

Estimateurs d'erreur *a posteriori* pour les équations de Maxwell en formulation temporelle et potentielle

Thèse

présentée pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Lille 1

Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

Roberta TITTARELLI

Soutenue le 27 septembre 2016 devant le jury composé de :

PATRICK CIARLET	Examineur	ENSTA ParisTech
EMMANUEL CREUSÉ	Directeur	Université Lille 1
BENJAMIN GOURSAUD	Invité	EDF R&D Saclay
YVONNICK LE MENACH	Encadrant	Université Lille 1
SERGE NICAISE	Encadrant	Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis
FRANCIS PIRIOU	Co-Directeur	Université Lille 1
ZHUOXIANG REN	Examineur	Université Paris 6
ALBERTO VALLI	Rapporteur	Università degli Studi di Trento
MARTIN VOHRALÌK	Rapporteur	INRIA de Paris

Thèse préparée au

Département de Mathématiques

Laboratoire Paul Painlevé (UMR CNRS 8524)

Université Lille 1

59 655 Villeneuve d'Ascq CEDEX

et au

L2EP - Laboratoire d'électrotechnique et d'électronique de puissance

Université Lille 1

59 655 Villeneuve d'Ascq CEDEX

Remerciements

Cette thèse m’a donnée la chance de travailler aux côtés de vrais scientifiques, et à travers leurs qualités, d’apprendre de nouvelles notions mathématiques (et sur la simulation de systèmes électrotechniques !). Pour cela, je remercie mes quatre encadrants de thèse, qui ont été un exemple de professionnalisme et d’humanisme : l’habilité d’Emmanuel Creusé de me diriger vers les choses importantes (et nécessaires !) avec méthodologie, pédagogie et une disponibilité hors-pair, la minutie et l’honnêteté de Francis Piriou, l’encouragement d’Yvonnick Le Menach et la force de pousser toujours plus loin de Serge Nicaise.

Cette thèse a été possible grâce au soutien d’EDF R&D, je remercie en particulier le département THEMIS avec qui j’ai eu la chance d’interagir. Je tiens à remercier les coordinateurs Benjamin Goursaud et Jean-Pierre Ducreux, prêts à dialoguer et à mettre en application des outils mathématiques, et l’ensemble des chercheurs, en particulier Karim Beddek, Olivier Boîteau, Olivier Moreau, Nicolas Gerald et Thierry Fouquet, pour nos échanges fructueux et leur aide.

Pour la rigueur et la patience avec lesquelles ils ont lu et évalué ce travail : merci aux rapporteurs, Alberto Valli et Martin Vohralik, et aux examinateurs, Patrick Ciarlet et Zhuoxiang Ren.

Merci à toute l’équipe ANEDP du laboratoire Paul Painlevé pour l’échange très enrichissant à travers séminaires et initiatives scientifiques tout au long de ma thèse.

Je remercie Caterina Calgaro qui en première m’a guidé pendant l’aventure de mon Erasmus et durant mon stage de master II, en me faisant découvrir l’enthousiasme de la recherche et de la transmission du savoir.

Il y a beaucoup de personnes qui m’ont permis d’arriver là où j’en suis aujourd’hui (et plus loin encore !) : si je devais individuellement vous remercier, je devrais écrire un manuscrit plus long que cette thèse... donc simplement :

Un grazie :

Aux collègues du L2EP et aux collègues de maths, toujours souriants et prêts à donner un coup de main !

Aux amis de Lille, pour les sorties à Lille et ailleurs et pour les beaux moments d’insouciance (oui c’est toujours possible !)

Agli amici di Jesi, è sempre bello tornare in patria grazie a voi !

Comme plusieurs d’entre vous appartiennent à plusieurs catégories (ci-dessus), je mettrais une liste - non exhaustive - des personnes qui ont été et sont encore précieuses pour moi : ...Ali, Antoine, Billel, Clément, Ehdi, Guillaume, Jalal, Ke, Kevin, Julien, Laure, Laurent, Loïc, Ludo, Mélanie, Mircea, Olivier, Oriol, Quang, Radu, Smail, Thomas, Zifu, Zuqi, ... et bien entendu aussi : Anto, Émilie, Barnabé, Andrea, Gaia, Min, Ivo, Oghuzan, Sara, Amandine, Cecile, Charley, Léa, Laura, Manon, Guillaume, Ola, Fatma, Valentine, Ale, Betta, Boccia, Cecchi, Cofanella, Ele, Lilla, Marti, Simo, Stefi, ...
...ehm, je ne l’ai pas du tout oublié « la mia famiglia » ! toujours toujours présente, grazie Luigina, Ermanno et mon cher frère Filippo !

[...]

Dura è la mia lotta e torno
con gli occhi stanchi,
a volte, d'aver visto
la terra che non cambia,
ma entrando il tuo sorriso
sale al cielo cercandomi
ed apre per me tutte
le porte della vita.

[...]

Neruda

Résumé

La thèse porte sur le développement d'estimateurs d'erreur a posteriori pour la résolution numérique par éléments finis de problèmes en électromagnétisme basse fréquence. On s'intéresse aux formulations en potentiels $\mathbf{A} - \varphi$ et $\mathbf{T} - \Omega$ des équations de Maxwell en régime quasi-stationnaire, pour le cas harmonique ou temporel. L'enjeu consiste à développer des outils numériques mathématiquement robustes, exploitables dans un code de calcul industriel (à savoir Code_Carmel3D - Code Avancé en Modélisation Electromagnétique), permettant d'estimer l'erreur de discrétisation spatio-temporelle et de pouvoir ainsi améliorer la précision des calculs.

D'un point de vue mathématique, la fiabilité et l'efficacité sont les idées clefs qui motivent la construction d'un estimateur d'erreur η optimal. Dans un contexte uniquement spatial, par exemple, elles sont définies comme suit.

[Fiabilité globale] L'estimateur η donne une borne supérieure de l'erreur ϵ sur l'ensemble de domaine de calcul du type

$$\epsilon \leq c\eta,$$

où l'erreur est mesurée dans la norme énergétique et c est une constante indépendante de la taille du maillage. Cela assure le contrôle de l'erreur par l'estimateur.

[Efficacité locale] Localement l'estimateur η fournit une borne inférieure de l'erreur ϵ du type

$$\eta_K \leq c\epsilon_{patch(K)},$$

où K désigne un élément du maillage, $patch(K)$ est l'ensemble constitué de mailles voisines de K et c est une constante indépendante de la taille du maillage. Cela permet de repérer les zones du maillage pour lesquelles l'erreur est la plus importante, et de mettre ainsi en œuvre des stratégies de raffinement adaptatif.

Dans une première partie, on décrit le modèle considéré et les outils mathématiques utilisés tout au long de la thèse. A partir des équations de Maxwell en régime quasi-statique, on établit les deux formulations en potentiels $\mathbf{A} - \varphi$ et $\mathbf{T} - \Omega$. Afin de mener une analyse dans le cadre d'une discrétisation de type Eléments Finis, on présente les espaces fonctionnels continus, les hypothèses sur le maillage, les espaces fonctionnels discrets et les résultats d'analyse fonctionnelle indispensables.

Dans une deuxième partie on traite du problème magnétodynamique. On construit un estimateur spatial de type équilibré afin d'estimer les erreurs dues à la discrétisation par éléments finis des deux formulations. Sa construction réside dans la non-vérification des lois de comportement, au niveau discret, des champs issus de deux formulations en potentiels. On prouve la fiabilité et l'efficacité de l'estimateur. On construit ensuite un second estimateur de type équilibré, basé sur une technique de reconstruction des flux, qui estime uniquement l'erreur associée à la discrétisation de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$. Son équivalence globale avec l'erreur est ensuite montrée. On valide enfin les résultats théoriques à l'aide d'un benchmark numérique basé sur un cas test analytique *ad hoc*.

Dans une troisième partie on traite du problème magnétodynamique temporel $\mathbf{A} - \varphi$. On construit alors un estimateur spatio-temporel de type résiduel. On établit sa fiabilité et son efficacité temporelle et spatiale pour, ensuite, obtenir un résultat global au niveau spatio-temporel. On valide enfin les résultats théoriques à l'aide d'un benchmark numérique basé sur un cas test analytique *ad hoc*.

La quatrième et dernière partie du travail est consacrée à l'application des trois estimateurs développés dans Code_Carmel3D. Dans le but de mettre en place des algorithmes de re-maillage adaptatif en espace-temps, on analyse le comportement des estimateurs pour des cas tests physiques à industriels. Concernant le problème magnétoharmonique, les résultats obtenus sont comparés à ceux donnés par d'autres estimateurs utilisés dans Code_Carmel3D.

Mots-clés : estimateurs d'erreur a posteriori en espace et en temps, méthode des éléments finis, équations de Maxwell, formulations en potentiels, électromagnétisme en basse fréquence.

A posteriori error estimators for the temporal and potential Maxwell's equations

Abstract

This thesis focus on the developement of *a posteriori* error estimators for the finite element numerical resolution of low frequency electromagnetic problems. We are interested in two potential formulations of the Maxwell's equations in the quasi-static approximation, known as $\mathbf{A} - \varphi$ and $\mathbf{T} - \Omega$ formulations, for both harmonic and temporal regimes. The challenge consists in developing numerical tools mathematically robust, usable in an industrial code (specifically Code_Carmel3D - Code Avancé en Modélisation Electromagnétique) and allowing the estimation of the spatio-temporal error discretisation and the improvement of the quality of the computation.

The reliability and efficiency properties are the mathematical key ingredients for an optimal error estimator. For a spatial problem they are defined as follows.

[Reliability] The error estimator η provides an upper bound for the error ϵ in the whole domain, that is

$$\epsilon \leq c\eta,$$

where the error is measured in the energy norm and c represents a constant independent of the mesh size. This property ensures the error control by the estimator.

[Local efficiency] The error estimator η provides, locally, a lower bound for the error ϵ , that is

$$\eta_K \leq c\epsilon_{patch(K)},$$

where K represents a mesh element, $patch(K)$ the set of mesh elements surrounding K and c a constant independent of the mesh size. This property allows to detect the zones where the error is the highest, and where an adaptive remeshing process has to be performed.

In the first chapter, the physical model and the mathematical tools used throughout the thesis are described. Then $\mathbf{A} - \varphi$ and $\mathbf{T} - \Omega$ formulations are stated. They correspond to a recast by potentials of the Maxwell's equations in the quasi-static approximation. In order to carry out an analysis in the finite element framework, we present some continuous functional spaces, the assumptions needed on the mesh, some discret functional spaces and some essential functional analysis results.

The second chapter deals with the harmonic magnetodynamic problem. A spatial equilibrated error estimator is built up, which estimates the finite element error due to the discretisation of both potential formulations. Its construction is based on the non-verification of the constitutive relationships for the numerical fields arising from the two potential formulations. Then the reliability and efficiency properties are proved. Afterwards, another estimator is built up for estimating exclusively the $\mathbf{A} - \varphi$ error discretisation. It is based on a flux reconstruction technique and its global equivalence with the error is shown. Finally, a validation of the theoretical results is made through an analytical benchmark test.

The third chapter deals with the temporal magnetodynamic problem modeled by the $\mathbf{A} - \varphi$ formulation. A spatio-temporal residual error estimator is developed. The reliability and efficiency properties are proved for both spatial and temporal components of the estimator. A (spatio-temporal) global equivalence is finally proved. A validation of the theoretical results is made through an analytical benchmark test.

The fourth and last chapter is devoted to some applications and comparisons in Code_Carmel3D of the three estimators developed. Some physical and industrial benchmark tests are studied in order to make adaptive (space-time) refinement next. A comparison with other error estimators already developed in Code_Carmel3D for the magnetoharmonic case is finally performed.

Key-words : space-time a posteriori estimators, finite element method, Maxwell equations, potential formulation, low frequency electromagnetism.

TABLE DES MATIÈRES

Notations.....	xiii
Liste des figures	xvii
Liste des tableaux	xxi
Introduction générale	1
Chapitre 1. Modélisation et outils mathématiques	5
1.1. Modèle analytique.....	5
1.1.1. Équations de Maxwell.....	5
1.1.2. Lois de comportement.....	6
1.1.3. Conditions aux limites.....	6
1.1.4. Adimensionnement	8
1.2. Formulation en potentiels	9
1.2.1. Formulation en potentiels $\mathbf{A} - \varphi$	9
1.2.2. Formulation en potentiels $\mathbf{T} - \Omega$	11
1.3. Outils Mathématiques.....	12
1.3.1. Espaces fonctionnels continus.....	12
1.3.2. Maillage.....	13
1.3.3. Espaces fonctionnels discrets	15
1.3.4. Interpolants	17
1.3.5. Formules de Green	19
1.3.6. Fonctions bulles et inégalités inverses	20
Chapitre 2. Estimateurs équilibrés.....	21
2.1. Etat de l'art des estimateurs spatiaux	21
2.2. Formulations en potentiels en régime harmonique.....	24
2.2.1. Formulations variationnelles continues.....	25
2.2.2. Formulations variationnelles discrètes.....	27
2.2.3. Définition de l'erreur	28
2.3. Estimateur équilibré : construction globale.....	29

2.3.1.	Résultats auxiliaires	29
2.3.2.	Équivalence entre estimateur et erreur	37
2.4.	Estimateur équilibré : construction locale	42
2.4.1.	Technique des flux équilibrés	42
2.4.2.	Équivalence entre estimateur et erreur	45
2.5.	Validation numérique	54
2.5.1.	Estimateur construction globale	55
2.5.2.	Estimateur construction locale	59
Chapitre 3.	Estimateurs résiduels	63
3.1.	Estimateurs spatio-temporels en électromagnétisme	63
3.2.	Formulation en potentiel en régime temporel	66
3.2.1.	Semi-discrétisation en temps	68
3.2.2.	Discrétisation en espace-temps	73
3.2.3.	Définition de l'erreur et de l'estimateur	74
3.3.	Fiabilité	77
3.3.1.	Fiabilité temporelle	77
3.3.2.	Résultats auxiliaires pour la fiabilité spatiale	82
3.3.3.	Fiabilité spatiale	91
3.3.4.	Fiabilité totale	98
3.4.	Efficacité	100
3.4.1.	Efficacité temporelle	100
3.4.2.	Efficacité spatiale	101
3.4.3.	Efficacité totale	111
3.5.	Validation numérique	112
3.5.1.	Solution régulière	112
3.5.2.	Solution singulière	118
Chapitre 4.	Applications industrielles	121
4.1.	Régime harmonique	121
4.1.1.	Bobine entre deux plaques	122
4.1.2.	Team WorkShop 7	133
4.2.	Régime temporel	140
4.2.1.	Team WorkShop 7	141
4.2.2.	Machine asynchrone	145
Conclusion	152

Annexe A. Imposition d'une densité de courant complexe dans Code_Carmel3D

A-i

A.1. Principes pour le calcul des champs admissibles dans Code_Carmel3D A-i

A.2. Lancement de l'estimateur $\eta_{loc,flux}$ avec Code_Carmel3D A-iiiA.3. Lancement de l'estimateur $\eta_{glob,H_{sh}}$ avec Code_Carmel3D A-vii**Bibliographie i**

NOTATIONS

Dans ce texte on utilise les conventions suivantes.

Tout ce qui est en gras désigne un vecteur, par exemple :

- \mathbf{x} dénote le vecteur dans \mathbb{R}^3 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$, où l'indice t désigne la transposition du vecteur ;
- \mathbf{F} représente un champ dans \mathbb{R}^3 , avec composantes $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)^t$.

Pour les espaces en trois dimensions on n'utilise pas la notation en gras, mais on explicite la dimension, comme par exemple $L^2(D)^3$.

Dans les Tables 0.1 à 0.3, on a regroupé les symboles les plus utilisés dans la thèse.

\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes
D	Domaine polyédral dans \mathbb{R}^3
D_c	Domaine conducteur dans \mathbb{R}^3
D_{nc}	Domaine non conducteur dans \mathbb{R}^3
ω_T	Réunion des éléments partageant une face commune avec le tétraèdre T
ω_F	Réunion des éléments partageant la face F
$\omega_{\mathbf{x}}$	Réunion des éléments partageant le nœud \mathbf{x}
Γ_c	Bord du domaine conducteur
$\mathbb{P}_k(D), k \leq 0$	Espace des polynômes définis dans D
$\mathcal{D}(D)$	Espace des fonctions scalaires infiniment différentiables à support compact inclus dans D
$\mathcal{D}(D)'$	Espace dual de $\mathcal{D}(D)$
$L^2(D)$	Espace des fonctions de carré intégrable sur D
$H^1(D)$	Espace de Sobolev des fonctions dont la dérivée première appartient à $L^2(D)$
$\widetilde{H}^1(D)$	Espace de Sobolev des fonctions $H^1(D)$ satisfaisant la jauge de moyenne nulle
$H_0^1(D)$	Espace de Sobolev des fonctions $H^1(D)$ satisfaisant une condition au bord de type Dirichlet homogène
$H(\text{rot}, D)$	Espace des fonctions dont le rotationnel appartient à $L^2(D)^3$
$H_0(\text{rot}, D)$	Espace des fonctions $H(\text{rot}, D)$ satisfaisant une condition au bord de type Dirichlet homogène sur la composante tangentielle
$\widetilde{H}_0(\text{rot}, D)$	Espace des fonctions $H_0(\text{rot}, D)$ satisfaisant la jauge de Coulomb
$H(\text{div}, D)$	Espace des fonctions de $L^2(D)$ dont la divergence appartient à $L^2(D)$
$H_0(\text{div}, D)$	Espace des fonctions $H(\text{div}, D)$ satisfaisant une condition au bord de type Dirichlet homogène sur la composante normale
h	Taille du maillage
\mathcal{T}_h	Maillage et ensemble des tétraèdres
\mathcal{N}_h	Ensemble des nœuds
$\mathcal{N}_h^{\text{int}}$	Ensemble des nœuds internes
\mathcal{E}_h	Ensemble des arêtes
$\mathcal{E}_h^{\text{int}}$	Ensemble des arêtes internes
\mathcal{F}_h	Ensemble des faces
$\mathcal{F}_h^{\text{int}}$	Ensemble des faces internes
\mathbf{n}_F	Normale unitaire à la face F
\mathbf{n}_T	Normale unitaire sortante au tétraèdre T
$\Theta_h(D)$	Espace EF conformes $\mathbb{P}_1(D)$ par morceaux
$\widetilde{\Theta}_h(D)$	Espace des fonctions $\Theta_h(D)$ satisfaisant la jauge de moyenne nulle
$\mathcal{ND}_1(D, \mathcal{T}_h)$	Espace des EF d'arête d'ordre 1
$X_h(D)$	Espace des fonction $\mathcal{ND}_1(D, \mathcal{T}_h)$ satisfaisant une condition au bord de type Dirichlet homogène sur la composante tangentielle
$\widetilde{X}_h(D)$	Espace des fonctions $X_h(D)$ satisfaisant une condition de jauge de Coulomb discrète
$\Theta_h^0(D)$	Espace EF conformes $\mathbb{P}_1(D)$ par morceaux satisfaisant une condition au bord de type Dirichlet homogène
$\mathcal{RT}_l(D, \mathcal{T}_h), l = 0, 1$	Espace des EF de face d'ordre l
$\mathcal{I}_{\text{Cl}, D}$	Interpolé de Clément scalaire
$\mathcal{P}_{\text{Cl}, D}^0$	Interpolé de Clément vectoriel
$\mathcal{I}_{\mathcal{ND}}$	Interpolé de Nédélec

TABLE 0.1. Liste des ensembles utilisés.

$\mathbf{H}(t, \mathbf{x})$	Champ magnétique
\mathbf{B}	Induction magnétique
\mathbf{H}_s	Terme source magnétique
\mathbf{E}	Champ électrique
\mathbf{D}	Induction électrique
\mathbf{J}_{ind}	Densité de courant induit
$\mathbf{J}_s(t, \mathbf{x})$	Terme source électrique
\mathbf{A}, φ	Potentiels de la formulation magnétodynamique $\mathbf{A} - \varphi$
\mathbf{T}, Ω	Potentiels de la formulation magnétodynamique $\mathbf{T} - \Omega$
\mathbf{A}_h	Approximation EF de \mathbf{A}
φ_h	Approximation EF de φ
\mathbf{T}_h	Approximation EF de \mathbf{T}
Ω_h	Approximation EF de Ω
$\widetilde{\mathbf{A}}$	Solution d'un problème magnétostatique alternatif
$\widetilde{\mathbf{A}}_h$	Solution EF du problème magnétostatique alternatif
\mathbf{E}^m	Erreur spatiale au temps t_m

TABLE 0.2. Liste de champs utilisés.

supp	Support d'une fonction
ω	Pulsation
j	Unité imaginaire
f	Fréquence
σ	Conductivité électrique
μ	Perméabilité magnétique
\mathbf{n}_F	Normale unitaire à la face F
\mathbf{n}_T	Normale unitaire sortante au tétraèdre T
\cdot	Produit scalaire
\times	Produit vectoriel
div	Opérateur de divergence
rot	Opérateur rotationnel
∂_t	Dérivée partielle par rapport la variable t
(\cdot, \cdot)	Produit scalaire de $L^2(D)$
$a \sim b$	Il existe des constantes positives c_1, c_2 indépendantes de a et b telles que $c_1 b \leq a \leq c_2 b$
$a \lesssim b$	Il existe une constante positive c indépendante de a et b telle que $a \leq c b$

TABLE 0.3. Liste de symboles utilisés.

LISTE DES FIGURES

0.1	<i>Patch</i> ω_K de l'élément K	2
1.1	Exemple d'un domaine pour des conditions homogènes.....	7
1.2	Exemples de <i>patch</i> en 2D. (a) : <i>patch</i> ω_F associé à un arête F . (b) : <i>patch</i> ω_T associé à un triangle T . (c) : <i>patch</i> $\omega_{\mathbf{x}}$ associé à un nœud \mathbf{x}	15
2.1	Une configuration possible du domaine d'étude, où $\text{supp } \mathbf{J}_s \cap D_c = \emptyset$	25
2.2	Configuration et maillage régulier des domaines D , D_c et D_J	54
2.3	Convergence de l'erreur exacte e et de l'estimateur équilibré η par rapport aux degrés de liberté $DoF = 548, 6172, 55880, 491043, 3996584$	56
2.4	Evolution des indices d'efficacité E_I par rapport aux degrés de liberté $DoF = 548, 6172, 55880, 491043, 3996584$	57
2.5	Evolution de $(E_I)_{min}$ par rapport aux degrés de liberté $DoF = 548, 6172, 55880, 491043, 3996584$	57
2.6	Cartes d'erreur et d'estimateur selon le plan $z = 0$	59
2.7	Convergence de l'erreur exacte pour la formulation $\mathbf{A} - \varphi$, de l'estimateur équilibré $\eta_{loc,flux}$ et de l'estimateur résiduel $\mathbf{A} - \varphi$, $\eta_{rés,A\varphi}$, par rapport aux degrés de liberté en $\mathbf{A} - \varphi$, $DoF = 6172, 52829, 437081, 3555697$	60
2.8	Evolution des indices d'efficacité $E_{I,flux}$ et $E_{I,rés}$ par rapport aux degrés de liberté $DoF = 6172, 52829, 437081, 3555697$	60
2.9	Cartes de l'erreur $\mathbf{A} - \varphi$, $e_{A\varphi}$ (a), de l'estimateur équilibré $\eta_{loc,flux}$ (b) et de l'estimateur résiduel $\eta_{rés,A\varphi}$ (c) selon le plan $z = 0$	61
2.10	Distributions locales : $e_{A,\varphi,T}$, et $\eta_{loc,flux,T}$ en fonction de chaque élément du maillage T (a) et estimateur résiduel $\eta_{rés,A\varphi,T}$ calculé sur chaque élément du maillage T en fonction des éléments du maillage mêmes (b).	62
3.1	Domaine de configuration avec $\text{supp } \mathbf{J}_s \subset D_c$	66
3.2	Le maillage $\tilde{\mathcal{T}}_{hm}$ à gauche en bleu satisfait l'assertion sur le maillage au début de la section 3.4.2 car pour tout $T \in \mathcal{T}_{hm}$ ou $T \in \mathcal{T}_{hm-1}$ on a $T = \bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_{hm}} \tilde{T}$. Par contre $\tilde{\mathcal{T}}_{hm}$ à droite en bleu ne satisfait pas l'assertion car, par exemple, $T_1 \in \mathcal{T}_{hm}$ n'est l'union d'aucun élément de $\tilde{\mathcal{T}}_{hm}$, même si $T_1 \subset \tilde{T}_1$	102
3.3	Configuration et maillage des domaines D et D_c	113
3.4	Convergence de l'erreur $e(t_N)$ (Figures (3.4a), (3.4c), (3.4e)), et des indices d'efficacité (Figures (3.4b), (3.4d), (3.4f)).	115

3.5	eff_h par rapport à h	116
3.6	Efficacité locale de l'estimateur pour quatre maillages. A gauche : distribution de l'erreur. A droite : distribution de l'estimateur. Du haut vers le bas : maillages de plus en plus fins.	117
3.7	η^N en fonction de h pour le cas test d'une solution singulière.....	118
3.8	Distribution de l'estimateur avec une solution singulière. Section $z = -1$	119
3.9	Distribution de l'estimateur avec une solution singulière. Section $z = -0.5$	119
3.10	Distribution de l'estimateur avec une solution singulière. Section $z = 0$	119
3.11	Distribution de l'estimateur avec une solution singulière. Section $z = 0.5$	120
3.12	Distribution de l'estimateur avec une solution singulière. Section $z = 1$	120
4.1	Modèle d'une bobine entre deux plaques. Exemple du maillage avec 286272 éléments. (a) : section du modèle complet. (b) : maillage de la plaque du dessus, raffinée de façon homogène. (c) : maillage de la plaque du dessous, raffinée de façon homogène.	122
4.2	Pour les quatre maillages étudiés et les formulations $\mathbf{A} - \varphi$ et $\mathbf{T} - \Omega$, calcul des pertes Joule (a) et de l'énergie magnétique (b).....	124
4.3	Convergence des estimateurs lorsque l'on raffine de façon homogène. Maillages avec nombre d'éléments : 4473, 35784, 286272, 2290176.	125
4.4	Modèle d'une bobine entre deux plaques. Exemple du maillage avec 195347 éléments, utilisé pour l'étude qualitative du paragraphe II). (a) : section du modèle complet. (b) : maillage de la plaque du dessus (3000 éléments), raffinée de façon homogène. (c) : maillage de la plaque du dessous (12000 éléments), raffinée un peu plus finement sur le coin de gauche.....	126
4.5	Cartes des estimateurs dans le domaine tout entier (colonne de gauche) et dans la bobine et les deux plaques conductrices (colonne de droite) pour le maillage avec 195347 éléments.	127
4.6	Plaque située au dessus de la bobine. (a)-(b) : courants induits calculés par les deux formulations. (c)-(f) : cartes d'erreurs des quatre estimateurs.	128
4.7	Plaque située au dessous de la bobine. (a)-(b) : courants induits calculés par les deux formulations. (c)-(f) : cartes des quatre estimateurs.	129
4.8	Maillage pour la plaque située en dessous de la bobine lorsqu'on introduit une rainure de section carrée au milieu.	130
4.9	Cartes des estimateurs dans le cas test du maillage avec 195347 éléments et avec un défaut dans la plaque au dessous de la bobine. Dans la colonne de gauche : cartes dans le domaine entier. Colonne de droite : cartes dans la bobine et les deux plaques conductrices.....	131
4.10	Plaque avec défaut située au dessous de la bobine. (a)-(b) : courants induits calculés par les deux formulations. (c)-(f) : cartes des quatre estimateurs.	132
4.11	Configuration de la structure du Team Workshop 7. Maillage avec 50438 éléments.	133

4.12	Pour les quatre maillages étudiés, calcul des pertes Joule (a) et de l'énergie magnétique (b).....	135
4.13	Convergence des estimateurs lorsque l'on raffine de façon homogène. Maillages avec nombre d'éléments : 12183, 25853, 50438, 295628.	136
4.14	Cartes des estimateurs dans la bobine et les deux plaques conductrices pour le maillage avec 50438 éléments.	137
4.15	Estimateur d'erreur équilibré $\eta_{glob,H_{sh}}$ par rapport aux degrés de liberté (5692, 17592, 58746, 185497, 568267, 1808872) pour un raffinement des 10% des éléments où l'estimateur est le plus élevé.	138
4.16	Distributions de l'estimateur $\eta_{glob,H_{sh}}$ pour trois remaillages consécutifs.....	139
4.17	(a) : Convergences log-log de l'estimateur $\eta_{glob,H_{sh}}$ par rapport les degrés de liberté lorsque l'on raffine le maillage de la plaque en suivant les pourcentages 2%, 5%, 10%, 100%. (b) Maillage adapté lorsque l'on raffine la plaque cinq fois pour les 5% d'éléments dans lesquels l'erreur est la plus importante.....	140
4.18	Simulation avec une densité de courant constante, $i = 1$ A, et temps final $T = 0.02$ s. Evolution en fonction du temps t_n , $n \in \{1, \dots, N\}$, des estimateurs spatial $\eta_h^{1,\dots,n}$ et temporel $\eta_\tau^{1,\dots,n}$. (a) : $\eta_h^{1,\dots,n}$, défini en (4.2.1), calculé avec le pas de temps fixé Δt_2 et deux maillages différents M_1 et M_2 . (b) : $\eta_\tau^{1,\dots,n}$, défini en (4.2.2), calculé avec le maillage M_2 et deux pas de temps différents $\Delta t_1 = 0.1$ ms et $\Delta t_2 = 0.025$ ms.	142
4.19	Intensité de courant de forme rectangulaire périodique avec $T=5$ ms.....	143
4.20	Chaque graphe représente l'évolution par rapport au temps t_n , $n \in \{1, \dots, N\}$, de l'estimateur global cumulé en temps et de chaque contribution de l'estimateur (définitions à la page 76). Calcul avec un pas de temps homogène Δt_1 et le maillage M_1 . (a) : η^n , (b) : η_τ^n , (c) : $\eta_{J;2}^n$, (d) : $\eta_{D;1}^n$, (e) : $\eta_{J;1}^n$, (f) : $\eta_{J;3}^n$	144
4.21	Distribution de l'estimateur spatial η_h^n avec $t_n = 2.5$ ms (a) et η_h^{n+5} avec $t_{n+5} = 3$ ms (b).....	145
4.22	Configuration et maillage des composantes les plus significatives de la machine asynchrone avec un maillage de 266326 éléments. Rotor et stator en gris, enroulements du stator (inducteurs) en jaune et les barres du rotor et l'anneau de court-circuit en marron.	146
4.23	Courants induits dans les barres du rotor et l'anneau de court-circuit.	146
4.24	Induction magnétique dans tout le domaine à l'instant final $T = 0.4$ s	147
4.25	Distribution de l'estimateur résiduel spatial η_h^N à l'instant final de la simulation. .	148
4.26	(a) : évolution de l'estimateur temporel η_τ^n en fonction de chaque instant temporel t_n , $n \in \{1, \dots, N\}$, (b) : zoom par rapport à l'axe vertical du graphe en (a).....	149
4.27	Chaque graphe représente l'évolution par rapport au temps t_n , $n \in \{1, \dots, N\}$, de chaque contribution de l'estimateur spatial. Pas de temps homogène $\Delta t = 3$ ms et maillage fixé avec 266326 éléments. (a) : η^n , (b) : $\eta_{J;2}^n$, (c) : $\eta_{J;1}^n$, (d) : $\eta_{D;1}^n$, (f) : $\eta_{J;3}^n$	150

- A.1 Structure utilisée dans Code_Carmel3D pour obtenir l'estimateur équilibré $\eta_{loc,flux}$.
A-iv
- A.2 Cas test Team Workshop 7 : simulation avec 50438 éléments du maillage effectuée à la section 4.1.2. Visualisation des densités courants dans la plaque conductrice. (a) $\mathbf{j}_h \in \mathcal{RT}_1(\mathcal{T}_h)$ (à divergence nulle globale) à partir des flux issus de la solution numérique $(\mathbf{A}_h, \varphi_h)$. (b) $\text{rot } \mathbf{H}_{s,r\acute{e}el}$, calculé à partir de $\widehat{\Pi_h \mathbf{j}_h}$ A-v
- A.3 Conversion du domaine conducteur du Team Workshop 7 en deux domaines : un domaine non-conducteur et un domaine de type inducteur (interface graphique de [SALOME, www.salome-platform.org]). (a) domaine conducteur du fichier *team7.med*, nommé COND_plaque, (b) domaines non-conducteur et inducteur du fichier *team7_omega.med*, nommés respectivement DIEL_plaque et CURRENT_plaque.
A-v
- A.4 Suite des exécutable à lancer avant le calcul final de l'estimateur d'erreur. (a) : suite des commandes pour lancer un calcul avec la formulation en $\mathbf{A} - \varphi$. (b) : suite des commandes afin d'obtenir toutes les données nécessaires pour calculer \mathbf{k}_h A-vi
- A.5 Suite des calculs afin d'obtenir $\eta_{loc,flux}$: (a) lancement de l'exécutable du posttraitement avec les commandes pour l'estimateur $\eta_{loc,flux}$ (*in.postprocess_flux*) ; (b) composition du fichier *in.postprocess_flux* : liste des fichiers à spécifier ; (c) composition du fichier *team7_est.cmd* : mot clé associé à l'estimateur $\eta_{loc,flux}$ (*EQFLUX*) et fichiers à spécifier. A-vii
- A.6 Suite des calculs afin d'obtenir $\eta_{glob,H_{sh}}$ une fois que l'on a effectué une simulation en $\mathbf{A} - \varphi$: (a) lancement de la formulation en $\mathbf{T} - \Omega$ et ensuite de l'exécutable du posttraitement avec les commandes pour l'estimateur $\eta_{glob,H_{sh}}$ (*in.postprocess_dual*) ; (b) composition du fichier *in.postprocess_dual* : liste des fichiers à spécifier ; (c) composition du fichier *team7_dual.cmd* : mot clé associé à l'estimateur $\eta_{glob,H_{sh}}$ (*EQDUAL*) et fichiers à spécifier. A-viii

LISTE DES TABLEAUX

0.1	Liste des ensembles utilisés.	xiv
0.2	Liste de champs utilisés.	xv
0.3	Liste de symboles utilisés.	xv
3.1	Paramètres correspondant aux trois tests effectués.	113
4.1	Récapitulatif des quatre estimateurs étudiés en magnéto-harmonique.	122
4.2	Paramètres pour les deux tests effectués.	141

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Cadre général de la thèse

Pour de nombreuses applications, la résolution numérique des équations de Maxwell est une nécessité car leur résolution analytique est trop complexe, et en tous cas difficilement exploitable en pratique. La Méthode des Eléments Finis (FEM) est une des méthodes d'approximation la plus utilisée en électromagnétisme [Monk, 2003; Bossavit, 1998, 1993]. Récemment, beaucoup d'efforts ont été déployés pour améliorer la solution numérique et réduire les temps de calcul. Deux techniques sont souvent utilisées : l'adaptation du maillage (*h-raffinement*) ou l'augmentation locale de l'ordre des éléments finis utilisés (*p-raffinement*). On peut bien sûr combiner les deux (*hp-raffinement*) [Bürg, 2013]. Si le problème est instationnaire, une adaptation du pas de temps doit également être envisagée. Il est donc important d'estimer l'erreur que l'on commet en discrétisant en espace et éventuellement en temps ces équations. Ne disposant pas, bien entendu, de la solution *exacte* du problème, on a recours à des outils numériques appelés estimateurs d'erreur *a posteriori*, qui consistent le sujet de cette thèse.

L'estimation *a posteriori* peut être vue en opposition à l'estimation *a priori*, qui vise à démontrer la convergence de l'erreur vers zéro et s'appuie souvent sur des hypothèses restrictives sur la régularité des solutions, rarement vérifiées dans les cas physiques. *A contrario*, les hypothèses de l'analyse *a posteriori* se limitent la plupart du temps à celles demandées par la formulation faible pour que celle-ci soit bien posée. Cela permet de traiter des cas plus proches du réel et s'avère donc très utile pour les applications en électromagnétisme où, par exemple, on trouve souvent des géométries non-standard possédant des singularités. L'estimateur *a posteriori* est alors construit en *post-traitement* et basé uniquement sur la solution numérique et les données du problème. Il a comme objectif de donner une indication calculable de la distribution de l'erreur d'approximation.

Dans ce travail, nous nous focaliserons sur les estimateurs d'erreur *a posteriori* pour le *h-raffinement* et, le cas échéant, pour l'adaptation du pas de temps.

Concernant le *h-raffinement*, les estimateurs permettent de localiser les régions du maillage où il faut raffiner (voir la propriété d'*efficacité locale* 2. ci-dessous), et aussi de déterminer un compromis entre les régions raffinées et celles non raffinées afin d'obtenir une précision optimale (voir la propriété de fiabilité 1. ci-dessous). Sur ce sujet, plusieurs monographies sont disponibles depuis les années 1990 [Babuška et al., 2011; Neittaanmäki et Repin, 2004; Monk, 2003; Babuška et Strouboulis, 2001; Ainsworth et Oden, 2000; Verfürth, 1996]. Dans un premier temps, nous nous focaliserons sur les estimateurs spatiaux : pour un aperçu on renvoie à la section 2.1 de cette thèse.

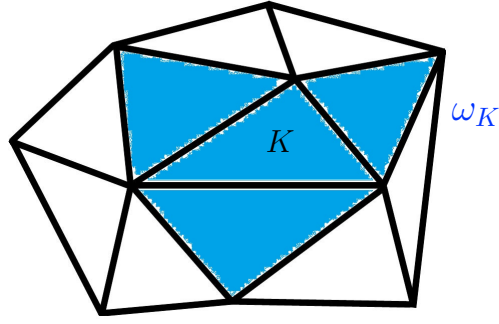


FIGURE 0.1. Patch ω_K de l'élément K .

D'autres travaux abordent l'estimation de l'erreur temporelle seule, ou l'estimation de l'erreur spatio-temporelle, à titre d'exemple voir :

- * [Akrivis et. al., 2006; Johnson et. al., 1990] pour l'estimation de l'erreur temporelle seulement (problèmes paraboliques linéaires pour des discrétisations en temps respectivement par les méthodes des Cranck-Nicolson/Cranck-Nicolson-Galerkin et d'Euler Implicite),
- * [Nochetto et. al., 2000a,b; Eriksson et. al., 1998; Eriksson et Johnson, 1995, 1991] pour l'estimation de l'erreur spatio-temporelle.

En particulier, la série d'articles [Eriksson et Johnson, 1991, 1995; Eriksson et. al., 1998], qui traitent l'estimation d'erreur *a posteriori* des problèmes paraboliques linéaires et non-linéaires discrétisés en espace par des Eléments Finis (EF) et en temps par la méthode de Galerkin discontinue, montrent comment les estimateurs d'erreur *a posteriori* inspirent la conception d'algorithmes de raffinement spatio-temporel. Ce sera le but ultime des travaux qui nous intéresseront dans un deuxième temps, quand nous nous focaliserons sur les estimateurs spatio-temporels. Comme on le verra, l'étude des estimateurs d'erreur pour un problème parabolique s'appuie souvent sur l'étude du problème elliptique correspondant. A titre d'exemple un estimateur *résiduel* pour un problème de convection-diffusion stationnaire est proposé dans [Verfürth, 2005b] et pour le problème instationnaire correspondant dans [Verfürth, 2005a]. On donnera un aperçu sur les estimateurs *a posteriori* spatio-temporels dans la section 3.1.

La *fiabilité* et l'*efficacité* [Ainsworth et Oden, 2000] sont les idées clefs qui motivent la construction d'un estimateur d'erreur η optimal. Dans un contexte uniquement spatial on peut les formuler comme suit, et on verra dans la section 3.1 qu'elles s'étendent de façon naturelle dans un contexte spatio-temporel.

1. *Fiabilité globale* : l'estimateur η donne une borne supérieure de l'erreur ϵ sur l'ensemble de domaine de calcul \mathcal{D} du type

$$\|\epsilon\|_{\mathcal{D}} \leq c^* \eta,$$

où l'erreur est mesurée dans une norme opportune $\|\cdot\|$ et c^* est une constante indépendante de la taille du maillage supposé régulier. Cela permet d'assurer que, si l'estimateur tend vers zéro en raffinant le maillage, alors l'erreur tendra aussi vers zéro (avec le même ordre de convergence).

2. *Efficacité locale* : localement l'estimateur η fournit une borne inférieure de l'erreur ϵ du type

$$\eta_K \leq c_{\star,K} \|\epsilon\|_{\omega_K}$$

où K dénote un élément du maillage, ω_K un *patch* constitué de mailles voisines de K (voir Figure 0.1) et $c_{\star,K}$ est une constante indépendante de la taille de K . Cela permet d'identifier les parties du domaine de calcul où l'erreur est la plus importante, afin de pouvoir piloter la stratégie de raffinement adaptatif du maillage.

Puisque l'efficacité globale ($\eta \leq c_{\star} \|\epsilon\|_{\mathcal{D}}$) découle de l'efficacité locale, les propriétés de fiabilité 1. et d'efficacité locale 2. assurent l'équivalence entre l'erreur et l'estimateur. De plus, comme la fiabilité globale n'est pas à elle seule suffisante pour garantir que l'estimateur ne surestime pas l'erreur, une propriété souhaitée est celle de l'*exactitude asymptotique* ; c'est-à-dire que, lorsque l'on raffine le maillage, l'indice d'efficacité, défini comme le rapport entre l'erreur et l'estimateur, tend vers 1.

Dans ce mémoire de thèse on construira des estimateurs satisfaisant (le plus possible) les propriétés ci-mentionnées. De plus, il est souhaitable que :

- * l'estimateur soit *robuste* (il reste performant même si les paramètres/coefficients du problème ont des ordres de grandeur très différents) ;
- * le *coût de calcul* de l'estimateur soit abordable (par exemple, *a minima* ne soit pas plus coûteux que la simulation elle-même).

Contexte scientifique et industriel

Cette thèse s'est déroulée au sein du Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance, au sein de l'équipe Outils et Méthodes Numériques, et du laboratoire Paul Painlevé dans l'équipe Analyse Numérique - Equations aux Dérivées Partielles. Elle s'inscrit dans le cadre d'une bourse CIFRE en collaboration avec EDF R&D. Son but consiste à développer des estimateurs *a posteriori* pour l'erreur commise lorsque l'on approche les équations de Maxwell par des éléments finis en espace et, si l'on est dans un régime temporel, par Euler Implicite en temps. Une fois défini analytiquement l'estimateur, on s'est intéressé à sa validation numérique et à sa performance pour des cas tests applicatifs. L'intérêt industriel réside dans l'utilisation des estimateurs dans Code_Carmel3D (Code Avancé en Modélisation Electromagnétique), développé par EDF R&D et le L2EP à travers le laboratoire commun, le LAMEL. Dans ce contexte, la mise en œuvre d'une stratégie de raffinement adaptatif dans Code_Carmel3D est le but ultime du développement de ces estimateurs.

Plan de la thèse

Cette thèse peut être vue comme la poursuite des travaux développés dans [Tang, 2012], qui ont proposé un estimateur de type équilibré pour les formulations en potentiels \mathbf{A} et Ω en *magnétostatique* et également développé des estimateurs d'erreur *a posteriori* du type résiduel pour les formulations en potentiels $\mathbf{A} - \varphi$ et $\mathbf{T} - \Omega$ en régime *harmonique*.

Dans le chapitre 1, on décrit le modèle considéré et les outils mathématiques utilisés tout au long de la thèse. A partir des équations de Maxwell en regime quasi-statique, on établit les deux formulations en potentiels $\mathbf{A} - \varphi$ et $\mathbf{T} - \Omega$. Afin de mener une analyse dans le

cadre d’une discrétisation de type EF, on présente les espaces fonctionnels continus, les hypothèses sur le maillage, les espaces fonctionnels discrets et les résultats d’analyse fonctionnelle indispensables.

Dans le chapitre 2, on traite du problème magnétoharmonique, dont on présente la discrétisation par EF. On construit alors un estimateur spatial de type équilibré afin d’estimer les erreurs dues à la discrétisation par EF des deux formulations. Sa construction réside dans la non-vérification des lois de comportement, au niveau discret, des champs issus de deux formulations en potentiels. On prouve la fiabilité et l’efficacité de l’estimateur. On construit ensuite un second estimateur de type équilibré, basé sur une technique de reconstruction des flux, qui estime uniquement l’erreur associée à la discrétisation de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$. On valide enfin les résultats théoriques à l’aide d’un benchmark numérique basé sur un cas test analytique *ad hoc*.

Dans le chapitre 3, on traite du problème magnétodynamique temporel $\mathbf{A} - \varphi$, dont la discrétisation en temps est effectuée par le schéma d’Euler Implicite et celle en espace par EF. On construit alors un estimateur spatio-temporel de type résiduel. On établit sa fiabilité et son efficacité temporelles et spatiales pour, ensuite, obtenir le résultat global au niveau spatio-temporel. On valide les résultats théoriques obtenus à l’aide d’un benchmark numérique basé sur un cas test analytique *ad hoc*.

La quatrième et dernière chapitre est consacrée à l’application des trois estimateurs développés dans Code_Carmel3D sur des exemples proches des applications de EDF. Dans le but de mettre en place des algorithmes de remaillage adaptatif, on analyse le comportement des estimateurs pour des cas tests physiques à industriels. Les résultats obtenus sont comparés à ceux donnés par d’autres estimateurs utilisés dans Code_Carmel3D.

Chapitre 1

MODÉLISATION ET OUTILS MATHÉMATIQUES

Ce chapitre est consacré à la présentation des différents modèles étudiés et à celle des outils mathématiques associés, dans le cadre de la magnétodynamique [Bossavit, 1993], [Rodriguez et Valli, 2010].

1.1. MODÈLE ANALYTIQUE

1.1.1. Équations de Maxwell

Dans la suite, T représentera un temps positif fixé et D un domaine polyhédral de \mathbb{R}^3 , supposé connexe et borné, de frontière Γ lipschitzienne et connexe.

Un champ magnétique peut être généré soit par des courants électriques, soit par la variation temporelle d'un champ électrique, d'où l'équation de Maxwell-Ampère dans le domaine $(0, T) \times D$:

$$\text{rot } \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) + \partial_t \mathbf{D}(t, \mathbf{x}),$$

où \mathbf{H} dénote le champ magnétique (en A/m), \mathbf{J} la densité de courant (en A/m^2) et \mathbf{D} l'induction électrique (en C/m^2).

Dans ce mémoire on s'intéresse au régime quasi-stationnaire qui conduit, dans le cadre des équations de Maxwell, au problème de la magnétodynamique. Celui-ci considère les équations de Maxwell dans un régime de basses fréquences. Pour une justification générale on peut se reporter à [Ammari et. al., 2000] ou, dans un cadre harmonique, à [Alonso, 1999] ainsi qu'à la section 2.3 de [Rodriguez et Valli, 2010]. Le terme représentant les courants de déplacement $\partial_t \mathbf{D}$ ne sera donc pas pris en compte, d'où la forme locale du théorème d'Ampère :

$$\text{rot } \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{J}(t, \mathbf{x}).$$

De cette équation découle immédiatement la conservation de la densité de courant :

$$\text{div } \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = 0. \tag{1.1.1}$$

Par ailleurs, la densité de courant se décompose en deux termes :

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{J}_s(t, \mathbf{x}) + \mathbf{J}_{ind}(t, \mathbf{x}),$$

où \mathbf{J}_s désigne le terme source et \mathbf{J}_{ind} la densité de courant induit.

L'équation de Maxwell-Faraday décrit comment la variation d'un champ magnétique induit, à son tour, un champ électrique :

$$\text{rot } \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\partial_t \mathbf{B}(t, \mathbf{x}), \quad (1.1.2)$$

où \mathbf{E} dénote le champ électrique (en V/m) et \mathbf{B} l'induction magnétique (en Tesla). Les divergences du champ électrique et de l'induction magnétique sont exprimées, respectivement, par les équations locales de Maxwell-Gauss et de la conservation du flux magnétique :

$$\text{div } \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \rho, \quad (1.1.3)$$

$$\text{div } \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (1.1.4)$$

où ρ correspond à la densité volumique de charge électrique (en C/m^3). Lorsque l'équation (1.1.4) est vérifiée par la condition initiale sur \mathbf{B} , de (1.1.2) on en déduit qu'elle sera satisfaite pour tout temps $t \in [0, T]$.

En conclusion, dans l'approximation des régimes quasi-statiques (ARQS), on adopte la limite magnétique galiléenne [Rapetti et Rousseaux, 2011] où les équations de Maxwell dans $(0, T) \times D$ sont données par le système suivant :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_{ind}, \quad (1.1.5)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (1.1.6)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (1.1.7)$$

Les variables temporelle et spatiales (t, \mathbf{x}) ont été omises de l'écriture des champs pour alléger la notation, ce qui sera également effectué dans la suite.

1.1.2. Lois de comportement

Les lois de comportement permettent de prendre en compte l'influence des milieux matériels sur les champs électriques et magnétiques. Dans la suite on effectue l'hypothèse selon laquelle ces lois ne dépendent que des champs (et non pas, par exemple, de la variation de température ou de contraintes mécanique).

Dans un milieu conducteur le courant et le champ électrique sont liés par la forme locale de la loi d'Ohm :

$$\mathbf{J}_{ind} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.1.8)$$

où σ , dénotant la conductivité électrique (en $\Omega^{-1}m^{-1}$), est strictement positive. Il est utile de remarquer que lorsque $\text{supp } \mathbf{J}_s \subset \text{supp } \mathbf{J}_{ind}$ le conducteur est dit massif.

En outre, en restreignant l'étude aux matériaux linéaires, les champs \mathbf{B} et \mathbf{H} sont liés par la relation :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.1.9)$$

où μ (en Hm^{-1}) représente la perméabilité magnétique.

1.1.3. Conditions aux limites

Pour que le problème soit complet il est nécessaire d'ajouter des conditions initiales et aux bords *ad hoc*, afin d'assurer l'unicité de la solution du système d'équations (1.1.5)-(1.1.9).

Concernant les conditions initiales, compte tenu des relations entre les champs, il suffit de connaître la condition initiale sur \mathbf{H} ou sur \mathbf{E} .

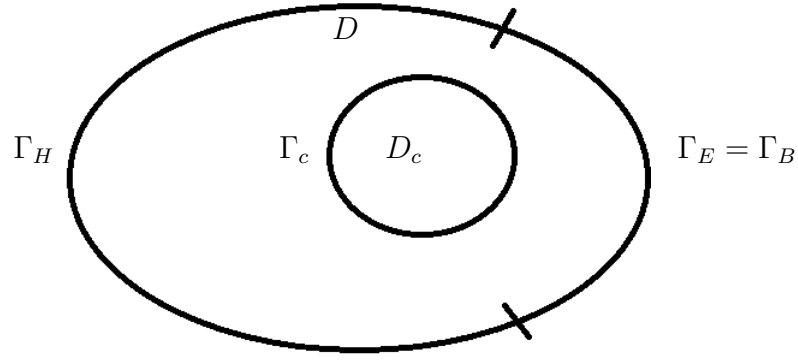


FIGURE 1.1. Exemple d'un domaine pour des conditions homogènes.

Concernant les conditions aux bords on utilisera souvent des conditions homogènes. Considérons que le domaine conducteur D_c est strictement inclus dans le domaine D , et notons sa frontière Γ_c . D_c sera supposé simplement connexe avec Γ_c lipschitzienne et connexe. On décompose la frontière Γ de D en deux parties Γ_H et Γ_E telles que Γ_H est connexe et Γ_E simplement connexe et

$$\Gamma = \overline{\Gamma_H} \cup \overline{\Gamma_E} \quad \text{et} \quad \Gamma_H \cap \Gamma_E = \emptyset,$$

comme indiqué sur la Figure 1.1. Selon le contexte, le vecteur \mathbf{n} dénotera la normale unitaire sortante du domaine D ou D_c .

On impose sur Γ_H que le champ magnétique \mathbf{H} sorte de manière normale au domaine

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_H, \quad (1.1.10)$$

et sur Γ_c la condition de continuité de \mathbf{H} tangentielle :

$$[\mathbf{H} \times \mathbf{n}] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c, \quad (1.1.11)$$

où $[\cdot]$ représente le saut à l'interface Γ_c . En prenant le saut normal à l'interface Γ_c de l'équation, cette dernière condition implique que

$$[(\mathbf{J}_{ind} + \mathbf{J}_s) \cdot \mathbf{n}] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c,$$

vue que $[\text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}] = [\text{div } (\mathbf{H} \times \mathbf{n})] = 0$. Comme on verra dans la suite, dans notre cas il est naturel de supposer que $\mathbf{J}_s \in H(\text{div}, D)$, ce qui donne $[\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n}] = 0$ sur Γ_c . De plus, puisque $\sigma = 0$ dans le domaine non conducteur, on a $[\mathbf{J}_{ind} \cdot \mathbf{n}] = \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ sur Γ_c , alors en conclusion

$$\mathbf{J}_{ind} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c. \quad (1.1.12)$$

De même, on impose sur Γ_E que le champ électrique \mathbf{E} sorte de manière normale au domaine :

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_E, \quad (1.1.13)$$

ce qui implique

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_E. \quad (1.1.14)$$

Puisque Γ_E représente aussi un bord où une condition aux limites sur \mathbf{B} doit être spécifiée, on définit $\Gamma_B = \Gamma_E$.

1.1.4. Adimensionnement

Appliquons un adimensionnement aux équations (1.1.5)-(1.1.9) afin d'analyser mathématiquement le système. Pour adimensionner les équations, on peut fixer les quatre grandeurs de référence suivantes :

- * le diamètre¹ du domaine L ;
- * une perméabilité magnétique de référence $\bar{\mu}$;
- * une conductivité de référence $\bar{\sigma}$;
- * une intensité de référence de l'induction magnétique \bar{B} .

A partir de ces quatre grandeurs de référence, il est possible de définir toutes les autres grandeurs nécessaires à l'étude :

- * un temps de référence $\bar{t} = \bar{\mu} \bar{\sigma} L^2$;
- * une intensité de référence du champ magnétique $\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\bar{\mu}}$;
- * une intensité de référence du courant $\bar{J} = \frac{\bar{H}}{L}$;
- * une intensité de référence du champ électrique $\bar{E} = \frac{\bar{J}}{\bar{\sigma}}$.

Ainsi nous obtenons les variables adimensionnées, caractérisées par l'indice a :

$$\mathbf{x}_a = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad t_a = \frac{t}{\bar{t}}, \quad \sigma_a = \frac{\sigma}{\bar{\sigma}}, \quad \mu_a = \frac{\mu}{\bar{\mu}}, \quad \mathbf{H}_a = \frac{\mathbf{H}}{\bar{H}}, \quad \mathbf{B}_a = \frac{\mathbf{B}}{\bar{B}}, \quad \mathbf{E}_a = \frac{\mathbf{E}}{\bar{E}}, \quad \mathbf{J}_a = \frac{\mathbf{J}}{\bar{J}}.$$

Ce changement de variables, appliqué aux équations (1.1.5)-(1.1.9), donne le système adimensionné dans $(0, T_a) \times D_a$ suivant :

$$\begin{cases} \text{rot}_a \mathbf{E}_a = -\partial_{t_a} \mathbf{B}_a, \\ \text{rot}_a \mathbf{H}_a = \mathbf{J}_a, \\ \text{div}_a \mathbf{B}_a = 0, \\ \mathbf{B}_a = \mu_a \mathbf{H}_a, \\ \mathbf{J}_a = \sigma_a \mathbf{E}_a, \end{cases}$$

où rot_a , ∂_{t_a} et div_a dénotent les opérateurs adimensionnés, liés aux opérateurs dimensionnés par la relation :

$$\text{rot}_a = L \text{rot}, \quad \partial_{t_a} = \bar{t} \partial_t, \quad \text{div}_a = L \text{div}.$$

Même si l'adimensionnement n'a pas mis en évidence de quantités caractéristiques particulières, d'un point de vue numérique il permet de travailler avec des variables d'un ordre de grandeur comparable.

1. Ici diamètre se réfère au diamètre de la plus petite sphère circonscrite au domaine.

Pour alléger la notation, nous omettrons dorénavant la lettre ‘ a ’ en indice des variables ou des opérateurs et nous nous concentrerons sur les équations de la magnétodynamique adimensionnées suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{ind}} + \mathbf{J}_s, \end{array} \right. \quad (1.1.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \end{array} \right. \quad (1.1.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{B} = 0, \end{array} \right. \quad (1.1.17)$$

avec les lois de comportement adimensionnées (1.1.8) et (1.1.9).

1.2. FORMULATION EN POTENTIELS

A partir des équations de Maxwell en régime quasi-statique, on peut écrire deux équations complémentaires en champ électrique et magnétique [Alonso Rodríguez et. al., 2003; Albanese et Rubinacci, 1990; Bossavit, 1985].

Si l’on considère seulement le domaine conducteur D_c , on montre que l’on obtient l’équation sur le champ électrique,

$$\partial_t \sigma \mathbf{E} + \text{rot } \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{E} = \text{rot } \sigma^{-1} \mathbf{J}_s \text{ dans } D_c,$$

ainsi que celle sur le champ magnétique :

$$\text{rot } \sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{H} + \mu \partial_t \mathbf{H} = -\partial_t \mathbf{J}_s \text{ dans } D_c.$$

Lorsque l’on veut décrire les champs en dehors du domaine conducteur, on constate des difficultés. Elles résident dans la transmission de la continuité des composantes tangentielles ou normales des champs aux interfaces ou dans les discontinuités de la perméabilité ou de la conductivité [Albanese et Rubinacci, 1990]. Une façon de les surmonter consiste à utiliser des formulations en potentiels capables d’assurer de manière naturelle les propriétés souhaitées aux interfaces. Les chapitres 5 et 6 de [Rodriguez et Valli, 2010] sont dédiés à une étude détaillée de ces formulations et montrent leurs pertinence d’un point de vue numérique par rapport aux méthodes s’appuyant sur les inconnues d’origine \mathbf{E} et \mathbf{H} . Elles évitent aussi des problèmes de stabilité pour des régimes à basse fréquence [Hiptmair et. al., 2008].

Nous présentons ces deux formulations en potentiels [Bíró et Preis, 1990; Meunier, 2008; Bíró, 1999; Albanese et Rubinacci, 1990] dans les deux prochaines sections.

Remarque 1.2.1. *Dans le cas de cette thèse, on adoptera l’hypothèse des conditions aux limites homogènes c’est-à-dire avec $\Gamma_H = \emptyset$. Dans un souci d’exhaustivité, dans les deux paragraphes suivants, on décrit les systèmes avec des conditions aux bords mixtes c’est-à-dire avec $\Gamma_H \neq \emptyset$.*

1.2.1. Formulation en potentiels $\mathbf{A} - \varphi$

Afin de résoudre le système (1.1.15)-(1.1.17) par une formulation électrique, l’idée est d’exprimer le champ \mathbf{E} en fonction de potentiels.

Puisque la divergence de \mathbf{B} est nulle (1.1.17) dans \mathbb{R}^3 , il existe un potentiel vecteur \mathbf{A} tel que

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \text{ dans } D. \quad (1.2.1)$$

Pour assurer l'unicité du vecteur \mathbf{A} , on impose la jauge de Coulomb :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \text{ dans } D. \quad (1.2.2)$$

De (1.1.16) et (1.2.1) on voit que

$$\operatorname{rot} (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) = 0 \text{ dans } D_c. \quad (1.2.3)$$

On peut donc exprimer le champ \mathbf{E} en fonction du potentiel vecteur \mathbf{A} défini à un gradient près :

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla \varphi \text{ dans } D_c. \quad (1.2.4)$$

Similairement à ce qui a été effectué pour le champ \mathbf{A} , imposons une condition de jauge de moyenne nulle sur φ pour assurer son unicité :

$$\int_{D_c} \varphi d\mathbf{x} = 0. \quad (1.2.5)$$

De la loi de comportement (1.1.9), la condition au bord (1.1.10) devient

$$\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_H.$$

La condition au bord (1.1.14) et le fait que Γ_E est simplement connexe, on peut imposer

$$\mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_E,$$

en remarquant que $\Gamma_B = \Gamma_E$, on a :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B, \quad (1.2.6)$$

ce qui assure par ailleurs $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ_B .

En considérant les lois de comportement (1.1.8) et (1.1.9), nous pouvons exprimer respectivement \mathbf{J}_{ind} et \mathbf{H} en fonction des deux potentiels \mathbf{A} et φ :

$$\mathbf{J}_{ind} = \sigma (-\partial_t \mathbf{A} - \nabla \varphi) \text{ et } \mathbf{H} = \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (1.2.7)$$

La condition au bord Γ_c (1.1.12) devient donc

$$\sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_c. \quad (1.2.8)$$

En introduisant les expressions (1.2.7) dans (1.1.15) on obtient la première équation de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$:

$$\operatorname{rot} (\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}) + \sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \tilde{\varphi}) = \mathbf{J}_s \text{ dans } D, \quad (1.2.9)$$

où la notation $\tilde{\varphi}$ représente une extension de φ dans le domaine tout entier D , tenant compte du fait que φ n'est pas défini dans le domaine non conducteur $D_{nc} = D \setminus D_c$. Puisque $\sigma \equiv 0$ dans D_{nc} , la valeur de cette extension ne change en rien le problème.

En prenant la divergence de (1.2.9) et en tenant compte de la loi de conservation de la densité de courant, on obtient la deuxième équation de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$:

$$\operatorname{div} (\sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \varphi)) = 0 \text{ dans } D_c. \quad (1.2.10)$$

Il est intéressant de remarquer que, lorsque $D_c = \emptyset$, les termes avec la conductivité disparaissent et on retombe sur la formulation en magnétostatique.

1.2.2. Formulation en potentiels $\mathbf{T} - \Omega$

On développe maintenant la formulation magnétique : l'idée consiste à exprimer le champ \mathbf{H} en fonction des potentiels et d'un champ source \mathbf{H}_s .

Comme \mathbf{J}_s est à divergence nulle (1.1.1) dans D , simplement connexe et avec frontière connexe, il existe un terme source \mathbf{H}_s tel que

$$\mathbf{J}_s = \text{rot } \mathbf{H}_s \text{ dans } D. \quad (1.2.11)$$

Similairement, dans D_c supposé simplement connexe et avec frontière connexe, le courant induit à divergence nulle assure l'existence d'un potentiel vecteur \mathbf{T} tel que

$$\mathbf{J}_{ind} = \text{rot } \mathbf{T} \text{ dans } D_c. \quad (1.2.12)$$

L'unicité de ce vecteur est garantie en ajoutant la jauge de Coulomb :

$$\text{div } \mathbf{T} = 0 \text{ dans } D_c. \quad (1.2.13)$$

Pour assurer que la condition aux limites $\mathbf{J}_{ind} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ_c , on impose

$$\mathbf{T} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_c. \quad (1.2.14)$$

En remplaçant (1.2.11) et (1.2.12) dans l'équation d'Ampère (1.1.15), on obtient

$$\begin{cases} \text{rot } (\mathbf{H} - \mathbf{H}_s) = 0 & \text{dans } D_{nc}, \\ \text{rot } (\mathbf{H} - \mathbf{T} - \mathbf{H}_s) = 0 & \text{dans } D_c. \end{cases} \quad (1.2.15)$$

Nous pouvons alors introduire un potentiel scalaire Ω tel que :

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \mathbf{H}_s - \nabla \Omega & \text{dans } D_{nc}, \\ \mathbf{H}_s + \mathbf{T} - \nabla \Omega & \text{dans } D_c. \end{cases} \quad (1.2.16)$$

On impose la jauge de moyenne nulle sur le potentiel Ω dans D , pour en assurer l'unicité :

$$\int_D \Omega d\mathbf{x} = 0. \quad (1.2.17)$$

En substituant les définitions (1.2.12) et (1.2.16) dans les lois de comportement (1.1.8) et (1.1.9), nous pouvons exprimer \mathbf{E} et \mathbf{B} par les potentiels \mathbf{T} , Ω et \mathbf{H}_s :

$$\mathbf{E} = \sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{T} \quad \text{dans } D_c, \quad (1.2.18)$$

$$\mathbf{B} = \mu (\mathbf{H}_s + \mathbf{T} - \nabla \Omega) \quad \text{dans } D_{nc}, \quad (1.2.19)$$

$$\mathbf{B} = \mu (\mathbf{H}_s - \nabla \Omega) \quad \text{dans } D_c. \quad (1.2.20)$$

Les conditions aux bords Γ_B et Γ_H , (1.1.14) et (1.1.10), prennent alors la forme

$$\mu (\nabla \Omega - \mathbf{H}_s) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_B, \quad (1.2.21)$$

$$\mathbf{H}_s \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_H, \quad (1.2.22)$$

$$\Omega = C \quad \text{sur } \Gamma_H, \quad (1.2.23)$$

avec C constante fixée. Si Γ_H n'est pas connexe, on peut choisir $\Omega = C$ sur chaque composante simplement connexe de Γ_H .

D'après (1.2.18)-(1.2.20) l'équation de Maxwell-Faraday (1.1.16) devient la première équation de la formulation $\mathbf{T} - \Omega$:

$$\text{rot}(\sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{T}) + \partial_t(\mu(\mathbf{T} - \nabla \Omega)) = -\partial_t(\mu \mathbf{H}_s) \text{ dans } D_c. \quad (1.2.24)$$

En prenant la divergence de (1.2.24) dans D_c et en utilisant le fait que la divergence de \mathbf{B} , exprimée par les potentiels (1.2.19)-(1.2.20), est nulle dans D , on obtient la deuxième équation de la formulation $\mathbf{T} - \Omega$:

$$\text{div}(\mu \nabla \Omega) = \text{div}(\mu \mathbf{H}_s) \quad \text{dans } D_{nc}, \quad (1.2.25)$$

$$\text{div}(\mu(\mathbf{T} - \nabla \Omega)) = -\text{div}(\mu \mathbf{H}_s) \quad \text{dans } D_c. \quad (1.2.26)$$

Similairement à la formulation $\mathbf{A} - \varphi$, lorsque $D_c = \emptyset$, on déduit la formulation Ω en magnéto-statique (1.2.25).

1.3. OUTILS MATHÉMATIQUES

Nous rassemblons dans cette section des définitions et des résultats relatifs aux outils fonctionnels fréquemment utilisés dans les prochains chapitres. On introduira aussi les espaces et les notations concernant la discrétisation spatiale. Dans cette section, \mathfrak{D} dénote un domaine spatial quelconque. Les espaces des fonctions de forme et les degrés de liberté correspondants seront choisis par rapport aux champs que l'on souhaite approcher et la précision d'approximation, qui sera généralement d'ordre 1. Ci-dessous on mentionne les espaces fonctionnels continus et discrets que l'on rencontrera le plus souvent [Monk, 2003].

1.3.1. Espaces fonctionnels continus

* On note l'espace des fonctions scalaires de carré sommables par

$$L^2(\mathfrak{D}) = \left\{ f \text{ mesurable ; } \int_{\mathfrak{D}} |f| d\mathbf{x} < +\infty \right\}$$

et l'espace des fonctions vectorielles de carré sommables par

$$L^2(\mathfrak{D})^3 = \left\{ \mathbf{F} \text{ mesurable ; } \int_{\mathfrak{D}} |\mathbf{F}| d\mathbf{x} < +\infty \right\}.$$

Leurs normes sont dénotées par $\|\cdot\|_{\mathfrak{D}}$ et leurs produits scalaires par $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{D}}$.

Dans la suite, l'extension d'un espace défini pour des fonctions scalaires à sa version pour des fonctions vectorielles de \mathbb{R}^3 sera marquée par un indice 3.

* L'espace de Sobolev $H^1(\mathfrak{D})$ est défini par

$$H^1(\mathfrak{D}) = \left\{ f \in L^2(\mathfrak{D}) ; \nabla f \in L^2(\mathfrak{D}) \right\},$$

avec norme et semi-norme associées dénotées respectivement par $\|\cdot\|_{1,\mathfrak{D}}$ et $|\cdot|_{1,\mathfrak{D}}$. $H_0^1(\mathfrak{D})$ représente le sous-espace de $H^1(\mathfrak{D})$ des fonctions dont la trace s'annule sur $\partial\mathfrak{D}$ et

$$\widetilde{H}^1(\mathfrak{D}) = \left\{ f \in H^1(\mathfrak{D}) ; \int_{\mathfrak{D}} f d\mathbf{x} = 0 \right\}$$

représente le sous-espace de $H^1(\mathfrak{D})$ constitué des fonctions à moyenne nulle sur \mathfrak{D} .

* L'espace défini par l'opérateur différentiel rotationnel est dénoté par

$$H(\text{rot}, \mathfrak{D}) = \{\mathbf{F} \in L^2(\mathfrak{D})^3; \text{rot } \mathbf{F} \in L^2(\mathfrak{D})^3\},$$

équipé de sa norme usuelle :

$$\|\mathbf{F}\|_{H(\text{rot}, \mathfrak{D})}^2 = \|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{D}}^2 + \|\text{rot } \mathbf{F}\|_{\mathfrak{D}}^2.$$

En ajoutant les conditions aux limites *ad hoc*, on définit aussi

$$H_0(\text{rot}, \mathfrak{D}) = \{\mathbf{F} \in H(\text{rot}, \mathfrak{D}); \mathbf{F} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\mathfrak{D}\}.$$

L'espace correspondant jaugé est :

$$\widetilde{H}_0(\text{rot}, \mathfrak{D}) = \{\mathbf{F} \in H_0(\text{rot}, \mathfrak{D}); (\mathbf{F}, \nabla \xi)_{\mathfrak{D}} = 0 \forall \xi \in H_0^1(\mathfrak{D})\}. \quad (1.3.1)$$

* L'espace défini par l'opérateur différentiel divergence est dénoté par

$$H(\text{div}, \mathfrak{D}) = \{\mathbf{F} \in L^2(\mathfrak{D})^3; \text{div } \mathbf{F} \in L^2(\mathfrak{D})\},$$

équipé de sa norme usuelle :

$$\|\mathbf{F}\|_{H(\text{div}, \mathfrak{D})}^2 = \|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{D}}^2 + \|\text{div } \mathbf{F}\|_{\mathfrak{D}}^2.$$

En ajoutant les conditions aux limites *ad hoc*, on définit aussi

$$H_0(\text{div}, \mathfrak{D}) = \{\mathbf{F} \in H(\text{div}, \mathfrak{D}); \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\mathfrak{D}\}.$$

On note $\mathcal{D}(\mathfrak{D})$ et $\mathcal{D}(\mathfrak{D})^3$ les espaces des fonctions respectivement scalaires et vectorielles infiniment différentiables à support compact inclus dans D et $\mathcal{D}'(\mathfrak{D})$ et $\mathcal{D}'(\mathfrak{D})^3$ les espaces duals correspondants.

Dans toute la suite de cette thèse, dans le cas où $\mathfrak{D} = D$, l'indice D sera omis.

1.3.2. Maillage

Code_Carmel3D résout numériquement les formulations $\mathbf{A} - \varphi$ et $\mathbf{T} - \Omega$ en régime fréquentiel ou temporel. La discrétisation spatiale est toujours réalisée par la méthode des éléments finis. On introduit donc ici quelques concepts de base permettant de fixer les notations.

Considérons un système d'équations aux dérivées partielles sous la forme :

$$A(u) = f \text{ dans } D, \quad (1.3.2)$$

où A dénote un opérateur différentiel, f une fonction donnée et u l'inconnue du problème. Rappelons que les deux étapes principales de la MEF s'inscrivent dans le cadre des méthodes de Galerkin.

La première étape consiste à convertir la formulation forte (1.3.2) en une formulation faible. Soient V un espace de Hilbert de norme associée $\|\cdot\|$, $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire dans $V \times V$ et $l(\cdot)$ une forme linéaire dans V . La formulation faible du problème (1.3.2) prend la forme :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V. \quad (1.3.3)$$

Lorsque $a(\cdot, \cdot)$ est continue et coercive² sur V et $l(\cdot)$ continue, le théorème de Lax-Milgram [Ciarlet, 1978, page 8] garantit qu'il existe une unique solution au problème (1.3.3).

2. La propriété de coercivité assure qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout $v \in V$ on a $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$.

La deuxième étape consiste à construire un espace V_h , de dimension finie, qui approche l'espace V , de dimension infinie. Si $V_h \subset V$ on parle d'éléments finis conformes, sinon d'éléments finis non-conformes, ce qui sera notre cas. La formulation faible discrétisée prend alors la forme :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.3.4)$$

Si on travaille avec des éléments finis conformes, on obtient aisement un ingrédient fondamental pour estimer l'erreur d'approximation $u - u_h$ dans la norme énergétique : la relation d'orthogonalité de Galerkin. En effet, en effectuant la différence entre (1.3.3) et (1.3.4), on obtient immédiatement que

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.3.5)$$

En ayant des éléments finis non-conformes, cette relation ne découle pas immédiatement, néanmoins, on verra dans les chapitres suivants pour ce qui nous concerne, cette non-conformité est uniquement due aux jauges incluses dans les espaces fonctionnels, et que cette difficulté peut être rapidement levée. Une fois choisie une base w_1, \dots, w_n de V_h , la solution approchée s'écrit comme

$$u_h = \sum_{i=1}^n u_i w_i, \quad (1.3.6)$$

avec u_i les coefficients à déterminer caractérisant la solution numérique. Ainsi le problème (1.3.4) peut s'écrire sous forme de système linéaire :

$$\sum_{i=1}^n a(w_i, w_j) u_i = l(w_j) \quad 1 \leq j \leq n. \quad (1.3.7)$$

La solution peut alors être obtenue par résolution d'un système linéaire.

Dans le cas de *code_Carmel3D* cette résolution est effectuée par une méthode itérative du type gradient conjugué qui permet d'imposer implicitement la jauge de Coulomb [Ren, 1996].

Maillage

La conductivité σ et la perméabilité μ sont considérées constantes par morceaux. En d'autres termes il existe une partition de D en un nombre fini des polyèdres de Lipschitz D_j , $j = 1, \dots, J$, tels que $\sigma = \sigma_j$ et $\mu = \mu_j$ dans D_j avec $\sigma_j \geq 0$ et $\mu_j > 0$. Par conséquent D_c est l'union des D_j tels que $\sigma_j > 0$. Nous écrirons :

$$\mu_{\max} = \max_{j=1, \dots, J} \mu_j, \mu_{\min} = \min_{j=1, \dots, J} \mu_j, \sigma_{\max} = \max_{j=1, \dots, J: \sigma_j > 0} \sigma_j, \sigma_{\min} = \min_{j=1, \dots, J: \sigma_j > 0} \sigma_j.$$

Le maillage \mathcal{T}_h de D est composé de tétraèdres, désignés par T . Chaque $T \in \mathcal{T}_h$ appartient à un seul D_j (par conséquent chaque élément appartient soit à D_c soit à D_{nc}). Le diamètre de la plus petite boule circonscrite dans T est dénoté par h_T et celui de la plus grande boule inscrite dans T par ρ_T . La taille h du maillage est alors définie par :

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T.$$

\mathcal{T}_h est supposé admissible, conforme et régulier au sens de [Ciarlet, 1978], c'est-à-dire :

$$* \quad \overline{D} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T \text{ et } \overset{\circ}{T} \neq \emptyset;$$

- * pour chaque élément T , le rapport h_T/ρ_T est borné par une constante $\alpha > 0$, indépendante de T et de la taille du maillage h ,
- * pour tous les éléments T_1 et T_2 de \mathcal{T}_h , alors $T_1 \cap T_2$ peut être soit l'ensemble vide, soit un sommet, soit un côté entier, soit une face entière.

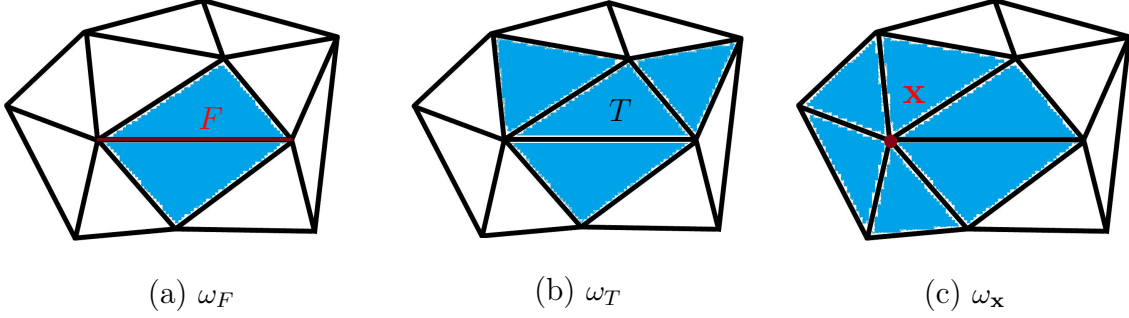


FIGURE 1.2. Exemples de *patch* en 2D.

- (a) : *patch* ω_F associé à un arête F .
(b) : *patch* ω_T associé à un triangle T .
(c) : *patch* $\omega_{\mathbf{x}}$ associé à un nœud \mathbf{x} .

Enfin \mathcal{T}_h , \mathcal{N}_h , \mathcal{N}_h^{int} , \mathcal{E}_h , \mathcal{E}_h^{int} , \mathcal{F}_h et \mathcal{F}_h^{int} dénotent respectivement l'ensemble des tétraèdres, nœuds, nœuds internes, arêtes, arêtes internes, faces et faces internes. Le diamètre de la face F est noté par h_F . Pour chaque face F on associe une normale unitaire \mathbf{n}_F et pour chaque tétraèdre T une normale unitaire sortante \mathbf{n}_T .

On définit enfin le *patch* ω_F associé à la face F par

$$\omega_F := \bigcup_{F \in \partial T} T,$$

où $F = \overline{T_1} \cap \overline{T_2}$, le *patch* ω_T associé au tétraèdre T par

$$\omega_T := \bigcup_{T' \subset \omega_F : F \subset T'} T',$$

et le *patch* $\omega_{\mathbf{x}}$ associé au nœud \mathbf{x} par

$$\omega_{\mathbf{x}} := \bigcup_{\mathbf{x} \in T} T.$$

Un exemple des ces *patch* en deux dimensions est donné sur la Figure 1.2.

1.3.3. Espaces fonctionnels discrets

Pour un entier $k \leq 0$, nous noterons $\mathbb{P}_k(\mathfrak{D})$ l'espace des polynômes définis dans \mathfrak{D} , à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à k .

- * Dans cette étude on a recours aux EF nodaux du premier ordre pour approcher les potentiels scalaires dans H^1 , en définissant l'espace

$$\Theta_h(\mathfrak{D}) = \{f_h \in H^1(\mathfrak{D}); f_{h|T} \in \mathbb{P}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Le sous-espace jaugé correspondant est noté

$$\widetilde{\Theta}_h(\mathfrak{D}) = \{f_h \in \widetilde{H}^1(\mathfrak{D}); f_{h|T} \in \mathbb{P}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

- * Pour approcher les potentiels vecteurs de $H(\text{rot}, \mathfrak{D})$ on utilise des EF d'arête de Nédélec du premier ordre \mathcal{ND}_1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{ND}_1(T) &= (\mathbb{P}_0(T))^3 + (\mathbb{P}_0(T))^3 \times \mathbf{x} \\ \mathcal{ND}_1(\mathfrak{D}, \mathcal{T}_h) &= \{\mathbf{F}_h \in H(\text{rot}, \mathfrak{D}); \mathbf{F}_{|T} \in \mathcal{ND}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\} \\ X_h(\mathfrak{D}) &= \{\mathbf{F}_h \in \mathcal{ND}_1(\mathfrak{D}, \mathcal{T}_h); \mathbf{F}_h \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\mathfrak{D}\}. \end{aligned}$$

L'espace jaugé associé à $X_h(\mathfrak{D})$ est noté par

$$\widetilde{X}_h(\mathfrak{D}) = \{\mathbf{F}_h \in X_h(\mathfrak{D}); (\mathbf{F}_h, \nabla \xi_h) = 0 \forall \xi_h \in \Theta_h^0(\mathfrak{D})\},$$

où $\Theta_h^0(\mathfrak{D})$ est défini par

$$\Theta_h^0(\mathfrak{D}) = \{\xi_h \in H_0^1(\mathfrak{D}); \xi_{h|T} \in \mathbb{P}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

- * Les champs de vecteurs dans $H(\text{div}, \mathfrak{D})$ sont enfin exprimés à l'aide des EF de facettes de Raviart-Thomas \mathcal{RT}_l d'ordre $l \in \{0, 1\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{RT}_l(T) &= (\mathbb{P}_l(T))^3 + \mathbb{P}_l(T) \mathbf{x}, \\ \mathcal{RT}_l(\mathfrak{D}, \mathcal{T}_h) &= \{\mathbf{F}_h \in H(\text{div}, \mathfrak{D}); \mathbf{F}_{|T} \in \mathcal{RT}_l(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\} \\ \widetilde{Y}_h^l(\mathfrak{D}) &= \{\mathbf{F}_h \in \mathcal{RT}_l(\mathfrak{D}, \mathcal{T}_h); \text{div } \mathbf{F}_h = 0 \text{ dans } \mathfrak{D}\}. \end{aligned}$$

Dans toute la suite de cette thèse, dans le cas où $\mathfrak{D} = D$, l'indice D sera omis.

Remarque 1.3.1.

- * La jauge de Coulomb a été incluse dans l'espace $\widetilde{H}_0(\text{rot}, \mathfrak{D})$. En effet un champ $\mathbf{A} \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, \mathfrak{D})$ est jaugé au sens faible car, en utilisant la formule de Green (1.3.22), on a :

$$(\mathbf{A}, \nabla \xi)_{\mathfrak{D}} = (\nabla \cdot \mathbf{A}, \xi)_{\mathfrak{D}} = 0 \text{ pour tout } \xi \in H_0^1(\mathfrak{D}).$$

- * Pour un champ $\mathbf{A} \in H_0(\text{rot}, \mathfrak{D})$, la décomposition standard de Helmholtz [Monk, 2003, Théorème 3.40, page 66] suivante sera souvent utilisée :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \nabla \psi \text{ où } \mathbf{B} \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, \mathfrak{D}) \text{ et } \psi \in H_0^1(\mathfrak{D}). \quad (1.3.8)$$

On rappelle aussi sa version discrète [Girault et Raviart, 1986, page 272] pour un champ $\mathbf{A}_h \in X_h(\mathfrak{D})$:

$$\mathbf{A}_h = \mathbf{B}_h + \nabla \psi_h \text{ où } \mathbf{B}_h \in \widetilde{X}_h(\mathfrak{D}) \text{ et } \psi_h \in \Theta_h^0(\mathfrak{D}). \quad (1.3.9)$$

- * Dans le cas où \mathfrak{D} est borné, simplement connexe, Lipschitzien avec frontière connexe, on a l'inégalité de Friedrichs [Monk, 2003, page 88] qui assure qu'il existe une constante C telle que

$$\|\mathbf{F}\| \leq C \|\text{rot } \mathbf{F}\| \quad \forall \mathbf{F} \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, \mathfrak{D}), \quad (1.3.10)$$

et aussi sa version discrète [Monk, 2003, page 185] qui assure qu'il existe une constante C indépendante du maillage telle que

$$\|\mathbf{F}_h\| \leq C \|\text{rot } \mathbf{F}_h\| \quad \forall \mathbf{F}_h \in \widetilde{X}_h(\mathfrak{D}). \quad (1.3.11)$$

1.3.4. Interpolants

On définit dans cette section des opérateurs qui agissent sur les espaces continus $H^1(D)$, $H_0^1(D)$ et $H_0(\text{rot}, D)$ vers les espaces éléments finis d'ordre 1, respectivement, $\Theta_h(D)$, $\Theta_h^0(D)$ et $X_h(D)$.

Interpolant de Clément

On introduit les interpolants de Clément [Clément, 1975] associés au maillage \mathcal{T}_h . On fixe le domaine tout entier D .

Pour chaque nœud $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_h$ on associe la fonction de base \mathbb{P}_1 -conforme $\lambda_{\mathbf{x}}$, définie par la condition :

$$\lambda_{\mathbf{x}}(y) = \delta_{x,y} \quad \forall y \in \mathcal{N}_h,$$

où $\delta_{x,y}$ dénote le symbole de Kronecker. L'opérateur d'interpolation standard de Clément est défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 : H_0^1(D) &\longrightarrow \Theta_h^0(D), \\ f &\mapsto \mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 f = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{N}_h^{\text{int}}} \frac{1}{|\omega_{\mathbf{x}}|} \left(\int_{\omega_{\mathbf{x}}} f \right) \lambda_{\mathbf{x}}, \\ \mathcal{I}_{\text{Cl},D} : H^1(D) &\longrightarrow \Theta_h(D), \\ f &\mapsto \mathcal{I}_{\text{Cl},D} f = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{N}_h \cap \overline{D}} \frac{1}{|\omega_{\mathbf{x}} \cap D|} \left(\int_{\omega_{\mathbf{x}} \cap D} f \right) \lambda_{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

où $\omega_{\mathbf{x}}$ est l'ensemble des tétraèdres qui contiennent le nœud \mathbf{x} .

On définit aussi l'interpolant vectoriel [Creusé et. al., 2004] qui sera utile dans le chapitre 3. Pour chaque $E \in \mathcal{E}_h$ on fixe la facette adjacente $F_E \in \mathcal{F}_h$ et l'opérateur d'interpolation vectoriel de Clément est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 : PH^1(D)^3 \cap H_0(\text{rot}, D) &\longrightarrow X_h(D), \\ \mathbf{F} &\mapsto \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{F} = \sum_{E \in \mathcal{E}_h} ((\mathbf{F} \times \mathbf{n}_{F_E}) \cdot \mathbf{f}_E^{F_E}) \mathbf{w}_E, \end{aligned}$$

où $PH^1(D)^3$ dénote l'ensemble de fonctions appartenants à $H^1(D_c)^3 \cup H^1(D_{nc})^3$, $\mathbf{w}_E \in X_h(D)$ représente la fonction de base associée à l'arête $E \in \mathcal{E}_h$ et définie par la condition :

$$\int_{E'} \mathbf{w}_E \cdot \mathbf{t}_{E'} = \delta_{E,E'} \quad \forall E' \in \mathcal{E}_h, \quad (1.3.12)$$

avec \mathbf{t}_E vecteur unitaire le long de E et $\mathbf{f}_{E'}^{F_E}$ fonction appartenant à l'espace de Nédélec du premier ordre déterminée par la condition

$$\int_{F_E} (\mathbf{w}_{E'} \times \mathbf{n}_{F_E}) \cdot \mathbf{f}_{E''}^{F_E} = \delta_{E',E''} \quad \forall E', E'' \in \mathcal{E}_h \cup \partial F_E.$$

Ces opérateurs d'interpolation satisfont la proposition suivante [Clément, 1975; Beck et. al., 2000].

Proposition 1.3.2. *Pour tout $g^0 \in H_0^1(D)$, $g \in H^1(D)$ et $\mathbf{G} \in PH^1(D)^3 \cap H_0(\text{rot}, D)$, il existe une constante C , indépendante du maillage, telle que*

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2} \|g^0 - \mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 g^0\|_T^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\text{int}}} h_F^{-1} \|g^0 - \mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 g^0\|_F^2 \leq C \|\nabla g^0\|^2, \quad (1.3.13)$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2} \|g - \mathcal{I}_{\text{Cl},D} g\|_T^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} h_F^{-1} \|g - \mathcal{I}_{\text{Cl},D} g\|_F^2 \leq C \|\nabla g\|^2, \quad (1.3.14)$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2} \|\mathbf{G} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{G}\|_T^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\text{int}}} h_F^{-1} \|\mathbf{G} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{G}\|_F^2 \leq C \|\nabla_P \mathbf{G}\|^2, \quad (1.3.15)$$

où $\|\nabla_P \mathbf{G}\|^2 = \|\nabla \mathbf{G}\|_{D_c}^2 + \|\nabla \mathbf{G}\|_{D_{nc}}^2$.

Pour obtenir un résultat utile dans le chapitre 2, on a besoin de définir l'interpolant de Clément $\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^1$ [Clément, 1975].

Soit $f \in L^2(D)$, pour tout *patch* $\omega_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_h$, on associe la meilleure approximation $p_{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}_1(\omega_{\mathbf{x}})$ de f en norme $L^2(\omega_{\mathbf{x}})$ i.e.

$$\int_{\omega_{\mathbf{x}}} f p = \int_{\omega_{\mathbf{x}}} p_{\mathbf{x}} p \quad \forall p \in \mathbb{P}_1(\omega_{\mathbf{x}}).$$

Pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_h$, on associe le degré de liberté

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{x}} : \mathcal{C}^\infty &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ g &\mapsto \gamma_{\mathbf{x}}(g) = \sum_{i=1}^3 a_{\mathbf{x},i} \partial_{x_i} g(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\text{Cl},D}^1 : L^2(D) &\longrightarrow V := \left\{ \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{N}_h} a_{\mathbf{x}} \lambda_{\mathbf{x}} : a_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R} \right\}, \\ f &\mapsto \mathcal{I}_{\text{Cl},D}^1 f = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{N}_h} \gamma_{\mathbf{x}}(p_{\mathbf{x}}) \lambda_{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

D'après [Clément, 1975, Théorème 1] avec $\rho = 1$ et $q = 1$: si $f \in H^1(D)$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|f - \mathcal{I}_{\text{Cl}}^1 f\|_{H^1(D)} \leq C \|f\|_{H^1(D)}. \quad (1.3.16)$$

D'après toujours le Théorème 1 avec $\rho = 1$ et $q = 2$: si $f \in H^2(D)$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|f - \mathcal{I}_{\text{Cl}}^1 f\|_{H^1(D)} \leq C h \|f\|_{H^2(D)}. \quad (1.3.17)$$

De (1.3.16) et (1.3.17) on sait que $\mathcal{I}_{\text{Cl}}^1 \in \mathcal{L}(H^2(D); H^1(D)) \cap \mathcal{L}(H^1(D); H^1(D))$. Grâce au Théorème d'interpolation d'opérateurs dans [Lions et Magenes, 1968, Proposition 2.3 page 23] on déduit que $\mathcal{I}_{\text{Cl}}^1 \in \mathcal{L}([H^2(D), H^1(D)]_\epsilon; [H^1(D), H^1(D)]_\epsilon) = \mathcal{L}(H^{1+\epsilon}(D); H^1(D))$ pour tout $\epsilon \in (0, 1)$ avec

$$\|\mathcal{I}_{\text{Cl}}^1\|_{\mathcal{L}(H^{1+\epsilon}(D); H^1(D))} \leq \|\mathcal{I}_{\text{Cl}}^1\|_{\mathcal{L}(H^1; H^1(D))}^\epsilon \|\mathcal{I}_{\text{Cl}}^1\|_{\mathcal{L}(H^2; H^1(D))}^{1-\epsilon}.$$

D'où le résultat suivant :

Pour tout $\epsilon \in [0, 1]$ et $f \in H^{1+\epsilon}(D)$ il existe une constante C , indépendante du maillage, telle que

$$\|f - \mathcal{I}_{Cl} f\|_{H^1(D)} \leq C h^\epsilon \|f\|_{H^{1+\epsilon}(D)}. \quad (1.3.18)$$

Interpolant de Nédélec

Soit $\mathbf{w}_E \in X_h(D)$ la fonction de base associée à l'arête $E \in \mathcal{E}_h$ déjà définie par la condition (1.3.12). L'opérateur d'interpolation standard de Nédélec [Nédélec, 1980] est défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathcal{ND}} : H_0(\text{rot}, D) &\longrightarrow X_h(D), \\ \mathbf{F} &\mapsto \mathcal{I}_{\mathcal{ND}} \mathbf{F} = \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left(\int_E \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}_E \right) \mathbf{w}_E. \end{aligned}$$

De plus, si on demande un peu plus de régularité sur le champ \mathbf{F} , on obtient un résultat [Boffi et. al., 2013, Proposition 2.5.7] que l'on utilisera dans le chapitre 2.

Proposition 1.3.3. *Soient $0 < \delta \leq 1$ et $0 < \epsilon \leq 1/2$. Soient $\mathbf{F} \in H^{1+\delta}(D)^3$ et $\mathbf{F}_h := \mathcal{I}_{\mathcal{ND}} \mathbf{F}$ l'approximation \mathbf{F} dans l'espace de Nédélec d'ordre 1, $\mathcal{ND}_1(D, \mathcal{T}_h)$. Alors il existe une constante C indépendante de la taille du maillage telle que*

$$\|\mathbf{F} - \mathbf{F}_h\| \leq C h^{1+\delta} \|\mathbf{F}\|_{H^{1+\delta}(D)^3} \quad (1.3.19)$$

et, pour $p > 2$,

$$\|\mathbf{F} - \mathbf{F}_h\| \leq C h^{1/2+\epsilon} (\|\mathbf{F}\|_{H^{1/2+\epsilon}(D)^3} + \|\text{rot } \mathbf{F}\|_{L^p(D)^3}). \quad (1.3.20)$$

De plus :

$$\|\text{rot}(\mathbf{F} - \mathbf{F}_h)\| \leq C h^{1/2+\epsilon} (\|\text{rot } \mathbf{F}\|_{H^{1/2+\epsilon}(D)^3}). \quad (1.3.21)$$

1.3.5. Formules de Green

Si le bord $\partial\mathfrak{D}$ est assez régulier, par exemple lipschitzien, on peut définir la trace d'une fonction $f \in H^1(\mathfrak{D}) : \gamma f = f|_{\partial\mathfrak{D}}$. On dénote $H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathfrak{D})$ l'espace des traces des fonctions dans $H^1(\mathfrak{D})$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathfrak{D})$ son dual. Dans ce cadre, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote le *crochet de dualité* entre $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathfrak{D})$ et $H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathfrak{D})$, on écrira formellement : $\langle f^*, f \rangle = \int_{\partial\mathfrak{D}} f^* f$.

Grâce à la densité de $\mathcal{D}(\mathfrak{D})$ dans $H^1(\mathfrak{D})$ et de $\mathcal{D}(\mathfrak{D})^3$ dans $H(\text{div}, \mathfrak{D})$, on peut démontrer que [Boffi et. al., 2013, Lemme 2.1.1] : si $\mathbf{F} \in H(\text{div}, \mathfrak{D})$ alors on peut définir la trace normale $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\mathfrak{D}} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathfrak{D})$ et on a la formule de Green :

$$\int_{\mathfrak{D}} ((\text{div } \mathbf{F}) g + \mathbf{F} \cdot \nabla g) = \int_{\partial\mathfrak{D}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\mathfrak{D}} g \quad \forall g \in H^1(\mathfrak{D}). \quad (1.3.22)$$

Similairement, on peut définir la trace d'une fonction $\mathbf{F} \in H(\text{rot}, \mathfrak{D})$ et démontrer que [Boffi et. al., 2013, Lemme 2.1.4] : si $\mathbb{F} \in H(\text{rot}, \mathfrak{D})$ alors on peut définir la trace tangentielle

$(\mathbf{F} \times \mathbf{n})|_{\partial\mathfrak{D}} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathfrak{D})^3$ et on a la formule de Green :

$$\int_{\mathfrak{D}} (\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{G} - \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \int_{\partial\mathfrak{D}} (\mathbf{F} \times \mathbf{n})|_{\partial\mathfrak{D}} \cdot \mathbf{G} \quad \forall \mathbf{G} \in H^1(\mathfrak{D})^3. \quad (1.3.23)$$

1.3.6. Fonctions bulles et inégalités inverses

A partir de [Verfürth, 1996, Remarque 1.2 et Lemme 1.3], on définit les fonctions bulles b_T et b_F et les inégalités inverses correspondantes. Ces résultats seront utiles dans le chapitre 2 pour prouver l'efficacité de l'estimateur équilibré conçu à partir d'une reconstruction des flux (voir la preuve du Théorème 2.4.5), mais surtout dans le chapitre 3 pour prouver l'efficacité de l'estimateur résiduel (section 3.4.2).

Soient $\lambda_{T,1}, \lambda_{T,2}, \lambda_{T,3}, \lambda_{T,4}$ les coordonnées barycentriques du tétraèdre $T \in \mathcal{T}_h$. Alors la fonction bulle b_T est définie par

$$b_T = \begin{cases} 256\lambda_{T,1}\lambda_{T,2}\lambda_{T,3}\lambda_{T,4} & \text{dans } T, \\ 0 & \text{dans } \mathcal{T}_h \setminus T. \end{cases}$$

Soit $F \in \mathcal{F}_h$ avec le patch $\omega_F = \overline{T_1} \cap \overline{T_2}$, où $T_1 \cap T_2 = F$. Les sommets des tétraèdres T_1 et T_2 sont énumérés de tel sorte que les sommets de E soient énumérés en premier. Alors la fonction bulle associée à la face F est définie par

$$b_F = \begin{cases} 27\lambda_{T_i,1}\lambda_{T_i,2}\lambda_{T_i,3} & \text{dans } T_i, i = 1, 2, \\ 0 & \text{dans } \mathcal{T}_h \setminus \omega_F. \end{cases}$$

L'opérateur d'extension $\mathbf{F}_{\text{ext}} : C(\overline{F}) \rightarrow C(\overline{T})$ nous permettra de considérer des fonctions définies dans $\overline{F} \subset \partial\overline{T}$ sur tout le tétraèdre \overline{T} . Pour la définition exacte de cet opérateur on pourra se reporter par exemple à [Creusé et. al., 2004, Section 4.1].

D'après ces définitions suit que :

$$b_T = 0 \quad \text{dans } \partial T, \quad b_F = 0 \quad \text{dans } \partial\omega_F \quad \text{et} \quad \|b_T\|_{\infty, T} = \|b_F\|_{\infty, \omega_F} = 1,$$

et aussi les inégalités inverses, dont on rapporte le lemme ci-dessous [Creusé et. al., 2004, Lemme 4.1] dans le cas anisotrope, ainsi que [Kunert, 1999] .

Lemme 1.3.4. *Soit $v_T \in \mathbb{P}^{k_0}(T)$ et $v_F \in \mathbb{P}^{k_1}(F)$. Alors on a les inégalité suivantes.*

$$\|v_T\|_T \lesssim \|v_T b_T^{1/2}\|_T, \quad (1.3.24)$$

$$\|\nabla(v_T b_T)\|_T \lesssim h_T^{-1} \|v_T\|_T, \quad (1.3.25)$$

$$\|v_F\|_F \lesssim \|v_F b_F^{1/2}\|_F, \quad (1.3.26)$$

$$\|F_{\text{ext}}(v_F) b_F\|_T \lesssim h_F^{1/2} \|v_F\|_F, \quad (1.3.27)$$

$$\|\nabla(F_{\text{ext}}(v_F) b_F)\|_T \lesssim h_F^{-1/2} \|v_F\|_F, \quad (1.3.28)$$

où les constantes intervenant dans les inégalités dépendent des degrés des polynômes k_0 ou k_1 et de la régularité du maillage, qui ici est supposé régulier au sens de Ciarlet.

Chapitre 2

ESTIMATEURS ÉQUILIBRÉS

2.1. ETAT DE L'ART DES ESTIMATEURS SPATIAUX

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux équations de Maxwell en régime harmonique. On ne traitera donc que des estimateurs spatiaux. On donne dans cette section un aperçu du sujet, en se restreignant au cadre de l'électromagnétisme et au type d'estimateurs que l'on utilisera dans ce chapitre (estimateurs équilibrés) et dans le chapitre suivant (estimateurs résiduels). Dans le chapitre suivant, on étendra les estimateurs résiduels au cas instationnaire. On donnera ainsi un aperçu des estimateurs spatio-temporels dans la section 3.1.

Estimateurs résiduels

Parmi les différents types d'estimateurs, les estimateurs résiduels sont largement utilisés. Les premiers travaux sur ces estimateurs remontent aux articles [Babuška et Rheinboldt, 1978a,b] pour un problème elliptique en dimension 1. Depuis, ils ont été énormément étudiés pour une grande variété de problèmes. Pour des problèmes elliptiques, les monographies [Verfürth, 1996; Ainsworth et Oden, 2000] et [Babuška et Strouboulis, 2001, Chapitre 5] donnent un état de l'art complet du sujet. En électromagnétisme, cet estimateur est également souvent utilisé, voir par exemple le livre [Monk, 2003].

Pour des problèmes de rayonnement électromagnétique, un estimateur résiduel est proposé dans [Monk, 1998]. Dans le cadre d'un problème elliptique en $H(\text{rot}, \Omega)$, les travaux de [Beck et al., 2000] développent un estimateur résiduel pour des problèmes de courants de Foucault en magnétoharmonique (formulation en champ \mathbf{E}) avec des hypothèses de régularité sur les coefficients (magnétiques et électriques) et sur le domaine de calcul (polyhédral, borné et connexe). Ces travaux ont été généralisés dans le cas des coefficients constants par morceaux dans [Nicaise et Creusé, 2003] et pour des domaines Lipschitziens dans [Schöberl, 2008]. L'article [Cochez-Dhondt et Nicaise, 2007] analyse la robustesse de l'estimateur et [Bürg, 2012] analyse la dépendance des constantes intervenant dans les bornes supérieures et inférieures de l'erreur par rapport au degré polynomial de l'approximation. Concernant les formulations en potentiels introduites dans le Chapitre 1, deux estimateurs de type résiduel ont été proposés : le premier pour la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ dans [Creusé et al., 2012] et le deuxième pour la formulation $\mathbf{T} - \Omega$ dans [Creusé et al., 2013].

A partir d'un problème variationnel bien posé et d'un problème discrétisé correspondant, l'idée consiste à mettre en relation la norme de l'erreur avec la norme du *résidu*. Cette dernière norme quantifie l'erreur commise entre la solution approchée et la solution exacte. Cependant, ce résidu est généralement exprimé en une norme duale, donc globale et non calculable. Pour cette raison, on estime cette norme par des quantités localement calculables. Dans cette dernière étape, en utilisant par exemple les inégalités de Poincaré et Friedrichs, le théorème de trace, les estimations concernant l'opérateur d'interpolation de Clément, etc, des constantes difficilement quantifiables interviennent dans les estimations. Ces estimateurs sont très performants du point de vue de leur coût de calcul faible. Cependant, à cause des constantes inconnues intervenant dans la fiabilité et l'efficacité, ils ne satisfont pas l'exactitude asymptotique. Pour surmonter cet inconvénient des efforts pour quantifier ces constantes ont été faits dans [Carstensen et Funken, 2000; Veiser et Verfürth, 2009]. De plus, d'autres voies ont été parcourues, comme celle des estimateurs équilibrés.

Ce chapitre est consacré aux estimateurs équilibrés : on développera un estimateur équilibré basé sur les formulations $\mathbf{A} - \varphi$ et $\mathbf{T} - \Omega$ et on jettera les bases pour un autre estimateur équilibré pour la formulation $\mathbf{A} - \varphi$.

Estimateurs équilibrés

Durant ces trois dernières décennies, les estimateurs qui assurent la fiabilité avec constante 1 (à des termes d'ordre supérieur près) ont été de plus en plus étudiés. Les premières idées sont apparues dans [Bank et Weiser, 1985] en résolvant des problèmes de Neumann locaux et dans [Ladevèze, 1975; Kelly, 1984; Ladevèze et Leguillon, 1983] en comparant les solutions de deux formulations faibles duales. Cette dernière technique s'appuie sur l'identité de Prager et Synge [Prager et Synge, 1947]. Si l'on considère le problème modèle

$$\begin{aligned} \Delta u &= -f && \text{dans } D \\ u &= 0 && \text{sur } \Gamma_D \\ \partial u / \partial n &= 0 && \text{sur } \Gamma_N \end{aligned}$$

avec $\partial D = \Gamma_N \cup \Gamma_D$, l'identité de Prager et Synge est formulée dans le théorème suivant.

Théorème 2.1.1. *Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ avec $d = 2, 3$ tel que $\partial D = \Gamma_N \cup \Gamma_D$. Soient $q \in H(\text{div}, D)$,*

$q \cdot n = 0$ sur Γ_N tel que

$$\text{div } q + f = 0$$

et $v \in H^1(D)$, $v = 0$ sur Γ_D . Alors

$$\| \nabla u - \nabla v \|^2 + \| \nabla u - q \|^2 = \| \nabla v - q \|^2.$$

Un résultat équivalent dans le cadre des problèmes elliptiques rot – rot nous permet d'établir un résultat de fiabilité dans un contexte magnétostatique (voir le Lemme 2.4.2 page 44). Dans notre contexte, en disposant de $\widetilde{\mathbf{A}}$, champ solution de la formulation continue (2.4.4), $\widetilde{\mathbf{A}}_h$, champ solution de la formulation discrète (2.4.6) et \mathbf{k}_h , champ *admissible*, le Théorème de

Prager et Synge adapté à un problème rot – rot garantit que :

$$\|\operatorname{rot} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \widetilde{\mathbf{A}}_h\|^2 + \|\operatorname{rot} \widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{k}_h\|^2 = \|\operatorname{rot} \widetilde{\mathbf{A}}_h - \mathbf{k}_h\|^2,$$

et la fiabilité du Lemme 2.4.2 suit. La preuve de cette égalité se trouve dans [Tang et al., 2013]. Ce théorème est utilisé depuis longtemps dans le domaine de l'électromagnétisme, appliqué surtout aux problèmes en magnétostatique et connu sous le nom de Théorème de l'hypercercle [Marques et al., 2000]. Il établit le lien entre la solution exacte et l'estimateur (qui, dans ce cas, est donné par $\|\operatorname{rot} \widetilde{\mathbf{A}}_h - \mathbf{k}_h\|$), appelé aussi *ligurien*. L'idée consiste à évaluer l'écart de la solution approchée avec une solution *admissible* sous forme de loi de comportement. On rappelle qu'une solution *admissible* est un couple de champs, par exemple magnétiques $(\widehat{\mathbf{B}}, \widehat{\mathbf{H}})$, qui satisfait les équations de Maxwell, sans pour autant vérifier les lois de comportement. Le défi consiste donc à construire un champ *admissible* à comparer avec la solution discrète. Ce champ *admissible* est construit à partir des techniques d'*équilibrage* : soit à travers la résolution d'un problème complémentaire [Rikabi et al., 1988a; Li et al., 1995; Tang et al., 2013] (en magnétostatique) et [Rikabi et al., 1988b; Li et al., 1994a; Golias et al., 1994] (en magnétoharmonique), soit à travers une construction locale à partir de la solution numérique [Remacle et al., 1996; Marmin et al., 1998; Remacle et al., 1998; Marmin et al., 2000]. Puisque la résolution (globale) du problème dual comporte un coût de calcul égal à la résolution même du problème, les techniques de reconstructions locales sont de plus en plus explorées.

Par exemple, l'équilibrage dans [Ainsworth et Oden, 2000, Chapitre 6] est effectué en résolvant des problèmes locaux avec des polynômes de degré suffisamment élevé. Cette technique ne donne pas une borne supérieure de l'erreur calculable car les problèmes locaux impliquent des solutions de problèmes infinito-dimensionnels. Pour cette raison, on introduit en pratique des problèmes locaux *approchés*. Dans [Vejchodský, 2004] une combinaison de ces deux méthodes est présentée pour l'équation de Poisson en dimension deux, afin d'élargir les résultats de [Ladevèze et Leguillon, 1983]. Il obtient en effet un estimateur complètement calculable en pratique et, de plus, sans l'hypothèse de données du problème constantes par morceaux. Pour des problèmes de diffusion, on peut mentionner aussi [Luce et Wohlmuth, 2004], où l'estimateur est calculé en résolvant des problèmes locaux en s'appuyant sur un maillage dual, [Vohralík, 2011], où le cas du coefficient de diffusion discontinu est traité, et, dans le cadre plus large des méthodes de type Galerkin Discontinu et des discrétisations mixtes, [Ern et Vohralík, 2015]. Similairement, en électromagnétisme, l'article [Braess et Schöberl, 2008] s'appuie encore une fois sur la méthode de l'hypercercle combinée avec une méthode des flux équilibrés, distribuant les courants en courants locaux à divergence nulle. Dans la section 2.4 nous nous appuierons sur cette dernière méthode.

Autres type d'estimateurs

En s'éloignant un peu des estimateurs qui nous intéressent, il est possible d'en mentionner d'autres.

L'estimateur basé sur la reconstruction des gradients est très courant en ingénierie. Il est pratique car il ne demande pas d'information sur la nature de l'équation de départ. Il se base sur la comparaison entre le gradient de la solution numérique et un gradient reconstruit plus régulier que le gradient de la solution numérique. Cette technique est connue sous le nom de "Superconvergent Patch Recovery" (SPR) et a été développée initialement par [Zienkiewicz

et Zhu, 1987] pour un problème d'élasticité linéaire. Elle a été étudiée en électromagnétisme récemment dans [Nicaise, 2005].

Il existe aussi des estimateurs basés sur la théorie de la dualité [Neittaanmäki et Repin, 2004, chapitre 5]. Au lieu d'estimer l'erreur sous la forme de la norme L^2 ou énergétique, elle est estimée sous la forme d'une norme de $Q(u) - Q(u_h)$, avec u et u_h solutions respectivement analytique et approchée et Q fonctionnelle opportune d'intérêt physique du problème. La borne supérieure de l'erreur dépend de la solution d'un problème adjoint, voir par exemple [Neittaanmäki et Repin, 2004, chapitres 6-8] et [Becker et Rannacher, 2001]. Dans cet esprit, pour le problème elasto-statique, [González-Estrada et al., 2014] présentent une technique qui adapte la méthode SPR afin d'estimer l'erreur d'une quantité d'intérêt au lieu que la norme énergétique.

Pour conclure on mentionne les estimateurs hiérarchiques [Bank et Weiser, 1985; Bank et Smith, 1993]. L'estimation se base sur l'idée assez récurrente de construction d'une solution numérique u_h^* plus précise que celle d'origine u_h . Par exemple en magnétodynamique [Dular, 2009] propose une augmentation des degrés des polynômes des fonctions tests. Le défi consiste enfin à éviter de construire la solution u_h^* avec un coût numérique inférieur que celui pour calculer u_h . Des idées sont par exemple d'utiliser des solveurs itératifs stoppés avant d'obtenir la convergence ou des formes bilinéaires plus simples que celles du problème d'origine.

Plan du chapitre

Nous nous focaliserons dans ce chapitre sur les estimateurs équilibrés. En particulier :

- dans la section 2.2 on rappelle les formulations en potentiels en régime harmonique et leurs discrétisations ;
- dans la section 2.3, on élargit l'estimateur équilibré pour les formulations en \mathbf{A} et Ω en magnétostatique dans un cadre magnétoharmonique. Ce travail a donné lieu à la publication [Creusé et al., 2016] ;
- dans la section 2.4, on construit un estimateur équilibré à partir de la solution numérique de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$, en s'inspirant de l'estimateur équilibré avec des flux reconstruits pour la formulation en champ \mathbf{E} en [Cochez-Dhondt, 2007, Section 2.4] ;
- enfin, dans la section 2.5, on valide ces estimateurs et on les compare avec les estimateurs résiduels déjà existants pour les formulations $\mathbf{A} - \varphi$ et $\mathbf{T} - \Omega$.

2.2. FORMULATIONS EN POTENTIELS EN RÉGIME HARMONIQUE

On considère le régime harmonique, qui consiste à fixer une fréquence $f \in \mathbb{R}^+$, et donc une pulsation $\omega = 2\pi f > 0$, et à exprimer les champs en fonction de cette fréquence.

On imposera des conditions aux bords homogènes (voir la section 1.1.3 pour tous les détails), et on suppose que $D_c \subset D$ avec $\partial D_c \cap \partial D = \emptyset$. On suppose de plus que $\text{supp } J_s \cap D_c = \emptyset$ (voir la Figure 2.1).

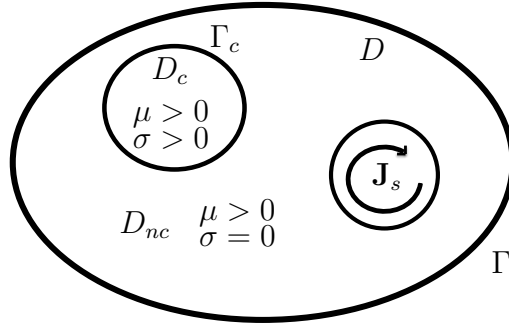


FIGURE 2.1. Une configuration possible du domaine d'étude, où $\text{supp } \mathbf{J}_s \cap D_c = \emptyset$.

2.2.1. Formulations variationnelles continues

Formulation variationnelle pour $\mathbf{A} - \varphi$

Les potentiels $\mathbf{A}-\varphi$ sont exprimés sous la forme $\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \overline{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) e^{j\omega t}$ et $\varphi(t, \mathbf{x}) = \overline{\varphi}(\mathbf{x}) e^{j\omega t}$, où j est l'unité imaginaire. Si on les remplace dans (1.2.9)-(1.2.10) et dans (1.2.6) et (1.2.8), on obtient :

$$\text{rot} (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}) + \sigma (j\omega \mathbf{A} + \nabla \tilde{\varphi}) = \mathbf{J}_s \text{ dans } D, \quad (2.2.1)$$

$$\text{div} (\sigma (j\omega \mathbf{A} + \nabla \varphi)) = 0 \text{ dans } D_c, \quad (2.2.2)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad (2.2.3)$$

$$\sigma (j\omega \mathbf{A} + \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_c, \quad (2.2.4)$$

où, dans cette écriture, nous avons remplacé $\overline{\mathbf{A}}$, $\overline{\varphi}$ par \mathbf{A} , φ afin d'alléger les notations.

Etablissons maintenant la formulation variationnelle. On rappelle que \mathbf{A} et φ sont jaugés par les relations :

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \text{ dans } D \text{ et } \int_{D_c} \varphi = 0,$$

ce qui est pris en compte par le fait que $\mathbf{A} \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D)$ et $\varphi \in \widetilde{H}^1(D_c)$. On multiplie (2.2.1) par une fonction test $\mathbf{A}' \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D)$ et l'on intègre sur D . Le théorème de flux-divergence (1.3.23) et la condition au bord (2.2.3) nous donnent :

$$\int_D \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A} \cdot \text{rot } \overline{\mathbf{A}'} + \frac{j}{\omega} \int_{D_c} \sigma (j\omega \mathbf{A} + \nabla \varphi) \cdot \overline{j\omega \mathbf{A}'} = \int_D \mathbf{J}_s \cdot \overline{\mathbf{A}'}.$$

Ensuite on multiplie (2.2.2) par une fonction test $\varphi' \in \widetilde{H}^1(D_c)$ et l'on intègre sur D_c . Le théorème de flux-divergence (1.3.22) et la condition au bord (2.2.4), nous donnent :

$$\int_{D_c} \sigma (j\omega \mathbf{A} + \nabla \varphi) \cdot \nabla \overline{\varphi'} = 0.$$

En faisant la somme de ces deux intégrales (la dernière étant multipliée par le scalaire j/ω), on obtient la formulation variationnelle suivante :

Trouver $(\mathbf{A}, \varphi) \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c)$ tels que

$$a_{A,\varphi}((\mathbf{A}, \varphi), (\mathbf{A}', \varphi')) = l_{A,\varphi}((\mathbf{A}', \varphi')) \quad \forall (\mathbf{A}', \varphi') \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c), \quad (2.2.5)$$

où $a_{A,\varphi}$ est la forme bilinéaire continue définie par

$$a_{A,\varphi}((\mathbf{A}, \varphi), (\mathbf{A}', \varphi')) = \int_D \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \overline{\mathbf{A}'} + \frac{j}{\omega} \int_{D_c} \sigma (j\omega \mathbf{A} + \nabla \varphi) \cdot \overline{(j\omega \mathbf{A}' + \nabla \varphi')},$$

et $l_{A,\varphi}$ est la forme linéaire continue définie par

$$l_{A,\varphi}((\mathbf{A}', \varphi')) = \int_D \mathbf{J}_s \cdot \overline{\mathbf{A}'}.$$

Par [Creusé et. al., 2012, Théorème 2.1], il existe une unique solution $(\mathbf{A}, \varphi) \in \widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c)$ à (2.2.5). On peut en effet montrer que la forme bilinéaire $\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}a_{A,\varphi}$ est coercive sur $\widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c)$, et on peut donc appliquer le Lemme de Lax-Milgram.

La solution (\mathbf{A}, φ) de (2.2.5) satisfait aussi la formulation si l'on enlève la jauge sur la fonction test \mathbf{A}' :

$$a_{A,\varphi}((\mathbf{A}, \varphi), (\mathbf{A}', \varphi')) = l_{A,\varphi}((\mathbf{A}', \varphi')) \quad \forall (\mathbf{A}', \varphi') \in H_0(\operatorname{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c). \quad (2.2.6)$$

Ce résultat est démontré dans [Creusé et. al., 2012, Lemme 2.2], en utilisant la décomposition de Helmholtz standard (1.3.8) pour l'espace $H_0(\operatorname{rot}, D)$ et le fait que \mathbf{J}_s est à divergence nulle. Ce résultat est utile par exemple si on souhaite avoir une relation d'orthogonalité de Galerkin.

Formulation variationnelle pour $\mathbf{T} - \Omega$

Similairement, la formulation harmonique $\mathbf{T} - \Omega$ est obtenue en remplaçant $\mathbf{T}(t, \mathbf{x}) = \overline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) e^{j\omega t}$ et $\Omega(t, \mathbf{x}) = \overline{\Omega}(\mathbf{x}) e^{j\omega t}$ dans (1.2.24)-(1.2.26) et dans (1.2.14) et (1.2.21). Si l'on note \mathbf{T} et Ω au lieu de $\overline{\mathbf{T}}$ et $\overline{\Omega}$, on obtient :

$$\operatorname{rot}(\sigma^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{T}) + j\omega \mu (\mathbf{T} - \nabla \Omega) = -j\omega \mu \mathbf{H}_s \text{ dans } D_c, \quad (2.2.7)$$

$$\operatorname{div}(\mu(\widetilde{\mathbf{T}} - \nabla \Omega)) = -\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}_s) \text{ dans } D, \quad (2.2.8)$$

$$\mathbf{T} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_c, \quad (2.2.9)$$

$$\mu(\mathbf{H}_s - \nabla \Omega) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (2.2.10)$$

Dans le même esprit que pour $\tilde{\varphi}$ (voir l'équation (1.2.9)), la notation $\widetilde{\mathbf{T}}$ représente une extension de \mathbf{T} dans le domaine tout entier D telle que $\widetilde{\mathbf{T}} = 0$ dans D_{nc} .

Etablissons la formulation variationnelle. On rappelle que \mathbf{T} et Ω sont jaugés par les relations :

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = 0 \text{ dans } D_c \text{ et } \int_D \Omega = 0,$$

ce qui est pris en compte par le fait que $\mathbf{T} \in \widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D_c)$ et $\Omega \in \widetilde{H}^1(D)$. On multiplie (2.2.7) par une fonction test $\mathbf{T}' \in \widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D_c)$ et l'on intègre sur D_c . Le théorème de flux-divergence (1.3.23) et la condition au bord (2.2.9) nous donnent :

$$\int_{D_c} \sigma^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{T} \cdot \operatorname{rot} \overline{\mathbf{T}'} + \int_{D_c} j\omega \mu (\mathbf{T} - \nabla \Omega) \cdot \overline{\mathbf{T}'} = -j\omega \int_{D_c} \mu \mathbf{H}_s \cdot \overline{\mathbf{T}'}$$

On multiplie ensuite (2.2.8) par une fonction test $\Omega' \in \widetilde{H}^1(D)$ et l'on intègre sur D . Le théorème de flux-divergence (1.3.22) et la condition au bord (2.2.10), nous donnent :

$$-\int_D \mu(\widetilde{\mathbf{T}} - \nabla \Omega) \cdot \overline{\nabla \Omega'} = \int_D \mu \mathbf{H}_s \cdot \overline{\nabla \Omega'}.$$

En faisant la somme de ces deux intégrales (la dernière étant multipliée par le scalaire $j\omega$), on obtient la formulation variationnelle suivante :

Trouver $(\mathbf{T}, \Omega) \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D_c) \times \widetilde{H}^1(D)$ tels que

$$a_{T,\Omega}((\mathbf{T}, \Omega), (\mathbf{T}', \Omega')) = l_{T,\Omega}((\mathbf{T}', \Omega')) \quad \forall (\mathbf{T}', \Omega') \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D_c) \times \widetilde{H}^1(D), \quad (2.2.11)$$

avec $a_{T,\Omega}$ la forme bilinéaire continue définie par :

$$a_{T,\Omega}((\mathbf{T}, \Omega), (\mathbf{T}', \Omega')) = \int_{D_c} \sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{T} \cdot \text{rot } \overline{\mathbf{T}'} + \int_D j \omega \mu (\widetilde{\mathbf{T}} - \nabla \Omega) \cdot \overline{(\widetilde{\mathbf{T}'} - \nabla \Omega')},$$

et $l_{T,\Omega}$ la forme linéaire continue définie par :

$$l_{T,\Omega}((\mathbf{T}', \Omega')) = - \int_D j \omega \mu \mathbf{H}_s \cdot \overline{(\widetilde{\mathbf{T}'} - \nabla \Omega')}.$$

Par [Creusé et. al., 2013, Théorème 2.2], le problème (2.2.11) admet une unique solution $(\mathbf{T}, \Omega) \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D_c) \times \widetilde{H}^1(D)$. On peut en effet montrer que la forme bilinéaire $\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}a_{T,\Omega}$ est coercive sur $\widetilde{H}_0(\text{rot}, D_c) \times \widetilde{H}^1(D)$ et donc appliquer le Lemme de Lax-Milgram.

Comme pour la formulation $\mathbf{A} - \varphi$, en utilisant la décomposition de Helmholtz standard (1.3.8) pour l'espace $H_0(\text{rot}, D_c)$, on montre [Creusé et. al., 2013, Lemme 2.3] que l'on peut enlever la jauge sur la fonction test \mathbf{T}' de (2.2.11). En d'autres termes, la solution (\mathbf{T}, Ω) de (2.2.11) satisfait aussi :

$$a_{T,\Omega}((\mathbf{T}, \Omega), (\mathbf{T}', \Omega')) = l_{T,\Omega}((\mathbf{T}', \Omega')) \quad \forall (\mathbf{T}', \Omega') \in H_0(\text{rot}, D_c) \times \widetilde{H}^1(D). \quad (2.2.12)$$

2.2.2. Formulations variationnelles discrètes

On choisit un maillage \mathcal{T}_h régulier constitué de tétraèdres, comme déjà spécifié dans la section 1.3.2. Les potentiels vecteurs \mathbf{A} et \mathbf{T} sont approchés par les éléments finis de Nédélec, respectivement $\mathbf{A}_h \in \widetilde{X}_h(D)$ et $\mathbf{T}_h \in \widetilde{X}_h(D_c)$, et les potentiels scalaires φ et Ω par les éléments finis nodaux, respectivement $\varphi_h \in \widetilde{\Theta}_h(D_c)$ et $\Omega_h \in \widetilde{\Theta}_h(D)$.

La formulation discrète de $\mathbf{A} - \varphi$ s'écrit alors :

Trouver $(\mathbf{A}_h, \varphi_h) \in \widetilde{X}_h(D) \times \widetilde{\Theta}_h(D_c)$ tels que

$$a_{A,\varphi}((\mathbf{A}_h, \varphi_h), (\mathbf{A}'_h, \varphi'_h)) = l_{A,\varphi}((\mathbf{A}'_h, \varphi'_h)) \quad \forall (\mathbf{A}'_h, \varphi'_h) \in \widetilde{X}_h(D) \times \widetilde{\Theta}_h(D_c). \quad (2.2.13)$$

Dans le même esprit que pour le cas continu, [Creusé et. al., 2012, Théorème 2.2] assure que le problème (2.2.13) admet une unique solution $(\mathbf{A}_h, \varphi_h) \in \widetilde{X}_h(D) \times \widetilde{\Theta}_h(D_c)$.

La formulation discrète $\mathbf{T} - \Omega$ s'écrit :

Trouver $(\mathbf{T}_h, \Omega_h) \in \widetilde{X}_h(D_c) \times \widetilde{\Theta}_h(D)$ tels que

$$a_{T,\Omega}((\mathbf{T}_h, \Omega_h), (\mathbf{T}'_h, \Omega'_h)) = l_{T,\Omega}((\mathbf{T}'_h, \Omega'_h)) \quad \forall (\mathbf{T}'_h, \Omega'_h) \in \widetilde{X}_h(D_c) \times \widetilde{\Theta}_h(D). \quad (2.2.14)$$

[Creusé et. al., 2013, Théorème 2.4] assure que le problème (2.2.14) admet une unique solution $(\mathbf{T}_h, \Omega_h) \in \widetilde{X}_h(D_c) \times \widetilde{\Theta}_h(D)$.

Enfin, comme pour le cas continu, en utilisant une décomposition de Helmholtz discrète (1.3.9), on montre que l'on peut enlever les jauges sur les potentiels vecteurs :

- I) (2.2.13) reste valable pour tout $\mathbf{A}'_h \in X_h(D)$ (voir [Creusé et. al., 2012, Lemma 2.3]) ;
- II) (2.2.14) reste valable pour tout $\mathbf{T}'_h \in X_h(D_c)$ (voir [Creusé et. al., 2013, Lemma 2.6]).

2.2.3. Définition de l'erreur

On souhaite estimer l'erreur spatiale commise par l'approximation de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$:

$$\mathbf{e}_A = \mathbf{A} - \mathbf{A}_h \text{ et } e_\varphi = \varphi - \varphi_h \quad (2.2.15)$$

au sens de l'énergie :

$$e_{A,\varphi}^2 = \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_A \right\|^2 + \left\| \omega^{-1/2} \sigma^{1/2} (j \omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi) \right\|_{D_c}^2. \quad (2.2.16)$$

En revenant aux champs d'origine, on notera dans ce chapitre

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_h &= \text{rot } \mathbf{A}_h, \\ \mathbf{E}_h &= -(j \omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h). \end{aligned}$$

L'erreur (2.2.16) peut être exprimée en fonction des champs d'origine, en se rappelant les relations (1.2.1) et (1.2.4) :

$$e_{A,\varphi}^2 = \left\| \mu^{-1/2} (\mathbf{B} - \mathbf{B}_h) \right\|^2 + \left\| \omega^{-1/2} \sigma^{1/2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_h) \right\|_{D_c}^2. \quad (2.2.17)$$

On souhaite également estimer l'erreur spatiale commise par l'approximation de la formulation $\mathbf{T} - \Omega$:

$$\mathbf{e}_T = \mathbf{T} - \mathbf{T}_h \text{ et } e_\Omega = \Omega - \Omega_h \quad (2.2.18)$$

au sens de l'énergie :

$$e_{T,\Omega}^2 = \left\| \mu^{1/2} (\tilde{\mathbf{e}}_T - \nabla e_\Omega) \right\|^2 + \left\| (\omega \sigma)^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_T \right\|_{D_c}^2, \quad (2.2.19)$$

où l'on utilise, par abus de notation, le symbole $\tilde{\cdot}$ pour désigner une extension fixée à zéro en dehors du domaine conducteur D_c :

$$\widetilde{\mathbf{e}_T} = \widetilde{\mathbf{T}} - \widetilde{\mathbf{T}_h}.$$

On écrit alors sous forme compacte le champ \mathbf{H} : (1.2.16) devient :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \widetilde{\mathbf{T}} - \nabla \Omega \text{ dans } D. \quad (2.2.20)$$

En revenant aux champs d'origine (2.2.20) et (1.2.12), la solution numérique s'exprimera comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_h &= \mathbf{H}_s + \widetilde{\mathbf{T}}_h - \nabla \Omega_h, \\ \mathbf{J}_{e,h} &= \text{rot } \mathbf{T}_h. \end{aligned}$$

D'où l'expression de l'erreur (2.2.19) en fonction des champs d'origine :

$$e_{T,\Omega}^2 = \left\| \mu^{1/2} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_h) \right\|^2 + \left\| (\omega \sigma)^{-1/2} (\mathbf{J}_e - \mathbf{J}_{e,h}) \right\|_{D_c}^2. \quad (2.2.21)$$

En conclusion, l'erreur e globale issue de deux formulations est définie par :

$$e^2 = e_{A,\varphi}^2 + e_{T,\Omega}^2. \quad (2.2.22)$$

L'erreur locale e_T , calculée sur chaque tétraèdre T , est alors définie par :

$$\begin{aligned} e_T^2 &= \left\| \mu^{-1/2} (\mathbf{B} - \mathbf{B}_h) \right\|_T^2 + \left\| \omega^{-1/2} \sigma^{1/2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_h) \right\|_T^2 \\ &\quad + \left\| (\omega \sigma)^{-1/2} (\mathbf{J}_e - \mathbf{J}_{e,h}) \right\|_T^2 + \left\| \mu^{1/2} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_h) \right\|_T^2. \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Evidemment si $T \not\subset D_c$ alors les termes électriques ne sont pas considérés.

Remarque 2.2.1.

- * L'erreur e (2.2.22) est composée d'une partie quantifiant l'erreur sur l'énergie magnétique

$$\left\| \mu^{1/2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_h) \right\|^2 + \left\| \mu^{-1/2}(\mathbf{B} - \mathbf{B}_h) \right\|^2 ,$$

et d'une partie quantifiant l'erreur sur l'énergie électrique :

$$\left\| \omega^{-1/2} \sigma^{1/2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_h) \right\|^2 + \left\| (\omega \sigma)^{-1/2} (\mathbf{J}_e - \mathbf{J}_{e,h}) \right\|^2 .$$

- * On peut prouver que $e_{A,\varphi}^2$ définie par (2.2.16) est équivalente au résidu de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ [Creusé et. al., 2012, Lemme 4.2].
- * On peut également prouver que $e_{T,\Omega}^2$ définie par (2.2.19) est équivalente au résidu de la formulation $\mathbf{T} - \Omega$ [Creusé et. al., 2013, Lemme 5.1].

Dans les deux prochaines sections on développe deux types d'estimateurs équilibrés. Le premier, présenté dans la section 2.3, se base sur une formulation duale. Le deuxième, présenté dans la section 2.4, sur une reconstruction des flux équilibrés. Puisque la construction du premier estimateur s'appuie sur une résolution d'un problème complémentaire et donc implique un calcul *global*, on le dénote par $\eta_{glob,H_{sh}}$ ou η_{glob,H_s} . H_{sh} et H_s correspondent au type de source que l'on choisira pour la construction de l'estimateur. Puisque la construction du deuxième estimateur s'appuie sur une résolution des problèmes de Neumann *locaux* afin de construire les *flux* équilibrés, on le désigne par $\eta_{loc,flux}$.

2.3. ESTIMATEUR ÉQUILIBRÉ : CONSTRUCTION GLOBALE

Avant de définir l'estimateur et les résultats d'équivalence globale et d'efficacité locale, on développe des résultats techniques qui seront à la base de l'analyse qui suit.

2.3.1. Résultats auxiliaires

Soit

$$\mathbf{e} := -(\mathbf{e}_T - \nabla \alpha) , \quad (2.3.1)$$

où $\mathbf{e}_T = \mathbf{T} - \mathbf{T}_h$ d'après la définition (2.2.18), et $\alpha \in H_0^1(D_c)$ est défini comme l'unique solution de

$$\int_{D_c} \nabla \alpha \cdot \nabla \bar{\chi} = \int_{D_c} \mathbf{e}_T \cdot \nabla \bar{\chi} \quad \forall \chi \in H_0^1(D_c) . \quad (2.3.2)$$

On donne quelques remarques utiles sur \mathbf{e} .

Remarque 2.3.1.

- * En prenant $\chi = \alpha$ dans (2.3.2), d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\| \nabla \alpha \|_{D_c} \leq \| \mathbf{e}_T \|_{D_c} .$$

- * \mathbf{e} appartient à $H_0(\text{rot}, D_c)$ et il est tel que

$$\text{div } \mathbf{e} = 0 . \quad (2.3.3)$$

* Puisque $\nabla\alpha \in H_0(\text{rot}, D_c)$ et $\mathbf{e}_A \in H(\text{rot}, D_c)$, grâce au théorème de flux-divergence (1.3.23), on a

$$\int_{D_c} \nabla\alpha \cdot \text{rot } \overline{\mathbf{e}_A} = \int_{D_c} \text{rot } \nabla\alpha \cdot \overline{\mathbf{e}_A} + \int_{\Gamma_c} \nabla\alpha \times \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{e}_A} = 0,$$

d'où

$$\int_{D_c} -\mathbf{e}_T \cdot \text{rot } \overline{\mathbf{e}_A} = \int_{D_c} \mathbf{e} \cdot \text{rot } \overline{\mathbf{e}_A}. \quad (2.3.4)$$

On s'intéresse maintenant au problème variationnel suivant :

Trouver $(\mathbf{T}_e, \Omega_e) \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D_c) \times \widetilde{H}^1(D)$ tels que

$$a^*((\mathbf{T}_e, \Omega_e), (\mathbf{T}', \Omega')) = (\mathbf{e}, \mathbf{T}')_{D_c} \quad \forall (\mathbf{T}', \Omega') \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D_c) \times \widetilde{H}^1(D), \quad (2.3.5)$$

où a^* est la forme bilinéaire continue définie par :

$$\begin{aligned} a^*((\mathbf{T}, \Omega), (\mathbf{T}', \Omega')) &= \overline{a_{T,\Omega}((\mathbf{T}', \Omega'), (\mathbf{T}, \Omega))} \\ &= \int_{D_c} \sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{T} \cdot \overline{\text{rot } \mathbf{T}'} - \int j \omega \mu (\widetilde{\mathbf{T}} - \nabla \Omega) \cdot \overline{(\widetilde{\mathbf{T}'} - \nabla \Omega')}. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

L'existence et l'unicité de (\mathbf{T}_e, Ω_e) sont assurées [Creusé et. al., 2012, Théorème 2.1] car a^* est coercive sur $\widetilde{H}_0(\text{rot}, D_c) \times \widetilde{H}^1(D)$. De plus la solution satisfait la formulation (2.3.5) lorsque l'on enlève les jauges sur les fonctions tests.

Lemme 2.3.2. *La relation (2.3.5) est vérifiée pour toute fonction test $(\mathbf{T}', \Omega') \in H_0(\text{rot}, D_c) \times H^1(D)$.*

DÉMONSTRATION. D'après la décomposition de Helmholtz (1.3.8), chaque $\mathbf{T}' \in H_0(\text{rot}, D_c)$ s'écrit comme :

$$\mathbf{T}' = \psi + \nabla \tau,$$

où $\psi \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D_c)$ et $\tau \in H_0^1(D_c)$. On dénote $\tilde{\tau}$ l'extension de τ par zéro en dehors de D_c .

Dans le même esprit que [Creusé et. al., 2013, Lemme 2.3], on définit

$$\widehat{\Omega}' = \Omega' - \tilde{\tau} - 1/|D| \int_D \Omega' + 1/|D| \int_D \tilde{\tau}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} a^*((\mathbf{T}_e, \Omega_e), (\mathbf{T}', \Omega')) &= a^*((\mathbf{T}_e, \Omega_e), (\psi + \nabla \tau, \Omega')) \\ &= \int_{D_c} \sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{T}_e \cdot \overline{\text{rot } \psi} - \int j \omega \mu (\widetilde{\mathbf{T}}_e - \nabla \Omega_e) \cdot \overline{(\psi - \nabla(\Omega' - \tilde{\tau}))} \\ &= a^*((\mathbf{T}_e, \Omega_e), (\psi, \widehat{\Omega}')). \end{aligned}$$

De (2.3.5) on obtient :

$$a^*((\mathbf{T}_e, \Omega_e), (\mathbf{T}', \Omega')) = \int_{D_c} \mathbf{e} \cdot \overline{\psi}. \quad (2.3.7)$$

La formule de Green (1.3.22) associée à (2.3.3) conduit à :

$$\int_{D_c} \mathbf{e} \cdot \nabla \overline{\tau} = 0 \text{ pour tout } \tau \in H_0^1(D_c). \quad (2.3.8)$$

De (2.3.7) et (2.3.8), on déduit :

$$a^*((\mathbf{T}_e, \Omega_e), (\mathbf{T}', \Omega')) = a^*((\mathbf{T}_e, \Omega_e), (\psi, \widehat{\Omega}')) = \int_{D_c} \mathbf{e} \cdot \overline{\psi} + \int_{D_c} \mathbf{e} \cdot \nabla \overline{\tau} = \int_{D_c} \mathbf{e} \cdot \overline{\mathbf{T}'}.$$

□

Remarque 2.3.3. On rappelle que les espaces $\mathcal{D}(D)$ et $\mathcal{D}(D)^3$ dénotent les espaces des fonctions respectivement scalaires et vectorielles infiniment différentiables à support compact inclus dans D et $(\mathcal{D}(D_c)^3)'$ l'espace dual de $\mathcal{D}(D_c)^3$.

Corollaire 2.3.4. Soit $(\mathbf{T}_e, \Omega_e) \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D_c) \times \widetilde{H}^1(D)$ l'unique solution de (2.3.5). Alors

$$\begin{cases} \text{div}(\mu(\widetilde{\mathbf{T}}_e - \nabla \Omega_e)) = 0 & \text{dans } D, \quad (i) \\ \mu(\widetilde{\mathbf{T}}_e - \nabla \Omega_e) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \quad (ii) \end{cases} \quad (2.3.9)$$

et

$$\text{rot } \sigma^{-1} \text{rot } \mathbf{T}_e - j \omega \mu (\mathbf{T}_e - \nabla \Omega_e) = \mathbf{e} \quad \text{dans } (\mathcal{D}(D_c)^3)'. \quad (2.3.10)$$

DÉMONSTRATION.

I) D'après le Lemme 2.3.2, en prenant $\mathbf{T}' = 0$ et $\Omega' \in \mathcal{D}(D)$ dans (2.3.5), on obtient :

$$\int_D \mu (\widetilde{\mathbf{T}}_e - \nabla \Omega_e) \cdot \nabla \overline{\Omega'} = 0 \quad \forall \Omega' \in \mathcal{D}(D).$$

Par conséquent (2.3.9) (i) est vérifiée.

II) D'après le Lemme 2.3.2, en prenant $\mathbf{T}' = 0$ et $\Omega' \in H^1(D)$ dans (2.3.5), on obtient :

$$\int_D \mu (\widetilde{\mathbf{T}}_e - \nabla \Omega_e) \cdot \nabla \overline{\Omega'} = 0 \quad \forall \Omega' \in H^1(D).$$

D'après le théorème de Green (1.3.22) :

$$\begin{aligned}
0 &= - \int_D \operatorname{div} (\mu (\widetilde{\mathbf{T}}_e - \nabla \Omega_e)) \overline{\Omega'} + \langle (\mu (\widetilde{\mathbf{T}}_e - \nabla \Omega_e)) \cdot \mathbf{n}, \Omega' \rangle_\Gamma \\
&= \langle (\mu (\widetilde{\mathbf{T}}_e - \nabla \Omega_e)) \cdot \mathbf{n}, \Omega' \rangle_\Gamma \\
&= 0 \quad \forall \Omega' \in H^1(D).
\end{aligned}$$

D'où la relation (2.3.9) (ii).

III) En prenant $\mathbf{T}' \in \mathcal{D}(D_c)^3 \subset H_0(\operatorname{rot}, D_c)$ et $\Omega' = 0$ dans (2.3.5), on a :

$$\int_{D_c} (\sigma^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{T}_e \cdot \operatorname{rot} \overline{\mathbf{T}'} - j \omega \mu (\mathbf{T}_e - \nabla \Omega_e) \cdot \overline{\mathbf{T}'}) = 0 \quad \forall \mathbf{T}' \in \mathcal{D}(D_c)^3,$$

qui implique (2.3.10) au sens des distributions. \square

Corollaire 2.3.5. *On rappelle que D et D_c sont supposés simplement connexes avec Γ_c connexe. Soit \mathbf{e} défini par (2.3.1) et soit (\mathbf{T}_e, Ω_e) la solution de la formulation variationnelle (2.3.5). Alors il existe $\epsilon \in (0, 1/2)$ tel que*

$$\mathbf{T}_e \in H^{1/2+\epsilon}(D_c)^3, \quad (2.3.11)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{T}_e \in H^{1/2+\epsilon}(D_c)^3, \quad (2.3.12)$$

$$\Omega_e \in H^{1+\epsilon}(D), \quad (2.3.13)$$

avec

$$\|\mathbf{T}_e\|_{H^{1/2+\epsilon}(D_c)} + \|\operatorname{rot} \mathbf{T}_e\|_{H^{1/2+\epsilon}(D_c)} + \|\Omega_e\|_{H^{1+\epsilon}(D)} \leq c \|\mathbf{e}\|_{D_c}, \quad (2.3.14)$$

où c représente une constante indépendante de h .

DÉMONSTRATION. On procède en quatre étapes, une pour chaque relation à démontrer.

I) Tout d'abord on prouve (2.3.11).

Puisque [Monk, 2003, Théorème 3.50, page 71] :

$$\mathbf{T}_e \in H_0(\operatorname{rot}, D_c) \cap H(\operatorname{div}, D_c) \hookrightarrow H^{1/2+\epsilon}(D_c)^3,$$

à l'aide de l'inégalité de Friedrichs (1.3.10), on obtient :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{T}_e\|_{H^{1/2+\epsilon}(D_c)} &\leq c (\|\operatorname{rot} \mathbf{T}_e\|_{D_c} + \underbrace{\|\operatorname{div} \mathbf{T}_e\|_{D_c}}_{=0} + \|\mathbf{T}_e\|_{D_c}) \\
&\leq c \|\operatorname{rot} \mathbf{T}_e\|_{D_c}.
\end{aligned} \quad (2.3.15)$$

En prenant comme fonctions tests $\mathbf{T}' = \mathbf{T}_e$ et $\Omega' = \Omega_e$ dans (2.3.5) et en utilisant la coercivité de a^* , on obtient :

$$\|\operatorname{rot} \mathbf{T}_e\|_{D_c}^2 \leq |a^*((\mathbf{T}_e, \Omega_e), (\mathbf{T}_e, \Omega_e))| = |(\mathbf{e}, \mathbf{T}_e)_{D_c}| \leq c \|\mathbf{e}\|_{D_c} \|\operatorname{rot} \mathbf{T}_e\|_{D_c},$$

où, pour la dernière estimation, on a utilisé les inégalités de Cauchy-Schwarz et Friedrichs.

Ce résultat implique que

$$\|\operatorname{rot} \mathbf{T}_e\|_{D_c} \leq c \|\mathbf{e}\|_{D_c}. \quad (2.3.16)$$

Grâce à l'estimation (2.3.15) on conclut :

$$\|\mathbf{T}_e\|_{H^{1/2+\epsilon}(D_c)} \leq c \|\mathbf{e}\|_{D_c}. \quad (2.3.17)$$

II) On prouve ici (2.3.12). On peut déduire du Corollaire 2.3.4 que $\operatorname{rot} \mathbf{T}_e \in H(\operatorname{div}, D)$ vérifie au sens des distributions

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{T}_e = \sigma j \omega \mu (\mathbf{T}_e - \nabla \Omega_e) + \sigma \mathbf{e} \in L^2(D)^3. \quad (2.3.18)$$

De plus, $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{T}_e = 0$ dans D_c et le fait que $\mathbf{T}_e \times \mathbf{n} = 0$ sur Γ_c implique que $\operatorname{rot} \mathbf{T}_e \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ_c . On en déduit que

$$\operatorname{rot} \mathbf{T}_e \in H(\operatorname{rot}, D_c) \cap H_0(\operatorname{div}, D_c) = \{\mathbf{F} \in H(\operatorname{rot}, D_c) \cap H(\operatorname{div}, D_c); \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_c\}.$$

Par [Monk, 2003, Théorème 3.50, page 71] on a :

$$H(\operatorname{rot}, D_c) \cap H_0(\operatorname{div}, D_c) \hookrightarrow H^{1/2+\epsilon}(D_c)^3,$$

ainsi $\operatorname{rot} \mathbf{T}_e \in H^{1/2+\epsilon}(D_c)^3$ avec :

$$\begin{aligned} \|\operatorname{rot} \mathbf{T}_e\|_{H^{1/2+\epsilon}(D_c)} &\leq c \|\operatorname{rot} \mathbf{T}_e\|_{H(\operatorname{rot}, D_c) \cap H_0(\operatorname{div}, D_c)} \\ &\leq c (\|\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{T}_e\|_{D_c} + \|\operatorname{rot} \mathbf{T}_e\|_{D_c}). \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

On remarque que (2.3.18) conduit à l'estimation

$$\|\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{T}_e\|_{D_c} \leq \sigma_{\max} (\|\omega \mu (\mathbf{T}_e - \nabla \Omega_e)\|_{D_c} + \|\mathbf{e}\|_{D_c}).$$

En particulier, similairement à ce que l'on a fait au point I), en prenant comme fonctions tests $\mathbf{T}' = \mathbf{T}_e$ et $\Omega' = \Omega_e$ dans (2.3.5) et en utilisant la coercivité de a^* avec (2.3.15), on

obtient

$$\|\omega \mu(\mathbf{T}_e - \nabla \Omega_e)\|_{D_c}^2 \leq c |a^*((\mathbf{T}_e, \Omega_e), (\mathbf{T}_e, \Omega_e))| = c |(\mathbf{e}, \mathbf{T}_e)_{D_c}| \leq c \|\mathbf{e}\|_{D_c} \|\operatorname{rot} \mathbf{T}_e\|_{D_c}.$$

La norme $\|\operatorname{rot} \mathbf{T}_e\|_{D_c}$ est maintenant estimée par (2.3.16), ainsi

$$\|\omega \mu(\mathbf{T}_e - \nabla \Omega_e)\|_{D_c} \leq c \|\mathbf{e}\|_{D_c}.$$

Donc (2.3.19) devient :

$$\|\operatorname{rot} \mathbf{T}_e\|_{H^{1/2+\epsilon}(D_c)} \leq c \|\mathbf{e}\|_{D_c}. \quad (2.3.20)$$

III) On prouve ici (2.3.13).

- D'après le Corollaire 2.3.4 et le fait que $\operatorname{rot}(\tilde{\mathbf{T}}_e - \nabla \Omega_e) \in L^2(D)^3$, on a $\tilde{\mathbf{T}}_e - \nabla \Omega_e \in H(\operatorname{rot}, D) \cap H_0(\operatorname{div}_\mu, D)$, où

$$H_0(\operatorname{div}_\mu, D) = \{ \mathbf{F} \in L^2(D)^3; \operatorname{div}(\mu \mathbf{F}) \in L^2(D) \text{ et } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \}.$$

D'après le [Costabel et. al., 1999, Théorème 3.5] et le [Costabel et. al., 1999, Théorème 4.1] pour le cas de Dirichlet, de façon similaire pour Neumann on peut montrer que

$$H(\operatorname{rot}, D) \cap H_0(\operatorname{div}_\mu, D) \hookrightarrow H^\epsilon(D)$$

et que

$$\|\tilde{\mathbf{T}}_e - \nabla \Omega_e\|_{H^\epsilon(D)} \leq c \|\tilde{\mathbf{T}}_e - \nabla \Omega_e\|_{H(\operatorname{rot}, D) \cap H_0(\operatorname{div}_\mu, D)}.$$

Par conséquent, en utilisant la relation (i) de (2.3.9), l'inégalité de Friedrichs et la relation (2.3.20), on a

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{T}}_e - \nabla \Omega_e\|_{H^\epsilon(D)} &\leq c \|\operatorname{rot}(\tilde{\mathbf{T}}_e - \nabla \Omega_e)\|_{L^2(D)} \\ &= c \|\operatorname{rot} \mathbf{T}_e\|_{L^2(D_c)} \\ &\leq c \|\operatorname{rot} \mathbf{T}_e\|_{H^{1/2+\epsilon}(D_c)} \\ &\leq c \|\mathbf{e}\|_{D_c}. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

- Grâce au point I), $\mathbf{T}_e \in H^{1/2+\epsilon}(D_c)^3$. Cela implique que $\mathbf{T}_e \in H^\epsilon(D_c)^3$ et, d'après [Grisvard, 1985, Corollaire 1.4.4.5], $\tilde{\mathbf{T}}_e \in H^\epsilon(D)^3$ et vérifie

$$\|\tilde{\mathbf{T}}_e\|_{H^\epsilon(D)} \leq c \|\mathbf{T}_e\|_{H^\epsilon(D_c)} \leq c \|\mathbf{T}_e\|_{H^{1/2+\epsilon}(D_c)} \leq c \|\mathbf{e}\|_{D_c}, \quad (2.3.22)$$

où la dernière inégalité est obtenue grâce à (2.3.17).

Par (2.3.21) et (2.3.22), $\nabla \Omega_e \in H^\epsilon(D)$ et

$$\|\nabla \Omega_e\|_{H^\epsilon(D)} \leq c \|\mathbf{e}\|_{D_c}, \quad (2.3.23)$$

ceci prouve (2.3.13).

IV) Etant donné que la valeur moyenne de Ω_e est nulle sur D , on a l'estimation

$$\|\Omega_e\|_{H^{1+\epsilon}(D)} \sim \|\Omega_e\|_{H^1(D)} + \|\Omega_e\|_{H^{1+\epsilon}(D)} \leq c(\|\Omega_e\|_{H^1(D)} + \|\nabla \Omega_e\|_{H^\epsilon(D)}) \leq c\|\nabla \Omega_e\|_{H^\epsilon(D)}$$

qui, avec (2.3.17), (2.3.20) et (2.3.23) conduit directement à (2.3.14). \square

Théorème 2.3.6. *Soient D et D_c simplement connexes avec Γ_c connexe. Soit \mathbf{e} défini par (2.3.1) et soit (\mathbf{T}_e, Ω_e) la solution de la formulation variationnelle (2.3.5). Alors il existe $\epsilon \in (0, 1/2)$ tel que*

$$\|\mathbf{e}\|_{D_c} \leq c h^\epsilon e_{T,\Omega}, \quad (2.3.24)$$

où c représente une constante indépendante de h .

DÉMONSTRATION. Grâce au Lemme 2.3.2 on peut choisir $\mathbf{T}' = \mathbf{e}$ et $\Omega' = -e_\Omega = \Omega_h - \Omega$ dans (2.3.5). Ainsi on obtient

$$\|\mathbf{e}\|_{D_c}^2 = -a^*((\mathbf{T}_e, \Omega_e), (\mathbf{e}_T, e_\Omega)) + a^*((\mathbf{T}_e, \Omega_e), (\nabla \alpha, -e_\Omega)).$$

On remarque que $a^*((\mathbf{T}_e, \Omega_e), (\nabla \alpha, 0)) = (\mathbf{e}, \nabla \alpha) = 0$ par la formule de Green (1.3.22) et le fait que $\operatorname{div} \mathbf{e} = 0$ (vu en (2.3.3)) avec les conditions au bord sur α . En conséquence, en se rappelant de la définition (2.3.6) de a^* , on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}\|_{D_c}^2 &= -a^*((\mathbf{T}_e, \Omega_e), (\mathbf{e}_T, e_\Omega)) \\ &= -\overline{a_{T,\Omega}((\mathbf{e}_T, e_\Omega), (\mathbf{T}_e, \Omega_e))} \\ &= -\overline{a_{T,\Omega}((\mathbf{e}_T, e_\Omega), (\mathbf{T}_e - \mathbf{T}_{e,h}, \Omega_e - \Omega_{e,h}))}, \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

où la dernière égalité est due à la propriété d'orthogonalité de $a_{T,\Omega}$ démontrée dans [Creusé et. al., 2013, Lemme 2.7] en ayant pris comme fonctions tests $\mathbf{T}_{e,h} \in X_h(D_c)$ et $\Omega_{e,h} \in \Theta_h(D)$, à savoir :

$$a_{T,\Omega}((\mathbf{e}_T, e_\Omega), (\mathbf{T}_{e,h}, \Omega_{e,h})) = 0.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (2.3.25) prend la forme :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{e}\|_{D_c}^2 &= -(\sigma^{-1} \operatorname{rot}(\mathbf{T}_e - \mathbf{T}_{e,h}), \operatorname{rot} \mathbf{e}_T)_{D_c} \\
&\quad - j\omega (\mu(\mathbf{T}_e - \mathbf{T}_{e,h} - \nabla(\Omega_e - \Omega_{e,h})), \tilde{\mathbf{e}}_T - \nabla e_\Omega) \\
&\leq |\omega|^{-1/2} \sigma_{\min}^{-1/2} \|\omega^{1/2} \sigma^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{e}_T\|_{D_c} \|\operatorname{rot}(\mathbf{T}_e - \mathbf{T}_{e,h})\|_{D_c} \\
&\quad + |\omega| \mu_{\max}^{1/2} \|\mu^{1/2}(\tilde{\mathbf{e}}_T - \nabla e_\Omega)\| \|\tilde{\mathbf{T}}_e - \tilde{\mathbf{T}}_{e,h} - \nabla(\Omega_e - \Omega_{e,h})\|.
\end{aligned}$$

Il nous reste donc à estimer $\|\mathbf{T}_e - \mathbf{T}_{e,h}\|_{D_c}$, $\|\operatorname{rot}(\mathbf{T}_e - \mathbf{T}_{e,h})\|_{D_c}$ et $\|\nabla(\Omega_e - \Omega_{e,h})\|$.

- Grâce au Corollaire 2.3.5 et à [Boffi et. al., 2013, Section 2.5.4], on peut définir l'opérateur d'interpolation de Nédélec $\mathbf{T}_{e,h} := \mathcal{I}_{\mathcal{N}\mathcal{D}} \mathbf{T}_e$ (pour plus de détails sur cet opérateur on renvoie à la section 1.3.4). Ainsi l'estimation (2.5.52) de [Boffi et. al., 2013, Proposition 2.5.7] (1.3.20) donne :

$$\|\mathbf{T}_e - \mathbf{T}_{e,h}\|_{D_c} \leq c h^{1/2+\epsilon} (\|\mathbf{T}_e\|_{H^{1/2+\epsilon}(D_c)} + \|\operatorname{rot} \mathbf{T}_e\|_{L^p(D_c)})$$

avec $p > 2$. D'autre part on a aussi que $H^{1/2+\epsilon}(D_c) \hookrightarrow L^p(D_c)$ pour tout $p \leq 3/(1-\epsilon)$. Donc $H^{1/2+\epsilon}(D_c) \hookrightarrow L^p(D_c)$ pour tout $p \in (2, 3/(1-\epsilon)]$. Il est alors immédiat, d'après le Corollaire 2.3.5, que

$$\|\mathbf{T}_e - \mathbf{T}_{e,h}\|_{D_c} \leq c h^{1/2+\epsilon} \|\mathbf{e}\|_{D_c}. \quad (2.3.26)$$

Similairement, l'estimation (1.3.21) et le Corollaire 2.3.5 donnent

$$\|\operatorname{rot}(\mathbf{T}_e - \mathbf{T}_{e,h})\|_{D_c} \leq c h^{1/2+\epsilon} \|\operatorname{rot} \mathbf{T}_e\|_{H^{1/2+\epsilon}(D_c)} \leq c h^{1/2+\epsilon} \|\mathbf{e}\|_{D_c}. \quad (2.3.27)$$

- Soit $\Omega_{e,h} = \mathcal{I}_{Cl}^1 \Omega_e$, où \mathcal{I}_{Cl}^1 représente l'opérateur d'interpolation de Clément comme défini dans la section 1.3.4. D'après l'estimation (1.3.18) appliquée à Ω_e , on obtient :

$$\|\Omega_e - \Omega_{e,h}\|_{H^1(D)} \leq c h^\epsilon \|\Omega_e\|_{H^{1+\epsilon}(D)}. \quad (2.3.28)$$

Le Corollaire 2.3.5 associé à l'inégalité (2.3.28) mène à :

$$\|\Omega_e - \Omega_{e,h}\|_{H^1(D)} \leq c h^\epsilon \|\mathbf{e}\|_{D_c}. \quad (2.3.29)$$

Ainsi, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et aux estimées (2.3.26), (2.3.27) et (2.3.29), on conclut :

$$\|\mathbf{e}\|_{D_c} \leq c \max(\sigma_{\min}^{-1/2} |\omega|^{1/2}, |\omega| \mu_{\max}^{1/2}) h^\epsilon e_{T,\Omega}.$$

□

2.3.2. Équivalence entre estimateur et erreur

Régularité du terme source

Remarque 2.3.7. Dans ce qui suit on fait l'hypothèse que \mathbf{H}_s appartient à $H^{1+\delta}(D)^3$ avec $0 < \delta \leq 1$. Dans ce cas, comme spécifié dans la section 1.3.4, on peut définir l'opérateur d'interpolation global dans l'espace de Nédélec $\mathbf{H}_{s,h} := \mathcal{I}_{\mathcal{ND}} \mathbf{H}_s$ et utiliser l'estimation (1.3.19).

Cependant, afin que la formulation variationnelle soit bien posée, il est suffisant d'avoir $\mathbf{H}_s \in H_0(\text{rot}, D)$, donc cette hypothèse de régularité peut sembler peu naturelle. Néanmoins dans ce cas on pourra inclure dans l'estimateur l'erreur d'approximation du terme source \mathbf{H}_s .

Définition de l'estimateur

On définit l'estimateur d'erreur *a posteriori* comme

$$\eta_{\text{glob}, H_{sh}}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{\text{magnétique}, T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h, T \subset D_c} \eta_{\text{électrique}, T}^2, \quad (2.3.30)$$

où les contributions locales sont données par :

$$\begin{aligned} \eta_{\text{magnétique}, T}^2 &= \|\mu^{1/2}(\mathbf{H}_h - \mu^{-1}\mathbf{B}_h + \mathbf{H}_{s,h} - \mathbf{H}_s)\|_T^2 \\ &= \|\mu^{1/2}(\mathbf{H}_{s,h} + \tilde{\mathbf{T}}_h - \nabla\Omega_h - \mu^{-1}\text{rot } \mathbf{A}_h)\|_T^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \eta_{\text{électrique}, T}^2 &= \|(\omega\sigma)^{-1/2}(\mathbf{J}_{e,h} - \sigma\mathbf{E}_h)\|_T^2 \\ &= \|(\omega\sigma)^{-1/2}(\text{rot } \mathbf{T}_h - \sigma(j\omega\mathbf{A}_h + \nabla\varphi_h))\|_T^2. \end{aligned}$$

Dans ce paragraphe, pour alléger les notations, on utilisera simplement η au lieu de $\eta_{\text{glob}, H_{sh}}$. Similairement à la notation pour l'erreur locale (2.2.23), on définit l'estimateur local par

$$\eta_T := (\eta_{\text{magnétique}, T}^2 + \eta_{\text{électrique}, T}^2)^{1/2}. \quad (2.3.31)$$

Equivalence globale

Théorème 2.3.8. Soient D et D_c simplement connexes avec Γ_c connexe aussi. Soit $\mathbf{H}_s \in H^{1+\delta}(D)^3$ avec $0 < \delta \leq 1$, alors on a l'égalité suivante

$$\eta^2 = e^2 + h.o.t., \quad (2.3.32)$$

où *h.o.t.* dénote des termes d'ordre supérieur par rapport l'erreur e^2 . Ces termes correspondent au terme r , défini en (2.3.36).

DÉMONSTRATION. En disposant des lois de comportement (1.1.8) et (1.1.9), on peut séparer les termes de l'estimateur comme suit :

$$\begin{aligned}
\eta^2 &= \|\mu^{1/2}(\mathbf{H}_h - \mathbf{H} + \mu^{-1}(\mathbf{B} - \mathbf{B}_h) + \mathbf{H}_{s,h} - \mathbf{H}_s)\|_D^2 \\
&\quad + \|(\omega\sigma)^{-1/2}(\mathbf{J}_{e,h} - \mathbf{J}_e + \sigma(\mathbf{E} - \mathbf{E}_h))\|_{D_c}^2 \\
&= \|\mu^{1/2}(\mathbf{H}_h - \mathbf{H})\|_D^2 + \|\mu^{-1/2}(\mathbf{B} - \mathbf{B}_h)\|_D^2 + \|\mu^{1/2}(\mathbf{H}_s - \mathbf{H}_{s,h})\|_D^2 \\
&\quad + 2\Re((\mathbf{H}_s - \mathbf{H}_{s,h}, (\mathbf{B} - \mathbf{B}_h)) + (\mathbf{H}_s - \mathbf{H}_{s,h}, \mu(\mathbf{H}_h - \mathbf{H})) + (\mathbf{H}_h - \mathbf{H}, \mathbf{B} - \mathbf{B}_h)) \\
&\quad + \|(\omega\sigma)^{-1/2}(\mathbf{J}_{e,h} - \mathbf{J}_e)\|_{D_c}^2 + \|\omega^{-1/2}\sigma^{1/2}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_h)\|_{D_c}^2 \\
&\quad + 2\Re(\omega^{-1}(\mathbf{J}_{e,h} - \mathbf{J}_e, \mathbf{E} - \mathbf{E}_h)_{D_c}), \tag{2.3.33}
\end{aligned}$$

où \Re dénote l'opérateur *partie réelle*. De la formule de Green (1.3.23) et des conditions au bord sur \mathbf{e}_A on remarque que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{H}_h - \mathbf{H}, \mathbf{B} - \mathbf{B}_h) &= \int_D (\mathbf{H}_s + \tilde{\mathbf{T}}_h - \nabla\Omega_h - \mathbf{H}_s - \tilde{\mathbf{T}} + \nabla\Omega) \cdot \text{rot}(\overline{\mathbf{A} - \mathbf{A}_h}) \\
&= - \int_D (\mathbf{e}_T - \nabla e_\Omega) \cdot \text{rot} \bar{\mathbf{e}}_A = - \int_{D_c} \mathbf{e}_T \cdot \text{rot} \bar{\mathbf{e}}_A. \tag{2.3.34}
\end{aligned}$$

De plus, de la formule de Green (1.3.23) et des conditions au bord sur \mathbf{e}_T on remarque que

$$\begin{aligned}
\omega^{-1}(\mathbf{J}_{e,h} - \mathbf{J}_e, \mathbf{E} - \mathbf{E}_h)_{D_c} &= \omega^{-1} \int_{D_c} \text{rot}(\tilde{\mathbf{T}}_h - \tilde{\mathbf{T}}) \cdot (\overline{j\omega(\mathbf{A} - \mathbf{A}_h) + \nabla(\varphi - \varphi_h)}) \\
&= -\omega^{-1} \int_{D_c} \text{rot} \mathbf{e}_T \cdot (\overline{j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi}) = j \int_{D_c} \mathbf{e}_T \cdot \text{rot} \bar{\mathbf{e}}_A. \tag{2.3.35}
\end{aligned}$$

En se rappelant des définitions de l'erreur (2.2.22) et des potentiels ainsi que des relations (2.3.34) et (2.3.35), l'identité (2.3.33) prend la forme :

$$\eta^2 = e^2 + r,$$

avec

$$\begin{aligned} r = & 2 \Re ((\mathbf{H}_s - \mathbf{H}_{s,h}, (\mathbf{B} - \mathbf{B}_h)) + (\mathbf{H}_s - \mathbf{H}_{s,h}, \mu (\mathbf{H}_h - \mathbf{H})) + (1 - j) (-\mathbf{e}_T, \text{rot } \mathbf{e}_A)_{D_c}) \\ & + \| \mu^{1/2} (\mathbf{H}_s - \mathbf{H}_{s,h}) \|_D^2. \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

On va donc montrer que r est un terme d'ordre supérieur par rapport à l'erreur e^2 , ainsi on parviendra à la conclusion (2.3.32). Estimons chaque terme de (2.3.36). On rappelle que c représente une constante quelconque indépendante de h .

- Focalisons nous sur $(\mathbf{H}_s - \mathbf{H}_{s,h}, \mathbf{B} - \mathbf{B}_h)$ et $(\mathbf{H}_s - \mathbf{H}_{s,h}, \mu (\mathbf{H}_h - \mathbf{H}))$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (1.3.19) donnent

$$\begin{aligned} |(\mathbf{H}_s - \mathbf{H}_{s,h}, (\mathbf{B} - \mathbf{B}_h))| & \leq \| \mathbf{H}_s - \mathbf{H}_{s,h} \| \mu_{\max}^{1/2} \| \mu^{-1/2} (\mathbf{B} - \mathbf{B}_h) \| \\ & \leq c \mu_{\max}^{1/2} \| \mathbf{H}_s \|_{H^{1+\delta}(D)^3} h^{1+\delta} e_{A,\varphi}, \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

et

$$\begin{aligned} |(\mathbf{H}_s - \mathbf{H}_{s,h}, \mu (\mathbf{H}_h - \mathbf{H}))| & \leq \| \mathbf{H}_s - \mathbf{H}_{s,h} \| \mu_{\max}^{1/2} \| \mu^{1/2} (\mathbf{H}_h - \mathbf{H}) \| \\ & \leq c \mu_{\max}^{1/2} \| \mathbf{H}_s \|_{H^{1+\delta}(D)^3} h^{1+\delta} e_{T,\Omega}, \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

où $e_{A,\varphi}$ et $e_{T,\Omega}$ sont respectivement définies par (2.2.17) et (2.2.21).

- Concernant $(-\mathbf{e}_T, \text{rot } \mathbf{e}_A)_{D_c}$, de (2.3.1) et (2.3.4) et, ensuite, du résultat (2.3.24) du Théorème 2.3.6, on a :

$$|(\mathbf{e}_T, \text{rot } \mathbf{e}_A)_{D_c}| = |(\mathbf{e}, \text{rot } \mathbf{e}_A)_{D_c}| \leq \| \mathbf{e} \| \| \text{rot } \mathbf{e}_A \| \leq c h^\epsilon e_{T,\Omega} e_{A,\varphi}. \quad (2.3.39)$$

Pour estimer le terme (2.3.36), on utilise les estimations (1.3.19), (2.3.37), (2.3.38) et (2.3.39) pour obtenir :

$$|r| \leq c (h^{1+\delta} e_{A,\varphi} + h^{1+\delta} e_{T,\Omega} + h^\epsilon e_{T,\Omega} e_{A,\varphi} + h^{2+2\delta}). \quad (2.3.40)$$

Une telle estimation montre que r est un terme d'ordre supérieur : si l'erreur décroît comme h^s avec $0 < s \leq 1$, alors, d'après l'estimation (2.3.40) et le fait que $h^{1+\delta} \leq ch^s h^\delta$, on a que

$$|r| \leq c(h^\delta + h^\epsilon + h^{2\delta})h^{2s}.$$

En conclusion on a bien $|r| = o(h^{2s})$. □

Efficacité locale

Concernant l'efficacité locale, on peut prouver le résultat suivant.

Théorème 2.3.9. *Soit $\mathbf{H}_s \in H^{1+\delta}(D)^3$ avec $0 < \delta \leq 1$. Alors on a que :*

$$\eta_T \leq 2e_T + h.o.t., \quad (2.3.41)$$

où $h.o.t.$ dénote un terme d'ordre supérieur par rapport l'erreur e_T .

DÉMONSTRATION. Grâce aux lois de comportement (1.1.8) et (1.1.9), à l'inégalité triangulaire et à la propriété $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, on voit que

$$\begin{aligned} \eta_T^2 &= \eta_{\text{magnétique},T}^2 + \eta_{\text{électrique},T}^2 \\ &= \left\| \mu^{1/2}(\mathbf{H}_h - \mathbf{H} + \mu^{-1}\mathbf{B} - \mu^{-1}\mathbf{B}_h) + \mu^{1/2}(\mathbf{H}_{s,h} - \mathbf{H}_s) \right\|_T^2 \\ &\quad + \left\| (\omega\sigma)^{-1/2}(\mathbf{J}_{e,h} - \mathbf{J}_e + \sigma\mathbf{E} - \sigma\mathbf{E}_h) \right\|_T^2 \\ &\leq 2 \left\| \mu^{1/2}(\mathbf{H}_h - \mathbf{H}) + \mu^{1/2}(\mathbf{H}_{s,h} - \mathbf{H}_s) \right\|_T^2 + 2 \left\| \mu^{-1/2}(\mathbf{B} - \mathbf{B}_h) \right\|_T^2 \\ &\quad + 2 \left\| (\omega\sigma)^{-1/2}(\mathbf{J}_{e,h} - \mathbf{J}_e) \right\|_T^2 + 2 \left\| \omega^{-1/2}\sigma^{1/2}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_h) \right\|_T^2 \\ &\leq 2 \left(\left\| (\omega\sigma)^{-1/2}(\mathbf{J}_{e,h} - \mathbf{J}_e) \right\|_T^2 + \left\| \omega^{-1/2}\sigma^{1/2}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_h) \right\|_T^2 + \left\| \mu^{-1/2}(\mathbf{B} - \mathbf{B}_h) \right\|_T^2 \right) \\ &\quad + 4 \left\| \mu^{1/2}(\mathbf{H}_h - \mathbf{H}) \right\|_T^2 + 4 \left\| \mu^{1/2}(\mathbf{H}_{s,h} - \mathbf{H}_s) \right\|_T^2 \\ &\leq 4e_T^2 + 4ch^{2+2\delta}\mu_{\max} \|\mathbf{H}_s\|_{H^{1+\delta}(D)^3}, \end{aligned}$$

où l'estimation (1.3.19) a été utilisée dans la dernière inégalité. La conclusion (2.3.41) suit en se rappelant de la relation $(a^2+b^2)^{1/2} \leq a+b$. □

Sans approximation du terme source

Remarque 2.3.10. *Si l'on suppose que le code de calcul est capable d'approcher le terme source sans introduire une erreur plus importante que celle introduite par la méthode numérique même¹, alors on peut supposer simplement que $H_s \in H_0(\text{rot}, D)$. On va adapter à ce nouveau cadre les résultats précédents.*

Définition de l'estimateur

Soit

$$\eta_{\text{glob}, H_s}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{\text{magnétique}, T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h, T \subset D_c} \eta_{\text{électrique}, T}^2. \quad (2.3.42)$$

l'estimateur dans le cas où l'on n'introduit pas d'approximation du terme source. La différence réside dans le fait que, cette fois, la contribution magnétique de l'estimateur sera donnée par :

$$\begin{aligned} \eta_{\text{magnétique}, T}^2 &= \|\mu^{1/2}(\mathbf{H}_h - \mu^{-1}\mathbf{B}_h)\|_T^2 \\ &= \|\mu^{1/2}(\mathbf{H}_s + \tilde{\mathbf{T}}_h - \nabla\Omega_h - \mu^{-1}\text{rot } \mathbf{A}_h)\|_T^2. \end{aligned} \quad (2.3.43)$$

Par contre la contribution électrique $\eta_{\text{électrique}, T}$ reste inchangée. Dans ce paragraphe, pour alléger les notations, on utilisera simplement η au lieu de η_{glob, H_s} .

Equivalence globale

Corollaire 2.3.11. *Soient D et D_c simplement connexes avec Γ_c connexe aussi. Soit $\mathbf{H}_s \in H_0(\text{rot}, D)$, alors on a que :*

$$\eta^2 = e^2 + h.o.t., \quad (2.3.44)$$

où *h.o.t.* dénote le terme d'ordre supérieur par rapport l'erreur e^2 .

DÉMONSTRATION. La preuve suit les mêmes étapes que celles du Théorème 2.3.8, avec la différence que, cette fois, les termes impliquant $\mathbf{H}_s - \mathbf{H}_{s,h}$ ont disparu. Ainsi on arrive à la relation

$$\eta^2 = e^2 + r,$$

avec

$$r = (1 - j)(-\mathbf{e}_T, \text{rot } \mathbf{e}_A)_{D_c}. \quad (2.3.45)$$

Ce terme peut être estimé comme déjà fait dans la preuve du Théorème 2.3.8, et reste toujours un terme négligeable par rapport à l'erreur. \square

1. Cela peut être accompli en prenant un bon nombre des points de Gauss lors de l'intégration du terme source.

Efficacité locale

Corollaire 2.3.12. *Soit $\mathbf{H}_s \in H_0(\text{rot}, D)$, alors on a :*

$$\eta_T \leq \sqrt{2} e_T. \quad (2.3.46)$$

DÉMONSTRATION. La preuve est en tout point similaire à celle du Théorème 2.3.9, en se rappelant que le terme magnétique de l'estimateur est maintenant donné par (2.3.43). \square

2.4. ESTIMATEUR ÉQUILIBRÉ : CONSTRUCTION LOCALE

Au lieu de s'appuyer sur une résolution duale du problème, on peut construire un estimateur basé sur des résolutions de problèmes locaux. Cela permet d'avoir un estimateur pour l'une des deux erreurs $e_{A\varphi}$ ou $e_{T\Omega}$ et non pas sur leur somme.

On se focalisera sur la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ seulement. Le but consiste donc à estimer l'erreur $e_{A\varphi}$ définie par (2.2.16).

On introduit dans la prochaine sous-section le cadre pour cette nouvelle approche, en particulier pour définir les variables auxiliaires, qui seront ce que l'on appelle des *champs admissibles* pour la densité de courant électrique et le champ magnétique.

Ensuite on montre l'équivalence de l'estimateur avec l'erreur.

2.4.1. Technique des flux équilibrés

On suit une approche de type point selle, qui s'inspire de ce qui a été fait dans [Cochez-Dhondt, 2007, Section 2.4]. On introduit une variable auxiliaire $\mathbf{k} = \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}$ et l'on considère le problème suivant :

Trouver $(\mathbf{k}, \mathbf{A}, \varphi) \in H(\text{rot}, D) \times L^2(D)^3 \times \widetilde{H}^1(D_c)$ tels que

$$\begin{aligned} (\mu \mathbf{k}, \mathbf{v}) - (\text{rot } \mathbf{v}, \mathbf{A}) &= 0 \quad \forall \mathbf{v} \in H(\text{rot}, D), \\ (\text{rot } \mathbf{k}, \mathbf{w}) + \frac{j}{\omega} (\sigma(j\omega \mathbf{A} + \nabla \varphi), \mathbf{w})_{D_c} &= (\mathbf{J}_s, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in L^2(D)^3. \end{aligned}$$

Dans cette section on a recours aux espaces déjà définis dans la section 1.3.3 à la page 15 : les espaces de Nédélec $\mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$, de Raviart-Thomas $\mathcal{RT}_1(\mathcal{T}_h)$ et de Raviart-Thomas jaugé \widetilde{Y}_h^l .

Le couple d'espaces d'ordre 1 pour approcher ce problème est donné par $(\mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h), \widetilde{Y}_h^0)$.

Un choix naturel pour approcher le flux \mathbf{k}_h est $\mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$. On voudrait aussi que le terme $\sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h)$ appartienne à \widetilde{Y}_h^0 , or il n'est pas à divergence nulle. Pour cette raison on va construire dans la suite un champ corrigé qui satisfera cette contrainte.

Flux équilibrés

On introduit des flux équilibrés pour la contribution de la divergence similairement à ceux proposés dans [Cochez-Dhondt et Nicaise, 2010]. Soit $l_F \in \mathbb{P}_1(F)$ un flux tel qu'il vérifie les

équations :

$$\int_T \sigma(j \omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h) \cdot \nabla w_h = \int_{\partial T} l_T w_h, \quad \forall w_h \in \mathbb{P}_1(T), T \in \mathcal{T}_h : T \subset D_c, \quad (2.4.1)$$

où $l_T = l_F \mathbf{n}_T \cdot \mathbf{n}_F$ et $l_F = 0$ si $F \subset \Gamma_c$. On remarque que la formulation discrète (2.2.13) avec $\mathbf{A}'_h = 0$ et $\varphi'_h = \lambda_{\mathbf{x}}$, où $\lambda_{\mathbf{x}}$ est la fonction de base \mathbb{P}_1 -conforme standard associée au nœud $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_h$, mène à

$$\int_{\omega_{\mathbf{x}}} \sigma(j \omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h) \nabla \lambda_{\mathbf{x}} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{N}_h,$$

où $\omega_{\mathbf{x}}$ est l'ensemble des tétraèdres qui contiennent le nœud \mathbf{x} . L'existence des flux $l_F \in \mathbb{P}_1(F)$ est assurée car, grâce à cette relation, on peut se ramener à un problème comme celui dans [Ainsworth et Oden, 2000, Section 6.4], où une construction des flux $l_F \in \mathbb{P}_1(F)$ dans le cas bidimensionnel est proposée. Cependant dans nos applications on a construit l_F par (A.1.1), tout comme dans [Cochez-Dhondt, 2007]. Même si ces flux ne vérifient plus forcément (2.4.1), nous verrons que la fiabilité reste bien démontrée et que les résultats numériques obtenus sont très satisfaisants.

On calcule maintenant le flux discret $\mathbf{j}_h \in H(\text{div}, D_c)$ de tel sorte que $\mathbf{j}_h|_T \in \mathcal{RT}_1(T)$ pour tout $T \in \mathcal{T}_h : T \subset D_c$, comme l'unique solution du système :

$$\int_F \mathbf{j}_h \cdot \mathbf{n}_F q = \int_F l_F q \quad \forall q \in \mathbb{P}_1(F), F \subset T, T \in \mathcal{T}_h : T \subset D_c, \quad (2.4.2)$$

$$\int_T \mathbf{j}_h = \int_T \sigma(j \omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h : T \subset D_c. \quad (2.4.3)$$

Pour tout $T \in \mathcal{T}_h : T \subset D_{nc}$ on considère une extension régulière $\mathbf{j}_h = 0$ de telle sorte que $\mathbf{j}_h \in H(\text{div}, D)$, compte tenu que $\mathbf{j}_h \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ_c comme conséquence de (2.4.2), et que $l_F = 0$ pour tout $F \subset \Gamma_c$. Grâce à la continuité de la composante normale de \mathbf{j}_h , $\mathbf{j}_h \in \mathcal{RT}_1(\mathcal{T}_h)$. De cette construction on en déduit le lemme suivant.

Lemme 2.4.1. *Si $\mathbf{j}_h \in \mathcal{RT}_1(\mathcal{T}_h)$ est tel que (2.4.2) et (2.4.3) sont vérifiées, alors $\text{div } \mathbf{j}_h = 0$.*

DÉMONSTRATION. Du théorème de flux-divergence (1.3.22) et des relations (2.4.1), (2.4.2) et (2.4.3), on a que pour tout $\xi_h \in \Theta_h^0(D)$, c'est-à-dire pour $\xi_h \in H_0^1(D)$ tel que $\xi_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h$,

$$\begin{aligned} \int_D \text{div } \mathbf{j}_h \xi_h &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} - \int_T \mathbf{j}_h \cdot \nabla \xi_h + \int_{\partial T} \mathbf{j}_h \cdot \mathbf{n}_T \xi_h \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} - \int_T \sigma(j \omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h) \cdot \nabla \xi_h + \sum_{F \subset \partial T} \int_F \mathbf{j}_h \cdot \mathbf{n}_F \mathbf{n}_T \cdot \mathbf{n}_F \xi_h \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} - \int_T \sigma(j \omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h) \cdot \nabla \xi_h + \sum_{F \subset \partial T} \int_F l_F \mathbf{n}_T \cdot \mathbf{n}_F \xi_h = 0. \end{aligned}$$

□

Problème magnétostatique

Puisque \mathbf{J}_s et \mathbf{j}_h n'appartiennent pas à $\widetilde{Y}_h^0(D)$, on considère leurs projection Π_h dans cet espace par rapport au produit scalaire standard. Ainsi on définit $\widetilde{\mathbf{J}}_h = \Pi_h \mathbf{J}_s - \Pi_h \mathbf{j}_h$. On peut formuler le problème alternatif suivant :

Trouver $\widetilde{\mathbf{A}} \in \widetilde{H}_0(\text{rot})$ tel que

$$\int_D \mu^{-1} \text{rot } \widetilde{\mathbf{A}} \cdot \text{rot } \widetilde{\mathbf{A}}' = \int_D \widetilde{\mathbf{J}}_h \cdot \widetilde{\mathbf{A}}' \quad \forall \widetilde{\mathbf{A}}' \in \widetilde{H}_0(\text{rot}). \quad (2.4.4)$$

On remarque que, puisque $\text{div } \widetilde{\mathbf{J}}_h = 0$, on peut enlever la jauge sur la fonction test de (2.4.4), [Tang, 2012, Lemme 3.15], on a alors :

$$\int_D \mu^{-1} \text{rot } \widetilde{\mathbf{A}} \cdot \text{rot } \mathbf{A}' = \int_D \widetilde{\mathbf{J}}_h \cdot \mathbf{A}' \quad \forall \mathbf{A}' \in H_0(\text{rot}, D). \quad (2.4.5)$$

Pour approcher opportunément cette équation on utilise la décomposition de Helmholtz discrète (1.3.9) pour l'espace X_h dans le sous-espace de X_h composé des fonctions à divergence discrète nulle et à rotationnel discret nul :

$$X_h = \widetilde{X}_h \overset{\perp}{\oplus} \nabla \Theta_h^0.$$

Cette décomposition est orthogonale par rapport au produit scalaire standard. Le problème approché de (2.4.4) consiste alors à

Trouver $\widetilde{\mathbf{A}}_h \in \widetilde{X}_h$ solution de

$$\int_D \mu^{-1} \text{rot } \widetilde{\mathbf{A}}_h \cdot \text{rot } \widetilde{\mathbf{A}}_h' = \int_D \widetilde{\mathbf{J}}_h \cdot \widetilde{\mathbf{A}}_h' \quad \forall \widetilde{\mathbf{A}}_h' \in \widetilde{X}_h(D). \quad (2.4.6)$$

D'après l'inégalité de Friedrichs discrète (1.3.11) on peut voir que le terme au membre de gauche de (2.4.6) est coercif sur \widetilde{X}_h , ainsi le problème est bien posé [Tang, 2012, Lemme 3.2].

On mentionne ici un lemme qui sera utile dans la preuve d'efficacité globale. Jusque la fin de ce chapitre on utilisera souvent la notation $a \lesssim b$, qui dénote l'existence d'une constante positive c indépendante des quantités a et b et de la taille du maillage h telle que $a \leq cb$.

Lemme 2.4.2. *Il existe un champ explicitement calculable $\mathbf{k}_h \in \mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$ tel que*

$$\text{rot } \mathbf{k}_h = \Pi_h \mathbf{J}_s - \Pi_h \mathbf{j}_h \quad (2.4.7)$$

et tel que

$$\|\mu^{-1/2} (\mathbf{k}_h - \mu^{-1} \text{rot } \widetilde{\mathbf{A}}_h)\| \lesssim \|\mu^{-1/2} \text{rot } (\widetilde{\mathbf{A}} - \widetilde{\mathbf{A}}_h)\| \leq \|\mu^{1/2} (\mathbf{k}_h - \mu^{-1} \text{rot } \widetilde{\mathbf{A}}_h)\|. \quad (2.4.8)$$

DÉMONSTRATION. Voir la preuve dans [Cochez-Dhondt, 2007, Lemma 2.4.3] ou aussi [Braess et Schöberl, 2008]. □

Remarque 2.4.3. *D'un point de vu pratique, pour obtenir \mathbf{k}_h on résout la formulation magnétostatique suivante :*

Trouver $\Omega_h \in \widetilde{\Theta}_h(D)$ tel que

$$\int_D \mu \nabla \Omega_h \cdot \overline{\nabla \Omega'_h} = \int_D \mu \mathbf{H}_s \cdot \overline{\nabla \Omega'_h} \quad \forall \Omega'_h \in \widetilde{\Theta}_h(D),$$

où $\text{rot } \mathbf{H}_s = \Pi_h \mathbf{J}_s - \Pi_h \mathbf{j}_h$ et $\mathbf{k}_h = \mathbf{H}_s - \nabla \Omega_h$. On peut alors reconnaître dans la quantité $\|\mu^{-1/2}(\mathbf{k}_h - \mu^{-1} \text{rot } \widetilde{\mathbf{A}}_h)\|$ l'estimateur équilibré développé dans [Tang, 2012, Section 3.4].

2.4.2. Équivalence entre estimateur et erreur

Définition de l'estimateur

En se rappelant de la définition des variables auxiliaires $(\mathbf{k}_h, \mathbf{j}_h) \in \mathcal{ND}_1(D, \mathcal{T}_h) \times \widetilde{Y}_h^1$, on propose comme estimateur de l'erreur $e_{A,\varphi}$ un estimateur avec la même structure que celle de l'estimateur équilibré (2.3.30) de la section précédente c'est-à-dire

$$\eta_{loc,flux}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{k,T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h, T \subset D_c} \eta_{j,T}^2, \quad (2.4.9)$$

où

$$\eta_{k,T}^2 = \|\mu^{1/2}(\mathbf{k}_h - \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h)\|_T^2 \quad \text{et} \quad \eta_{j,T}^2 = \left\| \left(\frac{j}{\omega \sigma} \right)^{1/2} (\mathbf{j}_h - \sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h)) \right\|_T^2.$$

Dans ce paragraphe, pour alléger les notations, on utilisera simplement η au lieu de $\eta_{loc,flux}$. On va prouver maintenant la fiabilité et l'efficacité de cet estimateur.

Fiabilité globale

Théorème 2.4.4. *Il existe $\epsilon \in (0, 1]$, qui dépend de la géométrie du domaine D , tel qu'on ait l'estimation suivante*

$$e_{A,\varphi} \leq \eta + C \mu_{\max}^{1/2} (\text{osc}(\mathbf{J}_s) + \text{osc}(\mathbf{j}_h)),$$

avec :

$$\text{osc}(\mathbf{J}_s) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2\epsilon} \|\mathbf{J}_s - \Pi_h \mathbf{J}_s\|_T^2 \right)^{1/2}$$

et

$$\text{osc}(\mathbf{j}_h) = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2\epsilon} \|\mathbf{j}_h - \Pi_h \mathbf{j}_h\|_T^2 \right)^{1/2}.$$

DÉMONSTRATION. Des calculs assez simples donnent :

$$\begin{aligned}
e_{A,\varphi}^2 &= \int_D \mu^{-1} \operatorname{rot} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_h) \cdot \operatorname{rot} \overline{\mathbf{e}_A} + \int_{D_c} \frac{j\sigma}{\omega} (j\omega(\mathbf{A} - \mathbf{A}_h) + \nabla(\varphi - \varphi_h)) \cdot \overline{(j\omega\mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi)} \\
&= \int_D \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \overline{\mathbf{e}_A} + \int_{D_c} \frac{j\sigma}{\omega} (j\omega\mathbf{A} + \nabla\varphi) \cdot \overline{(j\omega\mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi)} \\
&\quad + \frac{j}{\omega} \int_{D_c} (\mathbf{j}_h - \sigma(j\omega\mathbf{A}_h + \nabla\varphi_h)) \cdot \overline{(j\omega\mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi)} - \frac{j}{\omega} \int_{D_c} \mathbf{j}_h \cdot \overline{(j\omega\mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi)} \\
&\quad + \int_D (\mathbf{k}_h - \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_h) \cdot \operatorname{rot} \overline{\mathbf{e}_A} - \int_D \mathbf{k}_h \cdot \operatorname{rot} \overline{\mathbf{e}_A} \\
&= \int_D \mathbf{J}_s \cdot \overline{\mathbf{e}_A} - \int_D \operatorname{rot} \mathbf{k}_h \cdot \overline{\mathbf{e}_A} - \frac{j}{\omega} \int_D \mathbf{j}_h \cdot \overline{(j\omega\mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi)} \\
&\quad + \frac{j}{\omega} \int_{D_c} (\mathbf{j}_h - \sigma(j\omega\mathbf{A}_h + \nabla\varphi_h)) \cdot \overline{(j\omega\mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi)} + \int_D (\mathbf{k}_h - \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_h) \cdot \operatorname{rot} \overline{\mathbf{e}_A},
\end{aligned}$$

où on a utilisé la formulation faible (2.2.5), le théorème de flux-divergence (1.3.23) sur le terme $\int_D \mathbf{k}_h \cdot \operatorname{rot} \overline{\mathbf{e}_A}$ associé à la condition au bord sur \mathbf{e}_A sur Γ et, enfin, étendu le domaine d'intégration de l'intégrale $\int_{D_c} \mathbf{j}_h \cdot \overline{(j\omega\mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi)}$ au domaine tout entier, sachant que $\mathbf{j}_h|_{D_{nc}} = 0$. De plus, la définition (2.4.7) de \mathbf{k}_h et une intégration par partie du terme $\int_D \mathbf{j}_h \cdot \nabla \overline{e_\varphi}$, en se rappelant que \mathbf{j}_h est à divergence nulle et que e_φ peut être étendu en dehors de D_c pour avoir $e_\varphi = 0$ sur Γ , nous donnent :

$$\begin{aligned}
e_{A,\varphi}^2 &= \int_D (\mathbf{J}_s - \Pi_h \mathbf{J}_s) \cdot \overline{\mathbf{e}_A} + \int_D (\Pi_h \mathbf{j}_h - \mathbf{j}_h) \cdot \overline{\mathbf{e}_A} \\
&\quad + \frac{j}{\omega} \int_{D_c} (\mathbf{j}_h - \sigma(j\omega\mathbf{A}_h + \nabla\varphi_h)) \cdot \overline{(j\omega\mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi)} + \int_D (\mathbf{k}_h - \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_h) \cdot \operatorname{rot} \overline{\mathbf{e}_A}.
\end{aligned}$$

On va donc estimer chaque terme du membre de droite de cette égalité.

I) Termes correspondant à une contribution de l'estimateur.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans les cas continu et discret.

$$\begin{aligned}
&\frac{j}{\omega} \int_{D_c} (\mathbf{j}_h - \sigma(j\omega\mathbf{A}_h + \nabla\varphi_h)) \cdot \overline{(j\omega\mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi)} + \int_D (\mathbf{k}_h - \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_h) \cdot \operatorname{rot} \overline{\mathbf{e}_A} \\
&\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h, T \subset D_c} \left\| \left(\frac{j}{\omega\sigma} \right)^{1/2} (\mathbf{j}_h - \sigma(j\omega\mathbf{A}_h + \nabla\varphi_h)) \right\|_T \left\| \left(\frac{j\sigma}{\omega} \right)^{1/2} (j\omega\mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi) \right\|_T \\
&\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\| \mu^{1/2} (\mathbf{k}_h - \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_h) \right\|_T \left\| \mu^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{e}_A \right\|_T \\
&\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h, T \subset D_c} \eta_{j,T}^2 \right)^{1/2} \left\| \left(\frac{j\sigma}{\omega} \right)^{1/2} (j\omega\mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi) \right\|_{D_c} + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{k,T}^2 \right)^{1/2} \left\| \mu^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{e}_A \right\|_D \\
&\leq \eta e_{A,\varphi}.
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

II) Termes correspondant à des termes d'ordre supérieur par rapport à l'estimateur.

Dans le but d'estimer $\mathbf{J}_s - \Pi_h \mathbf{J}_s$ et $\Pi_h \mathbf{j}_h - \mathbf{j}_h$, on utilise la décomposition de Helmholtz de [Cochez-Dhondt, 2007, Lemma 2.4.1] (en prenant le paramètre $\beta = 1$) :

$$H_0(\text{rot}, D) = \nabla H_0^1(D) \stackrel{\perp}{\oplus} \widetilde{H}_0(\text{rot}, D).$$

Ainsi

$$\mathbf{A} - \mathbf{A}_h = \nabla \phi + \mathbf{e}_\perp, \quad (2.4.11)$$

avec $\phi \in H_0^1(D)$ et $\mathbf{e}_\perp \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D)$. De plus, par [Costabel et. al., 1999, Théorème 3.5], on sait qu'il existe $\epsilon \in (0, 1]$ qui dépend de la géométrie du domaine D et une constante c tels que $\mathbf{e}_\perp \in (H^\epsilon(D))^3$ et

$$\|\mathbf{e}_\perp\|_{\epsilon, D} \leq c(\|\text{rot } \mathbf{e}_\perp\| + \|\text{div } \mathbf{e}_\perp\|).$$

Puisque $\mathbf{e}_\perp \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D)$, le dernier terme disparaît, ainsi :

$$\|\mathbf{e}_\perp\|_{\epsilon, D} \lesssim \|\text{rot } \mathbf{e}_\perp\|. \quad (2.4.12)$$

De la décomposition (2.4.11) appliquée à $\mathbf{e}_A = \mathbf{A} - \mathbf{A}_h$, on obtient

$$\int_D (\mathbf{J}_s - \Pi_h \mathbf{J}_s) \cdot \overline{\mathbf{e}_A} = \int_D (\mathbf{J}_s - \Pi_h \mathbf{J}_s) \cdot \overline{(\nabla \phi + \mathbf{e}_\perp)}. \quad (2.4.13)$$

Par le théorème du flux-divergence (1.3.22) on a que

$$\int_D (\mathbf{J}_s - \Pi_h \mathbf{J}_s) \cdot \overline{\nabla \phi} = 0$$

car $\mathbf{J}_s - \Pi_h \mathbf{J}_s$ est à divergence nulle et ϕ s'annule sur Γ . De plus, on introduit l'interpolant de Raviart-Thomas \mathcal{RT}_0 d'ordre 0 de $\mathbf{e}_\perp : I_{\mathcal{RT}_0} \mathbf{e}_\perp \in \widetilde{Y}_h^0$. Ainsi $(\mathbf{J}_s - \Pi_h \mathbf{J}_s, I_{\mathcal{RT}_0} \mathbf{e}_\perp) = 0$, et l'égalité (2.4.13) devient

$$\int_D (\mathbf{J}_s - \Pi_h \mathbf{J}_s) \cdot \overline{\mathbf{e}_A} = \int_D (\mathbf{J}_s - \Pi_h \mathbf{J}_s) \cdot \overline{(\mathbf{e}_\perp - I_{\mathcal{RT}_0} \mathbf{e}_\perp)}.$$

Comme $\mathbf{e}_\perp \in (H^\epsilon(D))^3 \cap H(\text{div}, D)$, [Graham et. al., 2015, Lemme 3.3] assure qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\mathbf{e}_\perp - I_{\mathcal{RT}_0} \mathbf{e}_\perp\| \leq C(h^\epsilon \|\mathbf{e}_\perp\|_\epsilon + h \|\text{div } \mathbf{e}_\perp\|) = C h^\epsilon \|\mathbf{e}_\perp\|_\epsilon,$$

où la dernière égalité est due à la jauge de divergence nulle sur \mathbf{e}_\perp . Grâce à cette estimation et celle en (2.4.12), on a

$$\begin{aligned} \int_D (\mathbf{J}_s - \Pi_h \mathbf{J}_s) \cdot \overline{\mathbf{e}_A} &\lesssim \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2\epsilon} \|\mathbf{J}_s - \Pi_h \mathbf{J}_s\|_T^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{e}_\perp\|_\epsilon \\ &\lesssim \text{osc}(\mathbf{J}_s) \|\text{rot } \mathbf{e}_\perp\| \\ &\lesssim \mu_{\max}^{1/2} \text{osc}(\mathbf{J}_s) \|\mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_A\|. \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Si l'on suppose que $\mathbf{J}_s \in (H^1(D))^3$, alors, par un argument de *scaling*, $\text{osc}(\mathbf{J}_s) \lesssim h^{1+\epsilon} \|\mathbf{J}_s\|_{1,D}$.

Ainsi $\text{osc}(\mathbf{J}_s)$ est un terme d'ordre supérieur.

Les mêmes raisonnements que pour le terme source $\text{osc}(\mathbf{J}_s)$ nous donnent :

$$\int_D (\Pi_h \mathbf{j}_h - \mathbf{j}_h) \cdot \overline{\mathbf{e}_A} \lesssim \mu_{\max}^{1/2} \text{osc}(\mathbf{j}_h) \|\mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_A\|. \quad (2.4.15)$$

On montre maintenant que $\text{osc}(\mathbf{j}_h)$ est un terme d'ordre supérieur. Un argument de *scaling* sur chaque élément du maillage T donne que

$$\|\mathbf{j}_h - I_{\mathcal{RT}_0} \mathbf{j}_h\|_T \lesssim h_T \|\nabla \mathbf{j}_h\|_T$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\Pi_h \mathbf{j}_h - \mathbf{j}_h\|^2 &\leq \min_{w_h \in W_h^0} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|w_h - \mathbf{j}_h\|_T^2 \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|I_{\mathcal{RT}_0} \mathbf{j}_h - \mathbf{j}_h\|_T^2 \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\nabla \mathbf{j}_h\|_T^2 \\ &\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (\|\nabla(\mathbf{j}_h - \sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h))\|_T^2 + \|\nabla \sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h)\|_T^2). \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

On estime alors le premier terme de la ligne (2.4.16). Tout d'abord grâce à l'inégalité inverse (1.3.25) et, ensuite, grâce au résultat (2.4.23) (démontré lors de la preuve du Théorème d'efficacité 2.4.5), on estime comme suit

$$\begin{aligned} \|\nabla(\mathbf{j}_h - \sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h))\|_T &\lesssim h_T^{-1} \|\mathbf{j}_h - \sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h)\|_T \\ &\lesssim h_T^{-1} \max_{T' \in \omega_T} \sigma_{T'}^{1/2} \sum_{T' \in \omega_F, F \subset \partial T} \left\| \left(\frac{j\sigma}{\omega} \right)^{1/2} (j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi) \right\|_{T'}, \end{aligned}$$

où ω_T et ω_F représente le *patch* respectivement de l'élément T et de la face F , comme spécifié dans la section 1.3.2. Pour le deuxième terme de (2.4.16) on utilise [Nicaise, 2001, Lemme

4.1], qui assure que :

$$\| \nabla (\sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h)) \|_T \leq \mu_T^{1/2} \| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{A}_h \|_T.$$

Enfin

$$\begin{aligned} \text{osc}(\mathbf{j}_h)^2 &\leq h^{2\epsilon} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \| \Pi_h \mathbf{j}_h - \mathbf{j}_h \|_T^2 \\ &\lesssim h^{2\epsilon} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (\| \nabla (\mathbf{j}_h - \sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h)) \|_T^2 + \| \nabla \sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h) \|_T^2) \right) \\ &\lesssim h^{2\epsilon} \left(\left\| \left(\frac{j\sigma}{\omega} \right)^{1/2} (j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi) \right\|_{D_c}^2 + h^2 \| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{A}_h \|^2 \right) \\ &\lesssim h^{2\epsilon} \left(\left\| \left(\frac{j\sigma}{\omega} \right)^{1/2} (j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi) \right\|_{D_c}^2 + h^2 \| \mathbf{J}_s \|^2 \right), \end{aligned}$$

où l'estimation $\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{A}_h \| \lesssim \| \mathbf{J}_s \|$ vient directement de la formulation faible (2.2.13).

III) La conclusion suit en mettant ensemble l'estimation (2.4.10) du point I) et les inégalités (2.4.14) et (2.4.15) du point II). \square

Efficacité globale

Dans la suite on utilisera les notions de *patch* d'une face ω_F et d'un tétraèdre ω_T , comme spécifié dans la section 1.3.2.

Théorème 2.4.5. *On a les deux minoration locale et globale pour l'erreur :*

$$\eta_{j,T} \lesssim \max_{T' \in \omega_T} \left(\frac{\sigma_{T'}}{\sigma_T} \right)^{1/2} \sum_{T' \in \omega_F, F \subset \partial T} \left\| \left(\frac{j\sigma}{\omega} \right)^{1/2} (j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi) \right\|_{T'} \quad \text{avec } T \subset D_c, \quad (2.4.17)$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{k,T}^2 \right)^{1/2} &\lesssim (\sigma_{\max} \mu_{\max})^{1/2} \left\| \left(\frac{j\sigma}{\omega} \right)^{1/2} (j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi) \right\|_{D_c} + \| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_A \| \\ &\quad + \mu_{\max}^{1/2} (\text{osc}(\mathbf{J}_s) + \text{osc}(\mathbf{j}_h)). \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

DÉMONSTRATION.

I) On prouve d'abord (2.4.17).

D'après le fait que $\mathbf{j}_h|_T$, $\mathbf{A}_h|_T$, $\nabla \varphi_h|_T$ appartiennent à $\mathcal{RT}_1(T)$ et que \mathbf{j}_h satisfait la relation (2.4.3), on peut appliquer le lemme dans [Cochez-Dhondt et Nicaise, 2010, Lemma 3.1, Section

3.2] en prenant $v_h = (\mathbf{j}_h - \sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h))|_T \in \mathcal{RT}_1(T)$ et $i=3$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \| (\mathbf{j}_h - \sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h))|_T \|_T \sim \\ & h_T^{1/2} \| (\mathbf{j}_h - \sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h))|_T \cdot \mathbf{n}_T \|_{\partial T} + h_T^{-1} \left\| \int_T (\mathbf{j}_h - \sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h))|_T \right\|_2, \end{aligned}$$

où $\| \cdot \|_2$ représente la norme Euclidienne. Le dernier terme est nul grâce à (2.4.3). Puisque $\mathbf{j}_h|_T \in \mathcal{RT}_1(T)$ on a $\mathbf{j}_h|_F \cdot \mathbf{n}_F \in \mathbb{P}_1(F)$. En effet si on considère que l'équation d'une face F est donnée par $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_F = c$ avec c une constante fixée et que l'on peut écrire $\mathbf{j}_h = \mathbf{v} + \mathbf{x}p$ avec $\mathbf{v} \in \mathbb{P}_1(T)^3$ et $p \in \mathbb{P}_1(T)$, alors $\mathbf{j}_h|_F \cdot \mathbf{n}_F = \mathbf{v}|_F \cdot \mathbf{n}_F + \mathbf{x}|_F \cdot \mathbf{n}_F p = \mathbf{v}|_F \cdot \mathbf{n}_F + cp \in \mathbb{P}_1(F)$. Alors, de la relation (2.4.2), en se rappelant qu'aussi $l_F \in \mathbb{P}_1(F)$, on en déduit que

$$\mathbf{j}_h \cdot \mathbf{n}_F = l_F, \quad (2.4.19)$$

d'où :

$$h_T \| (\mathbf{j}_h - \sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h))|_T \cdot \mathbf{n}_T \|_{\partial T}^2 = h_T \| l_T - \sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h)|_T \cdot \mathbf{n}_T \|_{\partial T}^2.$$

Ainsi, on peut appliquer la dernière inégalité de la preuve dans [Ainsworth et Oden, 2000, Théorème 6.2], où, dans ce cas, $g_K = l_T$, $\Pi_1^\gamma = Id$, $r = 0$ et $R = [\sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h) \cdot \mathbf{n}_F]_F$, où $[u]_F$ dénote le saut de la quantité u à travers la face F . On obtient alors :

$$h_T \| l_T - \sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h)|_T \cdot \mathbf{n}_T \|_{\partial T}^2 \lesssim \sum_{F \subset \partial T} h_F \int_F [\sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h) \cdot \mathbf{n}_F]_F^2. \quad (2.4.20)$$

On va donc estimer la norme du terme

$$J_{n,F} = \begin{cases} [\sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h) \cdot \mathbf{n}_F]_F & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^{int}, \\ 0 & \text{si } F \in \mathcal{F}_h \setminus \mathcal{F}_h^{int}. \end{cases}$$

Soit $w_F := F_{\text{ext}}(J_{n,F}) b_F$, où b_F représente la fonction de bulles définie sur le *patch* ω_F , et soit $F_{\text{ext}} : C(\overline{F}) \rightarrow C(\overline{T})$ l'opérateur d'extension de F à T , comme défini dans la section 1.3.6.

Alors :

$$\begin{aligned}
\|J_{n,F}\|_F^2 &= \int_F |J_{n,F}|^2 \sim \int_F J_{n,F} \cdot J_{n,F} b_F = \int_F J_{n,F} \cdot w_F \\
&= \int_F [(\sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h))|_T \cdot \mathbf{n}_F]_F \cdot w_F = \int_F [(\sigma(j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi))|_T \cdot \mathbf{n}_F]_F \cdot w_F \\
&= \pm \left(\sum_{T' \subset \omega_F} \int_{T'} \operatorname{div}(\sigma(j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi)) F_{\text{ext}}(w_F) + \int_{T'} \sigma(j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi) \cdot \nabla F_{\text{ext}}(w_F) \right) \\
&\leq \sum_{T' \subset \omega_F} \left(\|\operatorname{div}(\sigma(j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi))\|_{T'} \|F_{\text{ext}}(w_F)\|_{T'} \right. \\
&\quad \left. + \|\sigma(j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi)\|_{T'} \|\nabla F_{\text{ext}}(w_F)\|_{T'} \right), \tag{2.4.21}
\end{aligned}$$

De plus, on dénote $r_{T'} := (\operatorname{div}(\sigma(j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi)))|_{T'}$, on écrit alors

$$\begin{aligned}
\|r_{T'}\|_{T'}^2 &\sim \|r_{T'} b_{T'}^{1/2}\|_{T'}^2 = \int_{T'} \operatorname{div}(\sigma(j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi)) r_{T'} b_{T'} \\
&= - \int_{T'} \sigma(j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi) \cdot \nabla(r_{T'} b_{T'}) \leq \|\sigma(j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi)\|_{T'} \|\nabla(r_{T'} b_{T'})\|_{T'}.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité inverse (1.3.25) à cette dernière estimation, on en déduit que :

$$\|r_{T'}\|_{T'} \lesssim h_{T'}^{-1} \|\sigma(j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi)\|_{T'}. \tag{2.4.22}$$

En groupant les résultats (1.3.27), (1.3.28) et (2.4.22) à l'inégalité (2.4.21) et en se rappelant que $h_{T'} \sim h_F$, on sait que :

$$h_F^{1/2} \|J_{n,F}\|_F \lesssim \sum_{T' \subset \omega_F} \|\sigma(j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi)\|_{T'}.$$

On applique cette dernière inégalité à (2.4.20), ainsi on a que :

$$\|(\mathbf{j}_h - \sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h))|_T\|_T \lesssim \max_{T' \in \omega_T} (\sigma_{T'})^{1/2} \sum_{T' \in \omega_T} \left\| \left(\frac{j\sigma}{\omega} \right)^{1/2} (j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi) \right\|_{T'}, \tag{2.4.23}$$

d'où la conclusion (2.4.17) suit.

II) On prouve ensuite (2.4.18) à la page 49.

D'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\|\mu^{1/2}(\mathbf{k}_h - \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_h)\| &\leq \|\mu^{1/2}(\mathbf{k}_h - \mu^{-1} \operatorname{rot} \widetilde{\mathbf{A}}_h)\| \\
&\quad + \|\mu^{1/2} \operatorname{rot}(\widetilde{\mathbf{A}}_h - \mathbf{A}_h)\|, \tag{2.4.24}
\end{aligned}$$

où $\widetilde{\mathbf{A}}_h$ représente la solution du problème discret (2.4.6). Dans la suite $\widetilde{\mathbf{A}}$ représentera la solution du problème continu (2.4.4). On estime les termes à droite de l'inégalité (2.4.24) :

pour le premier membre on applique le Lemme 2.4.2 et pour le deuxième on utilise l'inégalité triangulaire. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \|\mu^{1/2}(\mathbf{k}_h - \mu^{-1}\text{rot } \mathbf{A}_h)\| &\leq 2\|\mu^{-1/2}\text{rot } (\widetilde{\mathbf{A}} - \widetilde{\mathbf{A}}_h)\| \\ &\quad + \|\mu^{-1/2}\text{rot } (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A})\| + \|\mu^{-1/2}\text{rot } (\mathbf{A} - \mathbf{A}_h)\|. \end{aligned}$$

On estime les trois termes de cette inégalité.

Afin d'estimer $\|\mu^{-1/2}\text{rot } (\widetilde{\mathbf{A}} - \widetilde{\mathbf{A}}_h)\|$, le deuxième Lemme de Strang [Ciarlet, 1978, Théorème 4.2.2] donne :

$$\begin{aligned} \|\mu^{-1/2}\text{rot } (\widetilde{\mathbf{A}} - \widetilde{\mathbf{A}}_h)\| &\leq \inf_{\widetilde{\mathbf{A}}'_h \in \widetilde{X}_h} \|\mu^{-1/2}\text{rot } (\widetilde{\mathbf{A}} - \widetilde{\mathbf{A}}'_h)\| + \sup_{\widetilde{\mathbf{B}}'_h \in \widetilde{X}_h} \frac{(\mu^{-1}\text{rot } \widetilde{\mathbf{A}}, \text{rot } \widetilde{\mathbf{B}}'_h) - (\widetilde{\mathbf{J}}_h, \widetilde{\mathbf{B}}'_h)}{\|\mu^{-1/2}\text{rot } \widetilde{\mathbf{B}}'_h\|} \\ &\leq \|\mu^{-1/2}\text{rot } (\widetilde{\mathbf{A}} - \widetilde{\mathbf{A}}_h + \nabla\varphi)\| \leq \|\mu^{-1/2}\text{rot } (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A})\| + \|\mu^{-1/2}\text{rot } (\mathbf{A} - \mathbf{A}_h)\|, \end{aligned}$$

en remarquant que $(\mu^{-1}\text{rot } \widetilde{\mathbf{A}}, \text{rot } \widetilde{\mathbf{B}}'_h) - (\widetilde{\mathbf{J}}_h, \widetilde{\mathbf{B}}'_h) = 0$ car on peut prendre $\mathbf{A}' = \widetilde{\mathbf{B}}'_h$ dans (2.4.5) et qu'il existe $\varphi \in \Theta_h^0$ tel que $\widetilde{\mathbf{A}}_h - \nabla\varphi \in \widetilde{X}_h$. Donc :

$$\|\mu^{1/2}(\mathbf{k}_h - \mu^{-1}\text{rot } \mathbf{A}_h)\| \lesssim \|\mu^{-1/2}\text{rot } (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A})\| + \|\mu^{-1/2}\text{rot } (\mathbf{A} - \mathbf{A}_h)\|.$$

Puisque $\|\mu^{-1/2}\text{rot } (\mathbf{A} - \mathbf{A}_h)\|$ est l'erreur, il nous reste à estimer $\|\mu^{-1/2}\text{rot } (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A})\|$.

$$\begin{aligned} \|\mu^{-1/2}\text{rot } (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A})\|^2 &= \int_D \mu^{-1}\text{rot } \widetilde{\mathbf{A}} \cdot \text{rot } (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) + \int_D \mu^{-1}\text{rot } \mathbf{A} \cdot \text{rot } (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) \\ &= \int_D (\Pi_h \mathbf{J}_s - \Pi_h \mathbf{j}_h) \cdot (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) - \int_D \text{rot } (\mu^{-1}\text{rot } \mathbf{A}) \cdot (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) \\ &= \int_D (\Pi_h \mathbf{J}_s - \mathbf{J}_s) \cdot (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) + \int_D (\mathbf{j}_h - \Pi_h \mathbf{j}_h) \cdot (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

$$+ \int_{D_c} \sigma(j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi) \cdot (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) + \int_D (\sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h) - \mathbf{j}_h) \cdot (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}). \quad (2.4.26)$$

Afin d'estimer les termes dans la ligne (2.4.25), on procède comme dans le point II) de la preuve du Théorème 2.4.4 : on utilise la décomposition de Helmholtz (2.4.11), mais cette fois avec $(\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) \in H_0(\text{rot}, D)$ à la place de $\mathbf{A} - \mathbf{A}_h$. Alors :

$$\int_D (\Pi_h \mathbf{J}_s - \mathbf{J}_s) \cdot (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) + \int_D (\mathbf{j}_h - \Pi_h \mathbf{j}_h) \cdot (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) \lesssim \mu_{\max}^{1/2}(\text{osc}(\mathbf{J}_s) + \text{osc}(\mathbf{j}_h)) \|\mu^{-1/2}\text{rot } (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A})\|.$$

Pour les termes de la ligne (2.4.26) on procède comme suit. Pour le premier terme, on applique encore la décomposition de Helmholtz (2.4.11) pour $\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A} = \nabla\phi + \mathbf{e}_\perp$, ainsi :

$$\begin{aligned} & \int_{D_c} \sigma(j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi) \cdot (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) \\ &= \int_D \sigma(j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi) \cdot (\nabla\phi + \mathbf{e}_\perp) = \int_D \sigma(j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi) \cdot \mathbf{e}_\perp \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

$$\lesssim \|\sigma(j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi)\|_{D_c} \|\mathbf{e}_\perp\|_{\epsilon, D} \lesssim \|\sigma(j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi)\|_{D_c} \|\operatorname{rot} \mathbf{e}_\perp\| \quad (2.4.28)$$

$$\lesssim (\sigma_{\max} \mu_{\max})^{1/2} \left\| \left(\frac{j\sigma}{\omega} \right)^{1/2} (j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi) \right\|_{D_c} \|\mu^{-1/2} \operatorname{rot} (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A})\|. \quad (2.4.29)$$

Concernant la ligne (2.4.27), on a utilisé le théorème de flux-divergence (1.3.22) et le fait que $\sigma(j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi)$ est à divergence nulle associé au fait que ϕ s'annule sur Γ . Concernant la ligne (2.4.28), on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation (2.4.12).

Pour le deuxième terme de (2.4.26), on a recourt encore à la décomposition de Helmholtz (2.4.11) et aussi au fait que la divergence de $\sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h) - \mathbf{j}_h$ est nulle dans chaque tétraèdre T . Ainsi, de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et des relations (2.4.23) et (2.4.12), on a :

$$\begin{aligned} & \int_D (\sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h) - \mathbf{j}_h) \cdot (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) = \int_D (\sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h) - \mathbf{j}_h) \cdot \mathbf{e}_\perp \\ & \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h, T \subset D_c} \|\sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h) - \mathbf{j}_h\|_T^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{e}_\perp\|_{\epsilon, D} \\ & \lesssim \sigma_{\max}^{1/2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h, T \subset D_c} \left\| \left(\frac{j\sigma}{\omega} \right)^{1/2} (j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi) \right\|_T^2 \right)^{1/2} \|\operatorname{rot} \mathbf{e}_\perp\| \\ & \leq (\sigma_{\max} \mu_{\max})^{1/2} \left\| \left(\frac{j\sigma}{\omega} \right)^{1/2} (j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi) \right\|_{D_c} \|\mu^{-1/2} \operatorname{rot} (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A})\|. \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

En mettant ensemble les résultats (2.4.2), (2.4.29) et (2.4.30) avec (2.4.25)-(2.4.26), on obtient

$$\begin{aligned} \|\mu^{-1/2} \operatorname{rot} (\widetilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A})\| & \lesssim (\sigma_{\max} \mu_{\max})^{1/2} \left\| \left(\frac{j\sigma}{\omega} \right)^{1/2} (j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi) \right\|_{D_c} \\ & \quad + \mu_{\max}^{1/2} (\operatorname{osc}(\mathbf{J}_s) + \operatorname{osc}(\mathbf{j}_h)), \end{aligned}$$

d'où la conclusion (2.4.18). □

Remarque 2.4.6. *L'efficacité est locale pour la contribution électrique de l'estimateur (voir (2.4.17)), mais globale pour la contribution magnétique (voir (2.4.18)). Cela est dû au fait que dans la démonstration on doit utiliser plusieurs estimations globales : l'estimation à gauche de (2.4.8) et ensuite le deuxième Lemme de Strang, voir à la page 51.*

Remarque 2.4.7. *Le champ vecteur $\widetilde{\mathbf{A}}_h$ est utilisé pour le point II) de la démonstration précédente, mais il n'a pas à être calculé pour obtenir l'estimateur.*

2.5. VALIDATION NUMÉRIQUE

On considère un cas test analytique qui nous permet de calculer l'erreur afin de valider numériquement les estimateurs. Ce test est repris de celui proposé dans [Creusé et. al., 2012], où un estimateur de type résiduel pour la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ en régime harmonique est validé. Cela nous permettra aussi de comparer l'estimateur équilibré avec l'estimateur résiduel ci-mentionné. Tous les calculs ont été effectués avec Code_Carmel3D [<http://code-carmel.univ-lille1.fr>].

Le cas test est présenté dans le paragraphe suivant. La section 2.5.1 est consacrée à la validation de l'estimateur $\eta_{glob, H_{sh}} - \eta_{glob, H_s}$ issu de la formulation duale. On confirme l'équivalence entre l'erreur et l'estimateur et l'efficacité locale. La section 2.5.2 est consacrée à la validation de l'estimateur $\eta_{loc, flux}$ issu de la construction locale des flux. On confirme l'équivalence entre l'erreur et l'estimateur, on le compare avec l'estimateur résiduel pour la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ et on étudie son comportement au niveau local.

Pour des simulations plus à vocation physique on renvoie à la section dédiée 4.1.

Cas test analytique

Comme montré dans la Figure 2.2, les domaines géométriques sont $D = [-2.5, 5] \times [-2, 2] \times [-2, 2]$ et $D_c = [2, 4] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$. Les paramètres physiques sont donnés par $\mu \equiv 1$ dans D , $\sigma \equiv 1$ dans D_c , $\sigma \equiv 0$ dans D_{nc} et $\omega = 2\pi$.

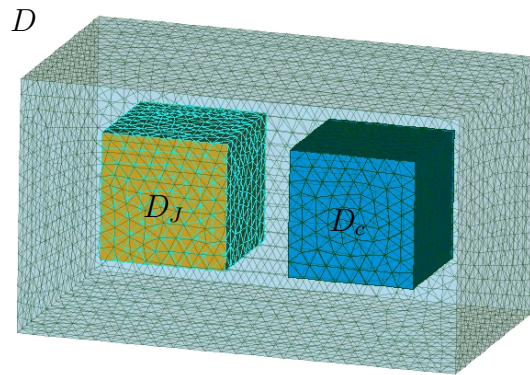


FIGURE 2.2. Configuration et maillage régulier des domaines D , D_c et D_J .

En partant de (1.2.9) on peut définir \mathbf{J}_s de telle sorte que la solution exacte (\mathbf{A}, φ) de (2.2.5) soit donnée par :

$$\mathbf{A} = \text{rot} \begin{pmatrix} f(x, y, z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dans } D,$$

où

$$f(x, y, z) = \begin{cases} (x^2 - 1)^4 (y^2 - 1)^4 (z^2 - 1)^4 & \text{dans } D_J = [-1, 1]^3, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $\varphi \equiv 0$ dans D_c . On remarque que $D_J = \text{supp } \mathbf{J}_s$.

La solution par EF de (2.2.13) et (2.2.14) donne les solutions numériques $(\mathbf{A}_h, \varphi_h)$ et (\mathbf{T}_h, Ω_h) respectivement. Cela nous permet d'évaluer les erreurs $e_{A,\varphi}$ et $e_{T,\Omega}$ données par les définitions (2.2.17) et (2.2.21). On rappelle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} - \mathbf{B}_h &= \text{rot}(\mathbf{A} - \mathbf{A}_h), \\ \mathbf{E} - \mathbf{E}_h &= -(j \omega (\mathbf{A} - \mathbf{A}_h) + \nabla(\varphi - \varphi_h)), \\ \mathbf{J}_e - \mathbf{J}_{e,h} &= -\sigma (j \omega \mathbf{A} + \nabla \varphi) - \text{rot } \mathbf{T}_h, \\ \mathbf{H} - \mathbf{H}_h &= \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{H}_{s,h} - \tilde{\mathbf{T}}_h + \nabla \Omega_h, \end{aligned}$$

On est donc capable de calculer l'erreur totale e donnée par (2.2.22) et les trois estimateurs équilibrés η donnés par (2.3.30), (2.3.42) et (2.4.9). Cela nous permettra de valider les résultats d'équivalence : Théorème 2.3.8, Corollaire 2.3.11 et Théorème 2.4.4.

Localement on peut calculer l'erreur locale e_T (2.2.23) et l'estimateur locale η_T (2.3.31). Alors, on peut définir, pour chaque tétraèdre T , l'indice d'efficacité locale comme :

$$(E_I)_T = \frac{e_T}{\eta_T},$$

d'où le plus petit indice d'efficacité locale

$$(E_I)_{\min} = \min_{T \in \mathcal{T}_h} (E_I)_T.$$

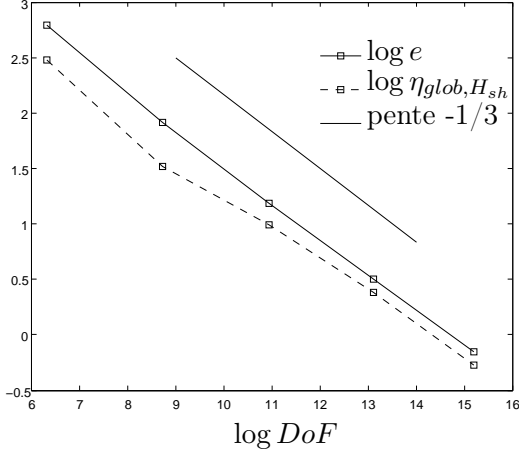
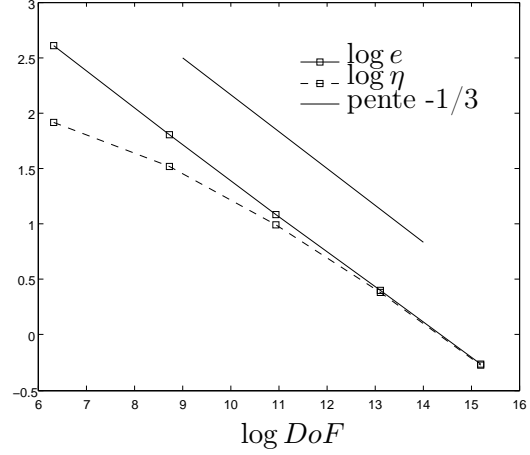
Cela nous permettra de valider les résultats d'efficacité locales (2.3.9) et (2.3.46). On effectue le calcul sur des maillages raffinés de manière régulière.

2.5.1. Estimateur construction globale

Avec source approchée

Dans ce paragraphe on considère l'estimateur $\eta_{glob, H_{sh}}$ donné par (2.3.30), qui estime l'erreur totale e donnée par (2.2.22). On fixe 5 maillages de plus en plus fins raffinés de manière régulière : le nombre de tétraèdres va de 642 pour le maillage le plus grossier à 3 548 694 pour celui le plus raffiné.

Tout d'abord on vérifie la convergence de l'erreur et de l'estimateur. La Figure 2.3a montre le taux de convergence de e en fonction des degrés de liberté *DoF* (*Degrees of Freedom*) associés à la formulation $\mathbf{A} - \varphi$. Dans ce cas, l'ordre de convergence attendu de l'analyse *a priori* pour l'erreur e est de $-1/3$, ce qui correspond à l'ordre 1 par rapport à h dans le cas tri-dimensionnel pour des maillages réguliers, étant donné que $DoF = O(1/h^3)$.

(a) Estimateur équilibré $\eta_{glob, H_{sh}}$.(b) Estimateur équilibré η_{glob, H_s} .FIGURE 2.3. Convergence de l'erreur exacte e et de l'estimateur équilibré η par rapport aux degrés de liberté $DoF = 548, 6172, 55880, 491043, 3996584$.

Concernant le comportement de l'estimateur équilibré $\eta_{glob, H_{sh}}$, l'ordre de convergence est asymptotiquement le même que celui de l'erreur, comme montré dans la Figure 2.3a.

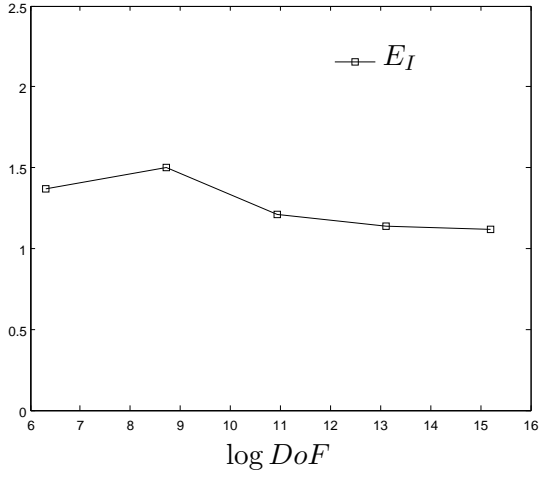
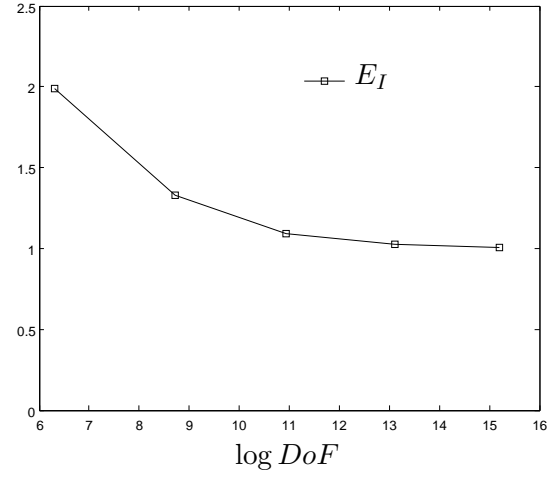
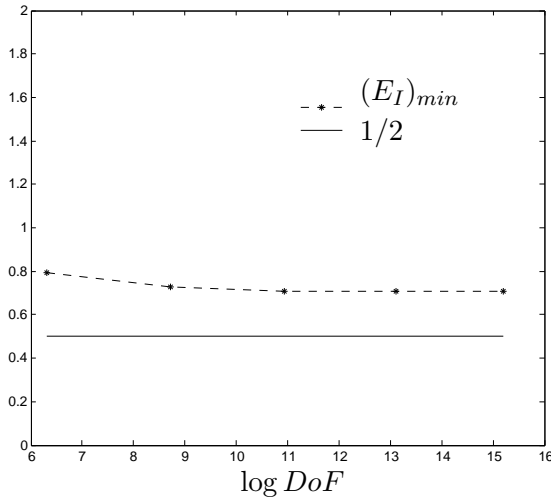
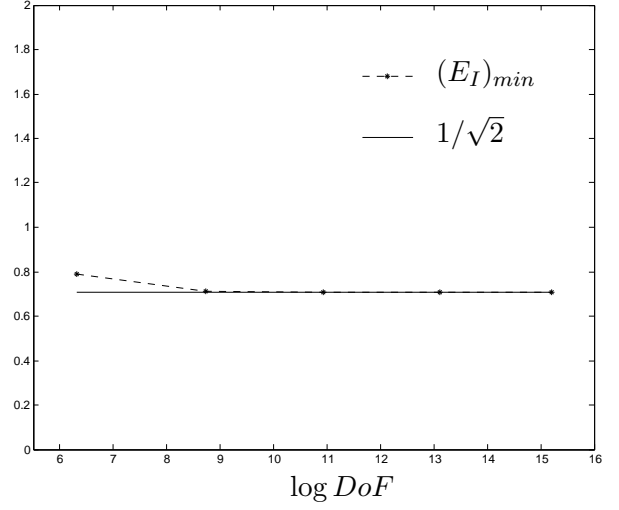
De plus, dans la Figure 2.4a on voit que l'indice d'efficacité

$$E_I = \frac{e}{\eta_{glob, H_{sh}}}$$

est de l'ordre d'une constante proche de 1.12 lorsque DoF vaut environ 4×10^6 , alors que l'indice d'efficacité donné par l'estimateur η_{glob, H_s} , donné par $E_I = \frac{e}{\eta_{glob, H_s}}$, approche 1 (Fig.

2.4b). Cette différence s'explique certainement par la nature des termes d'ordre supérieures (*h.o.t.*) dans (2.3.32) qui ne sont pas les mêmes. On peut cependant estimer que la propriété d'exactitude asymptotique de l'estimateur équilibré est vérifiée.

Enfin, d'après (2.3.41), on s'attend à ce que $(E_I)_{\min} \geq 1/2$, dans la Figure 2.5a on voit que numériquement on obtient mieux c'est-à-dire que $(E_I)_{\min} \geq 1/\sqrt{2}$. Dans ce cas, l'estimateur $\eta_{glob, H_{sh}}$ a le même comportement local que celui de l'estimateur η_{glob, H_s} , dont la définition dans (2.3.42). Dans ce cas, la constante 2 du Théorème 2.3.9 surestime l'estimateur local.

(a) Estimateur équilibré $\eta_{glob,H_{sh}}$.(b) Estimateur équilibré η_{glob,H_s} .FIGURE 2.4. Evolution des indices d'efficacité E_I par rapport aux degrés de liberté $DoF = 548, 6172, 55880, 491043, 3996584$.(a) $(E_I)_{min}$ pour l'estimateur $\eta_{glob,H_{sh}}$.(b) $(E_I)_{min}$ pour l'estimateur équilibré η_{glob,H_s} .FIGURE 2.5. Evolution de $(E_I)_{min}$ par rapport aux degrés de liberté $DoF = 548, 6172, 55880, 491043, 3996584$.

Avec source non approchée

Dans ce paragraphe on considère l'estimateur η_{glob,H_s} donné par (2.3.42), qui estime l'erreur totale e (2.2.22).

La différence entre les estimateurs $\eta_{glob,H_{sh}}$ et η_{glob,H_s} réside dans le traitement du terme source. Afin de simuler un terme source non approché, on le calcule en augmentant les points d'intégration numérique à la fois dans le calcul des intégrales volumiques et dans le calcul de l'imposition des flux du terme source dans D_J .

La Figure 2.3b montre qu'encore une fois l'ordre de convergence - attendu de l'analyse *a priori* pour l'erreur e - est atteint (à savoir $-1/3$) et que l'ordre de convergence de l'estimateur équilibré η_{glob,H_s} est asymptotiquement le même que celui de l'erreur.

La Figure 2.4b montre que l'indice d'efficacité

$$E_I = \frac{e}{\eta_{glob,H_s}}$$

tend vers 1 lorsque DoF tend vers l'infini. La propriété d'exactitude asymptotique et l'égalité (2.3.44) du Corollaire 2.3.11 sont donc vérifiées.

D'après (2.3.46), on s'attend que $(E_I)_{\min} \geq 1/\sqrt{2}$, ce qui est le cas, comme montré en Figure 2.5b.

Conclusion

On a vu que le comportement des deux estimateurs s'avère être le même et que pour l'estimateur $\eta_{glob,H_{sh}}$ la constante d'efficacité s'avère être numériquement meilleure, c'est-à-dire plus petite que 2.

Les estimateurs semblent être prometteurs pour une stratégie de raffinement adaptatif. A titre d'exemple la Figure 2.6 présente la distribution de l'erreur totale (Figure 2.6a) et de l'estimateur η_{glob,H_s} (Figure 2.6b). Les deux distributions sont assez similaires localement, mais il faut tenir compte, dans un contexte de raffinement de maillage, que l'erreur estimée est la somme des deux erreurs des deux formulations. Un estimateur qui ne recourt pas à une formulation duale peut alors être plus pertinent pour le remaillage. De plus, *a priori*, il sera moins coûteux que celui construit à partir d'une formulation duale.

Le plus de l'estimateur étudié dans ce paragraphe est qu'il donne une quantification exacte de l'erreur globale des deux formulations, donc il peut être utilisé comme critère d'arrêt dans un algorithme adaptatif. Par exemple : on pourra utiliser un estimateur moins coûteux et qui estime l'erreur d'une seule formulation (même si sa constante de fiabilité n'est pas connue) pour le remaillage, et après un nombre fixé de remaillages, comme critère d'arrêt, regarder si l'estimateur équilibré a diminué.

On va considérer dans la prochaine section le même cas test pour l'estimateur $\eta_{loc,flux}$, qui estime uniquement l'erreur de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$.

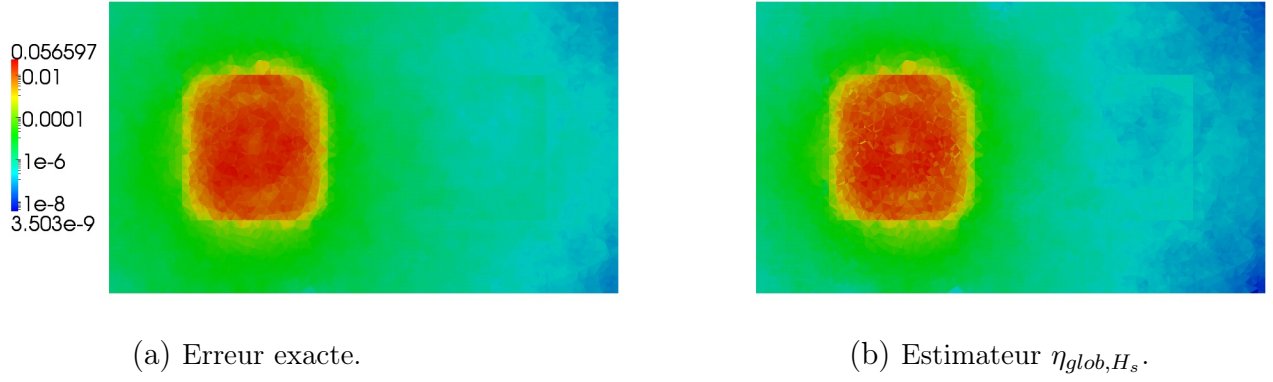


FIGURE 2.6. Cartes d'erreur et d'estimateur selon le plan $z = 0$.

2.5.2. Estimateur construction locale

Dans cette section on valide la convergence de l'estimateur $\eta_{loc,flux}$ donné par (2.4.9), qui estime l'erreur $\mathbf{A} - \varphi$ donnée par (2.2.16). De plus, on le compare avec l'estimateur résiduel pour la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ présenté dans [Creusé et. al., 2012]. On fixe 4 maillages de plus en plus fins raffinés de manière régulière : le nombre de tétraèdres va de 5987 pour le maillage le plus grossier à 3 065 344 pour celui le plus raffiné.

La Figure 2.7 montre la convergence de l'erreur en $\mathbf{A} - \varphi$ et des estimateurs par rapport aux degrés de liberté DoF, on voit que le taux de convergence de l'erreur est celui attendu, à savoir $-1/3$, comme celui des estimateur $\eta_{loc,flux}$ et résiduel. La Figure 2.8 montre le comportement asymptotique des estimateurs : l'évolution des indices d'efficacité $E_{I,flux}$ et $E_{I,rés}$ en fonction des DoF. On voit que, lorsqu'on augmente les DoF, $E_{I,flux}$ tend vers une constante inférieure à 1, cela donne l'information qu'en effet on ne peut pas espérer avoir une constante égale à 1 dans l'inégalité d'efficacité. Puisque, pour l'estimateur résiduel, les constantes intervenant dans la fiabilité et l'efficacité sont inconnues, on voit qu'en effet $E_{I,rés}$ tend vers une valeur constante différent de 1.

On se focalise maintenant sur le comportement local de l'estimateur équilibré $\eta_{loc,flux}$. De sa définition (2.4.9) et de la définition de l'erreur locale (2.2.23), on peut définir l'estimateur et l'erreur $\mathbf{A} - \varphi$ sur chaque tétraèdre T respectivement par

$$\eta_{loc,flux,T} = \left(\eta_{k,T}^2 + \eta_{j,T}^2 \right)^{1/2},$$

et

$$e_{A,\varphi,T} = \left(\left\| \mu^{-1/2} (\mathbf{B} - \mathbf{B}_h) \right\|_T^2 + \left\| \omega^{-1/2} \sigma^{1/2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_h) \right\|_T^2 \right)^{1/2}.$$

On affiche en Figure 2.9a la distribution de l'erreur $\mathbf{A} - \varphi$ et en Figure 2.9b celle de l'estimateur équilibré $\eta_{loc,flux}$. Même si on n'a pas un résultat théorique sur l'efficacité locale, on voit que les distributions localement sont qualitativement proches. Plus en particulier, la Figure 2.10 (en haut) montre les valeurs de l'erreur $e_{A,\varphi,T}$ et de l'estimateur $\eta_{loc,flux,T}$ sur chaque tétraèdre T du maillage. On voit bien que localement ces deux quantités restent proches. La Figure 2.9c montre la distribution de l'estimateur résiduel, qui se comporte comme l'erreur. En Figure 2.10 (en bas) on affiche les valeurs l'estimateur résiduel en fonction de chaque tétraèdre T . La constante d'efficacité locale étant inconnue, les ordres de grandeur entre l'erreur et l'estimateur sont en effet différents.

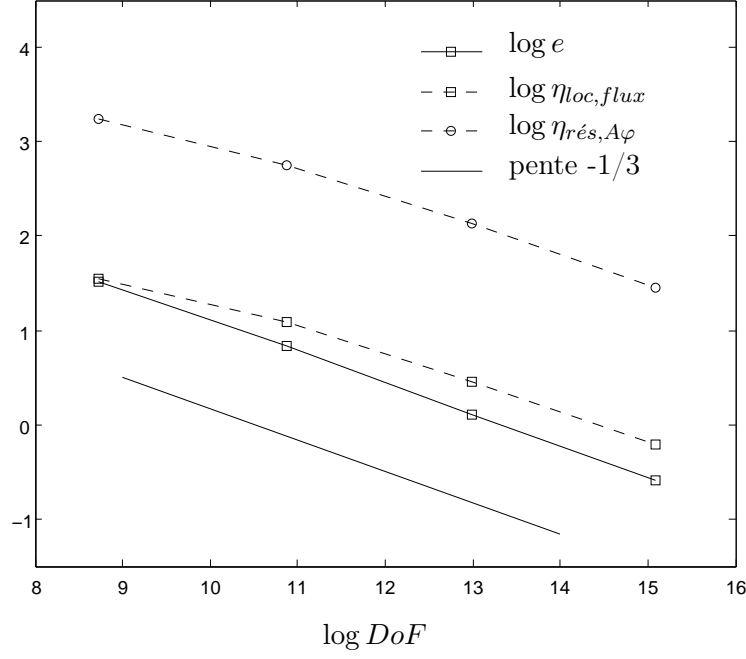


FIGURE 2.7. Convergence de l'erreur exacte pour la formulation $\mathbf{A} - \varphi$, de l'estimateur équilibré $\eta_{loc,flux}$ et de l'estimateur résiduel $\mathbf{A} - \varphi$, $\eta_{rés,A\varphi}$, par rapport aux degrés de liberté en $\mathbf{A} - \varphi$, $DoF = 6172, 52829, 437081, 3555697$.

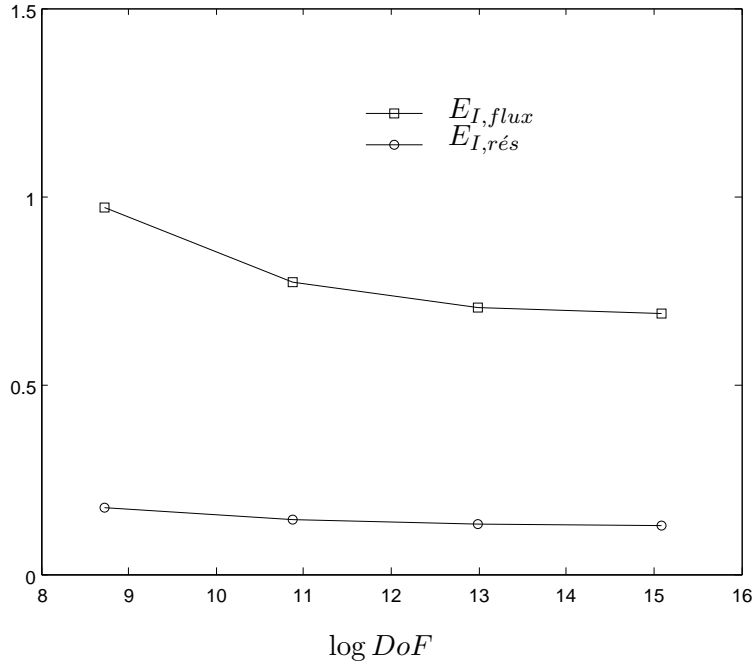


FIGURE 2.8. Evolution des indices d'efficacité $E_{I,flux}$ et $E_{I,rés}$ par rapport aux degrés de liberté $DoF = 6172, 52829, 437081, 3555697$.

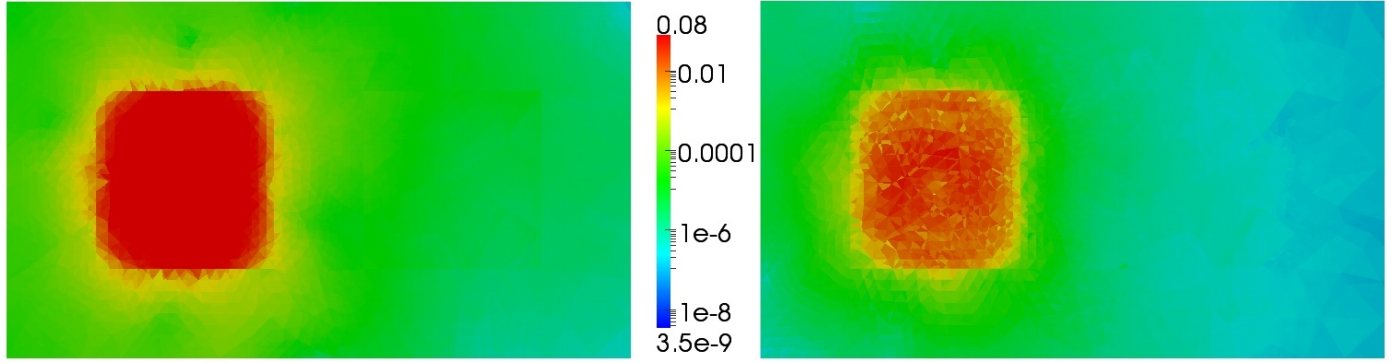
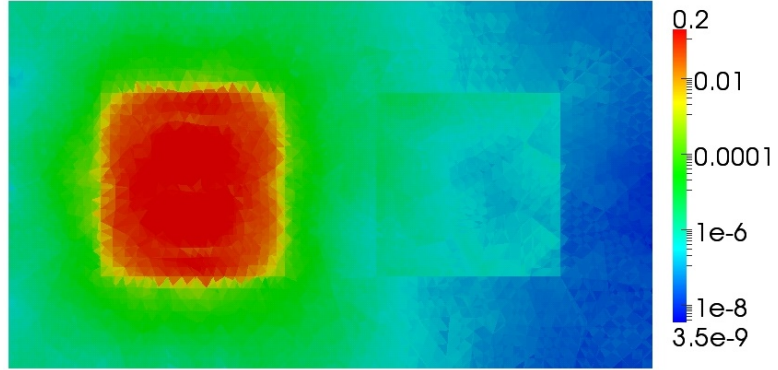
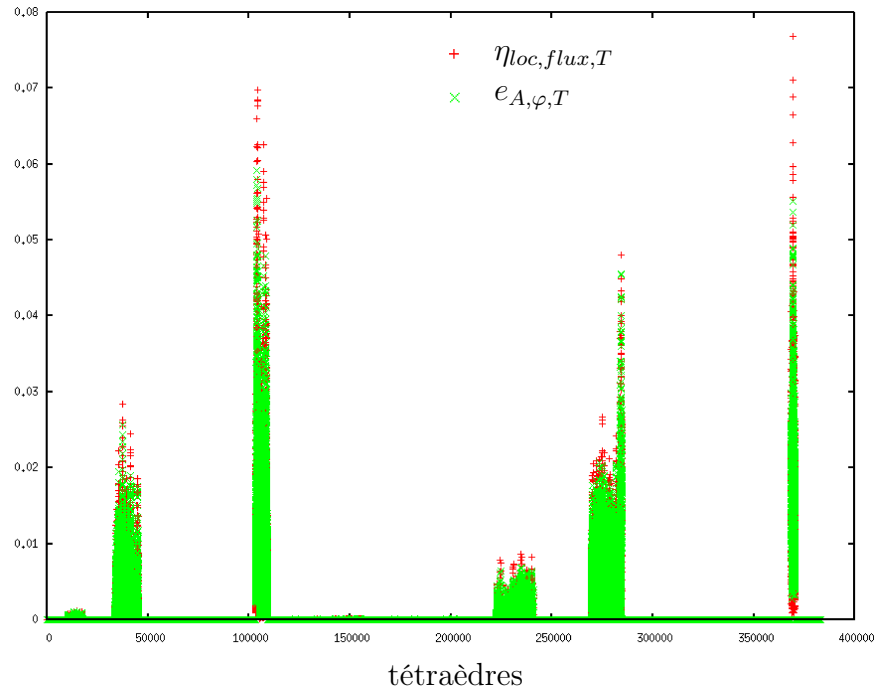
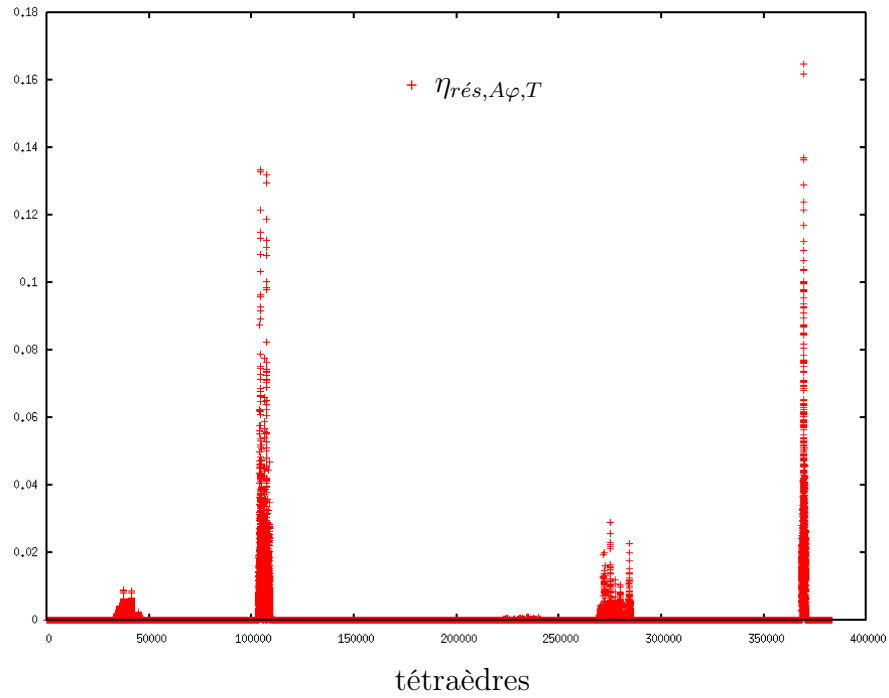
(a) Erreur $\mathbf{A} - \varphi$ exacte $e_{A\varphi}$.(b) Estimateur $\eta_{loc,flux}$.(c) Estimateur résiduel en $\mathbf{A} - \varphi$ $\eta_{rés,A\varphi}$.

FIGURE 2.9. Cartes de l'erreur $\mathbf{A} - \varphi$, $e_{A\varphi}$ (a), de l'estimateur équilibré $\eta_{loc,flux}$ (b) et de l'estimateur résiduel $\eta_{rés,A\varphi}$ (c) selon le plan $z = 0$.

En conclusion, dans le but du remaillage, un estimateur résiduel est tout à fait approprié, or l'estimateur équilibré, donné par la reconstruction des flux, peut se révéler utile aussi pour une quantification précise de l'erreur globale et donc représente un outil efficace comme test d'arrêt.



(a) distribution de $\eta_{loc,flux,T}$ et $e_{A,\varphi,T}$ en fonction de chaque tétraèdre T



(b) distribution de l'estimateur résiduel $\eta_{rés,A\varphi,T}$ en fonction de chaque tétraèdre T

FIGURE 2.10. Distributions locales : $e_{A,\varphi,T}$, et $\eta_{loc,flux,T}$ en fonction de chaque élément du maillage T (a) et estimateur résiduel $\eta_{rés,A\varphi,T}$ calculé sur chaque élément du maillage T en fonction des éléments du maillage mêmes (b).

Chapitre 3

ESTIMATEURS RÉSIDUELS

3.1. ESTIMATEURS SPATIO-TEMPORELS EN ÉLECTROMAGNETISME

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux équations de Maxwell en régime temporel. On traitera donc des estimateurs spatio-temporels. On donne dans cette section un aperçu du sujet, en spécifiant les nouveautés auxquelles ce chapitre contribue dans le cadre de l'électromagnétisme.

Idées du développement

L'analyse *a posteriori* pour les régimes temporels en électromagnétisme est assez récente. On peut en particulier mentionner deux types de contribution :

- Pour la formulation $H - \psi$, [Zheng et Zhang, 2008] ont proposé un estimateur de type résiduel pour des régimes harmoniques, et [Zheng et al., 2006] l'ont étendu aux régimes temporels ;
- [Li et Lin, 2015] utilisent les techniques développées par [Bernardi et Süli, 2005] dans le cadre des équations linéaires hyperboliques du second ordre à un problème d'électromagnétisme en régime temporel avec des conditions au bord pour un conducteur électrique parfait (PEC).

Un estimateur résiduel pour la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ en régime harmonique a été construit dans [Creusé et al., 2012]. On se propose ici d'étendre ces résultats au cas de la magnétodynamique, en développant un estimateur spatio-temporel résiduel *a posteriori* explicite pour la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ temporelle. On s'appuie sur les travaux réalisés pour des équations de type parabolique [Bernardi et Métivet, 2000; Picasso, 1998; Verfürth, 2003; Bergam et al., 2005; Nicaise et Soualem, 2005; Berrone, 2006] afin de les adapter au cadre magnétodynamique. On remarque que ces travaux concernent les estimateurs résiduels, mais cette approche peut être utilisée aussi avec d'autres types d'estimateurs, par exemple voir [Ern et Vohralík, 2010; Dolejší et al., 2013] pour les estimateurs basés sur la reconstruction des flux dans un cadre instationnaire. On considère comme problème modèle l'équation de la chaleur :

$$\begin{aligned} \partial_t u - \operatorname{div}(\lambda \nabla u) &= f && \text{dans } D \times [0, T], \\ u &= 0 && \text{sur } \partial D \times [0, T], \\ u|_{t=0} &= u_0 && \text{dans } D, \end{aligned}$$

où λ représente le coefficient de diffusion ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$). Pour simplifier l'exemple on choisit $\lambda = 1$ et le cadre d'approximation des éléments finis conformes. Sa formulation variationnelle continue est donnée par le problème suivant :

Trouver $u \in \mathcal{C}(0, T, L^2(D)) \cap L^2(0, T, H_0^1(D))$ tel que $u|_{t=0} = u_0$ et tel que pour presque tout $t \in (0, T)$,

$$(\partial_t u(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) = (f(t), v) \quad \forall v \in H_0^1(D). \quad (3.1.1)$$

Ce problème admet une unique solution [Lions et Magenes, 1968, Chapitre 3, §4] pour tout $f \in L^2(0, T, H^{-1}(D))$ et $u_0 \in L^2(D)$. On fixe alors une partition de l'intervalle temporel $[0, T]$ constituée de sous-intervalles $[t_{n-1}, t_n[$ avec $1 \leq n \leq N$ tels que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ et on désigne τ_n la longueur $\tau_n = t_n - t_{n-1}$. En notant par $X_{h,n}(D)$ l'espace des éléments finis des fonctions continues polynômiales par morceaux associé à la triangulation $\mathcal{T}_{h,n}$ de D et $X_{n,h}^0(D) = X_{n,h}(D) \cap H_0^1(D)$, le problème variationnel, discrétisé en espace par les éléments finis et en temps par Euler implicite, s'écrit comme suit :

Trouver $u_h^n \in X_{n,h}^0(D)$ tel que $u_h^0 = \pi_0 u_0$ et pour tout $1 \leq n \leq N$

$$(u_h^n, v_h) + \tau_n (\nabla u_h^n, \nabla v_h) = \tau_n (f(t_n), v_h) + (u_h^{n-1}, v_h) \quad \forall v_h \in X_{n,h}^0(D), \quad (3.1.2)$$

avec π_0 projection L^2 dans $X_{n,h}^0$ et $u_h^n \in X_{n,h}^0(D)$ approximation de $u(t_n)$.

Dans la littérature on trouve principalement deux approches. Une première approche, proposée par [Picasso, 1998; Verfürth, 2003] et, pour des coefficients discontinus, par [Berrone, 2006], consiste à estimer directement l'erreur issue de la discrétisation en espace-temps (3.1.2). Tout d'abord on définit une approximation affine en temps de la solution numérique :

$$u_{h,\tau}(t) = \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} u_h^n + \frac{t_n - t}{\tau_n} u_h^{n-1} \quad \text{pour } t \in]t_{n-1}, t_n],$$

et le résidu $R \in L^2(0, T; H^{-1}(D))$:

$$\langle R, v \rangle = (f(t), v) - (\partial_t u_{h,\tau}(t), v) - (\nabla u_{h,\tau}(t), \nabla v) \quad \forall v \in H_0^1(D).$$

Ensuite, on prouve l'équivalence entre l'erreur de la discrétisation totale et le résidu R . Par conséquent l'analyse se focalise enfin sur la preuve de fiabilité et efficacité de l'estimateur par rapport au résidu.

Une deuxième approche, proposée par [Bernardi et Métivet, 2000; Bergam et al., 2005] et, dans le contexte des éléments finis non-conformes, par [Nicaise et Soualem, 2005], consiste à décomposer l'erreur en deux contributions : l'une temporelle et l'autre spatiale. Avant tout on aborde le problème discrétisé uniquement en temps :

Pour $n \in \mathbb{N}$, trouver $u^n \in H_0^1(D)$ tel que

$$(u^n, v) + \tau_n (\nabla u^n, \nabla v) = (u^{n-1}, v) + \tau_n (f^n, v) \quad \forall v \in H_0^1(D). \quad (3.1.3)$$

En estimant alors le résidu issu des formulations (3.1.1) et (3.1.3), on obtient un estimateur lié à la discrétisation temporelle, noté η_τ^n . En estimant le résidu issu des formulations (3.1.3) et (3.1.2), on obtient un estimateur lié à la discrétisation spatiale, noté η_h^n .

Les deux approches conduisent au même estimateur, qui, à l'instant t_n , prend la forme :

$$\eta^n = ((\eta_\tau^n)^2 + \tau_n (\eta_h^n)^2)^{1/2},$$

mais ils n'estiment pas la même norme énergétique en espace-temps de l'erreur. La différence réside dans les estimations obtenues : avec la deuxième approche, la fiabilité et l'efficacité

sont démontrées séparément en temps et en espace. En particulier, on peut envisager *a priori* une efficacité locale en temps pour l'estimateur temporel η_τ^n et une efficacité locale en espace-temps pour l'estimateur spatial η_h^n .

Motivés par le fait que ces deux résultats d'efficacité locale constituent des bases indispensables pour mettre en place un algorithme d'adaptation en espace-temps, on a privilégié cette seconde approche. On verra que, bien que l'on ait opéré comme [Bergam et al., 2005; Nicaise et Soualem, 2005], pour la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ temporelle le résultat d'efficacité pour l'estimateur spatial η_h^n s'est révélé local en espace mais global en temps. La cause de cette perte de localité en temps est attribuée à la nature même du problème instationnaire traité. Par rapport au cas harmonique, on observe une nouvelle contribution dans l'estimateur spatial η_h^n (voir les termes (3.2.43) et (3.2.46) à la page la 76). Cette contribution est *propre* à la formulation $\mathbf{A} - \varphi$. On renvoie aussi à la remarque 3.2.9 pour plus de détails.

Plan du chapitre

Nous nous focaliserons dans ce chapitre sur les estimateurs résiduels. En particulier :

- dans la section 3.2 on présente la formulation en potentiels $\mathbf{A} - \varphi$ en régime temporel, sa discrétisation en temps et en espace et des résultats de stabilité, pour conclure avec la définition de l'erreur et de l'estimateur ;
- dans la section 3.3, on démontre la fiabilité de l'estimateur temporel, spatial et total ;
- dans la section 3.4, on démontre l'efficacité de l'estimateur temporel, spatial et total ;
- enfin, dans la section 3.5, on valide l'estimateur sur un cas test analytique *ad hoc* dans le cas d'une solution régulière et d'une autre singulière.

Ce travail a donné lieu à la publication [Creusé et al., 2014].

Notations

On rappelle ici certaines notations qui seront utilisées dans ce chapitre.

- Les champs que l'on va utiliser sont à la fois fonctions d'une variable temporelle $t \in \mathbb{R}^+$ et d'une variable spatiale $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. En général, soit V un espace de Banach séparable et soient $a < b$ deux nombres réels, alors $L^2(a, b; V)$ dénote l'espace de toute fonction mesurable u définie sur (a, b) avec valeurs dans V et telle que $t \mapsto \|u(t, \cdot)\|_V$ soit de carré intégrable. En d'autres termes :

$$L^2(a, b; V) = \{ u \text{ mesurable} : \|u\|_{L^2(a, b; V)} < +\infty \}, \text{ où}$$

$$\|u\|_{L^2(a, b; V)} = \left(\int_a^b \|u(t, \cdot)\|_V^2 dt \right)^{1/2}.$$

- Les notations $a \lesssim b$ et $a \sim b$ dénotent l'existence des constantes positives c_1, c_2, c_3 indépendantes des quantités a et b et de la taille du maillage h telles que $a \leq c_1 b$ et $c_2 b \leq a \leq c_3 b$.
- On rappelle enfin que l'espace $\widetilde{H}_0(\text{rot}, D)'$ dénote l'espace dual topologique de $\widetilde{H}_0(\text{rot}, D)$.

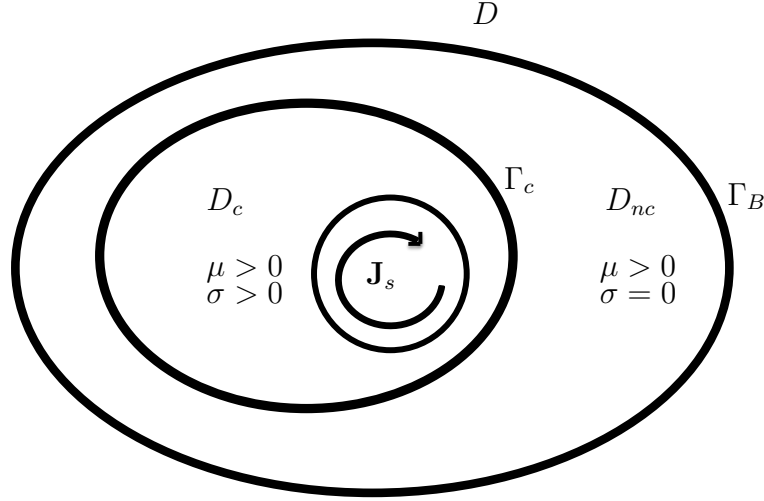


FIGURE 3.1. Domaine de configuration avec $\text{supp } \mathbf{J}_s \subset D_c$.

3.2. FORMULATION EN POTENTIEL EN RÉGIME TEMPOREL

On rappelle la formulation continue $\mathbf{A} - \varphi$, qui nous intéressera tout au long de ce chapitre. Elle a été décrite dans la section 1.2.1 et, pour tout $t \in [0, T]$ elle est donnée par :

$$\text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}) + \sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \tilde{\varphi}) = \mathbf{J}_s \text{ dans } D, \quad (3.2.1)$$

$$\text{div } (\sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \tilde{\varphi})) = 0 \text{ dans } D_c, \quad (3.2.2)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B, \quad (3.2.3)$$

$$\sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_c, \quad (3.2.4)$$

$$\mathbf{A}(t = 0, \cdot) = 0 \text{ dans } D_c. \quad (3.2.5)$$

Puisque l'on considère des conditions aux bords homogènes, on suppose que $D_c \subset D$ avec $\partial D_c \cap \partial D = \emptyset$. Une configuration possible du domaine est représentée sur la Figure 3.1, mais la Figure 2.1 du chapitre 2 fournit également un exemple possible.

La formulation variationnelle associée à (3.2.1)-(3.2.5) est donnée par :

Trouver $\mathbf{A} \in L^2(0, T; \widetilde{H}_0(\text{rot}, D))$ et $\varphi \in L^2(0, T; \widetilde{H}^1(D_c))$ tels que $\partial_t \mathbf{A} \in L^2(0, T; \widetilde{H}_0(\text{rot}, D)')$, $\mathbf{A}(0, \cdot) \equiv 0$ dans D_c et tels que pour tout $\mathbf{A}' \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D)$ et $\varphi' \in \widetilde{H}^1(D_c)$ on ait :

$$(\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}, \text{rot } \mathbf{A}') + (\sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \varphi), \mathbf{A}' + \nabla \varphi')_{D_c} = (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}'). \quad (3.2.6)$$

[Nicaise, 2015, Théorème 2.1] a démontré l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.2.6), en utilisant la théorie de Showalter pour des problèmes paraboliques dégénérés [Showalter, 1977, Théorème V4.B] et des estimations d'énergie. On donne ici l'énoncé du résultat principal. Pour cela on écrira dorénavant \mathbf{J}_s^0 pour dénoter $\mathbf{J}_s(0, \cdot)$ et \mathbf{A}^0 pour dénoter $\mathbf{A}(0, \cdot)$.

Théorème 3.2.1. Soit $\mathbf{J}_s \in H^1(0, T; H(\operatorname{div}, D))$ à divergence nulle. On suppose que

$$\mathbf{J}_s^0 \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_c, \quad (3.2.7)$$

qu'il existe $\mathbf{A}^0 \in \widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D)$ tel que

$$\mathbf{A}^0 = 0 \text{ dans } D_c, \quad (3.2.8)$$

et que

$$(\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}^0, \operatorname{rot} \mathbf{A}') = (\mathbf{J}_s^0, \mathbf{A}')_{D_{nc}} \quad \forall \mathbf{A}' \in H_0(\operatorname{rot}, D); \operatorname{div} \mathbf{A}' \in L^2(D). \quad (3.2.9)$$

Alors le problème (3.2.6) admet une unique solution (\mathbf{A}, φ) dans $H^1(0, T; \widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D)) \times L^2(0, T; \widetilde{H}^1(D_c))$ avec $\mathbf{A}(0, \cdot) = \mathbf{A}^0$.

Le lemme suivant assure que, grâce à la propriété de divergence nulle de \mathbf{J}_s , les fonctions tests dans (3.2.6) peuvent être choisies sans jauge.

Lemme 3.2.2. Soit $\mathbf{J}_s \in H^1(0, T; H(\operatorname{div}, D))$ à divergence nulle vérifiant (3.2.7) et $\mathbf{A}^0 \in \widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D)$ vérifiant (3.2.8)-(3.2.9). Alors l'unique solution $(\mathbf{A}, \varphi) \in H^1(0, T; \widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D)) \times L^2(0, T; \widetilde{H}^1(D_c))$ de (3.2.6) satisfait

$$(\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{A}') + (\sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \varphi), \mathbf{A}' + \nabla \varphi')_{D_c} = (\mathbf{J}_s, \mathbf{A}') \quad \forall (\mathbf{A}', \varphi') \in H_0(\operatorname{rot}, D) \times H^1(D_c). \quad (3.2.10)$$

DÉMONSTRATION. Puisque $\mathbf{A}' \in H_0(\operatorname{rot}, D)$ on utilise la décomposition de Helmholtz (1.3.8) :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{B}' + \nabla \psi,$$

avec $\mathbf{B}' \in \widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D)$ et $\psi \in H_0^1(D)$. D'une part, d'après la formule de Green (1.3.22) et le fait que $\operatorname{div} \mathbf{J}_s = 0$, on a :

$$\int_D \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{A}' = \int_D \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{B}'.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} & \int_D \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}' + \int_{D_c} \sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \varphi) \cdot (\mathbf{A}' + \nabla \varphi') \\ &= \int_D \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}' + \int_{D_c} \sigma (\partial_t \mathbf{A} + \nabla \varphi) \cdot (\mathbf{B}' + \nabla (\varphi' + \psi - \frac{1}{|D_c|} \int_{D_c} (\varphi' + \psi))) , \end{aligned}$$

avec $\mathbf{B}' \in \widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D)$ et $\varphi' + \psi - \frac{1}{|D_c|} \int_{D_c} (\varphi' + \psi) \in \widetilde{H}^1(D_c)$, d'où la conclusion. \square

3.2.1. Semi-discrétisation en temps

On discrétise en temps par le schéma d'Euler implicite le problème (3.2.1)-(3.2.5). Tout d'abord, on choisit une partition de l'intervalle temporel $[0, T]$ constituée de sous-intervalles $[t_{m-1}, t_m[$ avec $1 \leq m \leq N$ tels que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. On dénote τ_m la longueur $t_m - t_{m-1}$ et on pose

$$\tau = \max_{1 \leq m \leq N} \tau_m.$$

On définit le paramètre de régularité σ_τ par :

$$\sigma_\tau = \max_{2 \leq m \leq N} \frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}. \quad (3.2.11)$$

Sous l'hypothèse que \mathbf{J}_s est continue en temps, on dénote par \mathbf{J}_s^m la valeur de $\mathbf{J}_s(t_m)$ et par $\pi_\tau \mathbf{J}_s(t) = \mathbf{J}_s^m$ l'interpolation constante par morceaux en temps de \mathbf{J}_s pour $t \in]t_{m-1}, t_m]$, $1 \leq m \leq N$. Similairement, \mathbf{A}^m et φ^m dénotent les approximations respectives de $\mathbf{A}(t_m)$ et de $\varphi(t_m)$. Le schéma d'Euler implicite, appliqué à (3.2.1)-(3.2.5), mène au problème semi-discrétisé en temps suivant : pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$

$$\text{rot} \left(\mu^{-1} \text{rot} \mathbf{A}^m \right) + \sigma \left(\frac{\mathbf{A}^m - \mathbf{A}^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \widetilde{\varphi^m} \right) = \mathbf{J}_s^m \text{ dans } D, \quad (3.2.12)$$

$$\text{div} \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}^m - \mathbf{A}^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi^m \right) \right) = 0 \text{ dans } D_c, \quad (3.2.13)$$

$$\mathbf{A}^m \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B,$$

$$\sigma \left(\frac{\mathbf{A}^m - \mathbf{A}^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi^m \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_c,$$

$$\mathbf{A}^0 = 0 \text{ dans } D_c,$$

où la notation $\widetilde{\varphi^m}$ représente une extension de φ^m dans le domaine tout entier D , tenant compte du fait que φ^m n'est pas défini dans le domaine non conducteur $D_{nc} = D \setminus D_c$. Puisque $\sigma \equiv 0$ dans D_{nc} , la valeur de cette extension ne change en rien le problème. Établissons la formulation variationnelle. On multiplie l'équation (3.2.12) par une fonction test $\mathbf{A}' \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D)$ et on intègre sur D . Similairement, on multiplie (3.2.13) par une fonction test $\varphi' \in \widetilde{H}^1(D_c)$ et par τ_m et on intègre sur D_c . En faisant la somme des deux expressions obtenues, on obtient la formulation variationnelle suivante :

Trouver $(\mathbf{A}^m, \varphi^m) \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c)$, $0 \leq m \leq N$, tels que $\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}(0, \cdot) \equiv 0$ dans D_c et tels que, pour tout $1 \leq m \leq N$, on a :

$$a_m((\mathbf{A}^m, \varphi^m), (\mathbf{A}', \varphi')) = l_m((\mathbf{A}', \varphi')) \quad \forall (\mathbf{A}', \varphi') \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c), \quad (3.2.14)$$

avec a_m la forme bilinéaire continue définie par :

$$a_m((\mathbf{A}, \varphi), (\mathbf{A}', \varphi')) = (\mu^{-1} \text{rot} \mathbf{A}, \text{rot} \mathbf{A}') + \left(\frac{\sigma}{\tau_m} (\mathbf{A} + \tau_m \nabla \varphi), \mathbf{A}' + \tau_m \nabla \varphi' \right)_{D_c}, \quad (3.2.15)$$

et l_m la forme linéaire continue définie par :

$$l_m((\mathbf{A}', \varphi')) = (\mathbf{J}_s^m, \mathbf{A}') + \left(\frac{\sigma}{\tau_m} \mathbf{A}^{m-1}, \mathbf{A}' + \tau_m \nabla \varphi' \right)_{D_c}. \quad (3.2.16)$$

Le résultat suivant assure que le problème (3.2.14) est bien posé au sens de [Ern et Guermond, 2002, Définition 3.3.1].

Théorème 3.2.3. *Pour tout m , $1 \leq m \leq N$, le problème (3.2.14) admet une unique solution $(\mathbf{A}^m, \varphi^m) \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c)$.*

DÉMONSTRATION. La preuve est similaire à celle de [Creusé et. al., 2012, Lemma 2.1], on donne les détails par souci d'exhaustivité. Afin d'appliquer le Théorème de Lax-Milgram, puisque l'on sait que la forme bilinéaire a_m est continue sur $(\widetilde{H}_0(\text{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c)) \times (\widetilde{H}_0(\text{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c))$, il reste à démontrer qu'elle est coercive sur $\widetilde{H}_0(\text{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c)$, i.e. qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$a_m((\mathbf{A}, \varphi), (\mathbf{A}, \varphi)) \geq C \|(\mathbf{A}, \varphi)\|_{\widetilde{H}_0(\text{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c)}^2 \quad \forall (\mathbf{A}, \varphi) \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c),$$

où

$$\|(\mathbf{A}, \varphi)\|_{\widetilde{H}_0(\text{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c)}^2 = \|\mathbf{A}\|_{H_0(\text{rot}, D)}^2 + \|\varphi\|_{1, D_c}^2.$$

On fixe $m \in \{1, \dots, N\}$ et on note $\Delta t = \tau_m$. D'après la définition de la forme bilinéaire a_m , il suffit de démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(\mathbf{A}, \varphi) \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c)$, on a

$$\int_D \mu^{-1} |\text{rot } \mathbf{A}|^2 + \int_{D_c} \frac{\sigma}{\Delta t} |\mathbf{A} + \Delta t \nabla \varphi|^2 \geq C \|(\mathbf{A}, \varphi)\|_{\widetilde{H}_0(\text{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c)}^2.$$

On procède en raisonnant par l'absurde. On suppose qu'il existe une suite $\{(\mathbf{A}_n, \varphi_n) \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c); n \in \mathbb{N}\}$ telle que :

$$\|(\mathbf{A}_n, \varphi_n)\|_{\widetilde{H}_0(\text{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c)} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad (3.2.17)$$

$$\int_D \mu^{-1} |\text{rot } \mathbf{A}_n|^2 + \int_{D_c} \frac{\sigma}{\Delta t} |\mathbf{A}_n + \Delta t \nabla \varphi_n|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (3.2.18)$$

On déduit d'une part de (3.2.18) que

$$\|\text{rot } \mathbf{A}_n\|_{L^2(D)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Grâce à l'inégalité de Friedrichs (1.3.10), pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante $\tilde{C} > 0$ telle que $\|\mathbf{A}_n\| \leq \tilde{C} \|\operatorname{rot} \mathbf{A}_n\| \quad \forall \mathbf{A}_n \in \widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D)$. Par conséquent :

$$\|\mathbf{A}_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (3.2.19)$$

D'autre part, de (3.2.18) on déduit que

$$\|\mathbf{A}_n + \Delta t \nabla \varphi_n\|_{D_c} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (3.2.20)$$

Enfin l'inégalité triangulaire, associée à (3.2.19) et (3.2.20), nous donne :

$$\|\Delta t \nabla \varphi_n\|_{D_c} \leq \|\mathbf{A}_n + \Delta t \nabla \varphi_n\|_{D_c} + \|\mathbf{A}_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

d'où

$$\|(\mathbf{A}_n, \varphi_n)\|_{\widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui contredit (3.2.17).

En conclusion, pour $1 \leq m \leq N$, on sait que a^m est une forme bilinéaire continue et coercive sur $(\widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c)) \times (\widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c))$, avec $\widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c)$ espace de Hilbert, et l^m est une forme linéaire continue sur $(\widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c)) \times (\widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c))$. Alors grâce au Théorème de Lax-Milgram la solution $(\mathbf{A}^m, \varphi^m)$ de (3.2.14) existe et est unique. \square

Grâce à la propriété de divergence nulle de \mathbf{J}_s , les fonctions tests dans (3.2.14) peuvent être choisies sans jauge.

Lemme 3.2.4. *Soit $(\mathbf{A}^m, \varphi^m) \in (\widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c)) \times (\widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c))$, $1 \leq m \leq N$ l'unique solution du problème (3.2.14) avec $\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}(0, \cdot) \equiv 0$ dans D_c . Alors on a, pour tout m , $1 \leq m \leq N$,*

$$a_m((\mathbf{A}^m, \varphi^m), (\mathbf{A}', \varphi')) = l_m((\mathbf{A}', \varphi')), \quad \forall (\mathbf{A}', \varphi') \in H_0(\operatorname{rot}, D) \times H^1(D_c).$$

DÉMONSTRATION. La preuve est similaire à celle du Lemme 3.2.2 (voir aussi [Creusé et al., 2012, Lemme 2.2]). On suppose que $(\mathbf{A}^m, \varphi^m)_{0 \leq m \leq N} \in (\widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c))^{N+1}$ est solution de (3.2.14) et que $(\mathbf{A}', \varphi') \in H_0(\operatorname{rot}, D) \times H^1(D_c)$. $\mathbf{A}' \in H_0(\operatorname{rot}, D)$ admet la décomposition de Helmholtz (1.3.8) :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{B}' + \nabla \psi,$$

où $\mathbf{B}' \in \widetilde{H_0}(\text{rot}, D)$ et $\psi \in H_0^1(D)$, d'où :

$$\begin{aligned} a_m((\mathbf{A}^m, \varphi^m), (\mathbf{A}', \varphi')) &= a_m((\mathbf{A}^m, \varphi^m), (\mathbf{B}' + \nabla\psi, \varphi')) \\ &= \int_D \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}^m \cdot \text{rot } \mathbf{B}' + \int_{D_c} \frac{\sigma}{\tau_m} (\mathbf{A}^m + \tau_m \nabla \varphi^m) \cdot \left(\mathbf{B}' + \tau_m \nabla \left(\frac{\psi}{\tau_m} + \varphi' \right) \right). \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Ensuite, en prenant

$$\psi' = \frac{1}{\tau_m} \left(\psi - \frac{1}{|D_c|} \int_{D_c} \psi \right) + \varphi' - \frac{1}{|D_c|} \int_{D_c} \varphi' \in \widetilde{H^1(D_c)},$$

(3.2.21) devient :

$$\begin{aligned} &\int_D \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}^m \cdot \text{rot } \mathbf{B}' + \int_{D_c} \frac{\sigma}{\tau_m} (\mathbf{A}^m + \tau_m \nabla \varphi^m) \cdot (\mathbf{B}' + \tau_m \nabla (\psi/\tau_m + \varphi')) \\ &= \int_D \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}^m \cdot \text{rot } \mathbf{B}' + \int_{D_c} \frac{\sigma}{\tau_m} (\mathbf{A}^m + \tau_m \nabla \varphi^m) \cdot (\mathbf{B}' + \tau_m \nabla \psi') \\ &= \int_D \mathbf{J}_s^m \cdot \mathbf{B}' + \int_{D_c} \frac{\sigma}{\tau_m} \mathbf{A}^{m-1} \cdot (\mathbf{B}' + \tau_m \nabla \psi'), \end{aligned}$$

où, pour la dernière étape on a utilisé l'équation (3.2.14), puisque $\mathbf{B}' \in \widetilde{H_0}(\text{rot}, D)$ et $\psi' \in \widetilde{H^1(D_c)}$. On remplace \mathbf{B}' par $\mathbf{A}' - \nabla\psi$. On remarque d'abord que grâce au fait que $\psi = 0$ sur Γ_B et à l'hypothèse du courant à divergence nulle, on a

$$\int_D \mathbf{J}_s^m \cdot \nabla \psi' = \int_{\Gamma_B} \mathbf{J}_s^m \cdot \mathbf{n} \psi' - \int_D \text{div}(\mathbf{J}_s^m) \psi' = 0.$$

On remarque aussi que

$$\mathbf{B}' + \tau_m \nabla \psi' = \mathbf{B}' + \nabla \psi + \tau_m \nabla \varphi' = \mathbf{A}' + \tau_m \nabla \varphi'.$$

D'où la conclusion :

$$a_m((\mathbf{A}^m, \varphi^m), (\mathbf{A}', \varphi')) = \int_D \mathbf{J}_s^m \cdot \mathbf{A}' + \int_{D_c} \frac{\sigma}{\tau_m} \mathbf{A}^{m-1} \cdot (\mathbf{A}' + \tau_m \nabla \varphi') = l_m((\mathbf{A}', \varphi')). \quad (3.2.22)$$

□

On définit la norme $[[\cdot]]_n$ de la suite $(\mathbf{A}^m, \varphi^m)_{0 \leq m \leq n}$, $0 \leq m \leq n$, solution de (3.2.14), comme suit :

$$[[\mathbf{A}^m, \varphi^m]]_n = \left(\left\| \sigma^{1/2} (\mathbf{A}^n + \sum_{m=1}^n \tau_m \nabla \varphi^m) \right\|_{D_c}^2 + \sum_{m=1}^n \tau_m \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{A}^m \right\|_D^2 \right)^{1/2}. \quad (3.2.23)$$

De plus, puisque $\text{supp } \varphi^m \subset D_c$, on construit une fonction $\varphi^{m,nc} \in H^1(D_{nc})$, définie dans le domaine non-conducteur D_{nc} par :

$$\begin{cases} \Delta \varphi^{m,nc} = 0 & \text{dans } \partial D_{nc}, \\ \varphi^{m,nc}|_{\Gamma_c} = \varphi^m|_{\Gamma_c} & \text{sur } \Gamma_c, \\ \varphi^{m,nc}|_{\Gamma_B} = 0 & \text{sur } \Gamma_B, \end{cases} \quad (3.2.24)$$

et la fonction $\widetilde{\varphi^m} \in H_0^1(D)$ par

$$\widetilde{\varphi^m} = \begin{cases} \varphi^m & \text{dans } D_c, \\ \varphi^{m,nc} & \text{dans } D_{nc}. \end{cases} \quad (3.2.25)$$

On a le résultat de stabilité suivant :

Lemme 3.2.5. *Soit $(\mathbf{A}^m, \varphi^m) \in (\widetilde{H}_0(\text{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c)) \times (\widetilde{H}_0(\text{rot}, D) \times \widetilde{H}^1(D_c))$, $1 \leq m \leq N$ l'unique solution du problème (3.2.14) avec $\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}(0, \cdot) \equiv 0$ dans D_c . Alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$[[(\mathbf{A}^m, \varphi^m)]]_N \leq C \left(\mu_{\max} \sum_{m=1}^N \tau_m \| \mathbf{J}_s^m \|^2_{(H(\text{rot}, D))'} \right)^{1/2}. \quad (3.2.26)$$

DÉMONSTRATION. En prenant $\mathbf{A}' \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D)$ et $\varphi' = 0$ dans (3.2.14), on obtient :

$$(\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}^m, \text{rot } \mathbf{A}')_D + \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}^m - \mathbf{A}^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi^m \right), \mathbf{A}' \right)_{D_c} = (\mathbf{J}_s^m, \mathbf{A}')_D. \quad (3.2.27)$$

En définissant :

$$\overline{\mathbf{A}^m} = \mathbf{A}^m + \sum_{p=1}^m \tau_p \nabla \widetilde{\varphi^p}, \quad \text{avec } 1 \leq m \leq n, \quad (3.2.28)$$

$$\overline{\mathbf{A}^0} = \mathbf{A}^0, \quad (3.2.29)$$

et en choisissant $\mathbf{A}' = \overline{\mathbf{A}^m}$ dans (3.2.27), on obtient

$$\int_{D_c} \sigma (\overline{\mathbf{A}^m} - \overline{\mathbf{A}^{m-1}}) \cdot \overline{\mathbf{A}^m} + \tau_m \int_D |\mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{A}^m|^2 = \tau_m \int_D \mathbf{J}_s^m \cdot \overline{\mathbf{A}^m}. \quad (3.2.30)$$

Par ailleurs :

$$\int_D \mathbf{J}_s^m \cdot \overline{\mathbf{A}^m} = \int_D \mathbf{J}_s^m \cdot \mathbf{A}^m + \sum_{p=1}^m \tau_p \int_D \mathbf{J}_s^m \cdot \nabla \widetilde{\varphi^p} = \int_D \mathbf{J}_s^m \cdot \mathbf{A}^m \quad (3.2.31)$$

par la formule de Green (1.3.22) et le fait que $\text{div } \mathbf{J}_s^m = 0$. De plus, de l'inégalité de Friedrichs (1.3.10), on obtient :

$$\int_D \mathbf{J}_s^m \cdot \overline{\mathbf{A}^m} \leq C \| \mathbf{J}_s^m \|_{(H_0(\text{rot}, D))'} \| \text{rot } \mathbf{A}^m \|. \quad (3.2.32)$$

De l'égalité (3.2.30) on obtient, grâce à (3.2.32) et à l'inégalité de Young $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$:

$$\begin{aligned}
& \int_{D_c} |\sigma^{1/2} \overline{\mathbf{A}^m}|^2 + \tau_m \int_D |\mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{A}^m|^2 \\
&= \tau_m \int_D \mathbf{J}_s^m \cdot \overline{\mathbf{A}^m} + \sigma \int_D \overline{\mathbf{A}^{m-1}} \cdot \overline{\mathbf{A}^m} \\
&\leq C \tau_m \|\mathbf{J}_s^m\|_{(H_0(\text{rot}))'} \|\text{rot } \mathbf{A}^m\| + \|\sigma^{1/2} \overline{\mathbf{A}^{m-1}}\|_{D_c} \|\sigma^{1/2} \overline{\mathbf{A}^m}\|_{D_c} \\
&\lesssim \frac{C^2}{2} \tau_m \mu_{\max} \|\mathbf{J}_s^m\|_{(H_0(\text{rot}))'}^2 + \frac{\tau_m}{2} \|\mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{A}^m\|^2 + \frac{1}{2} \|\sigma^{1/2} \overline{\mathbf{A}^{m-1}}\|_{D_c}^2 + \frac{1}{2} \|\sigma^{1/2} \overline{\mathbf{A}^m}\|_{D_c}^2,
\end{aligned}$$

d'où, en réordonnant les termes :

$$\|\sigma^{1/2} \overline{\mathbf{A}^m}\|_{D_c}^2 - \|\sigma^{1/2} \overline{\mathbf{A}^{m-1}}\|_{D_c}^2 + \tau_m \|\mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{A}^m\|^2 \leq C \mu_{\max} \tau_m \|\mathbf{J}_s^m\|_{(H_0(\text{rot}))'}^2$$

En prenant enfin la somme pour $m = 1, \dots, N$ et en utilisant la condition initiale $\mathbf{A}^0 = 0$ dans D_c , on déduit (3.2.26). \square

3.2.2. Discrétisation en espace-temps

Dans cette section on discrétise en espace la formulation variationnelle (3.2.14) par la méthode des éléments finis. A chaque instant t_m , $0 \leq t_m \leq t_N$, on associe un maillage \mathcal{T}_{hm} du domaine de calcul D polyédral de \mathbb{R}^3 . Chaque élément appartient soit à D_c , soit à D_{nc} . Ce maillage est régulier au sens de [Ciarlet, 1978], comme déjà spécifié dans la section 1.3.2. Les notations seront les mêmes que celles de la section 1.3.2, en ajoutant là où ce sera utile l'indice de discrétisation temporelle "m". Par exemple, \mathcal{T}_{hm} , \mathcal{N}_{hm} , \mathcal{N}_{hm}^{int} , \mathcal{E}_{hm} , \mathcal{E}_{hm}^{int} , \mathcal{F}_{hm} et \mathcal{F}_{hm}^{int} dénotent respectivement l'ensemble des tétraèdres, des noeuds, des noeuds intérieurs, des arêtes, des arêtes intérieures, des faces et des faces intérieures. Etablissons alors la formulation variationnelle, les résultats d'existence-unicité et de stabilité.

A chaque instant t_m , le potentiel vecteur \mathbf{A}^m est approché par les éléments finis de Nédélec et le potentiel scalaire φ^m par les éléments finis nodaux, similairement à ce que l'on a fait pour le cas harmonique en section 2.2.2. En d'autres termes, l'espace $\widetilde{H}_0(\text{rot}, D)$ est approché par $\widetilde{X}_h(D)$ et $\widetilde{H}^1(D_c)$ par $\widetilde{\Theta}_h(D_c)$. La formulation variationnelle s'écrit alors :

Trouver $(\mathbf{A}_h^m, \varphi_h^m) \in \widetilde{X}_h(D) \times \widetilde{\Theta}_h(D_c)$, $0 \leq m \leq N$ tels que $\mathbf{A}_h^0 = \mathbf{A}(0, \cdot) \equiv 0$ dans D_c et tels que pour tout m , $1 \leq m \leq N$,

$$a_m((\mathbf{A}_h^m, \varphi_h^m), (\mathbf{A}'_h, \varphi'_h)) = l_m((\mathbf{A}'_h, \varphi'_h)) \quad \forall (\mathbf{A}'_h, \varphi'_h) \in \widetilde{X}_h(D) \times \widetilde{\Theta}_h(D_c). \quad (3.2.33)$$

avec a_m et l_m les formes respectivement bilinéaire et linéaire définies en (3.2.15) et (3.2.16).

Théorème 3.2.6. *Pour tout m , $1 \leq m \leq N$, le problème (3.2.33) admet une unique solution*

$$(\mathbf{A}_h^m, \varphi_h^m) \in \widetilde{X}_h(D) \times \widetilde{\Theta}_h(D_c).$$

DÉMONSTRATION. La preuve est en tout point similaire à celle du Théorème 3.2.3 concernant le cas semi-discrétisé à la différence que, dans ce cas, il faut utiliser l'inégalité de Friedrichs discrète (1.3.11) au lieu de son équivalent continu (1.3.10). \square

Compte tenu du fait que $\widetilde{X}_h(D) \not\subset \widetilde{H}_0(\text{rot}, D)$, afin de gérer la non conformité de l'espace $\widetilde{X}_h(D)$, on peut formuler un résultat similaire à celui obtenu dans le cadre harmonique (voir la relation (2.2.6)) et à celui obtenu dans le cadre de la semi-discrétisation en temps (voir le Lemme 3.2.4) :

Lemme 3.2.7. *Soit $(\mathbf{A}_h^m, \varphi_h^m) \in \widetilde{X}_h(D) \times \widetilde{\Theta}_h(D_c)$, $1 \leq m \leq N$ l'unique solution du problème (3.2.33) avec $\mathbf{A}_h^0 = \mathbf{A}(0, \cdot) \equiv 0$ dans D_c . Alors pour tout m , $1 \leq m \leq N$,*

$$a_m((\mathbf{A}_h^m, \varphi_h^m), (\mathbf{A}'_h, \varphi'_h)) = l_m((\mathbf{A}'_h, \varphi'_h)) \quad \forall (\mathbf{A}'_h, \varphi'_h) \in X_h(D) \times \Theta_h(D_c).$$

DÉMONSTRATION. La preuve est similaire à celle du Lemme 3.2.4, en utilisant cette fois la décomposition de Helmholtz discrète (1.3.9) au lieu de son équivalent continu (1.3.8). \square
En procédant comme dans le Lemme 3.2.5, on obtient le résultat de stabilité suivant.

Lemme 3.2.8. *Soit $(\mathbf{A}_h^m, \varphi_h^m) \in \widetilde{X}_h(D) \times \widetilde{\Theta}_h(D_c)$, $1 \leq m \leq N$ l'unique solution du problème (3.2.33) avec $\mathbf{A}_h^0 = \mathbf{A}(0, \cdot) \equiv 0$ dans D_c . Alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$[[(\mathbf{A}_h^m, \varphi_h^m)]]_N \leq C \left(\sum_{m=1}^N \tau_m \mu_{\max} \| \mathbf{J}_s^m \|^2_{H(\text{rot}, D)'} \right)^{1/2}.$$

DÉMONSTRATION. La preuve est similaire à celle du lemme 3.2.5, en utilisant cette fois l'inégalité de Friedrichs discrète (1.3.11). \square

3.2.3. Définition de l'erreur et de l'estimateur

Erreur

Tout d'abord on construit une interpolation en temps de la solution en temps $(\mathbf{A}^m, \varphi^m)$, $1 \leq m \leq N$, de (3.2.14) par :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_\tau(t) = \frac{t - t_{m-1}}{\tau_m} \mathbf{A}^m + \frac{t_m - t}{\tau_m} \mathbf{A}^{m-1} & t_{m-1} < t \leq t_m, \\ \varphi_\tau(t) = \varphi^m & t_{m-1} < t \leq t_m, \end{cases} \quad (3.2.34)$$

et une interpolation en temps de la solution en espace-temps $(\mathbf{A}_h^m, \varphi_h^m)$, $1 \leq m \leq N$, de (3.2.33) par :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{h\tau}(t) = \frac{t - t_{m-1}}{\tau_m} \mathbf{A}_h^m + \frac{t_m - t}{\tau_m} \mathbf{A}_h^{m-1} & t_{m-1} < t \leq t_m, \\ \varphi_{h\tau}(t) = \varphi_h^m & t_{m-1} < t \leq t_m. \end{cases}$$

On s'intéresse à l'erreur en temps donnée par :

$$\mathbf{e}_{A,\tau}(t) = \mathbf{A}(t) - \mathbf{A}_\tau(t), \quad e_{\varphi,\tau}(t) = \varphi(t) - \varphi_\tau(t),$$

et à celle en espace donnée par :

$$\mathbf{e}_{A,h\tau}(t) = \mathbf{A}_\tau(t) - \mathbf{A}_{h\tau}(t), \quad e_{\varphi,h\tau}(t) = \varphi_\tau(t) - \varphi_{h\tau}(t).$$

On estimera les erreurs en norme énergétique. L'erreur temporelle à l'instant t_m est donnée par :

$$e_{temp}^m = \left(\left\| \sigma^{1/2} (\mathbf{e}_{A,\tau}(t_m) + \nabla \int_0^{t_m} e_{\varphi,\tau}(s) ds) \right\|_{D_c}^2 + \int_0^{t_m} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,\tau}(s) \right\|_{D_c}^2 ds \right)^{1/2}, \quad (3.2.35)$$

et l'erreur spatiale à l'instant t_m est donnée par :

$$e_{spat}^m = \left(\left\| \sigma^{1/2} \left(\mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m) + \sum_{n=1}^m \tau_n \nabla e_{\varphi,h\tau}(t_n) \right) \right\|_{D_c}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_n) \right\|_{D_c}^2 \right)^{1/2}. \quad (3.2.36)$$

Deux autres définitions de l'erreur en espace-temps seront introduites ultérieurement à la section 3.3.4 à la page 98, afin de démontrer la fiabilité et l'efficacité globales pour l'estimateur global introduit ci-dessous (voir définition (3.2.48)).

Estimateur

L'estimateur *a posteriori* η_τ^m associé à l'erreur temporelle au temps t_m , $1 \leq m \leq N$, est défini par :

$$\eta_\tau^m = \left(\frac{\tau_m}{3} \right)^{1/2} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot} (\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}) \right\|. \quad (3.2.37)$$

L'estimateur *a posteriori* η_h^m associé à l'erreur spatiale au temps t_m , $1 \leq m \leq N$, est défini par :

$$\eta_h^m = \left((\eta_{D;1}^m)^2 + (\eta_{D;2}^m)^2 + (\eta_{D;3}^m)^2 + (\eta_{J;1}^m)^2 + (\eta_{J;2}^m)^2 + (\eta_{J;3}^m)^2 \right)^{1/2}, \quad (3.2.38)$$

avec

$$(\eta_{D;i}^m)^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_{h,m}} (\eta_{T;i}^m)^2, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.2.39)$$

$$(\eta_{J;i}^m)^2 = \sum_{F \in \mathcal{F}_{h,m}^{int}} (\eta_{F;i}^m)^2, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.2.40)$$

où, pour chaque $T \in \mathcal{T}_{hm}$,

$$\eta_{T;1}^m = h_T \left\| \mathbf{J}_{s,h}^m - \text{rot} (\mu^{-1} \text{rot} \mathbf{A}_h^m) - \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \right\|_T, \quad (3.2.41)$$

$$\eta_{T;2}^m = h_T \left\| \text{div} \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \right) \right\|_T, \quad (3.2.42)$$

$$\eta_{T;3}^m = h_T \left\| \text{div} \left(\sigma \left(\mathbf{A}_h^m + \sum_{p=1}^m \tau_p \nabla \varphi_h^p \right) \right) \right\|_T, \quad (3.2.43)$$

$$\eta_{F;1}^m = h_F^{1/2} \left\| [\mathbf{n} \times \mu^{-1} \text{rot} \mathbf{A}_h^m]_F \right\|_F, \quad (3.2.44)$$

$$\eta_{F;2}^m = h_F^{1/2} \left\| \left[\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \cdot \mathbf{n} \right]_F \right\|_F, \quad (3.2.45)$$

$$\eta_{F;3}^m = h_F^{1/2} \left\| [\sigma (\mathbf{A}_h^m + \sum_{p=1}^m \tau_p \nabla \varphi_h^p) \cdot \mathbf{n}]_F \right\|_F. \quad (3.2.46)$$

On rappelle que \mathbf{n} représente la normale unitaire sortante de la face F et $[u]_F$ représente le saut de la quantité u à travers la face F , à savoir :

$$[u(\mathbf{x})]_F = \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} u(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{n}) - u(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{n}) & \text{si } F \in \mathcal{F}_{hm}^{int}, \\ 0 & \text{si } F \in \mathcal{F}_{hm} \setminus \mathcal{F}_{hm}^{int}. \end{cases}$$

Enfin, on définit le terme d'oscillation par :

$$(\xi^m)^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_{hm}} (\xi_T^m)^2 \text{ où, pour chaque } T \in \mathcal{T}_{hm}, \xi_T^m = h_T \left\| \mathbf{J}_s^m - \mathbf{J}_{s,h}^m \right\|_T, \quad (3.2.47)$$

où $\mathbf{J}_{s,h}^m$ est l'approximation spatiale de \mathbf{J}_s^m par les éléments finis de Raviart-Thomas caractérisée par les conditions suivantes :

$$\int_F \mathbf{J}_{s,h}^m \cdot \mathbf{n} d\gamma(\mathbf{x}) = \int_F \mathbf{J}_s^m \cdot \mathbf{n} d\gamma(\mathbf{x}) \text{ pour tout } F \subset \partial T \text{ avec } T \in \mathcal{T}_{hm}.$$

On remarque que la propriété de divergence nulle de \mathbf{J}_s^m implique la même propriété pour $\mathbf{J}_{s,h}^m$.

Similairement au cas continu, φ_h^m n'est pas défini si $T \subset D_{nc}$, par conséquent on remplacera φ_h^m par une extension fixée sans écrire forcément $\tilde{\varphi}_h^m$ afin d'alléger les notations. Cette extension ne change en rien le problème car elle est multipliée par σ qui est nul pour tout $T \subset D_{nc}$.

Remarque 3.2.9. Les termes (3.2.41), (3.2.42), (3.2.44) et (3.2.45) de l'estimateur spatial peuvent être mis en relation avec l'EDP étudiée. Les contributions volumiques $\eta_{D;1}^m$ et $\eta_{D;2}^m$ représentent le résidu associé aux équations (3.2.1)-(3.2.2). Les contributions surfaciques $\eta_{J;1}^m$ et $\eta_{J;2}^m$ sont associées à la régularité des fonctions obtenues en résolvant numériquement l'EDP. L'indice J dénote le saut (jump) de ces quantités aux interfaces.

Par rapport à l'estimateur résiduel pour le cas harmonique proposé dans [Creusé et al., 2012], on remarque les nouvelles contributions de l'estimateur $\eta_{D;3}^m$ et $\eta_{J;3}^m$. Celles-ci sont liées à la nature instationnaire du problème. Si l'on intègre sur $[0, t]$ l'équation (3.2.2), on a :

$$\text{div} \left(\sigma \left(\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) + \nabla \int_0^t \varphi \right) \right) = 0 \text{ dans } D_c,$$

où on a utilisé la condition initiale $\mathbf{A}(0, \cdot) \equiv 0$ dans D_c . En conclusion, $\eta_{D;3}^m$ et $\eta_{J;3}^m$ représentent respectivement le résidu et le saut associés à cette équation considérée au temps $t = t_m$.

Pour conclure, l'estimateur d'erreur global η^n au temps t_n , $1 \leq n \leq N$, est donné par :

$$\eta^n = \left(\sum_{m=1}^n (\eta_\tau^m)^2 + \tau_m (\eta_h^m)^2 \right)^{1/2}. \quad (3.2.48)$$

3.3. FIABILITÉ

3.3.1. Fiabilité temporelle

Lemme 3.3.1. *Pour tout $\mathbf{v}^m \in H_0(\text{rot}, D)$, $0 \leq m \leq N$, soit \mathbf{v}_τ l'interpolation affine correspondante définie par*

$$\mathbf{v}_\tau(t) = \frac{t - t_{m-1}}{\tau_m} \mathbf{v}^m + \frac{t_m - t}{\tau_m} \mathbf{v}^{m-1} \quad \text{pour } t_{m-1} < t \leq t_m.$$

Alors on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_1}{6} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}^0 \right\|^2 + \sum_{m=1}^n \left(\frac{\tau_m}{6} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}^m \right\|^2 \right) \\ & \leq \int_0^{t_n} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}_\tau \right\|^2 dt \\ & \leq \frac{\tau_1}{2} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}^0 \right\|^2 + \left(\frac{1 + \sigma_\tau}{2} \right) \sum_{m=1}^{n-1} \left(\tau_m \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}^m \right\|^2 \right) + \frac{\tau_n}{2} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}^n \right\|^2, \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

où σ_τ est le paramètre de régularité défini en (3.2.11).

DÉMONSTRATION. Un simple calcul donne :

$$\begin{aligned} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}_\tau \right\|^2 dt &= \int_D \mu^{-1} \frac{\tau_m}{3} \left(|\text{rot } \mathbf{v}^m|^2 + |\text{rot } \mathbf{v}^{m-1}|^2 + \text{rot } \mathbf{v}^m \cdot \text{rot } \mathbf{v}^{m-1} \right) \\ &\geq \frac{\tau_m}{3} \left(\left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}^m \right\|^2 + \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}^{m-1} \right\|^2 \right. \\ &\quad \left. - \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}^m \right\| \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}^{m-1} \right\| \right). \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Puisque

$$a^2 + b^2 - ab \geq \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

on obtient :

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}_\tau \right\|^2 dt \geq \frac{\tau_m}{6} \left(\left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}^m \right\|^2 + \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}^{m-1} \right\|^2 \right). \quad (3.3.3)$$

En effectuant la somme de $m = 1$ à $m = n$ de l'inégalité (3.3.3), l'inégalité de gauche de (3.3.1) est établie.

Pour démontrer l'inégalité de droite, on applique à la première ligne de (3.3.2) l'estimation

$$a \cdot b \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \text{ valable pour tout } a, b \in \mathbb{R} :$$

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}_\tau \right\|^2 dt \leq \frac{\tau_m}{2} \left(\left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}^m \right\|^2 + \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}^{m-1} \right\|^2 \right),$$

et, en faisant la somme de $m = 1$ à $m = n$, la conclusion suit. \square

Remarque 3.3.2. Si l'on souhaite ne pas faire intervenir le paramètre de régularité σ_τ (3.2.11), on peut réécrire la relation à droite de (3.3.1) comme suit :

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_n} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}_\tau \right\|^2 dt \\ & \leq \frac{\tau_n}{2} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}^n \right\|^2 + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\tau_m + \tau_{m+1}}{2} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}^m \right\|^2 + \frac{\tau_1}{2} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}^0 \right\|^2 \\ & \leq \sum_{m=1}^n \frac{\tau_m + \tau_{m+1}}{2} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}^m \right\|^2 + \frac{\tau_1}{2} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{v}^0 \right\|^2, \end{aligned}$$

avec la convention que $\tau_{n+1} = 0$.

D'après (3.2.34) on remarque que :

$$\partial_t \mathbf{A}_\tau = \frac{\mathbf{A}^m - \mathbf{A}^{m-1}}{\tau_m} \text{ pour tout } t \text{ dans }]t_{m-1}, t_m].$$

Grâce au Lemme 3.2.4, la formulation semi-discrète (3.2.14) est équivalente à

$$\begin{aligned} & (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}^m, \text{rot } \mathbf{A}') + (\sigma(\partial_t \mathbf{A}_\tau + \nabla \varphi^m), \mathbf{A}' + \nabla \varphi')_{D_c} = (\mathbf{J}_s^m, \mathbf{A}') \\ & \forall (\mathbf{A}', \varphi') \in H_0(\text{rot}, D) \times \widetilde{H^1}(D_c), \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

pour tout $t \in]t_{m-1}, t_m]$. En prenant la différence de cette formulation (3.3.4) avec celle continue non jaugée (3.2.10), on obtient l'équation temporelle résiduelle :

$$\begin{aligned} & (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{e}_{A,\tau}, \text{rot } \mathbf{A}') + (\sigma(\partial_t \mathbf{e}_{A,\tau} + \nabla e_{\varphi,\tau}), \mathbf{A}' + \nabla \varphi')_{D_c} \\ & = (\mathbf{J}_s - \pi_\tau \mathbf{J}_s, \mathbf{A}') + (\mu^{-1} \text{rot } (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau), \text{rot } \mathbf{A}') \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

$$\forall (\mathbf{A}', \varphi') \in H_0(\text{rot}, D) \times \widetilde{H^1}(D_c),$$

pour tout $t \in]t_{m-1}, t_m]$. Cela nous permet de montrer que l'erreur temporelle e_{temp}^n est contrôlée par l'estimateur temporel $\sum_{m=1}^n (\eta_\tau^m)^2$ et l'erreur spatiale e_{spat}^n à un terme d'ordre supérieur près.

Théorème 3.3.3. Soit $\mathbf{J}_s \in H^1(0, T; H(\text{div}, D))$ à divergence nulle tel que (3.2.7) et $\mathbf{A}^0 \in \widetilde{H_0}(\text{rot}, D)$ tel que (3.2.8)-(3.2.9). Alors l'erreur temporelle définie en (3.2.35) est bornée par

l'estimation suivante :

$$(e_{temp}^n)^2 \leq 2 \sum_{m=1}^n (\eta_\tau^m)^2 + 4 \int_0^{t_n} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(s) \right\|^2 ds + C \mu_{\max} \left\| \mathbf{J}_s - \pi_\tau \mathbf{J}_s \right\|_{L^2(0,t_n;H_0(\text{rot},D)')}^2, \quad (3.3.6)$$

où C est indépendante du pas de temps τ_m , $1 \leq m \leq n$.

DÉMONSTRATION. La preuve est similaire à celle proposée dans le contexte de l'équation de la chaleur : voir par exemple [Nicaise et Soualem, 2005, Théorème 4.1].

Etape 1. Pour un temps donné $t \in]t_{m-1}, t_m]$, on choisit dans l'équation résiduelle (3.3.5)

les fonctions tests $\mathbf{A}' = \mathbf{e}_{A,\tau}(t) \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D)$ et $\varphi' = \int_0^t e_{\varphi,\tau}(s, \cdot) ds \in \widetilde{H}^1(D_c)$, ainsi :

$$\begin{aligned} & (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{e}_{A,\tau}(t), \text{rot } \mathbf{e}_{A,\tau}(t)) + \left(\sigma(\partial_t \mathbf{e}_{A,\tau}(t) + \nabla e_{\varphi,\tau}(t)), \mathbf{e}_{A,\tau}(t) + \nabla \int_0^t e_{\varphi,\tau}(s, \cdot) ds \right)_{D_c} \\ &= (\mathbf{J}_s(t) - \pi_\tau \mathbf{J}_s(t), \mathbf{e}_{A,\tau}) + (\mu^{-1} \text{rot } (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau(t)), \text{rot } \mathbf{e}_{A,\tau}(t)). \end{aligned}$$

On se focalise sur les termes à droite de cette identité. Puisque $\mathbf{J}_s(t, \cdot) - \pi_\tau \mathbf{J}_s(t, \cdot) \in H_0(\text{rot}, D)'$ on a :

$$(\mathbf{J}_s(t) - \pi_\tau \mathbf{J}_s(t), \mathbf{e}_{A,\tau}) \leq \left\| \mathbf{J}_s(t) - \pi_\tau \mathbf{J}_s(t) \right\|_{H_0(\text{rot}, D)'} \left\| \mathbf{e}_{A,\tau} \right\|_{H_0(\text{rot}, D)}.$$

La jauge sur \mathbf{A} et \mathbf{A}_τ nous permet d'appliquer l'inégalité de Friedrichs (1.3.10) et, par conséquent, on a :

$$\left\| \mathbf{e}_{A,\tau}(t) \right\|_{H_0(\text{rot}, D)} \lesssim \left\| \text{rot } \mathbf{e}_{A,\tau}(t) \right\|.$$

Ainsi, en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz, de Young $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ et la relation $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,\tau}(t) \right\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \sigma^{1/2} (\mathbf{e}_{A,\tau}(t) + \nabla \int_0^t e_{\varphi,\tau}(s, \cdot) ds) \right\|_{D_c}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \left(C \sqrt{\mu_{\max}} \left\| \mathbf{J}_s(t) - \pi_\tau \mathbf{J}_s(t) \right\|_{H_0(\text{rot}, D)'} + \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau(t)) \right\| \right)^2 + \frac{1}{2} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,\tau}(t) \right\|^2 \\ & \leq C \mu_{\max} \left\| \mathbf{J}_s(t) - \pi_\tau \mathbf{J}_s(t) \right\|_{H_0(\text{rot}, D)'}^2 + \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau(t)) \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,\tau}(t) \right\|^2, \end{aligned}$$

ce qui implique, en se rappelant que $\mathbf{e}_{A,\tau}(0) = 0$,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\left\| \sigma^{1/2} (\mathbf{e}_{A,\tau}(t) + \nabla \int_0^t e_{\varphi,\tau}(s, \cdot) ds) \right\|_{D_c}^2 + \int_0^t \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,\tau}(s) \right\|_D^2 ds \right) \\ & \leq C \mu_{\max} \left\| \mathbf{J}_s(t) - \pi_\tau \mathbf{J}_s(t) \right\|_{H_0(\text{rot}, D)'}^2 + 2 \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau(t)) \right\|^2. \end{aligned}$$

En intégrant cette dernière relation sur $[0, t_n]$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left\| \sigma^{1/2} (\mathbf{e}_{A,\tau}(t_n) + \nabla \int_0^{t_n} e_{\varphi,\tau}(s) ds) \right\|_{D_c}^2 + \int_0^{t_n} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,\tau}(s) \right\|_D^2 ds \\ & \leq C \mu_{\max} \left\| \mathbf{J}_s - \pi_\tau \mathbf{J}_s \right\|_{L^2(0,t_n;H_0(\text{rot},D)')}^2 + 2 \sum_{m=1}^n \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau(s)) \right\|^2 ds. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Etape 2. Il reste à borner le dernier terme de (3.3.7).

De la définition de \mathbf{A}_τ (3.2.34) et de l'inégalité triangulaire, on a pour tout $t \in]t_{m-1}, t_m]$:

$$\begin{aligned} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau(s)) \right\|^2 ds &= \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \left(\mathbf{A}^m - \mathbf{A}^m + \frac{t_m - s}{\tau_m} (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}^{m-1}) \right) \right\|^2 ds \\ &= \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left(\frac{t_m - s}{\tau_m} \right)^2 ds \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}^{m-1}) \right\|^2 \\ &= \frac{\tau_m}{3} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}^{m-1}) \right\|^2 \\ &\leq \frac{\tau_m}{3} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_h^m) \right\|^2 \\ &\quad + \frac{\tau_m}{3} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } (\mathbf{A}^{m-1} - \mathbf{A}_h^{m-1}) \right\|^2 \\ &\quad + \frac{\tau_m}{3} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } (\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}) \right\|^2. \end{aligned}$$

De la relation (3.3.3) en prenant $\mathbf{v}_\tau = \mathbf{e}_{A,h\tau}$, on a :

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau(s)) \right\|^2 ds \leq 2 \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(s) \right\|^2 ds + \frac{\tau_m}{3} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } (\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}) \right\|^2.$$

En faisant la somme de $m = 1$ à $m = n$ et en tenant compte de la définition de η_τ^m (3.2.37),

on obtient :

$$\sum_{m=1}^n \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau(s)) \right\|^2 ds \leq 2 \int_0^{t_n} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(s) \right\|^2 ds + \sum_{m=1}^n (\eta_\tau^m)^2. \quad (3.3.8)$$

Etape 3. La conclusion (3.3.6) suit directement de (3.3.7) et (3.3.8). \square

Avant de passer à la section sur la fiabilité spatiale, on peut démontrer aussi une seconde borne supérieure de l'erreur spatiale.

Théorème 3.3.4. *Soit $\mathbf{J}_s \in H^1(0, T; H(\text{div}, D))$ à divergence nulle tel que (3.2.7) et $\mathbf{A}^0 \in \widetilde{H_0}(\text{rot}, D)$ tel que (3.2.8)-(3.2.9). Alors il existe une constante C telle que :*

$$\begin{aligned} & \left\| \sigma^{1/2} \partial_t (\mathbf{e}_{A,\tau} + \nabla \int_0^t e_{\varphi,\tau}) \right\|_{L^2(0,t_n;H_0(\text{rot},D)')}^2 \\ & \leq 12 (\sigma_{\min} \mu_{\min})^{-1} \left(\sum_{m=1}^n (\eta_\tau^m)^2 + 2 \int_0^{t_n} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(s) \right\|^2 ds \right) \\ & \quad + 2\sigma_{\min}^{-1} (2C \mu_{\min}^{-1} \mu_{\max} + 1) \left\| \mathbf{J}_s - \pi_\tau \mathbf{J}_s \right\|_{L^2(0,t_n;H_0(\text{rot},D)')}^2 \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. L'équation résiduelle (3.3.5) avec $\varphi' = 0$, le fait que $\sigma_{\min}^{1/2} \leq \sigma^{1/2}$, $\mu^{-1/2} \leq \mu_{\min}^{-1/2}$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donnent que pour tout $\mathbf{A}' \in H_0(\text{rot}, D)$:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{\min}^{1/2} \left(\sigma^{1/2} \partial_t(\mathbf{e}_{A,\tau}(t) + \nabla \int_0^t e_{\varphi,\tau}(s) ds), \mathbf{A}' \right)_{D_c} \\
& \leq \|\mathbf{J}_s(t) - \pi_\tau \mathbf{J}_s(t)\|_{H_0(\text{rot}, D)'} \|\mathbf{A}'\|_{H_0(\text{rot}, D)} + \left\| \mu^{-1} \text{rot}(\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau(t)) \right\| \|\text{rot} \mathbf{A}'\| \\
& \quad + \left\| \mu^{-1} \text{rot} \mathbf{e}_{A,\tau}(t) \right\| \|\text{rot} \mathbf{A}'\| \\
& \leq \mu_{\min}^{-1/2} \left(\left\| \mu^{-1/2} \text{rot} \mathbf{e}_{A,\tau}(t) \right\| + \left\| \mu^{-1/2} \text{rot}(\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau(t)) \right\| \right) \|\mathbf{A}'\|_{H_0(\text{rot}, D)} \\
& \quad + \|\mathbf{J}_s(t) - \pi_\tau \mathbf{J}_s(t)\|_{H_0(\text{rot}, D)'} \|\mathbf{A}'\|_{H_0(\text{rot}, D)} .
\end{aligned}$$

Comme cette relation est vérifiée pour tout $\mathbf{A}' \in H_0(\text{rot}, D)$, en utilisant la norme duale de $H_0(\text{rot}, D)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \left\| \sigma^{1/2} \partial_t(\mathbf{e}_{A,\tau}(t) + \nabla \int_0^t e_{\varphi,\tau}(s) ds) \right\|_{H_0(\text{rot}, D)'} \\
& \leq \sigma_{\min}^{-1/2} \mu_{\min}^{-1/2} \left(\left\| \mu^{-1/2} \text{rot} \mathbf{e}_{A,\tau}(t) \right\| + \left\| \mu^{-1/2} \text{rot}(\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau(t)) \right\| \right) \\
& \quad + \sigma_{\min}^{-1/2} \|\mathbf{J}_s(t) - \pi_\tau \mathbf{J}_s(t)\|_{H_0(\text{rot}, D)'} .
\end{aligned}$$

En élevant au carré cette dernière inégalité et en utilisant deux fois la relation $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ valable pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \left\| \sigma^{1/2} \partial_t(\mathbf{e}_{A,\tau}(t) + \nabla \int_0^t e_{\varphi,\tau}(s) ds) \right\|_{H_0(\text{rot}, D)'}^2 \\
& \leq 2 \sigma_{\min}^{-1} \mu_{\min}^{-1} \left(\left\| \mu^{-1/2} \text{rot} \mathbf{e}_{A,\tau}(t) \right\| + \left\| \mu^{-1/2} \text{rot}(\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau(t)) \right\| \right)^2 \\
& \quad + 2 \sigma_{\min}^{-1} \|\mathbf{J}_s(t) - \pi_\tau \mathbf{J}_s(t)\|_{H_0(\text{rot}, D)'}^2 \\
& \leq 4 \sigma_{\min}^{-1} \mu_{\min}^{-1} \left(\left\| \mu^{-1/2} \text{rot} \mathbf{e}_{A,\tau}(t) \right\|^2 + \left\| \mu^{-1/2} \text{rot}(\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau(t)) \right\|^2 \right) \\
& \quad + 2 \sigma_{\min}^{-1} \|\mathbf{J}_s(t) - \pi_\tau \mathbf{J}_s(t)\|_{H_0(\text{rot}, D)'}^2 .
\end{aligned}$$

En intégrant cette dernière estimation sur $[t_{m-1}, t_m]$ et en faisant la somme de $m = 1$ jusque $m = n$, on a :

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^n \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left\| \sigma^{1/2} \partial_t(\mathbf{e}_{A,\tau}(t) + \nabla \int_0^t e_{\varphi,\tau}(s) ds) \right\|_{H_0(\text{rot}, D)'}^2 dt \\
& \leq 4\sigma_{\min}^{-1} \mu_{\min}^{-1} \sum_{m=1}^n \left(\int_{t_{m-1}}^{t_m} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,\tau}(s) \right\|^2 ds + \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau)(s) \right\|^2 ds \right) \quad (3.3.9) \\
& \quad + 2\sigma_{\min}^{-1} \left\| \mathbf{J}_s - \pi_\tau \mathbf{J}_s \right\|_{L^2(0, t_n; H_0(\text{rot}, D)')}^2.
\end{aligned}$$

La conclusion suit car le premier terme dans (3.3.9) est estimé par l'inégalité (3.3.6) et le deuxième par la relation (3.3.8). \square

3.3.2. Résultats auxiliaires pour la fiabilité spatiale

Cette section est dédiée aux résultats techniques nécessaires pour démontrer la fiabilité spatiale. Avant tout, on a besoin d'une décomposition de Helmholtz de l'erreur qui nous intéresse, comme spécifié ci-dessous. Ensuite, on établit quatre lemmes qui vont intervenir dans la section suivante.

Décomposition de Helmholtz

Pour tout m , $1 \leq m \leq N$, on dénote par $\widetilde{\varphi}^m \in H_0^1(D)$ et $\widetilde{\varphi}_h^m \in H_0^1(D)$ les extensions respectives dans D de $\varphi^m \in \widetilde{H}^1(D_c)$ et de $\varphi_h^m \in \widetilde{\Theta}_h(D_c)$, données par :

$$\widetilde{\varphi}^m = \begin{cases} \varphi^m & \text{dans } D_c \\ \varphi_{nc}^m & \text{dans } D_{nc} \end{cases}, \quad \widetilde{\varphi}_h^m = \begin{cases} \varphi_h^m & \text{dans } D_c \\ \varphi_{h,nc}^m & \text{dans } D_{nc} \end{cases},$$

où $\varphi_{nc}^m \in H^1(D_{nc})$ et $\varphi_{h,nc}^m \in H^1(D_{nc})$ sont respectivement définis par

$$\begin{cases} \Delta \varphi_{nc}^m = 0 & \text{dans } D_{nc}, \\ \varphi_{nc}^m = \varphi^m & \text{sur } \Gamma_c, \\ \varphi_{nc}^m = 0 & \text{sur } \Gamma_B, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta \varphi_{h,nc}^m = 0 & \text{dans } D_{nc}, \\ \varphi_{h,nc}^m = \varphi_h^m & \text{sur } \Gamma_c, \\ \varphi_{h,nc}^m = 0 & \text{sur } \Gamma_B. \end{cases}$$

On définit donc l'erreur sur φ par

$$\widetilde{e}_{\varphi,h\tau}(t_m) = \widetilde{\varphi}^m - \widetilde{\varphi}_h^m \in H_0^1(D)$$

et l'erreur spatiale \mathbf{E}^m par :

$$\mathbf{E}^m = \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m) + \sum_{p=1}^m \tau_p \nabla \widetilde{e}_{\varphi,h\tau}(t_p) \in H_0(\text{rot}; D). \quad (3.3.10)$$

Théorème 3.3.5. *Pour tout m , $1 \leq m \leq N$, l'erreur spatiale \mathbf{E}^m admet la décomposition de Helmholtz suivante :*

$$\mathbf{E}^m = \nabla \hat{\varphi}^m + \mathbf{e}_\perp^m, \quad (3.3.11)$$

où $\hat{\varphi}^m \in H_0^1(D)$ et $\mathbf{e}_\perp^m \in Y(D)$ avec

$$Y(D) = \left\{ u \in H_0(\text{rot}, D) ; \text{div } u|_{D_c} \in L^2(D_c), \text{div } u|_{D_{nc}} \in L^2(D_{nc}) \text{ et } \int_B u|_{D_{nc}} \cdot n = 0 \right\}.$$

De plus, \mathbf{e}_\perp^m admet la décomposition :

$$\mathbf{e}_\perp^m = \nabla \phi^m + \mathbf{w}^m, \quad (3.3.12)$$

où $\phi^m \in H_0^1(D)$ et $\mathbf{w}_c^m = \mathbf{w}_{|D_c}^m \in H^1(D_c)^3$, $\mathbf{w}_e^m = \mathbf{w}_{|D_{nc}}^m \in H^1(D_{nc})^3$. En conclusion,

$$\mathbf{E}^m = \mathbf{w}^m + \nabla(\hat{\varphi}^m + \phi^m), \quad (3.3.13)$$

avec l'inégalité suivante :

$$\|\mathbf{e}_\perp^m\|_{H_0(\text{rot}, D)} \lesssim \|\text{rot } \mathbf{e}_{A, h\tau}(t_m)\|, \quad (3.3.14)$$

$$\left(\|\mathbf{w}_c^m\|_{1, D_c}^2 + \|\mathbf{w}_e^m\|_{1, D_{nc}}^2 \right)^{1/2} + |\phi^m|_1 \lesssim \|\mathbf{e}_\perp^m\|_{H_0(\text{rot}, D)}. \quad (3.3.15)$$

DÉMONSTRATION. La preuve est similaire à celle de [Creusé et. al., 2012, Théorème 3.1] concernant la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ harmonique. La différence principale consiste dans l'estimation (3.3.14) : dans le cas harmonique le terme $\|\mathbf{e}_\perp^m\|_{H_0(\text{rot}, D)}$ est borné par la somme de l'énergie magnétique et électrique (voir l'estimation (3.5) dans [Creusé et. al., 2012]). Dans notre cas, en utilisant un autre raisonnement, on borne la même quantité par l'énergie magnétique seulement car on en aura besoin dans la preuve du Théorème 3.3.10. \mathbf{e}_\perp^m est construit de la même façon que dans [Creusé et. al., 2012], en utilisant \mathbf{E}^m au lieu de $j\omega\mathbf{e}_A + \nabla\tilde{e}_\varphi$. Dans un souci d'exhaustivité on rapporte ici les idées principales.

Etape 1. On définit les contributions de $\hat{\varphi}$ et e_\perp dans le domaine conducteur D_c .

Soit $\hat{\varphi}^c \in \widetilde{H^1(D_c)}$ défini par :

$$\begin{cases} \text{div}(\nabla \hat{\varphi}^c) = \text{div}(\mathbf{E}^m) & \text{dans } D_c, \\ \nabla \hat{\varphi}^c \cdot \mathbf{n} = \mathbf{E}^m \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_c, \end{cases} \quad (3.3.16)$$

où \mathbf{n} dénote la normale unitaire sortante à Γ_c . $\hat{\varphi}^c$ est l'unique solution de :

$$\int_{D_c} \nabla \hat{\varphi}^c \cdot \xi = \int_{D_c} \mathbf{E}^m \cdot \nabla \xi \quad \forall \xi \in \widetilde{H^1(D_c)}.$$

En prenant $\xi = \hat{\varphi}^c$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$|\hat{\varphi}^m|_{1,D_c} \lesssim \|\mathbf{E}^m\|_{D_c}.$$

On définit $\mathbf{e}_\perp^c = \mathbf{E}^m - \nabla \hat{\varphi}^c$ dans D_c . D'après (3.3.16) on a que :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{e}_\perp^c = 0 & \text{dans } D_c, \\ \mathbf{e}_\perp^c \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_c. \end{cases} \quad (3.3.17)$$

Puisque $\mathbf{e}_\perp^c \in H(\operatorname{rot}; D_c)$, $\mathbf{e}_\perp^c \in H(\operatorname{rot}; D_c) \cap H_0(\operatorname{div}; D_c)$. Grâce à l'injection compacte $H(\operatorname{rot}; D_c) \cap H_0(\operatorname{div}; D_c) \hookrightarrow_c L^2(D_c)^3$ et le fait que $\operatorname{div} \mathbf{e}_\perp^c = 0$ dans D_c , on obtient :

$$\|\mathbf{e}_\perp^c\|_{H_0(\operatorname{rot}, D_c)} \lesssim \|\mathbf{e}_\perp^c\|_{D_c} + \|\operatorname{rot} \mathbf{e}_\perp^c\|_{D_c} \lesssim \|\operatorname{div} \mathbf{e}_\perp^c\|_{D_c} + \|\operatorname{rot} \mathbf{e}_\perp^c\|_{D_c} \lesssim \|\operatorname{rot} \mathbf{e}_\perp^c\|_{D_c}. \quad (3.3.18)$$

Etape 2. Soit $\widehat{\widehat{\varphi}} \in H^1(D_{nc})$ l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\nabla \widehat{\widehat{\varphi}}) = \operatorname{div} \mathbf{E}^m & \text{dans } D_{nc}, \\ \widehat{\widehat{\varphi}}|_{D_{nc}} = \hat{\varphi}^c|_{D_c} & \text{sur } \Gamma_c, \\ \widehat{\widehat{\varphi}} = 0 & \text{sur } \Gamma_B; \end{cases} \quad (3.3.19)$$

et soit $\psi \in H^1(D_{nc})$ l'unique solution de :

$$\begin{cases} \Delta \psi = 0 & \text{dans } D_{nc}, \\ \psi = 1 & \text{sur } \Gamma_c, \\ \psi = 0 & \text{sur } \Gamma_B. \end{cases} \quad (3.3.20)$$

Soit $\hat{\varphi}^{nc} \in H^1(D_{nc})$ définie par $\hat{\varphi}^{nc} = \widehat{\widehat{\varphi}} + k \psi$, avec

$$k = \frac{\int_{\Gamma_c} \mathbf{E}^m \cdot \mathbf{n} d\gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_c} \nabla \widehat{\widehat{\varphi}} \cdot \mathbf{n} d\gamma(\mathbf{x})}{\int_{\Gamma_c} \nabla \psi \cdot \mathbf{n} d\gamma(\mathbf{x})}, \quad (3.3.21)$$

qui est bien défini car, de la formule de Green (1.3.22) et (3.3.20),

$$\int_{\Gamma_c} \nabla \psi \cdot \mathbf{n} d\gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_c} \nabla \psi \cdot \mathbf{n} \cdot \psi d\gamma(\mathbf{x}) - \int_{D_{nc}} \Delta \psi \cdot \psi = \int_{D_{nc}} |\nabla \psi|^2 > 0.$$

D'après (3.3.19) et (3.3.20), $\hat{\varphi}^{nc} \in H^1(D_{nc})$ est l'unique solution de :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\nabla \hat{\varphi}^{nc}) = \operatorname{div} \mathbf{E}^m & \text{dans } D_{nc}, \\ \hat{\varphi}|_{D_{nc}} = \hat{\varphi}|_{D_c} + k & \text{sur } \Gamma_c, \\ \hat{\varphi}^{nc} = 0 & \text{sur } \Gamma_B. \end{cases}$$

En conclusion on définit $\hat{\varphi}^m \in H_0^1(D)$ par :

$$\hat{\varphi}^m = \begin{cases} \hat{\varphi}^c + k & \text{dans } D_c, \\ \hat{\varphi}^{nc} & \text{dans } D_{nc}. \end{cases}$$

On définit $\mathbf{e}_\perp^{nc} = \mathbf{E}^m - \nabla \hat{\varphi}^{nc}$ dans D_{nc} . Grâce au choix de k (3.3.21) on a que

$$\int_{\partial D_{nc}} \mathbf{e}_\perp^{nc} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma(\mathbf{x}) = 0.$$

Donc en définissant $\mathbf{e}_\perp^m \in H(\operatorname{rot}; D)$ par :

$$\mathbf{e}_\perp^m = \begin{cases} \mathbf{e}_\perp^c & \text{dans } D_c, \\ \mathbf{e}_\perp^{nc} & \text{dans } D_{nc}, \end{cases}$$

on obtient que $\mathbf{e}_\perp^m \in Y(D)$. Alors, comme remarqué dans [Creusé et. al., 2012], grâce à [Costabel et. al., 2003, Lemme 2.2], on obtient :

$$\|\mathbf{e}_\perp^{nc}\|_{D_{nc}} \lesssim \|\mathbf{e}_\perp^c\|_{D_c} + \|\operatorname{rot} \mathbf{e}_\perp^m\|_D \lesssim \|\operatorname{rot} \mathbf{e}_{A, h\tau}(t_m)\|_D. \quad (3.3.22)$$

De (3.3.18) et (3.3.22) suit (3.3.14).

Etape 3. La décomposition (3.3.12) et l'estimation (3.3.15) sont démontrées dans la preuve de [Creusé et. al., 2012, Théorème 3.1]. \square

Quatre lemmes

On formule maintenant quatre lemmes, dans le même esprit que [Nicaise et Soualem, 2005] dans le contexte de l'équation de la chaleur. Ils seront utiles pour la démonstration du Théorème 3.3.10 sur la fiabilité spatiale.

Lemme 3.3.6. *L'erreur \mathbf{E}^m définie dans (3.3.10) satisfait la relation d'orthogonalité de Galerkin suivante : $\forall (\mathbf{A}'_h, \varphi'_h) \in X_h(D) \times \widetilde{\Theta}_h(D_c)$*

$$\int_D \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{e}_{A, h\tau}(t_m) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}'_h = \int_{D_c} \sigma \frac{\mathbf{E}^{m-1} - \mathbf{E}^m}{\tau_m} \cdot (\mathbf{A}'_h + \tau_m \nabla \varphi'_h). \quad (3.3.23)$$

DÉMONSTRATION. D'après les Lemme 3.2.4 et Lemme 3.2.7, on a :

$$a_m((\mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m), e_{\varphi,h\tau}(t_m)), (\mathbf{A}'_h, \varphi'_h)) = \int_{D_c} \sigma \frac{\mathbf{e}_{A,h\tau}(t_{m-1})}{\tau_m} \cdot (\mathbf{A}'_h + \tau_m \nabla \varphi'_h) ,$$

ce qui signifie :

$$\begin{aligned} & \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m)}{\tau_m} + \nabla e_{\varphi,h\tau}(t_m) \right) \cdot (\mathbf{A}'_h + \tau_m \nabla \varphi'_h) \\ & + \int_D \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}'_h = \int_{D_c} \sigma \frac{\mathbf{e}_{A,h\tau}(t_{m-1})}{\tau_m} \cdot (\mathbf{A}'_h + \tau_m \nabla \varphi'_h) . \end{aligned}$$

De la définition de \mathbf{E}^m (3.3.10) on a :

$$\frac{\mathbf{E}^{m-1} - \mathbf{E}^m}{\tau_m} = \frac{\mathbf{e}_{A,h\tau}(t_{m-1}) - \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m)}{\tau_m} - \nabla e_{\varphi,h\tau}(t_m) \quad \text{dans } D_c ,$$

ainsi la relation (3.3.23) est vérifiée. \square

Lemme 3.3.7. *Pour tout $\mathbf{v} \in H_0(\operatorname{rot}, D)$ on a :*

$$\begin{aligned} & \int_D \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} \\ & = \int_D \mathbf{J}_s^m \cdot \mathbf{v} - \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{A}^m - \mathbf{A}^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi^m \right) \cdot \mathbf{v} \\ & + \sum_{T \in \mathcal{T}_{h_m}} \int_{\partial T} (\mathbf{n} \times \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_h^m) \cdot \mathbf{v} \, d\gamma(\mathbf{x}) - \sum_{T \in \mathcal{T}_{h_m}} \int_T \operatorname{rot} (\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_h^m) \cdot \mathbf{v} . \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

DÉMONSTRATION. La définition $\mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m) = \mathbf{A}^m - \mathbf{A}_h^m$ et l'intégration par partie donnent :

$$\begin{aligned} & \int_D \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} \\ & = \int_D (\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}^m) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} + \sum_{T \in \mathcal{T}_{h_m}} \left(\int_{\partial T} (\mathbf{n} \times \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_h^m) \cdot \mathbf{v} \, d\gamma(\mathbf{x}) - \int_T \operatorname{rot} (\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_h^m) \cdot \mathbf{v} \right) . \end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.2.4 avec $\varphi' = 0$, on obtient (3.3.24). \square

Pour chaque instant t_m , $m = 1, \dots, N$, on associe un maillage \mathcal{T}_{h_m} . Sur ce maillage on considère les opérateurs d'interpolation standard (scalaire et vectoriel) de Clément comme défini dans la section 1.3.4. De plus, on écrira l'extension de $\mathcal{I}_{\text{Cl}, D_c} v$ sur D par $\widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl}, D}^0 v}$: $\widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl}, D}^0 v} \in \Theta_h^0(D)$.

Lemme 3.3.8. *Pour tout $\mathbf{v} \in H_0(\text{rot}, D)$ on a*

$$\begin{aligned}
& \int_D \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m) \cdot \text{rot } \mathbf{v} \\
&= \int_D \mathbf{J}_s^m \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}) - \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}) \\
&+ \sum_{T \in \mathcal{T}_{h_m}} \int_{\partial T} (\mathbf{n} \times \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m) \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}) d\gamma(\mathbf{x}) \\
&- \sum_{T \in \mathcal{T}_{h_m}} \int_T \text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m) \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}) - \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right) \cdot \mathbf{v} .
\end{aligned}$$

De plus, en utilisant la décomposition de Helmholtz (3.3.13) et en considérant $\mathbf{v} = \mathbf{w}^m \in H^1(D_c)^3 \cap H^1(D_{nc})^3 \cap H_0(\text{rot}, D)$, on a que :

$$\left\| \sigma^{1/2} \mathbf{E}^m \right\|_{D_c}^2 + \tau_m \int_D \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m) \cdot \text{rot } \mathbf{w}^m \quad (3.3.25)$$

$$= (\sigma \mathbf{E}^{m-1}, \mathbf{E}^m)_{D_c} \quad (3.3.26)$$

$$+ (\sigma (\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}), \nabla(\hat{\varphi}^m + \phi^m) - \nabla(\widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \hat{\varphi}^m} - \mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \phi^m))_{D_c} \quad (3.3.27)$$

$$+ \tau_m \int_D \mathbf{J}_s^m \cdot (\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m) \quad (3.3.28)$$

$$- \tau_m \sum_{T \in \mathcal{T}_{h_m}} \int_T \text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m) \cdot (\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m) \quad (3.3.29)$$

$$- \tau_m \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \cdot (\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m) \quad (3.3.30)$$

$$+ \tau_m \sum_{F \in \mathcal{F}_{h_m}^{\text{int}}} \int_F [\mathbf{n} \times \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m]_F \cdot (\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m) d\gamma(\mathbf{x}) . \quad (3.3.31)$$

DÉMONSTRATION. Première identité. On applique le Lemme 3.3.7 :

$$\begin{aligned}
& \int_D \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m) \cdot \text{rot } \mathbf{v} \\
&= \int_D \mathbf{J}_s^m \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}) - \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}) \\
&+ \sum_{T \in \mathcal{T}_{h_m}} \int_{\partial T} (\mathbf{n} \times \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m) \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}) d\gamma(\mathbf{x}) - \sum_{T \in \mathcal{T}_{h_m}} \int_T \text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m) \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}) \\
&+ \int_D \mathbf{J}_s^m \cdot \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v} - \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \cdot \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v} \\
&+ \sum_{T \in \mathcal{T}_{h_m}} \int_{\partial T} (\mathbf{n} \times \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m) \cdot \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v} d\gamma(\mathbf{x}) - \sum_{T \in \mathcal{T}_{h_m}} \int_T \text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m) \cdot \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v} \\
&+ \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}) - \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}) .
\end{aligned}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned}
& \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}) - \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{A}^m - \mathbf{A}^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi^m \right) \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}) \\
&= - \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m) - \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_{m-1})}{\tau_m} + \nabla e_{\varphi,h\tau}(t_m) \right) \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}) \\
&= - \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right) \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}) .
\end{aligned}$$

Ensuite, grâce au Lemme 3.2.4 avec $\mathbf{A}' = \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}$ et $\varphi' = 0$, on obtient

$$\int_D \mathbf{J}_s^m \cdot \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v} - \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{A}^m - \mathbf{A}^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi^m \right) \cdot \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v} = \int_D (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}^m) \cdot \text{rot } \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v} .$$

Enfin, des intégrations par partie sur chaque élément du maillage T donnent :

$$\begin{aligned}
& \sum_{T \in \mathcal{T}_{h,m}} \int_{\partial T} (\mathbf{n} \times \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m) \cdot \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v} d\gamma(\mathbf{x}) - \sum_{T \in \mathcal{T}_{h,m}} \int_T \text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m) \cdot \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v} \\
&= - \sum_{T \in \mathcal{T}_{h,m}} \int_T \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m \cdot \text{rot } \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v} ,
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
& \int_D \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m) \cdot \text{rot } \mathbf{v} \\
&= \int_D \mathbf{J}_s^m \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}) - \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}) \\
&- \sum_{T \in \mathcal{T}_{h,m}} \int_T \text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m) \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}) + \sum_{T \in \mathcal{T}_{h,m}} \int_{\partial T} (\mathbf{n} \times \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m) \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}) d\gamma(\mathbf{x}) \\
&- \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right) \cdot (\mathbf{v} - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}) + \int_D \mu^{-1} \text{rot } (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_h^m) \cdot \text{rot } \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v} .
\end{aligned}$$

Le Lemme 3.3.6 avec $\mathbf{A}'_h = \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v}$ et $\varphi'_h = 0$ donne

$$\int_D (\mu^{-1} \text{rot } (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_h^m)) \cdot \text{rot } \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v} = - \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right) \cdot \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{v} ,$$

ce qui mène donc à la conclusion.

Deuxième identité. D'après la première équation on a :

$$\begin{aligned}
& \tau_m \int_D \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w}^m \\
&= \tau_m \int_D \mathbf{J}_s^m \cdot (\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m) - \tau_m \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \cdot (\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m) \\
& - \tau_m \sum_{T \in \mathcal{T}_{hm}} \int_T \operatorname{rot} (\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_h^m) \cdot (\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m) \\
& + \tau_m \sum_{F \in \mathcal{F}_{hm}^{\text{int}}} \int_F [\mathbf{n} \times \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_h^m]_F \cdot (\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m) d\gamma(\mathbf{x}) - (\sigma(\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}), \mathbf{w}^m)_{D_c}.
\end{aligned}$$

Néanmoins,

$$-(\sigma(\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}), \mathbf{w}^m)_{D_c} = -(\sigma \mathbf{E}^m, \mathbf{E}^m)_{D_c} + (\sigma \mathbf{E}^{m-1}, \mathbf{E}^m)_{D_c} + (\sigma(\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}), \mathbf{E}^m - \mathbf{w}^m)_{D_c}.$$

De la décomposition de Helmholtz (3.3.13), on a dans D_c :

$$\mathbf{E}^m - \mathbf{w}^m = \nabla(\hat{\varphi}^m + \phi^m).$$

La conclusion suit du fait que :

$$(\sigma(\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}), \nabla(\widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \hat{\varphi}^m - \mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \phi^m}))_{D_c} = 0$$

grâce au Lemme 3.3.6 avec $\mathbf{A}'_h = 0$. □

Lemme 3.3.9. Soit $\hat{\varphi}^m \in H_0^1(D)$ pour $m \in \{0, \dots, N\}$ déjà défini dans le Théorème 3.3.5.

Alors on a dans D_c l'estimation :

$$\|\nabla \hat{\varphi}^m\|_{D_c} \lesssim \sigma_{\min}^{-1} (\eta_{D;3}^m + \eta_{J;3}^m), \quad (3.3.32)$$

où $\eta_{D;3}^m$ et $\eta_{J;3}^m$ sont définis respectivement par (3.2.39) et (3.2.40).

DÉMONSTRATION. D'après la décomposition de Helmholtz (3.3.11) et le Lemme 3.3.6 avec $\mathbf{A}'_h = 0$ et $\varphi'_h = \hat{\varphi}^m$, on obtient par récurrence que :

$$\int_{D_c} \sigma \mathbf{E}^m \cdot \nabla(\widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \hat{\varphi}^m}) = 0,$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\|\nabla \hat{\varphi}^m\|_{D_c}^2 &= \int_{D_c} \nabla \hat{\varphi}^m \cdot (\mathbf{E}^m - \mathbf{e}_\perp^m) \\
&\leq \sigma_{\min}^{-1} \int_{D_c} \sigma \mathbf{E}^m \cdot \nabla (\hat{\varphi}^m - \widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \hat{\varphi}^m}) - \int_{D_c} \mathbf{e}_\perp^m \cdot \nabla \hat{\varphi}^m \\
&\leq \sigma_{\min}^{-1} \left(- \int_{D_c} \sigma (\mathbf{A}^m + \sum_{p=1}^m \tau_p \nabla \varphi^p) \cdot \nabla (\hat{\varphi}^m - \widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \hat{\varphi}^m}) \right) \quad (3.3.33)
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{T \in \mathcal{T}_{h,m}, T \subset D_c} \int_T \text{div} (\sigma (\mathbf{A}_h^m + \sum_{p=1}^m \tau_p \nabla \varphi_h^p)) (\hat{\varphi}^m - \widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \hat{\varphi}^m}) \quad (3.3.34)$$

$$- \sum_{F \in \mathcal{F}_{h,m}^{\text{int}}, F \subset D_c} \int_F \left[\sigma (\mathbf{A}_h^m + \sum_{p=1}^m \tau_p \nabla \varphi_h^p) \cdot \mathbf{n} \right]_F (\hat{\varphi}^m - \widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \hat{\varphi}^m}) d\gamma(\mathbf{x}), \quad (3.3.35)$$

où l'on a effectué une intégration par partie et utilisé le fait que $\text{div} \mathbf{e}_\perp^c = 0$ dans D_c et $\mathbf{e}_\perp^c \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ_c (voir la construction de \mathbf{e}_\perp^c dans (3.3.17)), ainsi :

$$\int_{D_c} \mathbf{e}_\perp^m \cdot \nabla \hat{\varphi}^m = - \int_{D_c} \text{div} (\mathbf{e}_\perp^m) \hat{\varphi}^m - \int_{\Gamma_c} \mathbf{e}_\perp^m \cdot \mathbf{n} \nabla \hat{\varphi}^m d\gamma(\mathbf{x}) = 0.$$

On pose $\varphi' = \hat{\varphi}^m - \widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \hat{\varphi}^m}$. Alors :

$$- \int_{D_c} \sigma (\mathbf{A}^m + \sum_{p=1}^m \tau_p \nabla \varphi^p) \cdot \varphi' = - \sum_{q=1}^m \int_{D_c} \sigma (\mathbf{A}^q - \mathbf{A}^{q-1} + \tau_q \nabla \varphi^q) \cdot \varphi' = 0, \quad (3.3.36)$$

où la dernière déduction est due à la formulation semi-discrète (3.2.14) avec $\mathbf{A}' = 0$ appliquée à chaque pas de temps discret $q = 1, \dots, m$.

L'utilisation des inégalités de Cauchy-Schwarz continue et discrète pour les termes (3.3.34) et (3.3.35), associée aux définitions des parties de l'estimateur (3.2.43) et (3.2.46) et au résultat de stabilité de l'interpolé de Clément (1.3.14), mène à :

$$\begin{aligned}
& \|\nabla \hat{\varphi}^m\|_{D_c}^2 \leq \sigma_{\min}^{-1} \sum_{T \in \mathcal{T}_{h,m}, T \subset D_c} h_T \|\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{A}_h^m + \sum_{p=1}^m \tau_p \nabla \varphi_h^p))\|_T h_T^{-1} \|\hat{\varphi}^m - \widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \hat{\varphi}^m}\| \\
& + \sigma_{\min}^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_{h,m}^{\text{int}}, F \subset D_c} h_F^{1/2} \|\sigma(\mathbf{A}_h^m + \sum_{p=1}^m \tau_p \nabla \varphi_h^p) \cdot \mathbf{n}\|_F h_F^{-1/2} \|\hat{\varphi}^m - \widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \hat{\varphi}^m}\| \\
& \lesssim \sigma_{\min}^{-1} (\eta_{D;3}^m + \eta_{J;3}^m) \|\nabla \hat{\varphi}^m\|_{D_c},
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit (3.3.32). \square

3.3.3. Fiabilité spatiale

Théorème 3.3.10. *Soit $\mathbf{J}_s \in H^1(0, T; H(\operatorname{div}, D))$ à divergence nulle tel que (3.2.7) et $\mathbf{A}^0 \in \widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D)$ tel que (3.2.8)-(3.2.9). Soit $n \in \{0, \dots, N\}$. Alors on a la borne supérieure suivante pour l'erreur e_{spat}^n définie en (3.2.36) :*

$$e_{\text{spat}}^n \lesssim \max(\sigma_{\min}^{-1}, \mu_{\max}) \sum_{m=1}^n \tau_m ((\eta_h^m)^2 + (\xi^m)^2). \quad (3.3.37)$$

DÉMONSTRATION. On estime l'erreur (3.3.25) au temps t_m dans les deux premières étapes : on calcule une borne supérieure pour les termes à droite de la deuxième relation du Lemme 3.3.8. En particulier, on estime donc les termes (3.3.27), (3.3.28), (3.3.29), (3.3.30) et (3.3.31). La troisième étape est consacrée à l'extension de l'estimation pour tous les instants t_m , $0 \leq m \leq n$.

Etape 1. Les inégalités de Cauchy-Schwarz continue et discrète associées aux définitions des contributions de l'estimateur (3.2.41) et (3.2.44) et du terme quantifiant l'erreur spatiale de l'approximation du terme source (3.2.47), mènent à une estimation de (3.3.28), (3.3.29), (3.3.30) et (3.3.31) :

$$\begin{aligned}
& \int_D \mathbf{J}_s^m \cdot (\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m) - \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \cdot (\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m) \\
& - \sum_{T \in \mathcal{T}_{hm}} \int_T \text{rot} (\mu^{-1} \text{rot} \mathbf{A}_h^m) \cdot (\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m) \\
& - \sum_{T \in \mathcal{T}_{hm}} \int_T \text{rot} (\mu^{-1} \text{rot} \mathbf{A}_h^m) \cdot (\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m) \\
& + \sum_{F \in \mathcal{F}_{hm}^{\text{int}}} \int_F [\mathbf{n} \times \mu^{-1} \text{rot} \mathbf{A}_h^m]_F \cdot (\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m) d\gamma(\mathbf{x}) \\
& = \sum_{T \in \mathcal{T}_{hm}} \int_T (\mathbf{J}_s^m - \pi_h \mathbf{J}_s^m) \cdot (\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m) \tag{3.3.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{T \in \mathcal{T}_{hm}} \int_T \left(\pi_h \mathbf{J}_s^m - \text{rot} (\mu^{-1} \text{rot} \mathbf{A}_h^m) - \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \widetilde{\varphi_h^m} \right) \right) \cdot (\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m) \\
& + \sum_{F \in \mathcal{F}_{hm}^{\text{int}}} [\mathbf{n} \times \mu^{-1} \text{rot} \mathbf{A}_h^m]_F \cdot (\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m) d\gamma(\mathbf{x}) \tag{3.3.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_{hm}} h_T \|\mathbf{J}_s^m - \pi_h \mathbf{J}_s^m\|_T h_T^{-1} \|\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m\|_T \\
& + \sum_{T \in \mathcal{T}_{hm}} h_T \left\| \pi_h \mathbf{J}_s^m - \text{rot} (\mu^{-1} \text{rot} \mathbf{A}_h^m) - \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \widetilde{\varphi_h^m} \right) \right\|_T h_T^{-1} \|\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m\|_T \\
& + \sum_{F \in \mathcal{F}_{hm}^{\text{int}}} h_F^{1/2} \|[\mathbf{n} \times \mu^{-1} \text{rot} \mathbf{A}_h^m]_F\|_F h_F^{-1/2} \|\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m\|_F \\
& \leq \left(\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_{hm}} (\eta_{T;1}^m)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_{hm}} (\xi_T^m)^2 \right)^{1/2} \right) \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_{hm}} h_T^{-2} \|\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m\|_T^2 \right)^{1/2} \\
& + \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_{hm}^{\text{int}}} (\eta_{F;1}^m)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_{hm}^{\text{int}}} h_F^{-1} \|\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m\|_F^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

D'après le résultat de stabilité de l'interpolant vectoriel de Clément (1.3.15), on aura :

$$\begin{aligned}
& \sum_{T \in \mathcal{T}_{hm}} \int_T (\mathbf{J}_s^m - \text{rot} (\mu^{-1} \text{rot} \mathbf{A}_h^m)) \cdot (\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m) \\
& - \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \cdot (\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m) \\
& + \sum_{F \in \mathcal{F}_{hm}^{\text{int}}} \int_F [\mathbf{n} \times \mu^{-1} \text{rot} \mathbf{A}_h^m]_F \cdot (\mathbf{w}^m - \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}^m) d\gamma(\mathbf{x}) \\
& \lesssim \|\nabla_p \mathbf{w}^m\| (\xi^m + \eta_{D;1}^m + \eta_{J;1}^m) \tag{3.3.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim \mu_{\max}^{1/2} \|\mu^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m)\| (\xi^m + \eta_{D;1}^m + \eta_{J;1}^m) \\
&\quad (\text{de (3.3.15) et (3.3.14) dans le Théorème 3.3.5}) \\
&\lesssim \mu_{\max}^{1/2} (\xi^m + \eta_{D;1}^m + \eta_{J;1}^m)^2 + \frac{1}{4} \|\mu^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m)\|^2 \\
&\quad (\text{grâce à l'inégalité de Young } ab \leq a^2 + \frac{b^2}{4}, \forall a, b \in \mathbb{R}) \\
&\lesssim \mu_{\max} ((\xi^m)^2 + (\eta_{D;1}^m)^2 + (\eta_{J;1}^m)^2) + \frac{1}{4} \|\mu^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m)\|^2 \\
&\quad (\text{grâce à la relation } (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2), \forall a, b, c \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Etape 2. Dans cette étape on estime (3.3.27).

Tout d'abord on écrit explicitement les erreurs $\mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m)$ et $e_{\varphi,h\tau}(t_m)$ afin de séparer les contributions temporelle (à savoir $(\mathbf{A}^m, \varphi^m)$) et spatiale (à savoir $(\mathbf{A}_h^m, \varphi_h^m)$). Ensuite, d'après la formule de Green, le terme (3.3.27) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&(\sigma(\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}), \nabla(\hat{\varphi}^m + \phi^m) - \nabla(\widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \hat{\varphi}^m} - \mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \phi^m))_{D_c} \\
&= \tau_m \int_{D_c} \sigma \left(\frac{\mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m) - \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_{m-1})}{\tau_m} + \nabla e_{\varphi,h\tau}(t_m) \right) \cdot \nabla(\hat{\varphi}^m + \phi^m - \widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \hat{\varphi}^m} - \mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \phi^m) \\
&= \tau_m \int_{D_c} \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}^m - \mathbf{A}^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi^m \right) \right) \cdot \nabla(\hat{\varphi}^m + \phi^m - \widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \hat{\varphi}^m} - \mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \phi^m) \quad (3.3.41) \\
&+ \tau_m \sum_{T \in \mathcal{T}_{hm}, T \subset D_c} \int_T \operatorname{div} \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \right) (\hat{\varphi}^m - \widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \hat{\varphi}^m}) \\
&- \tau_m \sum_{F \in \mathcal{F}_{hm}^{\text{int}}, F \subset D_c} \int_F \left[\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \cdot \mathbf{n} \right]_F (\hat{\varphi}^m - \widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \hat{\varphi}^m}) d\gamma(\mathbf{x}) \\
&+ \tau_m \sum_{T \in \mathcal{T}_{hm}, T \subset D_c} \int_T \operatorname{div} \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \right) (\phi^m - \mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \phi^m) \\
&- \tau_m \sum_{F \in \mathcal{F}_{hm}^{\text{int}}, F \subset D_c} \int_F \left[\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \cdot \mathbf{n} \right]_F (\phi^m - \mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \phi^m) d\gamma(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Le terme (3.3.41) est nul d'après la formulation faible semi-discrète (3.2.14) avec $\mathbf{A}' = 0$, comme déjà vu dans la preuve du Lemme 3.3.9 (voir la relation (3.3.36)).

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et les définitions des contributions de l'estimateur (3.2.42) et (3.2.45) permettent d'estimer le terme à droite de l'identité précédente comme suit :

$$\begin{aligned}
& (\sigma(\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}), \nabla(\hat{\varphi}^m + \phi^m) - \nabla(\widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \hat{\varphi}^m - \mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \phi^m}))_{D_c} \\
& \leq \tau_m \left[\eta_{D;2}^m \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_{h,m}, T \subset D_c} h_T^{-2} \|\hat{\varphi}^m - \widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \hat{\varphi}^m}\|_T^2 \right)^{1/2} \right. \\
& \quad \left. + \eta_{J;2}^m \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_{h,m}^{\text{int}}, F \subset D_c} h_F^{-1} \|\hat{\varphi}^m - \widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \hat{\varphi}^m}\|_F^2 \right)^{1/2} \right] \\
& + \eta_{D;2}^m \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_{h,m}} h_T^{-2} \|\phi^m - \mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \phi^m\|_T^2 \right)^{1/2} + \eta_{J;2}^m \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_{h,m}^{\text{int}}, F \subset D_c} h_F^{-1} \|\phi^m - \mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \phi^m\|_F^2 \right)^{1/2} \\
& \lesssim \tau_m (\eta_{D;2}^m + \eta_{J;2}^m) \|\nabla \hat{\varphi}^m\|_{D_c} + \tau_m (\eta_{D;2}^m + \eta_{J;2}^m) \|\nabla \phi^m\|. \tag{3.3.42}
\end{aligned}$$

La dernière ligne dérive des estimations usuelles (1.3.13) et (1.3.14). Concernant la ligne (3.3.42) : on applique au premier terme la relation (3.3.32) et au deuxième terme les estimations (3.3.15) et (3.3.14) :

$$(\eta_{D;2}^m + \eta_{J;2}^m) \|\nabla \hat{\varphi}^m\|_{D_c} \lesssim \sigma_{\min}^{-1} (\eta_{D;2}^m + \eta_{J;2}^m) (\eta_{D;3}^m + \eta_{J;3}^m), \tag{3.3.43}$$

$$(\eta_{D;2}^m + \eta_{J;2}^m) \|\nabla \phi^m\|_D \lesssim \mu_{\max}^{1/2} (\eta_{D;2}^m + \eta_{J;2}^m) \|\mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m)\|. \tag{3.3.44}$$

En revenant à l'estimation (3.3.42) et en utilisant les inégalités de Young $ab \leq a^2 + \frac{b^2}{4}$ pour (3.3.44) et $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ pour (3.3.43), ainsi que la relation $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, on conclut que :

$$\begin{aligned}
& (\sigma(\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}), \nabla(\hat{\varphi}^m + \phi^m) - \nabla(\widetilde{\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \hat{\varphi}^m - \mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \phi^m}))_{D_c} \\
& \leq C \tau_m (\sigma_{\min}^{-1} (\eta_{D;2}^m + \eta_{J;2}^m)^2 + \sigma_{\min}^{-1} (\eta_{D;3}^m + \eta_{J;3}^m)^2 + \mu_{\max} (\eta_{D;2}^m + \eta_{J;2}^m)^2) \\
& + \frac{\tau_m}{4} \|\mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m)\|^2 \\
& \leq C \max(\sigma_{\min}^{-1}, \mu_{\max}) \tau_m ((\eta_{D;2}^m)^2 + (\eta_{J;2}^m)^2 + (\eta_{D;3}^m)^2 + (\eta_{J;3}^m)^2) + \frac{\tau_m}{4} \|\mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m)\|^2.
\end{aligned}$$

Etape 3. On utilise les résultats obtenus dans les étapes 1 et 2 et l'inégalité de Young pour le terme (3.3.26) : la deuxième équation intervenant dans le Lemme 3.3.8 est alors estimée comme suit :

$$\begin{aligned}
& \left\| \sigma^{1/2} \mathbf{E}^m \right\|_{D_c}^2 + \tau_m \int_D \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w} \\
& \leq \frac{1}{2} \left\| \sigma^{1/2} \mathbf{E}^{m-1} \right\|_{D_c}^2 + \frac{1}{2} \left\| \sigma^{1/2} \mathbf{E}^m \right\|_{D_c}^2 \\
& + C \max(\sigma_{\min}^{-1}, \mu_{\max}) \tau_m \left((\eta_{D;1}^m)^2 + (\eta_{J;1}^m)^2 + (\eta_{D;2}^m)^2 + (\eta_{J;2}^m)^2 + (\eta_{D;3}^m)^2 + (\eta_{J;3}^m)^2 + (\xi^m)^2 \right) \\
& + \tau_m \frac{1}{2} \left\| \mu^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m) \right\|^2.
\end{aligned}$$

En se rappelant de la définition de l'estimateur spatial η_h^m , (3.2.38), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \left\| \sigma^{1/2} \mathbf{E}^m \right\|_{D_c}^2 + \tau_m \left\| \mu^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m) \right\|^2 \\
& \leq \left\| \sigma^{1/2} \mathbf{E}^{m-1} \right\|_{D_c}^2 + C \max(\sigma_{\min}^{-1}, \mu_{\max}) \tau_m ((\eta_h^m)^2 + (\xi^m)^2).
\end{aligned}$$

En sommant sur $m = 1, \dots, n$, on aboutit à (3.3.37). \square

Avant de passer à la section sur la fiabilité totale, on peut démontrer aussi une seconde borne supérieure de l'erreur temporelle.

Théorème 3.3.11. *Soit $\mathbf{J}_s \in H^1(0, T; H(\operatorname{div}, D))$ à divergence nulle tel que (3.2.7) et $\mathbf{A}^0 \in \widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D)$ tel que (3.2.8)-(3.2.9). On obtient l'estimation suivante pour la partie électrique de l'erreur spatiale :*

$$\begin{aligned}
& \left\| \sigma^{1/2} (\partial_t \mathbf{e}_{A,h\tau} + \nabla e_{\varphi,h\tau}) \right\|_{L^2(0,t_n; H_0(\operatorname{rot}, D)')}^2 \\
& \lesssim \max(\sigma_{\min}^{-1}, (\sigma_{\min} \mu_{\min})^{-1}) \max(1, \sigma_{\min}^{-1}, \mu_{\max}) \sum_{m=1}^n \tau_m ((\eta_h^m)^2 + (\xi^m)^2).
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. D'après le Lemme 3.2.4 avec $\varphi' = 0$, on sait que pour tout $t \in]t_{m-1}, t_m]$, $1 \leq m \leq n$, et pour tout $\mathbf{A}' \in H_0(\operatorname{rot}, D)$ on a la relation :

$$\left(\sigma \partial_t (\mathbf{e}_{A,h\tau}(t) + \nabla \int_0^t e_{\varphi,h\tau}(s) ds), \mathbf{A}' \right)_{D_c} \quad (3.3.45)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}^m - \mathbf{A}^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi^m \right) - \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right), \mathbf{A}' \right)_{D_c} \\ &= -(\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}^m, \text{rot } \mathbf{A}') + (\mathbf{J}_s^m, \mathbf{A}') - \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right), \mathbf{A}' \right)_{D_c} \\ &\quad - (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m, \text{rot } \mathbf{A}') + (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m, \text{rot } \mathbf{A}') \\ &= -(\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m), \text{rot } \mathbf{A}') + (\mathbf{J}_s^m, \mathbf{A}') \\ &\quad - (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m, \text{rot } \mathbf{A}') - \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right), \mathbf{A}' \right)_{D_c}. \end{aligned} \quad (3.3.46)$$

Puisque $\mathbf{A}' \in H_0(\text{rot}, D)$, on considère la décomposition de Helmholtz pour \mathbf{A}' du Théorème 3.3.5 : il existe \mathbf{w} tel que $\mathbf{w}_c = \mathbf{w}|_{D_c} \in H^1(D_c)^3$, $\mathbf{w}_e = \mathbf{w}|_{D_{nc}} \in H^1(D_{nc})^3$, $\hat{\varphi} \in H_0^1(D)$ et $\phi \in H_0^1(D)$ tels que :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{w} + \nabla(\hat{\varphi} + \phi), \quad (3.3.47)$$

et tels que $\|\nabla \hat{\varphi}\|_{D_c} \lesssim \|\mathbf{A}'\|$, $\|\nabla \phi\| \lesssim \|\text{rot } \mathbf{A}'\|$ et $\|\nabla_p \mathbf{w}\| \lesssim \|\text{rot } \mathbf{A}'\|$. Grâce à la relation $\|\text{rot } \mathbf{A}'\| \lesssim \|\mathbf{A}'\|_{H_0(\text{rot}, D)}$, ces dernières inégalités deviennent :

$$\|\nabla \hat{\varphi}\|_{D_c} \lesssim \|\mathbf{A}'\|_{H_0(\text{rot}, D)}, \quad (3.3.48)$$

$$\|\nabla \phi\| \lesssim \|\mathbf{A}'\|_{H_0(\text{rot}, D)}, \quad (3.3.49)$$

$$\|\nabla_p \mathbf{w}\| \lesssim \|\mathbf{A}'\|_{H_0(\text{rot}, D)}. \quad (3.3.50)$$

En se rappelant que \mathbf{J}_s^m est à divergence nulle et que le rotationnel d'un gradient est nul, on réécrit (3.3.46) comme :

$$(\mathbf{J}_s^m, \mathbf{A}') - (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m, \text{rot } \mathbf{A}') - \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right), \mathbf{A}' \right)_{D_c} \quad (3.3.51)$$

$$= (\mathbf{J}_s^m, \mathbf{w}) - (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m, \text{rot } \mathbf{w}) - \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right), \mathbf{w} \right)_{D_c} \quad (3.3.52)$$

$$- \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right), \nabla(\hat{\varphi} + \phi) \right)_{D_c}. \quad (3.3.53)$$

Grâce au Lemme 3.2.7 avec $\mathbf{A}'_h = \mathcal{P}_{\text{Cl},D}^0 \mathbf{w}$ et $\varphi'_h = 0$, on estime (3.3.52) de la même façon que dans l'étape 1 de la preuve du Théorème 3.3.10 (estimation juste au-dessus de l'inégalité (3.3.40)) :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{J}_s^m, \mathbf{w}) - (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m, \text{rot } \mathbf{w}) - \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right), \mathbf{w} \right)_{D_c} \\ & \lesssim (\eta_{D;1}^m + \eta_{J;1}^m + \xi^m) \|\nabla_p \mathbf{w}\| \lesssim (\eta_{D;1}^m + \eta_{J;1}^m + \xi^m) \|\mathbf{A}'\|_{H_0(\text{rot}, D)}, \end{aligned} \quad (3.3.54)$$

où la dernière inégalité vient de l'application de (3.3.50). D'après le Lemme 3.2.7 avec $\mathbf{A}'_h = 0$ et $\varphi'_h = \widehat{\mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0} \hat{\varphi} + \mathcal{I}_{\text{Cl},D}^0 \phi$, on procède à l'estimation de (3.3.53) comme on l'a effectué dans l'étape 2 de la preuve du Théorème 3.3.10 (estimation juste au-dessus de l'inégalité (3.3.42)) :

$$\begin{aligned} & \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right), \nabla(\hat{\varphi} + \phi) \right)_{D_c} \\ & \lesssim (\eta_{D;2}^m + \eta_{J;2}^m) (\|\nabla \hat{\varphi}\|_{D_c} + \|\nabla \phi\|) \lesssim (\eta_{D;2}^m + \eta_{J;2}^m) \|\mathbf{A}'\|_{H_0(\text{rot}, D)}, \end{aligned} \quad (3.3.55)$$

où la dernière inégalité vient de l'application de (3.3.48) et (3.3.49).

En combinant (3.3.54) et (3.3.55), on estime le terme (3.3.51) comme suit :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{J}_s^m, \mathbf{A}') - (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m, \text{rot } \mathbf{A}') - \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right), \mathbf{A}' \right)_{D_c} \\ & \lesssim (\eta_{D;1}^m + \eta_{J;1}^m + \eta_{D;2}^m + \eta_{J;2}^m + \xi^m) \|\mathbf{A}'\|_{H_0(\text{rot}, D)}, \end{aligned}$$

et, par conséquent, on estime (3.3.45) par la relation suivante¹ :

$$\begin{aligned} & (\sigma^{1/2} \partial_t(\mathbf{e}_{A,h\tau} + \nabla \int_0^t e_{\varphi,h\tau}), \mathbf{A}') \\ & \leq \sigma_{\min}^{-1/2} \mu_{\min}^{-1/2} \|\mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m)\| \|\text{rot } \mathbf{A}'\| + C \sigma_{\min}^{-1/2} (\eta_{D;1}^m \\ & \quad + \eta_{J;1}^m + \eta_{D;2}^m + \eta_{J;2}^m + \xi^m) \|\mathbf{A}'\|_{H_0(\text{rot}, D)} \\ & \lesssim \max(\sigma_{\min}^{-1/2}, (\sigma_{\min} \mu_{\min})^{-1/2}) (\eta_{D;1}^m + \eta_{J;1}^m + \eta_{D;2}^m + \eta_{J;2}^m + \xi^m \\ & \quad + \|\mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m)\|) \|\mathbf{A}'\|_{H_0(\text{rot}, D)}. \end{aligned}$$

1. Puisque $\sigma = 0$ dans D_{nc} , on étend le domaine de l'intégrale $(\sigma \partial_t(\mathbf{e}_{A,h\tau}(t) + \nabla \int_0^t e_{\varphi,h\tau}(s) ds), \mathbf{A}')_{D_c}$ au domaine tout entier D .

Puisque cette dernière estimation est satisfaite pour tout $\mathbf{A}' \in H_0(\text{rot}, D)$, pour tout $t \in]t_{m-1}, t_m]$ on obtient :

$$\begin{aligned} & \|\sigma^{1/2} \partial_t(\mathbf{e}_{A,h\tau} + \nabla \int_0^t e_{\varphi,h\tau})\|_{H_0(\text{rot}, D)'} \\ & \lesssim \max(\sigma_{\min}^{-1/2}, (\sigma_{\min} \mu_{\min})^{-1/2}) (\eta_{D;1}^m + \eta_{J;1}^m + \eta_{D;2}^m + \eta_{J;2}^m + \xi^m + \|\mu^{-1/2} \text{rot} \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m)\|). \end{aligned}$$

En prenant le carré de cette dernière inégalité, en utilisant deux fois la relation $(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$, en intégrant sur $]t_{m-1}, t_m]$ et en faisant la somme sur $m = 1, \dots, n$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \|\sigma^{1/2} \partial_t(\mathbf{e}_{A,h\tau} + \nabla \int_0^t e_{\varphi,h\tau}), \mathbf{A}'\|_{L^2(0,t_n;H_0(\text{rot}, D)')}^2 \\ & \lesssim \max(\sigma_{\min}^{-1}, (\sigma_{\min} \mu_{\min})^{-1}) \left(\sum_{m=1}^n \tau_m ((\eta_{D;1}^m)^2 + (\eta_{J;1}^m)^2 + (\eta_{D;2}^m)^2 + (\eta_{J;2}^m)^2 + (\xi^m)^2) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m=1}^n \tau_m \|\mu^{-1/2} \text{rot} \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m)\|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.3.56)$$

Le Théorème 3.3.10 appliqué au terme (3.3.56) mène enfin à la conclusion. \square

3.3.4. Fiabilité totale

Au temps t_n , $n \in \{1, \dots, N\}$, on peut écrire l'erreur comme :

$$e(t_n)^2 = \left\| \sigma^{1/2} (\mathbf{e}_A(t_n) + \nabla \int_0^{t_n} e_{\varphi}(t) dt) \right\|_{D_c}^2 + \left\| \mu^{-1/2} \text{rot} \mathbf{e}_A(t) \right\|_{L^2(0,t_n;L^2(D)^3)}^2, \quad (3.3.57)$$

où $\mathbf{e}_A = \mathbf{A} - \mathbf{A}_{h\tau} = \mathbf{e}_{A,\tau} + \mathbf{e}_{A,h\tau}$ et $e_{\varphi} = \varphi - \varphi_{h\tau} = e_{\varphi,\tau} + e_{\varphi,h\tau}$. On peut établir alors le résultat suivant.

Théorème 3.3.12. *Soit $\mathbf{J}_s \in H^1(0, T; H(\text{div}, D))$ à divergence nulle tel que (3.2.7) et $\mathbf{A}^0 \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D)$ tel que (3.2.8)-(3.2.9). Pour tout $n = 1, \dots, N$, on a que :*

$$e(t_n)^2 \lesssim C_{\sigma_{\min}, \mu_{\max}} (1 + \sigma_{\tau}) \left((\eta^n)^2 + \sum_{m=1}^n \tau_m (\xi^m)^2 + \|\mathbf{J}_s - \pi_{\tau} \mathbf{J}_s\|_{L^2(0,t_n;H_0(\text{rot}, D)')}^2 \right), \quad (3.3.58)$$

où $C_{\sigma_{\min}, \mu_{\max}}$ dénote une constante dépendant uniquement des valeurs de σ_{\min} et μ_{\max} .

DÉMONSTRATION. D'après les définitions ci-dessus des erreurs \mathbf{e}_A et \mathbf{e}_{φ} , ce résultat est une conséquence immédiate des Théorèmes 3.3.3 et 3.3.10 et des inégalités classiques de Cauchy-Schwarz et Young, associées à la relation (3.3.1) du Lemme 3.3.1 pour passer de l'intégration en temps continue à celle discrète. \square

Si l'on définit l'erreur totale au temps t_n , $n \in \{1, \dots, N\}$, par :

$$\begin{aligned} E(t_n)^2 = & \left\| \sigma^{1/2} (\mathbf{e}_{A,\tau}(t_n) + \nabla \int_0^{t_n} e_{\varphi,\tau}(t) dt) \right\|_{D_c}^2 + \left\| \sigma^{1/2} (\mathbf{e}_{A,h\tau}(t_n) + \nabla \int_0^{t_n} e_{\varphi,h\tau}(t) dt) \right\|_{D_c}^2 \\ & + \left\| \sigma^{1/2} (\partial_t \mathbf{e}_{A,\tau} + \nabla e_{\varphi,\tau}) \right\|_{L^2(0,t_n;H_0(\text{rot},D)')}^2 + \left\| \sigma^{1/2} (\partial_t \mathbf{e}_{A,h\tau} + \nabla e_{\varphi,h\tau}) \right\|_{L^2(0,t_n;H_0(\text{rot},D)')}^2 \\ & + \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,\tau}(t) \right\|_{L^2(0,t_n;L^2(D)^3)}^2 + \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(t) \right\|_{L^2(0,t_n;L^2(D)^3)}^2, \end{aligned}$$

on obtient la borne supérieure suivante.

Théorème 3.3.13. *Soit $\mathbf{J}_s \in H^1(0,T;H(\text{div},D))$ à divergence nulle tel que (3.2.7) et $\mathbf{A}^0 \in \widetilde{H}_0(\text{rot},D)$ tel que (3.2.8)-(3.2.9). Pour tout $n = 1, \dots, N$, on a que :*

$$E(t_n)^2 \lesssim C_{\sigma_{\min}, \mu_{\min}, \mu_{\max}} (1 + \sigma_\tau) \left((\eta^n)^2 + \sum_{m=1}^n \tau_m (\xi^m)^2 + \|\mathbf{J}_s - \pi_\tau \mathbf{J}_s\|_{L^2(0,t_n;H_0(\text{rot},D)')}^2 \right),$$

où $C_{\sigma_{\min}, \mu_{\min}, \mu_{\max}}$ dénote une constante dépendant uniquement des valeurs de $\sigma_{\min}, \mu_{\min}$ et μ_{\max} .

DÉMONSTRATION. Grâce au Lemme 3.3.1, ce résultat est une conséquence immédiate des Théorèmes 3.3.3, 3.3.4, 3.3.10 et 3.3.11. \square

On remarque que l'on pourrait envisager une autre définition de l'erreur globale (on y reviendra quand on démontrera l'efficacité totale dans la section 3.4.3) :

$$\bar{E}(t_n)^2 = E(t_n)^2 + \sum_{m=1}^n \tau_m \left\| \sigma^{1/2} (\mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m) + \nabla \int_0^{t_m} e_{\varphi,h\tau}(s) ds) \right\|_{D_c}^2. \quad (3.3.59)$$

Dans ce cas aussi on a la propriété de fiabilité, comme montré dans le corollaire suivant.

Corollaire 3.3.14. *On a :*

$$\bar{E}(t_n)^2 \leq C_{\sigma_{\min}, \mu_{\min}, \mu_{\max}} \left(\sum_{m=1}^n (\eta_\tau^m)^2 + \tau_m ((\eta_h^m)^2 + (\xi^m)^2) + \|\mathbf{J}_s - \pi_\tau \mathbf{J}_s\|_{L^2(0,t_n;H_0(\text{rot},D)')}^2 \right),$$

où $C_{\sigma_{\min}, \mu_{\min}, \mu_{\max}}$ dénote une constante dépendant uniquement des valeurs de $\sigma_{\min}, \mu_{\min}$ et μ_{\max} .

DÉMONSTRATION. De la définition de $\bar{E}(t_n)$, grâce au Théorème 3.3.10, le nouveau terme qui apparaît dans l'erreur (3.3.59) peut être borné comme suit :

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^n \tau_m \left\| \sigma^{1/2} (\mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m) + \nabla \int_0^{t_m} e_{\varphi,h\tau}(t) dt) \right\|_{D_c}^2 \\
& \leq C \max(\sigma_{\min}^{-1}, \mu_{\max}) \sum_{m=1}^n \tau_m \sum_{p=1}^m \tau_p ((\eta_h^p)^2 + (\xi^p)^2) \\
& \leq C \max(\sigma_{\min}^{-1}, \mu_{\max}) T \sum_{m=1}^n \tau_m ((\eta_h^m)^2 + (\xi^m)^2).
\end{aligned}$$

□

3.4. EFFICACITÉ

3.4.1. Efficacité temporelle

Tout d'abord, on établit un lemme concernant l'efficacité de l'estimateur temporel η_τ^m , défini en (3.2.37).

Lemme 3.4.1. *Soit $\mathbf{J}_s \in H^1(0, T; H(\operatorname{div}, D))$ à divergence nulle tel que (3.2.7) et $\mathbf{A}^0 \in \widetilde{H}_0(\operatorname{rot}, D)$ tel que (3.2.8)-(3.2.9). Pour chaque instant t_m , $m \in \{1, \dots, n\}$, l'estimateur temporel η_τ^m peut être borné comme suit :*

$$\begin{aligned}
\eta_\tau^m & \leq \left(\frac{\tau_m}{3} \right)^{1/2} \left\| \mu^{-1/2} \operatorname{rot} (\mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m)) \right\| + \left(\frac{\tau_m}{3} \right)^{1/2} \left\| \mu^{-1/2} \operatorname{rot} (\mathbf{e}_{A,h\tau}(t_{m-1})) \right\| \\
& + \max(C \mu_{\max}^{1/2} (1 + \sigma_{\max}), 1) \left(\left\| \mu^{-1/2} \operatorname{rot} \mathbf{e}_{A,\tau} \right\|_{L^2(t_{m-1}, t_m; L^2(D)^3)} \right. \\
& \left. + \left\| \sigma^{1/2} (\partial_t \mathbf{e}_{A,\tau} + \nabla e_{\varphi,\tau}) \right\|_{L^2(t_{m-1}, t_m; H_0(\operatorname{rot}, D)')} + \left\| \mathbf{J}_s - \pi_\tau \mathbf{J}_s \right\|_{L^2(t_{m-1}, t_m; H_0(\operatorname{rot}, D)')} \right).
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. De la définition de l'estimateur temporel (3.2.37) et de l'inégalité triangulaire, on sait que :

$$\begin{aligned}
\eta_\tau^m & = \left(\frac{\tau_m}{3} \right)^{1/2} \left\| \mu^{-1/2} \operatorname{rot} (\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}) \right\| \\
& \leq \left(\frac{\tau_m}{3} \right)^{1/2} \left\| \mu^{-1/2} \operatorname{rot} (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_h^m) \right\| + \left(\frac{\tau_m}{3} \right)^{1/2} \left\| \mu^{-1/2} \operatorname{rot} (\mathbf{A}^{m-1} - \mathbf{A}_h^{m-1}) \right\| \\
& + \left(\frac{\tau_m}{3} \right)^{1/2} \left\| \mu^{-1/2} \operatorname{rot} (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}^{m-1}) \right\|.
\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Compte tenu du fait que les deux premiers termes à droite de cette inégalité représentent la norme sous forme d'énergie magnétique de l'erreur spatiale associée à $\mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m)$ et $\mathbf{e}_{A,h\tau}(t_{m-1})$ respectivement, il reste à estimer le terme (3.4.1).

De la définition de \mathbf{A}_τ , (3.2.34), un simple calcul donne :

$$\frac{\tau_m}{3} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot} (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}^{m-1}) \right\|^2 = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot} (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau(s)) \right\|^2 ds.$$

De plus, de l'équation résiduelle temporelle (3.3.5) avec $\mathbf{A}' = \mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau$ et $\varphi' = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot} (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau) \right\|^2 &\leq (\mathbf{J}_s - \pi_\tau \mathbf{J}_s, \mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau) \\ &+ (\sigma(\partial_t \mathbf{e}_{A,\tau} + \nabla e_{\varphi,\tau}), \mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau)_{D_c} + (\mu^{-1} \text{rot} \mathbf{e}_{A,\tau}, \text{rot} (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau)). \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

La jauge sur \mathbf{A}^m , $1 \leq m \leq n$, implique que $\text{div} (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau) = 0$. $\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau$ appartient alors à $H_0(\text{rot}, D) \cap H(\text{div}; D)$. D'après l'inclusion compacte de $H_0(\text{rot}, D) \cap H(\text{div}; D)$ dans $L^2(D)^3$, on déduit que :

$$\|(\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau)\| \lesssim \|\text{rot} (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau)\| + \|\text{div} (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau)\| \lesssim \|\text{rot} (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau)\|.$$

Grâce à cette inégalité et puisque $\sigma(\partial_t \mathbf{e}_{A,\tau} + \nabla \tilde{e}_{\varphi,\tau}) \in H_0(\text{rot}, D)'$, les deux premiers termes de la contribution à droite de l'inégalité (3.4.2) s'estiment comme suit :

$$\begin{aligned} &(\mathbf{J}_s - \pi_\tau \mathbf{J}_s, \mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau)_D + (\sigma(\partial_t \mathbf{e}_{A,\tau} + \nabla e_{\varphi,\tau}), \mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau)_{D_c} \\ &\leq \left(\|\mathbf{J}_s - \pi_\tau \mathbf{J}_s\|_{H_0(\text{rot}, D)'} + \|\sigma(\partial_t \mathbf{e}_{A,\tau} + \nabla e_{\varphi,\tau})\|_{H_0(\text{rot}, D)'} \right) \|\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau\|_{H_0(\text{rot}, D)} \\ &\leq C \mu_{\max}^{1/2} \left(\|\mathbf{J}_s - \pi_\tau \mathbf{J}_s\|_{H_0(\text{rot}, D)'} + \|\sigma(\partial_t \mathbf{e}_{A,\tau} + \nabla e_{\varphi,\tau})\|_{H_0(\text{rot}, D)'} \right) \left\| \mu^{-1/2} \text{rot} (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau) \right\|. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

L'intégration de (3.4.2) sur l'intervalle $[t_{m-1}, t_m]$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'utilisation de (3.4.3), donnent :

$$\begin{aligned} &\int_{t_{m-1}}^{t_m} \left\| \mu^{-1/2} \text{rot} (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau) \right\|^2 dt \\ &\leq \max(C \mu_{\max}^{1/2} (1 + \sigma_{\max}), 1) \left(\|\mathbf{J}_s - \pi_\tau \mathbf{J}_s\|_{L^2(t_{m-1}, t_m; H_0(\text{rot}, D)')} + \left\| \mu^{-1/2} \text{rot} \mathbf{e}_{A,\tau} \right\|_{L^2(t_{m-1}, t_m; L^2(D)^3)} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \sigma^{1/2} (\partial_t \mathbf{e}_{A,\tau} + \nabla e_{\varphi,\tau}) \right\|_{L^2(t_{m-1}, t_m; H_0(\text{rot}, D)')}^2 \right) \left\| \mu^{-1/2} \text{rot} (\mathbf{A}^m - \mathbf{A}_\tau) \right\|_{L^2(t_{m-1}, t_m; L^2(D)^3)}. \end{aligned}$$

A l'aide de ce dernier résultat on estime (3.4.1), d'où la conclusion. \square

3.4.2. Efficacité spatiale

Compte tenu de la nature instationnaire du problème, dans le cadre d'un contexte de remaillage adaptatif, on effectue dorénavant l'hypothèse que pour tout m , $1 \leq m \leq N$, il existe un maillage (ou triangulation) $\tilde{\mathcal{T}}_{hm}$ conforme tel que chaque élément $T \in \mathcal{T}_{hm}$ ou $T \in \mathcal{T}_{h_{m-1}}$ soit la réunion d'éléments \tilde{T} de $\tilde{\mathcal{T}}_{hm}$ tels que $h_T \sim h_{\tilde{T}}$. Un exemple en 2D est donné sur la Figure 3.2. En général, dans un contexte adaptatif, cette assertion n'est pas restrictive, voir [Nicaise et Soualem, 2005, page 333].

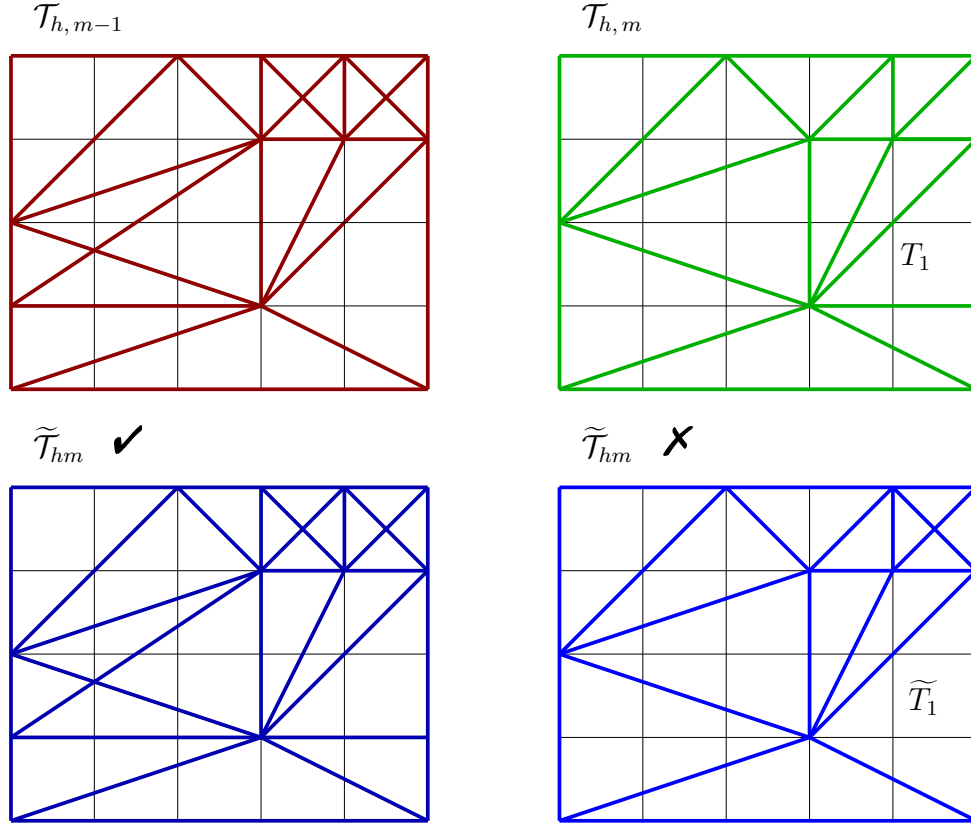


FIGURE 3.2. Le maillage \widetilde{T}_{hm} à gauche en bleu satisfait l'assertion sur le maillage au début de la section 3.4.2 car pour tout $T \in \mathcal{T}_{hm}$ ou $T \in \mathcal{T}_{h,m-1}$ on a $T = \bigcup_{\widetilde{T} \in \widetilde{\mathcal{T}}_{hm}} \widetilde{T}$. Par contre \widetilde{T}_{hm} à droite en bleu ne satisfait pas l'assertion car, par exemple, $T_1 \in \mathcal{T}_{hm}$ n'est l'union d'aucun élément de $\widetilde{\mathcal{T}}_{hm}$, même si $T_1 \subset \widetilde{T}_1$.

Dans cette section on utilisera les fonctions bulles et les inégalités inverses introduites dans la section 1.3.6 et, en accord avec les notations de cette section, on écrira :

$$\sigma_{\widetilde{\omega}_T, \max} = \max_{K \in \widetilde{\omega}_T} \sigma_K \quad \text{et} \quad \mu_{\widetilde{\omega}_T, \min} = \min_{K \in \widetilde{\omega}_T} \mu_K,$$

où

$$\widetilde{\omega}_T = \bigcup_{\mathcal{N}_{hm}(T) \cap \mathcal{N}_{hm}(K) \neq \emptyset} K$$

dénote le *patch* associé au tétraèdre $T \in \mathcal{T}_{hm}$, avec $\mathcal{N}_{hm}(T)$ et $\mathcal{N}_{hm}(K)$ les ensembles des sommets respectivement de T et K .

De la définition de \mathbf{E}^m , (3.3.10), on déduit que :

$$\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1} = \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m) - \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_{m-1}) + \tau_m \nabla \widetilde{e_{\varphi,h\tau}}(t_m).$$

De plus, le lemme suivant nous sera très utile.

Lemme 3.4.2. *Pour tout t_m , $1 \leq m \leq N$ et pour tout $\mathbf{v}^m \in H_0(\text{rot}, D)$, on a la relation suivante :*

$$\begin{aligned}
& \int_D \sigma (\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}) \cdot \mathbf{v}^m + \tau_m \sum_{T \in \mathcal{T}_{h_m}} \int_T \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m) \cdot \text{rot } \mathbf{v}^m \\
&= \tau_m \sum_{T \in \mathcal{T}_{h_m}} \int_T (\mathbf{J}_s^m - \pi_h \mathbf{J}_s^m) \cdot \mathbf{v}^m \\
&+ \tau_m \sum_{T \in \mathcal{T}_{h_m}} \int_T \left(\pi_h \mathbf{J}_s^m - \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \widetilde{\varphi}_h^m \right) - \text{rot} (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m) \right) \cdot \mathbf{v}^m \\
&+ \sum_{T \in \mathcal{T}_{h_m}} \int_{\partial T} (\mathbf{n} \times \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m) \cdot \mathbf{v}^m d\gamma(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Immédiate d'après le Lemme 3.3.7. □

Les preuves d'efficacité des Lemmes 3.4.3-3.4.5, constituent une application standard des inégalités inverses des fonctions bulles. L'enjeu a consisté à croiser convenablement les techniques que l'on peut trouver dans les Lemmes 4.3, 4.4, 4.5 de [Creusé et al., 2012] avec celles dans le Théorème 5.6 de [Nicaise et Soualem, 2005].

Lemme 3.4.3. *Pour tout $T \in \mathcal{T}_{h_m}$ et $F \subset \partial T$, on a :*

$$\eta_{T;1}^m \lesssim \sigma_T^{1/2} h_T \left\| \sigma^{1/2} \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_T + \mu_T^{-1/2} \|\mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m)\|_T + \xi_T^m, \quad (3.4.4)$$

$$\eta_{F;1}^m \lesssim \max_{K \in \widetilde{\omega}_T} \sigma_K^{1/2} h_T \left\| \sigma^{1/2} \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{\widetilde{\omega}_T} + \min_{K \in \widetilde{\omega}_T} \mu_K^{-1/2} \|\mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m)\|_{\widetilde{\omega}_T} + \xi_{\omega_T}^m. \quad (3.4.5)$$

Si l'on a recours à la norme duale de $H_0(\text{rot}, D)$, on obtient aussi le résultat global en espace suivant :

$$\eta_{T;1}^m \lesssim \sigma_T^{1/2} \left\| \sigma^{1/2} \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{H_0(\text{rot}, D)'} + \mu_T^{-1/2} \|\mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m)\|_T + \xi_T^m, \quad (3.4.6)$$

$$\sum_{F \subset \partial T} \eta_{F;1}^m \lesssim \sigma_{\widetilde{\omega}_T, \max}^{1/2} \left\| \sigma^{1/2} \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{H_0(\text{rot}, D)'} + \mu_{\widetilde{\omega}_T, \min}^{-1/2} \|\mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m)\|_{\widetilde{\omega}_T} + \xi_{\omega_T}^m. \quad (3.4.7)$$

DÉMONSTRATION. **Etape 1.** On prouve ici les inégalités (3.4.4) et (3.4.6). On fixe un élément arbitraire $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_{hm}$ et on définit :

$$\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m = \left(\mathbf{J}_{s,h}^m - \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \widetilde{\varphi_h^m} \right) - \text{rot} (\mu^{-1} \text{rot} \mathbf{A}_h^m) \right)_{|\tilde{T}},$$

d'où

$$(\eta_{\tilde{T};1}^m)^2 = h_{\tilde{T}}^2 \|\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m\|_{\tilde{T}}^2. \quad (3.4.8)$$

En appliquant l'inégalité inverse (1.3.24), en utilisant le lemme 3.4.2 avec $v^m = \mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}}$ et en intégrant par parties en se rappelant du fait que $b_{\tilde{T}} = 0$ sur $\partial \tilde{T}$, où $b_{\tilde{T}}$ dénote la fonction bulle dans le tétraèdre \tilde{T} , on obtient :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m\|_{\tilde{T}}^2 &\lesssim \|\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}}^{1/2}\|_{\tilde{T}}^2 = \int_{\tilde{T}} \mathbf{r}_{\tilde{T}}^m (\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}}) \\ &= \int_{\tilde{T}} \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \cdot (\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}}) + \int_{\tilde{T}} \mu^{-1} \text{rot} \mathbf{E}^m \text{rot} (\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}}) - \int_{\tilde{T}} (\mathbf{J}_s^m - \pi_h \mathbf{J}_s^m) (\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}}) \\ &\leq \left\| \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{\tilde{T}} \|\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}}\|_{\tilde{T}} + \|\mu^{-1} \text{rot} \mathbf{E}^m\|_{\tilde{T}} \|\text{rot} (\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}})\|_{\tilde{T}} + \|\mathbf{J}_s^m - \pi_h \mathbf{J}_s^m\|_{\tilde{T}} \|\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}}\|_{\tilde{T}} \\ &\lesssim \left(\left\| \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{\tilde{T}} + h_{\tilde{T}}^{-1} \|\mu^{-1} \text{rot} \mathbf{E}^m\|_{\tilde{T}} + h_{\tilde{T}}^{-1} \xi_{\tilde{T}}^m \right) \|\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m\|_{\tilde{T}}, \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

où on a utilisé le fait que (de l'inégalité inverse (1.3.25)) :

$$\|\text{rot} (\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}})\|_{\tilde{T}} \leq \|\nabla (\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}})\|_{\tilde{T}} \lesssim h_{\tilde{T}}^{-1} \|\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}}\|_{\tilde{T}}, \quad \text{et que } \|b_T\|_{\infty, T} = 1.$$

De (3.4.8) et (3.4.9) on déduit que pour tout $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_{hm}$ on a l'estimation

$$\eta_{\tilde{T};1}^m \lesssim \sigma_{\tilde{T}}^{1/2} h_{\tilde{T}} \left\| \sigma^{1/2} \frac{E^m - E^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{\tilde{T}} + \mu_{\tilde{T}}^{-1/2} \|\mu^{-1/2} \text{rot} \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_m)\|_{\tilde{T}} + \xi_{\tilde{T}}^m, \quad \forall 1 \leq m \leq N. \quad (3.4.10)$$

L'assertion sur la triangulation (spécifié au début de la section 3.4.2 à la page 101) implique que, pour tout $T \in \mathcal{T}_{hm}$,

$$h_T^2 \|\mathbf{r}_T^m\|_T^2 \lesssim \sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_{hm} : \tilde{T} \subset T} h_{\tilde{T}}^2 \|\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m\|_{\tilde{T}}^2. \quad (3.4.11)$$

Par conséquent, d'après l'inégalité (3.4.10) et le fait que $h_{\tilde{T}} \sim h_T$ pour $\tilde{T} \subset T$, on obtient la conclusion (3.4.4).

Pour montrer l'estimation (3.4.6), on remarque que la différence entre (3.4.4) et (3.4.6) réside dans l'estimation du terme $\int_{\tilde{T}} \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \cdot (\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}})$, qui, en effet, peut être estimé en considérant une extension du domaine d'intégration de \tilde{T} dans tout D , et en employant le fait que $b_{\tilde{T}} = 0$ en dehors de \tilde{T} :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{T}} \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \cdot (\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}}) &\leq \sigma_{\tilde{T}}^{1/2} \int_D \sigma^{1/2} \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \cdot (\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}}) \\ &\lesssim \sigma_{\tilde{T}}^{1/2} \left\| \sigma^{1/2} \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{H_0(\text{rot}, D)'} \|\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}}\|_{H_0(\text{rot}, D)}, \end{aligned}$$

et puisque

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}}\|_{H_0(\text{rot}, D)} &\sim \|\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}}\| + \|\text{rot}(\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}})\| \\ &\sim \|\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}}\|_{\tilde{T}} + \|\text{rot}(\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m b_{\tilde{T}})\|_{\tilde{T}} \\ &\lesssim (1 + h_{\tilde{T}}^{-1}) \|\mathbf{r}_{\tilde{T}}^m\|_{\tilde{T}}, \end{aligned}$$

on revient à un résultat analogue à (3.4.10) : pour tout m , $1 \leq m \leq N$,

$$\eta_{\tilde{T};1}^m \lesssim \sigma_{\tilde{T}}^{1/2} \left\| \sigma^{1/2} \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{H_0(\text{rot}, D)'} + \mu_{\tilde{T}}^{-1/2} \|\mu^{1/2} \text{rot} \mathbf{e}_{A, h\tau}(t_m)\|_{\tilde{T}} + \xi_{\tilde{T}}^m,$$

où on a majoré $h_{\tilde{T}}$ par 1. Passer de (3.4.11) à (3.4.6) est immédiat en considérant que l'ensemble $\{\tilde{T} : \tilde{T} \subset T\}$ a une cardinalité uniformément bornée grâce à la régularité du maillage.

Etape 2. On prouve ici les inégalités (3.4.5) et (3.4.7). On opère directement sur le maillage \mathcal{T}_{hm} au lieu de $\tilde{\mathcal{T}}_{hm}$ car on adopte le raisonnement spécifié dans le Remarque 3.4.4.

Soit $T \in \mathcal{T}_{hm}$, alors pour tout $F \in \partial T$ on définit :

$$\mathbf{J}_F^m = [\mathbf{n} \times \mu^{-1} \text{rot} \mathbf{A}_h^m]_F,$$

d'où :

$$\eta_{F;1}^m = h_F^{1/2} \|\mathbf{J}_F^m\|_F. \quad (3.4.12)$$

Grâce à l'inégalité inverse (1.3.26) et en appliquant le Lemme 3.4.2 avec $v^m = \mathbf{J}_F^m b_F$, où b_F bulle associée à la face F , on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{J}_F^m\|_{\tilde{T}}^2 \lesssim \|\mathbf{J}_F^m b_F^{1/2}\|_F^2 = \int_F \mathbf{J}_F^m (\mathbf{J}_F^m b_F) d\gamma(\mathbf{x}) = \int_{\omega_F} \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \cdot (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F) \\
& + \int_{\omega_F} \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{E}^m \text{rot } (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F) - \int_{\omega_F} (\mathbf{J}_s^m - \pi_h \mathbf{J}_s^m) (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F) \\
& + \int_{\omega_F} \left(\pi_h \mathbf{J}_s^m - \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \widetilde{\varphi}_h^m \right) - \text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m) \right) \cdot (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F) \\
& \leq \left(\left\| \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{\omega_F} + \|\mathbf{J}_s^m - \pi_h \mathbf{J}_s^m\|_{\omega_F} \right. \\
& \quad \left. + \left\| \pi_h \mathbf{J}_s^m - \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \widetilde{\varphi}_h^m \right) - \text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m) \right\|_{\omega_F} \right) \|\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F\|_{\omega_F} \\
& \quad + \|\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{E}^m\|_{\omega_F} \|\text{rot } (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F)\|_{\omega_F} \\
& \lesssim \left(h_F^{1/2} \left(\left\| \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{\omega_F} + \|\mathbf{J}_s^m - \pi_h \mathbf{J}_s^m\|_{\omega_F} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left\| \pi_h \mathbf{J}_s^m - \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \widetilde{\varphi}_h^m \right) - \text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}_h^m) \right\|_{\omega_F} \right) \right. \\
& \quad \left. + h_F^{-1/2} \|\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{E}^m\|_{\omega_F} \right) \|\mathbf{J}_F^m\|_F,
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

où on a utilisé les inégalités inverses (1.3.27) et (1.3.28), associées au fait que

$$\|\text{rot } (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F)\|_{\omega_F} \leq \|\nabla (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F)\|_{\omega_F} \lesssim h_F^{-1/2} \|\mathbf{J}_F^m\|_F. \tag{3.4.14}$$

D'après les définitions (3.4.8) et (3.4.12), en considérant que $h_F \sim h_T$ et en appliquant l'estimation (3.4.4) pour le terme $\eta_{T,1}^m$, de (3.4.13) on déduit (3.4.5).

Pour montrer l'estimation (3.4.7), on remarque que la différence entre (3.4.5) et (3.4.7) réside dans l'estimation du terme $\int_{\omega_F} \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \cdot (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F)$, qui en effet peut être estimé en employant le fait que $b_F = 0$ en dehors de ω_F et donc on peut étendre le domaine de l'intégrale ω_F à tout le domaine D (et vice versa) et ensuite utiliser la norme duale $H_0(\text{rot}, D)'$:

$$\begin{aligned}
& \int_{\omega_F} \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \cdot (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F) = \int_D \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \cdot (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F) \\
& \leq \left\| \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{H_0(\text{rot}, D)'} \|\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F\|_{H_0(\text{rot}, D)} \\
& \sim \left\| \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{H_0(\text{rot}, D)'} (\|\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F\|_D + \|\text{rot}(\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F)\|_D) \\
& = \left\| \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{H_0(\text{rot}, D)'} (\|\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F\|_{\omega_F} + \|\text{rot}(\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F)\|_{\omega_F}) \\
& \lesssim \left\| \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{H_0(\text{rot}, D)'} (h_F^{1/2} + h_F^{-1/2}) \|\mathbf{J}_F^m\|_{\omega_F} \\
& \leq \left\| \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{H_0(\text{rot}, D)'} h_F^{-1/2} \|\mathbf{J}_F^m\|_{\omega_F},
\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

où l'on a encore utilisé les inégalités inverses (3.22) et (3.23) et (3.4.14). En conclusion, en remplaçant l'estimation (3.4.15) dans l'estimation (3.4.13), on trouve l'inégalité (3.4.7). \square

Remarque 3.4.4. Pour l'estimation (3.4.4), afin de gérer les différents maillages issus des différents pas de temps, on a procédé comme suit. Tout d'abord on a démontré l'inégalité (3.4.4) pour un tétraèdre arbitraire fixé $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_{h_m}$. Ensuite, grâce à l'hypothèse sur le maillage concernant le maillage $\tilde{\mathcal{T}}_{h_m}$ (voir tout au début de la section 3.4.2 à la page 101), on a vu que :

$$(\eta_{T;1}^m)^2 \lesssim \sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_{h_m} : \tilde{T} \subset T} (\eta_{\tilde{T};1}^m)^2.$$

De cette manière, on peut étendre toutes les bornes inférieures à tous les $T \in \mathcal{T}_{h_m}$, en se rappelant que, pour un maillage régulier, $h_{\tilde{T}} \sim h_T$ lorsque $\tilde{T} \subset T$.

Pour cette raison, dorénavant, dans les preuves des lemmes 3.4.5 et 3.4.6, on travaille directement sur le maillage \mathcal{T}_{h_m} , en tenant compte que l'on devrait travailler, dans un premier temps, sur un maillage convenable $\tilde{\mathcal{T}}_{h_m}$ et étendre ensuite les résultats au maillage \mathcal{T}_{h_m} .

Lemme 3.4.5. Pour tout $T \in \mathcal{T}_{h_m}$, $T \subset D_c$, et pour tout $F \subset \partial T$, on a :

$$\eta_{T;2}^m \lesssim \sigma_T^{1/2} \left\| \sigma^{1/2} \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_T, \tag{3.4.16}$$

$$\eta_{F;2}^m \lesssim \max_{K \in \widetilde{\omega}_T} \sigma_K^{1/2} \left\| \sigma^{1/2} \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{\widetilde{\omega}_T}. \tag{3.4.17}$$

Si on a recours à la norme duale de $H_0(\text{rot}, D)$, on obtient aussi le résultat global en espace suivant :

$$\eta_{T;2}^m \lesssim \sigma_T^{1/2} \left\| \sigma^{1/2} \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{H_0(\text{rot}, D)'}, \tag{3.4.18}$$

$$\sum_{F \subset \partial T} \eta_{F;2}^m \lesssim \sigma_{\widetilde{\omega}_T, \max}^{1/2} \left\| \sigma^{1/2} \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{H_0(\text{rot}, D)'}. \tag{3.4.19}$$

DÉMONSTRATION. **Etape 1.** On prouve ici les inégalités (3.4.16) et (3.4.18).

Soit \mathbf{r}_T^m défini par :

$$\mathbf{r}_T^m = \left(\operatorname{div} \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \widetilde{\varphi_h^m} \right) \right) \right)_{|T},$$

d'où

$$(\eta_{T;2}^m)^2 = h_T^2 \|\mathbf{r}_T^m\|_T^2. \quad (3.4.20)$$

Grâce à l'inégalité inverse (1.3.24), en intégrant par parties et en utilisant les faits que $b_T = 0$ sur ∂T et que :

$$\int_T \sigma \left(\frac{\mathbf{A}^m - \mathbf{A}^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi^m \right) \cdot \nabla (\mathbf{r}_T^m b_T) = 0,$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_T^m\|_T^2 &\lesssim \|\mathbf{r}_T^m b_T^{1/2}\|_T^2 = \int_T \mathbf{r}_T^m \cdot (\mathbf{r}_T^m b_T^{1/2}) \\ &= - \int_T \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi^m \right) \cdot \nabla (\mathbf{r}_T^m b_T) + \int_T \sigma \left(\frac{\mathbf{A}^m - \mathbf{A}^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi^m \right) \cdot \nabla (\mathbf{r}_T^m b_T) \\ &= \int_T \left(\sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right) \cdot \nabla (\mathbf{r}_T^m b_T) \\ &\leq \left\| \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_T \|\nabla (\mathbf{r}_T^m b_T)\|_T \\ &\lesssim h_T^{-1} \sigma_T^{1/2} \left\| \sigma^{1/2} \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_T \|\mathbf{r}_T^m\|_T, \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

où l'on a fait intervenir l'inégalité inverse (1.3.25) et le fait que $\|b_T\|_\infty = 1$. L'estimation (3.4.16) suit de (3.4.20) et (3.4.21).

Pour démontrer (3.4.18), il est suffisant de remarquer que l'on peut adapter les passages précédents en tenant compte du fait que :

$$\begin{aligned} \int_T \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \cdot \nabla (\mathbf{r}_T^m b_T) &= \int_D \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \cdot \nabla (\mathbf{r}_T^m b_T) \\ &\leq \left\| \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{H_0(\operatorname{rot}, D)'} \|\nabla (\mathbf{r}_T^m b_T)\|_{H_0(\operatorname{rot}, D)} \\ &\sim \left\| \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{H_0(\operatorname{rot}, D)'} (\|\nabla (\mathbf{r}_T^m b_T)\|_D + \|\operatorname{rot} (\nabla (\mathbf{r}_T^m b_T))\|_D) \\ &\lesssim h_T^{-1} \left\| \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{H_0(\operatorname{rot}, D)'} \|\mathbf{r}_T^m\|_D. \end{aligned}$$

Etape 2. On prouve ici les inégalités (3.4.17) et (3.4.19).

Soit $T \in \mathcal{T}_{hm}$ et $T \subset D_c$, alors pour tout $F \in \partial T$ on définit :

$$\mathbf{J}_F^m = \left[\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \cdot \mathbf{n} \right]_F,$$

d'où :

$$\eta_{F;2}^m = h_F^{1/2} \|\mathbf{J}_F^m\|_F. \quad (3.4.22)$$

Grâce à l'inégalité inverse (1.3.26), en appliquant la formule de Green sur chaque tétraèdre qui appartient à ω_F et en se rappelant que l'on peut ajouter le terme suivant (qui est nul) :

$$\int_{\omega_F} \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \cdot \nabla (\mathbf{J}_F^m b_F) = 0,$$

où b_F est la fonction bulle dans ω_F , on écrit :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{J}_F^m\|_F^2 &\lesssim \|\mathbf{J}_F^m b_F^{1/2}\|_F^2 = \int_F \mathbf{J}_F^m (\mathbf{J}_F^m b_F) d\gamma(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\omega_F} -\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \cdot \nabla (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F) \\ &\quad + \int_{\omega_F} \operatorname{div} \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \right) (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F) \\ &= \int_{\omega_F} \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) - \sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \right) \cdot \nabla (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F) \\ &\quad + \int_{\omega_F} \operatorname{div} \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \right) (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F) \\ &= \int_{\omega_F} \sigma \frac{E^m - E^{m-1}}{\tau_m} \cdot (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F) + \int_{\omega_F} \operatorname{div} \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \varphi_h^m \right) \right) (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F). \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les inégalités inverses (1.3.27) et (1.3.28), on obtient que :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{J}_F^m\|_F^2 &\leq \left\| \sigma \frac{E^m - E^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{\omega_F} \|\nabla (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F)\|_{\omega_F} \\ &\quad + \left\| \operatorname{div} \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \widetilde{\varphi}_h^m \right) \right) \right\|_{\omega_F} \|\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F\|_{\omega_F} \\ &\lesssim \left(h_F^{-1/2} \left\| \sigma \frac{E^m - E^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{\omega_F} + h_F^{1/2} \left\| \operatorname{div} \left(\sigma \left(\frac{\mathbf{A}_h^m - \mathbf{A}_h^{m-1}}{\tau_m} + \nabla \widetilde{\varphi}_h^m \right) \right) \right\|_{\omega_F} \right) \|\mathbf{J}_F^m\|_F. \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

D'après la définition de $\eta_{T;2}$ et le résultat d'efficacité (3.4.16), associés au fait que l'on a $h_F \sim h_T$, (3.4.24) devient :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{J}_F^m\|_F^2 &\lesssim \left(h_F^{-1/2} \left(\left\| \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{\omega_F} + \sum_{K \in \omega_F} \eta_{K;2} \right) \right) \|\mathbf{J}_F^m\|_F \\ &\lesssim h_F^{-1/2} \max_{K \in \omega_F} \sigma_K^{1/2} \left\| \sigma^{1/2} \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{\omega_F} \|\mathbf{J}_F^m\|_F. \end{aligned}$$

De cette inégalité et de (3.4.22), on en déduit (3.4.17).

Pour montrer l'inégalité (3.4.19), on remarque que, dans l'estimation (3.4.23), on peut majorer le terme $\int_{\omega_F} \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \cdot (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F)$ comme déjà fait dans le Lemme 3.4.3 (voir (3.4.15)) :

$$\int_{\omega_F} \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \cdot (\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{J}_F^m) b_F) \lesssim \left\| \sigma \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{H_0(\text{rot}, D)'} h_F^{-1/2} \|\mathbf{J}_F^m\|_{\omega_F}. \quad (3.4.25)$$

Similairement à ce que l'on a déjà fait pour montrer (3.4.17), on obtient l'inégalité (3.4.19). \square

Lemme 3.4.6. *Pour tout $T \in \mathcal{T}_{h_m}$ et pour tout $F \subset \partial T$, on a que :*

$$\eta_{T;3}^m \lesssim \sigma_T^{1/2} \|\sigma^{1/2} \mathbf{E}^m\|_T, \quad (3.4.26)$$

$$\eta_{F;3}^m \lesssim \max_{K \in \widetilde{\omega_T}} \sigma_K^{1/2} \|\sigma^{1/2} \mathbf{E}^m\|_{\widetilde{\omega_T}}. \quad (3.4.27)$$

DÉMONSTRATION. Pour $T \in \mathcal{T}_{h_m}$ on définit :

$$\mathbf{r}_T^m = (\text{div}(\sigma(\mathbf{A}_h^m + \sum_{p=1}^m \tau_p \nabla \widetilde{\varphi}_h^p)))|_T, \text{ ainsi } \eta_{T;3}^m = h_T \|\mathbf{r}_T^m\|_T. \quad (3.4.28)$$

Des inégalités inverses (1.3.24) et (1.3.25) et d'après le fait qu'en prenant $\mathbf{A}' = 0$ dans la formulation variationnelle semi-discrète (3.2.14) (voir la relation (3.3.36)), on a

$$\int_T \sigma(\mathbf{A}^m + \sum_{p=1}^m \tau_p \nabla \varphi^p) \cdot \varphi' = 0,$$

en utilisant la propriété $b_T = 0$ sur ∂T , on peut estimer \mathbf{r}_T^m :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_T^m\|_T^2 &\lesssim \|\mathbf{r}_T^m b_T^{1/2}\|_T^2 = \int_T \text{div}(\sigma(\mathbf{A}_h^m + \sum_{p=1}^m \tau_p \nabla \widetilde{\varphi}_h^p)) \cdot (\mathbf{r}_T^m b_T) \\ &= \int_T \sigma \mathbf{E}^m \cdot \nabla(\mathbf{r}_T^m b_T) \lesssim \sigma_T^{1/2} \|\sigma^{1/2} \mathbf{E}^m\|_T \|\nabla(\mathbf{r}_T^m b_T)\|_T \\ &\lesssim \sigma_T^{1/2} h_T^{-1} \|\sigma^{1/2} \mathbf{E}^m\|_T \|\mathbf{r}_T^m\|_T. \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

En associant ce résultat avec (3.4.28), on obtient l'estimation (3.4.26). L'estimation (3.4.27) est déduite similairement (de la même manière que celle déjà détaillée dans les lemmes précédents) : grâce aux inégalités inverses (1.3.26), (1.3.27) et (1.3.28) et à l'opérateur d'extension \mathbf{F}_{ext} afin d'estimer l'intégrale sur $F \in \partial T$, ce qui conduit à calculer une intégrale sur le *patch* $\tilde{\omega}_T$. \square

Efficacité de l'estimateur spatial

On réunit enfin les trois lemmes précédents pour borner l'erreur spatiale inférieurement et localement.

Théorème 3.4.7. *Soit $\mathbf{J}_s \in H^1(0, T; H(\text{div}, D))$ à divergence nulle tel que (3.2.7) et $\mathbf{A}^0 \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D)$ tel que (3.2.8)-(3.2.9). Soit \mathcal{T}_{h_m} , $m \in \{1, \dots, n\}$, un maillage vérifiant l'hypothèse de la Remarque 3.4.2. Pour tout $T \in \mathcal{T}_{h_m}$, on a :*

$$\begin{aligned} \eta_{h,T}^m &\lesssim \\ &\max(\sigma_{\tilde{\omega}_T, \max}^{1/2}, \mu_{\tilde{\omega}_T, \min}^{-1/2}) \left(\left\| \sigma^{1/2} \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{\tilde{\omega}_T} + \|\mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A, h\tau}(t_m)\|_{\tilde{\omega}_T} + \sigma_{\tilde{\omega}_T, \max}^{1/2} \|\sigma^{1/2} \mathbf{E}^m\|_{\tilde{\omega}_T} \right) \\ &+ \xi_{\omega_T}^m, \end{aligned}$$

avec

$$(\eta_{h,T}^m)^2 = \sum_{j=1}^3 (\eta_{T;j}^m)^2 + \sum_{F \subset \partial T, F \in \mathcal{F}_{h_m}^{\text{int}}} (\eta_{F;1}^m)^2$$

l'estimateur spatiale sur l'élément T .

DÉMONSTRATION. Puisque $\eta_{h,T}^m \lesssim \eta_{T;1}^m + \eta_{T;2}^m + \eta_{T;3}^m + \sum_{F \subset \partial T, F \in \mathcal{F}_{h_m}^{\text{int}}} (\eta_{F;1}^m + \eta_{F;2}^m + \eta_{F;3}^m)$, la conclusion est une conséquence directe des Lemmes 3.4.3, 3.4.5 et 3.4.6. \square

3.4.3. Efficacité totale

Théorème 3.4.8. *Soit $\mathbf{J}_s \in H^1(0, T; H(\text{div}, D))$ à divergence nulle tel que (3.2.7) et $\mathbf{A}^0 \in \widetilde{H}_0(\text{rot}, D)$ tel que (3.2.8)-(3.2.9). Soit \mathcal{T}_{h_m} , $m \in \{1, \dots, n\}$, un maillage vérifiant l'hypothèse*

de la Remarque 3.4.2. Pour tout $n = 1, \dots, N$, on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \eta^n &= \sum_{m=1}^n (\eta_\tau^m)^2 + \tau_m (\eta_h^m)^2 \\ &\lesssim C_{\sigma_{\min}, \sigma_{\max}, \mu_{\min}, \mu_{\max}} \left(\bar{E}(t_n)^2 + \|\mathbf{J}_s - \pi_\tau \mathbf{J}_s\|_{L^2(0, t_n; H_0(\text{rot}, D)')}^2 + \sum_{m=1}^n \tau_m (\xi^m)^2 \right), \end{aligned}$$

où $C_{\sigma_{\min}, \sigma_{\max}, \mu_{\min}, \mu_{\max}}$ dénote une constante qui dépend des valeurs de $\sigma_{\min}, \sigma_{\max}, \mu_{\min}$ et μ_{\max} .

DÉMONSTRATION. Le résultat est une application directe des Lemmes 3.4.1, 3.4.3, 3.4.5, 3.4.6 et l'utilisation de la relation (3.3.3) et du terme à gauche de l'inégalité (3.3.1) avec $\mathbf{v}_\tau = \mathbf{e}_{A, h\tau}$. De plus, on rappelle que :

$$\sum_{m=1}^n \tau_m \left\| \sigma^{1/2} \frac{\mathbf{E}^m - \mathbf{E}^{m-1}}{\tau_m} \right\|_{H_0(\text{rot}, D)'}^2 = \left\| \sigma^{1/2} (\partial_t \mathbf{e}_{A, h\tau} + \nabla e_{\varphi, h\tau}) \right\|_{L^2(0, t_n; H_0(\text{rot}, D)')}^2.$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n (\eta_\tau^m)^2 + \tau_m (\eta_h^m)^2 &\lesssim \max(\mu_{\max}, \mu_{\max} \sigma_{\min}, \mu_{\min}^{-1}) \left(\left\| \sigma^{1/2} (\partial_t \mathbf{e}_{A, \tau} + \nabla e_{\varphi, \tau}) \right\|_{L^2(0, t_n; H_0(\text{rot}, D)')}^2 \right. \\ &\quad + \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A, \tau}(t) \right\|_{L^2(0, t_n; L^2(D)^3)}^2 + \left\| \mathbf{J}_s - \pi_\tau \mathbf{J}_s \right\|_{L^2(0, t_n; H_0(\text{rot}, D)')}^2 \Big) \\ &\quad + \max(\mu_{\min}^{-1}, 1) \left\| \mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A, h\tau}(t) \right\|_{L^2(0, t_n; L^2(D)^3)}^2 + \\ &\quad \sigma_{\max} \left(\left\| \sigma^{1/2} (\partial_t \mathbf{e}_{A, h\tau} + \nabla e_{\varphi, h\tau}) \right\|_{L^2(0, t_n; H_0(\text{rot}, D)')}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^n \tau_m \left\| \sigma^{1/2} (\mathbf{e}_{A, h\tau}(t_n) + \nabla \int_0^{t_n} e_{\varphi, h\tau}(s) ds) \right\|_{D_c}^2 \right) + \sum_{m=1}^n \tau_m (\xi^m)^2. \end{aligned}$$

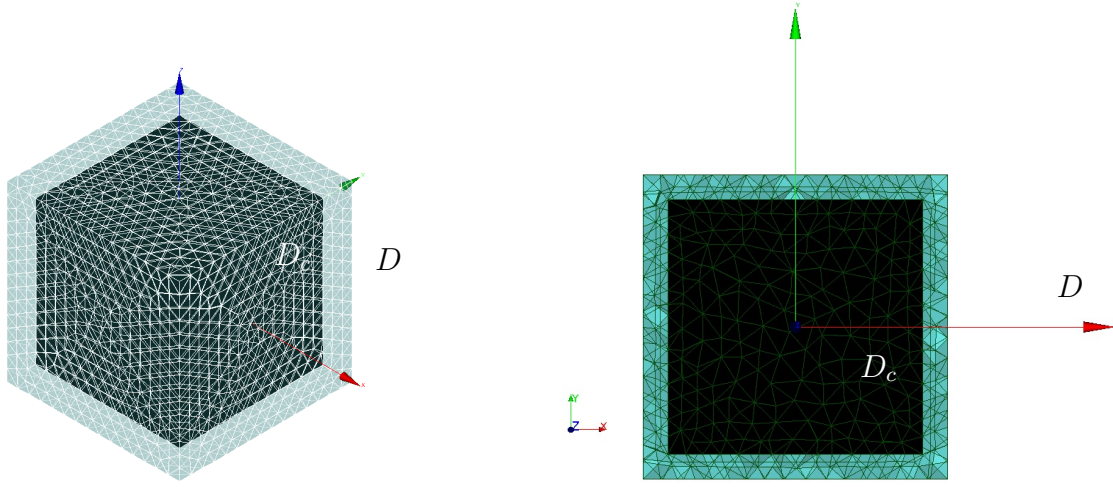
□

3.5. VALIDATION NUMÉRIQUE

Dans cette section on confirme numériquement les prédictions théoriques de ce chapitre. Pour cette raison on considère un cas test analytique. Comme dans le chapitre 2, les calculs sont réalisés avec le logiciel Code_Carmel3D [<http://code-carmel.univ-lille1.fr>].

3.5.1. Solution régulière

On résout la formulation totalement discrétisée (3.2.33) sur l'intervalle temporel $(0, T)$ et le domaine spatial $D = (-1.2, 1.2)^3$, où le domaine inducteur est donné par $D_c = (-1, 1)^3$, comme indiqué sur la Figure 3.3. On fixe $\mu \equiv 1$ dans D et $\sigma \equiv 0$ dans $D \setminus D_c$. On définit

FIGURE 3.3. Configuration et maillage des domaines D et D_c .

	Test 1	Test 2	Test 3
$\sigma _{D_c}$	1	1	10^3
(h_1, τ_1)	(0.2653, 0.0590)	(0.2653, 0.0304)	(0.1366, 0.125)
(h_2, τ_2)	(0.2134, 0.0474)	(0.2134, 0.0304)	(0.1366, 0.0833)
(h_3, τ_3)	(0.1874, 0.0416)	(0.1874, 0.0304)	(0.1366, 0.0625)
(h_4, τ_4)	(0.1513, 0.0333)	(0.1513, 0.0304)	(0.1366, 0.0417)
(h_5, τ_5)	(0.1366, 0.0304)	(0.1366, 0.0304)	(0.1366, 0.0313)

TABLE 3.1. Paramètres correspondant aux trois tests effectués.

ensuite la solution analytique (\mathbf{A}, φ) de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ (3.2.1) par :

$$\mathbf{A}(t, x, y, z) = \sin(2\pi t) \operatorname{rot} \begin{pmatrix} f(x, y, z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dans } D \times (0, T),$$

où

$$f(x, y, z) = \begin{cases} (x^2 - 1)^4 (y^2 - 1)^4 (z^2 - 1)^4 & \text{dans } D_c, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $\varphi \equiv 0$ dans D_c . On déduit donc le terme source \mathbf{J}_s de l'équation (3.2.1). Dans ce cas, on remarque que le support de \mathbf{J}_s est le domaine conducteur tout entier D_c . Pour les calculs qui suivent, on utilise une discrétisation uniforme en temps et un maillage \mathcal{T}_{hm} de D régulier raffiné de façon homogène.

On analyse les taux de convergence attendus d'après la résolution numérique à la fois en espace et en temps comme aussi le comportement de l'estimateur. Dans la Tableau 3.1 on spécifie les paramètres correspondant aux Test 1, Test 2 et Test 3.

Test 1

Dans le Test 1, on fixe $\sigma|_{D_c} = 1$ et on considère cinq maillages : on dénote les différentes valeurs de la taille h des maillages par $h_1 > h_2 > h_3 > h_4 > h_5$. La discrétisation en temps

est uniforme et le pas de temps τ_i est proportionnel à la valeur de h_i , $1 \leq i \leq 5$. La Figure (3.4a) montre le graphe log-log de l'erreur $e(t_N)$, définie en (3.3.57), en fonction de la taille du maillage h . Comme attendu théoriquement, on voit qu'en raffinant en espace et en temps la solution numérique $(\mathbf{A}_h^n, \varphi_h^n)$ converge à l'ordre 1 vers la solution analytique (\mathbf{A}, φ) . Pour illustrer le Théorème 3.3.12, on calcule l'estimateur η^N défini en (3.2.48). Sur la Figure (3.4b) on montre l'indice d'efficacité, défini par :

$$E_G = \frac{e(t_N)}{\eta^N}.$$

L'indice d'efficacité converge vers une constante lorsque le couple (h, τ) tend vers zéro. En se rappelant que les termes qui apparaissent à droite de l'inégalité de fiabilité (3.3.58) correspondent aux termes d'ordre supérieur, la fiabilité de l'estimateur est respectée.

Test 2

Dans le Test 2, on montre la fiabilité de l'estimateur spatial. On fixe $\sigma_{|D_c} = 1$, on considère les mêmes maillages que dans le Test 1 et on choisit le même pas de temps pour tous les calculs ($\tau = 0.0304$) de telle sorte que l'erreur spatiale soit significativement plus importante que l'erreur temporelle (on voit qu'en diminuant le pas de temps, l'erreur reste constante). La Figure (3.4c) montre que, en utilisant l'échelle log-log, l'erreur $e(t_N)$ converge à l'ordre 1 en raffinant la taille du maillage h , comme attendu théoriquement. De plus, si l'on introduit l'indice d'efficacité spatial par :

$$E_S = \frac{e(t_N)}{\left(\sum_{m=1}^N \tau_m (\eta_h^m)^2 \right)^{1/2}},$$

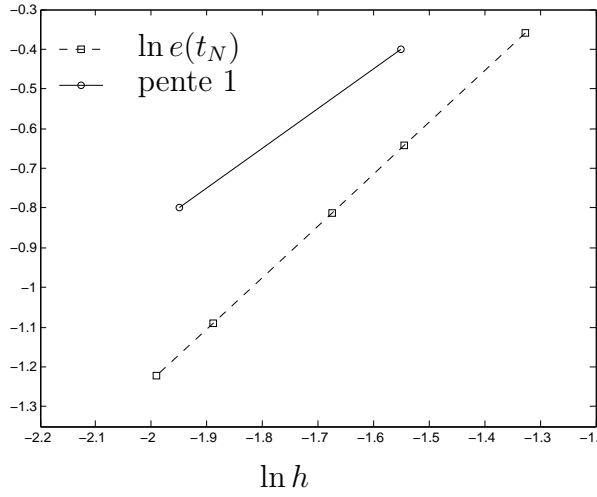
on voit sur la Figure (3.4d) qu'il converge vers une constante lorsque h tend vers zéro. On vérifie alors l'équivalence entre l'erreur et l'estimateur spatial.

Test 3

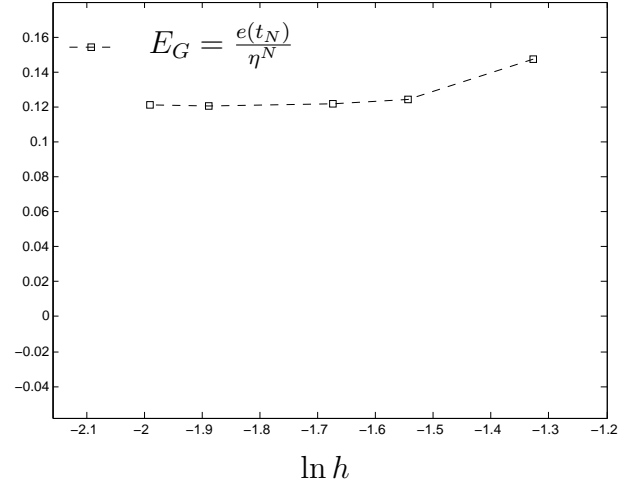
Similairement, dans le Test 3 on montre le comportement de l'estimateur temporel. On fixe $\sigma_{|D_c} = 10^3$ afin d'augmenter l'erreur en temps et on choisit le maillage de taille $h = 0.1366$. Sur la Figure (3.4e) on voit que, en utilisant l'échelle log-log, l'erreur $e(t_N)$ converge à l'ordre 1 en raffinant le pas de temps τ . De plus, si l'on introduit l'indice d'efficacité en temps par :

$$E_T = \frac{e(t_N)}{\left(\sum_{m=1}^N (\eta_\tau^m)^2 \right)^{1/2}},$$

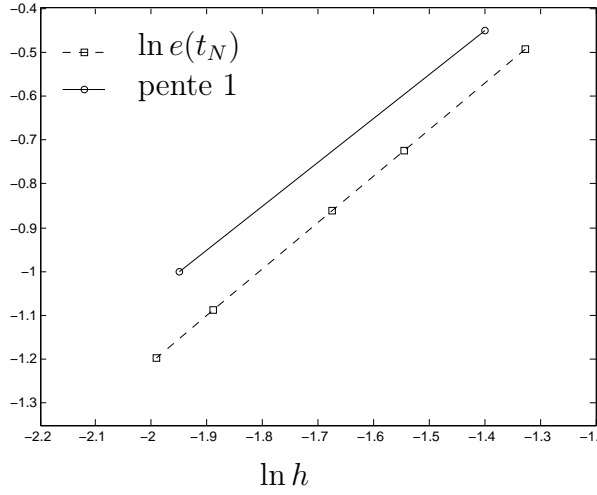
on voit sur la Figure (3.4f) qu'il converge vers une constante lorsque τ tend vers zéro. On confirme donc l'équivalence entre l'erreur et l'estimateur temporel.



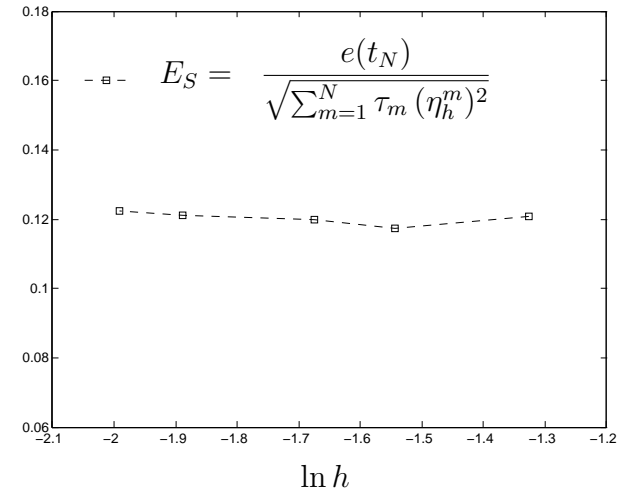
(a) Convergence de l'erreur : raffinement par rapport au couple (h, τ) .



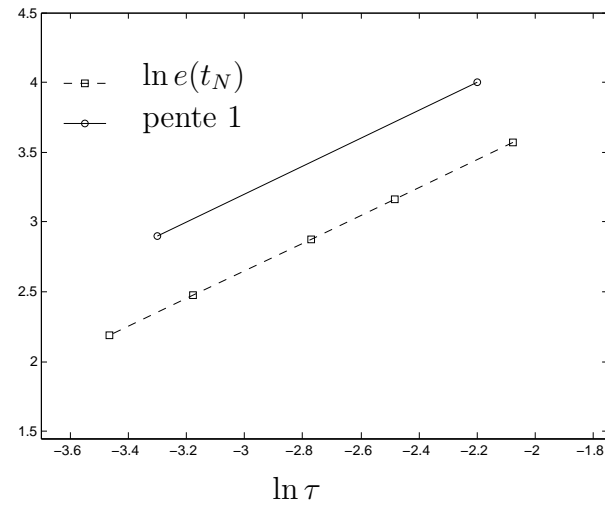
(b) Indice d'efficacité global E_G en raffinant le couple (h, τ) .



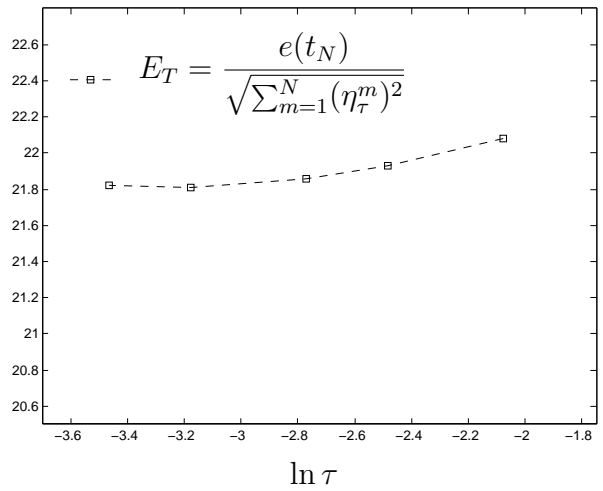
(c) Convergence spatiale de l'erreur en raffinant h .



(d) Indice d'efficacité spatial E_S en raffinant h .



(e) Convergence temporelle de l'erreur : raffinement par rapport à τ .



(f) Indice d'efficacité temporel E_T en raffinant τ .

FIGURE 3.4. Convergence de l'erreur $e(t_N)$ (Figures (3.4a), (3.4c), (3.4e)), et des indices d'efficacité (Figures (3.4b), (3.4d), (3.4f)).

Efficacité locale

Pour illustrer l'efficacité locale du Théorème 3.4.7, on montre sur la Figure 3.5 le coefficient d'efficacité défini par :

$$\text{eff}_h = \max_{T \in \mathcal{T}_{hN}} \frac{\eta_{h,T}^N}{e_{\omega_T}^N}, \text{ où}$$

$$e_{\omega_T}^N = \left\| \sigma^{1/2} \frac{\mathbf{E}^N - \mathbf{E}^{N-1}}{\tau_N} \right\|_{\widetilde{\omega_T}} + \|\mu^{-1/2} \text{rot } \mathbf{e}_{A,h\tau}(t_N)\|_{\widetilde{\omega_T}} + \sigma_{\omega_T, \max}^{1/2} \|\sigma^{1/2} \mathbf{E}^N\|_{\widetilde{\omega_T}}.$$

On voit que, dans ce cas, sa valeur est d'environ 0.75 et cette constante ne varie pas en raffinant. L'efficacité locale est donc assurée.

Enfin, sur la Figure 3.6 on montre une comparaison entre la distribution locale de l'erreur $e_{\omega_T}^N$ et celle de l'estimateur $\eta_{h,T}^N$. On considère le plan $z = 0$ pour quatre raffinements du maillage. On remarque une bonne correspondance entre les zones où l'erreur et l'estimateur sont les plus élevés. Cela confirme la pertinence de l'estimateur dans le but du raffinement local.

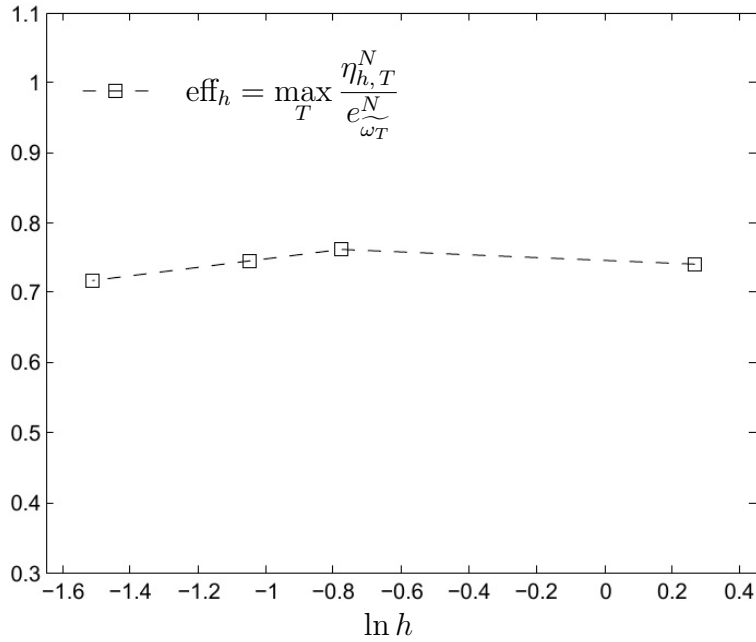


FIGURE 3.5. eff_h par rapport à h .

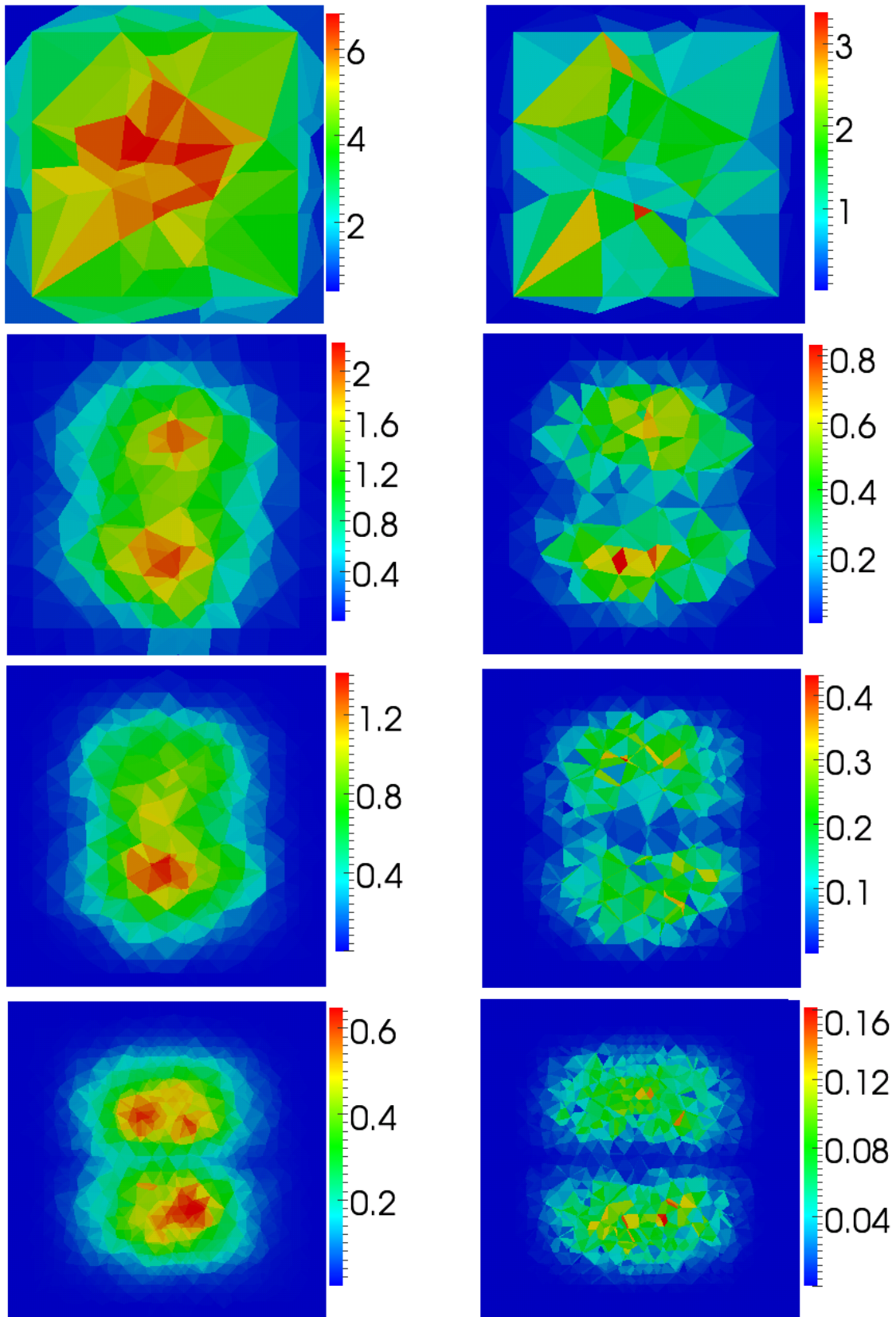


FIGURE 3.6. Efficacité locale de l'estimateur pour quatre maillages. A gauche : distribution de l'erreur. A droite : distribution de l'estimateur. Du haut vers le bas : maillages de plus en plus fins.

3.5.2. Solution singulière

On explore dans cette section le comportement de l'estimateur dans le contexte d'une solution singulière. On considère le même cas test analytique proposé dans [Creusé et. al., 2012] : avec domaine $D = [-2, 5] \times [-2, 2] \times [-2, 2]$ et $D_c = [2, 4] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$, or ici, nous avons fait varier la perméabilité : $\mu = 1$ dans D_c et $\mu = 1000$ dans $D \setminus D_c$ et la conductivité est fixée à $\sigma = 1$ dans D_c . La densité de courant \mathbf{J}_s définie en $D_J = [-1, 1]^3$ est la même que celle déjà considérée dans la section précédente 3.5.1, elle induit un courant dans D_c . A cause de la discontinuité de μ entre D_c et D , même si on ne connaît pas la solution analytique explicitement, on s'attend à voir des singularités près des sommets et des arêtes de D_c [Costabel et. al., 2003, Théorème 3.5], étant donné que $\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}$ appartient à

$$X_T(D, \mu) := \{\mathbf{E} \in H(\text{rot}, D) : \text{div}(\mu \mathbf{E}) \in L^2(D) \text{ et } \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B\}.$$

En conséquence on souhaite vérifier que l'estimateur détecte bien ces zones.

Tout d'abord on montre sur la Figure 3.7 l'évolution en échelle log-log de η^N en fonction de la taille du maillage h pour trois raffinements. Comme attendu, le taux de convergence est inférieur à celui du cas régulier (à savoir 0.8 au lieu de 1 pour les deux derniers maillages), et l'estimateur converge vers zéro. Au niveau local, on voit la distribution de l'estimateur sur plusieurs sections du domaine de la Figure 3.8 à la Figure 3.12. L'estimateur est en effet plus élevé près des sommets et des arêtes du domaine conducteur D_c , comme attendu.

En conclusion, cet estimateur semble bien adapté pour être utilisé dans le contexte d'une stratégie de raffinement adaptatif.

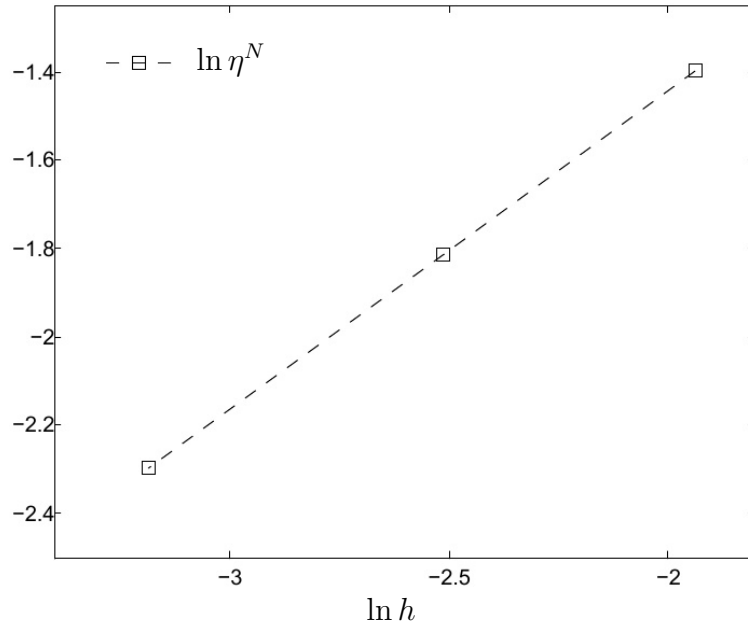


FIGURE 3.7. η^N en fonction de h pour le cas test d'une solution singulière.

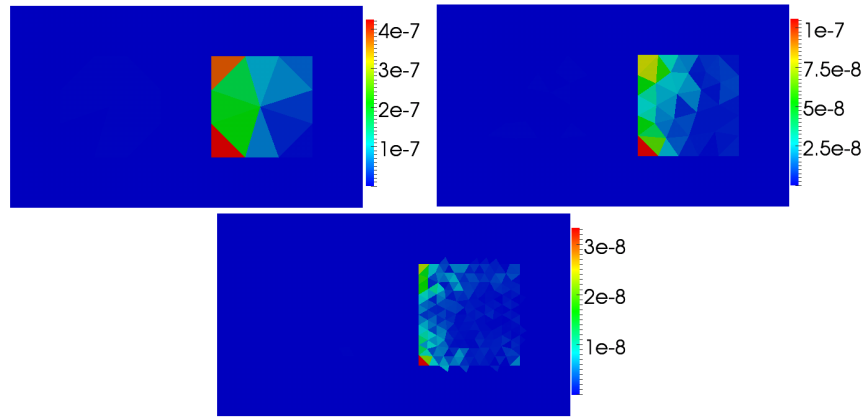


FIGURE 3.8. Distribution de l'estimateur avec une solution singulière. Section $z = -1$.

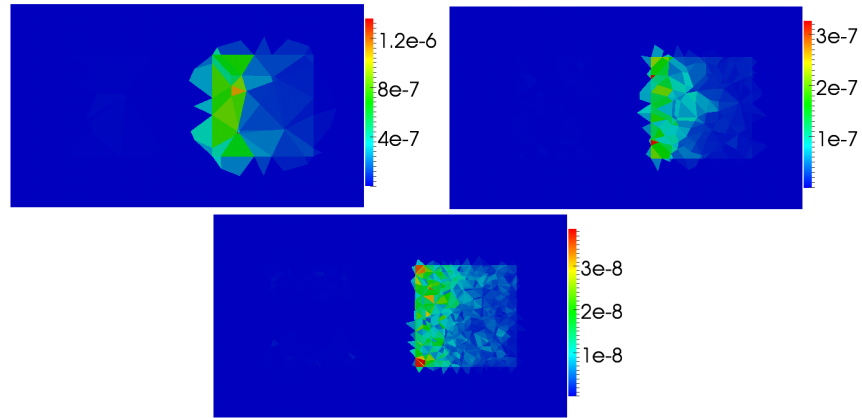


FIGURE 3.9. Distribution de l'estimateur avec une solution singulière. Section $z = -0.5$.

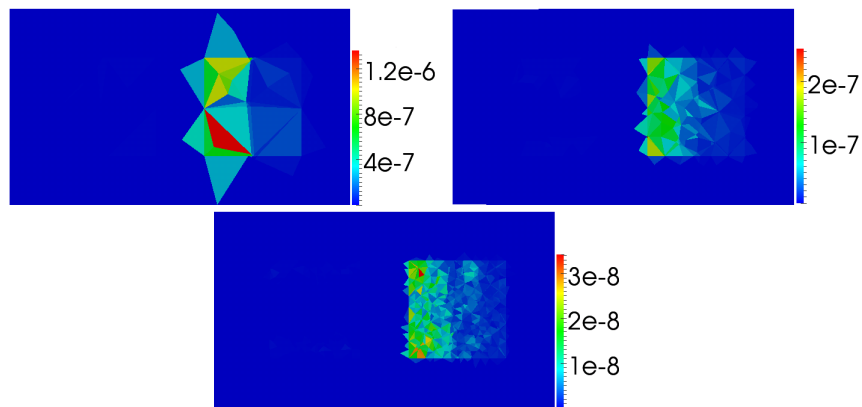


FIGURE 3.10. Distribution de l'estimateur avec une solution singulière. Section $z = 0$.

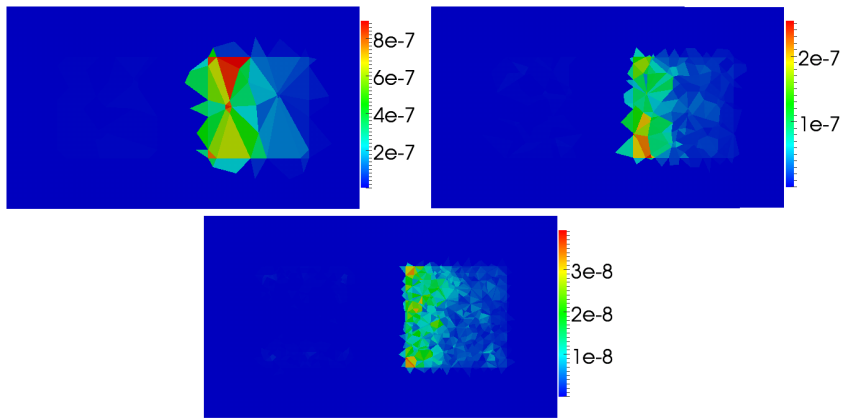


FIGURE 3.11. Distribution de l'estimateur avec une solution singulière. Section $z = 0.5$.

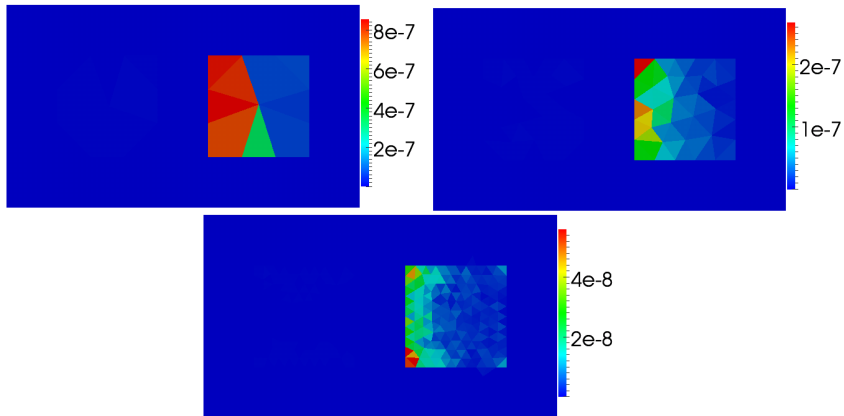


FIGURE 3.12. Distribution de l'estimateur avec une solution singulière. Section $z = 1$.

Chapitre 4

APPLICATIONS INDUSTRIELLES

Dans ce dernier chapitre nous allons mettre en œuvre les trois estimateurs développés dans les chapitres 2 et 3 pour des cas tests plus représentatifs de problèmes industriels. Le but est de pouvoir les utiliser pour mettre en place des algorithmes de remaillage adaptatif en espace-temps. Concernant le problème magnétoharmonique, les résultats obtenus seront comparés aux estimateurs résiduels développés par Z. Tang et implémentés dans Code_Carmel3D. La section 4.1 est consacrée au problème en magnétoharmonique et la section 4.2 au problème magnétodynamique temporel.

4.1. RÉGIME HARMONIQUE

Nous avons développé, dans le chapitre 2, deux estimateurs de type équilibré pour des problèmes en magnétoharmonique basés sur les formulations $\mathbf{A} - \varphi$ et $\mathbf{T} - \Omega$. A la fin du chapitre 2 nous les avons validés sur un cas test académique. Ici on souhaite les utiliser pour détecter les zones de maillage à raffiner afin d'améliorer la solution numérique.

Si on se focalise sur la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ et sur l'estimation de son erreur d'approximation, la différence entre les deux estimateurs présentés réside dans le fait que l'estimateur $\eta_{glob, H_{sh}}$ (section 2.3.2) est construit à partir de la formulation duale $\mathbf{T} - \Omega$ et l'estimateur $\eta_{loc, flux}$ (section 2.4.2) est construit à partir d'une technique de reconstruction locale des flux associé à la résolution d'un problème auxiliaire en magnétostatique. Puisque $\eta_{glob, H_{sh}}$ nécessite la résolution d'un second problème global, il estime, par construction, l'erreur d'approximation e des deux résolutions, définie par : $e = \sqrt{e_{A, \varphi}^2 + e_{T, \Omega}^2}$, où $e_{A, \varphi}$ dénote l'erreur en $\mathbf{A} - \varphi$ et $e_{T, \Omega}$ l'erreur en $\mathbf{T} - \Omega$. A l'inverse, l'estimateur $\eta_{loc, flux}$ nécessite uniquement le calcul de la solution en $\mathbf{A} - \varphi$ pour être construit et n'estime donc que l'erreur $e_{A, \varphi}$. Afin de construire dans Code_Carmel3D les deux champs admissibles intervenant dans l'estimateur, on a mis en place une procédure qui est détaillée en annexe A. On remarque que la résolution du problème magnétostatique pour obtenir le champ magnétique admissible a été effectuée le plus possible avec les outils du code à disposition. Bien que cela introduise une erreur numérique, elle s'avère négligeable par rapport aux termes de l'estimateur, comme on va le constater dans cette section.

La formulation $\mathbf{A} - \varphi$ assure au sens fort la conservation de la composante tangentielle du champ \mathbf{E} (et par conséquent de la composante normale de \mathbf{B}). A l'inverse, la formulation

$\mathbf{T} - \Omega$ assure au sens fort la conservation de la composante tangentielle du champ \mathbf{H} (et par conséquent de la composante normale de \mathbf{J}_{ind}). Le principe des estimateurs résiduels est basé sur les évaluations de ces quantités aux interfaces des éléments. Dans la thèse de Z. Tang [Tang, 2012] et dans [Creusé et. al., 2012, 2013], deux estimateurs résiduels ont été proposés : le premier pour la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ et le second pour la formulation $\mathbf{T} - \Omega$. On les notera respectivement $\eta_{rés,A\varphi}$ et $\eta_{rés,T\Omega}$. On mène alors une comparaison de ces quatre estimateurs existants.

Dans le Tableau 4.1 on recense les formulations utilisées, l'estimateur associé, la notation que l'on utilisera dans ce chapitre, l'erreur estimée et les références pour les détails des définitions.

formulation	type estimateur	notation	erreur estimée	définition
$\mathbf{A} - \varphi$ et $\mathbf{T} - \Omega$	équilibré	$\eta_{glob,H_{sh}}$	e	section 2.3.2
$\mathbf{A} - \varphi$	équilibré	$\eta_{loc,flux}$	$e_{A,\varphi}$	section 2.4.2
$\mathbf{A} - \varphi$	résiduel	$\eta_{rés,A\varphi}$	$e_{A,\varphi}$	[Creusé et. al., 2012]
$\mathbf{T} - \Omega$	résiduel	$\eta_{rés,T\Omega}$	$e_{T,\Omega}$	[Creusé et. al., 2013]

TABLE 4.1. Récapitulatif des quatre estimateurs étudiés en magnéto-harmonique.

Dans les deux prochaines sections on utilise ces estimateurs dans le cas test d'une bobine entre deux plaques et dans celui du Team Workshop 7.

4.1.1. Bobine entre deux plaques

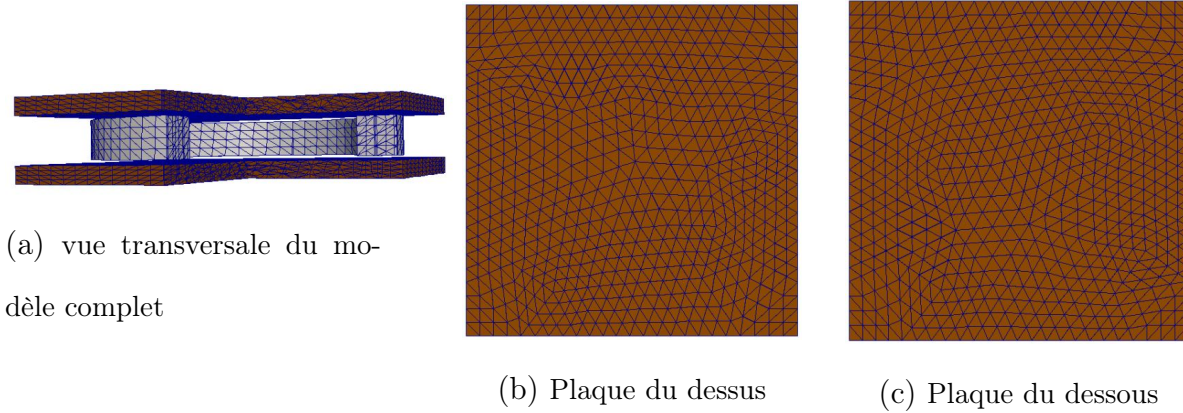


FIGURE 4.1. Modèle d'une bobine entre deux plaques. Exemple du maillage avec 286272 éléments. (a) : section du modèle complet. (b) : maillage de la plaque du dessus, raffinée de façon homogène. (c) : maillage de la plaque du dessous, raffinée de façon homogène.

On souhaite tout d'abord mener une étude similaire à celle proposée dans [Tang et. al., 2013]. Celle-ci compare, dans un cadre *magnétostatique*, l'estimateur résiduel pour la formulation en \mathbf{A} , l'estimateur résiduel pour la formulation en Ω et l'estimateur équilibré construit à partir de ces deux formulations. Dans cette étude, dans le cadre *magnétoharmonique*, l'estimateur résiduel pour la formulation $\mathbf{A} - \varphi$, $\eta_{rés,A\varphi}$, l'estimateur résiduel pour la formulation $\mathbf{T} - \Omega$,

$\eta_{rés,T\Omega}$, et l'estimateur équilibré $\eta_{glob,H_{sh}}$, issu des ces deux formulations duales, sont comparés. De plus, on effectue également une comparaison avec l'estimateur équilibré pour la formulation $\mathbf{A} - \varphi$, $\eta_{loc,flux}$. Même si l'on ne dispose pas de résultats d'efficacité *locale* pour cet estimateur, on pourra néanmoins étudier numériquement son comportement local.

On considère le cas test proposé dans [Leonard et Rodger, 1988] : il s'agit d'une bobine excitatrice entre deux plaques conductrices, comme représenté sur la Figure 4.1. On choisit le nombre de spires de la bobine égal à 700, la conductivité σ des deux plaques égale à 3.28×10^7 S/m et la perméabilité $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m.

On fixe l'intensité de courant à 1 A et la fréquence f à 50 Hz. Dans un premier temps, on regarde le comportement global des estimateurs. On effectuera ensuite une étude qualitative locale des différents estimateurs.

I) Estimation de l'erreur globale

On choisit quatre maillages réguliers raffinés de façon homogène, ayant respectivement 4473, 35784, 286272 et 2290176 éléments. La Figure 4.2 montre les pertes Joule et l'énergie magnétique pour les quatre maillages étudiés en fonction du nombre d'éléments des maillages. On rappelle que les pertes Joule P sont données par :

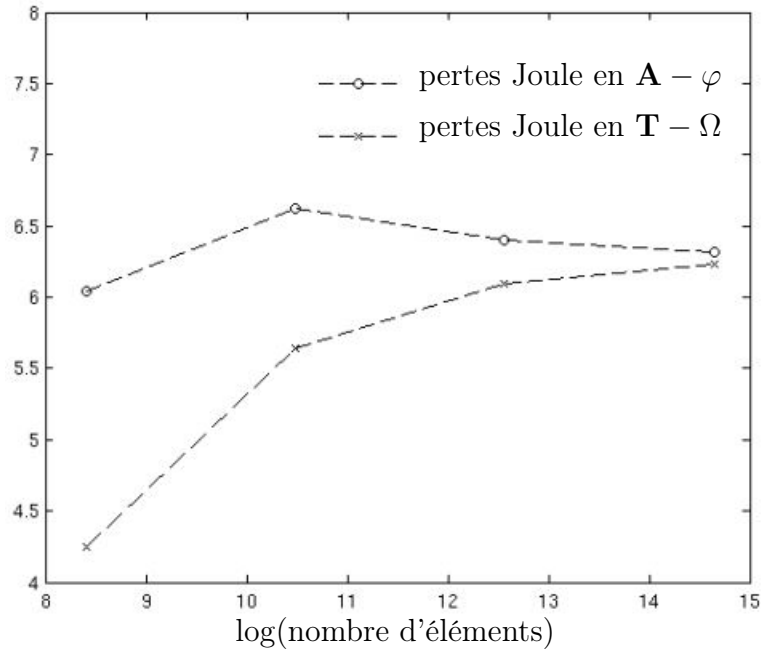
$$P = \int_{D_c} \frac{1}{\sigma} |\mathbf{J}_{ind}|^2,$$

et l'énergie magnétique E par :

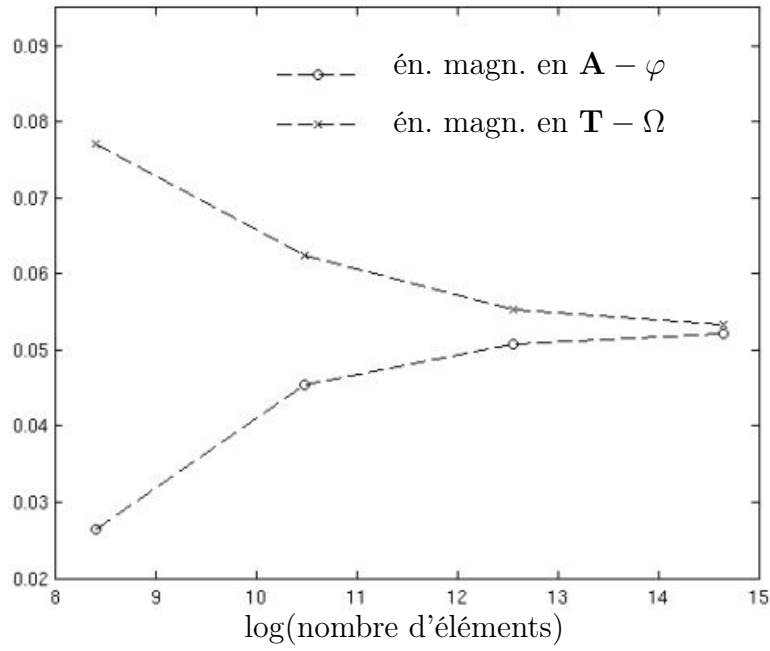
$$E = \int_D \frac{1}{\mu} |\mathbf{B}|^2.$$

On remarque que la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ sur-estime les pertes Joule et sous-estime l'énergie magnétique, à l'inverse la formulation $\mathbf{T} - \Omega$ sous-estime les pertes Joule et sur-estime l'énergie magnétique, ce qui correspond au comportement numérique normalement observé pour ces deux formulations, pour des éléments de réflexion à ce sujet voir par exemple [Li et al., 1994b]. D'après ces deux graphes on voit qu'en raffinant, les deux solutions convergent vers la même solution.

Sur la Figure 4.3, on a tracé le graphe log-log de la convergence des quatre estimateurs. On remarque que, pour les quatre estimateurs, on trouve les pentes de convergence attendues lors d'une étude d'un cas régulier, à savoir une pente de $-1/3$ en fonction des degrés de libertés [Ern et Guermond, 2002], étant donné que $DoF = O(1/h^3)$. On rappelle que les valeurs obtenues des estimateurs résiduels ne sont pas à prendre en compte pour une éventuelle comparaison avec l'erreur *exacte* car ils bornent l'erreur à un facteur multiplicatif près. Inversement, l'estimateur équilibré $\eta_{glob,H_{sh}}$ donne l'ordre de grandeur de l'erreur *exacte*, comme cela a été démontré au chapitre 2, voir (2.3.32) à la page 37, qui prouve son équivalence avec l'erreur avec des constantes connues. En ce qui concerne l'estimateur équilibré $\eta_{loc,flux}$, pour la fiabilité les constantes sont connues, on peut donc considérer que l'ordre de grandeur est proche de l'erreur *exacte*. En effet, on peut voir, sur la Figure 4.3, qu'il est du même ordre de grandeur que l'estimateur $\eta_{glob,H_{sh}}$.



(a) pertes Joule



(b) énergie magnétique

FIGURE 4.2. Pour les quatre maillages étudiés et les formulations $\mathbf{A} - \varphi$ et $\mathbf{T} - \Omega$, calcul des pertes Joule (a) et de l'énergie magnétique (b).

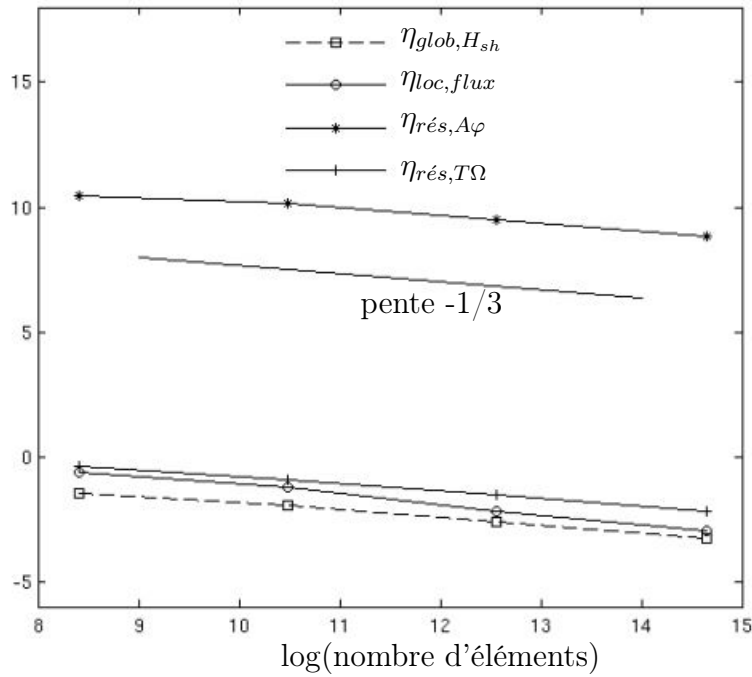


FIGURE 4.3. Convergence des estimateurs lorsque l'on raffine de façon homogène. Maillages avec nombre d'éléments : 4473, 35784, 286272, 2290176.

II) Etude qualitative

Dans ce paragraphe on étudie le cas où on maille de façon régulière, mais différente, les deux plaques. La plaque du dessous est maillée plus finement (environ 12000 éléments) que la plaque du dessus (environ 3000 éléments), comme le montre la Figure 4.4. De plus, pour la plaque du dessous, un coin est maillé plus finement, comme montré sur la Figure 4.4c. On veut étudier le comportement local des quatre estimateurs dans ce cas assez régulier. On introduira ensuite un défaut dans la plaque du dessous.

Bobine entre deux plaques : cas sans défaut

La Figure 4.5 montre les cartes des estimateurs pour la bobine et les deux plaques. Les estimateurs équilibrés et l'estimateur résiduel $\eta_{rés, T\Omega}$ montrent une distribution similaire, dans la bobine et les deux plaques. Par contre l'estimateur résiduel $\mathbf{A} - \varphi$ se concentre sur les plaques, ce qui est attendu d'après sa construction : il mesure principalement le saut des composantes normales de la densité de courant.

La Figure 4.6 concerne la plaque au dessus de la bobine. Les Figures 4.6a et 4.6b présentent la distribution de la densité des courants induits et les Figures 4.6d à 4.6f, les distributions des estimateurs. On voit que les quatre estimateurs détectent les mêmes zones à raffiner où les densités de courant sont les plus importantes.

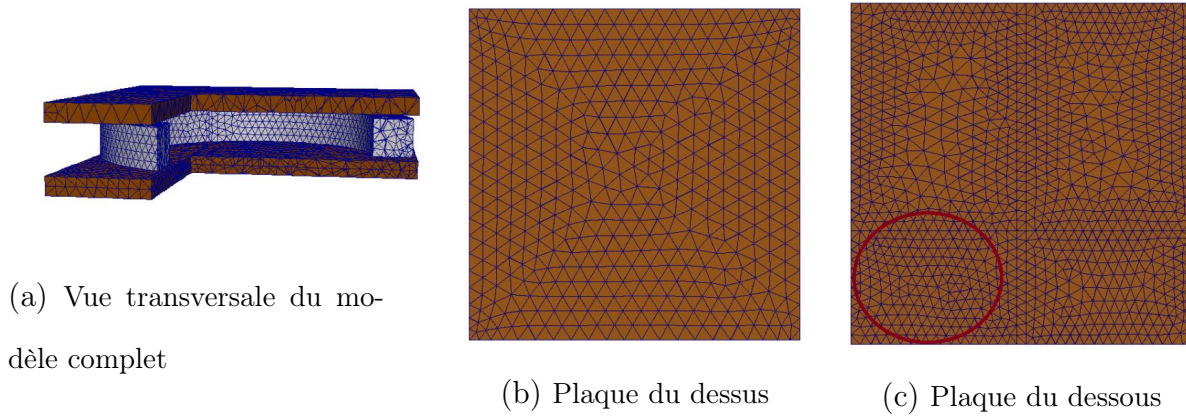


FIGURE 4.4. Modèle d'une bobine entre deux plaques. Exemple du maillage avec 195347 éléments, utilisé pour l'étude qualitative du paragraphe II). (a) : section du modèle complet. (b) : maillage de la plaque du dessus (3000 éléments), raffinée de façon homogène. (c) : maillage de la plaque du dessous (12000 éléments), raffinée un peu plus finement sur le coin de gauche.

Similairement, la Figure 4.7 concerne la plaque en dessous de la bobine. Les Figures 4.7a et 4.7b représentent les distributions de la densité de courants induits et les Figures 4.7d à 4.7f les distributions des estimateurs. On notera que les quatre estimateurs détectent la zone où la plaque est maillée plus finement.

Pour ce cas test, les quatre estimateurs présentent une distribution de l'erreur locale sensiblement équivalente. En vue d'un algorithme adaptatif les deux estimateurs résiduels sont conseillés pour faire du remaillage, en étant moins coûteux en temps de calcul, et on peut envisager l'utilisation des estimateurs équilibrés comme critère d'arrêt.

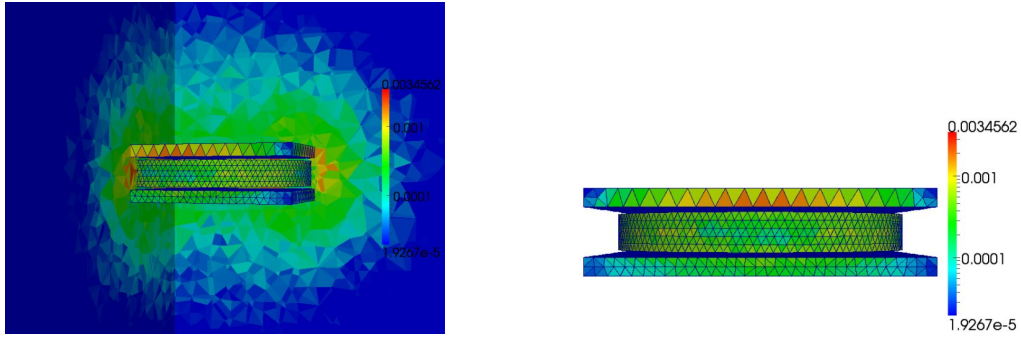
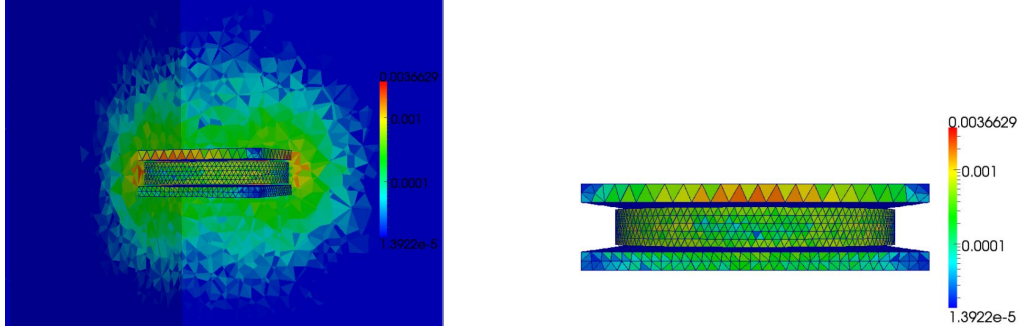
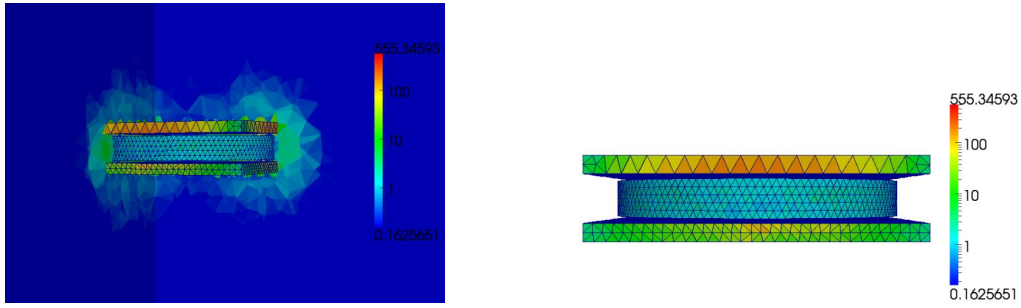
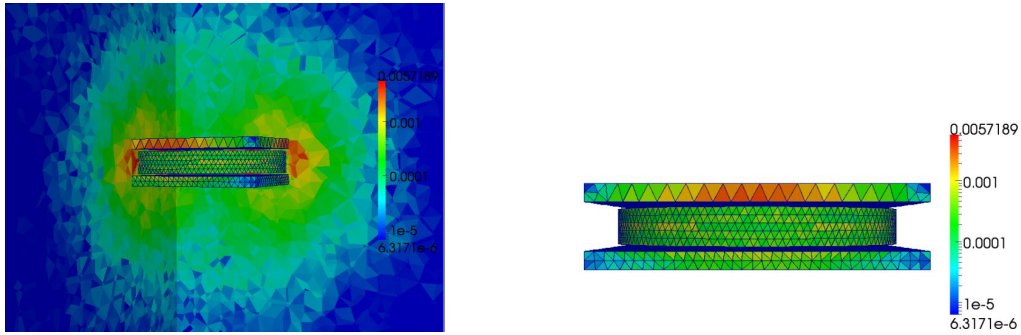
(a) Estimateur équilibré $\eta_{glob, H_{sh}}$ (b) Estimateur équilibré $\eta_{loc, flux}$ (c) Estimateur résiduel $\mathbf{A} - \varphi \eta_{rés, A\varphi}$ (d) Estimateur résiduel $\mathbf{T} - \Omega \eta_{rés, T\Omega}$

FIGURE 4.5. Cartes des estimateurs dans le domaine tout entier (colonne de gauche) et dans la bobine et les deux plaques conductrices (colonne de droite) pour le maillage avec 195347 éléments.

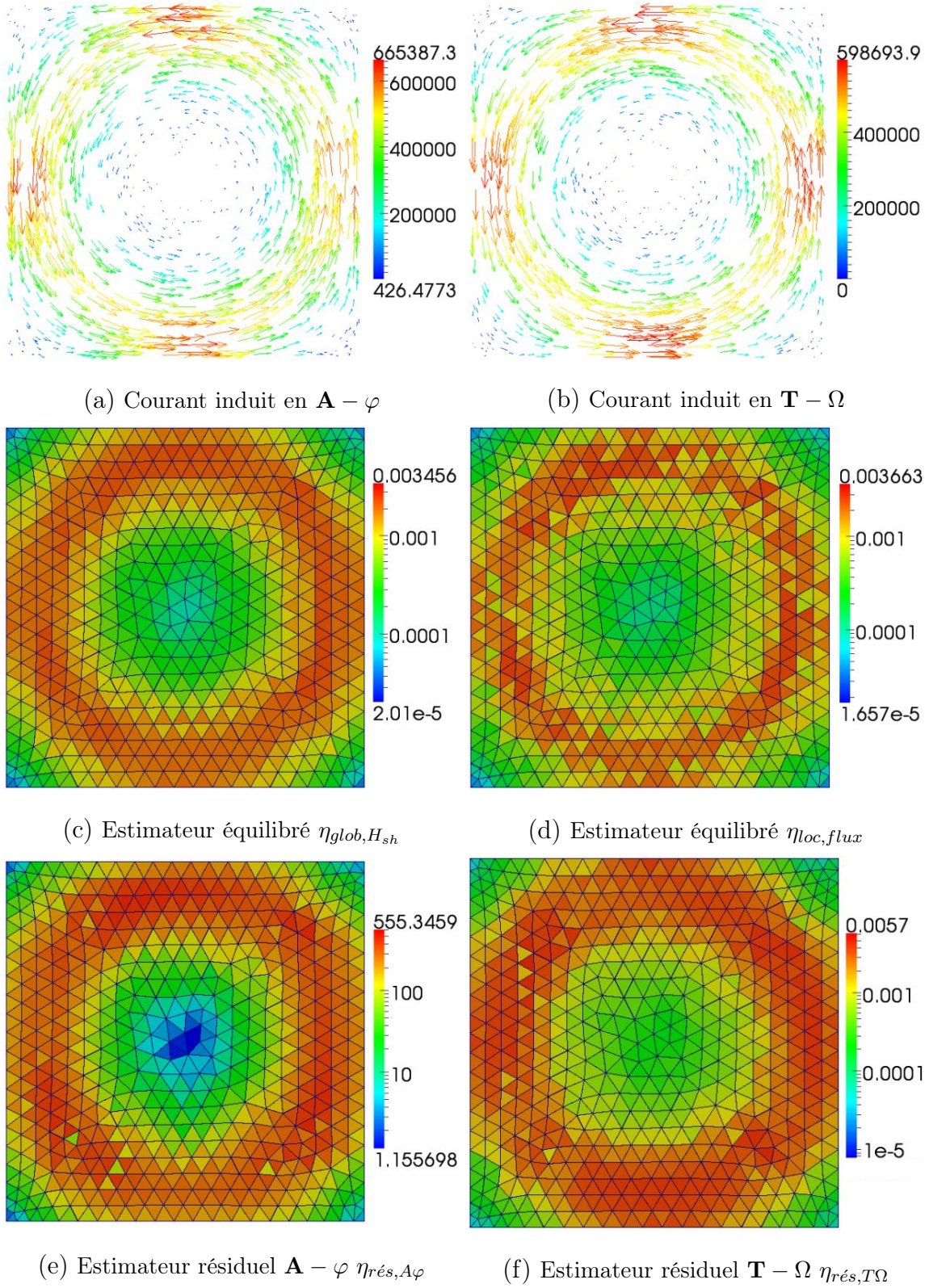


FIGURE 4.6. Plaque située au dessus de la bobine. (a)-(b) : courants induits calculés par les deux formulations. (c)-(f) : cartes d'erreurs des quatre estimateurs.

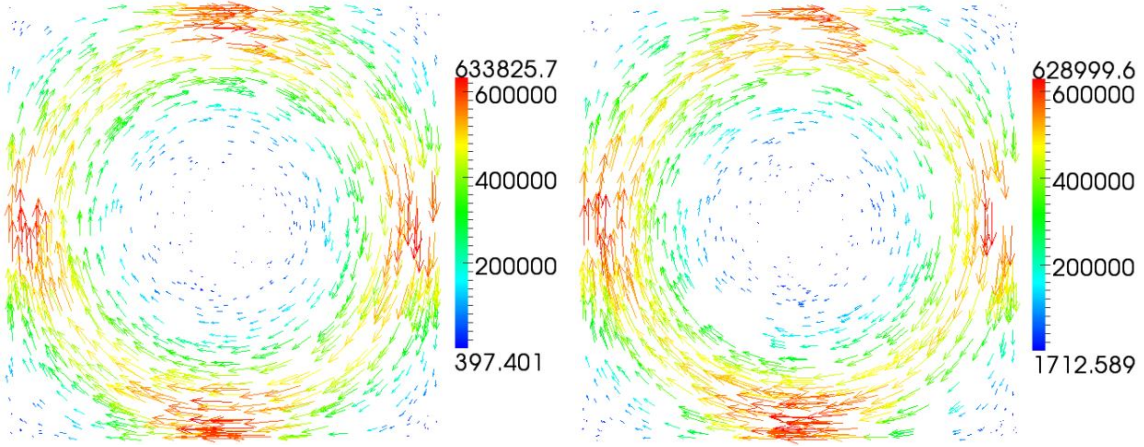
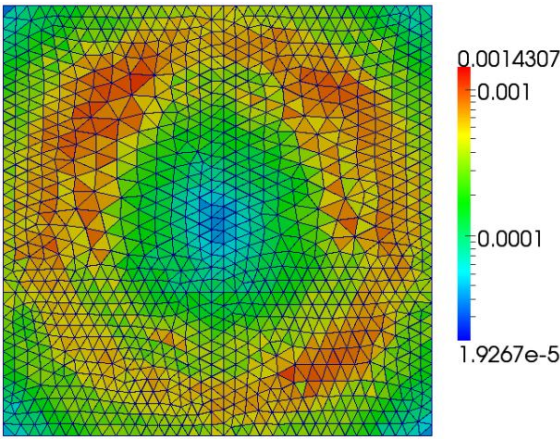
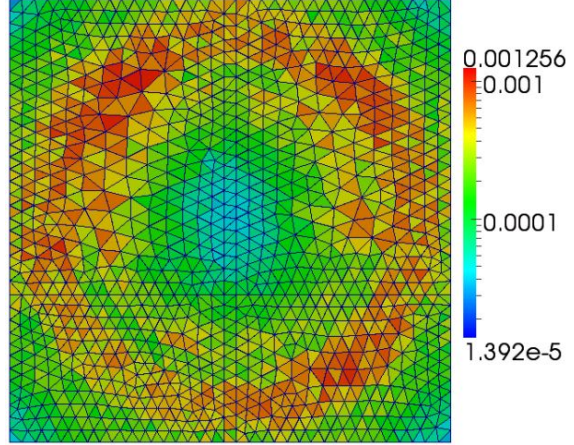
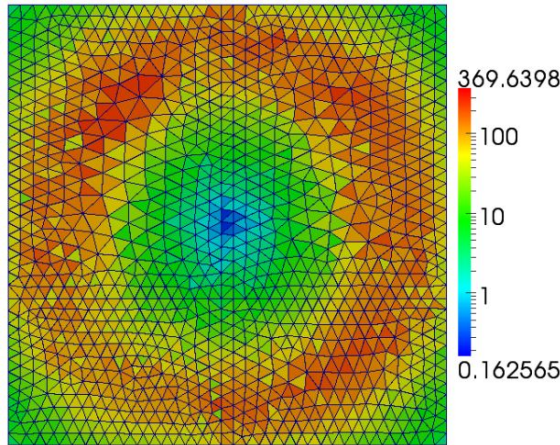
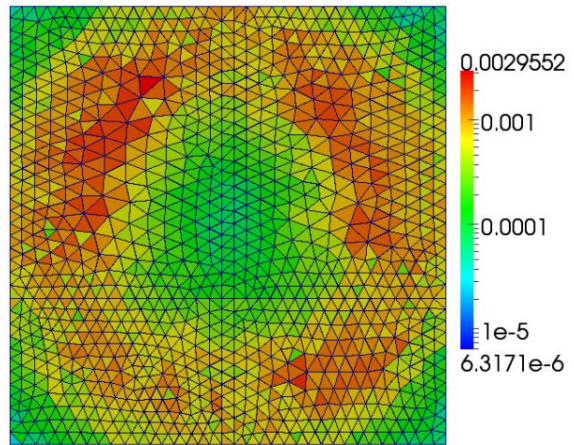
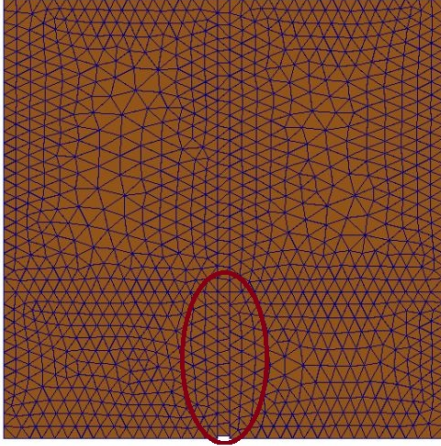
(a) Courant induit en $\mathbf{A} - \varphi$ (b) Courant induit en $\mathbf{T} - \Omega$ (c) Estimateur équilibré $\eta_{glob, H_{sh}}$ (d) Estimateur équilibré $\eta_{loc, flux}$ (e) Estimateur résiduel $\mathbf{A} - \varphi \eta_{rés, A\varphi}$ (f) Estimateur résiduel $\mathbf{T} - \Omega \eta_{rés, T\Omega}$

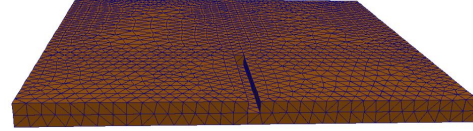
FIGURE 4.7. Plaque située au dessous de la bobine. (a)-(b) : courants induits calculés par les deux formulations. (c)-(f) : cartes des quatre estimateurs.

Bobine entre deux plaques : cas avec défaut

Afin de voir le comportement des estimateurs en présence d'une perturbation au niveau de la densité de courant, on considère une rainure de section carrée au milieu de la plaque située au dessous de la bobine, comme indiqué sur la Figure 4.8.



(a) plaque avec rainure



(b) zoom sur la rainure

FIGURE 4.8. Maillage pour la plaque située en dessous de la bobine lorsqu'on introduit une rainure de section carrée au milieu.

La Figure 4.9 montre les cartes des estimateurs pour la bobine et les deux plaques. L'estimateur équilibré $\eta_{glob, H_{sh}}$ et le résiduel $\mathbf{A} - \varphi \eta_{rés, A\varphi}$ détectent la nécessité de remailler non seulement où les courants induits se créent, mais surtout autour de la rainure. En revanche, sur cette figure, les estimateurs $\eta_{rés, T\Omega}$ et $\eta_{loc, flux}$ sont moins sensibles au défaut.

On regarde alors plus en détail la plaque du dessous, sur la Figure 4.10. Les Figures 4.10a et 4.10b représentent la distribution de la densité des courants induits et les Figures 4.10d à 4.10f les distributions des estimateurs. On observe, bien entendu, que les densités de courant les plus élevées se situent autour de la rainure, où par ailleurs on a les valeurs les plus élevées des estimateurs $\eta_{glob, H_{sh}}$ et $\eta_{rés, A\varphi}$. L'estimateur $\eta_{loc, flux}$ capte aussi l'erreur à proximité de la rainure, mais également dans toute la plaque où les courants sont présents.

On rappelle que la formulation $\mathbf{T} - \Omega$ impose au sens fort la conservation de la composante normale de la densité de courant. Le phénomène est bien visible sur la Figure 4.10f. En effet, on peut observer que l'on n'a pas de valeurs élevées de l'estimateur au niveau de la rainure.

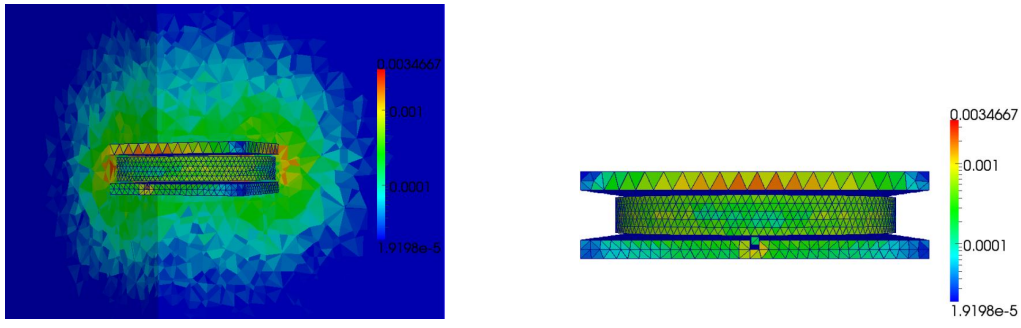
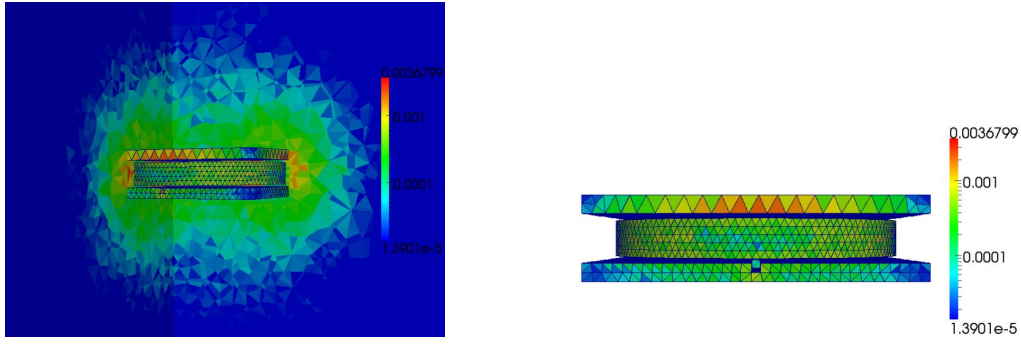
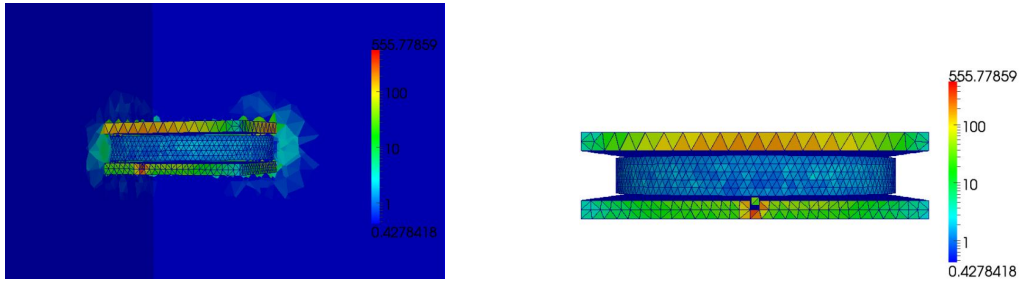
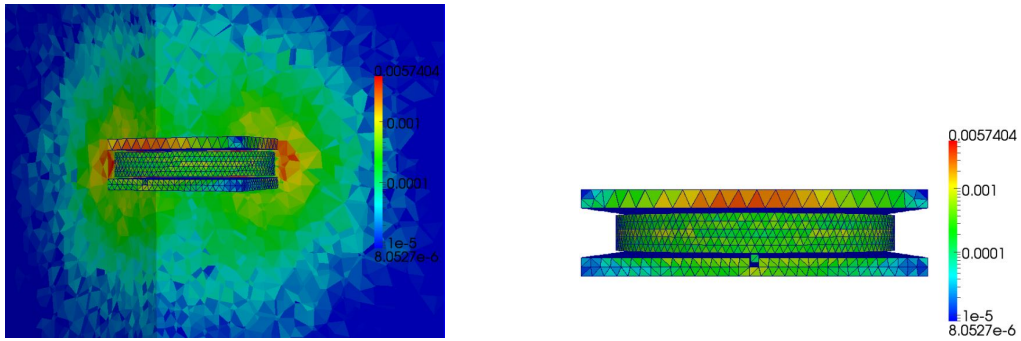
(a) Estimateur équilibré $\eta_{glob, H_{sh}}$ (b) Estimateur équilibré $\eta_{loc, flux}$ (c) Estimateur résiduel $\mathbf{A} - \varphi \eta_{rés, A\varphi}$ (d) Estimateur résiduel $\mathbf{T} - \Omega \eta_{rés, T\Omega}$

FIGURE 4.9. Cartes des estimateurs dans le cas test du maillage avec 195347 éléments et avec un défaut dans la plaque au dessous de la bobine. Dans la colonne de gauche : cartes dans le domaine entier. Colonne de droite : cartes dans la bobine et les deux plaques conductrices.

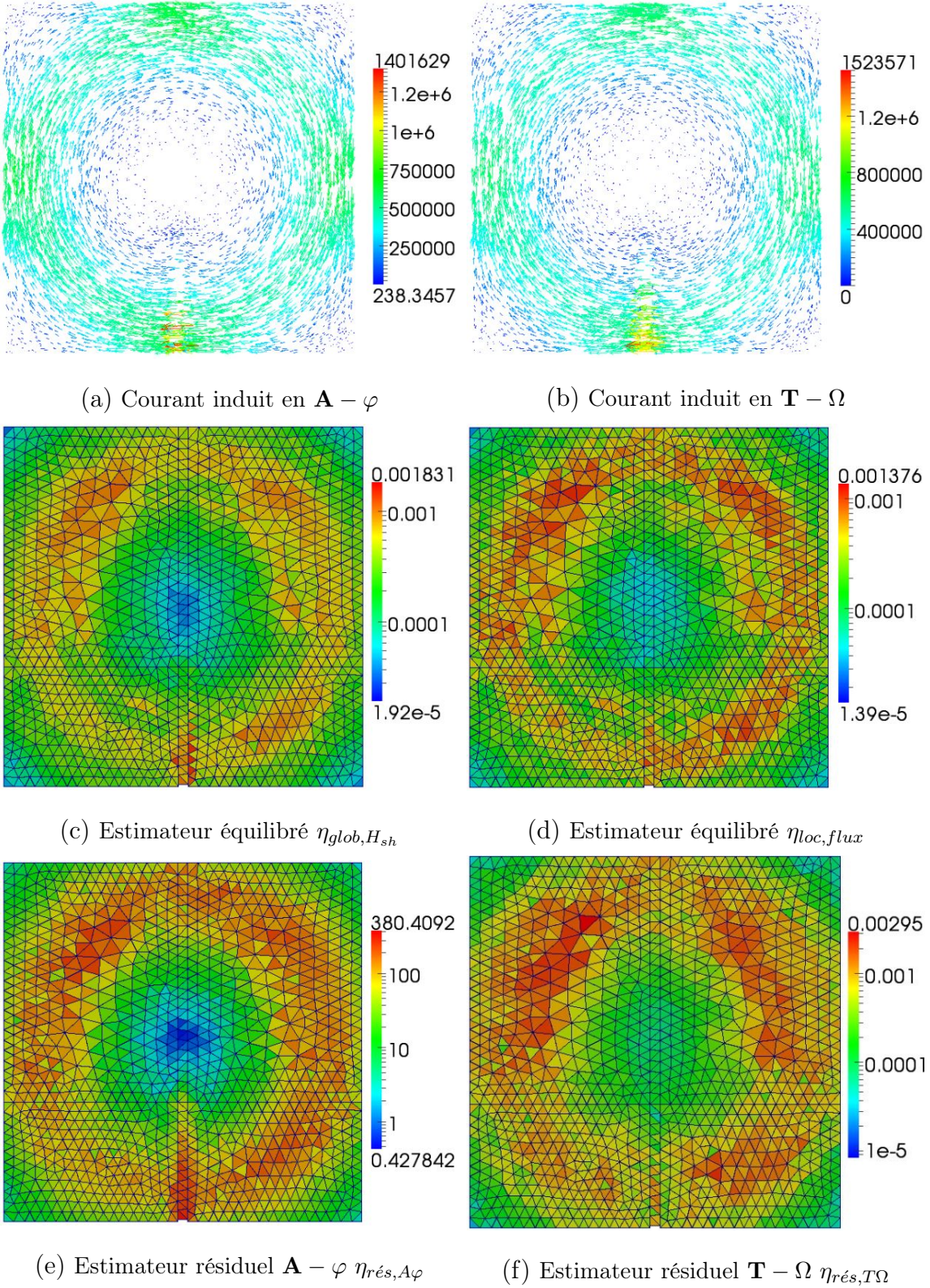


FIGURE 4.10. Plaque avec défaut située au dessous de la bobine. (a)-(b) : courants induits calculés par les deux formulations. (c)-(f) : cartes des quatre estimateurs.

4.1.2. Team WorkShop 7

Le modèle du Team Workshop 7 [<http://www.compumag.org/jsite/images/stories/TEAM/problem7.pdf>] est composé d'une plaque conductrice en aluminium avec un trou et une bobine d'excitation au dessus, comme représenté sur la Figure 4.11. La bobine est constituée de 2742 spires et parcourue par un courant de 1 A. On fixe $\mu = \mu_0$, $\sigma = 3.526 \times 10^7$ S/m et la fréquence $f = 50$ Hz.

On teste les quatre estimateurs sur ce cas test singulier : on utilise quatre maillages raffinés de façon régulière avec respectivement 12183, 25853, 50438 et 295628 éléments. On va étudier la convergence des estimateurs et la distribution des erreurs estimées.

Le domaine de la plaque conductrice étant non simplement connexe pour la formulation en $\mathbf{T}-\Omega$ et la formulation Ω pour l'estimateur $\eta_{loc,flux}$ on aura recours à un inducteur topologique (autour du trou dans la plaque) [Henneron et. al., 2007].

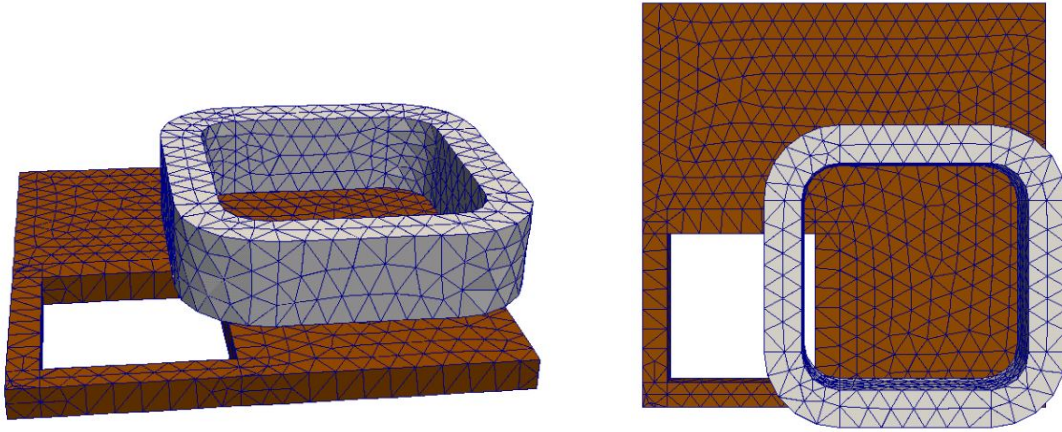


FIGURE 4.11. Configuration de la structure du Team Workshop 7. Maillage avec 50438 éléments.

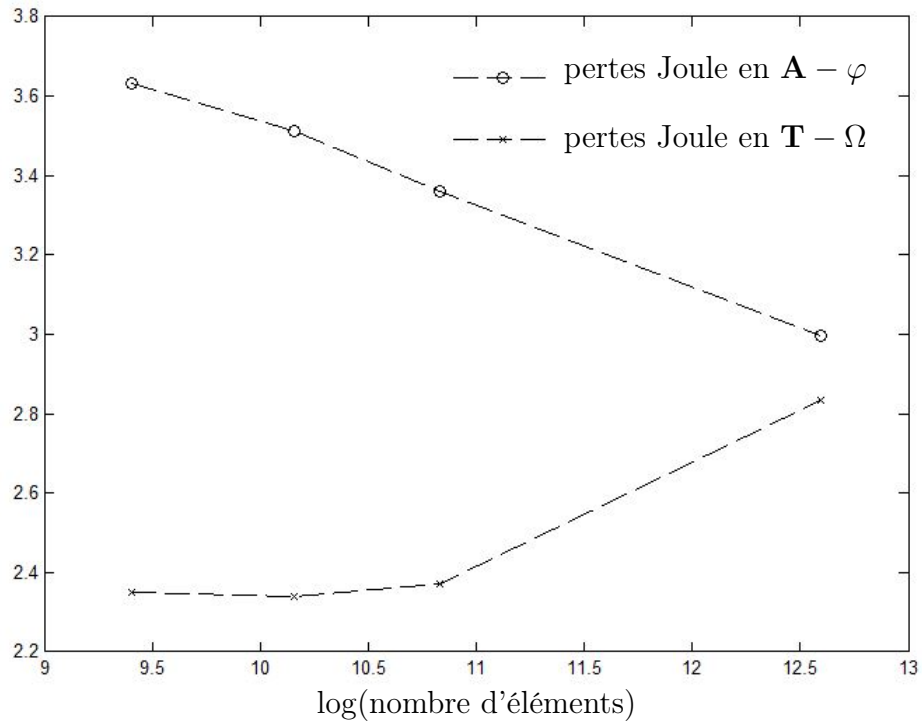
La Figure 4.12 montre les pertes Joule et l'énergie magnétique pour les quatre maillages étudiés en fonction du nombre d'éléments. Comme attendu, les solutions en $\mathbf{A} - \varphi$ et $\mathbf{T} - \Omega$ convergent vers la même solution.

Sur la Figure 4.13, on trace le graphe log-log de la convergence des quatre estimateurs par rapport au nombre d'éléments du maillages.

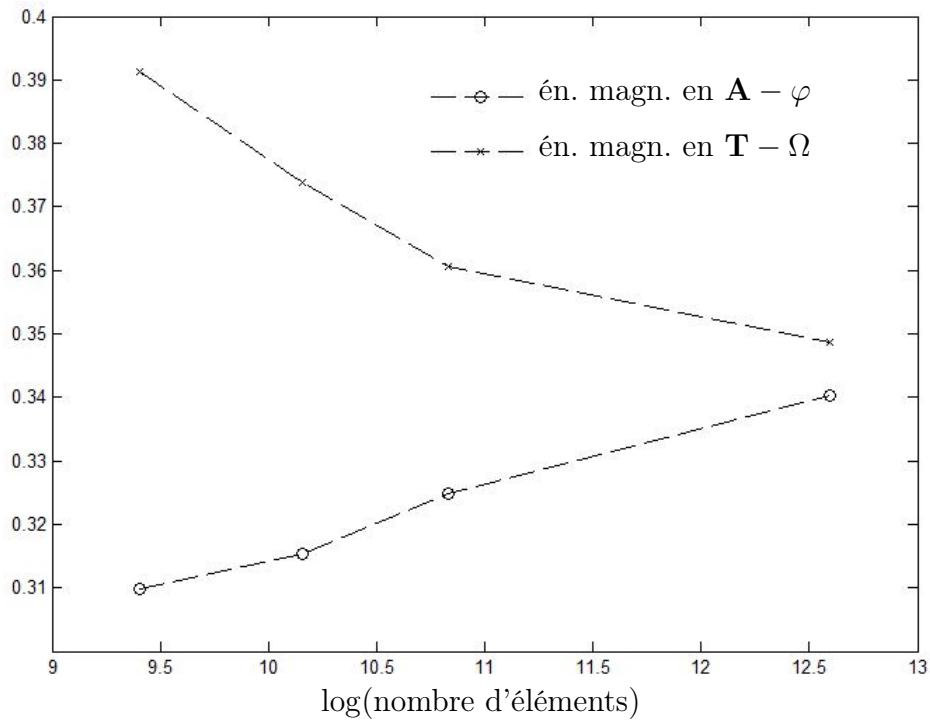
La Figure 4.14 montre les distributions des erreurs estimées pour le maillage avec 50438 éléments. L'estimateur équilibré $\eta_{glob,H_{sh}}$ est un bon compromis entre les deux estimateurs résiduels, en effet il estime l'erreur issue des deux formulations.

Etant donné que l'estimateur $\eta_{loc,flux}$ est fiable *globalement*, il peut s'avérer utile dans un algorithme d'adaptation du maillage de l'associer à l'estimateur $\eta_{rés,A\varphi}$. On peut raffiner avec l'estimateur résiduel $\eta_{rés,A\varphi}$ et, après un nombre fixé d'itérations, calculer $\eta_{loc,flux}$ afin de l'utiliser comme critère d'arrêt.

Comme dernier exemple de la section, on effectue une adaptation du maillage avec l'estimateur équilibré $\eta_{glob,H_{sh}}$, pour lequel l'efficacité locale a été démontrée.



(a) pertes Joule



(b) énergie magnétique

FIGURE 4.12. Pour les quatre maillages étudiés, calcul des pertes Joule (a) et de l'énergie magnétique (b).

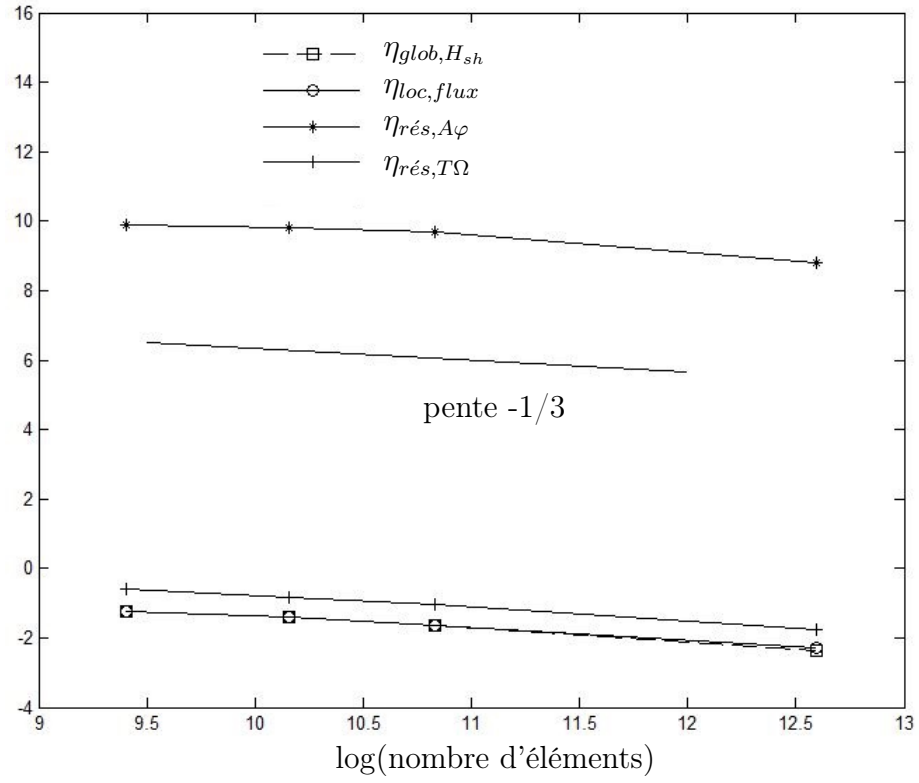


FIGURE 4.13. Convergence des estimateurs lorsque l'on raffine de façon homogène. Maillages avec nombre d'éléments : 12183, 25853, 50438, 295628.

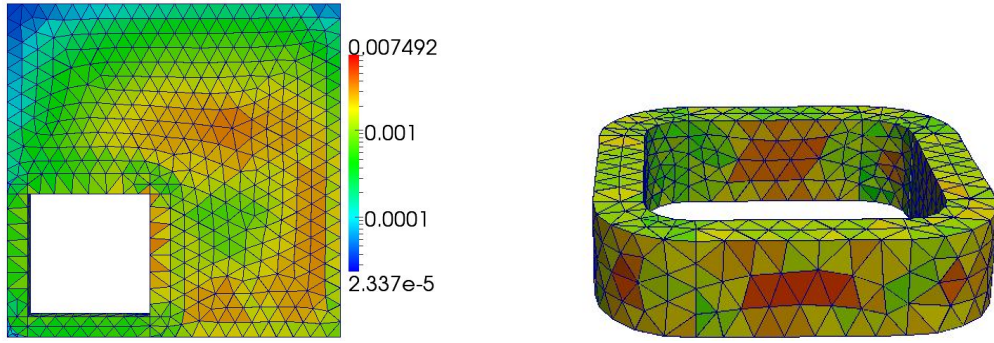
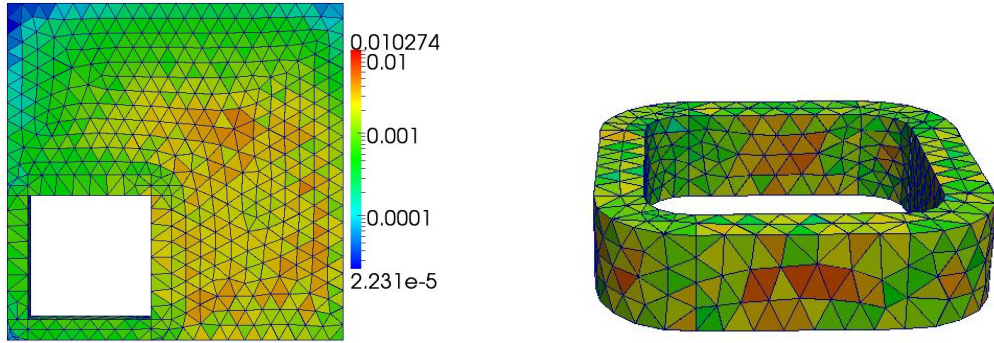
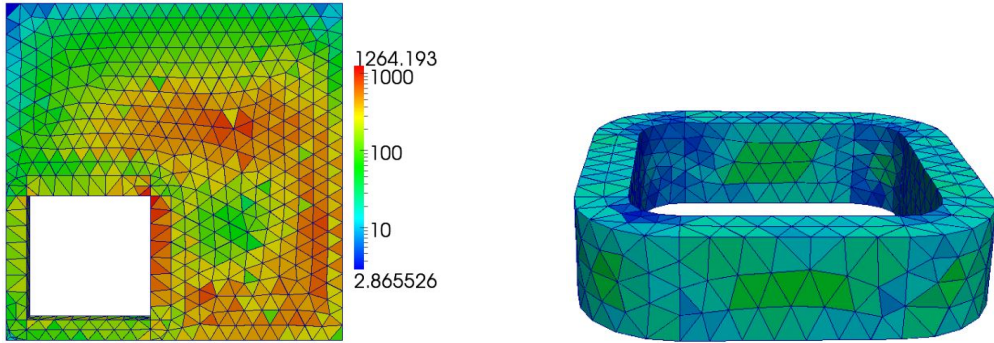
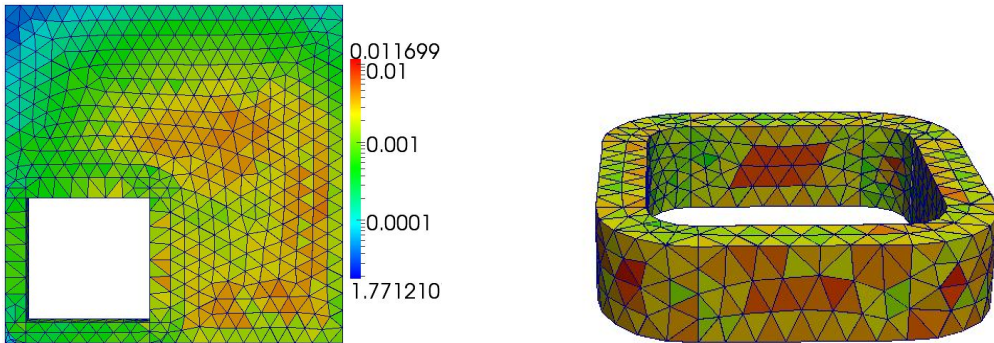
(a) Estimateur équilibré $\eta_{glob, H_{sh}}$ (b) Estimateur équilibré $\eta_{loc, flux}$ (c) Estimateur résiduel $\mathbf{A} - \varphi \eta_{rés, A\varphi}$ (d) Estimateur résiduel $\mathbf{T} - \Omega \eta_{rés, T\Omega}$

FIGURE 4.14. Cartes des estimateurs dans la bobine et les deux plaques conductrices pour le maillage avec 50438 éléments.

Exemple de remaillage adaptatif à l'aide de l'estimateur $\eta_{glob,H_{sh}}$

On fixe la fréquence à $f = 2000$ Hz. On effectue le premier calcul sur un maillage grossier et on effectue un raffinement adaptatif en sélectionnant les 10% des éléments où l'estimateur est le plus élevé. La Figure 4.15 montre la convergence $\log - \log$ de l'estimateur $\eta_{glob,H_{sh}}$: le taux de convergence est assez élevé pour un cas test avec une singularité, un peu au dessous de l'ordre optimal attendu pour une solution régulière (pour laquelle la pente devrait être de $-1/3$).

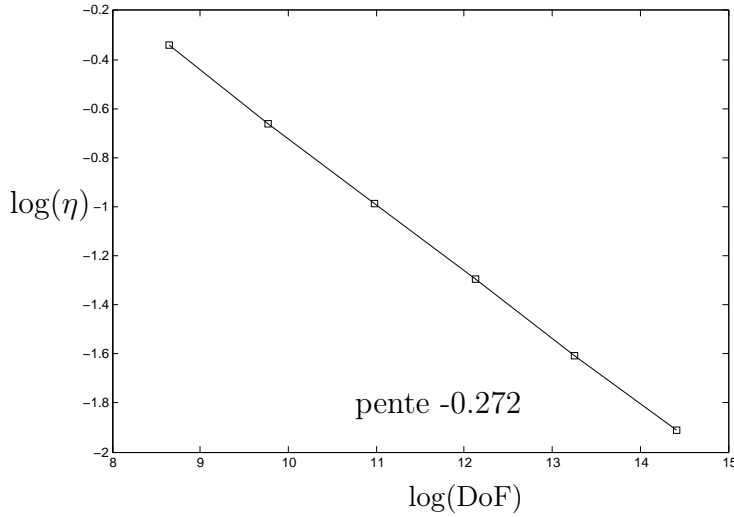


FIGURE 4.15. Estimateur d'erreur équilibré $\eta_{glob,H_{sh}}$ par rapport aux degrés de liberté (5692, 17592, 58746, 185497, 568267, 1808872) pour un raffinement des 10% des éléments où l'estimateur est le plus élevé.

A titre d'exemple, sur la Figure 4.16 on a représenté la distribution de l'estimateur d'erreur pour trois raffinements consécutifs (avec 17592, 58746, 185497 nombre d'éléments). Comme attendu, l'estimateur décroît lorsque l'on raffine. On voit qu'il détecte localement les régions du domaine où il faut raffiner : à proximité des singularités et où les courants induits sont créés.

Remarque 4.1.1. On a choisi de mailler un pourcentage de 10% des éléments car pour des pourcentages moins élevés le maillage dégénère après quelques raffinements consécutifs et par conséquent la qualité de la solution dégénère aussi.

Le problème vient du fait que le mailleur que l'on a utilisé ne garde pas en mémoire les raffinements précédents et certains éléments qui ont été découpés précédemment afin de conserver la conformité du maillage génèrent des angles trop petits. Voir par exemple la Figure 4.17b, où l'on a effectué cinq raffinements consécutifs de la plaque avec les 5% des ses éléments où l'estimateur était le plus élevé.

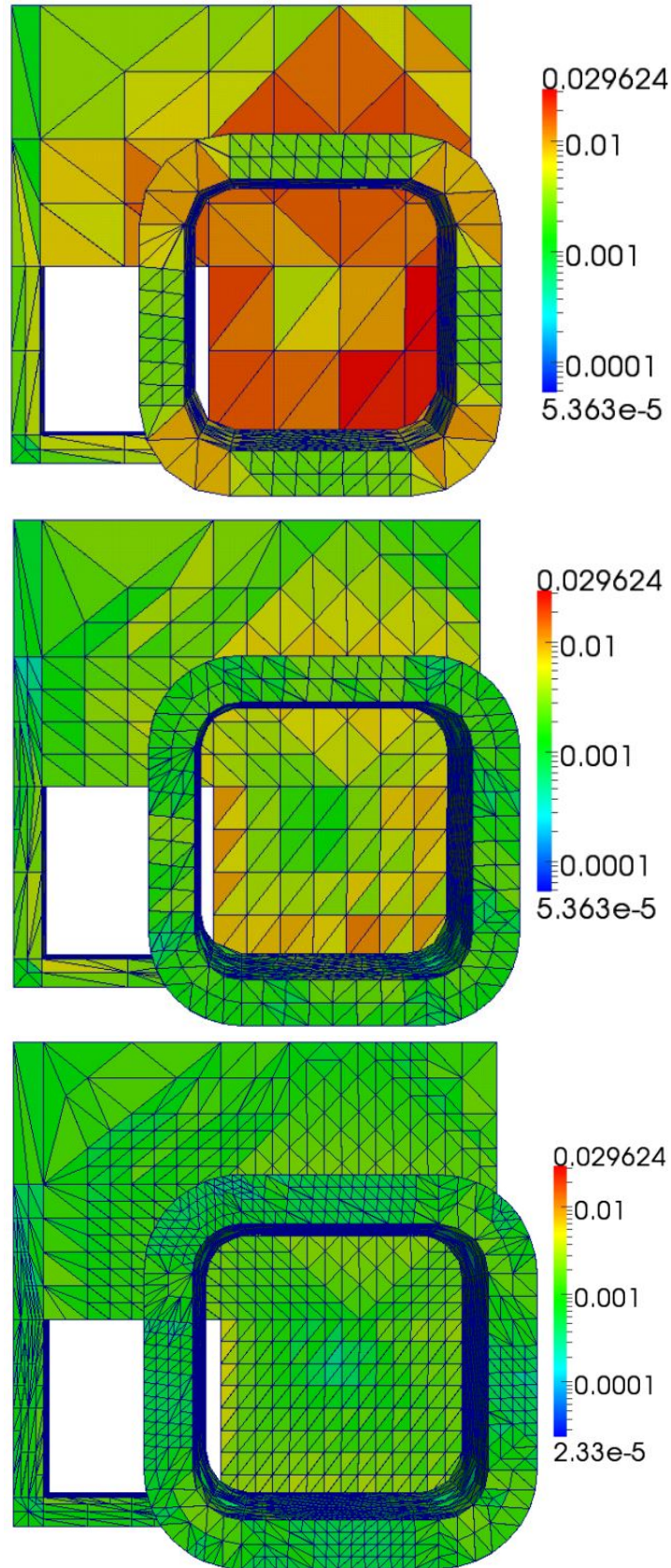
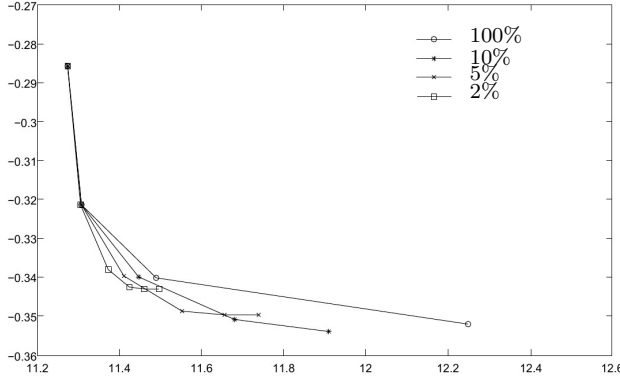
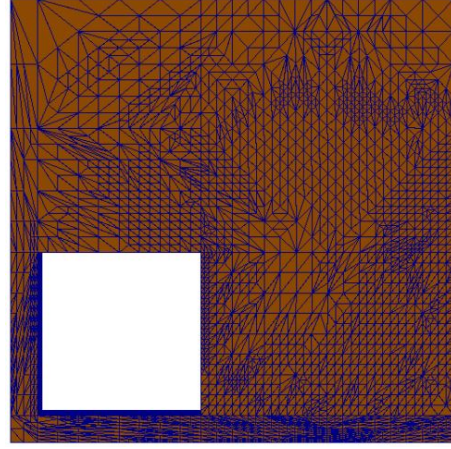


FIGURE 4.16. Distributions de l'estimateur $\eta_{glob, H_{sh}}$ pour trois remaillages consécutifs.



(a) Dégénération de la convergence



(b) Cinq fois raffinement au 5% de la plaque

FIGURE 4.17. (a) : Convergences log-log de l'estimateur $\eta_{glob, H_{sh}}$ par rapport les degrés de liberté lorsque l'on raffine le maillage de la plaque en suivant les pourcentages 2%, 5%, 10%, 100%.
 (b) Maillage adapté lorsque l'on raffine la plaque cinq fois pour les 5% d'éléments dans lesquels l'erreur est la plus importante.

En conclusion, pour des pourcentages trop petits on risque de raffiner consécutivement au même endroit et de perdre la qualité du maillage.

La Figure 4.17a affiche la convergence de l'estimateur pour différents pourcentages de remaillage *concernant seulement les éléments de la plaque*. La convergence de l'estimateur stagne lorsque le maillage commence à dégénérer. Pour éviter ce phénomène il serait nécessaire d'utiliser un outil de remaillage plus performant, comme par exemple la dernière version d'[HOMARD, a SALOME module for Mesh Adaptation, www.salome-platform.org].

4.2. RÉGIME TEMPOREL

Dans cette section, on s'intéresse aux applications relatives aux estimateurs spatio-temporels développés au chapitre 3, c'est-à-dire aux problèmes en magnétodynamique décrits par la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ temporelle. On utilise alors l'estimateur d'erreur résiduel spatio-temporel défini dans la section 3.2.3, qui prend la forme suivante, à l'instant t_n :

$$\eta^n = \left(\sum_{m=1}^n (\eta_\tau^m)^2 + \tau_m (\eta_h^m)^2 \right)^{1/2}.$$

Celui-ci estime l'erreur $e(t_n)$ définie en (3.3.57) à la page 98.

On prête attention au fait que, d'un point de vue pratique, il est avantageux de discerner les contributions spatiale et temporelle de l'estimateur. Dans un premier temps, pour chaque itération temporelle $n \in \{1, \dots, N\}$, il est intéressant d'analyser la distribution sur chaque élément du maillage de l'estimateur spatial η_h^n d'un côté et la valeur de l'estimateur temporel η_τ^n de l'autre. Ainsi, on pourra dans un deuxième temps envisager le développement d'un algorithme de remaillage adaptatif en espace-temps.

Dans Code_Carmel3D que nous avons utilisé, on approche les champs \mathbf{A} et φ par des éléments finis de degré 1. Dans ce contexte, les contributions (3.2.42) et (3.2.43) de l'estimateur η^n sont

nulles. Les estimateurs temporel et spatial à l'instant t_n que l'on calcule sont les suivants :

$$\eta_\tau^n = \left(\frac{\tau_n}{3} \right)^{1/2} \|\mu^{-1/2} \text{rot}(\mathbf{A}_h^n - \mathbf{A}_h^{n-1})\|,$$

$$\eta_h^n = \left((\eta_{D;1}^n)^2 + (\eta_{J;1}^n)^2 + (\eta_{J;2}^n)^2 + (\eta_{J;3}^n)^2 \right)^{1/2},$$

avec

$$(\eta_{D;1}^n)^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_{h_n}} (\eta_{T;1}^n)^2,$$

$$(\eta_{J;1}^n)^2 = \sum_{F \in \mathcal{F}_{h_n}^{int}} (\eta_{F;1}^n)^2,$$

$$(\eta_{J;2}^n)^2 = \sum_{F \in \mathcal{F}_{h_n}^{int}} (\eta_{F;2}^n)^2,$$

$$(\eta_{J;3}^n)^2 = \sum_{F \in \mathcal{F}_{h_n}^{int}} (\eta_{F;3}^n)^2,$$

où les termes instantanés spatiaux sont définis dans (3.2.41)-(3.2.46).

Il est utile pour la suite de définir, pour $n \in \{1, \dots, N\}$, l'estimateur spatial cumulé en temps $\eta^{1,\dots,n}$ par :

$$\eta_h^{1,\dots,n} = \left(\sum_{m=1}^n \tau_m (\eta_h^m)^2 \right)^{1/2}, \quad (4.2.1)$$

et l'estimateur temporel cumulé en temps $\eta_\tau^{1,\dots,n}$ par :

$$\eta_\tau^{1,\dots,n} = \left(\sum_{m=1}^n (\eta_\tau^m)^2 \right)^{1/2}. \quad (4.2.2)$$

Dans les deux prochaines sections on utilise l'estimateur résiduel pour le cas test du Team WorkShop 7 et pour l'étude d'une machine asynchrone d'étude de EDF.

4.2.1. Team WorkShop 7

On considère à nouveau le modèle de la section précédente : le Team Workshop 7 [<http://www.compumag.org/jsite/images/stories/TEAM/problem7.pdf>]. On rappelle qu'il est composé d'une plaque conductrice en aluminium avec un trou et d'une bobine d'excitation au dessus, comme représenté sur la Figure 4.11, et qu'on modélise la bobine avec 2742 spires. On fixe $\sigma = 3.526 \times 10^7$ S/m et $\mu = \mu_0$ et on dénote le temps final T par $t_N = T$, où N représente la dernière itération temporelle. Le Tableau 4.2 contient les détails sur les deux maillages et les deux pas de temps utilisés pour les simulations de cette section. Le but est d'étudier le comportement de l'estimateur lorsqu'on impose un terme source évolutif. Cette étude a donné lieu à la publication [Tittarelli et al., 2015].

maillage M_1	221418 éléments
maillage M_2	322493 éléments
pas de temps Δt_1	0.1 ms
pas de temps Δt_2	0.025 ms

TABLE 4.2. Paramètres pour les deux tests effectués.

Réponse à un échelon de courant

Tout d'abord on impose un échelon de courant $i = 1$ A dans la bobine. On considère le temps final $t_N = 0.02$ s et un pas de temps $\tau_n \equiv \Delta t_2$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit un nombre d'itérations $N = 800$.

La Figure 4.18a montre l'évolution en temps de l'estimateur spatial cumulé $\eta_h^{1,\dots,n}$, défini en (4.2.1), pour les deux maillages M_1 et M_2 . Après un régime transitoire, vu que les courants de Foucault tendent à disparaître, on s'attend à ce que l'estimateur spatial reste constant. Ce qui est le cas, comme montré par les deux courbes du graphe. De plus, on voit qu'en raffinant le maillage, comme attendu, l'estimateur décroît.

La Figure 4.18b montre l'évolution en temps de l'estimateur temporel cumulé en temps $\eta_\tau^{1,\dots,n}$, défini en (4.2.2), avec le maillage M_2 et pour deux simulations avec des pas de temps différents. On voit que, dans les deux cas, l'estimateur temporel ne varie pas dans le temps, ce qui est cohérent en ayant choisi un signal constant. De plus, en raffinant le pas de temps, comme attendu, l'erreur estimée diminue.

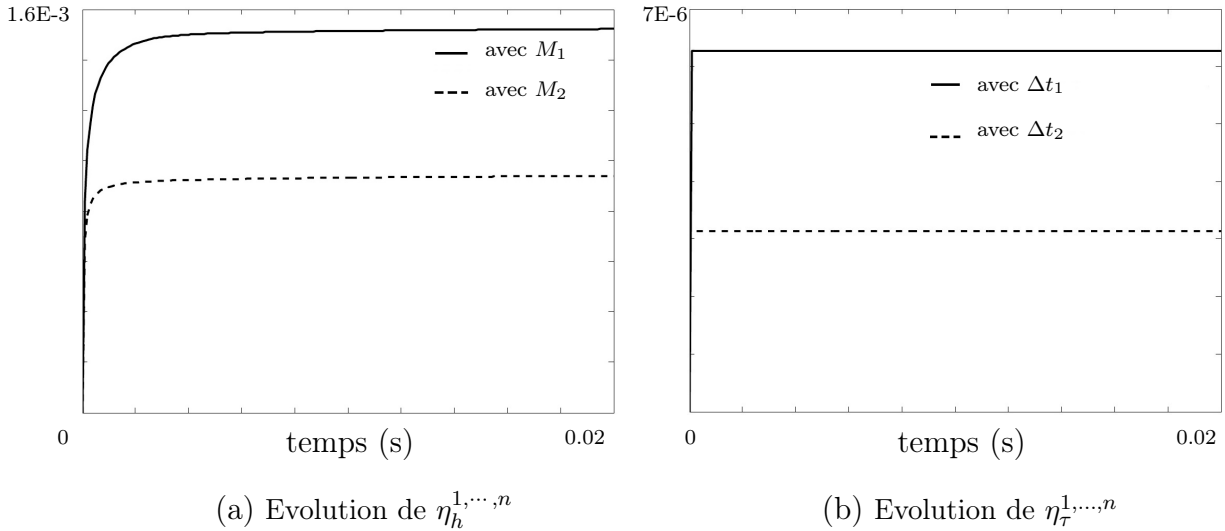


FIGURE 4.18. Simulation avec une densité de courant constante, $i = 1$ A, et temps final $T = 0.02$ s. Evolution en fonction du temps t_n , $n \in \{1, \dots, N\}$, des estimateurs spatial $\eta_h^{1,\dots,n}$ et temporel $\eta_\tau^{1,\dots,n}$. (a) : $\eta_h^{1,\dots,n}$, défini en (4.2.1), calculé avec le pas de temps fixé Δt_2 et deux maillages différents M_1 et M_2 . (b) : $\eta_\tau^{1,\dots,n}$, défini en (4.2.2), calculé avec le maillage M_2 et deux pas de temps différents $\Delta t_1 = 0.1$ ms et $\Delta t_2 = 0.025$ ms.

Source discontinue sur une période

On donne un aperçu du comportement de chaque contribution de l'estimateur, dans le cas de l'imposition d'un signal discontinu lors d'une période. Si l'on considère une période $T = 5$ ms, on impose une densité de courant \mathbf{J}_s d'intensité :

- $i = 1$ A lorsque $t \leq 2.5$ ms et
- $i = 0$ A lorsque $2.5 \leq t \leq 5$ ms,

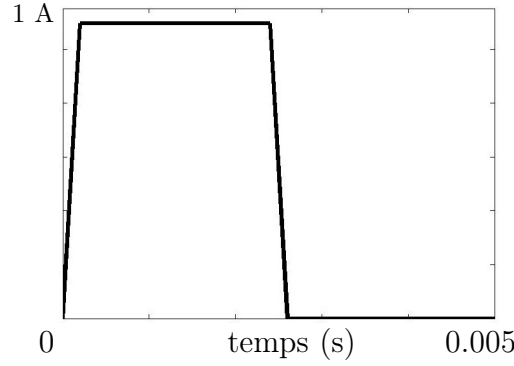


FIGURE 4.19. Intensité de courant de forme rectangulaire périodique avec $T=5\text{ms}$.

comme représenté sur la Figure 4.19. On utilise le maillage M_1 et le pas de temps $\tau_n \equiv \Delta t_1$ pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$.

La Figure 4.20a représente l'évolution en temps de l'estimateur total cumulé η^n . A proximité de la discontinuité du signal, l'estimateur souligne une augmentation de l'erreur importante. Inversement, quand le signal est constant, l'estimateur reste presque constant également.

En vue d'une adaptation du pas de temps et/ou du maillage, on a représenté, sur les Figures 4.20b-4.20f, le comportement des contributions instantanées de l'estimateur, soit les contributions (3.2.37) et (3.2.41)-(3.2.46) définies à la page 76. La figure 4.20b montre l'évolution en temps de l'estimateur temporel instantané η_τ^n . On voit qu'il détecte les discontinuités en temps à l'instant initial et à mi-période. Les Figures 4.20c-4.20f se réfèrent à l'évolution en temps des contributions instantanées de l'estimateur spatial. L'estimateur qui évalue les sauts des composantes normales des courant induits, $\eta_{J;2}^n$, est le terme le plus important, voir la Figure 4.20c. Il prédit le régime transitoire initial et l'erreur lorsque les courants induits apparaissent (en proximité des discontinuités en temps du signal). La Figure 4.20d affiche l'évolution en temps du terme volumique $\eta_{D;1}^n$, il prédit le régime transitoire initial pour diminuer notablement dès que le signal est nul. Les Figures 4.20e et 4.20f affichent respectivement les erreurs sous forme de saut de la composante tangentielle du champ magnétique à travers les faces et une cumulation en temps des sauts de la composante normale de $\Delta t_1 \mathbf{J}_{ind}$.

Enfin, la Figure 4.21 affiche la carte de l'estimateur spatial instantané η_h^n sur la plaque conductrice. A l'instant $t_n = 2.5 \text{ ms}$ et à $t_n = 3 \text{ ms}$ quand le signal est nul et par conséquent lorsque les courants induits sont très faibles. Dans ce dernier cas, l'estimateur ne signale plus de zone à raffiner.

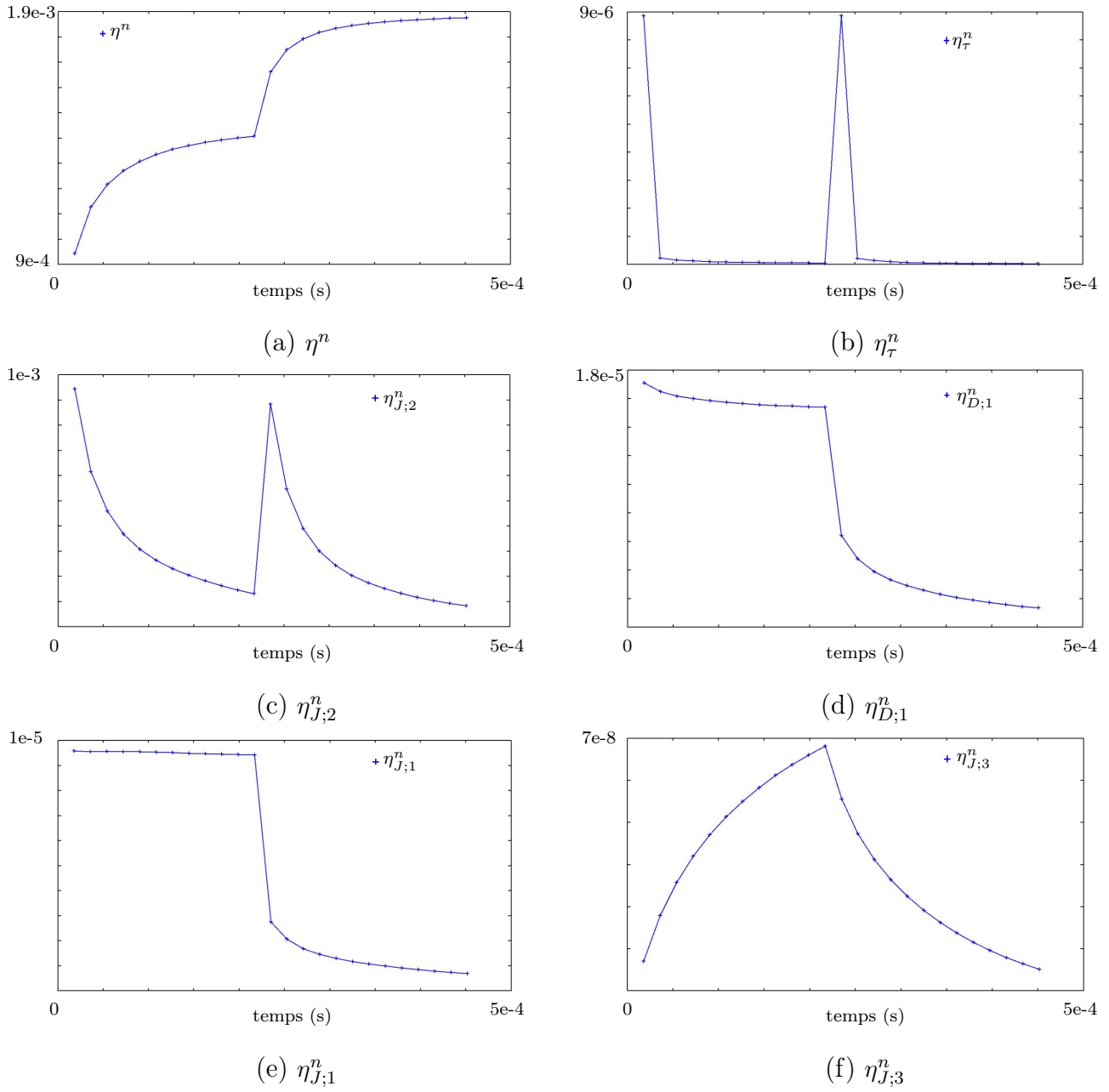


FIGURE 4.20. Chaque graphe représente l'évolution par rapport au temps t_n , $n \in \{1, \dots, N\}$, de l'estimateur global cumulé en temps et de chaque contribution de l'estimateur (définitions à la page 76). Calcul avec un pas de temps homogène Δt_1 et le maillage M_1 . (a) : η^n , (b) : η_τ^n , (c) : $\eta_{J;2}^n$, (d) : $\eta_{D;1}^n$, (e) : $\eta_{J;1}^n$, (f) : $\eta_{J;3}^n$.

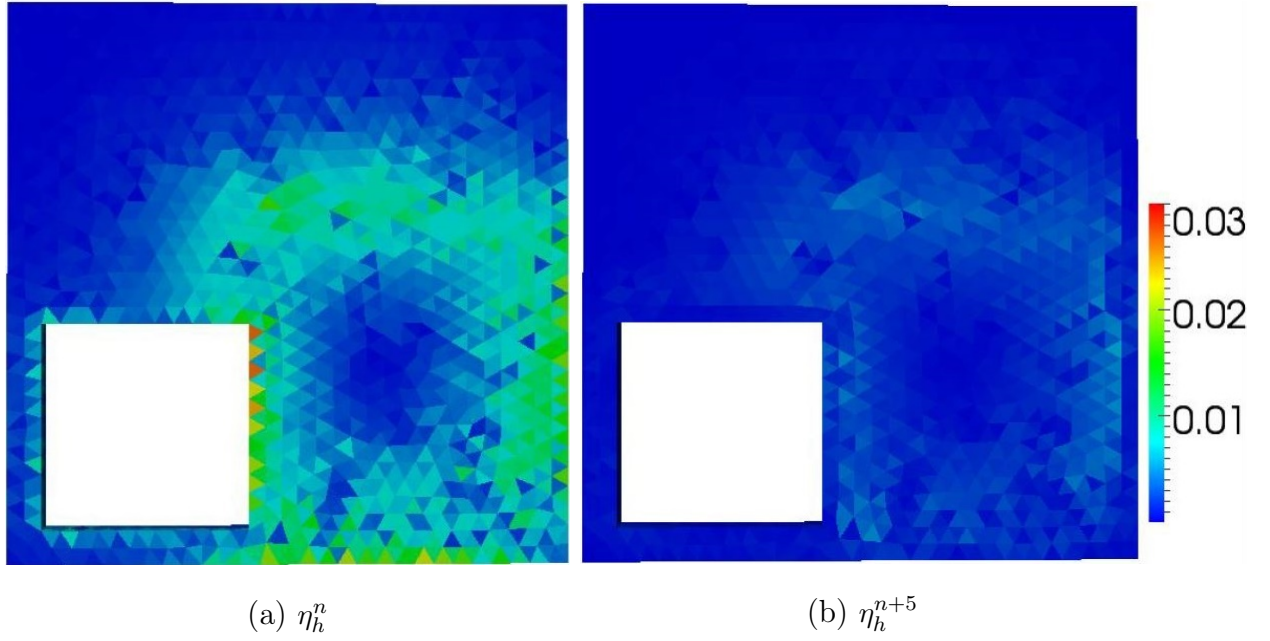


FIGURE 4.21. Distribution de l'estimateur spatial η_h^n avec $t_n = 2.5$ ms (a) et η_h^{n+5} avec $t_{n+5} = 3$ ms (b).

4.2.2. Machine asynchrone

Dans cette section, on utilise l'estimateur résiduel pour une application industrielle de EDF. Il s'agit de la modélisation d'une machine asynchrone étudiée dans [Cheaytani, 2016, chapitre 4] lors d'une analyse des pertes supplémentaires pour des machines électriques. Pour notre étude, la machine d'intérêt est modélisée entièrement, comme indiqué sur la Figure 4.22 et on considère le cas où le rotor est bloqué. On notera, sur la Figure 4.22, que pour cette modélisation les enroulements du stator ont été artificiellement prolongés afin d'éviter de représenter les têtes de bobines.

Dans les matériaux conducteurs, on a $\sigma = 47.281 \times 10^6$ S/m et $\mu = \mu_0$. On impose des courants triphasés sinusoïdaux d'intensité $i = 20$ A dans les trois enroulements du stator. L'essai est effectué à rotor bloqué. Pour le cas test on choisit une fréquence $f = 50$ Hz et un pas de temps $\Delta t = 1$ ms. Afin d'étudier la carte de l'estimateur d'erreur spatial lorsque le régime permanent a été atteint, on fixe à $N = 400$ le nombre d'itérations temporelles, soit 20 périodes.

La Figure 4.23 montre la distribution de la densité de courant créée dans les barres du rotor et l'anneau de court-circuit et la Figure 4.24 la distribution de l'induction magnétique dans une section transversale à l'instant $t = 0.4$ s.

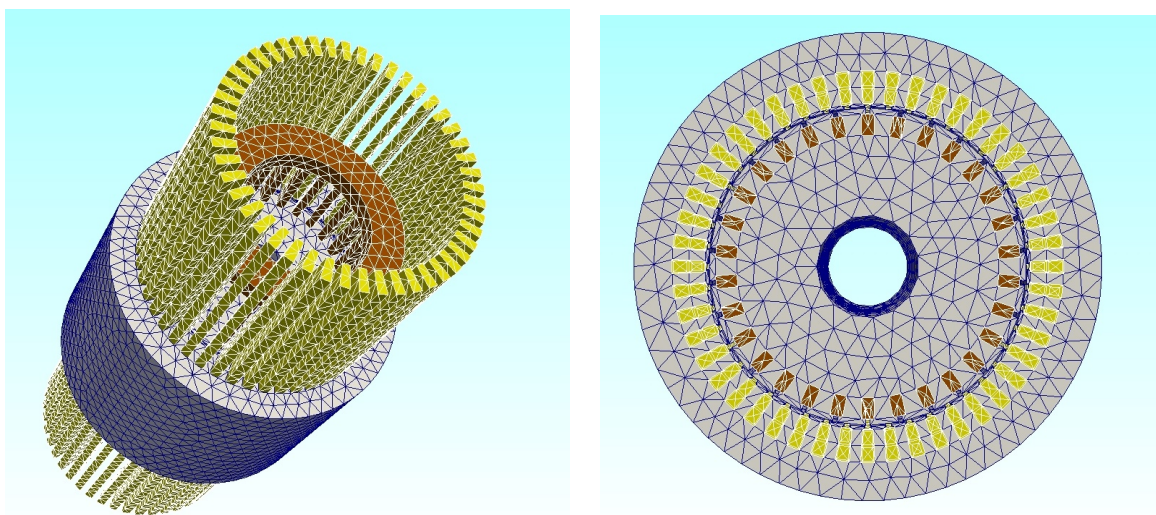


FIGURE 4.22. Configuration et maillage des composantes les plus significatives de la machine asynchrone avec un maillage de 266326 éléments. Rotor et stator en gris, enroulements du stator (inducteurs) en jaune et les barres du rotor et l'anneau de court-circuit en marron.

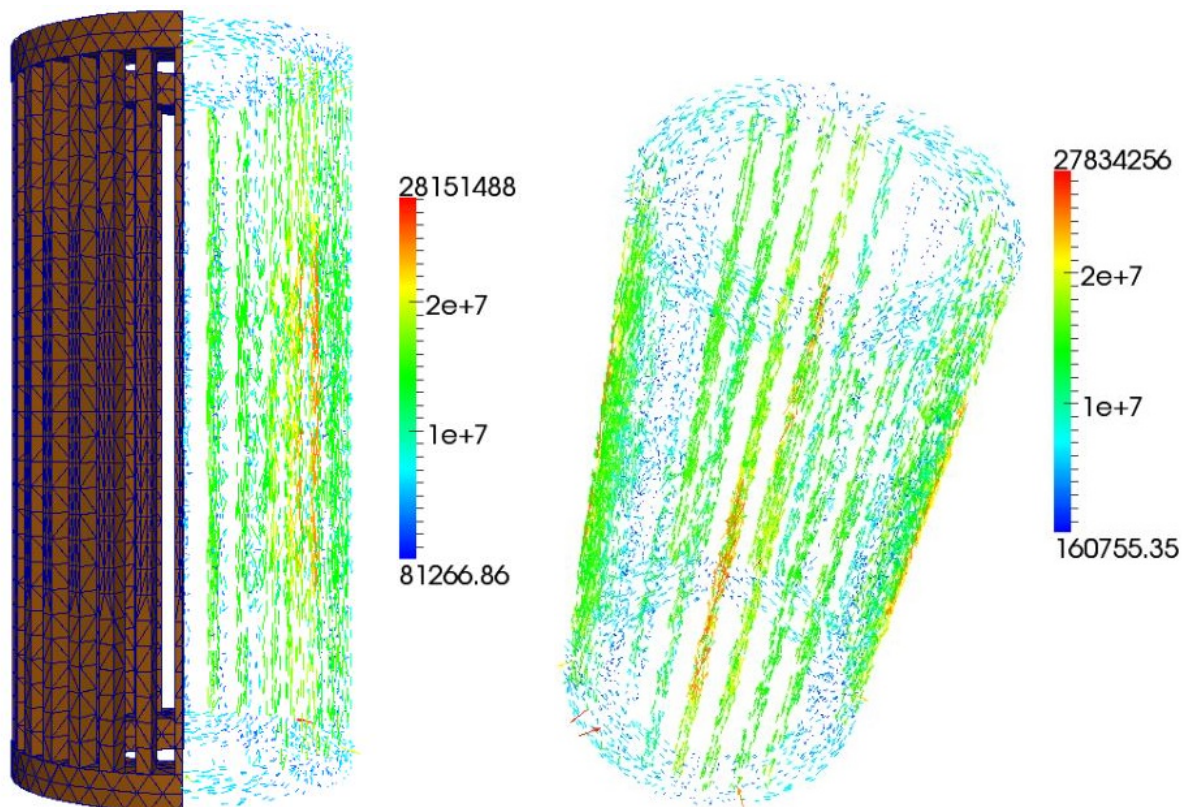


FIGURE 4.23. Courants induits dans les barres du rotor et l'anneau de court-circuit.

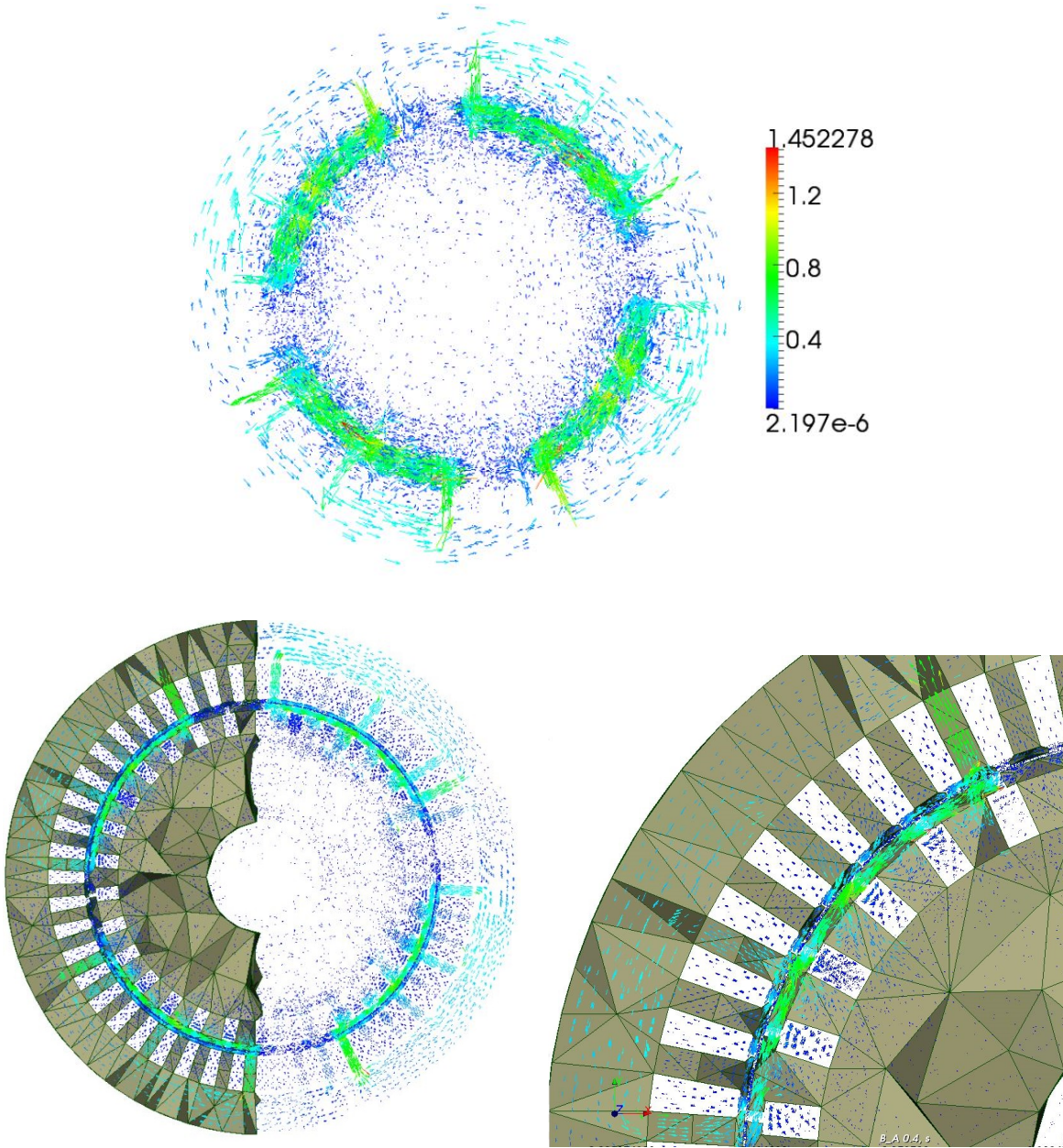


FIGURE 4.24. Induction magnétique dans tout le domaine à l'instant final $T = 0.4$ s

La Figure 4.25 représente la carte de l'estimateur spatial η_h^N , défini en (3.2.38), à l'instant final $t_N = 0.4$ s. En particulier, d'après les Figures 4.25a et 4.25b on voit que l'estimateur détecte la nécessité de bien mailler les barres du rotor et l'anneau de court-circuit, et plus particulièrement au niveau de la jonction des barres et de l'anneau de court-circuit. D'après les Figures 4.25c et 4.25d, l'estimateur suggère aussi de raffiner le maillage au niveau des barres du rotor au voisinage de l'entrefer.

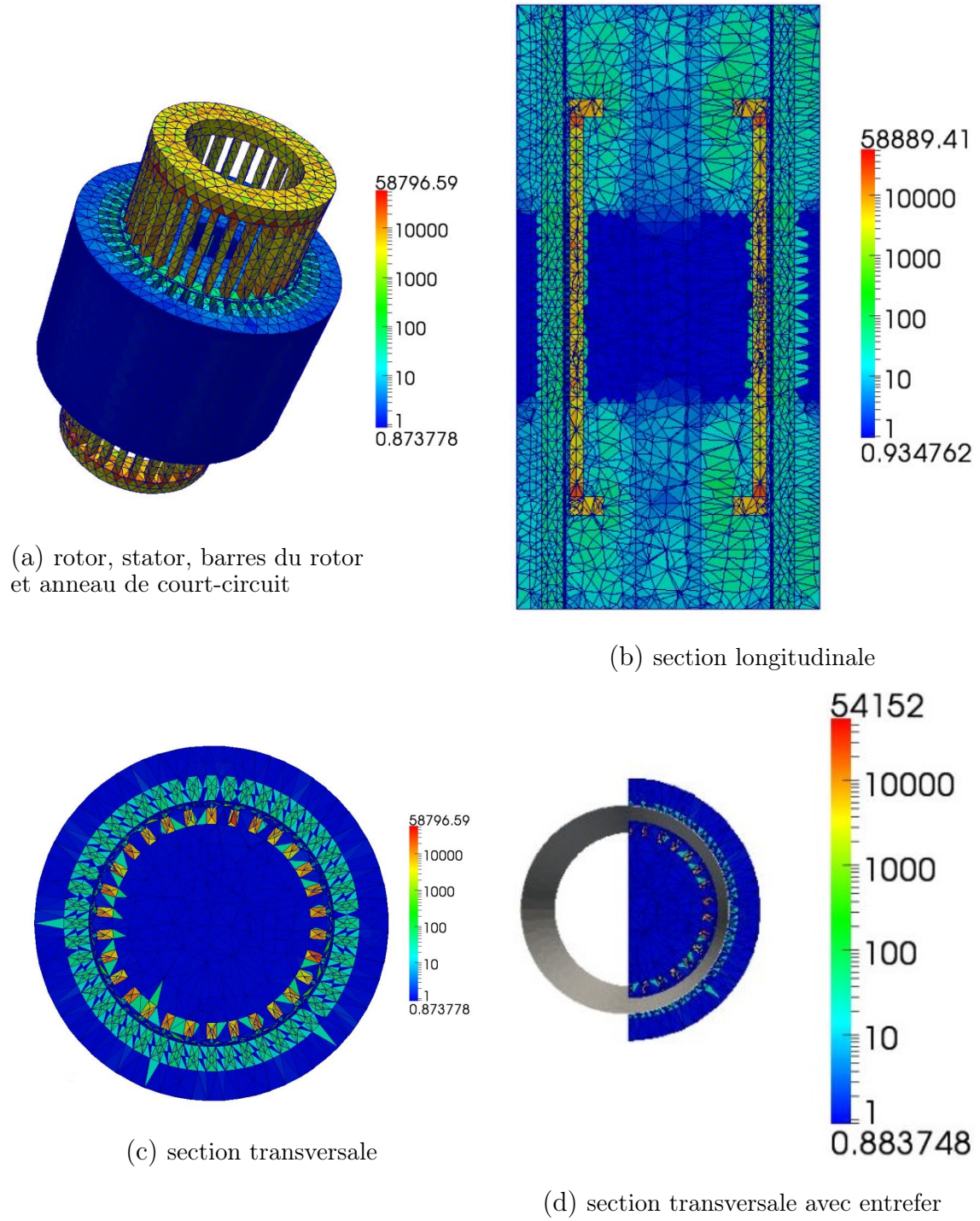


FIGURE 4.25. Distribution de l'estimateur résiduel spatial η_h^N à l'instant final de la simulation.

La Figure 4.26a représente l'évolution de l'estimateur temporel η_τ^n , défini en (3.2.37), en fonction des instants t_n avec $n = 1, \dots, N$. Le pic initial est dû à la définition même de l'estimateur à l'instant t_1 : $\eta_\tau^1 = \left(\frac{\Delta t}{3}\right)^{1/2} \|\mu^{-1/2} \text{rot}(\mathbf{A}_h^1 - \mathbf{A}_h^0)\|$, compte-tenu que la donnée initiale \mathbf{A}_h^0 est nulle. La contribution qui nous intéresse est alors représentée sur la Figure 4.26b. L'estimateur temporel suit la périodicité du signal d'entrée.

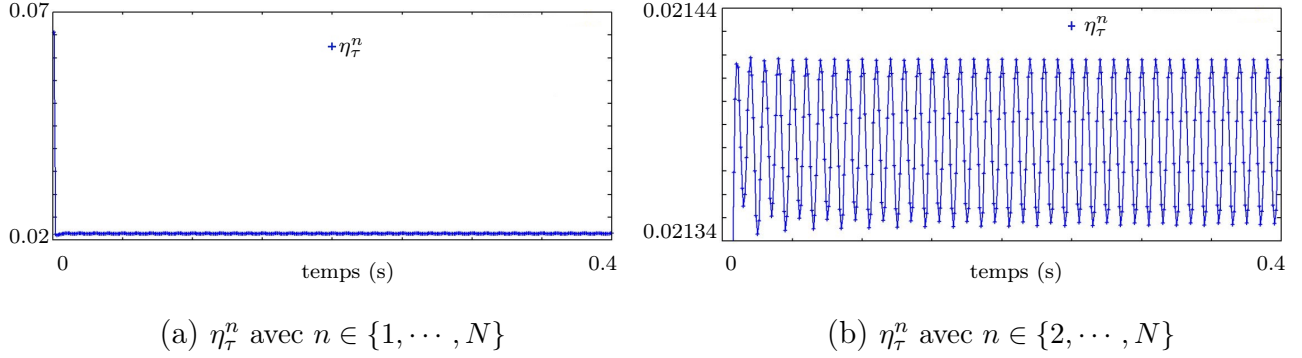


FIGURE 4.26. (a) : évolution de l'estimateur temporel η_τ^n en fonction de chaque instant temporel t_n , $n \in \{1, \dots, N\}$,
(b) : zoom par rapport à l'axe vertical du graphe en (a).

Au niveau de l'évolution de l'estimateur global cumulé en temps, η^n , la Figure 4.27a montre qu'il croît uniformément en temps, similairement au cas du Team Workshop 7, Figure (4.20a). Les Figures 4.27b-4.27e montrent l'évolution de chaque contribution de l'estimateur spatial, définitions (3.2.41) à (3.2.46) à la page 76. Le comportement de ces contributions est similaire à celui du Team Workshop 7 traité dans la section précédente, cf. Figures 4.20c à 4.20f. La Figure 4.27b montre l'évolution en temps du terme le plus significatif de l'estimateur η^n , $\eta_{J,2}^n$, qui mesure le saut normal de \mathbf{J}_{ind} . Il prédit un régime transitoire initial, mais il reste toujours uniforme, tout en suivant le comportement du signal d'entrée, ce qui implique la croissance uniforme de l'estimateur total η^n . Les trois autres contributions, représentées sur les Figures 4.27c-4.27e, diminuent au cours du temps vers une valeur stable, probablement sous l'influence de la disparition du transitoire qui a lieu vers la fin de la simulation. En tous cas, on peut envisager un raffinement adapté afin de baisser la contribution $\eta_{J,2}^n$, lorsque d'autres termes de l'estimateur deviendront plus importants que $\eta_{J,2}^n$, l'estimateur suggérera un raffinement non nécessairement à proximité des courants induits.

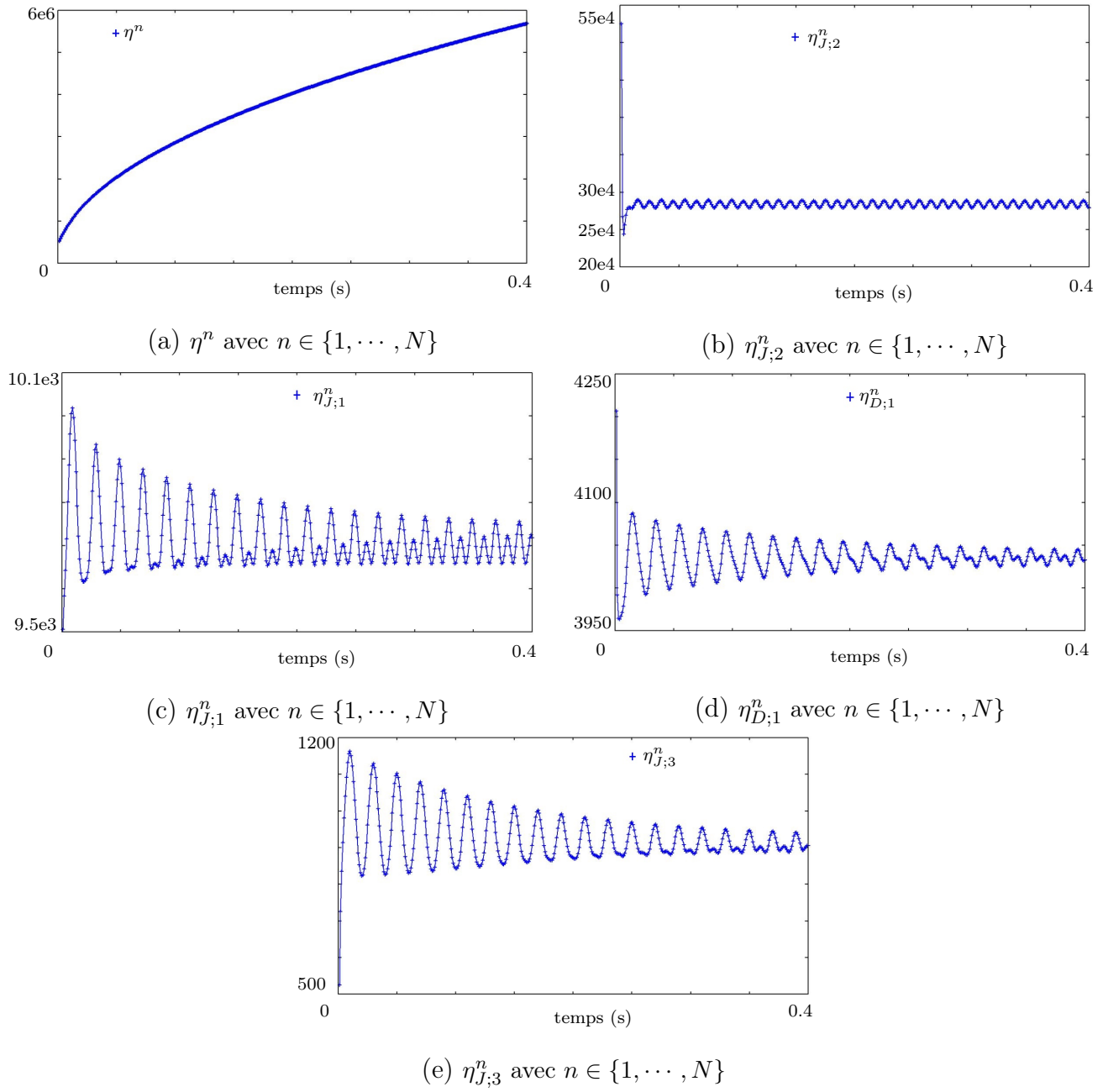


FIGURE 4.27. Chaque graphe représente l'évolution par rapport au temps t_n , $n \in \{1, \dots, N\}$, de chaque contribution de l'estimateur spatial. Pas de temps homogène $\Delta t = 3$ ms et maillage fixé avec 266326 éléments. (a) : η^n , (b) : $\eta_{J;2}^n$, (c) : $\eta_{J;1}^n$, (d) : $\eta_{D;1}^n$, (f) : $\eta_{J;3}^n$.

CONCLUSION

Dans ce mémoire de thèse, nous avons développé trois estimateurs d'erreur pour des problèmes en magnétodynamique : deux de type équilibré pour le régime harmonique et un de type résiduel pour le régime temporel. Nous nous sommes principalement intéressés à la formulation $\mathbf{A} - \varphi$.

Concernant le cadre magnétoharmonique, le premier estimateur proposé se base sur la comparaison au niveau des lois de comportement de la formulation primale $\mathbf{A} - \varphi$ et de la formulation duale $\mathbf{T} - \Omega$. On a prouvé l'équivalence entre l'estimateur et la somme des erreurs de chacune des formulations, avec des constantes multiplicatives explicites, à un terme d'ordre supérieur près. De plus, l'efficacité locale a également été prouvée. La difficulté majeure par rapport au cas magnétostatique, pour lequel un estimateur de ce type avait déjà été développé, réside dans la preuve du fait qu'un terme résiduel, correspondant au produit L^2 des deux termes des erreurs des deux formulations, soit négligeable par rapport à l'erreur. Ce terme résiduel n'apparaissait pas dans le cas magnétostatique. L'ingrédient pour montrer cela a consisté à passer par un problème adjoint *ad hoc*.

Le deuxième estimateur proposé en magnétoharmonique a comme but d'estimer uniquement l'erreur issue de la discrétisation de la formulation primale $\mathbf{A} - \varphi$. Pour cette raison, au lieu d'utiliser une formulation duale, on a employé la solution de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ elle-même afin de construire deux champs admissibles, qui vont constituer l'estimateur en mesurant leurs écarts en norme L^2 avec la solution numérique. Le premier champ est la densité de courant \mathbf{j}_h dans l'espace de Raviart-Thomas d'ordre 1 et à divergence nulle globale, construite à partir des flux issus de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$. Le deuxième est un champ magnétique \mathbf{k}_h , calculé à partir de la résolution d'un problème magnétostatique avec terme source \mathbf{j}_h et \mathbf{J}_s , source du problème primal. Pour cet estimateur on a démontré, au niveau global, la fiabilité, avec constante 1, ainsi que l'efficacité. Afin d'obtenir un résultat d'efficacité locale il faudrait trouver une construction alternative du champ admissible \mathbf{k}_h . Néanmoins, des cas académiques ont permis de vérifier le bon comportement numérique de ces estimateurs, en obtenant les résultats attendus lorsque l'on considère une solution régulière du problème.

Concernant la magnétodynamique temporelle décrite par la formulation $\mathbf{A} - \varphi$, on a développé un estimateur résiduel spatio-temporel. L'enjeu par rapport au cas harmonique a été double :

- Adapter les résultats de l'estimateur résiduel spatial pour le cas magnétoharmonique au cas instationnaire,

- Adapter au cadre électromagnétique les résultats connus pour les équations paraboliques concernant l'estimation de l'erreur temporelle.

On a procédé en gardant l'erreur spatiale et l'erreur temporelle les plus disjointes possibles, et on a prouvé des résultats de fiabilité et d'efficacité à la fois spatiaux et temporels. En particulier, pour l'estimation en temps, on a obtenu une efficacité locale en temps et globale en espace et, pour l'estimation en espace, une efficacité locale en espace et globale en temps. On remarque que l'estimateur spatial se compose de six termes, dont quatre correspondent aux termes constituant l'estimateur spatial en magnétoharmonique. Les deux autres termes, nouveaux par rapport au cas magnétoharmonique, sont responsables de la perte de globalité en temps de l'estimateur spatial, et dus à la nature instationnaire du type de problème que l'on traite. On est finalement parvenu à un résultat d'équivalence globale entre l'erreur spatio-temporelle et l'estimateur spatio-temporel. Un cas test académique a permis de valider numériquement les résultats obtenus, en accord avec ce qui est attendu pour une solution régulière. De plus, on a trouvé un résultat cohérent lorsque l'on teste l'estimateur dans un cas singulier.

A titre d'application, on a comparé les trois estimateurs pour des problèmes plus complexes en électromagnétisme.

Pour la magnétoharmonique, on a traité le cas d'une bobine entre deux plaques, en considérant qu'une des deux plaques était, pour un premier calcul, sans aucun défaut et, pour un second calcul, avec un défaut. Cela a permis de vérifier que les estimateurs détectent bien les endroits du maillage où il convient de raffiner. De plus, une comparaison entre deux estimateurs résiduels (un pour la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ et un autre pour la formulation $\mathbf{T} - \Omega$) a mis en évidence la spécificité de chaque estimateur et les caractéristiques propres au problème physique abordé. Ensuite, un test singulier, le Team Workshop 7, a confirmé les analyses de l'étude précédente. Sur ce cas test, on a mis en œuvre un remaillage adaptatif avec l'estimateur équilibré issu des deux formulations complémentaires. On remarque une convergence un peu au dessous de l'ordre optimal attendu pour un cas test régulier.

Dans le cadre magnétodynamique temporel, on a traité à nouveau le Team Workshop 7, mais en imposant ici comme terme source une densité de courant discontinue dans le temps. Les estimateurs temporels et spatiaux ont bien détecté les singularités (temporelles et spatiales) du cas test.

Pour conclure, on a analysé l'erreur estimée pour la modélisation d'une machine asynchrone fournie par EDF R&D. L'estimateur s'avère être en bon accord avec le phénomène physique observé. La tendance de la contribution temporelle de l'estimateur suit la périodicité du signal d'entrée. L'estimateur spatial détecte le transitoire et une erreur importante dans les matériaux conducteurs, notamment à proximité des singularités géométriques.

Ces travaux ouvrent plusieurs perspectives. Pour l'estimateur équilibré issu des formulations complémentaires $\mathbf{A} - \varphi$ et $\mathbf{T} - \Omega$, on peut envisager une extension au cadre instationnaire. Il est également utile pour les applications d'étendre cet estimateur au cas des conditions aux limites non-homogènes. Concernant l'estimateur équilibré issu uniquement de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$, on peut avant tout envisager une construction différente du champ magnétique admissible afin d'assurer une efficacité locale au niveau théorique. De plus, une construction locale de \mathbf{k}_h à la place d'une résolution d'un problème en magnétostatique permettra

une programmation plus directe dans le logiciel de calcul de champs électromagnétiques retenu. Ensuite, on peut naturellement envisager, comme déjà évoqué pour l'autre estimateur équilibré, la prise en compte des conditions aux limites non-homogènes et l'extension au cas instationnaire.

Nous avons abordé l'estimation de type résiduel pour la formulation instationnaire en $\mathbf{A} - \varphi$, néanmoins on peut imaginer une extension de l'estimateur résiduel pour la formulation $\mathbf{T} - \Omega$ en régime harmonique (déjà existant) au cas instationnaire. La prise en compte des conditions aux limites non-homogènes devrait découler naturellement, en se basant sur les travaux déjà effectués en magnétoharmonique.

Pour finir, une perspective à court terme consiste à mettre en place des techniques de remaillage adaptatif.

- Les deux estimateurs équilibrés peuvent être utilisés pour estimer de manière précise les erreurs de discrétisation afin de fournir un critère d'arrêt d'un algorithme de remaillage adaptatif, assurant ainsi un contrôle stricte de l'erreur de discrétisation,
- L'estimateur résiduel en espace-temps peut être employé dans un algorithme d'adaptation du pas de temps et du maillage.

A ce propos, EDF R&D dispose des logiciels HOMARDS et YACS (intégrés à la plate forme Salomé). Le premier permet de faire du remaillage adaptatif et le deuxième de faire communiquer de façon automatique les différents modules de Salomé entre eux et avec d'autres logiciels. Le défi consistera, dans la suite, à équiper Code_Carmel3D et Salomé de tous les outils nécessaires pour coupler les deux logiciels en vue d'un algorithme adaptatif en espace-temps.

Annexe A

IMPOSITION D'UNE DENSITÉ DE COURANT COMPLEXE DANS CODE_CARMEL3D

Dans cette annexe on développe la méthodologie utilisée pour effectuer l'estimation de l'erreur pour la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ ($\eta_{loc,flux}$) avec Code_Carmel3D. On utilise les notations de la section 2.4 sur l'estimateur $\eta_{loc,flux}$.

Le paragraphe A.1 fait le lien entre la théorie de la section 2.4 dédiée à l'estimateur $\eta_{loc,flux}$ et la pratique pour l'implémentation de $\eta_{loc,flux}$ dans Code_Carmel3D. Ensuite, le paragraphe A.2 est une sorte de *tutorial* pour les utilisateurs du code qui souhaiteraient obtenir d'une part l'erreur estimée et d'autre part la carte de la distribution de l'estimation d'erreur. On rappelle que l'on a utilisé le plus possible les outils disponibles dans Code_Carmel3D, en sachant que cette procédure représente un démonstrateur pour ce type d'estimateur.

Dans un souci d'exhaustivité, dans le paragraphe A.3, on mentionne comment un utilisateur de Code_Carmel3D peut obtenir l'estimateur $\eta_{glob,H_{sh}}$.

A.1. PRINCIPES POUR LE CALCUL DES CHAMPS ADMISSIBLES DANS CODE_CARMEL3D

On peut estimer l'erreur commise avec la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ sous forme énergétique :

$$e_{A,\varphi} = \sqrt{\|\mu^{-1/2}\text{rot } \mathbf{e}_A\|^2 + \|\omega^{-1/2}\sigma^{1/2}(j\omega \mathbf{e}_A + \nabla e_\varphi)\|_{D_c}^2}$$

par l'estimateur :

$$\eta_{loc,flux} = \sqrt{\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{k,T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h, T \subset D_c} \eta_{j,T}^2},$$

où

$$\eta_{k,T} = \|\mu^{1/2}(\mathbf{k}_h - \mu^{-1}\text{rot } \mathbf{A}_h)\|_T \quad \text{et} \quad \eta_{j,T} = \left\| \left(\frac{j}{\omega \sigma} \right)^{1/2} (\mathbf{j}_h - \sigma(j\omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h)) \right\|_T.$$

En disposant de la solution numérique $(\mathbf{A}_h, \varphi_h)$, afin de construire l'estimateur, il suffit de calculer les deux champs admissibles $(\mathbf{j}_h, \mathbf{k}_h)$. Ce calcul est effectué en suivant les deux étapes ci-dessous.

- 1) Construction de $\mathbf{j}_h \in \mathcal{RT}_1(\mathcal{T}_h)$ tel qu'il satisfait le système (2.4.2) et (2.4.3). Tout d'abord, pour chaque face interne F du domaine conducteur, on calcule une moyenne du flux du courant induit $\sigma(j \omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h)$ sur F :

$$l_F = \frac{1}{2} \left(\gamma_F(\sigma(j \omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h)|_T) + \gamma_F(\sigma(j \omega \mathbf{A}_h + \nabla \varphi_h)|_{\tilde{T}}) \right) \cdot \mathbf{n}_F, \quad (\text{A.1.1})$$

où T, \tilde{T} désignent les tétraèdres partageant la face F et γ_F désigne l'opérateur de restriction à la face F . Même si ce choix des flux représente une simplification des flux proposés dans le chapitre 2, cela assurera la continuité de la composante normale du champ \mathbf{j}_h aux interfaces. Pour $F \in (\mathcal{F}_h \setminus D_c) \cup \partial D_c$ on définit $l_F = 0$. Ensuite, la résolution, pour chaque tétraèdre T , du système 15×15 donné par (2.4.2) et (2.4.3) fournit le champ \mathbf{j}_h .

- 2) Une fois que l'on a calculé le champ $\mathbf{j}_h \in \mathcal{RT}_1(\mathcal{T}_h)$, on procède à la construction de $\mathbf{k}_h \in \mathcal{ND}_1(\mathcal{T}_h)$ tel que

$$\text{rot } \mathbf{k}_h = \Pi_h \mathbf{J}_s - \Pi_h \mathbf{j}_h,$$

où Π_h dénote la projection des deux champs dans l'espace $\mathcal{RT}_0(\mathcal{T}_h)$ à divergence nulle dans D (cet espace est désigné avec $\tilde{Y}_h^0(D)$ dans le chapitre 2). On va donc imposer $\Pi_h \mathbf{J}_s - \Pi_h \mathbf{j}_h$ comme terme source dans une résolution en magnétostatique dans Code_Carmel3D. Cette résolution fournira le champ magnétique \mathbf{k}_h . En particulier, comme les deux champs sources appartiennent à $\mathcal{RT}_0(\mathcal{T}_h)$, il suffit de donner à Code_Carmel3D le flux à travers chaque facette du maillage. Il faut tenir compte que, à la différence des termes sources *usuels*, $\Pi_h \mathbf{j}_h$ est un champ dans \mathbb{C} et que la résolution d'un problème magnétostatique est classiquement effectuée dans \mathbb{R} . Il faut donc effectuer deux résolutions. Par linéarité, on peut séparer les impositions entre l'imposition de \mathbf{J}_s et de la composante réelle de $\Pi_h \mathbf{j}_h$ et l'imposition de la composante imaginaire de $\Pi_h \mathbf{j}_h$, pour en postraitement, reconstituer le champ solution. Pour ce premier stade de programmation, on opte pour une séparation des deux termes sources \mathbf{J}_s et $\Pi_h \mathbf{j}_h$, on décompose alors le problème en trois étapes :

- i) imposition de $\Pi_h \mathbf{J}_s$ pour le problème magnétostatique $\text{rot } \mathbf{k}_{h,s} = \Pi_h \mathbf{J}_s$, qui nous fournit le champ magnétique $\mathbf{k}_{h,s}$;
- ii) imposition de $\Pi_h \Re \mathbf{j}_h$ pour le problème magnétostatique $\text{rot } \mathbf{k}_{h,r\acute{e}el} = -\Pi_h \Re \mathbf{j}_h$, qui nous fournit le champ magnétique $\mathbf{k}_{h,r\acute{e}el}$;
- iii) imposition de $\Pi_h \Im \mathbf{j}_h$ pour le problème magnétostatique $\text{rot } \mathbf{k}_{h,imag} = -\Pi_h \Im \mathbf{j}_h$, qui nous fournit le champ magnétique $\mathbf{k}_{h,imag}$.

En conclusion, d'après ces trois calculs on obtient, en postraitement,

$$\mathbf{k}_h = \mathbf{k}_{h,s} + \mathbf{k}_{h,r\acute{e}el} + j \mathbf{k}_{h,imag},$$

où j représente l'unité imaginaire.

On revient maintenant aux calculs en magnétostatique effectués afin d'obtenir \mathbf{k}_h . On se focalise par exemple sur $\mathbf{k}_{h,r\acute{e}el}$ (pour les contributions $\mathbf{k}_{h,s}$ et $\mathbf{k}_{h,imag}$ on procède similairement). La résolution de

$$\text{rot } \mathbf{k}_{h,r\acute{e}el} = -\Pi_h \Re \mathbf{j}_h$$

est réalisée dans Code_Carmel3D à travers la résolution magnétostatique en potentiel Ω . On résout par les éléments finis le problème :

Trouver $\Omega_h \in \widetilde{\Theta}_h(D)$ tel que

$$\int_D \mu \nabla \Omega_h \cdot \nabla \Omega'_h = \int_D \mu \mathbf{H}_{s,r\acute{e}el} \cdot \nabla \Omega'_h \quad \forall \quad \Omega'_h \in \widetilde{\Theta}_h(D),$$

où $\text{rot } \mathbf{H}_{s,r\acute{e}el} = \Pi_h \mathfrak{R} \mathbf{j}_h$. La solution Ω_h fournit alors le champ admissible :

$$\mathbf{k}_{h,r\acute{e}el} = \mathbf{H}_{s,r\acute{e}el} - \nabla \Omega_h.$$

Un point à souligner est que la construction des sources magnétiques, comme $\mathbf{H}_{s,r\acute{e}el}$, dans Code_Carmel3D utilise un algorithme basé sur une technique d'arbre d'arêtes [Le Menach, 1999] qui demande que les champs sources électriques soient à divergence nulle sur chaque tétraèdre. Pour le terme source $\Pi_h \mathbf{j}_s$ cela est assuré par une technique basée sur la construction d'un arbre des faces [Le Menach, 1999]. Pour les champs $\Pi_h \mathfrak{R} \mathbf{j}_h$ et $\Pi_h \mathfrak{S} \mathbf{j}_h$, on effectue un prétraitement des champs basé sur une technique de minimisation au sens des moindres carrés développée dans code_Carmel3D par [Pierquin et. al., 2012] en s'inspirant des travaux de [Badics et Cendes, 2007].

On trouvera, sur la Figure A.1, la procédure décrite ci-dessus afin de construire \mathbf{j}_h et \mathbf{k}_h et, donc en conclusion déterminer, $\eta_{j,T}$ et $\eta_{k,T}$. On remarque que, pour la construction de \mathbf{k}_h , on passe par un prétraitement de $\Pi_h \mathbf{j}_h$, qui donne un champ à divergence nulle localement que l'on va appeler $\widetilde{\Pi_h \mathbf{j}_h}$. Cela introduit une erreur numérique, or on constate que globalement la convergence de l'estimateur est similaire à celle de l'erreur (pour le cas test analytique) et à celle des autres estimateurs (pour les autres cas tests). De plus, on voit que, grâce à ce prétraitement, l'algorithme basé sur la technique d'arbre fournit un champ $\widetilde{\Pi_h \mathbf{j}_h}$ (Figure A.2a) qualitativement similaire à \mathbf{j}_h (Figure A.2b).

Il est à noter que l'on a choisi cette procédure compte-tenu des contraintes du logiciel et des outils à disposition. Dans ce cas, au niveau théorique, la relation (2.4.7) n'est pas satisfaite exactement. Afin de rentrer dans le cadre du développement théorique, il faudrait réaliser une construction de \mathbf{k}_h en utilisant une autre construction qui ne demande pas la contrainte $\text{div } \Pi_h \mathbf{j}_h = 0$ localement. Pour conclure, si l'on dispose des flux équilibrés l_F (c'est-à-dire tels qu'ils satisfassent (2.4.1) à la page 43), on remarque l'importance au niveau théorique de calculer la partie électrique de l'estimateur en utilisant $\mathbf{j}_h \in \mathcal{RT}_1(\mathcal{T}_h)$ et pas uniquement $\Pi_h \mathbf{j}_h \in \mathcal{RT}_0(\mathcal{T}_h)$. On a en effet besoin des propriétés caractérisant un champ dans $\mathcal{RT}_1(\mathcal{T}_h)$, à savoir (2.4.2) et (2.4.3), dans

- la démonstration sur la divergence nulle globale (voir la preuve du Lemme 2.4.1 à la page 43)
- la démonstration sur l'efficacité de l'estimateur (voir la preuve du Théorème 2.4.5 à la page 49).

A.2. LANCEMENT DE L'ESTIMATEUR $\eta_{loc,flux}$ AVEC CODE_CARMEL3D

Dans cette section on explique comment un utilisateur de Code_Carmel3D peut obtenir l'estimateur équilibré $\eta_{loc,flux}$, en mettant l'accent sur les liens avec ce que l'on a présenté dans le paragraphe précédent. On choisit le Team Workshop 7 comme cas test de référence.

Pour le calcul avec la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ on dispose d'un fichier de type *.med*, nommé par exemple *team7.med*, qui contient la géométrie du problème et le maillage. Pour le calcul de l'estimateur, un calcul en magnétostatique sera effectué, il faut donc préparer un second fichier *.med* avec les noms des domaines adaptés au calcul en magnétostatique. En pratique,

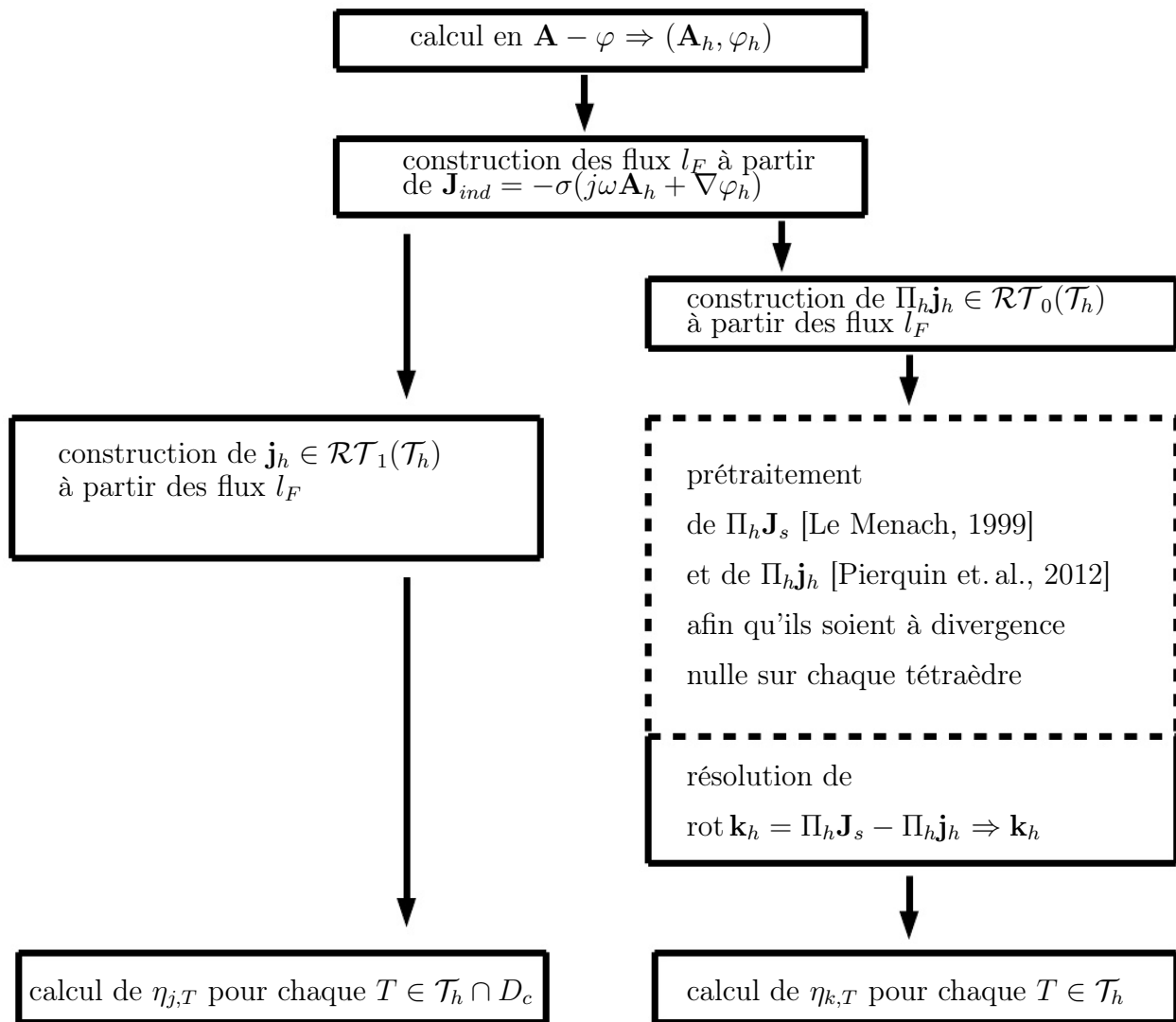


FIGURE A.1. Structure utilisée dans Code_Carmel3D pour obtenir l'estimateur équilibré $\eta_{loc,flux}$.

on fait une conversion de tous les domaines conducteurs en non-conducteurs *et* inducteurs, comme montré sur la Figure A.3 :

- on copie le *team7.med* en *team7_omega.med* ;
- on ouvre le *team7_omega.med* avec [SALOME, www.salome-platform.org] et on renomme tous les domaines conducteurs (avec le *target* COND) en non-conducteurs (avec le *target* NOCOND ou DIEL) et on fait un *duplicata* de ces domaines en mettant comme *target* CURRENT.

Etape 1

On effectue avant tout le calcul en magnétodynamique souhaité, avec les commandes habituelles, comme montré dans la Figure A.4a. La seule différence par rapport au calcul habituel réside dans le fait qu'il faut ajouter une ligne à la fin du fichier *in.gendof_aphi* pour choisir si on veut calculer l'estimateur et si oui le type :

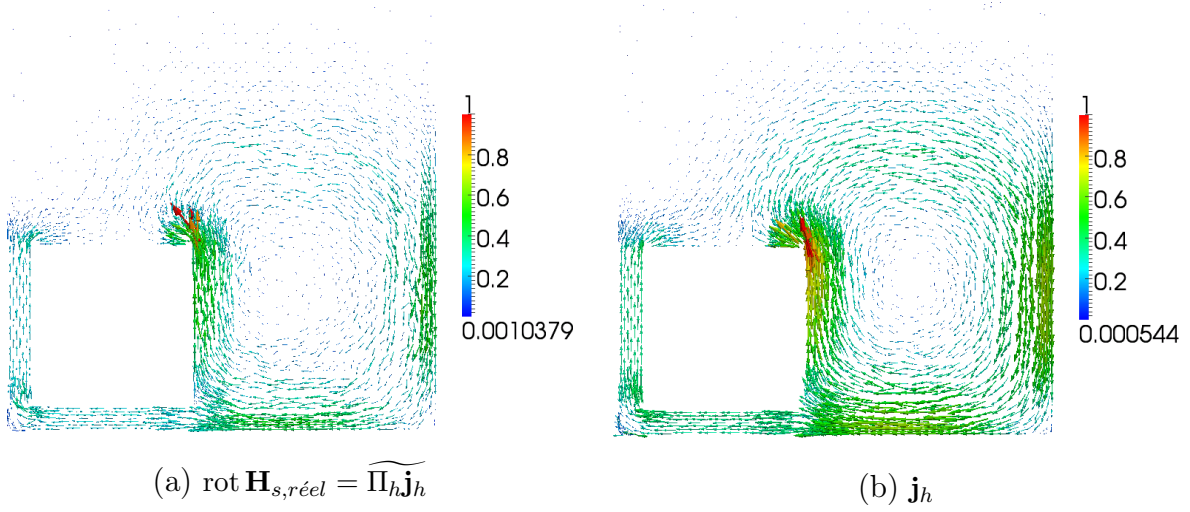


FIGURE A.2. Cas test Team Workshop 7 : simulation avec 50438 éléments du maillage effectuée à la section 4.1.2. Visualisation des densités courants dans la plaque conductrice.

(a) $\mathbf{j}_h \in \mathcal{RT}_1(\mathcal{T}_h)$ (à divergence nulle globale) à partir des flux issus de la solution numérique $(\mathbf{A}_h, \varphi_h)$.

(b) $\text{rot } \mathbf{H}_{s,r\acute{e}el}$, calculé à partir de $\widetilde{\Pi_h \mathbf{j}_h}$.

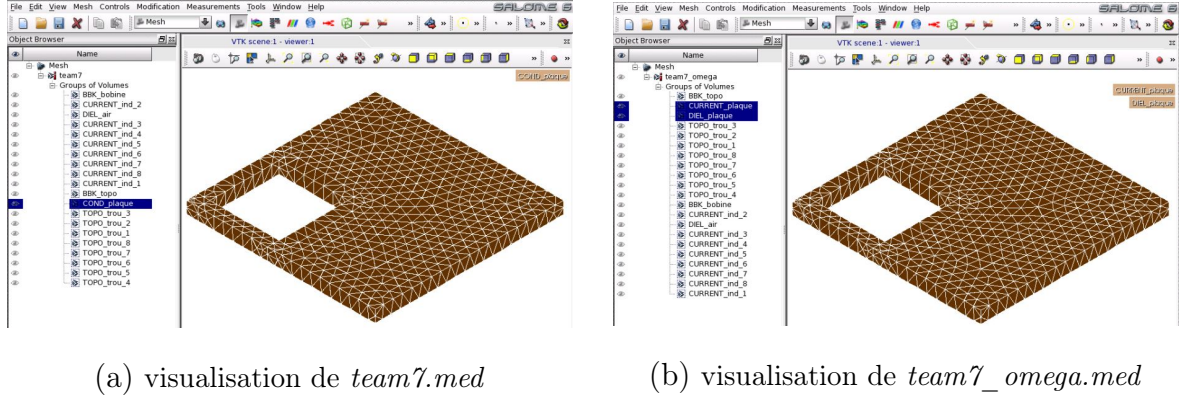


FIGURE A.3. Conversion du domaine conducteur du Team Workshop 7 en deux domaines : un domaine non-conducteur et un domaine de type inducteur (interface graphique de [SALOME, www.salome-platform.org]).

(a) domaine conducteur du fichier *team7.med*, nommé COND_plaque,

(b) domaines non-conducteur et inducteur du fichier *team7_omega.med*, nommés respectivement DIEL_plaque et CURRENT_plaque.

0 \rightarrow non,

1 \rightarrow estimateur $\eta_{loc,flux}$,

2 \rightarrow estimateur $\eta_{glob,H_{sh}}$.

Les options 1 et 2 permettront de stocker, dans un fichier nommé *Estimator_data*, les informations nécessaires pour calculer les estimateurs sans lancer à nouveau des exécutables, pendant le *postraitement*. Pour tout ce qui concerne le choix 2, c'est-à-dire le calcul de $\eta_{glob,H_{sh}}$, on renvoie au paragraphe A.3.

Une fois que l'on a choisi de calculer l'estimateur $\eta_{loc,flux}$, lorsque l'exécutable *postprocess.exe* aura terminé les commandes demandées par l'utilisateur (écrites dans *in.postprocess_aphi*), il produira automatiquement un fichier nommé J_h . Il sera utilisé pour le calcul de tous les flux l_F sur chaque face F , mentionnés dans le paragraphe précédent et définis dans (A.1.1), et donc pour le calcul de \mathbf{j}_h et $\Pi_h \mathbf{j}_h$.

<pre>\$path/gendof.exe -scale 0.001 < in.gendof_aphi \$path/genphys.exe < in.genphys_aphi \$path/genparam.exe < in.genparam_aphi \$path/fcarmel.exe < in.fcarmel_aphi \$path/postprocess.exe < in.postprocess_aphi</pre>	<pre>\$path/gendof.exe -scale 0.001 < in.gendof_omega \$path/genphys.exe < in.genphys_Js \$path/genparam.exe < in.genparam_omega \$path/fcarmel.exe < in.fcarmel_omega \$path/postprocess.exe < in.postprocess_omega \$path/gendof.exe -scale 0.001 < in.gendof_omega \$path/genphys.exe < in.genphys_Jh \$path/genparam.exe < in.genparam_omega \$path/fcarmel.exe < in.fcarmel_omega \$path/postprocess.exe < in.postprocess_omega \$path/gendof.exe -scale 0.001 < in.gendof_omega \$path/genphys.exe < in.genphys_Jh \$path/genparam.exe < in.genparam_omega \$path/fcarmel.exe < in.fcarmel_omega \$path/postprocess.exe < in.postprocess_omega</pre>
(a) calcul en $\mathbf{A} - \varphi$	(b) trois calculs en Ω

FIGURE A.4. Suite des exécutables à lancer avant le calcul final de l'estimateur d'erreur.

- (a) : suite des commandes pour lancer un calcul avec la formulation en $\mathbf{A} - \varphi$.
(b) : suite des commandes afin d'obtenir toutes les données nécessaires pour calculer \mathbf{k}_h .

Etape 2

Dès maintenant on effectue les calculs nécessaires pour calculer \mathbf{k}_h , donc les trois calculs en magnétostatique (i),ii),iii) à la page A-ii). On enchaîne alors les commandes spécifiées sur la Figure A.4b. Ci-dessous on remarque les différences par rapport au lancement standard de la formulation en Ω . On suit l'ordre d'imposition des sources déjà mentionné dans le paragraphe précédent.

- i) Avec le premier calcul en Ω on impose seulement $\Pi_h \mathbf{J}_s$ (dans le fichier *in.genphys_Js* on spécifie que l'intensité de courant associée à $\Pi_h \mathbf{j}_h$ est nulle). Le *postprocess.exe* nous donne, sans rien spécifier dans *in.postprocess_omega* le champ magnétique $\mathbf{k}_{h,s}$, stocké dans un fichier nommé *team7_Hs*.
- ii) Avec le deuxième calcul en Ω on impose seulement $\Pi_h \Re \mathbf{j}_h$, (dans le fichier *in.genphys_Jh* on spécifie que l'intensité de courant associée à $\Pi_h \mathbf{J}_s$ est nulle). Le *postprocess.exe* nous donne, sans rien spécifier dans *in.postprocess_omega* le champ magnétique $\mathbf{k}_{h,r\acute{e}el}$, stocké dans un fichier nommé *team7_Hreal*.
- iii) Avec le deuxième calcul en Ω on impose seulement $\Pi_h \Im \mathbf{j}_h$ (dans le fichier *in.genphys_Jh* on aura déjà spécifié - voir le point ii) - que l'intensité de courant associée à $\Pi_h \mathbf{J}_s$ est nulle). Le *postprocess.exe* nous donne le champ magnétique $\mathbf{k}_{h,imag}$, stocké dans un fichier nommé *team7_Himag*.

Quelque remarque utile :

- dans *in.gendof_omega*, quand il faut associer le type de courant dans les inducteurs où on veut imposer \mathbf{j}_h , on peut mettre des valeurs fictives car, en tout cas, on va lire la source directement du fichier J_h ;

- dans *in.genphys_Jh*, il faut se rappeler de spécifier les nouvelles caractéristiques des milieux qui sont "devenus" NOCOND/DIEL et associer une intensité de courant pour $\Pi_h \mathbf{j}_h$ égale à 1.

Etape 3

Maintenant que l'on dispose de toutes les données nécessaires pour calculer l'estimateur, on peut lancer le *postprocess.exe* avec, comme commandes d'entrée, les mots clés pour l'estimateur $\eta_{loc,flux}$, voir les Figures A.5a à A.5c :

in.postprocess_flux, qui est composé des fichiers standard *.param* et *.xmat* et, de plus, du fichier *team7_est.cmd*, qui est structuré comme montré sur la Figure A.5c.

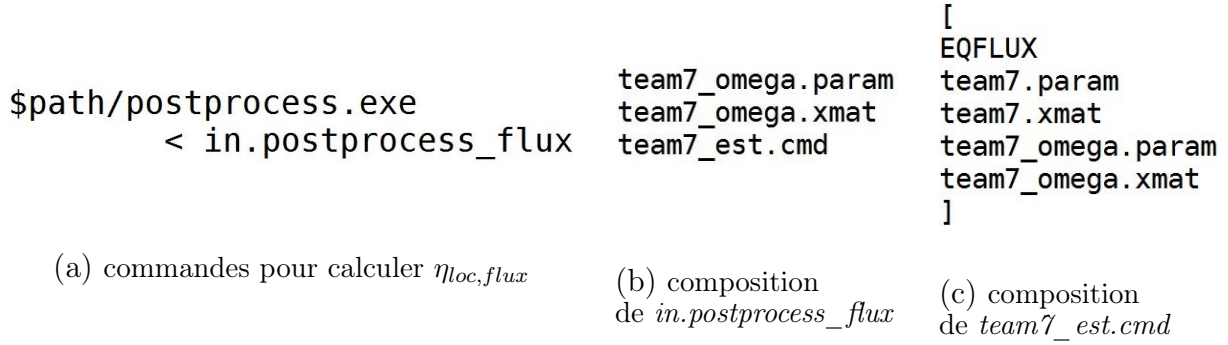


FIGURE A.5. Suite des calculs afin d'obtenir $\eta_{loc,flux}$:

- (a) lancement de l'exécutable du posttraitement avec les commandes pour l'estimateur $\eta_{loc,flux}$ (*in.postprocess_flux*) ;
- (b) composition du fichier *in.postprocess_flux* : liste des fichiers à spécifier ;
- (c) composition du fichier *team7_est.cmd* : mot clé associé à l'estimateur $\eta_{loc,flux}$ (*EQFLUX*) et fichiers à spécifier.

En conclusion en *output* on obtient :

- un fichier *Estimateur_flux.data* du type

```

Domaine      :
plaque
      Electric_Term : 0.1239190083817150E-01
      Magnetic_Term : 0.2949220805298097E-01
Domaine      :
air
      Electric_Term : 0.0000000000000000E+00
      Magnetic_Term : 0.9727920049534046E-01
Global_Equilibrated_Estimator : 0.1024040643296724E+00
Wmag Omega   0.35158943061583148
Ohmic losses Jh 3.0994878749773309
```

- un fichier *Estimator_flux_visu.med* pour visualiser la distribution de l'estimateur avec le logiciel [ParaVis, www.paraview.org].

A.3. LANCEMENT DE L'ESTIMATEUR $\eta_{glob,H_{sh}}$ AVEC CODE_CARMEL3D

Afin de calculer l'estimateur $\eta_{glob,H_{sh}}$ dans Code_Carmel3D, on effectue le calcul en magnéto-dynamique souhaité, avec les commandes habituelles, comme montré sur la Figure A.4a,

en se rappelant de spécifier à la fin du fichier *in.gendof_aphi* la valeur 2, qui est associée au calcul de $\eta_{glob,H_{sh}}$.

Ensuite, ou en parallèle, il faut lancer le même calcul en $\mathbf{T} - \Omega$, par exemple comme celui proposé sur la Figure A.6a. En particulier, dans *in.postprocess_dual* il faut spécifier les commandes classiques, écrites sur la Figure A.6b. Enfin, dans le fichier *team7_dual.cmd*, les commandes avec les mots clés associées à l'estimateur $\eta_{glob,H_{sh}}$, c'est-à-dire les commandes montrées sur la Figure A.6c.

On obtient en *output* *Estimateur_dual.data* et *Estimateur_dual_visu.med* qui ont la même structure que les données de l'estimateur $\eta_{loc,flux}$ déjà décrits à la fin du paragraphe précédent.

<pre>mv team7.med team7t.med \$path/gendof.exe -scale 0.001< in.gendof_tomega \$path/genphys.exe < in.genphys_tomega \$path/genparam.exe < in.genparam_tomega \$path/fcarmel.exe < in.fcarmel_tomega \$path/postprocess.exe < in.postprocess_dual mv team7t.med team7.med</pre>	<pre>team7t.param team7t.xmat team7_dual.cmd</pre>	<pre>[EQDUAL team7.param team7.xmat team7t.param team7t.xmat]</pre>
(a)	(b)	(c)

FIGURE A.6. Suite des calculs afin d'obtenir $\eta_{glob,H_{sh}}$ une fois que l'on a effectué une simulation en $\mathbf{A} - \varphi$:

- (a) lancement de la formulation en $\mathbf{T} - \Omega$ et ensuite de l'exécutable du posttraitement avec les commandes pour l'estimateur $\eta_{glob,H_{sh}}$ (*in.postprocess_dual*) ;
- (b) composition du fichier *in.postprocess_dual* : liste des fichiers à spécifier ;
- (c) composition du fichier *team7_dual.cmd* : mot clé associé à l'estimateur $\eta_{glob,H_{sh}}$ (*EQDUAL*) et fichiers à spécifier.

Bibliographie

- [Ainsworth et Oden 2000] AINSWORTH, M. et ODEN, J. T. : *A posteriori error estimation in finite element analysis*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2000 (Pure and Applied Mathematics (New York)). – xx+240 p. 1, 2, 21, 23, 43, 50
- [Akrivis et al. 2006] AKRIVIS, G. ; MAKRIDAKIS, C. et NOCHETTO, R. H. : A posteriori error estimates for the Crank-Nicolson method for parabolic equations. Dans : *Math. Comp.* 75(254) (2006), pp. 511–531. 2
- [Albanese et Rubinacci 1990] ALBANESE, R. et RUBINACCI, G. : Formulation of the eddy-current problem. Dans : *COMPEL* 137 (1990), pp. 16–22. 9
- [Alonso 1999] ALONSO, A. : A mathematical justification of the low-frequency heterogeneous time-harmonic Maxwell equations. Dans : *Math. Models Methods Appl. Sci.* 9(3) (1999), pp. 475–489. 5
- [Alonso Rodríguez et al. 2003] ALONSO RODRÍGUEZ, A. ; FERNANDES, P. et VALLI, A. : Weak and strong formulations for the time-harmonic eddy-current problem in general multi-connected domains. Dans : *European J. Appl. Math.* 14(4) (2003), pp. 387–406. 9
- [Ammari et al. 2000] AMMARI, H. ; BUFFA, A. et NÉDÉLEC, J.-C. : A justification of eddy currents model for the Maxwell equations. Dans : *SIAM J. Appl. Math.* 60(5) (2000), pp. 1805–1823. 5
- [Babuška et Rheinboldt 1978a] BABUŠKA, I. et RHEINBOLDT, W. C. : Error estimates for adaptive finite element computations. Dans : *SIAM J. Numer. Anal.* 15(4) (1978), pp. 736–754. 21
- [Babuška et Rheinboldt 1978b] BABUŠKA, I. et RHEINBOLDT, W.C. : A-posteriori error estimates for the finite element method. Dans : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 12(10) (1978), pp. 1597–1615. 21
- [Babuška et Strouboulis 2001] BABUŠKA, I. et STROUBOULIS, T. : *The finite element method and its reliability*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2001 (Numerical Mathematics and Scientific Computation). – xii+802 p. 1, 21
- [Babuška et al. 2011] BABUŠKA, I. ; WHITEMAN, J. R. et STROUBOULIS, T. : *Finite elements*. Oxford University Press, Oxford, 2011. – xii+323 p. – An introduction to the method and error estimation. 1
- [Badics et Cendes 2007] BADICS, Z. et CENDES, Z. J. : Source Field Modeling by Mesh Incidence Matrices. Dans : *IEEE Transactions on Magnetics* 43(4) (2007), April, pp. 1241–1244. A-iii
- [Bank et Smith 1993] BANK, R. E. et SMITH, R. K. : A posteriori error estimates based on hierarchical bases. Dans : *SIAM J. Numer. Anal.* 30(4) (1993), pp. 921–935. 24
- [Bank et Weiser 1985] BANK, R. E. et WEISER, A. : Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations. Dans : *Math. Comp.* 44(170) (1985), pp. 283–301.

- 22, 24
- [Beck et al. 2000] BECK, R.; HIPTMAIR, R.; HOPPE, R. H. W. et WOHLMUTH, B. : Residual based a posteriori error estimators for eddy current computation. Dans : *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 34(1) (2000), pp. 159–182. 17, 21
- [Becker et Rannacher 2001] BECKER, R. et RANNACHER, R. : An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods. Dans : *Acta Numer.* 10 (2001), pp. 1–102. 24
- [Bergam et al. 2005] BERGAM, A.; BERNARDI, C. et MGHAZLI, Z. : A posteriori analysis of the finite element discretization of some parabolic equations. Dans : *Mathematics of computation* 74(251) (2005), pp. 1117–1138. 63, 64, 65
- [Bernardi et Métivet 2000] BERNARDI, C. et MÉTIVET, B. : Indicateurs d’erreur pour l’équation de la chaleur. Dans : *Revue européenne des éléments finis* 9 (2000), pp. 425–438. 63, 64
- [Bernardi et Süli 2005] BERNARDI, C. et SÜLI, E. : Time and space adaptivity for the second-order wave equation. Dans : *Math. Models Methods Appl. Sci.* 15(2) (2005), pp. 199–225. 63
- [Berrone 2006] BERRONE, Stefano : Robust a posteriori error estimates for finite element discretizations of the heat equation with discontinuous coefficients. Dans : *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 40(6) (2006), pp. 991–1021 (2007). 63, 64
- [Bíró 1999] BÍRÓ, O. : Edge element formulations of eddy current problems. Dans : *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 169(3-4) (1999), pp. 391–405. 9
- [Bíró et Preis 1990] BÍRÓ, O. et PREIS, K. : Finite element analysis of 3-D eddy currents. Dans : *Magnetics, IEEE Transactions on* 26(2) (1990), pp. 418–423. 9
- [Boffi et al. 2013] BOFFI, D.; BREZZI, F. et FORTIN, M. : *Springer Series in Computational Mathematics*. Vol. 44 : *Mixed finite element methods and applications*. Springer, Heidelberg, 2013. – xiv+685 p. 19, 36
- [Bossavit 1985] BOSSAVIT, A. : Two dual formulations of the 3-D eddy-currents problem. Dans : *COMPEL* 4(2) (1985), pp. 103–116. 9
- [Bossavit 1993] BOSSAVIT, A. : *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Vol. 14 : *Électromagnétisme, en vue de la modélisation*. Paris : Springer-Verlag, 1993. – xiv+174 p. 1, 5
- [Bossavit 1998] BOSSAVIT, Alain : *Computational electromagnetism*. San Diego, CA : Academic Press Inc., 1998 (Electromagnetism). – xx+352 p. – Variational formulations, complementarity, edge elements. 1
- [Braess et Schöberl 2008] BRAESS, D. et SCHÖBERL, J. : Equilibrated residual error estimator for edge elements. Dans : *Math. Comp.* 77(262) (2008), pp. 651–672. 23, 44
- [Bürg 2012] BÜRG, M. : A residual-based a posteriori error estimator for the *hp*-finite element method for Maxwell’s equations. Dans : *Appl. Numer. Math.* 62(8) (2012), pp. 922–940. 21
- [Bürg 2013] BÜRG, M. : Convergence of an automatic *hp*-adaptive finite element strategy for Maxwell’s equations. Dans : *Appl. Numer. Math.* 72 (2013), pp. 188–204. 1
- [Carstensen et Funken 2000] CARSTENSEN, C. et FUNKEN, S. A. : Constants in Clément-interpolation error and residual based a posteriori error estimates in finite element methods. Dans : *East-West J. Numer. Math.* 8(3) (2000), pp. 153–175. 22
- [Cheaytani 2016] CHEAYTANI, J. : *Calcul par éléments finis des pertes supplémentaires dans les motorisations performantes*, Université de Lille 1 Sciences et Technologies, Thèse de Doctorat, 2016. 145

- [Ciarlet 1978] CIARLET, Philippe G. : *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1978. – xix+530 p. – Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4. 13, 14, 52, 73
- [Clément 1975] CLÉMENT, Ph. : Approximation by finite element functions using local regularization. Dans : *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. RAIRO Analyse Numérique* 9(R-2) (1975), pp. 77–84. 17, 18
- [Cochez-Dhondt 2007] COCHEZ-DHONDT, S. : *Méthodes d'éléments finis et estimations d'erreur a posteriori*, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, Thèse de Doctorat, 2007. 24, 42, 43, 44, 47
- [Cochez-Dhondt et Nicaise 2007] COCHEZ-DHONDT, S. et NICAISE, S. : Robust a posteriori error estimation for the Maxwell equations. Dans : *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196(25-28) (2007), pp. 2583–2595. 21
- [Cochez-Dhondt et Nicaise 2010] COCHEZ-DHONDT, S. et NICAISE, S. : A posteriori error estimators based on equilibrated fluxes. Dans : *Comput. Methods Appl. Math.* 10(1) (2010), pp. 49–68. 42, 49
- [Costabel et. al. 1999] COSTABEL, M. ; DAUGE, M. et NICAISE, S. : Singularities of Maxwell interface problems. Dans : *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 33(3) (1999), pp. 627–649. 34, 47
- [Costabel et. al. 2003] COSTABEL, M. ; DAUGE, M. et NICAISE, S. : Singularities of eddy current problems. Dans : *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 37(5) (2003), pp. 807–831. 85, 118
- [Creusé et. al. 2004] CREUSÉ, E. ; NICAISE, S. et KUNERT, G. : A posteriori error estimation for the Stokes problem : anisotropic and isotropic discretizations. Dans : *Math. Models Methods Appl. Sci.* 14(9) (2004), pp. 1297–1341. 17, 20
- [Creusé et. al. 2012] CREUSÉ, E. ; NICAISE, S. ; TANG, Z. ; LE MENACH, Y. ; NEMITZ, N. et PIRIOU, F. : Residual-based *a posteriori* estimators for the $\mathbf{A} - \phi$ magnetodynamic harmonic formulation of the Maxwell system. Dans : *Math. Models Methods Appl. Sci.* 22(5) (2012), pp. 1150028, 30. 21, 26, 27, 29, 30, 54, 59, 63, 69, 70, 76, 83, 85, 103, 118, 122
- [Creusé et. al. 2013] CREUSÉ, E. ; NICAISE, S. ; TANG, Z. ; LE MENACH, Y. ; NEMITZ, N. et PIRIOU, F. : Residual-based a posteriori estimators for the \mathbf{T}/Ω magnetodynamic harmonic formulation of the Maxwell system. Dans : *Int. J. Numer. Anal. Model.* 10(2) (2013), pp. 411–429. 21, 27, 29, 30, 35, 122
- [Creusé et. al. 2014] CREUSÉ, E. ; NICAISE, S. et TITTARELLI, R. : Space-time residual-based a posteriori estimators for the $\mathbf{A} - \varphi$ magnetodynamic formulation of the Maxwell system. Dans : *Comput. Methods Appl. Math.* 14(4) (2014), pp. 429–460. 65
- [Creusé et. al. 2016] CREUSÉ, E. ; NICAISE, S. et TITTARELLI, R. : A guaranteed equilibrated error estimator for the $\mathbf{A} - \varphi$ and $\mathbf{T} - \Omega$ magnetodynamic harmonic formulations of the Maxwell system. Dans : *IMA Journal of Numerical Analysis* , doi : 10.1093/imanum/drw026 (2016). 24
- [Dolejší et. al. 2013] DOLEJŠÍ, V. ; ERN, A. et VOHRALÍK, M. : A framework for robust a posteriori error control in unsteady nonlinear advection-diffusion problems. Dans : *SIAM J. Numer. Anal.* 51(2) (2013), pp. 773–793. 63
- [Dular 2009] DULAR, P. : A Posteriori Error Estimation of Finite Element Solutions via the Direct Use of Higher Order Hierarchical Test Functions. Dans : *IEEE Transactions on Magnetism* 45(3) (2009), March, pp. 1360–1363. 24
- [Eriksson et Johnson 1991] ERIKSSON, K. et JOHNSON, C. : Adaptive finite element methods for parabolic problems. I. A linear model problem. Dans : *SIAM J. Numer. Anal.*

- 28(1) (1991), pp. 43–77. 2
- [Eriksson et Johnson 1995] ERIKSSON, K. et JOHNSON, C. : Adaptive finite element methods for parabolic problems. IV. Nonlinear problems. Dans : *SIAM J. Numer. Anal.* 32(6) (1995), pp. 1729–1749. 2
- [Eriksson et al. 1998] ERIKSSON, K. ; JOHNSON, C. et LARSSON, S. : Adaptive finite element methods for parabolic problems. VI. Analytic semigroups. Dans : *SIAM J. Numer. Anal.* 35(4) (1998), pp. 1315–1325 (electronic). 2
- [Ern et Guermond 2002] ERN, A. et GUERMOND, J.-L. : *Eléments finis : théorie, applications, mise en œuvre*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2002. 69, 123
- [Ern et Vohralík 2010] ERN, A. et VOHRALÍK, M. : A posteriori error estimation based on potential and flux reconstruction for the heat equation. Dans : *SIAM J. Numer. Anal.* 48(1) (2010), pp. 198–223. 63
- [Ern et Vohralík 2015] ERN, A. et VOHRALÍK, M. : Polynomial-degree-robust a posteriori estimates in a unified setting for conforming, nonconforming, discontinuous Galerkin, and mixed discretizations. Dans : *SIAM J. Numer. Anal.* 53(2) (2015), pp. 1058–1081. 23
- [Girault et Raviart 1986] GIRAULT, V. et RAVIART, P.-A. : *Finite element methods for Navier-Stokes equations : theory and algorithms*. Berlin, New York : Springer-Verlag, 1986 (Springer series in computational mathematics). – Extended version of : Finite element approximation of the Navier-Stokes equations. 16
- [Golias et al. 1994] GOLIAS, N.A. ; TSIBOUKIS, T.D. et BOSSAVIT, A. : Constitutive inconsistency : rigorous solution of Maxwell equations based on a dual approach. Dans : *Magnetics, IEEE Transactions on* 30(5) (1994), Sep, pp. 3586–3589. 23
- [González-Estrada et al. 2014] GONZÁLEZ-ESTRADA, O. A. ; NADAL, E. ; RÓDENAS, J. J. ; KERFRIDEN, P. ; BORDAS, S. P. A. et FUENMAYOR, F. J. : Mesh adaptivity driven by goal-oriented locally equilibrated superconvergent patch recovery. Dans : *Comput. Mech.* 53(5) (2014), pp. 957–976. 24
- [Graham et al. 2015] GRAHAM, I. G. ; SCHEICHL, R. et ULLMANN, E. : Mixed finite element analysis of lognormal diffusion and multilevel Monte Carlo methods. Dans : *Stochastic Partial Differential Equations : Analysis and Computations* (2015), pp. 1–35. 47
- [Grisvard 1985] GRISVARD, P. : *Monographs and Studies in Mathematics*. Vol. 24 : *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985. – xiv+410 p. 34
- [Henneron et al. 2007] HENNERON, T. ; LE MENACH, Y. ; PIRIOU, F. ; MOREAU, O. ; CLENET, S. ; DUCREUX, J.-P. et VÉRITÉ, J.-C. : Source field computation in NDT applications. Dans : *IEEE Trans. Magn.* 43 (4) (2007), pp. 1785–1788. 133
- [Hiptmair et al. 2008] HIPTMAIR, R. ; KRÄMER, F. et OSTROWSKI, J. : A Robust Maxwell Formulation for All Frequencies. Dans : *IEEE Trans. Magn.* 44 (6) (2008), pp. 682–685. 9
- [Johnson et al. 1990] JOHNSON, C. ; NIE, Y. Y. et THOMÉE, V. : An a posteriori error estimate and adaptive timestep control for a backward Euler discretization of a parabolic problem. Dans : *SIAM J. Numer. Anal.* 27(2) (1990), pp. 277–291. 2
- [Kelly 1984] KELLY, D. W. : The self-equilibration of residuals and complementary a posteriori error estimates in the finite element method. Dans : *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 20(8) (1984), pp. 1491–1506. 22
- [Kunert 1999] KUNERT, G. : *A Posteriori Error Estimation for Anisotropic Tetrahedral and Triangular Finite Element Meshes*, Ph.D. thesis, TU Chemnitz, <http://archiv.tu-chemnitz.de/pub/1999/0012/index.html>, Thèse de Doctorat, 1999. 20
- [Ladevèze 1975] LADEVÈZE, P. : *Comparaison de modèles de mécanique des milieux continus*, Université Paris VI, Thèse de Doctorat, 1975. 22

- [Ladevèze et Leguillon 1983] LADEVÈZE, P. et LEGUILLON, D. : Error estimate procedure in the finite element method and applications. Dans : *SIAM J. Numer. Anal.* 20(3) (1983), pp. 485–509. 22, 23
- [Le Menach 1999] LE MENACH, Y. : *Contribution à la modélisation numérique tridimensionnelle des systèmes électrotechniques : prise en compte des inducteurs*, Université de Lille 1 Sciences et Technologies, Thèse de Doctorat, 1999. A-iii, A-iv
- [Leonard et Rodger 1988] LEONARD, P. J. et RODGER, D. : Voltage forced coils for 3D finite-element electromagnetic models. Dans : *IEEE Transactions on Magnetics* 24(6) (1988), Nov, pp. 2579–2581. 123
- [Li et al. 1994a] LI, C. ; REN, L. et RAZEK, A. : An approach to adaptive mesh refinement for three-dimensional eddy-current computations. Dans : *IEEE Transactions on Magnetics* 30(1) (1994), Jan, pp. 113–117. 23
- [Li et al. 1994b] LI, C. ; REN, Z. et RAZEK, A. : Complementarity between the energy results of H and E formulations in eddy-current problems. Dans : *IEE Proceedings - Science, Measurement and Technology* 141(1) (1994), Jan, pp. 25–30. 123
- [Li et al. 1995] LI, C. ; REN, Z. et RAZEK, A. : Application of complementary formulations and adaptive mesh refinements to non-linear magnetostatic problems. Dans : *Magnetics, IEEE Transactions on* 31(3) (1995), May, pp. 1376–1379. 23
- [Li et Lin 2015] LI, J. et LIN, Y. : A priori and posteriori error analysis for time-dependent Maxwell’s equations. Dans : *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 292 (2015), pp. 54–68. 63
- [Lions et Magenes 1968] LIONS, J.-L. et MAGENES, E. : *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1.* Dunod, Paris, 1968 (Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17). – xx+372 p. 18, 64
- [Luce et Wohlmuth 2004] LUCE, R. et WOHLMUTH, B. I. : A local a posteriori error estimator based on equilibrated fluxes. Dans : *SIAM J. Numer. Anal.* 42(4) (2004), pp. 1394–1414. 23
- [Marmin et al. 2000] MARMIN, F. ; CLÉNET, S. ; BOUILLAUT, F. et PIRIOU, F. : Calculation of complementary solutions in 2D finite element method application to error estimation. Dans : *IEEE Transactions on Magnetics* 36 (4) (2000), pp. 1583 – 1587. 23
- [Marmin et al. 1998] MARMIN, F. ; CLÉNET, S. et PIRIOU, F. : Error estimation of finite element solution in nonlinear magnetostatic 2D problems. Dans : *IEEE Transactions on Magnetics* 34 (5) (1998), pp. 3268 – 3271. 23
- [Marques et al. 2000] MARQUES, G. ; CLÉNET, S. et PIRIOU, F. : Error estimators in 3D linear magnetostatics. Dans : *Magnetics, IEEE Transactions on* 36(4) (2000), Jul, pp. 1588–1591. 23
- [Meunier 2008] MEUNIER, G. (Dir.) : *The finite element method for electromagnetic modeling*. ISTE, London, 2008. – xiv+602 p. – Translated from the 2008 French original. 9
- [Monk 1998] MONK, P. : A posteriori error indicators for Maxwell’s equations. Dans : *J. Comput. Appl. Math.* 100(2) (1998), pp. 173–190. 21
- [Monk 2003] MONK, P. : *Finite element methods for Maxwell’s equations*. New York : Oxford University Press, 2003 (Numerical Mathematics and Scientific Computation). – xiv+450 p. 1, 12, 16, 21, 32, 33
- [Nédélec 1980] NÉDÉLEC, J.-C. : Mixed finite elements in \mathbf{R}^3 . Dans : *Numer. Math.* 35(3) (1980), pp. 315–341. 19

- [Neittaanmäki et Repin 2004] NEITTAANMÄKI, P. et REPIN, S. : *Studies in Mathematics and its Applications*. Vol. 33 : *Reliable methods for computer simulation*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2004. – x+305 p. – Error control and a posteriori estimates. 1, 24
- [Nicaise 2001] NICAISE, S. : Edge elements on anisotropic meshes and approximation of the Maxwell equations. Dans : *SIAM J. Numer. Anal.* 39(3) (2001), pp. 784–816 (electronic). 48
- [Nicaise 2005] NICAISE, S. : On Zienkiewicz-Zhu error estimators for Maxwell’s equations. Dans : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 340(9) (2005), pp. 697–702. 24
- [Nicaise 2015] NICAISE, S. : Existence results for the $\mathbf{A} - \varphi$ magnetodynamic formulation of the Maxwell system. Dans : *Appl. Anal.* 94(5) (2015), pp. 863–878. 66
- [Nicaise et Creusé 2003] NICAISE, S. et CREUSÉ, E. : A posteriori error estimation for the heterogeneous Maxwell equations on isotropic and anisotropic meshes. Dans : *Calcolo* 40(4) (2003), pp. 249–271. 21
- [Nicaise et Soualem 2005] NICAISE, S. et SOUALEM, N. : A posteriori error estimates for a nonconforming finite element discretization of the heat equation. Dans : *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 39(2) (2005), pp. 319–348. 63, 64, 65, 79, 85, 101, 103
- [Nochetto et.al. 2000a] NOCHETTO, R. H. ; SAVARÉ, G. et VERDI, C. : A posteriori error estimates for variable time-step discretizations of nonlinear evolution equations. Dans : *Comm. Pure Appl. Math.* 53(5) (2000), pp. 525–589. 2
- [Nochetto et.al. 2000b] NOCHETTO, R. H. ; SCHMIDT, A. et VERDI, C. : A posteriori error estimation and adaptivity for degenerate parabolic problems. Dans : *Math. Comp.* 69(229) (2000), pp. 1–24. 2
- [Picasso 1998] PICASSO, M. : Adaptive finite elements for a linear parabolic problem. Dans : *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 167(3-4) (1998), pp. 223–237. 63, 64
- [Pierquin et.al. 2012] PIERQUIN, A. ; LE MENACH, Y. ; ROGER, J.-Y. et CHEVALLIER, L. : Imposition d’un courant uniforme dans un conducteur. Dans : *Numelec, Marseille* 7 (2012). A-iii, A-iv
- [Prager et Synge 1947] PRAGER, W. et SYNGE, J. L. : Approximations in elasticity based on the concept of function space. Dans : *Quart. Appl. Math.* 5 (1947), pp. 241–269. 22
- [Rapetti et Rousseaux 2011] RAPETTI, F. et ROUSSEAUX, G. : Implications of Galilean electromagnetism in numerical modeling. Dans : *Computation in Electromagnetics (CEM 2011), IET 8th International Conference on*, April 2011, pp. 1–2. 6
- [Remacle et.al. 1996] REMACLE, J. F. ; DULAR, P. ; GENON, A. et LEGROS, W. : A posteriori error estimation and adaptive meshing using error in constitutive relation. Dans : *IEEE Transactions on Magnetics* 32(3) (1996), pp. 1369 – 1372. 23
- [Remacle et.al. 1998] REMACLE, J.-F. ; GEUZAIN, C. ; DULAR, P. ; HEDIA, H. et LEGROS, W. : Error estimation based on a new principle of projection and reconstruction. Dans : *IEEE Transactions on Magnetics* 34 (5) (1998), pp. 3264 – 3267. 23
- [Ren 1996] REN, Z. : Influence of the RHS on the convergence behaviour of the curl-curl equation. Dans : *Magnetics, IEEE Transactions on* 32(3) (1996), pp. 655–658. 14
- [Rikabi et.al. 1988a] RIKABI, J. ; BRYANT, C. F. et FREEMAN, E. M. : An error-based approach to complementary formulations of static field solutions. Dans : *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 26(9) (1988), pp. 1963–1987. 23
- [Rikabi et.al. 1988b] RIKABI, J. ; BRYANT, C.F. et FREEMAN, E.M. : Error-based derivation of complementary formulations for the eddy-current problem. Dans : *Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education - Reviews, IEE Proceedings A* 135(4) (1988), Apr, pp. 208–216. 23

- [Rodriguez et Valli 2010] RODRIGUEZ, A.A. et VALLI, A. : *Eddy Current Approximation of Maxwell Equations : Theory, Algorithms and Applications*. Springer Milan, 2010 (MS&A). 5, 9
- [Schöberl 2008] SCHÖBERL, J. : A posteriori error estimates for Maxwell equations. Dans : *Math. Comp.* 77(262) (2008), pp. 633–649. 21
- [Showalter 1977] SHOWALTER, R. E. : *Hilbert space methods for partial differential equations*. London : Pitman, 1977. – xii+196 p. – Monographs and Studies in Mathematics, Vol. 1. 66
- [Tang 2012] TANG, Z. : *Estimateurs d’erreur a posteriori résiduels en éléments finis pour la résolution de problèmes d’électromagnétisme en formulation potentielles*, Université de Lille 1 Sciences et Technologies, Thèse de Doctorat, 2012. 3, 44, 45, 122
- [Tang et al. 2013] TANG, Z. ; LE MENACH, Y. ; CREUSÉ, E. ; NICAISE, S. ; PIRIOU, F. et NEMITZ, N. : Residual and equilibrated error estimators for magnetostatic problems solved by finite element method. Dans : *Magnetics, IEEE Transactions on* 49(12) (2013), Dec, pp. 5715–5723. 23, 122
- [Tittarelli et al. 2015] TITTARELLI, R. ; LE MÉNACH, Y. ; CREUSÉ, E. ; NICAISE, S. ; PIRIOU, F. ; MOREAU, O. et BOITEAU, O. : Space-Time Residual-Based a posteriori Estimator for the $\mathbf{A} - \varphi$ Formulation in Eddy Current Problems. Dans : *IEEE Transactions on Magnetics* 51(3) (2015), March, pp. 1–5. 141
- [Veese et Verfürth 2009] VEESER, A. et VERFÜRTH, R. : Explicit upper bounds for dual norms of residuals. Dans : *SIAM J. Numer. Anal.* 47(3) (2009), pp. 2387–2405. 22
- [Vejchodský 2004] VEJCHODSKÝ, T. : Local a posteriori error estimator based on the hypercircle method. Dans : *ECCOMAS*, 2004. 23
- [Verfürth 1996] VERFÜRTH, R. : *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Amsterdam : Chichester and Stuttgart : Wiley and Teubner, 1996. 1, 20, 21
- [Verfürth 2003] VERFÜRTH, R. : A posteriori error estimates for finite element discretizations of the heat equation. Dans : *Springer-Verlag* 40(3) (2003), pp. 195–212. 63, 64
- [Verfürth 2005a] VERFÜRTH, R. : Robust a posteriori error estimates for nonstationary convection-diffusion equations. Dans : *SIAM J. Numer. Anal.* 43(4) (2005), pp. 1783–1802 (electronic). 2
- [Verfürth 2005b] VERFÜRTH, R. : Robust a posteriori error estimates for stationary convection-diffusion equations. Dans : *SIAM J. Numer. Anal.* 43(4) (2005), pp. 1766–1782 (electronic). 2
- [Vohralík 2011] VOHRALÍK, M. : Guaranteed and fully robust a posteriori error estimates for conforming discretizations of diffusion problems with discontinuous coefficients. Dans : *J. Sci. Comput.* 46(3) (2011), pp. 397–438. 23
- [Zheng et al. 2006] ZHENG, W. ; CHEN, Z. et WANG, L. : An adaptive finite element method for the H - ψ formulation of time-dependent eddy current problems. Dans : *Numer. Math.* 103(4) (2006), pp. 667–689. 63
- [Zheng et Zhang 2008] ZHENG, W. et ZHANG, F. : Adaptive finite element frequency domain method for eddy current problems. Dans : *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 197(13-16) (2008), pp. 1233–1241. 63
- [Zienkiewicz et Zhu 1987] ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. : A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. Dans : *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 24(2) (1987), pp. 337–357. 23