i}(x_{i}(t)) \\ f_{i}(x_{i}(t)) \\ f_{i}(x_{i}(t)) \\ \vdots \\ f_{i}(x_{i}(t)) \\ f_{i}(x_{i}(t)) \\ \vdots \\ f_{i}(x_{i}(t)) \\ f_{i}(x_{i}(t)) \\ \vdots \\ f_{i}(x_{i}$$

où pour tout $i = 1, 2, L_i$ représente la longueur de S_i, m_i , la masse de S_i et μ_i , le coefficient de frottement au point de pivot. La constante α_0 est l'accélération gravitationnelle.



Figure 5.2 – Pendule S_i

Pour tout $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^4$, il est facile de vérifier que

 $L_{f}^{0}h\left(\xi\right) = \xi_{1} - \xi_{3} \; ; \; L_{f}^{1}h\left(\xi\right) = \xi_{2} - \xi_{4} \; ; \; L_{f}^{2}h\left(\xi\right) = -\frac{\alpha_{0}}{L_{1}}\sin\left(\xi_{1}\right) - \frac{\mu_{1}}{m_{1}}\xi_{2} + \frac{\alpha_{0}}{L_{2}}\sin\left(\xi_{3}\right) + \frac{\mu_{2}}{m_{2}}\xi_{4}$

et

$$L_{f}^{2}h\left(\xi\right) = \frac{\mu_{1}^{2}}{m_{1}^{2}L_{1}^{2}} - \frac{\alpha_{0}}{m_{1}L_{1}^{3}}\cos\left(\xi_{1}\right) - \frac{\mu_{2}^{2}}{m_{2}^{2}L_{2}^{2}} + \frac{\alpha_{0}}{m_{2}L_{2}^{3}}\cos\left(\xi_{4}\right)$$

Il s'ensuit que

$$\mathbb{L}_{g}h\left(\xi\right) = 0 \quad ; \quad \mathbb{L}_{g}L_{f}^{1}h\left(\xi\right) = \frac{1}{m_{1}L_{1}^{2}} - \frac{1}{m_{2}L_{2}^{2}} \quad ; \quad \mathbb{L}_{g}L_{f}^{2}h\left(\xi\right) = \frac{\mu_{2}}{m_{2}^{2}L_{2}^{2}} - \frac{\mu_{1}}{m_{1}^{2}L_{1}^{2}}$$

et

$$\mathbb{L}_{g}L_{f}^{3}h\left(\xi\right) = \frac{\mu_{1}^{2}}{m_{1}^{3}L_{1}^{2}} - \frac{\mu_{2}^{2}}{m_{2}^{3}L_{2}^{2}} + \frac{\alpha_{0}}{m_{2}L_{2}^{3}}\cos\left(\xi_{3}\right) - \frac{\alpha_{0}}{m_{1}L_{1}^{3}}\cos\left(\xi_{1}\right).$$

Par conséquent,

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{cases} 2 \ sur \ \boldsymbol{\Omega} = \mathbb{R}^4 \ si \ m_1 \ L_1^2 \neq m_2 \ L_2^2, \\\\ 3 \ sur \ \boldsymbol{\Omega} = \mathbb{R}^4 \ si \ m_1 \ L_1^2 = m_2 \ L_2^2 \ et \ m_1 \ \mu_2 \neq m_2 \ \mu_1. \end{cases}$$

Lorsque $m_1 L_1^2 = m_2 L_2^2$ et $m_1 \mu_2 = m_2 \mu_1$, le système augmenté n'admet pas de degré relatif sur \mathbb{R}^4 tout entier. En effet, dans ce cas, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^4$ et pour tout r = 1, 2, 3, $\mathbb{L}_g L_f^{r-1} h(\xi) = 0$. De plus,

$$\mathbb{L}_{g}L_{f}^{3}h(\xi) = \frac{\alpha_{0}}{m_{2}L_{2}^{2}} \left(\frac{1}{L_{2}}\cos(\xi_{3}) - \frac{1}{L_{1}}\cos(\xi_{1})\right)$$

n'est pas forcément non nulle pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^4$.

Cependant, le degré relatif vaut 4 dans ce cas sur sur l'ouvert

$$\mathbf{\Omega} = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^4 \colon \frac{1}{L_1} \cos\left(\xi_1\right) - \frac{1}{L_2} \cos\left(\xi_3\right) \neq 0 \right\}.$$

La question de l'atteignabilité du domaine Ω par les trajectoires du système augmenté associé aux deux pendules S_1 et S_2 se pose alors dans le cas où $m_1 L_1^2 = m_2 L_2^2$ et $m_1 \mu_2 = m_2 \mu_1$.

Remarque 5.2.6. Le degré relatif ρ du système augmenté peut ne pas exister sur l'ouvert Ω . C'est le cas par exemple lorsque les fonctions $\mathbb{L}_g L_f^k h$, $k \in \mathbb{N}$ sont toutes identiquement nulles sur Ω . Pour les systèmes linéaires, ce cas correspond à la situation où S_1 et S_2 ont les mêmes paramètres de Markov. Par analogie aux notations adoptées dans le chapitre 3, nous donnons par convention la valeur $+\infty$ au degré relatif lorsque les fonctions $\mathbb{L}_g L_f^k h$, $k \in \mathbb{N}$ sont toutes identiquement nulles sur Ω .

Comme dans le cas linéaire, nous désignerons par \mathfrak{J} l'ensemble des composantes de la commande u qui apparaissent explicitement dans l'expression de la dérivée d'ordre ρ de la sortie du système augmenté :

Notation 5.2.7.
$$\mathfrak{J} = \{ j \in \{1, 2, ..., l\} : L_{\mathbf{g}^{j}} L_{f}^{\rho-1} h(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \Omega \}$$

Nous avons vu dans le chapitre 3 que l'indice de similarité des systèmes linéaires qui ont la même matrice d'action mais des paramètres Markov différents est toujours compris entre 1 et 2n. Nous allons montrer que ce résultat reste valable pour les systèmes non-linéaires affines en la commande (corollaire 5.2.11). La preuve est fortement inspirée des techniques employées dans [Isidori, 1989] et [Khalil, 1996b] pour encadrer le degré relatif des systèmes SISO. Elle utilise le lemme 5.2.8 ci-dessous.

Lemme 5.2.8. Soient $j_0 \in \mathfrak{J}$ et $\xi \in \Omega$. Si le système augmenté admet un degré relatif sur Ω et si $\rho \neq +\infty$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $r \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k + r \leq \rho - 1$,

$$L_{ad_{f}^{r}\mathbf{g}^{j_{0}}}L_{f}^{k}h\left(\xi\right) = \begin{cases} 0 & si & 0 \le k+r \le \rho - 2, \\ (-1)^{r} L_{\mathbf{g}_{j^{0}}}L_{f}^{\rho-1}h\left(\xi\right) \ne 0 & si & k+r = \rho - 1. \end{cases}$$
(5.12)

Démonstration. Pour prouver (5.12), nous procéderons par récurrence sur r. D'après la définition du degré relatif, on a

$$L_{ad_{f}^{0}\mathbf{g}^{j_{0}}}L_{f}^{k}h\left(\xi\right) = L_{\mathbf{g}^{j_{0}}}L_{f}^{k}h\left(\xi\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} & 0 \le k \le \boldsymbol{\rho} - 2, \\ L_{\mathbf{g}^{j_{0}}}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(\xi\right) \ne 0 & \text{si} & k = \boldsymbol{\rho} - 1. \end{cases}$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \le k \le \rho - 1$, la relation (5.12) est vraie quand r = 0. Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que (5.12) est vraie pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $0 \le k + r \le \rho - 1$. Nous allons montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \le k + r + 1 \le \rho - 1$, (5.12) est vraie au rang r + 1.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \le k+r+1 \le \rho-1$. D'après l'identité de Jacobi (voir proposition 5.1.11), on a

$$L_{ad_{f}^{r+1}\mathbf{g}^{j0}}L_{f}^{k}h\left(\xi\right) = L_{\left[f,ad_{f}^{r}\mathbf{g}^{j0}\right]}L_{f}^{k}h\left(\xi\right) = L_{f}L_{ad_{f}^{r}\mathbf{g}^{j0}}L_{f}^{k}h\left(\xi\right) - L_{ad_{f}^{r}\mathbf{g}^{j0}}L_{f}^{k+1}h\left(\xi\right).$$

Comme $0 \le k + r + 1 \le \rho - 1$, $0 \le k + r \le \rho - 2$ et on déduit de l'hypothèse de récurrence que $L_{ad_f^r \mathbf{g}^{j_0}} L_f^k h(\xi) = 0$. L'expression précédente de $L_{ad_f^{r+1} \mathbf{g}^{j_0}} L_f^k h(\xi)$ devient alors

$$L_{ad_{f}^{r+1}\mathbf{g}^{j0}}L_{f}^{k}h\left(\xi\right) = -L_{ad_{f}^{r}\mathbf{g}^{j0}}L_{f}^{k+1}h\left(\xi\right).$$

De plus, comme $0 \le k + 1 + r \le \rho - 1$, en remplaçant dans (5.12) k par k + 1 (ceci est possible d'après l'hypothèse de récurrence), on obtient

$$L_{ad_{f}^{r}\mathbf{g}^{j_{0}}}L_{f}^{k+1}h\left(\xi\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} & 0 \le k+r+1 \le \boldsymbol{\rho}-2, \\ \left(-1\right)^{r} L_{\mathbf{g}_{j^{0}}}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(\xi\right) \ne 0 & \text{si} & k+r+1 = \boldsymbol{\rho}-1. \end{cases}$$

D'où (5.12) est vraie au rang r + 1.

Dans tout ce qui suivra, Φ_k désigne la fonction vectorielle ayant pour fonction composantes les k + 1 premières dérivées de Lie de h le long de f:

Notation 5.2.9. *Pour tout* $\xi \in \Omega$ *,*

$$\Phi_{k}\left(\xi\right) = \begin{bmatrix} h\left(\xi\right) \\ L_{f}h\left(\xi\right) \\ \vdots \\ L_{f}^{k}h\left(\xi\right) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1}$$

$$(5.13)$$

Le théorème suivant montre que si le degré relatif est fini alors la fonction $\Phi_{\rho-1}$ est une submersion sur l'ouvert Ω .

Théorème 5.2.10. Si le système augmenté admet un degré relatif fini ρ sur Ω alors pour tout $\xi \in \Omega$ on a

$$\operatorname{rang}\left(J_{\Phi_{\rho-1}}\left(\xi\right)\right)=\boldsymbol{\rho}.$$

Démonstration. Supposons que le degré relatif ρ du système augmenté est fini et soient $j_0 \in \mathfrak{J}$ et $\xi \in \Omega$. Associons au vecteur $\xi \in \Omega$ la matrice $M(\xi) \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho}$ définie par

$$M\left(\xi\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial \xi}\left(\xi\right) \\ \frac{\partial L_{f}h}{\partial \xi}\left(\xi\right) \\ \vdots \\ \frac{\partial L_{f}^{\rho-1}h}{\partial \xi}\left(\xi\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{j_{0}}\left(\xi\right) & ad_{f}\mathbf{g}^{j_{0}}\left(\xi\right) & \cdots & ad_{f}^{\rho-1}\mathbf{g}^{j_{0}}\left(\xi\right) \end{bmatrix}.$$
(5.14)

Désignons par $M_k^r(\xi)$ le coefficient situé à l'intersection de la ligne k et de la colonne r de $M(\xi)$. Pour tout k et r tels que $1 \le k, r \le \rho$, on obtient

$$M_{k}^{r}(\xi) = \frac{\partial L_{f}^{k-1}h}{\partial\xi}(\xi) \ ad_{f}^{r-1}\mathbf{g}^{j_{0}}(\xi) = L_{ad_{f}^{r-1}\mathbf{g}^{j_{0}}}L_{f}^{k-1}h(\xi)$$

En utilisant les formules des termes $L_{ad_{f}^{r-1}\mathbf{g}^{j_{0}}}L_{f}^{k-1}h\left(\xi\right)$ établies par le lemme 5.2.8, il vient que

 $M(\xi)$ est de la forme

$$M\left(\xi\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & M_{1}^{\rho}\left(\xi\right) \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * & * \\ 0 & M_{\rho-1}^{2}\left(\xi\right) & & & \\ M_{\rho}^{1}\left(\xi\right) & * & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix}$$
(5.15)

où le symbole * est mis pour les termes non forcément nuls et les coefficients $M_{\rho-s}^{s+1}(\xi)$, $s = 0, 1, \ldots, \rho - 1$ sont donnés par (5.12) comme suit

$$M_{\rho-s}^{s+1}(\xi) = L_{ad_{f}^{\rho-s-1}\mathbf{g}^{j_{0}}}L_{f}^{s}h(\xi) = (-1)^{\rho-s-1}L_{g^{j_{0}}}L_{f}^{s}h(\xi) \neq 0.$$

Les coefficients $M_{\rho^{t^*}-s}^{s+1}$, $s = 0, 1, \dots, \rho - 1$ étant non nuls, on déduit de l'expression (5.15) que la matrice triangulaire $M(\xi)$ est inversible. Ceci entraîne d'après l'expression (5.14) de $M(\xi)$ que la matrice jacobienne $J_{\Phi_{\rho-1}}(\xi) \in \mathbb{R}^{\rho \times 2n}$ est de plein rang ligne ρ .

Du théorème 5.2.10 on obtient l'encadrement suivant du degré relatif du système augmenté :

Corollaire 5.2.11. Si le système augmenté S admet sur Ω un degré relatif généralisé qui est fini alors $1 \leq \rho \leq 2n$.

Démonstration. La première inégalité $(1 \leq \boldsymbol{\rho})$ est une conséquence de la définition du degré relatif. La seconde inégalité découle du théorème 5.2.10 et du fait que $J_{\Phi_{\boldsymbol{\rho}-1}}(\xi) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{\rho} \times 2n}$. \Box

Dans [Isidori, 1989], on montre qu'on peut toujours réécrire localement sous une forme normale, le modèle d'état des systèmes non-linéaires affines en la commande qui ont un degré relatif. Cependant, pour transformer le modèle d'état de ces systèmes en une forme normale globale, l'existence du degré relatif seule ne suffit pas [Isidori, 1989], [Khalil, 1996b].

Dans les deux sous-sections suivantes, nous donnons la forme normale globale du système augmenté S tout en précisant les hypothèses qui garantissent l'existence de cette forme. Pour obtenir ce résultat, nous suivons le raisonnement utilisé dans [Isidori, 1989] pour construire la forme normale locale des systèmes non-linéaires affines en la commande. La sous-section 5.2.2 traite du cas $\rho < 2n$. Le cas $\rho = 2n$ est étudié dans la sous-section 5.2.3.

5.2.2 Forme normale du système augmenté : cas $\rho < 2n$

Le théorème suivant montre qu'on peut toujours définir un système de changement de coordonnées locales en tout point de Ω . Sa preuve repose sur le théorème d'inversion locale et le théorème de la base incomplète [Touré, 1991]. Le théorème de la base incomplète est rappelé dans le lemme suivant

Lemme 5.2.12 (Théorème de la base incomplète). Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que r < q et soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ une partie libre³ de \mathbb{R}^q . Alors il existe des vecteurs $\bar{v}_{r+1}, \bar{v}_{r+2}, \ldots, \bar{v}_q$ de \mathbb{R}^q tel que la famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, \bar{v}_{r+1}, \bar{v}_{r+2}, \ldots, \bar{v}_q\}$ est une base⁴ de \mathbb{R}^q .

Théorème 5.2.13. Si le système augmenté S admet sur Ω un degré relatif $\rho < 2n$ alors pour tout $\xi^* \in \Omega$ il existe une fonction vectorielle $\psi \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^{2n-\rho})$ telle que le fonction F de la forme

$$F\left(\xi\right) = \begin{bmatrix} \Phi_{\rho-1}\left(\xi\right) \\ \psi\left(\xi\right) \end{bmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{2n}$$
(5.16)

avec $\Phi_{\rho-1}$ donnée par (5.13) définit un système de changement de coordonnées locales en ξ^* .

Démonstration. Supposons que S admet sur l'ouvert Ω un degré relatif $\rho < 2n$ et soit $\xi^* \in \Omega$. La fonction $\varphi_{\rho-1}$ étant une submersion (voir théorème 5.2.10), il vient que la famille $\left\{ \nabla h\left(\xi^*\right), \nabla L_f h\left(\xi^*\right), \ldots, \nabla L_f^{\rho-1} h\left(\xi^*\right) \right\}$ est une partie libre de \mathbb{R}^{2n} . D'après le théorème de la base incomplète on peut compléter cette famille par des vecteurs $\bar{v}_{r+1}\left(\xi^*\right), \bar{v}_{r+2}\left(\xi^*\right), \ldots, \bar{v}_{2n}\left(\xi^*\right)$ de \mathbb{R}^{2n} pour construire une base de \mathbb{R}^{2n} . Soient $\psi_{\rho+k}, k = 1, 2, \ldots, 2n - \rho$ les formes linéaires définies par

$$\psi_{\boldsymbol{\rho}+k}\left(\xi\right) = \left\langle \bar{v}_{r+k}\left(\xi^{\star}\right), e_{1}\right\rangle \,\xi_{1} + \left\langle \bar{v}_{r+k}\left(\xi^{\star}\right), e_{2}\right\rangle \,\xi_{2} + \dots + \left\langle \bar{v}_{\boldsymbol{\rho}+k}\left(\xi^{\star}\right), e_{2n}\right\rangle \,\xi_{2n}$$

où les vecteurs e_r , r = 1, 2, ..., 2n sont les éléments de la base canonique de \mathbb{R}^{2n} c'est-à-dire $e_r = \begin{bmatrix} \delta_1^r & \delta_2^r & \cdots & \delta_{2n}^r \end{bmatrix}^\top$ avec $\delta_j^r = 0$ si $j \neq r$ et $\delta_r^r = 1$. Posons

$$\psi\left(\xi\right) = \begin{bmatrix} \psi_{\rho+1}\left(\xi\right) \\ \psi_{\rho+2}\left(\xi\right) \\ \vdots \\ \psi_{2n}\left(\xi\right) \end{bmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{2n}.$$

^{3.} la famille $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ est une partie libre signifie que rang $(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_r \end{bmatrix}) = r$

^{4.} La famille $\{v_1, v_2, \dots, v_r, \bar{v}_{r+1}, \bar{v}_{r+2}, \dots, \bar{v}_q\}$ est une base de l'espace vectoriel \mathbb{R}^q signifie que $[v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_r, \bar{v}_{r+1} \ \bar{v}_{r+2} \ \bar{v}_q] \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{R})$
D'après la définition des formes linéaires $\psi_{\rho+k}$, on obtient $\nabla \psi_{\rho+k}(\xi) = \bar{v}_{\rho+k}(\xi^*)$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, 2n - \rho$. Par conséquent,

$$J_F\left(\xi^{\star}\right) = \begin{bmatrix} \nabla h\left(\xi^{\star}\right) \quad \nabla L_f h\left(\xi^{\star}\right) \quad \cdots \quad \nabla L_f^{\rho-1} h\left(\xi^{\star}\right), \bar{v}_{\rho+1}\left(\xi^{\star}\right) \quad \cdots \quad \bar{v}_{2n}\left(\xi^{\star}\right) \end{bmatrix}^{\top} \in \mathrm{GL}_{2n}\left(\mathbb{R}\right)$$

On conclut grâce au théorème d'inversion locale (théorème 5.1.14) que F définit un système de changement de coordonnées locales en ξ^* .

Ainsi, le théorème 5.2.13 garantit qu'on peut toujours compléter les fonctions de la submersion $\Phi_{\rho-1}$ pour construire un système de changement de coordonnées locales en tous les points de l'ouvert Ω . Cependant la construction d'un système de coordonnées globales à partir de la submersion $\Phi_{\rho-1}$ n'est pas garantie dans le cas général. Le théorème suivant donne une condition nécessaire qui rend possible cette construction. La preuve de ce théorème est une conséquence immédiate du théorème d'inversion globale (théorème 5.1.18).

Théorème 5.2.14. Si le système augmenté admet sur Ω un degré relatif $\rho < 2n$ et s'il existe une fonction $\psi \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^{2n-\rho})$ telle que la fonction F définie par (5.16) est injective sur Ω et sa différentielle est un isomorphisme en tout point de Ω c'est-à-dire $J_F(\xi) \in \operatorname{GL}_{2n}(\mathbb{R}), \forall \xi \in \Omega$ alors F définit un système de changement de coordonnées globales sur Ω .

La caractérisation de la zone d'indiscernabilité que nous donnons dans la section 5.3 nécessite un forme normale globale du système. Pour cela, dans toute la suite du chapitre nous ferons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 5.2.15. Il existe une fonction $\psi \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^{2n-\rho})$ telle que la fonction F définie par (5.16) est injective sur Ω et sa différentielle est un isomorphisme en tout point de Ω .

Sous l'hypothèse 5.2.15 précédent, la forme normale globale du système augmenté est donnée par le théorème suivant :

Théorème 5.2.16. Si le système augmenté admet sur Ω un degré relatif fini $\rho < 2n$ alors sous l'hypothèse 5.2.15, le changement de coordonnées z(t) = F(x(t)) conduit à la description suivante du système augmenté : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\dot{z}_{k}(t) = z_{k+1}(t), \quad k = 1, 2, \dots, \rho - 1,$$

$$\dot{z}_{\rho}(t) = L_{f}^{\rho}h\left(F^{-1} \circ z(t)\right) + \mathbb{L}_{g}L_{f}^{\rho-1}h\left(F^{-1} \circ z(t)\right) u(t),$$

$$\dot{z}_{\rho+k}(t) = L_{f}\psi_{\rho+k}\left(F^{-1} \circ z(t)\right) + L_{g}\psi_{\rho+k}\left(F^{-1} \circ z(t)\right) u(t), \quad k = 1, 2, \dots, 2n - \rho,$$

$$y(t) = z_{1}(t).$$
(5.17)

où pour tout $k = 1, 2, ..., 2n - \rho$, $\psi_{\rho+k}$ désigne la $k^{i eme}$ fonction composante de la fonction ψ de l'hypothèse 5.2.15.

Démonstration. D'après la définition (5.16) de F, l'égalité z(t) = F(x(t)) implique que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$z_{k}(t) = L_{f}^{k-1}h(x(t)), \quad k = 1, 2, \dots, \rho$$
(5.18)

 et

$$z_{\rho+k}(t) = \psi_{\rho+k}(x(t)), \quad k = 1, 2, \dots, 2n - \rho.$$
(5.19)

Ainsi, d'après la relation (5.18), pour tout $k = 1, 2, ..., \rho$ on a

$$\begin{aligned} \dot{z}_{k}(t) &= \left\langle \nabla L_{f}^{k-1}h(x(t)), \dot{x}(t) \right\rangle, \\ &= \left\langle \nabla L_{f}^{k-1}h(x(t)), f(x(t)) \right\rangle + \left\langle \nabla L_{f}^{k-1}h(x(t)), g(x(t)) u(t) \right\rangle, \\ \dot{z}_{k}(t) &= L_{f}^{k}h(x(t)) + \mathbb{L}_{g}L_{f}^{k-1}h(x(t)) u(t). \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $x(t) = F^{-1} \circ z(t)$ (car F est un difféomorphisme) et comme

$$\mathbb{L}_{g}L_{f}^{k-1}h(x(t)) = 0_{1 \times l}, \quad k = 1, 2, \dots, \rho - 1,$$

l'expression de $\dot{z}_k, k = 1, 2, \dots, \rho$ devient alors

$$\dot{z}_{k}(t) = \begin{cases} L_{f}^{k}h(x(t)) = z_{k+1}(t) & \text{si } 1 \leq k \leq \boldsymbol{\rho} - 1, \\ L_{f}^{\boldsymbol{\rho}}h(F^{-1} \circ z(t)) + \mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho} - 1}h(F^{-1} \circ z(t)) u(t) & \text{si } k = \boldsymbol{\rho}. \end{cases}$$

Pour tout $k = 1, 2, ..., 2n - \rho$, une dérivation de l'expression (5.19) de $z_{\rho+r}$ donne

$$\begin{aligned} \dot{z}_{\boldsymbol{\rho}+k}\left(t\right) &= \langle \nabla\psi_{\boldsymbol{\rho}+k}\left(x\left(t\right)\right), \dot{x}\left(t\right) \rangle \\ &= \langle \nabla\psi_{\boldsymbol{\rho}+k}\left(x\left(t\right)\right), f\left(x\left(t\right)\right) \rangle + \langle \nabla\psi_{\boldsymbol{\rho}+k}\left(x\left(t\right)\right), g\left(x\left(t\right)\right) u\left(t\right) \rangle \\ \dot{z}_{\boldsymbol{\rho}+k}\left(t\right) &= L_{f}\psi_{\boldsymbol{\rho}+k}\left(F^{-1}\circ z\left(t\right)\right) + \mathbb{L}_{g}\psi_{\boldsymbol{\rho}+k}\left(F^{-1}\circ z\left(t\right)\right) u\left(t\right). \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $\rho < 2n$, la forme normale permet donc de linéariser partiellement la dynamique du système augmenté dans le nouveau système de coordonnées z(t) = F(x(t)).

Lorsque l'hypothèse 5.2.15 n'est pas satisfaite par S, le modèle normal (5.17) est localement valable en tout point de Ω . On pourra dans ce cas définir une notion de discernabilité locale des systèmes et utiliser cette représentation locale du système augmenté pour comparer les sorties de S_1 et S_2 dans des voisinages des points de Ω .

5.2.3 Forme normale du système augmenté : cas $\rho = 2n$

D'après le théorème 5.2.10, lorsque $\rho = 2n$, la matrice jacobienne $J_{\Phi_{2n-1}}(\xi) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ est de plein rang ligne en tout point $\xi \in \Omega$. Elle est alors inversible et ceci implique d'après le théorème d'inversion locale que Φ_{2n-1} définit un système de coordonnées locales :

Théorème 5.2.17. Si le système augmenté admet sur Ω un degré relatif $\rho = 2n$ alors pour tout $\xi \in \Omega$, la fonction Φ_{2n-1} définit un système de coordonnées locales en ξ .

Du théorème d'inversion globale, on obtient la condition nécessaire suivante pour que Φ_{2n-1} soit un système de changement de coordonnées globales sur Ω .

Théorème 5.2.18. Si le système augmenté admet sur Ω un degré relatif $\rho = 2n$ et si Φ_{2n-1} est injective sur Ω alors Φ_{2n-1} définit un système de coordonnées globales sur Ω .

Pour pouvoir obtenir une forme normale globale qui nous permettra de caractériser la zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 il est nécessaire que Φ_{2n-1} soit un système de changement de coordonnées globales. Nous supposerons donc dans la suite du chapitre que

Hypothèse 5.2.19. La fonction Φ_{2n-1} définie par (5.13) est injective sur Ω .

La forme normale du système augmenté dans le cas $\rho = 2n$ est donnée par le théorème suivant :

Théorème 5.2.20. Si le système augmenté admet sur Ω un degré relatif $\rho = 2n$ alors sous l'hypothèse 5.2.19, le changement de coordonnées $z(t) = \Phi_{2n-1}(x(t))$ conduit à la description suivante du système augmenté : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{cases} \dot{z}_{k}(t) = z_{k+1}(t), \quad k = 1, 2, \dots, 2n - 1, \\ \dot{z}_{2n}(t) = L_{f}^{2n}h\left(\Phi_{2n-1}^{-1} \circ z(t)\right) + \mathbb{L}_{g}L_{f}^{2n-1}h\left(\Phi_{2n-1}^{-1} \circ z(t)\right) u(t), \qquad (5.20) \\ y(t) = z_{1}(t). \end{cases}$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle du théorème 5.2.16.

Ainsi, la forme normale dans le cas $\rho = 2n$ permet de linéariser quasi-totalement la dynamique du système augmenté dans le nouveau système de coordonnées $z(t) = \Phi_{2n-1}(x(t))$.

D'après le théorème 5.2.17, la fonction Φ_{2n-1} définit un système de changement de coordonnées locales. Le modèle normal (5.20) du système augmenté issu du changement de coordonnées $z(t) = \Phi_{2n-1}(x(t))$ est toujours valable en des voisinages de tous les points de Ω . Ainsi, lorsque l'hypothèse 5.2.19 n'est pas satisfaite par S, une utilisation de la forme normale locale pour comparer localement le comportement entrée-sortie de S_1 et S_2 peut être envisagée.

5.3 Caractérisation de la zone d'indiscernabilité

Cette section a pour objectif de déterminer la zone d'indiscernabilité des systèmes S_1 et S_2 à partir des formes normales du système augmenté. Nous allons distinguer le cas $\rho = 2n$ et le cas $\rho < 2n$.

Comme dans les chapitres 1 et 3, nous utiliserons pour des raisons de simplicité dans la présentation la fonction π d'empilement de variable définie par :

$$oldsymbol{\pi}\left(\xi_{1},\xi_{2}
ight)=egin{bmatrix} \xi_{1}\ \xi_{2}\end{bmatrix}.$$

5.3.1 Zone d'indiscernabilité : cas $\rho = 2n$

Dans le cas $\rho = 2n$, la zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 est donnée par le théorème 5.3.2. La preuve de ce théorème est basée sur le lemme 5.3.1 suivant.

Lemme 5.3.1. Si le degré relatif du système augmenté sur Ω est $\rho = 2n$ alors sous l'hypothèse 5.2.19, $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ si et seulement si x_1^o et x_2^o satisfont la condition

$$\Phi_{2n-1} \circ \boldsymbol{\pi} \left(x_1^o, x_2^o \right) = 0_{2n} \tag{5.21}$$

et si la commande u est solution de l'équation fonctionnelle

$$L_{f}^{2n}h\left(\boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right)\right) + \mathbb{L}_{g}L_{f}^{2n-1}h\left(\boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right)\right) u\left(t\right) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}.$$
(5.22)

Démonstration. Supposons que $\rho = 2n$. Soit (x_1^o, x_2^o, u) un triplet appartenant à la zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 . Alors la sortie $y(\cdot, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o), u, \boldsymbol{\pi}(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}))$ est identiquement nulle sur \mathbb{R}_+ et ceci implique, d'après la forme normale (5.20) du système augmenté que

$$z_1^{(k)}(t) = z_{k+1}(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall k = 0, 1, \dots, 2n-1,$$
 (5.23)

 et

$$z_1^{2n}(t) = \dot{z}_{2n}(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$
 (5.24)

Réécrivons l'équation (5.23) pour k = 1, 2, ..., 2n-1 et pour t = 0. On obtient alors la relation suivante

$$z_{k+1}(0) = L_f^k h(x(0)) = L_f^k h \circ \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o) = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

qui est équivalente à la condition (5.21).

Par ailleurs, d'après la condition (5.24) et l'expression de \dot{z}_{2n} donnée par la forme normale (5.20) du système augmenté, on obtient

$$L_{f}^{2n}h\left(\Phi_{2n-1}^{-1}\circ z\left(t\right)\right) + \mathbb{L}_{g}L_{f}^{2n-1}h\left(\Phi_{2n-1}^{-1}\circ z\left(t\right)\right)\,u\left(t\right) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}.$$
(5.25)

Puisque les 2n fonctions z_k sont nulles (voir la relation (5.23)), la fonction z est identiquement nulle sur \mathbb{R}_+ et ceci entraîne que $\Phi_{2n-1}^{-1} \circ z(t) = \Phi_{2n-1}^{-1}(0_{2n})$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. D'autre part, par définition de z, on a $x(t) = \Phi_{2n-1}^{-1} \circ z(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. En particulier, pour t = 0 on obtient $x(0) = \Phi_{2n-1}^{-1} \circ z(0) = \Phi_{2n-1}^{-1}(0_{2n})$. Ainsi, en utilisant la notation $x(0) =: \pi(x_1^o, x_2^o)$ on peut écrire que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \Phi_{2n-1}^{-1} \circ z(t) = \Phi_{2n-1}^{-1}(0_{2n}) = x(0) = \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o).$$

La relation (5.25) devient alors

$$L_{f}^{2n}h\left(\boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right)\right) + \mathbb{L}_{g}L_{f}^{2n-1}h\left(\boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right)\right) \, u\left(t\right) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+},$$

d'où u est solution de l'équation (5.22).

Réciproquement, supposons que x_1^o et x_2^o satisfont la condition (5.21) et que la commande uest solution de l'équation (5.22). Soit $\xi \colon \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}^{2n}$ la fonction constante de valeur $\pi(x_1^o, x_2^o)$ c'est-à-dire $\xi(t) = \pi(x_1^o, x_2^o)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Puisque x_1^o et x_2^o satisfont la condition (5.21) on a alors $\Phi_{2n-1} \circ \xi(t) = 0_{2n}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ c'est-à-dire

$$L_f^k h \circ \xi(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall k = 0, 1, \dots, 2n - 1.$$

$$(5.26)$$

Pour k = 1, 2, ..., 2n - 1, en utilisant la définition de la dérivée de Lie, la relation (5.26) peut être réécrite comme suit :

$$\left\langle \left(\nabla L_{f}^{k-1}h\right)\circ\xi\left(t\right),f\circ\xi\left(t\right)\right\rangle =0,\quad\forall t\in\mathbb{R}_{+}\text{ et }\forall k=1,2,\ldots,2n-1.$$
(5.27)

D'autre part, puisque $\rho = 2n \text{ sur } \Omega \ni \pi (x_1^o, x_2^o) = \xi (t)$, la définition du degré relatif implique qu'on a la relation suivante

$$0 = \mathbb{L}_{g} L_{f}^{k-1} h\left(\pi\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right)\right) u\left(t\right) = \mathbb{L}_{g} L_{f}^{k-1} h\left(\xi\left(t\right)\right) u\left(t\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+} \text{ et } \forall k = 1, 2, \dots, 2n-1,$$

qui est encore équivalent à

$$\left\langle \left(\nabla L_{f}^{k-1}h\right)\circ\xi\left(t\right),g\circ\xi\left(t\right)\,u\left(t\right)\right\rangle =0,\quad\forall t\in\mathbb{R}_{+}\text{ et }\forall k=1,2,\ldots,2n-1.$$
(5.28)

En sommant maintenant les relations (5.27) et (5.28) on obtient : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\left\langle \left(\nabla L_{f}^{k-1}h\right)\circ\xi\left(t\right),f\circ\xi\left(t\right)+g\circ\xi\left(t\right)\,u\left(t\right)\right\rangle =0,\quad\forall k=1,2,\ldots,2n-1.$$
(5.29)

La condition (5.22) pouvant être réécrite comme suit

$$\left\langle \left(\nabla L_{f}^{2n-1}h\right)\circ\xi\left(t\right),f\circ\xi\left(t\right)+g\circ\xi\left(t\right)\,u\left(t\right)\right
angle =0,\quad\forall t\in\mathbb{R}_{+}$$

il vient que (5.29) et (5.22) sont équivalent à

$$\left\langle \left(\nabla L_{f}^{k}h\right)\circ\xi\left(t\right),f\circ\xi\left(t\right)+g\circ\xi\left(t\right)\,u\left(t\right)\right\rangle =0,\quad\forall k=0,2,\ldots,2n-1$$

c'est-à-dire

$$J_{\Phi_{2n-1}}(\xi(t)) \left[f \circ \xi(t) + g \circ \xi(t) \ u(t) \right] = 0_{2n}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$
(5.30)

Puisque $J_{\Phi_{2n-1}}(\xi(t)) = J_{\Phi_{2n-1}}(\pi(x_1^o, x_2^o))$ est inversible (conséquence du théorème 5.2.10), on déduit de la relation (5.30) que

$$f \circ \xi(t) + g \circ \xi(t) \ u(t) = 0_{2n}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\dot{\xi}(t) = 0_{2n} = f \circ \xi(t) + g \circ \xi(t) u(t)$. Cette dernière égalité implique d'après l'unicité de la solution de l'équation d'état du système augmenté que $\xi(t) = x(t, \pi(x_1^o, x_2^o), u, \pi(0_{\mathscr{W}_1, 0_{\mathscr{W}_2}}))$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Pour k = 0, la première équation

de (5.26) devient alors

$$0 = h \circ \xi (t) = h \left(x \left(t, \pi \left(x_1^o, x_2^o \right), u, \pi \left(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2} \right) \right) \right) =: y \left(t, \pi \left(x_1^o, x_2^o \right), u, \pi \left(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2} \right) \right), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

D'où $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2).$

Théorème 5.3.2. Si le système augmenté admet sur Ω un degré relatif $\rho = 2n$ alors sous l'hypothèse 5.2.19, $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ si et seulement si $x_1^o = x_2^o = 0_n$ et

$$\mathbb{L}_{g} L_{f}^{2n-1} h(0_{2n}) u(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}$$
(5.31)

Démonstration. Supposons que $\rho = 2n$. D'après le lemme 5.3.1, $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ si et seulement si le triplet (x_1^o, x_2^o, u) satisfait les conditions (5.21) et (5.22). Comme Φ_{2n-1} est un difféomorphisme sur Ω (conséquence de l'hypothèse 5.2.19 et du théorème 5.2.18), la condition (5.21) est alors équivalente à $\pi(x_1^o, x_2^o) = 0_{2n}$ c'est-à-dire $x_1^o = x_2^o = 0_n$. Par conséquent, on obtient $L_f^{2n}h(\pi(x_1^o, x_2^o)) = L_f^{2n}h(0_{2n}) = 0$ (car $f(0_{2n}) = 0$ d'après l'hypothèse 5.0.2) et la condition (5.21) devient alors la condition (5.31).

Lorsque $\rho = 2n$, les seules commandes qui conduisent S_1 et S_2 à générer des sorties identiques sont celles qui ont une trajectoire contenue dans le noyau de $\mathbb{L}_g L_f^{2n-1}h(0_{2n}) \in \mathbb{R}^{1 \times l}$. Pour les systèmes SISO S_1 et S_2 , ces commandes sont nulles car par définition du degré relatif $\mathbb{L}_g L_f^{2n-1}h(0_{2n})$ est dans le cas l = 1 un nombre réel non nul. Ainsi, lorsque $\rho = 2n$, les systèmes SISO ont une zone d'indiscernabilité réduite au triplet trivial. Ce résultat est résumé dans le corollaire suivant

Corollaire 5.3.3. Si l = 1 et si le système augmenté admet sur Ω un degré relatif $\rho = 2n$ alors sous l'hypothèse 5.2.19, $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2) = \{(0_n, 0_n, 0_{\mathscr{U}})\}.$

Exemple 5.3.4. Considérons les pendules S_1 et S_2 de l'exemple 5.2.5. Pour nous placer dans les conditions du théorème 5.3.2 (condition $\rho = 2n \text{ sur } \Omega$), supposons que $m_1 L_1^2 = m_2 L_2^2$, $m_1 \mu_2 \neq m_2 \mu_1$ et que $\Omega = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^4 : \frac{1}{L_1} \cos(\xi_1) - \frac{1}{L_2} \cos(\xi_3) \neq 0 \right\}$ contient les trajectoires admissibles du système augmenté. Alors $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2) = \{(0_n, 0_n, 0_{\mathscr{U}})\}$ et ceci entraîne que les pendules S_1 et S_2 sont strictement discernables dans ce cas.

5.3.2 Zone d'indiscernabilité : cas $\rho < 2n$

Dans cette section, nous caractérisons la zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 dans le cas $\rho < 2n$. Nous utiliserons le résultat du théorème 5.3.5 qui donne les conditions que doivent

remplir les commandes et les états initiaux pour générer des sorties identiques.

Théorème 5.3.5. Si le système augmenté admet sur Ω un degré relatif fini $\rho < 2n$ alors sous l'hypothèse 5.2.15, $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ si et seulement si x_1^o et x_2^o satisfont la condition suivante

$$\Phi_{\boldsymbol{\rho}-1} \circ \boldsymbol{\pi} \left(x_1^o, x_2^o \right) = 0_{\boldsymbol{\rho}} \tag{5.32}$$

et si la commande u est solution de l'équation fonctionnelle

$$L_{f}^{\rho}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0,\eta\left(t\right)\right)\right) + \mathbb{L}_{g}L_{f}^{\rho-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0,\eta\left(t\right)\right)\right)\,u\left(t\right) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}.$$
(5.33)

où η est solution de l'équation différentielle

(1)

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = \Gamma_{f,\psi}\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0,\eta\left(t\right)\right)\right) + \Gamma_{g,\psi}\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right) \, u\left(t\right), \\ \eta\left(0\right) = \psi\circ\boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o},x_{2}^{o}\right) \end{cases}$$
(5.34)

avec les fonctions $\Gamma_{f,\psi}$ et $\Gamma_{g,\psi}$ définies par : $v \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\Gamma_{f,\psi}(v) = J_{\psi}(v) f(v) \quad ; \quad \Gamma_{g,\psi} = J_{\psi}(v) g(v).$$
(5.35)

Démonstration. Supposons que S admet sur Ω un degré relatif fini $\rho < 2n$.

Si (x_1^o, x_2^o, u) est un triplet appartenant à la zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 alors la sortie $y(\cdot, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o), u, \boldsymbol{\pi}(0_{dper_1}, 0_{\mathscr{W}_2}))$ est identiquement nulle sur \mathbb{R}_+ . Ceci implique, d'après la forme normale (5.17) du système augmenté que

$$z_1^{(k)}(t) = z_{k+1}(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall k = 0, 1, \dots, \rho - 1$$
 (5.36)

 et

$$z_1^{(\boldsymbol{\rho})}(t) = \dot{z}_{\boldsymbol{\rho}}(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

$$(5.37)$$

Réécrivons l'équation (5.36) pour $k = 1, 2, ..., \rho - 1$ et pour t = 0. On obtient alors la relation suivante

$$z_{k+1}(0) = L_f^k h(x(0)) = L_f^k h \circ \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o) = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots, \boldsymbol{\rho} - 1$$

qui est encore équivalente à la condition (5.32). La relation (5.37) et l'expression de \dot{z}_{ρ} donnée par la forme normale (5.17) du système augmenté impliquent que

$$L_{f}^{\boldsymbol{\rho}}h\left(F^{-1}\circ z\left(t\right)\right) + \mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ z\left(t\right)\right) u\left(t\right) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}.$$
(5.38)

De plus, d'après (5.36), les ρ premières composantes de z sont identiquement nulles. Par conséquent, $z(t) = \pi(0_{\rho}, \eta(t))$ avec

$$\eta(t) = \begin{bmatrix} z_{\rho+1}(t) \\ z_{\rho+2}(t) \\ \vdots \\ z_{2n}(t) \end{bmatrix}$$

et la relation (5.38) devient alors

$$L_{f}^{\boldsymbol{\rho}}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right) + \mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right)\,u\left(t\right) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}$$

Par ailleurs, d'après la forme normale (5.17), η satisfait les conditions suivantes

$$\begin{split} \dot{\eta}(t) &= \Gamma_{f,\psi} \left(F^{-1} \circ z(t) \right) + \Gamma_{g,\psi} \left(F^{-1} \circ z(t) \right) \, u(t) \\ &= \Gamma_{f,\psi} \left(F^{-1} \circ \pi \left(0, \eta(t) \right) \right) + \Gamma_{g,\psi} \left(F^{-1} \circ \pi \left(0_{\rho}, \eta(t) \right) \right) \, u(t) \end{split}$$

 et

$$\eta\left(0\right) = \psi \circ \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right)$$

Il est donc solution de l'équation différentielle (5.34). D'où u satisfait la relation (5.33).

Réciproquement supposons que x_1^o et x_2^o satisfont la condition (5.32) et que la commande u satisfait les relations (5.33) et (5.34). Soit $\xi \colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction définie par

$$\xi\left(t\right) = F^{-1} \circ \boldsymbol{\pi}\left(0, \eta\left(t\right)\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}.$$

Alors la définition de la transformation F et la définition de ξ entraînent que

$$L_{f}^{k}h\circ\xi\left(t\right)=0,\quad\forall t\in\mathbb{R}_{+}\text{ et }\forall k=0,1,\ldots,\boldsymbol{\rho}-1$$
(5.39)

 et

$$\eta\left(t\right) = \psi \circ \xi\left(t\right) \tag{5.40}$$

En utilisant la définition de la dérivée de Lie, la relation (5.39) peut être réécrite pour $k = 1, 2, ..., \rho - 1$ comme suit :

$$\left\langle \left(\nabla L_{f}^{k-1}h\right)\circ\xi\left(t\right),f\circ\xi\left(t\right)\right\rangle =0,\quad\forall t\in\mathbb{R}_{+}\text{ et }\forall k=1,2,\ldots,\boldsymbol{\rho}-1$$
(5.41)

Par ailleurs, il découle de la définition du degré relatif que

$$\left\langle \left(\nabla L_{f}^{k-1}h\right)\circ\xi\left(t\right),g\circ\xi\left(t\right)\,u\left(t\right)\right\rangle =0,\quad\forall t\in\mathbb{R}_{+}\text{ et }\forall k=1,2,\ldots,\boldsymbol{\rho}-1$$
(5.42)

En sommant les relations (5.41) et (5.42), on obtient

$$\left\langle \left(\nabla L_{f}^{k-1}h\right)\circ\xi\left(t\right),f\circ\xi\left(t\right)+g\circ\xi\left(t\right)\,u\left(t\right)\right\rangle =0,\quad\forall t\in\mathbb{R}_{+}\text{ et }\forall k=1,2,\ldots,\boldsymbol{\rho}-1$$

D'autre part, l'équation (5.33) peut être réécrite comme suit :

$$\left\langle \left(\nabla L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\right)\circ\xi\left(t\right),f\circ\xi\left(t\right)+g\circ\xi\left(t\right)\,u\left(t\right)\right\rangle =0,\quad\forall t\in\mathbb{R}_{+}.$$

Une concaténation des deux dernières égalités donne

$$J_{\Phi_{\rho-1}}\left(\xi\left(t\right)\right)\left[f\circ\xi\left(t\right)+g\circ\xi\left(t\right)\,u\left(t\right)\right]=0_{\rho},\quad\forall t\in\mathbb{R}_{+}.$$
(5.43)

La relation (5.39) s'écrit également comme suit :

$$\Phi_{\boldsymbol{\rho}-1} \circ \xi \left(t \right) = 0_{\boldsymbol{\rho}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Sa dérivation donne

$$J_{\Phi_{\rho-1}}\left(\xi\left(t\right)\right)\dot{\xi}\left(t\right) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$
(5.44)

Ainsi, les relations (5.43) et (5.44) impliquent que

$$J_{\Phi_{\rho-1}}(\xi(t)) \left[\dot{\xi}(t) - f \circ \xi(t) + g \circ \xi(t) \ u(t) \right] = 0_{\rho}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$
(5.45)

En dérivant maintenant (5.40), il vient que la dynamique de ξ et celle de η sont liée par la relation suivante

$$\dot{\eta}(t) = J_{\psi}\left(\xi\left(t\right)\right) \dot{\xi}(t).$$

En égalant cette expression de $\dot{\eta}(t)$ avec celle donnée par l'équation différentielle (5.34), on obtient

$$J_{\psi}\left(\xi\left(t\right)\right)\left[\dot{\xi}\left(t\right) - f \circ \xi\left(t\right) - g \circ \xi\left(t\right) u\left(t\right)\right] = 0_{2n-\rho}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}.$$
(5.46)

Une concaténation des équations (5.45) et (5.46) donne

$$J_F\left(\xi\left(t\right)\right)\left[\dot{\xi}\left(t\right) - f \circ \xi\left(t\right) + g \circ \xi\left(t\right) u\left(t\right)\right] = 0_{2n}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Comme J_F est un isomorphisme sur $\Omega \ni \xi(t)$ (voir l'hypothèse 5.2.15) la relation précédente est alors équivalente à

$$\xi\left(t\right) = f \circ \xi\left(t\right) + g \circ \xi\left(t\right) \, u\left(t\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}.$$

De plus puisque x_1^o et x_2^o satisfont la condition (5.32), on obtient la relation suivante

$$\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(0\right)\right) = \begin{bmatrix} \Phi_{\boldsymbol{\rho}-1} \circ \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right) \\ \eta\left(0\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{\boldsymbol{\rho}-1} \circ \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right) \\ \psi \circ \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right) \end{bmatrix} = F \circ \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right)$$

qui implique que $\xi(0) = F^{-1} \circ \pi(0_{\rho}, \eta(0)) = \pi(x_1^o, x_2^o)$. Par conséquent, ξ est une solution de l'équation d'état du système augmenté et grâce à l'unicité de la solution de cette équation on obtient $\xi(t) = x(t, \pi(x_1^o, x_2^o), u, \pi(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}))$. En réécrivant (5.39) pour k = 0, on obtient $h \circ \xi(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, ce qui est équivalent à $h \circ x(t, \pi(x_1^o, x_2^o), u, \pi(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2})) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Il s'ensuit par définition de la sortie y que $y(t, \pi(x_1^o, x_2^o), u, \pi(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2})) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. D'où le triplet (x_1^o, x_2^o, u) appartient à la zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 .

Pour caractériser entièrement la zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 il est nécessaire de déterminer les solutions de l'équation fonctionnelle (5.33). La section suivante est consacrée à la résolution de cette équation.

5.3.3 Résolution de l'équation fonctionnelle (5.33)

La proposition suivante montre que pour résoudre l'équation fonctionnelle (5.33), on peut d'abord rechercher une solution particulière de cette équation puis caractériser ensuite les solutions homogènes qui lui sont associées.

Proposition 5.3.6. Soit $u^{\text{par}} \in \mathscr{U}$ une solution particulière de (5.33). Alors u est solution de (5.33) si et seulement s'il existe $u^{\text{hom}} \in \mathscr{U}$ solution de

$$\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right)\,u\left(t\right)=0,\quad\forall t\in\mathbb{R}_{+}$$
(5.47)

telle que

$$u(t) = \boldsymbol{u}^{\text{hom}}(t) + \boldsymbol{u}^{\text{par}}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}.$$
(5.48)

Démonstration. Supposons que u est une solution de l'équation (5.33). Alors les équations

$$L_{f}^{\boldsymbol{\rho}}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right) + \mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right)\,u\left(t\right) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}$$

 et

$$L_{f}^{\boldsymbol{\rho}}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right) + \mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right)\,\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}\left(t\right) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}$$

entraînent que

$$\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right)\left[u\left(t\right)-\boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}\left(t\right)\right]=0,\quad\forall t\in\mathbb{R}_{+}$$

Par conséquent $u^{\text{hom}} := u - u^{\text{par}}$ est une solution homogène de (5.47) et cette solution homogène satisfait $u = u^{\text{hom}} + u^{\text{par}}$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une solution homogène u^{hom} de (5.47) telle qu'on a la décomposition (5.48) de la commande u. Alors en substituant dans (5.33), u par sa décomposition (5.48), il est facile de vérifier que

$$L_{f}^{\boldsymbol{\rho}}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right) + \mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right) u\left(t\right) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}.$$

Le théorème suivant spécifie une solution particulière de l'équation fonctionnelle (5.33).

Théorème 5.3.7. Si le système augmenté admet sur Ω un degré relatif fini $\rho < 2n$ alors la commande $u^{par} \in \mathscr{U}$ dont les composantes u_j^{par} , j = 1, 2, ..., l sont définies par

$$\boldsymbol{u}_{j}^{\mathbf{par}}\left(t\right) = \begin{cases} 0 & si \quad j \notin \mathfrak{J}, \\ -\frac{L_{f}^{\boldsymbol{\rho}}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right)}{\operatorname{card}\left(\mathfrak{J}\right) L_{\mathbf{g}^{j}}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right)} & si \quad j \in \mathfrak{J}, \end{cases}$$
(5.49)

est une solution particulière de (5.33).

Démonstration. Considérons la commande u^{par} définie par (5.49). Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{split} \mathbb{L}_{g} L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1} h\left(F^{-1} \circ \boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{0}_{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{\eta}\left(t\right)\right)\right) \, \boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}\left(t\right) &= \sum_{j=1}^{l} L_{\mathbf{g}^{j}} L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1} h\left(F^{-1} \circ \boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{0}_{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{\eta}\left(t\right)\right)\right) \, \boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}_{j}\left(t\right) \\ &= \sum_{j \in \mathfrak{J}} L_{\mathbf{g}^{j}} L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1} h\left(F^{-1} \circ \boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{0}_{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{\eta}\left(t\right)\right)\right) \, \boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}_{j}\left(t\right). \end{split}$$

Pour $j \in \mathfrak{J}$, en remplaçant dans l'égalité précédente, u_j^{par} par son expression donnée par (5.49),

on obtient

$$\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{0}_{\boldsymbol{\rho}},\boldsymbol{\eta}\left(t\right)\right)\right) \boldsymbol{u}^{\mathbf{par}}\left(t\right) = -\sum_{j\in\mathfrak{J}}\frac{L_{f}^{\boldsymbol{\rho}}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{0}_{\boldsymbol{\rho}},\boldsymbol{\eta}\left(t\right)\right)\right)}{\operatorname{card}\left(\mathfrak{J}\right)}$$
$$= -L_{f}^{\boldsymbol{\rho}}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{0}_{\boldsymbol{\rho}},\boldsymbol{\eta}\left(t\right)\right)\right).$$

D'où u^{par} est une solution particulière de (5.33).

D'après (5.47), les solutions homogènes de (5.33) sont les commandes dont la valeur à chaque instant t appartient au noyau de $\mathbb{L}_g L_f^{\rho-1} h\left(F^{-1} \circ \boldsymbol{\pi}\left(0_{\rho}, \eta\left(t\right)\right)\right)$. Ainsi, pour déterminer les solutions homogènes, il est nécessaire de déterminer le noyau de $\mathbb{L}_g L_f^{\rho-1} h\left(F^{-1} \circ \boldsymbol{\pi}\left(0_{\rho}, \eta\left(t\right)\right)\right)$. Le lemme suivant donne la dimension de ce noyau ainsi que les vecteurs qui le génèrent.

Lemme 5.3.8. Si le système augmenté admet sur Ω un degré relatif $\rho < 2n$ alors on a :

- (i) dim Ker $\left(\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\pi\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right)\right) = l-1, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}$
- (*ii*) Si l > 1 alors $\forall j_0 \in \mathfrak{J} et \ \forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$\operatorname{Ker}\left(\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right)\right)=\operatorname{Span}\left\{\widehat{\boldsymbol{\Psi}}_{k}^{j_{0}}\left(t\right),\ k\in\left\{1,2,\ldots,l\right\}\setminus\left\{j_{0}\right\}\right\}$$

où pour tout $k \in \{1, 2, ..., l\} \setminus \{j_0\}$, les composantes $\widehat{\Psi}_{ki}^{j_0}$, i = 1, 2, ..., l de $\widehat{\Psi}_k^{j_0}$ sont définies par :

$$\widehat{\Psi}_{ki}^{j_{0}}(t) = \begin{cases} 1 & si \quad i = k, \\ -\frac{L_{g^{k}}L_{f}^{\rho-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\rho},\eta\left(t\right)\right)\right)}{L_{g^{j_{0}}}L_{f}^{\rho-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\rho},\eta\left(t\right)\right)\right)} & si \quad i = j_{0}, \\ 0 & si \quad i \neq k \text{ et } i \neq j_{0}. \end{cases}$$
(5.50)

Démonstration.

(i) Comme $\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\rho-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\rho},\eta\left(t\right)\right)\right)\in\mathbb{R}^{1\times l}$ on obtient

$$\dim\left(\operatorname{Ker}\left(\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right)\right)=l-\operatorname{rang}\left(\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right)\right).$$

Par ailleurs, le vecteur ligne $\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\rho-1}h\left(F^{-1}\circ\pi\left(0_{\rho},\eta\left(t\right)\right)\right)$ est non nul d'après la définition du degré relatif et par conséquent

$$\operatorname{rang}\left(\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right)\right)=1.$$

D'où dim $\left(\operatorname{Ker}\left(\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right)\right)=l-1.$

(*ii*) Supposons que l > 1. Soient $j_0 \in \mathfrak{J}$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Vérifions tout d'abord que les vecteurs $\widehat{\Psi}_k^{j_0}(t), k \in \{1, 2, ..., l\} \setminus \{j_0\}$ appartiennent au noyau de $\mathbb{L}_g L_f^{\rho-1} h\left(F^{-1} \circ \pi\left(0_{\rho}, \eta\left(t\right)\right)\right)$.

$$\begin{split} \mathbb{L}_{g} L_{f}^{\rho-1} h\left(F^{-1} \circ \pi\left(0_{\rho}, \eta\left(t\right)\right)\right) \widehat{\Psi}_{k}^{j_{0}}\left(t\right) &= \sum_{j=1}^{l} L_{\mathbf{g}^{j}} L_{f}^{\rho-1} h\left(F^{-1} \circ \pi\left(0_{\rho}, \eta\left(t\right)\right)\right) \widehat{\Psi}_{kj}^{j_{0}}\left(t\right), \\ &= L_{\mathbf{g}^{k}} L_{f}^{\rho-1} h\left(F^{-1} \circ \pi\left(0_{\rho}, \eta\left(t\right)\right)\right) - \\ &= L_{\mathbf{g}^{j_{0}}} L_{f}^{\rho-1} h\left(F^{-1} \circ \pi\left(0_{\rho}, \eta\left(t\right)\right)\right) \times \\ &= \frac{L_{\mathbf{g}^{k}} L_{f}^{\rho-1} h\left(F^{-1} \circ \pi\left(0_{\rho}, \eta\left(t\right)\right)\right)}{L_{g^{j_{0}}} L_{f}^{\rho-1} h\left(F^{-1} \circ \pi\left(0_{\rho}, \eta\left(t\right)\right)\right)} \\ &= 0. \end{split}$$

Nous allons maintenant montrer que les vecteurs $\widehat{\Psi}_k^{j_0}(t)$, $k \in \{1, 2, ..., l\} \setminus \{j_0\}$ sont linéairement indépendants. Soient β_k , $k \in \{1, 2, ..., l\} \setminus \{j_0\}$ des nombres réels tels que

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j_0}}^l \beta_k \,\widehat{\Psi}_k^{j_0}\left(t\right) = 0_l.$$

D'après (5.50), pour tout $j \in \{1, 2, ..., l\} \setminus \{j_0\}$ on obtient

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j_0}}^l \beta_k \,\widehat{\Psi}_{kj}^{j_0}\left(t\right) = \beta_j = 0.$$

D'où les vecteurs $\widehat{\Psi}_{k}^{j_{0}}(t), k \in \{1, 2, ..., l\} \setminus \{j_{0}\}$ sont linéairement indépendants. L'indépendance des l-1 vecteurs $\widehat{\Psi}_{k}^{j_{0}}(t), k \in \{1, 2, ..., l\} \setminus \{j_{0}\}$ et le point (i) entraînent que $\widehat{\Psi}_{k}^{j_{0}}(t), k \in \{1, 2, ..., l\} \setminus \{j_{0}\}$ engendrent le noyau de $\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\rho-1}h(F^{-1} \circ \pi(0_{\rho}, \eta(t)))$.

Le théorème suivant montre que lorsque S_1 et S_2 sont des systèmes SISO, la commande nulle est l'unique solution homogène de (5.33).

Théorème 5.3.9. Si l = 1 et si le système augmenté admet sur Ω un degré relatif fini $\rho < 2n$ alors sous l'hypothèse 5.2.15, la commande nulle est l'unique solution homogène de (5.33).

Démonstration. Soit $\boldsymbol{u}^{\text{hom}}$ une solution homogène de (5.33). Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a $\boldsymbol{u}^{\text{hom}}(t) \in \text{Ker}\left(\mathbb{L}_g L_f^{\boldsymbol{\rho}-1} h\left(F^{-1} \circ \boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}}, \eta\left(t\right)\right)\right)\right)$. De plus, comme d'après le lemme 5.3.8

dim
$$\left(\operatorname{Ker}\left(\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\rho-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right)\right)\right)=0, \quad \forall t\in\mathbb{R}_{+}$$

il vient que $\boldsymbol{u}^{\text{hom}}(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. D'où $\boldsymbol{u}^{\text{hom}}$ est nulle.

Pour les systèmes S_1 et S_2 MISO, on obtient la caractérisation suivante des solutions homogènes de (5.33):

Théorème 5.3.10. Soit $j_0 \in \mathfrak{J}$. Si l > 1 et si le système augmenté admet sur Ω un degré relatif fini $\rho < 2n$ alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\boldsymbol{u}^{\text{hom}}$ est une solution homogène de (5.33).

(ii) Les fonctions composantes $\boldsymbol{u}_k^{\text{hom}}$, $k = 1, 2, \dots, l$ de $\boldsymbol{u}^{\text{hom}}$ sont de la forme

$$\boldsymbol{u}_{k}^{\text{hom}}\left(t\right) = \omega_{k}\left(t\right), \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, l\} \setminus \{j_{0}\}$$

$$(5.51)$$

et

$$\boldsymbol{u}_{j_{0}}^{\text{hom}}(t) = -\sum_{\substack{k=1\\k\neq j_{0}}}^{l} \omega_{k}(t) \; \frac{L_{\boldsymbol{g}^{k}} L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1} h\left(F^{-1} \circ \boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}}, \eta\left(t\right)\right)\right)}{L_{\boldsymbol{g}^{j_{0}}} L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1} h\left(F^{-1} \circ \boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}}, \eta\left(t\right)\right)\right)}$$
(5.52)

avec $\omega_k \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, l\} \setminus \{j_0\}$.

Démonstration. Supposons que l > 1 et soit $j_0 \in \mathfrak{J}$.

 $(i) \implies (ii)$ La commande u^{hom} étant une solution homogène de (5.33), il vient que

$$\boldsymbol{u}^{\text{hom}}(t) \in \text{Ker}\left(\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\pi\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right)\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}$$

Ceci entraîne, d'après le point (*ii*) du lemme 5.3.8, que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, il existe l-1 réels $\omega_k(t), k \in \{1, 2, \ldots, l\} \setminus \{j_0\}$ tels que

$$\boldsymbol{u^{\text{hom}}}\left(t\right) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j_{0}}}^{l} \omega_{k}\left(t\right) \,\widehat{\boldsymbol{\Psi}}_{k}^{j_{0}}\left(t\right).$$

En utilisant la définition (5.50) de $\widehat{\Psi}_{kj}^{j_0}$, on déduit de l'égalité précédente que pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, l\} \setminus \{j_0\},$

$$\boldsymbol{u}_{j}^{\text{hom}}\left(t\right) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j_{0}}}^{l} \omega_{k}\left(t\right) \,\widehat{\boldsymbol{\Psi}}_{kj}^{j_{0}}\left(t\right) = \omega_{j}\left(t\right)$$

et que

$$\boldsymbol{u}_{j_{0}}^{\text{hom}}\left(t\right) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j_{0}}}^{l} \omega_{k}\left(t\right) \,\widehat{\boldsymbol{\Psi}}_{kj_{0}}^{j_{0}}\left(t\right) = -\sum_{\substack{k=1\\k\neq j_{0}}}^{l} \omega_{k}\left(t\right) \, \frac{L_{\boldsymbol{g}^{k}} L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1} h\left(F^{-1} \circ \boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}}, \eta\left(t\right)\right)\right)}{L_{\boldsymbol{g}^{j_{0}}} L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1} h\left(F^{-1} \circ \boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}}, \eta\left(t\right)\right)\right)}.$$

D'où on obtient les relations (5.51) et (5.52).

 $(ii) \implies (i)$ Supposons qu'il existe des fonctions $\omega_k, k \in \{1, 2, ..., l\} \setminus \{j_0\}$ telles que les conditions (5.51) et (5.52) soient satisfaites par les composantes de u^{hom} . Les relations (5.51) et (5.52) peuvent être condensées comme suit

$$\boldsymbol{u^{\mathrm{hom}}}\left(t
ight)=\sum_{k=1\atop k
eq j_{0}}^{l}\omega_{k}\left(t
ight)\,\widehat{\boldsymbol{\Psi}}_{k}^{j_{0}}\left(t
ight)$$

Il s'ensuit que

$$\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right)\boldsymbol{u}^{\text{hom}}\left(t\right) = \sum_{k=1\atop\neq j_{0}}^{l}\omega_{k}\left(t\right)\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right)\widehat{\boldsymbol{\Psi}}_{k}^{j_{0}}\left(t\right) = 0$$

car $\widehat{\boldsymbol{\Psi}}_{k}^{j_{0}}\left(t\right) \in \operatorname{Ker}\left(\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right)\right)$ pour tout $k \in \{1,2,\ldots,l\} \setminus \{j_{0}\}.$

Dans la suite du document, nous adopterons la notation suivante.

Notation 5.3.11. Pour tout $j_0 \in \mathfrak{J}$, $\bar{\omega}^{j_0} \in \mathscr{C}\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{l-1}\right)$ désigne une fonction de la forme

$$\bar{\omega}^{j_0}(t) = \begin{bmatrix} \omega_1(t) & \omega_2(t) & \cdots & \omega_{j_0-1}(t) & \omega_{j_0+1}(t) & \cdots & \omega_l(t) \end{bmatrix}^\top$$

En sommant la solution homogène et la solution particulière de (5.33), on obtient la caractérisation suivante des commandes u solutions de (5.33) dans le cas où S_1 et S_2 sont des systèmes MISO.

Corollaire 5.3.12. Soit $j_0 \in \mathfrak{J}$. Si l > 1 et si le système augmenté admet sur Ω un degré relatif $\rho < 2n$ alors u est une solution de l'équation (5.33) si et seulement s'il existe $\bar{\omega}^{j_0} \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{l-1})$ tel que

$$u(t) = \Theta\left[\eta, \bar{\omega}^{j_0}\right](t) \tag{5.53}$$

où les fonctions composantes $\Theta_j [\eta, \bar{\omega}^{j_0}], j = 1, 2, ..., l$ de la fonction vectorielle $\Theta [\eta, \bar{\omega}^{j_0}]$ sont

définies par :

$$\Theta_{j}\left[\eta,\bar{\omega}^{j_{0}}\right](t) = \begin{cases} \omega_{j}\left(t\right) & \text{si } j \notin \mathfrak{J} \text{ et } j \neq j_{0} \\ -\frac{L_{f}^{\rho}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\rho},\eta\left(t\right)\right)\right)}{\operatorname{card}\left(\mathfrak{J}\right) L_{\boldsymbol{g}^{j}}L_{f}^{\rho-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\rho},\eta\left(t\right)\right)\right)} & \text{si } j \in \mathfrak{J} \text{ et } j \neq j_{0} \end{cases}$$
(5.54)

et

$$\Theta_{j_{0}}[\eta, \bar{\omega}^{j_{0}}](t) = -\frac{L_{f}^{\rho}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\rho}, \eta\left(t\right)\right)\right)}{\operatorname{card}\left(\mathfrak{J}\right)L_{g^{j_{0}}}L_{f}^{\rho-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\rho}, \eta\left(t\right)\right)\right)} - \sum_{\substack{k=1\\k\neq j_{0}}}^{l}\omega_{k}\left(t\right)\frac{L_{g^{k}}L_{f}^{\rho-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\rho}, \eta\left(t\right)\right)\right)}{L_{g^{j_{0}}}L_{f}^{\rho-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\rho}, \eta\left(t\right)\right)\right)}.$$
(5.55)

Dans le cas SISO, puisque les solutions homogènes de (5.33) sont réduites à la commande nulle, la commande u solution de l'équation (5.33) coïncide donc avec la solution particulière u^{par} . En réécrivant u^{par} pour $\mathfrak{J} = \{1\}$ on obtient le résultat suivant qui caractérise les commandes u solutions de (5.33) lorsque l = 1.

Corollaire 5.3.13. Si l = 1 et si le système augmenté admet sur Ω un degré relatif $\rho < 2n$ alors u est solution de l'équation (5.33) si et seulement si

$$u(t) = -\frac{L_{f}^{\rho}h(F^{-1} \circ \pi(0_{\rho}, \eta(t)))}{\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\rho-1}h(F^{-1} \circ \pi(0_{\rho}, \eta(t)))}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}.$$
(5.56)

Démonstration.

Connaissant les commandes solutions de l'équation fonctionnelle (5.33), nous pouvons maintenant caractériser entièrement la zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 .

5.3.4 Caractérisation de la zone d'indiscernabilité

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème 5.3.5 et du corollaire 5.3.13 qui établit l'expression des commandes solutions de l'équation (5.33) dans le cas SISO. Il caractérise la zone d'indiscernabilité lorsque S_1 et S_2 sont des systèmes SISO ayant un indice de similarité strictement plus petit que le nombre de vecteurs d'état du système augmenté.

Corollaire 5.3.14. Si l = 1 et si le système augmenté admet sur Ω un degré relatif $\rho < 2n$ alors sous l'hypothèse 5.2.15, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$

(ii) x_1^o et x_2^o satisfont la condition (5.32) et

$$u(t) = -\frac{L_f^{\boldsymbol{\rho}} h\left(F^{-1} \circ \boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}}, \eta\left(t\right)\right)\right)}{\mathbb{L}_g L_f^{\boldsymbol{\rho}-1} h\left(F^{-1} \circ \boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}}, \eta\left(t\right)\right)\right)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$
(5.57)

où η est la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = \Gamma_{f,g,\psi}(\eta(t)), \\ \eta(0) = \psi \circ \pi(x_1^o, x_2^o) \end{cases}$$
(5.58)

avec $\Gamma_{f,g,\psi} \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^{2n-\rho},\mathbb{R}^{2n-\rho})$, la fonction vectorielle définie par :

$$\boldsymbol{\Gamma}_{f,g,\psi}\left(\xi\right) = \Gamma_{f,\psi}\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\xi\right)\right) - \frac{L_{f}^{\boldsymbol{\rho}}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\xi\right)\right)}{\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\xi\right)\right)}\Gamma_{g,\psi}\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\xi\right)\right)$$

Exemple 5.3.15. Considérons les pendules S_1 et S_2 de l'exemple 5.2.5. Supposons que $m_1 L_1^2 \neq m_2 L_2^2$. L'indice de similarité généralisé de ces deux systèmes est $\rho = 2$ (voir les calculs de l'exemple 5.2.5). Pour la fonction vectorielle ψ suivante

$$\psi\left(\xi\right) = \begin{bmatrix} \xi_3\\ \xi_4 \end{bmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}^4$$

la fonction F définie par

$$F\left(\xi\right) := \begin{bmatrix} \Phi_{1}\left(\xi\right) \\ \psi\left(\xi\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{1} - \xi_{3} \\ \xi_{2} - \xi_{4} \\ \xi_{3} \\ \xi_{4} \end{bmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{4}$$

est un système de changement de coordonnées globales sur \mathbb{R}^4 . En effet, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^4$, la matrice jacobienne

$$J_F(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est inversible. De plus il est facile de vérifier que F est injective. L'inverse de la transformation

F est

$$F^{-1}\left(\xi\right) = \begin{bmatrix} \xi_1 + \xi_3 \\ \xi_2 + \xi_4 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^4.$$

D'après les calculs de l'exemple 5.2.5, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^4$,

$$L_{f}^{2}h\left(\xi\right) = -\frac{\alpha_{0}}{L_{1}}\sin\left(\xi_{1}\right) - \frac{\mu_{1}}{m_{1}}\xi_{2} + \frac{\alpha_{0}}{L_{2}}\sin\left(\xi_{3}\right) + \frac{\mu_{2}}{m_{2}}\xi_{4} \quad ; \quad \mathbb{L}_{g}L_{f}h\left(\xi\right) = \frac{1}{m_{1}L_{1}^{2}} - \frac{1}{m_{2}L_{2}^{2}}.$$

Comme $F^{-1} \circ \boldsymbol{\pi}(0_2, v) = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_1 & v_2 \end{bmatrix}^{\top}$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, on déduit de (5.57) que la commande u qui rend indiscernable les sorties de S_1 et S_2 est de la forme :

$$u(t) = K \left[\alpha_0 \left(\frac{1}{L_2} - \frac{1}{L_1} \right) \sin(\eta_1(t)) + \left(\frac{\mu_2}{m_2} - \frac{\mu_1}{m_1} \right) \eta_2(t) \right]$$
(5.59)
$$\frac{1}{L_2} = \frac{1}{L_2} \left(\frac{1}{L_2} - \frac{1}{L_1} \right)^{-1}$$

avec $K = -\left(\frac{1}{m_1 L_1^2} - \frac{1}{m_2 L_2^2}\right)^{-1}$

Pour déterminer la dynamique de η nous allons déterminer la fonction vectorielle $\Gamma_{f,g,\psi}$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^4$ on obtient

$$\Gamma_{f,\psi}(\xi) = J_{\psi}(\xi) \ f(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_4 \\ -\frac{\alpha_0}{L_2} \sin(\xi_3) - \frac{\mu_2}{m_2} \xi_4 \end{bmatrix} \quad ; \quad \Gamma_{g,\psi}(\xi) = J_{\psi}(\xi) \ g(\xi) = \frac{1}{m_2 L_2^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\mathbf{\Gamma}_{f,g,\psi}\left(\eta\left(t\right)\right) = \begin{bmatrix} \eta_{2}\left(t\right)\\ \widehat{K}\sin\left(\eta_{1}\left(t\right)\right) + \widetilde{K}\eta_{2}\left(t\right) \end{bmatrix}$$

avec

$$\widehat{K} = \frac{\alpha_0}{L_2} \left[\frac{K}{m_2 L_2} \left(\frac{1}{L_2} - \frac{1}{L_1} \right) - 1 \right] \quad ; \quad \widetilde{K} = \frac{K}{m_2 L_2^2} \left(\frac{\mu_2}{m_2} - \frac{\mu_1}{m_1} \right) - \frac{\mu_2}{m_2}$$

La dynamique de η est alors décrite par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{1}(t) = \eta_{2}(t), \\ \dot{\eta}_{2}(t) = \widehat{K} \sin(\eta_{1}(t)) + \widetilde{K} \eta_{2}(t), \\ \eta(0) = x_{2}^{o}. \end{cases}$$
(5.60)

Lorsque $\widehat{K} < 0$, (5.60) décrit également le mouvement d'un pendule avec frottement. D'après l'expression de Φ_1 , pour que les états initiaux x_1^o et x_2^o remplissent la condition (5.32), il faut et il

suffit que $x_1^o = x_2^o$. Ainsi, lorsque $m_1 L_1^2 \neq m_2 L_2^2$ pour que les deux pendules génèrent des sorties identiques, il faut qu'ils partent d'un même état initial ($x_1^o = x_2^o$ c'est-à-dire $\theta_1(0) = \theta_2(0)$ et $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0)$) et la commande à appliquer à ces deux systèmes doit être donnée par (5.59) où la dynamique de η est décrite par (5.60).

La figure 5.3 ci-dessous donne une représentation de la commande u qui rend indiscernable les deux pendules.



Figure 5.3 – Commande u qui rend indiscernable les pendules S_1 et S_2

Ce résultat numérique est obtenu pour $\alpha_0 = 10$ et pour les valeurs suivantes des paramètres des pendules : $x_1^o = x_2^o = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{3} & 0 \end{bmatrix}^\top$, $m_1 = 3$, $m_2 = 2.5$, $L_1 = 0.57 = L_2$ et $\mu_1 = 2 \mu_2 = 0.2$. Pour ces valeurs, les pendules S_1 et S_2 ont pour période propre T = 1.5.

La figure suivante représente la dynamique des pendules S_1 et S_2 soumis au forçage u qui les rend indiscernable.



Figure 5.4 – Trajectoire d'état des pendules S_1 et S_2

La différence des sorties de S_1 et S_2 est représentée par la figure 5.8 ci-dessous.



Figure 5.5 – Écart entre les sorties des pendules S_1 et S_2

Pour les valeurs précédentes des paramètres de S_1 et S_2 , le pendule (5.60) a pour coefficient de frottement $\widetilde{K} = -0.2 < 0$. Donc on a : $\lim_{t \to +\infty} \eta_1(t) = 0 = \lim_{t \to +\infty} \eta_2(t)$. De plus, d'après (5.59), l'égalité des longueurs L_1 et L_2 entraîne que u est proportionnelle à la vitesse du pendule (5.60). Donc $u(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Ceci justifie l'allure de la courbe de la commande u (voir figure 5.3). Aussi, notons que l'instant à partir duquel la commande u s'annule correspond au temps d'arrêt des pendules S_1 et S_2 .

Les résultats numériques des figures 5.6, 5.7 et 5.8 ci-dessous, sont obtenus pour les valeurs suivantes des paramètres des pendules S_1 et S_2 : $x_1^o = x_2^o = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{3} & 0 \end{bmatrix}^{\top}$, $m_1 = 3 = m_2$, $L_1 = 0.57$, $L_2 = 0.67$, $\mu_1 = 0.0138$ et $\mu_2 = 0.01$. Pour ces valeurs des paramètres, le coefficient de frottement \widetilde{K} du pendule (5.60) est nul. Il se comporte donc comme un pendule simple.



Figure 5.6 – Commande u qui rend indiscernable les pendules S_1 et S_2

La dynamique des pendules S_1 et S_2 soumis au forçage u qui les rend indiscernables est représentée par la figure 5.7 ci-dessous.





Figure 5.7 – Trajectoire d'état des pendules S_1 et S_2

La différence des sorties de S_1 et S_2 est représentée par la figure 5.8 ci-dessous.



Figure 5.8 – Écart entre les sorties des pendules S_1 et S_2

La zone d'indiscernabilité des systèmes S_1 et S_2 MISO est donnée dans le cas $\rho < 2n$ par le corollaire 5.3.16 ci-dessous. Sa démonstration est laisée au lecteur et peut être obtenue aisément en utilisant les résultats du théorème 5.3.5 ainsi que le corollaire (5.3.12) qui caractérise les commandes solutions de l'équation (5.33) dans le cas MISO.

Corollaire 5.3.16. Soit $j_0 \in \mathfrak{J}$. Si m = 1 < l et si le système augmenté admet sur Ω un degré relatif $\rho < 2n$ alors sous l'hypothèse 5.2.15, les deux assertions suivantes sont équivalentes

(i) $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$

(ii) x_1^o et x_2^o satisfont la condition (5.32) et il existe $\bar{\omega}^{j_0} \in \mathscr{C}\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{l-1}\right)$ tel que

$$u(t) = \Theta\left[\eta, \bar{\omega}^{j_0}\right](t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$
(5.61)

où la fonction $\Theta[\eta, \bar{\omega}^{j_0}]$ est définie par (5.54) et (5.55) avec η , la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = \widetilde{\Gamma}_{f,g,\psi}(\eta(t)), \\ \eta(0) = \psi \circ \pi(x_1^o, x_2^o), \end{cases}$$
(5.62)

оù

$$\widetilde{\Gamma}_{f,g,\psi}\left(\eta\left(t\right)\right) = \Gamma_{f,\psi}\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right) + \Gamma_{g,\psi}\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\eta\left(t\right)\right)\right)\,\Theta\left[\eta,\bar{\omega}^{j_{0}}\right]\left(t\right),$$

5.4 Conditions de discernabilité stricte et de forte discernabilité des systèmes SISO et MISO

Dans le chapitre 3 nous avons montré que dans le cas linéaire, on peut caractériser la discernabilité forte et la discernabilité stricte des systèmes SISO et MISO à partir de la zone d'inscrernabilité de ces systèmes. Le but de cette section est d'utiliser la même approche pour caractériser la discernabilité stricte et la forte discernabilité des systèmes non-linéaires SISO et MISO affines en la commande.

5.4.1 Conditions de discernabilité stricte des systèmes SISO et MISO

Dans cette section, nous établissons une condition nécessaire et suffisante de stricte discernabilité des systèmes SISO ayant un degré relatif fini. Nous y montrons de plus que les systèmes MISO ayant un indice de similarité fini ne sont jamais strictement discernables. Pour établir ces deux résultats nous utiliserons les lemmes 5.4.1 et 5.4.2. Ces lemmes traitent de la question de trivialité de la zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 dans le cas $\rho < 2n$ et le cas $\rho = 2n$.

Lemme 5.4.1. Si le système augmenté associé à S_1 et S_2 admet sur Ω un degré relatif $\rho < 2n$ alors sous les hypothèses 5.0.2 et 5.2.15, $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2) \neq \{(0_n, 0_n, 0_{\mathscr{U}})\}.$

Démonstration. Supposons que S admet sur Ω un degré relatif ρ tel que $\rho < 2n$. D'après les corollaires 5.3.16 et 5.3.14,

$$\mathscr{X}_{\mathrm{ind}}^{o}\left(S_{1},S_{2}\right) = \left\{\left(x_{1}^{o},x_{2}^{o}\right) \in \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n} \colon \Phi_{\boldsymbol{\rho}-1} \circ \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o},x_{2}^{o}\right) = 0_{\boldsymbol{\rho}}\right\}.$$

Par conséquent, $\mathscr{X}_{ind}^{o}(S_1, S_2)$ est une sous-variété de dimension $2n - \rho$ et on a

$$\mathscr{T}_{(0_n,0_n)}\mathscr{X}^o_{\mathrm{ind}}(S_1,S_2) = \mathrm{Ker}\left(J_{\Phi_{\rho-1}}\left(\boldsymbol{\pi}\left(0_n,0_n\right)\right)\right) = \mathrm{Ker}\left(J_{\Phi_{\rho-1}}\left(0_{2n}\right)\right).$$

Notons que l'appartenance du couple trivial $(0_n, 0_n)$ à l'espace $\mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$ est garantie par l'hypothèse 5.0.2.

La matrice jacobienne de $J_{\Phi_{\rho-1}}(0_{2n}) \in \mathbb{R}^{\rho \times 2n}$ étant de plein rang ligne ρ (voir théorème 5.2.10), il existe donc deux vecteurs $\xi_1 \in \mathbb{R}^n$ et $\xi_2 \in \mathbb{R}^n$ tels que $0_{2n} \neq \pi(\xi_1, \xi_2) \in$ Ker $(J_{\Phi_{\rho-1}}(0_{2n}))$. Ainsi, $\pi(\xi_1, \xi_2)$ est tangent à l'origine à la sous-variété $\mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$. Ceci implique qu'il existe un arc paramétré $\gamma:]-\varepsilon; \varepsilon[\mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que $\dot{\gamma}(0) = (\xi_1, \xi_2)$ et $\gamma(t) :=$ $(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \subset \mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$ pour tout $t \in]-\varepsilon; \varepsilon[$. On en déduit que l'arc γ est non identiquement nul car $\dot{\gamma}(0)$ est non nul. Soit $\mathbf{t}^* \in]-\varepsilon; \varepsilon[$ tel que $\gamma(\mathbf{t}^*) = (\gamma_1(\mathbf{t}^*), \gamma_2(\mathbf{t}^*)) \neq (0_n, 0_n)$ et soit \mathbf{u}^* la commande définie par

$$\mathbf{u}^{\star}\left(t\right) = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{L_{f}^{\boldsymbol{\rho}}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{0}_{\boldsymbol{\rho}},\boldsymbol{\eta}\left(t\right)\right)\right)}{\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(\boldsymbol{0}_{\boldsymbol{\rho}},\boldsymbol{\eta}\left(t\right)\right)\right)} & \text{si} \quad l=1,\\ \Theta\left[\boldsymbol{\eta},\bar{\omega}^{j_{0}}\right]\left(t\right) & \text{si} \quad l>1, \end{array} \right.$$

où lorsque l = 1 (resp. l > 1), η est la solution de l'équation différentielle (5.58) (resp. (5.62)) avec comme condition initiale η (0) = ψ (γ (\mathbf{t}^{\star})). Alors le triplet (γ_1 (\mathbf{t}^{\star}), γ_2 (\mathbf{t}^{\star}), \mathbf{u}^{\star}) est non nul par construction et de plus, d'après les corollaires 5.3.14 et 5.3.16 (γ_1 (\mathbf{t}^{\star}), γ_2 (\mathbf{t}^{\star}), \mathbf{u}^{\star}) \in \mathscr{Z}_{ind} (S_1, S_2). D'où le résultat.

Lemme 5.4.2. Si l > 1 et si le système augmenté associé à S_1 et à S_2 admet sur Ω un degré relatif $\rho = 2n$ alors sous l'hypothèse 5.2.19, $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2) \neq \{0_n, 0_n, 0_{\mathscr{U}}\}.$

Démonstration. Supposons que l > 1 et que sur Ω on a $\rho = 2n$. Puisque le vecteur ligne $L_f^{2n-1}h(0_{2n}) \in \mathbb{R}^{1\times l}$ est non nul (voir définition du degré relatif), il existe un vecteur non nul $\boldsymbol{\xi}^{\star} \in \mathbb{R}^l$ tel que $\boldsymbol{\xi}^{\star} \in \text{Ker}\left(L_f^{2n-1}h(0_{2n})\right)$. Soit \mathbf{u}^{\star} la commande constante définie par : $\mathbf{u}^{\star}(t) = \boldsymbol{\xi}^{\star}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$. Alors $(0_n, 0_n, \mathbf{u}^{\star})$ est un triplet non nul par construction de \mathbf{u}^{\star} . De plus, d'après le théorème 5.3.2, ce triplet appartient à la zone d'indiscernabilité de S_1 et S_2 . D'où le résultat.

Le théorème suivant montre que parmi les systèmes MISO ayant un indice de similarité fini, il n'existe pas de couple de systèmes qui soient strictement discernables.

Théorème 5.4.3. Si l > 1 et si le système augmenté associé à S_1 et S_2 admet sur Ω un degré relatif fini ($\rho \neq +\infty$) alors sous les hypothèses 5.0.2, 5.2.15 et 5.2.19, les systèmes S_1 et S_2 ne sont pas strictement ($\mathscr{U}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \{0_{\mathscr{W}_1}\}, \{0_{\mathscr{W}_2}\}$)-discernables sur \mathbb{R}_+ .

5.5.4 Conditions de discernabilité stricte et de forte discernabilité des systèmes SISO et MISO

Démonstration. Supposons que l > 1 et que le degré relatif de S sur Ω est fini c'est-à-dire $\rho \leq 2n$. Alors d'après les lemmes 5.4.1 et 5.4.2 il existe un triplet non nul $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathscr{U}$ tel que les sorties $y_1(\cdot, x_1^o, u, 0_{\mathscr{W}_1})$ et $y_2(\cdot, x_2^o, u, 0_{\mathscr{W}_2})$ soient identiques sur \mathbb{R}_+ . D'où le résultat. \Box

Pour les systèmes SISO, le théorème suivant établit une condition nécessaire et suffisante de discernabilité stricte portant sur le calcul de leurs indice de similarité généralisé.

Théorème 5.4.4. Si l = 1 et si le système augmenté admet sur Ω un degré relatif fini ($\rho \neq +\infty$) alors sous les hypothèses 5.0.2, 5.2.15 et 5.2.19, les systèmes dynamiques S_1 et S_2 sont strictement ($\mathscr{U}, \Omega_1 \times \Omega_2, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}$)-discernables si et seulement si $\rho = 2n$.

Démonstration. Supposons que l = 1 et que S admet sur Ω un degré relatif fini. Nous allons distinguer le cas $\rho < 2n$ et le cas $\rho = 2n$.

Lorsque $\rho < 2n$, d'après le lemme 5.4.1 il existe un triplet $(x_1^o, x_2^o, u) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \times \mathscr{U}$ tel que les sorties $y_1(\cdot, x_1^o, u, 0_{\mathscr{W}_1})$ et $y_2(\cdot, x_2^o, u, 0_{\mathscr{W}_2})$ soient identiques sur \mathbb{R}_+ . Par conséquent S_1 et S_2 ne sont pas strictement $(\mathscr{U}, \Omega_1 \times \Omega_2, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernables lorsque $\rho < 2n$.

Lorsque $\rho = 2n$, on déduit du théorème 5.3.2 que les systèmes S_1 et S_2 sont strictement $(\mathscr{U}, \Omega_1 \times \Omega_2, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernables sur \mathbb{R}_+ si et seulement si

$$\mathbb{L}_{g}L_{f}^{2n-1}h\left(0_{2n}\right)u\left(t\right) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+} \implies u\left(t\right) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}.$$
(5.63)

Par ailleurs, puisque $\mathbb{L}_g L_f^{2n-1} h(0_{2n}) \neq 0$ (voir la définition du degré relatif) la condition (5.63) est toujours vraie. Il s'ensuit que les systèmes S_1 et S_2 sont strictement ($\mathscr{U}, \Omega_1 \times \Omega_2, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\}$)discernables lorsque $\rho = 2n$.

5.4.2 Condition de discernabilité contrôlable

Dans cette section nous montrons dans le théorème suivant que les systèmes mono-sortie qui ont un indice de similarité généralisé fini sont toujours fortement discernables.

Théorème 5.4.5. Si le système augmenté S admet sur Ω un degré relatif fini ($\rho \neq +\infty$) alors sous les hypothèses 5.2.15 et 5.2.19, les systèmes dynamiques S_1 et S_2 sont fortement $(\mathscr{U}, \Omega_1 \times \Omega_2, \{0_{\mathscr{W}_1}\} \times \{0_{\mathscr{W}_2}\})$ -discernables sur \mathbb{R}_+ .

Démonstration. Supposons que $\rho \leq 2n$. Nous allons prouver qu'il existe au moins une commande **u** telle que

$$\mathscr{S}_{1,\mathbb{R}_{+}}\left(\mathbf{u},\Omega_{1},\left\{0_{\mathscr{W}_{1}}\right\}\right)\bigcap\mathscr{S}_{2,\mathbb{R}_{+}}\left(\mathbf{u},\Omega_{2},\left\{0_{\mathscr{W}_{2}}\right\}\right)=\emptyset.$$
(5.64)

Nous distinguerons le cas $\rho = 2n$ et le cas $\rho < 2n$.

Supposons que $\boldsymbol{\rho} = 2n$. Soit $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^l$ telle que $\boldsymbol{\xi} \notin \operatorname{Ker} \left(\mathbb{L}_g L_f^{2n-1} h\left(0_{2n}\right) \right)$ et soit **u** la commande définie par $\mathbf{u}\left(t\right) = \boldsymbol{\xi}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. La commande **u** satisfait la condition (5.64). En effet, si tel n'est pas le cas, il existe alors des états initiaux $\xi_1^o \in \Omega_1$ et $x_2^o \in \Omega_2$ tels que les sorties $y_1\left(\cdot, x_1^o, \mathbf{u}, 0\right)$ et $y_2\left(\cdot, x_2^o, \mathbf{u}, 0\right)$ sont identiques sur \mathbb{R}_+ c'est-à-dire $(x_1^o, x_2^o, \mathbf{u}) \in \mathscr{Z}_{\operatorname{ind}}\left(S_1, S_2\right)$. Par conséquent, d'après le théorème 5.3.2, la trajectoire de la commande \boldsymbol{u} appartient au noyau de $\mathbb{L}_g L_f^{2n-1} h\left(0_{2n}\right)$. Ceci est absurde par construction de la commande \mathbf{u} .

Supposons que $\rho < 2n$. Soient $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{2n-\rho})$, une fonction non identiquement nulle sur \mathbb{R}_+ , j_0 un élément de \mathfrak{J} et soient l-1 fonctions $\omega_k \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $k \in \{1, 2, \ldots, l\} \setminus \{j_0\}$. Aux fonctions φ et ω_k , $k \in \{1, 2, \ldots, l\} \setminus \{j_0\}$, associons la commande **u** définie par

$$\mathbf{u}\left(t\right) = \begin{cases} -\frac{L_{f}^{\boldsymbol{\rho}}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\xi\left(t\right)\right)\right)}{\mathbb{L}_{g}L_{f}^{\boldsymbol{\rho}-1}h\left(F^{-1}\circ\boldsymbol{\pi}\left(0_{\boldsymbol{\rho}},\xi\left(t\right)\right)\right)} & \text{si} \quad l=1, \\\\ \Theta\left[\xi,\bar{\omega}^{j_{0}}\right]\left(t\right) & \text{si} \quad l>1, \end{cases}$$

avec ξ la solution de l'équation différentielle

$$\dot{\xi}(t) = \begin{cases} \Gamma_{f,g,\psi}\left(\xi\left(t\right)\right) + \varphi\left(t\right) & \text{si} \quad l = 1\\ \\ \widetilde{\Gamma}_{f,g,\psi}\left(\xi\left(t\right)\right) + \varphi\left(t\right) & \text{si} \quad l > 1. \end{cases}$$

Alors d'après les expressions (5.57) et (5.61) des commandes u qui rendent indiscernables les systèmes S_1 et S_2 , la commande **u** satisfait la condition (5.64). Ceci achève notre preuve.

5.5 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à l'étude de la stricte discernabilité et de la forte discernabilité contrôlable des systèmes non-linéaires affines en la commande (SNAC). Il complète les études que nous avons menées dans le chapitre 3 sur ces deux formes de discernabilité. Plus précisément, nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à déterminer

- les domaines $\mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$ et $\mathscr{U}_{ind}^{str}(S_1, S_2)$ des états initiaux et des commandes qui génèrent des sorties identiques, rendant les systèmes non strictement discernables
- le domaine $\mathscr{U}_{\text{dis}}^{\text{frt}}(S_1, S_2)$ des commandes qui permettent de différencier les sorties des systèmes qui sont fortement discernables
- des conditions nécessaires et suffisantes qui caractérisent la stricte discernabilité et la forte discernabilité

pour cette classe de non-linéarité.

Comme dans le chapitre 3, pour résoudre ces trois problèmes, nous avons d'abord caractérisé la zone d'indiscernabilité \mathscr{Z}_{ind} de S_1 et S_2 . La méthode proposée dans ce chapitre pour résoudre le problème d'annulation de sortie associé à l'identification de cette zone repose sur l'utilisation de la forme normale globale du système augmenté. Cette dernière s'obtient en réecrivant le modèle d'état du système augmenté dans un nouveau système approprié de changement de coordonnées. Dans le nouveau système de changement de coordonnées, le modèle d'état du système augmenté est linéarisé partiellement ou totalement. La linéarisation est partielle lorsque l'indice de similarité généralisé ρ des systèmes est compris entre 1 et 2n - 1 (c'est-à-dire $1 \leq \rho < 2n$) et elle est totale dans le cas $\rho = 2n$. L'annulation de la sortie du système augmenté dans le nouveau système de coordonnées a conduit à la caractérisation suivante de la zone d'indiscernabilité :

Dimension	Valeurs de ρ	Eléments (x_1^o, x_2^o, u) de $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$
SISO	$1 \leq \mathbf{o} \leq 2n$	$\Phi_{\boldsymbol{\rho}-1} \circ \boldsymbol{\pi} \left(x_1^o, x_2^o \right) = 0_{\boldsymbol{\rho}} \text{ et } u = \boldsymbol{u}^{\text{par}} \left[x_1^o, x_2^o \right]$
MISO	$1 \leq \boldsymbol{p} < 2n$	$\Phi_{\boldsymbol{\rho}-1} \circ \boldsymbol{\pi} \left(x_1^o, x_2^o \right) = 0_{\boldsymbol{\rho}} \text{ et } u = \boldsymbol{u}^{\text{hom}} + \boldsymbol{u}^{\text{par}} \left[x_1^o, x_2^o \right]$
SISO et MISO	$\rho = 2n$	$\Phi_{2n-1} \circ \boldsymbol{\pi} \left(x_1^o, x_2^o \right) = 0_{2n} \text{ et } \mathbb{L}_g L_f^{2n-1} h\left(0_{2n} \right) u \underset{\mathbb{R}_+}{\equiv} 0$

Table 5.1 – Zone d'indiscernabilité des systèmes non-linéaires affines en la commande

De cette identification de la zone d'indiscernabilité, nous obtenons la caractérisation suivante des domaines $\mathscr{U}_{\text{dis}}^{\text{frt}}(S_1, S_2)$, $\mathscr{X}_{\text{ind}}^o(S_1, S_2)$ et $\mathscr{U}_{\text{ind}}^{str}(S_1, S_2)$.

Dimension	Valeurs de ρ	$\mathscr{X}_{\mathrm{ind}}^{o}\left(S_{1},S_{2} ight)$	$\mathscr{U}_{\mathrm{ind}}^{str}\left(S_{1},S_{2} ight)$	$\mathscr{U}_{\mathrm{dis}}^{\mathrm{frt}}\left(S_{1},S_{2} ight)$
SISO	$1 \leq \mathbf{q} \leq 2n$		$oldsymbol{u}^{\mathbf{par}}\left[\mathscr{X}^{o}_{\mathrm{ind}}\left(S_{1},S_{2} ight) ight]$	
MISO	$1 \leq \boldsymbol{p} \leq 2n$		$oxed{u^{hom}+u^{par}\left[\mathscr{X}^{o}_{\mathrm{ind}}\left(S_{1},S_{2} ight) ight]}$	
		$\Phi_{\rho-1}^{-1}(\{0_{\rho}\})$	$\{u:$	$\mathscr{U} \setminus \mathscr{U}_{\mathrm{ind}}^{str}(S_1, S_2)$
SISO et MISO	$\rho = 2n$		$\mathbb{L}_{g}L_{f}^{2n-1}h\left(0_{2n}\right) u \equiv 0$	
			}	

Table 5.2 – Caractérisation des domaines $\mathscr{U}_{\text{dis}}^{\text{frt}}(S_1, S_2)$, $\mathscr{X}_{\text{ind}}^o(S_1, S_2)$ et $\mathscr{U}_{\text{ind}}^{str}(S_1, S_2)$

En utilisant les résultats issus de la caractérisation de la zone d'indiscernabilité, nous avons prouvé que l'état de forte discernabilité et l'état de stricte discernabilité des systèmes SISO et MISO non-linéaires affines en la commande peut être déterminé en calculant leurs indice de similarité ρ :

Chapitre 5. Discernabilité des systèmes non-linéaires affines en la commande

Dimension	Valeurs de ρ	Strictement discernables	Fortement discernables	
SISO	$1 \le \boldsymbol{\rho} < 2n$	Non		
0610	$\rho = 2n$	Oui	Oui	
MISO	$1 \le \boldsymbol{\rho} \le 2n$	Non		

Table 5.3 – État de stricte discernabilité et de forte discernabilité des SNAC suivant les valeurs de ho

En d'autres termes, pour la classe des systèmes non-linéaires affines en la commande qui ont un indice de similarité fini, nous avons montré que

— seuls les systèmes SISO ayant un indice de similarité $\rho = 2n$ sont strictement discernables

— il n'existe pas de couple de systèmes linéaires MISO qui soient strictement discernables

les systèmes SISO sont toujours fortement discernables ainsi que les systèmes MISO
 Ces conditions de discernabilité récapitulés dans le tableau ci-dessous généralisent celles que

nous avons établies dans le chapitre 3.

Discernabilité	Classe	Valeurs de ρ	Dimension	Condition de discernabilité
Stricte	SL	$1 \le \mathbf{\rho} \le 2n$	SISO	$\rho = 2n$
			MISO	Strictement discernables
	SNAC		SISO	$\rho = 2n$
			MISO	Strictement discernables
Forte	SL	$1 \le \boldsymbol{\rho} \le 2n$	SISO et MISO	Fortement discernables
	SNAC		SISO et MISO	Fortement discernables

 $Table \ 5.4 - {\rm Conditions} \ {\rm de \ stricte \ discernabilit{\acute{e}} \ et \ de \ forte \ discernabilit{\acute{e}} \ des \ SNAC$

Les résultats de ce chapitre on été obtenus sous l'hypothèse d'existence d'une forme normale globale du système augmenté. Pour les systèmes non-linéaires affines en la commande qui ne satisfont pas cette hypothèse, nous avons vu qu'on peut toujours construire la forme normale locale du système augmenté qui leur est associé. Une étude locale de la discernabilité stricte et de la forte discernabilité contrôlable pourra être envisagée dans ce cas. D'autre part, le cas où l'indice de similarité est infini ($\rho = +\infty$) n'a pas été examiné dans cette étude et donne ainsi lieu à une éventuelle perspective de recherche.

Conclusion générale et perspectives

Le présent manuscrit traite de la caractérisation de la discernabilité de deux systèmes dynamiques S_1 et S_2 qui sont linéaires ou non-linéaires affines en la commande. Trois grands concepts de discernabilité on fait l'objet de cette étude : la **discernabilité stricte**, la **discernabilité contrôlable** et **la résidu-discernabilité**.

Pour caractériser la discernabilité stricte et la discernabilité contrôlable des systèmes S_1 et S_2 , nous avons d'abord déterminé la zone d'indiscernabilité $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$ de ces deux systèmes. Cette zone correspond à l'ensemble des commandes et des états initiaux qui génèrent des sorties identiques pour les systèmes dynamiques S_1 et S_2 . En nous appuyant sur le fait que l'identification de cette zone est un problème d'annulation de la sortie du système augmenté S associé à S_1 et à S_2 , nous proposons deux méthodes pour déterminer $\mathscr{Z}_{ind}(S_1, S_2)$. La première qui s'applique uniquement aux systèmes S_1 et S_2 linéaires repose sur l'utilisation de l'algorithme de Le Verrier-Souriau [Leyva-Ramos, 1991], [Réaud et al., 2000], [Helmberg et al., 1993], [Brezinski, 2002] pour expliciter la sortie du système augmenté S en fonction de ses paramètres de Markov. La seconde qui s'applique aux systèmes non-linéaires affines en la commande (SNAC) est basée sur les techniques classiques développées dans [Isidori, 1989] et [Khalil, 1996a] pour résoudre le problème d'annulation de la sortie de SNAC.

Ensuite, grâce à l'étude de la non-trivialité de la zone d'indiscernabilité nous avons établi

- le résultat de [Lou and Si, 2009] et [Lou and Yang, 2014] qui stipule que les systèmes linéaires S_1 et S_2 MISO ne sont jamais strictement discernables (voir théorèmes 1.3.4 et 3.3.6)
- la condition de discernabilité contrôlable de [Babaali and Pappas, 2004] (voir théorème 1.3.19 et corollaire 3.3.10)

Nous nous basons principalement sur ces deux applications de la zone d'indiscernabilité pour

généraliser les conditions précédentes de Lou *et. al* et de Babaali *et. al* à classe des systèmes non-linéaires affines en la commande (voir théorèmes 5.4.3 et 5.4.5).

Une autre contribution importante que nous déduisons de l'étude de la non trivialité de la zone d'indiscernabilité $\mathscr{X}_{ind}(S_1, S_2)$ est la condition nécessaire et suffisante du théorème 3.3.3. Cette condition caractérise la discernabilité stricte des systèmes linéaires S_1 et S_2 dans le cas SISO. La particularité de cette condition est qu'elle est plus simple à tester comparativement à la condition de discernabilité stricte de [Lou and Si, 2009] et [Lou and Yang, 2014]. Elle porte sur le calcul des paramètres de Markov de S_1 et S_2 . Une généralisation de cette condition de discernabilité stricte à la classe des systèmes non-linéaires affines en la commande a également été présentée dans ce mémoire (voir théorème 5.4.4). Cette condition généralisée de discernabilité stricte et celle du théorème 5.4.3 ont été établies en étudiant principalement la non trivialité de la projection $\mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$ de la zone d'indiscernabilité sur l'ensemble des états initiaux de S_1 et S_2 . Pour cette étude, nous prouvons d'abord que $\mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$ est une sous-variété différentielle. Nous montrons ensuite comment construire des triplets non nuls de la zone d'indiscernabilité en utilisant l'espace tangent à $\mathscr{X}_{ind}^o(S_1, S_2)$ en l'origine des coordonnées.

Outre ces différentes conditions de discernabilité, nous donnons également, grâce à la caractérisation de la zone d'indiscernabilité, la formule explicite des commandes u à ne pas appliquer aux systèmes S_1 et S_2 pour discerner leurs sorties.

Pour boucler notre étude sur ces deux premières formes de discernabilité, nous avons spécifié un indice qui permet de quantifier le degré de forte discernabilité contrôlable des systèmes S_1 et S_2 dans le cas linéaire. Lorsque S_1 et S_2 sont soumis à des entrées inconnues, la formule explicite de cet indice nous a permis de déterminer les tailles $T_{\mathbf{u}^*}^{\text{aille}}(\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2)$ des domaines des perturbations \mathscr{W}_1 et \mathscr{W}_2 qui préservent la forte discernabilité contrôlable des systèmes S_1 et S_2 .

Dans notre étude de la résidu-discernabilité, nous nous sommes intéressés à la détermination des propriétés structurelles qui permettent d'établir la résidu-discernabilité de S_1 et S_2 . Dans ce cadre, nous montrons que

- une simple comparaison des indices d'observabilité de S_1 et S_2 peut renseigner sur la résidu-discernabilité de deux systèmes
- lorsque S_1 et S_2 sont observables et commandables, la non équivalence de leurs représentations d'état est une condition nécessaire et suffisante pour qu'ils soient discernables à travers les résidus de parité
- la notion de résidu-discernabilité et la notion de discernabilité contrôlable sont équivalentes

Les deux premiers résultats sont des conséquences de la condition de rang que nous avons établie pour caractériser la résidu-discernabilité de S_1 et S_2 .

Au terme de cette étude, plusieurs questions méritent d'être explorées plus profondément dans le cadre de nos futurs recherches.

Cette thèse pose les bases de l'utilisation de la zone d'indiscernabilité pour caractériser la discernabilité contrôlable et la discernabilité stricte des systèmes non-linéaires. Les résultats obtenus pour les systèmes non-linéaires affines en la commande reposent sur les hypothèses 3.3.3 et 5.2.19 d'existence d'une forme normale globale du système augmenté. Pour les systèmes qui ne satisfont pas ces hypothèses, puisqu'une normalisation locale du système augmenté est toujours possible (théorèmes 5.2.18 et 5.2.13), une caractérisation locale de la discernabilité stricte et de la discernabilité contrôlable est envisageable.

Aussi, les conditions de forte discernabilité contrôlable et de discernabilité stricte que nous avons déterminées pour les systèmes non-linéaires affines en la commande s'appliquent uniquement aux systèmes SISO et MISO. Une extension de ces résultats aux systèmes MIMO et SIMO rentre également dans le cadre des perspectives de cette thèse.

D'autre part, dans le chapitre 4 nous avons introduit la taille $\mathsf{T}_{\mathbf{u}^{\star}}^{\mathrm{aille}}(\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2)$ des domaines des perturbations \mathscr{W}_1 et \mathscr{W}_2 qui nous permet d'étudier le problème 4.1.1 de robustesse de la forte discernabilité contrôlable des modèles nominaux vis-à-vis des perturbations. Nous avons vu que le calcul de $\mathsf{T}_{\mathbf{u}^{\star}}^{\mathrm{aille}}(\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2)$ nécessite une parfaite connaissance du domaine $\mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2$ des perturbations déterministes qui agissent sur S_1 et S_2 et que cette connaissance est notamment disponible lorsque les perturbations sont paramétrées comme dans les exemples illustratifs de ce chapitre. Le calcul de la taille $\mathsf{T}_{\mathbf{u}^{\star}}^{\mathrm{aille}}(\mathscr{W}_1, \mathscr{W}_2)$ pour les perturbations déterministes non paramétrées est donc un problème ouvert qui mérite d'être creusé.

Enfin, la détermination d'une distance permettant de quantifier le degré de discernabilité des systèmes non-linéaires est également envisagée.

Conclusion générale et perspectives

Annexe A

Inversibilité de $M_2^{-1} - M_1^{-1}$ et preuve de l'égalité $H = M_2^{-1} K_2 - M_2^{-1} G$

A.1 Inversibilité de la matrice $M_2^{-1} - M_1^{-1}$

Nous allons montrer que si $M_1 - M_2$ est inversible alors la matrice $M_2^{-1} - M_1^{-1}$ l'est également. La preuve de cette assertion est très simple. Elle peut être obtenue grâce à la décomposition suivante de $M_2^{-1} - M_1^{-1}$:

$$M_2^{-1} - M_1^{-1} = M_2^{-1} M_1 M_1^{-1} - M_2^{-1} M_2 M_1^{-1} = M_2^{-1} (M_1 - M_2) M_1^{-1}.$$

De cette décomposition, on obtient l'expression suivante de l'inverse de $M_2^{-1}-M_1^{-1}$:

$$\left(M_2^{-1} - M_1^{-1}\right)^{-1} = M_1 \left(M_1 - M_2\right)^{-1} M_2.$$
(A.1)

A.2 Preuve de l'égalité $H = M_2^{-1} K_2 - M_2^{-1} G$

Soit H la matrice définie par

$$H = M_1^{-1} K_1 - M_1^{-1} G$$

avec

$$G = \left(M_2^{-1} - M_1^{-1}\right)^{-1} \left(M_2^{-1} K_2 - M_1^{-1} K_1\right).$$
 (A.2)

Le but de cette section est d'établir l'égalité $H = M_2^{-1} K_2 - M_2^{-1} G$. Ceci revient à montrer que

$$M_1^{-1} K_1 - M_1^{-1} G = M_2^{-1} K_2 - M_2^{-1} G.$$
(A.3)

Annexe A. Inversibilité de $M_2^{-1} - M_1^{-1}$ et preuve de l'égalité $H = M_2^{-1} K_2 - M_2^{-1} G$

D'après (A.1) et (A.2), on obtient

$$M_1^{-1}G = (M_1 - M_2)^{-1} (K_2 - M_2 M_1^{-1} K_1).$$
(A.4)

D'autre part, comme

$$(M_1 - M_2)^{-1} M_1 - (M_1 - M_2)^{-1} M_2 = I_r,$$

on peut donc écrire que

$$(M_1 - M_2)^{-1} M_2 M_1^{-1} = (M_1 - M_2)^{-1} - M_1^{-1}.$$
 (A.5)

Les égalités (A.4) et (A.5) entrainent que

$$M_1^{-1}G = (M_1 - M_2)^{-1} K_2 - (M_1 - M_2)^{-1} M_2 M_1^{-1} K_1$$

= $(M_1 - M_2)^{-1} K_2 - (M_1 - M_2)^{-1} K_1 + M_1^{-1} K_1$
= $-(M_1 - M_2)^{-1} (K_1 - K_2) + M_1^{-1} K_1.$

Par conséquent,

$$M_1^{-1} K_1 - M_1^{-1} G = (M_1 - M_2)^{-1} (K_1 - K_2)$$

Par ailleurs, en inversant le rôle de M_1 et M_2 puis celui de K_1 et K_2 dans le raisonnement que nous avons mené pour établir l'égalité précédente, on obtient

$$M_2^{-1} K_2 - M_2^{-1} G = (M_1 - M_2)^{-1} (K_1 - K_2)$$

Ceci achève la preuve de la relation (A.3).

Annexe B

Formule explicite de la fonction de projection des écarts de sorties

L'objectif de cet annexe est d'établir dans le cas linéaire, la formule explicite de $\Psi_{ji}^{[k_j]}[x_i^o, u, w_1, w_2]$ définie par :

$$\Psi_{ji}^{[k_j]} \left[x_i^o, u, w_1, w_2 \right] (t) = \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_i \left(\cdot, x_i^o, u, w_i \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R}_j^{[k_j]} \left[u, y_j \left(\cdot, x_j^o, u, w_j \right) \right] (t) - \mathcal{R$$

D'après la définition (1.56) de la fonction $\mathfrak{R}_{j}^{[k_{j}]}[u,\cdot]$ de calcul de résidu de S_{j} commandé par u, on obtient

$$\mathcal{R}_{j}^{[k_{j}]}\left[u, y_{i}\left(\cdot, x_{i}^{o}, u, w_{i}\right)\right](t) = \mathbb{O}_{j \perp}^{[k_{j}]}\left[Y_{i}^{[k_{j}]}\left(t, x_{i}^{o}, u, w_{i}\right) - \mathbb{T}_{j}^{[k_{j}]}U^{[k_{j}]}\left(t\right)\right]$$

D'autre part, d'après (1.47), $Y_i^{[k_j]}(t, x_i^o, u, w_i)$ s'exprime comme suit :

$$Y_i^{[k_j]}(t, x_i^o, u, w_i) = \mathbb{O}_i^{[k_j]} x_i(t, x_i^o, u, w_i) + \mathbb{T}_i^{[k_j]} U^{[k_j]}(t) + \overline{\mathbb{T}}_i^{[k_j]} W_i^{[k_j]}(t)$$

Ainsi on peut réécrire le résidu $\mathcal{R}_{j}^{[k_{j}]}[u, y_{i}(\cdot, x_{i}^{o}, u, w_{i})]$ de S_{j} calculé avec u et y_{i} sous la forme :

$$\mathcal{R}_{j}^{[k_{j}]}\left[u, y_{i}\left(\cdot, x_{i}^{o}, u, w_{i}\right)\right](t) = \mathbb{O}_{j\perp}^{[k_{j}]}\left[\mathbb{O}_{i}^{[k_{j}]} x_{i}\left(t, x_{i}^{o}, u, w_{i}\right) + \mathbb{T}_{ij}^{[k_{j}]} U^{[k_{j}]}\left(t\right) + \overline{\mathbb{T}}_{i}^{[k_{j}]} W_{i}^{[k_{j}]}\left(t\right)\right]$$
(B.1)

où on rappelle que $\mathbb{T}_{ij}^{[k_j]} = \mathbb{T}_i^{[k_j]} - \mathbb{T}_j^{[k_j]}$.

Par ailleurs, de la relation (1.53) qui traduit l'égalité entre la forme de calcul et la forme d'évaluation du résidu de S_j et de la définition (1.55) de la forme d'évaluation du résidu on obtient :

$$\mathcal{R}_{j}^{[k_{j}]}\left[u, y_{j}\left(\cdot, x_{j}^{o}, u, w_{j}\right)\right](t) = \overline{\mathcal{R}}_{j}^{[k_{j}]}\left[u, w_{j}\right](t) = \mathbb{O}_{j\perp}^{[k_{j}]} \overline{\mathbb{T}}_{j}^{[k_{j}]} W_{j}^{[k_{j}]}(t)$$
(B.2)

Annexe B. Formule explicite de la fonction de projection des écarts de sorties

Finalement, par soustraction membre à membre des égalités (B.1) et (B.2) on obtient :

$$\Psi_{ji}^{[k_j]}[x_i^o, u, w_1, w_2](t) = \mathbb{O}_{j\perp}^{[k_j]} \left[\mathbb{O}_i^{[k_j]} x_i(t, x_i^o, u, w_i) + \mathbb{T}_{ij}^{[k_j]} U^{[k_j]}(t) + \overline{\mathbb{T}}_i^{[k_j]} W_i^{[k_j]}(t) - \overline{\mathbb{T}}_j^{[k_j]} W_j^{[k_j]}(t) \right]$$
(B.3)

où on rappelle que

$$x_{i}(t, x_{i}^{o}, u, w_{i}) = C_{i} e^{tA_{i}} x_{i}^{o} + C_{i} \int_{0}^{t} e^{(t-\tau)A_{i}} \left[B_{i} u(\tau) + E_{i} w_{i}(\tau)\right] d\tau + D_{i} u(t) + H_{i} w_{i}(t).$$
Annexe C

Preuve du lemme 2.1.1

Lemme C.0.1. Soient M_1 , M_2 et M_3 trois matrices ayant le même nombre de lignes. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\operatorname{Im}(M_2) \subseteq \operatorname{Im}(M_1)$ et $\operatorname{Im}(M_3) \subseteq \operatorname{Im}(M_1)$.
- $(ii) \operatorname{rang}(M_1) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix}\right)$

Démonstration.

 $(i) \implies (ii)$ Supposons que M_1 , M_2 et M_3 satisfont les conditions de l'assertion (i). On a alors

$$\operatorname{Im}\left(\begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Im}(M_1) + \operatorname{Im}(M_2) + \operatorname{Im}(M_3) = \operatorname{Im}(M_1)$$

et ceci implique que

$$\operatorname{rang}(M_1) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix}\right)$$

 $(ii) \implies (i)$ Supposons que M_1 , M_2 et M_3 satisfont la condition de rang de (ii). De la relation

$$\operatorname{Im}\left(\begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Im}\left(M_1\right) + \operatorname{Im}\left(\begin{bmatrix} M_2 & M_3 \end{bmatrix}\right)$$

on obtient

$$\dim \left(\operatorname{Im} \left(\begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix} \right) \right) = \dim \left(\operatorname{Im} \left(M_1 \right) + \dim \left(\operatorname{Im} \left(\begin{bmatrix} M_2 & M_3 \end{bmatrix} \right) \right)$$
$$-\dim \left(\operatorname{Im} \left(M_1 \right) \cap \operatorname{Im} \left(\begin{bmatrix} M_2 & M_3 \end{bmatrix} \right) \right)$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(M_1\right) + \dim\left(\begin{bmatrix} M_2 & M_3 \end{bmatrix}\right)$$
$$-\dim\left(\operatorname{Im}\left(M_1\right) \cap \operatorname{Im}\left(\begin{bmatrix} M_2 & M_3 \end{bmatrix}\right)\right)$$

Cette dernière égalité devient

$$\dim \left(\begin{bmatrix} M_2 & M_3 \end{bmatrix} \right) = \dim \left(\operatorname{Im} \left(M_1 \right) \cap \operatorname{Im} \left(\begin{bmatrix} M_2 & M_3 \end{bmatrix} \right) \right)$$
(C.1)

car M_1 , M_2 et M_3 satisfont la condition (*ii*). Comme Im $\left(\begin{bmatrix} M_2 & M_3 \end{bmatrix}\right)$ et Im $(M_1) \cap$ Im $\left(\begin{bmatrix} M_2 & M_3 \end{bmatrix}\right)$ sont des espaces vectoriels et que Im $(M_1) \cap$ Im $\left(\begin{bmatrix} M_2 & M_3 \end{bmatrix}\right) \subseteq$ Im $\left(\begin{bmatrix} M_2 & M_3 \end{bmatrix}\right)$, l'égalité (C.1) entraîne que

$$\operatorname{Im}(M_1) \cap \operatorname{Im}\left(\begin{bmatrix} M_2 & M_3 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Im}\left(\begin{bmatrix} M_2 & M_3 \end{bmatrix}\right).$$

Par conséquent $\operatorname{Im}\left(\begin{bmatrix} M_2 & M_3 \end{bmatrix}\right) \subseteq \operatorname{Im}(M_1)$. Cette inclusion implique que $\operatorname{Im}(M_2) \subseteq \operatorname{Im}(M_1)$ et $\operatorname{Im}(M_3) \subseteq \operatorname{Im}(M_1)$ car $\operatorname{Im}\left(\begin{bmatrix} M_2 & M_3 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Im}(M_2) + \operatorname{Im}(M_3)$ contient $\operatorname{Im}(M_2)$ et $\operatorname{Im}(M_3)$.

Annexe D

Décomposition de Kalman en forme observable des systèmes S_1 et S_2

Lemme D.0.1. Pour tout $i \in \{1, 2\}$, si rang $\left(\mathbb{O}_{i}^{[\kappa_{i}]}\right) = r_{i} < n$ alors il existe cinq matrices $Q_{i} \in \operatorname{GL}_{n}(\mathbb{R}), A_{i,11} \in \mathbb{R}^{r_{i} \times r_{i}}, A_{i,21} \in \mathbb{R}^{(n-r_{i}) \times r_{i}}, A_{i,22} \in \mathbb{R}^{(n-r_{i}) \times (n-r_{i})}$ et $C_{i,1} \in \mathbb{R}^{m \times r_{i}}$ telles que

$$A_{i} = Q_{i} \begin{bmatrix} A_{i,11} & 0_{r_{i} \times (n-r_{i})} \\ & & \\ A_{i,21} & A_{i,22} \end{bmatrix} Q_{i}^{-1} \quad ; \quad C_{i} = \begin{bmatrix} C_{i,1} & 0_{m \times (n-r_{i})} \end{bmatrix} Q_{i}^{-1} \tag{D.1}$$

et

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} C_{i,1} \\ C_{i,1} A_{i,11} \\ \vdots \\ C_{i,1} A_{i,11}^{\kappa_i - 1} \end{bmatrix}\right) = r_i$$
(D.2)

Démonstration. Supposons que rang $\left(\mathbb{O}_{i}^{[\kappa_{i}]}\right) = r_{i} < n$. Soit $F_{i} \in \mathbb{R}^{r_{i} \times n}$ la matrice dont les lignes correspondent aux r_{i} lignes linéairement indépendantes de $\mathbb{O}_{i}^{[\kappa_{i}]}$ et soit $G_{i} \in \mathbb{R}^{(n-r_{i}) \times n}$ telle que la matrice $\begin{bmatrix} E_{i}^{\top} & G_{i}^{\top} \end{bmatrix}^{\top}$ est inversible. L'existence de G_{i} est garantie par le théorème de la base incomplète (voir lemme 5.2.12). Posons

$$\begin{bmatrix} F_i \\ G_i \end{bmatrix} = Q_i^{-1}$$

Afin d'obtenir la décomposition (D.1) de A_i et C_i , nous allons d'abord établir la relation (D.3) suivante qui montre le lien existant entre le noyau des matrices F_i , $\mathbb{O}_i^{[\kappa_i]}$ et $\mathbb{O}_i^{[\kappa_i-1]}$:

$$\operatorname{Ker}\left(F_{i}\right) = \operatorname{Ker}\left(\mathbb{O}_{i}^{[\kappa_{i}]}\right) = \operatorname{Ker}\left(\mathbb{O}_{i}^{[\kappa_{i}-1]}\right). \tag{D.3}$$

Annexe D. Décomposition de Kalman en forme observable des systèmes S_1 et S_2

D'une part, par construction de la matrice F_i , il est clair que Ker $(F_i) = \text{Ker}\left(\mathbb{O}_i^{[\kappa_i]}\right)$. D'autre part, l'égalité du noyau des matrices $\mathbb{O}^{[\kappa_i]}$ et $\mathbb{O}^{[\kappa_i-1]}$ découle du fait que

- les noyaux Ker $\left(\mathbb{O}_{i}^{[\kappa_{i}-1]}\right)$ et Ker $\left(\mathbb{O}_{i}^{[\kappa_{i}]}\right)$ ont la même dimension car $\mathbb{O}_{i}^{[\kappa_{i}-1]}$ et $\mathbb{O}_{i}^{[\kappa_{i}]}$ ont par définition le même rang et le même nombre de colonnes
- par définition de $\mathbb{O}_i^{[\kappa_i]}$, $\operatorname{Ker}\left(\mathbb{O}_i^{[\kappa_i-1]}\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(\mathbb{O}_i^{[\kappa_i]}\right)$ car $\kappa_i 1 < \kappa_1$

D'où F_i , $\mathbb{O}^{[\kappa_i]}$ et $\mathbb{O}^{[\kappa_i-1]}$ satisfont la condition (D.3).

Considérons maintenant le partitionnement $Q_i = \begin{bmatrix} \hat{F}_i & \hat{G}_i \end{bmatrix}$ de la matrice Q_i où $\hat{F}_i \in \mathbb{R}^{n \times r_i}$ et $\hat{G}_i \in \mathbb{R}^{n \times (n-r_i)}$. De l'égalité $I_n = Q_i^{-1}Q_i = \begin{bmatrix} F_i \hat{F}_i & F_i \hat{G}_i \\ G_i \hat{F}_i & G_i \hat{G}_i \end{bmatrix}$ et de la relation (D.3), on a $\operatorname{Im}\left(\hat{G}_i\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(F_i\right) = \operatorname{Ker}\left(\mathbb{O}_i^{[\kappa_i]}\right)$ et par conséquent,

$$C_i \,\widehat{G}_i = 0_{m \times (n-r_i)} \tag{D.4}$$

 et

$$\begin{bmatrix} C_i A_i \\ C_i A_i^2 \\ \vdots \\ C_i A_i^{\kappa_i} \end{bmatrix} \hat{G}_i = \mathbb{O}_i^{[\kappa_i - 1]} A_i \hat{G}_i = 0_{m \kappa_i \times (n - r_i)}.$$
(D.5)

Les relations (D.3) et (D.5) entraînent que $\operatorname{Im}\left(A_{i}\,\widehat{G}_{i}\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(F_{i}\right)$ c'est-à-dire

$$F_i A_i \widehat{G}_i = 0_{r_i \times (n-r_i)}. \tag{D.6}$$

Le calcul de $Q_i^{-1} A_i Q_i$ à partir de (D.6) donne

$$Q_i^{-1} A_i Q_i = \begin{bmatrix} F_i A_i \hat{F}_i & F_i A_i \hat{G}_i \\ \\ G_i A_i \hat{F}_i & G_i A_i \hat{G}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i A_i \hat{F}_i & 0_{r_i \times (n-r_i)} \\ \\ G_i A_i \hat{F}_i & G_i A_i \hat{G}_i \end{bmatrix}$$

qui conduit à la décomposition (D.1) de A_i avec $A_{i,11} = F_i A_i \hat{F}_i$, $A_{i,21} = G_i A_i \hat{F}_i$ et $A_{i,22} = G_i A_i \hat{G}_i$. De plus, du calcul de $C_i Q_i$, on déduit de (D.4) que

$$C_i Q_i = \begin{bmatrix} C_i \hat{F}_i & C_i \hat{G}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{i,1} & 0_{m \times (n-r_i)} \end{bmatrix}.$$

avec $C_{i,1} = C_i \hat{F}_i$. D'où la décomposition (D.1) de la matrice C_i .

Nous allons maintenant établir la condition de rang (D.2) du lemme. Puisque

$$\mathbb{O}_{i}^{[\kappa_{i}-1]} = \begin{bmatrix} C_{i,1} \\ C_{i,1} A_{i,11} \\ \vdots \\ C_{i,1} A_{i,11}^{\kappa_{i}-1} \end{bmatrix} F_{i},$$

et F_i est de plein rang ligne alors

$$\operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_{i}^{[\kappa_{i}-1]}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}C_{i,1}\\C_{i,1}A_{i,11}\\\vdots\\C_{i,1}A_{i,11}^{\kappa_{i}-1}\end{bmatrix}\right)$$

d'où on obtient (D.2) car par définition de κ_i , rang $\left(\mathbb{O}_i^{[\kappa_i-1]}\right) = \operatorname{rang}\left(\mathbb{O}_i^{[\kappa_i]}\right) = r_i$.

Annexe D. Décomposition de Kalman en forme observable des systèmes S_1 et S_2

Annexe E

Preuve de la proposition 3.1.5

Rappelons que la formule explicite de la sortie du système augmenté est

$$y(t, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o), u, \boldsymbol{\pi}(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2})) = C e^{tA} \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o) + C \int_0^t e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau + D u(t). \quad (E.1)$$

D'après la décomposition de Dunford, on a A = M + N où $N \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ est une matrice nilpotente qui commute avec $M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, une matrice diagonalisable. Désignons par r l'indice de nilpotence de N. Pour tout $s \in \mathbb{R}_+$,

$$e^{As} = P e^{s\Sigma} P^{-1} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{N^k}{k!} s^k$$

où $\Sigma = P^{-1} M P$ est la matrice diagonale constituée des valeurs propres de A. Donc on obtient

$$\left\| e^{As} \right\| \le K_P Q_r \left(s \right) e^{s \boldsymbol{\lambda}_A}, \quad \forall s \in \mathbb{R}_+$$
(E.2)

avec

$$K_P = ||P|| ||P^{-1}||$$
; $Q_r(s) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{||N||^k}{k!} s^k$

Il est facile de vérifier à partir des relations (E.1) et (E.2) que pour tout ε

$$\begin{aligned} \|y\left(t, \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right), u, \boldsymbol{\pi}\left(0_{\mathscr{W}_{1}}, 0_{\mathscr{W}_{2}}\right)\right)\| &\leq K_{1} Q_{r}\left(t\right) e^{t\boldsymbol{\lambda}_{A}} + K_{2} \widetilde{Q}_{r}\left(t\right) e^{(\boldsymbol{\lambda}_{A}+\theta_{u})t} + \|D\| e^{t\theta_{u}} \\ &\leq K_{1} e^{-\varepsilon t} Q_{r}\left(t\right) e^{(\boldsymbol{\lambda}_{A}+\varepsilon)t} + K_{2} e^{-\varepsilon t} \widetilde{Q}_{r}\left(t\right) e^{(\boldsymbol{\lambda}_{A}+\theta_{u}+\varepsilon)t} \\ &+ \|D\| e^{t\theta_{u}} \end{aligned}$$

avec

$$K_{1} = K_{P} \|C\| \|\boldsymbol{\pi} (x_{1}^{o}, x_{2}^{o})\| \quad ; \quad K_{2} = K_{P} K_{u} \|C\| \|B\| \quad ; \quad \tilde{Q}_{r} (t) = \int_{0}^{t} Q_{r} (\tau) d\tau.$$

Par conséquent, on obtient

$$\|y(t, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o), u, \boldsymbol{\pi}(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}))\| \le M_{\varepsilon} e^{(\boldsymbol{\lambda}_A + \varepsilon)t} + N_{\varepsilon} e^{(\boldsymbol{\lambda}_A + \theta_u + \varepsilon)t} + \|D\| e^{t\theta_u}$$

car Q_r et \tilde{Q}_r sont des polynômes.

Annexe F

Généralisation des résultats des théorèmes 3.2.2et 3.2.8

Théorème F.O.1. Soit $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathscr{U}$. Si $\rho = +\infty$ alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Les sorties $y_1(\cdot, x_1^o, u, 0_{\mathscr{W}_1})$ et $y_2(\cdot, x_2^o, u, 0_{\mathscr{W}_2})$ sont identiques sur \mathbb{R}_+
- (ii) Les vecteurs x_1^o et x_2^o satisfont la condition (3.21).

Démonstration. Supposons que $\rho = +\infty$ et soit $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \widetilde{\mathscr{U}}$. Puisque $C A^k B$ est nulle pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$C e^{(t-\tau)A} B = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t-\tau)^k}{k!} C A^k B = 0_{m \times l}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \ \forall \tau \in [0;t],$$

et on obtient

$$y_1(t, x_1^o, u, 0_{\mathscr{W}_1}) - y_2(t, x_2^o, u, 0_{\mathscr{W}_2}) = C e^{tA} \pi (x_1^o, x_2^o) + C \int_0^t e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau = C e^{tA} \pi (x_1^o, x_2^o).$$

Par conséquent, les sorties $y_1(\cdot, x_1^o, u, 0_{\mathscr{W}_1})$ et $y_2(\cdot, x_2^o, u, 0_{\mathscr{W}_2})$ sont identiques sur \mathbb{R}_+ si et seulement si x_1^o et x_2^o satisfont la condition (3.24) c'est-à-dire

$$0_m = C e^{tA} \pi (x_1^o, x_2^o) = C_1 e^{tA_1} x_1^o - C_2 e^{tA_2} x_2^o, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

De plus, comme nous savons grâce au corollaire 3.2.3 que (3.24) et (3.21) sont équivalentes nous pouvons conclure que $y_1(\cdot, x_1^o, u, 0_{\mathscr{W}_1})$ et $y_2(\cdot, x_2^o, u, 0_{\mathscr{W}_2})$ sont identiques sur \mathbb{R}_+ si et seulement si x_1^o et x_2^o vérifient la condition (3.21). D'où l'équivalence entre les assertions (*i*) et (*ii*). \Box

Théorème F.0.2. Soit $\widetilde{\mathscr{U}}$ un sous-ensemble de et soit $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \widetilde{\mathscr{U}}$. Si $\rho = 2n$ alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Les sorties $y_1(\cdot, x_1^o, u, 0_{\mathscr{W}_1})$ et $y_2(\cdot, x_2^o, u, 0_{\mathscr{W}_2})$ sont identiques sur \mathbb{R}_+ .
- (ii) Les vecteurs x_1^o et x_2^o satisfont la condition (3.21) et le vecteur u vérifie la condition (3.26).

Démonstration. Supposons que $\rho = 2n$ et soit $(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \widetilde{\mathscr{U}}$. Avant de prouver l'équivalence entre les assertions (i) et (ii), rappelons tout d'abord que

$$y(t, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o), u, \boldsymbol{\pi}(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2})) = C e^{tA} \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o) + C \int_0^t e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$
(F.1)

et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$y^{(k)}(t, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o), u, \boldsymbol{\pi}(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2})) = C A^k e^{tA} \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o) + C \int_0^t A^k e^{(t-\tau)A} B u(\tau) + C A^{k-1} B u(t)$$

(i) \implies (ii) : Supposons que $y(\cdot, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o), u, \boldsymbol{\pi}(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}))$ est identiquement nulle sur \mathbb{R}_+ . Alors, pour tout $k = 0, 1, \ldots, 2n - 1, y^{(k)}(t, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o), u, \boldsymbol{\pi}(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}))$ est identiquement nulle sur \mathbb{R}_+ et on obtient grâce à la formule explicite de $y^{(k)}(t, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o), u, \boldsymbol{\pi}(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}))$ que

$$\forall k = 0, 1, \dots, 2n-1, \ C A^k e^{tA} \pi \left(x_1^o, x_2^o \right) + C \ \int_0^t A^k e^{(t-\tau)A} B u(\tau) = 0_m, \ t \in \mathbb{R}_+ \ (F.2)$$

car $C A^{k-1} B = 0_{m \times l}, k = 1, 2, \dots, 2n - 1$. En réécrivant (F.2) pour t = 0, il vient que

$$C A^k \boldsymbol{\pi} (x_1^o, x_2^o) = 0_m, \quad \forall k = 0, 1, \dots, 2n - 1$$

D'où x_1^o et x_2^o satisfont la condition (3.21). Puisque la fonction $y^{(2n-1)}(\cdot, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o), u, \boldsymbol{\pi}(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}))$ est identiquement nulle sur \mathbb{R}_+ , on a

$$C A^{2n} e^{tA} \pi (x_1^o, x_2^o) + C \int_0^t A^{2n} e^{(t-\tau)A} B u(\tau) + C A^{2n-1} B u(t) = 0_m, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$
(F.3)

Ainsi, pour obtenir la condition (3.26), nous allons montrer que chacun des deux premiers termes de gauche de (F.3) est nul.

En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton et la condition (3.21), il facile d'établir que

$$C A^{k} e^{tA} \boldsymbol{\pi} (x_{1}^{o}, x_{2}^{o}) = 0_{m}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \ \forall t \in \mathbb{R}_{+}.$$
(F.4)

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $C A^{2n} e^{tA} \pi (x_1^o, x_2^o) = 0_m$. On vient ainsi de prouver que le premier terme de gauche (F.3) est nul. Pour montrer que le second terme de gauche de (F.3) est aussi nul, il suffit de remarquer qu'à partir du théorème de Cayley-Hamilton, ce terme peut être décomposé comme suit

$$C \int_{0}^{t} A^{2n} e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^{2n-1} a_{k} C \int_{0}^{t} A^{k} e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{+}$$

et que d'après les relations (F.4) et (F.2),

$$\forall k = 0, 1, \dots, 2n - 1, \quad C \int_0^t A^k e^{(t-\tau)A} B u(\tau) = 0_m, \ t \in \mathbb{R}_+.$$

 $(ii) \implies (i)$: Supposons que x_1^o et x_2^o satisfont la condition (3.21) et que la commande u vérifie la condition (3.26). D'après le corollaire 3.2.3, la condition (3.21) est équivalente à

$$C e^{At} \boldsymbol{\pi} (x_1^o, x_2^o) = 0_m, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Par conséquent, la formule de la sortie $y(\cdot, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o), u, \boldsymbol{\pi}(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2}))$ devient

$$y(t, \boldsymbol{\pi}(x_1^o, x_2^o), u, \boldsymbol{\pi}(0_{\mathscr{W}_1}, 0_{\mathscr{W}_2})) = \int_0^t C e^{(t-\tau)A} B u(\tau) \, \mathrm{d}\tau.$$

Puisque $\rho = 2n$ et puisque *u* vérifie la condition (3.26), on peut donc écrire que

$$\forall k = 0, 1, \dots, 2n - 1, \quad C A^k B u(t) = 0_m, \ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Il s'ensuit que

$$C e^{(t-\tau)A} B u(\tau) = 0_m, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall \tau \in [0; t].$$

D'où le sortie $y\left(\cdot, \boldsymbol{\pi}\left(x_{1}^{o}, x_{2}^{o}\right), u, \boldsymbol{\pi}\left(0_{\mathscr{W}_{1}}, 0_{\mathscr{W}_{2}}\right)\right)$ est identiquement nulle sur \mathbb{R}_{+} .

Annexe G

Preuve du lemme 3.2.17

Lemme G.0.1. Soit φ la fraction rationnelle propre définie par

$$\varphi(p) = \frac{\vartheta_1(p)}{\vartheta_2(p)}, \quad p \in \mathbb{C}$$

où ϑ_1 et ϑ_2 sont deux polynômes à coefficients réels tels que ϑ_2 est non identiquement nulle et $\deg(\vartheta_1) \leq \deg(\vartheta_2)$. Alors $\mathcal{L}^{-1}[\varphi]$ existe et possède les propriétés suivantes :

- (i) Si φ est strictement propre c'est-à-dire si deg $(\vartheta_1) < \deg(\vartheta_2)$ alors $\mathcal{L}^{-1}[\varphi] \in \mathscr{C}^1_{exp}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}).$
- (ii) Pour tout $\omega \in \mathscr{C}^{1}_{exp}(\mathbb{R}_{+},\mathbb{R}), \ \omega * \varphi \in \mathscr{C}^{1}_{exp}(\mathbb{R}_{+},\mathbb{R})$ où on rappelle que le produit de convolution $\omega * \mathcal{L}^{-1}[\varphi]$ des fonctions causales ω et $\mathcal{L}^{-1}[\varphi]$ est défini par

$$\omega * \mathcal{L}^{-1}[\varphi](t) = \int_0^t \omega(t-\tau) \mathcal{L}^{-1}[\varphi](\tau) \, \mathrm{d}\tau.$$

 $D\acute{e}monstration.$ Supposons que la fraction rationnelle φ est propre. La division euclidienne de φ donne

$$\varphi(p) = \gamma + \frac{\vartheta_1(p)}{\vartheta_2(p)}$$

où $\tilde{\vartheta}_1$ est une fonction polynôme telle que deg $\left(\tilde{\vartheta}_1\right) < \deg\left(\vartheta_1\right)$ et γ un nombre réel vérifiant

$$\begin{cases} \gamma = 0 & \text{si} \quad \deg(\vartheta_1) < \deg(\vartheta_2) \\ \gamma \neq 0 & \text{si} \quad \deg(\vartheta_1) = \deg(\vartheta_2) \,. \end{cases}$$

Désignons par p_s , $s = 1, 2, ..., \mathbf{k}$ les racines réelles de ϑ_2 puis par $z_1, z_2, ..., z_r, \bar{z}_1, \bar{z}_2, ..., \bar{z}_r$ les racines complexes de ϑ_2 . Notons \mathbf{n}_s l'ordre de multiplicité de p_s et \mathbf{m}_s , l'ordre de multiplicité

Annexe G. Preuve du lemme 3.2.17

de z_s . D'après la décomposition en élément simple de la fraction rationnelle propre $\frac{\widehat{\vartheta_1}}{\vartheta_2}$ on a

$$\frac{\tilde{\vartheta}_1\left(p\right)}{\vartheta_2\left(p\right)} = \sum_{s=1}^{\mathbf{k}} \sum_{j=1}^{\mathbf{n}_s} \frac{\beta_{sj}}{\left(p - p_s\right)^j} + \sum_{s=1}^{\mathbf{r}} \sum_{j=1}^{\mathbf{m}_s} \left(\frac{\gamma_{sj}}{\left(p - z_s\right)^j} + \frac{\bar{\gamma}_{sj}}{\left(p - \bar{z}_s\right)^j}\right)$$

où pour tout $s = 1, 2, \ldots, \mathbf{k}$,

$$\mathbb{R} \ni \beta_{sj} = \frac{1}{(\mathbf{n}_s - j)!} \lim_{p \to p_s} \frac{\mathrm{d}^{\mathbf{n}_s - j}}{\mathrm{d}p^{\mathbf{n}_s - j}} \left[(p - p_s)^{\mathbf{n}_s} \frac{\widetilde{\vartheta}_1(p)}{\vartheta_2(p)} \right], \quad j = 1, 2, \dots, \mathbf{n}_s$$

et pour tout $s = 1, 2, \ldots, \mathbf{r}$,

$$\mathbb{C} \ni \gamma_{sj} = \frac{1}{(\mathbf{m}_s - j)!} \lim_{p \to z_s} \frac{\mathrm{d}^{\mathbf{m}_s - j}}{\mathrm{d}p^{\mathbf{m}_s - j}} \left[(p - z_s)^{\mathbf{m}_s} \frac{\widetilde{\vartheta}_1(p)}{\vartheta_2(p)} \right], \quad j = 1, 2, \dots, \mathbf{m}_s.$$

Il s'ensuit que

$$\varphi(p) = \gamma + \sum_{s=1}^{\mathbf{k}} \sum_{j=1}^{\mathbf{n}_s} \frac{\beta_{sj}}{(p-p_s)^j} + \sum_{s=1}^{\mathbf{r}} \sum_{j=1}^{\mathbf{m}_s} \left(\frac{\gamma_{sj}}{(p-z_s)^j} + \frac{\bar{\gamma}_{sj}}{(p-\bar{z}_s)^j} \right).$$

Pour tout $s = 1, 2, \ldots, \mathbf{k}$, on a

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\beta_{sj}}{(p-p_s)^j}\right](t) = \frac{\beta_{sj}t^{j-1}}{(j-1)!} e^{tp_s}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, \mathbf{n}_s$$

et pour tout $s = 1, 2, \ldots, \mathbf{r}$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\gamma_{sj}}{(p-z_s)^j} + \frac{\bar{\gamma}_{sj}}{(p-\bar{z}_s)^j}\right](t) = \frac{2|\gamma_{sj}| t^{j-1}}{(j-1)!} e^{t\Re(z_s)} \cos\left(\Im\left(z_s\right) t + \arg\left(\gamma_{sj}\right)\right), \quad j = 1, 2, \dots, \mathbf{m}_s.$$

Grâce à la linéarité de l'opérateur inverse de la transformation de Laplace, on obtient

$$\mathcal{L}^{-1}[\varphi](t) = \gamma \,\delta(t) + \sum_{s=1}^{\mathbf{k}} \left(\sum_{j=1}^{\mathbf{n}_s} \frac{\beta_{sj} \, t^{j-1}}{(j-1)!} \right) e^{t \, p_s} + 2 \sum_{s=1}^{\mathbf{r}} \left(\sum_{j=1}^{\mathbf{m}_s} \frac{|\gamma_{sj}| \, t^{j-1}}{(j-1)!} \, \cos\left(\Im\left(z_s\right) \, t + \arg\left(\gamma_{sj}\right)\right) \right) e^{t \, \Re(z_s)} \tag{G.1}$$

où δ , désigne la distribution de Dirac. Ainsi, lorsque la fraction rationnelle φ est strictement propre, $\gamma = 0$ et on déduit de (G.1) que $\mathcal{L}^{-1}[\varphi] \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\left|\mathcal{L}^{-1}\left[\varphi\right](t)\right| \le \sum_{s=1}^{\mathbf{k}} \left(\sum_{j=1}^{\mathbf{n}_s} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\right) \max_{j} |\beta_{sj}| \, \mathrm{e}^{t\,p_s} + 2\sum_{s=1}^{\mathbf{r}} \left(\sum_{j=1}^{\mathbf{m}_s} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\right) \max_{j} |\gamma_{sj}| \, \mathrm{e}^{t\,\Re(z_s)}.$$

De plus, puisque pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{\mathbf{n}_s} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}, \sum_{j=1}^{\mathbf{m}_s} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\right\} \le e^t$$

il vient donc que

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{L}^{-1} \left[\varphi \right] (t) \right| &\leq \max_{s,j} \left| \beta_{sj} \right| \sum_{s=1}^{\mathbf{k}} \mathrm{e}^{(1+p_s)t} + 2 \max_{s,j} \left| \gamma_{sj} \right| \sum_{s=1}^{\mathbf{r}} \mathrm{e}^{(1+\Re(z_s))t} \\ &\leq \left(\mathbf{k} + \mathbf{r} \right) \max \left\{ \max_{sj} \left| \beta_{sj} \right| \,, \, 2 \max_{s,j} \left| \gamma_{sj} \right| \right\} \, \mathrm{e}^{t\theta} \end{aligned}$$

avec

$$\theta = \max \left\{ p_1, p_2, \dots, p_{\mathbf{k}}, \Re \left(z_1 \right), \Re \left(z_2 \right), \dots, \Re \left(z_{\mathbf{r}} \right) \right\} + 1.$$

D'où $\mathcal{L}^{-1}[\varphi]$ possède la propriété (*i*). Soit $\omega \in \mathscr{C}^1_{exp}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Grâce à la distributivité du produit de convolution par rapport à l'addition on obtient

$$w * \mathcal{L}^{-1} [\varphi] (t) = \gamma w (t) + \sum_{s=1}^{\mathbf{k}} \sum_{j=1}^{\mathbf{n}_s} \frac{\beta_{sj}}{(j-1)!} \int_0^t \tau^{j-1} e^{\tau p_s} \omega (t-\tau) d\tau + \sum_{s=1}^{\mathbf{r}} \sum_{j=1}^{\mathbf{m}_s} \frac{|\gamma_{sj}|}{(j-1)!} \int_0^t \tau^{j-1} e^{\tau \Re(z_s)} \omega (t-\tau) \cos \left(\Im (z_s) \tau + \arg (\gamma_{sj})\right) d\tau.$$

Pour tout $s = 1, 2, \ldots, \mathbf{k}$,

$$t \longmapsto \int_0^t \tau^{j-1} e^{\tau p_s} \omega (t-\tau) \, \mathrm{d}\tau \in \mathscr{C}^\infty (\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \quad j = 1, 2, \dots, \mathbf{n}_s$$

et pour tout $k = 1, 2, \ldots, \mathbf{r}$,

$$t \longmapsto \int_0^t \tau^{j-1} e^{\tau \Re(z_s)} \omega \left(t - \tau\right) \cos\left(\Im\left(z_s\right) \tau + \arg\left(\gamma_{sj}\right)\right) d\tau \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\right), \quad j = 1, 2, \dots, \mathbf{m}_s.$$

De plus, puisque $w \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on conclut que $\omega * \mathcal{L}^{-1}[\varphi] \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned} |\omega * \mathcal{L}^{-1} [\varphi] (t)| &\leq \gamma \kappa_{\omega} e^{t \theta_{\omega}} + \kappa_{\omega} \sum_{s=1}^{\mathbf{k}} e^{t \theta_{\omega}} \max_{j} |\beta_{sj}| \int_{0}^{t} e^{(p_{s}+1-\theta_{\omega})\tau} d\tau + \\ \kappa_{\omega} \sum_{s=1}^{\mathbf{r}} e^{t \theta_{\omega}} \max_{j} |\gamma_{sj}| \int_{0}^{t} e^{(\Re(z_{s})+1-\theta_{\omega})\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Soient $\varepsilon_s \ge 0$, $s = 1, 2, ..., \mathbf{k}$ tels que $p_s + 1 - \theta_\omega + \varepsilon_s \ne 0$ et soient $\varepsilon'_s \ge 0$ tels que $\Re(z_s) + 1 - \theta_\omega + \varepsilon'_s \ne 0$. On déduit de l'inégalité précédente que

$$\begin{aligned} |\omega * \mathcal{L}^{-1} [\varphi] (t)| &\leq \gamma \kappa_{\omega} e^{t \theta_{\omega}} + \kappa_{\omega} \max_{s,j} |\beta_{sj}| \sum_{s=1}^{\mathbf{k}} \frac{e^{(p_s + \varepsilon_s + 1)t}}{|p_s + 1 - \theta_{\omega} + \varepsilon_s|} + \\ &2 \kappa_{\omega} \max_{s,j} |\gamma_{sj}| \sum_{s=1}^{\mathbf{r}} \frac{e^{(\Re(z_s) + \varepsilon_s + 1)t}}{|\Re(z_s) + 1 - \theta_{\omega} + \varepsilon'_s|} \\ &\leq \kappa'_{\omega,\varphi} e^{\theta' t} \end{aligned}$$

avec

$$\theta' = \max\left\{p_1 + \varepsilon_1, p_2 + \varepsilon_2, \dots, p_r + \varepsilon_r, \Re\left(z_1\right) + \varepsilon_1', \Re\left(z_2\right) + \varepsilon_2', \dots, \Re\left(z_r\right) + \varepsilon_r'\right\} + 1\right\}$$

 et

$$\kappa_{\omega,\varphi}' = (1 + \mathbf{k} + \mathbf{r}) \ \kappa_{\omega} \ \max\left\{\gamma, \ \frac{\max_{s,j} |\beta_{sj}|}{\min_{s} |p_s + 1 - \theta_{\omega} + \varepsilon_s|}, \frac{2\max_{s,j} |\gamma_{sj}|}{\min_{s} |\Re(z_s) + 1 - \theta_{\omega} + \varepsilon_s'|}\right\}.$$

Il s'ensuit que $\omega * \mathcal{L}^{-1}[\varphi]$ est d'ordre exponentiel à l'infini. On conclut que $\mathcal{L}^{-1}[\varphi]$ possède la propriété (*ii*).

Annexe H

Preuve de la relation (3.38)

Lemme H.0.1. Soit $j \in \mathfrak{J}$ et soient $\widehat{\Psi}_k^j \in \mathscr{C}(\mathscr{H}_{\gamma^{\mathbb{F}}}, \mathbb{R}^l)$, $k \in \{1, 2, ..., l\} \setminus \{j\}$ les fonctions dont les composantes $\widehat{\Psi}_{ki}^j$, i = 1, 2, ..., l sont définies par

$$\widehat{\Psi}_{k\,i}^{j}\left(p\right) \begin{cases} 1 & si \quad i = k, \\ -\frac{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k}\right)}{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j}, C, A, \mathbf{B}^{j}\right)} & si \quad i = j, \\ 0 & si \quad i \neq k \text{ et } i \neq j. \end{cases}$$
(H.1)

Alors pour tout $j_0 \in \mathfrak{J}$ et pour tout $j'_0 \in \mathfrak{J}$ tel que $j_0 \neq j'_0$,

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, l\} \setminus \{j_0\}, \quad \widehat{\Psi}_k^{j_0} = \begin{cases} \widehat{\Psi}_k^{j_0'} - \frac{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{j_0'}, C, A, \mathbf{B}^{j_0}\right)} \widehat{\Psi}_{j_0}^{j_0'} & si \quad k \neq j_0', \\ -\frac{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{j_0'}, C, A, \mathbf{B}^{j_0'}\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{j_0}, C, A, \mathbf{B}^{j_0}\right)} \widehat{\Psi}_{j_0}^{j_0'} & si \quad k = j_0'. \end{cases}$$
(H.2)

Démonstration. Soient $j_0 \in \mathfrak{J}$ et $j'_0 \in \mathfrak{J}$ tels que $j_0 \neq j'_0$ et soit $k \in \{1, 2, \dots, l\} \setminus \{j_0\}$. Pour établir (H.2), nous allons distinguer le cas $k \neq j'_0$ et le cas $k = j'_0$.

Cas 1 : Supposons que $k \neq j'_0$ et soit $i \in \{1, 2, ..., l\}$. D'après (H.1), on a :

$$-\frac{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k}\right)}{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j_{0}}, C, A, \mathbf{B}^{j_{0}}\right)} \widehat{\Psi}_{j_{0}i}^{j_{0}'}\left(p\right) = \begin{cases} -\frac{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k}\right)}{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j_{0}}, C, A, \mathbf{B}^{k}\right)} & \text{si } i = j_{0} \\ \frac{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k}\right)}{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j_{0}'}, C, A, \mathbf{B}^{j_{0}'}\right)} & \text{si } i = j_{0}' \\ 0 & \text{si } i \neq j_{0}, \text{ et } i \neq j_{0}'. \end{cases}$$
(H.3)

Si i = k alors $i \neq j_0$ et $i \neq j'_0$ (car $k \neq j_0$ et $k \neq j'_0$) et on déduit de (H.3) et de (H.1) réécrite pour $j = j'_0$ que

$$\widehat{\Psi}_{ki}^{j_0'}(p) - \frac{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k\right)}{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j_0}, C, A, \mathbf{B}^{j_0}\right)} \widehat{\Psi}_{j_0i}^{j_0'}(p) = 1$$

Si $i = j_0$ alors $i \neq k$ et $i \neq j'_0$ (car $j_0 \neq k$ et $j_0 \neq j'_0$) et on déduit de (H.3) et de (H.1) réécrite pour $j = j'_0$ que

$$\widehat{\Psi}_{ki}^{j_0'}(p) - \frac{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k\right)}{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j_0}, C, A, \mathbf{B}^{j_0}\right)} \widehat{\Psi}_{j_0i}^{j_0'}(p) = -\frac{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k\right)}{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j_0}, C, A, \mathbf{B}^{j_0}\right)}$$

Si $i \neq k, i \neq j_0$ et $i = j'_0$ alors d'après (H.3) et (H.1) réécrite pour $j = j'_0$, on obtient

$$\widehat{\Psi}_{ki}^{j_0'}(p) - \frac{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k\right)}{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j_0}, C, A, \mathbf{B}^{j_0}\right)} \widehat{\Psi}_{j_0i}^{j_0'}(p) = -\frac{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k\right)}{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j_0'}, C, A, \mathbf{B}^{j_0'}\right)} + \frac{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k\right)}{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j_0'}, C, A, \mathbf{B}^{j_0'}\right)} = 0$$

Si $i \neq k, i \neq j_0$ et $i \neq j'_0$ alors d'après (H.3) et (H.1) réécrite pour $j = j'_0$, on obtient

$$\widehat{\Psi}_{ki}^{j_0'}(p) - \frac{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k\right)}{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j_0}, C, A, \mathbf{B}^{j_0}\right)} \widehat{\Psi}_{j_0i}^{j_0'}(p) = 0.$$

En somme, nous venons de montrer que

$$\widehat{\Psi}_{k\,i}^{j_0'}(p) - \frac{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k\right)}{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j_0}, C, A, \mathbf{B}^{j_0}\right)} \,\widehat{\Psi}_{j_0\,i}^{j_0'}(p) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = k, \\ -\frac{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^k, C, A, \mathbf{B}^k\right)}{\mathbb{F}\left(p, \mathbf{D}^{j_0}, C, A, \mathbf{B}^{j_0}\right)} & \text{si} \quad i = j_0, \\ 0 & \text{si} \quad i \not k \text{ et } i \neq j_0. \end{cases}$$

On conclut d'après (H.1) que

$$\widehat{\Psi}_{k}^{j_{0}^{\prime}} - \frac{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{k}, C, A, \mathbf{B}^{k}\right)}{\mathbb{F}\left(\cdot, \mathbf{D}^{j_{0}}, C, A, \mathbf{B}^{j_{0}}\right)} \widehat{\Psi}_{j_{0}}^{j_{0}^{\prime}} = \widehat{\Psi}_{k}^{j_{0}}.$$

Cas 2 : Supposons que $k = j'_0$ et soit $i \in \{1, 2, ..., l\}$. On déduit de (H.1) que

On conclut que

$$-\frac{\mathbb{F}\left(p,\mathbf{D}^{j_{0}^{\prime}},C,A,\mathbf{B}^{j_{0}^{\prime}}\right)}{\mathbb{F}\left(p,\mathbf{D}^{j_{0}},C,A,\mathbf{B}^{j_{0}}\right)}\,\widehat{\Psi}_{j_{0}i}^{j_{0}^{\prime}}\left(p\right)=\widehat{\Psi}_{j_{0}i}^{j_{0}}\left(p\right)=\widehat{\Psi}_{ki}^{j_{0}}\left(p\right).$$

Ceci achève notre preuve.

Annexe H. Preuve de la relation (3.38)

Annexe I

Système hydraulique à deux cuves

Considérons le procédé physique de la figure 4.3. D'après les équations de conservation de la masse on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{0} \dot{z}_{1} (t) &= u (t) - Q_{1} (t) - Q_{12} (t) ,\\ \mathbf{S}_{0} \dot{z}_{2} (t) &= -Q_{2} (t) + Q_{12} (t) \end{aligned} \tag{I.1}$$

où \mathbf{S}_0 désigne la section des cuves, u le débit de la pompe, Q_1 (resp. Q_2) le débit de la cuve 1 (resp. 2) dans la bâche et Q_{12} le débit de la cuve 1 dans la cuve 2. D'après la relation de Toricelli, ces débits s'expriment en fonction des niveaux d'eau z_1 et z_2 comme suit :

$$Q_{i}(t) = a_{i}\sqrt{z_{i}(t)}, \quad i = 1, 2,$$

$$Q_{12}(t) = a_{12}\operatorname{sgn}(z_{1}(t) - z_{2}(t))\sqrt{|z_{1}(t) - z_{2}(t)|}.$$
(I.2)

Les coefficients a_1 et a_{12} sont liés à la résistance des restrictions au niveau des vannes 1 et 2. Le coefficient a_2 traduit le débit du conduit reliant la cuve 2 à la bâche. Supposons que l'on mesure uniquement le niveau de l'eau dans la cuve 1. Sous l'hypothèse qu'il n'y a pas d'inversion du niveau d'eau dans les cuves $(z_1(t) > z_2(t))$, en posant $z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) \end{bmatrix}^{\top}$, on obtient

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \mathcal{A}(z(t)) + \mathcal{B}u(t), \\ y(t) = z_1(t), \end{cases}$$
(I.3)

avec

$$\mathcal{A}(z(t)) = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{\mathbf{S}_0} \sqrt{z_1(t)} - \frac{a_{12}}{\mathbf{S}_0} \sqrt{z_1(t) - z_2(t)} \\ -\frac{a_2}{\mathbf{S}_0} \sqrt{z_2(t)} + \frac{a_{12}}{\mathbf{S}_0} \sqrt{z_1(t) - z_2(t)} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{S}_0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, les points de fonctionnement (z^*, u^*) du systèmes sont solutions du système d'équations

$$\begin{cases} a_1 \sqrt{z_1^{\star}} + a_{12} \sqrt{z_1^{\star} - z_2^{\star}} = u^{\star}, \\ a_2 \sqrt{z_2^{\star}} = a_{12} \sqrt{z_1^{\star} - z_2^{\star}}. \end{cases}$$
(I.4)

La seconde équation de (I.4) est équivalente à

$$z_2^{\star} = \theta_0^2 \, z_1^{\star} \tag{I.5}$$

avec

$$\theta_0 = \frac{a_{1\,2}}{\sqrt{a_2^2 + a_{1\,2}^2}}.$$

L'équation (I.5) et la première relation de (I.4) entraînent que les hauteurs d'équilibre z_1^* et z_2^* peuvent être exprimées en fonction du débit u^* comme suit :

$$z_1^{\star} = \left(\frac{u^{\star}}{a_1 + a_2 \,\theta_0}\right)^2 \quad ; \quad z_2^{\star} = \left(\frac{\theta_0 \, u^{\star}}{a_1 + a_2 \,\theta_0}\right)^2. \tag{I.6}$$

Une linéarisation du système autour du point d'équilibre (z^*, u^*) donne

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}}(t) = J_{\mathcal{A}}(z^{\star}) \ \tilde{z}(t) + \mathbf{B} \ \tilde{u}(t), \\ \tilde{y}(t) = \tilde{z}_{1}(t), \end{cases}$$

avec $\tilde{z}(t) = z(t) - z^*$, $\tilde{u}(t) = u(t) - u^*$, $\tilde{y}(t) = y(t) - z_1^*$. En utilisant (I.6), il est facile d'établir l'expression suivante de la matrice Jacobienne $J_{\mathcal{A}}(z^*)$ de \mathcal{A} au niveau d'équilibre z^*

$$J_{\mathcal{A}}(z^{\star}) = \frac{1}{2 \mathbf{S}_{0} u^{\star}} \begin{bmatrix} -a_{1}^{2} - a_{1} \left(a_{2} \theta_{0} + \frac{a_{12}^{2}}{a_{2} \theta_{0}} \right) - a_{12}^{2} & \frac{a_{1} a_{12}^{2}}{a_{2} \theta_{0}} + a_{12}^{2} \\ \frac{a_{1} a_{12}^{2}}{a_{2} \theta_{0}} + a_{12}^{2} & -a_{2}^{2} - a_{1} \left(\frac{a_{2}}{\theta_{0}} + \frac{a_{12}^{2}}{a_{2} \theta_{0}} \right) - a_{12}^{2} \end{bmatrix}$$
(I.7)

Si autour du point de fonctionnement (z^*, u^*) , on perturbe la commande (débit de la pompe) du système par une action additive d'une entrée inconnue w(t), le comportement du procédé est alors décrit par

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}}(t) = J_{\mathcal{A}}(z^{\star}) \ \tilde{z}(t) + \mathbf{B} \ \tilde{u}(t) + \mathbf{B} \ w(t), \\ \tilde{y}(t) = \tilde{z}_{1}(t). \end{cases}$$
(I.8)

Ainsi, lorsque la vanne 1 est fermée (pas de fuite de la cuve 1 vers la bâche), $a_1 = 0$ et le modèle mathématique (I.8) devient dans ce cas

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{z}}(t) = \mathbf{A}\,\widetilde{z}(t) + \mathbf{B}\,u(t) + \mathbf{B}\,w(t), \\ \widetilde{y}(t) = \widetilde{z}_1(t), \end{cases}$$
(I.9)

avec

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2 \,\mathbf{S}_0 \, u^{\star}} \begin{bmatrix} -a_{12}^2 & a_{12}^2 \\ \\ \\ a_{12}^2 & -a_2^2 - a_{12}^2 \end{bmatrix}$$

Le modèle d'état du système S_1 de l'exemple 4.4.3 s'obtient à partir de (I.9) en posant $\tilde{z}(t) = x_1(t), \tilde{y}(t) = y_1(t), \mathbf{S}_0 = 1, u^* = 3, a_{12} = 2$ et $a_2 = 1$. Celui du système S_2 du même exemple s'obtient à partir de (I.9) en posant $\tilde{z}(t) = x_2(t), \tilde{y}(t) = y_2(t), \mathbf{S}_0 = 1, u^* = 4, a_{12} = 2.5$ et $a_2 = 1.5$

- [Aganović and Gajić, 1995] Aganović, Z. and Gajić, Z., editors (1995). Linear Optimal Control of Bilinear Systems with Applications to Singular Perturbations and Weak Coupling. Springer Berlin Heidelberg.
- [Antsaklis and Michel, 2006] Antsaklis, P. J. and Michel, A. N. (2006). *Linear Systems*. Bir-khäuser.
- [Antsaklis and Michel, 2007] Antsaklis, P. J. and Michel, A. N. (2007). *A Linear Systems Primer*. Birkhäuser, Boston.
- [Babaali and Pappas, 2004] Babaali, M. and Pappas, G. (2004). Observability of switched linear systems in continuous time. *Hybrid Systems : Computation and Control (R. Alur and* G. Pappas, eds.). Springers, pages 48–63.
- [Baglietto et al., 2007] Baglietto, M., Battistelli, G., and Scardovi, L. (2007). Active mode observability of switching linear systems. *Automatica*, 43(8):1442-1449.
- [Baglietto et al., 2013] Baglietto, M., Battistelli, G., and Tesi, P. (2013). Projection-based degree of distinguishability in switching linear systems. In *Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4048–4053, Florence, Italy.
- [Baglietto et al., 2014] Baglietto, M., Battistelli, G., and Tesi, P. (2014). Mode-observability degree in discrete-time switching linear systems. Systems & Control Letters, 70:69 76.
- [Bokor and Szabó, 2009] Bokor, J. and Szabó, Z. (2009). Fault detection and isolation in nonlinear systems. Annual Reviews in Control, 33(2):113 – 123.
- [Boothby, 1986] Boothby, W. M. (1986). An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Academic Press, revised second edition edition.

- [Brezinski, 2002] Brezinski, C. (2002). Control of linear systems. In Brezinski, C., editor, Computational Aspects of Linear Control, volume 1 of Numerical Methods and Algorithms, pages 3–72. Springer US.
- [Chen and Patton, 1999] Chen, J. and Patton, R. (1999). Robust model-based fault diagdiagnosis for dynamdy systems. Kluwer Academic Publishers.
- [Chow and Willsky, 1984] Chow, E. and Willsky, A. (1984). Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 29(7):603–614.
- [Cocquempot et al., 2004] Cocquempot, V., Mezyani, T. E., and Staroswiecki, M. (2004). Fault detection and isolation for hybrid systems using structured parity residuals. In *Proceedings* of the 5th Asian Control Conference, volume 2, pages 1204–1212, Melbourne, Victoria, Australia.
- [Cocquempot et al., 2003] Cocquempot, V., Staroswiecki, M., and Mezyani, T. E. (2003). Switching time estimation and fault detection for hybrid systems using structured parity residuals.
 In Proceedings of the 15th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Process (SAFEPROCESS'03), pages 681–686, Washington, DC, USA.
- [Cohen, 2007] Cohen, A. M. (2007). NUMERICAL METHODS FOR LAPLACE TRANS-FORM INVERSION. Springer Science+Business Media, LLC.
- [Delforge, 1982] Delforge, J. (1982). A sufficient condition for identifiability of a linear system. Mathematical Biosciences, 61(1):17 – 28.
- [Ding et al., 1999] Ding, X., Guo, L., and Jeinsch, T. (1999). A characterization of parity space and its application to robust fault detection. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 44(2):337–343.
- [Domlan et al., 2007a] Domlan, E., Ragot, J., and Maquin, D. (2007a). Systèmes à commutation : recherche du mode actif, identification de la loi de commutation. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 41(1) :7–30.
- [Domlan et al., 2007b] Domlan, E. A., Ragot, J., and Maquin, D. (2007b). Switching systems : Active mode recognition, identification of the switching law. *Journal of Control Science and Engineering*, Vol. 2007 :1–11.
- [Elliott, 2009] Elliott, D. (2009). Bilinear Control Systems, Matrices in Action. Springer Netherlands.
- [Farina and Rinaldi, 2000] Farina, L. and Rinaldi, S. (2000). *Positive linear systems : theory and applications.* John Wiley & Sons, Inc.

- [Frank, 1990] Frank, P. (1990). Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy : A survey and some new results. *Automatica*, 26(3) :459 – 474.
- [Frisk, 2000] Frisk, E. (2000). Residual generator design for non-linear, polynomial systems a gröbner basis approachs. In *Proceedings of IFAC Safeprocess' 00*, Budapest, Hungary.
- [Gallier, 2011] Gallier, J. (2011). Geometric methods and applications : for computer science and engineering. Texts in applied mathematics. Springer, New York.
- [Georges, 1995] Georges, D. (1995). The use of observability and controllability gramians or functions for optimal sensor and actuator location in finite-dimensional systems. In Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control, volume 4, pages 3319 – 3324, New Orleans, LA.
- [Gertler, 1997] Gertler, J. (1997). Fault detection and isolation using parity relations. *Control Engineering Practice*, 5(5):653 661.
- [Giaquinta and Modica, 2009] Giaquinta, M. and Modica, G. (2009). An introduction to functions of several variables. In *Mathematical Analysis*. Birkh[']auser Boston.
- [Gómez-Gutiérrez et al., 2010a] Gómez-Gutiérrez, D., Ramírez-Trevinio, A., Ruiz-Léon, J., and Di Gennaro, S. (2010a). Observability of switched linear systems : A geometric approach. In *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5636–5642.
- [Gómez-Gutiérrez et al., 2010b] Gómez-Gutiérrez, D., Ramírez-Treviño, A., Ramírez-Prado, G., and Ruiz-León, J. (2010b). Observability of switched linear systems. *IEEE Transac*tions on Industrial Informatics, 6(2) :127–135.
- [Gómez-Gutiérrez et al., 2012] Gómez-Gutiérrez, D., Ramírez-Treviño, A., Ruiz-León, J., and Gennaro, S. D. (2012). On the observability of continuous-time switched linear systems under partially unknown inputs. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 57(3):732–738.
- [Grewal and Glover, 1976] Grewal, M. S. and Glover, K. (1976). Identifiability of linear and nonlinear dynamical system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 6:833–837.
- [Hangos et al., 2004] Hangos, K. M., Bokor, J., and Szederkényi, G. (2004). Analysis and Control of Nonlinear Process Systems. Springer-Verlag London Limited.
- [Helmberg et al., 1993] Helmberg, G., Wagner, P., and Veltkamp, G. (1993). On faddeevleverrier's method for the computation of the characteristic polynomial of a matrix and of eigenvectors. *Linear Algebra and its Applications*, 185(0) :219 – 233.

- [Ilchmann and Mueller, 2007] Ilchmann, A. and Mueller, M. (2007). Time-varying linear systems : Relative degree and normal form. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 52(5):840–851.
- [Isidori, 1989] Isidori, A. (1989). Nonlinear control systems. Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- [Jacquez and Greif, 1985] Jacquez, J. A. and Greif, P. (1985). Numerical parameter identifiability and estimability : Integrating identifiability, estimability, and optimal sampling design. *Mathematical Biosciences*, 77(1-2) :201 – 227.
- [Kalman, 2011] Kalman, R. (2011). Lectures on controllability and observability. In Evangelisti, E., editor, *Controllability and Observability*, volume 46 of *C.I.M.E. Summer Schools*, pages 1–149. Springer Berlin Heidelberg.
- [Khalil, 1996a] Khalil, H. (1996a). Nonlinear Systems. Prentice Hall, second edition.
- [Khalil, 1996b] Khalil, H. K. (1996b). Nonlinear Systems. Prentice Hall.
- [Kieffer and Walter, 2006] Kieffer, M. and Walter, E. (2006). Guaranteed nonlinear state estimation for continuous-time dynamical models from discrete-time measurements. In Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design, volume 5, pages 685–690, Center of Toulouse, France.
- [Kolavennu et al., 2001] Kolavennu, S., Palanki, S., and J. C. Cockburn (2001). Nonlinear control of nonsquare multivariable systems. *Chemical Engineering Science*, 56:2103–2110.
- [Kolmogorov and Fomin, 1957] Kolmogorov, A. N. and Fomin, S. V. (1957). *Elements of the theory of functions and functional Analysis.* Graylock Press.
- [Kratz et al., 1998] Kratz, F., Nuninger, W., and Ploix, S. (1998). Fault detection for time-delay systems : a parity space approach. In *Proceedings of the 1998 American Control Conference*, volume 4, pages 2009 – 2011, Philadelphia, PA.
- [Kreindler and Sarachik, 1964] Kreindler, E. and Sarachik, P. (1964). On the concepts of controllability and observability of linear systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 9(2):129–136.
- [Larminat, 2007] Larminat, P. D. (2007). Analysis and Control of Linear Systems. ISTE Ltd.
- [Levine, 2009] Levine, J. (2009). Analysis and Control of Nonlinear Systems. Springer Berlin Heidelberg.
- [Leyva-Ramos, 1991] Leyva-Ramos, J. (1991). A method for partial-fraction expansion of transfer matrices. IEEE Transactions On Automatic Control, 36(12) :1472–1475.
- [Liu and Lin, 2011] Liu, X. and Lin, Z. (2011). On normal forms of nonlinear systems affine in control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(2) :239–253.

- [Lou and Si, 2009] Lou, H. and Si, P. (2009). The distinguishability of linear control systems. Nonlinear Analysis : Hybrid Systems, 1 :21–38.
- [Lou and Yang, 2011] Lou, H. and Yang, R. (2011). Conditions for distinguishability and observability of switched linear systems. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 3 :427–445.
- [Lou and Yang, 2014] Lou, H. and Yang, R. (2014). Necessary and sufficient conditions for distinguishability of linear control systems. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 30(2):473–482.
- [MacFalane and Karcanias, 1976] MacFalane, A. and Karcanias, N. (1976). Poles and zeros of linear multivariable systems : A survey of the algebraic, geometric and complex variable theory. *International Journal of Control*, 24(1) :33–74.
- [Meslem, 2008] Meslem, N. (2008). Atteingnabilité hybride des systèmes dynamiques continus par analyse par intinterval : Application à l'estimation ensembliste. PhD thesis, Université Paris Est.
- [Mohler, 1991] Mohler, R. (1991). Nonlinear Systems : Volume II, Applications to Bilinear Control, volume 2. Prentice-Hall, Inc.
- [Motchon et al., 2014] Motchon, K., Pekpe, K., Cassar, J.-P., and De Bièvre, S. (2014). On the distinguishability of positive linear time-invariant systems with affine parametric uncertainties. In *Proceedings of the 19th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC)*, pages 3797–3802, Cape Town, South Africa.
- [Motchon et al., 2013a] Motchon, K., Cassar, J.-P., De Bièvre, S., Cocquempot, V., and Pekpe, K. (2013a). Conditions de discernabilité entre les modes de fonctionnement d'un système dynamique linéaire. In 5^{ème} Journées Doctorales/Journées Nationales MACS, pages 67–72, Strasbourg, France.
- [Motchon et al., 2015a] Motchon, K. M. D., Pekpe, K. M., Cassar, J.-P., and Bièvre, S. D. (2015a). On the input-output distinguishability of single output continuous linear timeinvariant systems. *IEEE Transactions On Automatic Control.*
- [Motchon et al., 2015b] Motchon, K. M. D., Pekpe, K. M., Cassar, J.-P., and Bièvre, S. D. (2015b). Strict residual distinguishability of continuous-time switched linear systems with disturbances. In 9th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, Arts et Métiers ParisTech, Paris, France.
- [Motchon et al., 2013b] Motchon, K. M. D., Pekpe, K. M., Cassar, J.-P., De Bièvre, S., and Cocquempot, V. (2013b). Operating modes distinguishability condition in switching systems.

In Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control, pages 79–84, Florence, Italy.

- [M.Wurtenberger and Hofling, 1995] M.Wurtenberger and Hofling, T. (1995). Vehicle supervision by bilinear parity equations. In *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, volume 3, pages 1662 1666, Seattle, Washington.
- [Ortega, 1986] Ortega, J. M. (1986). *Matrix Theory : A Second Course*. Plenum Press, New York, NY, USA.
- [Réaud et al., 2000] Réaud, K., Souriau, J.-M., Vallée, C., and Fortuné, D. (2000). Méthode de Le Verrier-Souriau et équations différentielles linéaires. Acoustique, ondes, vibrations, IIb :773–778.
- [Rosa and Silvestre, 2011] Rosa, P. and Silvestre, C. (2011). On the distinguishability of discrete linear time-invariant dynamic systems. In *Proceedings of the 50th IEEE Conference* on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), pages 3356–3361, Orlando, FL, USA.
- [Royer, 2014] Royer, J. (2014). Sous-variétés de \mathbb{R}^n . Technical report, Institut de Mathématiques de Toulouse.
- [Rustem, 1981] Rustem, B., editor (1981). Projection Methods in Constrained Optimization and Application to Optimal Policy Decisions, chapter An algorithm for positive definite quagratic programming, pages 76–134. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [Schiff, 1999] Schiff, J. L. (1999). The Laplace Transform : Theory and Applications.
- [Schwartz, 1970] Schwartz, L. (1970). Topologie générale et analyse fonctionnelle. Hermann.
- [Serre, 2002] Serre, D. (2002). *Matrices : Theory and Applications*. Springer-Verlag New York, Inc.
- [Staroswiecki et al., 1991] Staroswiecki, M., Cocquempot, V., and Cassar, J.-P. (1991). Optimal design of fdi systems via parity space and observer based approaches. In *Proceedings IECON* '91. 1991 International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation, volume 1, pages 143–148, Kobe.
- [Staroswiecki and Comtet-Varga, 2001] Staroswiecki, M. and Comtet-Varga, G. (2001). Analytical redundancy relations for fault detection and isolation in algebraic dynamic systems. *Automatica*, 37(5):687–699.
- [Sundaram and Hadjicostis, 2013] Sundaram, S. and Hadjicostis, C. N. (2013). Structural controllability and observability of linear systems over finite fields with applications to multi-agent systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 58(1):60–73.

- [Murray Wonham, 1979] Murray Wonham, W. (1979). Linear Multivariable Control : a Geometric Approach. Springer-Verlag.
- [Touré, 1991] Touré, S. (1991). Algèbre Cycle 1 MP1. Edicef edition.
- [Tzafestas, 2014] Tzafestas, S. G. (2014). Introduction to Mobile Robot Control. Elsevier Inc.
- [Weber and Arfken, 2003] Weber, H. and Arfken, G. (2003). *Essential Mathematical Methods* for Physicists.
- [Yang et al., 2010] Yang, H., Jiang, B., and Cocquempot, V. (2010). Fault Tolerant Control Design for Hybrid Systems. Springer Berlin Heidelberg.
- [Yu et al., 1995] Yu, D., Williams, D., and Gomm, J. (1995). A parity space method of fault detection for bilinear systems. In *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, number 2, pages 1132 – 1133, Seattle, WA.
- [Zhang, 2011] Zhang, F. (2011). *Matrix theory : basic results and techniques*. Universitext. Springer, New York, second edition.
- [Zhang et al., 1998] Zhang, Q., Basseville, M., and Benveniste, A. (1998). Fault detection and isolation in nonlinear dynamic systems : A combined input-output and local approach. *Automatica*, 34(11) :1359 – 1373.

Résumé

Le problème de discernabilité des comportements entrées-sorties de deux systèmes dynamiques se pose dans de nombreuses applications telles que l'observation et la commande des systèmes dynamiques hybrides. Dans cette thèse, nous nous intéressons à la caractérisation de cette propriété de discernabilité des comportements entrées-sorties. Pour la classe des systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires affines en la commande, nous établissons : des conditions de discernabilité stricte qui garantissent la discernabilité des systèmes quelles que soient les commandes qui leur sont conjointement appliquées ; des conditions de discernabilité contrôlable qui assurent l'existence d'au moins une commande qui rend discernabilité à travers les résidus issus de la méthode de l'espace de parité. Outre ces différentes conditions, nous spécifions dans le cas linéaire, une forme de distance qui permet de quantifier pour une commande donnée, le degré de discernabilité des systèmes ainsi que la robustesse de la propriété de discernabilité.

Mots-clés : Discernabilité, systèmes dynamiques linéaires, systèmes dynamiques non-linéaires affines en la commande, espace de parité, détection de modes.

Abstract

The distinguishability of the input-output behavior of two dynamical systems plays a crucial role in many applications such as control and observation of hybrid dynamical systems. This thesis aims to characterize this property of distinguishability. For linear systems and nonlinear control-affine systems, we establish: conditions for strict distinguishability that ensure the distinguishability of the systems for every control input jointly applied to them; conditions for controlled-distinguishability that guarantee the existence of a control input which makes distinguishable the outputs of the systems; conditions for residual-distinguishability that characterize the distinguishability of the modes through parity-space residuals. Moreover, in the linear case, a metric is specified in order to quantify for a given control input, the distinguishability degree of the systems and the robustness of the property of distinguishability.

Keywords: Distinguishability, linear dynamical systems, nonlinear control-affine systems, parity space, mode detection.