

N° d'ordre : 42088



École doctorale n° 072 : Sciences Pour l'Ingénieur (SPI)

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

**Université de Lille 1 :
Sciences et Technologies**

Spécialité doctorale "Mécanique des Fluides"

présentée et soutenue publiquement par

Kan ZHU

le 01 Juillet 2016

Stabilité non linéaire d'ondes de surface d'un film liquide dévalant un plan incliné et simulation numérique d'ondes interfaciales de deux fluides non miscibles stratifiés

Jury

M. H. NAJI	Professeur	LGCgE, Université d'Artois	Président
M. F. ERCHIQUI	Professeur	Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue	Rapporteur
M. S. TARDU	MCF-HDR	LEGI, INP de Grenoble	Rapporteur
M. S. GUILLOU	Professeur	LUSAC, Université de Cherbourg	Examineur
M. A. BOUDLAL	MCF-HDR	LML, Université de Lille 1	Directeur de thèse
M. G. MOMPEAN	Professeur	LML, Université de Lille 1	Co-encadrant

Laboratoire de Mécanique de Lille (LML)

UMR CNRS 8107, Cité Scientifique,
59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

T
H
È
S
E

Remerciements

Ce travail a été mené au sein du Laboratoire de Mécanique de Lille (**LML**). Je suis heureux de pouvoir exprimer ici ma profonde reconnaissance à A. BOUDLAL, MCF-HDR, directeur de thèse (USTL-LML), et G. MOMPEAN, Professeur, co-encadrant (USTL-LML). Leurs disponibilités et nos fructueuses discussions ont été pour moi une source permanente d'encouragement et m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier vivement monsieur le professeur H. Naji de me faire l'honneur de présider le jury de cette thèse.

J'exprime sincèrement ma gratitude à messieurs les professeurs F. ERCHIQUI et S. TARDU, pour l'intérêt qu'ils ont témoigné à mon travail et pour le temps qu'ils ont consacré à la tâche de rapporteur.

Monsieur le professeur S. GUILLOU, qui a bien voulu accepter de juger ce travail : qu'il trouve ici l'expression de mes gratitudees.

Je tiens aussi à mentionner le plaisir que j'ai eu à travailler au sein de l'équipe de recherche **1** (Fluides complexes et en interactions) au **LML**, et j'en remercie ici tous les membres de l'équipe.

Je voudrais également saluer L.T.Lâm, assistant ingénieur au département de mécanique de l'UFR de mathématiques, pour son aide précieuse, son savoir faire dans les pannes redondantes des outils informatiques, ainsi que toutes les personnes ayant participé à la réalisation matérielle de ce travail.

Enfin, je remercie profondément mes chers parents et toute ma famille pour leur soutien inconditionnel, malgré la distance qui nous sépare durant ces trois dernières années.

Résumé

Ce sujet de thèse s'inscrit dans un domaine en plein développement depuis quelques décennies. Il comporte deux parties :

La première partie fait suite à une série de travaux théoriques et numériques en écoulement vertical, effectués au LML par A. BOUDLAL et LIAPIDEVSKI (2012). On considère un film liquide non-newtonien dévalant une paroi plane inclinée. On cherche à construire des solutions d'ondes périodiques avec discontinuités (ODP) d'amplitude finie, et on met en évidence les conditions nécessaires d'existence de ces ODP. On fait une étude à la fois analytique et numérique de la stabilité non-linéaire de ce type d'ondes. Les équations modulées pour un train d'ondes quasi-périodiques avec discontinuités permettent d'aboutir à un critère de stabilité dépendant de deux paramètres (expression intégrodifférentielle), difficile à mettre en œuvre pour le tracé des diagrammes de stabilité des ODP, à cause de la présence des singularités aux frontières d'hyperbolicité (faibles et maximales amplitudes). Pour illustrer ces résultats, un calcul numérique, à l'aide des formules asymptotiques au voisinage des singularités, permet de présenter des diagrammes de stabilité pour quelques valeurs des paramètres de l'écoulement.

La seconde partie de ce travail est dédiée à la simulation numérique de l'écoulement diphasique (gaz/liquide) stratifié entre deux plans parallèles et inclinés par rapport à l'horizontale. Dans ce contexte, nous avons choisi d'utiliser un code de calcul permettant de résoudre à la fois les équations de Navier-Stokes et les équations constitutives d'un fluide viscoélastique par volumes finis (Gilflow) correspondant à un écoulement monophasique du liquide viscoélastique confiné entre deux parois planes horizontales. J'ai implémenté, avec succès, le modèle diphasique mettant en œuvre la méthode "Volume Of Fluid" (VOF). Le transport de l'interface est résolu à l'aide de l'équation de transport. Les deux méthodes : Hirt-VOF et PLIC-VOF sont testées pour un écoulement diphasique en régime stratifié instationnaire (gaz/ liquide). Pour illustrer ces résultats, la configuration (gaz/ liquide) stratifiés est présentée.

Mots-clés

Ondes à rouleaux	Film liquide	Ondes longues
Équations modulées	Stabilité non-linéaire	Plans inclinés
Frottement en loi de puissance	Fluides stratifiés	Méthode des volumes finis

Abstract

This thesis is a part of a growing field in recent decades. It has two parts :

The first section follows a series of theoretical and numerical works in vertical flow, made by [A. BOUDLAL et LIAPIDEVSKI \(2012\)](#). We consider a non-newtonian thin liquid film flowing in down inclined wall. We seek to construct solutions of periodic waves of finite amplitude with discontinuities, the so-called Roll waves (RW), the conditions of existence of these kind of waves are shown. We investigate both analytical and numerical nonlinear stability of these waves. The modulation equations for quasi-periodic wave trains with discontinuities allow leading a stability criterion, depending on two parameters (integro-differential expression). The main difficulty to establish the stability domain is due of the presence of singularities near infinitesimal and maximal amplitudes. To illustrate these results, a numerical calculation, using the asymptotic formulas near the singularity, allows to present the stability diagrams for some values of the flow parameters.

The second section of this work is dedicated to the numerical simulation of two-phase flow (gas/liquid) stratified between two parallel planes and inclined relative to the horizontal. In this context, we have chosen to use a code for solving both the Navier-Stokes equations and the constitutive equations of viscoelastic fluid with finite volume (Gilflow) corresponding to a single phase flow of viscoelastic fluid confined between two horizontal plane walls. The two-phase flow model was here implemented successfully, by application of the "Volume of Fluid" method (VOF). The transport of the interface is solved by using the transport equation of the VOF function. Both methods : Hirt-VOF and PLIC-VOF are tested for a two-phase flow in an unsteady stratified flow regime (gas/liquid). To illustrate this numerical simulation, the configuration (gas / liquid) stratified is here presented.

Key words

Roll waves	Liquid film	Long waves
Modulation equations	Nonlinear stability	Inclined planes
Power low friction	Two stratified flow	Finite volume method

Table des matières

1	Introduction générale	1
1.1	Cadre global de la recherche scientifique	2
1.2	Partie A : Stabilité non linéaire d'ondes de surface d'un film liquide dévalant un plan incliné	2
1.3	Partie B : Simulation numérique d'ondes interfaciales de deux fluides non miscibles stratifiés	3
	Partie A Stabilité non linéaire d'ondes de surface d'un film liquide dévalant un plan incliné	5
2	Mise en forme des équations	6
2.1	Introduction	7
2.2	Modèle rhéologique	8
2.3	Équation d'approximation	11
2.3.1	Approximation pour les ondes longues	11
2.3.2	Normalisation	15
3	Analyse de stabilité linéaire d'un écoulement de base uniforme	17
3.1	Introduction	18
3.2	Stabilité linéaire avec méthode de perturbation	18
3.3	Stabilité linéaire avec la méthode Whitham	20
3.3.1	Forme conservative	20
3.3.2	Forme non-conservative	21
4	Ondes permanentes entre deux chocs	23
4.1	Introduction	24
4.2	Profils des ondes entre deux chocs	24
4.3	Critère d'existence des ondes admissibles	25
4.4	Perte d'énergie	27
5	Stabilité non linéaire d'ondes périodiques avec discontinuités	29
5.1	Introduction	30
5.2	Présentation de la méthode	30
5.3	Analyse asymptotique des ondes périodiques	32
5.3.1	Stabilité des ondes d'amplitude infinitésimale	32
5.3.2	Stabilité des ondes d'amplitude maximale	33
6	Diagrammes de stabilité non linéaire	34
6.1	Introduction	35
6.2	Écoulement d'un film liquide mince sur une paroi plane verticale	35

6.3	Écoulement d'un film liquide mince sur une paroi plane inclinée	37
6.3.1	Influence de la nature de fluide sur la stabilité du film	38
6.3.2	Influence de l'inclinaison sur la stabilité du film	46
6.3.3	Diagrammes de stabilité non linéaire	63
6.3.4	Profils des ODP	66
6.4	Conclusion	68
 Partie B Simulation numérique d'ondes interfaciales de deux fluides non miscibles stratifiés		69
7	Formulation du problème	70
7.1	Introduction	71
7.2	Lois de comportement du type différentiel	72
7.3	Mise en forme des équations du mouvement	73
8	Traitement numérique des équations Navier-Stokes et du tenseur viscoélastiques	75
8.1	Introduction	76
8.2	Discretisation spatiale	76
8.2.1	Localisation des variables : maillage entrelacé	77
8.2.2	Équations de conservation pour un scalaire	78
	Schéma numérique pour le terme diffusion	78
	Schéma numérique pour le terme convectif	80
8.2.3	Équations de la quantité de mouvement	81
8.2.4	Équations constitutives du tenseur viscoélastique	83
8.3	Discretisation temporelle	84
8.4	Résolution du système linéaire	87
9	Modélisation numérique par méthode "Volume Of Fluid" (VOF)	88
9.1	Introduction	89
9.2	Fonction VOF	89
9.3	Modèle "1-fluide"	90
9.4	Méthode de résolution d'implémentation	91
9.5	Traitement numérique de l'équation de transport	94
9.5.1	Hirt-VOF	94
9.5.2	PLIC-VOF	97
10	Résultats de la simulation numérique	100
10.1	Introduction	101
10.2	Écoulement d'une phase	101
10.3	Cas test de l'équation de transport	104
10.4	Écoulement diphasique (gaz/liquide)	108
10.5	Conclusion	111
11	Conclusions générales et perspectives	112
A	Annexes	114
A.1	Exemple de calcul pour les champs de pression et vitesses	114
A.2	Fortran 90 code à résoudre l'équation de transport avec Hirt-VOF	116
A.3	Fortran 90 code à résoudre l'équation de transport avec PLIC-VOF	118

A.4 Fortran 90 code à réactualiser les champs des masses volumiques, viscosités, vitesses et matrice de pression	125
Bibliographie	134

Liste des figures

2.1 Ondes avec discontinuités ou ondes à rouleaux	7
2.2 Ondes à rouleaux en suspensions d'amidon de maïs	8
2.3 Les rhéogrammes	9
2.4 Contrainte visqueuse en fonction de gradient de vitesse	10
2.5 Corrélation de n avec C_D pour diverses compositions solides	11
2.6 Schéma de l'écoulement	11
2.7 Profils des vitesses pour $n = 1.0, 0.4$ et 0.1	14
3.1 Taux d'amplification des perturbations en fonction de k et α pour $n = 0.4$	19
3.2 Vitesse de phase des perturbations en fonction de k et α pour $n = 0.4$	20
3.3 Stabilité neutre avec $k \neq 0$ pour fluide rhéo-fluidifiant	20
4.1 Schéma des ondes progressives	24
4.2 Profils des G et Δ vs. h	25
4.3 Profils des Δ et F vs. h	26
4.4 Bornes d'existence des ODP en fonction de h_c et seuil de stabilité	27
5.1 Schéma des ondes lentement variant sur ℓ	30
6.1 Caractéristique $\tau^\pm = (dx/dt)^\pm$ en fonction de \bar{z} le cas vertical, fluide newtonien	36
6.2 \bar{z} en fonction de z le cas vertical, fluide newtonien	36
6.3 Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ à $\alpha = 0$ et $h_c = 1$ avec différents n	38
6.4 Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de n pour $\alpha = 0, h_c = 1$	38
6.5 Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ à $\alpha = 0.25$ et $h_c = 1$ avec différents n	40
6.6 Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de n pour $\alpha = 0.25, h_c = 1$	40
6.7 Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ à $\alpha = 0.5$ et $h_c = 1$ avec différents n	42
6.8 Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de n pour $\alpha = 0.5, h_c = 1$	42
6.9 Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ à $\alpha = 1$ et $h_c = 1$ avec différents n	44
6.10 Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de n pour $\alpha = 1, h_c = 1$	44
6.11 Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ à $n = 1$ et $h_c = 1$ avec différents α	46
6.12 Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de α pour $n = 1, h_c = 1$	46
6.13 Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ à $n = 0.9$ et $h_c = 1$ avec différents α	48
6.14 Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de α pour $n = 0.9, h_c = 1$	48

6.15	Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ à $n = 0.8$ et $h_c = 1$ avec différents α	50
6.16	Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de α pour $n = 0.8, h_c = 1$	50
6.17	Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ à $n = 0.7$ et $h_c = 1$ avec différents α	52
6.18	Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de α pour $n = 0.7, h_c = 1$	52
6.19	Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ à $n = 0.6$ et $h_c = 1$ avec différents α	54
6.20	Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de α pour $n = 0.6, h_c = 1$	54
6.21	Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ à $n = 0.5$ et $h_c = 1$ avec différents α	56
6.22	Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de α pour $n = 0.5, h_c = 1$	56
6.23	Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ à $n = 0.4$ et $h_c = 1$ avec différents α	58
6.24	Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de α pour $n = 0.4, h_c = 1$	58
6.25	Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ à $n = 0.3$ et $h_c = 1$ avec différents α	59
6.26	Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de α pour $n = 0.3, h_c = 1$	59
6.27	Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ à $n = 0.2$ et $h_c = 1$ avec différents α	60
6.28	Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de α pour $n = 0.2, h_c = 1$	60
6.29	Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ à $n = 0.1$ et $h_c = 1$ avec différents α	61
6.30	Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de α pour $n = 0.1, h_c = 1$	61
6.31	Diagramme de stabilité non linéaire des ODP à $n = 1$ et $\alpha = 0$	63
6.32	Diagramme de stabilité non linéaire des ODP à $n = 0.4$ et $\alpha = 0$	64
6.33	Diagramme de stabilité non linéaire des ODP à $n = 0.1$ et $\alpha = 0$	64
6.34	Diagramme de stabilité non linéaire des ODP à $n = 1$ et $\alpha = 0.25$	65
6.35	Diagramme de stabilité non linéaire des ODP à $n = 0.4$ et $\alpha = 0.25$	65
6.36	Diagramme de stabilité non linéaire des ODP à $n = 0.1$ et $\alpha = 0.25$	66
6.37	Profils des ODP minimales à $n = 0.4$ et $h_c = 1$ avec différents α	67
6.38	Profils des ODP maximales à $n = 0.4$ et $h_c = 1$ avec différents α	67
8.1	Domaine entièrement recouvert	77
8.2	Maille typique uniforme suivant x et y	78
8.3	Maillage entrelacé : Bilan $U_e = U_{i,j}$	79
8.4	Maillage entrelacé : Bilan $V_s = V_{i,j}$	79
8.5	Maillage entrelacé : Bilan $T_{xy(i,j)}$	80
8.6	Maillage entrelacé : Bilan $P_{i,j}$	82
9.1	Position des variables dans une maille	91
9.2	Exemple de fraction volumique associée à une interface sur un maillage discret	92
9.3	Exemple des formes de surface libre utilisés dans l'advection de C	96
9.4	Modèle de reconstruction de surface libre (Hirt-Nichols)	97
9.5	Quatre types de PLIC	98
9.6	Position et forme de l'interface dans une maille	99
10.1	Champs des pressions et vitesses d'écoulement du fluide newtonien entre deux plaques à $t = 80$	102

10.2 Profil de vitesse d'écoulement du fluide newtonien entre deux plaques à $t = 80$	102
10.3 Champs des pressions et vitesses d'écoulement du fluide viscoélastique entre deux plaques à $t = 80$	103
10.4 Profil de vitesse d'écoulement du fluide viscoélastique entre deux plaques à $t = 80$	104
10.5 Champ de vitesse fixe	105
10.6 Rotation sans adaptation de maillage avec Hirt-VOF	106
10.7 Rotation sans adaptation de maillage avec PLIC-VOF	107
10.8 Profil de vitesse d'écoulement de deux fluides (gaz/liquide) entre deux plaques à $t = 80$	108
10.9 Les tracés de fonction C d'écoulement de deux fluides avec Hirt-VOF et PLIC-VOF à $t = 80$	109
10.10 Évolution de l'interface d'écoulement de deux fluides (gaz/liquide) à plusieurs instants	110
A.1 Champ de pression avec des mailles géométriques 4×4	114
A.2 Champ des vitesses avec des mailles géométriques 4×4	115

Liste des tableaux

6.1	Intervalle d'hyperbolicité avec quelques couples des valeurs (n, α) pour $h_c = 1$	37
7.1	Dégénérescence du modèle général donné par l'équation (7.3)	73
8.1	Tableau des différents termes des équations scalaires dans un repère cartésien	76

Nomenclature

- **Notes :** les symboles sont classés par ordre alphabétique romain puis grec, les minuscules avant les majuscules, les scalaires avant les tenseurs (vecteurs et matrices carrées). Les tenseurs, quand à eux, sont notés en gras.

Notations de la 1^{ère} partie

Lettres latines

- A équation du profil des ODP
B résidu d'une grandeur
 \bar{B} résidu d'une grandeur moyenne
 \tilde{B} résidu d'une grandeur moyenne transformée
 \tilde{B}^* résidu d'une grandeur moyenne approchée
 B'^* dépendance linéaire
 C_v concentration volumique
 $D^{(1)}$ diamètre du canal
 $D^{(2)}$ vitesse de propagation des ODP
F numérateur de l'équation du profil des ODP
 Fr nombre de Froude
 g accélération de la pesanteur
G fonction du ressaut
 h épaisseur du film
 h_0 longueur caractéristique transversale
 h_1 hauteur à l'amont de la discontinuité
 h_2 hauteur à l'aval de la discontinuité
 h_c hauteur critique des ODP
 h_m hauteur minimale des ODP maximales admissibles
 \bar{h} épaisseur moyenne du film
 k nombre d'onde
 l_0 longueur caractéristique longitudinale
L longueur d'onde
 n indice du flux

p pression
 q débit apparente
 q_c débit apparente critique ($\Delta E = 0$)
 Q débit ($\equiv \bar{u}h$)
 Re nombre de Reynolds
 Re_c nombre de Reynolds critique (laminaire/ turbulent)
 t temps
 u vitesse longitudinale
 u_0 échelle de vitesse longitudinale
 \bar{u} vitesse moyenne (vitesse de débit)
 \bar{u}_0 solution de l'écoulement uniforme
 \bar{u}_c vitesse moyenne critique correspondant à h_c
 v vitesse transversale
 v_0 échelle de vitesse transversale
 $w \equiv h_2$
 w^* correspond au $w(z^*, h_c)$
 x la direction longitudinale
 y la direction transversale
 $z \equiv h_1$
 z_1 correspond au \bar{h}^+ dans le cas vertical
 $z^* \equiv h_m$ dans le cas vertical
 $\bar{z} \equiv \bar{h}$ dans le cas vertical

Lettres grecques

α inverse du nombre de Froude au carré
 α_s seuil de stabilité linéaire
 α_c certaine valeur critique de stabilité non-linéaire
 γ coefficient de l'énergie
 $\dot{\gamma}$ gradient de vitesse
 ε la distorsion géométrique
 η viscosité apparente (effective)
 θ inclinaison du plan (x, y)
 μ_n viscosité dynamique de dimension $[ML^{-1}T^{n-2}]$
 μ_1 viscosité dynamique ordinaire
 ρ masse volumique
 ℓ une échelle de longueur très grande ($\ell \gg L$)
 $\delta \equiv (D' \bar{h} - q')$
 Δ dénominateur de l'équation du profil des ODP
 ΔE perte de charge d'un ressaut hydraulique

τ vitesse caractéristique du système modulé ($\equiv \frac{dx}{dt}$)
 ξ repère lié aux ondes ($\equiv x - Dt$)
 λ_d (C) vitesse de l'onde dynamique
 λ_c (C₀) vitesse de l'onde cinématique
 σ contrainte visqueuse
 σ_{xx}, σ_{yy} les composantes normales de contrainte visqueuse
 σ_{xy} le cisaillement de contrainte visqueuse
 σ_b contrainte à la paroi
 ω vitesse de phase
 Ω_e domaine elliptique des ODP
 Ω_h domaine hyperbolique des ODP

Abréviations et symboles

∞ infini
 ∂ dérivée partielle
 Disc discriminant de l'équation caractéristique
 ODP ondes périodiques avec discontinuités
 D.St.O.P domaine stable des ODP

Exposants et symboles supérieurs

* relatif aux grandeurs adimensionnées (sauf indication contraire)
 \pm deux racines conjugués
 ' dérivée partielle sur h_c

Indices et symboles inférieurs

0 relatif à l'état de base uniform (sauf indication contraire)
 1 désigne les perturbations (sauf indication contraire)
 i partie imaginaire du nombre complexe
 r partie réelle du nombre complexe
 x dérivée partielle sur x
 t dérivée partielle sur t
 tx dérivée partielle d'ordre 2 sur t et x
 tt dérivée partielle d'ordre 2 sur t
 h_c dérivée partielle sur h_c
 z dérivée partielle sur z
 zz dérivée partielle d'ordre 2 sur z
 zzz dérivée partielle d'ordre 3 sur z
 \bar{h} dérivée partielle sur \bar{h}

Notations de la 2^{ème} partie

Lettres latines

af la face d'un maillage

\vec{a} un vecteur quelconque

$\bar{\bar{A}}$ matrice de pression

AW, AE, AN, AS coefficient de la matrice de pression

B seconde membre

c vitesse adiabatique du son dans un fluide

C fraction volumique (fonction VOF)

C_u fonction VOF centrée dans la maille au nœud de vitesse U

C_v fonction VOF centrée dans la maille au nœud de vitesse V

dx (δx) petit pas de l'axe x dans la maille au nœud de pression P

dy (δy) petit pas de l'axe y dans la maille au nœud de pression P

dxp petit pas de l'axe x dans la maille au nœud de vitesse U

dyp petit pas de l'axe y dans la maille au nœud de vitesse V

$d\sigma$ élément de surface d'un volume

D tenseur symétrique des taux de déformation

D_{xx}, D_{yy} la composante normale de tenseur des taux de déformation

D_{xy} le cisaillement de tenseur des taux de déformation

f fonction d'amortissement

\vec{g} champ de pesanteur

g_x accélération de pesanteur selon la direction x

g_y accélération de pesanteur selon la direction y

I tenseur identité

J_ϕ terme de diffusion quelconque

L une épaisseur dans la direction d'invariance

L le gradient de vitesse

M $\equiv \mathbf{L} - \xi \mathbf{D}$

n coefficient de rhéo-fluidification

\vec{n} la normale extérieure en un point

P la pression

S_b la position "bottom" d'une maille de l'interface

S_r la position "right" d'une maille de l'interface

S_t la position "top" d'une maille de l'interface

S_l la position "left" d'une maille de l'interface

S_ϕ terme de source quelconque

t temps

T tenseur supplémentaire viscoélastique

T_{xx}, T_{yy} la composante normale d'extra-tension viscoélastique

T_{xy} le cisaillement d'extra-tension viscoélastique

T_{xyce} le cisaillement d'extra-tension au nœud de pression

U la composante des vitesses selon l'axe x

V la composante des vitesses selon l'axe y

x la direction dans le sens de l'écoulement

$X(y)$ fonction locale en utilisant 9 cellules (Hirt-VOF)

y la direction perpendiculaire au sens de l'écoulement

$Y(x)$ fonction locale en utilisant 9 cellules (Hirt-VOF)

z la direction d'invariance

Lettres grecques

σ le tenseur des contraintes de Cauchy

ϵ un paramètre sans dimension caractérisant la viscosité élongationnelle

λ temps de relaxation du fluide

ϕ grandeur scalaire

v un volume de contrôle

μ viscosité dynamique

μ_u viscosité dynamique centrée dans la maille au nœud de vitesse U

μ_v viscosité dynamique centrée dans la maille au nœud de vitesse V

ν viscosité cinématique

ν_u viscosité cinématique centrée dans la maille au nœud de vitesse U

ν_v viscosité cinématique centrée dans la maille au nœud de vitesse V

ρ masse volumique

ρ_u masse volumique centrée dans la maille au nœud de vitesse U

ρ_v masse volumique centrée dans la maille au nœud de vitesse V

η_s viscosité du solvant newtonienne

η_p viscosité polymérique non-newtonienne

η_{p0} viscosité polymérique à taux de cisaillement nul

ξ une fraction corrigée du taux de déformation

θ inclinaison du plan (x, y)

τ_{xx}, τ_{yy} gradient de vitesse

τ_{xy}, τ_{yx} gradient de vitesse

τ_{xyce}, τ_{yxce} gradient de vitesse dans la maille au nœud de pression

Δt (δt) pas de temps

Γ une échelle de temps

Abréviations et symboles

∂ dérivée partielle

∇ opérateur de gradient
 $\nabla \cdot$ opérateur de divergent
DIFF terme de diffusion
CONV terme de convection
FLUX la somme des termes de diffusion et convection
VOF Volume Of Fluid
PLIC Piecewise Linear Interface Calculation

Exposants et symboles supérieurs

\cdot opérateur de trace
 n l'indice du temps précédent $t - \Delta t$
T transposée d'une matrice

Indices et symboles inférieurs

A cellule accepteur
AD cellule soit accepteur soit donateur
D cellule donateur
 g gaz
 l liquide

Chapitre 1

Introduction générale

*« Science sans conscience n'est que
ruine de l'âme. »*

François Rabelais

Sommaire

1.1 Cadre global de la recherche scientifique	2
1.2 Partie A : Stabilité non linéaire d'ondes de surface d'un film liquide dévalant un plan incliné	2
1.3 Partie B : Simulation numérique d'ondes interfaciales de deux fluides non miscibles stratifiés	3

1.1 Cadre global de la recherche scientifique

Les écoulements de type gaz-liquide ou liquide à surface libre dans les canaux sont d'un intérêt considérable dans de nombreux processus industriels et équipements. Une variété de configurations peut se produire sur une plage de débits donnés, cataloguées par les observateurs (configuration à rouleaux, à bouchons ...).

En rivières boueuses les écoulements intermittents du mélange d'argile et d'eau sont fréquents, particulièrement à la suite d'une pluie torrentielle. L'écoulement de boue, suite à une éruption volcanique, peut également être accompagnée par ce type d'ondes.

La force du front du ressaut est telle que des pierres de grande taille peuvent être projetées dans l'air. L'écoulement à l'arrière de l'onde est peu profond, lent et essentiellement laminaire, et fréquemment stagnant avant la montée suivante.

De tels flux de boue intermittents sont responsables de l'érosion sévère et les déplacements de débris dans le lit du ravin Jiang-jia.

Ce phénomène peut être modélisé par l'écoulement d'un film liquide sur un plan incliné. Le critère de stabilité présente des intérêts tant du point de vue fondamental qu'appliqué dans le domaine environnemental. Ce problème intéresse également le secteur industriel faisant appel à des méthodes de couchage ou revêtement de surfaces (industrie alimentaire, photographique, papeterie...)

En général, cette apparition d'instabilités est indésirable. Il est donc important d'être en mesure de prédire et éviter l'apparition d'instabilités.

1.2 Partie A : Stabilité non linéaire d'ondes de surface d'un film liquide dévalant un plan incliné

Dans la première partie de cette thèse on considère un film liquide mince non-newtonien dévalant une paroi plane inclinée. On cherche à construire des solutions d'ondes périodiques avec discontinuités (ODP) d'amplitude fini, on met en évidence les conditions nécessaires d'existence de ces ODP, et on fait une étude à la fois analytique et numérique de la stabilité non-linéaire de ce type d'ondes.

Ce premier thème s'articule autour de 5 chapitres [2](#), [3](#), [4](#), [5](#), [6](#).

Dans le chapitre [2](#), on donne les équations générales qui régissent l'écoulement avec frottement d'un film liquide non-newtonien sur un plan incliné, et on procède à la normalisation des équations suivant une présentation qui découle des propriétés d'ondes longues. On modélise le cisaillement par une loi de puissance ([CHIU-ON et C.MEI, 1994](#)). Cette approximation est utilisée dans le cadre des intégrales de Von Kármán qui consiste à intégrer les équations du mouvement suivant la normale au lit pour un nombre de Reynolds modéré.

Le chapitre [3](#) est consacré à l'étude de la stabilité linéaire d'une petite perturbation

d'un écoulement de base uniforme. On étudie la stabilité par une différente approche (méthode de Whitham) (WHITHAM, 1974) et on établit un critère de stabilité linéaire.

Au chapitre 4 on construit des solutions d'ODP de vitesse de propagation D constante. On se place dans le repère lié aux ondes et on met en évidence les conditions nécessaires d'existence de ce type d'ondes via les conditions de saut et de pertes d'énergie.

L'étude de la stabilité non-linéaire fait partie du chapitre 5 et 6. Les équations modulées pour un trains d'ondes quasi-périodiques avec discontinuités permettent d'aboutir à un critère de stabilité dépendant de deux paramètres (expression intégral-différentielle), difficile à mettre en œuvre pour le tracé des diagrammes de stabilité des ODP, à cause de la présence des singularités aux frontières d'hyperbolicité (faibles et maximales amplitudes). Pour lever ces singularités des formules asymptotiques sont établies. Pour illustrer ces résultats, un calcul numérique, à l'aide des formules asymptotiques au voisinage des singularités, permet de présenter des diagrammes de stabilité pour quelques valeurs des paramètres de l'écoulement.

1.3 Partie B : Simulation numérique d'ondes interfaciales de deux fluides non miscibles stratifiés

La seconde partie de ce mémoire est dédiée à la simulation numérique d'un écoulement diphasique en régime stratifié instationnaire entre deux plans parallèles et inclinés par rapport à l'horizontale. Le comportement de l'interface entre les deux fluides est à l'heure actuelle l'un des sous-domaines les plus actifs de la mécanique des fluides numérique (HIRT et NICHOLS, 1981), (SCARDOVELLI et ZALESKI, 1999), (LI, 1995), (GUEYFFIER et collab., 1999), (LAFURIE et collab., 1994), (POPINET, 2003), (HARLOW et WELCH, 1965). Dans ce contexte, nous avons choisi d'utiliser un code de calcul permettant de résoudre à la fois les équations de Navier-Stokes et les équations constitutives d'un fluide visco-élastique (modèle Oldroyd-B) par volumes finis (Gilflow) correspondant à un écoulement monophasique du liquide confiné. En mécanique des fluides numérique, la présence de deux phases fluides est gérée par la méthode "Volume Of Fluid" (VOF). Le transport de l'interface se fait en résolvant l'équation de transport de fonction VOF. Par l'implémentation du modèle pour résoudre l'équation de transport en utilisant les deux méthodes : Hirt-VOF et PLIC-VOF, on élabore un code de la simulation numérique pour un écoulement de deux fluides (gaz/liquide).

Ce dernier thème est axée autour de 4 chapitres 7, 8, 9, 10.

La formulation des équations régissant l'écoulement de fluides complexes, et les équations constitutives de tension viscoélastique sous forme générale sont données au chapitre 7.

Le chapitre 8 est consacré au traitement numérique à la fois les équations Navier-Stokes et les équations constitutives de la tension viscoélastique en utilisant la technique des volumes finis. Les variables primitives, vitesse, pression et tension viscoélastique sont utilisés dans la formulation.

Au chapitre 9, une méthode "Volume Of Fluide" (VOF) est considérée pour gérer l'in-

terface entre les deux fluides (gaz/liquide) non miscibles et stratifiées. Le transport de l'interface se fait en résolvant l'équation de transport de la fonction VOF. Le traitement numérique de l'équation de transport de fonction VOF est adopté par deux méthodes : Hirt-VOF et PLIC-VOF. Les variables primitives, vitesse, pression, tension viscoélastique et aussi fonction VOF sont utilisés dans la formulation.

Quelques résultats de la simulation numérique sont illustrés au chapitre 10. Tout d'abord, on met en évidence les résultats de la simulation numérique du fluide newtonien et fluide viscoélastique correspondant à un écoulement monophasique du liquide confiné. Pour cela, nous en avons testé et comparé les deux méthodes : Hirt-VOF et PLIC-VOF sur l'équation de transport de la fonction VOF. Par la suite nous avons implémenté les deux méthodes pour gérer l'interface entre les deux fluides, le transport de l'interface étant résolu par l'équation de transport de la fonction VOF. Le résultat de la simulation numérique pour la configuration (gaz/liquide) stratifiée a été présenté. Cependant, la simulation numérique de la configuration d'ondes à rouleaux en écoulement diphasique n'a pas été achevée.

Première partie

Stabilité non linéaire d'ondes de surface d'un film liquide dévalant un plan incliné

Chapitre 2

Mise en forme des équations

« The thing about quotes on the internet is that you can not confirm their validity. »

Abraham Lincoln

Sommaire

2.1 Introduction	7
2.2 Modèle rhéologique	8
2.3 Équation d'approximation	11
2.3.1 Approximation pour les ondes longues	11
2.3.2 Normalisation	15

2.1 Introduction

La surface libre de l'écoulement dans un canal ouvert incliné peut être le siège d'instabilités. Ces instabilités peuvent se développer et former des ondes à rouleaux. Ces ondes avec discontinuités ont été observées dans les déversoirs, dans les cours d'eau naturels et artificiels. En outre, ces types d'instabilités sont communes non seulement pour les fluides newtoniens, mais également pour les fluides caractérisés par une loi rhéologique différente, tels que les écoulements de boue et débris ou encore dans l'industrie agroalimentaire (voir figures 2.1 et 2.2).

Dans ce chapitre sont examinés les écoulements du film liquide mince sur une paroi plane et inclinée. Pour des nombres de Reynolds modérés, de tels écoulements sont régis par les équations de type **V.YA.SHKADOV (1968)**. Le cas de l'écoulement vertical a été étudié par **A.BOUDLAL (2008)**.

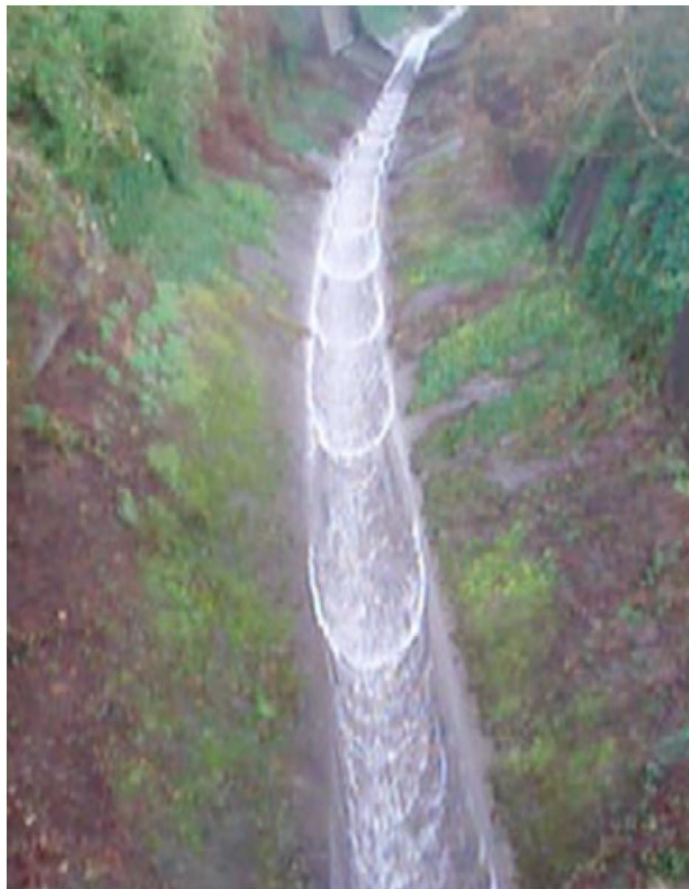


FIGURE 2.1 – Ondes avec discontinuités ou ondes à rouleaux



FIGURE 2.2 – Ondes à rouleaux en suspensions d’amidon de maïs (BALMFORTH et collab., 2005)

2.2 Modèle rhéologique

Si le modèle de fluide newtonien décrit bien la très grande majorité des fluides composés de molécules simples, il existe un bon nombre de fluides, dont certains sont d’usage très courant, qui ont un comportement plus complexe. Pour un fluide newtonien, les contraintes de cisaillement sont proportionnelle au gradient de vitesse, ce qui implique que :

- Dans un écoulement de cisaillement simple, les seules contraintes induites par l’écoulement sont des contraintes de cisaillement.
- La viscosité est indépendante de la vitesse de cisaillement.
- La viscosité est indépendante du temps et les contraintes s’annulent immédiatement en absence de mouvement.

Toute déviation à ces règles est le signe d’un comportement non newtonien. Il existe un grand nombre de lois pour décrire la rhéologie des fluides complexes. Commençons par examiner le caractère non-newtonien le plus répandu, i.e. la viscosité varie avec la vitesse de cisaillement. Très souvent pour les solutions de polymères, la viscosité diminue au fur et à mesure que le taux de cisaillement augmente. C’est le comportement rhéofluidifiant (*shear thinning* en anglais). Ce comportement est également observé dans les suspensions de particules solides, dans les suspensions de vésicules déformables comme le sang. On rencontre également le comportement rhéoépaississant (*shear thickening* en anglais) : la viscosité croît lorsque le taux de cisaillement augmente. Dans la pratique, le comportement rhéoépaississant n’est observé que sur une gamme limitée de taux de cisaillement.

La figure ci-dessous (2.3) montre les rhéogrammes (relation contrainte de cisaillement et le gradient de vitesse) pour ces trois types des fluides.

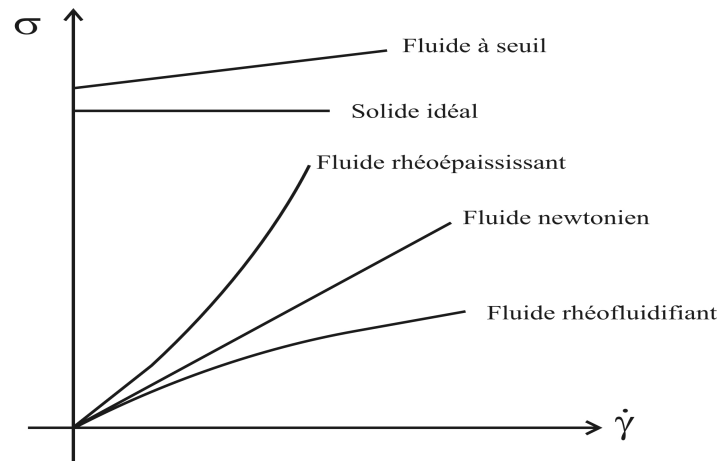


FIGURE 2.3 – Les rhéogrammes

Pour les études de stabilité du film mince, un modèle empirique approprié est une loi de puissance d'Ostwald.

$$\sigma = \mu_n \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \quad (2.1)$$

ou encore :

$$\eta = \mu_n \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{n-1} \quad (2.2)$$

$$\sigma = \eta \dot{\gamma} \quad (2.3)$$

où μ_n est le coefficient de dimension $[\text{ML}^{-1}\text{T}^{n-2}]$, η est la viscosité apparente et n est l'indice du flux de valeur comprise entre 0 et 1 pour le fluide rhéofluidifiant. Le cas particulier $n = 1$ correspond à un fluide newtonien, et μ_1 est la viscosité dynamique ordinaire. Sur la figure (2.4), on montre comment le modèle en loi de puissance correspond à la relation empirique entre le contrainte de cisaillement et les données mesurées pour une solution de kaolinite en suspension par WAN (1982). Les expressions de μ_n et n peuvent être exprimées par le terme de concentration volumique C_v :

$$\mu_n = 1.86 \times 10^{-4} C_v^{4.45} \quad (2.4)$$

avec :

$$n = 5.86 C_v^{-1.34} \quad (2.5)$$

On peut remarquer que μ_n croît quand C_v croît. La figure (2.4) a été compilée pour obtenir la relation empirique entre n et C_v , et n décroît quand C_v croît. Une tendance similaire de changement des paramètres en loi de puissance avec la concentration de volume est également rapporté par DAI et collab. (1980) et DARBY (1986). La figure (2.5) a été compilé pour donner la relation empirique entre n et la concentration volumique d'où des sources suivantes : WAN (1982) pour la suspension de kaolinite ; BRYANT et WILLIAMS (1980) pour la boue de Brisbane et la boue de Rotterdam ; DARBY (1986) pour la suspension de lignite pulvérisé dans l'eau saline ; DAI et collab. (1980) pour les boues en suspension ; et TANNER (1985) pour roches de ciment dans l'eau. Le fait que les points

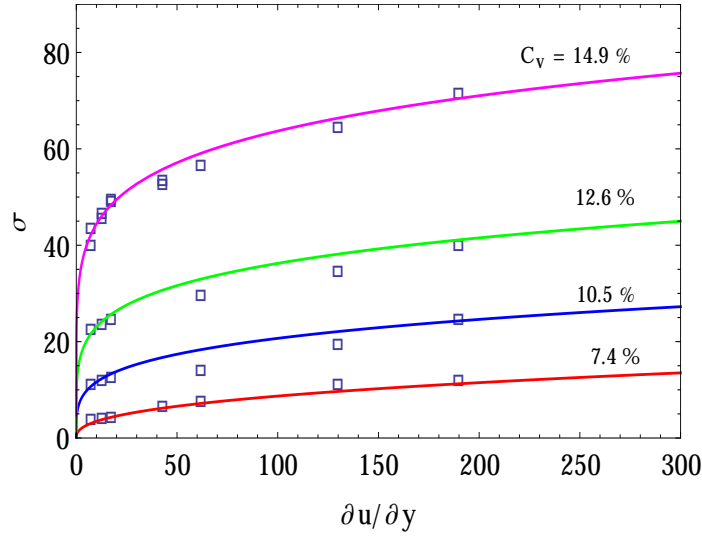


FIGURE 2.4 – Contrainte visqueuse en fonction de gradient de vitesse, conformément à l'expérience (WAN, 1982) pour une solution de kaolinite en suspension (CHIU-ON et C.MEI, 1994)

de données qui sont dispersées suggèrent que d'autres facteurs tels que la composition chimique et des tailles de particules peuvent aussi avoir une influence. Dans tous les cas, il est noté que, pour le même type de solide, n diminue à mesure que la concentration volumique augmente. Les points expérimentaux de la figure (2.5) correspondent à une concentration volumique au dessous de 60 %.

Pour l'écoulement laminaire, il est nécessaire que le nombre de Reynolds soit inférieure à un certain seuil : $Re < Re_c$. Pour des fluides en loi de puissance, DARBY (1986) a donné l'équation empirique suivante pour l'écoulement dans un canal de section circulaires :

$$Re_{(pipe)} < Re_{c(pipe)} = 0.125 \left[\frac{2(1+3n)}{n} \right]^n [2100 + 875(1-n)], \quad (2.6)$$

où :

$$Re_{(pipe)} = \frac{\rho \bar{u}^{2-n} D^n}{\mu_n} \quad (2.7)$$

où \bar{u} et D représentent la vitesse moyenne et le diamètre du canal respectivement. Comme il est d'usage dans les systèmes hydrauliques des canaux ouverts, de grande largeur, D est remplacé par 4 fois la profondeur du canal. Donc l'équation (2.6) est réécrit comme :

$$Re_{(pipe)} = \frac{\rho \bar{u}^{2-n} h^n}{\mu_n} < Re_{c(pipe)} = 0.125 \left[\frac{1+3n}{2n} \right]^n [2100 + 875(1-n)], \quad (2.8)$$

A partir de l'équation (2.8), les limites supérieures Re_c pour $n = (1.0, 0.4, 0.1)$ sont $Re_c = (525, 492, 435)$ respectivement. Dans la suite, nous allons développer une série des théories des ondes de surface en régime laminaire d'un fluide en loi de puissance dévalant un plan incliné.

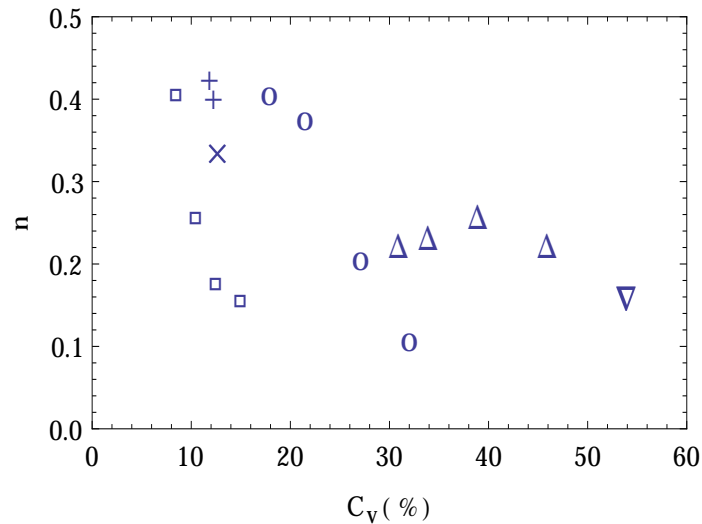


FIGURE 2.5 – Corrélation de n avec C_v pour diverses compositions solides : □, la suspension de kaolinite (WAN, 1982); × la boue de Rotterdam (BRYANT et WILLIAMS, 1980); +, la boue de Brisbane (BRYANT et WILLIAMS, 1980); △, la suspension de lignite (DARBY, 1986); ○, les boues de suspension (DAI et collab., 1980); ▽, roches de ciment dans l'eau (TANNER, 1985).

2.3 Équation d'approximation

2.3.1 Approximation pour les ondes longues

On considère un écoulement plan (x, y) d'un film liquide non-Newtonien sur une plaque plane inclinée de pente θ , ($0 < \theta < \pi/2$). L'axe Ox est dirigé dans le sens de l'écoulement; L'axe Oy lui est perpendiculaire et dirigé vers le haut. On désigne par t le temps, par g l'accélération de pesanteur, par $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ les vitesses longitudinale et transversale respectivement, par $p(x, y, t)$ la pression, par $(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yy})$ tenseur des contraintes de viscosité et par $h(x, t)$ l'épaisseur du film qui ne dépend que les composants du x et t .

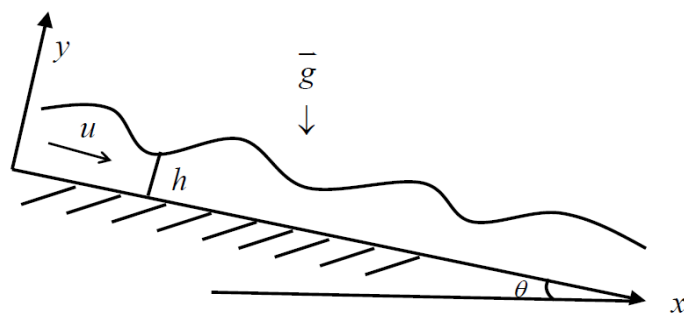


FIGURE 2.6 – Schéma de l'écoulement

Il doit être souligné que les équations de couche peu profonde sont basées sur l'hypothèse que la vitesse longitudinale est uniforme avec la profondeur et ne sont donc approprié que pour les écoulements avec grand nombre de Reynolds. Pour les écoulements laminaires, les équations régissant les mouvements doivent rendre compte de la variation de la vitesse avec la profondeur en raison de l'effet visqueux.

Afin d'y inclure la variation de vitesse avec la profondeur, une approximation précise peut être obtenue en supposant que le profil de vitesse soit le même que celui de l'écoulement uniforme, stationnaire. Cette approximation est utilisée dans le cadre de méthode intégrale de Von Kármán, qui consiste à intégrer les équations de l'écoulement établies sur la normale au lit pour un nombre de Reynolds modéré.

Les équations du mouvement sont écrites comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \cos \theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \quad (2.11)$$

Dans le cadre de la théorie des ondes longues, la normalisation et la méthode de perturbation sont appliquées en prenant pour petit paramètre $\varepsilon = \frac{h_0}{l_0}$, représentant la distorsion géométrique du domaine d'écoulement, où h_0 et l_0 sont deux longueurs caractéristiques, la première transversale et la seconde longitudinale. L'approximation à l'ordre 1 est calculée pour un écoulement de base uniforme.

Considérant la loi de puissance d'Ostwald (2.1), on introduit les variables sans dimension suivantes :

$$x = l_0 x^*, y = h_0 y^*, u = u_0 u^*, v = v_0 v^*, t = \frac{l_0}{u_0} t^*, v_0 = u_0 \frac{h_0}{l_0}, p = \rho u_0^2 p^* \quad (2.12)$$

Il en résulte :

$$\sigma_{xx} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \mu_n \left(\frac{u_0}{h_0} \right)^{n-1} \frac{u_0}{l_0} \sigma_{xx}^* \quad (2.13)$$

$$\sigma_{yy} = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \mu_n \left(\frac{u_0}{h_0} \right)^{n-1} \frac{u_0}{l_0} \sigma_{yy}^* \quad (2.14)$$

$$\sigma_{xy} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu_n \left(\frac{u_0}{h_0} \right)^{n-1} \frac{u_0}{h_0} \sigma_{xy}^* = \mu_n \left(\frac{u_0}{h_0} \right)^n \sigma_{xy}^* \quad (2.15)$$

$$\sigma_{yx} = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \mu_n \left(\frac{u_0}{h_0} \right)^{n-1} \frac{u_0}{h_0} \sigma_{yx}^* = \mu_n \left(\frac{u_0}{h_0} \right)^n \sigma_{yx}^* \quad (2.16)$$

où u_0 et v_0 sont les échelles des vitesses longitudinale et transversale respectivement.

Par remplacement, on obtient :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = \frac{\sin \theta}{Fr^2 \varepsilon} + \frac{\varepsilon}{Re} \frac{\partial \sigma_{xx}^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re \varepsilon} \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial y^*} \quad (2.18)$$

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) + \frac{\partial p^*}{\partial y^*} = -\frac{\cos \theta}{Fr} + \frac{\varepsilon}{Re} \frac{\partial \sigma_{yx}^*}{\partial x^*} + \frac{\varepsilon}{Re} \frac{\partial \sigma_{yy}^*}{\partial y^*} \quad (2.19)$$

où Re et Fr sont le nombre de Reynolds et le nombre de Froude et définis par les expressions suivantes :

$$Re = \frac{\rho u_0^{2-n} h_0^n}{\mu_n} \quad (2.20)$$

$$Fr = \frac{u_0^2}{g h_0} \quad (2.21)$$

A noter que pour un fluide newtonien, $n = 1$, $Re = \rho u_0 h_0 / \mu_1$ est le nombre de Reynolds standard.

Dans l'approximation des ondes longues, $h_0 \ll l_0$, ou encore $\varepsilon = \frac{h_0}{l_0} \sim 0$, on obtient en première approximation les équations suivantes,

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = \frac{\sin \theta}{Fr^2 \varepsilon} + \frac{1}{Re \varepsilon} \frac{\partial \sigma_{xy}^*}{\partial y^*} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = -\frac{\cos \theta}{Fr} \quad (2.24)$$

Ou sous forme dimensionnelle :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \quad (2.26)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \cos \theta \quad (2.27)$$

La condition d'adhérence à la paroi est :

$$u = v = 0 \quad \text{à} \quad y = 0 \quad (2.28)$$

Les conditions cinématiques et dynamiques à la surface libre sont :

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{à} \quad y = h \quad (2.29)$$

$$p = 0 \quad \text{à} \quad y = h \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{à} \quad y = h \quad (2.31)$$

Les équations (2.27) et (2.30) montrent que la pression est hydrostatique :

$$p = \rho g \cos \theta (h - y) \quad (2.32)$$

Compte tenu de (2.1) et (2.32), l'équation (2.26) s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu_n}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n + g \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (2.33)$$

La solution de l'écoulement établi s'écrit :

$$\frac{\mu_n}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n + g \sin \theta = 0 \quad (2.34)$$

D'où, par intégration, on obtient compte tenue des conditions aux limites,

$$u(y) = \frac{n}{1+n} \left(\frac{\rho}{\mu_n} g \sin \theta h^{1+n} \right)^{\frac{1}{n}} \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right] \quad (2.35)$$

La vitesse de débit \bar{u} définie par :

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u(y) dy \quad (2.36)$$

s'écrit à l'aide de (2.35) :

$$\bar{u} = \frac{n}{1+2n} \left(\frac{\rho}{\mu_n} g \sin \theta h^{1+n} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.37)$$

On obtient pour la vitesse $u(y)$ et le débit Q :

$$u(y) = \frac{1+2n}{1+n} \bar{u} \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h} \right)^{\frac{1+n}{n}} \right] \quad (2.38)$$

$$Q = \bar{u}h = \frac{n}{1+2n} \left(\frac{\rho}{\mu_n} g \sin \theta h^{1+2n} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.39)$$

Dans le cas d'un fluide newtonien ($n = 1$), l'équation(2.38) se réduit à :

$$u(y) = \frac{3}{2} \bar{u} \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h} \right)^2 \right] \quad (2.40)$$

On retrouve le profil parabolique classique. Les profile des vitesses $u(y)/\bar{u}$ pour $n = 1.0, 0.4$ et 0.1 sont présentés sur la figure (2.7).

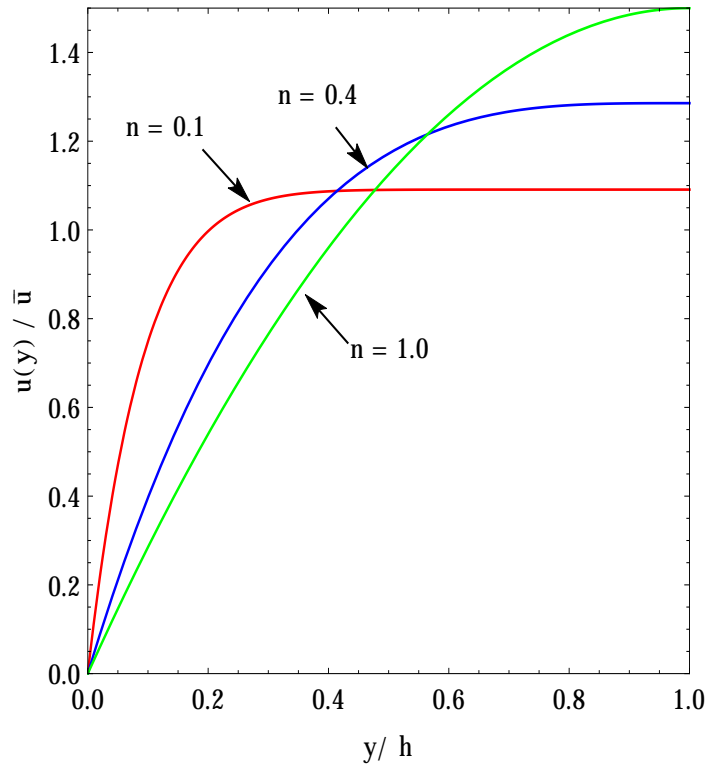


FIGURE 2.7 – Profiles des vitesses pour $n = 1.0, 0.4$ et 0.1

La contrainte à la paroi est calculée en substituant (2.35) dans (2.1) :

$$\sigma_b = \sigma_{xy}(y=0) = \mu_n \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \Big|_{y=0} = \mu_n \left[\left(\frac{1+2n}{n} \right) \frac{\bar{u}}{h} \right]^n \quad (2.41)$$

Pour les ondes longues, considérées ici, h varie lentement dans la direction longitudinale. Par application de la méthode intégrale de Von Kármán, en supposant que (2.35) est une bonne approximation pour $u(x, y, t)$ dans un écoulement transitoire et non-établi, mais \bar{u} et h dépendant de x et t . On intègre les équations (2.25) et (2.33) suivant la direction normal au lit de 0 à h , on obtient par application de la règle de Leibniz,

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy - u(h) \frac{\partial h}{\partial x} + v(h) - v(0) = 0 \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u dy - u(h) \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dy - u^2(h) \frac{\partial h}{\partial x} + u(h)v(h) - u(0)v(0) \\ = g \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) h + \frac{\mu_n}{\rho} \int_0^h \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n dy \end{aligned} \quad (2.43)$$

A l'aide de (2.28), (2.30) et (2.35), (2.42), (2.43) peuvent s'écrire :

$$(\bar{u}h)_x + h_t = 0 \quad (2.44)$$

$$(\bar{u}h)_t + \left(\beta \bar{u}^2 h + \frac{1}{2} \cos \theta g h^2 \right)_x = \sin \theta g h - \frac{\mu_n}{\rho} \left[\frac{1+2n}{n} \frac{\bar{u}}{h} \right]^n \quad (2.45)$$

où le calcul du coefficient de quantité de mouvement β défini par :

$$\beta = (\bar{u}^2 h)^{-1} \int_0^h u^2 dy \quad (2.46)$$

est dans notre cas donné par :

$$\beta = \frac{2(1+2n)}{(2+3n)} \quad (2.47)$$

Pour un fluide rhéofluidifiant, $0 < n \leq 1$, il vient :

$$1 < \beta \leq \frac{6}{5} \quad (2.48)$$

2.3.2 Normalisation

On définit les grandeurs sans dimension comme suit :

$$t = \frac{l_0}{\bar{u}_0} t^*, \quad x = l_0 x^*, \quad \bar{u} = \bar{u}_0 \bar{u}^*, \quad (h, y) = h_0 (h^*, y^*), \quad (2.49)$$

$$Q = (h_0 \bar{u}_0) Q^*, \quad \sigma_b = \sigma_{b0} \sigma_b^*, \quad \sigma_{b0} = \mu_n \left[\left(\frac{1+2n}{n} \right) \frac{\bar{u}_0}{h_0} \right]^n, \quad l_0 = \frac{\bar{u}_0^2}{g \sin \theta} \quad (2.50)$$

On établit la solution de l'écoulement uniforme (h_0, \bar{u}_0) de l'équation (2.45) :

$$0 = \sin \theta g h_0 - \frac{\mu_n}{\rho} \left[\frac{1+2n}{n} \frac{\bar{u}_0}{h_0} \right]^n, \quad (2.51)$$

d'où il résulte :

$$\bar{u}_0 = \frac{n}{1+2n} \left(\frac{\rho g \sin \theta}{\mu_n} \right)^{\frac{1}{n}} h_0^{\frac{1+n}{n}} \quad (2.52)$$

Sous forme adimensionnelle, les équations (2.44), (2.45), et (2.41) s'écrivent :

$$h_{t^*}^* + (\bar{u}^* h^*)_{x^*} = 0, \quad (2.53)$$

$$(\bar{u}^* h^*)_{t^*} + (\beta \bar{u}^{*2} h^* + \frac{1}{2} \alpha h^{*2})_{x^*} = h^* - \left(\frac{\bar{u}^*}{h^*} \right)^n, \quad (2.54)$$

$$\sigma_b^* = \left(\frac{\bar{u}^*}{h^*} \right)^n. \quad (2.55)$$

où :

$$\alpha = \frac{\cos \theta g h_0}{\bar{u}_0^2} \quad (2.56)$$

Compte tenu de (2.52) et (2.20), (2.56) peut s'écrire :

$$\alpha = \left(\frac{1 + 2n}{n} \right)^n \frac{\cot \theta}{Re} \quad (2.57)$$

(2.53) et (2.54) constituent les équations de base pour le calcul $\bar{u}(x, t)$ et $h(x, t)$, α et n étant les paramètres de l'écoulement. Pour une pente θ prescrite, le débit Q et n peuvent être considérés comme données à l'entrée de l'écoulement. Par la suite, pour alléger l'écriture, on va omettre les astérisques pour désigner les grandeurs sans dimension.

Chapitre 3

Analyse de stabilité linéaire d'un écoulement de base uniforme

« Truth is ever to be found in simplicity and not in the multiplicity and confusion of things. »

Isaac Newton

Sommaire

3.1 Introduction	18
3.2 Stabilité linéaire avec méthode de perturbation	18
3.3 Stabilité linéaire avec la méthode Whitham	20
3.3.1 Forme conservative	20
3.3.2 Forme non-conservative	21

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va procéder à la linéarisation du système (2.53) et (2.54) en superposant à la solution d'écoulement uniforme une petite perturbation, un calcul standard permet d'obtenir la condition de stabilité. Le même critère de stabilité peut être obtenu en utilisant l'approche de Whitham sous forme conservative. En revanche, en utilisant la méthode de Whitham sous forme non-conservative, on obtient un critère de stabilité légèrement différent. Pour un fluide newtonien ($n = 1$), le critère obtenu coïncide avec celui obtenu en résolvant l'équation d'Orr-Sommerfeld par BENJAMIN (1957) et YIH (1963).

3.2 Stabilité linéaire avec méthode de perturbation

On superpose une petite perturbation d'indice 1 à un écoulement de base uniforme d'indice 0 :

$$h = h_0 + h_1, \bar{u} = \bar{u}_0 + \bar{u}_1 \quad (h_1 \ll h_0, \bar{u}_1 \ll \bar{u}_0) \quad (3.1)$$

En substituant dans les équations (2.53), (2.54), on obtient la forme linéarisée suivante :

$$h_{1t} + \bar{u}_0 h_{1x} + h_0 \bar{u}_{1x} = 0 \quad (3.2)$$

$$\bar{u}_0 h_{1t} + h_0 \bar{u}_{1t} + (\beta \bar{u}_0^2 + \alpha h_0) h_{1x} + (2\beta \bar{u}_0 h_0) \bar{u}_{1x} = h_1 \left(1 + \frac{n}{h_0} \left(\frac{\bar{u}_0}{h_0} \right)^n \right) - \frac{n \bar{u}_1}{\bar{u}_0} \left(\frac{\bar{u}_0}{h_0} \right)^n \quad (3.3)$$

Ou encore sous la forme matricielle :

$$\left(\mathbf{T} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{X} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Lambda = \mathbf{F} \Lambda, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} h_1 \\ \bar{u}_1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

ou matrices \mathbf{T} , \mathbf{X} et \mathbf{F} sont données par

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{u}_0 & h_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \bar{u}_0 & h_0 \\ \beta \bar{u}_0^2 + \alpha h_0 & 2\beta \bar{u}_0 h_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 + \frac{n}{h_0} \left(\frac{\bar{u}_0}{h_0} \right)^n & -\frac{n}{\bar{u}_0} \left(\frac{\bar{u}_0}{h_0} \right)^n \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

On cherche la solution du système (3.4) sous la forme d'une onde progressives périodique proportionnelle à $e^{i(kx - \omega t)}$ où le nombre d'ondes k est réel, et la vitesse de phase $\omega = \omega_r + i\omega_i$ est complexe. Par substitution dans le système (3.4) on obtient l'équation de dispersion suivante :

$$\omega^2 - 2\omega \left(\beta k - i \frac{n}{2} \right) - (ik)(1 + 2n) + k^2(\beta - \alpha) = 0 \quad (3.6)$$

En notant ω^\pm les racines de l'équation (3.6), on obtient :

$$\omega^\pm = \left(\beta k - i \frac{n}{2} \right) \pm \sqrt{a + ib} \quad (3.7)$$

$$a = k^2 \left[\beta(\beta - 1) + \alpha \right] - \frac{n^2}{4} \quad (3.8)$$

$$b = k(1 + 2n - \beta n) \quad (3.9)$$

soit :

$$\omega_r^\pm = \beta k \pm \left\{ \frac{1}{2} \left[a + (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.10)$$

$$\omega_i^\pm = -\frac{n}{2} \pm \left\{ \frac{1}{2} \left[-a + (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

Puisque $0 < n \leq 1$, $0 < \beta \leq \frac{6}{5}$, b est positif pour $k \neq 0$. L'écoulement est stable si $\omega_i^\pm < 0$. Il est évident que $\omega_i^- < 0$. Un calcul standard permet d'obtenir la condition de stabilité :

Pour $k \neq 0$, on montre que la perturbation s'atténue et finit par disparaître et l'écoulement devient stable si l'inégalité suivante est réalisée.

$$\alpha > \frac{1+2n}{n^2} \quad (3.12)$$

qui peut s'écrire, compte tenu de (2.57),

$$Re < n \left(\frac{n}{1+2n} \right)^{1-n} \cot \theta \quad (3.13)$$

Pour un fluide newtonien, le critère de stabilité s'écrit :

$$\alpha > 3 \quad \text{ou} \quad Re < \cot \theta \quad (3.14)$$

La dépendance monotonique du taux d'amplification ω_i^+ et la vitesse de phase ω_r^+/k en fonction du nombre d'onde k pour différents valeurs de α (CHIU-ON et C.MEI, 1994) est présenté respectivement sur les figures (3.1) et (3.2) pour différentes valeurs de α et à $n = 0.4$. Comme on peut le voir sur la figure (3.1) l'écoulement est instable pour $\alpha > 11.25$.

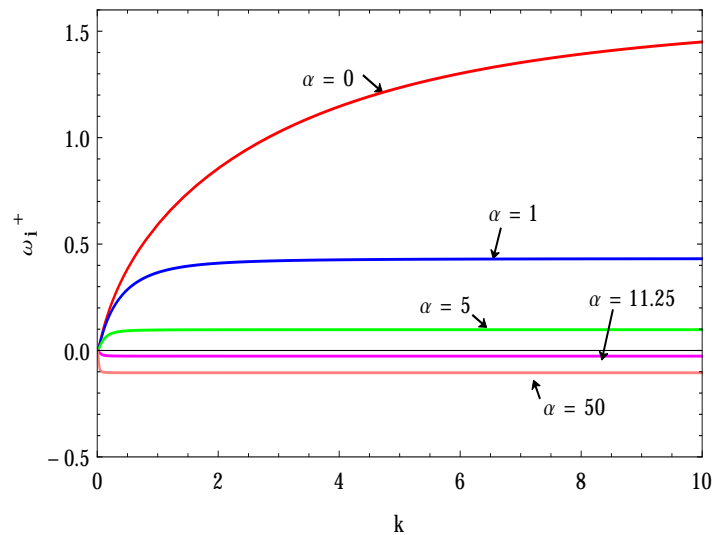


FIGURE 3.1 – Taux d'amplification des perturbations en fonction de k et α pour $n = 0.4$

On définit :

$$\alpha_s(n) = \frac{1+2n}{n^2} \quad (3.15)$$

Pour $k \neq 0$ le seuil de stabilité $\alpha_s(n)$ ne dépend que n . Si $\alpha > \alpha_s$, toutes les perturbations s'amortissent.

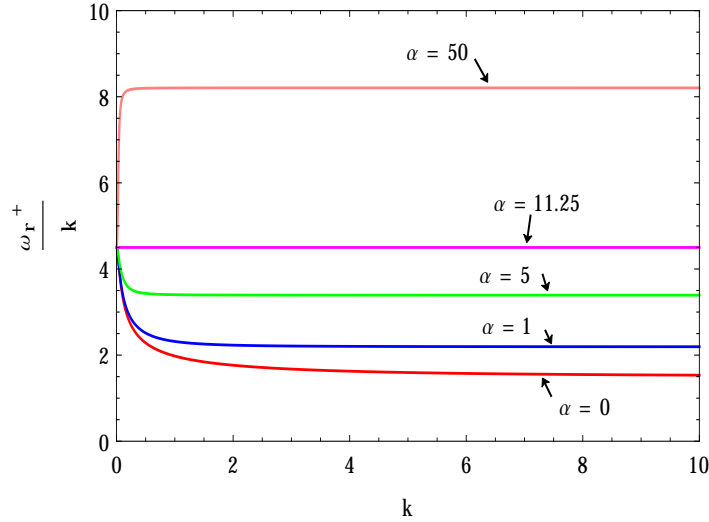


FIGURE 3.2 – Vitesse de phase des perturbations en fonction de k et α pour $n = 0.4$

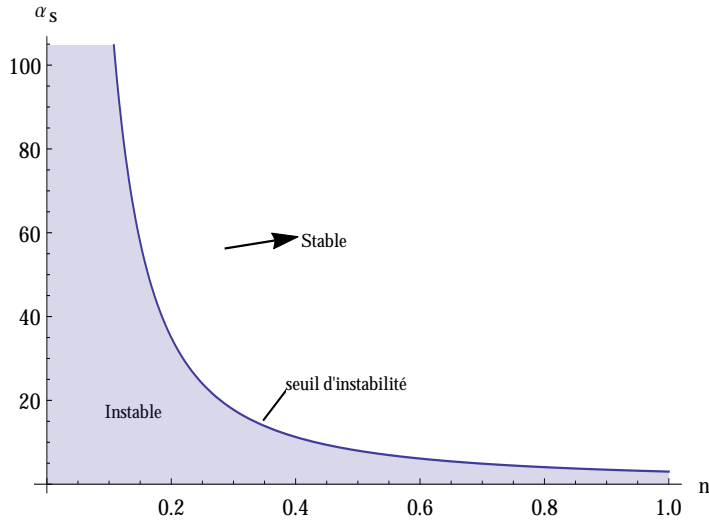


FIGURE 3.3 – Stabilité neutre avec $k \neq 0$ pour fluide rhéo-fluidifiant

3.3 Stabilité linéaire avec la méthode Whitham

3.3.1 Forme conservative

Cette méthode consiste à réexaminer le critère d'instabilité (3.12) précédent. La condition est obtenue de manière plus simple à l'aide de l'approche de Whitham : L'écoulement est stable si la vitesse de l'onde cinématique λ_c est comprise entre deux ondes dynamiques λ_d^\pm . i.e.

$$\lambda_d^- < \lambda_c < \lambda_d^+ \quad (3.16)$$

Le système linéarisé est donné par (3.2) et (3.3). Après élimination de \bar{u}_1 et dérivation, le système prend la forme condensée suivante :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_d^+ \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_d^- \frac{\partial}{\partial x} \right] h_1 + \left\{ n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_c \frac{\partial}{\partial x} \right) \right\} h_1 = 0 \quad (3.17)$$

λ_d^+ et λ_d^- sont des caractéristiques du système linéarisé, le long desquelles les perturbations se propageraient sans déformation si le terme entre accolade était nul.

Si $\bar{u}_0 = h_0 = 1$, on obtient :

$$\lambda_c = 2 + \frac{1}{n} \quad (3.18)$$

$$\lambda_d^+ = \beta + \sqrt{(\beta - 1)\beta + \alpha} \quad (3.19)$$

$$\lambda_d^- = \beta - \sqrt{(\beta - 1)\beta + \alpha} \quad (3.20)$$

En substituant dans (3.16), on obtient la même condition de stabilité (3.12).

3.3.2 Forme non-conservative

Les équations (2.53) et (2.54) précédentes sont données sous forme non-conservative par :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \beta \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - (\beta - 1) \frac{\bar{u}}{h} \frac{\partial h}{\partial t} + \alpha \frac{\partial h}{\partial x} = 1 - \frac{\bar{u}^n}{h^{n+1}} \quad (3.22)$$

On superpose une petite perturbation (\bar{u}_1, h_1) à l'écoulement de base uniforme (\bar{u}_0, h_0) , i.e.

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \bar{u}_1, \quad h = h_0 + h_1 \quad (3.23)$$

On obtient :

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \bar{u}_0 \frac{\partial h_1}{\partial x} + h_0 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \beta \bar{u}_0 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \alpha \frac{\partial h_1}{\partial x} = (n+1) \frac{\bar{u}_0^n}{h_0^{n+2}} h_1 - n \frac{\bar{u}_0^{n-1}}{h_0^{n+1}} \bar{u}_1 \quad (3.25)$$

Par élimination de \bar{u}_1 , on obtient une équation en h_1 donnée par :

$$h_{1tt} + (\beta + 1) \bar{u}_0 h_{1tx} + (\beta \bar{u}_0^2 - \alpha h_0) h_{1xx} = -(2n+1) \frac{\bar{u}_0^n}{h_0^{n+1}} h_{1x} - n \frac{\bar{u}_0^{n-1}}{h_0^{n+1}} h_{1t} \quad (3.26)$$

ou encore en posant $\bar{u}_0 = h_0 = 1$, on obtient l'équation qui correspond à l'équation d'Orr-Sommerfeld si $n = 1$:

$$h_{1tt} + (\beta + 1) h_{1tx} + (\beta - \alpha) h_{1xx} + 3h_{1x} + h_{1t} = 0 \quad (3.27)$$

L'équation (3.27) peut s'écrire :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + C^+ \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + C^- \frac{\partial}{\partial x} \right) h_1 + n \left[\frac{\partial}{\partial t} + C_0 \frac{\partial}{\partial x} \right] h_1 = 0 \quad (3.28)$$

$$C^+ = \frac{\beta + 1 + \sqrt{(\beta - 1)^2 + 4\alpha}}{2}, \quad C^- = \frac{\beta + 1 - \sqrt{(\beta - 1)^2 + 4\alpha}}{2}, \quad C_0 = \frac{2n + 1}{n} \quad (3.29)$$

L'écoulement est stable, si $C^- < C_0 < C^+$. i.e.

$$\frac{\beta + 1 - \sqrt{(\beta - 1)^2 + 4\alpha}}{2} < \frac{2n + 1}{n} < \frac{\beta + 1 + \sqrt{(\beta - 1)^2 + 4\alpha}}{2} \quad (3.30)$$

d'où il en résulte la condition de stabilité,

$$\alpha > \frac{(1+n)(2+n)(1+2n)}{n^2(2+3n)} \quad (3.31)$$

qui, compte tenu de (2.57), (3.31) peut s'écrire :

$$Re < \frac{n(2+3n)}{(1+n)(2+n)} \left(\frac{n}{1+2n} \right)^{1-n} \cot\theta \quad (3.32)$$

Dans le cas newtonien ($n = 1$), ce critère de stabilité prend la forme simplement suivante :

$$Re < \frac{5}{6} \cot\theta \quad (3.33)$$

En revanche, en utilisant la méthode de Whitham sous forme non-conservative, on obtient un critère de stabilité légèrement différent. Pour un fluide newtonien ($n = 1$), le critère obtenu coïncide avec celui obtenu en résolvant l'équation d'Orr-Sommerfeld par **BENJAMIN (1957)** et **YIH (1963)**.

Chapitre 4

Ondes permanentes entre deux chocs

« Il est plus facile de désintégrer un atome qu'un préjugé. »

Albert Einstein

Sommaire

4.1 Introduction	24
4.2 Profils des ondes entre deux chocs	24
4.3 Critère d'existence des ondes admissibles	25
4.4 Perte d'énergie	27

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de construire des solutions d'ondes périodiques avec discontinuités (ODP) de vitesse de propagation D constante. On se place dans le repère lié aux ondes et on met en évidence les conditions nécessaires d'existence de ce type d'ondes via les conditions de saut et de perte d'énergie. On établit que pour une hauteur critique $h_c \leq 1$ l'instabilité linéaire est nécessaire à la production des ODP. Dans le cas contraire, cette condition n'est pas nécessaire.

4.2 Profils des ondes entre deux chocs

Nous cherchons à construire des solutions d'ondes périodiques avec discontinuités de vitesse de propagation $D = \text{cste} > \bar{u} > 0$. Les indices 1 et 2 désignent respectivement l'amont et l'aval de la discontinuité.

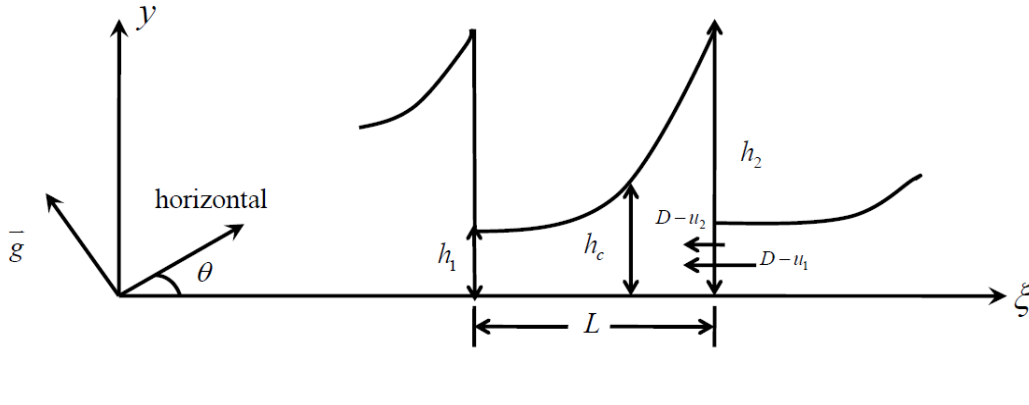


FIGURE 4.1 – Schéma des ondes progressives

Dans le repère lié aux ondes, les équations (2.53), (2.54) peuvent être formulées à l'aide de la seule variable $\xi = x - Dt$. On obtient :

$$h(D - \bar{u}) = q \quad (4.1)$$

$$\frac{dG}{d\xi} = \Delta \frac{dh}{d\xi} = F \quad (4.2)$$

avec :

$$G(h) = -D(\bar{u}h) + \beta \bar{u}^2 h + \alpha \frac{h^2}{2} \quad (4.3)$$

$$\Delta(h) = (\beta - 1)D^2 - \beta \frac{q^2}{h^2} + \alpha h \quad (4.4)$$

$$F(h) = h - \left(\frac{D}{h} - \frac{q}{h^2} \right)^n \quad (4.5)$$

où q est le débit apparent.

Les profils de $G(h)$ et $\Delta(h)$ sont représentés sur la figure (4.2). On constate que G admet un minimum en $h = h_c$ et donc $\Delta(h_c) = 0$. On l'appelle hauteur critique d'indice c .

Pour compléter la construction des ODP, il faut écrire les conditions de saut, on obtient :

$$G(h_1) = G(h_2) \quad (4.6)$$

$$q(h_1) = q(h_2) = q(h_c) \quad (4.7)$$

Les équations (4.6), (4.7) montrent que ces ODP dépendent de deux paramètres, par exemple : (h_1, h_c) .

q et D sont donnés en fonction de h_c par (4.17) et (4.18), on obtient pour h_2 ,

$$h_2 = \frac{4\beta q^2}{(\alpha h_1^2 + 2(\beta - 1)D^2 h_1) + \sqrt{(\alpha h_1^2 + (\beta - 1)2D^2 h_1)^2 + 8\alpha\beta q^2 h_1}} \quad (4.8)$$

qui se réduit dans le cas d'écoulement vertical, i.e. $\alpha = 0$ (A. BOUDLAL, 2008) à :

$$h_2 = \frac{\beta q^2}{(\beta - 1)D^2 h_1} \quad (4.9)$$

4.3 Critère d'existence des ondes admissibles

Comme h doit croître sur une longueur d'onde, conformément à l'observation expérimentale, il en résulte qu'au voisinage de la hauteur critique, Δ change le signe (voir figure 4.2). i.e.

$$\begin{cases} \Delta(h) > 0: & h_2 > h > h_c \\ \Delta(h) < 0: & h_1 < h < h_c \end{cases} \quad (4.10)$$

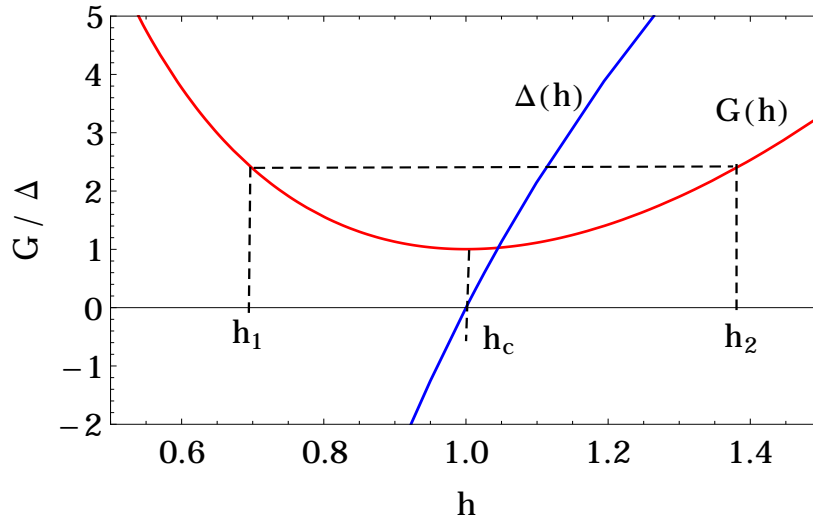
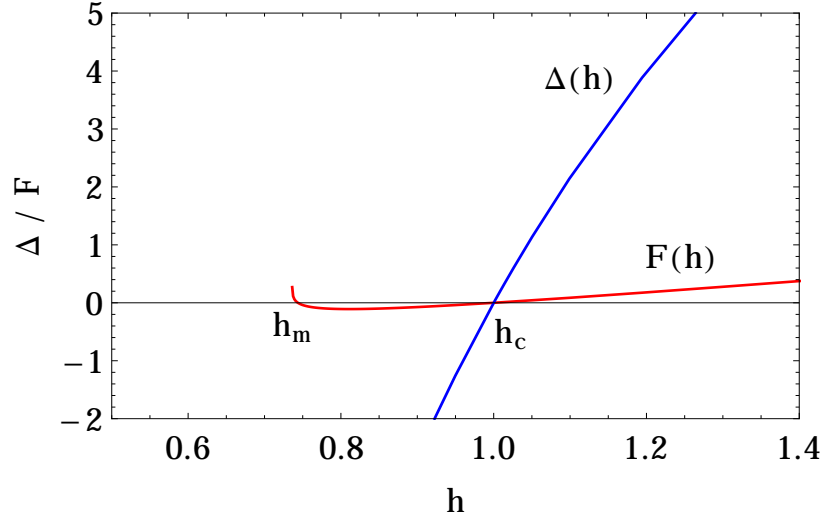


FIGURE 4.2 – Profils des G et Δ vs. h

Il doit en être de même pour F , autrement dit :

$$\begin{cases} F(h) > 0: & h_2 > h > h_c \\ F(h) < 0: & h_1 < h < h_c \end{cases} \quad (4.11)$$


 FIGURE 4.3 – Profils des Δ et F vs. h

Le profil de F est représenté sur la figure (4.3). Puisque $F(h_m) = 0$, pour $0 < h_m < h_c$, il ne peut exister d'ODP que si $h_m < h_1 < h_c$.

Pour $h = h_c$, le profil de $h(\xi)$ présente une singularité, l'application de la règle de l'hôpital permet d'écrire :

$$\lim_{h \rightarrow h_c} \frac{dh}{d\xi} = \frac{F'(h_c)}{\Delta'(h_c)} \quad (4.12)$$

Comme $\Delta'(h_c)$ est positif. Par conséquent on doit avoir :

$$F'(h_c) > 0 \quad (4.13)$$

d'où l'on obtient,

$$\bar{u}_c = h_c^{\frac{n+1}{n}} \quad (4.14)$$

La condition $\Delta(h_c) = 0$ permet d'écrire :

$$(\beta - 1)D^2 - \frac{\beta}{h_c^2} q^2 + \alpha h_c = 0, \quad (4.15)$$

qui compte tenu de (4.14) permet de relier D et h_c :

$$D^2 - 2\beta h_c^{\frac{1}{n}+1} D + \beta h_c^{\frac{2}{n}+2} - \alpha h_c = 0 \quad (4.16)$$

d'où l'on déduit :

$$D = h_c^{\frac{1}{n}+1} \Theta, \quad \Theta = \beta + \sqrt{(\beta - 1)\beta + \frac{\alpha}{h_c^{\frac{n+2}{n}}}} \quad (4.17)$$

$$q = (D - \bar{u}_c) h_c = h_c^{\frac{1}{n}+2} (\Theta - 1) \quad (4.18)$$

la racine négative est écartée.

La dérivation de $F(h)$ positif permet d'écrire, compte tenu de (4.14), (4.17) et (4.18) :

$$\alpha < \left\{ \left[(1 - \beta) + \frac{n+1}{n} \right]^2 - (\beta - 1)\beta \right\} h_c^{\frac{n+2}{n}} \quad (4.19)$$

A l'aide de (2.47), qui peut être simplifiée comme :

$$\alpha < \left(\frac{1+2n}{n^2} \right) h_c^{\frac{n+2}{n}} \quad (4.20)$$

Comparée à la condition de stabilité précédente (3.12), on déduit les deux conditions nécessaire d'existence des ODP :

- Pour $h_c \leq 1$, les ODP ne peuvent se produire que si l'écoulement de base est instable. Autrement dit : le critère de stabilité linéaire requis (3.12) est inconditionnellement satisfaits.
- Pour $h_c > 1$, les ODP peuvent se produire même si l'écoulement de base est stable.

Ces deux conditions sont illustrées sur la figure (4.4) pour $n = 0.4$ par exemple.

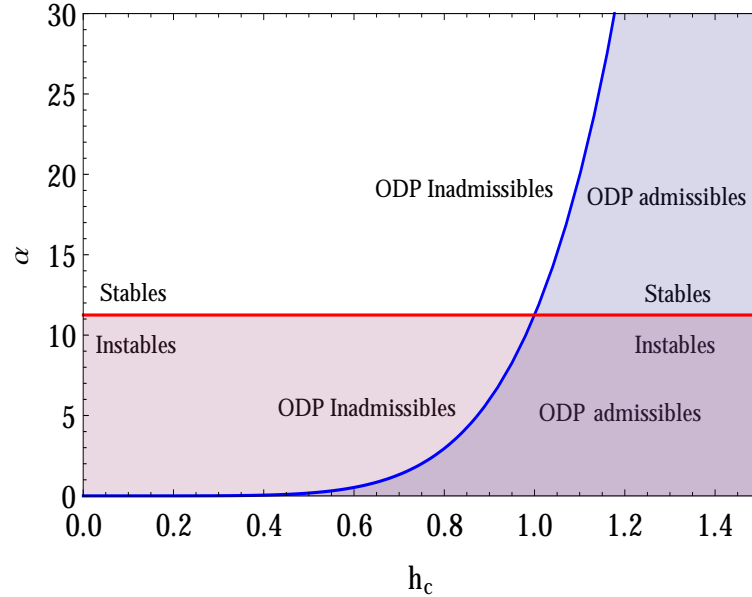


FIGURE 4.4 – Bornes d'existence des ODP en fonction de h_c et seuil de stabilité

L'intégration numérique de (4.2) donne pour $h(\xi)$ un profil lisse monotone croissant (voir figure 6.37).

4.4 Perte d'énergie

On sait que l'apparition d'un ressaut hydraulique s'accompagne d'une perte d'énergie mécanique. En exprimant l'absence de perte d'énergie mécanique à travers un ressaut mobile d'amplitude infinitésimale, **CHIU-ON et C.MEI (1994)** a obtenu :

$$\begin{aligned} \Delta E = (h_2 - h_1) [-q \left\{ \frac{\gamma}{4\beta} \alpha \frac{(h_2 - h_1)}{h_2 h_1} + \frac{\gamma - \beta}{\beta} \alpha + \frac{\gamma(\beta - 1)}{2\beta} D^2 \frac{h_2 + h_1}{h_2 h_1} \right\} \\ + \frac{3(\gamma - \beta)}{4\beta} \alpha D (h_2 + h_1) + \frac{2\gamma\beta - 3\gamma + \beta}{2\beta} D^3] \end{aligned} \quad (4.21)$$

où le profil parabolique est donné par (2.38), β est donné par (2.47) et

$$\Upsilon = \frac{6(1+2n)^2}{(2+3n)(3+4n)} \quad (4.22)$$

A la limite inférieure $q = q_c$, il n'y a aucune perte d'énergie à travers le choc, mais l'amplitude est finie. Ce phénomène est illustré sur les figures (6.31 – 6.36).

$$q = q_c = \left[\frac{3n}{2(3+4n)} \alpha D (h_2 + h_1) + \frac{(1+3n)n}{(2+3n)(3+4n)} D^3 \right] \times \left\{ \frac{3(1+2n)}{4(3+4n)} \alpha \frac{(h_2 - h_1)^2}{h_2 h_1} + \frac{2n}{3+4n} \alpha + \frac{3(1+2n)n}{2(2+3n)(3+4n)} D^2 \frac{h_2 + h_1}{h_2 h_1} \right\}^{-1} \quad (4.23)$$

Chapitre 5

Stabilité non linéaire d'ondes périodiques avec discontinuités

« Research is creating new knowledge. »

Neil Armstrong

Sommaire

5.1 Introduction	30
5.2 Présentation de la méthode	30
5.3 Analyse asymptotique des ondes périodiques	32
5.3.1 Stabilité des ondes d'amplitude infinitésimale	32
5.3.2 Stabilité des ondes d'amplitude maximale	33

5.1 Introduction

Comme l'analyse de stabilité linéaire d'un écoulement uniforme fournit seulement un diagnostic de l'instabilité, la stabilité non-linéaire est étudiée ici. L'investigation s'inscrit dans un domaine plein de développement depuis une dizaine d'années. Pour cette étude non-linéaire de stabilité, nous adoptons la technique de modulation des équations pour des solutions périodique lentement variable (WHITHAM, 1974), (A. BOUDLAL et LIAPIDEVSKI, 2012), on procède à la moyenne du système (4.1) et (4.2) sur une période de solution à périodicité lentement variable, ce qui conduit à des quantités moyennes qui peuvent être exprimées en fonction des paramètres indépendants h_1 et h_c . On considère \bar{h} et h_c comme des nouvelles variables indépendantes et on pose comme critère de stabilité hyperbolicité du système (4.1) et (4.2). D'où on aboutit un système intégrodifférentielle difficile à mettre en œuvre pour le tracé des diagrammes de stabilité des ODP à cause de la présence des singularités aux frontières d'hyperbolicité (faibles et maximales amplitudes). Pour lever ces singularités, des formules asymptotiques sont établies (ZHU et collab., 2013), (ZHU et collab., 2014).

5.2 Présentation de la méthode

La solution d'ondes périodiques avec discontinuités de (2.53), (2.54) dépend de deux paramètres. On considère \bar{h} et h_c comme des nouvelles variables indépendantes à la place de h_1 et h_c . Le problème de stabilité non-linéaire des trains d'ondes périodiques variant lentement avec h_1 et h_c peut être résolu par l'analyse d'hyperbolicité des équations modulées pour de telles ondes.

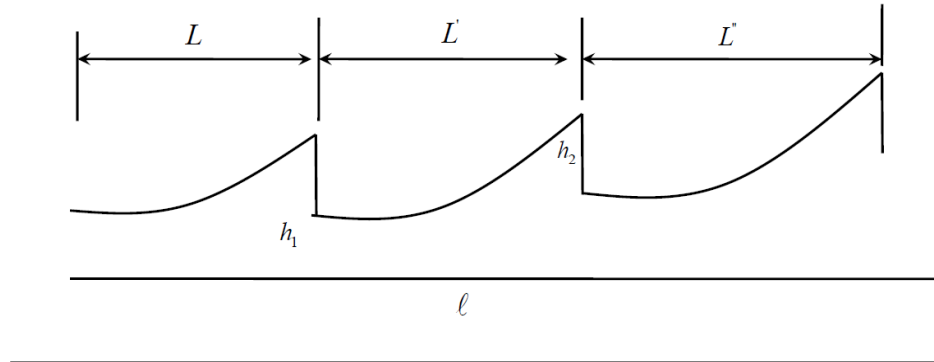


FIGURE 5.1 – Schéma des ondes lentement variant sur ℓ

ℓ est une échelle de longueur très grande devant la longueur des ODP L . Après avoir moyenné (2.53), (2.54) sur l'échelle ℓ ($\ell \gg L$), on obtient les équations modulées suivantes :

$$\bar{h}_t + (\overline{\bar{u}h})_x = 0 \quad (5.1)$$

$$(\overline{\bar{u}h})_t + \left(\beta \bar{u}^2 h + \frac{1}{2} \alpha h^2 \right)_x = 0 \quad (5.2)$$

Toutes les grandeurs moyennes peuvent être exprimées en fonctions de z et h_c comme

suit :

$$L = \int_0^L d\xi = \int_z^{w(z, h_c)} A(s, h_c) ds; \quad (5.3)$$

$$\bar{h} = L^{-1} \int_z^{w(z, h_c)} sA(s, h_c) ds; \quad (5.4)$$

$$\bar{B} = L^{-1} \int_z^{w(z, h_c)} B(s, h_c)A(s, h_c) ds; \quad (5.5)$$

$$B(s, h_c) = \frac{\beta q^2}{s} + \frac{\alpha s^2}{2}; \quad (5.6)$$

$$A(s, h_c) = \left\{ (\beta - 1)D^2 - \beta \frac{q^2}{s^2} + \alpha s \right\} \left\{ s - \left(\frac{D}{s} - \frac{q}{s^2} \right)^n \right\}^{-1}; \quad (5.7)$$

$$\overline{u\bar{h}} = D\bar{h} - q; \quad (5.8)$$

$$\beta \overline{u^2 h} + \frac{1}{2} \alpha h^2 = \beta (D^2 \bar{h} - 2qD) + \bar{B}; \quad (5.9)$$

$$s \in [z, w], \quad z = h_1, \quad w = h_2. \quad (5.10)$$

Compte tenue de (5.3) – (5.9), le système modulé (5.1), (5.2) peut s'écrire :

$$\begin{cases} \bar{h}_t + (D\bar{h} - q)_x = 0 \\ (D\bar{h} - q)_t + (\beta(D^2 \bar{h} - 2qD) + \bar{B}(z, h_c))_x = 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

L'évolution instationnaire des paramètres régissant (z, h_c) pour un train d'ondes périodiques est décrit par le système (5.11). On dit que les ondes sont stables si les équations modulées pour les valeurs correspondant à (z, h_c) sont hyperboliques. On considère (\bar{h}, h_c) comme de nouvelles variables indépendantes à la place de (z, h_c) . On obtient :

$$\begin{cases} \bar{h}_t + (D\bar{h} - q)_x = 0 \\ (D\bar{h} - q)_t + (\beta(D^2 \bar{h} - 2qD) + \tilde{B}(\bar{h}, h_c))_x = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

ou encore après quelques manipulations algébriques, on obtient la forme définitive suivante :

$$\begin{cases} \bar{h}_t + \delta(h_c)_x + D\bar{h}_x = 0 \\ (h_c)_t + \left((2\beta - 1)D + (-2q\beta D' + \tilde{B}_{h_c})\delta^{-1} \right) (h_c)_x + ((\beta - 1)D^2 + \tilde{B}_{\bar{h}})\delta^{-1} \bar{h}_x = 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

avec : $\delta = (D' \bar{h} - q')$.

L'équation caractéristique de ce système s'écrit :

$$(D - \tau) \left((2\beta - 1)D + (-2q\beta D' + \tilde{B}_{h_c})\delta^{-1} - \tau \right) - ((\beta - 1)D^2 + \tilde{B}_{\bar{h}}) = 0 \quad (5.14)$$

où le prime "'" désigne une dérivation par rapport h_c .

$$\tau^\pm = \left(\frac{dx}{dt} \right)^\pm = \frac{\left\{ 2\beta D + (-2q\beta D' + \tilde{B}_{h_c})\delta^{-1} \right\} \pm \sqrt{Disc}}{2} \quad (5.15)$$

avec :

$$Disc = \left\{ 2(\beta - 1)D + (-2q\beta D' + \tilde{B}_{h_c})\delta^{-1} \right\}^2 + 4((\beta - 1)D^2 + \tilde{B}_{\bar{h}}) \quad (5.16)$$

Le système (5.13) est hyperbolique si :

$$Disc = \left\{ 2(\beta - 1)D + (-2q\beta D' + \tilde{B}_{h_c})\delta^{-1} \right\}^2 + 4((\beta - 1)D^2 + \tilde{B}_{\bar{h}}) > 0 \quad (5.17)$$

La difficulté principale pour localiser les régions stables du domaine d'existence de ces ondes réside dans le fait que le critère de stabilité est une expression intégro-différentiel qui est difficile à mettre en œuvre à cause des singularités aux frontières d'hyperbolicité. Des formules asymptotiques de stabilité non linéaire de trains d'ondes d'amplitude infinitésimale et d'amplitude maximale sont suggérées. Cette étude fait suite à une série de travaux théoriques et numériques en écoulement vertical, effectuées par [A. BOUDLAL et LIAPIDEVSKI \(2012\)](#), [A. BOUDLAL \(2008\)](#). Dans les paragraphes suivants, on va mettre en évidence les formules asymptotiques pour lever ces singularités.

5.3 Analyse asymptotique des ondes périodiques

Pour mettre en œuvre le critère de stabilité (5.17) des ODP, on est amené à lever les singularités dans les équations (5.3) – (5.9) pour les amplitudes infinitésimales ($L \rightarrow 0$) et les amplitudes maximales ($L \rightarrow \infty$).

5.3.1 Stabilité des ondes d'amplitude infinitésimale

Soit h_c la hauteur critique donnée, alors on a :

$$A(h_c, h_c) = \lim_{z \rightarrow h_c} A(z, h_c) = \lim_{z \rightarrow h_c} \frac{F(z, h_c)}{\Delta(z, h_c)} = \frac{F_z(h_c, h_c)}{\Delta_z(h_c, h_c)} > 0 \quad (5.18)$$

La hauteur conjuguée $w = w(z, h_c)$ et la dérivée correspondante à la valeur $z = h_c$ peuvent être calculées à partir de (5.18) comme suit :

$$w(h_c, h_c) = h_c, \quad w_z(h_c, h_c) = -1, \quad (5.19)$$

$$w_{h_c} = 2 \left\{ (-\beta + 1)2DD' + \frac{2\beta q q'}{h_c^2} \right\} \times \left\{ \frac{2\beta q^2}{h_c^3} + \alpha \right\}^{-1}, \quad (5.20)$$

$$w_{zz}(h_c, h_c) = -\frac{2}{3} \frac{G_{zzz}(h_c, h_c)}{G_{zz}(h_c, h_c)} \quad (5.21)$$

Pour la dérivée des quantités moyennes de (5.6), (5.9), on obtient :

$$\bar{h}_z = \frac{1}{L} (A(w, h_c)(w - \bar{h})w_z - A(z, h_c)(z - \bar{h})) = \frac{H}{L} \quad (5.22)$$

$$\bar{B}_z = \frac{1}{L} (A(w, h_c)(B(w, h_c) - \bar{B})w_z - A(z, h_c)(B(z, h_c) - \bar{B})) = \frac{Q}{L} \quad (5.23)$$

où les fonctions $H = H(z, h_c)$ et $Q = Q(z, h_c)$ sont définies par (5.22), (5.23), nous avons :

$$\bar{h}_z |_{z=h_c} = \lim_{z \rightarrow h_c} \frac{H(z, h_c)}{L(z, h_c)} = \frac{H_z(h_c, h_c)}{L_z(h_c, h_c)}, \quad (5.24)$$

$$\bar{B}_z |_{z=h_c} = \lim_{z \rightarrow h_c} \frac{Q(z, h_c)}{L(z, h_c)} = \frac{Q_z(h_c, h_c)}{L_z(h_c, h_c)}, \quad (5.25)$$

$$L_z(h_c, h_c) = -2A(h_c, h_c) < 0 \quad (5.26)$$

Il résulte de (5.19) à (5.26) :

$$\bar{h}_z|_{z=h_c} = -\bar{h}_z|_{z=h_c} = 0, \quad \bar{B}_z|_{z=h_c} = -\bar{B}_z|_{z=h_c} = 0 \quad (5.27)$$

Les dérivées secondes de \bar{B} et \bar{h} peuvent être exprimés à $z = h_c$ par les formules :

$$\bar{h}_{zz} = \frac{2}{3} \left(\frac{A_z(h_c, h_c)}{A(h_c, h_c)} - \frac{1}{2} \frac{G_{zzz}(h_c, h_c)}{G_{zz}(h_c, h_c)} \right) \quad (5.28)$$

$$\bar{B}_{zz} = \frac{1}{3} B_{zz}(h_c, h_c) + \frac{2}{3} \frac{B_z(h_c, h_c) A_z(h_c, h_c)}{A(h_c, h_c)} + \frac{1}{3} B_z(h_c, h_c) w_{zz}(h_c, h_c) \quad (5.29)$$

$$\bar{B}|_{z=h_c} = \lim_{z \rightarrow h_c} \frac{\bar{B}_z(z, h_c)}{\bar{h}_z(z, h_c)} = \frac{\bar{B}_{zz}(h_c, h_c)}{\bar{h}_{zz}(h_c, h_c)} \quad (5.30)$$

Pour trouver le signe de (5.17), nous avons les expressions des \bar{h}_{h_c} et \bar{B}_{h_c} à $z = h_c$. Il résulte de (5.6), (5.9) que :

$$\bar{h}_{h_c}(h_c, h_c) = \frac{1}{2} w_{h_c}(h_c, h_c) \quad (5.31)$$

$$\bar{B}_{h_c}(h_c, h_c) = \frac{\beta q q'}{h_c} + \frac{1}{2} B_z(h_c, h_c) w_{h_c}(h_c, h_c) \quad (5.32)$$

Maintenant la stabilité des ondes d'amplitude infinitésimale peut être vérifiée par (5.17), en utilisant simplement les valeurs de fonctions connues et leurs dérivées à $s = h_c$ (5.28) – (5.32).

5.3.2 Stabilité des ondes d'amplitude maximale

Supposons que les ODP soient définies pour chaque profondeur critique h_c . Cela signifie que des fonctions $z^* = z^*(h_c)$ et $w^* = w(z^*(h_c), h_c)$ existent telle que la condition (4.6) soit vérifiée pour les profondeurs conjuguées z, w avec $G(z) = G(w)$ et $z^* < z < h_c < w < w^*$, $F(z^*, h_c) = 0$, $F(w^*, h_c) \neq 0$.

Quand $z \rightarrow z^*$, on peut appliquer les formules asymptotiques :

$$A(s, h_c) = \frac{b(s, h_c)}{s - z^*}, \quad b(z^*, h_c) \neq 0, \quad (5.33)$$

$$L(z, h_c) = \int_z^{w^*} \frac{b(s, h_c) - b(z^*, h_c)}{s - z^*} ds + b(z^*, h_c) \ln \frac{w - z^*}{z - z^*} \Big|_{z \rightarrow z^*} \rightarrow \infty, \quad (5.34)$$

$$\bar{h}(z, h_c) = \frac{1}{L} \int_z^{w^*} (s - z^*) A(s, h_c) ds + z^* \Big|_{z \rightarrow z^*} \rightarrow z^*, \quad (5.35)$$

$$\bar{B}(z, h_c) = \frac{1}{L} \int_z^{w^*} (B(s, h_c) - B(z^*, h_c)) A(s, h_c) ds + B(z^*, h_c) \Big|_{z \rightarrow z^*} \rightarrow B(z^*, h_c), \quad (5.36)$$

En remplaçant la longueur d'onde L, la relation (5.36) s'écrit :

$$\bar{B}(z, h_c) = B(z^*, h_c) + \frac{\bar{h} - z^*}{\int_z^{w^*} b(s, h_c) ds} \int_z^{w^*} \frac{(B(s, h_c) - B(z^*, h_c)) b(s, h_c) ds}{s - z^*} \quad (5.37)$$

L'expression approchée de la fonction $\bar{B}(\bar{h}, h_c) = \bar{B}(z, h_c)$ est donnée par les formules suivantes, dans lequel les limites des intégrales à (5.37) sont utilisés pour $z \rightarrow z^*$.

$$\bar{B}^*(\bar{h}, h_c) = B(z^*, h_c) + B'^* (\bar{h} - z^*) \quad (5.38)$$

avec :

$$B'^* = \frac{\int_{z^*}^{w^*} \frac{(B(s, h_c) - B(z^*, h_c)) b(s, h_c) ds}{s - z^*}}{\int_{z^*}^{w^*} b(s, h_c) ds} \equiv \frac{\Phi}{\Psi} \quad (5.39)$$

Chapitre 6

Diagrammes de stabilité non linéaire

*« I have not failed. I've just found
10.000 ways that won't work. »*

Thomas A. Edison

Sommaire

6.1 Introduction	35
6.2 Écoulement d'un film liquide mince sur une paroi plane verticale	35
6.3 Écoulement d'un film liquide mince sur une paroi plane inclinée	37
6.3.1 Influence de la nature de fluide sur la stabilité du film	38
6.3.2 Influence de l'inclinaison sur la stabilité du film	46
6.3.3 Diagrammes de stabilité non linéaire	63
6.3.4 Profils des ODP	66
6.4 Conclusion	68

6.1 Introduction

Ce chapitre est dédié aux instabilités non-linéaires de la surface libre des films liquides minces en écoulement sur une paroi plane et inclinée. Pour des nombres de Reynolds modérés, de tels écoulements sont régis par les équations (2.53) – (2.55). Le cas de l'écoulement vertical a été étudié par A. BOUDLAL et LIAPIDEVSKI (2012). Pour cette étude nous adoptons l'approche développée dans A. BOUDLAL et LIAPIDEVSKI (2012), dont certains résultats sont présentés dans ce paragraphe pour validation de la suite de nos calculs.

6.2 Écoulement d'un film liquide mince sur une paroi plane verticale

Noter que pour un écoulement vertical, le système (5.1), (5.2) est autosimilaire, les équations modulées prennent une forme assez simple et le critère d'hyperbolicité est réduit à une condition d'une seule variable.

Rappelons l'équation du profil des ODP (4.2), et considérons les deux expressions (4.17), (4.18).

Si l'écoulement est vertical ($\alpha = 0$), le système (4.2) peut être réduit à une fonction d'une variable $s = \frac{z}{h_c}$:

$$\frac{d\xi}{dh} = h_c^{\frac{n+2}{n}} A(s) \quad (6.1)$$

avec :

$$A(s) = \frac{(\beta - 1)\Theta^2(s^2 - 1)s^{2n-2}}{s^{2n-1} - (\Theta(s-1) + 1)^n} \quad (6.2)$$

Le calcul numérique montre que l'intervalle d'hyperbolicité est relativement étroit et se trouve dans le voisinage de z^* . Pour un fluide newtonien ($n = 1$), les valeurs de s correspondant au domaine d'hyperbolicité appartiennent à l'intervalle $[z^*, z_1]$ avec $z^* = 0.4695$ et $z_1 = 0.4697$. Par conséquent, les frontières du domaine d'hyperbolicité peuvent être approchées par une formulation asymptotique au voisinage de z^* .

Sur la figure (6.1), on voit que le domaine d'hyperbolicité est situé dans l'intervalle $[\bar{z}^-, \bar{z}^+] = [0.477, 0.667]$. Comme \bar{z} est une dilatation de z , voir figure (6.2), en réalité le domaine d'hyperbolicité est trop étroit et avoisinant z^* .

Si on fixe le débit moyen $Q = \overline{hu}$, on obtient (6.4) une relation supplémentaire entre ces variables. Néanmoins, l'un des paramètres, par exemple, la longueur d'onde, reste encore libre et peut varier de zéro à l'infini pour une valeur donnée de Q . Donc, le domaine d'hyperbolicité $[\bar{z}^-, \bar{z}^+]$ est calculé ici pour déterminer la longueur d'onde et par la suite l'amplitude des ondes.

Pour $Q = 1$, on obtient l'expression de h_c en fonction de \bar{z} .

$$Q = \overline{hu} = D\bar{h} - q = h_c^{\frac{2n+1}{n}} [\Theta\bar{z} + 1 - \Theta] = 1 \quad (6.3)$$

$$\text{avec : } \bar{z} = \frac{\bar{h}}{h_c}$$

On obtient :

$$h_c = \left[\frac{1}{(\Theta\bar{z} + 1 - \Theta)} \right]^{\frac{n}{2n+1}} \quad (6.4)$$

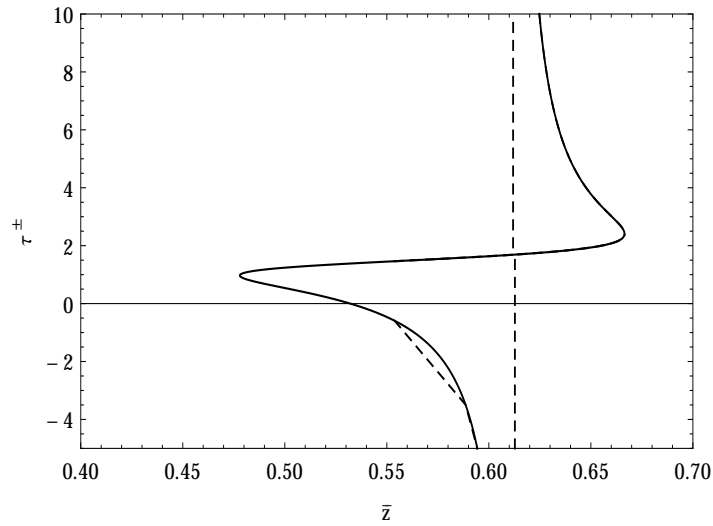


FIGURE 6.1 – Caractéristique $\tau^{\pm} = (dx/dt)^{\pm}$ en fonction de \bar{z} le cas vertical, fluide newtonien

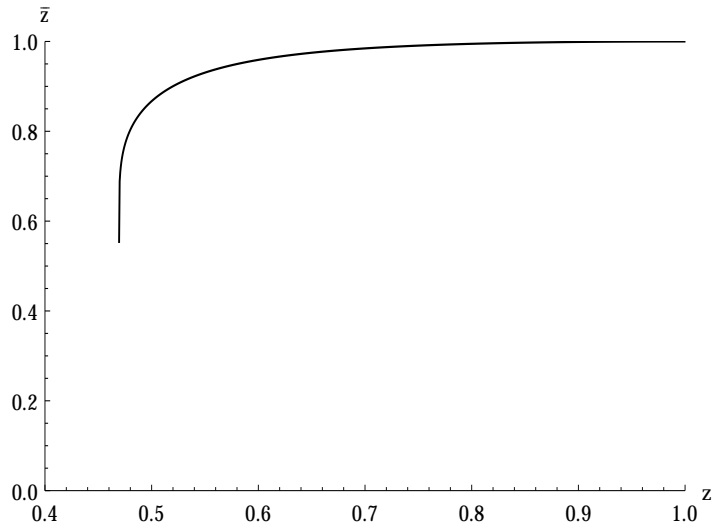


FIGURE 6.2 – \bar{z} en fonction de z le cas vertical, fluide newtonien

Le calcul numérique des frontières du domaine de stabilité fournit : $[\bar{z}^-, \bar{z}^+] = [0.477, 0.667]$, la hauteur critique de h_c peut être obtenue. Par la suite l'intégration numérique de (4.2) permet d'obtenir le profil des ODP stables.

6.3 Écoulement d'un film liquide mince sur une paroi plane inclinée

Ici on considère le cas incliné correspondant à $\alpha \neq 0$, d'équation (4.2). Contrairement au cas vertical, le problème dépend à présent de deux variables (z, h_c). La condition d'hyperbolicité est présentée par (5.17).

Dans le cas newtonien ($n = 1$), V.YU.LYAPIDEVSKII (1998) montre que le système est hyperbolique pour des trains d'ondes d'amplitude finie, à nombres d'ondes réduits à une bande relativement étroite et à une dispersion d'amplitudes très faible.

Le tableau ci-dessous représente $[z^*, z_1]$ correspondant à l'intervalle d'hyperbolicité $[\bar{h}^-, \bar{h}^+]$ pour quelques couples des valeurs (n, α) et $h_c = 1$.

n	α	z^*	z_1
1	0	0.4695	0.4697
0.9	0	0.4513	0.4515
0.8	0	0.4319	0.4322
0.7	0	0.4113	0.4119
1	0.25	0.5724	0.5725
1	0.5	0.6446	0.6447
1	0.75	0.7021	0.7022
0.8	0.25	0.5327	0.5330

TABLEAU 6.1 – Intervalle d'hyperbolicité avec quelques couples des valeurs (n, α) pour $h_c = 1$

On remarque à partir de ce tableau que l'intervalle d'hyperbolicité est très petit. On peut donc en première approximation calculer de manière asymptotique cet intervalle. L'approximation (5.38) peut être appliquée pour le calcul du domaine d'hyperbolicité des équations modulées (5.12). Nous remplaçons la fonction $\tilde{B}(\bar{h}, h_c)$ par $\tilde{B}^*(\bar{h}, h_c)$.

Les valeurs approximatives des caractéristiques sont données par (5.15) avec les formules asymptotiques $\tilde{B}_{h_c}^*$ et $\tilde{B}_{\bar{h}}^*$ à la place de \tilde{B}_{h_c} et $\tilde{B}_{\bar{h}}$.

On a :

$$\tilde{B}_{\bar{h}} = B'^* \quad (6.5)$$

$$\tilde{B}_{h_c} = B_{h_c} + B_{z^*} z^{*'} + (\bar{h} - z^*) B_{h_c}' - B'^* z^{*'} \quad (6.6)$$

$$B_{h_c}' = \frac{\varphi' \psi - \varphi \psi'}{\psi^2} \quad (6.7)$$

En substituant dans (5.14), on aboutit à une très bonne approximation explicite de $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$, et surtout pratique en application numérique.

Cela étant, on choisit $h_c = 1$ comme une solution de référence, les figures (6.3 – 6.29) représentent les vitesses caractéristiques $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ pour quelques couples de valeurs de (n, α). Elles montrent l'influence de la nature du fluide, et de l'inclinaison.

6.3.1 Influence de la nature de fluide sur la stabilité du film

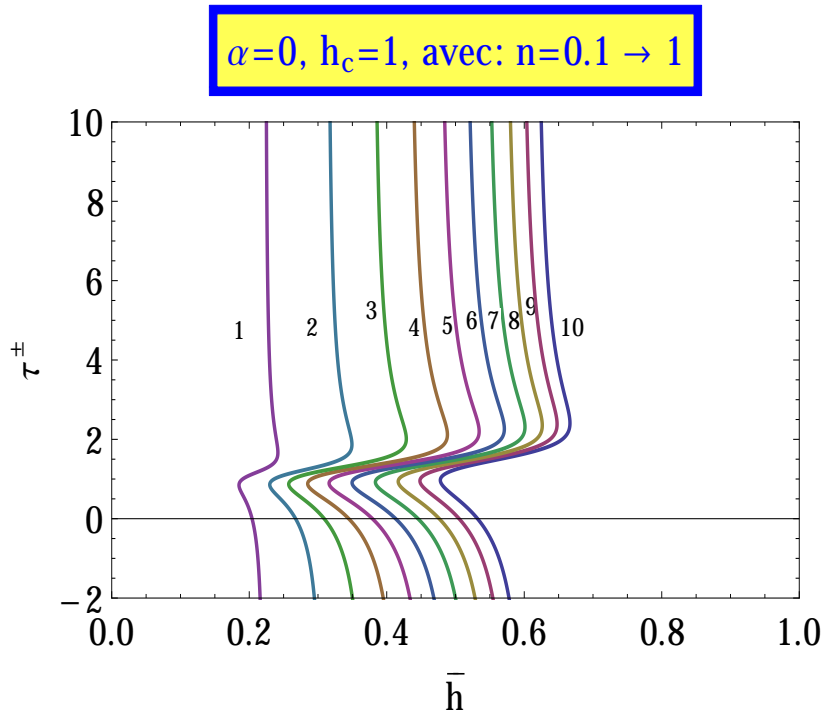


FIGURE 6.3 – Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ pour $\alpha=0, h_c=1$. Les courbes 1, 2, 3, ..., 10 correspondent respectivement à $n=0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1$

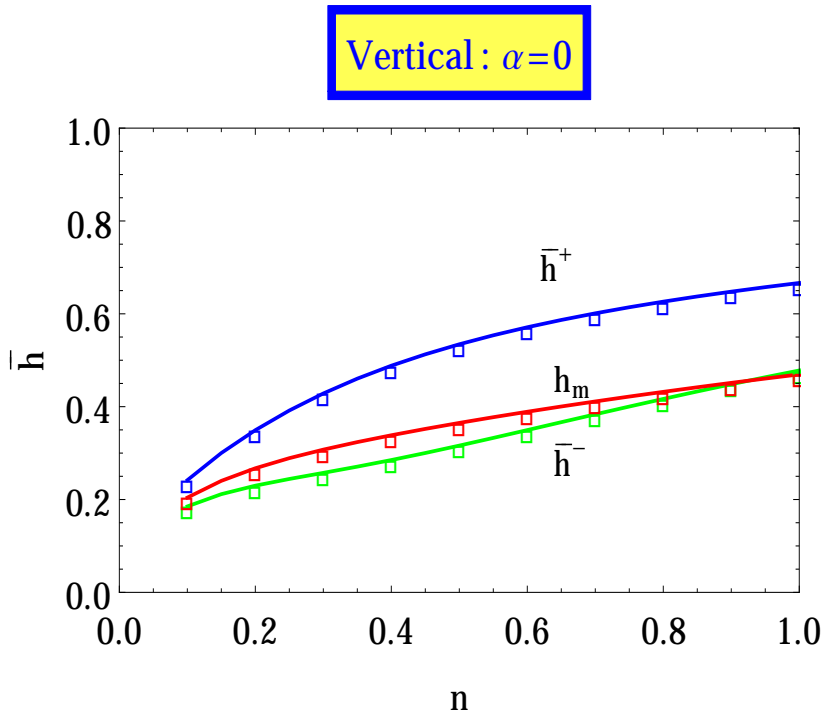


FIGURE 6.4 – Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de n pour $\alpha=0, h_c=1$

La figure (6.3) représente l'écoulement vertical d'un fluide avec des différentes valeurs de n pour $\alpha = 0$, $h_c = 1$. Sur la courbe 1 correspondant à l'écoulement d'un fluide newtonien ($n = 1$), le domaine de stabilité avoisine l'amplitude maximale. Les ODP d'amplitude maximale ($L \rightarrow \infty$) sont instables, comme cela est illustré au point $n = 1.0$ sur la figure (6.4). Les ondes d'amplitude modérée sont stables, en revanche les ondes de faible amplitude sont instables. Pour un fluide non-newtonien ($n \neq 1$), l'intervalle d'hyperbolicité se trouve englobé dans l'intervalle admissible des ODP [$\bar{h}^- < h_m < \bar{h}^+ < h_c$]. Autrement dit, les ondes d'amplitude maximale et modérée sont stables et les ondes de faible amplitude sont instables. A mesure que n diminue, le domaine stable des ODP se réduit.

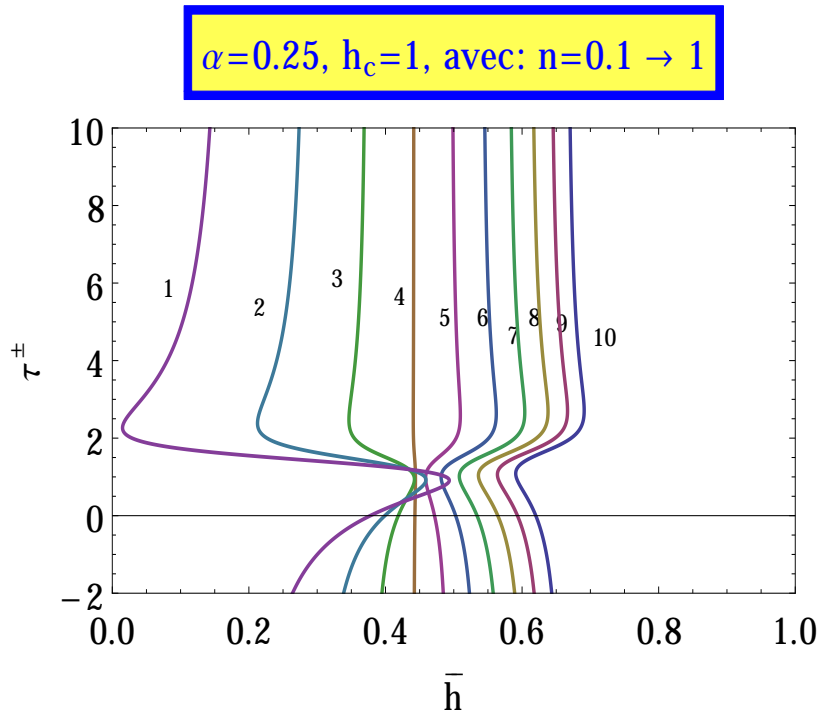


FIGURE 6.5 – Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ pour $\alpha = 0.25, h_c = 1$. Les courbes 1, 2, 3, ... , 10 correspondent respectivement à $n = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1$

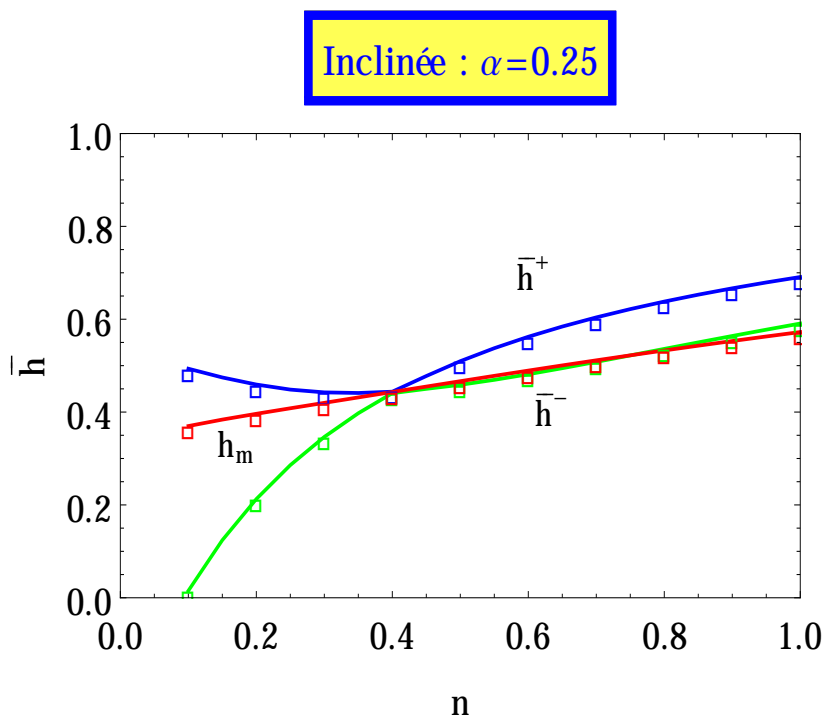


FIGURE 6.6 – Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de n pour $\alpha = 0.25, h_c = 1$

La figure (6.5) représente l'écoulement incliné d'un fluide avec des différentes valeurs de n pour $\alpha = 0.25, h_c = 1$. Le domaine de stabilité est proche de l'amplitude maximale. Sur la figure (6.6), on constate que pour $n = 1 \rightarrow 0.7$, l'intervalle d'hyperbolicité se trouve à l'intérieur de l'intervalle admissible des ODP [$h_m < \bar{h}^- < \bar{h}^+ < h_c$]. Cela signifie que les ODP d'amplitude maximale sont instables, les ondes d'amplitude modérée sont stables, et les ondes de faible amplitude sont instables ; on constate aussi que pour $n < 0.7$, l'intervalle d'hyperbolicité se trouve englobé dans l'intervalle admissible des ODP [$\bar{h}^- < h_m < \bar{h}^+ < h_c$]. Autrement dit, aussi bien les ondes d'amplitude maximales que modérée sont stables, en revanche les ondes de faible amplitude sont instables. Quand n décroît, on constate que le domaine des ondes stables se réduit et finissent par disparaître pour $n \geq 0.4$. Cette tendance s'inverse pour $n \leq 0.4$.

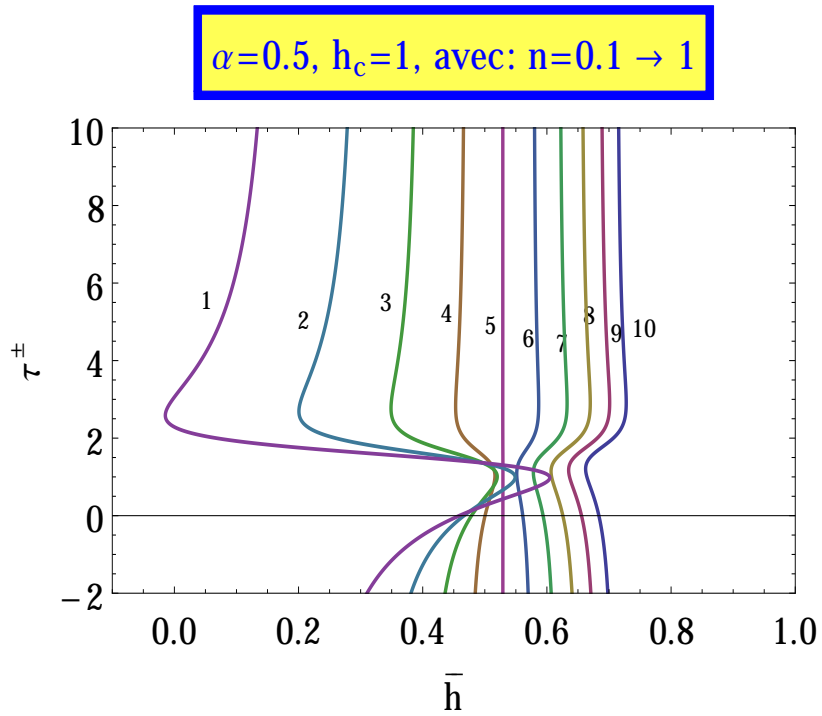


FIGURE 6.7 – Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ pour $\alpha = 0.5$ et $h_c = 1$. Les courbes 1, 2, 3, ... , 10 correspondent respectivement à $n = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1$

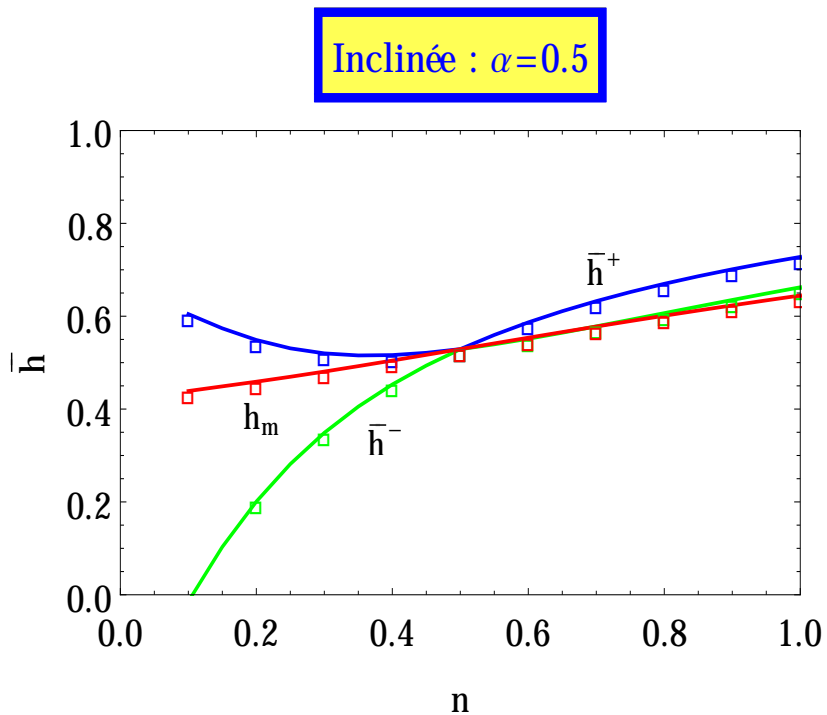


FIGURE 6.8 – Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^- , \bar{h}^+) en fonction de n pour $\alpha = 0.5$, $h_c = 1$

La figure (6.7), montre que pour l'écoulement incliné ($\alpha = 0.5$), la région proche des ondes d'amplitude maximale ($L \rightarrow \infty$) est stable. Sur la figure (6.8), pour $n = 1 \rightarrow 0.7$, l'intervalle d'hyperbolicité se trouve à l'intérieur de l'intervalle admissible des ODP [$h_m < \bar{h}^- < \bar{h}^+ < h_c$], les ODP d'amplitude maximale sont instables, les ondes d'amplitude modérée sont stables, et les ondes de faible amplitude sont instables. Pour $n < 0.7$, on constate que l'intervalle d'hyperbolicité se trouve englobé dans l'intervalle admissible des ODP [$\bar{h}^- < h_m < \bar{h}^+ < h_c$]. Autrement dit, les ondes d'amplitude maximale et modérée sont stables et que les ondes de faible amplitude sont instables. On remarque aussi qu'à mesure que n décroît, la région stable des ODP se réduit et finit par disparaître pour $n > 0.5$. En deçà de cette valeur critique approximative $n = 0.5$ la tendance s'inverse.

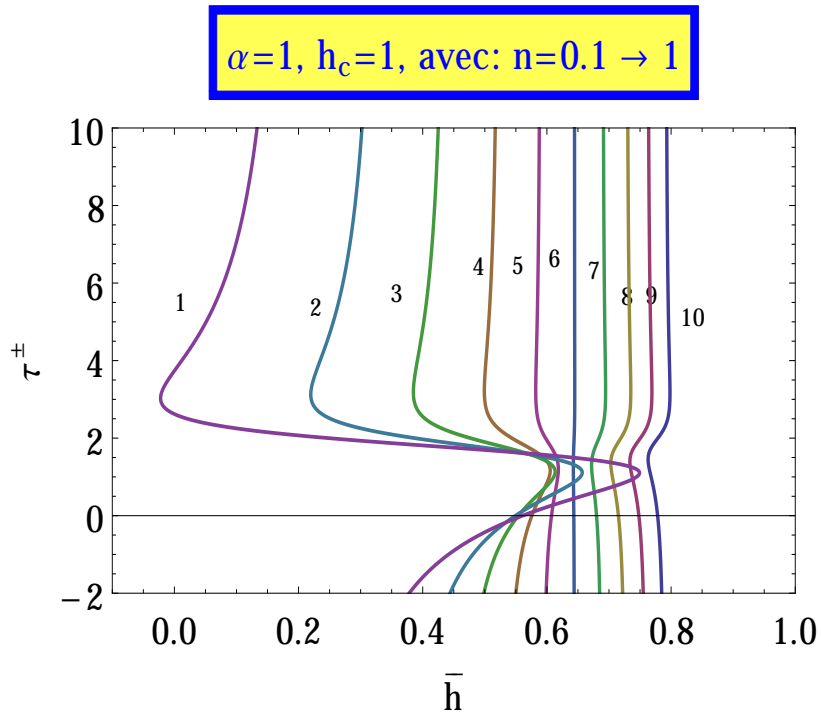


FIGURE 6.9 – Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ pour $\alpha = 1, h_c = 1$. Les courbes 1, 2, 3, ..., 10 correspondent respectivement à $n = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1$

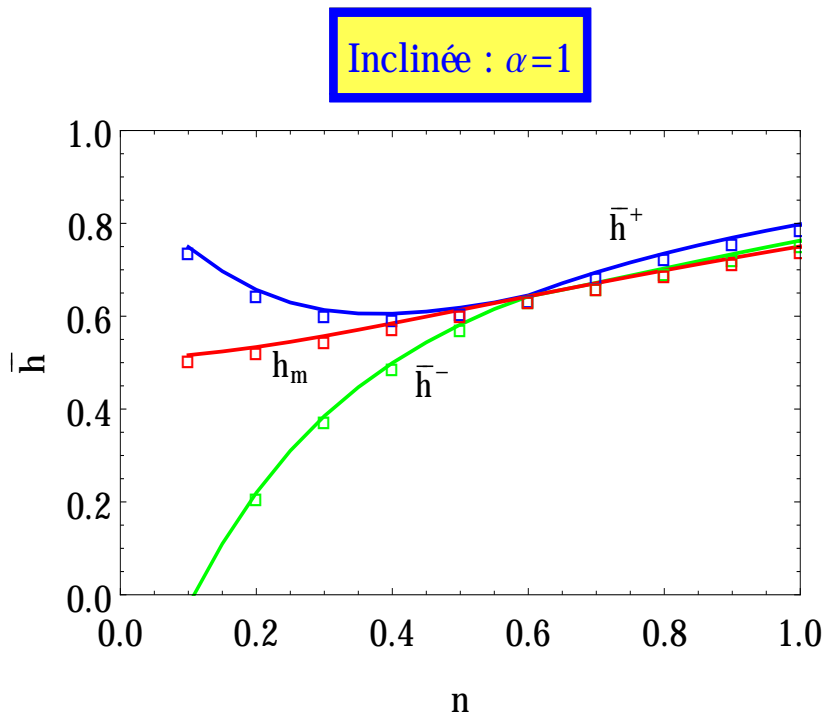


FIGURE 6.10 – Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de n pour $\alpha = 1, h_c = 1$

L'écoulement incliné ($\alpha = 1$) est présenté sur les figures (6.9) et (6.10). On constate la même tendance pour le cas incliné. La seule différence est que la valeur critique n croît avec α . Ici, la valeur critique approximative est $n = 0.6$.

6.3.2 Influence de l'inclinaison sur la stabilité du film

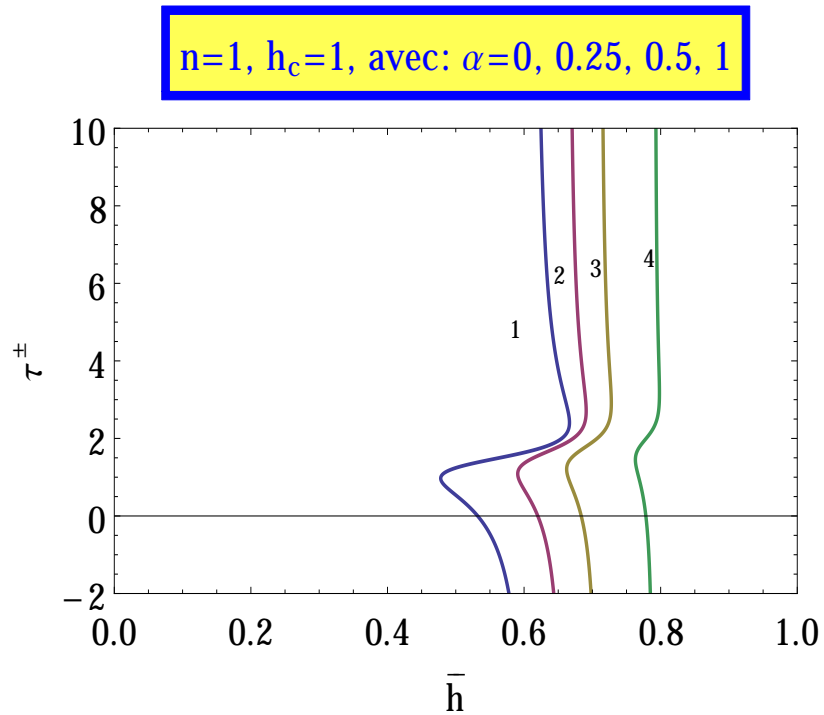


FIGURE 6.11 – Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ pour $n = 1$, $h_c = 1$. Les courbes 1, 2, 3, 4 correspondent respectivement à $\alpha = 0, 0.25, 0.5, 1$

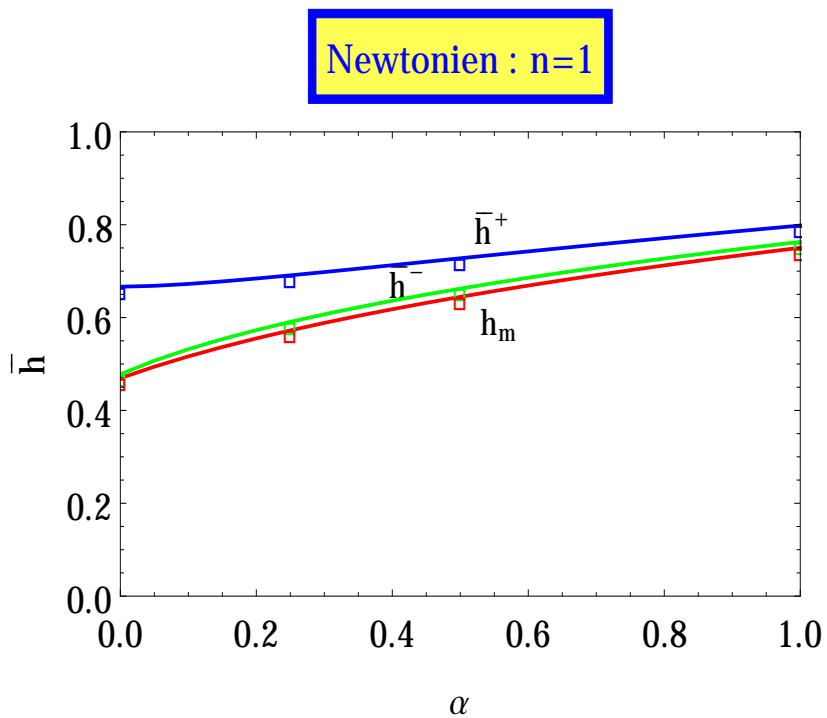


FIGURE 6.12 – Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^- , \bar{h}^+) en fonction de α pour $n = 1$, $h_c = 1$

Les figures (6.11) et (6.12) montrent que pour un fluide newtonien ($n = 1$), les ODP d'amplitude maximale et de faible amplitude sont instables, en revanche, les ODP d'amplitude modérée sont stables. A mesure que α augmente le domaine de stabilité se réduit.

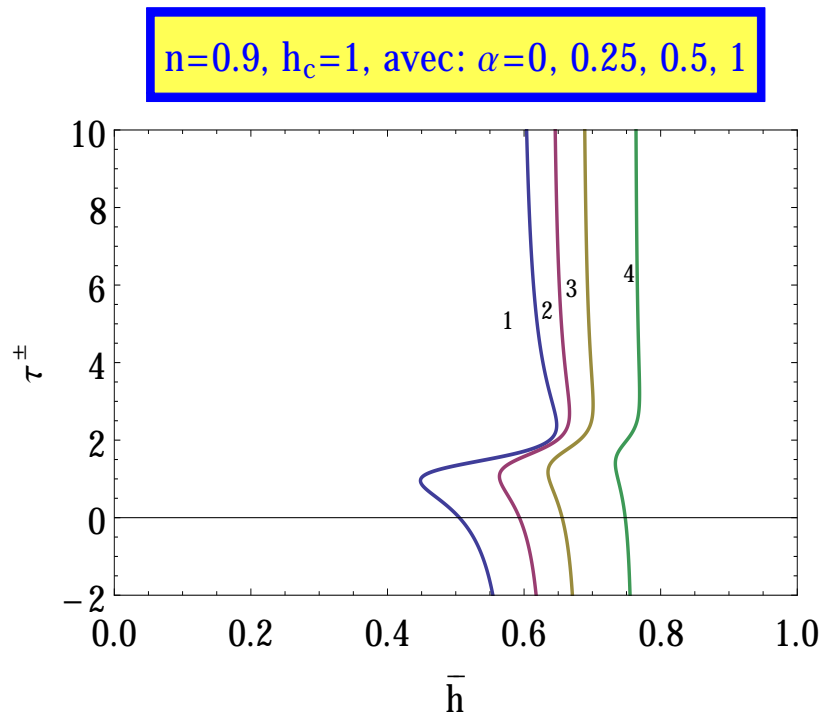


FIGURE 6.13 – Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ pour $n = 0.9, h_c = 1$. Les courbes 1, 2, 3, 4 correspondent respectivement à $\alpha = 0, 0.25, 0.5, 1$

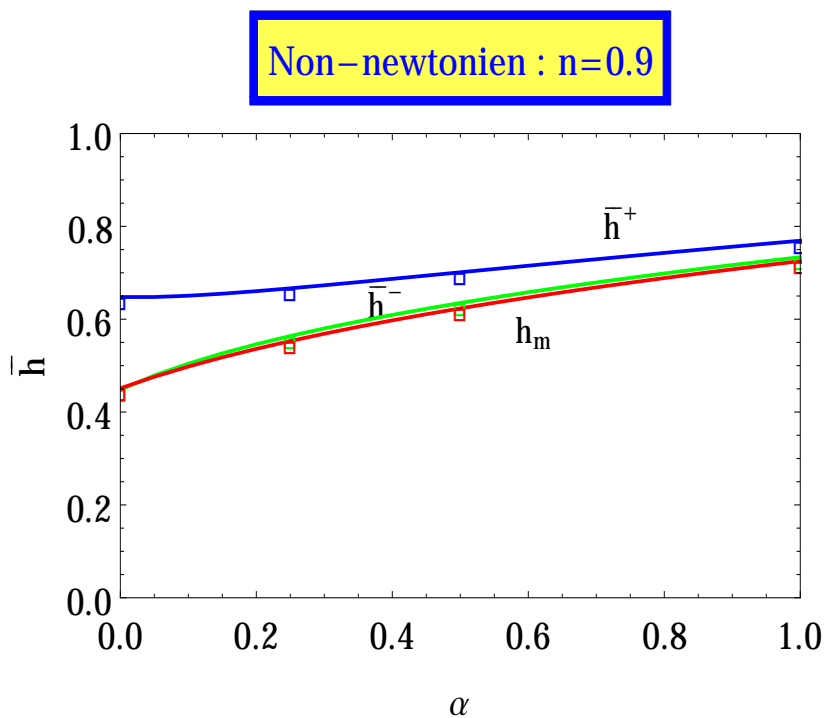


FIGURE 6.14 – Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de α pour $n = 0.9, h_c = 1$

Les figures (6.13) et (6.14) montrent que pour $n = 0.9$, dans tous les cas, les ODP d'amplitude modérée sont stables et celles de faible amplitude sont instables. Dans le cas vertical, les ODP d'amplitude maximale sont stables. Elles sont instables dans le cas incliné. A mesure que α augmente le domaine de stabilité se réduit.

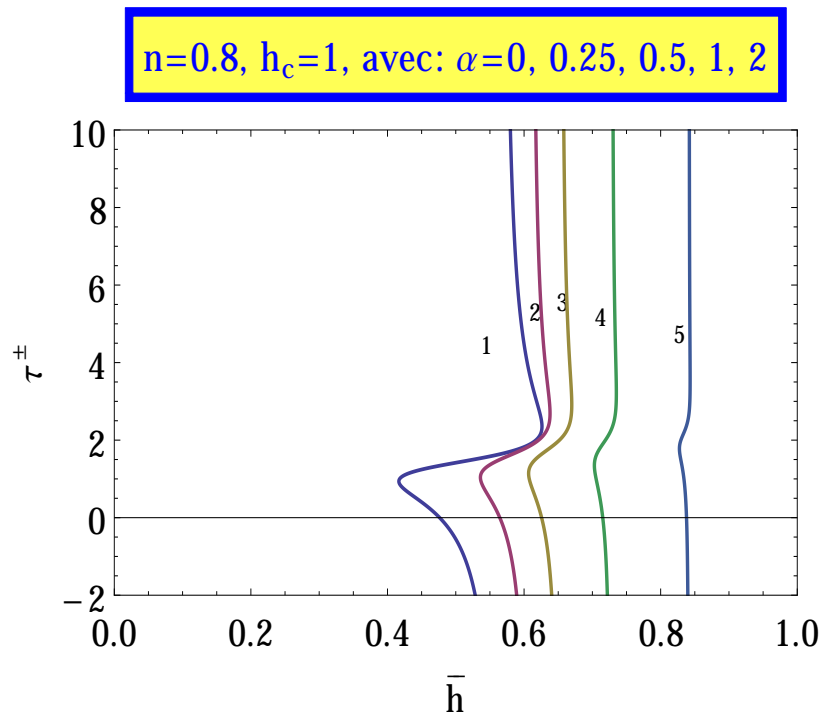


FIGURE 6.15 – Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ pour $n = 0.8, h_c = 1$. Les courbes 1, 2, 3, 4, 5 correspondent respectivement à $\alpha = 0, 0.25, 0.5, 1, 2$

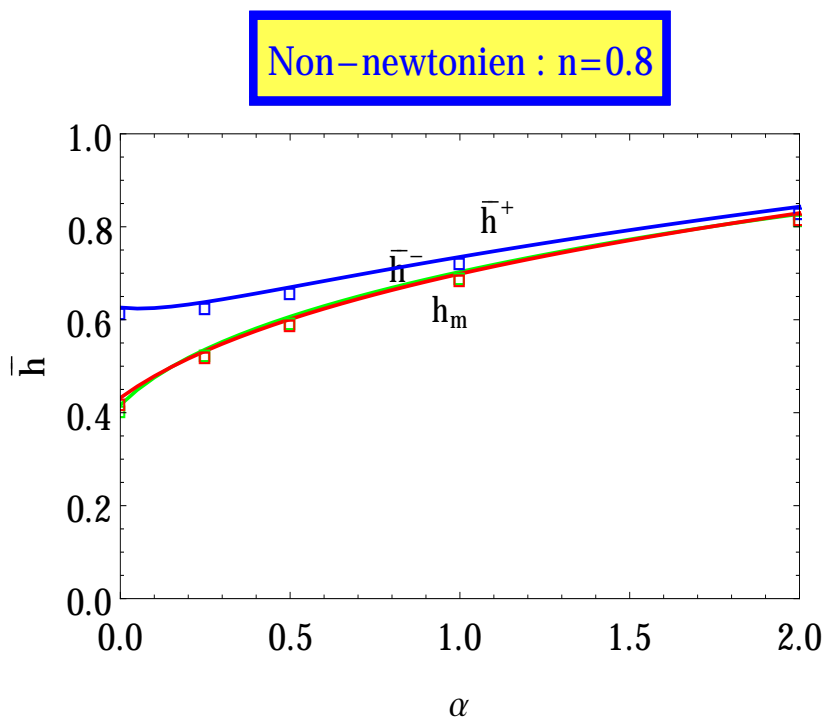


FIGURE 6.16 – Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de α pour $n = 0.8, h_c = 1$

Pour $n = 0.8$, les figures (6.15) et (6.16) montrent que dans le cas vertical, les ODP d'amplitude maximale sont stables, et elles sont instables dans le cas incliné. Les ODP d'amplitude modérée sont stables dans tous les cas, et les ondes de faible amplitude sont instables. A mesure que α augmente le domaine de stabilité se réduit et finit par disparaître pour $\alpha > 2$.

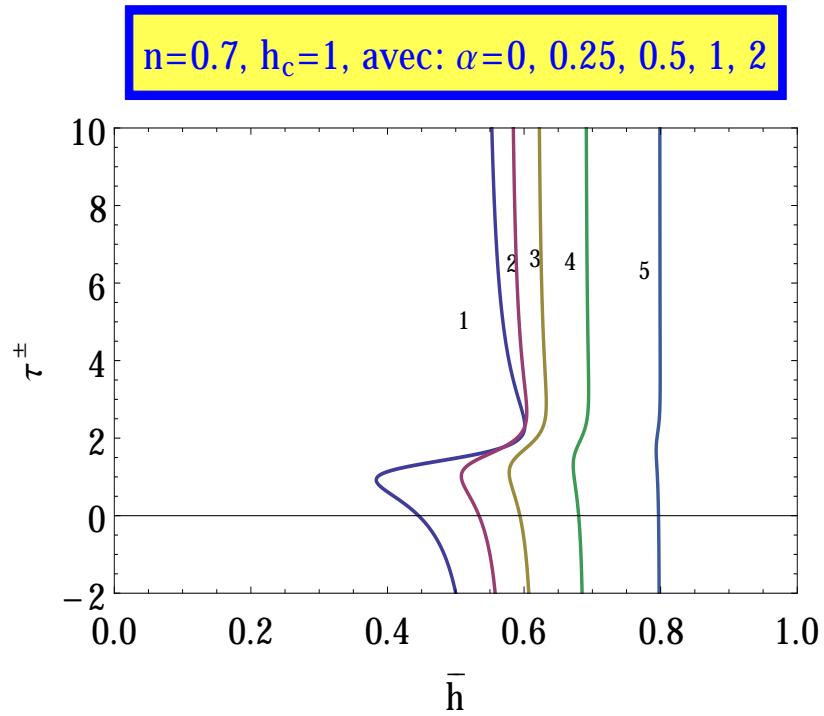


FIGURE 6.17 – Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ pour $n = 0.7$, $h_c = 1$. Les courbes 1, 2, 3, 4, 5 correspondent respectivement à $\alpha = 0, 0.25, 0.5, 1, 2$

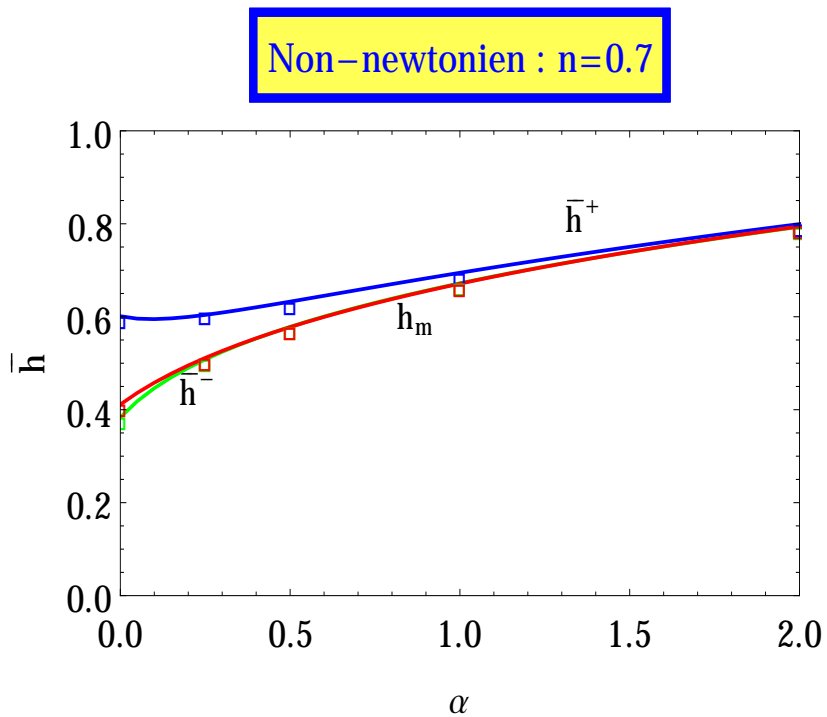


FIGURE 6.18 – Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de α pour $n = 0.7$, $h_c = 1$

Pour $n = 0.7$ les figures (6.17) et (6.18) montrent que dans tous les cas, les ondes d'amplitude modérée sont stables, et celles de faible amplitude sont instables. Les ODP d'amplitude maximale sont stables pour $0 \leq \alpha \leq 0.25$. Pour $0.25 < \alpha < 1$ les ondes d'amplitude maximale deviennent instable, puis redevient stables $\alpha > 1$. A mesure que α augmente le domaine de stabilité se réduit.

$n=0.6, h_c=1$, avec: $\alpha=0, 0.25, 0.5, 1, 2, 3, 3.25$

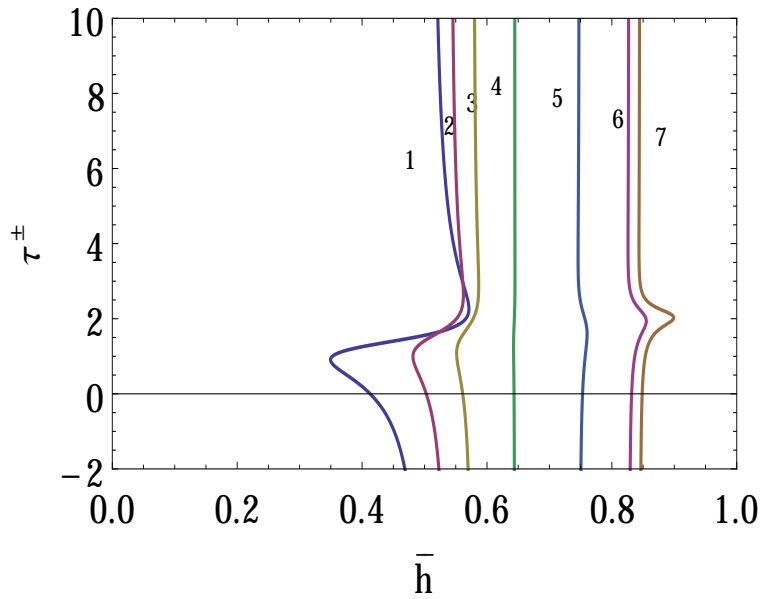


FIGURE 6.19 – Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ pour $n = 0.6$, $h_c = 1$. Les courbes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 correspondent respectivement à $\alpha = 0, 0.25, 0.5, 1, 2, 3, 3.25$

Non-newtonien : $n=0.6$

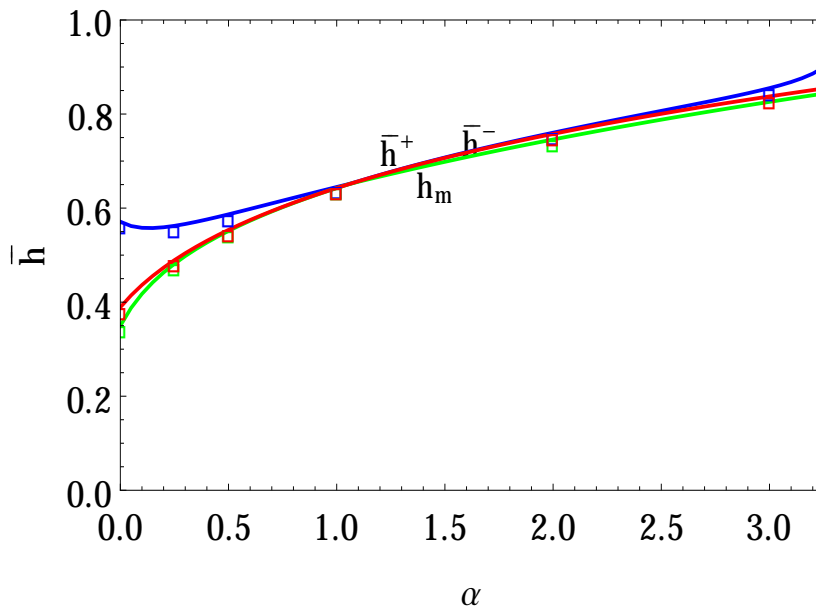


FIGURE 6.20 – Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^- , \bar{h}^+) en fonction de α pour $n = 0.6$, $h_c = 1$

Les figures (6.19) et (6.20) montrent que pour $n = 0.6$, dans tous les cas, les ODP d'amplitude maximale et modéré sont stables, tandis que les ondes de faible amplitude sont instables. Quand α croît, on constat que le domaine des ondes stables se réduit et finit par disparaître pour $\alpha \leq 1$, cette tendance s'inverse pour $\alpha \geq 1$.

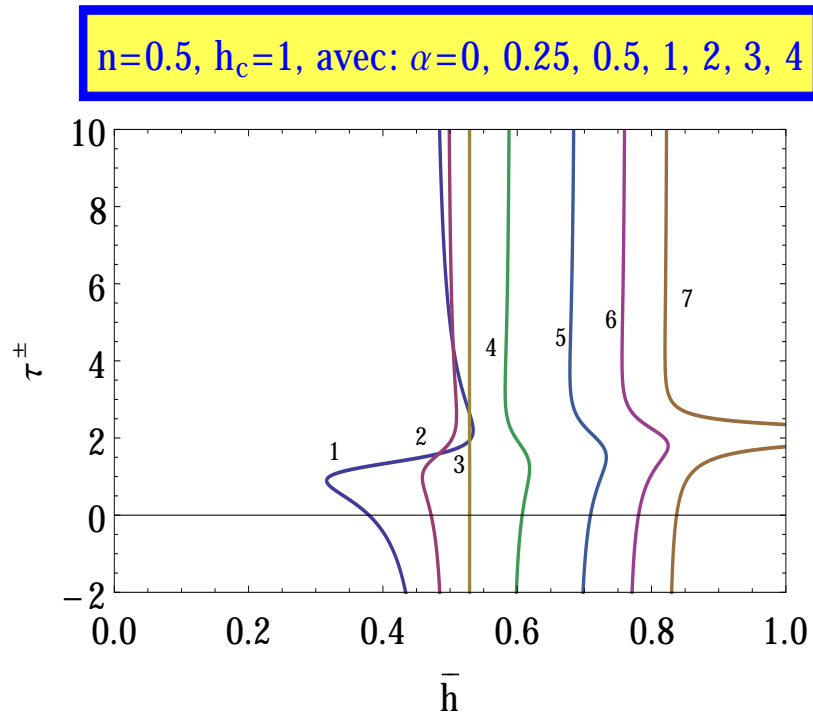


FIGURE 6.21 – Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ pour $n = 0.5$, $h_c = 1$. Les courbes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 correspondent respectivement à $\alpha = 0, 0.25, 0.5, 1, 2, 3, 4$

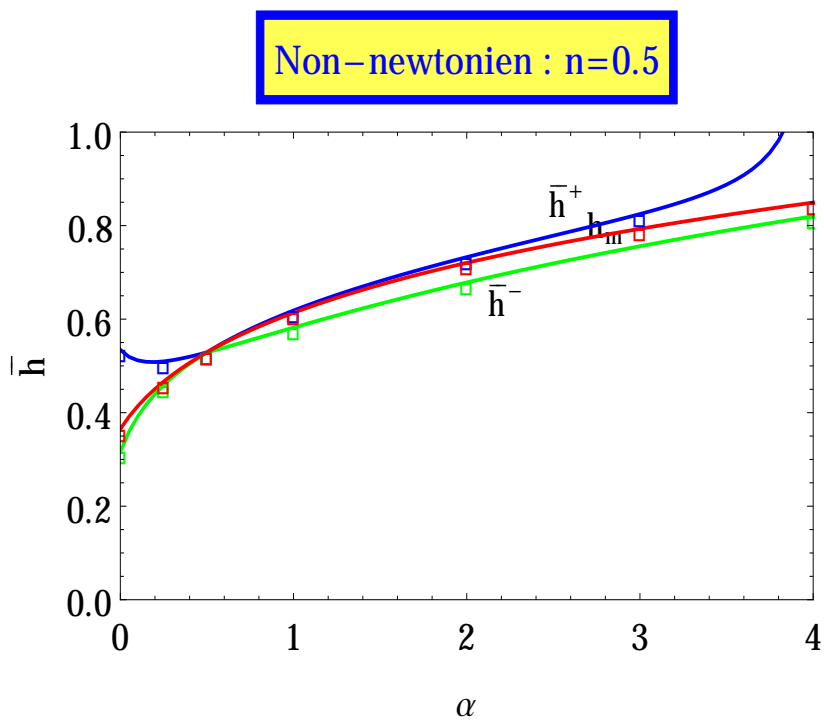


FIGURE 6.22 – Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^- , \bar{h}^+) en fonction de α pour $n = 0.5$, $h_c = 1$

Ces figures (6.21) et (6.22), montrent que pour $n = 0.5$, les ODP d'amplitude maximale et modérée sont toujours stables, tandis que les ondes de faible amplitude sont instables jusqu'à une valeur critique $\alpha_c \approx 3.8$, deviennent stables au-delà de cette valeur. D'autre part, quand α croît, la région stable des ODP décroît et finit par disparaître à $\alpha = 0.5$. Au-delà de cette valeur la tendance s'inverse.

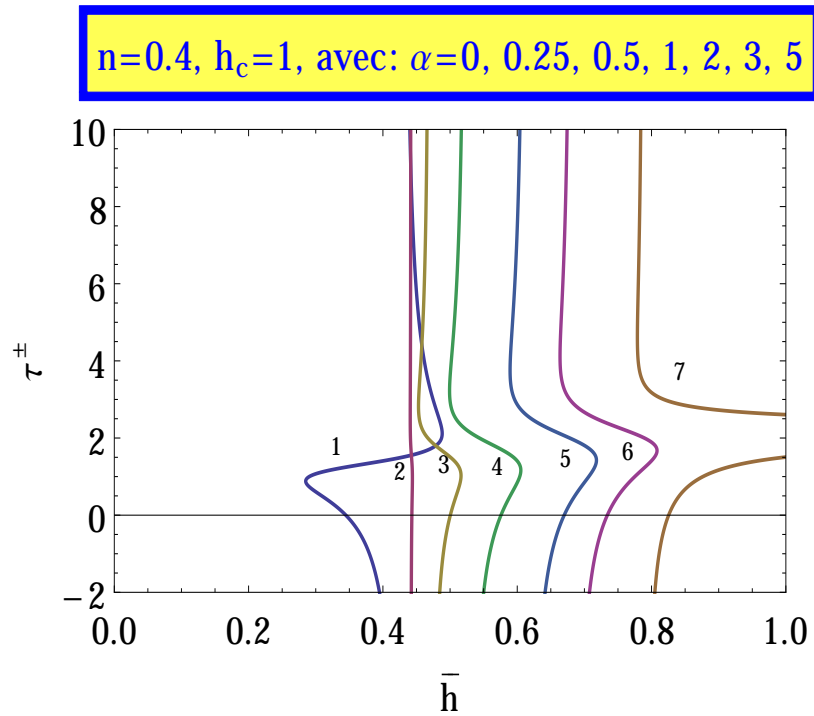


FIGURE 6.23 – Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ pour $n = 0.4$, $h_c = 1$. Les courbes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 correspondent respectivement à $\alpha = 0, 0.25, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5$

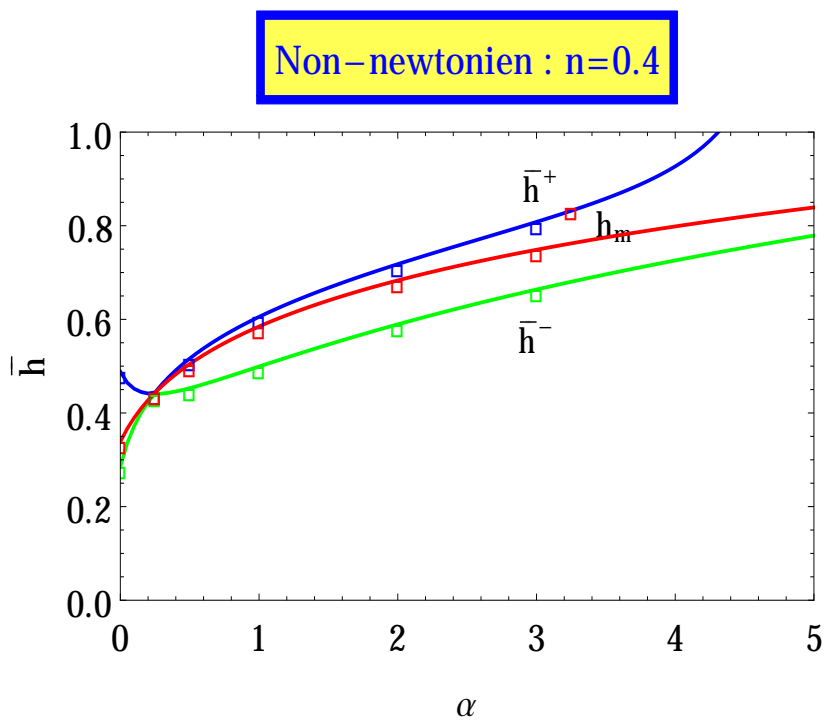


FIGURE 6.24 – Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^- , \bar{h}^+) en fonction de α pour $n = 0.4$, $h_c = 1$

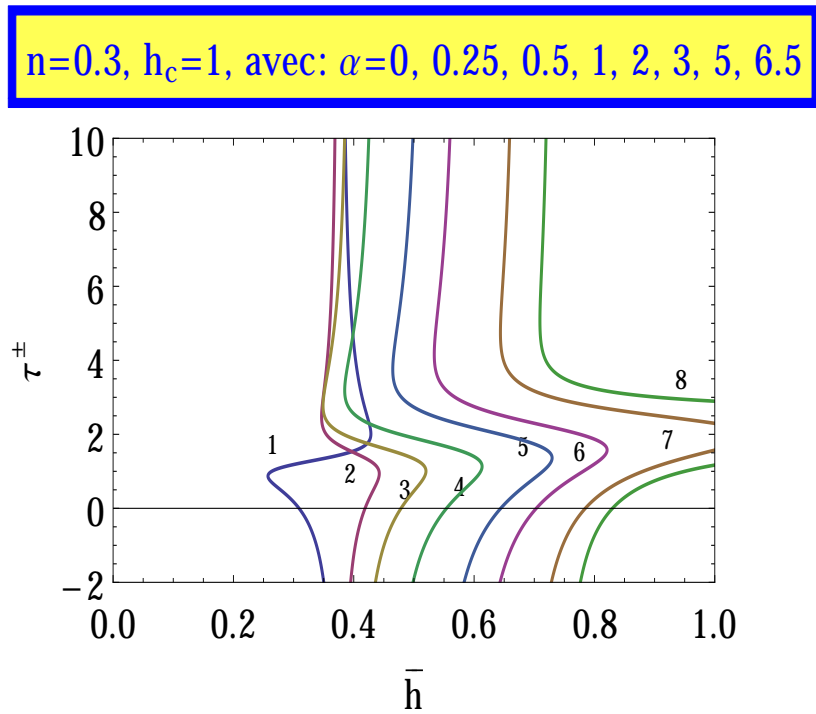


FIGURE 6.25 – Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ pour $n = 0.3, h_c = 1$. Les courbes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 correspondent respectivement à $\alpha = 0, 0.25, 0.5, 1, 2, 3, 5, 6.5$

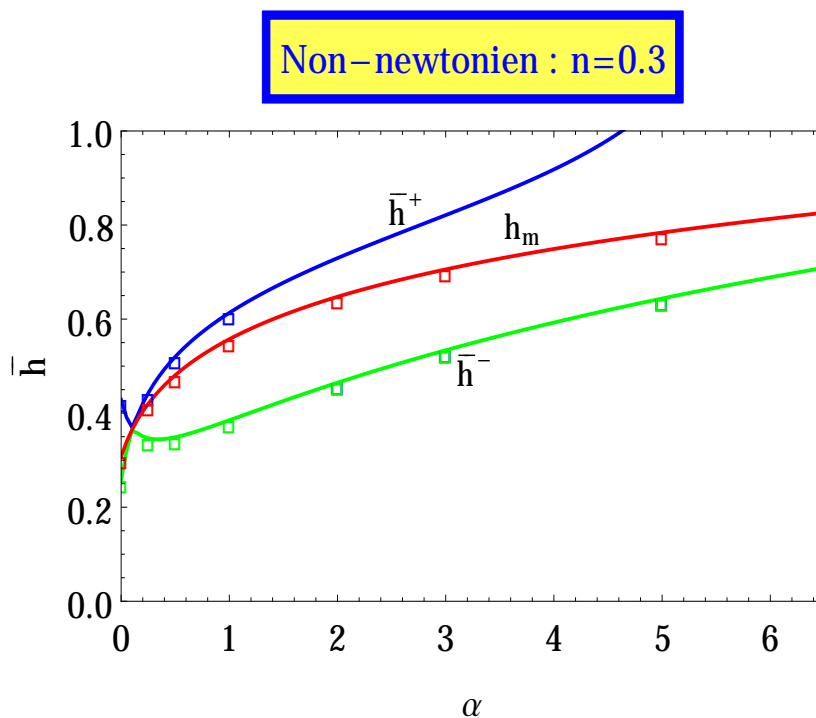


FIGURE 6.26 – Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de α pour $n = 0.3, h_c = 1$

$n=0.2, h_c=1$, avec: $\alpha=0, 0.25, 0.5, 1, 2, 3, 5, 9.5$

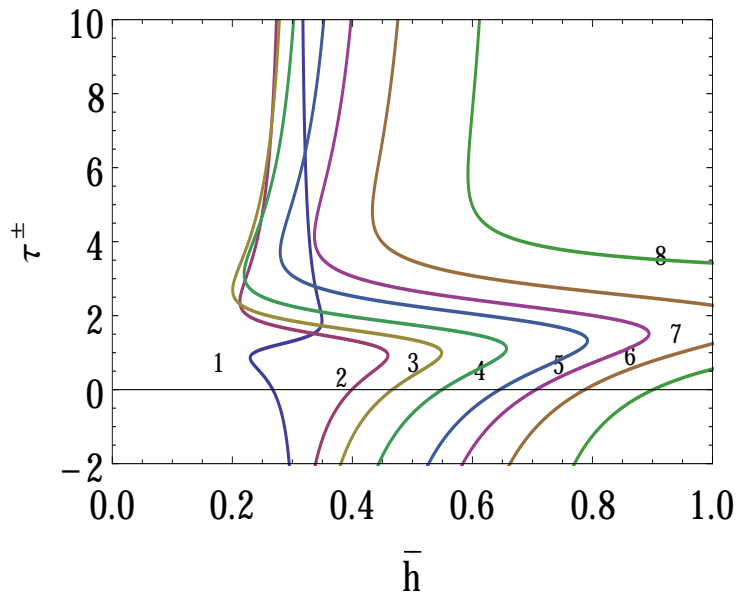


FIGURE 6.27 – Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ pour $n = 0.2, h_c = 1$. Les courbes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 correspondent respectivement à $\alpha = 0, 0.25, 0.5, 1, 2, 3, 5, 9.5$

Non-newtonien : $n=0.2$

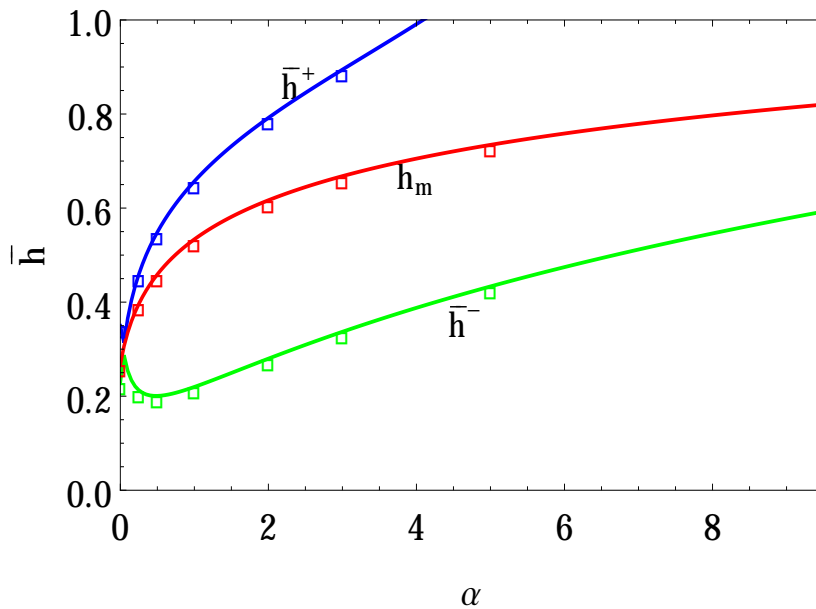


FIGURE 6.28 – Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de α pour $n = 0.2, h_c = 1$

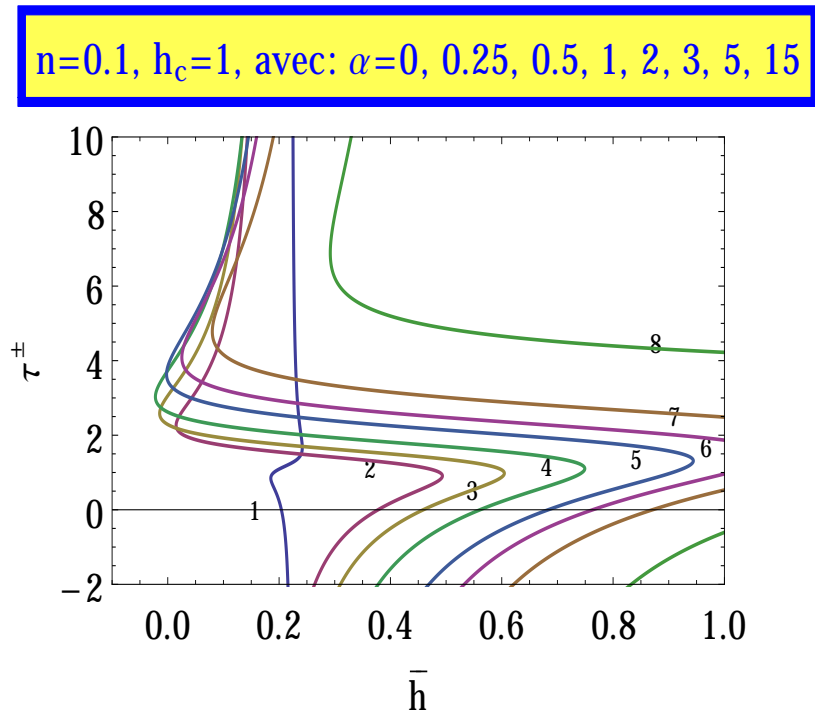


FIGURE 6.29 – Dépendance $\tau^\pm = \tau^\pm(\bar{h}, h_c)$ pour $n = 0.1, h_c = 1$. Les courbes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 correspondent respectivement à $\alpha = 0, 0.25, 0.5, 1, 2, 3, 5, 15$

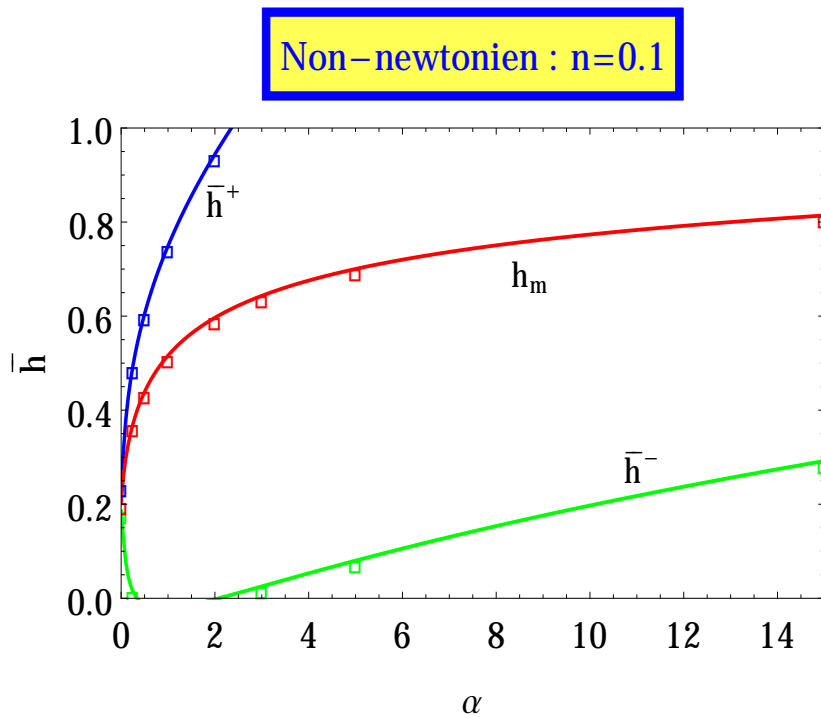


FIGURE 6.30 – Bornes des ondes d'amplitude maximale h_m et frontières d'hyperbolicité (\bar{h}^-, \bar{h}^+) en fonction de α pour $n = 0.1, h_c = 1$

La même tendance est observée pour n variant de 0.5 à 0.1 (voir figures 6.23 – 6.30), i.e., les ODP d'amplitude maximale et modérée sont stables. Les ondes de faible amplitude sont d'abord instables jusqu'à une certaine valeur critique de α puis deviennent stables. La seule différence est que la valeur critique *alpha* décroît avec la diminution de n . Quand α croît, la région stable des ODP décroît et finit par disparaître à une certaine valeur critique α_c comprise dans l'intervalle $[0, 0.5]$. Au-delà de cette valeur la tendance s'inverse.

6.3.3 Diagrammes de stabilité non linéaire

Dans ce paragraphe, faisons varier h_c . La forme asymptotique du critère de stabilité non linéaire des ODP s'écrit :

$$Disc^* = \left\{ 2(\beta - 1)D + (-2q\beta D' + \tilde{B}_{h_c}^*)\delta^{-1} \right\}^2 + 4 \left((\beta - 1)D^2 + \tilde{B}_{\bar{h}}^* \right) \quad (6.8)$$

Compte tenu de (5.38), la forme linéaire s'écrit comme $\tilde{B}^*(\bar{h})$, les frontières $\bar{h}^\pm = \bar{h}^\pm(h_c)$ de domaine d'hyperbolicité peuvent être obtenues à partir de $Disc^*(\bar{h}, h_c) = 0$.

On obtient :

$$\bar{h}^\pm(h_c) = \frac{d_2 \pm q' \sqrt{d_3}}{d_1 \pm D' \sqrt{d_3}} \quad (6.9)$$

$$\text{avec : } d_1 = \frac{1}{2}B_{h_c}^* + (\beta - 1)DD'$$

$$d_2 = (\beta - 1)Dq' + \beta qD' - \frac{1}{2} \left(B_{h_c}(z^*, h_c) + B_{z^*} z^{*'} - B_{h_c}^* z^* - B'^* z^{*'} \right)$$

$$d_3 = - \left((\beta - 1)D^2 + B'^* \right)$$

Les diagrammes des stabilités correspondants à cette solution (6.9) sont représentés dans le plan (h_c, \bar{h}) (voir figures 6.31 – 6.36), où les courbes $\bar{h} = \bar{h}^-$ et $\bar{h} = \bar{h}^+$ sont les frontières de la région d'hyperbolicité. Dans les domaines elliptiques Ω_e , les ondes sont instables. La courbe $\bar{h} = h_c$ correspond aux ondes d'amplitude infinitésimal. La courbe $\Delta E = 0$ correspond aux ondes sans perte de charge à travers le choc, ce type d'onde est d'amplitude faible sur les figures. Il est évident que le choc est accompagnée d'une perte d'énergie $\Delta E < 0$, le calcul de ΔE peut être trouvé dans l'équation précédente (4.21).

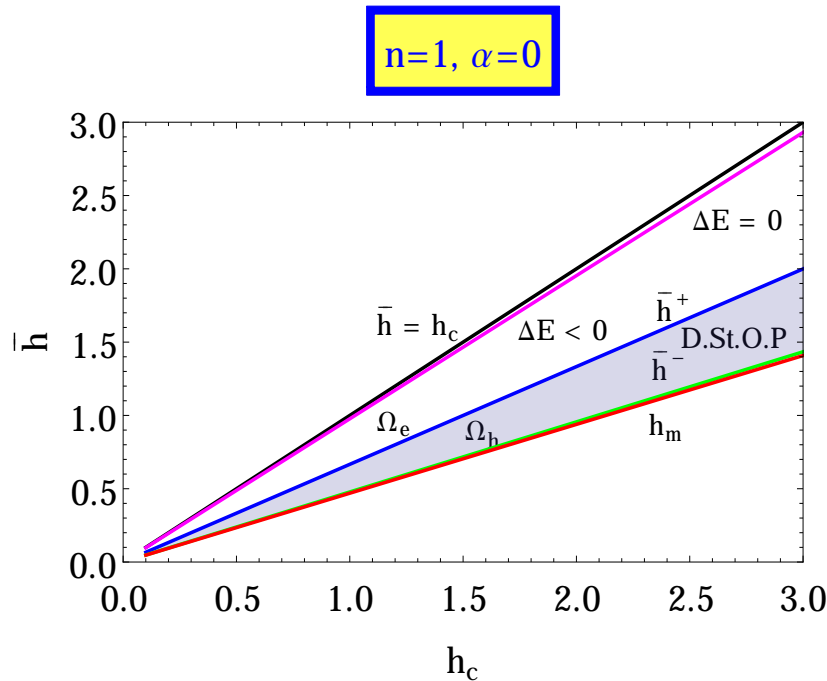


FIGURE 6.31 – Diagramme de stabilité non linéaire des ODP à $n = 1$ et $\alpha = 0$

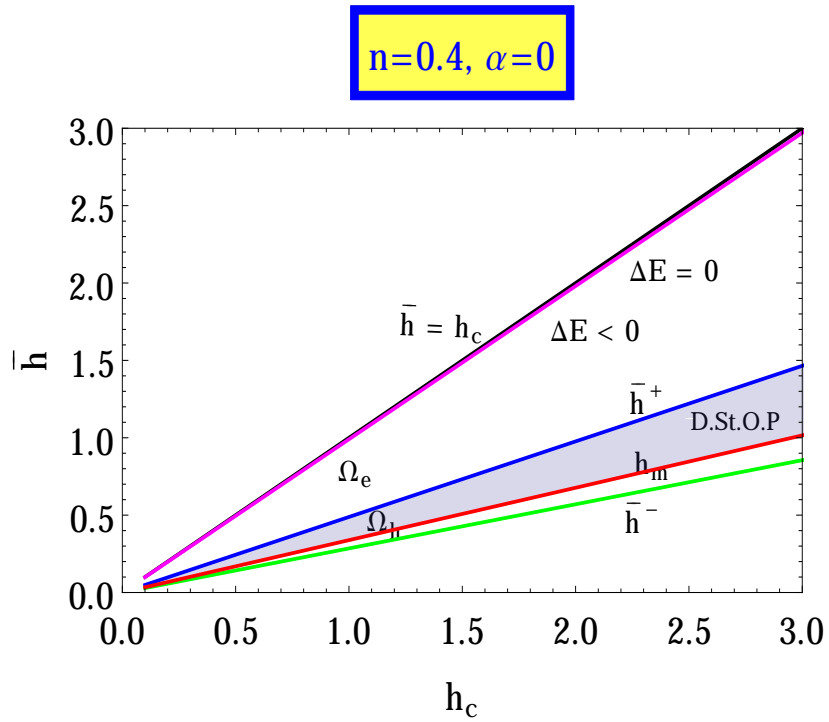


FIGURE 6.32 – Diagramme de stabilité non linéaire des ODP à $n = 0.4$ et $\alpha = 0$

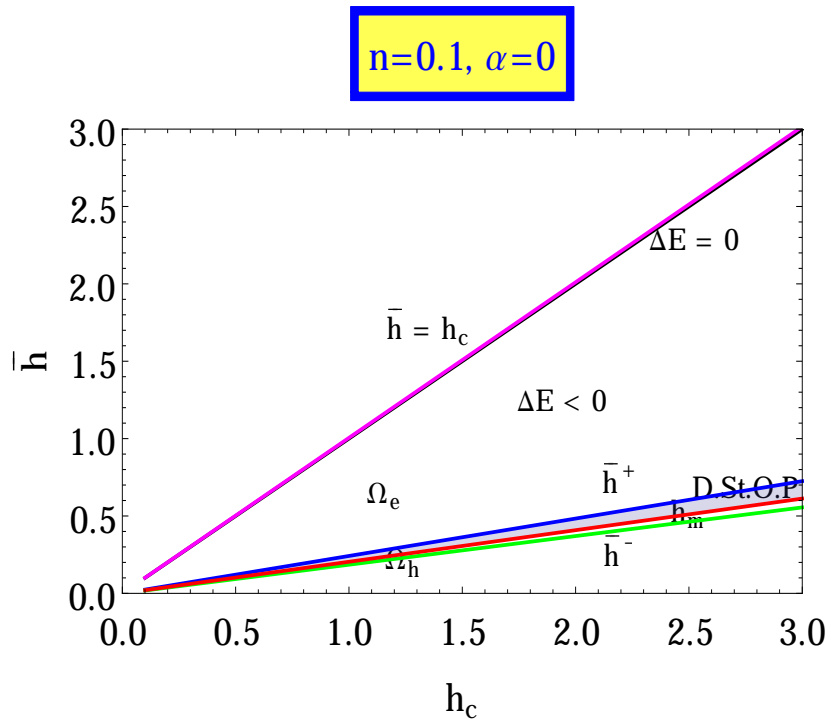


FIGURE 6.33 – Diagramme de stabilité non linéaire des ODP à $n = 0.1$ et $\alpha = 0$

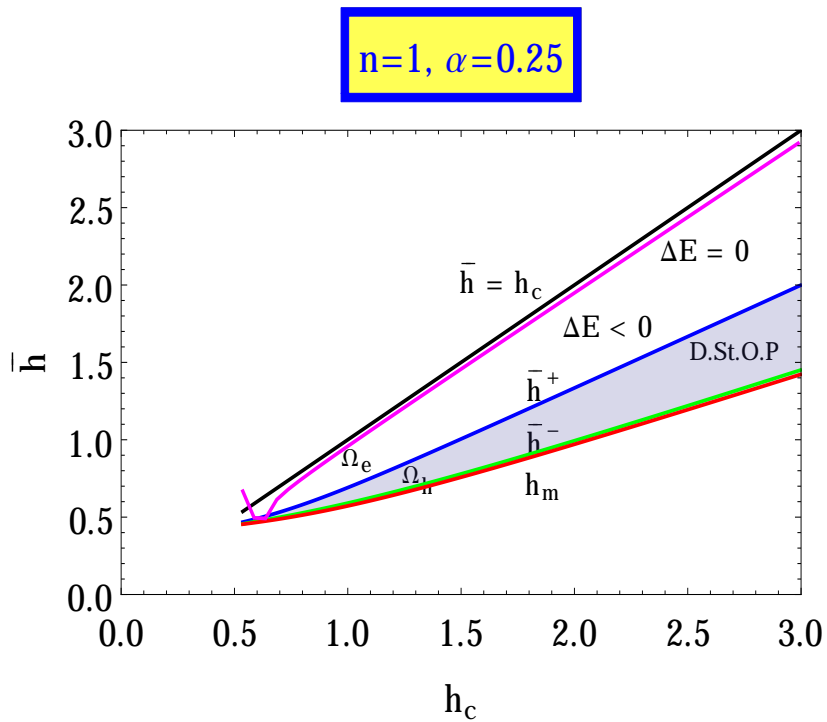


FIGURE 6.34 – Diagramme de stabilité non linéaire des ODP à $n = 1$ et $\alpha = 0.25$

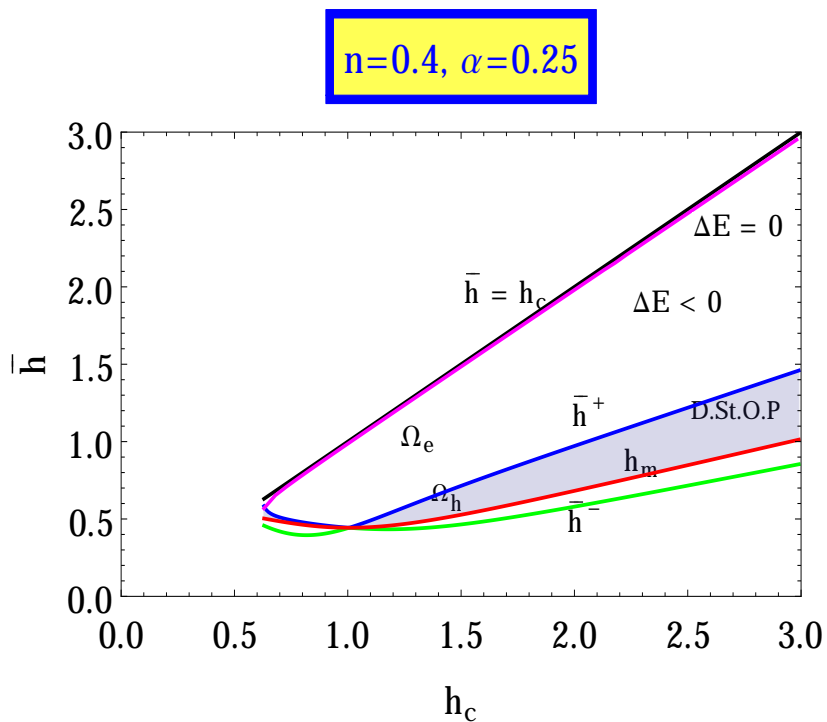
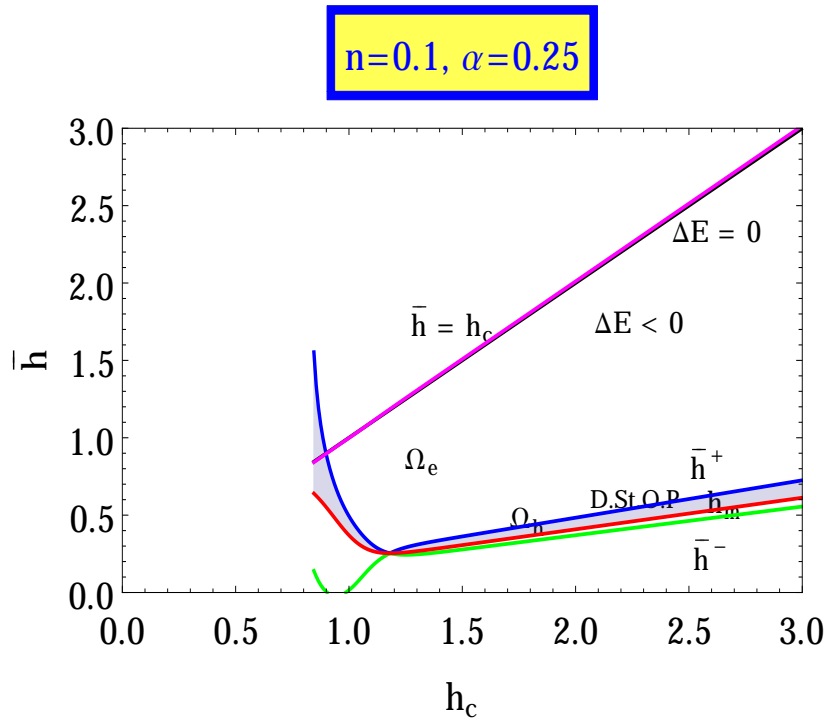


FIGURE 6.35 – Diagramme de stabilité non linéaire des ODP à $n = 0.4$ et $\alpha = 0.25$


 FIGURE 6.36 – Diagramme de stabilité non linéaire des ODP à $n = 0.1$ et $\alpha = 0.25$

6.3.4 Profils des ODP

Dans ce paragraphe, on présente quelques résultats des propriétés des ODP : (1) profils de la surface libre $h(\xi)$; (2) vitesse moyenne $\bar{u}(\xi)$; (3) contrainte à la paroi $\sigma_b(\xi)$ avec des plusieurs valeurs des paramètres d'écoulement (α, n). La vitesse est calculée à partir de (4.1), et la contrainte à la paroi par (2.55). Pour procéder au calcul numérique, il est plus commode de spécifier h_c , en vertu de (4.17) et (4.18). L'intégration numérique de (4.2) donne le profil des ODP.

D'abord, nous considérons les ODP minimales (CHIU-ON et C.MEI, 1994). Les ODP minimales sont définies comme étant les ondes sans perte de charge à travers le chocs. La figure (6.37), montre que les profils des $h(\xi)$, $\bar{u}(\xi)$ et $\sigma_b(\xi)$ pour $q = q_c$ correspondant à la solution (4.23), $h_c = 1$, $n = 0.4$, avec $\alpha = 0, 1$ et 3 . A noter que trois valeurs α représentent respectivement une paroi verticale ($\alpha = 0$) et deux inclinées ($\alpha = 1$ et 3). Par exemple, si le nombre de Reynolds de l'écoulement uniforme est de 100, l'inclinaison est donnée par (2.57) : $\tan \theta = 4.5^{0.4}/100\alpha$, puis $\theta = \frac{1}{2}\pi, 0.018, 0.0061$ rad correspondant respectivement à ces trois valeurs de α .

Sur les figures (6.37), nous représentons les profils des ODP minimales pour $\alpha = 0, 1, 3$. On observe que la longueur d'onde croît avec α . La vitesse moyenne du fluide à un sommet des ODP pour les valeurs considérées $\alpha = 0$ est d'environ 30% supérieure à la vitesse de l'écoulement de base uniforme. Il est également clair que la contrainte à la paroi dépasse faiblement la valeur de l'écoulement uniforme. Lorsque α augmente, la pente diminue, la longueur d'onde augmente et l'amplitude diminue. Des résultats similaires ont également été obtenus pour le fluide newtonien ($n = 1$) et le fluide fortement non-newtonien ($n = 0.1$).

Sur les figures (6.38) sont représentées les ODP d'amplitude maximale ($L \rightarrow \infty$) pour $n = 0.4$ et trois valeurs considérés de $\alpha = 0, 1$ et 3 . Les valeurs de ces paramètres de l'écoulement correspondent aux ondes stables.

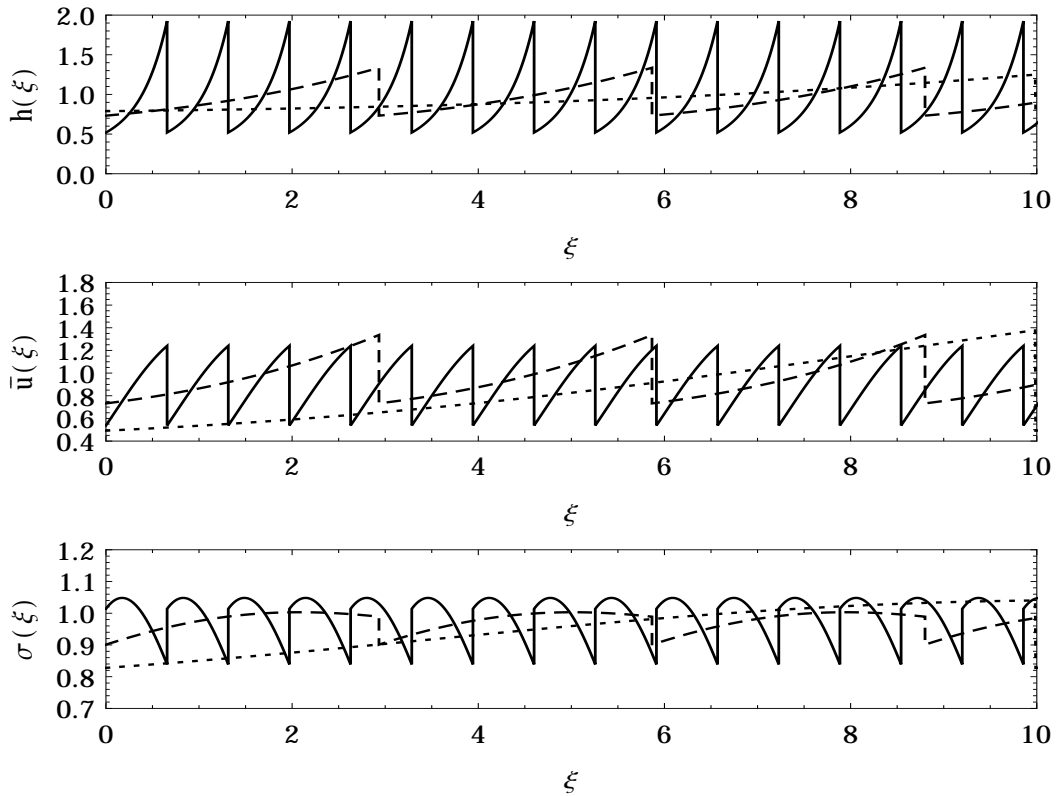


FIGURE 6.37 – Profils des ODP minimales à $n = 0.4$ et $h_c = 1$ avec différentes valeurs de $\alpha = 0$ (—), 1 (- - - - -), 3 (· · · · ·)

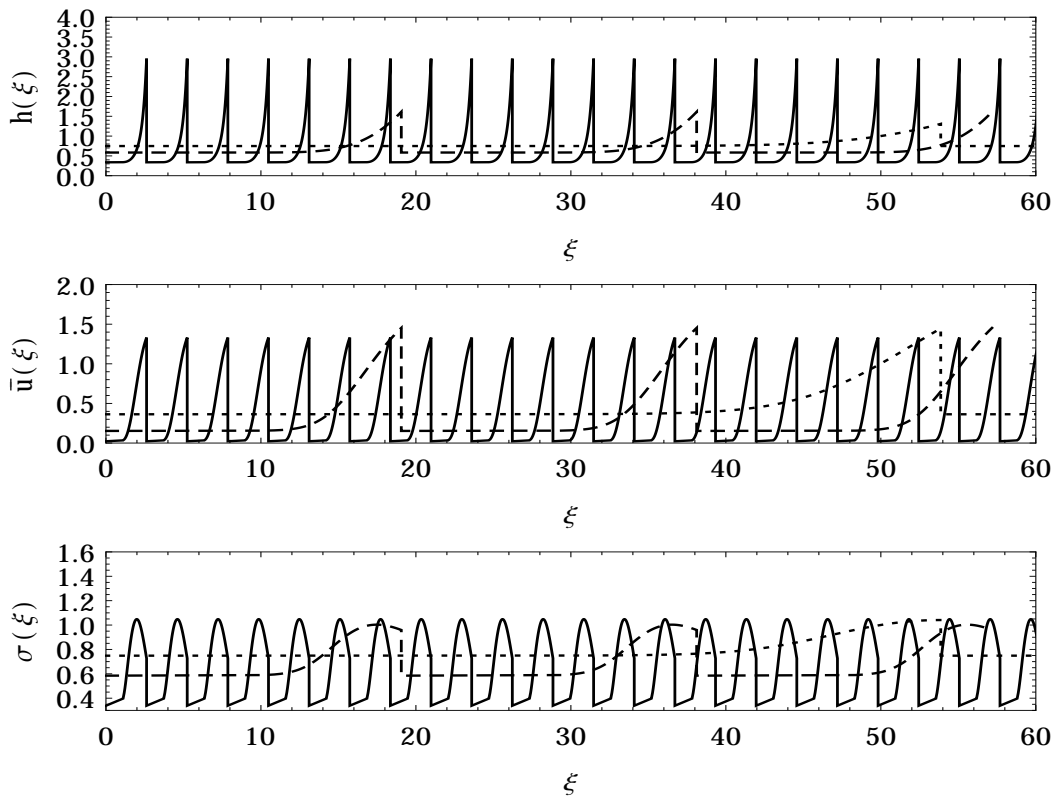


FIGURE 6.38 – Profils des ODP maximales à $n = 0.4$ et $h_c = 1$ avec différentes valeurs de $\alpha = 0$ (—), 1 (- - - - -), 3 (· · · · ·)

6.4 Conclusion

Comme on peut le voir sur les diagrammes de stabilité des ODP (figures 6.31- 6.36), on a $\bar{h}^+ - h_m \ll h_m$. Par conséquent, la frontière du domaine d'hyperbolicité peut être approchée par l'approximation (5.34), (5.36), (5.37), (5.38). Les diagrammes de stabilité correspondant au cas vertical montrent que la région de stabilité est située au voisinage des ondes d'amplitude maximale. Par exemple, pour $n = 0.1, \alpha = 0$, la valeur de hauteur critique h_c est $h_c = 4h_0$, la frontière inférieure de l'intervalle d'hyperbolicité correspond aux ODP d'épaisseur moyenne $\bar{h} \approx 0.7h_0$; la frontière supérieure correspond aux ondes d'épaisseur moyenne $\bar{h} \approx 1.2h_0$. Dans le cas incliné, ces diagrammes montrent aussi que la région de stabilité avoisine des ondes d'amplitude maximale. Par exemple, pour $n = 0.1, \alpha = 0.25$, la valeur de la hauteur critique h_c est $h_c = 1.5h_0$, la frontière inférieure d'hyperbolicité correspond aux ODP d'épaisseur moyenne $\bar{h} \approx 0.4h_0$.

Sur les diagrammes (6.31 – 6.36), on voit que les ODP minimales sont de faible amplitude. Sachant que pour $n = 0.4, \alpha = 0, 1, 3, h_c = 1$, les ODP d'amplitude maximale et modérée sont stables, et les ondes de faible amplitude sont instables. On montre que les ODP minimales (6.37) sont instables, tandis que celles d'amplitude maximale (6.38) sont stables, par conséquent les ondes d'amplitude maximale sont potentiellement dommageables.

Le calcul numérique effectué pour quelques couples de valeurs significatives de α et n a montré : l'influence de la viscosité de fluide et de l'inclinaison du plan d'écoulement sur la stabilité des ODP (voir figures 6.1 – 6.30).

Pour un écoulement vertical, plus la viscosité augmente, plus le domaine de stabilité se réduit, c'est à dire que pour le cas vertical, la viscosité défavorise à la production des ODP; pour un écoulement incliné, on remarque que la viscosité augmente jusqu'à une valeur critique, le domaine de stabilité se réduit et finit par disparaître, après cette valeur critique, le domaine de stabilité réapparaît, c'est à dire que pour le cas incliné, la viscosité d'abord défavorise à la production des ODP jusqu'à une valeur critique, après cette valeur critique elle favorise à la production des ODP.

Pour un fluide newtonien, plus l'inclinaison diminue vers le bas, plus le domaine de stabilité se réduit, autrement dit, elle défavorise à la production des ODP; pour un fluide légèrement non-newtonien ($n = 0.9 \rightarrow 0.7$), elle a la même tendance que le fluide newtonien; pour un fluide fortement non-newtonien ($n = 0.6 \rightarrow 0.1$), on constate que l'inclinaison diminue vers le bas jusqu'à une valeur critique, le domaine de stabilité se réduit et disparaît, après cette valeur critique, le domaine de stabilité réapparaît et augmente, autrement dit, l'inclinaison d'abord défavorise à la production des ODP jusqu'à une valeur critique, après cette valeur critique elle favorise à la production des ODP.

On conclure : pour une valeur critique de α ou n , les ODP disparaissent, elle peut être très intéressant dans la fabrication de l'industrie.

Deuxième partie

Simulation numérique d'ondes interfaciales de deux fluides non miscibles stratifiés

Chapitre 7

Formulation du problème

*« La connaissance c'est partager le
savoir qui nous fait grandir. »*

Olivier Lockert

Sommaire

7.1 Introduction	71
7.2 Lois de comportement du type différentiel	72
7.3 Mise en forme des équations du mouvement	73

7.1 Introduction

Certains phénomènes viscoélastiques, observés avec des polymères fluides, ne peuvent être décrits par les équations de Navier-Stokes. Ces effets sont caractérisés, entre autre, par une dépendance des propriétés élongationnelles et des effets de mémoire associés à l'élasticité du matériau. Ces effets peuvent être très importants lors de la mise en forme des matériaux polymères, comme par exemple les instabilités d'écoulement. Le comportement viscoélastique est aussi à l'origine d'écoulements complexes. De ce fait, il existe de nombreux modèles exprimant en termes mathématiques les phénomènes rhéologiques observés. Ces modèles font généralement intervenir des *équations aux dérivées partielles*, souvent non linéaires.

Les difficultés rencontrées pour la résolution de ces expérimentations sont nombreuses. Les mesures in-situ directes sont difficiles car le milieu est aéré, la profondeur d'eau très faible et l'épaisseur de la couche limite plus faible encore. De plus, l'analyse de ces mesures met en lumière la multitude d'échelles présentes dans l'écoulement réel. La modélisation physique permet de mieux contrôler l'environnement et d'accéder donc à des analyses fines des processus. Malgré les difficultés et incertitudes liées aux changements d'échelles, elle permet d'obtenir des solutions de référence pour les calculs numériques.

La *mécanique des fluides numérique* (Computational Fluid Dynamics, en anglais) est en phase de devenir un outil de mise au point aussi important que les essais expérimentaux : plus souple, plus facile à réaliser, et surtout plus économique, elle permet d'aborder des expériences délicates, voire impossible à reproduire en laboratoire. Nous avons choisi la simulation numérique comme moyen d'investigation du phénomène.

Dans ce contexte, nous avons choisi d'utiliser un code de calcul permettant de résoudre à la fois les équations de Navier-Stokes et les équations constitutives d'un fluide viscoélastique par volumes finis (Gilflow) correspondant à un écoulement monophasique du liquide confiné.

Cette méthode a été développée pour résoudre les problèmes d'écoulement des fluides et transferts de chaleur, elle est décrite en détaille dans le livre de PATANKAR (1980). On a choisi la méthode des volumes finis en vue de la géométrie du problème et de la capacité de calcul.

Dans la partie qui suit, sont présentées les formulations des équations régissant les mouvements du fluide complexe, et les équations constitutives du tenseur viscoélastique supplémentaire sous forme générale par rapport à la loi de comportement du type différentiel.

7.2 Lois de comportement du type différentiel

Exprimons tout d'abord le tenseur des contraintes totales de Cauchy :

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + 2\eta_s\mathbf{D}(\vec{u}) + \mathbf{T} \quad (7.1)$$

où P est le champ de pression hydrostatique, \mathbf{I} le tenseur identité, \vec{u} le champ de vitesse, $\eta_s > 0$ la viscosité du solvant newtonienne (constante) et \mathbf{T} , le tenseur viscoélastique supplémentaire.

\mathbf{D} est le tenseur symétrique des taux de déformation

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (7.2)$$

où $\mathbf{L} = \nabla\vec{u}$ est le gradient de vitesse et \mathbf{L}^T sa transposée.

Le tenseur supplémentaire \mathbf{T} doit satisfaire à une équation générale de comportement. Il s'écrit (C.XUE et collab., 1995) :

$$f(\{\mathbf{T}\})\mathbf{T} + \lambda\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = 2\eta_p\mathbf{D} \quad (7.3)$$

où

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} - \mathbf{T}\mathbf{M} - \mathbf{M}^T\mathbf{T} \quad (7.4)$$

est une dérivée convective supérieure généralisée dans laquelle $\mathbf{M} = \mathbf{L} - \xi\mathbf{D}$ représente le gradient de vitesse corrigé d'une fraction $\xi \in [0, 1]$ du taux de déformation. On remarquera que $\xi = 0$ correspond à la dérivée convective supérieure usuelle d'Oldroyd.

Les autres paramètres physiques de ce modèle viscoélastique généralisé sont :

- le temps de relaxation du fluide λ ;
- la viscosité polymérique (non-newtonienne) η_p donnée par une loi de type Bird-Carreau,

$$\eta_p = \eta_{p0} \frac{1 + \xi(2 - \xi)\lambda^2\dot{\gamma}^2}{(1 + I^2\dot{\gamma}^2)^{(1-n)/2}} \quad (7.5)$$

$\dot{\gamma} = \sqrt{2\{\mathbf{D}^2\}}$ désignant le taux de cisaillement généralisé ($\{\cdot\}$ est l'opérateur trace), I une échelle de temps, n le coefficient de rhéo-fluidification, et η_{p0} la viscosité polymérique à taux de cisaillement nul ;

- la fonction d'amortissement définie comme

$$f(\{\mathbf{T}\}) = \exp\left(\frac{\epsilon\lambda}{\eta_{p0}}\{\mathbf{T}\}\right) \quad (7.6)$$

où ϵ est un paramètre sans dimension caractérisant la viscosité élongationnelle du modèle.

Ce modèle offre une grande souplesse en dégénéralant vers des modèles plus connus pour des valeurs particulières de ses constantes physiques. Le tableau (7.1) fournit quelques exemples de modèles usuellement rencontrés dans la littérature.

η_{p0}	η_s	ϵ	ξ	n	λ	Nom du fluide
0	–	0	0	1	0	Newtonien
–	–	0	0	–	0	Bird-Carreau
–	–	0	0	1	–	Oldroyd-B
–	0	0	0	1	–	Upper-Convected Maxwell (UCM)
–	–	0	0	–	–	White-Metzner
–	–	–	0	1	–	Phan-Thien-Tanner (PTT)
–	–	–	–	1	–	PTT généralisé

TABLEAU 7.1 – Dégénérescence du modèle général donné par l'équation (7.3)

7.3 Mise en forme des équations du mouvement

L'écoulement du fluide complexe est déterminé à partir des équations locales de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, ainsi que les équations constitutives du tenseur viscoélastique. Ces équations permettent de traiter des problèmes bidimensionnels ainsi que des problèmes tridimensionnels. Cependant, le phénomène étudié permet de ne résoudre que le cas d'un écoulement bidimensionnel, la configuration pouvant être considérée comme semi-infinie dans une dimension.

Les équations de conservation s'écrivent :

— Conservation de la masse

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (7.7)$$

— Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \nabla \vec{u} \right) = -\nabla P + 2\eta_0 \nabla \mathbf{D}(\vec{u}) + \nabla \mathbf{T} + \rho \vec{g} \quad (7.8)$$

Dans les coordonnées cartésiennes (Ox, Oy) , les équations de projection (7.8) selon les axes sont données :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta_0 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \right) + \rho g \sin \theta \\ \rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \eta_0 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \right) - \rho g \cos \theta \end{aligned} \quad (7.9)$$

Les équations constitutives qui décrivent le tenseur viscoélastique supplémentaire sont données ici pour compléter le système. On considère le cas d'un fluide de type Oldroyd-B (voir tableau 7.1).

On a la formule suivant :

$$\mathbf{T}_{i,j} + \lambda \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{i,j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_m} (u_m \mathbf{T}_{i,j}) - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \mathbf{T}_{k,j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \mathbf{T}_{k,i} \right) = \eta_1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7.10)$$

Les équations de projection pour le tenseur viscoélastique selon les axes (Ox, Oy) sont données par :

$$T_{xx} + \lambda \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial t} + U \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + V \frac{\partial T_{xx}}{\partial y} \right) - 2\lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x} T_{xx} + \frac{\partial U}{\partial y} T_{xy} \right) = \eta_1 2 \frac{\partial U}{\partial x} \quad (7.11)$$

$$T_{yy} + \lambda \left(\frac{\partial T_{yy}}{\partial t} + U \frac{\partial T_{yy}}{\partial x} + V \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \right) - 2\lambda \left(\frac{\partial V}{\partial x} T_{xy} + \frac{\partial V}{\partial y} T_{yy} \right) = \eta_1 2 \frac{\partial V}{\partial y} \quad (7.12)$$

$$T_{xy} + \lambda \left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial t} + U \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + V \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \right) - \lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x} T_{xy} + \frac{\partial U}{\partial y} T_{yy} + \frac{\partial V}{\partial x} T_{xx} + \frac{\partial V}{\partial y} T_{xy} \right) = \eta_1 \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (7.13)$$

Par la suite, on va discrétiser le système des équations à l'aide de la technique de volume fini. Une bonne compréhension des algorithmes de calcul est nécessaire à leur utilisation efficace.

Chapitre 8

Traitement numérique des équations Navier-Stokes et du tenseur viscoélastiques

« It always seems impossible until it's done. »

Nelson Mandela

Sommaire

8.1 Introduction	76
8.2 Discrétisation spatiale	76
8.2.1 Localisation des variables : maillage entrelacé	77
8.2.2 Équations de conservation pour un scalaire	78
Schéma numérique pour le terme diffusion	78
Schéma numérique pour le terme convectif	80
8.2.3 Équations de la quantité de mouvement	81
8.2.4 Équations constitutives du tenseur viscoélastique	83
8.3 Discrétisation temporelle	84
8.4 Résolution du système linéaire	87

8.1 Introduction

La méthode utilisée est celle des volumes finis. Les équations de conservation sont intégrées sur le volume de contrôle, puis le théorème de Gauss est utilisé pour transformer certaines intégrales de volume en intégrales de surface. Toutes les grandeurs scalaires sont traitées au centre du volume, les vitesses sont localisées au centre des faces du volume, ce choix constitue le principe du maillage entrelacé. Les équations de bilan sont discrétisées en temps sous forme semi-implicite. Cette méthode, utilisée dans le code de calcul (Gilflow), est dérivée de la méthode SOLA développée par **HIRT et NICHOLS (1981)**.

8.2 Discrétisation spatiale

L'ensemble des équations scalaires peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \Phi) + \frac{\partial}{\partial x_j} (J_\Phi) = S_\Phi \quad (8.1)$$

On projette les équations vectorielles sur un repère fixe, ce qui nous ramène au transport de quantités scalaires.

Le tableau (8.1) offre des différents termes des équations scalaires (8.1) dans un repère cartésien (Ox, Oy) .

Equations	Φ	J_Φ	S_Φ
cons. masse	1	0	0
qté.mouvement pour U	U	$\left(\frac{1}{\rho} P \delta_{1j} - v_0 \frac{\partial U}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} T_{xxj} \right)$	$g \sin \theta$
qté.mouvement pour V	V	$\left(\frac{1}{\rho} P \delta_{2j} - v_0 \frac{\partial V}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} T_{yxj} \right)$	$-g \cos \theta$
extra-tens. T_{xx}	T_{xx}	0	$2 \frac{\partial U}{\partial x_j} T_{xxj} + \frac{2\eta_1}{\lambda} D_{xx} - \frac{T_{xx}}{\lambda}$
extra-tens. T_{yy}	T_{yy}	0	$2 \frac{\partial V}{\partial x_j} T_{yxj} + \frac{2\eta_1}{\lambda} D_{yy} - \frac{T_{yy}}{\lambda}$
extra-tens. T_{xy}	T_{xy}	0	$\frac{\partial U}{\partial x_j} T_{x_j y} + \frac{\partial V}{\partial x_j} T_{xxj} + \frac{\eta_1}{\lambda} D_{xy} - \frac{T_{xy}}{\lambda}$

TABLEAU 8.1 – Tableau des différents termes des équations scalaires dans un repère cartésien

On considère un volume de contrôle v de frontière A régulière, on note \vec{n} la normale extérieure en un point de A et $d\sigma$ l'élément de surface sur A . Le volume v est invariant dans le temps.

Intégrons l'équation générale de transport (8.1) sur le volume de contrôle v :

$$\int_v \frac{\partial \Phi}{\partial t} dv + \int_v \nabla \cdot (\vec{u} \Phi) dv + \int_v \nabla \cdot (J_\Phi) dv = \int_v S_\Phi dv \quad (8.2)$$

Le théorème de Gauss s'écrit pour un vecteur \vec{a} quelconque :

$$\int_v \nabla \cdot \vec{a} dv = \int_A \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma \quad (8.3)$$

Après application du théorème de Gauss et permutation sur le premier terme de la dérivation en temps et de l'intégration sur le volume de contrôle v l'équation (8.2) peut

s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\nu} \Phi d\nu + \int_A \Phi \vec{u} \vec{n} d\sigma + \int_A \Gamma_{\Phi} \vec{n} d\sigma = \int_{\nu} S_{\Phi} d\nu \quad (8.4)$$

L'équation (8.4) donne le bilan sur un volume fini de la grandeur Φ . Cette équation est la base de la discrétisation spatiale de la méthode des volumes finis.

8.2.1 Localisation des variables : maillage entrelacé

Pour le cas bidimensionnel invariant par translation, dans un repère cartésien, la figure (8.1) montre que le domaine de calcul est entièrement recouvert par l'ensemble de pavés :

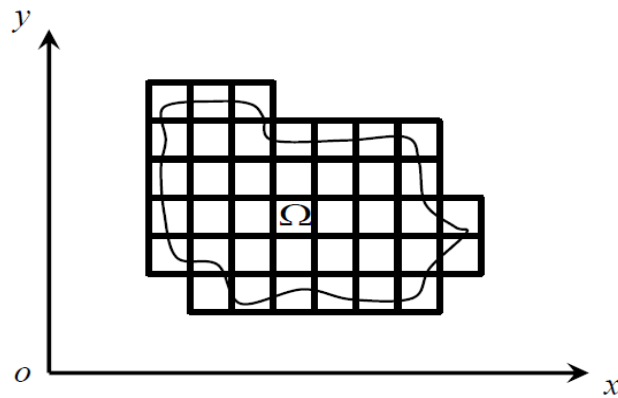


FIGURE 8.1 – Domaine entièrement recouvert

On considère que l'écoulement a une épaisseur L , dans la direction d'invariance. Afin de transformer les intégrales de l'équation (8.4) en sommes algébriques, en premier lieu on utilise un volume de contrôle pour l'expression des bilans de grandeurs scalaires. Le cas de l'équation de quantité de mouvement est examiné plus loin.

Considérons un pavé du maillage (voir figure 8.2) :

Notons O le centre du volume de contrôle et E, N, W, S les centres des volumes de contrôle adjacents. En coordonnées cartésiennes les volumes de contrôle sont limités par trois paires de plans perpendiculaires aux axes : $x = \text{cte}$, $y = \text{cte}$ et $z = \text{cte}$. Ce volume de contrôle est utilisé pour l'expression des bilans des grandeurs scalaires : masse, vitesse, pression, et tenseur viscoélastique.

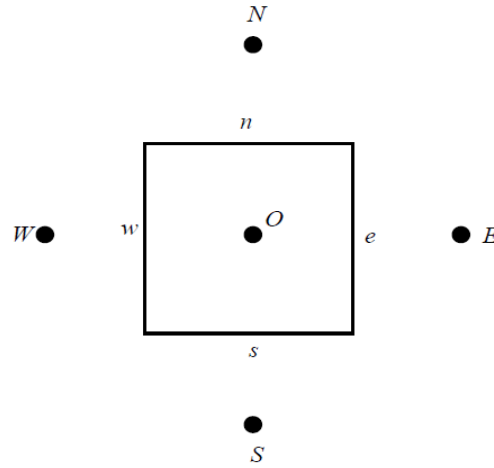


FIGURE 8.2 – Maille typique uniforme suivant x et y

8.2.2 Équations de conservation pour un scalaire

Pour les intégrales de volume de l'équation (8.4), on va faire une approche utilisant le théorème de la moyenne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\nu} \Phi d\nu \approx \nu \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (8.5)$$

$$\int_{\nu} S_{\varphi} d\sigma \approx \nu S_{\varphi} \quad (8.6)$$

Les intégrales de surface portant sur le contour du volume de contrôle correspondent aux échanges par diffusion et convection entre le volume de contrôle et les volumes adjacents.

(a) Échange par diffusion

$$\text{DIFF}(\Phi) = \int_A \Gamma_{\varphi} \vec{n} d\sigma \approx \sum_{i=1}^4 a f_i (\Gamma_{\varphi} \cdot \vec{n})_i \quad (8.7)$$

(b) Échange par convection

$$\text{CONV}(\Phi) = \int_A \Phi \vec{u} \vec{n} d\sigma \approx \sum_{i=1}^4 a f_i \Phi (\vec{u} \cdot \vec{n})_i \quad (8.8)$$

où la somme i porte sur les 4 faces e, n, w, s et $a f_i$ est la surface de chacune des quatre faces qui délimite le volume de contrôle.

Les vitesses U, V sont localisées aux centres de faces de ce volume de contrôle, ce choix constitue le principe du maillage entrelacé. Les figures (8.3), (8.4) illustrent ce type des maillages.

Schéma numérique pour le terme diffusion

Le flux de diffusion total s'écrit :

$$\text{DIFF}(\Phi) = \int_A \Gamma_{\varphi} \vec{n} d\sigma \approx a f_e (\Gamma_{\varphi_e}) - a f_w (\Gamma_{\varphi_w}) + a f_n (\Gamma_{\varphi_n}) - a f_s (\Gamma_{\varphi_s}) \quad (8.9)$$

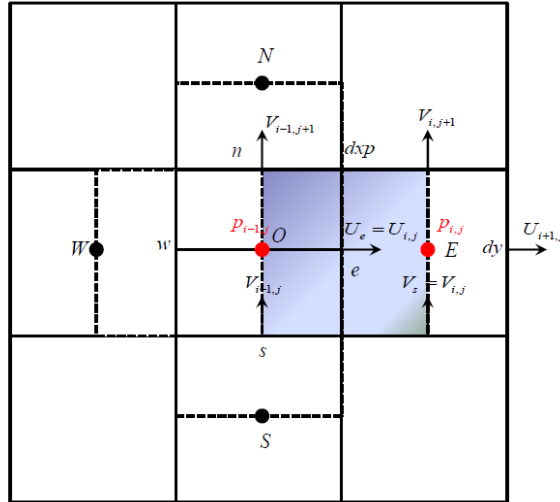


FIGURE 8.3 – Maillage entrelacé : Bilan $U_e = U_{i,j}$

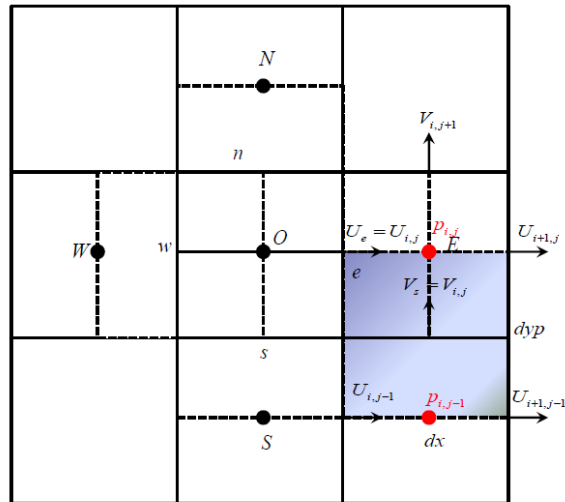


FIGURE 8.4 – Maillage entrelacé : Bilan $V_s = V_{i,j}$

$$\begin{aligned} \text{DIFF}(U_{(i,j)}) &= af_e v \tau_{xx}(i,j) - af_w v \tau_{xx}(i-1,j) + af_n v \tau_{yx}(i,j+1) - af_s v \tau_{yx}(i,j) \\ &+ af_e \frac{T_{xx}(i,j)}{\rho} - af_w \frac{T_{xx}(i-1,j)}{\rho} + af_n \frac{T_{xy}(i,j+1)}{\rho} - af_s \frac{T_{xy}(i,j)}{\rho} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \tau_{xx}(i,j) &= \frac{U_{(i+1,j)} - U_{(i,j)}}{dx(i)} \\ \tau_{yx}(i,j) &= \frac{U_{(i,j)} - U_{(i,j-1)}}{dyp(j)} \end{aligned}$$

(8.10)

$$\begin{aligned} \text{DIFF}(V_{(i,j)}) &= af_n \nu \tau_{yy(i,j)} - af_s \nu \tau_{yy(i,j-1)} + af_e \nu \tau_{xy(i+1,j)} - af_w \nu \tau_{xy(i,j)} \\ &+ af_n \frac{T_{yy(i,j)}}{\rho} - af_s \frac{T_{yy(i,j-1)}}{\rho} + af_e \frac{T_{xy(i+1,j)}}{\rho} - af_w \frac{T_{xy(i,j)}}{\rho} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \tau_{yy}(i,j) &= \frac{V_{(i,j+1)} - V_{(i,j)}}{dy(j)} \\ \tau_{xy}(i,j) &= \frac{V_{(i,j)} - V_{(i-1,j)}}{dxc(i)} \end{aligned}$$

(8.11)

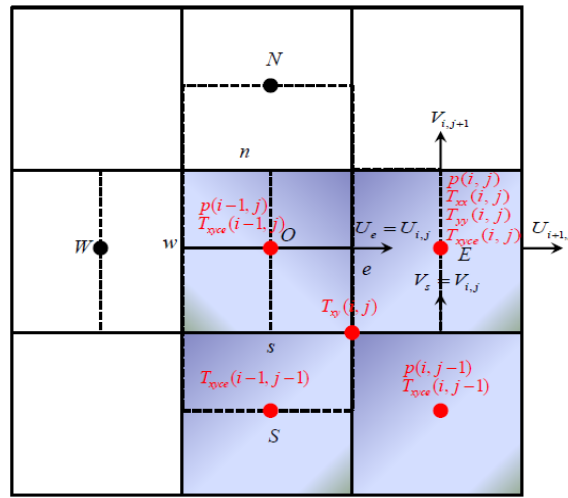


FIGURE 8.5 – Maillage entrelacé : Bilan $T_{xy(i,j)}$

Schéma numérique pour le terme convectif

Le flux de convection total s'écrit :

$$\text{CONV}(\Phi) = \int_A \Phi \vec{u} \vec{n} d\sigma \approx af_e U_e \Phi_e - af_w U_w \Phi_w + af_n U_n \Phi_n - af_s U_s \Phi_s \quad (8.12)$$

Pour calculer la valeur de Φ_e par exemple, on pourrait choisir une discrétisation du type centré :

$$\Phi_e = \frac{1}{2}(\Phi_E + \Phi_O) \quad (8.13)$$

Ce type de discrétisation, où l'on suppose une variance linéaire de Φ entre les points E et O, peut amener à une valeur de Φ non réaliste quand on travaille avec les grands nombres de Reynolds (PATANKAR, 1981). Pour contourner ce type de difficulté on utilise le schéma Upwind.

Schéma Upwind

$$U_e \Phi_e = U_e \times \begin{cases} \rightarrow \Phi_O & \text{si } U_e > 0 \\ \rightarrow \Phi_E & \text{si } U_e < 0 \end{cases} \quad (8.14)$$

Dans le bilan $U_{i,j}$ (voir figure 8.3) :

$$\Phi_e = U_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} U_{i,j} & \text{si } \frac{1}{2}(U_{i+1,j} + U_{i,j}) > 0 \\ U_{i+1,j} & \text{si } \frac{1}{2}(U_{i+1,j} + U_{i,j}) < 0 \end{cases} \quad (8.15)$$

$$\Phi_n = U_{i,j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} U_{i,j} & \text{si } \frac{1}{2}(V_{i,j+1} + V_{i-1,j+1}) > 0 \\ U_{i,j+1} & \text{si } \frac{1}{2}(V_{i,j+1} + V_{i-1,j+1}) < 0 \end{cases} \quad (8.16)$$

Dans le bilan $V_{i,j}$ (voir figure 8.4) :

$$\Phi_e = V_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} V_{i,j} & \text{si } \frac{1}{2}(U_{i+1,j} + U_{i+1,j-1}) > 0 \\ V_{i+1,j} & \text{si } \frac{1}{2}(U_{i+1,j} + U_{i+1,j-1}) < 0 \end{cases} \quad (8.17)$$

$$\Phi_n = V_{i,j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} V_{i,j} & \text{si } \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{i,j+1}) > 0 \\ V_{i,j+1} & \text{si } \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{i,j+1}) < 0 \end{cases} \quad (8.18)$$

Le schéma Upwind est utilisé simultanément pour le terme convectif des équations constitutives du tenseur viscoélastique (voir figure 8.5) :

$$\Phi_e = T_{xx(i+\frac{1}{2},j)} = \begin{cases} T_{xx(i,j)} & \text{si } U_{i+1,j} > 0 \\ T_{xx(i+1,j)} & \text{si } U_{i+1,j} < 0 \end{cases} \quad (8.19)$$

$$\Phi_n = T_{xx(i,j+\frac{1}{2})} = \begin{cases} T_{xx(i,j)} & \text{si } V_{i,j+1} > 0 \\ T_{xx(i,j+1)} & \text{si } V_{i,j+1} < 0 \end{cases} \quad (8.20)$$

$$\Phi_e = T_{yy(i+\frac{1}{2},j)} = \begin{cases} T_{yy(i,j)} & \text{si } U_{i+1,j} > 0 \\ T_{yy(i+1,j)} & \text{si } U_{i+1,j} < 0 \end{cases} \quad (8.21)$$

$$\Phi_n = T_{yy(i,j+\frac{1}{2})} = \begin{cases} T_{yy(i,j)} & \text{si } V_{i,j+1} > 0 \\ T_{yy(i,j+1)} & \text{si } V_{i,j+1} < 0 \end{cases} \quad (8.22)$$

$$\Phi_e = T_{xyce(i+\frac{1}{2},j)} = \begin{cases} T_{xyce(i,j)} & \text{si } U_{i+1,j} > 0 \\ T_{xyce(i+1,j)} & \text{si } U_{i+1,j} < 0 \end{cases} \quad (8.23)$$

$$\Phi_n = T_{xyce(i,j+\frac{1}{2})} = \begin{cases} T_{xyce(i,j)} & \text{si } V_{i,j+1} > 0 \\ T_{xyce(i,j+1)} & \text{si } V_{i,j+1} < 0 \end{cases} \quad (8.24)$$

8.2.3 Équations de la quantité de mouvement

Chaque équation de quantité de mouvement est résolue sur la molécule de calcul centrée sur la composante de vitesse correspondante. Les termes de convection et diffusion après projection (voir tableau 8.1) s'obtiennent de façon identique à ceux de l'équation de conservation pour un scalaire.

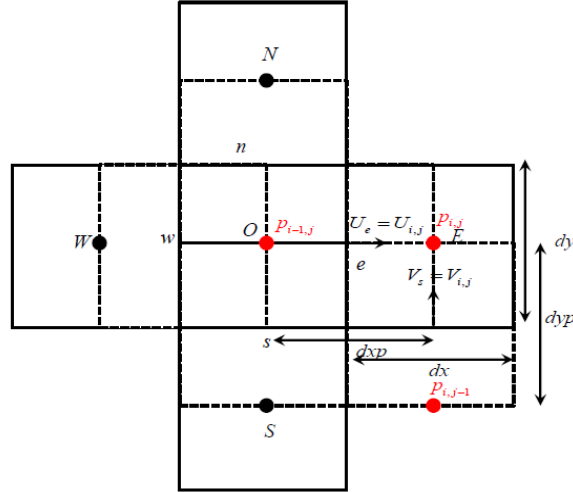


FIGURE 8.6 – Maillage entrelacé : Bilan $P_{i,j}$

Le terme de pression est traité différemment (voir figure 8.6). Pour la face Est, par exemple dans le bilan U_e , on écrit :

$$\int_A P \vec{n} d\sigma \approx a f_E P_E - a f_O P_O \quad (8.25)$$

Les nœuds de force de pression sont les mêmes que ceux des grandeurs scalaires, ceci permet une bonne estimation de la force de pression dans l'équation de la quantité de mouvement.

Les équations de quantité de mouvement projetées sur (Ox, Oy) prennent les formes suivantes :

— Pour la composante $U_{i,j}$:

$$v \frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} + \text{FLUX}(U_{i,j}) = -L dy(j) \left(\frac{1}{\rho} P_{i,j} - \frac{1}{\rho} P_{i-1,j} \right) + v g \sin \theta \quad (8.26)$$

— Pour la composante $V_{i,j}$:

$$v \frac{\partial V_{i,j}}{\partial t} + \text{FLUX}(V_{i,j}) = -L dx(i) \left(\frac{1}{\rho} P_{i,j} - \frac{1}{\rho} P_{i,j-1} \right) - v g \cos \theta \quad (8.27)$$

Le terme FLUX représente la somme des termes convectif et diffusion. Comme FLUX = CONV + DIFF, nous explicitons pour des raisons de clarté ci-dessous la discrétisation de ces termes.

$$\begin{aligned} \text{CONV}(U_{i,j}) &= dy(j) L \frac{1}{2} (U_{i+1,j} + U_{i,j}) U_{i+\frac{1}{2},j} \\ &- dy(j) L \frac{1}{2} (U_{i-1,j} + U_{i,j}) U_{i-\frac{1}{2},j} \\ &+ dxp(i) L \frac{1}{2} (V_{i-1,j+1} + V_{i,j+1}) U_{i,j+\frac{1}{2}} \\ &- dxp(i) L \frac{1}{2} (V_{i-1,j} + V_{i,j}) U_{i,j-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (8.28)$$

$$\begin{aligned}
 \text{CONV}(V_{i,j}) &= dy p(j) L \frac{1}{2} (U_{i+1,j} + U_{i+1,j-1}) V_{i+\frac{1}{2},j} \\
 &- dy p(j) L \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{i,j-1}) V_{i-\frac{1}{2},j} \\
 &+ dx(i) L \frac{1}{2} (V_{i,j} + V_{i,j+1}) V_{i,j+\frac{1}{2}} \\
 &- dx(i) L \frac{1}{2} (V_{i,j} + V_{i,j-1}) V_{i,j-\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{8.29}$$

$$\begin{aligned}
 \text{DIFF}(U_{i,j}) &= dy(j) L \nu \tau_{xx(i,j)} - dy(j) L \nu \tau_{xx(i-1,j)} \\
 &+ dx p(i) L \nu \tau_{yx(i,j+1)} - dx p(i) L \nu \tau_{yx(i,j)} \\
 &+ dy(j) L \frac{T_{xx(i,j)}}{\rho} - dy(j) L \frac{T_{xx(i-1,j)}}{\rho} \\
 &+ dx p(i) L \frac{T_{xy(i,j+1)}}{\rho} - dx p(i) L \frac{T_{xy(i,j)}}{\rho}
 \end{aligned} \tag{8.30}$$

$$\begin{aligned}
 \text{DIFF}(V_{i,j}) &= dx(i) L \nu \tau_{yy(i,j)} - dx(i) L \nu \tau_{yy(i,j-1)} \\
 &+ dy p(j) L \nu \tau_{xy(i+1,j)} - dy p(j) L \nu \tau_{xy(i,j)} \\
 &+ dx(i) L \frac{T_{yy(i,j)}}{\rho} - dx(i) L \frac{T_{yy(i,j-1)}}{\rho} \\
 &+ dy p(j) L \frac{T_{xy(i+1,j)}}{\rho} - dy p(j) L \frac{T_{xy(i,j)}}{\rho}
 \end{aligned} \tag{8.31}$$

Sur le tableau (8.1), on constate que les tenseurs viscoélastiques sont ajoutés dans le terme de diffusion pour un fluide Oldroyd-B. Pour le cas du fluide newtonien, on ignore la partie du tenseur viscoélastique.

8.2.4 Équations constitutives du tenseur viscoélastique

Sur la figure (8.5), les deux composantes des tenseurs T_{xx} et T_{yy} sont résolues aux nœuds de pression et la composante de cisaillements T_{xy} est décalée aux centres des arêtes du volume de contrôle avant d'être transmises dans les équations de quantité de mouvement.

La discrétisation des équations constitutives des tenseurs permet d'écrire :

— Pour la composante $T_{xx(i,j)}$:

$$\begin{aligned}
 v \frac{\partial T_{xx(i,j)}}{\partial t} + \text{CONV}(T_{xx(i,j)}) - v 2(\tau_{xx(i,j)} T_{xx(i,j)} + \tau_{yxce(i,j)} T_{xyce(i,j)}) = \\
 v(2 \frac{\eta_1 f}{\lambda} D_{xx(i,j)} - \frac{T_{xx(i,j)}}{\lambda})
 \end{aligned} \tag{8.32}$$

— Pour la composante $T_{yy(i,j)}$:

$$\begin{aligned}
 v \frac{\partial T_{yy(i,j)}}{\partial t} + \text{CONV}(T_{yy(i,j)}) - v 2(\tau_{yy(i,j)} T_{yy(i,j)} + \tau_{xyce(i,j)} T_{xyce(i,j)}) = \\
 v(2 \frac{\eta_1 f}{\lambda} D_{yy(i,j)} - \frac{T_{yy(i,j)}}{\lambda})
 \end{aligned} \tag{8.33}$$

— Pour la composante $T_{xyce(i,j)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \frac{\partial T_{xyce(i,j)}}{\partial t} + \text{CONV}(T_{xyce(i,j)}) - \\ \mathbf{v} (\tau_{xx(i,j)} T_{xyce(i,j)} + \tau_{yxce(i,j)} T_{yy(i,j)} + \tau_{xyce(i,j)} T_{xx(i,j)} + \tau_{yy(i,j)} T_{xyce(i,j)}) = \\ \mathbf{v} (2 \frac{\eta_1 f}{\lambda} D_{xy(i,j)} - \frac{T_{xyce(i,j)}}{\lambda}) \end{aligned} \quad (8.34)$$

où :

$$\tau_{yxce(i,j)} = \frac{1}{4} (\tau_{yx(i,j)} + \tau_{yx(i+1,j)} + \tau_{yx(i+1,j+1)} + \tau_{yx(i,j+1)}) \quad (8.35)$$

$$\tau_{xyce(i,j)} = \frac{1}{4} (\tau_{xy(i,j)} + \tau_{xy(i+1,j)} + \tau_{xy(i+1,j+1)} + \tau_{xy(i,j+1)}) \quad (8.36)$$

$$D_{xy(i,j)} = \frac{1}{2} (\tau_{xyce(i,j)} + \tau_{yxce(i,j)}) . \quad (8.37)$$

La composante de cisaillement T_{xy} est obtenue par T_{xyce} qui est au nœud de pression, on a la formule suivante :

$$T_{xy(i,j)} = \frac{1}{4} (T_{xyce(i,j)} + T_{xyce(i-1,j)} + T_{xyce(i-1,j-1)} + T_{xyce(i,j-1)}) \quad (8.38)$$

Le terme CONV représente le terme convectif des équations constitutives du tenseur. On a :

$$\begin{aligned} \text{CONV}(T_{xx(i,j)}) &= dy(j) LU_{i+1,j} T_{xx(i+\frac{1}{2},j)} \\ &- dy(j) LU_{i,j} T_{xx(i-\frac{1}{2},j)} \\ &+ dx(i) LV_{i,j+1} T_{xx(i,j+\frac{1}{2})} \\ &- dx(i) LV_{i,j} T_{xx(i,j-\frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (8.39)$$

$$\begin{aligned} \text{CONV}(T_{yy(i,j)}) &= dy(j) LU_{i+1,j} T_{yy(i+\frac{1}{2},j)} \\ &- dy(j) LU_{i,j} T_{yy(i-\frac{1}{2},j)} \\ &+ dx(i) LV_{i,j+1} T_{yy(i,j+\frac{1}{2})} \\ &- dx(i) LV_{i,j} T_{yy(i,j-\frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (8.40)$$

$$\begin{aligned} \text{CONV}(T_{xyce(i,j)}) &= dy(j) LU_{i+1,j} T_{xyce(i+\frac{1}{2},j)} \\ &- dy(j) LU_{i,j} T_{xyce(i-\frac{1}{2},j)} \\ &+ dx(i) LV_{i,j+1} T_{xyce(i,j+\frac{1}{2})} \\ &- dx(i) LV_{i,j} T_{xyce(i,j-\frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (8.41)$$

8.3 Discrétisation temporelle

On notera $(n+1)$ l'indice du temps t et (n) l'indice du temps précédent $t - \Delta t$. La dérivé en temps de la variable Φ au temps (n) s'écrit :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\Phi^{(n+1)} - \Phi^{(n)}}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + O(\Delta t) \quad (8.42)$$

La discrétisation en temps utilisée est du premier ordre et ne conserve que le terme :

$$\frac{\Phi^{(n+1)} - \Phi^{(n)}}{\Delta t} \quad (8.43)$$

La discrétisation des équations scalaires est explicite :

$$\frac{\Phi^{(n+1)} - \Phi^{(n)}}{\Delta t} + \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \Phi) + \frac{\partial}{\partial x_j} (J_\varphi) - S_\varphi \right]^{(n)} = 0 \quad (8.44)$$

La discrétisation des équations constitutives des tenseurs est explicite :

— Composante $T_{xx(i,j)}$

$$\begin{aligned} L dy(j) dx(i) \frac{T_{xx(i,j)}^{n+1} - T_{xx(i,j)}^n}{\Delta t} + \text{CONV}(T_{xx(i,j)}^n) \\ - L dy(j) dx(i) 2(\tau_{xx(i,j)}^n T_{xx(i,j)}^n + \tau_{yxce(i,j)}^n T_{xyce(i,j)}^n) = \\ L dy(j) dx(i) \left(2 \frac{\eta_{1f}}{\lambda} D_{xx(i,j)}^n - \frac{T_{xx(i,j)}^n}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (8.45)$$

— Composante $T_{yy(i,j)}$

$$\begin{aligned} L dy(j) dx(i) \frac{T_{yy(i,j)}^{n+1} - T_{yy(i,j)}^n}{\Delta t} + \text{CONV}(T_{yy(i,j)}^n) \\ - L dy(j) dx(i) 2(\tau_{yy(i,j)}^n T_{yy(i,j)}^n + \tau_{xyce(i,j)}^n T_{xyce(i,j)}^n) = \\ L dy(j) dx(i) \left(2 \frac{\eta_{1f}}{\lambda} D_{yy(i,j)}^n - \frac{T_{yy(i,j)}^n}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (8.46)$$

— Composante $T_{xyce(i,j)}$

$$\begin{aligned} L dy(j) dx(i) \frac{T_{xyce(i,j)}^{n+1} - T_{xyce(i,j)}^n}{\Delta t} + \text{CONV}(T_{xyce(i,j)}^n) \\ - L dy(j) dx(i) (\tau_{xx(i,j)}^n T_{xyce(i,j)}^n + \tau_{yxce(i,j)}^n T_{yy(i,j)}^n + \\ \tau_{xyce(i,j)}^n T_{xx(i,j)}^n + \tau_{yy(i,j)}^n T_{xyce(i,j)}^n) = \\ L dy(j) dx(i) \left(2 \frac{\eta_{1f}}{\lambda} D_{xy(i,j)}^n - \frac{T_{xyce(i,j)}^n}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (8.47)$$

La discrétisation des équations de mouvement est semi-implicite :

- Conservation de la masse

$$L dy(j) \left(U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n+1} \right) + L dx(i) \left(V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j}^{n+1} \right) = 0 \quad (8.48)$$

- Conservation de la quantité de mouvement

— Composante $U_{i,j}$

$$\begin{aligned} L dxp(i) dy(j) \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} + \text{FLUX}(U_{i,j}^n) = -L dy(j) \left[\frac{P_{i,j}^{n+1}}{\rho} - \frac{P_{i-1,j}^{n+1}}{\rho} \right] \\ + L dxp(i) dy(j) g \sin \theta \end{aligned} \quad (8.49)$$

— Composante $U_{i+1,j}$

$$L dxp(i+1) dy(j) \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i+1,j}^n}{\Delta t} + \text{FLUX}(U_{i+1,j}^n) = -L dy(j) \left[\frac{P_{i+1,j}^{n+1}}{\rho} - \frac{P_{i,j}^{n+1}}{\rho} \right] + L dxp(i+1) dy(j) g \sin \theta \quad (8.50)$$

— Composante $V_{i,j}$

$$L dx(i) dyp(j) \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n}{\Delta t} + \text{FLUX}(V_{i,j}^n) = -L dx(i) \left[\frac{P_{i,j}^{n+1}}{\rho} - \frac{P_{i,j-1}^{n+1}}{\rho} \right] - L dx(i) dyp(j) g \cos \theta \quad (8.51)$$

— Composante $V_{i,j+1}$

$$L dx(i) dyp(j+1) \frac{V_{i,j+1}^{n+1} - V_{i,j+1}^n}{\Delta t} + \text{FLUX}(V_{i,j+1}^n) = -L dx(i) \left[\frac{P_{i,j+1}^{n+1}}{\rho} - \frac{P_{i,j}^{n+1}}{\rho} \right] - L dx(i) dyp(j+1) g \cos \theta \quad (8.52)$$

On obtient :

$$U_{i,j}^{n+1} = \Delta t \left[\text{SU}_{i,j}^n - \frac{1}{\rho} \frac{1}{dxp(i)} (P_{i,j}^{n+1} - P_{i-1,j}^{n+1}) \right] \quad (8.53)$$

$$U_{i+1,j}^{n+1} = \Delta t \left[\text{SU}_{i+1,j}^n - \frac{1}{\rho} \frac{1}{dxp(i+1)} (P_{i+1,j}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}) \right] \quad (8.54)$$

$$V_{i,j}^{n+1} = \Delta t \left[\text{SV}_{i,j}^n - \frac{1}{\rho} \frac{1}{dyp(j)} (P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j-1}^{n+1}) \right] \quad (8.55)$$

$$V_{i,j+1}^{n+1} = \Delta t \left[\text{SV}_{i,j+1}^n - \frac{1}{\rho} \frac{1}{dyp(j+1)} (P_{i,j+1}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}) \right] \quad (8.56)$$

avec :

$$\text{SU}_{i,j}^n = \frac{U_{i,j}^n}{\Delta t} - \frac{\text{FLUX}(U_{i,j}^n)}{L dxp(i) dy(j)} + g \sin \theta \quad (8.57)$$

$$\text{SU}_{i+1,j}^n = \frac{U_{i+1,j}^n}{\Delta t} - \frac{\text{FLUX}(U_{i+1,j}^n)}{L dxp(i+1) dy(j)} + g \sin \theta \quad (8.58)$$

$$\text{SV}_{i,j}^n = \frac{V_{i,j}^n}{\Delta t} - \frac{\text{FLUX}(V_{i,j}^n)}{L dx(i) dyp(j)} - g \cos \theta \quad (8.59)$$

$$\text{SV}_{i,j+1}^n = \frac{V_{i,j+1}^n}{\Delta t} - \frac{\text{FLUX}(V_{i,j+1}^n)}{L dx(i) dyp(j+1)} - g \cos \theta \quad (8.60)$$

8.4 Résolution du système linéaire

La méthode de résolution, consiste à exprimer la vitesse \vec{u} à l'instant $(n + 1)$ en fonction de pression P^{n+1} à partir des équations (8.53, 8.54, 8.55, 8.56). Ensuite, ces valeurs sont reportées dans les équations de continuité (8.48). Cette méthode permet de calculer les pressions à l'instant $(n + 1)$ et puis les valeurs de la vitesse à l'instant $(n + 1)$. La résolution du problème est les champs des vitesses et de pression respectant les équations de quantité de mouvement et de la continuité.

En reportant les valeurs de vitesse fournies par les équations (8.53, 8.54, 8.55, 8.56) dans les équations de la continuité (8.48), on obtient :

$$\begin{aligned} & Ldy(j) \left\{ \Delta t \left[SU_{(i+1,j)}^n - \frac{1}{\rho} \frac{1}{d xp(i+1)} (P_{(i+1,j)}^{n+1} - P_{(i,j)}^{n+1}) \right] - \Delta t \left[SU_{(i,j)}^n - \frac{1}{\rho} \frac{1}{d xp(i)} (P_{(i,j)}^{n+1} - P_{(i-1,j)}^{n+1}) \right] \right\} \\ & + Ldx(i) \left\{ \Delta t \left[SV_{(i,j+1)}^n - \frac{1}{\rho} \frac{1}{d yp(j+1)} (P_{(i,j+1)}^{n+1} - P_{(i,j)}^{n+1}) \right] - \Delta t \left[SV_{(i,j)}^n - \frac{1}{\rho} \frac{1}{d yp(j)} (P_{(i,j)}^{n+1} - P_{(i,j-1)}^{n+1}) \right] \right\} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (8.61)$$

En les multipliant par $\frac{\Delta t}{L}$, d'où il vient :

$$\begin{aligned} & AW_{(i,j)} P_{(i-1,j)}^{n+1} + AE_{(i,j)} P_{(i+1,j)}^{n+1} + AN_{(i,j)} P_{(i,j+1)}^{n+1} + AS_{(i,j)} P_{(i,j-1)}^{n+1} + \\ & - (AW + AE + AN + AS)_{(i,j)} P_{(i,j)}^{n+1} = SP_{(i,j)}^n \rho \end{aligned} \quad (8.62)$$

avec les coefficients sont comme suit :

$$\begin{aligned} AW_{(i,j)} &= \frac{dy(j)}{d xp(i)} & AE_{(i,j)} &= \frac{dy(j)}{d xp(i+1)} \\ AN_{(i,j)} &= \frac{dx(i)}{d yp(j+1)} & AS_{(i,j)} &= \frac{dx(i)}{d yp(j)} \end{aligned} \quad (8.63)$$

On remarque que les coefficients de la matrice de pression ne dépendent que des grandeurs géométriques.

Nous sommes donc amenés à résoudre un système linéaire de type $\bar{\bar{A}}Y^{n+1} = B^n$ à chaque pas de temps. La résolution de ce système nous donne la pression à l'instant $(n+1)$ puis le champ de vitesse incompressible à l'instant $(n+1)$ via les relations (8.53, 8.54, 8.55, 8.56).

On utilise la méthode de résolution directe de CHOLESKY pour résoudre le système linéaire (8.61). L'utilisation de cette méthode est possible car on peut stocker la matrice $\bar{\bar{A}}$ en mémoire. On remarque que seulement la moitié de la bande de la matrice $\bar{\bar{A}}$ est stockée.

On rappelle que pour l'utilisation de la méthode de CHOLESKY la matrice $\bar{\bar{A}}$ doit être définie positive et symétrique.

La matrice $\bar{\bar{A}}$ est décomposée en :

$$\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{M}} \times \bar{\bar{M}}^T \quad (8.64)$$

$\bar{\bar{M}}$ est une matrice triangulaire inférieure et $\bar{\bar{M}}^T$ sa transposée. La décomposition de la matrice $\bar{\bar{A}}$ est faite une seule fois au démarrage du calcul, car tous ses éléments ne dépendent que du rapport entre les distances de mailles.

On effectue à chaque pas de temps la résolution de : $\bar{\bar{M}}\bar{\bar{X}} = \bar{\bar{B}}$ et puis $\bar{\bar{M}}^T\bar{\bar{Y}} = \bar{\bar{X}}$. Donc, on résout un algorithme de descente et un autre de remontée.

Chapitre 9

Modélisation numérique par méthode "Volume Of Fluid" (VOF)

« *I know that I know nothing.* »

Socrates

Sommaire

9.1 Introduction	89
9.2 Fonction VOF	89
9.3 Modèle "1-fluide"	90
9.4 Méthode de résolution d'implémentation	91
9.5 Traitement numérique de l'équation de transport	94
9.5.1 Hirt-VOF	94
9.5.2 PLIC-VOF	97

9.1 Introduction

Les calculs d'interface et de surface libre sont cruciaux lorsque l'on parle des problèmes d'écoulements de deux fluides. Le solveur d'écoulement présenté dans le chapitre précédent à partir des équations de Navier-Stokes incompressibles n'inclut pas explicitement le mouvement des interfaces. La prédiction numérique du mouvement d'une interface dans un milieu continu pose de nombreux problèmes, qui sont difficiles à simuler.

Le but de ce chapitre est de présenter la méthode "Volume Of Fluid" (VOF) choisie ainsi que ses limitations. La méthode VOF est une méthode connue en utilisant l'idée de capture de l'interface et l'approche eulérienne. Les méthodes de capture de l'interface ne nécessitent pas de la manipulation de la géométrie après que le maillage ait été généré et peuvent être appliquées à une topologie complexe des interfaces. De ce fait, la méthode VOF est un outil pratique et puissant pour modéliser les écoulements de surface libre, où l'emplacement de fluide est déterminé par rapport à une fonction VOF. Depuis la première publication de Hirt et Nichols (HIRT et NICHOLS, 1981) qui a proposé la méthode VOF, afin de simuler avec précision, différents schémas ont été développés à cet effet par les nombreux savants, on trouve ici deux méthodes pour résoudre cette équation de transport : Hirt-VOF (HIRT et NICHOLS, 1981) et PLIC-VOF (LI, 1995), (YOUNGS, 1982).

9.2 Fonction VOF

On considère le cas d'un écoulement de deux fluides confiné non miscibles stratifiés. La modélisation introduit une fonction binaire C du point de l'espace et du temps :

$$\begin{cases} C(\vec{x}, t) = 1 & \text{pour } \vec{x} \in \text{fluide 1} \\ C(\vec{x}, t) = 0 & \text{pour } \vec{x} \in \text{fluide 2} \end{cases} \quad (9.1)$$

En générale, l'équation de continuité, qui traduit la conservation de la masse, s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} &= 0 \\ \text{avec : } \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (9.2)$$

Pour un fluide incompressible, $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$ et l'équation de la continuité devient :

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (9.3)$$

$C(\vec{x}, t)$ est une fonction dite "fonction couleur" qui indique au cours du temps la position d'un fluide par rapport à l'autre. Cette fonction est utilisée comme traceur de deux fluides. La variation de la fonction C est directement liée au déplacement de l'interface. Elle est aussi reliée à la masse volumique et la viscosité par une loi de variation linéaire :

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho_1 C(\vec{x}, t) + \rho_2 (1 - C(\vec{x}, t)) \quad (9.4)$$

$$\mu(\vec{x}, t) = \mu_1 C(\vec{x}, t) + \mu_2 (1 - C(\vec{x}, t)) \quad (9.5)$$

de sorte que l'équation d'évolution de C est directement déduite de (9.3) :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_i \frac{\partial C}{\partial x_i} = 0 \quad (9.6)$$

Il découle de (9.6) que la fonction C est conservée dans le mouvement. Par conséquent, pour des fluides non miscibles, si la situation initiale est telle que $C(\vec{x}, t = 0)$ vaut 0 et 1, la fonction $C(\vec{x}, t)$ ne peut pas prendre une autre valeur que 0 ou 1 pour $t > 0$. Déterminer $C(\vec{x}, t)$ revient à calculer les déplacements de l'interface entre les deux fluides.

La notion d'interface étant parfaitement définie, comme une surface dans un problème 3D, ou comme une ligne dans un problème 2D, l'hypothèse de non glissement entre les deux fluides à l'interface permet d'écrire la condition cinématique à l'interface :

$$U_{\text{fluide1}} \vec{n} = U_{\text{fluide2}} \vec{n} = U_{\text{interface}} \vec{n} \quad (9.7)$$

En conclusion, les équations de Navier-Stokes diphasiques peuvent être reformulées sous une forme "1-fluide", dans laquelle intervient un fluide équivalent, aux caractéristiques variables. Le système d'équations comprend donc maintenant les équations de quantité de mouvement, l'incompressibilité et l'équation de transport de la fonction VOF. Le modèle ainsi formé peut être appelé modèle "1-fluide" ou modèle mésoscopique.

9.3 Modèle "1-fluide"

Dans les coordonnées cartésiennes (Ox, Oy) , les équations à résoudre sont les équations de Navier-Stokes,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g_x + \nu \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right] \quad (9.8)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + g_y + \nu \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right] \quad (9.9)$$

Pour un fluide incompressible, les équations de quantité de mouvement (9.8), (9.9) doit être complétée avec la condition d'incompressibilité :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (9.10)$$

Parfois, il est souhaitable de prendre aux effets de compressibilité limitée (e.g. ondes acoustiques). Dans ce cas l'équation (9.10) est remplacé par :

$$\frac{1}{c^2 \rho} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (9.11)$$

où c est la vitesse adiabatique du son dans le fluide.

Les valeurs discrètes des variables dépendantes, y compris la variable de fraction volumique C utilisée dans la technique VOF, sont situés à des positions de cellule représentées sur la figure (9.1).

La fonction couleur C est utilisée pour identifier les maillages qui contiennent deux phases fluides. Une cellule d'interface (i, j) est défini comme une cellule contenant une valeur non nulle de C et ayant au moins une cellule voisine, $(i \pm 1, j)$ ou $(i, j \pm 1)$, qui contient une valeur zéro de C.

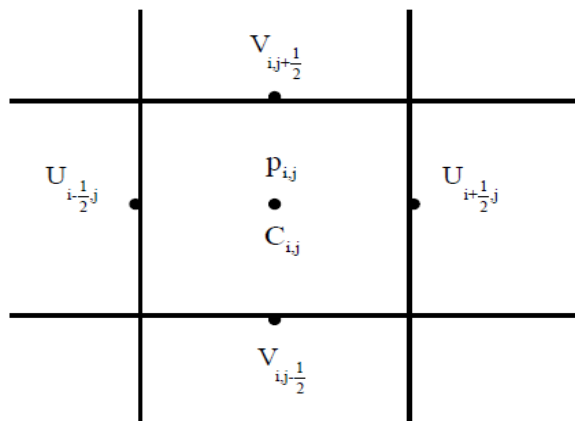


FIGURE 9.1 – Position des variables dans une maille

En bref, la procédure de base pour avancer une solution à travers un incrément du temps, Δt , consiste à trois étapes :

(1) Approximations explicites des équations (9.8), (9.9) sont utilisées pour calculer la première estimation des nouvelles vitesses au niveau du temps en utilisant les conditions initiales ou des valeurs du temps précédente pour toutes les convections, la pression, et les diffusions.

(2) Pour satisfaire à l'équation de continuité (9.10) ou (9.11), la pression est ajustée de manière itérative dans chacune des cellules et les changements de vitesse induits par changement de pression sont ajoutés à la vitesse calculée à l'étape (1). Une itération est nécessaire parce que la variation de pression nécessaire à une cellule à satisfaire Eq. (9.10) ou Eq. (9.11), va bouleverser l'équilibre entre les quatre cellules adjacentes.

(3) Enfin, la fonction C définissant des régions des fluides doit être réactualisée pour configurer la nouvelle régions des fluides.

La répétition de ces étapes donne une solution à travers un intervalle du temps désiré. A chaque étape, évidemment, des conditions aux limites appropriées doivent être imposées à tous les maillages et à l'interface.

Pour l'étape (1) et (2), le traitement numérique est détaillé dans le chapitre précédent 8. Pour l'étape (3), on présente plus précisément la technique de VOF dans la suite.

9.4 Méthode de résolution d'implémentation

Pour le cas présent étudié (gaz/liquide), la technique adoptée est celle de l'approche "Volume Of Fluid". ρ_l et ρ_g sont définies par les masses volumiques constantes de liquide et gaz respectivement ; μ_l et μ_g sont définies par les viscosités dynamiques constantes de liquide et gaz respectivement. Si $C_{i,j} = 1$, la phase représente la phase liquide ; si $C_{i,j} = 0$, la phase représente la phase gazeuse ; si la valeur $0 < C_{i,j} < 1$, il représente l'interface entre les deux phases.

- Dans la maille centrée au nœud de pression P_{ij} (voir figure 8.6), on définit les champs de masse volumique et viscosité dynamique comme suit :

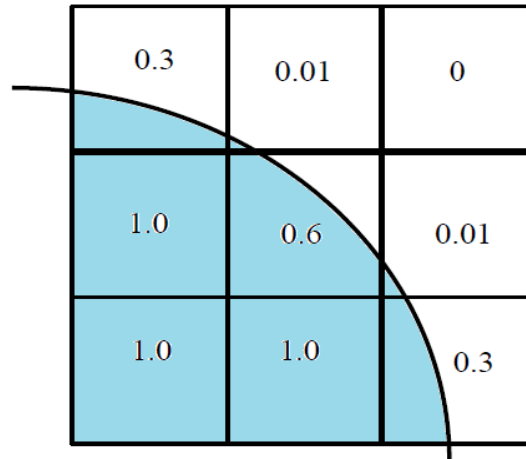


FIGURE 9.2 – Exemple de fraction volumique associée à une interface sur un maillage discret (tiré de SCARDOVELLI et ZALESKI (1999))

$$\begin{cases} \rho(i, j) = C(i, j)\rho_l + (1 - C(i, j))\rho_g \\ \mu(i, j) = C(i, j)\mu_l + (1 - C(i, j))\mu_g \end{cases} \quad (9.12)$$

- Dans la maille centrée au nœud de vitesse U_{ij} (voir figure 8.3), on définit les champs de masse volumique et viscosité dynamique comme suit :

$$\begin{cases} \rho_u(i, j) = C_u(i, j)\rho_l + (1 - C_u(i, j))\rho_g \\ \mu_u(i, j) = C_u(i, j)\mu_l + (1 - C_u(i, j))\mu_g \end{cases} \quad (9.13)$$

$$\text{où : } C_u(i, j) = \frac{1}{2}(C(i, j) + C(i - 1, j)) \quad (9.14)$$

- Dans la maille centrée au nœud de vitesse V_{ij} (voir figure 8.4), on définit les champs de masse volumique et viscosité dynamiques comme suit :

$$\begin{cases} \rho_v(i, j) = C_v(i, j)\rho_l + (1 - C_v(i, j))\rho_g \\ \mu_v(i, j) = C_v(i, j)\mu_l + (1 - C_v(i, j))\mu_g \end{cases} \quad (9.15)$$

$$\text{où : } C_v(i, j) = \frac{1}{2}(C(i, j) + C(i, j - 1)) \quad (9.16)$$

On écrit les formules comme suit :

$$U_{i,j}^{n+1} = \delta t \left[S U_{i,j}^n - \frac{1}{\rho_u(i, j)} \frac{1}{dx p(i)} (P_{i,j}^{n+1} - P_{i-1,j}^{n+1}) \right] \quad (9.17)$$

$$U_{i+1,j}^{n+1} = \delta t \left[S U_{i+1,j}^n - \frac{1}{\rho_u(i+1, j)} \frac{1}{dx p(i+1)} (P_{i+1,j}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}) \right] \quad (9.18)$$

$$V_{i,j}^{n+1} = \delta t \left[S V_{i,j}^n - \frac{1}{\rho_v(i, j)} \frac{1}{dy p(j)} (P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j-1}^{n+1}) \right] \quad (9.19)$$

$$V_{i,j+1}^{n+1} = \delta t \left[SV_{i,j+1}^n - \frac{1}{\rho_v(i,j+1)} \frac{1}{dyp(j+1)} (P_{i,j+1}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}) \right] \quad (9.20)$$

avec :

$$SU_{i,j}^n = \frac{U_{i,j}^n}{\delta t} + g \sin \theta + \frac{\text{flw}(i-1,j) - \text{flw}(i,j)}{d xp(i)} + \frac{\text{fls}(i,j) - \text{fls}(i,j+1)}{d y(j)} \quad (9.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{face 'west'} \\ \text{flw}(i-1,j) = \text{upwind_U2}(i-1,j) - v_u(i,j) \tau_{xx}(i-1,j) \\ \text{face 'est'} \\ \text{flw}(i,j) = \text{upwind_U2}(i,j) - v_u(i,j) \tau_{xx}(i,j) \\ \text{face 'sud'} \\ \text{fls}(i,j) = \text{upwind_UV}(i,j) - v_u(i,j) \tau_{yx}(i,j) \\ \text{face 'nord'} \\ \text{fls}(i,j+1) = \text{upwind_UV}(i,j+1) - v_u(i,j) \tau_{yx}(i,j+1) \\ \text{où : } v_u(i,j) = \frac{\mu_u(i,j)}{\rho_u(i,j)} \end{array} \right.$$

$$SV_{i,j}^n = \frac{V_{i,j}^n}{\delta t} - g \cos \theta + \frac{\text{flw}(i,j) - \text{flw}(i+1,j)}{d x(i)} + \frac{\text{fls}(i,j-1) - \text{fls}(i,j)}{d yp(j)} \quad (9.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{face 'west'} \\ \text{flw}(i,j) = \text{upwind_VU}(i,j) - v_v(i,j) \tau_{xy}(i,j) \\ \text{face 'est'} \\ \text{flw}(i+1,j) = \text{upwind_VU}(i+1,j) - v_v(i,j) \tau_{xy}(i,j) \\ \text{face 'sud'} \\ \text{fls}(i,j-1) = \text{upwind_V2}(i,j-1) - v_v(i,j) \tau_{yy}(i,j-1) \\ \text{face 'nord'} \\ \text{fls}(i,j) = \text{upwind_V2}(i,j) - v_v(i,j) \tau_{yy}(i,j) \\ \text{où : } v_v(i,j) = \frac{\mu_v(i,j)}{\rho_v(i,j)} \end{array} \right.$$

En substituant (9.17), (9.18), (9.19), (9.20) dans (9.10), on obtient finalement :

$$\begin{aligned} & AW_{(i,j)} P_{(i-1,j)}^{n+1} + AE_{(i,j)} P_{(i+1,j)}^{n+1} + AN_{(i,j)} P_{(i,j+1)}^{n+1} + AS_{(i,j)} P_{(i,j-1)}^{n+1} + \\ & - (AW + AE + AN + AS)_{(i,j)} P_{(i,j)}^{n+1} = \left(SU_{i+1,j}^n - SU_{i,j}^n \right) d y(j) + \left(SV_{i,j+1}^n - SV_{i,j}^n \right) d x(i) \end{aligned} \quad (9.23)$$

avec tous les coefficients sont présentés comme suit :

$$\begin{aligned} AW_{(i,j)} &= \frac{1}{\rho_u(i,j)} \frac{d y(j)}{d xp(i)} & AE_{(i,j)} &= \frac{1}{\rho_u(i+1,j)} \frac{d y(j)}{d xp(i+1)} \\ AN_{(i,j)} &= \frac{1}{\rho_v(i,j+1)} \frac{d x(i)}{d yp(j+1)} & AS_{(i,j)} &= \frac{1}{\rho_v(i,j)} \frac{d x(i)}{d yp(j)} \end{aligned} \quad (9.24)$$

Les coefficients de la matrice de pression dépendent ici non seulement des grandeurs géométriques, et aussi du champ de masse volumique, via la fonction couleur $C_{i,j}$. A chaque pas de temps, évidemment les coefficients sont réactualisés par rapport à l'évolution de l'équation de transport (9.25).

$$\frac{\partial C_{i,j}}{\partial t} + U_{i,j} \frac{\partial C_{i,j}}{\partial x} + V_{i,j} \frac{\partial C_{i,j}}{\partial y} = 0 \quad (9.25)$$

9.5 Traitement numérique de l'équation de transport

La fraction volumique C vérifie une équation de transport (9.25) déduite de l'équation de conservation de la masse. La discrétisation de cette équation est réalisée par une approche des volumes finis. La discrétisation temporelle utilise une décomposition de type Crank-Nicolson, schéma qui confère une précision d'ordre deux en temps. L'un des problèmes majeurs rencontré avec l'emploi de cette technique tient en grande partie à la difficulté de discrétiser le terme de convection. Celui-ci doit en effet conserver certaines propriétés de la fraction volumique : elle doit rester bornée entre 0 et 1, et les zones de transition entre les deux fluides permettant de localiser la surface, doivent être conservées aussi fines que possible. Ces deux propriétés nécessitent par conséquent d'employer des schémas "compressifs" vérifiant le critère assurant le caractère de borné de la fraction volumique. Les deux méthodes Hirt-VOF et PLIC-VOF sont détaillées ci-après.

9.5.1 Hirt-VOF

Hirt-VOF consiste à appliquer la méthode de cellule "donateur-accepteur", variantes dont sont décrites par RAMSHAW et TRAPP (1976) et HIRT et NICHOLS (1981).

La fonction C est gouvernée par l'équation de transport (9.25), sa forme conservative est :

$$\frac{\partial C_{i,j}}{\partial t} + \frac{\partial (C_{i,j} U_{i,j})}{\partial x} + \frac{\partial (C_{i,j} V_{i,j})}{\partial y} = 0 \quad (9.26)$$

Les processus de transport de la fonction couleur C doivent satisfaire à trois exigences :

1. être vérifiée pour le transport de surface libre
2. éviter l'erreur de troncature causée par la diffusion négative
3. le flux de transport à travers le côté de la cellule ou cellule vide ne peut pas dépasser le volume de la cellule.

Pour répondre aux trois exigences ci-dessus, nous ne pouvons pas utiliser la discrétisation différentiel ordinaire, au lieu d'utiliser le traitement numérique spécial, i.e., le modèle des cellules "donateur-accepteur". La méthode "donateur-accepteur" est une méthode pour calculer le changement du flux dans une cellule de grille, ses caractéristiques sont les suivantes : (1) doit prendre en compte la discontinuité de la fonction C ; (2) doit déterminer la cellule "donateur" (i.e. la cellule qui donne le fluide) ou la cellule "accepteur" (i.e. la cellule qui accepte le fluide) pour quelque soit les deux cellules adjacentes ; (3) doit surveiller la valeur de la fonction C entre la cellule "donateur" et la cellule "accepteur", afin d'éviter l'excès de transport du fluide de la cellule "donateur" à la cellule "accepteur".

La méthode "donateur-accepteur" tient compte non seulement la fonction C dans la cellule de grille elle-même, et aussi la fonction C dans les cellules adjacentes. L'essence est l'utilisation de la fonction C en aval ainsi qu'en amont. La fonction C satisfait à l'équation de transport (9.26), le volume de contrôle qui est :

$$\Omega = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \times (y_{j-1/2}, y_{j+1/2}) \times (t_n, t_{n+1})$$

L'équation (9.26) est intégrée, on obtient :

$$\begin{aligned} & (C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^n) \delta x_i \delta y_j + [(C_{i,j} u_{i+1/2,j}) - (C_{i,j} u_{i-1/2,j})] \delta t \delta y_j + [(C_{i,j} v_{i,j+1/2}) - (C_{i,j} v_{i,j-1/2})] \delta t \delta x_i \\ & = 0 \end{aligned} \quad (9.27)$$

Le premier terme à gauche de l'équation (9.27) désigne la quantité totale du changement de flux sur la cellule de grille dans le temps δt , le seconde terme à gauche désigne la quantité du changement de flux selon la direction verticale sur la cellule de grille dans le temps δt , le troisième terme désigne la quantité du changement de flux selon la direction horizontale sur la cellule de grille dans le temps δt . Le calcul des seconde et troisième termes est déterminé selon les flux en aval et en amont de la cellule et la forme d'interface sur la cellule de grille. Prenez un calcul du seconde terme (le flux à travers le côté vertical à droite de la cellule de grille) comme exemple, le premier terme du seconde membre à gauche permet de réécrire :

$$(C_{i,j} u_{i+1/2,j}) \delta t \delta y_j = (C_{i,j} V_x) \delta y_j$$

Ici $V_x = u_{i+1/2,j} \delta t$ désigne le flux d'unité de longueur à travers le côté vertical à droite de la cellule de grille dans le temps δt , comme illustrer sur la figure 9.3(a). Déterminer la cellule "donateur" et la cellule "accepteur" est selon la direction de vitesse sur le côté vertical de la cellule. Comme la figure 9.3(a), quand la vitesse u circule de gauche à droite, la cellule à droite est "accepteur", la cellule à gauche est "donateur", donc, dans le temps δt le changement du flux à travers le côté droite de la cellule $C_{i,j} V_x$, peut être calculé comme suit :

$$\begin{aligned} C_{i,j} V_x &= \min \{ C_{AD} |V_x| + CC, C_D \delta x_D \} \\ CC &= \max \{ (1 - C_{AD}) |V_x| - (1 - C_D) \delta x_D, 0 \} \end{aligned} \quad (9.28)$$

L'indice D désigne la cellule "donateur", AD désigne soit la cellule "donateur", soit la cellule "accepteur", cela dépend de la direction normale de surface libre dans la cellule et la direction de vitesse du côté de la cellule. L'opération min est d'assurer que le flux à travers le côté droite de la cellule ne dépasse pas le volume du fluide sur la cellule "donateur" ; l'opération max est d'assurer que le flux à travers le côté de la cellule vide ne dépasse pas le volume vide de la cellule "donateur".

C_{AD} désigne la fonction C sur le côté de la cellule, la définition est illustrée sur les figures 9.3(b)-(d), sa valeur dépend des situations spécifiques :

- 1. En excluant la surface libre sur la cellule, $C_{AD} = C_D$;
- 2. En contenant la surface libre sur la cellule, la valeur C_{AD} est un peu plus compliquée, il faut déterminer la direction de surface libre sur la cellule, ici la direction de surface libre est défini parallèle à l'axe x ou à l'axe y .

(1) Quand la direction de surface libre est parallèle à l'axe x (voir figure 9.3(b)), $C_{AD} = C_D$, dans ce cas le flux à travers le côté de la cellule "donateur" et la cellule vide ne peut pas dépasser le volume de fluide sur la cellule "donateur", car $|V_x| < \delta x_D$.

(2) Quand la direction de surface libre est parallèle à l'axe y (voir figure 9.3(c),(d)), $C_{AD} = C_A$, dans ce cas il y a possibilité que le flux dépasse le volume du fluide sur la cellule (voir figure 9.3(c)), il y a possibilité que le flux de la cellule vide dépasse le volume vide sur la cellule (voir figure 9.3(d)), donc dans l'équation (9.28) les opérations min et max évitent justement l'apparition de ces phénomènes.

- 3. Quand la cellule "donateur" est cellule vide ou en amont de la cellule "donateur" est cellule vide, quel que soit la direction de surface libre sur la cellule et la direction de vitesse sur le côté verticale de la cellule, $C_{AD} = C_A$.

Après la détermination de la cellule "donateur" et la cellule "accepteur", le flux est calculé par le processus ci-dessus, la nouvelle valeur C de la cellule "donateur" est la soustraction entre les valeurs C dans le temps précédent et le changement du flux totale, la nouvelle valeur C de la cellule "accepteur" est l'addition entre les valeurs C dans le temps précédent et le changement du flux totale. Lorsque le processus est répété pour toutes les côtés des cellules, les valeurs C résultant correspondent aux valeurs de temps avancé satisfaisant à l'équation (9.28), ainsi on peut calculer avec précision la position de la surface libre.

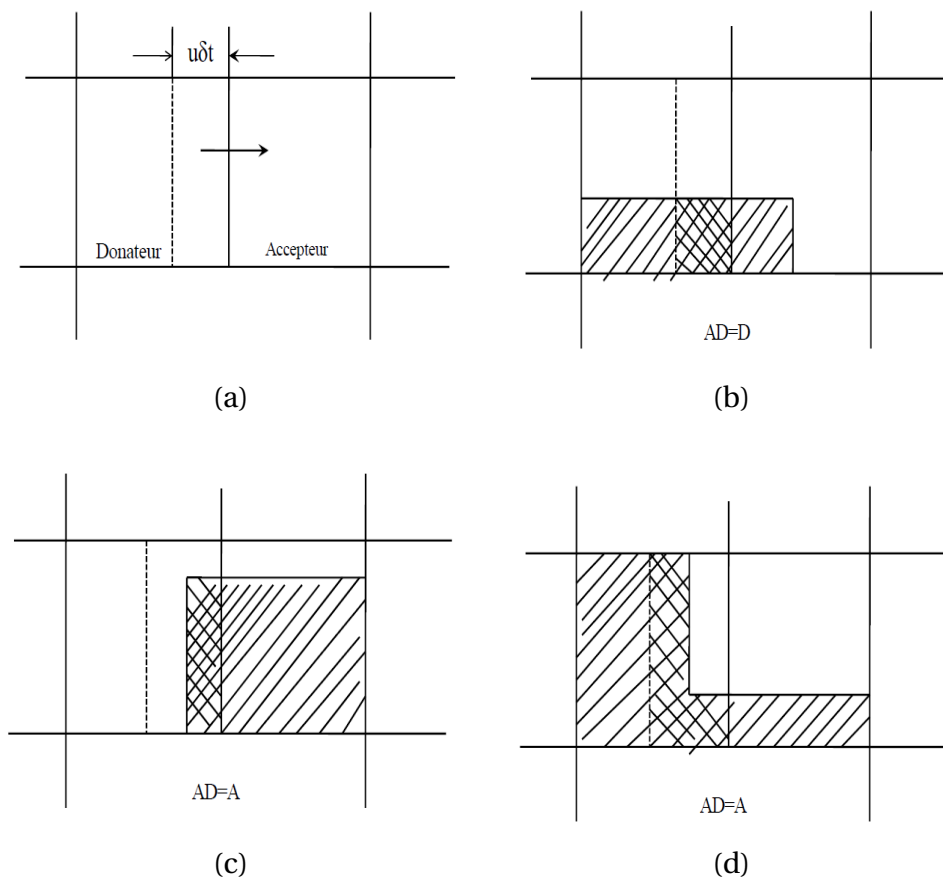


FIGURE 9.3 – Exemple des formes de surface libre utilisés dans l'advection de C . L'arrangement "donateur-accepteur" est présenté sur (a), où la ligne pointillée indique le côté gauche du volume totale étant advecté. Les régions hachurées indiquées sur (b-d) sont les flux actuels de C .

Dans la technique VOF proposée par Hirt et Nichols, ils supposent que la surface libre est approchée par deux types de segment droit (segment vertical ou segment horizontal) dans une cellule. La reconstruction de l'interface est comme suit :

La surface libre du fluide est considéré comme une fonction locale de $Y(x)$ et $X(y)$, en utilisant la modèle de 9 cellules des grilles (voir figure 9.4). La valeur Y_i de colonne des cellules des grilles $i-1, i, i+1$ et la valeur X_j de colonne des cellules des grilles $j-1, j, j+1$ sont calculées, les valeurs des pentes dY/dx et dX/dy sur chaque cellule sont estimées. Par rapport à la valeur de fonction C et la valeur de pente sur chaque cellule (i, j) , on peut déterminer la position et la direction de surface libre.

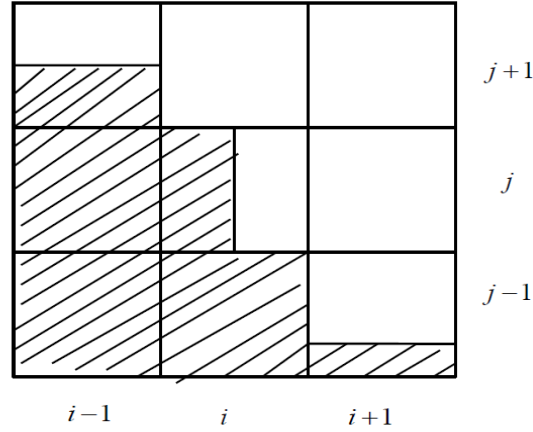


FIGURE 9.4 – Modèle de reconstruction de surface libre (Hirt-Nichols)

$$Y_l = \sum_{k=j-1}^{j+1} C_{lk} \delta y_k, \quad l = i-1, i, i+1 \quad (9.29)$$

$$\left(\frac{dY}{dx} \right)_i = \frac{2(Y_{i+1} - Y_{i-1})}{\delta x_{i+1} + 2\delta x_i + \delta x_{i-1}} \quad (9.30)$$

$$X_l = \sum_{k=i-1}^{i+1} C_{kl} \delta x_k, \quad l = j-1, j, j+1 \quad (9.31)$$

$$\left(\frac{dX}{dy} \right)_j = \frac{2(X_{j+1} - X_{j-1})}{\delta y_{j+1} + 2\delta y_j + \delta y_{j-1}} \quad (9.32)$$

$$\text{Si } \left| \frac{dY}{dx} \right| < \left| \frac{dX}{dy} \right|,$$

il est défini que l'interface sur la cellule de grille est horizontale; autrement, l'interface sur la cellule de grille est verticale.

9.5.2 PLIC-VOF

Des efforts ont été accomplis pour améliorer la précision ces dernières années, alors nous proposons ici qu'une des méthodes PLIC-VOF représentant les interfaces avec plus de précision (YOUNGS, 1982).

La méthode de reconstruction par calcul de l'interface affine par morceaux, appelée méthode VOF-CIAM en français ou PLIC-VOF en anglais (Piecewise Linear interface Calculation), se décompose en trois étapes : la reconstruction de l'interface (orientation de la normale et positionnement dans la cellule), le transport lagrangien de l'interface et le calcul de la nouvelle fraction volumique. L'interface est alors approchée par un segment (cas 2-D) ou par un plan (cas 3-D).

La reconstruction de l'interface est basée sur le fait que la surface plane contenue dans une cellule est complètement déterminée par la normale à l'interface et la fraction volumique de la cellule étudiée. L'orientation de la normale est tout d'abord estimée à partir du gradient de la fraction volumique, ce qui revient, en 2-D, à une approximation par différences finies à 9 points. Une fois la normale orientée, on peut alors positionner l'interface, à l'aide de la fraction volumique. Il faut pour cela trouver une parallèle à la droite

définie par la normale qui permet de positionner le segment donnant la fraction volumique correcte.

Les deux cas suivants sont discutés. Le premier cas : le calcul de la cellule complète $C = 1$. Le seconde cas : le calcul de la demi-cellule $0 < C < 1$. Le premier cas est simple, et le seconde cas exige d'abord le calcul de la normale de l'interface $(n_{i,j}^x, n_{i,j}^y)$, d'où :

$$\begin{aligned} n_{i,j}^x &= (C_{i+1,j+1} + 2C_{i+1,j} + C_{i+1,j-1} - C_{-1,j+1} - 2C_{i-1,j} - C_{i-1,j-1}) / \delta x \\ n_{i,j}^y &= (C_{i+1,j+1} + 2C_{i,j+1} + C_{i-1,j+1} - C_{i+1,j-1} - 2C_{i,j-1} - C_{i-1,j-1}) / \delta y \end{aligned} \quad (9.33)$$

Sauf les quatre cas plus simples $n_{i,j}^x = 0$ et $n_{i,j}^y = 0$, les cas restants peuvent être simplifiés par quatre cas comme suit. (voir figures 9.5)

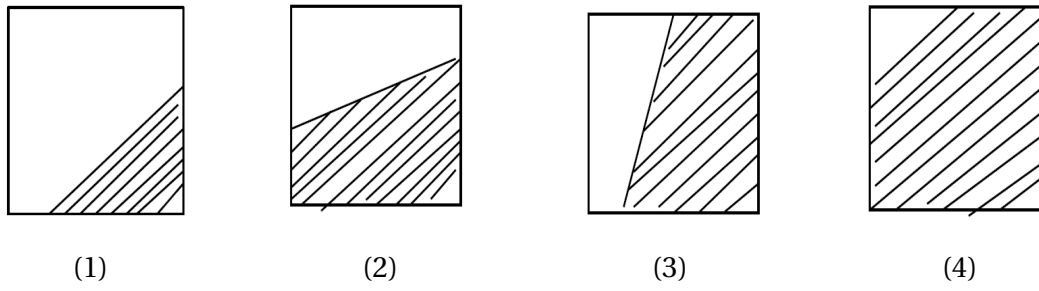


FIGURE 9.5 – Quatre types de PLIC

Il est défini $\beta = \arctan(-n_{i,j}^x / n_{i,j}^y)$ ($-\pi \leq \beta \leq \pi$), son normalisé est : $\alpha = \tan^{-1}(\delta x \tan \beta / \delta y)$ ($-\pi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$). Avec cette angle et fraction volumique de la cellule, on peut déterminer le type de la cellule. Une fois déterminer le type, on peut calculer la fraction volumique des quatre cotés de la cellule. S_t, S_b, S_r, S_l désignent respectivement fraction volumique des côtés en haute, en bas, à gauche, à droite de la cellule, comme illustrer sur la figure (9.6).

On prend le premier type comme exemple, on a le système des équations comme suit à résoudre :

$$\begin{cases} (S_b \delta x)(S_r \delta y) = C_{i,j}^n \cdot \delta x \delta y \\ (S_r \delta y) = (S_b \delta x) \tan(\alpha) \end{cases} \quad (9.34)$$

Il est évident que S_b, S_r sont résolus à partir de ce système (dans ce cas $S_t = S_l = 0$). De même on peut déterminer les valeurs S_b, S_r, S_t, S_l pour les autres types, par rapport aux valeurs S_b, S_r, S_t, S_l on détermine la position de l'interface.

Enfin on peut advecter l'interface, chaque point de l'interface se déplaçant à une vitesse dont chaque composante est issue de l'interpolation linéaire sur les côtés de la cellule. Une fois l'interface déplacée, on peut enfin calculer la nouvelle fraction volumique, et passer au pas de temps suivant.

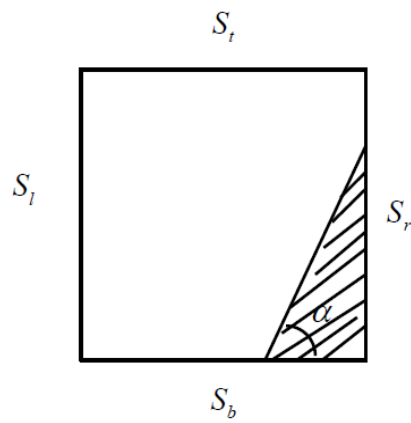


FIGURE 9.6 – Position et forme de l'interface dans une maille

Chapitre 10

Résultats de la simulation numérique

*« L'imagination est plus importante
que le savoir. »*

Albert Einstein

Sommaire

10.1 Introduction	101
10.2 Écoulement d'une phase	101
10.3 Cas test de l'équation de transport	104
10.4 Écoulement diphasique (gaz/liquide)	108
10.5 Conclusion	111

10.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons illustrer quelques résultats de la simulation numérique. Tout d'abord, on met en évidence les résultats de la simulation numérique du fluide newtonien et fluide Oldroyd-B correspondant à un écoulement monophasique du liquide confiné. Ensuite, un cas test est validé concernant le calcul de l'équation de transport en comparant les deux méthodes : Hirt-VOF et PLIC-VOF. Enfin on élabore un code de la simulation numérique pour deux phases fluides (gaz/liquide) par l'implémentation des méthodes Hirt-VOF et PLIC-VOF.

10.2 Écoulement d'une phase

Le cas test que nous allons étudier dans ce paragraphe est très couramment utilisé dans la littérature pour valider et évaluer les méthodes de résolution du problème de Navier-Stokes.

On considère l'écoulement du fluide entre deux plaques planes, en 2 dimension de longueur $L = 500$, de hauteur $h = 50$. On impose une vitesse constante $\vec{u} = (1, 0)$ sur le plan d'entrée, et une pression nulle $P = 0$ sur le plan de sortie. En condition limite, les vitesses nulles sont imposées sur les deux parois. On choisit les paramètres physiques ($\rho = 1, \eta_0 = 1$) pour le fluide newtonien. L'écoulement est initialement au repos. Avec notre solveur de Navier-Stokes incompressible, on simule les mouvements du fluide entre les plaques planes. Dans ce cas, le nombre de Reynolds est 50.

La solution de référence est le problème d'écoulement de Poiseuille. Il est donné par :

$$u(y) = \frac{3}{2} \bar{u} \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2 \right] \quad (10.1)$$

avec : $\bar{u} = \text{cte}$

Les champs des pressions et vitesses sont représentés comme suit (figure 10.1), on voit que la pression diminue de gauche à droite, jusqu'à nulle sur le plan de sortie et les profils des vitesses sont paraboliques.

À l'instant $t = 80$, on illustre le profil de vitesse au 10 nœuds de l'axe x en fonction des coordonnées de l'axe y (figure 10.2). On voit qu'il correspond à la solution de référence. La vitesse imposée sur le plan d'entrée est 1, plus le temps augmente, plus la vitesse sur le plan de sortie tend vers $\frac{3}{2}$.

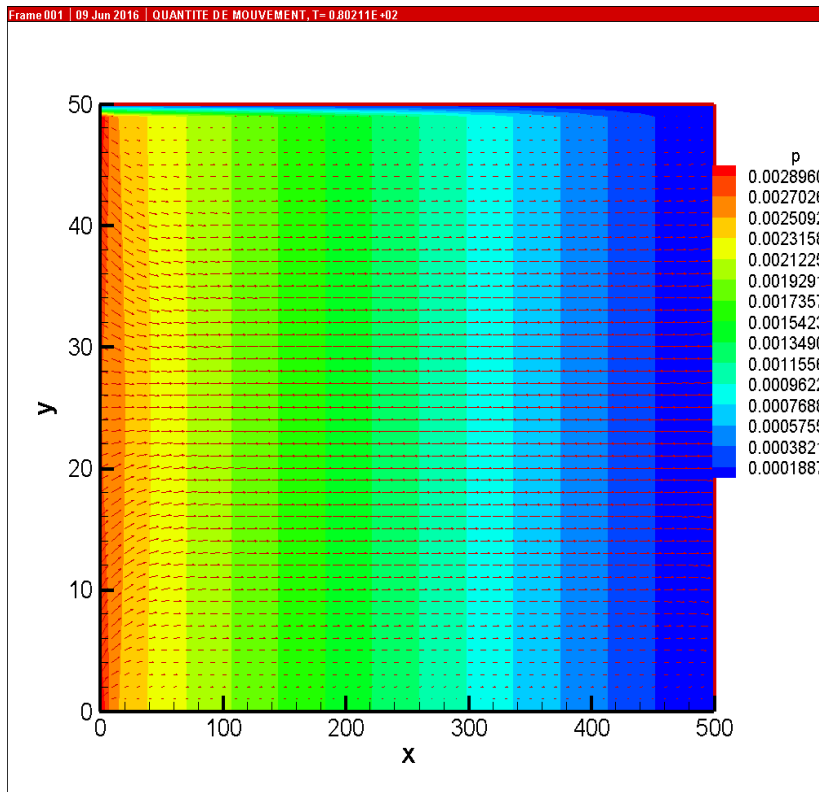


FIGURE 10.1 – Champs des pressions et vitesses d'écoulement du fluide newtonien entre deux plaques à $t = 80$

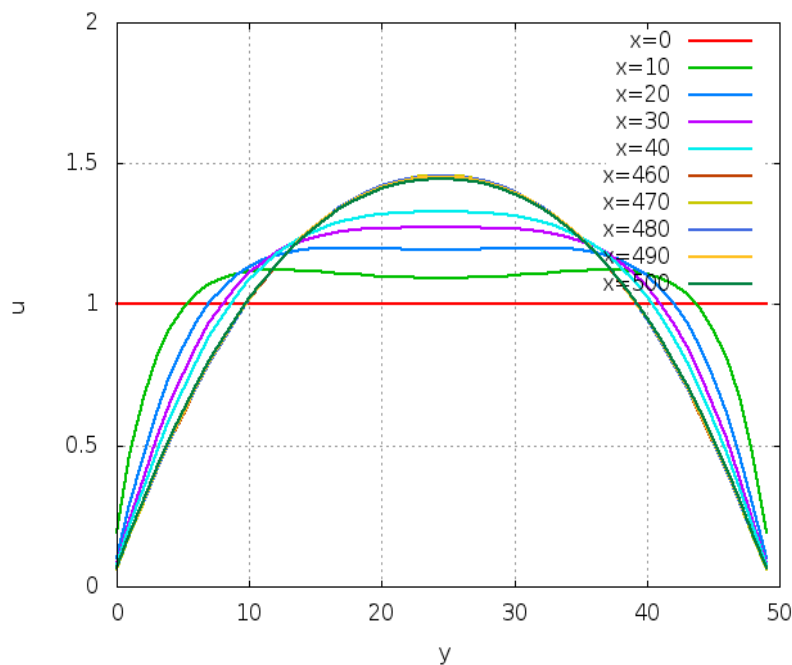


FIGURE 10.2 – Profil de vitesse d'écoulement du fluide newtonien entre deux plaques à $t = 80$

De même configuration, on choisit les paramètres physiques ($\rho = 1, \eta_0 = 1, \eta_1 = 1, \lambda = 100$) pour le fluide Oldroyd-B. Le mouvement du fluide viscoélastique est entraîné par

une vitesse imposée sur le plan d'entrée ainsi que la tension viscoélastique T_{xx} imposé sur le plan d'entrée. Le nombre de Reynolds est 25.

Les champs des pressions et vitesses du fluide viscoélastique sont représentés comme suit (figure 10.3) :

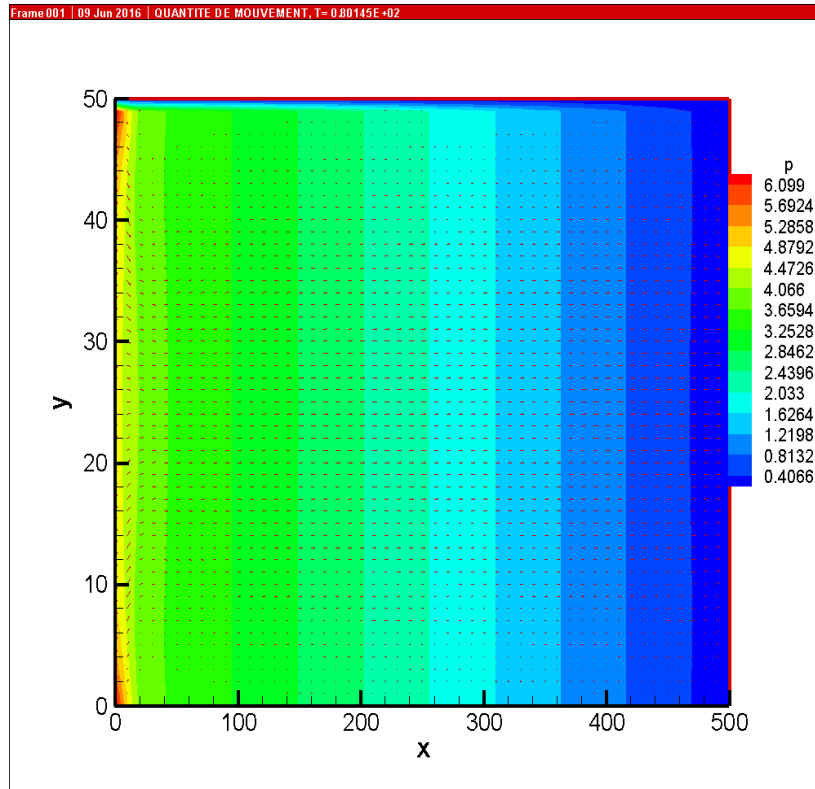


FIGURE 10.3 – Champs des pressions et vitesses d'écoulement du fluide viscoélastique entre deux plaques à $t = 80$

A l'instant $t = 80$, on illustre le profil de vitesse au 10 nœuds de l'axe x en fonction des coordonnées de l'axe y (figure 10.4). L'extrême du profil de vitesse dépasse la valeur $\frac{3}{2}$ dans ce cas. On voit sur le profil de vitesse l'influence des effets viscoélastiques.

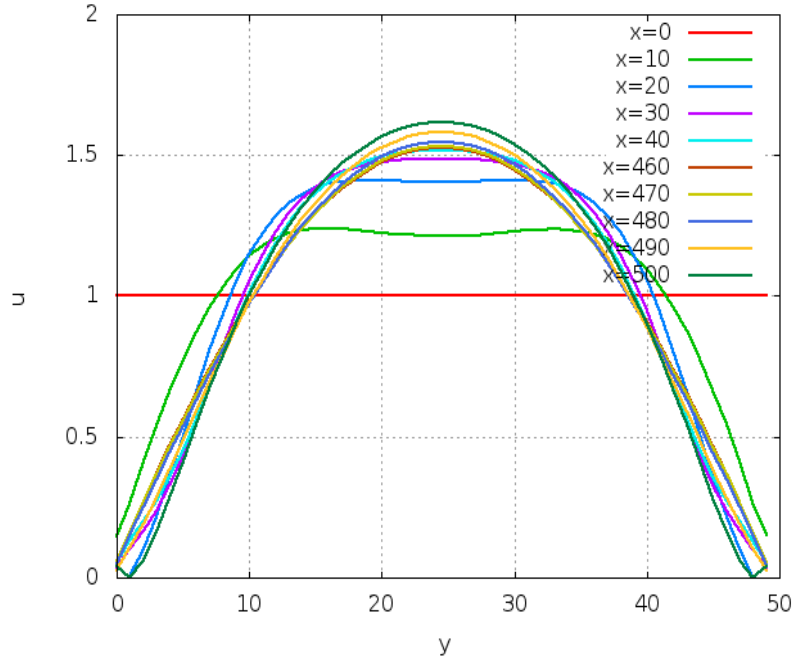


FIGURE 10.4 – Profil de vitesse d’écoulement du fluide viscoélastique entre deux plaques à $t = 80$

10.3 Cas test de l’équation de transport

Afin de valider notre solveur de l’équation de transport (9.25) basé sur méthode Hirt-VOF ou PLIC-VOF, nous étudions un cas test présenté dans BRUCHON (2004) et inspiré par VINCENT et CALTAGIRONE (1998). Il s’agit d’effectuer la rotation complète d’un cercle autour d’un axe à partir d’un champ de vitesse fixe dans une cavité carré en 2 dimensions. La figure (10.5) montre le champ de vitesse fixe pour faire le transport par convection le cercle dans le carré de dimension (1×1) avec les valeurs suivantes en fonction des coordonnées (x, y) des nœuds du maillage :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2}(y - \frac{1}{2}) \\ \frac{\pi}{2}(x - \frac{1}{2}) \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

Initialement, nous définissons une géométrie circulaire avec un rayon de 0.1 centré sur le point $(0.7, 0.5)$. L’intérieur de ce cercle définit un sous domaine qui va être transporté tout autour du point central de la cavité $(0.5, 0.5)$ avec le champ de vitesse (10.2), jusqu’à ce qu’il revienne à sa place initiale $(0.7, 0.5)$.

Les résultats de la simulation de ce cas test sont montrés dans les figures (10.6) et (10.7) : on peut y voir les valeurs de fonction couleur du sous domaine qui nous intéresse. Initialement, à $t = 0$, elle vaut 1 dans le cercle, 0 à l’extérieur, et entre les deux sur les éléments traversés par l’interface. Ensuite, cette fonction couleur est présentée aux temps $t = 1, t = 2, t = 3$ et $t = 4$ de la rotation.

Nous constatons que le transport du cercle est correctement réalisé, car non seulement il revient exactement à sa place initiale à $t = 4$, mais aussi, son volume est parfaitement conservé. Celle-ci est donc bien représentée, dépend de la taille des éléments et de la méthode à choisir. Plus la taille de maille est petite, plus l’interface est bien représentée. Ici le nombre des mailles est (500×500) . Par conséquent, la méthode PLIC-VOF

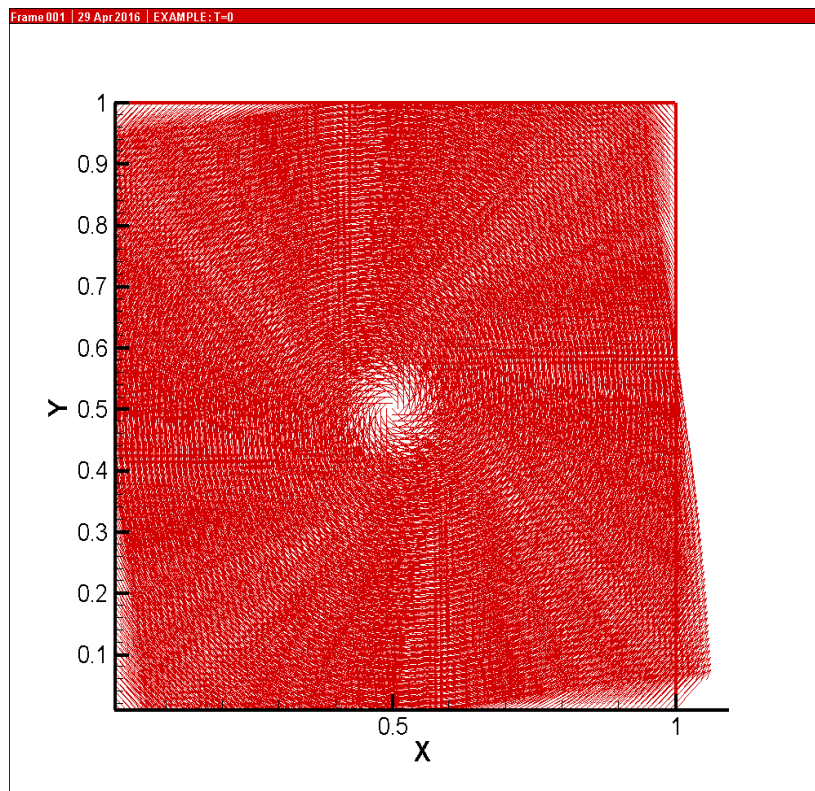


FIGURE 10.5 – Champ de vitesse fixe

garde plus de précision numérique que la méthode Hirt-VOF, la forme initiale parfaitement circulaire du sous domaine est mieux conservé, il permet de limiter le phénomène de diffusion non souhaitable.

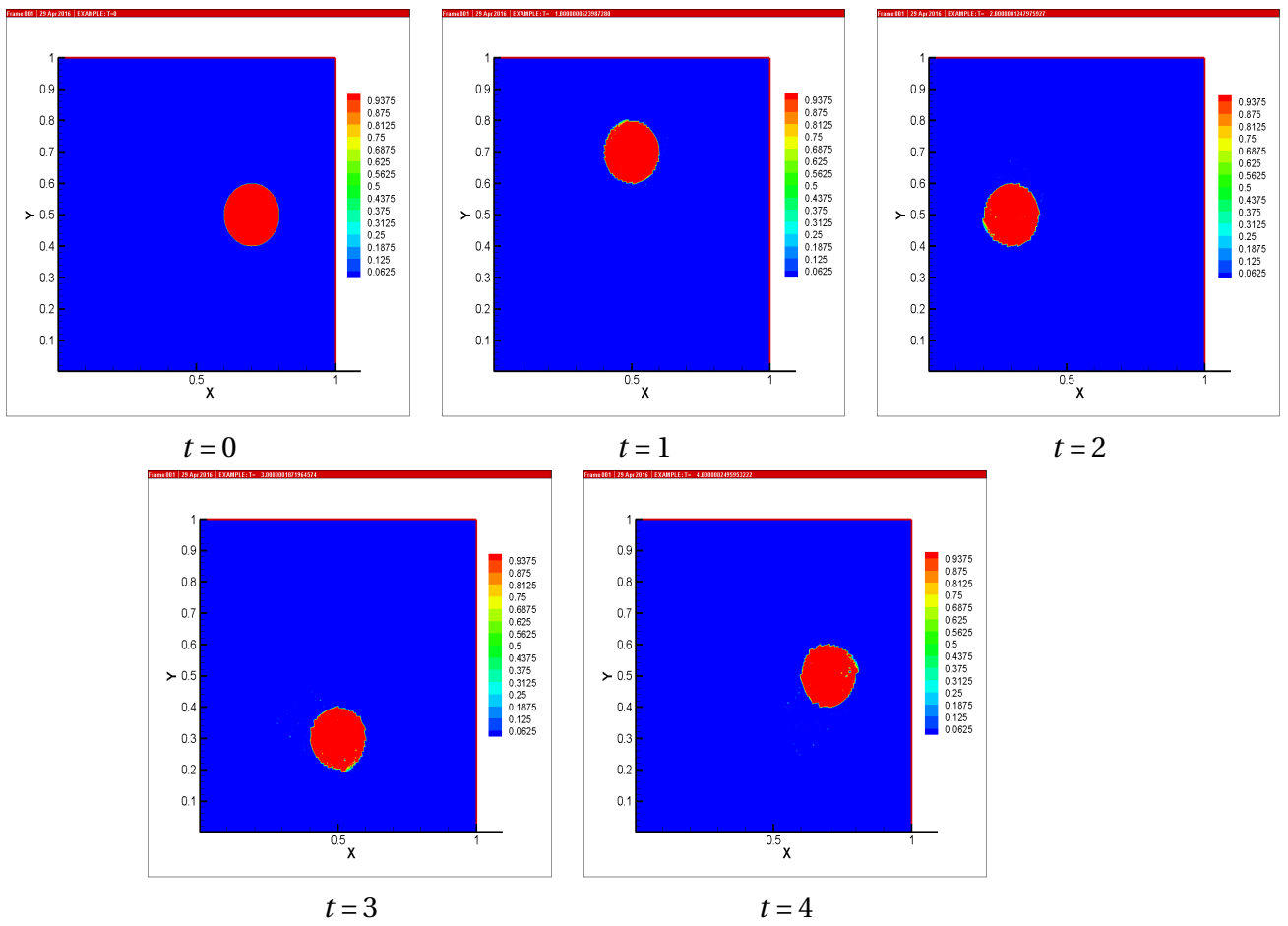


FIGURE 10.6 – Rotation sans adaptation de maillage avec Hirt-VOF

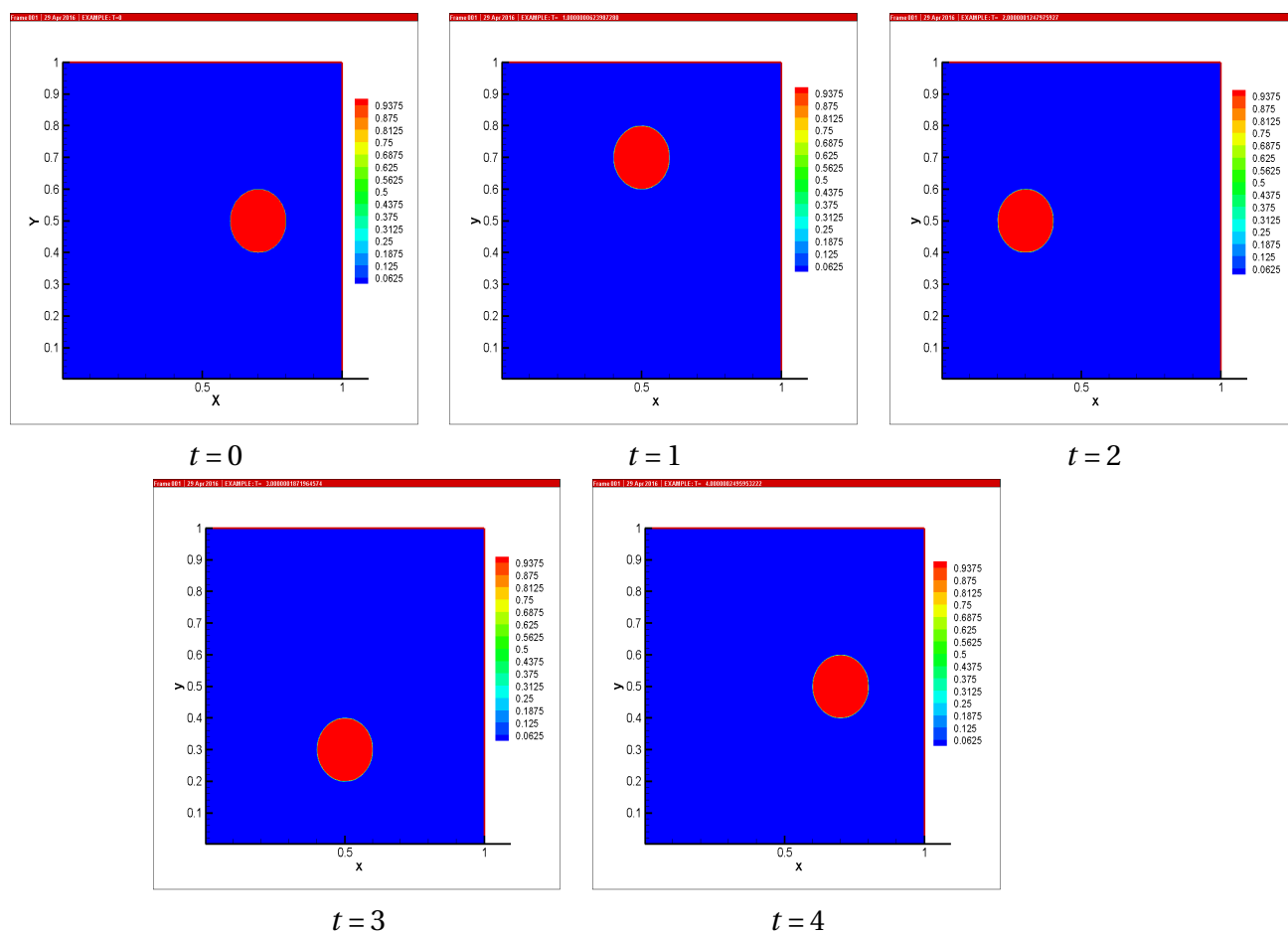


FIGURE 10.7 – Rotation sans adaptation de maillage avec PLIC-VOF

10.4 Écoulement diphasique (gaz/liquide)

En utilisant les méthodes Hirt-VOF et PLIC-VOF, on élabore un code de la simulation numérique pour un écoulement de deux fluides (gaz/liquide).

De même configuration précédente, on choisit les paramètres physiques ($\rho_l = 1, \eta_{0l} = 1$) pour la phase liquide, ($\rho_g = 0.001, \eta_{0g} = 0.01$) pour la phase gazeuse. Initialement, l'interface est située à la moitié du domaine. On simule les mouvements de deux fluides entraîné par une vitesse imposée sur le plan d'entrée. Les nombres de Reynolds pour liquide et gaz sont 50 et 5 respectivement.

A l'instant $t = 80$, on illustre le profil de vitesse au 10 nœuds de l'axe x en fonction des coordonnées de l'axe y (figure 10.8).

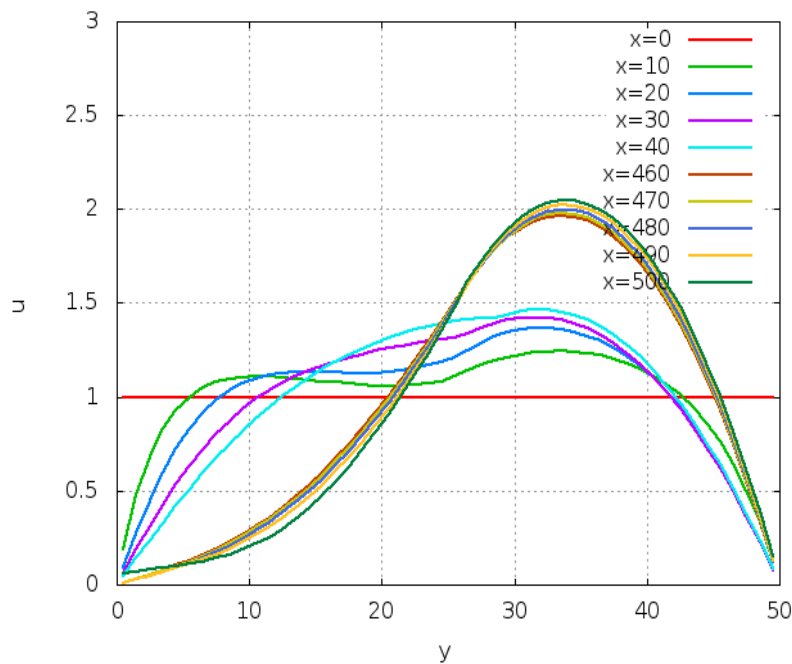


FIGURE 10.8 – Profil de vitesse d'écoulement de deux fluides (gaz/liquide) entre deux plaques à $t = 80$

Avec l'évolution du champ de vitesse, on voit que les changements du profil de l'interface entre les deux phases fluides (gaz/liquide). A l'instant $t = 80$, on illustre les tracés de fonction C par deux méthodes. Sur cette figure (10.9), on voit que PLIC-VOF conserve la forme de l'interface mieux que Hirt-VOF à cause de la méthode utilisée des reconstructions des interfaces.

Par la suite, on applique PLIC-VOF, les contours plots de la fonction couleur C et champ de vitesse sont illustrés aux instants $t = 0, t = 0.5, t = 3, t = 10, t = 30, t = 50, t = 80, t = 100, t = 200, t = 300, t = 500, t = 1000$ (voir figure 10.10), qui indique au cours du temps la position du liquide par rapport au gaz. Ils sont utilisés comme traceur des deux phases fluides (gaz/liquide).

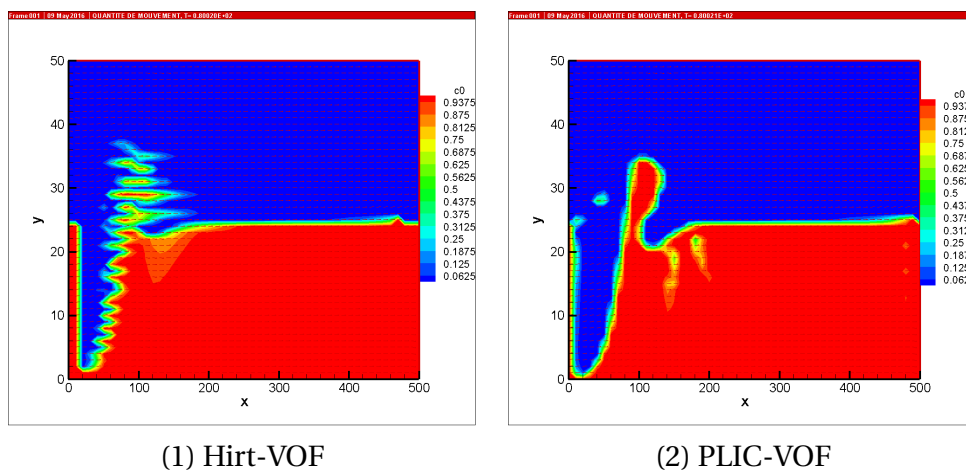


FIGURE 10.9 – Les tracés de fonction C d'écoulement de deux fluides avec Hirt-VOF et PLIC-VOF à $t = 80$

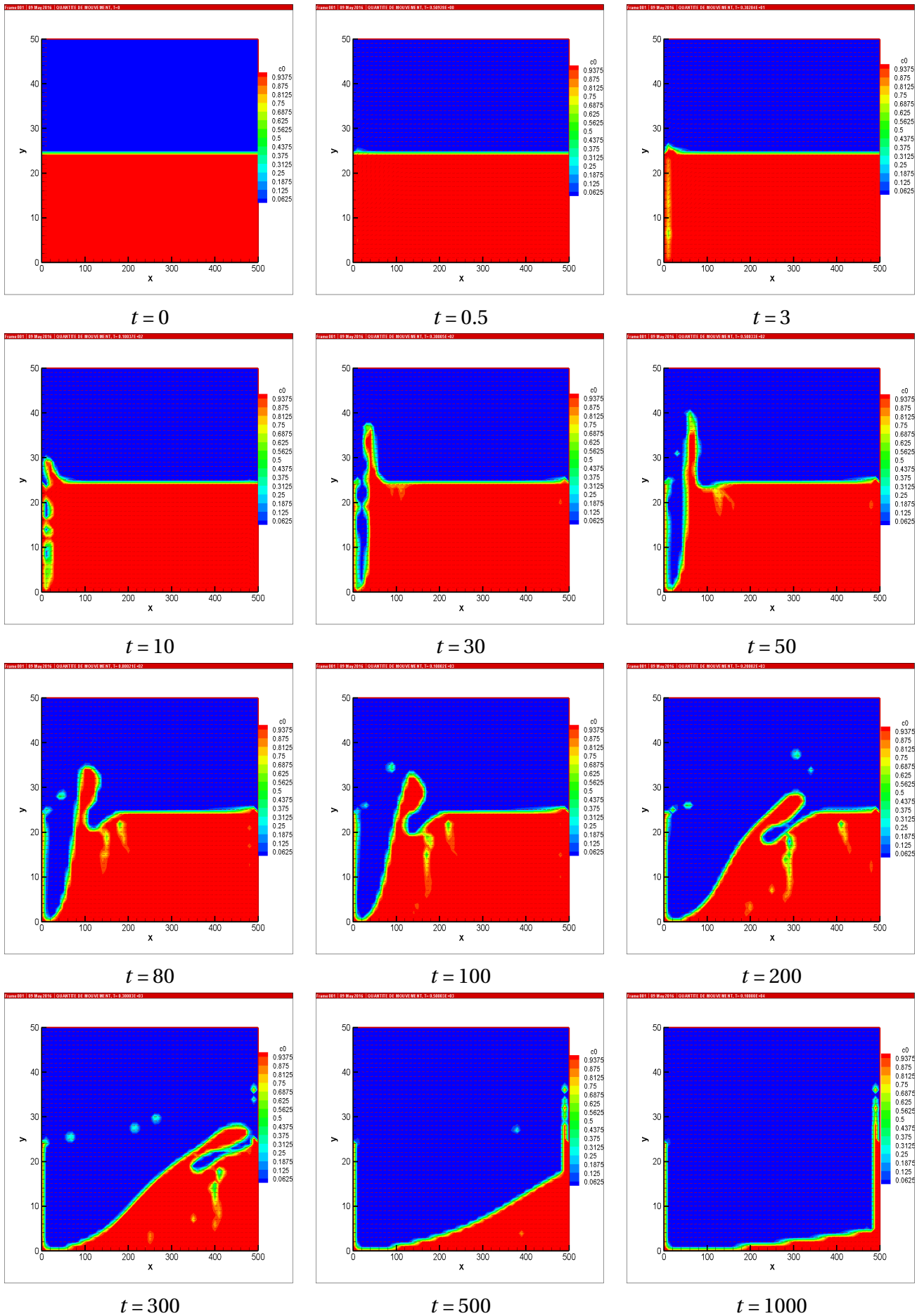


FIGURE 10.10 – Évolution de l'interface d'écoulement de deux fluides (gaz/liquide) à plusieurs instants

10.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté et validé la méthode de résolution du problème de Navier-Stokes incompressible basée sur les volumes finis pour un écoulement monophasique confiné entre les deux plaques planes.

La technique VOF est considérée ici à la place de la discrétisation directe. Les validations numériques réalisées au travers du cas test du cercle qui est transporté dans une cavité permet de simuler efficacement l'équation de transport de la fonction VOF. Le grand point fort de la méthode VOF est sa très bonne conservation de la masse puisqu'elle est précisément basée sur ce principe.

La fonction couleur $0 < C < 1$ représente le traceur de l'interface d'écoulement de deux fluides. Le modèle VOF que nous avons implémenté dans ce code est réalisé.

On a présenté une configuration (gaz/liquide) pour un écoulement diphasique stratifié confiné entre les deux parois horizontales, et entraîné par une vitesse imposée sur le plan d'entrée (figure 10.8). Sur la figure, l'écoulement est au repos à l'instant $t = 0$, la région bleu désigne gaz, la région rouge désigne liquide, la région vert désigne l'interface entre les deux. Avec l'augmentation du temps, le champs de vitesse évolue, l'interface est cisailé par le champs de vitesse, l'écoulement devient de plus en plus instable. Ce phénomène est raisonnable.

Chapitre 11

Conclusions générales et perspectives

L'ensemble des travaux présenté dans cette thèse s'articule autour de deux thèmes. Il s'agit, d'une manière générale, de problèmes inhérents à la génération d'ondes de gravité, soit à la surface libre d'un film liquide mince, non-newtonien, dévalant une paroi plane et inclinée, par voie analytique et numérique, soit à l'interface de deux fluides non miscibles newtonien en régime stratifié instationnaire entre deux plans parallèles et inclinés également, abordée par la simulation numérique (méthode volumes finis et VOF).

Le premier thème a été abordé dans le cadre de la théorie des ondes longues, où nous avons mis en évidence les conditions nécessaires d'existence d'ondes périodiques avec discontinuités (ODP), appelées ondes à rouleaux, se propageant à la surface libre d'un film liquide non-newtonien. La loi de frottement adoptée est un schéma en loi de puissance. Ce type d'écoulement est régi par un système d'équations non homogène hyperbolique. Le critère de stabilité non-linéaire est formulé en termes d'hyperbolicité des équations modulées pour des trains d'ondes périodiques à rouleaux. On a établi à l'aide d'une méthode d'analyse non linéaire (modulation d'équations pour des solutions périodiques lentement variables), un critère de stabilité quasi-stationnaire (A. BOUDLAL et LIAPIDEVSKI, 2012), (A. BOUDLAL, 2008). La difficulté principale pour localiser les régions stables du domaine d'existence de ces ondes est due aux singularités qui se présentent aux frontières d'hyperbolicité (faibles et maximales amplitudes). Pour lever ces singularités, des formules asymptotiques ont été obtenues. Pour illustrer ces résultats, un calcul numérique, élaboré à l'aide des formules asymptotique au voisinages des singularités, a permis de présenter des diagrammes de stabilité pour quelques valeurs significatives des paramètres de l'écoulement (ZHU et collab., 2013), (ZHU et collab., 2014).

Le but initial du deuxième thème est de mettre en évidence par la simulation numérique des configurations d'ODP à l'interface entre les deux fluides. Pour ce faire, nous avons adopté un code bidimensionnel, de type volumes finis existant, initialement destiné à traiter un écoulement monophasique du fluide viscoélastique, confiné entre deux parois planes et horizontales, par l'implémentation du modèle de la méthode " Volume Of Fluid " (VOF). Pour cela, nous en avons testé et comparé les deux méthodes : Hirt-VOF et PLIC-VOF sur l'équation de transport de la fonction VOF. Par la suite nous avons implémenté les deux méthodes pour gérer l'interface entre les deux fluides, le transport de l'interface étant résolu par l'équation de transport de VOF. Le résultat de la simulation numérique pour la configuration (gaz/ liquide) stratifié a été présenté. Cependant, la simulation numérique de la configuration d'ondes à rouleaux n'a pas été achevée. Comme

perspective de recherche cette étude pourrait être étendue aux ODP, dans le cas newtonien, mais également le cas des fluides viscoélastiques.

Annexe A

Annexes

A.1 Exemple de calcul pour les champs de pression et vitesses

Étant donnée qu'une maille géométrique 4×4 , la résolution est montrée ici (figures A.1, A.2) :

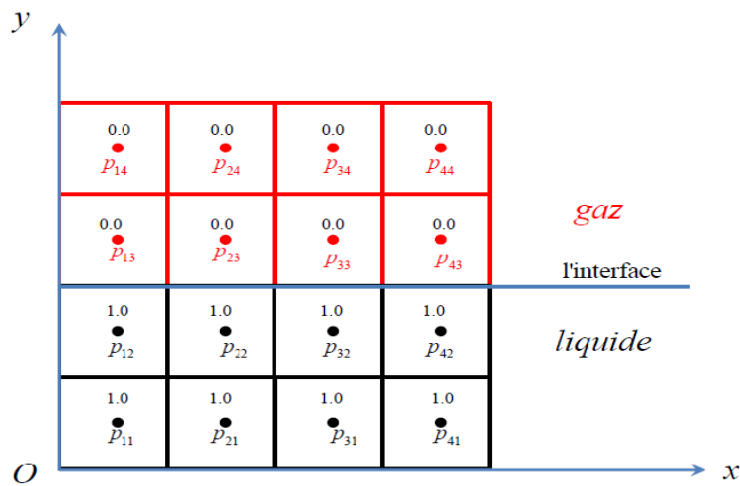


FIGURE A.1 – Champ de pression avec des mailles géométriques 4×4

La matrice de pression à l'instant n s'écrit comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} -D1 & AE & 0 & 0 & AN & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ AW & -D2 & AE & 0 & 0 & AN & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & AW & -D3 & AE & 0 & 0 & AN & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & AW & -D4 & 0 & 0 & 0 & AN & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ AS & 0 & 0 & 0 & -D5 & AE & 0 & 0 & AN & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & AS & 0 & 0 & AW & -D6 & AE & 0 & 0 & AN & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & AS & 0 & 0 & AW & -D7 & AE & 0 & 0 & AN & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & AS & 0 & 0 & AW & -D8 & 0 & 0 & 0 & AN & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & AS & 0 & 0 & 0 & -D9 & AE & 0 & 0 & AN & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AS & 0 & 0 & AW & -D10 & AE & 0 & 0 & AN & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AS & 0 & 0 & AW & -D11 & AE & 0 & 0 & AN & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AS & 0 & 0 & AW & -D12 & 0 & 0 & 0 & AN \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AS & 0 & 0 & 0 & -D13 & AE & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AS & 0 & 0 & AW & -D14 & AE & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AS & 0 & 0 & 0 & AW & -D15 & AE \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & AS & 0 & 0 & 0 & AW & -D16 \end{pmatrix}$$

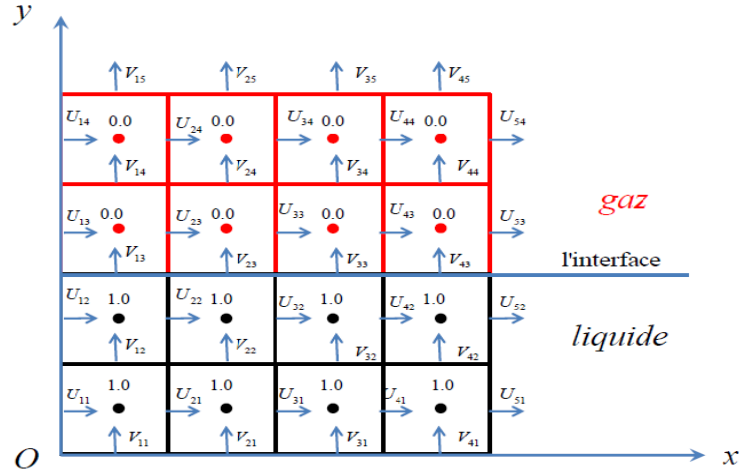


FIGURE A.2 – Champ des vitesses avec des mailles géométriques 4 × 4

Le seconde membre à l'instant n s'écrit comme suit :

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \text{SP}_1 \\ \text{SP}_2 \\ \text{SP}_3 \\ \text{SP}_4 \\ \text{SP}_5 \\ \text{SP}_6 \\ \text{SP}_7 \\ \text{SP}_8 \\ \text{SP}_9 \\ \text{SP}_{10} \\ \text{SP}_{11} \\ \text{SP}_{12} \\ \text{SP}_{13} \\ \text{SP}_{14} \\ \text{SP}_{15} \\ \text{SP}_{16} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (\text{SU}_{21}^n - \text{SU}_{11}^n) dy(1) + (\text{SV}_{12}^n - \text{SV}_{11}^n) dx(1) \\ (\text{SU}_{31}^n - \text{SU}_{21}^n) dy(1) + (\text{SV}_{22}^n - \text{SV}_{21}^n) dx(2) \\ (\text{SU}_{41}^n - \text{SU}_{31}^n) dy(1) + (\text{SV}_{32}^n - \text{SV}_{31}^n) dx(3) \\ (\text{SU}_{51}^n - \text{SU}_{41}^n) dy(1) + (\text{SV}_{42}^n - \text{SV}_{41}^n) dx(4) \\ (\text{SU}_{22}^n - \text{SU}_{12}^n) dy(2) + (\text{SV}_{13}^n - \text{SV}_{12}^n) dx(1) \\ (\text{SU}_{32}^n - \text{SU}_{22}^n) dy(2) + (\text{SV}_{23}^n - \text{SV}_{22}^n) dx(2) \\ (\text{SU}_{42}^n - \text{SU}_{32}^n) dy(2) + (\text{SV}_{33}^n - \text{SV}_{32}^n) dx(3) \\ (\text{SU}_{52}^n - \text{SU}_{42}^n) dy(2) + (\text{SV}_{43}^n - \text{SV}_{42}^n) dx(4) \\ (\text{SU}_{23}^n - \text{SU}_{13}^n) dy(3) + (\text{SV}_{14}^n - \text{SV}_{13}^n) dx(1) \\ (\text{SU}_{33}^n - \text{SU}_{23}^n) dy(3) + (\text{SV}_{24}^n - \text{SV}_{23}^n) dx(2) \\ (\text{SU}_{43}^n - \text{SU}_{33}^n) dy(3) + (\text{SV}_{34}^n - \text{SV}_{33}^n) dx(3) \\ (\text{SU}_{53}^n - \text{SU}_{43}^n) dy(3) + (\text{SV}_{44}^n - \text{SV}_{43}^n) dx(4) \\ (\text{SU}_{24}^n - \text{SU}_{14}^n) dy(4) + (\text{SV}_{15}^n - \text{SV}_{14}^n) dx(1) \\ (\text{SU}_{34}^n - \text{SU}_{24}^n) dy(4) + (\text{SV}_{25}^n - \text{SV}_{24}^n) dx(2) \\ (\text{SU}_{44}^n - \text{SU}_{34}^n) dy(4) + (\text{SV}_{35}^n - \text{SV}_{34}^n) dx(3) \\ (\text{SU}_{54}^n - \text{SU}_{44}^n) dy(4) + (\text{SV}_{45}^n - \text{SV}_{44}^n) dx(4) \end{pmatrix}$$

Conditions limites sont :

- La vitesse ou pression imposée à gauche (l'entrée de l'écoulement) est donnée dans $\text{SU}_{11}, \text{SU}_{12}, \text{SU}_{13}, \text{SU}_{14}$.
- La vitesse ou pression imposée à droite (la sortie de l'écoulement) est donnée dans $\text{SU}_{51}, \text{SU}_{52}, \text{SU}_{53}, \text{SU}_{54}$.
- La vitesse nulle imposée à sud (la paroi en bas) est donnée dans $\text{SV}_{11}, \text{SV}_{21}, \text{SV}_{31}, \text{SV}_{41}$.
- La vitesse nulle imposée à nord (la paroi en haut) est donnée dans $\text{SV}_{15}, \text{SV}_{25}, \text{SV}_{35}, \text{SV}_{45}$.

A.2 Fortran 90 code à résoudre l'équation de transport avec Hirt-VOF

```

1  subroutine hirt (Ix ,Iy ,nx,ny ,x ,y ,ddx ,ddy ,dt ,emikro ,yi ,xi ,ihv ,u ,v ,c0 ,c1)
2  !   main program
3  !   solve fluid volume function equation using Hirt&Nichols' method
4  implicit none
5  !
6  ! DECLARATIONS DES ARGUMENTS
7  !
8  integer ,                intent (in)      :: Ix ,Iy ,nx,ny
9  double precision ,      intent (in)      :: ddx,ddy ,dt
10 integer ,                intent (in)      :: emikro
11 double precision , dimension (Ix) ,      intent (in)      :: x
12 double precision , dimension (Iy) ,      intent (in)      :: y
13 double precision , dimension (Ix ,Iy) ,  intent (inout)   :: yi ,xi
14 integer ,                dimension (Ix ,Iy) , intent (inout)   :: ihv
15 double precision , dimension (Ix ,Iy) ,  intent (in)      :: u ,v
16 double precision , dimension (Ix ,Iy) ,  intent (inout)   :: c0 ,c1
17
18
19 !
20 ! VARIABLES LOCALES
21 !
22 integer                :: i ,j
23 integer                :: id ,ia ,iad ,jd ,ja ,jad
24 double precision      :: dv ,sl1 ,sl2 ,cf ,df
25
26 !   Solving ...
27
28 do i=1,nx
29   do j=1,ny
30     c1 (i ,j)=c0 (i ,j)
31   enddo
32 enddo
33
34 do i=2,nx-1
35   do j=2,ny-1
36     yi (i ,j)=(c0 (i ,j-1)+c0 (i ,j)+c0 (i ,j+1))*ddy
37     xi (i ,j)=(c0 (i-1 ,j)+c0 (i ,j)+c0 (i+1 ,j))*ddx
38   enddo
39 enddo
40
41 do i=3,nx-2
42   do j=3,ny-2
43     sl1=abs (2.0*(yi (i+1 ,j)-yi (i-1 ,j)))/(4.0*ddx)
44     sl2=abs (2.0*(xi (i ,j+1)-xi (i ,j-1)))/(4.0*ddy)
45     if (sl1 .le. sl2) then
46       ihv (i ,j)=0   !horizontal
47     else
48       ihv (i ,j)=1   !vertical
49     endif
50   enddo
51 enddo
52
53
54
55 do i=3,nx-3

```

```

56         do j=3,ny-3
57     !     X-direction
58         dv=abs(u(i,j)*dt)
59         if(u(i,j).ge.0) then
60             id=i
61             ia=i+1
62         else
63             id=i+1
64             ia=i
65         endif
66         if(ihv(id,j).eq.1) then
67             iad=ia
68         else
69             iad=id
70         endif
71         if(c0(ia,j).lt.emikro) iad=id
72         cf=max((1.0-c0(iad,j))*dv-(1.0-c0(id,j))*ddx,0.0)
73         df=min(c0(iad,j)*dv+cf,c0(id,j)*ddx)
74         c1(id,j)=c1(id,j)-df/ddx
75         c1(ia,j)=c1(ia,j)+df/ddx
76     !     y-direction
77         dv=abs(v(i,j)*dt)
78         if(v(i,j).ge.0) then
79             jd=j
80             ja=j+1
81         else
82             jd=j+1
83             ja=j
84         endif
85         if(ihv(i,jd).eq.1) then
86             jad=jd
87         else
88             jad=ja
89         endif
90         if(c0(i,ja).lt.emikro) jad=jd
91         cf=max((1.0-c0(i,jad))*dv-(1.0-c0(i,jd))*ddy,0.0)
92         df=min(c0(i,jad)*dv+cf,c0(i,jd)*ddy)
93         c1(i,jd)=c1(i,jd)-df/ddy
94         c1(i,ja)=c1(i,ja)+df/ddy
95     enddo
96 enddo
97
98     do i=1,nx
99         do j=1,ny
100             if(c1(i,j).lt.emikro) then
101                 c1(i,j)=0
102                 if(c1(i-1,j).ge.1.0) c1(i-1,j)=c1(i-1,j)-1.1*emikro
103                 if(c1(i+1,j).ge.1.0) c1(i+1,j)=c1(i+1,j)-1.1*emikro
104                 if(c1(i,j-1).ge.1.0) c1(i,j-1)=c1(i,j-1)-1.1*emikro
105                 if(c1(i,j+1).ge.1.0) c1(i,j+1)=c1(i,j+1)-1.1*emikro
106             endif
107             c0(i,j)=min(1.0,max(c1(i,j),0.0))
108         enddo
109     enddo
110
111
112 !     the calculation is completed.
113 write(20,*) 'TITLE_='_'EXAMPLE:_2D_GEOMETRIES'_'
114 write(20,*) 'VARIABLES_='_'I ','J ','c0'_'

```

```

115     write(20,*) 'ZONE_T="Floor" ,_I= ',Ix, '_J= ',Iy, '_F=POINT_'
116
117     do i=1,Ix
118         do j=1,Iy
119             write(20,102) i,j,c0(i,j)
120         enddo
121     enddo
122
123     ! 102 format(1x,e20.10,e20.10,e20.10)
124     102 format(1x,i10,i10,f20.5)
125
126 end subroutine hirt

```

A.3 Fortran 90 code à résoudre l'équation de transport avec PLIC-VOF

```

1  subroutine young(Ix, Iy, nx, ny, ddx, ddy, dt, emikro, u, v, x, y, c0, c1)
2  ! program main
3  ! solve fluid volume function equation using Young's VOF method
4  implicit none
5
6  !
7  ! DECLARATIONS DES ARGUMENTS
8  !
9  integer , intent(in) :: Ix, Iy, nx, ny
10 double precision , intent(in) :: ddx, ddy, dt
11 integer , intent(in) :: emikro
12 double precision , dimension(Ix) , intent(in) :: x
13 double precision , dimension(Iy) , intent(in) :: y
14 double precision , dimension(Ix, Iy) , intent(in) :: u, v
15 double precision , dimension(Ix, Iy) , intent(inout) :: c0, c1
16
17
18 !
19 ! VARIABLES LOCALES
20 !
21 integer :: i, j
22 integer :: itype
23 double precision :: ft, fb, fl, fr, c, ut, ub, ul, ur, rnx, rny, emk2, u1, u2, u3,
24 u4, &
25 f1, f2, f3, f4, tanbeta, cotbeta, tanalfa, cotalfa, rnx1,
26 rny1
27
28 emk2=0
29
30
31 do i=1,nx
32     do j=1,ny
33         c1(i,j)=c0(i,j)
34     enddo
35 enddo
36
37 do i=2,nx-1
38     do j=2,ny-1

```

```

39      ft=0          ! flow
40      fb=0
41      fl=0
42      fr=0
43      c=c0(i,j)
44      ut=v(i,j)    ! t=tall
45      ub=v(i,j-1) ! b=bottom
46      ul=u(i-1,j) ! l=left
47      ur=u(i,j)   ! r=right
48      if(c.ge.1.0-emikro) then
49          if(ut.gt.0) then
50              ft=ut*dt*ddx*c
51          endif
52          if(ub.lt.0) then
53              fb=abs(ub)*dt*ddx*c
54          endif
55          if(ul.lt.0) then
56              fl=abs(ul)*dt*ddy*c
57          endif
58          if(ur.gt.0) then
59              fr=ur*dt*ddy*c
60          endif
61      else if(c.gt.0) then
62          rnx=(c0(i+1,j+1)+2.0*c0(i+1,j)+c0(i+1,j-1)      &
63              -c0(i-1,j+1)-2.0*c0(i-1,j)-c0(i-1,j-1))/ddx
64          rny=(c0(i+1,j+1)+2.0*c0(i,j+1)+c0(i-1,j+1)      &
65              -c0(i+1,j-1)-2.0*c0(i,j-1)-c0(i-1,j-1))/ddy
66          if(abs(rny).le.emk2) then
67              if(rnx.ge.0) then
68                  u1=ut
69                  u2=ur
70                  u3=ub
71                  u4=ul
72              else
73                  u1=ut
74                  u2=-ul
75                  u3=ub
76                  u4=-ur
77              endif
78              f1=0
79              f2=0
80              f3=0
81              f4=0
82              if(u1.gt.0) then
83                  f1=abs(u1)*dt*c*ddx
84              endif
85              if(u3.lt.0) then
86                  f3=abs(u3)*dt*c*ddx
87              endif
88              if(u2.gt.0) then
89                  if(abs(u2)*dt.le.c*ddx) then
90                      f2=abs(u2)*dt*ddy
91                  else
92                      f2=c*ddx*ddy
93                  endif
94              endif
95              if(u4.lt.0) then
96                  if(abs(u4)*dt.le.(1.0-c)*ddx) then
97                      f4=0

```



```

98         else
99             f4=(abs(u4)*dt-(1.0-c)*ddx)*ddy
100         endif
101     endif
102     if (rnx.ge.0) then
103         ft=f1
104         fb=f3
105         fr=f2
106         fl=f4
107     else
108         ft=f1
109         fb=f3
110         fr=f4
111         fl=f2
112     endif
113     else if (abs(rnx).le.emk2) then
114         if (rny.ge.0) then
115             u1=ut
116             u2=ur
117             u3=ub
118             u4=ul
119         else
120             u1=-ub
121             u2=ur
122             u3=-ut
123             u4=ul
124         endif
125         f1=0
126         f2=0
127         f3=0
128         f4=0
129         if (u1.gt.0) then
130             if (u1*dt.le.c*ddy) then
131                 f1=u1*dt*ddx
132             else
133                 f1=c*ddx*ddy
134             endif
135         endif
136         if (u3.lt.0) then
137             if (abs(u3)*dt.le.(1.0-c)*ddy) then
138                 f3=0
139             else
140                 f3=(abs(u3)*dt-(1.0-c)*ddy)*ddx
141             endif
142         endif
143         if (u2.gt.0) then
144             f2=u2*dt*c*ddy
145         endif
146         if (u4.lt.0) then
147             f4=abs(u4)*dt*c*ddy
148         endif
149         if (rny.ge.0) then
150             ft=f1
151             fb=f3
152             fr=f2
153             fl=f4
154         else
155             ft=f3
156             fb=f1

```

```

157         fr=f2
158         fl=f4
159     endif
160 else
161     if (rn timer .gt .0 .and . rny timer .lt .0) then
162         u1=ut
163         u2=ur
164         u3=ub
165         u4=ul
166     else if (rn timer .lt .0 .and . rny timer .gt .0) then
167         u1=-ub
168         u2=-ul
169         u3=-ut
170         u4=-ur
171     else if (rn timer .lt .0 .and . rny timer .lt .0) then
172         u1=ut
173         u2=-ul
174         u3=ub
175         u4=-ur
176     else
177         u1=-ub
178         u2=ur
179         u3=-ut
180         u4=ul
181     endif
182     rnx1=abs(rnx)
183     rny1=-abs(rny)
184     tanbeta=-rnx1/rny1
185     cotbeta=1.0/tanbeta
186     tanalfa=ddx/ddy*tanbeta
187     cotalfa=1.0/tanalfa
188     if (tanalfa .le .1.0) then
189         if (c .le .0.5*tanalfa) then
190             itype=1
191         else if (c .le .1.0-0.5*tanalfa) then
192             itype=2
193         else
194             itype=4
195         endif
196     else
197         if (c .le .0.5*cotalfa) then
198             itype=1
199         else if (c .le .1.0-0.5*cotalfa) then
200             itype=3
201         else
202             itype=4
203         endif
204     endif
205     call transport(c, itype, tanalfa, tanbeta, u1, u3, u4, u2, &
206                 ddx, ddy, dt, f1, f3, f4, f2)
207     if (rn timer .gt .0 .and . rny timer .lt .0) then
208         ft=f1
209         fb=f3
210         fl=f4
211         fr=f2
212     else if (rn timer .lt .0 .and . rny timer .gt .0) then
213         ft=f3
214         fb=f1
215         fl=f2

```

```

216         fr=f4
217         else if (rnx.lt.0.and.rny.lt.0) then
218             ft=f1
219             fb=f3
220             fl=f2
221             fr=f4
222         else
223             ft=f3
224             fb=f1
225             fl=f4
226             fr=f2
227         endif
228     endif
229 endif
230 c1(i,j+1)=c1(i,j+1)+ft/ddx/ddy
231 c1(i,j-1)=c1(i,j-1)+fb/ddx/ddy
232 c1(i+1,j)=c1(i+1,j)+fr/ddx/ddy
233 c1(i-1,j)=c1(i-1,j)+fl/ddx/ddy
234 c1(i,j)=c1(i,j)-(ft+fb+fl+fr)/ddx/ddy
235 enddo
236 enddo
237 do i=1,nx
238     do j=1,ny
239         c0(i,j)=max(min(c1(i,j),1.0),0.0)
240     enddo
241 enddo
242
243
244
245 end subroutine young
246
247
248
249 ! calculate the transportation from neighbour cell
250 subroutine transport(c, itype, tanalfa, tanbeta, u1, u3, u4, u2, &
251                    ddx, ddy, dt, f1, f3, f4, f2)
252
253
254 implicit none
255
256 !
257 ! DECLARATIONS DES ARGUMENTS
258 !
259 integer, intent(in) :: itype
260 double precision, intent(in) :: c, ddx, ddy, dt
261 double precision, intent(inout) :: f1, f2, f3, f4
262 double precision, intent(inout) :: u1, u2, u3, u4, tanalfa,
    tanbeta
263
264 !
265 ! VARIABLES LOCALES
266 !
267 double precision :: s1, s2, s3, s4, cotalfa, cotbeta, templ
268
269
270 cotalfa=1.0/tanalfa
271 cotbeta=1.0/tanbeta
272
273 f1=0

```

```

274     f3=0
275     f4=0
276     f2=0
277     if (itype.eq.1) then
278         s1=0
279         s3=sqrt(2.0*c*cotalfa)
280         s4=0
281         s2=sqrt(2.0*c*tanalfa)
282         if (u1.gt.0) then
283             if (u1*dt.le.(1.0-s2)*ddy) then
284                 f1=0
285             else
286                 temp1=u1*dt-(1.0-s2)*ddy
287                 f1=0.5*temp1*temp1*cotbeta
288             endif
289         endif
290         if (u2.gt.0) then
291             if (u2*dt.ge.s3*ddx) then
292                 f2=c*ddx*ddy
293             else
294                 f2=0.5*u2*dt*(2.0-u2*dt/(s3*ddx))*s2*ddy
295             endif
296         endif
297         if (u3.lt.0) then
298             if (abs(u3)*dt.ge.s2*ddy) then
299                 f3=c*ddx*ddy
300             else
301                 f3=0.5*abs(u3)*dt*(2.0-abs(u3)*dt/(s2*ddy))*s3*ddx
302             endif
303         endif
304         if (u4.lt.0) then
305             if (abs(u4)*dt.le.(1.0-s3)*ddx) then
306                 f4=0
307             else
308                 temp1=abs(u4)*dt-(1.0-s3)*ddx
309                 f4=0.5*temp1*temp1*tanbeta
310             endif
311         endif
312     else if (itype.eq.2) then
313         s1=0
314         s3=1.0
315         s4=c-0.5*tanalfa
316         s2=c+0.5*tanalfa
317         if (u1.gt.0) then
318             if (u1*dt.le.(1.0-s2)*ddy) then
319                 f1=0
320             else if (u1*dt.le.(1.0-s4)*ddy) then
321                 temp1=u1*dt-(1.0-s2)*ddy
322                 f1=0.5*temp1*temp1*cotbeta
323             else
324                 f1=u1*dt*ddx-(1.0-c)*ddx*ddy
325             endif
326         endif
327         if (u2.gt.0) then
328             f2=u2*dt*(s2*ddy-0.5*u2*dt*tanbeta)
329         endif
330         if (u3.lt.0) then
331             if (abs(u3)*dt.le.s4*ddy) then
332                 f3=abs(u3)*dt*ddx

```

```

333     else if (abs(u3)*dt.le.s2*ddy) then
334         temp1=abs(u3)*dt-s4*ddy
335         f3=abs(u3)*dt*ddx-0.5*temp1*temp1*cotbeta
336     else
337         f3=c*ddx*ddy
338     endif
339 endif
340 if (u4.lt.0) then
341     f4=abs(u4)*dt*(s4*ddy+0.5*abs(u4)*dt*tanbeta)
342 endif
343 else if (itype.eq.3) then
344     s1=c-0.5*cotalfa
345     s3=c+0.5*cotalfa
346     s4=0
347     s2=1.0
348     if (u1.gt.0) then
349         f1=u1*dt*(s1*ddx+0.5*u1*dt*cotbeta)
350     endif
351     if (u2.gt.0) then
352         if (u2*dt.le.s1*ddx) then
353             f2=u2*dt*ddy
354         else if (u2*dt.le.s3*ddx) then
355             temp1=u2*dt-s1*ddx
356             f2=u2*dt*ddy-0.5*temp1*temp1*tanbeta
357         else
358             f2=c*ddx*ddy
359         endif
360     endif
361     if (u3.lt.0) then
362         f3=abs(u3)*dt*(s3*ddx-0.5*abs(u3)*dt*cotbeta)
363     endif
364     if (u4.lt.0) then
365         if (abs(u4)*dt.le.(1.0-s3)*ddx) then
366             f4=0
367         else if (abs(u4)*dt.le.(1.0-s1)*ddx) then
368             temp1=abs(u4)*dt-(1.0-s3)*ddx
369             f4=0.5*temp1*temp1*tanbeta
370         else
371             f4=abs(u4)*dt*ddy-(1.0-c)*ddx*ddy
372         endif
373     endif
374 else if (itype.eq.4) then
375     s1=1.0-sqrt(2.0*(1.0-c)*cotalfa)
376     s3=1.0
377     s4=1.0-sqrt(2.0*(1.0-c)*tanalfa)
378     s2=1.0
379     if (u1.gt.0) then
380         if (u1*dt.ge.(1.0-s4)*ddy) then
381             f1=u1*dt*ddx-(1.0-c)*ddx*ddy
382         else
383             f1=u1*dt*(s1*ddx+0.5*u1*dt*cotbeta)
384         endif
385     endif
386     if (u2.gt.0) then
387         if (u2*dt.le.s1*ddx) then
388             f2=u2*dt*ddy
389         else
390             temp1=u2*dt-s1*ddx
391             f2=u2*dt*ddy-0.5*tanbeta*temp1*temp1

```

```

392         endif
393     endif
394     if (u3.lt.0) then
395         if (abs(u3)*dt.le.s4*ddy) then
396             f3=abs(u3)*dt*ddx
397         else
398             temp1=abs(u3)*dt-s4*ddy
399             f3=abs(u3)*dt*ddx-0.5*temp1*temp1*cotbeta
400         endif
401     endif
402     if (u4.lt.0) then
403         if (abs(u4)*dt.ge.(1.0-s1)*ddx) then
404             f4=abs(u4)*dt*ddy-(1.0-c)*ddx*ddy
405         else
406             f4=abs(u4)*dt*(s4*ddy+0.5*abs(u4)*dt*tanbeta)
407         endif
408     endif
409 else
410     write(*,*) 'error_in_subroutine_transport'
411     stop
412 endif
413 end subroutine transport

```

A.4 Fortran 90 code à réactualiser les champs des masses volumiques, viscosités, vitesses et matrice de pression

```

1  subroutine VOF(Ix ,Iy ,nx ,ny ,ro1 ,ro2 ,xmu1 ,xmu2 ,c0 ,c0u ,c0v ,ro ,rou ,rov , &
2      xmu ,xmuu ,xmuv ,xnul ,xnulu ,xnulv)
3      !           MISE A JOUR DU CHAMP DE DENSITE ET VISCOSITE           *
4      !           CHAQUE CELLUL DE CONTROLE                           *
5      !           (CENTRE AU PRESSION, VITESSE U, VITESSE V)         *
6      implicit none
7      !
8      ! DECLARATIONS DES ARGUMENTS
9      !
10     integer ,                intent(in)      :: Ix ,Iy ,nx ,ny
11     double precision ,       intent(in)      :: ro1 ,ro2
12     double precision ,       intent(in)      :: xmu1 ,xmu2
13     double precision ,       dimension(Ix ,Iy) , intent(in)      :: c0
14     double precision ,       dimension(Ix ,Iy) , intent(inout)   :: c0u ,c0v
15     double precision ,       dimension(Ix ,Iy) , intent(out)     :: ro ,rou ,rov
16     double precision ,       dimension(Ix ,Iy) , intent(out)     :: xmu ,xmuu ,xmuv
17     double precision ,       dimension(Ix ,Iy) , intent(out)     :: xnul ,xnulu ,xnulv
18     !
19     ! VARIABLES LOCALES
20     !
21
22     integer                :: i ,j
23
24     ! Fonction du volume centree aux vitesse U:
25
26     do j=1,ny
27         do i=2,nx
28             c0u(i ,j)=0.5d0*(c0(i ,j)+c0(i-1 ,j))
29         enddo
30     enddo

```

```

31
32 !frontiere gauche et droite:
33
34     do j=1,ny
35         c0u(1,j) = c0(1,j)
36         c0u(Ix,j)= c0(nx,j)
37     enddo
38
39 !Fonction du volume centree aux vitesse V:
40
41     do i=1,nx
42         do j=2,ny
43             c0v(i,j)=0.5d0*(c0(i,j)+c0(i,j-1))
44         enddo
45     enddo
46
47 !frontiere sud et nord :
48
49     do i=1,nx
50         c0v(i,1) = c0(i,1)
51         c0v(i,Iy)= c0(i,ny)
52     enddo
53
54 !Densite commune centree aux mailles de pression:
55     do j=1,ny
56         do i=1,nx
57             ro(i,j)=c0(i,j)*ro1+(1-c0(i,j))*ro2
58         enddo
59     enddo
60
61 !Densite commune centree aux vitesse U:
62     do j=1,ny
63         do i=1,Ix
64             rou(i,j)=c0u(i,j)*ro1+(1-c0u(i,j))*ro2
65         enddo
66     enddo
67
68
69 !Densite commune centree aux vitesse V:
70     do j=1,Iy
71         do i=1,nx
72             rov(i,j)=c0v(i,j)*ro1+(1-c0v(i,j))*ro2
73         enddo
74     enddo
75
76
77 !Viscosite commune centree aux mailles de pression:
78     do j=1,ny
79         do i=1,nx
80             xmu(i,j)=c0(i,j)*xmu1+(1-c0(i,j))*xmu2
81         enddo
82     enddo
83
84
85 !Viscosite commune centree aux vitesse U:
86     do j=1,ny
87         do i=1,Ix
88             xmuu(i,j)=c0u(i,j)*xmu1+(1-c0u(i,j))*xmu2
89         enddo

```

```

90     enddo
91
92
93     !Viscosite commune centree aux vitesse V:
94     do j=1,Iy
95         do i=1,nx
96             xmuv(i,j)=c0v(i,j)*xmu1+(1-c0v(i,j))*xmu2
97         enddo
98     enddo
99
100
101     !viscosite dynamique
102
103     do j=1,ny
104         do i=1,nx
105             xnul(i,j)=xmu(i,j)/ro(i,j)
106         enddo
107     enddo
108
109
110     do j=1,ny
111         do i=1,Ix
112             xnulu(i,j)=xmuu(i,j)/rou(i,j)
113         enddo
114     enddo
115
116
117     do j=1,Iy
118         do i=1,nx
119             xnulv(i,j)=xmuv(i,j)/rov(i,j)
120         enddo
121     enddo
122
123 end subroutine VOF

```

```

1  subroutine MATRIC(Ix , Iy , nx , ny , ixyl , imatrx , jmatrx , dx , dxp , dy , dyp , lsu , lno , &
2      lga , ldr , a , ndiag , neq , kd , lmax , rou , rov , lvel )
3      !          FORMATION DES COEFFICIENTS DE LA MATRICE DU SYSTEME          *
4
5      implicit none
6      !
7      ! DECLARATIONS DES ARGUMENTS
8      !
9      logical ,                               intent ( in )       :: lvel
10     integer ,                               intent ( in )       :: Ix , Iy , nx ,
11         ny , ixyl
12     integer ,                               intent ( in )       :: imatrx ,
13         jmatrx
14     double precision , dimension ( Ix ) ,    intent ( in )       :: dx , dxp
15     double precision , dimension ( Iy ) ,    intent ( in )       :: dy , dyp
16     integer ,                               dimension ( Ix ) ,    intent ( in )       :: lsu , lno
17     integer ,                               dimension ( Iy ) ,    intent ( in )       :: lga , ldr
18     double precision , dimension ( Ix , Iy ) , intent ( in )       :: rou , rov
19     integer ,                               dimension ( Ix , Iy ) , intent ( inout )    :: lmax
20     integer ,                               dimension ( Ix , Iy ) , intent ( inout )    :: ndiag , neq ,
21         kd
22     double precision , dimension ( imatrx , jmatrx ) , intent ( inout ) :: a
23
24     !
25     ! VARIABLES LOCALES

```



```

22  !
23
24  character(len=1)  :: uplo='L'
25  integer           :: i , j , l , ndiak1 , lban1 , lbank1 , num, nml , info
26  double precision :: ann, ass , aee ,aww
27  !
28  ! ROUTINES EXTERNES
29  !
30  !-----
31
32  !
33  ! DIMENSIONNEMENT OPTIMISE DE LA MATRICE
34  !
35
36  if (Iy >= Ix) then
37
38  !
39  ! CAS IY > IX
40  !
41
42      l = 1
43
44      do j=1,ny
45          do i=1,nx
46              lmax(i , j) = l
47              l = l+1
48          enddo
49      enddo
50
51      neq = l-1
52      ndiag = nx+1
53      kd    = ndiag-1
54      ndiak1 = ndiag-1
55
56  !
57  ! FORMATION DE LA MATRICE DES PRESSIONS
58  !
59
60      do j=1,ny
61          do i=1,nx
62              l = lmax(i , j)
63
64
65              ann = 0.0
66              ass = 0.0
67              aee = 0.0
68              aww = 0.0
69              lban1 = 0
70              lbank1 = 0
71
72              if (j==ny .and. lno(i)/=2 ) goto 30
73
74              ann = -dx(i)/dyp(j+1)/rov(i , j+1)
75              if (j==1 .and. lsu(i)/=2 ) goto 40
76
77          30      ass = -dx(i)/dyp(j)/rov(i , j)
78
79              if (ny==1) ass = 0.0
80              if (j==1 .and. lsu(i)==2) goto 40

```

```

81
82     if (j == 1) then
83         a(kd+1,l-kd) = ass
84     else
85         num = nx
86         nn1 = ndiag-num
87         if (nn1 == kd) lban1 = 1
88         if (nn1 == ndiak1) lbank1 = 1
89         a(1+num,l-num) = ass
90     endif
91
92
93
94 40     if (i==nx .and. ldr(j)/=2) goto 70
95         aee = -dy(j)/dxp(i+1)/rou(i+1,j)
96
97         if (i==1 .and. lga(j)/=2) goto 80
98 70     aww = -dy(j)/dxp(i)/rou(i,j)
99
100        if (nx==1) aww = 0.0
101        if (i==1 .and. lga(j)==2 .or. lbank1==1) goto 80
102
103        a(2,l-1) = aww
104
105 80     a(1,l) = -(ann+ass+aee+aww)
106
107
108
109        enddo
110    enddo
111
112
113  ELSE
114
115  !
116  ! CAS IX >= IY
117  !
118      l=1
119
120      do i=1,nx
121          do j=1,ny
122              lmax(i,j) = 1
123              l = l+1
124          enddo
125      enddo
126
127      neq = l-1
128      ndiag = ny+1
129      kd = ndiag-1
130
131
132  !
133  ! FORMATION DE LA MATRICE DES PRESSIONS
134  !
135
136      do i=1,nx
137          do j=1,ny
138              l = lmax(i,j)
139

```

```

140
141     ann = 0.0
142     ass = 0.0
143     aee = 0.0
144     aww = 0.0
145
146     if (i==nx .and. ldr(j)/=2 ) goto 120
147
148
149     aee = -dy(j)/dyp(i+1)/rou(i+1,j)
150
151     if (i==1 .and. lga(j)/=2 ) goto 130
152
153
154
155 120     aww = -dy(j)/dyp(i)/rou(i,j)
156
157     if (nx==1) aww = 0.0
158     if (i==1 .and. lga(j)==2 ) goto 130
159
160     if (i==1) then
161         a(kd+1,l-kd) = aww
162     else
163         num = ny
164         a(1+num,l-num) = aww
165     endif
166
167
168
169 130     if (j==ny .and. lno(i)/=2 ) goto 160
170     ann = -dx(i)/dyp(j+1)/rov(i,j+1)
171
172     if (j==1 .and. lsu(i)/=2 ) goto 170
173
174 160     ass = -dx(i)/dyp(j)/rov(i,j)
175
176     if (ny==1) ass = 0.0
177     if (j==1 .and. lsu(i)==2) goto 170
178
179     a(2,l-1) = ass
180
181
182
183 170     a(1,l) = -(ann+ass+aee+aww)
184
185
186
187
188     enddo
189     enddo
190
191
192     endif
193
194
195
196     if (lvel) then
197
198         do j=1,kd

```

```

199         a(kd+2-j, neq+j-kd-1) =0.0
200     enddo
201
202     a(1, neq)=1.0
203
204     endif
205
206
207     write(13,7000) ((lmax(i, j), i=1, nx), j=1, ny)
208     write(13,7010) ((a(i, j), i=1, ndiag), j=1, neq)
209
210
211 !
212 ! LAPACK (SEQUENTIEL)
213 !
214 call DPBTRF(uplo, neq, kd, a, imatrx, info)
215 !
216
217
218
219     write(13,7010) ((a(i, j), i=1, ndiag), j=1, neq)
220
221
222     if (info /=0) then
223     print *, '_ARRET_DU_PROGRAMME_****_MATRICE_MAL_REMPLIE_****', &
224           '_CAUSE_POSSIBLE_ERREUR_MALLAGE_'
225     stop
226     endif
227
228 7000 format(/// '_____TABLE DES POINTEURS : LMAX_ ' // (16i5))
229 7010 format(/// '_____MATRICE DU SYSTEME : _____' // (5(1x, f7.3)))
230
231
232 ! 6000 format(/// '      TABLE DES POINTEURS : LMAX  ' // (9i5))
233 ! 6010 format(/// '      MATRICE DU SYSTEME :      ' // (10(1x, e11.4)))
234
235 end subroutine MATRIC

```

```

1  subroutine RESOLP(Ix, Iy, nx, ny, Tm, imatrx, neq, kd, dx, dxp, dy, dyp,      &
2      lsu, lno, lga, ldr, su, sv, dt,                                     &
3      b, a, u, v, p, jmatrx, lmax, rou, rov)
4  !      RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE EN PRESSION                      *
5  !      ET MISE A JOUR DU CHAMP DE VITESSE                             *
6  implicit none
7  !
8  ! DECLARATIONS DES ARGUMENTS
9  !
10 integer,                                intent(in)    :: Ix, Iy, nx, ny,
11     Tm
12 integer,                                intent(in)    :: imatrx, neq,
13     kd, jmatrx
14 double precision, dimension(Ix),         intent(in)    :: dx, dxp
15 double precision, dimension(Iy),         intent(in)    :: dy, dyp
16
17 integer, dimension(Ix),                  intent(in)    :: lsu, lno
18 integer, dimension(Iy),                  intent(in)    :: lga, ldr
19 integer, dimension(Ix, Iy),              intent(in)    :: lmax
20 double precision,                        intent(in)    :: dt
21 double precision, dimension(Tm),          intent(inout)  :: b

```

```

20  double precision , dimension(imatrx , jmatrx) , intent(inout) :: a
21  double precision , dimension(Ix , Iy) ,          intent(inout) :: su , sv
22  double precision , dimension(Ix , Iy) ,          intent(out)   :: u , v , p
23  double precision , dimension(Ix , Iy) ,          intent(in)    :: rou , rov
24  !
25  ! VARIABLES LOCALES
26  !
27
28  integer , parameter :: one=1
29  character(len=1)    :: uplo='L'
30  integer              :: i , j , k , s , info , l
31  double precision    :: uig , uid , vin , vis
32
33  !
34  ! ROUTINES EXTERNES
35  !
36  double precision :: CVMGT
37  external CVMGT
38
39
40  ! LAPACK (SEQUENTIEL)
41  !
42      call DPBTRS(uplo , neq , kd , one , a , imatrx , b , neq , info)
43
44
45  do i=1 , nx
46      do j=1 , ny
47          l=lmax(i , j)
48
49          p(i , j) =b(l)
50
51      enddo
52  enddo
53
54
55  !8024 format(//10x , 'Affichage de la solution '/10x , 24(' - ') //(1A7 , 1I3 , 1A3 , 1
56      f10.5))
57      ! write(4 , 8024) ('plign(' , i , ')=' , plign(i) , i=1 , Tm)
58      ! write(* , 8024) ('plign(' , i , ')=' , plign(i) , i=1 , Tm)
59
60  8025 format(//10x , 'Affichage_de_la_solution '/10x , 24(' - ') //(1A3 , 1I3 , 1A1 , 1I3
61      , 1A3 , 1f17.9))
62      write(17 , 8025) (('p(' , i , ')=' , j , ')=' , p(i , j) , i=1 , nx) , j=1 , ny)
63      write(18 , 8025) (('p(' , i , ')=' , j , ')=' , p(i , j) , i=1 , nx) , j=1 , ny)
64
65  ! MISE A JOUR DU CHAMPS DE VITESSE
66
67  ! COMPOSANT-U
68
69      do j=1 , ny
70          do i=2 , nx
71              u(i , j) = dt* ( su(i , j) - (p(i , j) - p(i - 1 , j)) / dxp(i) / rou(i , j) )
72          enddo
73      enddo
74
75
76  ! FRONTIERE OUEST

```

```

77
78     do j=1,ny
79         uig=dt*( su(1,j)-p(1,j)/d xp(1)/rou(1,j) )
80         u(1,j)=CVMGT(uig,u(1,j),lga(j)==2)
81     enddo
82
83
84 ! FRONTIERE EST
85
86     do j=1,ny
87         uid=dt*( su(Ix,j)+p(nx,j)/d xp(Ix)/rou(Ix,j) )
88         u(Ix,j)=CVMGT(uid,u(Ix,j),ldr(j)==2)
89     enddo
90
91
92 ! COMPOSANT-V
93
94     do i=1,nx
95         do j=2,ny
96             v(i,j) = dt* ( sv(i,j)-(p(i,j)-p(i,j-1))/d yp(j)/rov(i,j) )
97         enddo
98     enddo
99
100 ! FRONTIERE SUD
101
102     do i=1,nx
103         vis=dt*( sv(i,1)-p(i,1)/d yp(1)/rov(i,1) )
104         v(i,1)=CVMGT(vis,v(i,1),lsu(i)==2)
105     enddo
106
107 ! FRONTIERE NORD
108
109     do i=1,nx
110         vin=dt*( sv(i,Iy)+p(i,ny)/d yp(Iy)/rov(i,Iy) )
111         v(i,Iy)=CVMGT(vin,v(i,Iy),lno(i)==2)
112     enddo
113
114
115 8030 format(//10x,'Affiche_champs_vitesse_U'/10x,24('-')//(1A3,1I3,1A1,1I3
116         ,1A3,1f17.9))
117         write(18,8030) (( 'u(' ,i , ' , ' , j , ' ) = ' ,u(i , j) , i=1,Ix) , j=1,ny)
118     ! write(*, 8030) (( 'u(' ,i , ' , ' , j , ' ) = ' ,u(i , j) , i=1,Ix) , j=1,ny)
119 8040 format(//10x,'Affiche_champs_vitesse_V'/10x,24('-')//(1A3,1I3,1A1,1I3
120         ,1A3,1f17.9))
121         write(18,8040) (( 'v(' ,i , ' , ' , j , ' ) = ' ,v(i , j) , i=1,nx) , j=1,Iy)
122     ! write(*, 8040) (( 'v(' ,i , ' , ' , j , ' ) = ' ,v(i , j) , i=1,nx) , j=1,Iy)
123
124
125 end subroutine RESOLP

```

Bibliographie

- A. BOUDLAL. 2008, «Roll waves and pluges in two layer flows», *Eu.J.A.M.*, vol. 19, p. 1–19. [7](#), [25](#), [32](#), [112](#)
- A. BOUDLAL et LIAPIDEVSKI. 2012, «Modulation equation for roll waves on vertically falling films of a power-law fluid», *World Journal Mechanical*, vol. 2, p. 1–8. [3](#), [i](#), [30](#), [32](#), [35](#), [112](#)
- BALMFORTH, N., J. BUSH et R. CRASTER. 2005, «Roll waves on flowing cornstarch suspensions», *Physics Letters A*, vol. 338, p. 479–484. [8](#)
- BENJAMIN, T. 1957, «wave formation in laminar flow domain an inclined plane», *J. Fluid Mech.*, vol. 2, p. 554–574. [18](#), [22](#)
- BRUCHON, J. 2004, *Etude de la formation d'une structure de mousse par simulation directe de l'expansion de bulles dans une matrice liquide polymère*, thèse de doctorat, Ecole National Supérieure de Mine de Paris. [104](#)
- BRYANT, A. E. J. et D. J. A. WILLIAMS. 1980, «Rheology of cohesive suspensions», *In Industrialized Embayments and Their Environmental Problems*. (ed. M. B. Collins), Pergamon. [9](#), [11](#)
- CHIU-ON et C. C. MEI. 1994, «Roll waves on a shallow layer of mud modelled as a power-law fluid», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 263, p. 151–183. [2](#), [10](#), [19](#), [27](#), [66](#)
- C. XUE, S., N. PHAN-THIEN et R. I. TANNER. 1995, «Numerical study of secondary flows of viscoelastic fluid in straight pipes by an implicit finite volume method», *J. Non-Newton. Fluid Mech*, vol. 59, p. 191–213. [72](#)
- DAI, J., Z. WAN, W. WANG, W. CHENG et X. LI. 1980, «An experimental study of slurry transport in pipes», *In Proc. Intl Symp. River Sedimentation, Beijing, China*, vol. 1, p. 195–204. (in chinese). [9](#), [11](#)
- DARBY, R. 1986, «Laminar and turbulent pipe flows of non-newtonian fluids», *In Encyclopedia of Fluid Mechanics*, vol. 7, p. 19–53. (ed. N.P. Cheremisinoff), Gulf. [9](#), [10](#), [11](#)
- GUEYFFIER, D., A. NADIM, J. LI, R. SCARDOVELLI et S. ZALESKI. 1999, «Volume of fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows», *J. Comput. Phys.*, vol. 152, p. 423–456. [3](#)
- HARLOW, F. et J. WELCH. 1965, «Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow», *J. Physics of Fluids*, vol. 39, p. 201–225. [3](#)
- HIRT, C. et B. NICHOLS. 1981, «Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries», *Journal of Computational Physics*, vol. 39, p. 201–225. [3](#), [76](#), [89](#), [94](#)

- LAFABRIE, B., C. NARDONE, R. SCARDOVELLI, S. ZALESKI et G. ZANETTI. 1994, «Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with surfer», *J. Comput. Phys.*, vol. 113, p. 134–147. [3](#)
- LI, J. 1995, «Calcul d'interface affine par morceaux (piecewise linear interface calculation)», *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. série IIb, (Paris), 320, p. 391–396. [3](#), [89](#)
- PATANKAR, S. 1980, *Numerical heat transfert and fluid flow*. Hemisphere Publishing Corporation. [71](#)
- PATANKAR, S. V. 1981, «A calculation procedure for two-dimensional elliptic situation», *J. Numer. Heat Transfer*, vol. 4, p. 409–425. [80](#)
- POPINET, S. 2003, «Gerris : a tree-based adaptive solver for the incompressible euler equations in complex geometries», *J. Comp. Phys.*, vol. 190(2), p. 572–600. [3](#)
- RAMSHAW, J. et J. TRAPP. 1976, «A numerical technique for low-speed homogeneous two-phase flows with sharp interfaces.», *J. Comput. Phys.*, vol. 21, p. 438–453. [94](#)
- SCARDOVELLI, R. et S. ZALESKI. 1999, «Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow», *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 31, p. 567–603. [3](#), [92](#)
- TANNER, R. I. 1985, *Engineering Rheology*. Clarendon. [9](#), [11](#)
- VINCENT, S. et J.-P. CALTAGIRONE. 1998, «Efficient solving method for unsteady incompressible interfacial flow problems», *International Journal for numerical methods in fluids*, vol. 30, p. 795. [104](#)
- V.YA.SHKADOV. 1968, «Theory of wave flows of a thin layer of a viscous liquid», *Izvestiya Akademii Nauk SSSR Mekhannika Zhidkosti I Gaza*, vol. 2, p. 20–25. [7](#)
- V.YU.LYAPIDEVSKII. 1998, «Stability of roll waves», *Doklady Physics*, vol. 43, n° 11, p. 703–705. [37](#)
- WAN, Z. 1982, «Bed material movement in hyperconcentrated flow», cahier de recherche, Inst. Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, Technical University of Denmark. Series Paper 31. [9](#), [10](#), [11](#)
- WHITHAM, G. B. 1974, *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley and Sons, New York. [3](#), [30](#)
- YIH, C.-S. 1963, «Stability of liquid flow down an inclined plane», *Phys. Fluids*, vol. 6, p. 321–334. [18](#), [22](#)
- YOUNGS, D. 1982, «Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion», in *Numerical Methods for Fluid Dynamics.*, p. 27. K. W. MORTON et M. J. BAINES. ed. Academic Press. New York. [89](#), [97](#)
- ZHU, K., A. BOUDDLAL et G. MOMPEAN. 2013, «Stabilité non linéaire d'ondes à rouleaux à la surface libre d'un film liquide dévalent un plan incliné», *11ème Congrès de Mécanique du 23 au 26 Avril à Agadir, Maroc*, vol. 2, p. 126–128. [30](#), [112](#)
- ZHU, K., A. BOUDDLAL et G. MOMPEAN. 2014, «Modulation equations for roll waves of a liquid film down an inclined plane as a power-law fluid», *10th International Conference on Heat Transfert, Transfert, Fluid Mechanics and Thermodynamics on 14-16 July Orlando, Florida, USA*. [30](#), [112](#)