

Modélisation numérique par la méthode des éléments finis des systèmes électrotechniques : recherche du régime permanent

Thèse de

Doctorat de l'Université Lille 1

Spécialité : Génie électrique

par

Guillaume Caron

Soutenue le 5 décembre 2017 devant le jury composé de :

M. Olivier CHADEBEC	Président, rapporteur	Directeur de recherche au CNRS à l'Université Grenoble Alpes, laboratoire G2ELab
M. Zhuoxiang REN	Rapporteur	Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie, laboratoire L2E
Mme Francesca RAPETTI	Examineur	Maître de conférences à l'Université Nice Sophia Antipolis, laboratoire J.A. Dieudonné
M. Jean-Claude MIPO	Examineur	Research and Innovation Manager à Valeo Electrical Systems
M. Thomas HENNERON	Encadrant	Maître de conférences à l'Université Lille 1, laboratoire L2EP
M. Francis PIRIOU	Directeur de thèse	Professeur émérite à l'Université Lille 1, laboratoire L2EP

Table des matières

Table des matières	5
Remerciement	14
Introduction générale	17
1 Modélisation 3D des problèmes électromagnétiques en basse fréquence	21
1.1 Domaine continu	22
1.1.1 Équations de Maxwell	22
1.1.1.1 Contexte	22
1.1.1.2 L'apport de Maxwell et ses conséquences	22
1.1.1.3 Hypothèse des milieux continus	24
1.1.1.4 Continuité entre deux milieux	24
1.1.1.5 Relations constitutives du milieu	26
1.1.1.6 Approximation des régimes quasi-stationnaires	29
1.1.1.7 Conditions aux limites	32
1.1.2 Espaces fonctionnels continus	32
1.1.3 Formulations en potentiel	34
1.1.3.1 Potentiel et électromagnétisme	35
1.1.3.2 Formulation de la magnéto-statique	35
1.1.3.3 Formulations de la magnéto-dynamique	36
1.1.4 Méthode des résidus pondérés	37
1.2 Domaine discret	39
1.2.1 Discrétisation spatiale	40
1.2.1.1 Espace fonctionnel discret	41
1.2.1.2 Unicité de la solution	43
1.2.1.3 Écriture discrétisée en espace des équations de Maxwell	44

1.2.1.4	Imposition de la divergence nulle sur la densité de courant source	47
1.2.2	Discrétisation temporelle	47
1.2.2.1	Problème magnétostatique	47
1.2.2.2	Problème magnétodynamique	48
1.2.3	Prise en compte de la non-linéarité	49
1.2.4	Prise en compte du mouvement	50
1.3	Recherche du régime permanent : État de l'art	53
1.3.1	Accélération du régime transitoire	53
1.3.1.1	Méthodes de Runge-Kutta	53
1.3.1.2	Méthode avec un pas de temps variable	55
1.3.2	Calcul du régime permanent directement	56
1.3.2.1	Harmonic Balance Finite Element Method	56
1.3.2.2	Shooting Method	58
1.3.2.3	Time-Periodic Finite Element Method	60
1.4	Conclusion	63
2	Recherche du régime permanent pour des problèmes électromagnétiques non linéaires couplés circuit	64
2.1	Méthodes de résolution de problèmes électromagnétiques couplés circuit : État de l'art	65
2.1.1	Les schémas équivalents	65
2.1.2	Couplages magnétiques-électriques forts	66
2.1.2.1	Méthode de substitution	66
2.1.2.2	Assemblage par blocs	68
2.1.3	Couplages magnétiques-électriques faibles	70
2.1.4	Waveform Relaxation Method	73
2.2	Waveform Relaxation-Newton Method	78
2.2.1	Problèmes magnétostatiques couplés à des équations de circuit	78
2.2.1.1	Conditions de périodicité	78
2.2.1.2	Méthode de substitution	80
2.2.1.3	Méthode de Newton-Raphson	80
2.2.1.4	Waveform Relaxation - Newton Method	82
2.2.2	Problèmes magnétodynamiques couplés à des équations de circuit	83
2.2.2.1	Résolution avec la WR-NM	84
	Conditions de périodicité	84
	Méthode de substitution	85
	Méthode de Newton-Raphson	85
	Changement de variable	86
2.2.2.2	Résolution des systèmes matriciels par blocs non symétriques	86
2.2.2.3	Technique pour accélérer les temps de calcul	88
2.3	Validation numérique	89
2.3.1	Transformateur triphasé	89
2.3.1.1	Transformateur triphasé à vide	93

2.3.1.2	Transformateur triphasé en court-circuit	96
2.3.1.3	Transformateur triphasé en charge	98
2.3.1.4	Conclusion	100
2.3.2	Inducteur bobiné situé entre deux plaques conductrices	101
2.4	Conclusion	109
3	Recherche du régime permanent avec un redresseur à diodes	110
3.1	Mise en équations du redresseur	111
3.1.1	Introduction	111
3.1.2	Modélisation d'un pont redresseur	111
3.1.2.1	La diode	111
3.1.2.2	Redresseur triphasé de type P3	112
3.1.2.3	Redresseur triphasé de type PD3	115
3.1.2.4	Empiètement	117
3.1.3	Modélisation d'un redresseur double alternance	119
3.1.3.1	Méthode traditionnelle	119
3.1.3.2	Algorithme de recherche du régime permanent	123
3.1.4	Intégration de l'algorithme dans la WR-NM	126
3.1.5	Transformateur triphasé couplé à un redresseur	127
3.2	Modélisation d'un alternateur à griffes couplé à un pont redresseur	128
3.2.1	Structure de l'alternateur à griffes	128
3.2.2	Principe de fonctionnement	129
3.2.3	Modélisation de la machine à griffes	130
3.2.3.1	Définition du modèle	130
3.2.3.2	Essais classiques	132
	Caractéristique à vide	132
	Caractéristique en charge	135
3.2.3.3	Couplage avec un pont redresseur	139
3.3	Conclusion	141
	Conclusion générale	145
A	Application de la méthode de Newton-Raphson aux équations discrétisées de Maxwell	148
B	Proper Orthogonal Decomposition (POD)	150
C	Recherche du régime permanent avec des équations électriques non linéaires	152
C.1	Résolution avec une méthode pas à pas dans le temps	152
C.1.1	Système matriciel	152
C.1.2	Calcul des variables secondaires	171
C.2	Résolution avec conditions de périodicité	173
C.2.1	Système matriciel	173
C.2.2	Calcul des variables secondaires	175
C.2.3	Conditions de commutation des diodes	175
C.3	Couplage avec la WR-NM	176

C.3.1	Système matriciel	176
-------	-----------------------------	-----

Table des figures

1	Schéma électrique de la machine à griffe [Bouarroudj, 2005]	18
1.1	Continuité de l'induction magnétique entre deux milieux	25
1.2	Cycle d'hystérésis	27
1.3	Ordre des constantes de temps électromagnétiques [Haus and Melcher, 1989, chap. 15, p. 14][Rapetti and Rousseaux, 2011]	31
	(a) $\tau_e < \tau_m$	31
	(b) $\tau_m < \tau_e$	31
1.4	Domaine d'étude \mathcal{D}	32
1.5	Éléments de base du maillage	42
1.6	Représentation d'un arbre d'arêtes	44
1.7	Représentation de la discrétisation temporelle	47
1.8	Courbe de première aimantation	50
	(a) Courbe B(H)	50
	(b) H(B)	50
1.9	Domaine \mathcal{D}	51
1.10	Maillage régulier sur la frontière commune à la partie mobile et à la partie fixe	52
1.11	Mise en mouvement de la partie mobile	52
	(a) Domaine après un pas de temps	52
	(b) Domaine après deux pas de temps	52
2.1	Représentation d'un circuit magnétique élémentaire et de son schéma magnétique équivalent simplifié	65
	(a) Circuit magnétique	65
	(b) Schéma magnétique équivalent simplifié	65
2.2	Schéma du couplage direct fort	69
2.3	Schéma d'un couplage faible	71
2.4	Schéma d'un second couplage faible	72
2.5	Exemple d'une décomposition par la WRM [Samet, 2005]	73
	(a) Circuit électrique	73

(b) Partitionnement	73
2.6 Schéma de la waveform relaxation method basée sur Gauss-Jacobi . .	76
2.7 Schéma de la waveform relaxation method basée sur Gauss-Seidel . .	77
2.8 Transformateur triphasé étudié	90
2.9 Transformateur triphasé en charge	90
2.10 Maillage du dispositif étudié	91
2.11 Modélisation du transformateur triphasé à vide	93
2.12 Essai à vide : courants obtenus avec <i>code_Carmel</i> dans les trois phases primaires du transformateur	94
(a) Évolution du courant dans la phase 1	94
(b) Évolution du courant dans la phase 2	94
(c) Évolution du courant dans la phase 3	94
(d) Convergence obtenue avec <i>code_Carmel</i>	94
2.13 Essai à vide : courants obtenus avec la WR-NM dans les trois phases primaires du transformateur	95
(a) Convergence obtenue avec la WR-NM	95
(b) Évolution du courant dans la phase 1	95
(c) Évolution du courant dans la phase 2	95
(d) Évolution du courant dans la phase 3	95
2.14 Essai à vide : comparaison des courants en régime permanent (WR- NM et <i>code_Carmel</i>)	95
2.15 Modélisation du transformateur triphasé en court circuit	96
2.16 Essai en court-circuit : courants obtenus avec <i>code_Carmel</i> dans les trois phases primaires et secondaires du transformateur	97
(a) Courant primaire dans la phase 1	97
(b) Courant primaire dans la phase 2	97
(c) Courant primaire dans la phase 3	97
(d) Courant secondaire dans la phase 1	97
(e) Courant secondaire dans la phase 2	97
(f) Courant secondaire dans la phase 3	97
(g) Convergence obtenue avec <i>code_Carmel</i>	97
2.17 Convergence obtenue avec la WR-NM	98
2.18 Essai en court-circuit : courants obtenus avec la WR-NM et <i>code_Carmel</i> dans les trois phases primaires et secondaires du transformateur . . .	98
(a) Régime permanent des courants primaires obtenus avec la WR- NM et <i>code_Carmel</i>	98
(b) Régime permanent des courants secondaires obtenus avec la WR-NM et <i>code_Carmel</i>	98
2.19 Modélisation du transformateur triphasé en charge	99
2.20 Essai en charge : courants obtenus avec <i>code_Carmel</i> dans les trois phases primaires et secondaires du transformateur	99
(a) Courant primaire dans la phase 1	99
(b) Courant primaire dans la phase 2	99
(c) Courant primaire dans la phase 3	99
(d) Courant secondaire dans la phase 1	99
(e) Courant secondaire dans la phase 2	99

(f)	Courant secondaire dans la phase 3	99
2.21	Convergence obtenue avec <i>code_Carmel</i>	100
2.22	Convergence obtenue avec la WR-NM	100
2.23	Essai en charge : courants obtenus avec la WR-NM et <i>code_Carmel</i> dans les trois phases primaires et secondaires du transformateur . . .	100
(a)	Régime permanent des courants primaires obtenus avec la WR- NM et <i>code_Carmel</i>	100
(b)	Régime permanent des courants secondaires obtenus avec la WR-NM et <i>code_Carmel</i>	100
2.24	Inducteur bobiné situé entre deux plaques conductrices	101
2.25	Domaine étudié numériquement	102
2.26	Maillage du système étudié	103
(a)	Maillage du système étudié (vue 3D)	103
(b)	Maillage du système étudié (vue de face)	103
(c)	Maillage du système étudié (vue du dessous)	103
2.27	Sources de tension simulées	103
(a)	Source de tension harmonique	103
(b)	Source de tension (signal carré)	103
2.28	Distribution de l'induction magnétique pour différentes fréquences . .	106
(a)	1Hz	106
(b)	50Hz	106
(c)	500Hz	106
(d)	1kHz	106
2.29	Module de la densité de courant pour différentes fréquences	107
(a)	1Hz	107
(b)	50Hz	107
(c)	500Hz	107
(d)	1kHz	107
2.30	Comparaison du régime permanent des courants obtenus avec la WR- NM et <i>code_Carmel</i>	108
(a)	1Hz	108
(b)	50Hz	108
(c)	500Hz	108
(d)	1kHz	108
(e)	Signal composé d'harmonique 1,2,3,4 ($f = 50Hz$)	108
(f)	500Hz (signal carré)	108
3.1	Caractéristique d'une diode idéale avec tension de seuil	112
3.2	Commutateur plus positif	113
3.3	Représentation des tensions d'un montage P3 avec l'intervalle de conduction des diodes	113
3.4	Représentation des courants d'un montage P3 avec l'intervalle de conduction des diodes	114
3.5	Commutateur plus négatif	114
3.6	Redresseur double alternance	116
3.7	Représentation des tensions d'un redresseur double alternance	116

3.8	Représentation des courants d'un redresseur double alternance	116
3.9	Redresseur double alternance avec présence d'inductances	118
3.10	Représentation des courants d'un redresseur double alternance avec prise en compte de l'empiétement	118
3.11	Représentation des tensions d'un redresseur double alternance avec prise en compte de l'empiétement	118
3.12	Schéma électrique composé d'un PD3 et d'une charge RL	119
3.13	Phénomène d'empiétement ; Premières Itérations obtenues avec une méthode pas à pas	121
	(a) v_1, v_2, v_3 et v_c	121
	(b) i_1, i_2, i_3 et i_c	121
	(c) $v_{D_1}, v_{D_2}, v_{D_3}$	121
	(d) $i_{D_1}, i_{D_2}, i_{D_3}$	121
3.14	Modélisation d'un redresseur double alternance : Solution obtenue avec une méthode pas à pas dans le temps	122
	(a) v_1, v_2, v_3 et v_c	122
	(b) i_1, i_2, i_3 et i_c	122
	(c) $i_{D_1}, i_{D_2}, i_{D_3}$	122
	(d) $i_{D_4}, i_{D_5}, i_{D_6}$	122
	(e) $v_{D_1}, v_{D_2}, v_{D_3}$	122
	(f) $v_{D_4}, v_{D_5}, v_{D_6}$	122
3.15	Organigramme de l'algorithme mis en place pour obtenir le régime permanent	124
3.16	Calcul initial pour déterminer l'état initiales des matrices \mathbf{S}_i	124
3.17	Solution obtenue directement en régime permanent avec l'algorithme de recherche des bornes de commutation	125
	(a) Source de tension et tension redressée (V)	125
	(b) Courant dans les 3 phases et courant redressé (A)	125
	(c) Courant passant dans les diodes de la partie supérieure du redresseur (A)	125
	(d) Courant passant dans les diodes de la partie inférieure du redresseur (A)	125
	(e) Tension aux bornes des diodes de la partie supérieure du redresseur (V)	125
	(f) Tension aux bornes des diodes de la partie inférieure du redresseur (V)	125
3.18	Organigramme général de la WR-NM pour la résolution de dispositif électromagnétique couplé à des équations de circuit non linéaires	126
3.19	Modélisation du transformateur couplé à un redresseur	127
3.20	Courants dans le circuit primaire et le circuit secondaire	127
	(a) Courants dans les 3 phases du circuit primaire	127
	(b) Courants dans les 3 phases du circuit secondaire	127
3.21	Courants et tensions dans les diodes de la partie haute du redresseur	128
	(a) Courants dans les 3 diodes de la partie supérieure du redresseur	128
	(b) Tensions aux bornes des diodes de la partie supérieure du redresseur	128

3.22	Vue éclatée de la machine à griffes	128
3.23	Exemple de roue polaire	129
	(a) Vue 1	129
	(b) Vue 2	129
3.24	Exemple de stator	130
3.25	Géométrie du rotor de notre étude	131
3.26	Loi de comportement magnétique	131
3.27	Géométrie du rotor et du stator utilisée pour notre étude	131
	(a) Vue frontale	131
	(b) Vue avec plan de coupe sur le stator	131
3.28	Plan de bobinage du stator	131
3.29	Vue de face des maillages utilisés	132
	(a) M_1	132
	(b) M_2	132
3.30	Plan de coupe des maillages utilisés	132
	(a) M_1	132
	(b) M_2	132
3.31	Essai à vide : flux magnétique dans le rotor (maillage M_1)	133
	(a) Distribution du flux magnétique	133
	(b) Cartographie de la densité de flux magnétique	133
3.32	Essai à vide : flux magnétique dans le stator (maillage M_1)	133
	(a) Distribution du flux magnétique	133
	(b) Cartographie de la densité de flux magnétique	133
3.33	Force électromotrice dans les 3 phases des inducteurs statoriques pour des essais à vide à 1000tr/min pour les maillages M_1 et M_2	134
	(a) $I_{exc} = 1A, M_1$	134
	(b) $I_{exc} = 1A, M_2$	134
	(c) $I_{exc} = 3A, M_1$	134
	(d) $I_{exc} = 3A, M_2$	134
	(e) $I_{exc} = 6A, M_1$	134
	(f) $I_{exc} = 6A, M_2$	134
3.34	Valeur efficace de la force électromotrice en fonction du courant d'excitation pour des essais à vide	135
3.35	Comparaison de la TSFEM et de la WR-NM pour le calcul du courant dans les trois phases des inducteurs statoriques pour des essais en charge à 3000tr/min	137
	(a) $R_c = 1\Omega (M_1)$	137
	(b) $R_c = 1\Omega (M_2)$	137
	(c) $R_c = 600m\Omega (M_1)$	137
	(d) $R_c = 600m\Omega (M_2)$	137
	(e) $R_c = 200m\Omega (M_1)$	137
3.36	Différence entre l'induction magnétique obtenue avec la TSFEM et celle obtenue avec la WR-NM pour une résistance de charge de $200m\Omega$	138
3.37	Courants obtenus avec la WR-NM et la TSFEM pour $R_c = 200m\Omega, L_c = 2mH, I_{exc} = 3A$ à 3000tr/min.	138
	(a) M_1	138

(b)	M_2	138
3.38	Comparaison de la convergence de l'erreur de la WR-NM et de la TSFEM à 3000tr/min pour $I_{exc} = 3A$, $R_c = 200m\Omega$ avec $L_c = 0H$ et $L_c = 200mH$	139
3.39	Modélisation de la machine à griffes couplé à un redresseur double alternance	140
3.40	Résultats obtenus avec la WR-NM pour la simulation à 1000rpm	142
(a)	i_1, i_2, i_3 et $i_c (M_1)$	142
(b)	i_1, i_2, i_3 et $i_c (M_2)$	142
(c)	v_1, v_2, v_3 et $V_c (M_1)$	142
(d)	v_1, v_2, v_3 et $V_c (M_2)$	142
(e)	$i_{D_1}, i_{D_2}, i_{D_3} (M_1)$	142
(f)	$i_{D_1}, i_{D_2}, i_{D_3} (M_2)$	142
(g)	$v_{D_1}, v_{D_2}, v_{D_3} (M_1)$	142
(h)	$v_{D_1}, v_{D_2}, v_{D_3} (M_2)$	142
3.41	Résultats obtenus avec la WR-NM pour la simulation à 6000rpm	143
(a)	i_1, i_2, i_3 et $i_c (M_1)$	143
(b)	i_1, i_2, i_3 et $i_c (M_2)$	143
(c)	v_1, v_2, v_3 et $V_c (M_1)$	143
(d)	v_1, v_2, v_3 et $V_c (M_2)$	143
(e)	$i_{D_1}, i_{D_2}, i_{D_3} (M_1)$	143
(f)	$i_{D_1}, i_{D_2}, i_{D_3} (M_2)$	143
(g)	$v_{D_1}, v_{D_2}, v_{D_3} (M_1)$	143
(h)	$v_{D_1}, v_{D_2}, v_{D_3} (M_2)$	143
3.42	Résultats obtenus avec la WR-NM pour la simulation à 6000rpm avec une inductance de charge de 5mH	144
(a)	i_1, i_2, i_3 et $i_c (M_1)$	144
(b)	i_1, i_2, i_3 et $i_c (M_2)$	144
(c)	v_1, v_2, v_3 et $V_c (M_1)$	144
(d)	v_1, v_2, v_3 et $V_c (M_2)$	144
(e)	$i_{D_1}, i_{D_2}, i_{D_3} (M_1)$	144
(f)	$i_{D_1}, i_{D_2}, i_{D_3} (M_2)$	144
(g)	$v_{D_1}, v_{D_2}, v_{D_3} (M_1)$	144
(h)	$v_{D_1}, v_{D_2}, v_{D_3} (M_2)$	144
C.1	Schéma électrique d'un circuit électrique composé d'un redresseur double alternance et d'une charge RL	153
C.2	Déplacement vers la gauche de la borne située avant l'empiétement	176
(a)	Courants traversant les 3 diodes de la partie supérieure du redresseur	176
(b)	Tensions aux bornes des 3 diodes de la partie supérieure du redresseur	176
C.3	Déplacement vers la droite de la borne située avant l'empiétement	177
(a)	Courants traversant les 3 diodes de la partie supérieure du redresseur	177

	(b) Tensions aux bornes des 3 diodes de la partie supérieure du redresseur	177
C.4	Déplacement vers la gauche de la borne située après l’empiètement . .	177
	(a) Courants traversant les 3 diodes de la partie supérieure du redresseur	177
	(b) Tensions aux bornes des 3 diodes de la partie supérieure du redresseur	177
C.5	Déplacement vers la droite de la borne située avant l’empiètement . .	178
	(a) Courants traversant les 3 diodes de la partie supérieure du redresseur	178
	(b) Tensions aux bornes des 3 diodes de la partie supérieure du redresseur	178

Liste des Algorithmes

2.1	Couplage fort	68
2.2	Couplage faible	71
2.3	Second couplage faible	72
2.4	Waveform relaxation method basée sur Gauss-Jacobi	75
2.5	Waveform relaxation method basée sur Gauss-Seidel	77
2.6	WR-NM	83

Remerciement

Ce manuscrit a été réalisé dans le cadre d'une thèse CIFRE entre le L2EP et Valeo Electronical Systems. Je profite de ces différents paragraphes pour remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail.

Je commencerais par remercier Emmanuel Creusé intervenant dans le master calcul scientifique, qui m'a toujours soutenu et poussé à aller plus loin dans la recherche.

Cette thèse m'a permis de découvrir et de me spécialiser dans la modélisation des phénomènes électromagnétiques basses fréquences qui ne m'était alors que peu familière. En effet, la première fois que j'ai entendu parlé des équations de Maxwell, ce fut en master 1 Ingénierie Mathématique spécialité calcul scientifique lors des cours de Francis Piriou et TD de Thomas Henneron. Je ne les remercierai jamais assez de m'avoir accepté dans cette thèse. L'aboutissement de ce travail, c'est à eux que je le dois essentiellement. Ils ont su se montrer constamment présents pour me guider, me conseiller et m'éveiller au génie électrique. Je tiens à remercier également mon encadrant industriel Jean-Claude Mipo, pour nos discussions enrichissantes. Bien que je ne vienne pas du génie électrique, il a toujours pris le temps de répondre à mes questions clairement et lentement.

J'aimerais remercier Monsieur Olivier Chadebec, directeur de recherche au CNRS à l'université Grenoble Alpes pour m'avoir fait l'honneur de présider et de rapporter cette thèse. Je remercie également Monsieur Zhuoxiang Ren, professeur à l'université Pierre et Marie Curie pour avoir accepté d'être rapporteur. Je les remercie plus particulièrement de la rapidité avec laquelle ils ont lu mon manuscrit et de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Merci également à Madame Francesca Rapetti, Maître de conférence à l'Université de Nice Sophia Antipolis d'avoir accepté de participer au jury.

Je remercie Betty Semail qui en sa qualité de directrice du L2EP m'a accueilli au sein du laboratoire durant toutes ces années. De la même manière, je remercie l'équipe

Outils et Méthode Numériques ainsi que tous les membres du P2. Je tiens à remercier plus particulièrement Abdelkader, pour avoir pris le temps de répondre à mes nombreuses questions, et pour toutes ces conversations très enrichissantes. Je remercie également Loïc et Julien pour leurs serviabilités et leurs nombreuses interventions sans lesquelles je n'aurais pu avancer. Merci aussi à tous les doctorants et postdocs du P2 que j'ai eu l'occasion de côtoyer à un moment ou un autre de la thèse. Un grand merci à Claire, puis Sylvie pour leurs qualités humaines et pour leurs aides pour toutes les démarches administratives. Merci également à Amandine, Geneviève, Olivier et Thierry pour leur amabilité et leur gentillesse.

La thèse est aussi une aventure humaine où l'on rencontre des personnes merveilleuses qui sont devenues des amis très proches. Grâce à elles, j'ai passé trois années inoubliables, que ce soit au sein du laboratoire ou en dehors. Parmi elles, mes fidèles compagnons de beuverie, à savoir, Laure, Clément, Jalal, Kévin, Marc, les copains du P2 : Roberta, Clément (l'autre), Ehdy, Jian, Ke, Laurent, Ludo, Oriol, Smail (j'espère ne pas en avoir oublié). Et je terminerais par ma plus belle rencontre : Emna. Merci à toi pour tous ces moments passés, et ceux à venir. Merci de m'avoir soutenu et encouragé jusqu'au dernier instant de la thèse.

Je remercie également mes amis extérieurs au laboratoire pour tous les bons moments passés ensemble.

Pour finir, je remercie ma famille, et plus particulièrement mes parents Christine et Philippe, pour leur compréhension et leur soutien sans faille.

Introduction générale

L'émission de CO_2 dans l'air est désormais au cœur de toutes les politiques énergétiques, elle constitue aujourd'hui un problème majeur qui affecte la plupart des pays développés ou en voie de développement. Pour cette raison, l'Union Européenne a instauré de nouvelles normes visant à contraindre l'industrie automobile, totalisant à elle seule près d'un quart des émissions mondiales de CO_2 , à limiter le rejet des voitures neuves à 95 grammes de CO_2 par kilomètre pour 2020. Cette norme force les industriels à améliorer le rendement de tous les équipements des voitures ou à développer des technologies plus propres.

C'est dans ce contexte qu'a été lancé le projet de recherche et développement structurant pour la compétitivité (PSPC¹) intitulé *LOWCO₂MOTION+*, dont le but est de renforcer l'hybridation électrique des véhicules. Ce projet est réalisé par un consortium composé de plusieurs partenaires académiques et industriels dont le chef de file est l'équipementier Valeo. L'objectif de ce projet est de mettre en place de nouveaux procédés de fabrication afin d'améliorer les performances des machines électriques. Il est important, pour cela, d'avoir une connaissance précise des contraintes magnétiques, électriques, thermiques et mécaniques des machines.

Dans ce projet, les travaux de cette thèse, réalisés dans le cadre d'une convention CIFRE entre la société Valeo Electrical Systems, située à Créteil et le Laboratoire d'Électrotechnique et d'Électronique de Puissance (L2EP) de Lille, se focaliseront sur la modélisation de la machine à griffes lorsque celle-ci est couplée à des équations de circuit et plus précisément sur la réduction des temps de calcul. Cette machine est largement utilisée dans les véhicules grâce à son faible coût de production mais aussi grâce à sa robustesse en comparaison des autres machines. Elle est constituée d'une partie magnétique composée principalement d'un rotor et d'un stator et d'une partie électrique (figure 1). Son rôle est de recharger la batterie mais également d'alimenter en courant continu les récepteurs liés au réseau de bord. La présence de griffes dans le rotor rend cette machine atypique, cela complexifie grandement sa géométrie et rend difficile de la modéliser avec précision. En outre, contrairement au machine synchrone traditionnelle, elle ne peut pas être modélisée en 2D à cause de

1. Projet Structurant Pour la Compétitivité

la trajectoire 3D de l'induction magnétique dans le rotor [Henneberger et al., 1996; Kuppers and Henneberger, 1997].

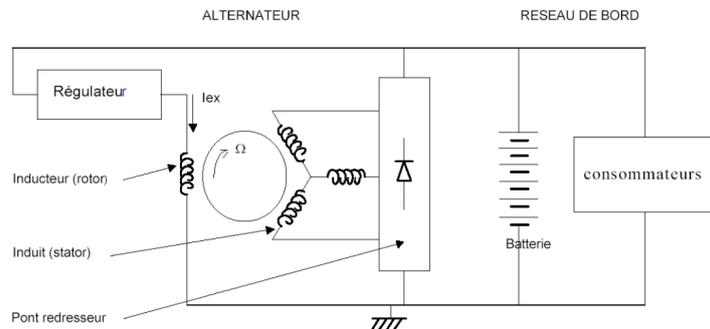


FIGURE 1 – Schéma électrique de la machine à griffe [Bouarroudj, 2005]

De plus, la modélisation de cette machine pour différents points de fonctionnement nécessite un couplage entre les équations magnétiques et les équations du circuit électriques. Différents couplages [Pierquin, 2014, chap3] existent dans la littérature avec chacun ses avantages et ses inconvénients. Dans les couplages forts, les équations de circuit sont résolues dans le même système matriciel que les équations issues du problème magnétique. Cette méthode est simple à mettre en place mais présente plusieurs inconvénients. En effet, lorsque les problèmes sont de différentes natures, le système matriciel peut être mal conditionné et engendrer des problèmes de convergence. Par ailleurs, la discrétisation temporelle se base sur la plus petite constante de temps des différents problèmes, ce qui est loin d'être optimal en terme de temps de calcul. En contrepartie, les couplages faibles offrent de nombreuses possibilités, l'idée de ces méthodes est de résoudre les différents problèmes séparément. Les systèmes sont résolus itérativement les uns après les autres. Certaines méthodes utilisent des points-fixes (approche de Picard) à chaque pas de temps ce qui permet d'éviter les problèmes de conditionnement et de contrôler l'erreur. D'autres méthodes s'appuient sur des échelles de temps différentes et n'utilisent des points-fixes qu'après quelques pas de temps afin de réduire le nombre de calcul. Par ailleurs, la *Waveform Relaxation Method* (WRM) [Lelarsmee et al., 1982] utilise un point fixe sur des formes d'ondes, c'est à dire après une ou plusieurs périodes.

Concernant la partie magnétique, le domaine de la modélisation électromagnétique dispose, aujourd'hui, d'outils performants tels que la méthode des éléments finis (FEM) [Monk, 2003]. Cette méthode permet de résoudre les équations de Maxwell en espace, elle est devenue incontournable dans le domaine de la modélisation d'une part pour sa grande précision et d'autre part pour sa robustesse. De plus, puisque les phénomènes électromagnétiques sont évolutifs dans le temps, la discrétisation spatiale est associée à une discrétisation temporelle. Les méthodes pas à pas telle que la méthode d'Euler ou les méthodes de Runge-Kutta sont les méthodes généralement utilisées. Par conséquent, la modélisation d'un dispositif électromagnétique nécessite de résoudre à chaque pas de temps un système matriciel issu de la méthode des éléments finis, cette méthode est couramment appelée *Time-Stepping Finite Element*

Method (TSFEM). Cette méthode est implantée dans *code_Carmel*² développé en partenariat par le laboratoire L2EP et EDF R&D dans le cadre d'un laboratoire commun : le LAMEL. La TSFEM, peut, néanmoins, engendrer des temps de calcul important. Premièrement, la taille du système matriciel issu de la méthode des éléments finis est liée à la discrétion spatiale de la géométrie. Pour des géométries complexes comme c'est le cas pour la machine à griffes, le nombre d'inconnues peut rapidement devenir important. Deuxièmement, lorsque la constante de temps du dispositif est relativement grande, le nombre de périodes avant d'atteindre le régime permanent peut être élevé. Enfin, lorsque les propriétés magnétiques des matériaux ont un comportement non linéaire, la TSFEM est couplée à des méthodes itératives de type point-fixe ou Newton-Raphson. Pour toutes ces raisons, les temps de calculs peuvent être extrêmement important pour être utilisés dans un contexte industriel. Il existe cependant des méthodes permettant de réduire les temps de calculs pour chacun des points évoqués précédemment.

Pour le premier point, deux stratégies sont possibles pour réduire le temps de résolution du système issu de la méthode des éléments finis. D'une part, pour diminuer les temps de calcul, des méthodes vont agir sur la taille du système matriciel. Par exemple, les méthodes de décomposition de domaines, telle que les méthodes Mortar [Rapetti, 2000; Shi et al., 2008] ou les méthodes de perturbation [Dular and Saba-riego, 2007], permettent de découpler les équations aux dérivées partielles sur des domaines de taille réduite. Cette décomposition peut être faite au niveau continu, au niveau discret ou lors de la résolution du système. Ces méthodes ont l'avantage d'être facilement parallélisable. Les méthodes de réduction de modèles REF permettent également de réduire la taille du système matriciel. Ces méthodes, et plus particulièrement la *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) [Lumley, 1967] consistent à déterminer une base de modes propres orthogonaux dans laquelle la solution du problème peut être décomposée. Ces modes propres peuvent provenir soit d'une simulation numérique soit d'expériences. Un problème de taille réduite peut alors être obtenu en utilisant des techniques de projection. D'autre part, il est possible de réduire les temps de calcul en agissant directement sur la résolution du système matriciel en envisageant des stratégies de parallélisation par exemple.

Pour le second point, on trouve dans la littérature des méthodes permettant d'accélérer le régime transitoire. Parmi celles-ci, les schémas temporels d'ordre supérieur [Alexander, 1977] ont une erreur de discrétisation temporelle plus faible, ce qui permet de réduire le nombre de pas de temps par période et *a fortiori* les temps de calcul. D'autres méthodes sont basées sur un pas de temps adaptatif et sur des estimateurs d'erreur [Cameron et al., 1998; Tittarelli et al., 2015] permettant de garder le contrôle de l'erreur. Une autre catégorie de méthodes permet de calculer directement le régime permanent à des coûts en mémoire généralement plus élevé. Certaines sont basées sur le domaine temporel comme la *Time-Periodic Finite Element Method* [Hara et al., 1985] ou la *Shooting Method* (SM) [Pries and Hofmann, 2015], et d'autres sur le domaine fréquentiel comme l'*Harmonic-Balance Method* [Gyselink et al., 2002a]. Ces techniques deviennent véritablement intéressantes lorsque le régime transitoire est important.

Enfin pour le dernier point, il est également possible de réduire les coûts en temps de

2. Code Avancé de Recherche en Modélisation Électromagnétique.

calcul des solveurs non linéaires. Des approches sont basées sur l'optimisation de la méthode Newton-Raphson. En effet, bien que celle-ci ait une vitesse de convergence quadratique, le calcul de la matrice jacobienne peut rapidement devenir coûteux en temps de calcul, de plus cette matrice doit être inversée lors de la résolution. Ainsi, l'idée des méthodes inexactes de Newton [Dembo et al., 1982; Borghi et al., 2004] se base sur un calcul approché de la matrice jacobienne. Par ailleurs, les méthodes de Quasi-Newton, par exemple la méthode de Broyden [Broyden, 1965; Choi et al., 2001], abandonnent le calcul de la jacobienne et remplace directement l'inverse de la matrice jacobienne par une matrice approchée possédant certaines propriétés. Enfin, une autre catégorie de méthodes adapte la précision du solveur linéaire en fonction du résidu du problème non linéaire [Badics and Cendes, 2005].

L'objectif de la thèse est donc de réduire les temps de simulation des systèmes électrotechniques. Pour cela, nous nous concentrerons sur le deuxième point, c'est à dire, sur la recherche du permanent. Le manuscrit de cette thèse est divisé en trois chapitres. Le premier intitulé "Modélisation 3D des problèmes électromagnétiques en basse fréquence" décrit les outils nécessaires à la modélisation des phénomènes magnétiques. Nous verrons dans un premier temps comment obtenir le modèle mathématique, issu des équations de Maxwell dans lesquelles des hypothèses ont été effectuées. La partie discrète sera ensuite abordée, et plus précisément, nous détaillerons les différentes étapes permettant d'aboutir au problème discrétisé en temps et en espace. La dernière partie de ce chapitre est consacré à un état de l'art sur les différentes méthodes permettant de réduire les temps de calcul pour des problèmes dont le transitoire est important.

Le second chapitre est consacré à la recherche du régime permanent de problèmes magnétiques couplés à des équations de circuit. Un état de l'art concernant les différents couplages existants est détaillé dans la première partie. Dans la deuxième partie du chapitre, nous y développerons la *Waveform Relaxation-Newton Method* (WR-NM) qui permet de calculer le régime permanent directement pour des problèmes magnétiques couplés à des équations électriques. Nous validerons l'efficacité de cette méthode dans la dernière partie. Pour cela, nous comparerons la WR-NM à la TSFEM implémentée dans *code_Carmel* sur des exemples académiques.

Dans le dernier chapitre, nous testerons la robustesse de la WR-NM. Tout d'abord, nous verrons comment utiliser la WR-NM lorsque les équations de circuit sont non linéaires. Puis, nous modéliserons la WR-NM, pour modéliser une machine à griffes pour différents points de fonctionnement.

1

Modélisation 3D des problèmes électromagnétiques en basse fréquence

Ce chapitre est consacré à la présentation des différentes méthodes numériques étudiées et à celle des outils mathématiques associés dans le cadre de la magnétostatique et de la magnétodynamique. Certaines hypothèses ont été faites, à savoir, négliger les phénomènes mécaniques ou encore les phénomènes physiques liés à la température. Dans la première partie de chapitre, nous verrons comment, à partir des équations classiques de Maxwell, obtenir les équations de la magnétostatique et de la magnétodynamique. Les faits historiques présents dans cette partie sont issus des ouvrages [Darrigol, 2000; Whittaker, 1910]. Dans la deuxième partie, nous nous intéresserons aux méthodes classiques permettant de discrétiser les équations continues en espace et en temps. Il existe de nombreuses méthodes, mais nous nous focaliserons sur les méthodes implantées dans le logiciel code_Carmel. Enfin, dans le but d'accélérer les temps de calculs, un état de l'art est présenté, dans la troisième partie, sur des approches pouvant accélérer le régime transitoire, ainsi que des méthodes calculant le régime permanent directement.

Sommaire

1.1	Domaine continu	22
1.2	Domaine discret	39
1.3	Recherche du régime permanent : État de l'art	53
1.4	Conclusion	63

1.1 Domaine continu

1.1.1 Équations de Maxwell

1.1.1.1 Contexte

Avant le XIX^e siècle, l'électricité et le magnétisme étaient considérés comme deux domaines à part entière bien que les théories les plus répandues soient relativement proches. Elles reposaient sur le concept de deux fluides agissant l'un sur l'autre suivant une loi similaire à la gravitation newtonienne. Pour l'électricité, la différence de deux fluides chargés positivement et négativement représentait la charge électrique tandis que pour la théorie sur le magnétisme la séparation des deux fluides australs et boréals représentait l'aimantation. Ce n'est qu'en 1820 que le danois Hans Christian Ørsted (1777-1851) met en évidence l'interaction entre électricité et magnétisme grâce à une expérience dans laquelle il montre qu'un fil traversé par un courant peut perturber l'aiguille d'une boussole. Cette découverte influence les travaux de la communauté scientifique qui se concentre sur cette interaction. Tout d'abord André-Marie Ampère (1775-1836) découvre une relation permettant de calculer un champ magnétique créé par un courant électrique. Ensuite, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) entame en 1831 une productive collaboration avec Wilhelm Weber (1804-1891) durant laquelle il mettra au point une relation entre un champ électrique statique et les charges électriques. Plus précisément, cette équation relie le flux électrique à travers une surface fermée aux charges électriques contenues à l'intérieur. Cette relation constitue l'équivalent électrostatique du théorème d'Ampère. Gauss développera la loi de conservation du flux magnétique, également appelé théorème de Gauss pour le magnétisme ou équation de Maxwell-Thomson. Il montre à travers cette relation que l'induction magnétique est un champ de vecteur à flux conservatif. Parallèlement, Michael Faraday (1791-1867) en 1831 puis Joseph Henry (1797-1878) en 1832 découvrent l'induction magnétique au travers d'expériences scientifiques. Ils en déduisent qu'une variation du champ magnétique crée un champ électrique. Cet aspect de l'induction électromagnétique est le principe de fonctionnement de nombreux générateurs électriques. Faraday décide de publier le résultat de ses nombreuses années de recherche dans son célèbre traité : *Experimental researches in electricity* [Faraday, 1844]. En pur physicien, Faraday ne donna pas de cadre mathématique à sa découverte.

1.1.1.2 L'apport de Maxwell et ses conséquences

Au début de la seconde moitié du XIX^e siècle, les théories en lien au magnétisme et à l'électricité pullulaient, riches, nombreuses et souvent incompatibles. Dans un contexte qui ne laissait guère de place à la spéculation, la communauté scientifique rejeta la théorie de Faraday à l'exception du physicien et mathématicien écossais James Clerk Maxwell (1831-1879). En effet, Maxwell commença ses recherches sur l'électricité et le magnétisme en 1854. Il démarra son étude par la lecture des écrits de Faraday, ce qui l'influença durant de nombreuses années. Possédant de solides connaissances en physique fondamentale ainsi qu'en mathématiques, il décida de donner une expression mathématique à la découverte de Faraday qu'il publia en

1855. Durant les deux décennies suivantes, Maxwell va patiemment et rigoureusement construire sa théorie de l'électromagnétisme à travers des petits écrits pour finalement aboutir sur un traité monumental [Maxwell, 1873]. Grâce à l'introduction d'un nouvel élément appelé courant de déplacement (noté $\vec{\mathbf{j}}_d(\vec{\mathbf{x}}, t)$), Maxwell a permis à sa théorie d'entrer en parfaite adéquation avec les diverses théories de l'époque comme l'électrostatique, l'électrocinétique, le magnétisme, etc.. Sa théorie comportait 12 équations vectorielles et autant de variables.

La théorie de Maxwell, nouvelle et complexe, fut longtemps ignorée et c'est seulement après sa mort que des chercheurs s'efforcèrent de la simplifier et de la populariser. Ainsi quelques années plus tard, Oliver Heaviside (1850-1925) utilisa les opérateurs du calcul vectoriel pour réécrire ces 12 équations en 4 équations, il est à l'origine de l'écriture moderne des équations de Maxwell.

Peu après la publication de Heaviside, Heinrich Hertz (1857-1894) parvint à montrer, en 1887, la supériorité de la théorie de Maxwell par rapport aux différentes théories de l'époque. Hertz démontra notamment à travers diverses expériences que les ondes électromagnétiques et les ondes lumineuses sont similaires sur plusieurs points ce qui validait les équations de Maxwell. Il reformula également ces équations afin d'en améliorer la clarté. Cette version convint les scientifiques de l'époque qui la préférèrent à la version originale de Maxwell. Néanmoins, certains phénomènes observés, comme en magnéto-optique, ne correspondaient toujours pas à la théorie. En effet, les adeptes de la théorie de Maxwell préféraient utiliser des raisonnements macroscopiques et ignorer la dépendance de la structure moléculaire de la matière. C'est le néerlandais Hendrik Antoon Lorentz (1829-1891) qui inclut des notions atomistiques dans la version locale des équations de Maxwell. Il sépara ainsi la vision maxwellienne qui mettait sur un même plan le vide et la matière. Concordant parfaitement avec les phénomènes électromagnétiques ou magnéto-optiques, la version de Lorentz des équations de Maxwell connut un grand succès et s'imposa naturellement parmi la communauté scientifique. Encore utilisées aujourd'hui (cf. équations 1.1), elles sont constituées de 4 équations à 4 inconnues ($\vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{x}}, t)$, $\vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{x}}, t)$, $\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{x}}, t)$, $\rho(t)$) et sont couramment appelées équations microscopiques de Maxwell.

$$\textbf{Théorème de Gauss} : \nabla \cdot \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{x}}, t) = \frac{\rho(t)}{\varepsilon_0} \quad (1.1a)$$

$$\textbf{Loi de conservation du flux magnétique} : \nabla \cdot \vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{x}}, t) = 0 \quad (1.1b)$$

$$\textbf{Théorème d'Ampère} : \nabla \wedge \vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{x}}, t) = \mu_0 \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{x}}, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} \quad (1.1c)$$

$$\textbf{Loi de Faraday de l'induction} : \nabla \wedge \vec{\mathbf{e}}(\vec{\mathbf{x}}, t) = -\frac{\partial \vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} \quad (1.1d)$$

Où :

- \vec{e} est le champ électrique [$V.m^{-1}$]
- \vec{b} est l'induction magnétique [T]
- \vec{j} la densité de courant [$A.m^{-2}$]
- ρ est la densité de charge volumique [$C.m^{-3}$]
- ε_0 est la permittivité du vide $\varepsilon_0 = (36\pi 10^9)^{-1} m^{-3}.kg^{-1}.s^4.A^2$
- μ_0 est la perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} m.kg.s^{-2}.A^{-2}$

1.1.1.3 Hypothèse des milieux continus

Lorsque les phénomènes électromagnétiques sont situés dans un espace occupé par la matière, une version macroscopique des équations de Maxwell doit être utilisée. À cette échelle, nous pouvons considérer que les propriétés de la matière évoluent de manière continue. La version macroscopique des équations de Maxwell, donnée ci-dessous, se caractérise par l'écriture des grandeurs moyennées (notées en majuscules) ainsi que par l'ajout de deux nouveaux champs : le champs magnétique \vec{H} et l'induction électrique \vec{D} :

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{x}, t) = \rho \quad (1.2a)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) = 0 \quad (1.2b)$$

$$\nabla \wedge \vec{H}(\vec{x}, t) = \vec{J}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (1.2c)$$

$$\nabla \wedge \vec{E}(\vec{x}, t) = - \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (1.2d)$$

Où :

- \vec{E} est le champ électrique [$V.m^{-1}$]
- \vec{H} est le champ magnétique [$A.m^{-1}$]
- \vec{D} est l'induction électrique [$C.m^{-2}$]
- \vec{B} est l'induction magnétique [T]
- \vec{J} la densité de courant [$A.m^{-2}$]

Où \vec{J} représente la densité de courant circulant en un point du matériau. Elle peut représenter deux termes : la densité de courant induite \vec{J}_{ind} (présente dans les matériaux conducteurs) ainsi que \vec{J}_s la densité de courant uniforme dans les inducteurs multifilamentaires. Par conséquent, la densité de courant peut s'écrire :

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \vec{N}(\vec{x})i(t) + \vec{J}_{ind}(\vec{x}, t) \quad (1.3)$$

Avec $i(t)$ l'intensité du courant et \vec{N} la densité de courant unitaire, vecteur défini par la géométrie et la section de l'inducteur [Le Menach, 1999, p. 25]. Notons que \vec{N} est à divergence nulle.

1.1.1.4 Continuité entre deux milieux

Les équations macroscopiques de Maxwell définies précédemment assurent la continuité des grandeurs électromagnétiques dans chaque milieu. Néanmoins, à l'interface entre deux milieux ayant des caractéristiques différentes, il est nécessaire d'ajouter des conditions de passage. Ces conditions sont déduites de la forme intégrale des

équations de Maxwell [Griffiths, 1981, section 7.3.6]. Prenons l'exemple de la loi de conservation de l'induction magnétique 1.2b appliqué à un volume V représenté ici par un cylindre de hauteur h de longueur très petite par rapport au rayon r . V est composé de deux milieux aux propriétés magnétiques différentes, on nommera ces deux milieux : 1 et 2 (figure 1.1). S est la surface séparant les deux milieux, elle est parallèle à S_1 et S_2 les bases du cylindre V . La surface latérale du cylindre est quant à elle notée S_{lat} . On définit \vec{n}_{12} et \vec{n}_{21} les vecteurs normaux à S_1 et S_2 respectivement et dirigés vers l'extérieur. Par conséquent, nous avons l'égalité $\vec{n}_{12} = -\vec{n}_{21}$. Soit \vec{B}_1 et \vec{B}_2 l'induction magnétique dans le milieu 1 et respectivement dans le milieu 2.

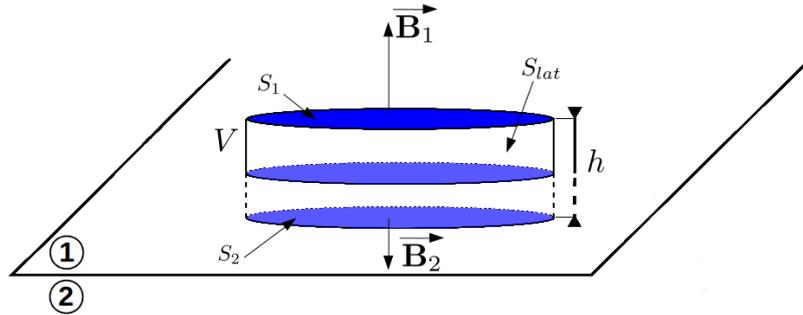


FIGURE 1.1 – Continuité de l'induction magnétique entre deux milieux

La forme globale de la loi de conservation s'obtient en intégrant la forme locale sur un volume V :

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) dv = 0. \quad (1.4)$$

Au terme de gauche, nous pouvons appliqué le théorème d'Ostrogradsky (aussi appelé théorème de divergence) :

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) dv = \oiint_{S_V} \vec{B}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} ds \quad (1.5)$$

avec S_V la surface qui délimite V . D'après la figure, on peut décomposer cette surface fermée en plusieurs parties ce qui permet de réécrire l'intégrale de la façon suivante :

$$\oiint_{S_V} \vec{B}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} ds = \iint_{S_1} \vec{B}_1(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}_{21} ds + \iint_{S_2} \vec{B}_2(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}_{12} ds + \iint_{S_{lat}} \vec{B}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}_{lat} ds \quad (1.6)$$

avec \vec{n}_{lat} le vecteur normal à la surface latérale de V . Quand h tend vers zéro, l'intégrale sur la surface latérale tend également vers zéro. On a, par conséquent :

$$\oiint_{S_V} \vec{B}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} ds \approx \iint_{S_1} \vec{B}_1(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}_{21} ds + \iint_{S_2} \vec{B}_2(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}_{12} ds \quad (1.7)$$

ce qui permet d'écrire la loi de conservation sous la forme :

$$\iint_{S_1} \vec{B}_1(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}_{21} ds + \iint_{S_2} \vec{B}_2(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}_{12} ds = 0. \quad (1.8)$$

Nous supposons maintenant que la surface S est suffisamment petite pour que $\vec{\mathbf{B}}$ soit supposée constante. L'expression 1.8 se réécrit :

$$\vec{\mathbf{B}}_1(\vec{\mathbf{x}}, t) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{21} S + \vec{\mathbf{B}}_2(\vec{\mathbf{x}}, t) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{12} S = 0 \quad (1.9)$$

avec respectivement dS_1 et dS_2 l'aire de la surface S_1 et S_2 qui valent toutes les deux πr^2 , avec r le rayon de la surface. On obtient finalement :

$$\left(\vec{\mathbf{B}}_1(\vec{\mathbf{x}}, t) - \vec{\mathbf{B}}_2(\vec{\mathbf{x}}, t) \right) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{21} = 0. \quad (1.10)$$

En appliquant le même type de démonstration pour les champs $\vec{\mathbf{D}}$ et $\vec{\mathbf{J}}$, nous pouvons obtenir les conditions aux interfaces suivante [Fournet, 1979, p. 50-55] :

$$\left(\vec{\mathbf{D}}_1(\vec{\mathbf{x}}, t) - \vec{\mathbf{D}}_2(\vec{\mathbf{x}}, t) \right) \cdot \mathbf{n}_{21} = \rho_s(t) \quad (1.11)$$

$$\left(\vec{\mathbf{J}}_1(\vec{\mathbf{x}}, t) - \vec{\mathbf{J}}_2(\vec{\mathbf{x}}, t) \right) \cdot \mathbf{n}_{21} = 0. \quad (1.12)$$

où ρ_s est la densité surfacique de charge à l'interface. Pour les champs $\vec{\mathbf{H}}$ et $\vec{\mathbf{E}}$, nous aurons recours au théorème de Stokes, on obtient alors :

$$\left(\vec{\mathbf{H}}_1(\vec{\mathbf{x}}, t) - \vec{\mathbf{H}}_2(\vec{\mathbf{x}}, t) \right) \wedge \mathbf{n}_{21} = 0 \quad (1.13)$$

$$\left(\vec{\mathbf{E}}_1(\vec{\mathbf{x}}, t) - \vec{\mathbf{E}}_2(\vec{\mathbf{x}}, t) \right) \wedge \mathbf{n}_{21} = 0 \quad (1.14)$$

Ces conditions assurent que la composante normale de l'induction magnétique et de la densité de courant sont continues sur l'ensemble du domaine y compris à l'interface entre deux milieux. La composante normale de l'induction électrique sera continue lorsque la densité surfacique de charge sera nulle. Parallèlement, la composante tangentielle du champ électrique est continue à l'interface. Cette relation est vraie également pour le champ magnétique car nous supposons dans l'équation 1.13 qu'il n'existe pas de densité de courant superficielle à l'interface.

1.1.1.5 Relations constitutives du milieu

Les équations macroscopiques de Maxwell (1.2a, 1.2b, 1.2c et 1.2d) sont composées de deux relations supplémentaires. Celles-ci sont appelées relations constitutives du milieu et requièrent l'introduction de grandeurs physiques macroscopiques telles que l'aimantation $\vec{\mathbf{M}}$ [$A.m^{-1}$] et la polarisation électrique $\vec{\mathbf{P}}$ [$C.m^{-2}$]. Ces grandeurs décrivent la réaction du matériau soumis à un champ.

Loi constitutive magnétique

L'aimantation $\vec{\mathbf{M}}$ décrit la réaction du matériau soumis à un champ magnétique, à savoir, la façon dont le matériau influence le champ magnétique. Elle peut également être utilisée pour calculer les forces qui résultent de cette interaction. La relation constitutive correspondante s'écrit [Jackson, 1962, sect. 6.6] :

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{x}}, t) = \mu_0 \left(\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{x}}, t) + \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{x}}, t) \right). \quad (1.15)$$

Cependant, en présence de matériaux paramagnétiques ou diamagnétiques, l'aimantation $\vec{\mathbf{M}}$ est proportionnelle à $\vec{\mathbf{H}}$, ainsi on peut définir la relation :

$$\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{x}}, t) = \chi_m \vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{x}}, t) \quad (1.16)$$

où χ_m est une grandeur adimensionnelle appelée **susceptibilité magnétique**. Dans le cas de matériaux diamagnétiques χ_m à une valeur inférieure ou égale à zéro, inversement, pour des matériaux paramagnétiques, la perméabilité relative est supérieure ou égale à zéro. La relation 1.15 se réécrit en fonction de χ_m :

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{x}}, t) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{x}}, t) \quad (1.17)$$

ou encore :

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{x}}, t) = \mu_0\mu_r\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{x}}, t) \quad (1.18)$$

avec μ_r la perméabilité relative définit par :

$$\mu_r = (1 + \chi_m). \quad (1.19)$$

La perméabilité est définie par :

$$\mu = \mu_0\mu_r = \mu_0(1 + \chi_m). \quad (1.20)$$

Pour des matériaux ferromagnétiques, majoritairement utilisés dans le domaine de l'électrotechnique, la relation 1.16 n'est plus vraie. Pour ce type de matériaux, la variation de l'aimantation $\vec{\mathbf{M}}$ en fonction du champ magnétique $\vec{\mathbf{H}}$ forme une courbe appelée **cycle d'hystérésis** (fig. 1.2). La perméabilité est non linéaire, il est d'usage de l'écrire sous la forme d'une fonction dépendant du champ magnétique. La loi constitutive magnétique s'écrit en conséquence :

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{x}}, t) = f(\vec{\mathbf{H}})\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{x}}, t). \quad (1.21)$$

avec f une fonction indépendante du temps et de la fréquence.

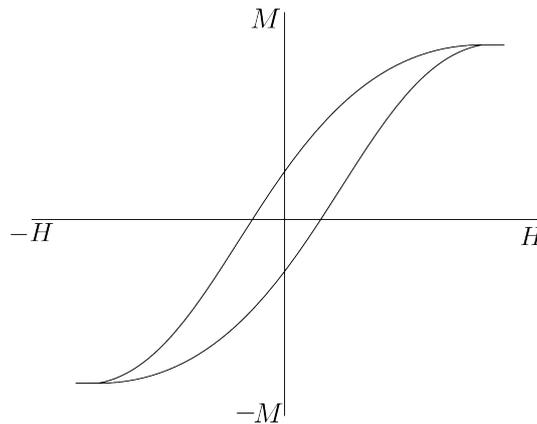


FIGURE 1.2 – Cycle d'hystérésis

Dans nos applications, nous supposons que la caractéristique des matériaux est isotrope. D'autres part, pour certains matériaux la non linéarité peut être négligée, on écrira alors :

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{x}}, t) = \mu\vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{x}}, t). \quad (1.22)$$

On prend alors pour μ_r la pente de la courbe anhystérétique.

Loi constitutive électrique

La polarisation électrique $\vec{\mathbf{P}}$ quant à elle décrit la réaction du matériau soumis à un champ électrique. La relation constitutive [Jackson, 1962, sect. 6.6] est définie par :

$$\vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{x}}, t) = \varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{x}}, t) + \vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{x}}, t). \quad (1.23)$$

Classiquement et de manière analogique à l'aimantation, la polarisation $\vec{\mathbf{P}}$ est proportionnelle au champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$:

$$\vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{x}}, t) = \varepsilon_0 \chi_\varepsilon \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{x}}, t) \quad (1.24)$$

où χ_ε est une grandeur adimensionnelle appelée **susceptibilité électrique**. L'équation 1.23 devient :

$$\vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{x}}, t) = \varepsilon_0 (1 + \chi_\varepsilon) \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{x}}, t) \quad (1.25)$$

mais peut se réécrire également :

$$\vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{x}}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{x}}, t) \quad (1.26)$$

En définissant la permittivité comme :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0 (1 + \chi_\varepsilon) \quad (1.27)$$

la loi constitutive électrique s'écrit en conséquence :

$$\vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{x}}, t) = \varepsilon \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{x}}, t). \quad (1.28)$$

Loi d'Ohm

Une troisième loi constitutive vient compléter les deux précédentes : la loi d'Ohm [Jackson, 1962, sect. 5.18]. Découverte par Georg Simon Ohm (1789-1854) en 1827, elle permet de lier, sous sa forme globale, l'intensité à la tension. D'un point de vue local, la loi s'écrit :

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{x}}, t) = \sigma \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{x}}, t) \quad (1.29)$$

avec $\sigma [S.m^{-1}]$ la conductivité électrique du matériau. La conductivité électrique dépend de la température et pour certaines applications, il est nécessaire de prendre en compte ce phénomène.

Conclusion

Dans la suite de ce mémoire, nous supposons les matériaux isotropes et non dispersifs, ce qui revient à dire que la perméabilité et la permittivité sont des fonctions scalaires indépendantes du temps ou de la fréquence telles que nous les avons écrites dans les relations 1.21 et 1.28.

Pour faciliter la lecture, nous allégeons les notations prises depuis le début de ce chapitre. Nous omettons le symbole vectoriel $\vec{}$, ainsi que les variables $(\vec{\mathbf{x}}, t)$ dont dépendent les champs vectoriels. Nous remplaçons également les opérateurs ∇ , $\nabla \cdot$.

et $\nabla \wedge$ par **grad**, **div** et **rot**. En adoptant ces notations, nous nous focaliserons sur le système suivant :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.30a)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.30b)$$

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{H}) \mathbf{H} \quad (1.30c)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.30d)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.30e)$$

1.1.1.6 Approximation des régimes quasi-stationnaires

La résolution du modèle complet des équations de Maxwell n'est pas systématique, selon les applications, certains termes sont négligeables au vu des échelles des grandeurs physiques. À partir d'un développement asymptotique des équations de Maxwell, il est possible de construire des modèles approchés que l'on nomme couramment **modèles intermédiaires** [Bossavit, 1993]. Ces modèles sont employés dans le domaine de l'Électrotechnique dont la variation temporelle est relativement faible. Dans ces conditions, le phénomène de propagation de l'onde électromagnétique peut être négligé. Il en résulte des modèles simplifiés des équations de Maxwell.

L'obtention de ces modèles est connu sous le nom de limites galiléennes [Le Bellac and Lévy-Leblond, 1973; Rapetti and Rousseaux, 2011; Rousseaux, 2013] de l'électromagnétisme. Il existe deux modèles approximatifs des équations de Maxwell, l'un *magnétique*, appelé modèle magnéto-quasi-statique (MQS) dans lequel les courants de déplacement sont négligés et l'autre *électrique*, connu sous le nom de modèle électro-quasi-statique (EQS) dans lequel l'induction magnétique de Faraday disparaît des équations.

Il est possible de justifier ces modèles par une analyse de grandeur. Commençons par appliquer un adimensionnement aux équations macroscopiques de Maxwell 1.30. On définit dans un premier temps, un jeu de grandeurs caractéristiques en rapport avec le système étudié, puis dans un second temps, on exprimera toutes les autres variables en fonction de ces grandeurs. Le but étant de faire apparaître un certain nombre de paramètres sans dimension exprimant des rapports d'échelles entre les différents phénomènes physiques. Dans le cas des équations de Maxwell, chaque variable peut être définie à partir des 4 unités du système international (MKSA), pour adimensionner complètement le modèle, nous devons définir un jeu de paramètres :

- \bar{L} : diamètre de la sphère dans laquelle est inscrit le domaine [m].
- \bar{T} : la durée d'observation du phénomène [s].
- $\bar{\mu}$: la perméabilité de référence [$m.kg.s^{-2}.A^{-2}$].
- $\bar{\varepsilon}$: la permittivité de référence [$m^{-3}.kg^{-1}.s^4.A^2$].
- $\bar{\sigma}$: la conductivité de référence [$m^{-3}.kg^{-1}.s^3.A^2$].
- $\bar{\mathbf{B}}$: l'induction magnétique de référence.

Nous pouvons maintenant introduire les constantes de temps électriques et magnétiques [Haus and Melcher, 1989, chap. 15, sect. 3] :

$$\tau_e = \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \quad (1.31)$$

$$\tau_m = \bar{\mu}\bar{\sigma}\bar{L}^2 \quad (1.32)$$

$$\tau_{em} = \frac{\bar{L}}{c_m} \quad (1.33)$$

Dans ces expressions, c_m représente la vitesse de la lumière dans le milieu et notons que la constante de temps τ_e est également appelée relaxation diélectrique. La constante de temps τ_{em} est la moyenne géométrique des deux autres. Nous pouvons en déduire :

$$\tau_{em} = \sqrt{\tau_e \tau_m} = \bar{L}\sqrt{\bar{\varepsilon}\bar{\mu}} \quad (1.34)$$

Cela signifie que τ_{em} se situe entre τ_e et τ_m . De plus, si τ_e est proche (respectivement éloignée) de τ_{em} alors τ_m le sera également. Néanmoins, selon le phénomène physique étudié, on a deux possibilités, soit $\tau_e < \tau_{em} < \tau_m$ ou soit $\tau_m < \tau_{em} < \tau_e$. À présent, nous pouvons introduire toutes les grandeurs adimensionnées. On définit :

$$t' = \frac{t}{\bar{T}}, \quad \sigma' = \frac{\sigma}{\bar{\sigma}}, \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\bar{\mu}}, \quad \mathbf{B}' = \frac{\mathbf{B}}{\bar{\mathbf{B}}}.$$

Sur la base d'une analyse dimensionnelle, on déduit :

$$\mathbf{E}' = \frac{\tau_{em}}{\bar{\mathbf{B}}\bar{L}}\mathbf{E}, \quad \mathbf{D}' = \frac{\tau_{em}}{\bar{\varepsilon}\bar{\mathbf{B}}\bar{L}}\mathbf{D}, \quad \mathbf{J}' = \frac{\tau_{em}}{\bar{\sigma}\bar{\mathbf{B}}\bar{L}}\mathbf{J}, \quad \mathbf{H}' = \frac{\bar{\mu}}{\bar{\mathbf{B}}}\mathbf{H}, \quad \rho' = \frac{1}{\bar{\sigma}\bar{\mathbf{B}}}\rho, \quad \mathbf{x}' = \frac{1}{\bar{L}}\mathbf{x},$$

ainsi que les opérateurs adimensionnés :

$$\mathbf{rot} = \frac{1}{\bar{L}}\mathbf{rot}', \quad \text{div} = \frac{1}{\bar{L}}\text{div}', \quad dt = \bar{T}dt'.$$

Il est trivial de montrer que le système d'équations 1.30 donne le système adimensionné suivant :

$$\mathbf{rot}' \mathbf{E}' = -\frac{\tau_{em}}{\bar{T}} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} \quad (1.35a)$$

$$\mathbf{rot}' \mathbf{H}' = \frac{\tau_m}{\tau_{em}} \mathbf{J}' + \frac{\tau_{em}}{\bar{T}} \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t'} \quad (1.35b)$$

$$\text{div}' \mathbf{B}' = 0 \quad (1.35c)$$

$$\text{div}' \mathbf{D}' = \frac{\tau_{em}\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}} \rho' \quad (1.35d)$$

$$\mathbf{B}' = \mu' \mathbf{H}' \quad (1.35e)$$

$$\mathbf{D}' = \varepsilon' \mathbf{E}' \quad (1.35f)$$

$$\mathbf{J}' = \sigma' \mathbf{E}' \quad (1.35g)$$

Pour simplifier le système ci-dessus et en déduire les modèles de la MQS ou de l'EQS, nous allons nous intéresser à l'ordre de grandeur des différentes constantes de temps. La figure 1.3 schématise les différents modèles existant en fonction de la durée du phénomène physique \bar{T} par rapport aux différentes constantes de temps. En électrotechnique, la durée d'observation noté \bar{T}_{et} se situe entre les deux constantes de temps les plus élevées. On a donc deux possibilités : $\tau_{em} \ll \bar{T}_{et} \ll \tau_m$ (figure 1.3a) on a alors la MQS et $\tau_{em} \ll \bar{T}_{et} \ll \tau_e$ (figure 1.3b) qui correspond à la EQS.

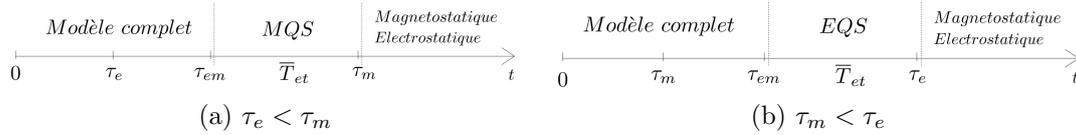


FIGURE 1.3 – Ordre des constantes de temps électromagnétiques [Haus and Melcher, 1989, chap. 15, p. 14][Rapetti and Rousseaux, 2011]

Dans le cas de la MQS, le terme $\frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t'}$ de l'équation 1.35b devient négligeable puisque $\frac{\tau_{em}}{\bar{T}}$ est négligeable devant les autres termes. Ce qui revient à écrire :

$$\mathbf{rot}' \mathbf{H}' \approx \frac{\tau_m}{\tau_{em}} \mathbf{J}' \quad (1.36)$$

Bien que le terme $\frac{\tau_{em}}{\bar{T}}$ soit également présent dans l'équation 1.35a, le terme $\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'}$ n'est pas négligeable. En effet, d'après la loi de comportement 1.35e, nous pouvons exprimer \mathbf{B}' en fonction de \mathbf{H}' qui est du même ordre de grandeur que $\frac{\tau_m}{\tau_{em}} \mathbf{J}'$. Par conséquent, \mathbf{E}' est du même ordre de grandeur que $\frac{\tau_m}{\bar{T}} \mathbf{J}'$.

Le même raisonnement peut se faire pour l'EQS [Haus and Melcher, 1989, chap. 15, p. 13-14] mais pour cela l'équation 1.35b doit être factorisée par $\frac{\tau_{em}}{\bar{T}}$ et en utilisant ensuite la relation 1.34, nous pouvons en déduire :

$$\mathbf{rot}' \mathbf{H}' = \frac{\tau_{em}}{\bar{T}} \left(\frac{\bar{T}}{\tau_e} \mathbf{J}' + \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t'} \right) \quad (1.37)$$

faisant apparaître le jeu de paramètres (τ_{em}, τ_e) . Puis, un raisonnement similaire à celui ci-dessus permet de conclure que les courants induits sont négligeables dans l'équation 1.35b.

Dans l'hypothèse de la MQS, le terme $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ ayant été négligé, une nouvelle équation émerge en calculant la divergence de l'équation d'Ampère :

$$\mathbf{div} \mathbf{J} = 0 \quad (1.38)$$

D'où le modèle de Maxwell en MQS :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.39a)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.39b)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.39c)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{J} = 0 \quad (1.39d)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.39e)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.39f)$$

Nous nous concentrerons dorénavant sur ce système approché des équations de Maxwell qu'on appelle également équations de la magnétodynamique. Elles régissent les systèmes électromagnétiques dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires dont relèvent les systèmes électrotechniques.

1.1.1.7 Conditions aux limites

Pour que le système de Maxwell soit complet, il est nécessaire d'introduire des conditions aux limites. Pour certains problèmes à frontière ouverte, il est possible d'imposer que les champs sont nuls à l'infini. Pour prendre en compte ce phénomène, il est possible d'utiliser la *Boundary Element Method* (BEM) [Bossavit and Vérité, 1982; Wakao and Onuki, 1993] ou encore la méthode présentée dans [Brunotte et al., 1992] utilisant des transformations. Dans d'autres problèmes à frontières fermées, des conditions sont imposées sur la surface du domaine d'étude. C'est ce type de frontières que nous utiliserons dans la suite de ce mémoire.

Considérons un domaine simplement connexe \mathcal{D} ouvert de \mathbb{R}^3 (figure 1.4) composé d'un sous-domaine conducteur \mathcal{D}_c , d'un domaine \mathcal{D}_{nl} possédant une caractéristique magnétique non-linéaire et d'un sous-domaine \mathcal{D}_s comprenant une source (un inducteur bobiné par exemple).

Classiquement, on impose :

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma_E} = 0 \tag{1.40}$$

et :

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma_H} = 0. \tag{1.41}$$

où Γ_E et Γ_H représentent les frontières du domaine. De ces deux conditions, on déduit respectivement :

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_B} = 0 \tag{1.42}$$

et

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_J} = 0. \tag{1.43}$$

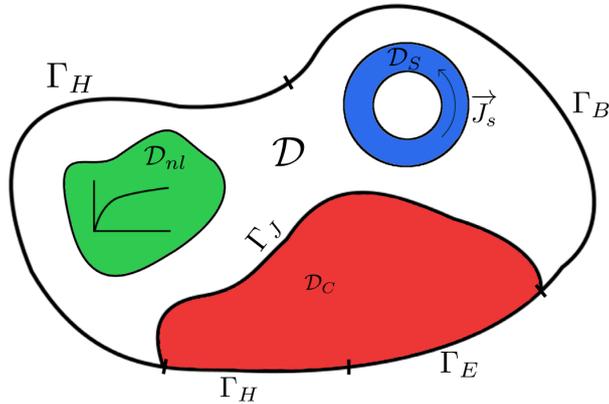


FIGURE 1.4 – Domaine d'étude \mathcal{D}

1.1.2 Espaces fonctionnels continus

Les équations de Maxwell sont définies dans les espaces mathématiques de Sobolev (1908-1989) [Monk, 2003, chap. 3][Girault and Raviart, 1986, chap. 1] particulièrement bien adaptés aux problèmes aux dérivées partielles. Ce sont des espaces

vectoriels possédant des propriétés de régularité sur les fonctions (continuité, différentiabilité, ...). Les fonctions définies dans les espaces de Sobolev peuvent être dérivées plusieurs fois. Ci-dessous, nous évoquerons les espaces que l'on retrouvera le plus fréquemment dans la suite de ce mémoire.

Commençons par définir l'espace L^2 des fonctions scalaires de carré intégrable :

$$L^2(\mathcal{D}) = \{f, \|f\|_{\mathcal{D}} < +\infty\} \quad (1.44)$$

avec \mathcal{D} un ouvert de \mathcal{R}^3 , $\|f\|_{\mathcal{D}}$ la norme définie par :

$$\|f\|_{\mathcal{D}} = \left(\int_{\mathcal{D}} |f|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \quad (1.45)$$

et le produit scalaire associé par :

$$(f, g)_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}} fg d\mathbf{x}. \quad (1.46)$$

À présent, nous définissons l'espace \mathbf{L}^2 pour des fonctions vectorielles de carré intégrable :

$$\mathbf{L}^2(\mathcal{D}) = \{\mathbf{F}, \mathbf{F}_i \in L^2(\mathcal{D}), i = 1, 2, 3\} \quad (1.47)$$

L'espace de Sobolev $H^1(\mathcal{D})$ est défini par :

$$H^1(\mathcal{D}) = \{f \in L^2(\mathcal{D}), \mathbf{grad} f \in \mathbf{L}^2(\mathcal{D})\} \quad (1.48)$$

muni de la norme

$$\|f\|_{H^1} = \left(\int_{\mathcal{D}} |f|^2 + |\mathbf{grad} f|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} = \left(\|f\|_{\mathcal{D}}^2 + \|\mathbf{grad} f\|_{\mathcal{D}}^2 \right)^{1/2}. \quad (1.49)$$

En ajoutant des conditions aux limites sur une frontière Γ , on définit $H_{\Gamma}^1(\mathcal{D})$ le sous-espace de $H^1(\mathcal{D})$ dont les éléments sont nuls sur la frontière Γ :

$$H_{\Gamma}^1(\mathcal{D}) = \{f \in H^1(\mathcal{D}), f = 0 \text{ sur } \Gamma\} \quad (1.50)$$

En électromagnétisme, l'espace H^1 est souvent noté $H(\mathbf{grad}, \mathcal{D})$. Cet espace n'est pas adapté à la totalité des grandeurs définies dans les équations de Maxwell puisque les opérateurs différentiels intervenants sont majoritairement le rotationnel et la divergence. En conséquence, nous introduisons les deux espaces [Monk, 2003, chap. 3] :

$$\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathcal{D}) = \{\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{D}), \mathbf{rot} \mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{D})\} \quad (1.51)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{div}, \mathcal{D}) = \{\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{D}), \mathbf{div} \mathbf{F} \in L^2(\mathcal{D})\} \quad (1.52)$$

associés respectivement aux normes :

$$\|f\|_{H^1, \mathbf{rot}} = \left(\int_{\mathcal{D}} |\mathbf{F}|^2 + |\mathbf{rot} \mathbf{F}|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{D}}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{F}\|_{\mathcal{D}}^2 \right)^{1/2} \quad (1.53)$$

$$\|f\|_{H^1, \mathbf{div}} = \left(\int_{\mathcal{D}} |\mathbf{F}|^2 + |\mathbf{div} \mathbf{F}|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{D}}^2 + \|\mathbf{div} \mathbf{F}\|_{\mathcal{D}}^2 \right)^{1/2} \quad (1.54)$$

En ajoutant les conditions aux limites sur Γ , on définit les espaces :

$$\mathbf{H}_{\Gamma}(\mathbf{rot}, \mathcal{D}) = \{\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathcal{D}), \mathbf{F} \wedge \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\} \quad (1.55)$$

$$\mathbf{H}_{\Gamma}(\mathbf{div}, \mathcal{D}) = \{\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, \mathcal{D}), \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\} \quad (1.56)$$

Une conséquence des identités vectorielles est qu'il existe des liens entre les espaces $H^1(\mathcal{D})$, $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathcal{D})$ et $\mathbf{H}(\mathbf{div}, \mathcal{D})$. En effet, les propriétés suivantes :

$$\forall f \in H^1(\mathcal{D}), \quad \mathbf{grad} f \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathcal{D}) \quad (1.57)$$

$$\forall \mathbf{F} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathcal{D}), \quad \mathbf{rot} \mathbf{F} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, \mathcal{D}) \quad (1.58)$$

$$\forall \mathbf{F} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, \mathcal{D}), \quad \mathbf{div} \mathbf{F} \in L^2(\mathcal{D}) \quad (1.59)$$

impliquent l'existence du complexe :

$$H^1(\mathcal{D}) \xrightarrow{\mathbf{grad}} \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathcal{D}) \xrightarrow{\mathbf{rot}} \mathbf{H}(\mathbf{div}, \mathcal{D}) \xrightarrow{\mathbf{div}} L^2(\mathcal{D}) \quad (1.60)$$

couramment appelé complexe de Rham [Bossavit, 1988b].

Toutes les grandeurs que l'on a définies précédemment dans les équations de Maxwell appartiennent à ces différents espaces. À savoir, \mathbf{E} et \mathbf{H} sont définies dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathcal{D})$ et \mathbf{J} et \mathbf{B} dans $\mathbf{H}(\mathbf{div}, \mathcal{D})$.

1.1.3 Formulations en potentiel

Le système quasi-statique 1.39 possède plusieurs inconnues en champ et autant d'équations. Afin d'en faciliter la résolution, il est possible de réduire le nombre d'inconnus en reformulant le problème. Il existe dans la littérature un grand nombre de formulations dans lesquelles le choix des inconnues varie. Par exemple, la résolution peut se faire directement en terme de champ électrique [Ren et al., 1990; Bossavit, 1985] ou magnétique [Albanese and Rubinacci, 1990a; Bossavit, 1985]. Toutefois, dans le domaine de l'électromagnétisme basse fréquence ou de la statique, on utilise traditionnellement des potentiels. Nous détaillerons dans cette partie certaines des formulations disponibles dans le logiciel *code_Carmel*, et plus précisément, la formulation magnétostatique en potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} et les formulations de la magnétodynamique $\mathbf{A} - \varphi$ et \mathbf{A}^* que nous emploierons dans les chapitres suivants. Il existe néanmoins d'autres formulations [Henneron, 2004; Le Menach, 1999; Dular, 1996] qui présentent chacune leurs avantages et leurs inconvénients [Ren and Razek, 2000; Nakata et al., 1990, 1991].

1.1.3.1 Potentiel et électromagnétisme

Les potentiels sont des outils mathématiques (scalaires ou vecteurs) introduits pour faciliter la résolution. Selon Whittaker [Whittaker, 1910, p. 222-224], la première écriture du potentiel vecteur a été introduite en 1845 dans un essai de Franz Ernst Neumann (1798-1895) sans avoir cependant approché la notion de champ ou de potentiel. Le concept de potentiel est apparu petit à petit dans les travaux de Thomson puis de Maxwell [Wu and Yang, 2006; Jech, 1999]. Le premier influencé par les travaux du physicien Stokes a ainsi clairement défini l'existence d'un potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} tel que :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (1.61)$$

Des années plus tard, Maxwell décrit mathématiquement les travaux de Faraday en utilisant le potentiel vecteur qui fit par conséquent partie intégrante de sa théorie avant d'être "tué"¹ dans les versions de Heaviside, puis de Hertz.

Malgré cela, les potentiels scalaires et vecteurs ont continué d'être employés. Durant la première moitié du XX^e siècle et le début de la deuxième, les potentiels étaient utilisés dans le calcul des champs électromagnétiques basé en grande majorité sur des méthodes analytiques. Le développement des méthodes numériques au cours des années 60 et 70 a permis l'établissement de plusieurs formulations faisant appel aux potentiels scalaires ou vecteurs pour des problèmes en deux dimensions. Alors très populaire, il était naturel de les utiliser dans les premières formulations pour des problèmes en trois dimensions au début des années 80 [Coulomb, 1981; Biddlecombe et al., 1982; Chari et al., 1982; Morisue, 1982]. Depuis les formulations en potentiels se sont imposées parmi les formulations les plus utilisées de la communauté scientifique du calcul du champ électromagnétique en basse fréquence.

1.1.3.2 Formulation de la magnétostatique

Dans le cas de la magnétostatique, le domaine d'étude est identique à celui présenté dans la figure 1.4 sans le sous-domaine \mathcal{D}_c . Par conséquent, les conditions aux limites ne sont définies que sur les frontières Γ_H et Γ_B . Les équations 1.39 s'écrivent :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \quad (1.62)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1.63)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.64)$$

$$(1.65)$$

1. Heaviside considérait que le potentiel vecteur magnétique et le potentiel scalaire électrique complexifiaient grandement les équations de Maxwell, et que pour cette raison, il valait mieux les éliminer :

Independently of these considerations, the fact that \mathbf{A} has often a scalar potential parasite (and also the other function), sometimes causes great mathematical complexity and indistinctness; and it is, for practical reasons best to murder the whole lot, or, at any rate, merely employ them as subsidiary functions. [Heaviside, 1984, p. 482]

En 1888, à l'association britannique pour le progrès de la science, Heaviside lança un débat (qu'on nomma "*Murder of ψ* " [Hunt, 2012]) sur l'éventuel présence des potentiels dans la théorie de Maxwell,

associés aux conditions aux limites suivantes :

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B, \quad (1.66)$$

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_H. \quad (1.67)$$

Puisque la divergence de \mathbf{B} est nulle dans \mathcal{D} , alors il existe un potentiel vecteur \mathbf{A} défini à un gradient près tel que

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (1.68)$$

avec $\mathbf{A} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \mathcal{D})$ et $\mathbf{A} \wedge \mathbf{n} = 0$ sur Γ_B . Le problème à résoudre s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \text{rot } \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{J}_s \\ \mathbf{A} \wedge \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B \\ \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A} \wedge \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_H \end{cases} \quad (1.69)$$

Notons qu'il existe une infinité de potentiels vecteurs magnétiques puisque \mathbf{A} est défini à un gradient près. Une solution pour imposer l'unicité du potentiel vecteur magnétique est d'introduire des jauges. Il existe plusieurs types de jauge comme la jauge de Coulomb² ou la jauge $\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = 0$ [Albanese and Rubinacci, 1990b], où \mathbf{w} représente un champ vectoriel arbitraire dont les lignes de champ relient tous les points du domaine et ne se referment pas. Cette jauge consiste à restreindre le nombre de composante du potentiel vecteur magnétique [Carpenter, 1977].

1.1.3.3 Formulations de la magnétodynamique

Dans le cas d'une formulation $\mathbf{A} - \varphi$, le domaine d'étude est identique à celui représenté dans la figure 1.4. Le champ électrique \mathbf{E} est exprimé en fonction des potentiels. On remplace l'équation 1.68 dans l'équation 1.39a. On a alors :

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.70)$$

Il existe par conséquent dans \mathcal{D}_c un potentiel scalaire électrique φ défini par la relation :

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi \quad (1.71)$$

avec $\varphi \in H^1(\mathcal{D})$.

On réécrit la loi d'Ampère en remplaçant le champ magnétique \mathbf{H} et la densité de courant induit \mathbf{J}_{ind} en fonction de \mathbf{A} et φ grâce à la loi de comportement électrique 1.29 et à la relation précédente. On a alors :

$$\text{rot } \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A} = -\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad } \varphi \right). \quad (1.72)$$

La loi de conservation de la densité de courant peut également se réécrire dans \mathcal{D}_c en fonction de \mathbf{A} et φ :

$$\text{div} \left(\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad } \varphi \right) \right) = 0. \quad (1.73)$$

2. $\text{div} \mathbf{A} = 0$

En conclusion, le problème à résoudre en formulation $\mathbf{A} - \varphi$ s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{J}_s \text{ sur } \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_c \\ \mathbf{rot} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} = -\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \text{ sur } \mathcal{D}_c \\ \operatorname{div} \left(\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \right) = 0 \text{ sur } \mathcal{D}_c \\ \mathbf{A} \wedge \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B \text{ et sur } \Gamma_E \\ \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} \wedge \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_H \\ \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_J \\ \varphi = c \text{ sur } \Gamma_E \end{array} \right. \quad (1.74)$$

avec c une constante. Il est intéressant de remarquer que φ n'est pas défini dans le domaine non conducteur $\mathcal{D}_{nc} = \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_c$.

Une autre formulation développée par Emson en 1983 [Emson and Simkin, 1983] appelée \mathbf{A}^* ou A-modifié permet de réduire le nombre d'équations ainsi que le nombre d'inconnues. Dans cette formulation, on définit un nouveau potentiel vecteur tel que :

$$\mathbf{A}^* = \int \mathbf{E} dt = \mathbf{A} + \int \mathbf{grad} \varphi dt \quad (1.75)$$

ce qui permet d'écrire l'équation 1.72 sous la forme :

$$\mathbf{rot} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A}^* = \mathbf{J}_s - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} \quad (1.76)$$

cette équation est valable sur \mathcal{D}_c . En conclusion, le problème à résoudre en formulation \mathbf{A}^* s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A}^* + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} = \mathbf{J}_s \text{ sur } \mathcal{D} \\ \mathbf{A} \wedge \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B \text{ et sur } \Gamma_E \\ \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} \wedge \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_H \\ \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_J \end{array} \right. \quad (1.77)$$

Pour la suite de ce mémoire, nous noterons le potentiel vecteur modifié \mathbf{A} .

1.1.4 Méthode des résidus pondérés

En analyse numérique, la méthode des résidus pondérés d'un problème défini par des équations aux dérivées partielles est une formulation faible de ces équations défini dans un espace de Hilbert et obéissant aux règles de l'algèbre linéaire. Elles offrent de nombreux outils et propriétés de l'analyse fonctionnelle. Le théorème de Lax-Milgram [Tang, 2012, p. 27-28] assure l'existence et l'unicité des solutions sous certaines conditions. La méthode des éléments finis [Dhatt and Touzot, 1981; Monk, 2003] se base sur une telle formulation afin de déterminer une solution approchée du problème initial.

Formulation de la magnétostatique

La formulation faible est obtenue en multipliant l'équation 1.69 par une fonction test $\mathbf{A}' \in \mathbf{H}_{\Gamma_B}(\mathbf{rot}, \mathcal{D})$ et en l'intégrant sur le domaine \mathcal{D} :

$$\iiint_{\mathcal{D}} (\mathbf{rot} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}' dv = \iiint_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{A}' dv \quad (1.78)$$

En appliquant la formule de Green [Girault and Raviart, 1986, p. 34], on obtient :

$$\iiint_{\mathcal{D}} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{rot} \mathbf{A}') \, dv + \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}') \, dv = \iiint_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{A}' \, dv \quad (1.79)$$

Nous pouvons appliquer le théorème de divergence à la seconde intégrale, ce qui revient à :

$$\iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}') \, dv = \iint_{\partial \mathcal{D}} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}') \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{S} \quad (1.80)$$

mais :

$$\begin{aligned} \iint_{\partial \mathcal{D}} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}') \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{S} &= \iint_{\Gamma_H} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}') \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{S} \\ &+ \iint_{\Gamma_B} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}') \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{S} = 0 \end{aligned} \quad (1.81)$$

Ces deux intégrales sont nulles. D'une part, l'intégrale définie sur la frontière Γ_B est nulle au sens fort car $\mathbf{A}' \in \mathbf{H}_{\Gamma_B}(\mathbf{rot}, \mathcal{D})$ et d'autre part on impose l'intégrale sur Γ_H égale à zéro, dans ce cas, la condition $\mathbf{H} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma_H} = 0$ est imposée au sens faible. Par conséquent, on obtient la formulation faible suivante :

Trouver $\mathbf{A} \in \mathbf{H}_{\Gamma_B}(\mathbf{rot}, \mathcal{D})$ tel que :

$$\iiint_{\mathcal{D}} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{rot} \mathbf{A}') \, dv = \iiint_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{A}' \, dv, \quad \forall \mathbf{A}' \in \mathbf{H}_{\Gamma_B}(\mathbf{rot}, \mathcal{D}). \quad (1.82)$$

Formulation de la magnétodynamique

Pareillement, la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ s'obtient en multipliant la première équation du système 1.74 par une fonction test $\mathbf{A}' \in \mathbf{H}_{\Gamma_E}(\mathbf{rot}, \mathcal{D})$ et la deuxième équation par une fonction test $\varphi' \in \mathbf{H}_{\Gamma_E}^1(\mathcal{D}_c)$, puis en les intégrant respectivement sur les domaines \mathcal{D} et \mathcal{D}_c :

$$\iiint_{\mathcal{D}} \left(\mathbf{rot} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \right) \cdot \mathbf{A}' \, dv = \iiint_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{A}' \, dv \quad (1.83)$$

$$\iiint_{\mathcal{D}_c} \left(\operatorname{div} \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \right) \cdot \varphi' \, dv = 0 \quad (1.84)$$

En appliquant de nouveau la relation de Green [Girault and Raviart, 1986, p. 34] à la première équation, on trouve :

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{D}} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}' \, dv + \iiint_{\mathcal{D}} \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \cdot \mathbf{A}' \, dv \\ + \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}') \, dv = \iiint_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{A}' \, dv \end{aligned} \quad (1.85)$$

La relation 1.81 nous permet de simplifier le problème en :

$$\iiint_{\mathcal{D}} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}' dv + \iiint_{\mathcal{D}_c} \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \cdot \mathbf{A}' dv = \iiint_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{A}' dv \quad (1.86)$$

Maintenant en appliquant, une autre relation de Green [Girault and Raviart, 1986, p. 27] à la deuxième équation, on trouve :

$$\iiint_{\mathcal{D}_c} \left(\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \right) \cdot \mathbf{grad} \varphi' dv - \iint_{\partial \mathcal{D}_c} \left(\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \varphi' \right) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = 0 \quad (1.87)$$

mais :

$$\begin{aligned} \iint_{\partial \mathcal{D}_c} \left(\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \varphi' \right) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} &= \iint_{\Gamma_H} \left(\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \varphi' \right) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} \\ &+ \iint_{\Gamma_E} \left(\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \varphi' \right) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = 0 \end{aligned} \quad (1.88)$$

Comme dans le cas magnétostatique, ces deux intégrales sont nulles puisque d'une part $\varphi' \in \mathbf{H}_{\Gamma_E}^1(\mathcal{D}_c)$ l'intégrale sur la frontière Γ_E est nulle au sens fort et d'autre part l'intégrale sur Γ_H est nulle car on impose $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_H} = 0$ au sens faible.

Finalement, la forme faible de la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ s'écrit :

Trouver $(\mathbf{A}, \varphi) \in \mathbf{H}_{\Gamma_B}(\mathbf{rot}, \mathcal{D}) \times \mathbf{H}_{\Gamma_B}^1(\mathcal{D}_c)$ tel que :

$$\begin{cases} \iiint_{\mathcal{D}} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}' dv + \iiint_{\mathcal{D}_c} \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \cdot \mathbf{A}' dv = \iiint_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{A}' dv \\ \iiint_{\mathcal{D}_c} \left(\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \right) \cdot \mathbf{grad} \varphi' dv = 0 \end{cases} \quad (1.89)$$

Formulation pour la formulation \mathbf{A}^*

En suivant le même raisonnement, nous pouvons montrer que la formulation faible de la méthode \mathbf{A}^* s'écrit :

Trouver $\mathbf{A} \in \mathbf{H}_{\Gamma_B}(\mathbf{rot}, \mathcal{D})$ tel que :

$$\iiint_{\mathcal{D}} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}' dv + \iiint_{\mathcal{D}_c} \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{A}' dv = \iiint_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{A}' dv \quad (1.90)$$

1.2 Domaine discret

Pour l'étude des systèmes électrotechniques, les modèles mathématiques continus n'admettent pas de solutions analytiques. Dans ces situations, on cherche les solutions de modèles approchés qui sont obtenus à partir d'une discrétisation spatiale et

temporelle. Le choix de la discrétisation dépend souvent de la méthode numérique utilisée pour approcher la solution exacte.

Dans cette partie, nous traiterons séparément les méthodes numériques spatiales et temporelles. Nous détaillerons ensuite les méthodes permettant de prendre en compte la non-linéarité, puis le mouvement.

1.2.1 Discrétisation spatiale

De nombreuses méthodes numériques permettent de résoudre dans l'espace les système d'équations aux dérivées partielles développées dans les parties précédentes. Nous pouvons citer, la méthode des différences finies [Yee, 1966], celle des volumes finies [Davies and Dean, 1996; Sabariego et al., 2012] ou encore la méthode des éléments naturels [Illoul et al., 2006; Marechal and Ramdane, 2013]. Le logiciel *code_Carmel*, quant à lui, est basé sur la méthode des éléments finis. À la fois robuste et précise, cette méthode est incontestablement la plus employée en électromagnétisme pour résoudre les problèmes en statique ou en magnétodynamique.

La méthode des éléments finis est une méthode de Galerkin, elle permet de transformer un problème continu en problème discret [Monk, 2003, chap. 4]. De façon générale, la méthode des éléments finis permet de donner une solution approchée des problèmes de la forme :

Trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ tel que :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (1.91)$$

Identiques aux problèmes obtenus dans la section 1.1.4. Lorsque a est continue et coercive³ sur \mathbf{V} , et si \mathcal{L} est continue alors, l'existence et l'unicité sont assurées par le théorème de Lax-Milgram [Monk, 2003, p. 20].

La méthode des éléments finis consiste à trouver une solution approchée \mathbf{u}_h définie dans un espace fonctionnel discret \mathbf{V}_h approchant l'espace fonctionnel continu \mathbf{V} de dimension infinie. Lorsque $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ les éléments finis sont dits conformes et non conformes dans le cas contraire. De plus, si la solution approchée \mathbf{u}_h et la fonction test \mathbf{v}_h possède la même base que \mathbf{V}_h alors la méthode s'appelle : *méthode de Ritz-Galerkin*, dans le cas contraire, on parle de *méthode de Petrov-Galerkin*. Finalement, le problème discret consiste à :

Trouver $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ tel que :

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \quad (1.92)$$

La solution \mathbf{u}_h est décomposée dans une base $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ de \mathbf{V}_h de notre choix, de façon à avoir :

$$\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{w}_i, \quad (1.93)$$

avec u_i les inconnues à déterminer et n le nombre de degré de liberté. Le problème peut donc être posé sous la forme d'un système linéaire :

3. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, f est coercive si : $\forall p \in \mathbb{R}, \exists q \geq 0 : (x \in \mathbb{R} \text{ et } ||x|| \geq q) \implies f(x) \geq p$

Trouver les coefficients $u_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ tel que :

$$\sum_{i=1}^n u_i a(w_i, w_j) = \mathcal{L}(w_j), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (1.94)$$

Le système peut alors s'écrire sous forme matricielle et être résolu avec une méthode directe ou itérative. Dans la suite de ce manuscrit, pour effectuer la résolution du système d'équations, nous utiliserons la méthode du gradient conjugué préconditionné.

1.2.1.1 Espace fonctionnel discret

Les espaces fonctionnels discrets sont définis afin d'être adaptés à la discrétisation des formulations développées précédemment. Le choix de ces espaces est motivé par le désir de définir une méthode des éléments finis robuste. Ces espaces fonctionnels ont été introduits en 1957 par Hassler Whitney (1907-1989) [Whitney, 1957] spécialiste de la géométrie différentielle. On les nomme couramment éléments de Whitney, ils forment un cadre idéal aux formulations faibles et donc aux éléments finis. Cependant, les travaux de Whitney, antérieur à la popularisation des éléments finis et des ordinateurs, tombèrent dans l'oubli. À la fin des années 70, la modélisation de problèmes électromagnétiques se faisait essentiellement en 2D. Les problèmes étaient discrétisés sur des éléments finis nodaux, ce qui veut dire que les fonctions de base étaient associées aux nœuds des éléments. Lors du passage au 3D, les chercheurs se rendirent compte que ces éléments n'étaient plus adaptés et se concentrèrent sur la recherche de nouveaux éléments, qu'ils appelèrent *éléments finis mixtes*. En 1980, Nédélec [Nédélec, 1980] étend les éléments de Raviart et Thomas [Raviart and Thomas, 1977] conforme à l'espace $\mathbf{H}(\text{div}, \mathcal{D})$ à la 3^e dimension et développe de nouveaux types d'éléments conformes à l'espace $\mathbf{H}(\text{rot}, \mathcal{D})$ où les fonctions de bases sont associées aux fonctions d'arêtes et non plus aux fonctions nodales. Nous avons vu dans la partie précédente le rôle prépondérant de l'espace de Sobolev $\mathbf{H}(\text{rot}, \mathcal{D})$ dans les différentes formulations des équations de Maxwell, ce qui tend à appuyer l'utilisation des éléments d'arêtes. Ces éléments présentent d'autres avantages, ils peuvent être utilisés en présence de géométries complexes mais aussi ils s'affranchissent des problèmes de discontinuités de la composante tangentielle aux interfaces [Bossavit, 1988a]. Les éléments d'arêtes furent rapidement adoptés par la communauté scientifique [Bossavit and Vérité, 1982; van Welij, 1985; Albanese and Rubinacci, 1988; Webb, 1993; Mur, 1994]. Ce n'est que dans le milieu des années 80 que les travaux de Whitney sont redécouverts, les éléments d'arêtes proposés par Nédélec sont en réalité les mêmes que ceux de Whitney avec toutefois des fonctions de formes à des degrés supérieurs. Dans la suite de ce manuscrit, nous utiliserons des éléments finis d'ordre 1 que nous appellerons éléments de Whitney.

Nous allons à présent définir les éléments de Whitney, mais en premier lieu il nous faut définir une discrétisation spatiale nécessaire à leurs créations ainsi que quelques-unes de ces propriétés.

Un maillage est la discrétisation spatiale d'un domaine continu, il est défini par quatre entités élémentaires : les nœuds, les arêtes, les facettes et les volumes. Il existe plusieurs types de facettes et de volumes, nous nous limiterons au cas où les

facettes sont des triangles et les volumes des tétraèdres. Ainsi il faudra 2 nœuds pour définir une arête, 3 arêtes pour définir une facette et 4 facettes pour définir un tétraèdre (figure 1.5). Soit \mathcal{N}_h , \mathcal{E}_h , \mathcal{F}_h et \mathcal{T}_h les ensembles des nœuds, arêtes, facettes

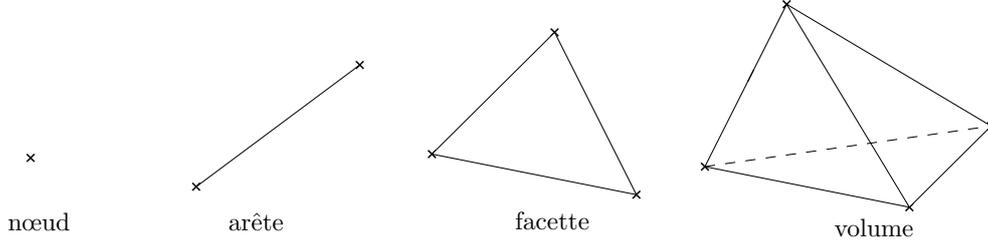


FIGURE 1.5 – Éléments de base du maillage

et volumes respectivement. On note N_n , N_e , N_f et N_v le cardinal de ces ensembles. À chacun nœud n , nous associons la fonction w_n^0 continue et affine par morceaux telle que pour tout $x_k \in \mathcal{N}_h$, le k^e nœud appartenant à \mathcal{N}_h , nous avons :

$$w_n^0(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.95)$$

Nous pouvons en déduire immédiatement la relation :

$$\sum_{n=1}^{N_n} w_n^0 = 1 \quad (1.96)$$

Maintenant, à chacune des arêtes a , nous associons la fonction w_a^1 telle que la circulation de \mathbf{w}_a^1 vaut 1 uniquement le long de l'arête a . En d'autres termes, pour tout $x_k \in \mathcal{E}_h$, la k^e arête appartenant à \mathcal{E}_h , nous avons :

$$\int_a \mathbf{w}_k^1(x) dl = \begin{cases} 1 & \text{si } k = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.97)$$

Il est possible d'exprimer la fonction d'arête \mathbf{w}_a^1 en fonction de w_i^0 et w_j^0 les fonctions nodales associées aux nœuds de l'arête a , nous avons [Bossavit, 1993, chap 3, sect. 1] :

$$\mathbf{w}_a^1 = w_i^0 \mathbf{grad} w_j^0 - w_j^0 \mathbf{grad} w_i^0. \quad (1.98)$$

De même, la fonction de facette \mathbf{w}_f^2 est définie par :

$$\iint_f \mathbf{w}_k^2(x) ds = \begin{cases} 1 & \text{si } k = f \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.99)$$

pour tout $x_k \in \mathcal{F}_h$, la k^e facette appartenant à \mathcal{F}_h . Le flux de \mathbf{w}_f^2 à travers la facette f vaut 1. La fonction de facette s'exprime en fonction de w_i^0 , w_j^0 et w_k^0 les fonctions nodales associées aux nœuds de la face f :

$$\mathbf{w}_f^2 = 2(w_i^0 \mathbf{grad} w_j^0 \wedge \mathbf{grad} w_k^0 + w_k^0 \mathbf{grad} w_i^0 \wedge \mathbf{grad} w_j^0 + w_j^0 \mathbf{grad} w_k^0 \wedge \mathbf{grad} w_i^0). \quad (1.100)$$

Pour finir, on définit la fonction \mathbf{w}_v^3 associée au tétraèdre v pour tout $x_k \in \mathcal{T}_h$, le k^e tétraèdre appartenant à \mathcal{T}_h par :

$$\iiint_v \mathbf{w}_k^3(x) dv = \begin{cases} \frac{1}{\text{vol}(v)} & \text{si } k = v \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.101)$$

avec $\text{vol}(v)$ le volume du tétraèdre v .

Grâce à ces fonctions nous pouvons définir respectivement les sous-espaces fonctionnels discrets de premier ordre W^0 , \mathbf{W}^1 , \mathbf{W}^2 et \mathbf{W}^3 comme les sous-espaces de $H^1(\mathcal{D})$, $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathcal{D})$, $\mathbf{H}(\mathbf{div}, \mathcal{D})$ et $\mathbf{L}^2(\mathcal{D})$ par :

$$W^0(\mathcal{D}) = \left\{ f_h \in H^1(\mathcal{D}); \exists (n_1, \dots, n_{N_n}) \in \mathbb{R}, f_h = \sum_{k=1}^{N_n} n_k w_k^0 \right\} \quad (1.102)$$

$$\mathbf{W}^1(\mathcal{D}) = \left\{ \mathbf{F}_h \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathcal{D}); \exists (e_1, \dots, e_{N_e}) \in \mathbb{R}, \mathbf{F}_h = \sum_{k=1}^{N_e} e_k w_k^1 \right\} \quad (1.103)$$

$$\mathbf{W}^2(\mathcal{D}) = \left\{ \mathbf{F}_h \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, \mathcal{D}); \exists (f_1, \dots, f_{N_f}) \in \mathbb{R}, \mathbf{F}_h = \sum_{k=1}^{N_f} f_k w_k^2 \right\} \quad (1.104)$$

$$\mathbf{W}^3(\mathcal{D}) = \left\{ \mathbf{F}_h \in \mathbf{L}^2(\mathcal{D}); \exists (v_1, \dots, v_{N_v}) \in \mathbb{R}, \mathbf{F}_h = \sum_{k=1}^{N_v} v_k w_k^3 \right\}. \quad (1.105)$$

Par conséquent, les potentiels scalaires seront approchés par l'espace des éléments finis nodaux W^0 et les potentiels vecteurs magnétiques par l'espace des éléments finis d'arêtes \mathbf{W}^1 .

De manière analogue aux espaces fonctionnels continus, remarquons l'existence du complexe

$$W^0(\mathcal{D}) \xrightarrow{\mathbf{grad}} \mathbf{W}^1(\mathcal{D}) \xrightarrow{\mathbf{rot}} \mathbf{W}^2(\mathcal{D}) \xrightarrow{\mathbf{div}} \mathbf{W}^3(\mathcal{D}) \quad (1.106)$$

appelé complexe de Whitney.

1.2.1.2 Unicité de la solution

La jauge $\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = 0$ valable dans le domaine continu trouve une équivalence dans le domaine discret en s'appuyant sur la théorie des graphes. Cette jauge discrète, est particulièrement bien adapté aux éléments d'arêtes [Albanese and Rubinacci, 1990b][Dular, 1996, chap. 4, sect. 2][Dular and Piriou, 2008, sect. 2.3.3.1]. Nous présentons dans un premier temps quelques notions issues de la théorie des graphes. L'arbre d'arêtes d'un maillage (approchant un domaine simplement connexe) est un ensemble d'arêtes reliant l'intégralité des nœuds du maillage entre eux tel que le chemin formé par les arêtes ne possède pas de boucle. L'arbre d'arêtes d'un maillage n'est pas unique, mais possède toujours un nombre d'arêtes égal à $N_n - 1$. Ce nombre correspond au nombre de valeurs propres nulles de la matrice \mathbf{RotRot} compte tenu du fait que le domaine est supposé simplement connexe et que, par conséquent, le noyau de l'opérateur \mathbf{rot} est un champ de gradient. Le co-arbre est l'ensemble des arêtes ne faisant pas partie de l'arbre. Le nombre d'arêtes du co-arbre est $N_e - N_n + 1$. À titre d'exemple, la figure 1.6 montre un maillage tétraédrique dont les arêtes de l'arbre ont été représentées en trait épais, toutes les autres arêtes sont dans le co-arbre.

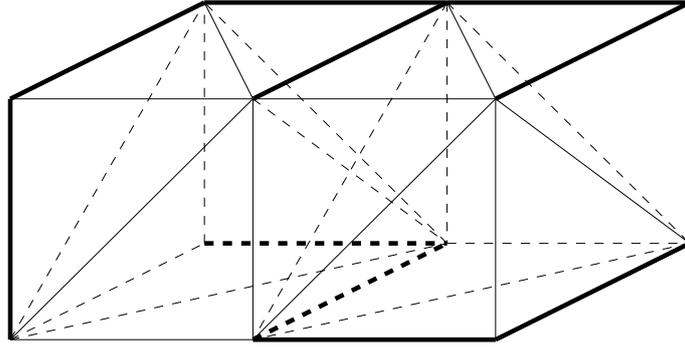


FIGURE 1.6 – Représentation d'un arbre d'arêtes

Par conséquent, la valeur des composantes de \mathcal{A} sur les arêtes de l'arbre peut être fixée et le problème est jaugé. On associe cette jauge discrète à la jauge $\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = 0$ puisque l'arbre d'arêtes peut représenter le champ vectoriel \mathbf{w} au niveau continu. Néanmoins, dans [Ren, 1995], il est montré qu'en résolvant le problème matriciel avec une méthode de Krylov telle que la méthode du gradient conjugué, quel que soit le minimum local vers lequel cette méthode converge, l'induction magnétique reconstruite à partir de la solution sera unique. Dorénavant, lorsqu'aucune information ne sera donnée, la formulation sera auto-jaugée à l'aide du gradient conjugué. Dans le cas contraire, nous préciserons que le problème est jaugé ce qui signifiera implicitement que nous utilisons la jauge $\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = 0$.

1.2.1.3 Écriture discrétisée en espace des équations de Maxwell

Formulation discrète en magnétostatique

Soit \mathbf{A}_h le potentiel vecteur magnétique approché de \mathbf{A} défini dans l'espace $\mathbf{W}^1(\mathcal{D})$. Le problème discret approché de la formulation faible 1.82 revient à :

Trouver $\mathbf{A}_h \in \mathbf{W}^1(\mathcal{D})$ tel que :

$$\int_{\mathcal{D}} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A}_h) \cdot (\mathbf{rot} \mathbf{A}'_h) dv = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{A}'_h dv, \quad \forall \mathbf{A}'_h \in \mathbf{W}^1(\mathcal{D}). \quad (1.107)$$

Par conséquent, \mathbf{A}_h peut s'écrire comme une combinaison linéaire des fonctions d'arêtes. Le problème final équivaut à chercher les coefficients de la combinaison linéaire :

Trouver $(A_1, \dots, A_{N_e}) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\mu^{-1} \mathbf{rot} \sum_{a=1}^{N_e} A_a \mathbf{w}_a^1 \right) \cdot (\mathbf{rot} \mathbf{w}_k^1) dv = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{w}_k^1 dv, \quad \forall k = 1, \dots, N_e \quad (1.108)$$

$$\implies \sum_{a=1}^{N_e} A_a \int_{\mathcal{D}} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{w}_a^1) \cdot (\mathbf{rot} \mathbf{w}_k^1) dv = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{w}_k^1 dv, \quad \forall k = 1, \dots, N_e \quad (1.109)$$

Ce problème n'étant pas jaugé, son nombre de degrés de liberté est de N_e , avec la jauge $\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = 0$ il serait de $N_e - N_n + 1$. Nous pouvons maintenant écrire le problème sous forme matricielle de la façon suivante. On définit la matrice de dimension $\mathbb{R}^{N_e \times N_e}$ que nous appellerons *matrice RotRot* [Ren, 1996] par :

$$\mathbf{M}_{ij} = \int_{\mathcal{D}} \left(\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{w}_i^1 \right) \cdot \left(\mathbf{rot} \mathbf{w}_j^1 \right) dv, \quad \forall (i, j) = \{1, 2, \dots, N_e\}^2, \quad (1.110)$$

le vecteur \mathbf{F} de dimension \mathbb{R}^{N_e} par :

$$\mathbf{F}_j = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{w}_j^1 dv, \quad \forall k = 1, \dots, N_e \quad (1.111)$$

et \mathcal{A} le vecteur des circulations de \mathbf{A}_h sur les arêtes du maillage qui correspond aux inconnues :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{N_e} \end{pmatrix} \quad (1.112)$$

et le problème revient à résoudre le système matriciel :

$$\mathbf{M}\mathcal{A} = \mathbf{F}. \quad (1.113)$$

Formulations discrètes en magnétodynamique

Soit $\varphi_h \in \mathbf{W}^0(\mathcal{D})$ le potentiel scalaire électrique approché de φ . À partir de la formulation variationnelle 1.89, nous en déduisons le problème approché :

Trouver $(\mathbf{A}_h, \varphi_h) \in \mathbf{W}^1(\mathcal{D}) \times \mathbf{W}^0(\mathcal{D})$ tel que $\forall (\mathbf{A}'_h, \varphi'_h) \in \mathbf{W}^1(\mathcal{D}) \times \mathbf{W}^0(\mathcal{D})$ on a :

$$\begin{cases} \int_{\mathcal{D}} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}'_h dv + \int_{\mathcal{D}} \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}_h}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi_h \right) \cdot \mathbf{A}'_h dv = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{A}'_h dv \\ \int_{\mathcal{D}_c} \left(\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}_h}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi_h \right) \right) \cdot \mathbf{grad} \varphi'_h dv = 0 \end{cases} \quad (1.114)$$

Ce qui revient au problème :

Trouver $(A_1, \dots, A_{N_e}) \times (\varphi_1, \dots, \varphi_{N_n}) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} \sum_{a=1}^{N_e} A_a \int_{\mathcal{D}} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{w}_a^1 \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_k^1 dv + \sum_{a=1}^{N_e} \frac{\partial A_a}{\partial t} \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \mathbf{w}_a^1 \cdot \mathbf{w}_k^1 dv \\ \quad + \sum_{n=1}^{N_n} \varphi_n \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \mathbf{grad} w_n^0 \cdot \mathbf{w}_k^1 dv = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{w}_k^1 dv \\ \sum_{a=1}^{N_e} \frac{\partial A_a}{\partial t} \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \mathbf{w}_a^1 \cdot \mathbf{grad} w_l^0 dv + \sum_{n=1}^{N_n} \varphi_n \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \mathbf{grad} w_n^0 \cdot \mathbf{grad} w_l^0 dv = 0 \end{cases} \quad (1.115)$$

$\forall l = 1, \dots, N_n$. Nous en déduisons le système matriciel :

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{M} & \mathbf{C}_1 \\ \hline 0 & \mathbf{G} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \varphi \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{S} & 0 \\ \hline \mathbf{C}_2 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \dot{\mathcal{A}} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.116)$$

avec respectivement $\dot{\mathcal{A}}$ et $\dot{\varphi}$ les dérivées temporelles de \mathcal{A} et φ et \mathbf{S} , \mathbf{G} , \mathbf{C}_1 et \mathbf{C}_2 des matrices de tailles respectives $\mathbb{R}^{N_e \times N_e}$, $\mathbb{R}^{N_n \times N_n}$, $\mathbb{R}^{N_e \times N_n}$ et $\mathbb{R}^{N_n \times N_e}$ définies par :

$$\mathbf{S}_{ij} = \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \mathbf{w}_j^1 \cdot \mathbf{w}_i^1 dv \quad (1.117)$$

$$\mathbf{G}_{ij} = \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \mathbf{grad} w_j^0 \cdot \mathbf{grad} w_i^0 dv \quad (1.118)$$

$$\mathbf{C}_{1ij} = \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \mathbf{grad} w_j^0 \cdot \mathbf{w}_i^1 dv \quad (1.119)$$

$$\mathbf{C}_{2ij} = \int_{\mathcal{D}_c} \sigma \mathbf{w}_j^1 \cdot \mathbf{grad} w_i^0 dv \quad (1.120)$$

et φ le vecteur d'inconnues nodales de tailles \mathbb{R}^{N_n} et défini par :

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{N_n} \end{pmatrix} \quad (1.121)$$

Il est intéressant de noter que la matrice \mathbf{C}_2 est la transposée de la matrice \mathbf{C}_1 . On les désignera respectivement par \mathbf{C} et \mathbf{C}^t .

En suivant un raisonnement similaire, on définit le potentiel vecteur magnétique modifié discret $\mathbf{A}_h \in \mathbf{W}^1(\mathcal{D})$ et le problème :

Trouver $\mathbf{A}_h \in \mathbf{W}^1(\mathcal{D})$ tel que :

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A}_h \right) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}'_h dv + \int_{\mathcal{D}_c} \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_h}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{A}'_h dv = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{A}'_h dv, \quad (1.122)$$

$\forall \mathbf{A}'_h \in \mathbf{W}^1(\mathcal{D})$. Par conséquent, le problème est équivalent à :

Trouver $(A_1, \dots, A_{N_e}) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sum_{a=1}^{N_e} A_a \int_{\mathcal{D}} \left(\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{w}_a^1 \right) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_k^1 dv + \sum_{a=1}^{N_e} \frac{\partial A_a}{\partial t} \int_{\mathcal{D}_c} \left(\sigma \mathbf{w}_a^1 \right) \cdot \mathbf{w}_k^1 dv = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{w}_k^1 dv, \quad (1.123)$$

$\forall k = 1, \dots, N_e$. Ce qui revient à résoudre le système matriciel suivant :

$$\mathbf{M}\mathcal{A} + \mathbf{S}\dot{\mathcal{A}} = \mathbf{F}. \quad (1.124)$$

Les matrices \mathbf{M} et \mathbf{S} sont en 1.110 et 1.117 respectivement.

1.2.1.4 Imposition de la divergence nulle sur la densité de courant source

La convergence du système matricielle est fortement influencée par la discrétisation du terme source [Ren, 1996]. La densité de courant \mathbf{J}_s est à divergence nulle dans le domaine continu. En revanche, à cause de la discrétisation spatiale des conducteurs, cette condition n'est plus vérifiée dans le domaine discret. Afin de lever cette difficulté plusieurs solutions peuvent être envisagées [Le Menach, 1999, chap. 2, sect. 3][Pierquin et al., 2012][Journeaux, 2013, chap. 2].

La solution retenue dans *code_Carmel* consiste à construire un terme source qu'on appelle *approché* grâce à un arbre de facettes. L'arbre est défini sur les facettes puisque le terme source appartient à $\mathbf{H}(\mathbf{div}, \mathcal{D})$ dont le sous-espace discret \mathbf{W}^2 est engendré par les fonctions de facettes. On cherche donc à imposer globalement la divergence nulle du terme source. Cette condition est vraie lorsque la divergence est nulle sur chaque élément, autrement dit, la somme des flux de facettes du terme source d'un même tétraèdre est nulle. La méthode consiste à fixer en premier lieu la valeur du terme source sur les facettes de l'arbre contenant toutes les facettes appartenant à la frontière de l'inducteur moins une [Le Menach, 1999, chap. 2, sect. 3]. Puis de calculer la valeur du terme source sur les facettes restantes, c'est-à-dire, celles appartenant au co-arbre de façon à conserver la divergence nulle sur chaque élément. Cet algorithme est relativement efficace et peu coûteux en temps de calcul. Il est possible d'améliorer l'approximation du terme source en utilisant des techniques basées sur la méthode des moindres carrés qui permettent de minimiser l'erreur tout en conservant la divergence nulle [Pierquin et al., 2012].

1.2.2 Discrétisation temporelle

Dans la suite, nous allons considérer une discrétisation temporelle de l'intervalle de temps $[0, T]$ par $n_t + 1$ points que l'on appellera t_j , $0 \leq j \leq n_t$ (figure 1.7) et n_t intervalles de temps tels que :

$$h_j = t_j - t_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq n_t. \quad (1.125)$$

Dans notre étude, nous supposons que la discrétisation temporelle est uniforme, c'est-à-dire que :

$$h_j = h_i, \quad 1 \leq i, j \leq n_t, \quad (1.126)$$

nous noterons l'intervalle de temps Δt .

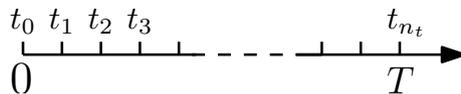


FIGURE 1.7 – Représentation de la discrétisation temporelle

1.2.2.1 Problème magnétostatique

La résolution du problème magnétostatique discret 1.113 avec un terme source et qui varie en fonction du temps est un problème algébrique, par conséquent, les solutions

sont indépendantes les unes des autres. Pour chaque pas de temps, le système à résoudre est :

$$\mathbf{M}\mathcal{A}(t_j) = \mathbf{F}(t_j) \quad (1.127)$$

1.2.2.2 Problème magnétodynamique

Les systèmes discrets 1.116 et 1.124 sont des équations différentielles ordinaires d'ordre 1. Lorsqu'une solution initiale leur est associée, on parle de problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), t), & t \in [0, T] \\ y(0) = a \end{cases} \quad (1.128)$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité de la solution pour la condition initiale a . Les méthodes dites à un pas (méthode d'Euler explicite et implicite, méthode de Crank-Nicholson, méthode de Runge-Kutta, etc.) [Quarteroni et al., 2004, p. 369-382] ou à pas multiples (méthode de Gear, méthode d'Adams-Bashforth-Moulton, etc.) [Quarteroni et al., 2004, p. 388-400] sont particulièrement bien adaptées à la résolution de ces problèmes. Elles utilisent des techniques basées sur les méthodes d'intégration numérique (méthode des trapèzes, Simpson, etc.) et les développements de Taylor. Pour les méthodes à un pas, le calcul de la valeur discrète $\mathcal{A}(t_j)$ au pas de temps t_j ne fait intervenir que la valeur $\mathcal{A}(t_{j-1})$ au pas de temps t_{j-1} , contrairement aux méthodes à pas multiples où le calcul fait intervenir plusieurs valeurs $\mathcal{A}(t_{j-1}), \mathcal{A}(t_{j-2}), \mathcal{A}(t_{j-3}), \dots$ aux pas de temps $t_{j-1}, t_{j-2}, t_{j-3}, \dots$ respectivement. Bien que plus précises, les méthodes à pas multiples requièrent plus d'étapes de calculs ce qui présente un inconvénient pour la résolution de problème de grande taille. De ce fait, nous nous concentrerons sur les méthodes à un pas.

Les notions mathématiques de convergence, stabilité et consistance sont toujours associées à ces méthodes, elles permettent de décrire l'évolution de la solution par rapport à la solution exacte. Une méthode stable et consistante est convergente [Quarteroni et al., 2004, p. 41-42]. Les méthodes implicites sont toujours stables, ce qui justifie leurs présences dans la majorité des codes de calculs. La méthode implicite la plus simple à mettre en œuvre est la méthode d'Euler implicite, elle est utilisée dans *code_Carmel* et son algorithme est donné par :

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + \Delta t f(y_{j+1}, t_{j+1}) \\ y_0 = a \end{cases} \quad (1.129)$$

avec $y_j = y(t_j)$ et $y_{j+1} = y(t_{j+1})$.

Appliqué au système discret 1.116, on obtient l'algorithme :

$$\begin{cases} \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} & \mathbf{C}^t \\ \hline \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} & \mathbf{G} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{j+1} \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} & 0 \\ \hline \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_j \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_0 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \quad (1.130)$$

avec $\begin{pmatrix} \mathbf{X}_{j+1} \\ \varphi_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{j+1} \\ \varphi_{j+1} \end{pmatrix}$. Il est intéressant de remarquer qu'en multipliant la

deuxième ligne par Δt , le système devient symétrique.

Le problème éléments finis 1.124 obtenu à partir de la formulation \mathbf{A}^* donne quant à lui :

$$\begin{cases} \left(\mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{S}\right) \mathcal{A}_{j+1} = \mathbf{F}_{j+1} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{S}\mathcal{A}_j \\ \mathcal{A}_0 = 0 \end{cases} \quad (1.131)$$

L'association de la méthode des éléments finis et de la méthode d'Euler implicite (et plus généralement des méthodes à un pas) est appelé *Time Stepping Finite Element Method* (TSFEM). Cette méthode est robuste et précise, mais peut mener à des temps de calcul énormes si on cherche à obtenir le régime permanent. En effet, à cause de la condition initiale et de la dépendance en temps, la solution va passer par un régime transitoire avant d'atteindre le régime permanent. Le régime transitoire peut être relativement long lorsque le pas de temps Δt est relativement petit. Dans cette situation, le nombre de résolutions du problème par la méthode des éléments finis est extrêmement élevé, ce qui peut amener à des temps de calcul rédhibitoires, et plus encore lorsque le nombre de degrés de liberté liés au maillage est important.

1.2.3 Prise en compte de la non-linéarité

Théoriquement, la dépendance de \mathbf{B} en fonction de \mathbf{H} , dans les milieux ferromagnétiques devrait être représentée par un cycle d'hystérésis. Cependant, le phénomène d'hystérésis est bien souvent négligé dans les modèles numériques. En revanche, si l'on effectue un bilan de puissance, il est nécessaire d'en tenir compte. Dans ce cas, on a recours à un calcul en post-processing [Fratila, 2012, chap. 2]. Classiquement, il est d'usage de prendre la courbe anhystérétique de \mathbf{B} en fonction de \mathbf{H} ou l'inverse (cf. figure 1.8). Plusieurs approches existent pour prendre en compte la non-linéarité comme l'interpolation (polynomiale, B-spline, etc.) des points de la courbe ou l'utilisation de modèles analytiques. Ces derniers ont l'avantage d'être décrit par une fonction mathématique, non-linéaire, approchant la courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ ou $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ qui est dérivable dans la majorité des cas. Une liste non exhaustive des modèles les plus connus est présentée dans [Ramarotafika, 2012, p. 25-28]. Avec les formulations (magnétostatiques ou magnétodynamiques) en \mathbf{A} , les modèles en $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ sont les plus adaptés puisque l'on cherche à modéliser l'inverse de la perméabilité, c'est-à-dire, la réductivité ($\nu = \mu^{-1}$).

Dans ce travail, nous avons utilisé le modèle proposé par Marrocco [Marrocco, 1977] dans lequel la loi de comportement s'écrit :

$$\mathbf{H} = \tilde{\nu}_r(|\mathbf{B}|^2) \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad (1.132)$$

où $\tilde{\nu}_r$ est la réductivité relative approchée défini par la fonction :

$$\tilde{\nu}_r(x) = \varepsilon + (c - \varepsilon) \frac{x^\alpha}{x^\alpha + \tau} \quad (1.133)$$

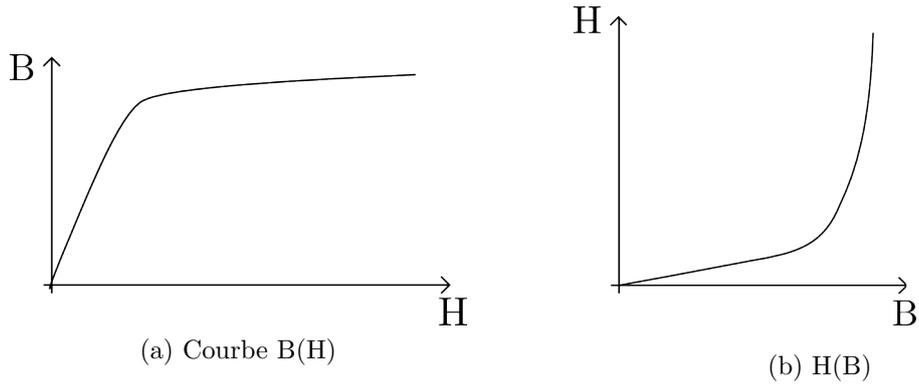


FIGURE 1.8 – Courbe de première aimantation

avec ε , c , α et τ des constantes réelles strictement positives. En pratique, ces coefficients sont déterminés à partir d'une courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ obtenue expérimentalement en utilisant une régression non-linéaire.

En tenant compte de cette caractéristique et de la relation $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$, le terme μ^{-1} apparaissant dans toutes les équations des sections précédentes est remplacé par une fonction $\tilde{\nu}_r$ dépendant de \mathbf{A} . Ce qui implique que la matrice RotRot dépend du potentiel vecteur magnétique. Les expressions 1.127, 1.130 et 1.131 se réécrivent respectivement en :

$$\mathbf{M}(\mathcal{A})\mathcal{A}_j = \mathbf{F}_j, \quad (1.134)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{M}(\mathcal{A}) + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{S} & \mathbf{C}^t \\ \hline \mathbf{C} & \Delta t\mathbf{G} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{j+1} \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{\Delta t}\mathbf{S} & 0 \\ \hline \mathbf{C} & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_j \end{pmatrix}, \quad (1.135)$$

$$\left(\mathbf{M}(\mathcal{A})\mathcal{A} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{S} \right) \mathcal{A}_{j+1} = \mathbf{F}_{j+1} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{S}\mathcal{A}_j. \quad (1.136)$$

En conclusion, on obtient un problème non-linéaire à chaque pas de temps. Ce problème est généralement résolu par la méthode de Newton-Raphson. Cette méthode, implémentée dans *code_Carmel*, possède une convergence quadratique. Les différentes étapes de la méthode de Newton-Raphson appliquée au système 1.134 sont détaillées dans l'annexe A.

1.2.4 Prise en compte du mouvement

L'étude de certains problèmes comme la modélisation de machines électriques requiert la mise en mouvement de certaines parties géométriques. La littérature foisonne de méthodes prenant en compte le mouvement, une liste non exhaustive des méthodes les plus utilisées a été présentée dans [Shi, 2005, chap. 2][Ferrouillat, 2015, chap. 7]. Certaines méthodes considèrent un domaine volumique entre la partie fixe et la partie mobile, par exemple, la méthode overlapping [Tsukerman, 1992; Krebs et al., 2011; Zaidi et al., 2012], la méthode de couplage avec les intégrales de frontières [Bouillault and Razek, 1988; Kurz et al., 1998] ou encore la méthode du macro-élément [Abdel-Razek et al., 1981] basé sur un calcul analytique. D'autres méthodes

considèrent une surface de glissement entre la partie fixe et la partie mobile. C'est le cas de la méthode de Mortar [Rapetti, 2000; Shi et al., 2008; Christophe et al., 2014] ou de la méthode programmée dans le logiciel *code_Carmel* et que nous utiliserons dans ce mémoire, c'est-à-dire, la méthode du pas bloqué [Preston et al., 1988].

Considérons un domaine \mathcal{D} (figure 1.9) avec une partie fixe \mathcal{D}_f et une partie mobile \mathcal{D}_m . On appelle Γ_{fm} la surface à l'interface. Dans cet exemple, la partie mobile effectue une rotation autour l'axe Oz à une vitesse angulaire Ω . La méthode du pas bloqué consiste à définir un maillage régulier sur Γ_{fm} (figure 1.10) tel que pour chaque pas de temps le maillage de la partie mobile reste conforme à la partie fixe (figure 1.11). Ce qui est simple à mettre en place puisqu'il suffit d'adapter le pas de temps à la vitesse angulaire et au maillage. Il est également facile de résoudre les systèmes matriciels en tenant compte du mouvement puisqu'il suffit d'effectuer une permutation sur les inconnues de la partie mobile situées sur Γ_{fm} . La difficulté de cette méthode réside plutôt dans la création du maillage, et plus particulièrement en présence de géométries complexes. On peut néanmoins noter un inconvénient, à savoir que le pas angulaire doit être un multiple du pas du maillage. Dans ces conditions, pour une vitesse angulaire et un maillage donné, le pas de temps minimal est imposé.

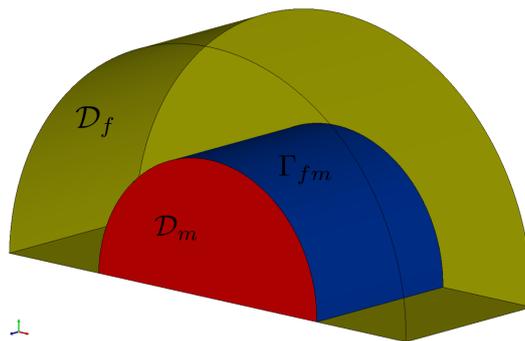


FIGURE 1.9 – Domaine \mathcal{D}

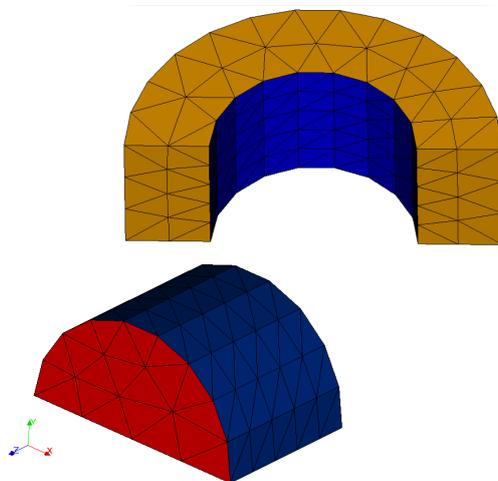
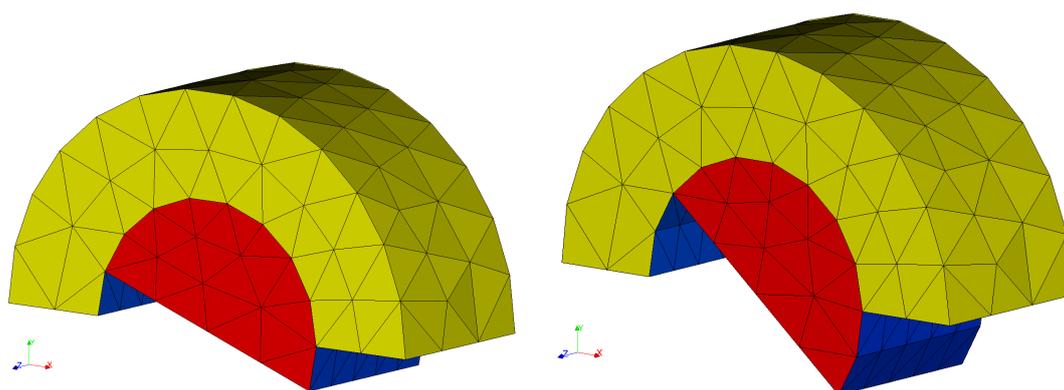


FIGURE 1.10 – Maillage régulier sur la frontière commune à la partie mobile et à la partie fixe



(a) Domaine après un pas de temps

(b) Domaine après deux pas de temps

FIGURE 1.11 – Mise en mouvement de la partie mobile

1.3 Recherche du régime permanent : État de l'art

Pour l'étude des systèmes électromagnétiques, le régime permanent est rarement obtenu directement, on passe par un régime transitoire. Lors de la modélisation, ce dernier peut être physique ou numérique, ou une combinaison des deux. Bien que le régime transitoire apporte des informations intéressantes, pour certaines applications seul le fonctionnement en régime permanent est analysé. D'où l'apparition de méthodes permettant d'accélérer le régime transitoire ou de calculer le régime permanent directement.

Nous nous intéressons ici exclusivement aux régimes permanents périodiques que l'on rencontre le plus souvent en électrotechnique. Mathématiquement, le régime permanent d'une équation différentielle est atteint lorsque deux périodes successives sont identiques. Numériquement, le régime permanent est approché asymptotiquement.

Dans cette partie, nous donnerons une liste non exhaustive de méthodes permettant de calculer le régime permanent d'une équation différentielle de premier ordre de la forme :

$$y'(t) = f(y(t), t) \quad (1.137)$$

La liste que l'on présente dans cette partie contient les méthodes utilisées couramment dans le domaine de l'électrotechnique qui permettent soit d'accélérer le régime transitoire ou de l'obtenir directement.

1.3.1 Accélération du régime transitoire

Les méthodes permettant d'accélérer le temps de calcul du régime transitoire sont principalement basées sur des schémas temporels d'ordre supérieur. L'intérêt d'utiliser ces approches est de diminuer l'erreur de discrétisation afin d'optimiser le pas de temps et de réduire le nombre de calculs.

1.3.1.1 Méthodes de Runge-Kutta

Pour diminuer les temps de calcul, une approche consiste à réduire le nombre de pas de temps sur une période afin de se rapprocher du pas optimal. Il n'est pas possible d'utiliser un schéma d'ordre 1 comme c'est le cas pour la méthode d'Euler implicite avec un pas de temps optimal, l'erreur numérique serait bien trop grande. Une solution est d'employer des schémas d'ordre supérieur qui ont une erreur numérique plus petite. Le pas de temps peut être plus large, diminuant ainsi le nombre de calculs. Les méthodes de Runge-Kutta [Quarteroni et al., 2004, p. 369-382] sont une famille de méthodes explicites proposant une alternative à la méthode d'Euler. Ces méthodes sont à un pas, c'est-à-dire, que la solution approchée y_{n+1} au temps t_{n+1} dépend de la solution approchée y_n au temps t_n . Avec les méthodes de Runge-Kutta

à l'ordre q , la solution y_{n+1} est donnée par :

$$\forall i = 1, \dots, q \begin{cases} t_{n,i} &= t_n + c_i h_n, \\ y_{n,i} &= y_n + h_n \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} p_{n,k}, \\ p_{n,i} &= f(y_{n,i}, t_{n,i}) \end{cases} \quad (1.138)$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{k=1}^q b_k p_{n,k} \quad (1.139)$$

Avec $h_n = t_{n+1} - t_n$. La méthode de Runge-Kutta se définit par l'ordre q , ainsi que par les coefficients réels a_{ik} , b_k et c_i avec $1 \leq k < i \leq q$. La matrice des coefficients a_{ik} est appelée *matrice de Runge-Kutta*. Un moyen simple de définir une méthode est de donner son tableau de Butcher [Quarteroni et al., 2004, p. 407] :

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ c_q & a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{q,q-1} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_{q-1} & b_q \end{array} \quad (1.140)$$

Certaines méthodes sont plus utilisées que d'autres, ainsi à l'ordre 1 nous retrouvons la méthode d'Euler explicite. La méthode à l'ordre 4 est la plus connue, on l'appelle couramment *RK4*.

Rappelons qu'un schéma à un pas converge s'il est consistant et stable. La consistance est facilement vérifiable avec le tableau de Butcher, en effet, un schéma est consistant si :

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i, \quad \forall i = 2, \dots, q. \quad (1.141)$$

En revanche, il est connu que les schémas explicites sont stables seulement sous certaines conditions. À cause de ces instabilités, les méthodes implicites sont plus souvent favorisées même, si leurs résolutions requièrent un coût supérieur.

Les méthodes de Runge-Kutta implicites (IRK), moins populaires que les versions explicites, s'écrivent à l'ordre q :

$$\forall i = 1, \dots, q \begin{cases} t_{n,i} &= t_n + c_i h_n, \\ y_{n,i} &= y_n + h_n \sum_{k=1}^q a_{ik} p_{n,k}, \\ p_{n,i} &= f(y_{n,i}, t_{n,i}) \end{cases} \quad (1.142)$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{k=1}^q b_k p_{n,k} \quad (1.143)$$

Par conséquent, la matrice de Runge-Kutta d'une méthode implicite est pleine ($a_{ij} \neq 0, \forall i, j$) contrairement aux méthodes explicites dont la matrice de Runge-Kutta est triangulaire inférieure à diagonale nulle ($a_{ij} = 0, \forall j \geq i$). Le tableau de Butcher

d'une méthode implicite est :

$$\begin{array}{c|cccc}
 c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\
 c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\
 \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
 c_q & a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qq} \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_q
 \end{array} \tag{1.144}$$

Une sous catégorie très populaire des méthodes IRK est la méthode de Runge-Kutta implicite diagonale (DIRK) [Alexander, 1977]. Dans cette catégorie, la matrice est triangulaire inférieure ($a_{ij} = 0, \forall j > i$). Avec une méthode DIRK, les calculs peuvent être effectués séquentiellement, ce qui permet de réduire de façon drastique le coût en temps de calcul. De plus, elles sont très efficaces puisqu'elles préservent les propriétés de stabilité des méthodes implicites. Ces méthodes sont relativement simples à implémenter surtout lorsque la matrice de Runge-Kutta a le même coefficient sur sa diagonale (*singly diagonal implicit Runge-Kutta*(SDIRK)). Il existe des algorithmes dont le but est de déterminer les coefficients de la matrice des méthodes DIRK ou SDIRK [Alexander, 1977].

Dans le domaine de l'électromagnétisme, ces méthodes font leurs apparitions dans les années 90 [Nicolet and Delince, 1996]. Les auteurs ont utilisé la méthode DIRK pour résoudre des problèmes magnétostatiques non-linéaires avec courants induits. Elles se sont ensuite rapidement développées au sein de la communauté scientifique [Cameron et al., 1998; Wang et al., 2001; Clemens et al., 2002].

Un avantage certain des méthodes DIRK et SDIRK par rapport à la traditionnelle méthode d'Euler implicite est lié à l'erreur numérique. En effet, les schémas numériques sont d'ordre élevé, l'erreur numérique commise est donc plus petite. Par conséquent, avec une méthode DIRK ou SDIRK, le nombre de pas de temps par période nécessaire à une bonne représentation de la solution est plus petit que pour la méthode d'Euler implicite [Li et al., 2012]. Néanmoins, le principal inconvénient des schémas implicites diagonaux est de déterminer les coefficients de la matrice pour des schémas d'ordres élevés [Kværnø, 2004]. Une solution consiste alors à utiliser une méthode à pas variable.

1.3.1.2 Méthode avec un pas de temps variable

Une approche alternative permettant de réduire le nombre de résolutions de la méthode des éléments finis est d'utiliser un pas de temps adaptatif. Ces méthodes permettent de conserver le contrôle sur l'erreur numérique locale, c'est-à-dire entre deux pas de temps consécutifs. Par conséquent, selon le contrôle de l'erreur souhaité, le pas de temps peut être choisi de manière quasi-optimale. Un moyen peu onéreux en temps de calcul, pour définir ces pas de temps, est d'utiliser un estimateur d'erreur.

Dans la littérature, nous pouvons trouver de nombreux estimateurs d'erreur pour des schémas DIRK ou SDIRK [Cameron et al., 1998; Wang et al., 2001; Gustafsson, 1994] en vue de définir un pas de temps aussi grand que possible tout en gardant le contrôle de l'erreur. Selon les applications, les méthodes utilisant un pas adaptatif peuvent réduire considérablement les temps de calculs par rapport à une méthode

d'Euler classique [Tittarelli et al., 2015][Fu et al., 2012].

Ces méthodes sont intéressantes lorsque le nombre de périodes nécessaire pour atteindre le régime permanent reste raisonnable. Grâce à ces méthodes, le pas de temps optimal peut être approché de façon plus efficace qu'un schéma temporel classique. Les temps de calcul sont réduits grâce à un nombre de résolutions éléments finis inférieur à une méthode classique. Néanmoins, lorsque la constante de temps d'un système est beaucoup plus grande que la durée d'une période, le nombre de résolution éléments finis sera élevé, même en utilisant un pas de temps optimal. Pour palier à cet obstacle, on trouve dans la littérature des méthodes permettant de calculer le régime permanent directement.

1.3.2 Calcul du régime permanent directement

Il existe plusieurs méthodes permettant d'atteindre directement le régime permanent sans passer par le régime transitoire. Dans son ouvrage, Kundert [Kundert et al., 2013] donne une liste non exhaustive de ces méthodes pour des problèmes dans le domaine de la microélectronique. Ci-dessous, nous mentionnerons les méthodes que l'on rencontre le plus souvent. Certaines sont définies dans le domaine fréquentiel, comme la méthode *Harmonic-Balance* [Kundert et al., 2013, chap. 5 et 6], et d'autres dans le domaine temporel, comme la *shooting method* [Kundert et al., 2013, chap. 4 p. 60] ou la *time periodic method* [Kundert et al., 2013, chap. 4 p. 55].

1.3.2.1 Harmonic Balance Finite Element Method

Les schémas temporels décrits précédemment pour calculer le régime permanent périodique de problèmes éléments finis peuvent être perçus comme une représentation de la solution par des polynômes continus par morceaux reliés entre eux aux différents pas de temps. Dans le domaine de l'électrotechnique, lorsque l'on cherche le régime permanent d'un problème ayant une excitation périodique, la solution peut alors être décrite par un signal périodique ayant un grand nombre d'harmoniques. Pour obtenir une bonne précision sur la solution, le nombre de pas de temps par périodes doit être suffisamment grand.

Une alternative est d'utiliser l'*harmonic balance method* [Kundert et al., 2013, chap. 5-6]. Celle-ci se différencie des méthodes temporelles par la représentation de la solution par un ensemble de coefficients associés à des sinusoides contrairement aux méthodes temporelles où la solution est représentée par un échantillon de points. Dans le domaine de l'électromagnétisme, l'*harmonic balance method* fait son apparition à la fin des années 80 [Yamada and Bessho, 1988; Yamada et al., 1989; Lu et al., 1990], elle est couplée aux éléments finis (d'où son appellation d'*Harmonic Balanced Finite Element Method* (HBFEM)) pour modéliser des problèmes magnétodynamiques non-linéaires 2D. Cette méthode permet de calculer la solution périodique de problèmes différentiels/algébriques, c'est un cas particulier des méthodes de Galerkin. L'*harmonic balance method* consiste à décomposer la solution en série de Fourier, c'est-à-dire, en une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques. Par exemple, prenons le cas du problème magnétodynamique linéaire en formulation \mathbf{A}^* 1.124 discrétisé en espace et continu en temps. Nous supposons que le potentiel vecteur magnétique est T-périodique défini dans l'espace $\mathcal{A} \in \mathbf{W}^1([0, T], \mathcal{D})$ avec la

condition de périodicité $\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}(T)$. Pour décomposer la solution, nous devons utiliser une généralisation des bases algébriques dans laquelle les combinaisons linéaires sont finies, il s'agit d'une notion d'analyse fonctionnelle connue sous le nom de base de Schauder dont les combinaisons linéaires peuvent être infinies. Dans l'*harmonic balance method*, la base de Schauder utilisée $\mathcal{E} = \psi_k, k \in \mathbb{N}$ est une base de fonctions harmoniques définie par :

$$\psi_k := e^{jk\omega t}, \quad (1.145)$$

avec ω la pulsation. La solution $\mathcal{A}(t)$ peut être représentée par une série de Fourier :

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{\mathcal{A}}_k e^{jk\omega t} \quad (1.146)$$

avec $\hat{\mathcal{A}}_k$ les coefficients de Fourier de même taille que \mathcal{A} donnés par :

$$\hat{\mathcal{A}}_k := \frac{1}{T} \int_0^T e^{-jk\omega t} \cdot \mathcal{A}(t) dt. \quad (1.147)$$

Le problème revient alors à chercher ces coefficients. Pour cela, le système d'équations s'écrit sous une formulation variationnelle, l'équation est intégrée sur $[0, T]$ et la fonction test ψ appartient à la base \mathcal{E} :

$$\int_0^T (\mathbf{M}\mathcal{A}(t) + \mathbf{S}\dot{\mathcal{A}}(t) - \mathbf{F}(t)) \cdot \psi dt = 0 \quad (1.148)$$

L'approche de Galerkin consiste à projeter l'équation ainsi que la fonction test dans un sous-espace de \mathcal{E} de dimension finie :

$$\mathcal{E}_{N_m} = \psi_k, \quad 0 \leq k \leq N_m \quad (1.149)$$

Où N_m est le nombre de fréquences nécessaire pour décomposer la solution, on l'appelle également nombre de modes. La solution $\mathcal{A}(t)$ devient :

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{k=0}^{N_m} \hat{\mathcal{A}}_k e^{jk\omega t} \quad (1.150)$$

et l'équation 1.148 en l'ensemble d'équations :

$$\int_0^T (\mathbf{M}\mathcal{A}(t) + \mathbf{S}\dot{\mathcal{A}}(t) - \mathbf{F}(t)) \cdot \psi_k dt = 0, \quad \text{avec } 0 \leq k \leq N_m. \quad (1.151)$$

En remplaçant la solution et la fonction test, on obtient :

$$\int_0^T \sum_{k_1=0}^{N_m} (\mathbf{M} + jk_1\omega\mathbf{S}) \hat{\mathcal{A}}_{k_1} e^{jk_1\omega t} \cdot e^{jk_2\omega t} dt = \int_0^T \mathbf{F}(t) \cdot e^{jk_2\omega t} dt \quad (1.152)$$

avec $0 \leq k_2 \leq N_m$. Finalement, en notant que $e^{jk_1\omega t} \cdot e^{jk_2\omega t} = \delta_{k_1, k_2}$ le système matriciel à résoudre est diagonal par bloc :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & & & & \\ & \mathbf{M} + \frac{2\pi j}{T} \mathbf{S} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{M} + \frac{2N_m\pi j}{T} \mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{A}}_0 \\ \hat{\mathcal{A}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathcal{A}}_{N_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{F}}_0 \\ \hat{\mathbf{F}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{F}}_{N_m} \end{pmatrix} \quad (1.153)$$

avec $\hat{\mathbf{F}}_k = \int_0^T \mathbf{F}(t) \cdot e^{jk\omega t} dt$ pour $0 \leq k_2 \leq N_m$. Comme nous pouvons le voir avec cet exemple, l'intérêt majeur de la HBFEM sur les méthodes temporelles concerne la résolution des problèmes magnétodynamiques puisque, dans le domaine fréquentiel, les coefficients à déterminer ne sont pas des fonctions du temps ce qui implique que le problème à résoudre est un problème algébrique.

La taille de ce système matriciel dépend du nombre d'inconnus éléments finis et du nombre de modes. Par conséquent, l'HBFEM s'avère intéressante lorsque le nombre de modes permettant de décrire la solution est peu élevé, puisque le nombre de coefficients à déterminer est faible. Dans le cas contraire, la taille du système à résoudre peut rapidement devenir importante ce qui va grandement impacter les temps de calcul. De plus, il n'est pas toujours simple de connaître *a priori* les fréquences dominantes de la solution, si le nombre de modes est plus petit que le nombre de modes nécessaires alors la solution approchée sera très éloignée de la solution réelle, si parallèlement, le nombre de modes est grand, alors on augmentera inutilement la taille du système matriciel.

Une autre difficulté majeure des approches harmoniques concerne la résolution de problèmes non-linéaires, car les coefficients ne peuvent pas être calculés directement. Reprenons notre exemple en ajoutant la non-linéarité. La matrice RotRot devient non-linéaire et nous mettons à jour l'équation 1.148 :

$$\int_0^T (\mathbf{M}(\mathcal{A}(t))\mathcal{A}(t) + \mathbf{S}\dot{\mathcal{A}}(t) - \mathbf{F}(t)) \cdot \psi dt = 0 \quad (1.154)$$

En procédant de la même manière, il est trivial de remarquer que la matrice RotRot dépend des différents modes. Ceci implique que la matrice du système matriciel 1.153 va se transformer en matrice pleine. La résolution de ce système va être grandement impactée et les temps de calcul seront beaucoup plus longs. De plus, quelque soit la méthode utilisée pour la résolution du problème non-linéaire, à savoir la méthode de Newton-Raphson [Gyselinck et al., 2002b] ou la méthode du point-fixe [Aussehofer et al., 2007], il est nécessaire de repasser dans le domaine temporel pour pouvoir prendre en considération la courbe B-H. C'est la raison pour laquelle, dans la littérature, la HBFEM est parfois présentée comme une méthode mixte, à la fois fréquentielle et temporelle.

1.3.2.2 Shooting Method

Il existe d'autres alternatives que celle consistant à imposer une solution initiale. Par exemple, au lieu d'imposer une condition initiale au temps $t = 0$, il est possible

d'imposer une condition *finale* à la fin d'un intervalle de temps. Le problème obtenu est également un problème de Cauchy, cependant, la résolution se fera avec une intégration numérique décroissante dans le temps et ce, jusqu'au temps $t = 0$. Il est également possible d'imposer une condition initiale et une condition finale, ces problèmes sont connus sous le nom de problèmes aux limites et sont particulièrement bien adaptés aux problèmes périodiques, car des conditions de périodicités peuvent servir de conditions limites. Par exemple, pour l'équation différentielle :

$$f(x(t), t) = \dot{x}(t) \quad (1.155)$$

avec $x \in \mathbb{R}^N$. Pour obtenir le régime permanent d'une solution $x(t)$ périodique de période T , la solution doit satisfaire la condition aux limites :

$$x(0) - x(T) = 0. \quad (1.156)$$

Ce qui donne le problème aux limites :

$$\begin{cases} f(x(t), t) = \dot{x}(t) \\ x(0) - x(T) = 0 \end{cases} \quad (1.157)$$

La démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution d'un problème aux limites est toutefois loin d'être triviale. Une technique permet de se ramener à l'étude d'un problème de Cauchy en cherchant les racines d'une équation non-linéaire. En effet, nous pouvons introduire la fonction $\phi(x(0), 0, t)$ connue sous le nom de *state-transition function* et qui est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.158)$$

au temps t pour la condition initiale x_0 au temps 0. En d'autres termes, on a :

$$\phi(x(0), 0, t) = x(0) + \int_0^t x(\tau) d\tau. \quad (1.159)$$

Par conséquent, le problème aux limites 1.157 peut se réécrire en fonction de ϕ afin d'obtenir le problème de Cauchy 1.158 dans lequel x_0 doit satisfaire l'équation non-linéaire :

$$x(0) - \phi(x(0), 0, T) = 0. \quad (1.160)$$

Les deux problèmes sont équivalents, si x_0 est une racine du problème 1.160 alors $x(t) = \phi(x(0), 0, t)$ sera solution du problème 1.157. Le principe de ramener le problème aux limites à la recherche d'une condition initiale d'une équation non-linéaire est l'idée de base des *shooting methods*.

Le problème 1.160 peut se résoudre facilement avec la méthode du point-fixe, on aurait à résoudre itérativement l'algorithme suivant :

$$x_0^{k+1} = \phi(x_0^k, 0, T). \quad (1.161)$$

Cependant, la convergence étant assez lente, deux autres méthodes lui sont préférées, d'une part l'*extrapolation shooting method* et d'autre part la *Newton shooting*

method.

Le principe des méthodes d'extrapolation est d'accélérer la convergence de la méthode du point-fixe 1.161 en utilisant des prédictions sur la solution. Il existe une multitude d'approches pour extrapoler la solution [Skelboe, 1980; Clemens et al., 2003; Wakao et al., 2001], certaines plus efficaces que d'autres.

La *Newton shooting method* fut introduite pour la première fois dans [Aprille and Trick, 1972]. Les auteurs ont directement appliqué la méthode de Newton-Raphson au problème 1.160, ce qui donne :

$$x_0^{k+1} = x_0^k - [J_\phi(x_0^k, 0, T)]^{-1}[x_0^k - \phi(x_0^k, 0, T)] \quad (1.162)$$

avec

$$J_\phi(x_0^k, 0, T) = \frac{\partial}{\partial x_0^k} (x_0^k - \phi(x_0^k, 0, T)) = \mathbf{I}_{N,N} - \frac{\partial x^k(T)}{\partial x_0^k} \quad (1.163)$$

où $\mathbf{I}_{N,N}$ est la matrice identité de taille $N \times N$. Les deux étapes principales de cet algorithme concerne le calcul de $\phi(x_0^k, 0, T)$ situé dans le résidu et de $\frac{\partial x^k(T)}{\partial x_0^k}$ définit dans la jacobienne.

À chaque itération de la *Newton shooting method*, le calcul $\phi(x_0^k, 0, T)$ revient à résoudre le problème de Cauchy 1.158 en effectuant une intégration numérique sur la période $[0, T]$ avec x_0^k la solution initiale au temps $t = 0$. Nous avons vu dans les parties précédentes que la méthode d'Euler implicite est généralement la méthode la plus utilisée, mais que d'autres méthodes supérieures en ordre sont également toutes indiquées.

Le calcul du terme $\frac{\partial x^k(T)}{\partial x_0^k}$ se fait de manière chaînée à travers le schéma temporel utilisé. Par exemple, pour la méthode d'Euler implicite, au j^e pas de temps, la quantité $\frac{\partial x_j^k}{\partial x_0^k}$ est égale à :

$$\frac{\partial x_j^k}{\partial x_0^k} = \frac{\partial x_{j-1}^k}{\partial x_0^k} + h_j \frac{\partial f(x_j^k, t_j)}{\partial x_0^k} \quad (1.164)$$

avec $h_j = t_j - t_{j-1}$. Par conséquent, en utilisant la condition initiale $\frac{\partial x_0^k}{\partial x_0^k} = 1$, le terme $\frac{\partial x^k(T)}{\partial x_0^k}$ se calculera à la fin de cette chaîne.

Comme toutes les méthodes de Newton-Raphson, la *Newton shooting method* convergera si la fonction ϕ est suffisamment régulière et que la solution initiale se situe dans le rayon de convergence de la méthode.

1.3.2.3 Time-Periodic Finite Element Method

Dans le domaine temporel, la *shooting method* n'est pas la seule méthode permettant de calculer le régime permanent d'un problème aux limites. Une autre approche consiste à appliquer la méthode des différences finies pour générer une suite d'équations algébriques. En effet, en imposant des conditions de périodicités aux limites, le régime permanent peut être obtenu en calculant simultanément un ensemble d'équations définies sur chaque pas de temps. Cette méthode renommée *time-periodic finite element method* (TPFEM) est introduite en 1985 dans le domaine de l'électromagnétisme [Hara et al., 1985].

Considérons de nouveau le problème linéaire magnétodynamique en formulation \mathbf{A}^* 1.124 :

$$\mathbf{M}\mathcal{A}(t) + \mathbf{S}\dot{\mathcal{A}}(t) = \mathbf{F}(t). \quad (1.165)$$

et nous supposerons la solution $\mathcal{A}(t)$ T-périodique de taille N_x équivalent au nombre de degrés de liberté du problème éléments finis. La période T est discrétisée par $N_t + 1$ points tels que $t_0 < t_1 < \dots < t_{N_t}$. L'intervalle de temps Δt entre chaque pas de temps est supposé ici constant.

La première étape de la méthode des différences finies consiste à discrétiser les opérateurs différentiels grâce aux formules de Taylor-Young :

$$\mathcal{A}(t + \Delta t) = \mathcal{A}(t) + \Delta t \dot{\mathcal{A}}(t) + o(t) \quad (1.166)$$

et

$$\mathcal{A}(t - \Delta t) = \mathcal{A}(t) - \Delta t \dot{\mathcal{A}}(t) + o(t) \quad (1.167)$$

Avec $o(t)$ tend vers 0 quand Δt tend vers 0. Ainsi dans les schémas décentrés amont, une approximation de $\dot{\mathcal{A}}(t)$ du 1^{er} ordre en Δt est donné par :

$$\dot{\mathcal{A}}(t) = \frac{\mathcal{A}(t + \Delta t) - \mathcal{A}(t)}{\Delta t} + o(t) \quad (1.168)$$

et pour un schéma décentré aval :

$$\dot{\mathcal{A}}(t) = \frac{\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(t - \Delta t)}{\Delta t} + o(t). \quad (1.169)$$

Une combinaison des deux donne le schéma centré :

$$\dot{\mathcal{A}}(t) = \frac{\mathcal{A}(t + \Delta t) - \mathcal{A}(t - \Delta t)}{2\Delta t} + o(t). \quad (1.170)$$

Remarquons que les schémas amont/aval se déduisent de la formule de Taylor-Young d'ordre 1 à l'instar des schémas d'Euler explicite/implicite. Les schémas amont/aval permettent de résoudre les problèmes aux dérivées partielles tandis que les méthodes d'Euler explicite/implicite permettent de résoudre un problème de Cauchy, c'est à dire, un problème composé d'une équation différentielle ordinaire vérifiant une certaine condition initiale.

Utilisons le schéma décentré amont, en appliquant les conditions de périodicité $\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}(T)$, le régime permanent est obtenu en résolvant simultanément les N_t équations suivantes :

$$\mathbf{M}\mathcal{A}_1 + \mathbf{S} \frac{\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_{N_t}}{\Delta t} = \mathbf{F}_1, \quad (1.171a)$$

$$\mathbf{M}\mathcal{A}_2 + \mathbf{S} \frac{\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1}{\Delta t} = \mathbf{F}_2, \quad (1.171b)$$

$$\vdots = \vdots \quad (1.171c)$$

$$\mathbf{M}\mathcal{A}_{N_t} + \mathbf{S} \frac{\mathcal{A}_{N_t} - \mathcal{A}_{N_t-1}}{\Delta t} = \mathbf{F}_{N_t}. \quad (1.171d)$$

Ce qui revient à l'écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} & & & -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \\ -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} & \mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} & \mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{N_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{N_t} \end{pmatrix} \quad (1.172)$$

Parallèlement, en appliquant la même démarche pour un schéma décentré aval, nous obtiendrions le système suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} & -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} & -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \\ -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} & & & \mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{N_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{N_t} \end{pmatrix} \quad (1.173)$$

et pour le schéma centré :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{S} & & & -\frac{1}{2\Delta t} \mathbf{S} \\ -\frac{1}{2\Delta t} \mathbf{S} & \mathbf{M} & \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{S} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{2\Delta t} \mathbf{S} & \mathbf{M} & \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{S} \\ \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{S} & & & -\frac{1}{2\Delta t} \mathbf{S} & \mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{N_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{N_t} \end{pmatrix} \quad (1.174)$$

La résolution de ces systèmes est coûteuse puisque ces matrices sont des matrices par bloc de taille $N_t N_x \times N_t N_x$ et non symétriques. La résolution d'un système matriciel non symétrique se fait classiquement avec la *généralisation de la Méthode de Minimisation du Résidu* (GMRES) [Saad and Schultz, 1986] grâce à sa robustesse. Néanmoins, elle requiert une quantité considérable de ressources, ce qui peut être pénalisant.

Dans le cas où la matrice RotRot est non-linéaire, le système décentré amont 1.172 devient non-linéaire :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}(\mathcal{A}_1) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} & & & -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \\ -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} & \mathbf{M}(\mathcal{A}_2) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} & \mathbf{M}(\mathcal{A}_{N_t}) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{N_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{N_t} \end{pmatrix} \quad (1.175)$$

La méthode de Newton-Raphson est la méthode la plus conseillée pour résoudre ce système matriciel. En posant $\mathcal{A}^{l+1} = \mathcal{A}^l + \delta \mathcal{A}^{l+1}$, la l^e itération de Newton-Raphson est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & & -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \\ -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} & \mathbf{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} & \mathbf{J}_{N_t} \end{pmatrix}^{(l)} \begin{pmatrix} \delta \mathcal{A}_1 \\ \delta \mathcal{A}_2 \\ \vdots \\ \delta \mathcal{A}_{N_t} \end{pmatrix}^{(l+1)} = - \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{N_t} \end{pmatrix}^{(l)} \quad (1.176)$$

avec \mathbf{J}_j^l une matrice jacobienne de taille $N_x \times N_x$ et \mathbf{R}_j^l un vecteur résidu de taille N_x .

Même si le régime permanent est atteint directement, la résolution de ces systèmes est très coûteuse. Il existe, cependant, des méthodes permettant d'accélérer la convergence. Ainsi en 2011 [Takahashi et al., 2011], les auteurs proposent d'associer l'*explicit error correction method* (EEC) à la TPFEM pour accélérer la résolution. Cette méthode permet de réduire drastiquement les coûts de calculs [Takahashi et al., 2012, 2013; Igarashi et al., 2012].

1.4 Conclusion

Le but de ce chapitre a été d'introduire les modèles, outils et méthodes classiquement utilisés pour modéliser des problèmes électromagnétiques. Ainsi, nous avons introduit les équations de la magnétostatique et magnétodynamique dérivées des équations de Maxwell. Nous avons introduit les méthodes numériques permettant de discrétiser ces équations à la fois dans le domaine spatial et le domaine temporel. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à un état de l'art sur les méthodes permettant d'accélérer le régime transitoire ou d'obtenir le régime permanent directement. Néanmoins, en électrotechnique, les problèmes électromagnétiques sont souvent couplés à des équations de circuit. Par conséquent, le chapitre suivant est dédié aux méthodes numériques adaptées à la résolution de problèmes électromagnétiques couplés à des équations de circuit.

2

Recherche du régime permanent pour des problèmes électromagnétiques non linéaires couplés circuit

Dans le chapitre précédent, nous avons vu des formulations magnétiques dans lesquelles la densité de courant \mathbf{J}_s dans les inducteurs est utilisée comme source du problème, ce qui revenait à imposer le courant directement dans les inducteurs. En réalité, tous ces dispositifs font généralement partie de circuits électriques complexes alimentés en tension. De ce fait, l'étude passe nécessairement par un couplage entre le problème électromagnétique et les équations du circuit.

Ce chapitre s'organise en trois parties. Dans la première, nous présenterons un état de l'art des méthodes de résolution des problèmes électromagnétiques couplés à des équations de circuit. Dans la deuxième, nous mettrons en place une stratégie dans le but de calculer directement le régime permanent. Finalement, nous validerons cette approche à travers plusieurs applications numériques.

Sommaire

2.1	Méthodes de résolution de problèmes électromagnétiques couplés circuit : État de l'art	65
2.2	Waveform Relaxation-Newton Method	78
2.3	Validation numérique	89
2.4	Conclusion	109

2.1 Méthodes de résolution de problèmes électromagnétiques couplés circuit : État de l'art

Dans le domaine de l'électrotechnique, les inducteurs bobinés constitués d'enroulements de fils autour de noyaux magnétiques permettent le couplage magnétique et électrique entre les dispositifs électromagnétiques et les circuits électriques. Ainsi, le problème qui nous intéresse est composé d'une part d'un problème magnétique (dispositif électromagnétique basse fréquence) et d'autre part d'un problème électrique (équations de circuit). Le couplage entre les deux est permis grâce à la présence des inducteurs.

La résolution des problèmes électromagnétiques couplés à des équations de circuit, est un sujet qui a été largement traité dans la littérature [Meunier et al., 2002]. Dans notre étude, nous nous arrêterons sur les méthodes les plus rencontrées dans la littérature ainsi que celles que nous utiliserons dans la suite de ce chapitre. À savoir, des méthodes qui agiront sur les modèles physiques comme les schémas équivalents ou les méthodes de substitution, ainsi que des méthodes se concentrant sur les techniques de résolution avec des couplages forts ou faibles. Une étude détaillée de ces différents couplages a été faite [Pierquin, 2014, chap. 3].

2.1.1 Les schémas équivalents

Une approche consiste à remplacer le problème électromagnétique par des modèles électriques équivalents à constantes localisées qui sont représentés par des équations et des schémas électriques. Le dispositif électromagnétique est alors représenté par un ensemble de dipôles, généralement un ensemble de résistances et d'inductances. Par exemple, la figure 2.1 représente le schéma équivalent d'un transformateur monophasé. Cette représentation n'est pas unique, en effet, pour un même dispositif électromagnétique, il est possible d'obtenir différents schémas selon le degré de précision souhaité ou selon la culture des utilisateurs [Multon, 1997]. Les paramètres

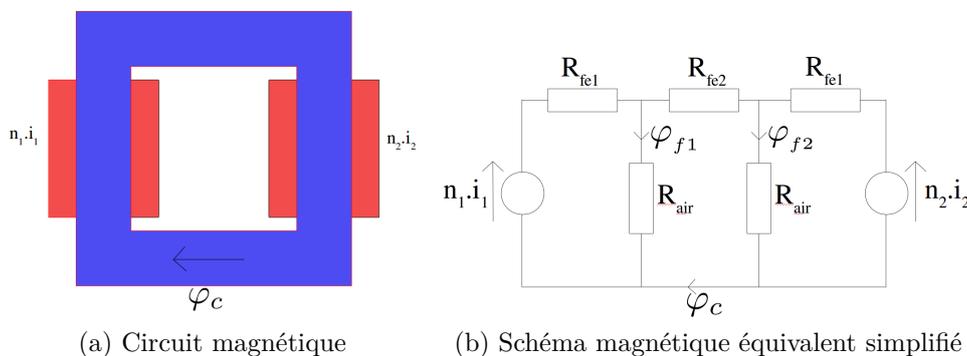


FIGURE 2.1 – Représentation d'un circuit magnétique élémentaire et de son schéma magnétique équivalent simplifié

du schéma équivalent sont obtenus expérimentalement ou par calcul. Plus le schéma

équivalent est complexe, plus il sera difficile d'obtenir ces paramètres. De plus, avec cette approche, on perd l'information au niveau local.

2.1.2 Couplages magnétiques-électriques forts

Parmi les techniques de résolution, les couplages sont dits forts lorsque les différents modèles sont assemblés en un seul et même système. Dans certains ouvrages, les couplages forts sont également appelés méthodes de couplages directs. La résolution des différents problèmes physiques est donc faite dans un système matriciel dans lequel les conditions de couplage sont implicitement définies. Ces couplages sont parfois difficiles à mettre en place et plus particulièrement lorsque le schéma électrique est complexe.

2.1.2.1 Méthode de substitution

Parmi les couplages forts, la méthode de substitution permet de coupler les différents modèles physiques grâce à des grandeurs communes. Lorsqu'il est possible d'isoler une de ces grandeurs dans une équation linéaire, il est alors envisageable de substituer cette grandeur dans les autres modèles et de réduire le nombre d'inconnues.

Prenons un problème électromagnétique simple couplé à une équation de circuit pour illustrer la méthode de substitution. Considérons une bobine dont le noyau de fer comprend une partie conductrice connectée à une source de tension. En reprenant la formulation \mathbf{A}^* (éq. 1.76), le problème magnétique continu s'écrit :

$$\mathbf{rot} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{N}(\mathbf{x})i(t) \quad (2.1)$$

avec i le courant, μ la perméabilité magnétique (supposé linéaire dans cet exemple), σ la conductivité électrique, \mathbf{N} la densité de courant unitaire définie dans le chapitre précédent et \mathbf{A} le potentiel vecteur magnétique modifié.

En imposant une tension aux bornes de l'inducteur bobiné, l'équation électrique associée s'écrit :

$$v(t) = Ri(t) + \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (2.2)$$

avec v la tension, R la résistance du bobinage et ϕ le flux dans l'enroulement. Celui-ci est lié au courant à travers la relation :

$$\phi(t) = L(i(t))i(t) \quad (2.3)$$

où L , qui dépend de la géométrie, représente l'inductance propre de bobinage. Le flux ϕ est la grandeur physique commune au problème électrique et magnétique puisqu'il est également lié au potentiel vecteur par la relation [Le Menach, 1999][Henneron, 2004] :

$$\phi(t) = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)dD. \quad (2.4)$$

C'est donc grâce à ce terme que le couplage est rendu possible.

Nous appliquons les techniques de discrétisation spatiale et temporelle vues dans le

chapitre précédent, c'est-à-dire la méthode des éléments finis et la méthode d'Euler implicite. De plus, puisque nous allons substituer un modèle, nous pouvons définir la même échelle de temps pour les deux modèles. En posant N_t le nombre de pas de temps simulés et N_x le nombre de degrés de liberté liés au problème issu de la méthode des éléments finis, on obtient le système discret suivant :

$$\begin{cases} v_{j+1} = Ri_{j+1} + \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{\Delta t} \\ i_0 = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \left(\mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \right) \mathcal{A}_{j+1} = \mathbf{F}i_{j+1} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \mathcal{A}_j \\ \mathcal{A}_0 = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

avec la relation de couplage :

$$\phi_{j+1} = \mathbf{F}^t \mathcal{A}_{j+1} \quad (2.7)$$

où \mathbf{M} est la matrice RotRot de taille $N_x \times N_x$, \mathbf{S} est la matrice de conductivité de taille $N_x \times N_x$, \mathcal{A} est le vecteur des circulations du potentiel de taille N_x , \mathbf{F} est un vecteur représentant la densité de courant unitaire discrète de taille N_x .

Grâce à l'équation de couplage, il est possible d'isoler le courant et de l'exprimer en fonction du potentiel vecteur magnétique :

$$i_{j+1} = \frac{v_{j+1}}{R} - \frac{\mathbf{F}^t (\mathcal{A}_{j+1} - \mathcal{A}_j)}{R \Delta t} \quad (2.8)$$

Puisque cette équation est linéaire, nous pouvons remplacer (substituer) le courant de l'équation magnétique. On obtient [Hecht and Marrocco, 1990] :

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \right) \mathcal{A}_{j+1} &= \mathbf{F}i_{j+1} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \mathcal{A}_j \\ \Rightarrow \left(\mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \right) \mathcal{A}_{j+1} &= \mathbf{F} \left(\frac{v_{j+1}}{R} - \frac{\mathbf{F}^t (\mathcal{A}_{j+1} - \mathcal{A}_j)}{R \Delta t} \right) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \mathcal{A}_j \\ \Rightarrow \left(\mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \right) \mathcal{A}_{j+1} &= \frac{v_{j+1}}{R} \mathbf{F} - \frac{1}{R \Delta t} \mathbf{F} \mathbf{F}^t (\mathcal{A}_{j+1} - \mathcal{A}_j) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \mathcal{A}_j \\ \Rightarrow \left(\mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} + \frac{1}{R \Delta t} \mathbf{F} \mathbf{F}^t \right) \mathcal{A}_{j+1} &= \frac{v_{j+1}}{R} \mathbf{F} + \frac{1}{R \Delta t} \mathbf{F} \mathbf{F}^t \mathcal{A}_j + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \mathcal{A}_j \end{aligned}$$

Pour en déduire l'algorithme :

$$\begin{cases} \left(\mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} + \frac{1}{R \Delta t} \mathbf{F} \mathbf{F}^t \right) \mathcal{A}_{j+1} = \frac{v_{j+1}}{R} \mathbf{F} + \left(\frac{1}{R \Delta t} \mathbf{F} \mathbf{F}^t + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \right) \mathcal{A}_j \\ \mathcal{A}_0 = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

pour $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Notons que c'est grâce à la discrétisation temporelle (méthode d'Euler) que nous avons pu appliquer la méthode de substitution, car la relation qui lie le courant au potentiel vecteur magnétique au niveau continu n'est pas linéaire. On pourrait procéder de la même manière en insérant le modèle magnétique dans l'équation de circuit. Les méthodes de substitution ne sont pas toujours applicables. De plus, avec les méthodes de substitution, certaines grandeurs physiques ne sont pas calculées directement. Il est, dans ce cas, nécessaire de faire un calcul en post-traitement pour obtenir la solution des grandeurs non calculées.

2.1.2.2 Assemblage par blocs

Un autre type de couplage fort est obtenu quand les différents modèles sont assemblés par bloc dans le même système. Ce couplage est utilisé dans *code_Carmel* pour la résolution de problèmes électromagnétiques couplés à des équations de circuit. Les différents modèles physiques sont résolus simultanément pour un même pas de temps. Il faudra donc choisir un pas de temps adapté aux différentes constantes de temps, ce qui peut être contraignant si elles sont très éloignées.

Reprenons le problème électromagnétique couplé à une équation de circuit décrit précédemment. Le couplage fort consiste à écrire ces deux problèmes dans un seul et unique système matriciel, par conséquent, l’algorithme de résolution s’écrit pour $j \in \{1, 2, 3, \dots\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Sigma_j) : \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} & -\mathbf{F} \\ \hline -\mathbf{F}^t & -\Delta t R \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathcal{A}_j \\ i_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \mathcal{A}_{j-1} \\ -\Delta t v_j - \mathbf{F}^t \mathcal{A}_{j-1} \end{pmatrix} \\ (\Sigma_0) : \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 \\ i_0 \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Notons que ce système a été rendu symétrique en multipliant l’équation électrique par $-\Delta t$ pour pouvoir utiliser la méthode du gradient conjugué. L’utilisation de pré-conditionneur permet d’homogénéiser les valeurs propres et d’améliorer la convergence. L’algorithme 2.1 de résolution par couplage fort est relativement simple à mettre en place puisqu’il n’est composé que d’une simple boucle temporelle.

La figure (2.2), quant à elle, propose une schématisation du couplage fort. La couleur rouge est associée aux problèmes en cours de résolution et la couleur verte pour les problèmes résolus. Les flèches de couleur bleue sont associées à la boucle temporelle.

Algorithme 2.1 : Couplage fort

```

1 début
  | Entrées :  $\Sigma_0$ 
2   | pour  $j = 1, N_t$  faire
3   |   | Résoudre  $\Sigma_j$  (éq. 2.10)
4   |   | fin
5   |   | retourner vrai
6 fin
    
```

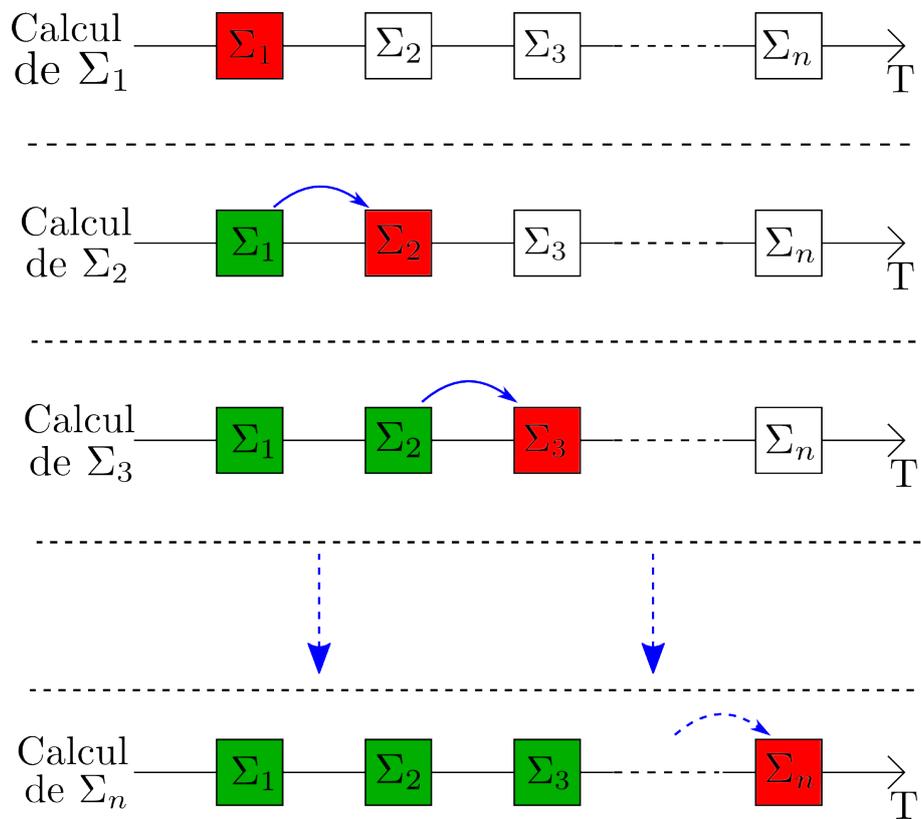


FIGURE 2.2 – Schéma du couplage direct fort

2.1.3 Couplages magnétiques-électriques faibles

Dans le cas des couplages faibles, chaque modèle physique est résolu séparément. Les conditions de couplage sont satisfaites en transférant les données d'un modèle physique à l'autre. Ce qui explique que les couplages faibles soient souvent associés à des méthodes itératives. Ainsi en reprenant, l'exemple précédent, on définit les deux sous-problèmes :

$$\begin{cases} (\beta_j) : v_j = Ri_j + \mathbf{F}^t \frac{\mathcal{A}_j - \mathcal{A}_{j-1}}{\Delta t} \\ (\beta_0) : i_0 = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} (\gamma_j) : \left(\mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S}\right) \mathcal{A}_j = \mathbf{F}i_j + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \mathcal{A}_{j-1} \\ (\gamma_0) : \mathcal{A}_0 = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Il existe de nombreuses méthodes utilisant des couplages faibles pouvant résoudre les problèmes β_j et γ_j , $j \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Lorsque les différents modèles admettent une même discrétisation temporelle, le plus simple et le plus précis des couplages faibles fait appel à un point-fixe à chaque pas de temps de telle sorte qu'après chaque résolution, les conditions de couplage soient mises à jour et transférées dans la résolution suivante. L'utilisation d'un point-fixe à chaque pas de temps permet de garder le contrôle de l'erreur et d'avoir une solution aussi précise que pour un couplage fort. Cet approche décrit dans l'algorithme 2.2 est composée d'une boucle temporelle ainsi que d'une boucle point-fixe. La condition d'arrêt est généralement basée sur l'erreur relative entre deux itérations successives. Par exemple, à la k^e itération, l'erreur ε_i commise sur le courant vaut :

$$\varepsilon_i = \frac{\|i_j^k - i_j^{k-1}\|^2}{\|i_j^k\|^2} \quad (2.13)$$

et $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ sur le potentiel vecteur magnétique :

$$\varepsilon_{\mathcal{A}} = \frac{\|\mathcal{A}_j^k - \mathcal{A}_j^{k-1}\|^2}{\|\mathcal{A}_j^k\|^2} \quad (2.14)$$

La figure 2.3 illustre ce couplage faible. La couleur rose est utilisée sur les flèches représentant les itérations de la boucle point-fixe.

Malheureusement, l'utilisation de ce couplage peut vite mener à des temps de calcul importants puisque la vitesse de convergence du point fixe peut être relativement lente. Dans ces conditions, certains couplages proposent d'utiliser un point-fixe après quelques pas de temps, ce qui permet de diminuer le nombre de résolutions tout en gardant un certain contrôle de l'erreur. Comme nous pouvons le voir dans l'algorithme 2.3 défini pour un point-fixe tous les 3 pas de temps. Avec ce couplage, les différents modèles physiques ont la possibilité d'avoir une discrétisation temporelle différente, comme cela est représenté dans la figure 2.4. Par conséquent, il est concevable de choisir pour chaque modèle physique un pas de temps proche du pas de temps optimal afin de réduire le nombre de résolutions.

Par ailleurs, selon le couplage, les différents modèles physiques peuvent être résolus parallèlement ou en série. À l'instar des deux couplages détaillés ci-dessus, un

compromis est toujours nécessaire entre temps de calcul et qualité de la solution. En effet, les couplages possédant des temps de calcul relativement peu élevés ne permettent pas d'obtenir une solution très précise et, inversement, les couplages permettant d'obtenir une erreur relativement petite requièrent des temps de calcul pouvant être importants. Le choix de la méthode de couplage s'adapte donc au problème ainsi qu'aux besoins des utilisateurs.

Algorithme 2.2 : Couplage faible

```

1 début
  Entrées :  $\beta_0, \gamma_0$ 
2 pour  $j = 1, N_t$  faire
3    $\varepsilon_i = 1, \varepsilon_A = 1, k = 1$ 
4   tant que  $\varepsilon_i, \varepsilon_A > 10^{-5}$  faire
5     Résoudre  $\beta_j^k$  (éq. 2.11)
6     Calcul de l'erreur  $\varepsilon_i$  (éq. 2.13)
7     Résoudre  $\gamma_j^k$  (éq. 2.12)
8     Calcul de l'erreur  $\varepsilon_A$  (éq. 2.14)
9      $k = k + 1$ 
10  fin
11 fin
12 retourner vrai
13 fin
  
```

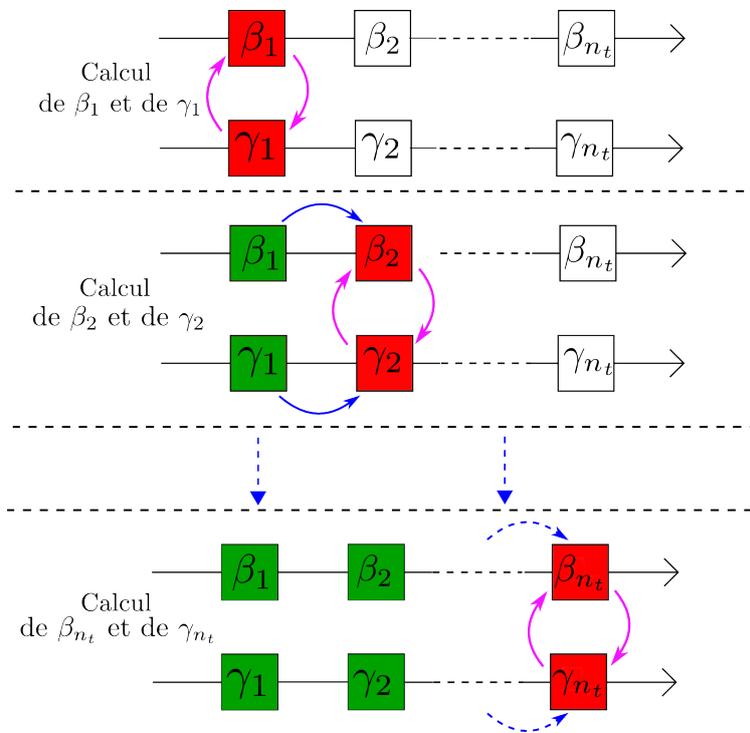


FIGURE 2.3 – Schéma d'un couplage faible

```

Algorithme 2.3 : Second couplage faible
1  début
   Entrées :  $\beta_0, \gamma_0$ 
2  pour  $j = 1, N_t$  faire
3      si  $j \equiv 0 \pmod{3}$  alors
4           $\varepsilon_i = 1, \varepsilon_{\mathcal{A}} = 1, k = 1$ 
5          tant que  $\varepsilon_i, \varepsilon_{\mathcal{A}} > 10^{-5}$  faire
6              Résoudre  $\beta_j^k$  (éq. 2.11)
7              Calcul de l'erreur  $\varepsilon_i$  (éq. 2.13)
8              Résoudre  $\gamma_j^k$  (éq. 2.12)
9              Calcul de l'erreur  $\varepsilon_{\mathcal{A}}$  (éq. 2.14)
10              $k = k + 1$ 
11         fin
12     sinon
13         Résoudre  $\beta_j$  (éq. 2.11)
14         Résoudre  $\gamma_j$  (éq. 2.12)
15     fin
16 fin
17 retourner vrai
18 fin
    
```

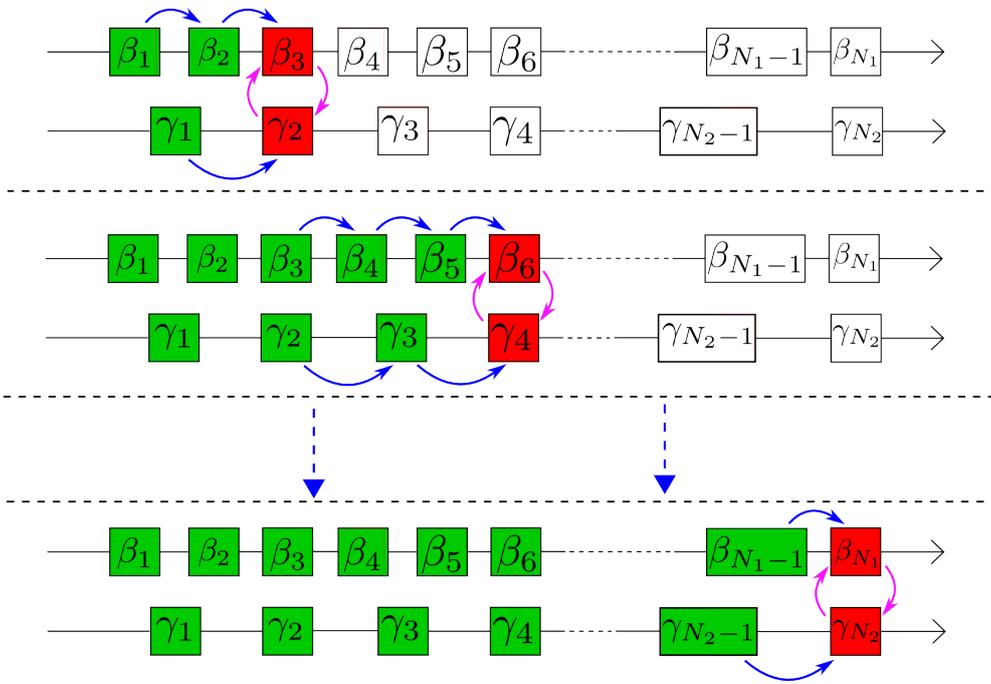


FIGURE 2.4 – Schéma d'un second couplage faible

2.1.4 Waveform Relaxation Method

La *Waveform Relaxation Method* (WRM), également appelée *dynamic iteration* a été introduite par Lelarasmee [Lelarasmee et al., 1982] en 1982 pour la modélisation de circuit électrique de grande taille. Cette méthode, appartenant à la classe des couplages faibles, permet de résoudre les problèmes multi physiques. Elle a été utilisée dans de nombreux domaines, comme la mécanique, l'économie, et plus généralement la physique qui étaient amenés à résoudre des systèmes d'équations différentielles algébriques (EDA), c'est-à-dire des équations de la forme :

$$F(\dot{x}, x, t) = 0 \quad (2.15)$$

Avec $x \in \mathbb{R}^N$, et $F \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.

La WRM s'applique généralement à deux types de problèmes : les problèmes aux limites (*boundary value problem*) ou les problèmes périodiques dans le temps (*time-periodic problem*). L'idée principale de la WRM est de partitionner un problème de grande taille en sous-problèmes. À titre d'exemple, considérons le circuit électrique présenté dans la figure 2.5a. Ce circuit est composé d'une inductance, de deux résistances et d'un condensateur. Dans cet exemple, le circuit est dissocié au point A, les deux variables significatives en ce point sont la tension notée V_{cpl} et le courant noté I_{cpl} . La WRM consiste à résoudre les équations :

$$V_{cpl} = f_1(I_{cpl}), \quad I_{cpl} = f_2(V_{cpl}) \quad (2.16)$$

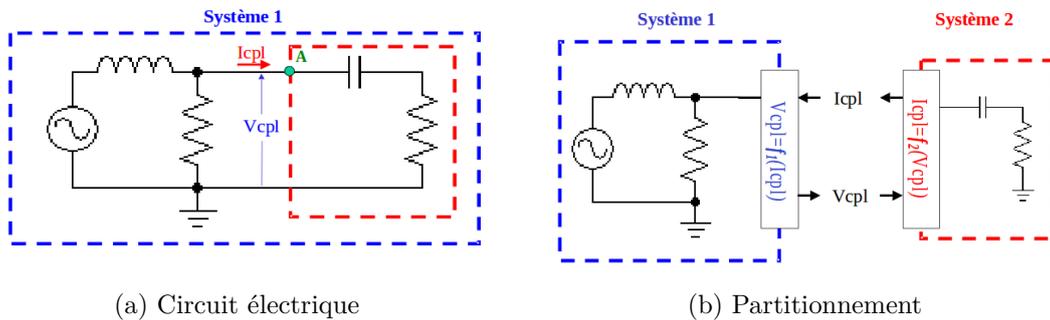


FIGURE 2.5 – Exemple d'une décomposition par la WRM [Samet, 2005]

Les sous-problèmes sont résolus sur un intervalle de temps fixé les uns après les autres. Ceci explique le nom de forme d'ondes puisqu'à chaque itération, on calcule la forme d'onde d'un sous-problème. Dans la littérature, ces itérations sont nommées *sweeps* (balayage). La WRM est une méthode point fixe basée sur les méthodes de Gauss-Seidel (GS) ou Gauss-Jacobi (GJ), qui sont généralement utilisées pour résoudre des systèmes de grandes tailles. Reprenons le problème électromagnétique couplé à une équation de circuit défini précédemment. L'algorithme 2.4 de la WRM basée sur GJ est relativement simple, pour l'obtenir, il suffit d'inverser la boucle temporelle et la boucle point-fixe de l'algorithme 2.2. Le calcul de l'erreur intervient donc sur la fonction d'onde, c'est-à-dire, en notant :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{N_t} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{N_t} \end{pmatrix}$$

l'erreur sur le courant est définie à la k^e itération point-fixe par :

$$\varepsilon_{\mathbf{I}} = \frac{\|\mathbf{I}^k - \mathbf{I}^{k-1}\|^2}{\|\mathbf{I}^k\|^2} \quad (2.17)$$

et sur le potentiel vecteur magnétique :

$$\varepsilon_{\mathcal{A}} = \frac{\|\mathcal{A}^k - \mathcal{A}^{k-1}\|^2}{\|\mathcal{A}^k\|^2} \quad (2.18)$$

La méthode schématisée sur la figure 2.6 consiste à résoudre chacun des sous-problèmes β_j et γ_j sur un intervalle de temps fixée. Les problèmes étant résolus indépendamment les uns des autres, cette méthode est facilement parallélisable.

La WRM basée sur la méthode de Gauss-Seidel diffère dans la transmission des conditions de passage. En effet, comme nous l'avons détaillé dans l'algorithme 2.5, les formes d'ondes ne sont plus calculées en parallèle, mais en série ce qui permet de mettre à jour les conditions de couplages plus rapidement. La WRM basée sur la méthode de Gauss-Seidel requiert moins d'itérations, en revanche, elle n'est pas parallélisable.

Avec ces deux versions de la WRM, les différents sous-problèmes peuvent être résolus sur une échelle de temps différente. Cette propriété, nommée *multirate property* en anglais, est très favorable dans les équations différentielles raides, c'est-à-dire, les équations différentielles dont la résolution par des méthodes numériques explicites est rendue difficile par la sensibilité des paramètres.

Puisque la WRM est une méthode point-fixe, sa vitesse de convergence peut être relativement lente dans certains problèmes. Intuitivement, on sait que le nombre d'itérations de la WRM dépend fortement de la taille du système, du nombre de sous-domaines et des données initiales, mais il est important d'en comprendre le processus. Dans la littérature, de nombreuses études ont apporté une contribution à l'analyse de la convergence de la WRM avec notamment [White and Sangiovanni-Vincentelli, 1985; Miekkała and Nevanlinna, 1987; Nevanlinna and Odeh, 1987] qui apportèrent de solides bases mathématiques à la théorie et plus précisément, ils prouvèrent que la convergence de la WRM est super linéaire. De nombreuses discussions permettent de comprendre l'influence de la décomposition en sous-systèmes sur le taux de convergence. Ils démontrent, notamment, la convergence uniforme pour n'importe quel système linéaire et asymptotiquement stable. On retrouve également des résultats importants sur la convergence pour des problèmes non linéaires dans les articles de Bellen [Bellen and Zennaro, 1993] et de Hout [Hout, 1995].

Certaines études [Ilic-Spong et al., 1987; Reichelt et al., 1988; Lumsdaine et al., 1991] montrent que la WRM peut répondre à notre problématique, c'est-à-dire, aux problèmes périodiques avec des régimes transitoires très longs. Toutefois, la vitesse de convergence étant linéaire, les temps de calcul peuvent être importants dans certaines applications. Ainsi de nombreuses études ont également été menées sur des techniques permettant d'accélérer la convergence de la WRM. Dans [White and Sangiovanni-Vincentelli, 1985], White envisage deux approches possibles. La première consiste à utiliser la méthode de Newton, dont la convergence est quadratique, sur le problème global. Cette méthode est très rapide bien que la convergence reste super linéaire (la fonction d'onde domine la méthode de Newton) et qu'elle

peut demander une grosse capacité de stockage. Une deuxième approche consiste à combiner la méthode de Newton dont la jacobienne est approchée et la méthode de Gauss-Seidel. La convergence est assurée au niveau locale, elle nécessite plus d'itérations que la précédente, mais demande beaucoup moins d'espace mémoire. On retrouve des études approfondies de ces deux méthodes dans les articles de Saleh [Saleh and White, 1990] et de Erdman [Erdman and Rose, 1992]. Une autre technique consiste à partitionner l'intervalle de temps en plusieurs fenêtres (*windows*). Pour chaque fenêtre, on applique l'algorithme 2.3. Plus les fenêtres seront petites plus les calculs seront rapides, mais on peut perdre les propriétés de la WRM, la convergence super-linéaire ou encore la *multirate property* (car les pas de temps doivent être inférieurs à la taille des fenêtres [Zhang, 1996]). En 2012, cette technique de fenêtrage fut appliquée au domaine de l'électromagnétisme sur un problème magnétostatique non linéaire résolu par éléments finis couplé à des équations de circuit [Schops et al., 2012] avec un schéma de Runge-Kutta d'ordre élevé.

Algorithme 2.4 : Waveform relaxation method
basée sur Gauss-Jacobi

```

1  début
   |  Entrées :  $\beta_0, \gamma_0$ 
2  |   $\varepsilon_I = 1, \varepsilon_{\mathcal{A}} = 1, k = 1$ 
3  |  tant que  $\varepsilon_I, \varepsilon_{\mathcal{A}} > 10^{-5}$  faire
4  |   |  pour  $j = 1, N_t$  faire
5  |   |   |  Résoudre  $\beta_j^k$  (éq. 2.11)
6  |   |   |  Résoudre  $\gamma_j^k$  (éq. 2.12)
7  |   |  fin
8  |   |  Calcul de l'erreur  $\varepsilon_I$  (éq. 2.17)
9  |   |  Calcul de l'erreur  $\varepsilon_{\mathcal{A}}$  (éq. 2.18)
10 |   |   $k = k + 1$ 
11 |  fin
12 |  retourner vrai
13 fin

```

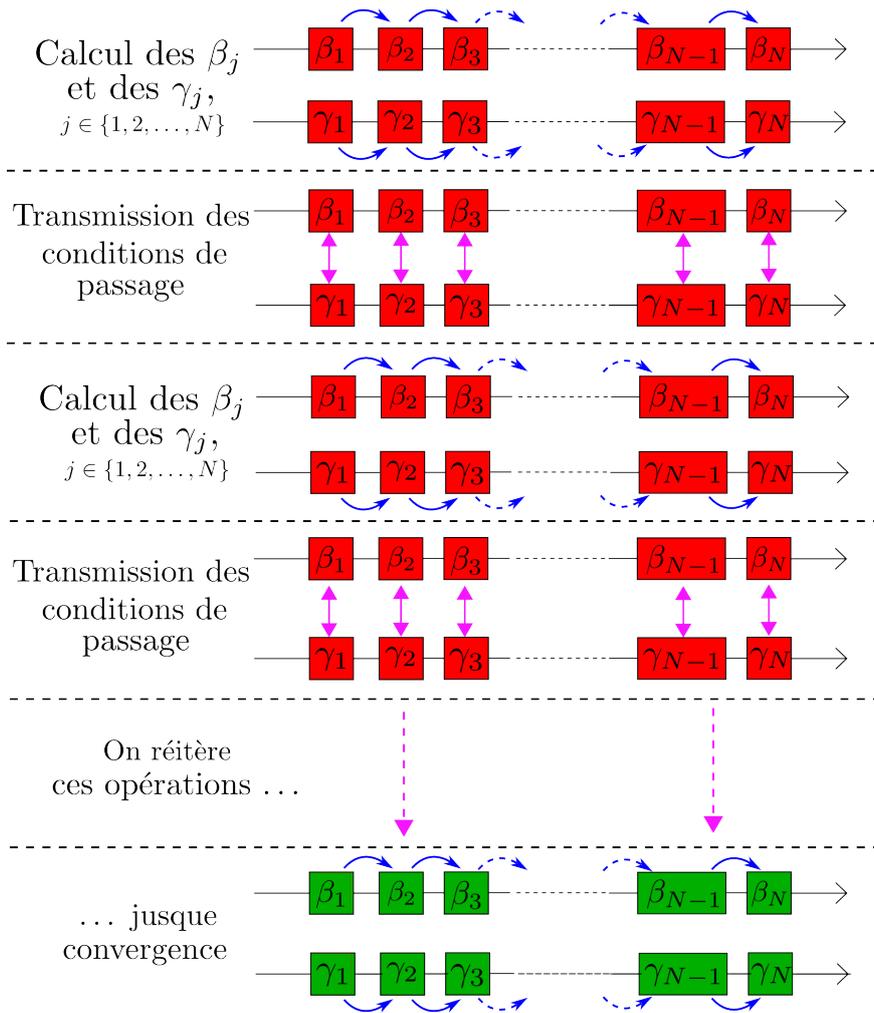


FIGURE 2.6 – Schéma de la waveform relaxation method basée sur Gauss-Jacobi

Algorithme 2.5 : Waveform relaxation
method basée sur Gauss-Seidel

```

1  début
   Entrées :  $\beta_0, \gamma_0$ 
2   $\varepsilon_I = 1, \varepsilon_A = 1, k = 1$ 
3  tant que  $\varepsilon_I, \varepsilon_A > 10^{-5}$  faire
4      pour  $j = 1, N_t$  faire
5          | Résoudre  $\beta_j^k$  (éq. 2.11)
6      fin
7      Calcul de l'erreur  $\varepsilon_I$  (éq. 2.13)
8      pour  $j = 1, N_t$  faire
9          | Résoudre  $\gamma_j^k$  (éq. 2.12)
10     fin
11     Calcul de l'erreur  $\varepsilon_A$  (éq. 2.14)
12      $k = k + 1$ 
13 fin
14 retourner vrai
15 fin
    
```

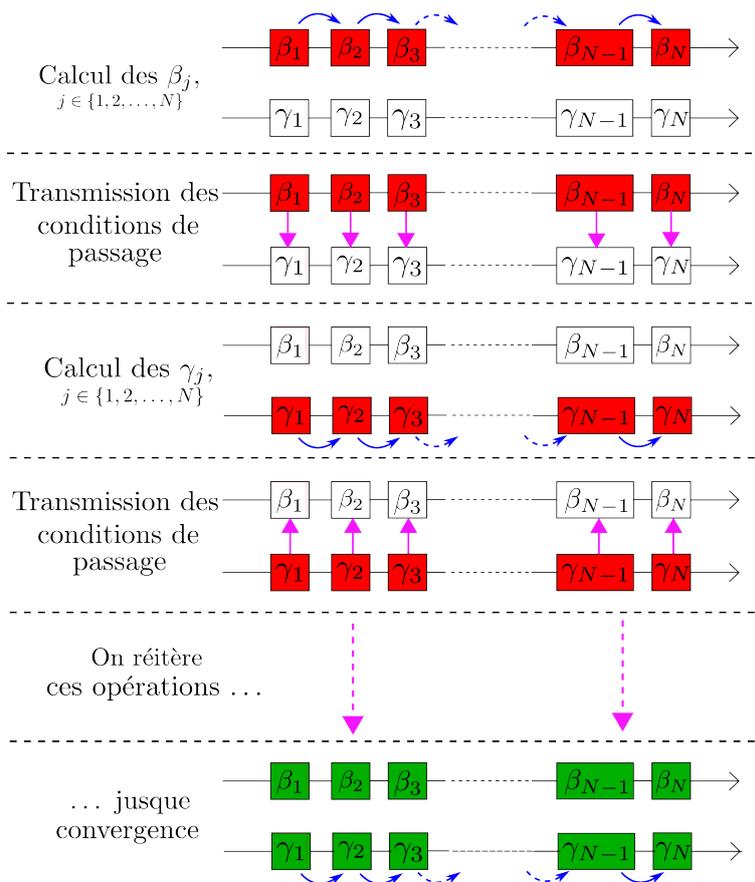


FIGURE 2.7 – Schéma de la waveform relaxation method basée sur Gauss-Seidel

2.2 Waveform Relaxation-Newton Method

Nous proposons d'utiliser un ensemble de méthodes répondant aux différentes problématiques rencontrées lors de la résolution des problèmes électromagnétiques couplés à des équations de circuit.

2.2.1 Problèmes magnétostatiques couplés à des équations de circuit

Considérons un dispositif électromagnétique possédant une caractéristique magnétique non linéaire avec un inducteur bobiné. Notons que la méthode décrite ci-dessous peut facilement s'adapter à plusieurs inducteurs. En utilisant la formulation en potentiel vecteur magnétique le problème s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathcal{A}_{j+1}) \mathcal{A}_{j+1} = \mathbf{F}i_{j+1}, & j = 0, 1, 2, \dots \\ \mathcal{A}_0 = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

où les vecteurs sont de tailles N_x (nombre de degrés de liberté) et les matrices de tailles $N_x \times N_x$. Le dispositif est alimenté par une source de tension périodique que nous couplons à une équation de circuit composé d'une résistance. Ce qui mène à l'équation :

$$\begin{cases} v_{j+1} = Ri_{j+1} + \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{\Delta t}, & j = 0, 1, 2, \dots \\ i_0 = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Le couplage entre les deux équations est permis grâce à l'équation :

$$\phi_{j+1} = \mathbf{F}^t \mathcal{A}_{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

2.2.1.1 Conditions de périodicité

La première problématique que nous allons traiter est celle des régimes transitoires parfois excessivement longs menant à des temps de calcul importants. Rappelons, tout d'abord, que le problème magnétique est résolu par la méthode des éléments finis ce qui est susceptible de mener à un grand nombre de degrés de liberté contrairement aux équations de circuit dont le nombre de degrés de liberté total est lié au nombre d'équations de circuit.

Nous avons vu dans le chapitre 1 (section 1.3) des méthodes répondant à cette problématique. La TPFEM (section 1.3.2.3) a l'avantage de calculer directement le régime permanent en imposant des conditions de périodicité, on passe d'une équation différentielle ordinaire à un problème aux dérivées partielles. L'inconvénient de cette méthode est l'augmentation du nombre de degrés de liberté : la taille du système est multipliée par le nombre de pas de temps sur une période. Néanmoins, il n'est pas contraignant d'augmenter la taille des équations de circuit puisqu'elles possèdent un nombre de degrés de liberté peu élevé.

À l'instar de la source de tension, les inconnues du problème sont périodiques. Nous pouvons donc imposer des conditions de périodicité sur les solutions électriques et magnétiques, c'est-à-dire, le courant et le potentiel vecteur magnétique. Ce qui revient à imposer :

$$i_0 = i_{N_t}, \quad \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_{N_t}, \quad (2.22)$$

avec N_t le nombre de pas de temps sur une période. L'équation de circuit 2.20 se transforme en une équation aux dérivées partielles :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N_t} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{N_t} \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} 1 & & & -1 \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{N_t} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

pour un schéma décentré amont. La taille du système a été multipliée par le nombre de pas de temps N_t . L'élément qui rompt la bidiagonalité de la matrice est une conséquence directe des conditions de périodicité imposées. Ce système est non symétrique, nous pouvons le résoudre avec des méthodes directes puisqu'il est de petite taille. Outre les conditions de périodicité, il est également possible d'avoir des conditions anti-périodiques qui permettent de réduire le domaine temporelle [Caron et al., 2016b].

L'équation 2.19 quant à elle peut se réécrire sous la forme vectorielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}(\mathcal{A}_1) & & & \\ & \mathbf{M}(\mathcal{A}_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{M}(\mathcal{A}_{N_t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{N_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & & & \\ & \mathbf{F} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{N_t} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Toutefois cette équation étant algébrique, elle ne nécessite pas d'être écrite sous forme vectorielle puisqu'on obtient un système matriciel diagonal par bloc qui peut être résolu ligne par ligne. Cependant, nous aurons besoin de la forme vectorielle de cette équation dans les paragraphes suivants.

Nous pouvons également réécrire l'équation de couplage sous forme vectoriel :

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{N_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^t & & & \\ & \mathbf{F}^t & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{F}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{N_t} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

où la matrice est de taille $N_t \times N_x N_t$.

Pour des raisons de lisibilité, on définit les vecteurs de taille N_t :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v(t_1) \\ \vdots \\ v(t_{N_t}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} i(t_1) \\ \vdots \\ i(t_{N_t}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi(t_1) \\ \vdots \\ \phi(t_{N_t}) \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

le vecteur de taille $N_x N_t$:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{N_t} \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

ainsi que la matrice et le vecteur :

$$\mathbf{M}_b(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(\mathcal{A}_1) & & & \\ & \mathbf{M}(\mathcal{A}_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{M}(\mathcal{A}_{N_t}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & & & \\ & \mathbf{F} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

de taille respective $N_x N_t \times N_x N_t$ et $N_x N_t \times N_t$. L'indice \mathbf{b} associera les matrices à un assemblage par blocs de matrices (ou de vecteurs) correspondant aux matrices (ou vecteurs) éléments finis. Sur une période la dimension sera, sauf cas contraire de $N_x N_t$. Nous définissons également l'opérateur de dérivation :

$$\nabla_h = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} 1 & & & -1 \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

pour finalement, obtenir le problème couplé suivant composé de deux systèmes matriciels :

$$\begin{cases} \mathbf{V} = R\mathbf{I} + \nabla_h \mathbf{F}_b^t \mathcal{A} \\ \mathbf{M}_b(\mathcal{A}) \mathcal{A} = \mathbf{F}_b \mathbf{I} \end{cases} \quad (2.30)$$

La résolution de ce problème donnera directement la solution en régime permanent.

2.2.1.2 Méthode de substitution

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons présenté un état de l'art sur les méthodes les plus rencontrées dans la littérature pour la résolution de problèmes couplés. Les couplages forts ont l'avantage d'être plus rapide à converger que les couplages faibles. Par conséquent, pour résoudre le système 2.30 nous privilégions d'utiliser la méthode de substitution.

Ainsi, grâce à l'équation de couplage 2.25, nous pouvons injecter l'équation 2.24 dans l'équation électrique 2.23. Ce qui donne :

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} + \nabla_h \mathbf{F}_b^t [\mathbf{M}_b(\mathcal{A})]^{-1} \mathbf{F}_b \mathbf{I} \quad (2.31)$$

Le vecteur \mathbf{I} est solution de l'équation alors que le vecteur \mathcal{A} peut se calculer *a posteriori*.

2.2.1.3 Méthode de Newton-Raphson

Puisque la perméabilité magnétique possède une caractéristique non linéaire la matrice $\mathbf{M}_b(\mathcal{A})$ dépendant de \mathbf{I} a un comportement non linéaire. Le problème 2.31 est, par conséquent, un problème non linéaire. La méthode de Newton-Raphson nous semble la plus adaptée pour résoudre ce problème. De plus, elle est plus stable que la méthode du point-fixe. Enfin, la méthode de Newton-Raphson est plus intéressante puisqu'elle possède une convergence quadratique.

Dans un premier temps, on calcule le résidu, c'est-à-dire :

$$Res(\mathbf{I}) = R\mathbf{I} + \nabla_h \mathbf{F}_b^t [\mathbf{M}_b(\mathcal{A})]^{-1} \mathbf{F}_b \mathbf{I} - \mathbf{V} \quad (2.32)$$

La jacobienne est obtenue en dérivant le résidu par le vecteur \mathbf{I} :

$$J(\mathbf{I}) = \frac{\partial Res(\mathbf{I})}{\partial \mathbf{I}} \quad (2.33)$$

$$= R\mathcal{I}_{N_t} + \nabla_h \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} [\mathbf{F}_b^t [\mathbf{M}_b(\mathcal{A})]^{-1} \mathbf{F}_b \mathbf{I}] \quad (2.34)$$

Avec \mathcal{I}_{N_t} la matrice identité de taille $N_t \times N_t$.

L'évaluation du terme $\frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} [\mathbf{F}_b^t \mathbf{M}_b(\mathcal{A})^{-1} \mathbf{F}_b \mathbf{I}]$ n'est pas triviale. Néanmoins, on peut noter que dans le cas linéaire linéaire, cette matrice représente les inductances propres et mutuelles de la structure étudiée. En conséquence, nous noterons cette matrice \mathbf{M}_L . Elle est de taille $N_t \times N_t$ et vérifie les égalités :

$$\mathbf{M}_L = \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} [\mathbf{F}_b^t [\mathbf{M}_b(\mathcal{A})]^{-1} \mathbf{F}_b \mathbf{I}] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} [\mathbf{F}_b^t \mathcal{A}] \quad (2.35)$$

Par conséquent, pour évaluer la matrice jacobienne $J(\mathbf{I})$, nous devons calculer la matrice \mathbf{M}_L , et plus particulièrement, nous allons calculer la matrice $\frac{d\mathcal{A}}{d\mathbf{I}}$ de taille $N_x N_t \times N_t$.

Pour déterminer cette matrice, une technique consiste à dériver l'équation magnétique du système 2.30 par rapport au courant, on obtient alors :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} [\mathbf{M}_b(\mathcal{A}) \mathcal{A}] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} [\mathbf{F}_b \mathbf{I}] \quad (2.36)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}} [\mathbf{M}_b(\mathcal{A}) \mathcal{A}] \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{I}} = \mathbf{F}_b \quad (2.37)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \mathbf{M}_b(\mathcal{A})}{\partial \mathcal{A}} \mathcal{A} + \mathbf{M}_b(\mathcal{A}) \right) \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{I}} = \mathbf{F}_b \quad (2.38)$$

Étant donné que le terme $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{I}}$ est une matrice rectangulaire, il n'est pas possible de résoudre l'équation 2.38 directement. Néanmoins, le second membre est une matrice de taille $N_x N_t \times N_t$ composé de vecteurs sur la diagonale, de plus la matrice $\left(\frac{\partial \mathbf{M}_b(\mathcal{A})}{\partial \mathcal{A}} \mathcal{A} + \mathbf{M}_b(\mathcal{A}) \right)$ est de taille $N_x N_t \times N_x N_t$ et diagonale par blocs. Par conséquent, nous pouvons en déduire que :

$$\frac{\partial \mathcal{A}_k}{\partial i_j} = 0 \text{ pour } j \neq k. \quad (2.39)$$

Ce qui est logique puisqu'il s'agit d'un problème magnétostatique. Ainsi, l'équation 2.38 peut se réduire aux systèmes matriciels suivants :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathcal{A}_j)}{\partial \mathcal{A}_j} \mathcal{A}_j + \mathbf{M}(\mathcal{A}_j) \right) \frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial i_j} = \mathbf{F}, \quad j = 1, 2, \dots, N_t \quad (2.40)$$

De plus, le terme $\left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathcal{A}_j)}{\partial \mathcal{A}_j} \mathcal{A}_j + \mathbf{M}(\mathcal{A}_j) \right)$, de taille $N_x \times N_x$, est la jacobienne du problème magnétostatique (voir Annexe A) :

$$\mathbf{J}_{nl}(\mathcal{A}_j) = \left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathcal{A}_j)}{\partial \mathcal{A}_j} \mathcal{A}_j + \mathbf{M}(\mathcal{A}_j) \right), \quad j = 1, 2, \dots, N_t. \quad (2.41)$$

Par conséquent, nous avons :

$$\frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial i_j} = \mathbf{J}_{nl}(\mathcal{A}_j)^{-1} \mathbf{F}, \quad j = 1, 2, \dots, N_t. \quad (2.42)$$

Sous forme vectorielle, cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{I}} = \mathbf{J}_{nl_b}^{-1} \mathbf{F}_b, \quad (2.43)$$

avec

$$\mathbf{J}_{\text{nlb}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\text{nl}}(\mathcal{A}_1) & & & \\ & \mathbf{J}_{\text{nl}}(\mathcal{A}_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{J}_{\text{nl}}(\mathcal{A}_{N_t}) \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Maintenant que la matrice $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{I}}$ est définie et en utilisant la relation 2.35, nous pouvons en déduire la matrice $\mathbf{M}_{\mathbf{L}}$:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{L}} = \mathbf{F}_{\mathbf{b}}^t \mathbf{J}_{\text{nlb}}^{-1} \mathbf{F}_{\mathbf{b}}. \quad (2.45)$$

Finalement, l'algorithme de Newton-Raphson à la $k + 1^e$ itération s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Res}(\mathbf{I}^k) &= R\mathbf{I}^k + \nabla_h \mathbf{F}_{\mathbf{b}}^t [\mathbf{M}_{\mathbf{b}}(\mathcal{A})]^{-1} \mathbf{F}_{\mathbf{b}} \mathbf{I}^k - \mathbf{V} \\ J(\mathbf{I}^k) &= R\mathcal{L}_{N_t} + \nabla_h \mathbf{M}_{\mathbf{L}} \\ \delta \mathbf{I}^{k+1} &= -J(\mathbf{I}^k)^{-1} \text{Res}(\mathbf{I}^k) \\ \mathbf{I}^{k+1} &= \mathbf{I}^k + \delta \mathbf{I}^{k+1} \end{cases} \quad (2.46)$$

2.2.1.4 Waveform Relaxation - Newton Method

Dans certaines applications, le schéma électrique est bien plus complexe que celui proposé ici (composé d'une source de tension, d'une simple résistance et d'une inductance). Dans ces situations, l'écriture du problème 2.46 est loin d'être triviale. Pour pallier à cette problématique et avoir la possibilité de modéliser des schémas électriques complexes, nous proposons de faire apparaître à nouveau l'équation magnétique en effectuant le changement de variable suivant :

$$\mathcal{A} = [\mathbf{M}_{\mathbf{b}}(\mathcal{A})]^{-1} \mathbf{F}_{\mathbf{b}} \mathbf{I}. \quad (2.47)$$

En ajoutant cette équation au système 2.46, nous obtenons, à la $k + 1^e$ itération, l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{A}^k &= [\mathbf{M}_{\mathbf{b}}(\mathcal{A})]^{-1} \mathbf{F}_{\mathbf{b}} \mathbf{I}^k \\ \text{Res}(\mathbf{I}^k) &= R\mathbf{I}^k + \nabla_h \mathbf{F}_{\mathbf{b}}^t \mathcal{A}^k - \mathbf{V} \\ J(\mathbf{I}^k) &= R\mathcal{L}_{N_t} + \nabla_h \mathbf{M}_{\mathbf{L}} \\ \delta \mathbf{I}^{k+1} &= -J(\mathbf{I}^k)^{-1} \text{Res}(\mathbf{I}^k) \\ \mathbf{I}^{k+1} &= \mathbf{I}^k + \delta \mathbf{I}^{k+1} \end{cases} \quad (2.48)$$

Ce changement de variable présente plusieurs intérêts. Premièrement, nous pouvons résoudre l'équation 2.47 avec le logiciel *code_Carmel*.

Deuxièmement, pour résoudre cette équation, *code_Carmel* utilise la méthode de Newton-Raphson et calculera à chaque pas de temps la jacobienne $\mathbf{J}_{\text{nl}}(\mathcal{A}_k)$, $k \in \{1, 2, \dots, N_t\}$ (annexe A) qui est également utilisée pour le calcul de la matrice $\mathbf{M}_{\mathbf{L}}$ (éq. 2.45). Par conséquent, à chaque résolution de l'équation 2.47, nous pouvons sauvegarder la dernière jacobienne et la réutiliser pour construire la matrice $\mathbf{M}_{\mathbf{L}}$.

Bien que la méthode que nous proposons soit un couplage fort, elle est relativement proche de la WRM. En effet, dans notre méthode, résumé dans l'algorithme 2.6, nous obtenons successivement des formes d'ondes du problème électrique puis du problème magnétique pour un intervalle de temps fixé à l'instar de la WRM. La différence résidant dans la vitesse de convergence puisque celle de la WRM est

similaire à celle d'un point fixe. Par conséquent, la méthode que nous proposons est semblable à la WRM à laquelle est appliquée la méthode de Newton-Raphson. D'où le nom de Waveform Relaxation-Newton Method (WR-NM).

Algorithme 2.6 : WR-NM

```

1  début
2      Entrées :  $M_L$  linéaire,  $\mathcal{A}^0$ ,  $\mathbf{I}^0$ 
3
4       $\varepsilon_I = 1$ ,  $k = 0$ 
5      tant que  $\varepsilon_I > 10^{-5}$  faire // boucle WR-NM/Newton ( $k$ )
6          // Résolution du problème magnétostatique
7          pour  $j = 1, N_t$  faire // boucle temporelle ( $j$ )
8               $\varepsilon_{\mathcal{A}} = 1$ ,  $l = 1$ 
9              tant que  $\varepsilon_{\mathcal{A}} > 10^{-5}$  faire // boucle Newton ( $l$ )
10                 Calculer  $Res(\mathcal{A}_j^{k+1,l})$ ,  $\mathbf{J}_{nl}(\mathcal{A}_j^{k+1,l})$  (annexe A)
11                 Résoudre  $\delta\mathcal{A}_j^{k+1,l}$ 
12                 Mise à jour de  $\mathcal{A}_j^{k+1,l+1}$ 
13                 Calcul de l'erreur  $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ 
14             fin
15             Sauvegarde de  $\mathbf{J}_{nl}$ 
16             Calcul de  $M_L(j, j)$ 
17         fin
18         // Résolution du problème électrique
19         Calculer  $Res(\mathbf{I}^k)$ ,  $J(\mathbf{I}^k)$ 
20         Résoudre  $\delta\mathbf{I}^{k+1}$ 
21         Mise à jour de  $\mathbf{I}^{k+1}$ 
22         Calcul de l'erreur  $\varepsilon_I$ 
23
24          $k = k + 1$ 
25     fin
26 retourner vrai

```

2.2.2 Problèmes magnétodynamiques couplés à des équations de circuit

Reprenons l'exemple précédant à la différence près que le noyau magnétique du dispositif électromagnétique possède désormais des propriétés conductrices. Pour faciliter l'application de la WR-NM aux problèmes magnétodynamiques couplés à des équations de circuit, nous choisissons d'utiliser la formulation \mathbf{A}^* plutôt que la formulation $\mathbf{A} - \phi$. Le problème électromagnétique en formulation \mathbf{A}^* s'écrit à la j^e

itération temporelle :

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\mathcal{A}_{j+1}) \mathcal{A}_{j+1} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \mathcal{A}_{j+1} = \mathbf{F} i_{j+1} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \mathcal{A}_j, & j = 0, 1, 2, \dots \\ \mathcal{A}_0 = 0. \end{cases} \quad (2.49)$$

À la différence du problème magnétostatique, une dérivée temporelle est dorénavant présente. Nous reprenons l'équation électrique 2.20 pour cet exemple.

2.2.2.1 Résolution avec la WR-NM

Pour appliquer la WR-NM au problème magnétodynamique 2.49 couplé à l'équation 2.20, nous allons appliquer les mêmes techniques que celles utilisées précédemment pour le problème magnétostatique couplé circuit.

Conditions de périodicité

La première étape consiste à imposer les conditions de périodicité 2.22 afin d'obtenir le régime permanent. En appliquant ces conditions à l'équation 2.49, on obtient l'équation vectorielle suivante :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M}(\mathcal{A}_1) & & & \\ & \mathbf{M}(\mathcal{A}_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{M}(\mathcal{A}_{N_t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{N_t} \end{bmatrix} \\ & + \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{S} & & & \\ & \mathbf{S} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{N_x} & & & -\mathcal{I}_{N_x} \\ -\mathcal{I}_{N_x} & \mathcal{I}_{N_x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\mathcal{I}_{N_x} & \mathcal{I}_{N_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{N_t} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & & & \\ & \mathbf{F} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{N_t} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

En utilisant, les notations par blocs, ce système se réécrit :

$$\mathbf{M}_b(\mathcal{A}) \mathcal{A} + \mathbf{S}_b \nabla_h \mathcal{A} = \mathbf{F}_b \mathbf{I} \quad (2.51)$$

avec \mathbf{S}_b une matrice par bloc de taille $N_x N_t \times N_x N_t$ défini par :

$$\mathbf{S}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & & & \\ & \mathbf{S} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{S} \end{bmatrix}$$

et ∇_h un opérateur différentiel qui s'adapte par conséquent à la dimension, c'est-à-dire :

$$\nabla_h \mathbf{I} = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} 1 & & & -1 \\ -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{N_t} \end{bmatrix}, \quad \nabla_h \mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{N_x} & & & -\mathcal{I}_{N_x} \\ -\mathcal{I}_{N_x} & \mathcal{I}_{N_x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\mathcal{I}_{N_x} & \mathcal{I}_{N_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{N_t} \end{bmatrix}$$

On obtient donc le système couplé suivant :

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} + \nabla_h \mathbf{F}_b^t \mathcal{A} \quad (2.52)$$

$$\mathbf{M}_b(\mathcal{A}) \mathcal{A} + \mathbf{S}_b \nabla_h \mathcal{A} = \mathbf{F}_b \mathbf{I} \quad (2.53)$$

Méthode de substitution

Nous substituons le problème magnétique dans l'équation de circuit, comme nous l'avons déjà effectué dans le paragraphe 2.2.1.2, ce qui mène à l'équation :

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} + \nabla_h \mathbf{F}_b^t [\mathbf{M}_b(\mathcal{A}) + \mathbf{S}_b \nabla_h]^{-1} \mathbf{F}_b \mathbf{I} \quad (2.54)$$

Méthode de Newton-Raphson

On applique la méthode de Newton-Raphson à l'équation 2.54. Le résidu est défini par :

$$Res(\mathbf{I}) = R\mathbf{I} + \nabla_h \mathbf{F}_b^t [\mathbf{M}_b(\mathcal{A}) + \mathbf{S}_b \nabla_h]^{-1} \mathbf{F}_b \mathbf{I} - \mathbf{V} \quad (2.55)$$

La jacobienne est calculée en dérivant le résidu par le vecteur \mathbf{I} :

$$J(\mathbf{I}) = R\mathcal{L}_{N_t} + \nabla_h \mathbf{M}_L \quad (2.56)$$

Avec :

$$\mathbf{M}_L = \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} [\mathbf{F}_b^t [\mathbf{M}_b(\mathcal{A}) + \mathbf{S}_b \nabla_h]^{-1} \mathbf{F}_b \mathbf{I}] = \mathbf{F}_b^t \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{I}} \quad (2.57)$$

Pour calculer la matrice \mathbf{M}_L , et plus précisément le terme $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{I}}$, nous utilisons la même technique que dans la partie précédente, c'est à dire, on dérive le problème vectoriel magnétodynamique 2.53 par le vecteur \mathbf{I} , soit :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} [\mathbf{M}_b(\mathcal{A}) \mathcal{A} + \mathbf{S}_b \nabla_h \mathcal{A}] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{I}} [\mathbf{F}_b \mathbf{I}] \quad (2.58)$$

Ce qui revient à écrire :

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{A}} [\mathbf{M}_b(\mathcal{A}) \mathcal{A} + \mathbf{S}_b \nabla_h \mathcal{A}] \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{I}} = \mathbf{F}_b \quad (2.59)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial \mathbf{M}_b(\mathcal{A})}{\partial \mathcal{A}} \mathcal{A} + \mathbf{M}_b(\mathcal{A}) + \mathbf{S}_b \nabla_h \right] \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{I}} = \mathbf{F}_b \quad (2.60)$$

$$\Rightarrow [\mathbf{J}_{nl_b} + \mathbf{S}_b \nabla_h] \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{I}} = \mathbf{F}_b \quad (2.61)$$

avec \mathbf{J}_{nl_b} la matrice définie en 2.44.

Par conséquent, nous obtenons :

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{I}} = [\mathbf{J}_{nl} + \mathbf{S}_b \nabla_h]^{-1} \mathbf{F}_b. \quad (2.62)$$

Le calcul de cette matrice est complexe. D'une part, elle est de taille $N_x N_t \times N_t$, une méthode consiste à la calculer colonne après colonne en résolvant les systèmes matriciels :

$$[\mathbf{J}_{nl_b} + \mathbf{S}_b \nabla_h] \frac{d\mathcal{A}}{d\mathbf{I}_j} = \mathbf{F}_{b_j}, \quad j \in 1, 2, \dots, N_t. \quad (2.63)$$

D'autre part, la présence de l'opérateur différentiel ∇_h dans la matrice $[\mathbf{J}_{nlb} + \mathbf{S}_b \nabla_h]$ implique qu'il faut résoudre un système matriciel par blocs non symétrique. Finalement, lorsque la matrice $\frac{d\mathcal{A}}{d\mathbf{I}}$ est calculée, nous pouvons en déduire la matrice \mathbf{M}_L :

$$\mathbf{M}_L = \mathbf{F}_b^t [\mathbf{J}_{nlb} + \mathbf{S}_b \nabla_h]^{-1} \mathbf{F}_b, \quad (2.64)$$

et *a fortiori* l'algorithme de Newton-Raphson à la $k + 1^e$ itération s'écrit :

$$\begin{cases} Res(\mathbf{I}^k) &= R\mathbf{I}^k + \nabla_h \mathbf{F}_b^t [\mathbf{J}_{nl} + \mathbf{S}_b \nabla_h]^{-1} \mathbf{F}_b \mathbf{I}^k - \mathbf{V} \\ J(\mathbf{I}^k) &= R\mathcal{I}_{N_t} + \nabla_h \mathbf{M}_L \\ \delta \mathbf{I}^{k+1} &= -J(\mathbf{I}^k)^{-1} Res(\mathbf{I}^k) \\ \mathbf{I}^{k+1} &= \mathbf{I}^k + \delta \mathbf{I}^{k+1} \end{cases} \quad (2.65)$$

Changement de variable

Comme dans le cas magnétostatique, pour simplifier le calcul du résidu et faciliter le couplage lorsque le circuit électrique est complexe, nous effectuons le changement de variable :

$$\mathcal{A} = [\mathbf{M}_b(\mathcal{A}) + \mathbf{S}_b \nabla_h]^{-1} \mathbf{F}_b \mathbf{I}. \quad (2.66)$$

Et ainsi obtenir, à la $k + 1^e$ itération, le système suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{A}^k &= [\mathbf{M}_b(\mathcal{A}) + \mathbf{S}_b \nabla_h]^{-1} \mathbf{F}_b \mathbf{I}^k \\ Res(\mathbf{I}^k) &= R\mathbf{I}^k + \nabla_h \mathbf{F}_b^t \mathcal{A}^k - \mathbf{V} \\ J(\mathbf{I}^k) &= R\mathcal{I}_{N_t} + \nabla_h \mathbf{M}_L \\ \delta \mathbf{I}^{k+1} &= -J(\mathbf{I}^k)^{-1} Res(\mathbf{I}^k) \\ \mathbf{I}^{k+1} &= \mathbf{I}^k + \delta \mathbf{I}^{k+1} \end{cases} \quad (2.67)$$

Le terme $[\mathbf{J}_{nl} + \mathbf{S}_b \nabla_h]^{-1}$ intervient, par conséquent, à la fois dans le calcul de la matrice \mathbf{M}_L , mais aussi dans la résolution de l'équation 2.66. La résolution de ce genre de système est loin d'être triviale, voire problématique lorsque la taille du système matriciel est relativement grande (ce qui est notre cas).

2.2.2.2 Résolution des systèmes matriciels par blocs non symétriques

La résolution des systèmes matriciels de grande taille par des méthodes directes ou des algorithmes de recherche des valeurs propres est bien souvent impossible à cause de leur coût en mémoire. La résolution passe généralement par des méthodes itératives favorisant les produits scalaires, les produits matrices-vecteurs ou les combinaisons linéaires de plusieurs vecteurs (*saxpy*¹) plutôt que les opérations matrice-matrice. Ainsi à chaque itération, on calcule une valeur propre et un vecteur propre appartenant à un espace connu sous le nom d'espace de Krylov. L'espace de Krylov d'ordre r généré par une matrice \mathbf{A} de dimension $N_x \times N_x$ et d'un vecteur \mathbf{b} de dimension N_x est défini par :

$$\mathcal{K}_r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{b}\}. \quad (2.68)$$

1. Single-precision real Alpha X Plus Y : combinaison entre un produit scalaire-vecteur et addition vecteur-vecteur :

$$\alpha \mathbf{X} + \mathbf{Y}$$

avec α un scalaire et \mathbf{X} et \mathbf{Y} des vecteurs.

La solution exacte du système matriciel $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ appartient à l'espace de Krylov $\mathcal{K}_{N_x}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. À chaque itération, un vecteur de $\mathcal{K}_r(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ est calculé pour construire une solution approchée qui tend vers la solution exacte. Finalement, la solution exacte du système matriciel $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ est obtenue lorsque toutes les itérations ont été effectuées.

La méthode GMRES (*General Minimal RESidual method*) est la méthode de Krylov la mieux adaptée à la résolution de système matriciel ne possédant pas de propriétés de symétrie. Cette méthode a été développée par Yousef Saad et Martin H. Schultz en 1986 [Saad and Schultz, 1986]. Elle fait appel à la méthode d'Arnoldi pour garantir le caractère linéairement indépendant des vecteurs $\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \dots$. Contrairement à la méthode du Gradient Conjugué, cette méthode ne possède aucune propriété de récurrence, il est donc nécessaire de garder tous les vecteurs propres calculés préalablement, ce qui peut, très vite, nécessiter une grande quantité de mémoire et devenir problématique. Cela devient très problématique lorsque la résolution du système matriciel est de très grande taille, comme c'est notre cas.

Une autre solution est d'utiliser des méthodes itératives de type Gauss-Seidel ou Gauss-Jacobi adaptées à la résolution de systèmes linéaires. La méthode consiste à décomposer une matrice \mathbf{A} sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{M} + \mathbf{N}$ où la matrice \mathbf{M} est inversible. On est alors amené à résoudre un problème de recherche de type point-fixe :

$$\begin{cases} \mathbf{x}^0 \text{ donné} \\ \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}^k + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}. \end{cases} \quad (2.69)$$

Nous décomposons la matrice \mathbf{A} en une somme $\mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$ avec \mathbf{L} une matrice triangulaire inférieure, \mathbf{D} une matrice diagonale et \mathbf{U} une matrice triangulaire supérieure. Dans la méthode de Gauss-Jacobi, on pose $\mathbf{M} = \mathbf{D}$ et $\mathbf{N} = -\mathbf{L} - \mathbf{U}$. Ce qui revient à l'algorithme :

$$\begin{cases} \mathbf{x}^0 \text{ donné} \\ \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^k + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}. \end{cases} \quad (2.70)$$

Dans la méthode de Gauss-Seidel, on choisira plutôt $\mathbf{M} = -\mathbf{L} + \mathbf{D}$ et $\mathbf{N} = -\mathbf{U}$. Ce qui mène à l'algorithme :

$$\begin{cases} \mathbf{x}^0 \text{ donné} \\ \mathbf{x}^{k+1} = (-\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}^k + (-\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}. \end{cases} \quad (2.71)$$

Ces méthodes ont l'avantage de se décliner en version *par bloc*. Elles convergent plus lentement qu'une méthode de Krylov mais requièrent une faible quantité de mémoire. En effet, la matrice à inverser est soit diagonale soit triangulaire, ce qui veut dire que la résolution peut être faite ligne par ligne, et par conséquent, à un faible coût. La méthode de Gauss-Jacobi converge plus lentement que la méthode de Gauss-Seidel, néanmoins cette méthode est parallélisable puisque la matrice à inverser est diagonale.

Nous prenons la méthode ayant la convergence la plus rapide, c'est-à-dire, la méthode

de Gauss-Seidel, que nous appliquons à l'équation 2.66 menant à l'algorithme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{N_t} \end{array} \right]^{(0)} \text{ donné} \\ \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{M}(\mathcal{A}_1) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} & & & \\ -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} & \mathbf{M}(\mathcal{A}_2) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} & \mathbf{M}(\mathcal{A}_{N_t}) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{N_t} \end{array} \right]^{(k+1)} \\ = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{F} & & & \\ & \mathbf{F} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{F} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{N_t} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{S} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{N_t} \end{array} \right]^{(k)} \end{array} \right. \quad (2.72)$$

Seul le terme assurant la périodicité est passé dans le second membre, la périodicité sera donc imposée au fur et à mesure des itérations. La matrice à inverser est triangulaire, nous pouvons par conséquent faire une résolution ligne par ligne avec un gradient conjugué. Néanmoins la convergence de l'algorithme n'est pas garantie. En effet, les conditions suffisantes, à savoir, que la matrice soit définie positive ou à diagonale dominante ne sont pas satisfaites.

2.2.2.3 Technique pour accélérer les temps de calcul

La méthode de Gauss-Seidel est une méthode de recherche de point-fixe, et nous savons que la convergence d'une telle méthode peut être excessivement lente. En effet, en fonction du problème étudié, l'algorithme peut demander un grand nombre d'itérations avant d'obtenir une solution suffisamment précise, et *a fortiori* conduire à des temps de calcul beaucoup trop longs. Prenons un exemple, supposons que l'on discrétise la solution sur une période composée de 40 pas de temps et qu'il faut un minimum de 60 itérations de Gauss-Seidel pour obtenir une solution suffisamment précise. Dans ce cas, à chaque itération de Gauss-Seidel, nous devons effectuer 40 résolutions d'un système linéaire par la méthode du gradient conjugué. Finalement, un total de 2400 gradients conjugués sera nécessaire ce qui peut être coûteux en temps de calcul.

Néanmoins, nous pouvons tirer avantage de cette lente convergence. En effet, lorsque la méthode de Gauss-Seidel requiert un nombre élevé d'itérations, la solution évolue lentement d'une itération à l'autre. Du fait de cette lente évolution, on conserve les solutions calculées auparavant afin de s'en servir pour construire et résoudre un modèle de taille réduite afin d'obtenir une solution approchée qui nous servira de point de départ aux prochains gradients conjugués. Pour mettre en place cette stratégie nous utilisons la *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) dont nous proposons une description détaillée dans l'annexe B. Cette méthode est bien connue dans le domaine de la modélisation de problèmes électromagnétiques où elle a été appliquée à plusieurs reprises avec succès [Schmidthausler et al., 2013][Sato and Igarashi, 2013][Henneron and Clénet, 2014][Montier et al., 2016][Paquay et al., 2016].

Si la solution issue du modèle réduit n'est pas de bonne qualité, le gradient conjugué permettra de rectifier l'erreur commise et dans le cas contraire, le gradient conjugué convergera en peu d'itérations ce qui est peu coûteux.

Par conséquent, il est intéressant de maintenir un modèle réduit suffisamment précis pour limiter l'erreur commise sur la solution reconstruite. Nous utilisons pour cela une approche *gloutonne* [Clénet et al., 2016][Hasan et al., 2016], c'est-à-dire, à chaque résolution, nous regardons l'erreur commise sur la solution reconstruite (en calculant le résidu par exemple). Si cette erreur est importante, le modèle réduit est mis à jour en prenant en compte la dernière solution.

2.3 Validation numérique

Nous proposons de valider la WR-NM décrite dans la partie théorique de la section précédente sur deux applications. Dans la première, nous étudions un transformateur triphasé couplé à des équations de circuits en magnétostatique. Dans la seconde, on s'intéresse à un dispositif électromagnétique composé d'un inducteur bobiné situé entre deux plaques conductrices. Pour tester la validité de la WR-NM, nous utiliserons comme référence la solution obtenue avec *code_Carmel* dont la méthode utilisée est basée sur une combinaison entre couplages forts et *Time-Stepping Finite Element Method* (TSFEM). Les calculs réalisés dans ce chapitre ont été effectués sur un processeur *Intel Xeon CPU E5-264*.

2.3.1 Transformateur triphasé

Considérons un transformateur triphasé couplé à des équations de circuit [Caron et al., 2017]. Le transformateur (figure 2.8) est composé d'un noyau magnétique dont la loi de comportement est non linéaire, de trois bobines reliées à un circuit électrique primaire en étoile et de trois bobines reliées à un circuit électrique secondaire. Les enroulements primaire et secondaire sont couplés en étoile, neutre non relié (figure 2.9). Les indices p et s sont associés respectivement au circuit électrique primaire et secondaire.

Le problème magnétostatique continu s'écrit :

$$\mathbf{rot} \nu(\mathbf{A}) \mathbf{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^3 \mathbf{N}_{p_k}(\mathbf{x}) i_{p_k}(t) + \sum_{k=1}^3 \mathbf{N}_{s_k}(\mathbf{x}) i_{s_k}(t) \quad (2.73)$$

avec $\nu(\mathbf{A})$ la reluctivité magnétique non linéaire, \mathbf{A} le potentiel vecteur magnétique, \mathbf{N} le vecteur de densité de courant unitaire et i le courant. Les flux dans les enroulements qui servent au couplage entre les équations électriques et magnétiques s'écrivent :

$$\phi_{q_k}(t) = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{N}_{q_k}(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) dv. \quad (2.74)$$

avec $q \in \{p, s\}$ et $k \in \{1, 2, 3\}$.

Différents points de fonctionnement de ce dispositif électromagnétique seront étudiés, à savoir, à vide, en court-circuit et en charge. Les enroulement bobinés du circuit primaire sont composés de 200 spires et ceux du circuit secondaire de 100

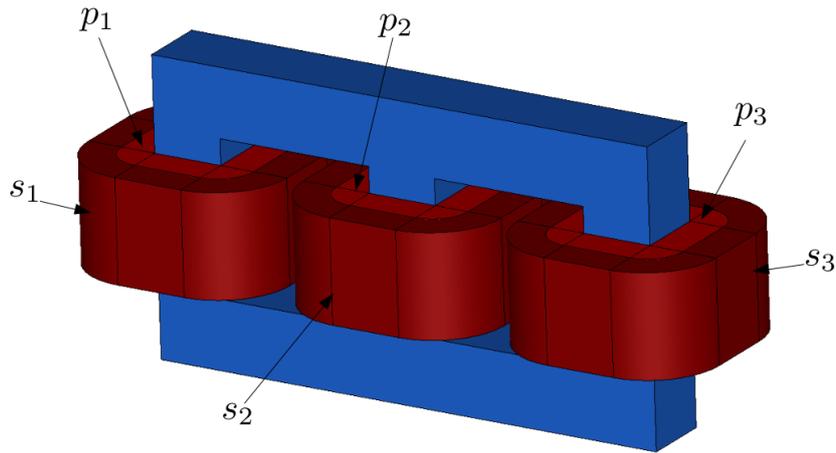


FIGURE 2.8 – Transformateur triphasé étudié

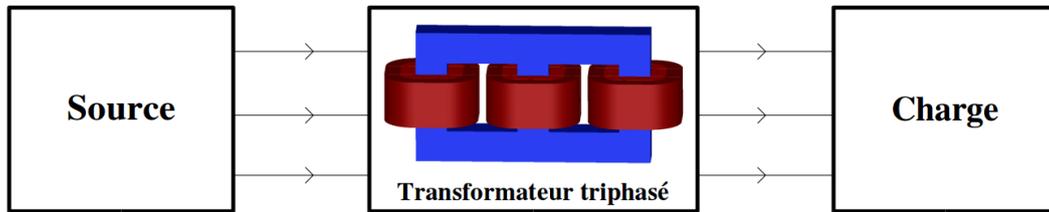


FIGURE 2.9 – Transformateur triphasé en charge

spires. Dans notre étude, nous leurs associons une résistance R_{p_k} pour le circuit primaire et R_{s_k} pour le circuit secondaire avec $k \in (1, 2, 3)$. Chaque phase du circuit primaire est alimentée par une source de tension sinusoïdale d’une fréquence de $50Hz$.

De plus, pour imposer le couplage étoile, nous utiliserons un artifice, à savoir une résistance R_{inf} d’une très grande valeur dans le circuit électrique pour imposer que la somme des courants soit égale à zéro. Les équations électriques continues du circuit primaire s’écrivent en conséquence :

$$v_{p_k}(t) = R_{p_k}i_{p_k}(t) + \frac{d\phi_{p_k}(t)}{dt} + \sum_{q=1}^3 R_{inf}i_{p_q}(t), \quad k \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.75)$$

Le circuit secondaire quant à lui dépend d’une charge constitué d’une résistance R_c et d’une inductance L_c :

$$-\frac{d\phi_{s_k}(t)}{dt} = (R_{s_k} + R_c)i_{s_k}(t) + L_c \frac{di_{s_k}(t)}{dt} + \sum_{q=1}^3 R_{inf}i_{s_q}(t), \quad k \in \{1, 2, 3\} \quad (2.76)$$

Le transformateur triphasé est discrétisé spatialement par un maillage tétraédrique composé de 80 000 éléments (figure 2.10), soit un nombre d’inconnus N_x égal à 94 135. Le nombre de pas de temps par période N_t est quant à lui de 60.

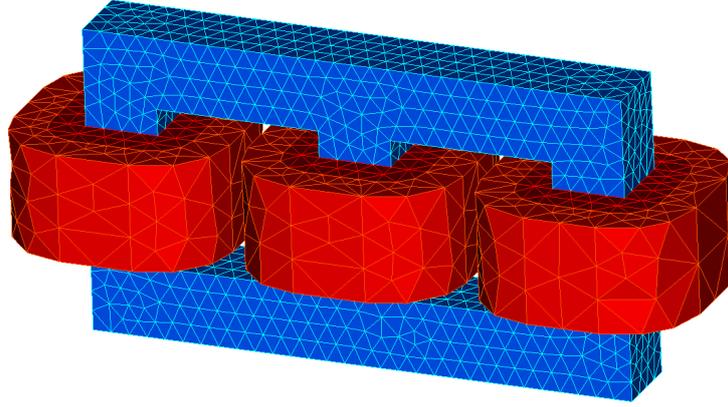


FIGURE 2.10 – Maillage du dispositif étudié

Avec à la méthode des éléments finis et à la méthode d'Euler implicite, la modélisation du transformateur triphasé à vide se résume aux équations discrètes :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{p_{k_{j+1}}} = R_{p_k} i_{p_{k_{j+1}}} + \mathbf{F}_{p_k}^t \frac{\mathcal{A}_{j+1} - \mathcal{A}_j}{\Delta t} + \sum_{q=1}^3 R_{inf} i_{p_{q_{j+1}}}, \\ -\mathbf{F}_{s_k}^t \frac{\mathcal{A}_{j+1} - \mathcal{A}_j}{\Delta t} = (R_{s_k} + R_c) i_{s_{k_{j+1}}} + L_c \frac{i_{s_{k_{j+1}}} - i_{s_{k_j}}}{\Delta t} + \sum_{q=1}^3 R_{inf} i_{s_{q_{j+1}}}, \\ \mathbf{M}(\mathcal{A}_{j+1}) \mathcal{A}_{j+1} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{F}_{p_k} i_{p_{k_{j+1}}} + \sum_{k=1}^3 \mathbf{F}_{s_k} i_{s_{k_{j+1}}}. \end{array} \right. \quad (2.77)$$

avec $k \in \{1, 2, 3\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, \mathbf{M} une matrice de taille $N_x \times N_x$ et \mathbf{F}_{p_k} et \mathbf{F}_{s_k} des vecteurs de taille N_x .

Nous avons présenté la WR-NM dans la section 2.2 pour un seul inducteur bobiné. Nous allons voir maintenant que cette méthode est facilement extensible à plusieurs inducteurs. Dans un premier temps, l'application des conditions de périodicité mène au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_{p_k} = R_{p_k} \mathbf{I}_{p_k} + \nabla_h \mathbf{F}_{\mathbf{p}_{k_b}} \mathcal{A} + \sum_{q=1}^3 R_{inf} \mathbf{I}_{p_q}, \quad k \in \{1, 2, 3\} \\ -\nabla_h \mathbf{F}_{\mathbf{s}_{k_b}} \mathcal{A} = (R_{s_k} + R_c) \mathbf{I}_{s_k} + L_c \nabla_h \mathbf{I}_{s_k} + \sum_{q=1}^3 R_{inf} \mathbf{I}_{s_q}, \quad k \in \{1, 2, 3\} \\ \mathbf{M}_b(\mathcal{A}) \mathcal{A} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{F}_{\mathbf{p}_{k_b}} \mathbf{I}_{p_k} + \sum_{k=1}^3 \mathbf{F}_{\mathbf{s}_{k_b}} \mathbf{I}_{s_k} \end{array} \right. \quad (2.78)$$

avec \mathbf{V}_{p_k} , \mathbf{I}_{p_k} des vecteurs de taille N_t , \mathcal{A} un vecteur de taille $N_x N_t$, $\mathbf{F}_{\mathbf{p}_{k_b}}$ une matrice de taille $N_x N_t \times N_t$ et \mathbf{M}_b une matrice par bloc de taille $N_x N_t \times N_x N_t$. Les équations de circuit sont de tailles relativement faibles en comparaison avec l'équation magnétique, c'est pourquoi nous pouvons les concaténer dans un seul et même système afin de limiter le nombre de couplages et nous restreindre à un

problème magnétique et un problème électrique. En posant :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{p_1} \\ \mathbf{V}_{p_2} \\ \mathbf{V}_{p_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{p_1} \\ \mathbf{I}_{p_2} \\ \mathbf{I}_{p_3} \\ \mathbf{I}_{s_1} \\ \mathbf{I}_{s_2} \\ \mathbf{I}_{s_3} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{p_{1b}} \\ \mathbf{F}_{p_{2b}} \\ \mathbf{F}_{p_{3b}} \\ \mathbf{F}_{s_{1b}} \\ \mathbf{F}_{s_{2b}} \\ \mathbf{F}_{s_{3b}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_b = \begin{pmatrix} R_{p_1} \mathcal{I}_{N_t} & & & & & \\ & R_{p_2} \mathcal{I}_{N_t} & & & & \\ & & R_{p_3} \mathcal{I}_{N_t} & & & \\ & & & (R_{s_1} + R_c) \mathcal{I}_{N_t} & & \\ & & & & (R_{s_2} + R_c) \mathcal{I}_{N_t} & \\ & & & & & (R_{s_3} + R_c) \mathcal{I}_{N_t} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} R_{inf} \mathcal{I}_{N_t} & R_{inf} \mathcal{I}_{N_t} & R_{inf} \mathcal{I}_{N_t} & & & \\ R_{inf} \mathcal{I}_{N_t} & R_{inf} \mathcal{I}_{N_t} & R_{inf} \mathcal{I}_{N_t} & & & \\ R_{inf} \mathcal{I}_{N_t} & R_{inf} \mathcal{I}_{N_t} & R_{inf} \mathcal{I}_{N_t} & & & \\ & & & R_{inf} \mathcal{I}_{N_t} & R_{inf} \mathcal{I}_{N_t} & R_{inf} \mathcal{I}_{N_t} \\ & & & R_{inf} \mathcal{I}_{N_t} & R_{inf} \mathcal{I}_{N_t} & R_{inf} \mathcal{I}_{N_t} \\ & & & R_{inf} \mathcal{I}_{N_t} & R_{inf} \mathcal{I}_{N_t} & R_{inf} \mathcal{I}_{N_t} \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{h_b} = \begin{pmatrix} \nabla_h & & & & & \\ & \nabla_h & & & & \\ & & \nabla_h & & & \\ & & & \nabla_h & & \\ & & & & \nabla_h & \\ & & & & & \nabla_h \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_{N_{tb}} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_{N_t} & & & & & \\ & \mathcal{I}_{N_t} & & & & \\ & & \mathcal{I}_{N_t} & & & \\ & & & \mathcal{I}_{N_t} & & \\ & & & & \mathcal{I}_{N_t} & \\ & & & & & \mathcal{I}_{N_t} \end{pmatrix}$$

Le système 2.78 se réécrit :

$$\begin{cases} \mathbf{V} = \mathbf{R}_b \mathbf{I} + \nabla_{h_b} \mathbf{F}_b^t \tilde{\mathcal{A}} \\ \mathbf{M}_b(\mathcal{A}) \mathcal{A} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{F}_{p_{kb}} \mathbf{I}_{p_k} + \sum_{k=1}^3 \mathbf{F}_{s_{kb}} \mathbf{I}_{s_k} \end{cases} \quad (2.79)$$

On se retrouve avec un système similaire au système 2.30, nous pouvons sans difficulté appliquer la méthode de substitution (paragraphe 2.2.1.2), suivi de la méthode de Newton-Raphson (paragraphe 2.2.1.3), et finalement en déduire l'algorithme de la WR-NM suivant :

$$\begin{cases} Res(\mathbf{I}^k) = \mathbf{R}_b \mathbf{I}^k + \nabla_{h_b} \mathbf{F}_b^t \tilde{\mathcal{A}}^{k-1} - \mathbf{V} \\ J(\mathbf{I}^k) = \mathbf{R}_b \mathbf{I}_{N_{tb}} + \nabla_{h_b} \mathbf{M}_b^k \\ \delta \mathbf{I}^k = -J(\mathbf{I}^k)^{-1} Res(\mathbf{I}^k) \\ \mathbf{I}^{k+1} = \mathbf{I}^k + \delta \mathbf{I}^k \\ \mathbf{M}_b(\mathcal{A}^k) \mathcal{A}^k = \sum_{k=1}^3 \mathbf{F}_{p_{kb}} \mathbf{I}_{p_k}^k + \sum_{k=1}^3 \mathbf{F}_{s_{kb}} \mathbf{I}_{s_k}^k \end{cases} \quad (2.80)$$

Nous apporterons néanmoins quelques informations supplémentaires concernant la matrice \mathbf{M}_L définie par :

$$\mathbf{M}_L = \mathbf{F}_b^t \frac{d\tilde{\mathcal{A}}}{d\mathbf{I}} \quad (2.81)$$

Pour obtenir cette matrice, nous devons évaluer les termes $\frac{d\mathcal{A}}{d\mathbf{I}_{p1}}$, $\frac{d\mathcal{A}}{d\mathbf{I}_{p2}}$, $\frac{d\mathcal{A}}{d\mathbf{I}_{p3}}$, $\frac{d\mathcal{A}}{d\mathbf{I}_{s1}}$, $\frac{d\mathcal{A}}{d\mathbf{I}_{s2}}$ et $\frac{d\mathcal{A}}{d\mathbf{I}_{s3}}$ dont le calcul, détaillé dans la partie 2.2.1.4, ne présente pas de difficulté particulière.

2.3.1.1 Transformateur triphasé à vide

Le premier point de fonctionnement que l'on étudiera est l'essai à vide. Le transformateur est alimenté par une source de tension sinusoïdale de 150V d'amplitude à la fréquence de 50Hz. Pour modéliser cet essai, nous ne considérerons que les équations électriques du circuit primaire puisque les bobines secondaires ne sont pas connectées (figure 2.11).

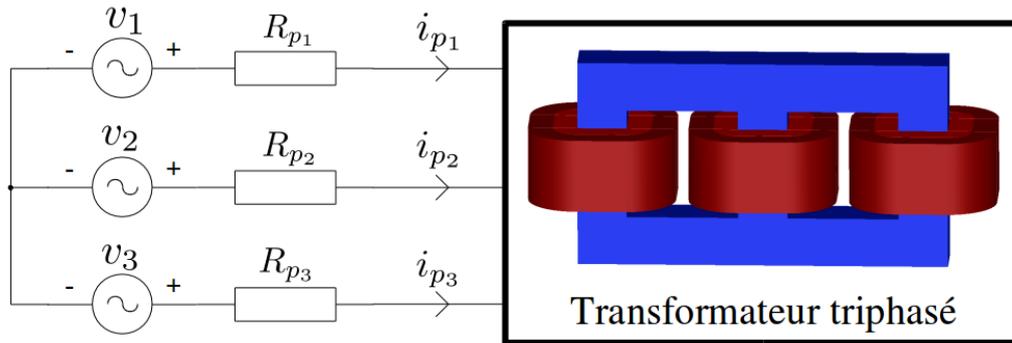


FIGURE 2.11 – Modélisation du transformateur triphasé à vide

Le critère d'arrêt ε_i est calculé entre 2 périodes successives du courant :

$$\varepsilon_i = \frac{\|\mathbf{I}^{k+1} - \mathbf{I}^k\|}{\|\mathbf{I}^k\|}. \quad (2.82)$$

Les résultats obtenus avec `code_Carmel` sont présentés sur la figure 2.12. Nous pouvons voir sur les figures 2.12a, 2.12b et 2.12c les formes d'ondes du courant dans les trois phases du circuit primaire ainsi qu'un zoom sur les dernières périodes du courant lorsque le régime permanent est atteint. La vitesse de convergence étant très faible (figure 2.12d), le régime transitoire est extrêmement important. Le temps de calcul nécessaire pour atteindre le régime permanent est de 4 jours.

En appliquant la WR-NM, nous pouvons voir sur la figure 2.13a que le régime permanent est atteint en 7 itérations. Sur les figures 2.13b, 2.13c et 2.13d nous avons représenté l'évolution du courant dans les 3 phases du circuit primaire pour les itérations 1, 3, 5 et 7 de la WR-NM. Nous pouvons voir que le courant obtenu à la première itération est la solution du problème magnétostatique linéaire et, au fil des itérations de la WR-NM, converge rapidement vers la solution de référence. Le temps

de calcul pour obtenir le régime permanent avec la WR-NM est de 1 h 38 min soit une diminution d'un facteur 60 par rapport au temps de calcul avec *code_Carmel* et ceci pour une solution de qualité identique. En effet, sur la figure 2.14, nous avons comparé pour les courants, les régimes permanents obtenus avec *code_Carmel* et la WR-NM. Nous pouvons voir que les résultats sont quasiment identiques avec une erreur relative ε_{rel} de l'ordre 10^{-5} , défini par :

$$\varepsilon_{rel} = \frac{\|\mathbf{I}_{TSFEM} - \mathbf{I}_{WR-NM}\|}{\|\mathbf{I}_{TSFEM}\|}. \tag{2.83}$$

Sur cette figure, nous observons les effets de la saturation magnétique qui entraînent l'apparition d'harmoniques impaires. De plus, à cause de la géométrie du transformateur (transformateur triphasé coplanaire à flux forcé), le courant dans la colonne centrale est plus faible que dans les deux autres. En revanche, en raison du couplage étoile avec neutre non relié, la somme des courants est égale à zéro.

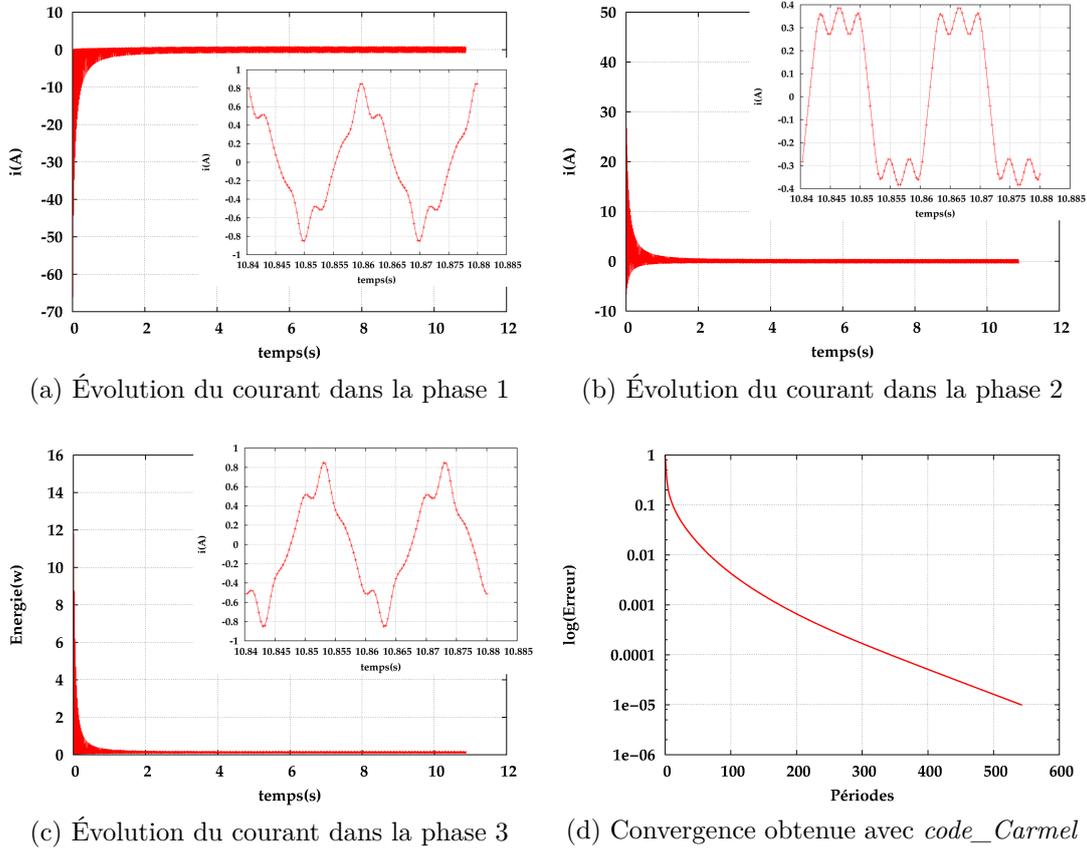


FIGURE 2.12 – Essai à vide : courants obtenus avec *code_Carmel* dans les trois phases primaires du transformateur

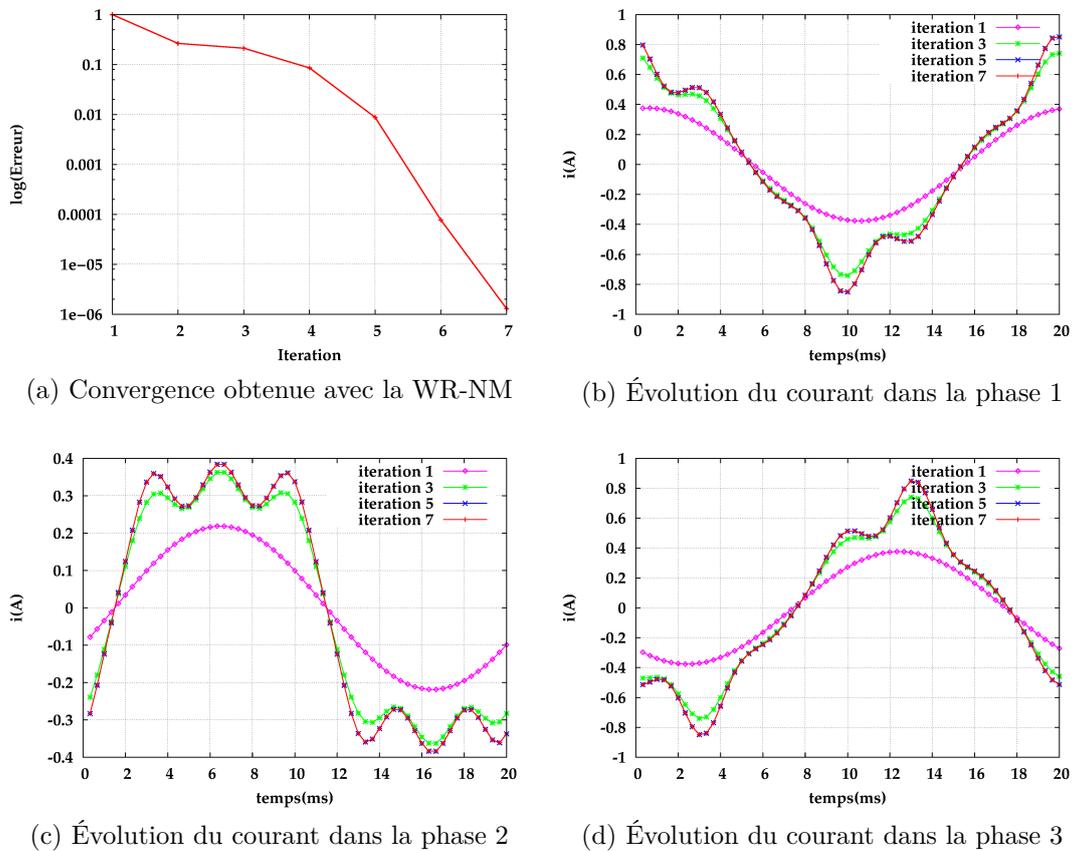


FIGURE 2.13 – Essai à vide : courants obtenus avec la WR-NM dans les trois phases primaires du transformateur

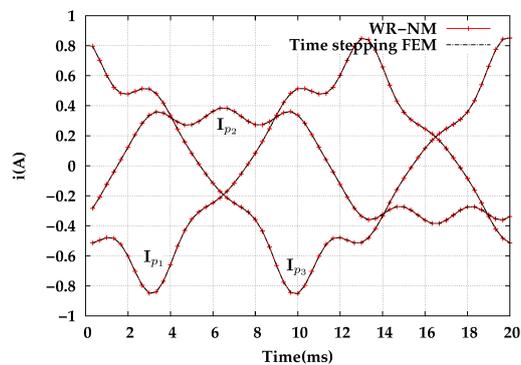


FIGURE 2.14 – Essai à vide : comparaison des courants en régime permanent (WR-NM et *code_Carmel*)

2.3.1.2 Transformateur triphasé en court-circuit

Le deuxième point de fonctionnement étudié est l'essai du transformateur en triphasé en court circuit (figure 2.15). Par conséquent, la résistance R_c et l'inductance L_c de charge sont nulles. Le circuit primaire est quant à lui alimenté par une source de tension sinusoïdale d'amplitude $15V$ pour une fréquence de $50Hz$.

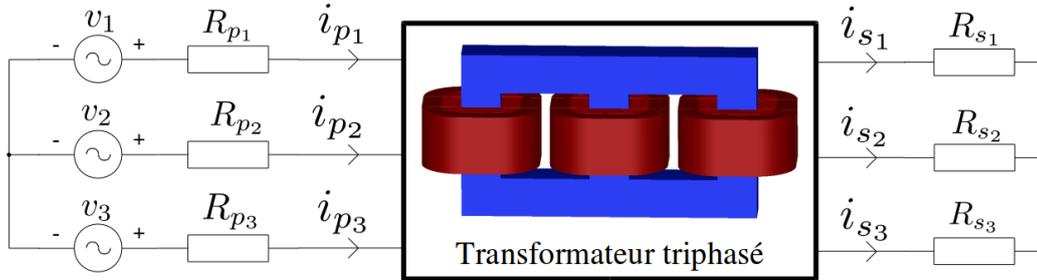


FIGURE 2.15 – Modélisation du transformateur triphasé en court circuit

Pour *code_Carmel*, les résultats sont présentés sur la figure 2.16. Les figures 2.16a, 2.16b et 2.16c représentent le régime transitoire du courant dans les 3 phases du circuit primaire, et les figures 2.16d, 2.16e et 2.16f les 3 phases du circuit secondaire. Le temps de calcul est de 45min , ce temps relativement court est dû au régime transitoire inexistant lors de l'essai en court-circuit.

Avec la WR-NM, la convergence est très rapide (3 itérations) comme le montre la figure 2.17. Le temps de calcul est de 57min soit légèrement supérieur à *code_Carmel* pour une précision identique (l'erreur relative est de l'ordre 10^{-5}). Sur les figures 2.18, on a comparé le régime permanent des courants du circuit primaire et secondaire obtenus avec la WR-NM et *code_Carmel*.

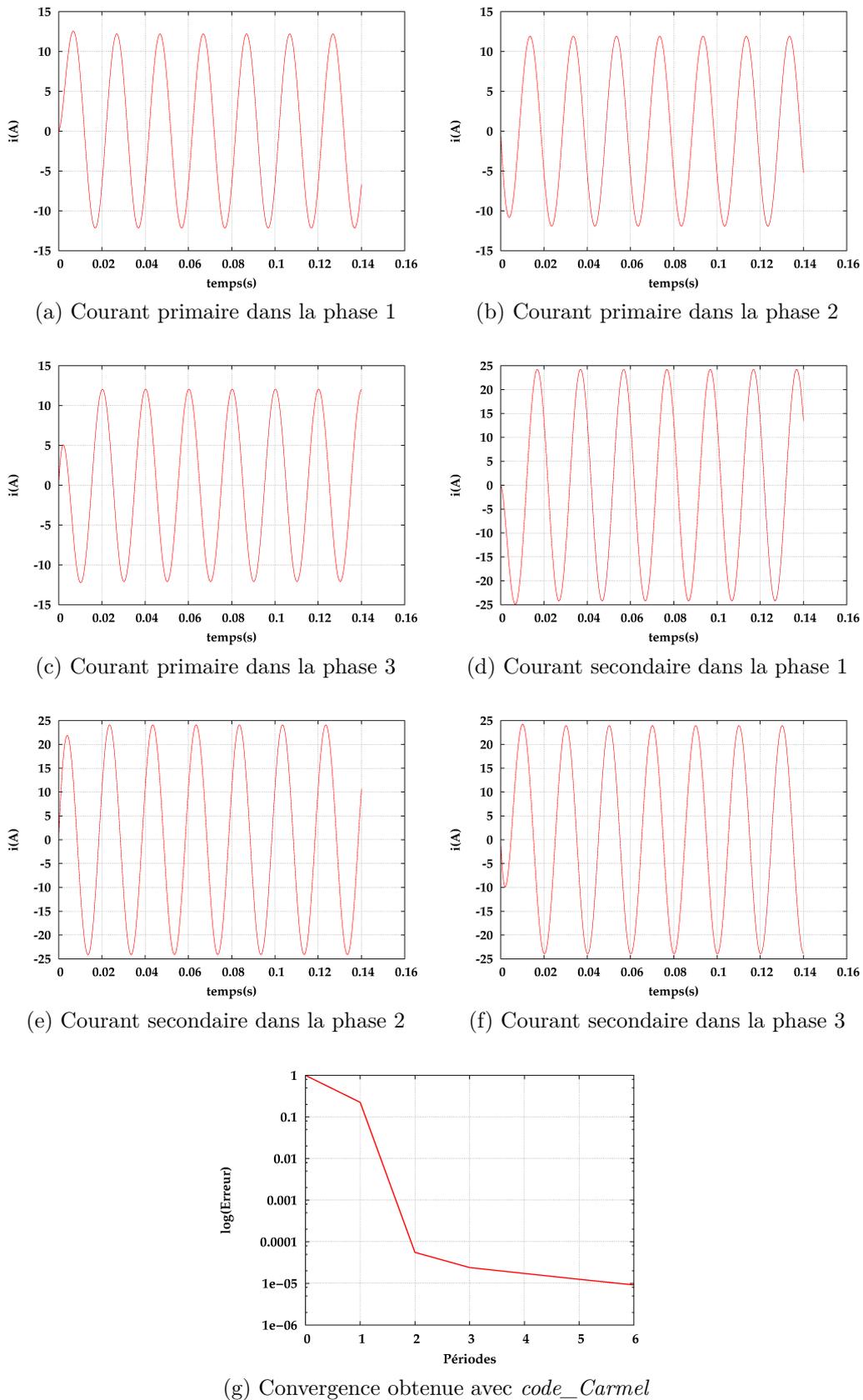


FIGURE 2.16 – Essai en court-circuit : courants obtenus avec *code_Carmel* dans les trois phases primaires et secondaires du transformateur

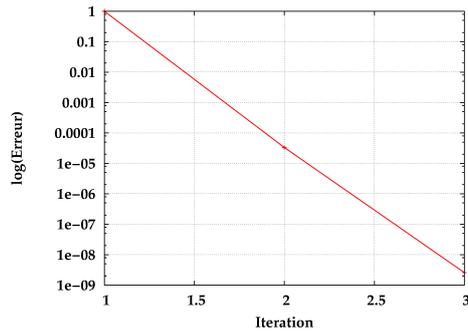
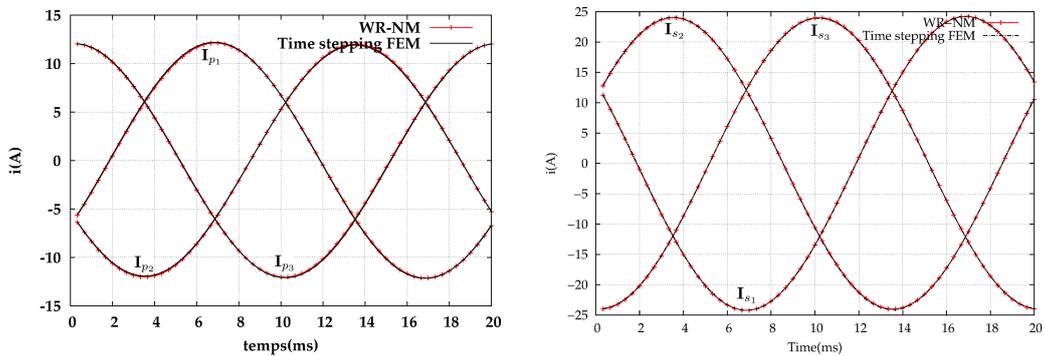


FIGURE 2.17 – Convergence obtenue avec la WR-NM



(a) Régime permanent des courants primaires obtenus avec la WR-NM et *code_Carmel*

(b) Régime permanent des courants secondaires obtenus avec la WR-NM et *code_Carmel*

FIGURE 2.18 – Essai en court-circuit : courants obtenus avec la WR-NM et *code_Carmel* dans les trois phases primaires et secondaires du transformateur

2.3.1.3 Transformateur triphasé en charge

On s'intéresse maintenant au fonctionnement en charge du transformateur (figure 2.19). Une résistance R_c et une inductance L_c de charge d'une valeur respective de 1.0Ω et de $0.1H$ sont ajoutées sur chaque phase du secondaire. Le circuit primaire est quant à lui alimenté par une source de tension sinusoïdale d'amplitude $150V$ pour une fréquence de $50Hz$.

Les résultats obtenus avec *code_Carmel* sont présentés sur la figure 2.20. Les figures 2.20a, 2.20b et 2.20c représentent l'évolution du courant dans les 3 phases du circuit primaire et les figures 2.20d, 2.20e et 2.20f le courant dans les 3 phases du circuit secondaire. Sur ces figures, nous avons également reproduit un agrandissement lorsque le courant a atteint le régime permanent. Dû à une constante de temps très élevée, le régime transitoire est important (figure 2.21), ce qui mène à des temps de calcul relativement longs (3 jours).

Avec la WR-NM, la convergence est obtenue en 7 itérations (voir figure 2.22) avec un temps de calcul de $2h\ 18\ min$ soit un gain d'environ 30 par rapport à *code_Carmel*. Sur la 2.23, nous avons représenté les courants primaires et secondaires obtenus avec la WR-NM et *code_Carmel*. Comme pour les essais précédents, on peut noter l'excellente concordance des résultats.

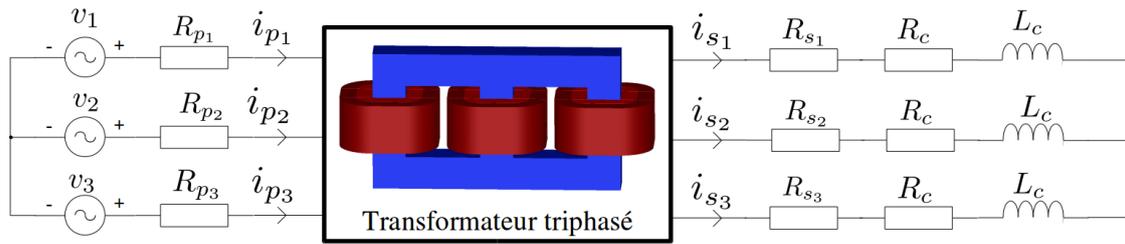
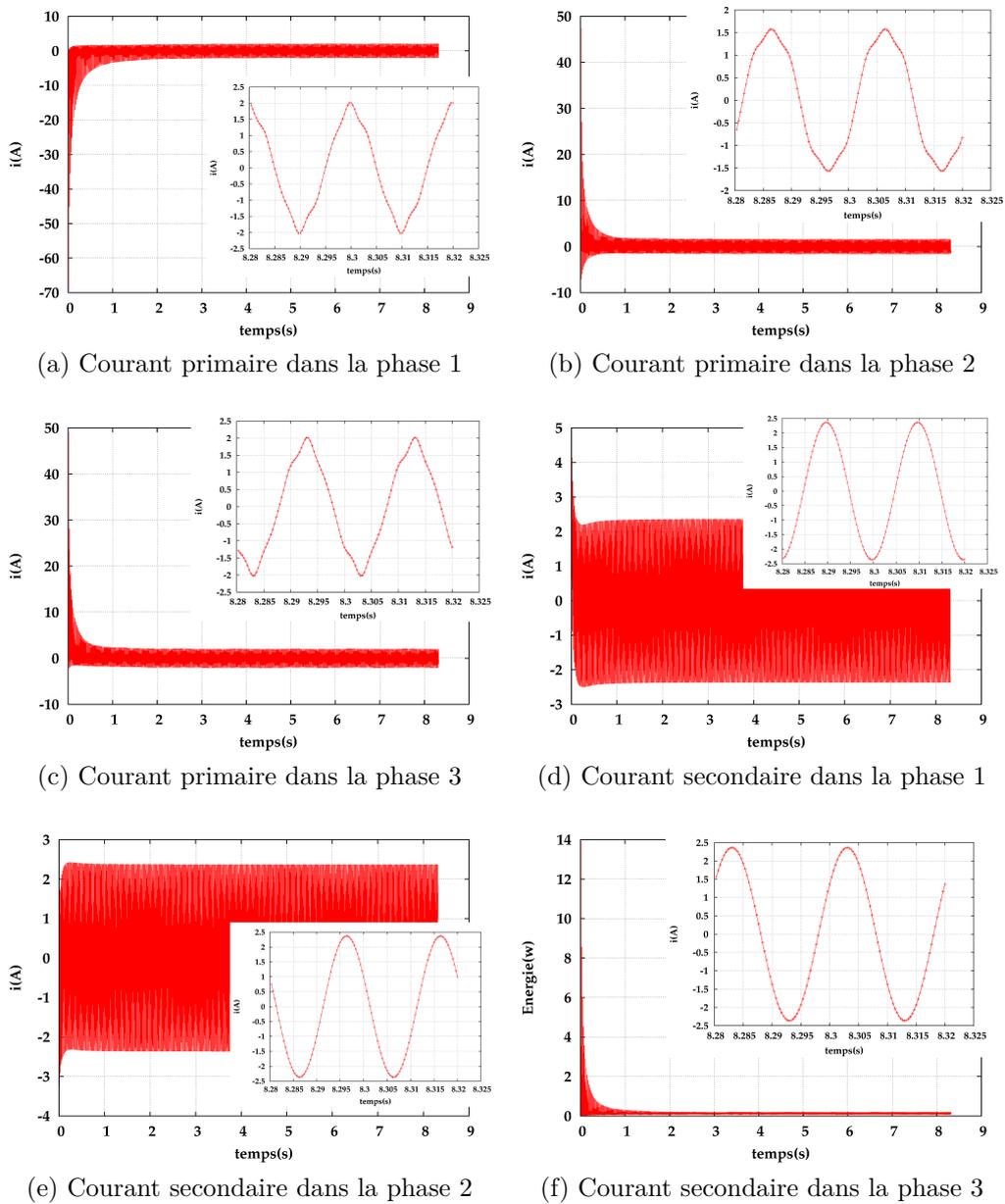


FIGURE 2.19 – Modélisation du transformateur triphasé en charge

FIGURE 2.20 – Essai en charge : courants obtenus avec *code_Carmel* dans les trois phases primaires et secondaires du transformateur

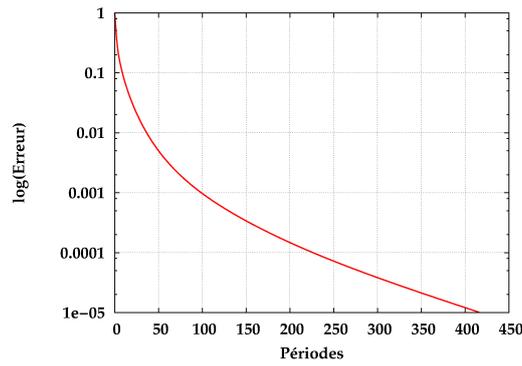


FIGURE 2.21 – Convergence obtenue avec *code_Carmel*

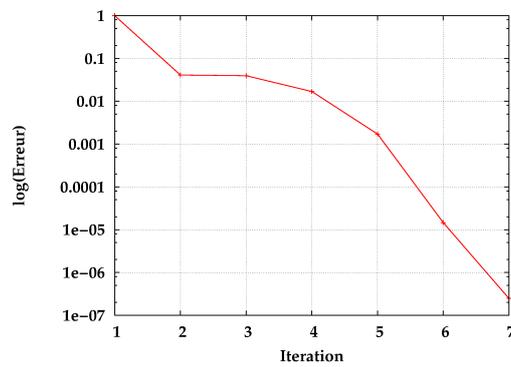
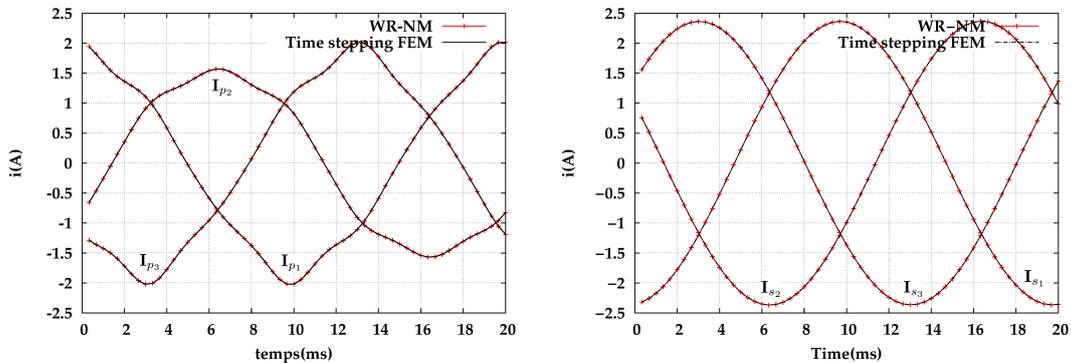


FIGURE 2.22 – Convergence obtenue avec la WR-NM



(a) Régime permanent des courants primaires obtenus avec la WR-NM et *code_Carmel*

(b) Régime permanent des courants secondaires obtenus avec la WR-NM et *code_Carmel*

FIGURE 2.23 – Essai en charge : courants obtenus avec la WR-NM et *code_Carmel* dans les trois phases primaires et secondaires du transformateur

2.3.1.4 Conclusion

Le tableau 2.1 résume les résultats obtenus. Nous pouvons voir que la WR-NM est particulièrement intéressante pour les problèmes ayant un régime transitoire important avec des gains de temps pouvant atteindre un facteur 60. En revanche,

	Essai a vide	Essai en court-circuit	Essai en charge
temps <i>code_Carmel</i>	4 j	45 min	3 j
temps WR-NM	1 h 38 min	57 min	2 h 18 min
Facteur (Gain)	60	0.8	30
Erreur relative ε_{rel} (2.83)	10^{-5}	10^{-5}	10^{-7}

TABLE 2.1 – Tableau résumant les résultats obtenus avec *code_Carmel* et ceux obtenus avec la WR-NM pour la modélisation d’un transformateur triphasé en différents points de fonctionnement

pour des problèmes ayant un régime transitoire relativement court comme c’est le cas pour le transformateur triphasé en court-circuit, le temps de calcul de la WR-NM est légèrement plus long qu’une méthode de type pas à pas.

2.3.2 Inducteur bobiné situé entre deux plaques conductrices

Nous allons maintenant voir une application académique composée d’un dispositif électromagnétique comprenant des courants induits. Pour cela, nous proposons d’étudier l’exemple présenté dans [Leonard and Rodger, 1988], à savoir, un inducteur bobiné situé entre deux plaques conductrices (figure 2.24). L’inducteur bobiné composé de 700 spires a un rayon intérieur de 87mm, un rayon extérieur de 116mm et une hauteur de 28mm. Il est relié à un circuit électrique composé d’une résistance et d’une source de tension. Les plaques séparées de 34mm sont carrées de 240mm de côté et de 12.7mm de hauteur. Elles sont en aluminium et ont par conséquent une conductivité de $37.7 \times 10^6 S.m^{-1}$. Le problème magnétodynamique couplé circuit est défini par les équations 2.65.

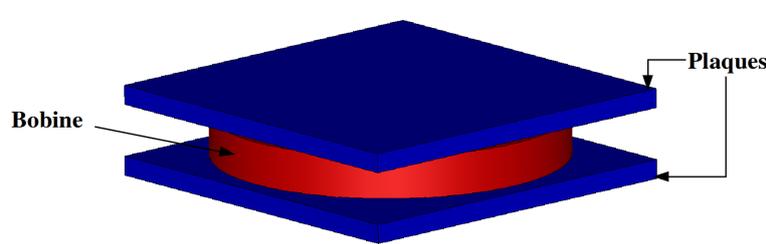


FIGURE 2.24 – Inducteur bobiné situé entre deux plaques conductrices

Grâce à des effets de symétrie, nous pouvons ramener le domaine d’étude à $1/8$, (voir la figure 2.25).

Le dispositif électromagnétique est discrétisé sur un maillage tétraédrique (figure 2.26) composé d’environ 140 000 éléments soit 160 000 inconnues éléments finis. Nous

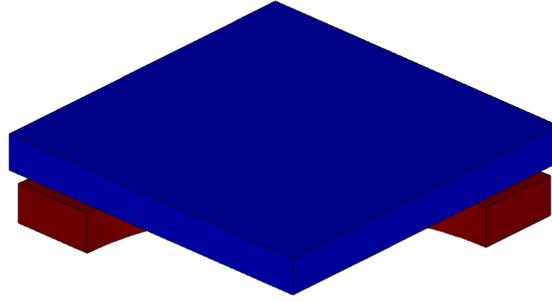


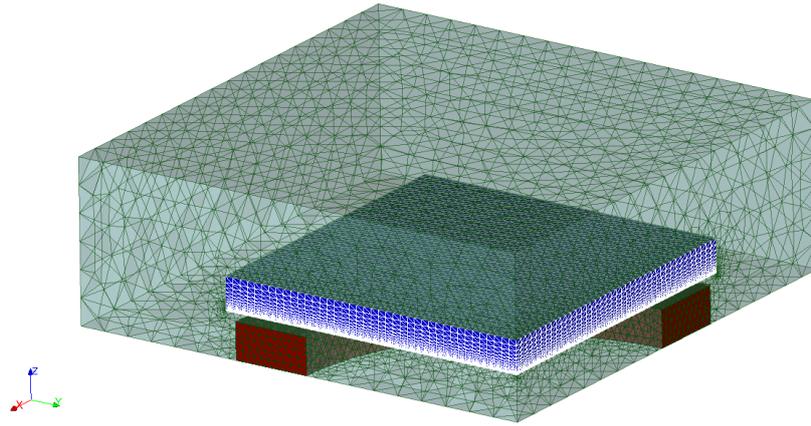
FIGURE 2.25 – Domaine étudié numériquement

utiliserons la WR-NM combinée à la POD pour résoudre ce problème [Caron et al. \[2016c\]](#) et *code_Carmel* nous servira de référence. Nous comparerons les résultats obtenus avec ces deux méthodes pour différentes sources de tensions. À savoir, quatre premiers calculs seront réalisés avec une source de tension sinusoïdale d’amplitude $1V$ à des fréquences respectives de $1Hz$, $50Hz$, $500Hz$ et $1kHz$, suivi d’un calcul avec une source de tension composée d’harmoniques définie par :

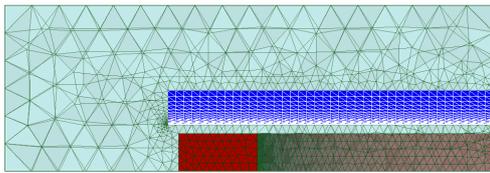
$$\begin{aligned}
 v(j) = & 2\sin(2\pi 50 \Delta t j) & (2.84) \\
 & + 0.75\sin(2\pi 100 \Delta t j) \\
 & - 1.25\sin(2\pi 150 \Delta t j) \\
 & + 4\sin(2\pi 200 \Delta t j),
 \end{aligned}$$

et finalement d’une source de tension en forme de signal carré à la fréquence de $500Hz$. Le signal de ces deux dernières sources de tension est représenté, respectivement sur les figures [2.27a](#) et [2.27b](#).

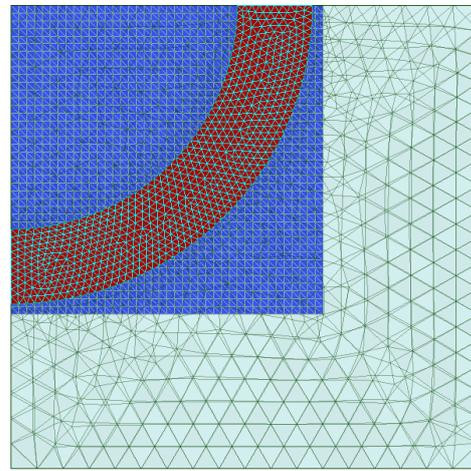
Tout d’abord, avec *code_Carmel*, nous représentons sur la figure [2.28](#) la distribution de l’induction magnétique au troisième pas de temps pour des fréquences différentes. Nous pouvons voir qu’avec l’augmentation de la fréquence, en raison de l’effet de peau, le flux pénètre de moins en moins dans la plaque conductrice. Ceci est dû à la présence des courants induits qui repoussent l’induction magnétique, on peut facilement s’en rendre compte en observant la figure [2.29](#) dans laquelle est représentée le module de la densité de courant dans la plaque conductrice. Il est à noter également que l’amplitude de la densité de courant diminue avec la fréquence. Cela est dû au fait que la tension aux bornes de la bobine est identique pour les différentes fréquences. Comme l’impédance équivalente augmente avec la fréquence, le courant dans la bobine diminue et par conséquent la densité de courant dans la plaque également. Nous comparons ensuite les résultats obtenus avec la WR-NM avec ceux issus de *code_Carmel*. Nous avons pour cela (voir la figure [2.30](#)) comparé les courants de la bobine en régime permanent pour les différentes sources de tension. Les figures [2.30a](#), [2.30b](#), [2.30c](#) et [2.30d](#) présentent la comparaison entre la WR-NM et la TSFEM pour une source de tension sinusoïdale et les fréquences respectives de $1Hz$, $50Hz$, $500Hz$ et $1kHz$. La figure [2.30e](#) présente le courant en régime permanent obtenu avec la WR-NM et la TSFEM pour une tension périodique composée des harmoniques 1, 2, 3 et 4 (voir figure [2.27a](#)). Enfin, la figure [2.30f](#) donne les résultats lorsque la source de tension est un signal carré (figure [2.27b](#)). Pour les 6 calculs que nous avons effectué,



(a) Maillage du système étudié (vue 3D)

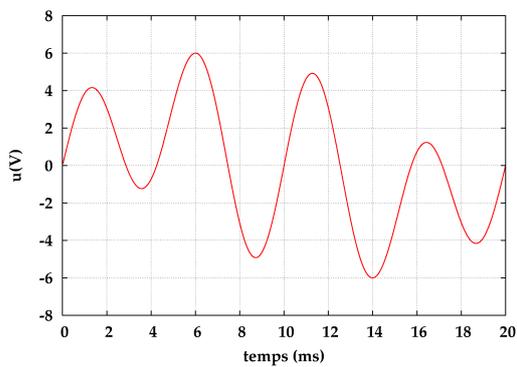


(b) Maillage du système étudié (vue de face)

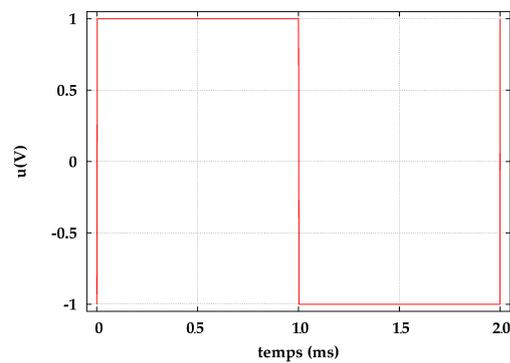


(c) Maillage du système étudié (vue du dessous)

FIGURE 2.26 – Maillage du système étudié



(a) Source de tension harmonique



(b) Source de tension (signal carré)

FIGURE 2.27 – Sources de tension simulées

nous pouvons voir que la solution obtenue avec la WR-NM est quasiment identique

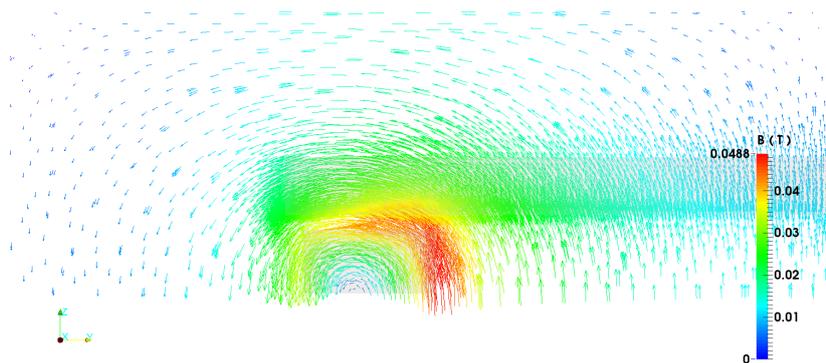
à celle obtenue avec *code_Carmel*.

Le tableau 2.2 résume les résultats obtenus ci-dessus. Nous pouvons y voir que le facteur gain de temps augmente en fonction de la fréquence, ce qui s'explique par l'augmentation du nombre de périodes nécessaire à *code_Carmel* pour atteindre le régime permanent. Le nombre d'itérations WR-NM est quant à lui égal à 3, quel que soit la source de tension. Le problème étant linéaire, on pouvait s'attendre à obtenir la solution en 2 itérations. Néanmoins à la première itération, on démarre le calcul avec la matrice \mathbf{M}_L 2.35 de la magnétostatique. Deux itérations supplémentaires sont donc nécessaires pour obtenir la solution et vérifier la solution.

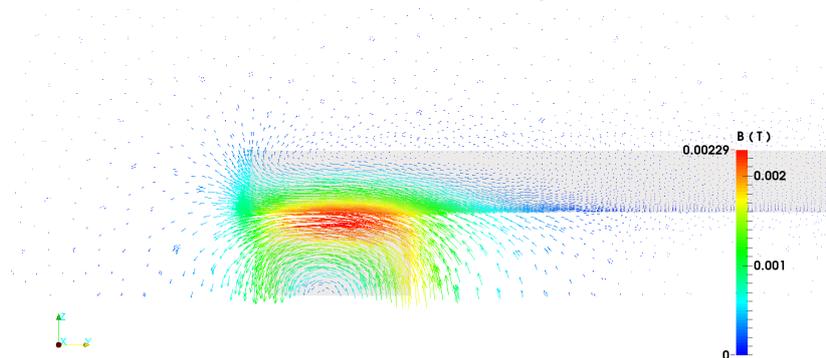
Notons également que les temps de calcul de la WR-NM augmentent en fonction de la fréquence, les courants induits devenant important, la méthode de Gauss-Seidel nécessite un nombre d'itérations moyennes de Gauss-Seidel plus importants pour converger. Néanmoins, les facteurs de gain de temps restent très élevés grâce à la présence de la POD. La géométrie étant relativement simple, il n'est pas nécessaire d'utiliser un grand nombre de snapshots pour obtenir une base très précise. Cela permet, par conséquent, de limiter fortement le nombre d'itérations du gradient conjugué. Avec une géométrie plus complexe (une machine par exemple), la POD ne sera plus aussi efficace et le gain de temps fortement impacté. De plus, le problème étant linéaire, les temps de calcul dépendent uniquement de la résolution du système matriciel, ce qui n'est pas le cas d'un problème non linéaire. En effet, dans ce cas, la construction de la matrice jacobienne nécessite des temps de calculs loin d'être négligeable, ce qui limitera également le gain de temps que peut apporter la POD.

	1Hz	50Hz	50Hz (avec harm.)	500Hz	500Hz (signal carré)	1kHz
Nombre de Périodes <i>code_Carmel</i>	5	117	119	842	855	1399
Temps <i>code_Carmel</i>	<i>1h43min</i>	<i>11h33min</i>	<i>12h13min</i>	<i>2j19h</i>	<i>2j20h</i>	<i>5j</i>
Itérations WR-NM	3	3	3	3	3	3
Itérations moyennes de Gauss-Seidel (WR-NM)	3	10	10	50	48	79
Temps WR-NM	<i>3min</i>	<i>4min</i>	<i>3min</i>	<i>10min</i>	<i>10min</i>	<i>13min</i>
Facteur (Gain)	34	173	244	402	408	553
Erreur commise (eq. 2.83)	10^{-13}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-5}

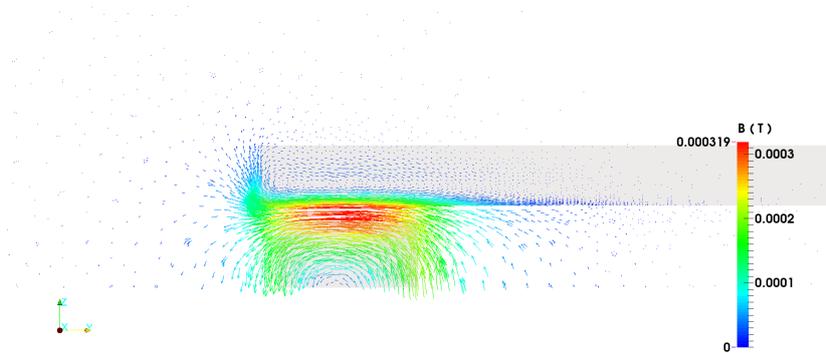
TABLE 2.2 – Comparaison des temps de calcul de la WR-NM et de *code_Carmel*



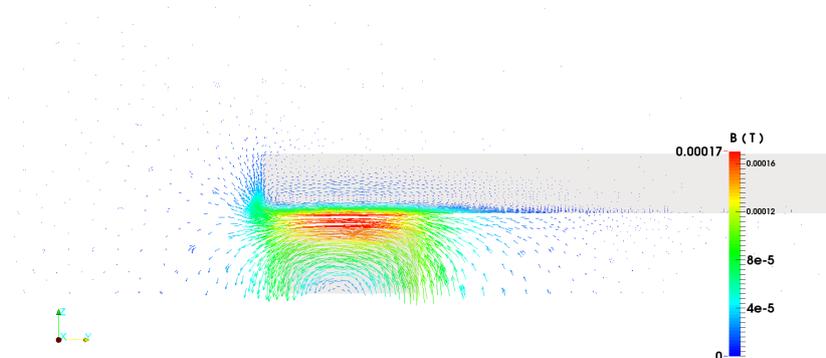
(a) 1Hz



(b) 50Hz

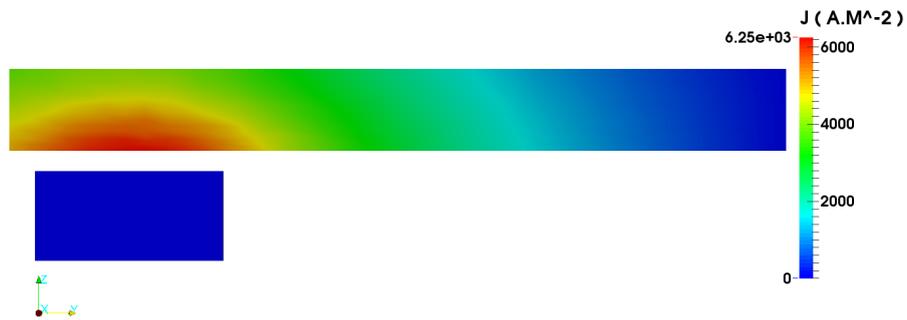


(c) 500Hz

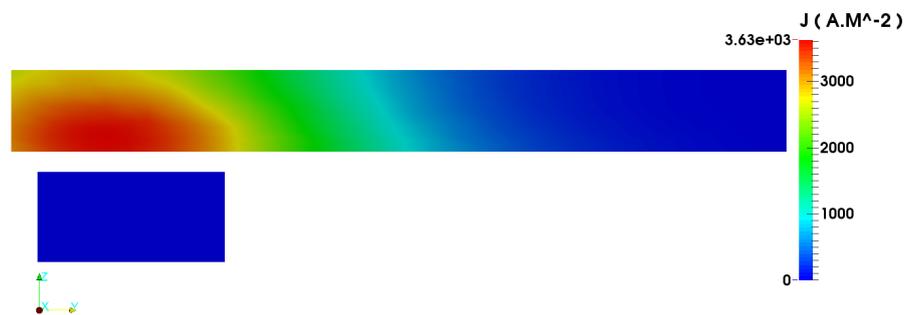


(d) 1kHz

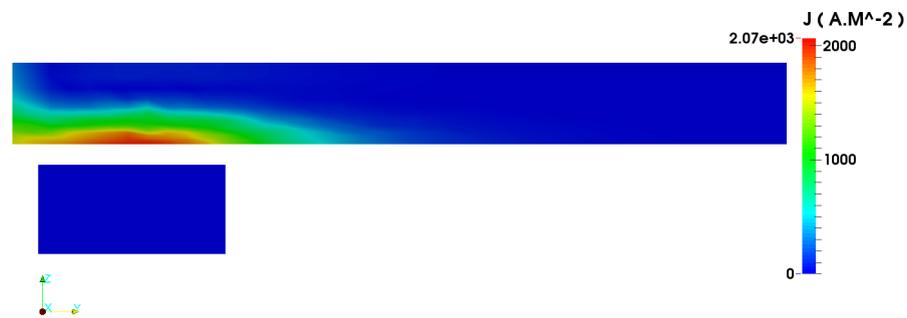
FIGURE 2.28 – Distribution de l'induction magnétique pour différentes fréquences



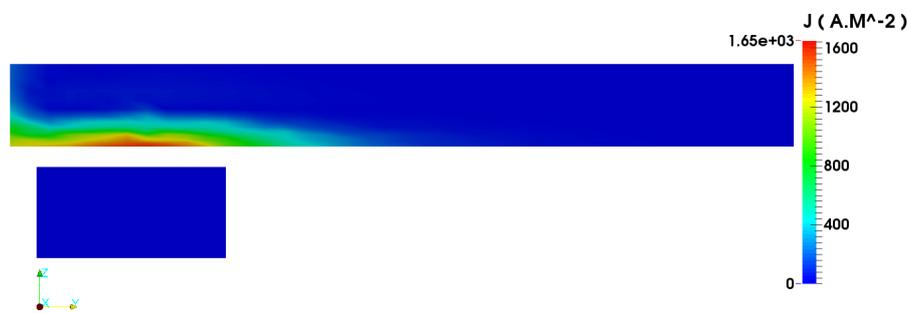
(a) 1Hz



(b) 50Hz



(c) 500Hz



(d) 1kHz

FIGURE 2.29 – Module de la densité de courant pour différentes fréquences

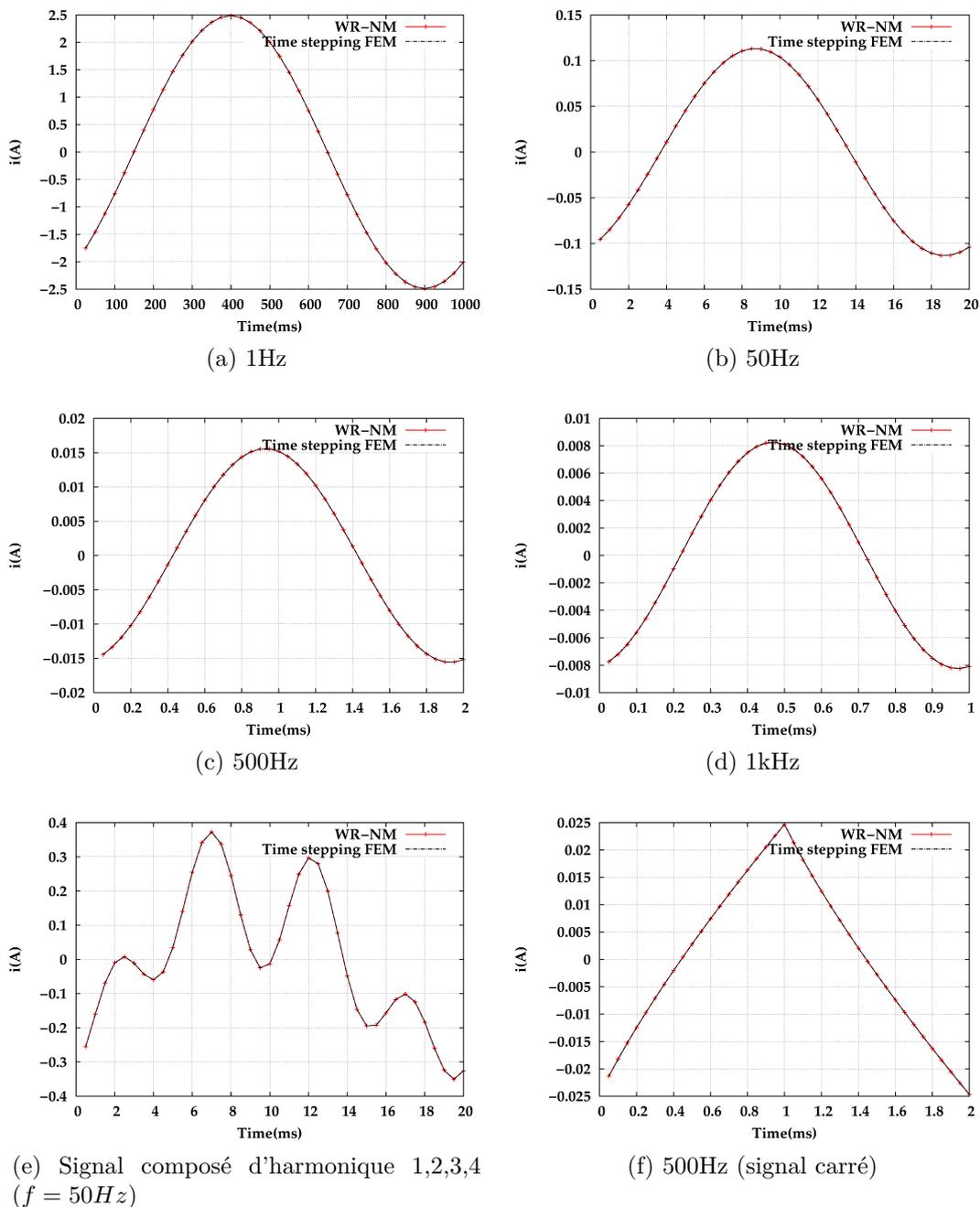


FIGURE 2.30 – Comparaison du régime permanent des courants obtenus avec la WR-NM et *code_Carmel*

2.4 Conclusion

Ce chapitre a concerné l'étude des problèmes électromagnétiques couplés à des équations de circuit. Un état de l'art des méthodes modélisant ces problèmes a été réalisé dans la première partie. Parmi les différentes méthodes citées, les couplages forts permettent d'obtenir une solution précise néanmoins, selon la nature des modèles physiques, il est possible que le système matriciel soit mal conditionné et engendre des problèmes de convergence. A l'inverse des couplages faibles dans lesquels les problèmes sont résolus séparément évitant ainsi les problèmes de conditionnement. Cependant, ce sont des méthodes itératives qui requièrent des temps de calculs relativement longs pour obtenir une solution suffisamment précise. Dans la deuxième partie, nous avons proposé de combiner la WRM (appartenant à la catégorie des couplages faibles) à des conditions de périodicité afin d'obtenir le régime permanent. La convergence étant similaire à celle d'un point-fixe, nous l'avons associée à la méthode de Newton. La fiabilité de la WR-NM a été testée dans la troisième partie. Pour valider les résultats, nous les avons comparés à ceux obtenus avec *code_Carmel* basé sur une méthode classique, la TSFEM. Le premier exemple étudié est un transformateur triphasé, il s'agit d'un problème magnétostatique. Pour des résultats identiques, on obtient des gains qui peuvent être supérieurs à 30.

Pour la magnétodynamique, on observe également un gain en temps de calcul qui peut être très important. Néanmoins, si la structure étudiée devient complexe avec une caractéristique magnétique non linéaire, les gains obtenus grâce à la POD seront limités et les temps de calcul impactés.

3

Recherche du régime permanent avec un redresseur à diodes

En électrotechnique, dans de nombreuses applications, les dispositifs électromagnétiques sont associés à des convertisseurs statiques. Il en existe plusieurs types mais dans ce mémoire, nous ne considérerons que les redresseurs à diodes. La première partie de ce chapitre est consacrée à l'introduction de modèles des diodes dans les équations du circuit électrique de la WR-NM. Dans la deuxième partie, nous modéliserons un transformateur triphasé couplé à un redresseur. Enfin, nous terminerons ce chapitre par la modélisation d'une machine à griffes.

Sommaire

3.1	Mise en équations du redresseur	111
3.2	Modélisation d'un alternateur à griffes couplé à un pont redresseur	128
3.3	Conclusion	141

3.1 Mise en équations du redresseur

3.1.1 Introduction

Lorsque le circuit électrique (avec des composants non linéaires) est relativement simple, il est possible d'obtenir une solution très précise du problème à l'aide de modèles analytiques. Cependant, ces modèles ne sont plus aussi efficace pour des phénomènes plus complexes, par exemple si l'on tient compte du phénomène d'empiétement dans les convertisseurs. Dans ce cas, il est nécessaire de définir les différents états des composants. Dans les modèles classiques, ces états sont déterminés en pas à pas dans le temps. Les informations (courant, tension, ...) obtenus aux derniers pas de temps permettent de définir les changements d'état. Pour les méthodes calculant le régime permanent directement, ces informations ne sont pas connues. Les intervalles de temps sur lesquels les équations, associées aux différents états, ne sont pas *a priori* connus. Par conséquent, pour les méthodes calculant le régime permanent directement comme l'*harmonic balanced method* ou la *time periodic method*, la principale difficulté consiste à définir les bornes de commutations des composants.

3.1.2 Modélisation d'un pont redresseur

3.1.2.1 La diode

La diode est un composant électronique non linéaire qui ne laisse, passer le courant que dans un seul sens. Pour modéliser le comportement de la diode, on utilise généralement sa caractéristique, c'est à dire, la fonction $i_d = f(v_d)$ où i_d représente le courant à travers la diode et v_d la tension à ces bornes. Il existe de nombreux modèles mathématiques, cependant le plus connu d'entre eux est l'équation de Shockley :

$$i_D = I_0 \left(e^{\frac{v_D}{nV_t}} - 1 \right) \quad (3.1)$$

Où I_0 est une constante spécifique au type de la diode considérée, elle est généralement de l'ordre $10^{-9}A$ à température ambiante. n est le coefficient idéale de la diode, il est généralement proche de 1. V_t est la tension thermodynamique, c'est une constante définie par :

$$V_t = \frac{kT}{q} \quad (3.2)$$

Avec $k \approx 1,38 \cdot 10^{-23} J.K^{-1}$ la constante de Boltzmann en joules par Kelvin, $q \approx 1,6 \cdot 10^{-19} C$ la charge de l'électron en coulombs, T la température absolue en Kelvin ($V_t = 25mV$ à température ambiante).

Néanmoins dans cette étude, nous nous placerons dans le cas d'une diode idéale avec une tension de seuil V_s d'une valeur de $0.6V$. La caractéristique est représentée sur la figure 3.1. Lorsque la diode est bloquée, le courant i_d vaut zéro et la tension v_d est inférieure à V_s , à l'inverse, quand la diode est passante, la tension v_d est égale à la tension de seuil V_s .

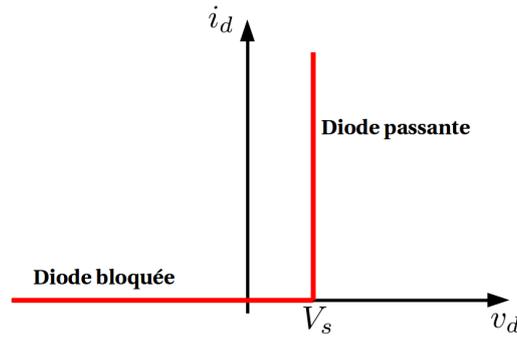


FIGURE 3.1 – Caractéristique d’une diode idéale avec tension de seuil

3.1.2.2 Redresseur triphasé de type P3

On considère un réseau de trois tensions triphasées équilibrées, déphasées de $2\pi/3$, soit :

$$v_1 = V_{max} \sin(\omega t) \tag{3.3}$$

$$v_2 = V_{max} \sin(\omega t - 2\pi/3) \tag{3.4}$$

$$v_3 = V_{max} \sin(\omega t - 4\pi/3) \tag{3.5}$$

Où V_{max} représente la valeur maximale de la tension source.

Un commutateur plus positif est un montage dans lequel les diodes sont à cathodes réunies (figure 3.2). Dans cette partie, on notera que l’amplitude des tensions sources étant importantes devant la tension de seuil V_s , la tension redressée v_c est pratiquement équivalente à la tension maximale source. La figure 3.3 représente les sources de tensions, ainsi que la tension redressée v_c d’un commutateur plus positif. La figure 3.4 représente quant à elle, les courants dans les 3 phases et le courant redressé. À chaque instant, la diode passante est la diode se trouvant sur la branche dont la tension est la plus élevée et la tension redressée v_c est égale à la tension la plus élevée des trois tensions (notée v_{max}) à la tension de seuil près :

$$v_c = v_{max} - V_s \tag{3.6}$$

Le courant redressé est donc égal à :

$$i_c = (v_{max} - V_s) / R_c \tag{3.7}$$

Ainsi lorsque v_1 est plus grande que v_2 et v_3 , la diode D_1 est passante. Par conséquent seul, le courant i_1 n’est pas nul et la tension v_{D_1} aux bornes de la diode D_1 est égale à la tension de seuil V_s d’une valeur de $0.6V$. Les tensions aux bornes de D_2 et de D_3 valent quant à elles :

$$v_{D_2} = v_2 - (v_1 - V_s) \tag{3.8}$$

$$v_{D_3} = v_3 - (v_1 - V_s) \tag{3.9}$$

Lorsque v_2 deviendra la tension la plus élevée, la diode D_2 deviendra passante et bloquera les autres. La tension v_c deviendra égale à v_2 . Et ainsi de suite, la diode

passante sera toujours celle où sa tension d'entrée est la plus *positive*, c'est à dire, la plus élevée.

Le principe de fonctionnement des commutateurs plus négatifs 3.5 est le même que celui des commutateurs plus positif si ce n'est à la différence que la diode conduisant est celle située sur la branche dont la tension est la plus faible.

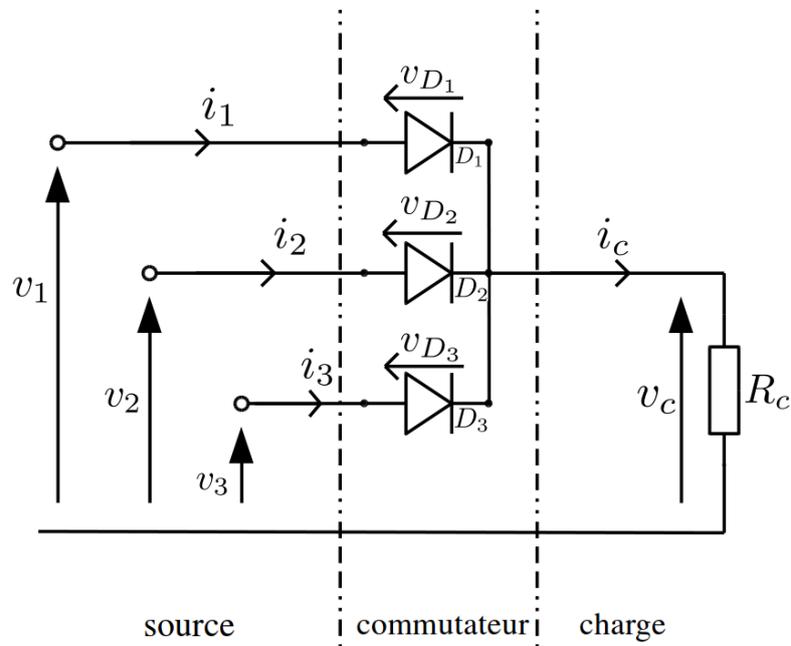


FIGURE 3.2 – Commutateur plus positif

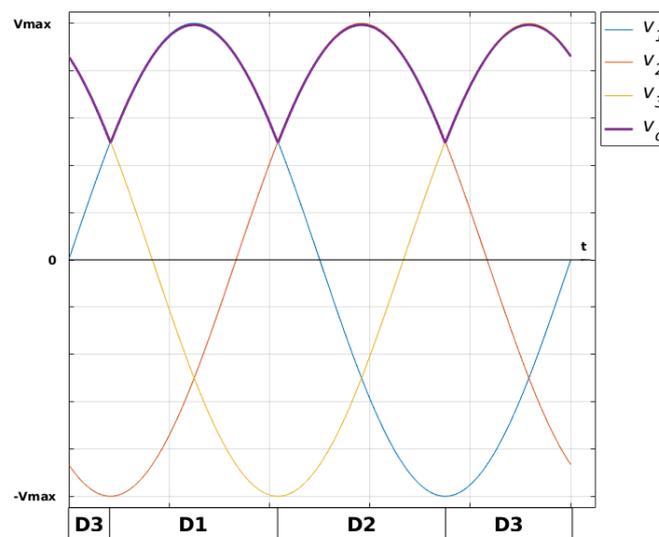


FIGURE 3.3 – Représentation des tensions d'un montage P3 avec l'intervalle de conduction des diodes

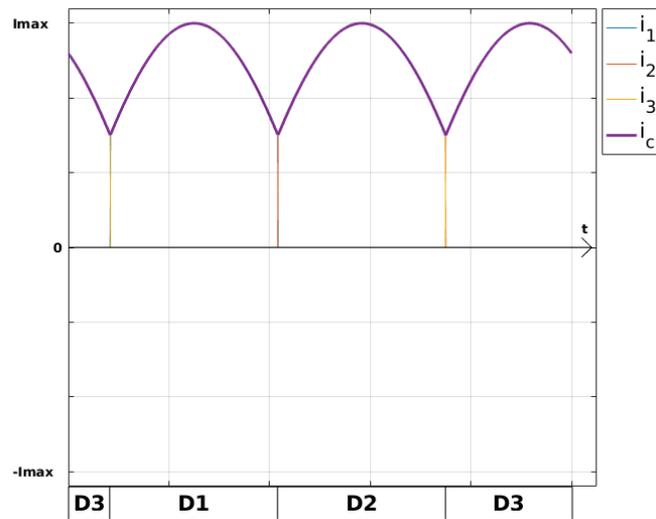


FIGURE 3.4 – Représentation des courants d’un montage P3 avec l’intervalle de conduction des diodes

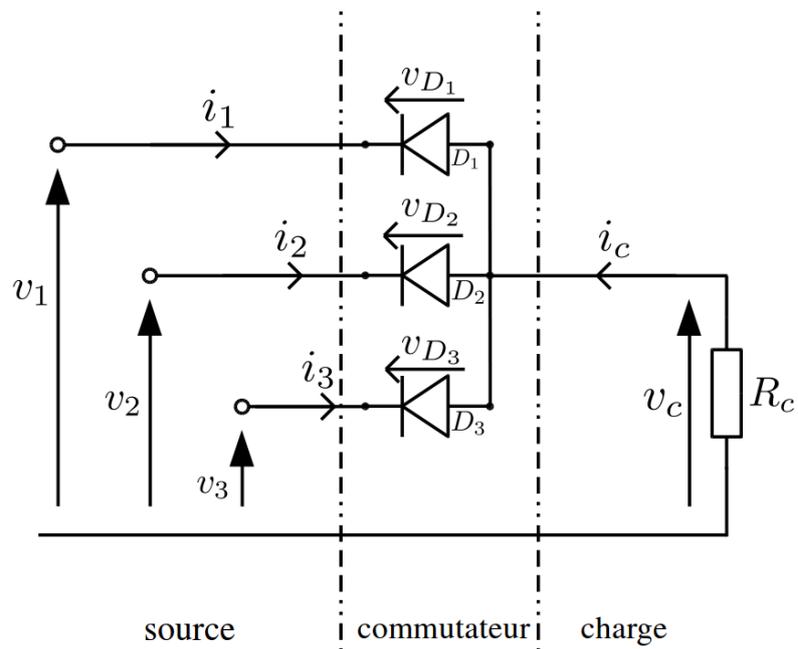


FIGURE 3.5 – Commutateur plus négatif

3.1.2.3 Redresseur triphasé de type PD3

Le pont de diodes PD3 est un montage double alternance, il est composé d'un commutateur plus positif et d'un commutateur plus négatif (figure 3.6). À chaque instant, en absence d'empiétement, deux diodes sont passantes, à savoir, une diode dans la partie supérieure du redresseur se trouvant sur la branche dont la tension est la plus élevée et une diode dans la partie inférieure se trouvant sur la branche dont la tension est la plus faible. La tension redressée se calcule à partir de l'équation :

$$v_c = v_{max} - v_{min} - 2V_s \quad (3.10)$$

Où v_{max} représente la tension source maximale et v_{min} représente la tension source minimale. Dans le cas d'une charge résistive, le courant redressé est égal à :

$$i_c = (v_{max} - v_{min} - 2V_s)/R_c. \quad (3.11)$$

Ainsi lorsque v_1 est la tension maximale et v_2 la tension minimale, les diodes D_1 et D_5 conduisent. La tension redressée v_c est équivalente à la tension composée v_{12} à deux fois la tension de seuil V_s près. Les tensions v_{D_1} et v_{D_5} aux bornes des diodes D_1 et respectivement D_5 sont égales à la tension de seuil V_s . Les tensions aux bornes des diodes restantes peuvent être définies par une simple loi des mailles. Soit lorsque D_1 et D_5 conduisent :

$$v_{D_2} = v_2 - v_1 + V_s \quad (3.12)$$

$$v_{D_3} = v_3 - v_1 + V_s \quad (3.13)$$

$$v_{D_4} = v_2 - v_1 + V_s \quad (3.14)$$

$$v_{D_6} = v_3 - v_2 + V_s \quad (3.15)$$

Lorsque v_3 deviendra la tension la plus faible, la diode D_6 deviendra passante et la diode D_5 se bloquera. La tension v_c deviendra alors égale à la tension composée $-u_{31}$ aux tensions de seuil près. La figure 3.7 représente les tensions évoluant au sein du redresseur. À savoir, les 3 sources de tension déphasé de $2\pi/3$ et d'une amplitude égale à V_{max} , les tensions composées u_{12} , u_{23} et u_{31} d'une amplitude égale à $\sqrt{3}V_{max}$ ainsi que la tension redressée et la tension aux bornes de la diode D_1 . La figure 3.8 représente les courants circulant dans les 3 branches situées à l'entrée du redresseur et le courant redressé.

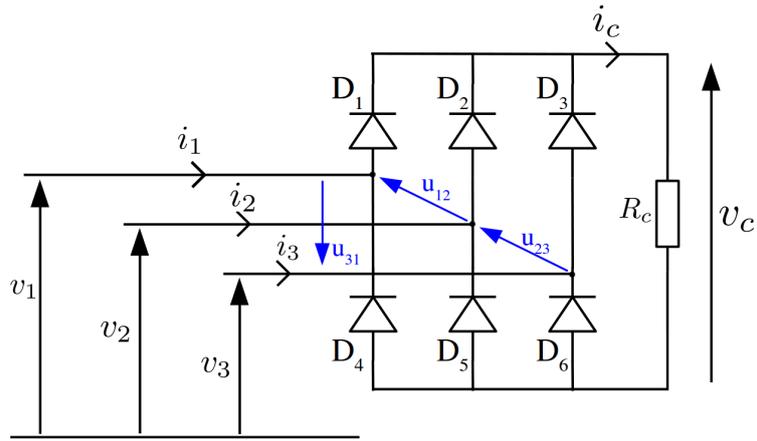


FIGURE 3.6 – Redresseur double alternance

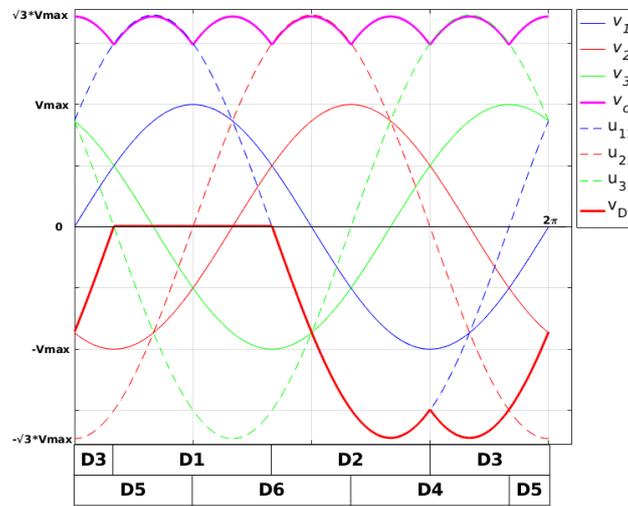


FIGURE 3.7 – Représentation des tensions d’un redresseur double alternance

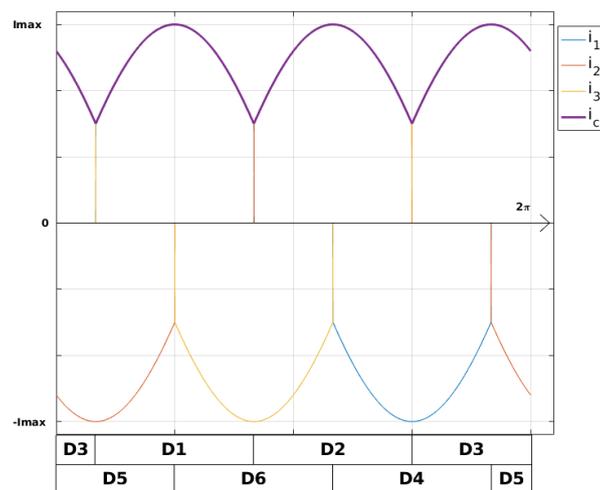


FIGURE 3.8 – Représentation des courants d’un redresseur double alternance

3.1.2.4 Empiètement

Dans les deux paragraphes précédents, nous avons décrit le principe d'un montage P3 ou PD3 dans un cas parfait. Cependant, certains phénomènes provoquent une chute de la tension redressée. Parmi ceux-ci, nous pouvons citer les chutes de tension dues aux inductances. Celle-ci se produit durant la phase de commutation d'une diode. Quand une diode se bloque, le courant qui la traverse ne peut passer instantanément de la valeur du courant redressé à 0 à cause de la présence des inductances. Lorsque cela se produit dans un redresseur, au moment de la commutation d'une diode, pendant un court instant plusieurs diodes conduiront en même temps : c'est ce qu'on appelle l'empiètement.

Afin de décrire ce phénomène, considérons le redresseur (figure 3.6) auquel nous allons ajouter des inductances (figure 3.9). Nous avons vu dans le paragraphe précédent que sans inductances, les diodes D_1 et D_6 conduisent jusqu'à ce que la tension v_2 devienne la plus grande des tensions, alors la diode D_2 deviendra passante. En présence d'inductances, le courant ne peut pas passer instantanément d'une valeur à une autre. Par conséquent, lorsque la tension v_2 devient la plus grande des tensions, les diodes D_1 , D_2 et D_6 seront passantes toutes les trois durant un certain temps. Ce phénomène est visible sur la figure 3.10 représentant les courants dans les 3 phases situées à l'entrée du redresseur. Durant l'empiètement, la tension redressée est affectée par une chute de tension, ce que nous pouvons observer sur la figure 3.11. La tension redressée est alors égale à :

$$v_c = v_1 - v_3 - L_1 \frac{di_1}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt} - 2V_s, \quad (3.16)$$

mais est aussi égale à :

$$v_c = v_2 - v_3 - L_2 \frac{di_2}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt} - 2V_s. \quad (3.17)$$

La tension aux bornes des diodes D_1 , D_2 et D_6 est égale à la tension de seuil V_s . Les tensions aux bornes des trois autres diodes valent quant à elles :

$$V_{D_3} = v_3 - v_1 - L_3 \frac{di_3}{dt} + V_s + L_1 \frac{di_1}{dt} \quad (3.18)$$

$$V_{D_4} = v_3 - v_1 - L_3 \frac{di_3}{dt} + V_s + L_1 \frac{di_1}{dt} \quad (3.19)$$

$$V_{D_5} = v_3 - v_2 - L_3 \frac{di_3}{dt} + V_s + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (3.20)$$

Sur une période, il y aura au total 6 empiètements, 3 empiètements hauts correspondants aux commutateur plus positif et 3 empiètements bas correspondants au commutateur plus négatif. La durée de l'empiètement (aussi appelé l'angle d'empiètement) dépend directement de la valeur des inductances situées à l'entrée du redresseur. Il existe des modèles analytiques permettant de calculer la durée d'empiètement, toutefois cela n'est valable que pour des cas simple. Lorsque la durée est relativement longue, il est possible qu'un empiètement haut et empiètement bas se *chevauche*, dans cette situation 4 diodes conduiront en même temps. Par conséquent 2 diodes de la même branche conduiront obligatoirement en même temps provoquant un court-circuit. Ce phénomène étant assez rare, nous ne l'étudierons pas dans la suite de ce mémoire.

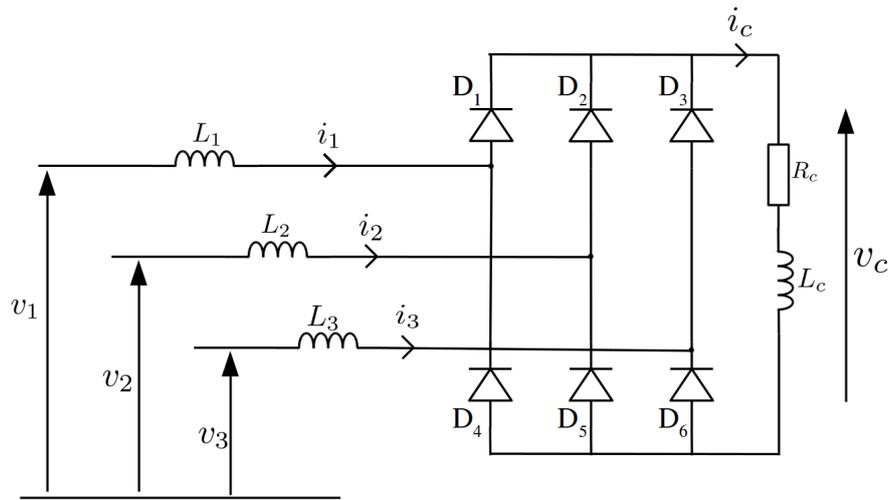


FIGURE 3.9 – Redresseur double alternance avec présence d’inductances

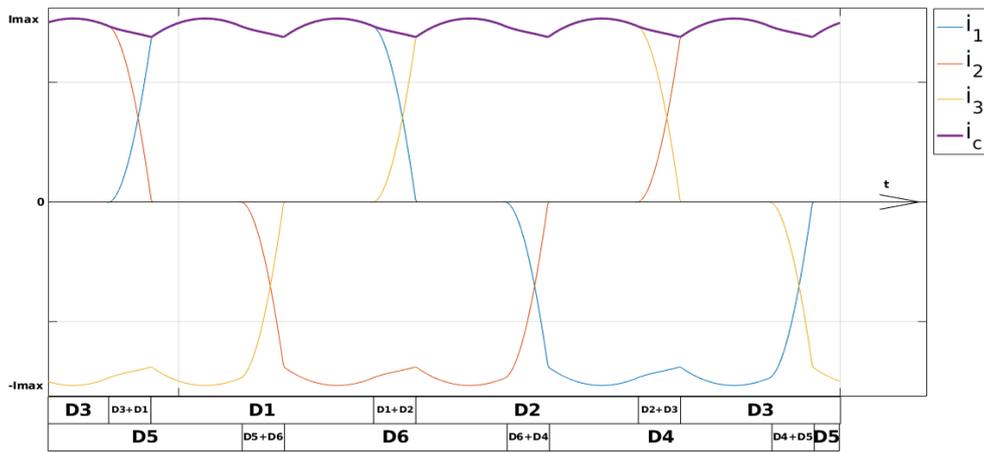


FIGURE 3.10 – Représentation des courants d’un redresseur double alternance avec prise en compte de l’empiètement

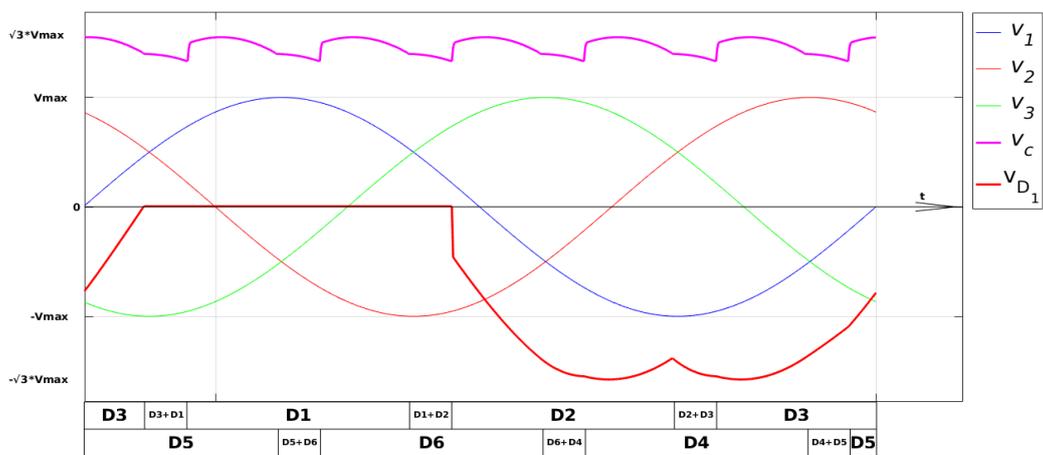


FIGURE 3.11 – Représentation des tensions d’un redresseur double alternance avec prise en compte de l’empiètement

3.1.3 Modélisation d'un redresseur double alternance

Considérons de nouveau le schéma électrique présenté sur la figure 3.12 composé d'une source de tension triphasée, sinusoïdale de fréquence 50Hz et d'amplitude 200V . Sur chaque branche se trouve une résistance d'une valeur de $100\text{m}\Omega$ ainsi qu'une inductance de 1mH . Une résistance de charge d'une valeur de 1.5Ω et une inductance de 100mH se situent derrière le pont de diode.

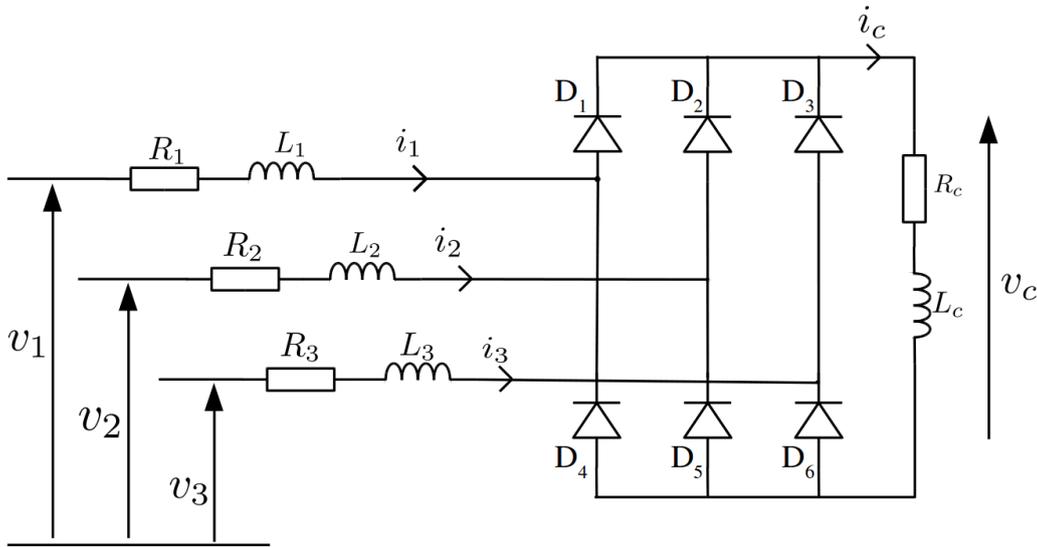


FIGURE 3.12 – Schéma électrique composé d'un PD3 et d'une charge RL

3.1.3.1 Méthode traditionnelle

En présence d'un système électromagnétique complexe, les tensions situées à l'entrée du redresseur double alternance ne sont pas toujours connues. Dans cette situation, il n'est pas possible de connaître *a priori* l'instant de commutation des diodes. Pour cette raison, on utilise généralement des méthodes pas à pas dans le temps pour résoudre ce problème. Ces méthodes sont particulièrement bien adaptées à la résolution d'équations de circuit non linéaires puisqu'il est relativement simple de trouver les instants de commutation des diodes.

En effet, chaque diode possède 2 états, par conséquent, le pont de diodes ne peut avoir au total que 12 configurations possibles en considérant le phénomène d'empiètement. Six configurations où 2 diodes conduisent et 6 configurations où 3 diodes conduisent (empiètement). Ces 12 configurations sont réparties sur une période. Il est relativement simple de définir ces 12 cas. Néanmoins, sans connaître avec précision les instants de commutation, il est possible de prévoir l'ordre dans lequel ils vont se produire (voir le tableau 3.1). Dans ce tableau, nous avons également fait apparaître la condition de transition, lorsque cette condition est satisfaite, le redresseur passe à la configuration suivante.

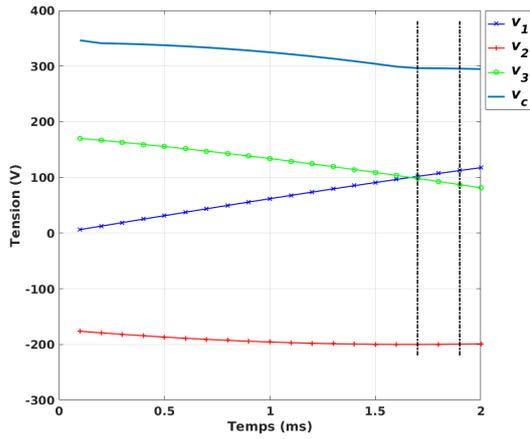
À chacune de ces configurations, une simple loi des mailles permet de déduire les équations de circuit à résoudre. Pour éviter d'avoir un trop grand nombre d'équations, il est courant de les rassembler dans un seul et même système. Ceci est

Configuration	Diodes passantes	Condition de transition
1	D_3, D_5	$v_{D_1} \geq V_s$
2	D_1, D_3, D_5	$i_{D_3} \leq 0$
3	D_1, D_5	$v_{D_6} \geq V_s$
4	D_1, D_5, D_6	$i_{D_5} \leq 0$
5	D_1, D_6	$v_{D_2} \geq V_s$
6	D_1, D_2, D_6	$i_{D_1} \leq 0$
7	D_2, D_6	$v_{D_4} \geq V_s$
8	D_2, D_4, D_6	$i_{D_6} \leq 0$
9	D_2, D_4	$v_{D_3} \geq V_s$
10	D_2, D_3, D_4	$i_{D_2} \leq 0$
11	D_3, D_4	$v_{D_5} \geq V_s$
12	D_3, D_4, D_5	$i_{D_4} \leq 0$

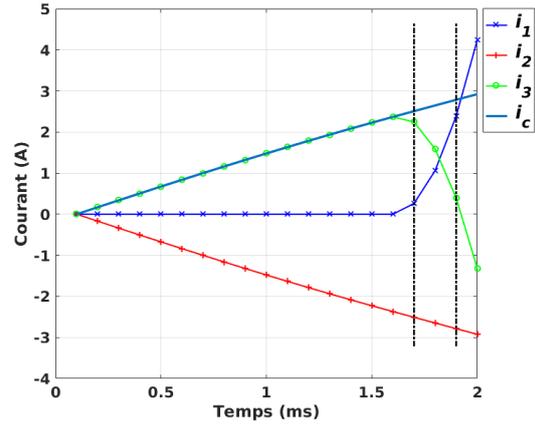
TABLE 3.1 – Liste des 12 configurations possibles sur une période du pont de diodes avec les conditions de transitions

rendu possible grâce à l'introduction de 6 opérateurs (fonctions de commutation) s_i ($i \in 1, 2, \dots, 6$), tel que s_i est égal à 1 si la diode i est passante et 0 sinon. Le détail permettant d'en déduire le système à résoudre est donné dans l'annexe C.1.1.

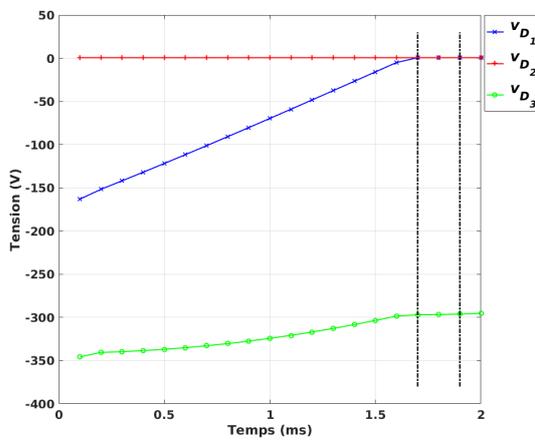
Pour déterminer la configuration au premier pas de temps, nous prenons celle en concordance avec la source de tension. Dans notre problème, au premier pas de temps la tension v_3 est la tension maximale et v_2 la tension minimale, par conséquent, nous allons démarrer la résolution par la configuration 1. On résout le système associé jusqu'à ce que la condition de transition soit satisfaite, c'est à dire $v_{D_1} \geq V_s$, comme nous pouvons le voir sur la figure 3.13c à $t = 1.7ms$. Le calcul des variables v_{D_k} et i_{D_k} ($k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) est détaillé dans l'annexe C.1.2. Ensuite, on passe à la configuration suivante, c'est à dire la deuxième jusqu'au dernier pas de temps vérifiant la condition $i_{D_3} \geq 0$ (figure 3.13d). Et on continue ainsi de suite jusqu'à l'obtention du régime permanent. La figure 3.14 montre les 5 premières périodes obtenues avec la méthode pas à pas.



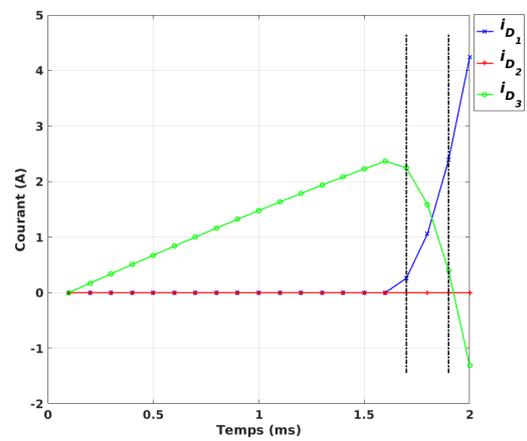
(a) v_1, v_2, v_3 et v_c



(b) i_1, i_2, i_3 et i_c

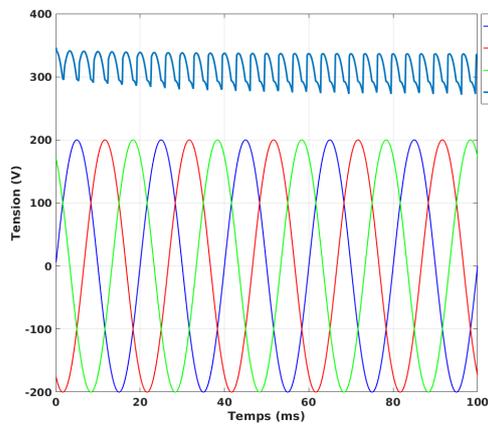


(c) $v_{D_1}, v_{D_2}, v_{D_3}$

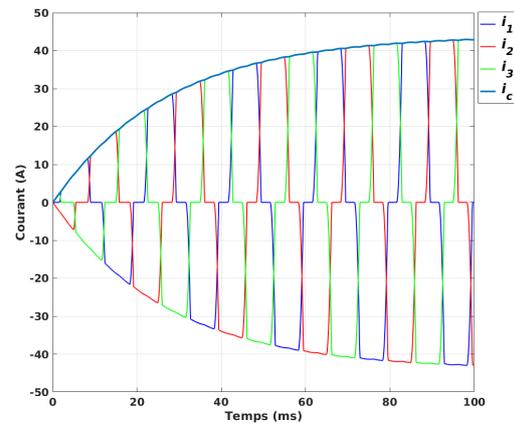


(d) $i_{D_1}, i_{D_2}, i_{D_3}$

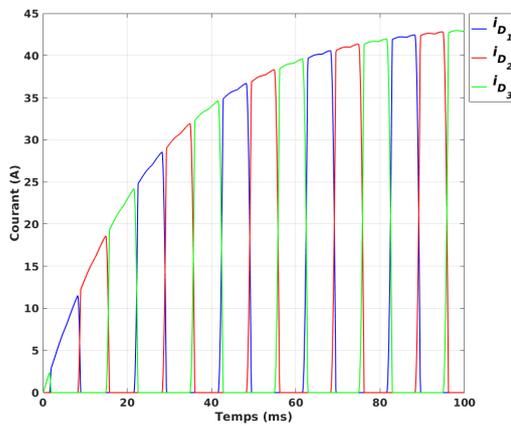
FIGURE 3.13 – Phénomène d’empiètement ; Premières Itérations obtenues avec une méthode pas à pas



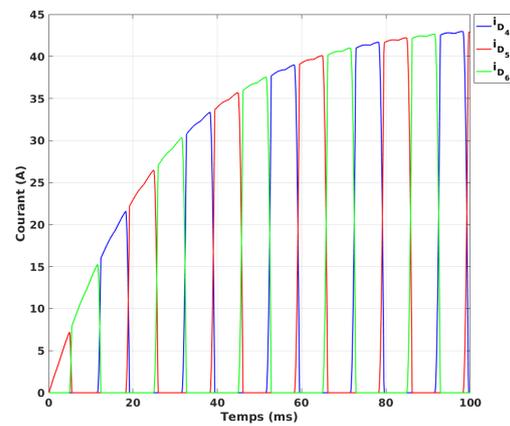
(a) v_1, v_2, v_3 et v_c



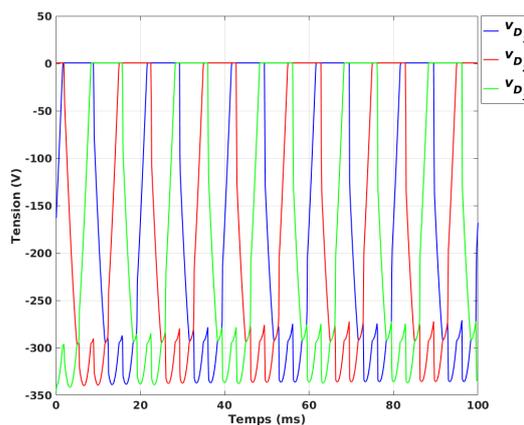
(b) i_1, i_2, i_3 et i_c



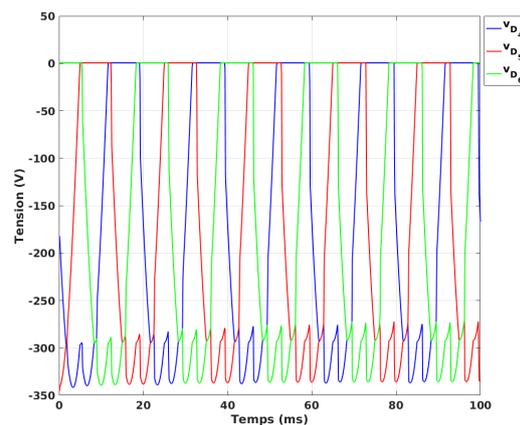
(c) $i_{D_1}, i_{D_2}, i_{D_3}$



(d) $i_{D_4}, i_{D_5}, i_{D_6}$



(e) $v_{D_1}, v_{D_2}, v_{D_3}$



(f) $v_{D_4}, v_{D_5}, v_{D_6}$

FIGURE 3.14 – Modélisation d'un redresseur double alternance : Solution obtenue avec une méthode pas à pas dans le temps

3.1.3.2 Algorithme de recherche du régime permanent

Nous avons vu dans les chapitres précédents qu'en imposant des conditions de périodicité, le régime permanent peut-être obtenu directement. Les équations de la méthode pas à pas se réécrivent alors sous forme vectorielle à l'aide de l'opérateur ∇_h . Les variables i_{D_k} et v_{D_k} ($k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) s'écrivent \mathbf{I}_{D_k} et \mathbf{V}_{D_k} des vecteurs de taille N_t . Les opérateurs s_i s'écrivent quant à eux, \mathbf{S}_i et sont définis par :

$$\mathbf{S}_i = \begin{pmatrix} s_i(1) & & & & & \\ & s_i(2) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & s_i(N_t) & \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

des matrices diagonales de taille $N_t \times N_t$. Le développement permettant d'obtenir le système matriciel est détaillé dans l'annexe C.2. Il reste néanmoins à définir l'instant de commutation des diodes, c'est à dire, définir la valeur des six opérateurs \mathbf{S}_i . N'ayant aucune informations, nous avons mis en place une approche itérative (figure 3.15) dont le but est de déterminer avec précision les instants de commutation des 6 diodes, soit au total 12 bornes. En étudiant les valeurs de courant traversant les diodes et les tensions à leurs bornes, il est possible d'adapter les bornes. L'algorithme continuera ainsi à ajuster les instants de commutations jusqu'à ce qu'il converge. Nous allons utiliser le montage présenté sur la figure 3.12 pour détailler le fonctionnement de cet algorithme.

La première étape consiste à déterminer l'état initial des 6 opérateurs \mathbf{S}_i . Pour ce faire, on résout le problème sur une période en pas à pas dans le temps. On obtient alors 12 bornes correspondants aux instants de commutation. Sur la figure 3.16, la solution du calcul initial est représentée avec les 12 bornes.

Connaissant les états initiaux des opérateurs \mathbf{S}_i , on aborde la deuxième itération. Les équations de circuit sont calculés à partir de ces opérateurs en forçant les instants de commutation des diodes. Dans ces conditions, les résultats obtenus laissent apparaître des "incohérences" sur les courants \mathbf{I}_{D_k} et les tensions \mathbf{V}_{D_k} ($k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) qui permettent de corriger les 12 bornes des opérateurs. Afin d'effectuer les corrections, outre \mathbf{I}_{D_k} et \mathbf{V}_{D_k} ($k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$), on a également recours à la dérivée temporelle de \mathbf{V}_{D_k} . En effet, en raison du mauvais positionnement des bornes de commutation des discontinuités apparaissent sur la tension aux bornes des diodes. Pour corriger les bornes de commutation, on distingue deux cas :

1. les bornes situées au début de l'empiétement lorsqu'une nouvelle diode se met à conduire,
2. les bornes situées à la fin de l'empiétement lorsqu'une diode se bloque.

Les conditions de commutation pour chacun des cas sont données en annexe C.2.3. En appliquant ces corrections, à chaque itération, on converge vers un positionnement des bornes de commutation correspondant aux courants et tensions des diodes. En appliquant ces conditions, il est possible d'obtenir exactement les bornes de commutations des diodes et ainsi la solution directement en régime permanent (figure 3.17). De plus, l'algorithme de recherche des bornes de commutation est très rapide puisque le système matricielle est de taille $N_t \times N_t$.

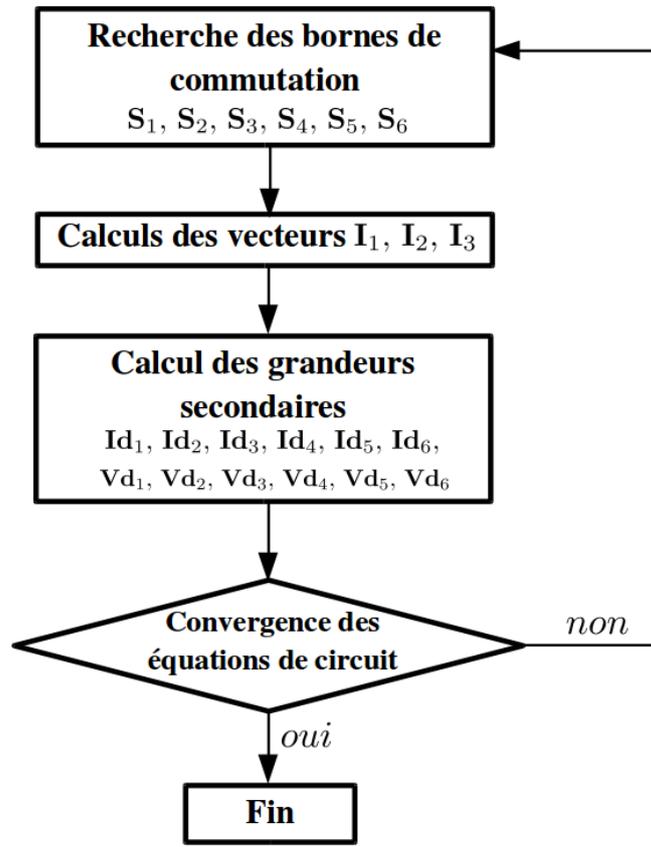


FIGURE 3.15 – Organigramme de l’algorithme mis en place pour obtenir le régime permanent

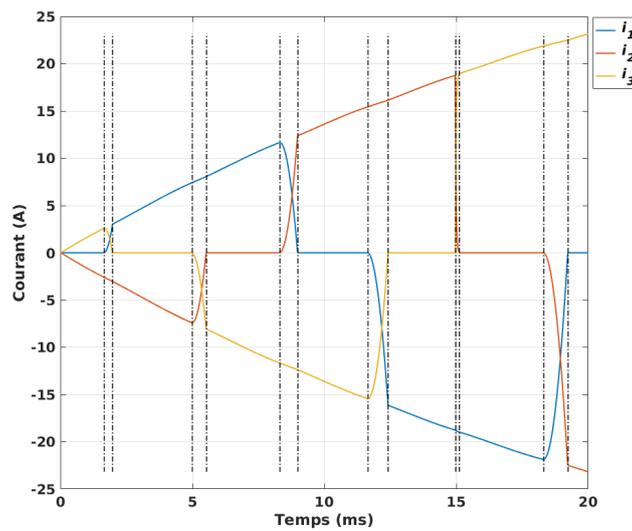
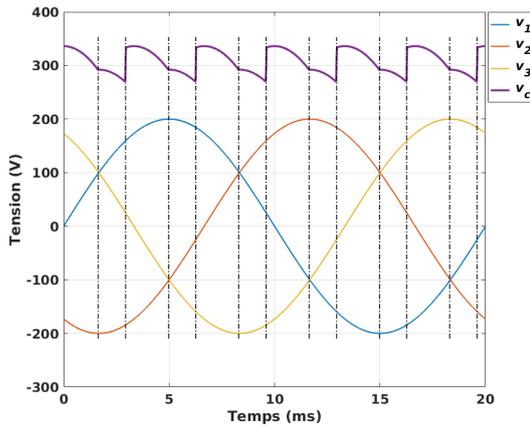
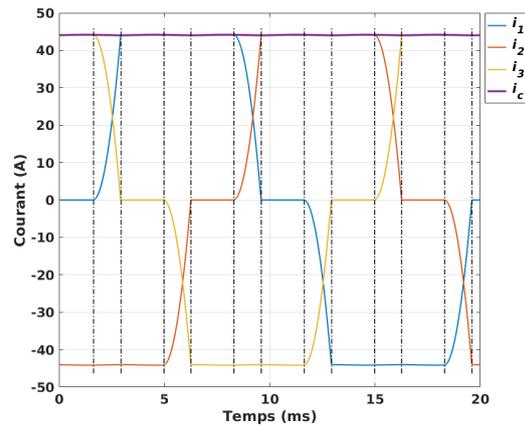


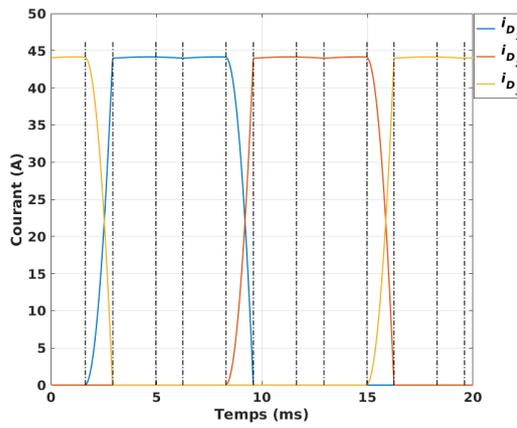
FIGURE 3.16 – Calcul initial pour déterminer l’état initiales des matrices S_i



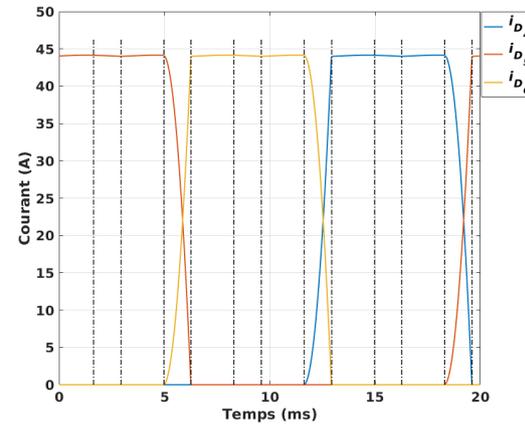
(a) Source de tension et tension redressée (V)



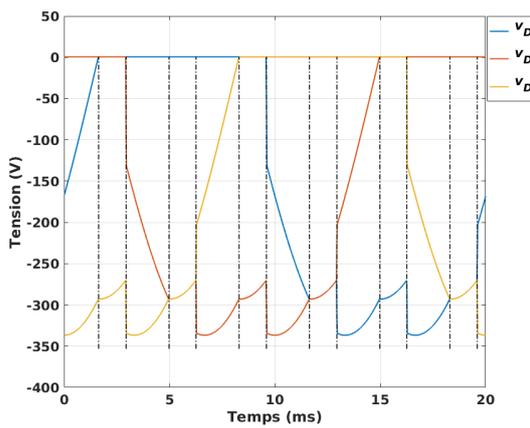
(b) Courant dans les 3 phases et courant redressé (A)



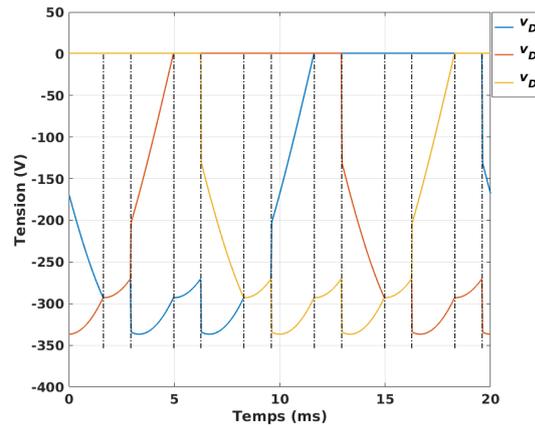
(c) Courant passant dans les diodes de la partie supérieure du redresseur (A)



(d) Courant passant dans les diodes de la partie inférieure du redresseur (A)



(e) Tension aux bornes des diodes de la partie supérieure du redresseur (V)



(f) Tension aux bornes des diodes de la partie inférieure du redresseur (V)

FIGURE 3.17 – Solution obtenue directement en régime permanent avec l'algorithme de recherche des bornes de commutation

3.1.4 Intégration de l’algorithme dans la WR-NM

On intègre maintenant le phénomène d’empiètement et donc la recherche des bornes de commutation des diodes dans la WR-NM. L’algorithme de couplages de ces deux méthodes est représenté sur la figure 3.18. On note, sur cet organigramme, qu’il est nécessaire que les équations de circuit aient convergé (et donc les bornes d’empiètement) avant d’aborder une nouvelle résolution des équations magnétiques.

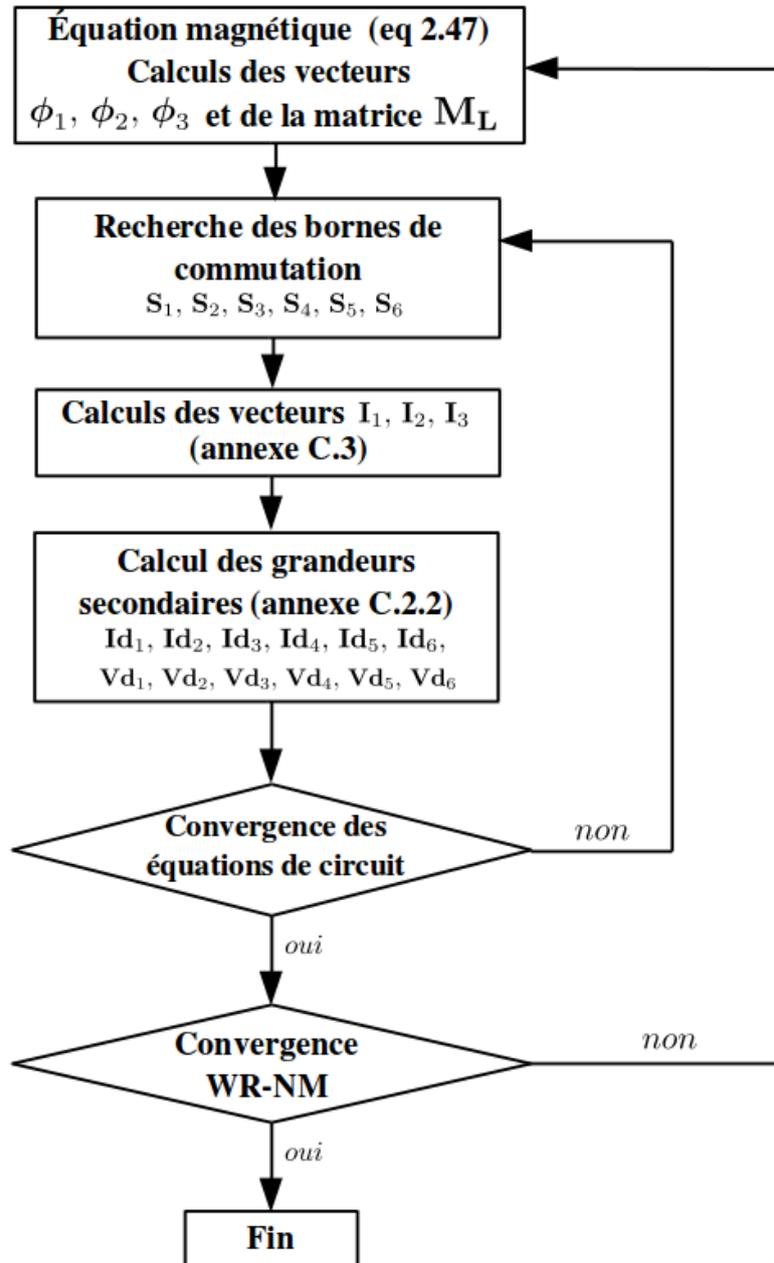


FIGURE 3.18 – Organigramme général de la WR-NM pour la résolution de dispositif électromagnétique couplé à des équations de circuit non linéaires

3.1.5 Transformateur triphasé couplé à un redresseur

Dans le chapitre 2, à la section 2.3.1, nous avons étudié différents points de fonctionnement d'un transformateur triphasé. Dans cette section, nous réutilisons ce dispositif couplé à un redresseur double alternance (figure 3.19) [Caron et al., 2016a]. Le circuit primaire est alimenté par une source de tension sinusoïdale d'une fréquence de 50Hz , d'amplitude 200V et discrétisée sur une période de 100 points. La résistance de charge R_c a une valeur de 4Ω et l'inductance de charge L_c une valeur de 50mH .

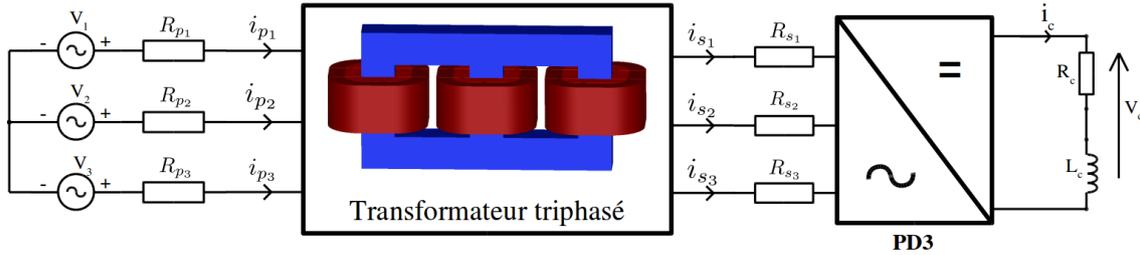
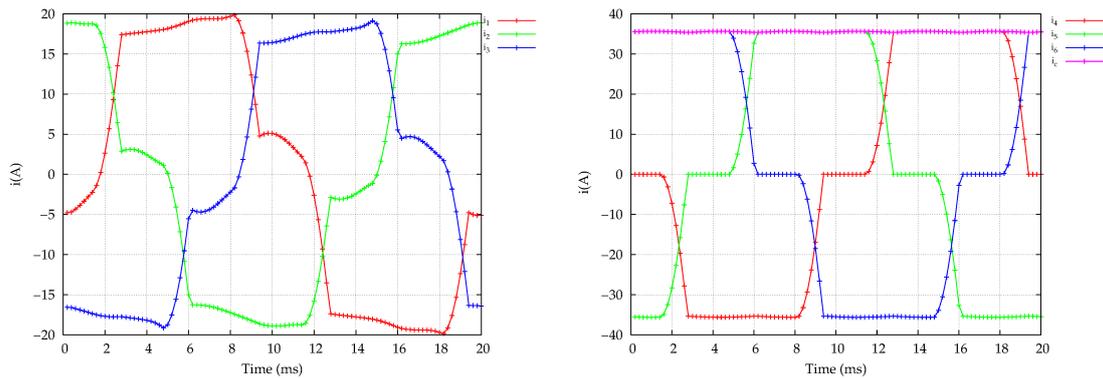


FIGURE 3.19 – Modélisation du transformateur couplé à un redresseur

Le détail pour obtenir le système matriciel permettant de résoudre les équations de circuit est développé dans l'annexe C.3. En appliquant ces méthodes, la WR-NM converge en 3 itérations pour un temps de calcul d'environ une heure. La figure 3.20a représente les courants dans le circuit primaire. Les courants du circuit secondaire sont quant à eux représentés sur la figure 3.20b. Les courants circulant dans les diodes sont tracés sur la figure 3.21a et les tensions aux bornes des diodes sur la figure 3.21b. Sur la figure 3.20b ou la figure 3.21a, on note que l'empiètement présente une durée de 1.2ms .



(a) Courants dans les 3 phases du circuit primaire

(b) Courants dans les 3 phases du circuit secondaire

FIGURE 3.20 – Courants dans le circuit primaire et le circuit secondaire

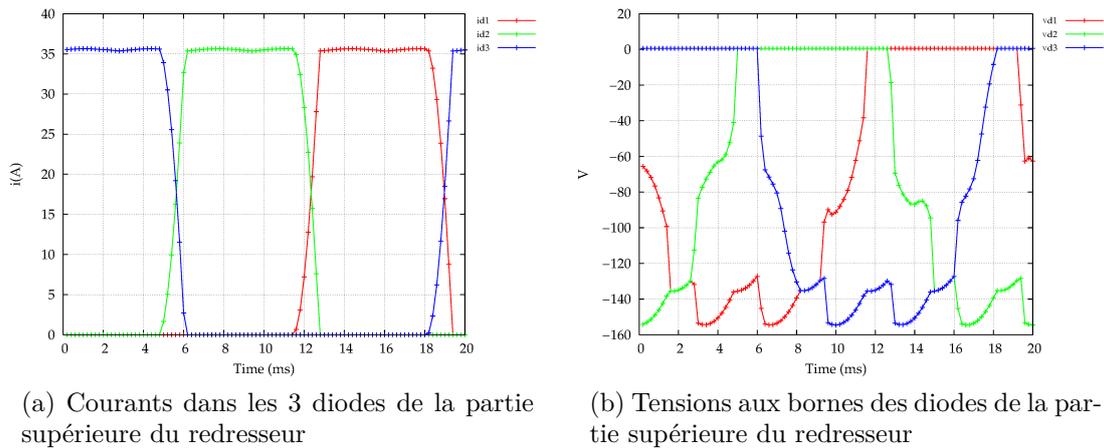


FIGURE 3.21 – Courants et tensions dans les diodes de la partie haute du redresseur

3.2 Modélisation d’un alternateur à griffes couplé à un pont redresseur

Dans les véhicules automobiles, la machine à griffes (figure 3.22) est utilisée pour recharger la batterie ainsi que pour alimenter tous les appareils électriques et électroniques. Nous détaillerons dans un premier temps la structure de la machine à griffes étudiée, puis dans un second temps, nous nous consacrerons à la modélisation de différents points de fonctionnement. Dans cette étude, nous nous limiterons au cas de la magnéto-statique.

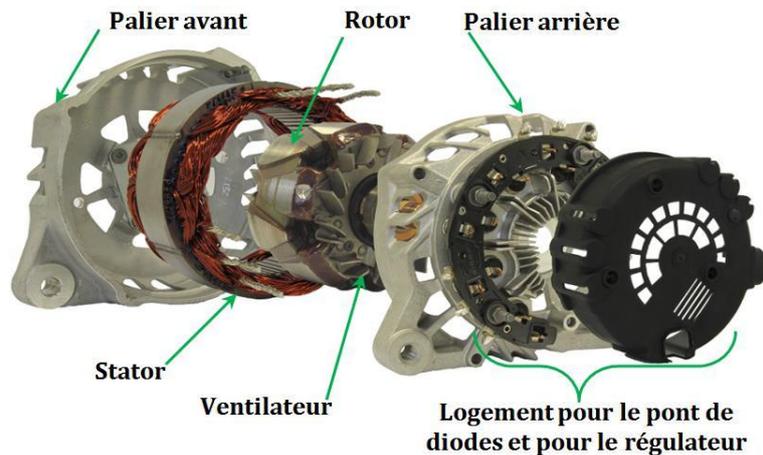


FIGURE 3.22 – Vue éclatée de la machine à griffes

3.2.1 Structure de l’alternateur à griffes

Contrairement aux machines synchrones classiques, le rotor est composé d’une roue polaire avant et d’une roue polaire arrière en forme de griffes (figure 3.23). Les deux roues sont généralement composées de 6 ou 8 griffes qui s’intercalent de façon à ce

qu'elles forment successivement un pôle nord et un pôle sud. Les deux roues polaires sont massives, elles sont en acier et possèdent par conséquent une caractéristique magnétique non linéaire. Le rotor est également composé d'une bobine d'excitation constituée de plusieurs centaines de spires et alimentée en courant continu. Sur certaines machines, des aimants sont placés entre les griffes pour réduire les fuites de flux magnétiques. Pour refroidir l'ensemble de la machine, des ventilateurs sont fixés sur les roues polaires.

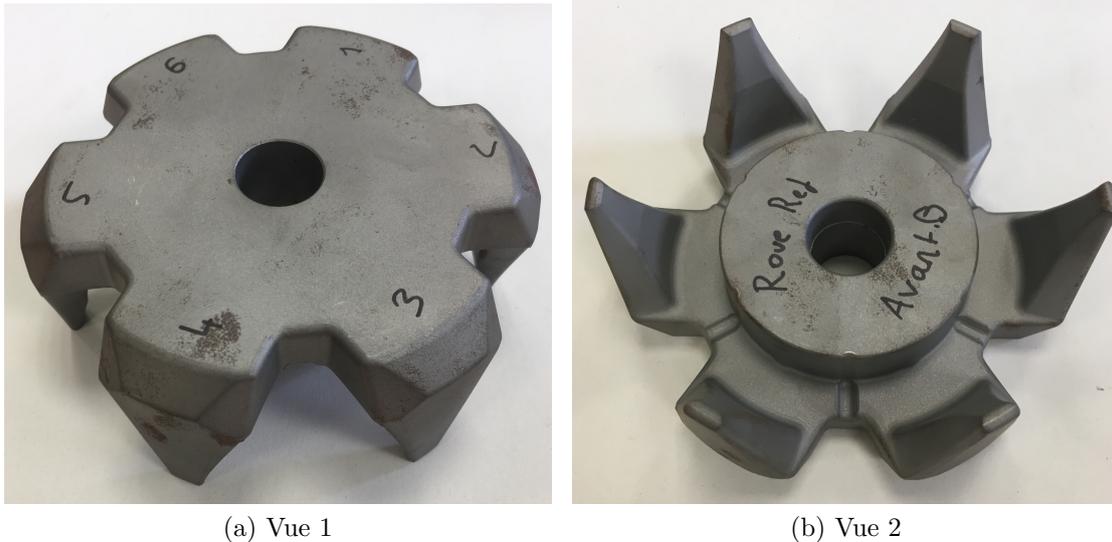


FIGURE 3.23 – Exemple de roue polaire

Le stator (figure 3.24) est constitué d'un empilement de tôles isolées d'une épaisseur de quelques dixièmes de millimètres. En vu d'insérer le bobinage, il possède des encoches dont le nombre par pôle et par phase varie généralement d'une à deux. Dans notre cas, on considère une phase par encoche. La résistance de bobinage n'excède pas quelques dixièmes d'ohm. Les tôles du stator sont constituées d'un alliage fer-silicium dont la caractéristique magnétique est également non linéaire.

3.2.2 Principe de fonctionnement

Comme les machines synchrones classiques, la bobine rotorique de la machine à griffes est alimentée en courant continu ce qui crée un champ magnétique dans le rotor. Le rotor est entraîné mécaniquement ce qui va créer un champ tournant dans le stator. Ceci va induire une force électromotrice dans les enroulements statoriques qui est proportionnelle à la vitesse de rotation du rotor. Ce qui fait la spécificité de la machine à griffe est le trajet parcouru par le champ magnétique. En effet, dans les machines synchrones classiques le trajet du champ se trouve dans le même plan que les tôles statoriques. En revanche, dans le cas de la machine à griffes la forme particulière du rotor implique que le champ suit un trajet tridimensionnel.



FIGURE 3.24 – Exemple de stator

3.2.3 Modélisation de la machine à griffes

3.2.3.1 Définition du modèle

Dans notre étude, la partie magnétique sera composée du rotor et du stator. Le rotor représenté sur la figure 3.25 est composé d'une roue polaire avant, d'une polaire arrière de six griffes chacune. Entre les roues polaires se trouve la bobine d'excitation composée de 350 spires.

Le stator est composé de 36 encoches, il est représenté avec le rotor sur les figures 3.27a et 3.27b. Dans cette étude académique, nous avons utilisé pour le rotor et le stator la même caractéristique magnétique (figure 3.26). Les enroulements représentés par des géométries simples sont définis dans les encoches statoriques. Pour cette étude, nous considérons que le bobinage du stator est triphasé, chaque phase étant composé de 7 spires possède une résistance de bobinage de $50m\Omega$. Le plan du bobinage est représenté sur la figure 3.28.

La présence de symétries et les possibilités de *code_Carmel* permettent de réduire le domaine d'étude de la machine à une paire de pôle. Le domaine est discrétisé sur deux maillages tétraédriques représentés sur les figures 3.29a et 3.30a. Le premier maillage, qu'on notera M_1 , contient 82656 éléments, ce qui représente environ 95000 inconnues pour le problème éléments finis. Le second maillage, noté M_2 , est, quant à lui, constitué de 313 276 éléments soit environ 363 500 inconnues. Une période électrique est quant à elle, discrétisée sur 60 pas de temps pour le maillage M_1 et sur 90 pas de temps pour le maillage M_2 .

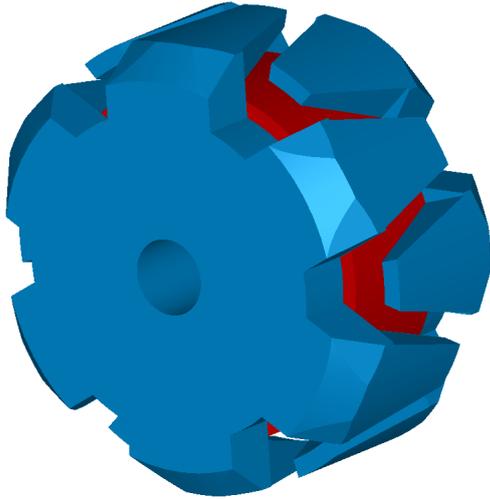


FIGURE 3.25 – Géométrie du rotor de notre étude

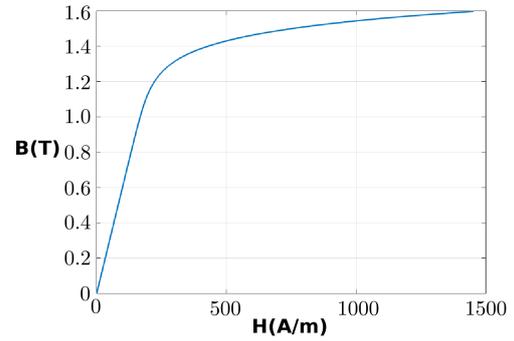
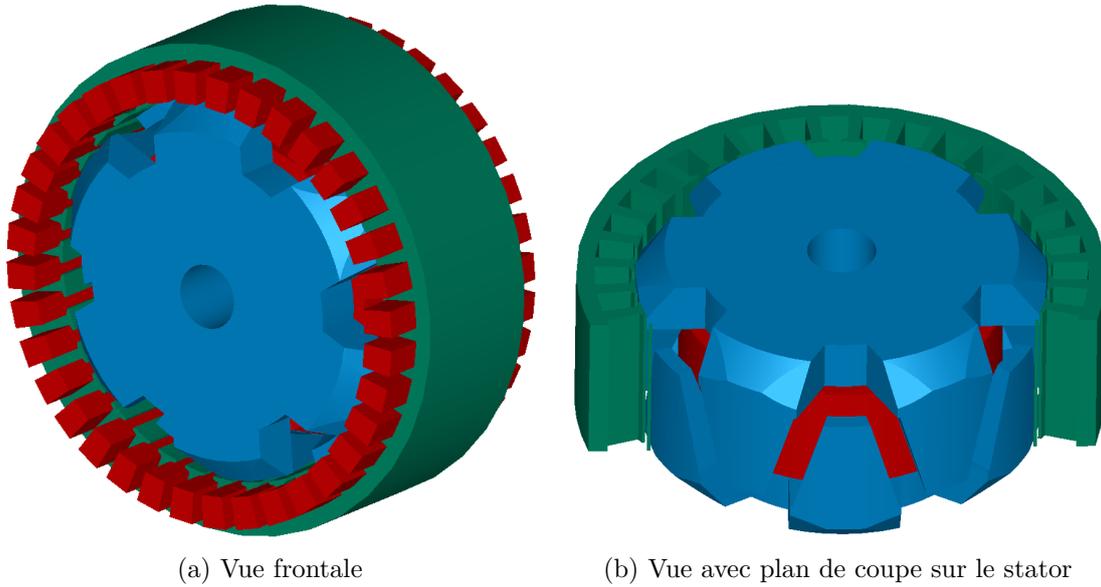


FIGURE 3.26 – Loi de comportement magnétique



(a) Vue frontale

(b) Vue avec plan de coupe sur le stator

FIGURE 3.27 – Géométrie du rotor et du stator utilisée pour notre étude

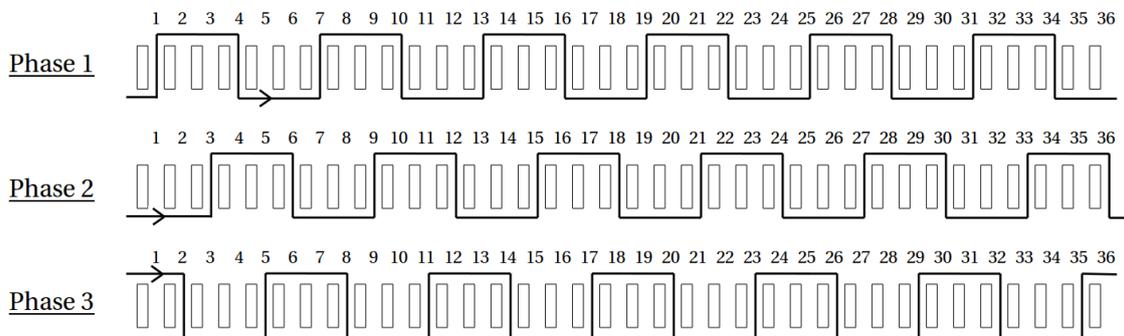


FIGURE 3.28 – Plan de bobinage du stator

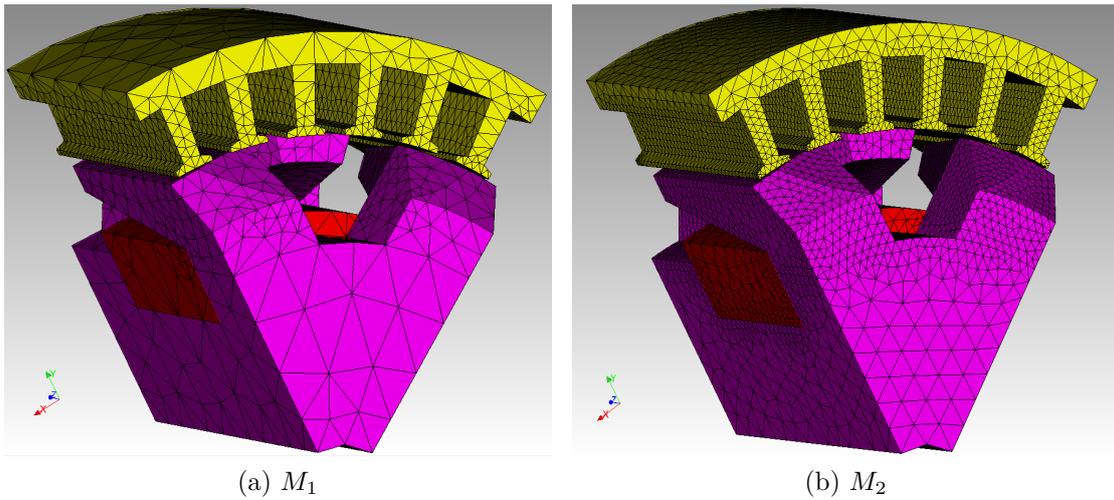


FIGURE 3.29 – Vue de face des maillages utilisés

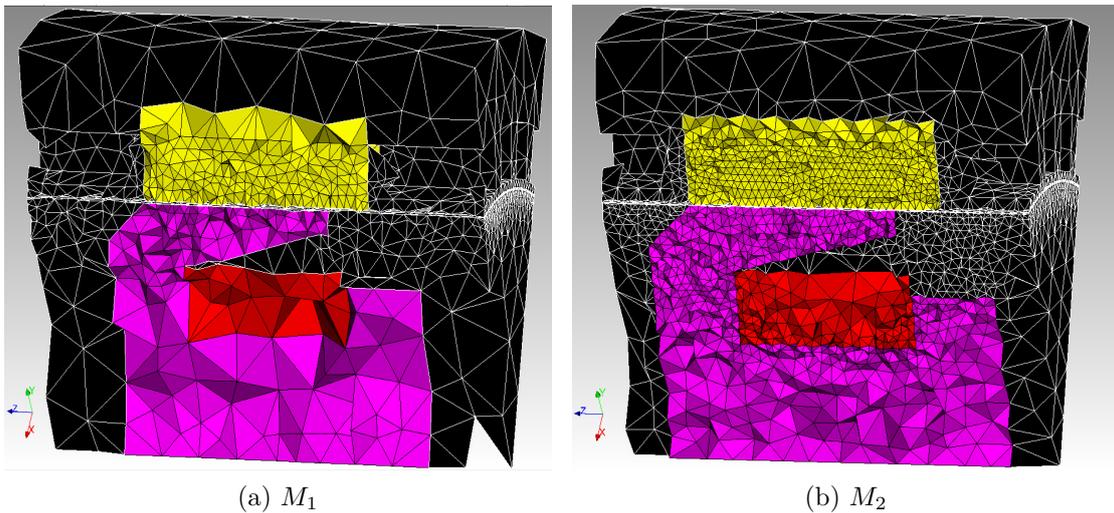


FIGURE 3.30 – Plan de coupe des maillages utilisés

3.2.3.2 Essais classiques

Caractéristique à vide

Dans un premier temps, nous allons étudier la caractéristique à vide de la machine. Dans cette situation le régime transitoire est inexistant, il n'est donc pas nécessaire d'utiliser la WR-NM. Nous réalisons par conséquent, une série de calculs avec *code_Carmel* sur une période à une vitesse de rotation de $1000tr/min$ et dans lesquels le courant d'excitation varie de $0.5A$ à $6A$. Pour un courant d'excitation de $1A$, les figures 3.31a et 3.31b représentent respectivement la distribution et la cartographie du flux magnétique dans le rotor pour le maillage M_1 . Sur la figure 3.31a, nous pouvons y voir le trajet tridimensionnel de l'induction magnétique. Par ailleurs, sur la figure 3.31b, nous pouvons observer les zones dont l'induction est relativement élevée avec une valeur maximale de $1.54T$. Parallèlement, la distribution et la car-

tographie du flux magnétique dans le stator sont représentées respectivement dans les figures 3.32a et 3.32b.

La figure 3.33 représente les forces électromotrices pour un courant d'excitation d'une valeur de 1A, 3A et 6A pour les maillages M_1 et M_2 . Comme nous pouvons le voir notamment sur les figures 3.33e et 3.33f, les effets de la saturation ont tendance à lisser la forme des f.e.m..

Sur la figure 3.34, nous avons tracé l'évolution de la valeur efficace des forces électromotrices (f.e.m.), noté V_{eff} , en fonction du courant d'excitation pour les maillages M_1 et M_2 . Nous pouvons voir que pour des valeurs comprises entre 0 et 1.5A, V_{eff} évolue de manière linéaire. Au delà de cette valeur, on voit apparaître les effets de saturation.

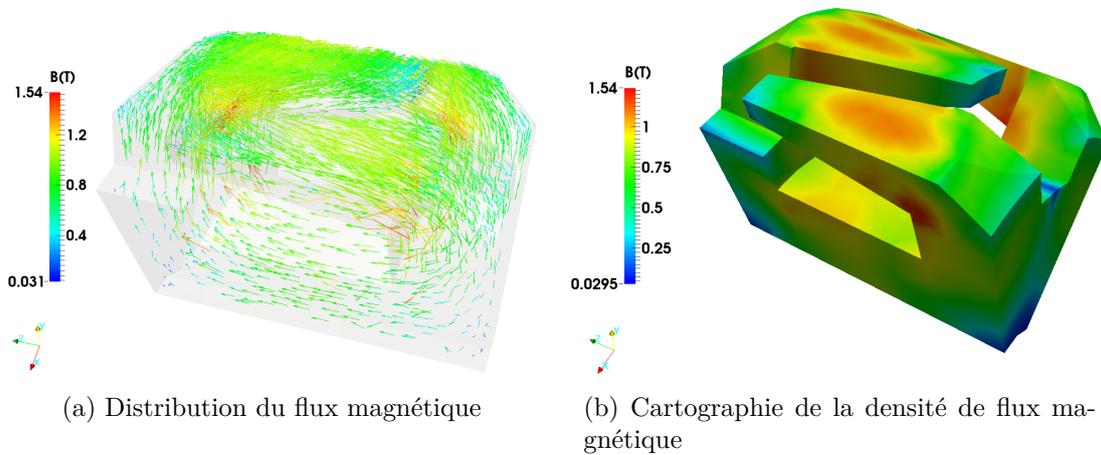


FIGURE 3.31 – Essai à vide : flux magnétique dans le rotor (maillage M_1)

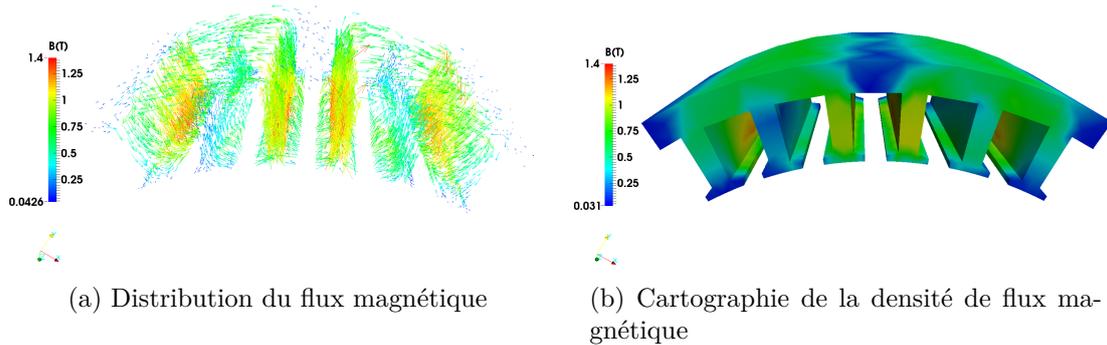


FIGURE 3.32 – Essai à vide : flux magnétique dans le stator (maillage M_1)

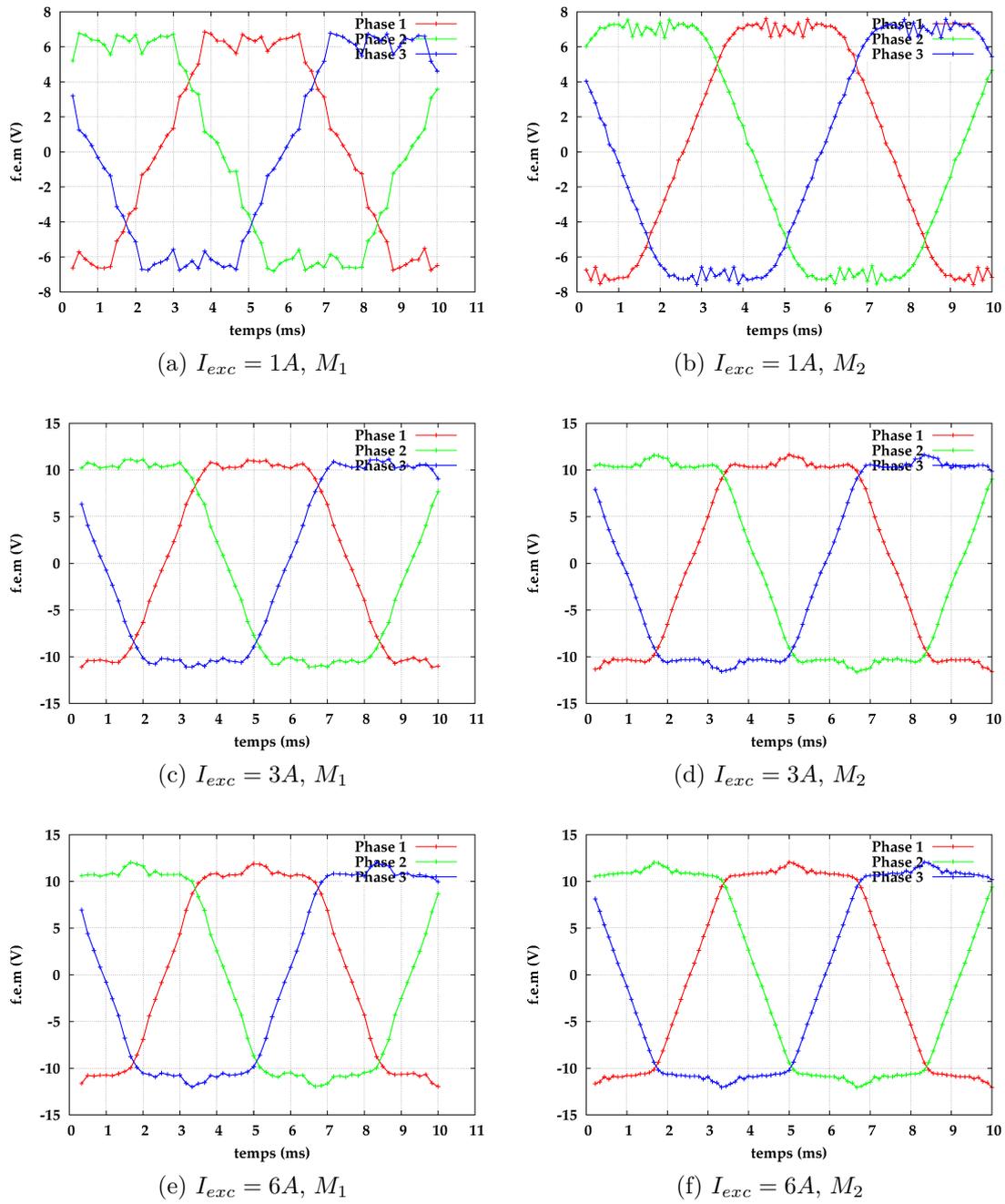


FIGURE 3.33 – Force électromotrice dans les 3 phases des inducteurs statoriques pour des essais à vide à $1000tr/min$ pour les maillages M_1 et M_2

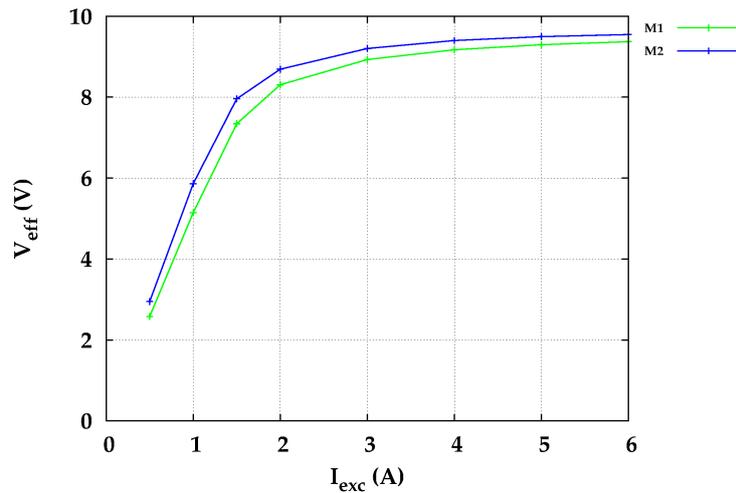


FIGURE 3.34 – Valeur efficace de la force électromotrice en fonction du courant d’excitation pour des essais à vide

Caractéristique en charge

Afin de valider la WR-NM, nous réalisons une série de calcul sur les deux maillages pour différents points de fonctionnement en charge que nous comparerons à la TSFEM implémentée dans *code_Carmel*. Les calculs sont effectués à une vitesse de rotation de $3000tr/min$ pour un courant d’excitation de $3A$ avec une charge R_c (placé sur chaque phase) que nous ferons varier de $200m\Omega$ à 1Ω . Pour montrer la validité de la WR-NM, nous avons, dans un premier temps, tracé sur la figure 3.35 le courant obtenu dans les trois phases pour des résistances de charges de 1Ω , $600m\Omega$ et $200m\Omega$. Nous pouvons y voir notamment les effets de saturation lorsque la résistance de charge diminue (figures 3.35e). De plus, les résultats obtenus avec la WR-NM et la TSFEM sont en parfaites concordances et ce quelque soit la valeur de R_c . La validité de la WR-NM est également vérifiée sur des grandeurs locales, en effet, sur la figure 3.36, nous avons tracé la différence entre l’induction magnétique obtenue avec la WR-NM et celle obtenue par la TSFEM pour une résistance de charge de $200m\Omega$ pour le maillage M_1 . La différence entre les deux méthodes est inférieure à 10^{-5} . Le tableau 3.2 et respectivement 3.3 résume les différents calculs que nous avons effectué pour les maillages M_1 et M_2 . Nous pouvons voir également que le régime transitoire est relativement court puisque le régime permanent est atteint (critère d’erreur de 10^{-5}) en moins de 6 périodes lorsque l’on utilise la TSFEM. Ceci explique la raison pour laquelle les temps de calcul sont plus long lorsque l’on utilise la WR-NM. Pour montrer l’intérêt de la WR-NM, nous avons effectué un calcul supplémentaire dans lequel nous avons ajouté une inductance de charge L_c d’une valeur de $2mH$ afin d’augmenter la constante de temps. Les courants obtenus avec la WR-NM sont ici aussi identiques à ceux obtenus avec la TSFEM (figure 3.37), la valeur efficace du courant de charge vaut $6.56A$ pour le maillage M_1 et $6.76A$ pour le maillage M_2 , cette baisse est directement liée à la présence de l’inductance. La WR-NM converge en 3 itérations pour une durée de 7 heures et 35 minutes pour le maillage M_1 et de 69 heures et 19 minutes pour le maillage M_2 . En revanche,

pour la TSFEM, le régime permanent est atteint à la 22^e périodes pour un temps de calcul de 39 heures et 10 minutes pour le maillage M_1 et de 10 jours et 20 heures pour le maillage M_2 . Par conséquent, la WR-NM est environ 5 fois plus rapide que la TSFEM.

Dans la figure 3.38, nous avons représenté l'erreur entre deux itérations pour la WR-NM et l'erreur entre deux périodes successives pour la TSFEM pour une résistance de charge de $200m\Omega$ avec et sans inductance de charge. Quelque soit les paramètres, la WR-NM converge en moins de 5 itérations, en revanche, la convergence de la TSFEM dépend fortement de la valeur de l'inductance de charge. En conclusion, on observe de nouveau qu'en présence d'un régime transitoire long, il est conseillé d'utiliser la WR-NM.

R_c	I_{eff}	Périodes TSFEM	Temps TSFEM	Itérations WR-NM	Temps WR-NM
$200m\Omega$	$54.62A$	6	$14h42min$	6	$20h$
$400m\Omega$	$45.26A$	4	$9h19min$	5	$13h42min$
$600m\Omega$	$35.58A$	4	$8h48min$	5	$12h24min$
$800m\Omega$	$28.68A$	3	$6h42min$	4	$10h10min$
$1000m\Omega$	$23.87A$	3	$6h13min$	4	$9h53min$

TABLE 3.2 – Essai sur charge résistive : comparaison entre la WR-NM et la TSFEM à $3000tr/min$ pour $I_{exc} = 3A$ pour le maillage M_1 .

R_c	I_{eff}	Périodes TSFEM	Temps TSFEM	Itérations WR-NM	Temps WR-NM
$400m\Omega$	$47.20A$	4	$76h17min$	5	$108h46min$
$600m\Omega$	$36.91A$	4	$68h50min$	5	$108h31min$
$800m\Omega$	$29.69A$	3	$50h29min$	5	$102h10min$
$1000m\Omega$	$24.68A$	3	$46h2min$	4	$88h18min$

TABLE 3.3 – Essai sur charge résistive : comparaison entre la WR-NM et la TSFEM à $3000tr/min$ pour $I_{exc} = 3A$ pour le maillage M_2 .

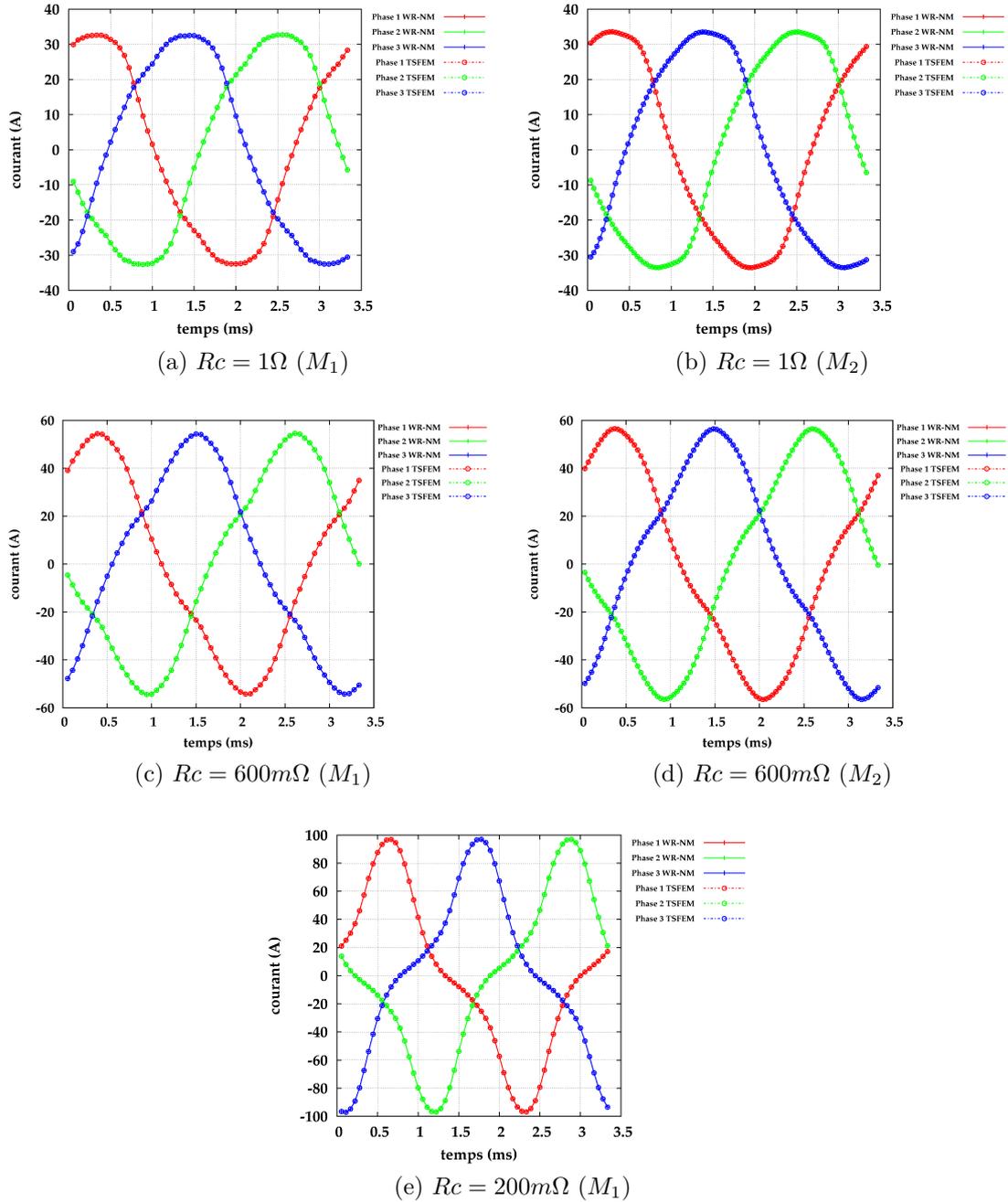


FIGURE 3.35 – Comparaison de la TSFEM et de la WR-NM pour le calcul du courant dans les trois phases des inducteurs statoriques pour des essais en charge à $3000tr/min$

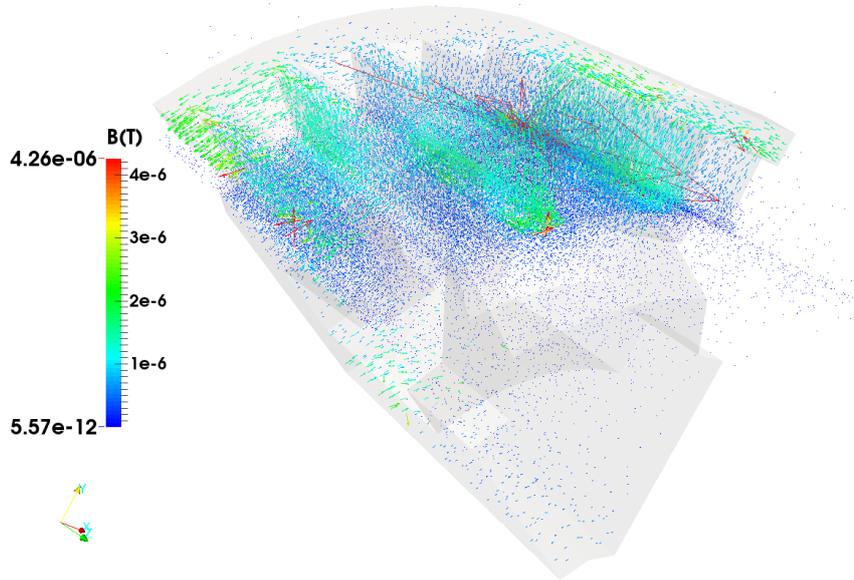


FIGURE 3.36 – Différence entre l’induction magnétique obtenue avec la TSFEM et celle obtenue avec la WR-NM pour une résistance de charge de $200m\Omega$

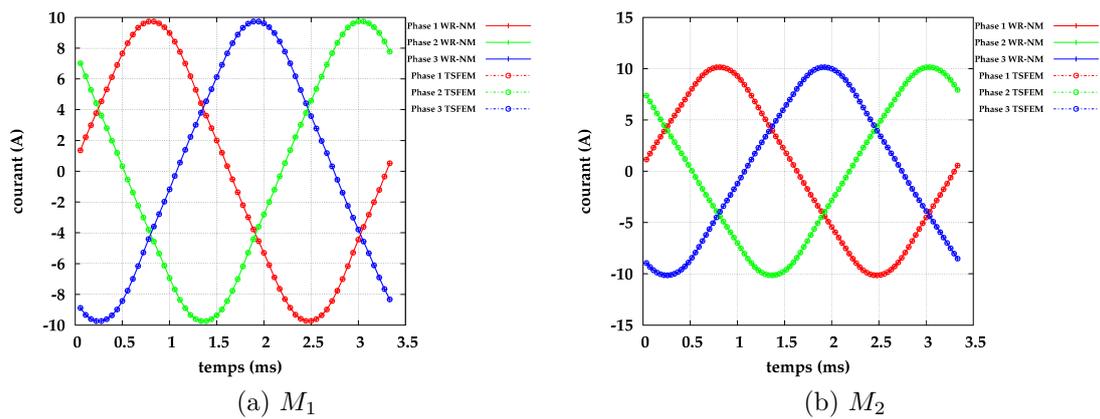


FIGURE 3.37 – Courants obtenus avec la WR-NM et la TSFEM pour $R_c = 200m\Omega$, $L_c = 2mH$, $I_{exc} = 3A$ à $3000tr/min$.

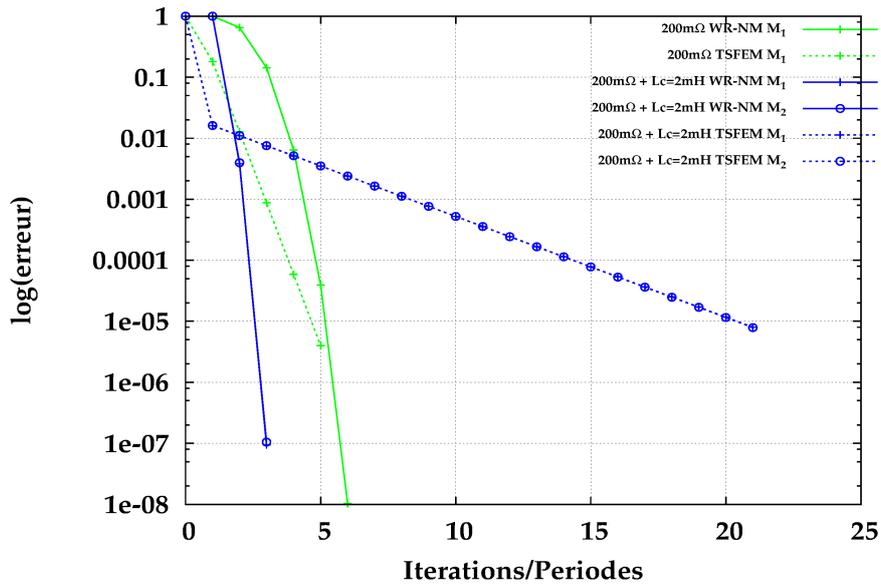


FIGURE 3.38 – Comparaison de la convergence de l’erreur de la WR-NM et de la TSFEM à $3000tr/min$ pour $I_{exc} = 3A$, $R_c = 200m\Omega$ avec $L_c = 0H$ et $L_c = 200mH$.

3.2.3.3 Couplage avec un pont redresseur

Le modèle magnétique étant validé, nous utilisons maintenant la WR-NM pour modéliser la machine à griffes couplé à un pont redresseur (figure 3.39). Pour cela, nous utilisons l’algorithme 3.18 défini dans la section précédente.

Dans cette partie, nous avons effectué des calculs en faisant varier la vitesse de rotation entre 1000 et $6000tr/min$ pour $R_c = 2\Omega$, $L_c = 1mH$ et $I_{exc} = 3A$. Sur la figure 3.40, pour les maillages M_1 et M_2 et pour une vitesse de rotation de $1000tr/min$, nous avons représenté l’évolution des courants de phase (figures 3.40a et 3.40b), les tensions de phase et V_c (figures 3.40c et 3.40d), les courants I_{D_1} , I_{D_2} et I_{D_3} dans les diodes D_1 , D_2 et D_3 (figures 3.40e et 3.40f) et enfin les tensions V_{D_1} , V_{D_2} et V_{D_3} aux bornes des diodes D_1 , D_2 et D_3 (figures 3.40g et 3.40h). Dans les mêmes conditions, la figure 3.41 présente les résultats pour une vitesse de rotation de $6000tr/min$.

Dans le tableau 3.4, on présente pour différentes vitesses, la valeur moyenne du courant redressé $\langle i_c \rangle$, de la tension redressée $\langle v_c \rangle$ ainsi que le nombre d’itération WR-NM et les temps de calcul obtenus avec le maillage M_1 . Le tableau 3.5 présente les mêmes informations pour le maillage M_2 . On notera que le nombre d’itérations de la WR-NM ne varie pas (4 itérations) et que les temps de calculs varient faiblement.

Pour montrer la validité de la méthode, nous avons effectué un calcul supplémentaire sur les deux maillages à $6000tr/min$ avec une inductance de charge de $L_c = 5mH$ cette fois. La solution est obtenue en 4 itérations et 11 heures et 12 minutes de temps de calcul pour le maillage M_1 et 5 itérations et 112 heures et 50 minutes de temps de calcul pour le maillage M_2 . Les résultats sont représentés dans la figure 3.42. Nous pouvons voir que les résultats sont similaires à ceux obtenus sur la figure 3.41, avec néanmoins une ondulation de courant plus faible (figure 3.42e et 3.42f).

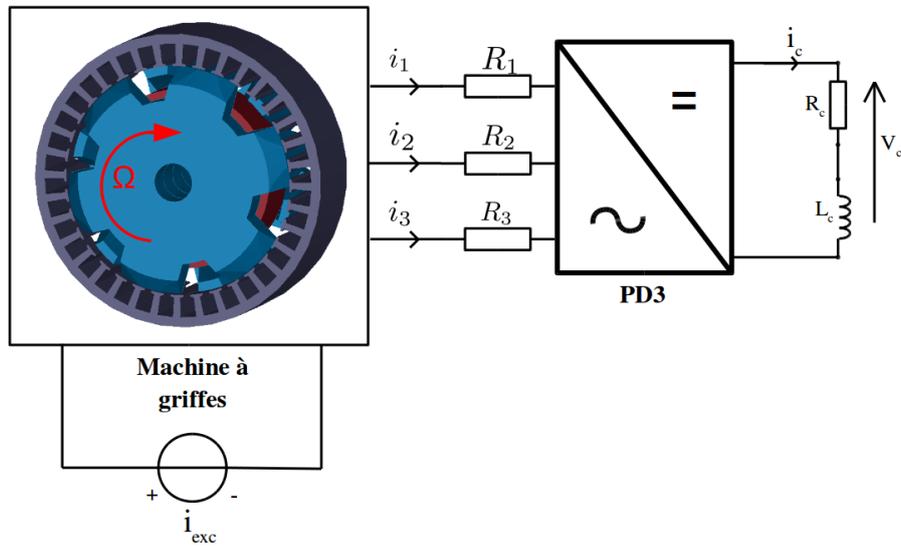


FIGURE 3.39 – Modélisation de la machine à griffes couplé à un redresseur double alternance

tr/min	$\langle i_c \rangle$	$\langle v_c \rangle$	Itérations WR-NM	temps WR-NM
1000	10.05A	20.11V	4	9h48min
1500	14.47A	28.95V	4	9h38min
2000	18.67A	37.34V	4	10h12min
2500	22.65A	45.31V	4	11h13min
3000	26.42A	52.85V	4	12h2min
4500	36.58A	73.15V	4	11h56min
6000	45.39A	90.78V	4	11h55min

TABLE 3.4 – Résultats obtenus pour la modélisation de l’alternateur couplé à un redresseur double alternance pour le maillage M_1

rpm	$\langle i_c \rangle$	$\langle v_c \rangle$	Itérations WR-NM	temps WR-NM
1000	10.28A	20.56V	4	71h45min
1500	14.86A	29.71V	4	76h26min
2000	19.22A	38.43V	4	80h
2500	23.34A	46.69V	4	80h59min
3000	27.24A	54.47V	4	82h18min
4500	37.70A	75.41V	5	96h6min
6000	46.54A	93.09V	5	94h48min

TABLE 3.5 – Résultats obtenus pour la modélisation de l’alternateur couplé à un redresseur double alternance pour le maillage M_2

3.3 Conclusion

Dans la première partie, nous avons développé un algorithme permettant d’obtenir le régime permanent directement pour la modélisation de composants électriques non linéaires (redresseur à diodes). Cet algorithme, qui est itératif, détermine les bornes de commutation des différents diodes du circuit. Dans la seconde partie, nous avons appliqué cet algorithme avec la WR-NM à la modélisation d’un transformateur triphasé couplé à un redresseur double alternance. Enfin, nous avons calculé le régime permanent d’un alternateur à griffes associé à un redresseur double alternance.

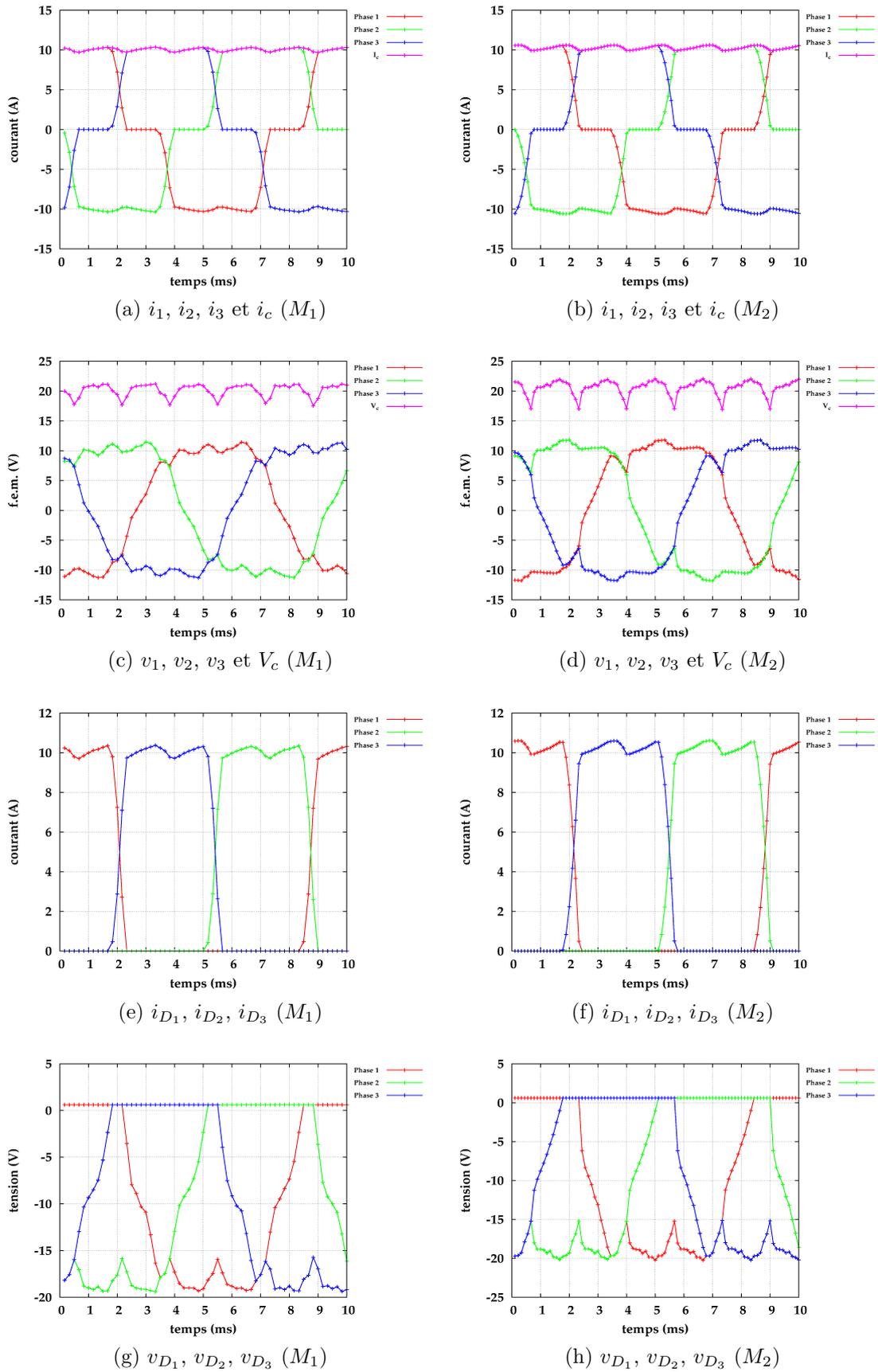


FIGURE 3.40 – Résultats obtenus avec la WR-NM pour la simulation à 1000rpm

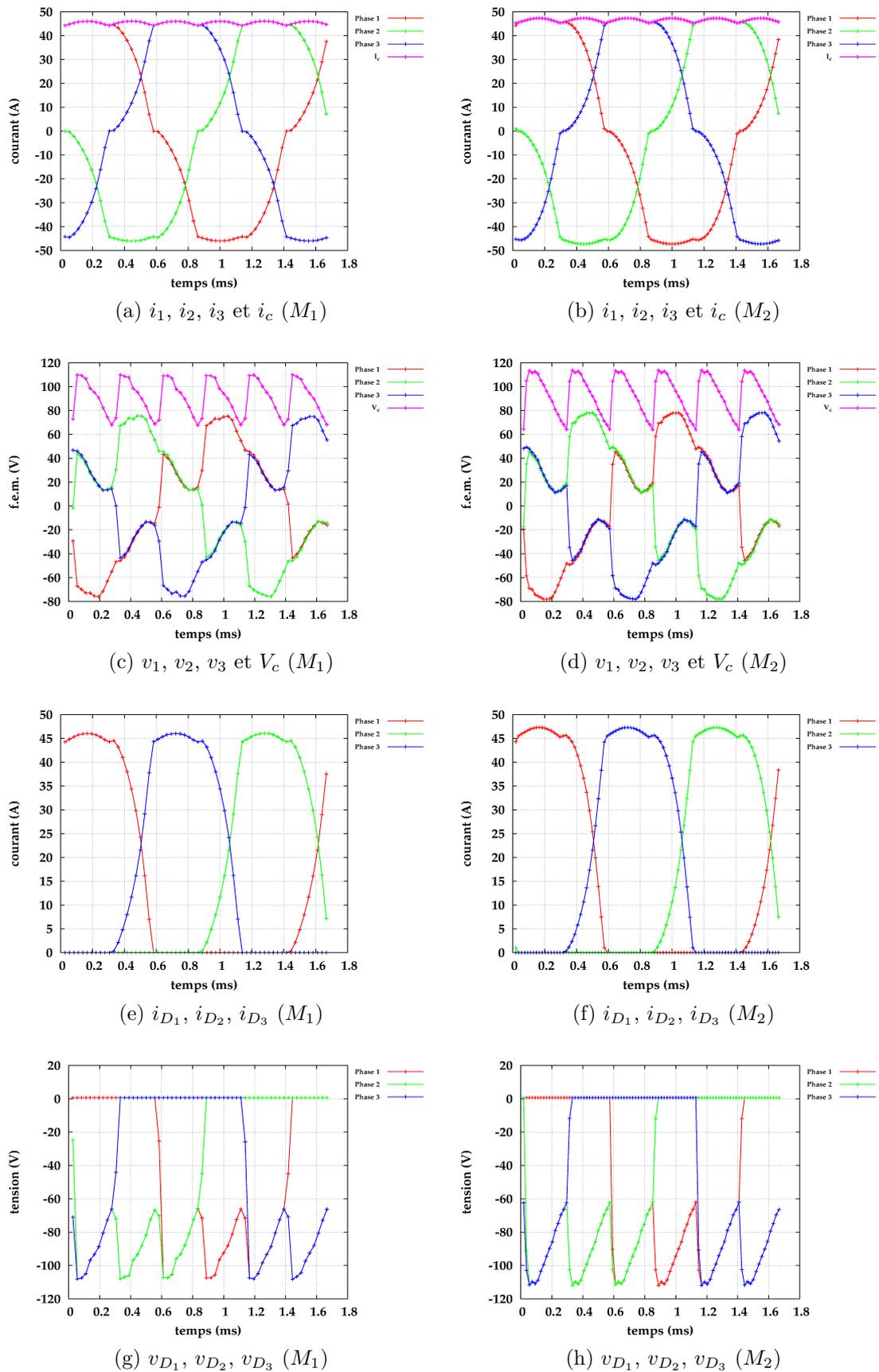


FIGURE 3.41 – Résultats obtenus avec la WR-NM pour la simulation à 6000rpm

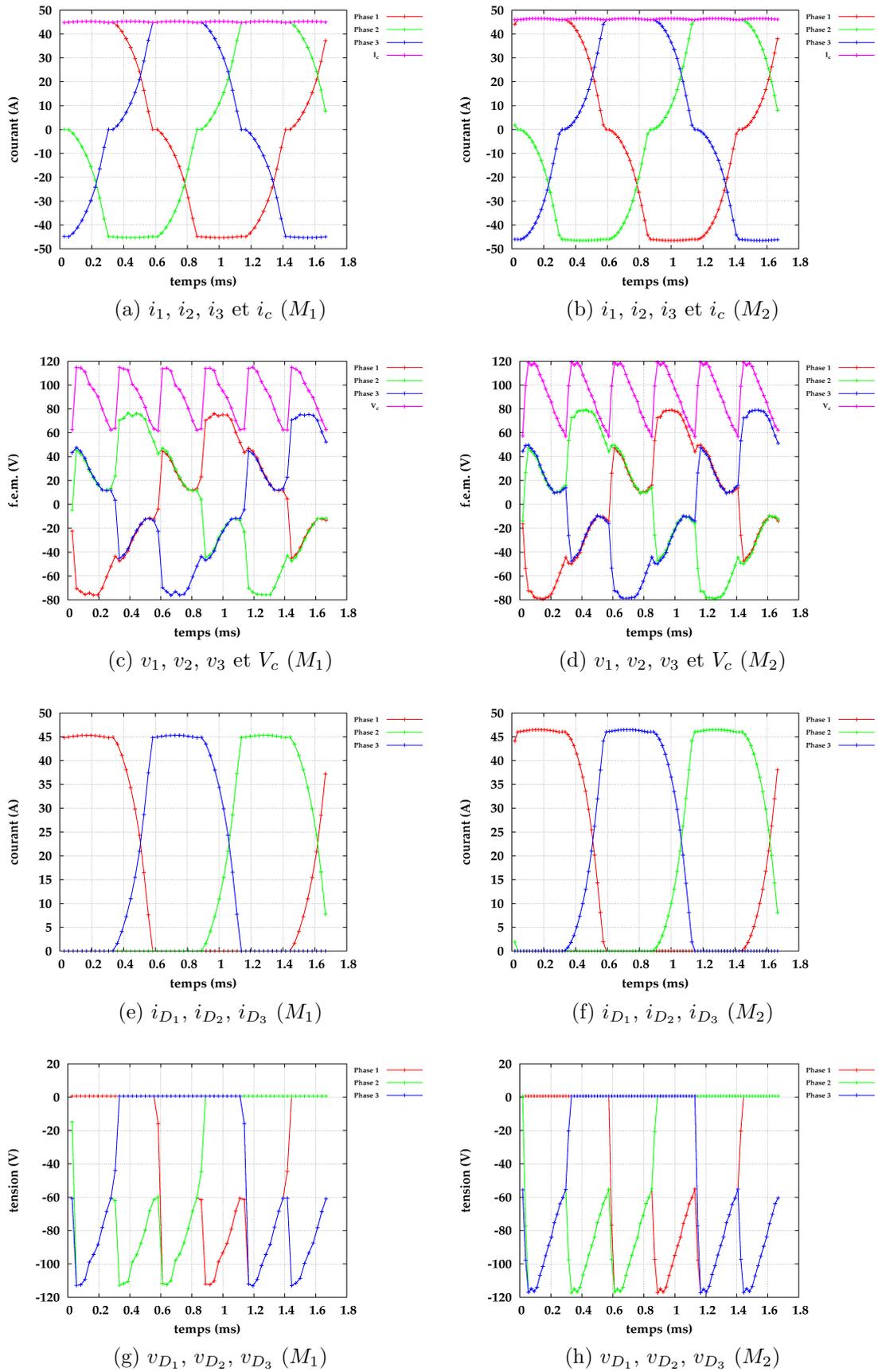


FIGURE 3.42 – Résultats obtenus avec la WR-NM pour la simulation à 6000rpm avec une inductance de charge de 5mH

Conclusion générale

La *Time Stepping Finite Element Method* (TSFEM) est une méthode très utilisée pour la modélisation de dispositifs électromagnétiques. À la fois robuste et efficace, cette méthode est appréciée pour sa simplicité à mettre en place. Néanmoins, elle peut mener à des temps de calcul important lorsque le régime transitoire est particulièrement long. De ce fait, les travaux faisant l'objet de ce mémoire ont eu pour principal objectif de réduire les temps de simulation de problèmes électromagnétiques couplés à des équations de circuit.

Dans le premier chapitre, nous sommes revenu sur le modèle mathématique formé par les relations de Maxwell ainsi que sur les hypothèses classiques faites dans le domaine de l'électrotechnique. Ces hypothèses permettent de simplifier les équations de Maxwell, les équations obtenues, appelées équations de la magnéto-quasi-statique ou encore équations de la magnétodynamique, régissent les phénomènes électromagnétiques à basse fréquence. La combinaison de la méthode des Éléments Finis et d'une méthode pas à pas dans le temps (dans notre cas la méthode d'Euler implicite) permet de discrétiser le problème à la fois en temps et en espace. Nous avons montré comment cette méthode (TSFEM) permet d'aboutir sur un système matriciel dont le nombre d'inconnues est lié au nombre d'éléments du maillage et qui dépend du temps. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à un état de l'art sur les méthodes permettant d'accélérer le régime transitoire et sur les méthodes permettant de l'obtenir directement.

Le deuxième chapitre a concerné la recherche du régime permanent lorsque le problème électromagnétique est couplé à des équations de circuit. Il débute sur un état de l'art des méthodes adaptées à la résolution de ces problèmes. Nous y découvrons différents type de couplage, parmi lesquels la *Waveform Relaxation Method* (WRM) permettant de coupler des problèmes de natures différentes. Cette méthode est particulièrement intéressante puisqu'elle calcule des formes d'ondes sur des intervalles de temps fixés. De ce fait, nous avons développé la *Waveform Relaxation-Newton Method* (WR-NM) basée sur la WRM dans laquelle des conditions de périodicité

ont été imposées afin d'obtenir le régime permanent directement. Nous l'avons ensuite couplé à la méthode de Newton-Raphson en vu d'avoir une convergence quadratique. Dans la dernière partie de chapitre, la WR-NM a été testée sur deux applications. Pour la première, nous avons modélisé un transformateur triphasé en différents points de fonctionnement. Pour valider l'efficacité et la robustesse de notre méthode, nous l'avons comparée à la TSFEM implémentée dans *code_Carmel*. Pour la majorité des points de fonctionnement simulés, les résultats sont particulièrement intéressants puisque l'on obtient des gains en temps de calcul supérieur à 30 pour une même précision. Dans la deuxième application, une bobine située entre deux plaques conductrices a été modélisée. La présence d'une dérivée temporelle dans les équations magnétiques, dû à la présence de courants induits, implique de devoir résoudre un système matriciel par bloc, non symétrique et de grande taille. Pour obtenir la solution de ce système, la méthode de Gauss-Seidel a été utilisée ce qui augmente fortement le nombre de système linéaire à résoudre. Pour pallier à ce problème, une méthode de réduction de modèle adaptative a été introduite ce qui nous a permis d'obtenir des gains en temps considérable par rapport à la TSFEM. Néanmoins, pour des matériaux non linéaires ayant une géométrie complexe, nous savons que les modèles réduits ne sont plus aussi performants. Les temps de calcul seront, par conséquent, fortement impactés.

Enfin, le dernier chapitre s'intéresse à la robustesse de la WR-NM lorsque le problème magnétique est couplé à des équations de circuit non linéaires. Cela se traduit par l'intégration dans le circuit électrique de composants électroniques, dans notre cas, de redresseurs à diodes. La présence de ces composants est problématique lorsque l'on applique la WR-NM, et plus généralement toutes les méthodes calculant le régime permanent directement. En effet, l'instant de commutation des diodes n'est pas connu *a priori*, lorsque des phénomènes complexes sont pris en considération comme l'empiètement. Dans la première partie, nous avons mis en place un algorithme itératif dont le but est de définir les bornes de commutation. Grâce à cet algorithme, la WR-NM est capable de modéliser des problèmes électromagnétiques couplés à des équations de circuit non linéaires. Nous l'avons testé sur le transformateur triphasé défini dans le deuxième chapitre. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la modélisation d'une machine à griffes pour différents points de fonctionnement. Après une brève description des machines à griffes, nous présentons la machine étudiée ainsi que les deux maillages utilisés. Le premier point de fonctionnement étudié est le fonctionnement à vide. Après avoir donné les caractéristiques à vide de la machine, nous avons modélisé la machine à griffes lorsque que le circuit électrique est composé d'une charge RL. Les résultats ont été effectués avec la WR-NM et *code_Carmel* pour valider le modèle. Les résultats montrent ici aussi qu'il est préférable d'utiliser la WR-NM lorsque le régime transitoire devient conséquent. Pour finir, la machine à griffes a été modélisée lorsqu'elle est couplée à un redresseur double alternance pour les deux maillages. Une série de calcul a été réalisée pour différentes vitesses et à chaque fois la WR-NM a convergé.

Finalement, il est possible de réduire drastiquement les temps de calcul de problèmes magnétostatiques couplés à des équations de circuit en cherchant à atteindre direc-

tement le régime permanent grâce à la WR-NM. Cette méthode permet le couplage performant entre des problèmes de natures différentes. Elle est à la fois efficace avec des gains importants et robuste que ce soit pour des géométries complexes ou des équations de circuit non linéaires. Néanmoins, pour des problèmes magnétodynamiques, la présence d'une dérivée temporelle dans les équations entraîne la résolution d'un système matriciel par bloc non symétrique ce qui est coûteux. Nous avons utilisé la méthode de Gauss-Seidel pour le résoudre, toutefois la vitesse de convergence diminue fortement lorsque les courants induits deviennent importants.

Ces travaux ouvrent plusieurs perspectives. Pour les problèmes magnétodynamiques, on peut envisager d'accélérer la résolution en utilisant une autre méthode que celle de Gauss-Seidel. Bien que la méthode GMRES soit la plus adaptée à la résolution d'un tel système, elle requiert cependant une quantité importante de mémoire. Il existe dans la littérature des méthodes permettant de réduire ces coûts de mémoire. Par exemple, nous pourrions envisager la *Restarted GMRES method* (RGMRES) qui réinitialise la base lorsqu'elle devient trop grande. On redémarre alors l'algorithme à partir de la dernière solution obtenue. Lorsque la réinitialisation s'effectue, la vitesse de convergence est impactée mais cela permet de libérer toute la mémoire occupée. Une autre méthode consiste à éliminer les vecteurs propres dont les valeurs propres associées sont relativement faibles. Ainsi cela permet de limiter la taille mémoire tout en gardant une bonne vitesse de convergence. Il est également possible de combiner ces deux techniques [Morgan, 2002] afin d'obtenir une convergence optimale tout en limitant le coût de mémoire. Une autre perspective est l'amélioration du point de départ. En effet, lorsque le problème est magnétodynamique et/ou non linéaire, la première matrice \mathbf{M}_L est calculée à partir du problème magnétostatique linéaire. Afin de limiter le nombre d'itération WR-NM, il serait intéressant d'améliorer ce point de départ. Par exemple, en recyclant les solutions d'un précédent calcul sur le même dispositif avec des paramètres différents. On pourrait alors extrapoler/interpoler le point de départ. Finalement, nous pouvons envisager de résoudre les différents problèmes sur des échelles de temps différentes. Dans ce manuscrit, les équations électriques et magnétiques ont été résolues avec la WR-NM sur des échelles de temps identiques. Pour optimiser, le nombre de calcul, des discrétisations temporelles différentes peuvent être utilisées. De plus, nous pouvons réfléchir à insérer des physiques différentes (mécanique, thermique, ...) dans notre problème couplé. Cela peut se faire de manière très simple grâce à la WR-NM puisque l'on calcule des fonctions d'ondes pour chaque modèle. Dans ce cas, des maillages différents pourraient être utilisés.

A

Application de la méthode de Newton-Raphson aux équations discrétisées de Maxwell

Considérons l'équation magnétostatique non linéaire 1.134. La méthode de Newton-Raphson est généralement la méthode privilégiée pour résoudre cette équation puisqu'elle est robuste, et possède une convergence quadratique. Cette méthode est par conséquent itérative. Pour des raisons de lisibilité nous ne ferons pas intervenir la discrétisation temporelle dans cette annexe. À chaque itération, on est amené à résoudre des équations de la forme :

$$\mathbf{J}_{\text{nl}}(\mathcal{A}^k)\delta\mathcal{A}^{k+1} = -Res(\mathcal{A}^k) \quad (\text{A.1})$$

où $Res(\mathcal{A}^k)$ est le vecteur résidu de taille N_x (nombre d'inconnues lié au problème éléments finis) défini par :

$$Res(\mathcal{A}) = \mathbf{M}(\mathcal{A})\mathcal{A} - \mathbf{F} \quad (\text{A.2})$$

et \mathbf{J}_{nl} est la matrice jacobienne de taille $N_x \times N_x$ définie par :

$$\mathbf{J}_{\text{nl}}(\mathcal{A}) = \frac{\partial Res(\mathcal{A})}{\partial \mathcal{A}} = \mathbf{M}(\mathcal{A}) + \frac{\partial \mathbf{M}(\mathcal{A})}{\partial \mathcal{A}}\mathcal{A} \quad (\text{A.3})$$

L'évaluation du terme $\frac{\partial \mathbf{M}(\mathcal{A})}{\partial \mathcal{A}}\mathcal{A}$ n'est pas trivial, nous donnons ici les différentes étapes permettant de calculer ce terme. Ce terme est une matrice de taille $N_x \times N_x$

et que nous appellerons \mathbf{G} . En repartant de l'écriture discrète, On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{ij} &= \left(\frac{\partial \nu(\mathcal{A})}{\partial \mathcal{A}} \text{rot} \mathbf{w}_i, \text{rot} \mathbf{w}_j \right) \mathcal{A} \\ &= \left(\frac{\partial \nu(\mathcal{A})}{\partial \mathcal{A}} \text{rot} \mathbf{w}_i, \mathbf{B} \right)\end{aligned}$$

avec $(., .)$ le produit scalaire et $\nu(\mathcal{A})$ la reluctivité magnétique que nous approchons avec le modèle de Marrocco c'est à dire par $\tilde{\nu}(\|\mathbf{B}\|^2)$. Nous allons maintenant nous intéresser au terme $\frac{\partial \tilde{\nu}(\mathcal{A})}{\partial \mathcal{A}}$. Pour cela, remarquons :

$$\frac{\partial \tilde{\nu}(\mathcal{A})}{\partial \mathcal{A}} = \frac{\partial \tilde{\nu}(\mathcal{A})}{\partial (\|\mathbf{B}\|^2)} \frac{\partial (\|\mathbf{B}\|^2)}{\partial \mathcal{A}}$$

La norme au carré est une application bilinéaire, par conséquent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\|\mathbf{B}\|^2)}{\partial \mathcal{A}} &= 2\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathcal{A}} \\ &= 2\mathbf{B} \frac{\partial \mathcal{A} \text{ rot } \mathbf{w}_i}{\partial \mathcal{A}} \\ &= 2\mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{w}_i\end{aligned}$$

Et donc :

$$\frac{\partial \tilde{\nu}(\mathcal{A})}{\partial \mathcal{A}} = 2 \frac{\partial \tilde{\nu}(\mathcal{A})}{\partial (\|\mathbf{B}\|^2)} \mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{w}_i.$$

On obtient finalement une expression de \mathbf{G} :

$$\mathbf{G}_{ij} = \left(2 \frac{\partial \tilde{\nu}(\mathcal{A})}{\partial (\|\mathbf{B}\|^2)} \mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{w}_i, \mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{w}_j \right)$$

Le terme $\frac{\partial \tilde{\nu}(\mathcal{A})}{\partial (\|\mathbf{B}\|^2)}$ est calculé à partir de la courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$.

B

Proper Orthogonal Decomposition (POD)

La Proper Orthogonal Decomposition (POD) [Lumley, 1967][Sirovich, 1987][Jolliffe, 2002][Nouy, 2010] appartient à une classe de méthodes permettant de réduire le nombre d'inconnues du problème discrétisé (*Model Order Reduction (MOR)*) [Qu, 2004].

Soit $\mathbf{X}(t)$ la solution discrète d'un problème évolutif défini par :

$$\mathbf{M}\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t). \quad (\text{B.1})$$

avec \mathbf{M} une matrice de taille $N_x \times N_x$ et \mathbf{F} un vecteur de taille N_x . La POD consiste à chercher une base réduite Ψ dans laquelle nous pouvons exprimer la solution, c'est à dire :

$$\mathbf{X}(t) \approx \Psi \mathbf{X}_r(t). \quad (\text{B.2})$$

avec $\mathbf{X}_r(t)$ le vecteur des coefficients dans l'espace défini par la base réduite. Cette base, orthonormale, est construite à partir de réalisations pouvant être obtenues de différentes manières (expérimentalement, numériquement, ...). Une technique consiste à conserver les premières solutions calculées que l'on appelle snapshots [Sirovich, 1987] et de les concaténer dans une matrice qu'on appelle la matrice de snapshots.

À partir des s premières solutions $\mathbf{X}(t_1), \mathbf{X}(t_2), \dots, \mathbf{X}(t_s)$, la matrice de snapshots \mathbf{K}_s de taille $N_x \times s$ s'écrit :

$$\mathbf{K}_s = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{X}(t_1) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t_2) \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t_s) \end{bmatrix} \right). \quad (\text{B.3})$$

La base réduite Ψ peut être obtenue à partir de la matrice de snapshots. En effet, on va chercher Ψ telle que :

$$\mathbf{K}_s \approx \Psi \mathbf{K}_{sr}. \quad (\text{B.4})$$

Pour cela, nous pouvons utiliser une décomposition en valeur propres orthogonales (d'où le nom POD). En pratique, on utilise plutôt une décomposition en valeur singulière (*Singular Value Decomposition* (SVD)). De plus, la SVD est une généralisation du théorème spectral pour des matrices rectangulaires :

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^t \quad (\text{B.5})$$

avec \mathbf{U} une matrice orthonormale de taille $N_x \times N_x$, $\mathbf{\Sigma}$ une matrice diagonale de valeur singulière de taille $N_x \times s$ et \mathbf{V}^t une matrice orthonormale de taille $s \times s$. Par identification avec l'équation B.4, on obtient :

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}, \quad (\text{B.6})$$

avec $\mathbf{\Psi}$ une matrice de taille $N_x \times s$. En pratique, cette base $\mathbf{\Psi}$ peut être tronquée par l'étude des valeurs singulières.

Ainsi, nous pouvons exprimer la solution du problème B.1 en fonction de la base réduite :

$$\mathbf{M}\mathbf{\Psi}\mathbf{X}_r(t_j) = \mathbf{F}(t_j)$$

Le problème réduit est alors obtenu à partir d'une projection de type Galerkin :

$$\mathbf{M}_r\mathbf{X}_r(t_j) = \mathbf{F}_r(t_j)$$

avec

$$\mathbf{M}_r = \mathbf{\Psi}^t\mathbf{M}\mathbf{\Psi} \text{ et } \mathbf{F}_r(t_j) = \mathbf{\Psi}^t\mathbf{F}(t_j).$$

Le modèle réduit est résolu sur tous les autres pas de temps. A chaque pas de temps t_j , la solution $\mathbf{X}(t_j)$ est ensuite reconstruite grâce à la relation :

$$\mathbf{X}(t_j) = \mathbf{\Psi}\mathbf{X}_r(t_j).$$

L'erreur de la solution reconstruite par rapport à la solution exacte dépend de la qualité des snapshots choisis.

C

Recherche du régime permanent avec des équations électriques non linéaires

C.1 Résolution avec une méthode pas à pas dans le temps

C.1.1 Système matriciel

Dans la section 3.1.3.1, nous avons défini dans le tableau 3.1 12 configurations possibles liées à la présence du redresseur double alternance non commandé (figure C.1). Dans cette partie, nous allons détailler les étapes permettant d'obtenir le système d'équations correspondant. Dans un premier temps, dans les tableaux suivants, nous allons définir les équations électriques discrètes (méthode d'Euler) associées aux douze configurations que nous récrivons sous formes matricielles. Nous définissons également opérateurs temporels (fonctions de commutation) $s_1(j)$, $s_2(j)$, $s_3(j)$, $s_4(j)$, $s_5(j)$, $s_6(j)$ définis par :

$$s_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si la diode } D_i \text{ conduit} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

avec $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et j^e le pas de temps.

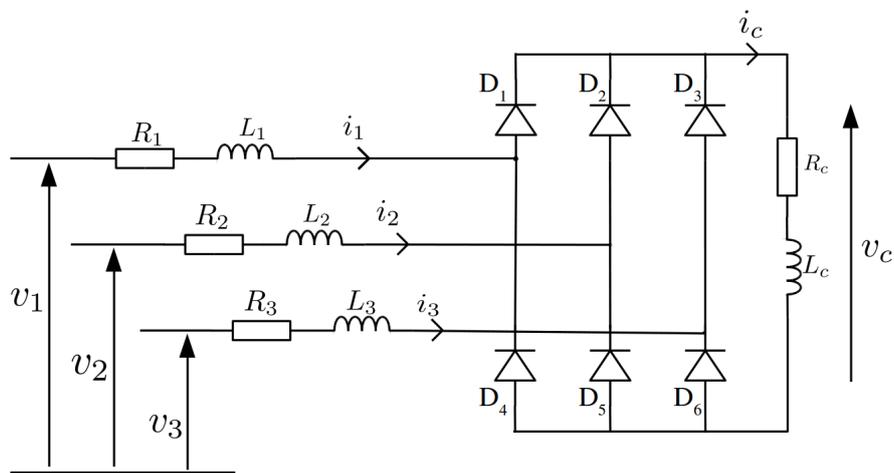
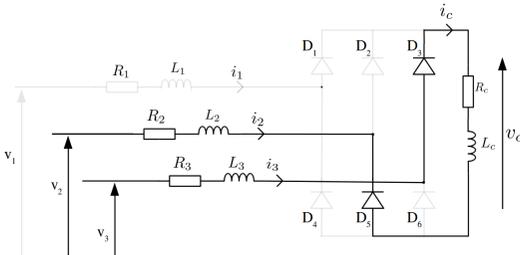


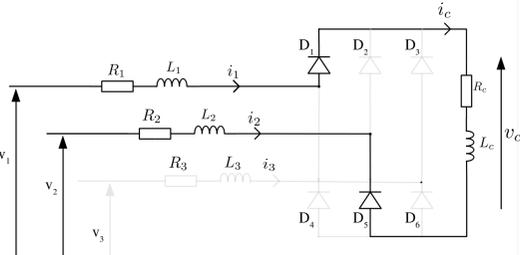
FIGURE C.1 – Schéma électrique d'un circuit électrique composé d'un redresseur double alternance et d'une charge RL

Config.	Diodes passantes	Schéma électrique correspondant	Équations électriques discrètes ($j = 0, 1, 2, \dots$)
1	D_3 et D_5		$v_3(j) - v_2(j) = R_3 i_3(j) + L_3 \frac{i_3(j) - i_3(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s + R_c i_c(j) + L_c \frac{i_c(j) - i_c(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s - R_2 i_2(j) - L_2 \frac{i_2(j) - i_2(j-1)}{\Delta t}$ $i_1(j) = 0$ $i_3(j) = i_c(j) = -i_2(j)$

Variables s_i , ($i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)	Équations électriques sous formes matricielles
$s_1(j) = 0$ $s_2(j) = 0$ $s_3(j) = 1$ $s_4(j) = 0$ $s_5(j) = 1$ $s_6(j) = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 - \frac{L_2}{\Delta t} & R_3 + \frac{L_3}{\Delta t} & R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(j) \\ i_2(j) \\ i_3(j) \\ i_c(j) \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 0 \\ v_3(j) - v_2(j) + \frac{L_3}{\Delta t} i_3(j-1) + \frac{L_c}{\Delta t} i_c(j-1) - \frac{L_2}{\Delta t} i_2(j-1) - 2V_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Config.	Diodes passantes	Schéma électrique correspondant	Équations électriques discrètes ($j = 0, 1, 2, \dots$)
2	D_1, D_3 et D_5		$v_1(j) - v_2(j) = R_1 i_1(j) + L_1 \frac{i_1(j) - i_1(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s + R_c i_c(j) + L_c \frac{i_c(j) - i_c(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s - R_2 i_2(j) - L_2 \frac{i_2(j) - i_2(j-1)}{\Delta t}$ $v_3(j) - v_2(j) = R_3 i_3(j) + L_3 \frac{i_3(j) - i_3(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s + R_c i_c(j) + L_c \frac{i_c(j) - i_c(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s - R_2 i_2(j) - L_2 \frac{i_2(j) - i_2(j-1)}{\Delta t}$ $i_1(j) + i_3(j) = i_c(j) = -i_2(j)$

Variables s_i , ($i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)	Équations électriques sous formes matricielles
$s_1(j) = 1$ $s_2(j) = 0$ $s_3(j) = 1$ $s_4(j) = 0$ $s_5(j) = 1$ $s_6(j) = 0$	$\begin{pmatrix} R_1 + \frac{L_1}{\Delta t} & -R_2 - \frac{L_2}{\Delta t} & 0 & R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \\ 0 & -R_2 - \frac{L_2}{\Delta t} & R_3 + \frac{L_3}{\Delta t} & R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(j) \\ i_2(j) \\ i_3(j) \\ i_c(j) \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} v_1(j) - v_2(j) + \frac{L_1}{\Delta t} i_1(j-1) + \frac{L_c}{\Delta t} i_c(j-1) - \frac{L_2}{\Delta t} i_2(j-1) - 2V_s \\ v_3(j) - v_2(j) + \frac{L_3}{\Delta t} i_3(j-1) + \frac{L_c}{\Delta t} i_c(j-1) - \frac{L_2}{\Delta t} i_2(j-1) - 2V_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Config.	Diodes passantes	Schéma électrique correspondant	Équations électriques discrètes ($j = 0, 1, 2, \dots$)
3	D_1 et D_5		$v_1(j) - v_2(j) = R_1 i_1(j) + L_1 \frac{i_1(j) - i_1(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s + R_c i_c(j) + L_c \frac{i_c(j) - i_c(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s - R_2 i_2(j) - L_2 \frac{i_2(j) - i_2(j-1)}{\Delta t}$ $i_3(j) = 0$ $i_1(j) = i_c(j) = -i_2(j)$

Variables s_i , ($i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)	Équations électriques sous formes matricielles
$s_1(j) = 1$ $s_2(j) = 0$ $s_3(j) = 0$ $s_4(j) = 0$ $s_5(j) = 1$ $s_6(j) = 0$	$\begin{pmatrix} R_1 + \frac{L_1}{\Delta t} & -R_2 - \frac{L_2}{\Delta t} & 0 & R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(j) \\ i_2(j) \\ i_3(j) \\ i_c(j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(j) - v_2(j) + \frac{L_1}{\Delta t} i_1(j-1) + \frac{L_c}{\Delta t} i_c(j-1) - \frac{L_2}{\Delta t} i_2(j-1) - 2V_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Config.	Diodes passantes	Schéma électrique correspondant	Équations électriques discrètes ($j = 0, 1, 2, \dots$)
4	D_1, D_5 et D_6		$v_1(j) - v_2(j) = R_1 i_1(j) + L_1 \frac{i_1(j) - i_1(j-1)}{\Delta t} + V_s + R_c i_c(j) + L_c \frac{i_c(j) - i_c(j-1)}{\Delta t} + V_s - R_2 i_2(j) - L_2 \frac{i_2(j) - i_2(j-1)}{\Delta t}$ $v_1(j) - v_3(j) = R_1 i_1(j) + L_1 \frac{i_1(j) - i_1(j-1)}{\Delta t} + V_s + R_c i_c(j) + L_c \frac{i_c(j) - i_c(j-1)}{\Delta t} + V_s - R_3 i_3(j) - L_3 \frac{i_3(j) - i_3(j-1)}{\Delta t}$ $i_1(j) = i_c(j) = -i_2(j) - i_3(j)$

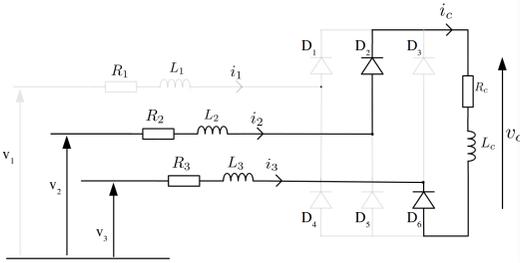
Variables s_i , ($i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)	Équations électriques sous formes matricielles
$s_1(j) = 1$ $s_2(j) = 0$ $s_3(j)(j) = 0$ $s_4(j) = 0$ $s_5(j) = 1$ $s_6(j) = 1$	$\begin{pmatrix} R_1 + \frac{L_1}{\Delta t} & -R_2 - \frac{L_2}{\Delta t} & 0 & R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \\ R_1 + \frac{L_1}{\Delta t} & 0 & -R_3 - \frac{L_3}{\Delta t} & R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(j) \\ i_2(j) \\ i_3(j) \\ i_c(j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(j) - v_2(j) + \frac{L_1}{\Delta t} i_1(j-1) + \frac{L_c}{\Delta t} i_c(j-1) - \frac{L_2}{\Delta t} i_2(j-1) - 2V_s \\ v_1(j) - v_3(j) + \frac{L_1}{\Delta t} i_1(j-1) + \frac{L_c}{\Delta t} i_c(j-1) - \frac{L_3}{\Delta t} i_3(j-1) - 2V_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Config.	Diodes passantes	Schéma électrique correspondant	Équations électriques discrètes ($j = 0, 1, 2, \dots$)
5	D_1 et D_6		$v_1(j) - v_3(j) = R_1 i_1(j) + L_1 \frac{i_1(j) - i_1(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s + R_c i_c(j) + L_c \frac{i_c(j) - i_c(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s - R_3 i_3(j) - L_3 \frac{i_3(j) - i_3(j-1)}{\Delta t}$ $i_2(j) = 0$ $i_1(j) = i_c(j) = -i_3(j)$

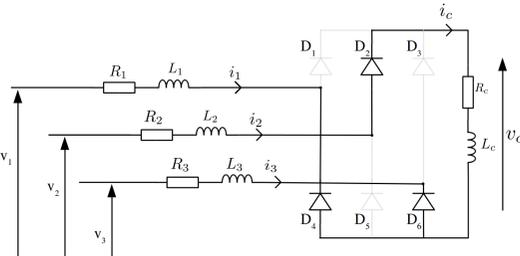
Variables s_i , ($i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)	Équations électriques sous formes matricielles
$s_1(j) = 1$ $s_2(j) = 0$ $s_3(j) = 0$ $s_4(j) = 0$ $s_5(j) = 0$ $s_6(j) = 1$	$\begin{pmatrix} R_1 + \frac{L_1}{\Delta t} & 0 & -R_3 - \frac{L_3}{\Delta t} & R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(j) \\ i_2(j) \\ i_3(j) \\ i_c(j) \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} v_1(j) - v_3(j) + \frac{L_1}{\Delta t} i_1(j-1) + \frac{L_c}{\Delta t} i_c(j-1) - \frac{L_3}{\Delta t} i_3(j-1) - 2V_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Config.	Diodes passantes	Schéma électrique correspondant	Équations électriques discrètes ($j = 0, 1, 2, \dots$)
6	D_1, D_2 et D_6		$v_1(j) - v_3(j) = R_1 i_1(j) + L_1 \frac{i_1(j) - i_1(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s + R_c i_c(j) + L_c \frac{i_c(j) - i_c(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s - R_3 i_3(j) - L_3 \frac{i_3(j) - i_3(j-1)}{\Delta t}$ $v_2(j) - v_3(j) = R_2 i_2(j) + L_2 \frac{i_2(j) - i_2(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s + R_c i_c(j) + L_c \frac{i_c(j) - i_c(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s - R_3 i_3(j) - L_3 \frac{i_3(j) - i_3(j-1)}{\Delta t}$ $i_1(j) + i_2(j) = i_c(j) = -i_3(j)$

Variables s_i , ($i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)	Équations électriques sous formes matricielles
$s_1(j) = 1$ $s_2(j) = 1$ $s_3(j) = 0$ $s_4(j) = 0$ $s_5(j) = 0$ $s_6(j) = 1$	$\begin{pmatrix} R_1 + \frac{L_1}{\Delta t} & 0 & -R_3 - \frac{L_3}{\Delta t} & R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \\ 0 & R_2 + \frac{L_2}{\Delta t} & -R_3 - \frac{L_3}{\Delta t} & R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(j) \\ i_2(j) \\ i_3(j) \\ i_c(j) \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} v_1(j) - v_3(j) + \frac{L_1}{\Delta t} i_1(j-1) + \frac{L_c}{\Delta t} i_c(j-1) - \frac{L_3}{\Delta t} i_3(j-1) - 2V_s \\ v_2(j) - v_3(j) + \frac{L_2}{\Delta t} i_2(j-1) + \frac{L_c}{\Delta t} i_c(j-1) - \frac{L_3}{\Delta t} i_3(j-1) - 2V_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Config.	Diodes passantes	Schéma électrique correspondant	Équations électriques discrètes ($j = 0, 1, 2, \dots$)
7	D_2 et D_6		$v_2(j) - v_3(j) = R_2 i_2(j) + L_2 \frac{i_2(j) - i_2(j-1)}{\Delta t} + V_s + R_c i_c(j) + L_c \frac{i_c(j) - i_c(j-1)}{\Delta t} + V_s - R_3 i_3(j) - L_3 \frac{i_3(j) - i_3(j-1)}{\Delta t}$ $i_1(j) = 0$ $i_2(j) = i_c(j) = -i_3(j)$

Variables s_i , ($i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)	Équations électriques sous formes matricielles
$s_1(j) = 0$ $s_2(j) = 1$ $s_3(j) = 0$ $s_4(j) = 0$ $s_5(j) = 0$ $s_6(j) = 1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 + \frac{L_2}{\Delta t} & -R_3 - \frac{L_3}{\Delta t} & R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(j) \\ i_2(j) \\ i_3(j) \\ i_c(j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2(j) - v_3(j) + \frac{L_2}{\Delta t} i_2(j-1) + \frac{L_c}{\Delta t} i_c(j-1) - \frac{L_3}{\Delta t} i_3(j-1) - 2V_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Config.	Diodes passantes	Schéma électrique correspondant	Équations électriques discrètes ($j = 0, 1, 2, \dots$)
8	D_2, D_4 et D_6		$v_2(j) - v_1(j) = R_2 i_2(j) + L_2 \frac{i_2(j) - i_2(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s + R_c i_c(j) + L_c \frac{i_c(j) - i_c(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s - R_1 i_1(j) - L_1 \frac{i_1(j) - i_1(j-1)}{\Delta t}$ $v_2(j) - v_3(j) = R_2 i_2(j) + L_2 \frac{i_2(j) - i_2(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s + R_c i_c(j) + L_c \frac{i_c(j) - i_c(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s - R_3 i_3(j) - L_3 \frac{i_3(j) - i_3(j-1)}{\Delta t}$ $i_2(j) = i_c(j) = -i_1(j) - i_3(j)$

Variables s_i , ($i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)	Équations électriques sous formes matricielles
$s_1(j) = 0$ $s_2(j) = 1$ $s_3(j) = 0$ $s_4(j) = 1$ $s_5(j) = 0$ $s_6(j) = 1$	$\begin{pmatrix} -R_1 - \frac{L_1}{\Delta t} & R_2 + \frac{L_2}{\Delta t} & 0 & R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \\ 0 & R_2 + \frac{L_2}{\Delta t} & -R_3 - \frac{L_3}{\Delta t} & R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(j) \\ i_2(j) \\ i_3(j) \\ i_c(j) \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} v_2(j) - v_1(j) + \frac{L_2}{\Delta t} i_2(j-1) + \frac{L_c}{\Delta t} i_c(j-1) - \frac{L_1}{\Delta t} i_1(j-1) - 2V_s \\ v_2(j) - v_3(j) + \frac{L_2}{\Delta t} i_2(j-1) + \frac{L_c}{\Delta t} i_c(j-1) - \frac{L_3}{\Delta t} i_3(j-1) - 2V_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Config.	Diodes passantes	Schéma électrique correspondant	Équations électriques discrètes ($j = 0, 1, 2, \dots$)
9	D_2 et D_4		$v_2(j) - v_1(j) = R_2 i_2(j) + L_2 \frac{i_2(j) - i_2(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s + R_c i_c(j) + L_c \frac{i_c(j) - i_c(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s - R_1 i_1(j) - L_1 \frac{i_1(j) - i_1(j-1)}{\Delta t}$ $i_3(j) = 0$ $i_2(j) = i_c(j) = -i_1(j)$

Variables s_i , ($i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)	Équations électriques sous formes matricielles
$s_1(j) = 0$ $s_2(j) = 1$ $s_3(j) = 0$ $s_4(j) = 1$ $s_5(j) = 0$ $s_6(j) = 0$	$\begin{pmatrix} -R_1 - \frac{L_1}{\Delta t} & R_2 + \frac{L_2}{\Delta t} & 0 & R_c + \frac{L_c}{\Delta t} & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & 0 & 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(j) \\ i_2(j) \\ i_3(j) \\ i_c(j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(j) - v_1(j) + \frac{L_2}{\Delta t} i_2(j-1) + \frac{L_c}{\Delta t} i_c(j-1) - \frac{L_1}{\Delta t} i_1(j-1) - 2V_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Config.	Diodes passantes	Schéma électrique correspondant	Équations électriques discrètes ($j = 0, 1, 2, \dots$)
10	D_2, D_3 et D_4		$v_2(j) - v_1(j) = R_2 i_2(j) + L_2 \frac{i_2(j) - i_2(j-1)}{\Delta t} + V_s + R_c i_c(j) + L_c \frac{i_c(j) - i_c(j-1)}{\Delta t} + V_s - R_1 i_1(j) - L_1 \frac{i_1(j) - i_1(j-1)}{\Delta t}$ $v_3(j) - v_1(j) = R_3 i_3(j) + L_3 \frac{i_3(j) - i_3(j-1)}{\Delta t} + V_s + R_c i_c(j) + L_c \frac{i_c(j) - i_c(j-1)}{\Delta t} + V_s - R_1 i_1(j) - L_1 \frac{i_1(j) - i_1(j-1)}{\Delta t}$ $i_2(j) + i_3(j) = i_c(j) = -i_1(j)$

Variables s_i , ($i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)	Équations électriques sous formes matricielles
$s_1(j) = 0$ $s_2(j) = 1$ $s_3(j) = 1$ $s_4(j) = 1$ $s_5(j) = 0$ $s_6(j) = 0$	$\begin{pmatrix} -R_1 - \frac{L_1}{\Delta t} & R_2 + \frac{L_2}{\Delta t} & 0 & R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \\ -R_1 - \frac{L_1}{\Delta t} & 0 & R_3 + \frac{L_3}{\Delta t} & R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(j) \\ i_2(j) \\ i_3(j) \\ i_c(j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(j) - v_1(j) + \frac{L_2}{\Delta t} i_2(j-1) + \frac{L_c}{\Delta t} i_c(j-1) - \frac{L_1}{\Delta t} i_1(j-1) - 2V_s \\ v_3(j) - v_1(j) + \frac{L_3}{\Delta t} i_3(j-1) + \frac{L_c}{\Delta t} i_c(j-1) - \frac{L_1}{\Delta t} i_1(j-1) - 2V_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Config.	Diodes passantes	Schéma électrique correspondant	Équations électriques discrètes ($j = 0, 1, 2, \dots$)
11	D_3 et D_4		$v_3(j) - v_1(j) = R_3 i_3(j) + L_3 \frac{i_3(j) - i_3(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s + R_c i_c(j) + L_c \frac{i_c(j) - i_c(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s - R_1 i_1(j) - L_1 \frac{i_1(j) - i_1(j-1)}{\Delta t}$ $i_2(j) = 0$ $i_3(j) = i_c(j) = -i_1(j)$

Variables s_i , ($i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)	Équations électriques sous formes matricielles
$s_1(j) = 0$ $s_2(j) = 0$ $s_3(j) = 1$ $s_4(j) = 1$ $s_5(j) = 0$ $s_6(j) = 0$	$\begin{pmatrix} -R_1 - \frac{L_1}{\Delta t} & 0 & R_3 + \frac{L_3}{\Delta t} & R_c + \frac{L_c}{\Delta t} & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(j) \\ i_2(j) \\ i_3(j) \\ i_c(j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_3(j) - v_1(j) + \frac{L_3}{\Delta t} i_3(j-1) + \frac{L_c}{\Delta t} i_c(j-1) - \frac{L_1}{\Delta t} i_1(j-1) - 2V_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Config.	Diodes passantes	Schéma électrique correspondant	Équations électriques discrètes ($j = 0, 1, 2, \dots$)
12	D_3, D_4 et D_5		$v_3(j) - v_1(j) = R_3 i_3(j) + L_3 \frac{i_3(j) - i_3(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s + R_c i_c(j) + L_c \frac{i_c(j) - i_c(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s - R_1 i_1(j) - L_1 \frac{i_1(j) - i_1(j-1)}{\Delta t}$ $v_3(j) - v_2(j) = R_3 i_3(j) + L_3 \frac{i_3(j) - i_3(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s + R_c i_c(j) + L_c \frac{i_c(j) - i_c(j-1)}{\Delta t}$ $+ V_s - R_2 i_2(j) - L_2 \frac{i_2(j) - i_2(j-1)}{\Delta t}$ $i_3(j) = i_c(j) = -i_1(j) - i_2(j)$

Variables s_i , ($i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)	Équations électriques sous formes matricielles
$s_1(j) = 0$ $s_2(j) = 0$ $s_3(j) = 1$ $s_4(j) = 1$ $s_5(j) = 1$ $s_6(j) = 0$	$\begin{pmatrix} -R_1 - \frac{L_1}{\Delta t} & 0 & R_3 + \frac{L_3}{\Delta t} & R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \\ 0 & -R_2 - \frac{L_2}{\Delta t} & R_3 + \frac{L_3}{\Delta t} & R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(j) \\ i_2(j) \\ i_3(j) \\ i_c(j) \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} v_3(j) - v_1(j) + \frac{L_3}{\Delta t} i_3(j-1) + \frac{L_c}{\Delta t} i_c(j-1) - \frac{L_1}{\Delta t} i_1(j-1) - 2V_s \\ v_3(j) - v_2(j) + \frac{L_3}{\Delta t} i_3(j-1) + \frac{L_c}{\Delta t} i_c(j-1) - \frac{L_2}{\Delta t} i_2(j-1) - 2V_s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Maintenant que les douze configurations sont définies, nous allons les réunir en un seul et même système matriciel que nous appellerons $\mathbf{M}_{\text{circuit}}$ à l'aide des opérateurs s_i ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). Chaque système correspondant aux 12 possibilités est multiplié par un produit de terme en s_i qui peut prendre la valeur "1" si on se trouve dans la configuration souhaitée ou "0" sinon.

Par exemple pour la configuration 1, les diodes D_3 et D_5 conduisent, les opérateurs $s_3(j)$ et $s_5(j)$ sont par conséquent égaux à 1, la matrice définie dans la configuration 1 s'écrit alors :

$$s_3(j)s_5(j) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 - \frac{L_2}{\Delta t} & R_3 + \frac{L_3}{\Delta t} & R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Lorsque deux diodes conduisent cette écriture est suffisante, cependant dans notre étude, nous avons pris en considération l'empiètement, par conséquent, pour différencier les différentes configurations, il est nécessaire de mettre également les opérateurs correspondants aux diodes qui ne conduisent pas, de la manière suivante :

$$(1 - s_1(j))(1 - s_2(j))s_3(j)(1 - s_4(j))s_5(j)(1 - s_6(j)) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 - \frac{L_2}{\Delta t} & R_3 + \frac{L_3}{\Delta t} & R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Ainsi, si une diode, autre que D_3 et D_5 , conduit alors ce terme est égale à 0. On procède de la même manière pour les 11 autres configurations, puis on additionne le tout pour finalement obtenir un système matriciel de la forme :

$$\mathbf{M}_{\text{circuit}} \begin{pmatrix} i_1(j) \\ i_2(j) \\ i_3(j) \\ i_c(j) \end{pmatrix} = \mathbf{V}_{\text{circuit}}. \quad (\text{C.4})$$

Il est plus simple de déterminer les termes de la matrice $\mathbf{M}_{\text{circuit}}$ et du vecteur $\mathbf{V}_{\text{circuit}}$ terme par terme. Prenons en exemple, le calcul du terme situé sur la première

ligne et première colonne de la matrice $\mathbf{M}_{\text{circuit}}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{\text{circuit}}(1, 1) = & \left[(1 - s_1)s_2(1 - s_3)(1 - s_4)(1 - s_5)s_6 \right. \\
 & \left. + (1 - s_1)(1 - s_2)s_3(1 - s_4)s_5(1 - s_6) \right] \\
 & + \left[s_1(1 - s_2)(1 - s_3)(1 - s_4)(1 - s_5)s_6 \right. \\
 & + s_1(1 - s_2)(1 - s_3)(1 - s_4)s_5(1 - s_6) \\
 & + s_1s_2(1 - s_3)(1 - s_4)(1 - s_5)s_6 + s_1(1 - s_2)(1 - s_3)(1 - s_4)s_5s_6 \\
 & \left. + s_1(1 - s_2)s_3(1 - s_4)s_5(1 - s_6) \right] \left(R_1 + \frac{L_1}{\Delta t} \right) \\
 & + \left[(1 - s_1)(1 - s_2)s_3s_4(1 - s_5)(1 - s_6) \right. \\
 & + (1 - s_1)s_2(1 - s_3)s_4(1 - s_5)(1 - s_6) \\
 & + (1 - s_1)(1 - s_2)s_3s_4s_5(1 - s_6) + (1 - s_1)s_2s_3s_4(1 - s_5)(1 - s_6) \\
 & \left. + (1 - s_1)s_2(1 - s_3)s_4(1 - s_5)s_6 \right] \left(-R_1 - \frac{L_1}{\Delta t} \right)
 \end{aligned}$$

Pour des raisons de lisibilité nous avons omis d'écrire le pas de temps sur les opérateurs $s_i(j)$. Cette écriture reste cependant relativement lourde. Néanmoins, il est possible de définir, sur les opérateurs s_i des propriétés mathématiques issu d'observation physique permettant de simplifier cette écriture. Ces propriétés, au nombre de 6 et notées de (P_1) à (P_6) , sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 (P_1) : \quad & s_1(j)s_4(j) = 0 \\
 & s_2(j)s_5(j) = 0 \\
 & s_3(j)s_6(j) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (P_2) : \quad & s_1(j)(1 - s_4(j)) = s_1(j) \\
 & s_2(j)(1 - s_5(j)) = s_2(j) \\
 & s_3(j)(1 - s_6(j)) = s_3(j) \\
 & s_4(j)(1 - s_1(j)) = s_4(j) \\
 & s_5(j)(1 - s_2(j)) = s_5(j) \\
 & s_6(j)(1 - s_3(j)) = s_6(j)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (P_3) : \quad & (1 - s_1(j))(1 - s_4(j)) = 1 - s_1(j) - s_4(j) \\
 & (1 - s_2(j))(1 - s_5(j)) = 1 - s_2(j) - s_5(j) \\
 & (1 - s_3(j))(1 - s_6(j)) = 1 - s_3(j) - s_6(j)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (P_4) : \quad & s_1(j) + s_4(j) = 0 \text{ ou } 1 \\
 & s_2(j) + s_5(j) = 0 \text{ ou } 1 \\
 & s_3(j) + s_6(j) = 0 \text{ ou } 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (P_5) : \quad & (1 - s_1(j) - s_4(j))(s_2(j)s_6(j) + s_3(j)s_5(j)) = (1 - s_1(j) - s_4(j)) \\
 & (1 - s_2(j) - s_5(j))(s_1(j)s_6(j) + s_3(j)s_4(j)) = (1 - s_2(j) - s_5(j)) \\
 & (1 - s_3(j) - s_6(j))(s_1(j)s_5(j) + s_2(j)s_4(j)) = (1 - s_3(j) - s_6(j)) \\
 (P_6) : \quad & s_1(j)(s_5(j) + s_6(j) - s_5(j)s_6(j)) = s_1(j) \\
 & s_2(j)(s_4(j) + s_6(j) - s_4(j)s_6(j)) = s_2(j) \\
 & s_3(j)(s_4(j) + s_5(j) - s_4(j)s_5(j)) = s_3(j) \\
 & s_4(j)(s_2(j) + s_3(j) - s_2(j)s_3(j)) = s_4(j) \\
 & s_5(j)(s_1(j) + s_3(j) - s_1(j)s_3(j)) = s_5(j) \\
 & s_6(j)(s_1(j) + s_1(j) - s_1(j)s_2(j)) = s_6(j)
 \end{aligned}$$

Grâce à ces propriétés, nous allons voir comment simplifier l'écriture de la matrice :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{\text{circuit}}(1, 1) &= (1 - s_1)(1 - s_4) \left[s_2(1 - s_3)(1 - s_5)s_6 + (1 - s_2)s_3s_5(1 - s_6) \right] \\
 &\quad + s_1(1 - s_4) \left[(1 - s_2)(1 - s_3)(1 - s_5)s_6 \right. \\
 &\quad \left. + (1 - s_2)(1 - s_3)s_5(1 - s_6) + s_2(1 - s_3)(1 - s_5)s_6 \right. \\
 &\quad \left. + (1 - s_2)(1 - s_3)s_5s_6 + (1 - s_2)s_3s_5(1 - s_6) \right] \left(R_1 + \frac{L_1}{\Delta t} \right) \\
 &\quad + (1 - s_1)s_4 \left[(1 - s_2)s_3(1 - s_5)(1 - s_6) \right. \\
 &\quad \left. + s_2(1 - s_3)(1 - s_5)(1 - s_6) + (1 - s_2)s_3s_5(1 - s_6) \right. \\
 &\quad \left. + s_2s_3(1 - s_5)(1 - s_6) + s_2(1 - s_3)(1 - s_5)s_6 \right] \left(-R_1 - \frac{L_1}{\Delta t} \right) \\
 &= \left(1 - s_1 - s_4 \right) \left(s_2s_6 + s_3s_5 \right) \\
 &\quad + s_1 \left[s_6(1 - s_2)(1 - s_5) + s_5(1 - s_3)(1 - s_6) \right. \\
 &\quad \left. + s_2s_6 + s_5s_6 + s_3s_5 \right] \left(R_1 + \frac{L_1}{\Delta t} \right) \\
 &\quad + s_4 \left[(1 - s_2)s_3(1 - s_5) + s_2(1 - s_3)(1 - s_6) \right. \\
 &\quad \left. + s_3s_5 + s_2s_3 + s_2s_6 \right] \left(-R_1 - \frac{L_1}{\Delta t} \right) \\
 &= \left(1 - s_1 - s_4 \right) \\
 &\quad + s_1 \left[s_6 - s_2s_6 - s_5s_6 + s_5 - s_3s_5 - s_5s_6 \right. \\
 &\quad \left. + s_2s_6 + s_5s_6 + s_3s_5 \right] \left(R_1 + \frac{L_1}{\Delta t} \right) \\
 &\quad + s_4 \left[s_3 - s_2s_3 - s_3s_5 + s_2 - s_2s_3 - s_2s_6 \right. \\
 &\quad \left. + s_3s_5 + s_2s_3 + s_2s_6 \right] \left(-R_1 - \frac{L_1}{\Delta t} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 - s_1 - s_4\right) + s_1\left(s_6 + s_5 - s_5s_6\right)\left(R_1 + \frac{L_1}{\Delta t}\right) \\
 &\quad + s_4\left(s_3 + s_2 - s_2s_3\right)\left(-R_1 - \frac{L_1}{\Delta t}\right) \\
 &= \left(1 - s_1 - s_4\right) + \left[s_1\left(s_6 + s_5 - s_5s_6\right) - s_4\left(s_3 + s_2 - s_2s_3\right)\right]\left(R_1 + \frac{L_1}{\Delta t}\right) \\
 &= \left(1 - s_1 - s_4\right) + \left(s_1 - s_4\right)\left(R_1 + \frac{L_1}{\Delta t}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{\text{circuit}}(1, 2) &= \left[s_2(1 - s_3)s_4(1 - s_6) + s_2s_3s_4 + s_2s_4s_6\right]\left(R_2 + \frac{L_2}{\Delta t}\right) \\
 &\quad + \left[s_1(1 - s_3)s_5(1 - s_6) + s_1s_5s_6 + s_1s_3s_5\right]\left(-R_2 - \frac{L_2}{\Delta t}\right) \\
 &= \left[(1 - s_3 - s_6)s_2s_4 + s_2s_3s_4 + s_2s_4s_6 - (1 - s_3 - s_6)s_1s_5 - s_1s_5s_6 - s_1s_3s_5\right]\left(R_2 + \frac{L_2}{\Delta t}\right) \\
 &= \left[s_2s_4(1 - s_3 - s_6 + s_3 + s_6) - s_1s_5(1 - s_3 - s_6 + s_6 + s_3)\right]\left(R_2 + \frac{L_2}{\Delta t}\right) \\
 &= (s_2s_4 - s_1s_5)\left(R_2 + \frac{L_2}{\Delta t}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{\text{circuit}}(1, 3) &= \left[(1 - s_2)s_3s_4(1 - s_5) + s_3s_4s_5\right]\left(R_3 + \frac{L_3}{\Delta t}\right) \\
 &\quad + \left[s_1(1 - s_2)(1 - s_5)s_6 + s_1s_2s_6\right]\left(-R_3 - \frac{L_3}{\Delta t}\right) \\
 &= \left[(1 - s_2 - s_5)s_3s_4 + s_3s_4s_5\right]\left(R_3 + \frac{L_3}{\Delta t}\right) \\
 &\quad + \left[s_1(1 - s_2 - s_5)s_6 + s_1s_2s_6\right]\left(-R_3 - \frac{L_3}{\Delta t}\right) \\
 &= \left[s_3s_4(1 - s_2 - s_5 + s_5) - s_1s_6(1 - s_2 - s_5 + s_2)\right]\left(R_3 + \frac{L_3}{\Delta t}\right) \\
 &= \left[s_3s_4(1 - s_2) - s_1s_6(1 - s_5)\right]\left(R_3 + \frac{L_3}{\Delta t}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\text{circuit}}(1, 4) &= \left[s_1(1 - s_2)(1 - s_5)s_6 + s_1(1 - s_3)s_5(1 - s_6) + (1 - s_2)s_3s_4(1 - s_5) \right. \\
&\quad + s_2(1 - s_3)s_4(1 - s_6) + s_1s_2s_6 \\
&\quad + s_1s_5s_6 + s_1s_3s_5 + s_3s_4s_5 \\
&\quad \left. + s_2s_3s_4 + s_2s_4s_6 \right] \left(R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \right) \\
&= \left[s_1s_6(1 - s_2 - s_5 + s_2 + s_5) + s_1s_5(1 - s_3 - s_6 + s_3) \right. \\
&\quad \left. + s_3s_4(1 - s_2 - s_5 + s_3 + s_2) + s_2s_4(1 - s_3 - s_6 + s_6) \right] \left(R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \right) \\
&= \left[s_1s_6 + s_1s_5(1 - s_6) + s_3s_4 + s_2s_4(1 - s_3) \right] \left(R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \right) \\
&= \left[s_1(s_6 + s_5 - s_5s_6) + s_4(s_3 + s_2 - s_2s_3) \right] \left(R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \right) \\
&= (s_1 + s_4) \left(R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \right)
\end{aligned}$$

On procède ainsi pour les termes des lignes suivantes pour, finalement, obtenir le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\text{circuit}}(2, 1) &= (1 - s_3 - s_6) + (s_1s_5s_6 - s_2s_3s_4) \left(R_1 + \frac{L_1}{\Delta t} \right) \\
\mathbf{M}_{\text{circuit}}(2, 2) &= (2 - s_2 - s_3 - s_5 - s_6) + (s_2s_6 - s_3s_5) \left(R_2 + \frac{L_2}{\Delta t} \right) \\
\mathbf{M}_{\text{circuit}}(2, 3) &= (s_3s_5 + s_2s_3s_4 - s_2s_6 - s_1s_5s_6) \left(R_3 + \frac{L_3}{\Delta t} \right) \\
\mathbf{M}_{\text{circuit}}(2, 4) &= (s_2s_6 + s_3s_5 + s_1s_5s_6 + s_2s_3s_4) \left(R_c + \frac{L_c}{\Delta t} \right) \\
\mathbf{M}_{\text{circuit}}(3, 1) &= (s_1s_6 + s_3s_4 + s_1s_3s_5 + s_2s_4s_6) \\
\mathbf{M}_{\text{circuit}}(3, 2) &= (s_2s_6 + s_3s_5 + s_1s_5s_6 + s_2s_3s_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\text{circuit}}(3, 3) &= 1 \\
\mathbf{M}_{\text{circuit}}(3, 4) &= 0 \\
\mathbf{M}_{\text{circuit}}(4, 1) &= (-s_1s_6 - s_1s_5 + s_1s_5s_6) \\
\mathbf{M}_{\text{circuit}}(4, 2) &= (-s_2s_6 - s_2s_4 + s_2s_4s_6) \\
\mathbf{M}_{\text{circuit}}(4, 3) &= (-s_3s_5 - s_3s_4 + s_3s_4s_5) \\
\mathbf{M}_{\text{circuit}}(4, 4) &= 1
\end{aligned}$$

Pour le calcul du second membre, nous pouvons procéder de la même manière et

ainsi obtenir le vecteur $\mathbf{V}_{\text{circuit}}$ égal à :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{\text{circuit}}(1) &= \left[s_1 - s_4 \right] \left(v_1(j) + \frac{L_1}{\Delta t} i_1(j-1) \right) \\
 &\quad + \left[s_2 s_4 - s_1 s_5 \right] \left(v_2(j) + \frac{L_2}{\Delta t} i_2(j-1) \right) \\
 &\quad + \left[s_3 s_4 (1 - s_2) - s_1 s_6 (1 - s_5) \right] \left(v_3(j) + \frac{L_3}{\Delta t} i_3(j-1) \right) \\
 &\quad + \left[s_1 + s_4 \right] \left(\frac{L_c}{\Delta t} i_c(j-1) \right) - 2V_s \\
 \mathbf{V}_{\text{circuit}}(2) &= \left[s_1 s_5 s_6 - s_2 s_3 s_4 \right] \left(v_1(j) + \frac{L_1}{\Delta t} i_1(j-1) \right) \\
 &\quad + \left[s_2 s_6 - s_3 s_5 \right] \left(v_2(j) + \frac{L_2}{\Delta t} i_2(j-1) \right) \\
 &\quad + \left[s_3 s_5 + s_2 s_3 s_4 - s_2 s_6 - s_1 s_5 s_6 \right] \left(v_3(j) + \frac{L_3}{\Delta t} i_3(j-1) \right) \\
 &\quad + \left[s_2 s_6 + s_3 s_5 + s_1 s_5 s_6 + s_2 s_3 s_4 \right] \left(\frac{L_c}{\Delta t} i_c(j-1) \right) - 2V_s \\
 \mathbf{V}_{\text{circuit}}(3) &= 0 \\
 \mathbf{V}_{\text{circuit}}(4) &= 0
 \end{aligned}$$

C.1.2 Calcul des variables secondaires

Pour déduire les changements d'états, nous avons besoin de connaître la valeur du courant traversant les diodes ainsi que la tension à leurs bornes. Le calcul du courant est relativement simple en utilisant les opérateurs s_i soit :

$$\begin{aligned}
 i_{d_1}(j) &= s_1 i_1(j) \\
 i_{d_2}(j) &= s_2 i_2(j) \\
 i_{d_3}(j) &= s_3 i_3(j) \\
 i_{d_4}(j) &= s_4 (-i_1(j)) \\
 i_{d_5}(j) &= s_5 (-i_2(j)) \\
 i_{d_6}(j) &= s_6 (-i_3(j))
 \end{aligned}$$

Pour la détermination des tensions, il est possible de simplifier l'écriture grâce aux propriétés (P_i) ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). Finalement nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 v_{d_1}(j) &= (1 - s_1) \left[v_1(j) - R_1 i_1(j) - \frac{L_1}{\Delta t} i_1(j) + V_s \right] \\
 &\quad + s_2(1 - s_1 s_6) \left[-v_2(j) + \frac{L_2}{\Delta t} i_2(j) + R_2 i_2(j) \right] \\
 &\quad + s_3(1 - s_1 s_5 - s_2 s_4) \left[-v_3(j) + \frac{L_3}{\Delta t} i_3(j) + R_3 i_3(j) \right] + s_1 V_s \\
 v_{d_2}(j) &= s_1(1 - s_2 s_6) \left[-v_1(j) + \frac{L_1}{\Delta t} i_1(j) + R_1 i_1(j) \right] \\
 &\quad + (1 - s_2) \left[v_2(j) - R_2 i_2(j) - \frac{L_2}{\Delta t} i_2(j) + V_s \right] \\
 &\quad + s_3(1 - s_1 s_5 - s_2 s_4) \left[-v_3(j) + \frac{L_3}{\Delta t} i_3(j) + R_3 i_3(j) \right] + s_2 V_s \\
 v_{d_3}(j) &= s_1(1 - s_3 s_5) \left[-v_1(j) + \frac{L_1}{\Delta t} i_1(j) + R_1 i_1(j) \right] \\
 &\quad + s_2(1 - s_1 s_6 - s_3 s_4) \left[-v_2(j) + \frac{L_2}{\Delta t} i_2(j) + R_2 i_2(j) \right] \\
 &\quad + (1 - s_3) \left[v_3(j) - R_3 i_3(j) - \frac{L_3}{\Delta t} i_3(j) + V_s \right] + s_3 V_s \\
 v_{d_4}(j) &= (1 - s_4) \left[v_1(j) - R_1 i_1(j) - \frac{L_1}{\Delta t} i_1(j) + V_s \right] \\
 &\quad + s_5(1 - s_3 s_4) \left[-v_2(j) + \frac{L_2}{\Delta t} i_2(j) + R_2 i_2(j) \right] \\
 &\quad + s_6(1 - s_2 s_4 - s_1 s_5) \left[-v_3(j) + \frac{L_3}{\Delta t} i_3(j) + R_3 i_3(j) \right] + s_4 V_s \\
 v_{d_5}(j) &= s_4(1 - s_3 s_5) \left[-v_1(j) + \frac{L_1}{\Delta t} i_1(j) + R_1 i_1(j) \right] \\
 &\quad + (1 - s_5) \left[v_2(j) - R_2 i_2(j) - \frac{L_2}{\Delta t} i_2(j) + V_s \right] \\
 &\quad + s_6(1 - s_2 s_4 - s_1 s_5) \left[-v_3(j) + \frac{L_3}{\Delta t} i_3(j) + R_3 i_3(j) \right] + s_5 V_s
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{d_6}(j) &= s_4(1 - s_2 s_6) \left[-v_1(j) + \frac{L_1}{\Delta t} i_1(j) + R_1 i_1(j) \right] \\
 &\quad + s_5(1 - s_1 s_6 - s_3 s_4) \left[-v_2(j) + \frac{L_2}{\Delta t} i_2(j) + R_2 i_2(j) \right] \\
 &\quad + (1 - s_6) \left[v_3(j) - R_3 i_3(j) - \frac{L_3}{\Delta t} i_3(j) + V_s \right] + s_6 V_s
 \end{aligned}$$

C.2 Résolution avec conditions de périodicité

C.2.1 Système matriciel

Lorsque l'on impose des conditions de périodicité, nous résolvons tous les pas de temps en même temps. Les différentes variables électriques se réécrivent en vecteur de taille N_t (nombre de pas de temps sur une période électrique) :

$$\mathbf{I}_k = \begin{pmatrix} i_k(1) \\ i_k(2) \\ \vdots \\ i_k(N_t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_k = \begin{pmatrix} v_k(1) \\ v_k(2) \\ \vdots \\ v_k(N_t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_s = \begin{pmatrix} V_s \\ V_s \\ \vdots \\ V_s \end{pmatrix}$$

pour $k \in \{1, 2, 3\}$. Les opérateurs s_i ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) changent également de dimension et deviennent des matrices de taille $N_t \times N_t$ définies par :

$$\mathbf{S}_i = \begin{pmatrix} s_i(1) & & & \\ & s_i(2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_i(N_t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi que l'opérateur de dérivée temporelle ∇_h de taille $N_t \times N_t$ et défini par :

$$\nabla_h = \begin{pmatrix} 1 & & & -1 \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En appliquant ces changements aux équations définies dans le paragraphe C.1.1, on arrive facilement à la matrice par bloc $\mathbf{M}_{\text{circuit}_b}$ de taille $4N_t \times 4N_t$ suivant :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{\text{circuit}_b}(1, 1) &= (\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_4) + (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_4)(R_1\mathcal{I}_{N_t} + L_1\nabla_h) \\
 \mathbf{M}_{\text{circuit}_b}(1, 2) &= (\mathbf{S}_2\mathbf{S}_4 - \mathbf{S}_1\mathbf{S}_5)(R_2\mathcal{I}_{N_t} + L_2\nabla_h) \\
 \mathbf{M}_{\text{circuit}_b}(1, 3) &= (\mathbf{S}_3\mathbf{S}_4(\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_2) - \mathbf{S}_1\mathbf{S}_6(\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_5))(R_3\mathcal{I}_{N_t} + L_3\nabla_h) \\
 \mathbf{M}_{\text{circuit}_b}(1, 4) &= (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_4)(R_c\mathcal{I}_{N_t} + L_c\nabla_h) \\
 \mathbf{M}_{\text{circuit}_b}(2, 1) &= (\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_6) + (\mathbf{S}_1\mathbf{S}_5\mathbf{S}_6 - \mathbf{S}_2\mathbf{S}_3\mathbf{S}_4)(R_1\mathcal{I}_{N_t} + L_1\nabla_h) \\
 \mathbf{M}_{\text{circuit}_b}(2, 2) &= (2\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_3 - \mathbf{S}_5 - \mathbf{S}_6) + (\mathbf{S}_2\mathbf{S}_6 - \mathbf{S}_3\mathbf{S}_5)(R_2\mathcal{I}_{N_t} + L_2\nabla_h) \\
 \mathbf{M}_{\text{circuit}_b}(2, 3) &= (\mathbf{S}_3\mathbf{S}_5 + \mathbf{S}_2\mathbf{S}_3\mathbf{S}_4 - \mathbf{S}_2\mathbf{S}_6 - \mathbf{S}_1\mathbf{S}_5\mathbf{S}_6)(R_3\mathcal{I}_{N_t} + L_3\nabla_h) \\
 \mathbf{M}_{\text{circuit}_b}(2, 4) &= (\mathbf{S}_2\mathbf{S}_6 + \mathbf{S}_3\mathbf{S}_5 + \mathbf{S}_1\mathbf{S}_5\mathbf{S}_6 + \mathbf{S}_2\mathbf{S}_3\mathbf{S}_4)(R_c\mathcal{I}_{N_t} + L_c\nabla_h) \\
 \mathbf{M}_{\text{circuit}_b}(3, 1) &= (\mathbf{S}_1\mathbf{S}_6 + \mathbf{S}_3\mathbf{S}_4 + \mathbf{S}_1\mathbf{S}_3\mathbf{S}_5 + \mathbf{S}_2\mathbf{S}_4\mathbf{S}_6)\mathcal{I}_{N_t} \\
 \mathbf{M}_{\text{circuit}_b}(3, 2) &= (\mathbf{S}_2\mathbf{S}_6 + \mathbf{S}_3\mathbf{S}_5 + \mathbf{S}_1\mathbf{S}_5\mathbf{S}_6 + \mathbf{S}_2\mathbf{S}_3\mathbf{S}_4)\mathcal{I}_{N_t} \\
 \mathbf{M}_{\text{circuit}_b}(3, 3) &= \mathcal{I}_{N_t} \\
 \mathbf{M}_{\text{circuit}_b}(3, 4) &= 0 \\
 \mathbf{M}_{\text{circuit}_b}(4, 1) &= (-\mathbf{S}_1\mathbf{S}_6 - \mathbf{S}_1\mathbf{S}_5 + \mathbf{S}_1\mathbf{S}_5\mathbf{S}_6)\mathcal{I}_{N_t} \\
 \mathbf{M}_{\text{circuit}_b}(4, 2) &= (-\mathbf{S}_2\mathbf{S}_6 - \mathbf{S}_2\mathbf{S}_4 + \mathbf{S}_2\mathbf{S}_4\mathbf{S}_6)\mathcal{I}_{N_t} \\
 \mathbf{M}_{\text{circuit}_b}(4, 3) &= (-\mathbf{S}_3\mathbf{S}_5 - \mathbf{S}_3\mathbf{S}_4 + \mathbf{S}_3\mathbf{S}_4\mathbf{S}_5)\mathcal{I}_{N_t} \\
 \mathbf{M}_{\text{circuit}_b}(4, 4) &= \mathcal{I}_{N_t}
 \end{aligned}$$

avec \mathcal{I}_{N_t} la matrice identité de taille $N_t \times N_t$. Le vecteur $\mathbf{V}_{\text{circuit}_b}$ de taille $4N_t$ est défini par :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{\text{circuit}}(1 : N_t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_4 \end{bmatrix} (\mathbf{V}_1) \\
 &\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_2\mathbf{S}_4 - \mathbf{S}_1\mathbf{S}_5 \end{bmatrix} (\mathbf{V}_2) \\
 &\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_3\mathbf{S}_4(1 - \mathbf{S}_2) - \mathbf{S}_1\mathbf{S}_6(1 - \mathbf{S}_5) \end{bmatrix} (\mathbf{V}_3) \\
 &\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_4 \end{bmatrix} (-2\mathbf{V}_s) \\
 \mathbf{V}_{\text{circuit}}(1 + N_t : 2N_t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1\mathbf{S}_5\mathbf{S}_6 - \mathbf{S}_2\mathbf{S}_3\mathbf{S}_4 \end{bmatrix} (\mathbf{V}_1) \\
 &\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_2\mathbf{S}_6 - \mathbf{S}_3\mathbf{S}_5 \end{bmatrix} (\mathbf{V}_2) \\
 &\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_3\mathbf{S}_5 + \mathbf{S}_2\mathbf{S}_3\mathbf{S}_4 - \mathbf{S}_2\mathbf{S}_6 - \mathbf{S}_1\mathbf{S}_5\mathbf{S}_6 \end{bmatrix} (\mathbf{V}_3) \\
 &\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_2\mathbf{S}_6 + \mathbf{S}_3\mathbf{S}_5 + \mathbf{S}_1\mathbf{S}_5\mathbf{S}_6 + \mathbf{S}_2\mathbf{S}_3\mathbf{S}_4 \end{bmatrix} (-2\mathbf{V}_s) \\
 \mathbf{V}_{\text{circuit}_b}(1 + 2N_t : 3N_t) &= 0 \\
 \mathbf{V}_{\text{circuit}_b}(1 + 3N_t : 4N_t) &= 0
 \end{aligned}$$

Et ainsi aboutir au système :

$$\mathbf{M}_{\text{circuit}_b} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_c \end{pmatrix} = \mathbf{V}_{\text{circuit}_b} \quad (\text{C.5})$$

C.2.2 Calcul des variables secondaires

Le calcul des variables secondaires est obtenu en réécrivant sous forme vectorielle les équations définies dans la partie C.1.2. Ainsi le courant circulant à travers les diodes est défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{d_1} &= \mathbf{S}_1 \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_{d_2} &= \mathbf{S}_2 \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_{d_3} &= \mathbf{S}_3 \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_{d_4} &= \mathbf{S}_4 (-\mathbf{I}_1) \\ \mathbf{I}_{d_5} &= \mathbf{S}_5 (-\mathbf{I}_2) \\ \mathbf{I}_{d_6} &= \mathbf{S}_6 (-\mathbf{I}_3) \end{aligned}$$

et les tensions aux bornes des diodes :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{d_1} &= (\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_1) [\mathbf{V}_1 - R_1 \mathbf{I}_1 - L_1 \nabla_h \mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_s] \\ &\quad + \mathbf{S}_2 (\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_6) [-\mathbf{V}_2 + L_2 \nabla_h \mathbf{I}_2 + R_2 \mathbf{I}_2] \\ &\quad + \mathbf{S}_3 (\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_5 - \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_4) [-\mathbf{V}_3 + L_3 \nabla_h \mathbf{I}_3 + R_3 \mathbf{I}_3] + \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_s \\ \mathbf{V}_{d_2} &= \mathbf{S}_1 (\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_6) [-\mathbf{V}_1 + L_1 \nabla_h \mathbf{I}_1 + R_1 \mathbf{I}_1] \\ &\quad + (\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_2) [\mathbf{V}_2 - R_2 \mathbf{I}_2 - L_2 \nabla_h \mathbf{I}_2 + \mathbf{V}_s] \\ &\quad + \mathbf{S}_3 (\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_5 - \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_4) [-\mathbf{V}_3 + L_3 \nabla_h \mathbf{I}_3 + R_3 \mathbf{I}_3] + \mathbf{S}_2 \mathbf{V}_s \\ \mathbf{V}_{d_3} &= \mathbf{S}_1 (\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_3 \mathbf{S}_5) [-\mathbf{V}_1 + L_1 \nabla_h \mathbf{I}_1 + R_1 \mathbf{I}_1] + \mathbf{S}_2 (\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_6 - \mathbf{S}_3 \mathbf{S}_4) \\ &\quad [-\mathbf{V}_2 + L_2 \nabla_h \mathbf{I}_2 + R_2 \mathbf{I}_2] + (\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_3) [\mathbf{V}_3 - R_3 \mathbf{I}_3 - L_3 \nabla_h \mathbf{I}_3 + \mathbf{V}_s] + \mathbf{S}_3 \mathbf{V}_s \\ \mathbf{V}_{d_4} &= (\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_4) [\mathbf{V}_1 - R_1 \mathbf{I}_1 - L_1 \nabla_h \mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_s] \\ &\quad + \mathbf{S}_5 (\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_3 \mathbf{S}_4) [-\mathbf{V}_2 + L_2 \nabla_h \mathbf{I}_2 + R_2 \mathbf{I}_2] \\ &\quad + \mathbf{S}_6 (\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_4 - \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_5) [-\mathbf{V}_3 + L_3 \nabla_h \mathbf{I}_3 + R_3 \mathbf{I}_3] + \mathbf{S}_4 \mathbf{V}_s \\ \mathbf{V}_{d_5} &= \mathbf{S}_4 (\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_3 \mathbf{S}_5) [-\mathbf{V}_1 + L_1 \nabla_h \mathbf{I}_1 + R_1 \mathbf{I}_1] \\ &\quad + (\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_5) [\mathbf{V}_2 - R_2 \mathbf{I}_2 - L_2 \nabla_h \mathbf{I}_2 + \mathbf{V}_s] \\ &\quad + \mathbf{S}_6 (\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_4 - \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_5) [-\mathbf{V}_3 + L_3 \nabla_h \mathbf{I}_3 + R_3 \mathbf{I}_3] + \mathbf{S}_5 \mathbf{V}_s \\ \mathbf{V}_{d_6} &= \mathbf{S}_4 (\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_6) [-\mathbf{V}_1 + L_1 \nabla_h \mathbf{I}_1 + R_1 \mathbf{I}_1] + \mathbf{S}_5 (\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_6 - \mathbf{S}_3 \mathbf{S}_4) \\ &\quad [-\mathbf{V}_2 + L_2 \nabla_h \mathbf{I}_2 + R_2 \mathbf{I}_2] + (\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_6) [\mathbf{V}_3 - R_3 \mathbf{I}_3 - L_3 \nabla_h \mathbf{I}_3 + \mathbf{V}_s] + \mathbf{S}_6 \mathbf{V}_s \end{aligned}$$

C.2.3 Conditions de commutation des diodes

En étudiant les discontinuités, il est possible d'en déduire avec précision l'ajustement à apporter aux bornes. Nous avons listé ci-dessous les différents cas pouvant se

produire au fur et à mesure de l’algorithme. Par exemple, considérons une borne située au début d’un empiètement (figures C.2 et C.3), lorsque l’on observe un pic de tension comme nous pouvons le voir sur la figure C.2b alors la borne doit être déplacée à l’endroit exact du pic. En revanche, lorsqu’on observe des courants négatifs dans les diodes, comme dans la figure C.3a, il faut, dans ce cas, déplacer la borne à l’endroit où le courant devient positif.

Considérons maintenant la borne située à la fin d’un empiètement (figures C.4 et C.5). Lorsque l’on peut observer des courants négatifs, il faut dans ce cas déplacer la borne à l’endroit précis où le courant devient négatif comme cela est représenté sur la figure C.4a. Par contre, lorsque l’on aperçoit un pic de tension comme nous pouvons le voir sur la figure C.5b, la borne doit alors être déplacée sur la droite. Néanmoins, il n’est cependant pas possible de définir avec précision l’instant exact de commutation. Pour cette raison, nous utilisons une interpolation polynomiale d’ordre 2 sur le courant de la diode (figure C.5a) qui se bloque afin de prédire l’instant de commutation.

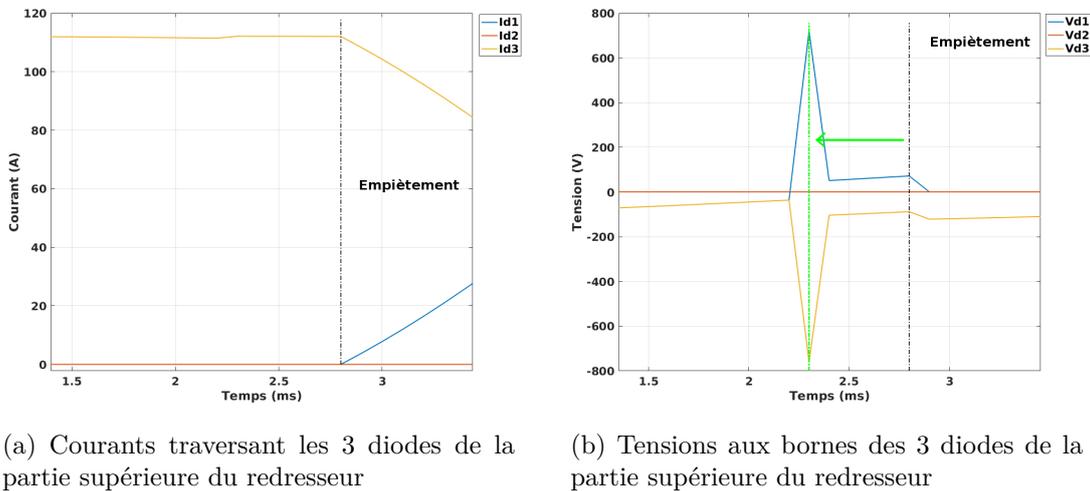


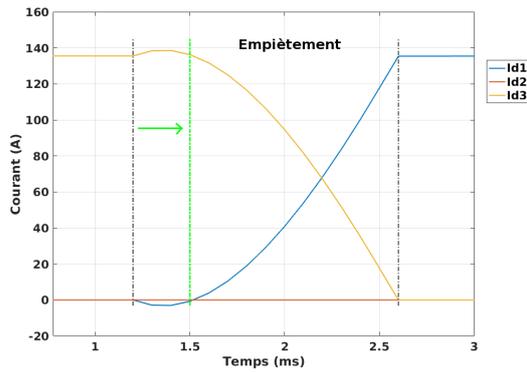
FIGURE C.2 – Déplacement vers la gauche de la borne située avant l’empiètement

C.3 Couplage avec la WR-NM

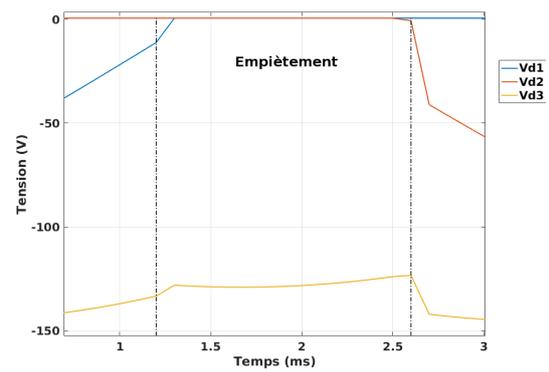
C.3.1 Système matriciel

La WR-NM est utilisée pour résoudre les problèmes électromagnétiques couplés à des équations de circuit. Pour nos applications, les sources de tensions sont induites dans les bobinages du dispositif électromagnétique. Nous avons vu dans le chapitre 2, que les équations de circuit sont résolues avec la méthode de Newton-Raphson, cela revient à dire que la k^e itération de Newton-Raphson s’écrit :

$$J\left(\begin{matrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_c \end{matrix}\right)^k \delta_{\mathbf{I}}^{k+1} = -Res\left(\begin{matrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_c \end{matrix}\right)^k \quad (C.6)$$

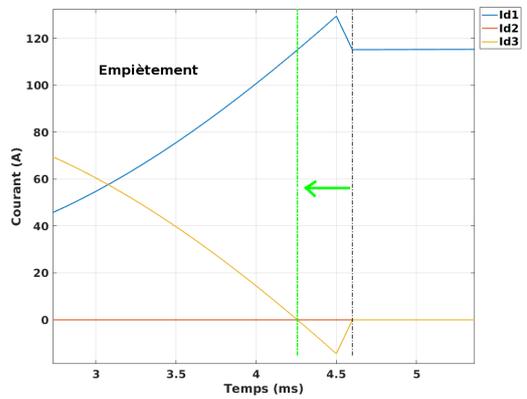


(a) Courants traversant les 3 diodes de la partie supérieure du redresseur

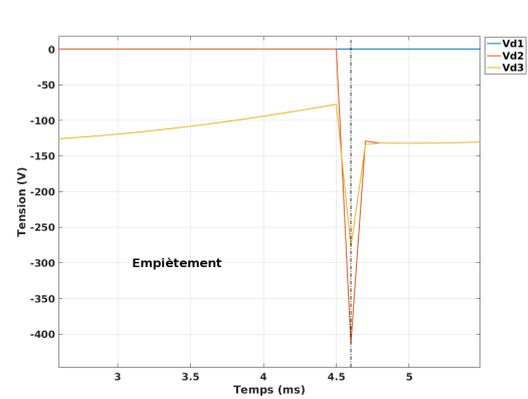


(b) Tensions aux bornes des 3 diodes de la partie supérieure du redresseur

FIGURE C.3 – Déplacement vers la droite de la borne située avant l'empiètement



(a) Courants traversant les 3 diodes de la partie supérieure du redresseur



(b) Tensions aux bornes des 3 diodes de la partie supérieure du redresseur

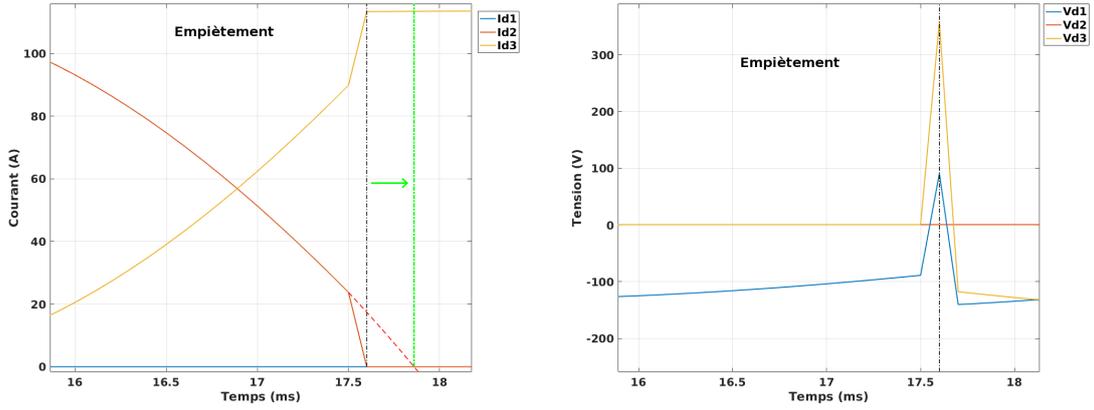
FIGURE C.4 – Déplacement vers la gauche de la borne située après l'empiètement

avec

$$\text{Res}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_c \end{pmatrix}^k\right) = \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_c \end{pmatrix}^k + \mathbf{M}_2 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}^k - \mathbf{V}_b^k \quad (\text{C.7})$$

et

$$\mathbf{J}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_c \end{pmatrix}^k\right) = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_L \quad (\text{C.8})$$



(a) Courants traversant les 3 diodes de la partie supérieure du redresseur

(b) Tensions aux bornes des 3 diodes de la partie supérieure du redresseur

FIGURE C.5 – Déplacement vers la droite de la borne située avant l’empiètement

avec $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_{\text{circuit}_b}$ la matrice définie dans le paragraphe C.2.1, M_2 de taille $4N_t \times 3N_t$ définie par :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_2(1, 1) &= (\mathbf{S}_4 - \mathbf{S}_1)\nabla_h \\ \mathbf{M}_2(1, 2) &= (\mathbf{S}_1\mathbf{S}_5 - \mathbf{S}_2\mathbf{S}_4)\nabla_h \\ \mathbf{M}_2(1, 3) &= (\mathbf{S}_1\mathbf{S}_6(\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_5) - \mathbf{S}_3\mathbf{S}_4(\mathcal{I}_{N_t} - \mathbf{S}_2))\nabla_h \\ \mathbf{M}_2(2, 1) &= (\mathbf{S}_2\mathbf{S}_3\mathbf{S}_4 - \mathbf{S}_1\mathbf{S}_5\mathbf{S}_6)\nabla_h \\ \mathbf{M}_2(2, 2) &= (\mathbf{S}_3\mathbf{S}_5 - \mathbf{S}_2\mathbf{S}_6)\nabla_h \\ \mathbf{M}_2(2, 3) &= (\mathbf{S}_2\mathbf{S}_6 + \mathbf{S}_1\mathbf{S}_5\mathbf{S}_6 - \mathbf{S}_3\mathbf{S}_5 - \mathbf{S}_2\mathbf{S}_3\mathbf{S}_4)\nabla_h \end{aligned}$$

et le vecteur \mathbf{V}_b de taille $4N_t$ défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_b(1 : N_t) &= [\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_4](-2\mathbf{V}_s) \\ \mathbf{V}_b(1 + N_t : 23N_t) &= [\mathbf{S}_2\mathbf{S}_6 + \mathbf{S}_3\mathbf{S}_5 + \mathbf{S}_1\mathbf{S}_5\mathbf{S}_6 + \mathbf{S}_2\mathbf{S}_3\mathbf{S}_4](-2\mathbf{V}_s) \\ \mathbf{V}_b(1 + 2N_t : 3N_t) &= 0 \\ \mathbf{V}_b(1 + 3N_t : 4N_t) &= 0 \end{aligned}$$

Bibliographie

- Abdel-Razek, A., Coulomb, J., Feliachi, M., and Sabonnadiere, J. (1981). The calculation of electromagnetic torque in saturated electric machines within combined numerical and analytical solutions of the field equations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 17(6) :3250–3252. (Cité à la page 50)
- Albanese, R. and Rubinacci, G. (1988). Integral formulation for 3d eddy-current computation using edge elements. *IEE Proceedings A - Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education - Reviews*, 135(7) :457–462. (Cité à la page 41)
- Albanese, R. and Rubinacci, G. (1990a). Formulation of the eddy-current problem. *IEE Proceedings A - Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education*, 137(1) :16–22. (Cité à la page 34)
- Albanese, R. and Rubinacci, G. (1990b). Magnetostatic field computation in terms of two-component vector potentials. *International journal for numerical methods in engineering*, 29(3) :515–532. (Cité aux pages 36, 43)
- Alexander, R. (1977). Diagonally implicit runge-kutta methods for stiff ode's. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 14(6) :1006–1021. (Cité aux pages 19, 55, 55)
- Aprille, T. J. and Trick, T. N. (1972). Steady-state analysis of nonlinear circuits with periodic inputs. *Proceedings of the IEEE*, 60(1) :108–114. (Cité à la page 60)
- Ausserhofer, S., Biro, O., and Preis, K. (2007). An efficient harmonic balance method for nonlinear eddy-current problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 43(4) :1229–1232. (Cité à la page 58)
- Badics, Z. and Cendes, Z. J. (2005). A newton-raphson algorithm with adaptive accuracy control based on a block-preconditioned conjugate gradient technique. *IEEE Transactions on Magnetics*, 41(5) :1652–1655. (Cité à la page 20)

- Bellen, A. and Zennaro, M. (1993). The use of runge-kutta formulae in waveform relaxation methods. *Applied Numerical Mathematics*, 11(1-3) :95–114. (Cité à la page 74)
- Biddlecombe, C., Heighway, E., Simkin, J., and Trowbridge, C. (1982). Methods for eddy current computation in three dimensions. *IEEE Transactions on magnetics*, 18(2) :492–497. (Cité à la page 35)
- Borghi, C. A., Breschi, M., Carraro, M. R., and Cristofolini, A. (2004). An application of the inexact newton method to nonlinear magnetostatics. *IEEE Transactions on Magnetics*, 40(2) :1076–1079. (Cité à la page 20)
- Bossavit, A. (1985). Two dual formulations of the 3-d eddy-currents problem. *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 4(2) :103–116. (Cité à la page 34, 34)
- Bossavit, A. (1988a). A rationale for ‘edge-elements’ in 3-d fields computations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(1) :74–79. (Cité à la page 41)
- Bossavit, A. (1988b). Whitney forms : a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism. *IEE Proceedings A - Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education - Reviews*, 135(8) :493–500. (Cité à la page 34)
- Bossavit, A. (1993). Électromagnétisme, en vue de la modélisation. *Springer-Verlag, Paris*, 201 :202. (Cité aux pages 29, 42)
- Bossavit, A. and Vérité, J.-C. (1982). A mixed fem-biem method to solve 3-d eddy-current problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 18(2) :431–435. (Cité aux pages 32, 41)
- Bouarroudj, L. (2005). *Contribution à l’étude de l’alternateur à griffes - Application au domaine automobile*. PhD thesis, Institut national polytechnique de Grenoble. (Cité aux pages 6, 18)
- Bouillault, F. and Razek, A. (1988). Hybrid numerical methods for movement consideration in electromagnetic systems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(1) :259–261. (Cité à la page 50)
- Broyden, C. G. (1965). A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. *Mathematics of computation*, 19(92) :577–593. (Cité à la page 20)
- Brunotte, X., Meunier, G., and Imhoff, J. F. (1992). Finite element modeling of unbounded problems using transformations : a rigorous, powerful and easy solution. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(2) :1663–1666. (Cité à la page 32)
- Cameron, F., Piche, R., and Forsman, K. (1998). Variable step size time integration methods for transient eddy current problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(5) :3319–3322. (Cité aux pages 19, 55, 55)

- Caron, G., Henneron, T., Piriou, F., and Mipo, J. C. (2016a). Numerical modeling of steady state of magnetostatic problems coupled with nonlinear electric circuit. In *2016 IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*, pages 1–1. (Cité à la page 127)
- Caron, G., Henneron, T., Piriou, F., and Mipo, J. C. (2016b). Time-periodicity condition of nonlinear magnetostatic problem coupled with electric circuit imposed by waveform relaxation method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 52(3) :1–4. (Cité à la page 79)
- Caron, G., Henneron, T., Piriou, F., and Mipo, J. C. (2016c). Waveform relaxation method combined with proper orthogonal decomposition to solve linear magneto-dynamic steady state problem coupled with electric circuit. In *2016 Conference on Electric and Magnetic Fields (EMF)*, pages 1–1. (Cité à la page 102)
- Caron, G., Henneron, T., Piriou, F., and Mipo, J.-C. (2017). Waveform relaxation–newton method to determine steady state of an electromagnetic structure : Application to a three-phase transformer. *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 36(3) :729–740. (Cité à la page 89)
- Carpenter, C. J. (1977). Comparison of alternative formulations of 3 dimensional magnetic-field and eddy-current problems at power frequencies. *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, 124(11) :1026–1034. (Cité à la page 36)
- Chari, M., Konrad, A., Palmo, M., and D’angelo, J. (1982). Three-dimensional vector potential analysis for machine field problems. *IEEE Transactions on magnetics*, 18(2) :436–446. (Cité à la page 35)
- Choi, H.-S., Kim, D.-H., Park, I.-H., and Hahn, S.-Y. (2001). A new design technique of magnetic systems using space mapping algorithm. *IEEE Transactions on Magnetics*, 37(5) :3627–3630. (Cité à la page 20)
- Christophe, A., Santandrea, L., Rapetti, F., Krebs, G., and Bihan, Y. L. (2014). An overlapping nonmatching grid mortar element method for maxwell’s equations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 50(2) :409–412. (Cité à la page 51)
- Clemens, M., Wilke, M., and Weiland, T. (2002). 3-d transient eddy-current simulations using fi2td schemes with variable time-step selection. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(2) :605–608. (Cité à la page 55)
- Clemens, M., Wilke, M., and Weiland, T. (2003). Extrapolation strategies in numerical schemes for transient magnetic field simulations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 39(3) :1171–1174. (Cité à la page 60)
- Clénet, S., Henneron, T., and Ida, N. (2016). Reduction of a finite-element parametric model using adaptive pod methods ;application to uncertainty quantification. *IEEE Transactions on Magnetics*, 52(3) :1–4. (Cité à la page 89)

- Coulomb, J.-L. (1981). *Analyse tridimensionnelle des champs électriques et magnétiques par la méthode des éléments finis*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG. (Cité à la page 35)
- Darrigol, O. (2002 (2000)). *Electrodynamics from Ampère to Einstein*. Oxford University Press, 2nd edition. (Cité à la page 21)
- Davies, J. B. and Dean, A. J. (1996). Finite volume with non-uniform mesh for the solution of maxwell's equations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(3) :1417–1420. (Cité à la page 40)
- Dembo, R. S., Eisenstat, S. C., and Steihaug, T. (1982). Inexact newton methods. *SIAM Journal on Numerical analysis*, 19(2) :400–408. (Cité à la page 20)
- Dhatt, G. and Touzot, G. (1981). *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Les Presses de l'université Laval. (Cité à la page 37)
- Dular, P. (1996). *Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires*. PhD thesis, Université de Liège. (Cité aux pages 34, 43)
- Dular, P. and Piriou, F. (2008). *The Finite Element Method for Electromagnetic Modeling*. Wiley. Chap. 2, edited by Gérard Meunier. (Cité à la page 43)
- Dular, P. and Sabariego, R. (2007). A perturbation method for computing field distortions due to conductive regions with h-conform magnetodynamic finite element formulations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 43(4) :1293–1296. (Cité à la page 19)
- Emson, C. and Simkin, J. (1983). An optimal method for 3-d eddy currents. *IEEE Transactions on Magnetics*, 19(6) :2450 – 2452. (Cité à la page 37)
- Erdman, D. and Rose, D. (1992). Newton waveform relaxation techniques for tightly coupled systems. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 11(5) :598 – 606. (Cité à la page 75)
- Faraday, M. (1844). *Experimental researches in electricity (Vols. I & II)*. Richard and John Taylor. (Cité à la page 22)
- Ferrouillat, P. (2015). *Développement de formulations éléments finis 3D en potentiel vecteur magnétique : application aux machines asynchrones en mouvement*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes. (Cité à la page 50)
- Fournet, G. (1979). *Électromagnétisme à partir des équations locales*. Masson. (Cité à la page 26)
- Fratila, M. (2012). *Contribution à la prise en compte des pertes fer dans la modélisation des machines électriques par éléments finis*. PhD thesis, Université Lille 1. (Cité à la page 49)

- Fu, W. N., Ho, S. L., and Zhou, P. (2012). Reduction of computing time for steady-state solutions of magnetic field and circuit coupled problems using time-domain finite-element method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(11) :3363–3366. (Cité à la page 56)
- Girault, V. and Raviart, P.-A. (1986). *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations : Theory and Algorithms*. Springer-Verlag. (Cité aux pages 32, 38, 38, 39)
- Griffiths, D. J. (2012 (1981)). *Introduction to Electrodynamics*. Pearson, 4th edition. (Cité à la page 25)
- Gustafsson, K. (1994). Control-theoretic techniques for stepsize selection in implicit runge-kutta methods. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 20(4) :496–517. (Cité à la page 55)
- Gyselinck, J., Dular, P., Geuzaine, C., and Legros, W. (2002a). Harmonic-balance finite-element modeling of electromagnetic devices : a novel approach. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(2) :521 – 524. (Cité à la page 19)
- Gyselinck, J., Dular, P., Geuzaine, C., and Legros, W. (2002b). Harmonic-balance finite-element modeling of electromagnetic devices : a novel approach. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(2) :521–524. (Cité à la page 58)
- Hara, T., Naito, T., and Umoto, J. (1985). Time-periodic finite element method for nonlinear diffusion equations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 21(6) :2261–2264. (Cité aux pages 19, 60)
- Hasan, M. R., Sabariego, R. V., Geuzaine, C., and Paquay, Y. (2016). Proper orthogonal decomposition versus krylov subspace methods in reduced-order energy-converter models. In *2016 IEEE International Energy Conference (ENERGY-CON)*, pages 1–6. (Cité à la page 89)
- Haus, H. A. and Melcher, J. R. (1989). *Electromagnetic Fields and Energy*. Prentice Hall. (Cité aux pages 6, 29, 31, 31)
- Heaviside, O. (1984). *Electrical papers*, volume 2. New York and London : Macmillan and co. (Cité à la page 35)
- Hecht, F. and Marrocco, A. (1990). A finite element simulation of an alternator connected to a nonlinear external circuit. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(2) :964–967. (Cité à la page 67)
- Henneberger, G., Kuppers, S., and Ramesohl, I. (1996). Numerical calculation, simulation and design optimisation of claw pole alternators for automotive application. *IEE Colloquium on*, pages 3/1 – 3/5. (Cité à la page 18)
- Henneron, T. (2004). *Contribution à la prise en compte des Grandeurs Globales dans les Problèmes d’Electromagnétisme résolus avec la Méthode des Eléments Finis*. PhD thesis, Université Lille 1. (Cité aux pages 34, 66)

- Henneron, T. and Clénet, S. (2014). Model order reduction of non-linear magneto-static problems based on pod and dei methods. *IEEE Transactions on Magnetics*, 50(2) :33–36. (Cité à la page 88)
- Hout, K. J. i. (1995). On the convergence of waveform relaxation methods for stiff nonlinear ordinary differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, 18(1-3) :175–190. (Cité à la page 74)
- Hunt, B. J. (2012). Oliver heaviside. *Phys. Today*, 65(11) :48. (Cité à la page 35)
- Igarashi, H., Watanabe, Y., and Ito, Y. (2012). Why error correction methods realize fast computations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(2) :415–418. (Cité à la page 63)
- Ilic-Spong, M., Crow, M. L., and Pai, M. A. (1987). Transient stability simulation by waveform relaxation methods. *Power Engineering review, IEEE*, PER-7(11) :37–38. (Cité à la page 74)
- Illoul, L., Yvonet, J., Chinesta, F., and Clénet, S. (2006). Application of the natural-element method to model moving electromagnetic devices. *IEEE Transactions on Magnetics*, 42(4) :727–730. (Cité à la page 40)
- Jackson, J. D. (1998 (1962)). *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., 3rd edition. (Cité aux pages 26, 28, 28)
- Jech, B. (1999). Éléments pour une histoire du potentiel vecteur. *Bulletin de l'Union des physiciens*, (815) :163–190. (Cité à la page 35)
- Jolliffe, I. (2002). *Principal Component Analysis*. Springer Series in Statistics. Springer. (Cité à la page 150)
- Journeaux, A. (2013). *Modélisation multi-physique en génie électrique : Application au couplage magnéto-thermo-mécanique*. PhD thesis, Université Paris-Sud. (Cité à la page 47)
- Krebs, G., Henneron, T., Clénet, S., and Bihan, Y. L. (2011). Overlapping finite elements used to connect non-conforming meshes in 3-d with a vector potential formulation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 47(5) :1218–1221. (Cité à la page 50)
- Kundert, K. S., White, J. K., and Sangiovanni-Vincentelli, A. (2013). *Steady-state methods for simulating analog and microwave circuits*, volume 94. Springer Science & Business Media. (Cité à la page 56, 56, 56, 56, 56)
- Kuppers, S. and Henneberger, G. (1997). Numerical procedures for the calculation and design of automotive alternators. *IEEE Transactions on Magnetics*, 33(2) :2022–2025. (Cité à la page 18)
- Kurz, S., Fetzner, J., Lehner, G., and Rucker, W. M. (1998). A novel formulation for 3d eddy current problems with moving bodies using a lagrangian description and bem-fem coupling. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(5) :3068–3073. (Cité à la page 50)

- Kværnø, A. (2004). Singly diagonally implicit runge–kutta methods with an explicit first stage. *BIT Numerical Mathematics*, 44(3) :489–502. (Cité à la page 55)
- Le Bellac, M. and Lévy-Leblond, J. M. (1973). Galilean electromagnetism. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 14(2) :217–234. (Cité à la page 29)
- Le Menach, Y. (1999). *Contribution à la modélisation numérique tridimensionnelle des systèmes électrotechniques*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille. (Cité aux pages 24, 34, 47, 47, 66)
- Lelarasme, E., Ruehli, A. E., and Sangiovanni-Vincentelli, A. (1982). The waveform relaxation method for time-domain analysis of large scale integrated circuits. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 1(3) :131 – 145. (Cité aux pages 18, 73)
- Leonard, P. J. and Rodger, D. (1988). Voltage forced coils for 3d finite-element electromagnetic models. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(6) :2579–2581. (Cité à la page 101)
- Li, H. L., Ho, S. L., and Fu, W. N. (2012). Application of multi-stage diagonally-implicit runge-kutta algorithm to transient magnetic field computation using finite element method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(2) :279–282. (Cité à la page 55)
- Lu, J., Yamada, S., and Bessho, K. (1990). Time-periodic magnetic field analysis with saturation and hysteresis characteristics by harmonic balance finite element method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(2) :995–998. (Cité à la page 56)
- Lumley, J. L. (1967). The structure of inhomogeneous turbulent flows. *Atmospheric turbulence and radio propagation*, pages 166–178. (Cité aux pages 19, 150)
- Lumsdaine, A., Reichelt, M., and White, J. (1991). Conjugate direction waveform methods for transient two-dimensional simulation of mos devices. *IEEE International Conference on Computer-Aided Design, 1991. ICCAD-91. Digest of Technical Papers.*, pages 116–119. (Cité à la page 74)
- Marechal, Y. and Ramdane, B. (2013). Natural element method applied to electromagnetic problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 49(5) :1713–1716. (Cité à la page 40)
- Marrocco, A. (1977). Analyse numérique de problèmes d’électrotechnique. *Ann. Sc. Math. Québec*, 1(2) :271–296. (Cité à la page 49)
- Maxwell, J. C. (1873). A treatise on electricity and magnetism. Vol. 1 & Vol. 2. (Cité à la page 23)
- Meunier, G., Lefevre, Y., and Lombard, P. (2002). *Électromagnétisme et problèmes couplés*. Wiley. Chap. 1, couplage avec les équations de circuit, edited by Gérard Meunier. (Cité à la page 65)

- Miekkala, U. and Nevanlinna, O. (1987). Convergence of dynamic iteration methods for initial value problems. *SIAM J. Sci. STAT. COMPUT.*, 8(4). (Cité à la page 74)
- Monk, P. (2003). *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. Oxford University Press. (Cité aux pages 18, 32, 33, 37, 40, 40)
- Montier, L., Henneron, T., Clénet, S., and Goursaud, B. (2016). Transient simulation of an electrical rotating machine achieved through model order reduction. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 3(1) :10. (Cité à la page 88)
- Morgan, R. B. (2002). Gmres with deflated restarting. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(1) :20–37. (Cité à la page 147)
- Morisue, T. (1982). Magnetic vector potential and electric scalar potential in three-dimensional eddy current problem. *IEEE Transactions on Magnetics*, 18(2) :531–535. (Cité à la page 35)
- Multon, B. (1997). Modèles électriques du transformateur électromagnétique. *revue 3EI*, pages pp.31–36. (Cité à la page 65)
- Mur, G. (1994). Edge elements, their advantages and their disadvantages. *IEEE Transactions on Magnetics*, 30(5) :3552–3557. (Cité à la page 41)
- Nakata, T., Takahashi, N., Fujiwara, K., and Imai, T. (1991). Comparison of various methods of analysis and finite elements in 3-d magnetic field analysis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 27(5) :4073–4076. (Cité à la page 34)
- Nakata, T., Takahashi, N., Fujiwara, K., and Shiraki, Y. (1990). Comparison of different finite elements for 3-d eddy current analysis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(2) :434–437. (Cité à la page 34)
- Nédélec, J.-C. (1980). Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numerische Mathematik*, 35(3) :315–341. (Cité à la page 41)
- Nevanlinna, O. and Odeh, F. (1987). Remarks on the convergence of waveform relaxation method. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 9(3-4) :435–445. (Cité à la page 74)
- Nicolet, A. and Delince, F. (1996). Implicit runge-kutta methods for transient magnetic field computation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(3) :1405–1408. (Cité à la page 55)
- Nouy, A. (2010). A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23) :1603 – 1626. (Cité à la page 150)
- Paquay, Y., Brüls, O., and Geuzaine, C. (2016). Nonlinear interpolation on manifold of reduced-order models in magnetodynamic problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 52(3) :1–4. (Cité à la page 88)

- Pierquin, A. (2014). *ConConcept de systèmes électriques multidynamiques par optimisation multigranularité*. PhD thesis, École Centrale de Lille. (Cité aux pages 18, 65)
- Pierquin, A., Le Menach, Y., Roger, J., and Chevallier, L. (2012). Imposition d'un courant uniforme dans un conducteur. (Cité à la page 47, 47)
- Preston, T. W., Reece, A. B. J., and Sangha, P. S. (1988). Induction motor analysis by time-stepping techniques. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(1) :471–474. (Cité à la page 51)
- Pries, J. and Hofmann, H. (2015). Steady-state algorithms for nonlinear time-periodic magnetic diffusion problems using diagonally implicit runge. *IEEE Transactions on Magnetics*, 51(4) :1–12. (Cité à la page 19)
- Qu, Z.-Q. (2004). *Model Order Reduction Techniques : with Applications in Finite Element Analysis*. Springer-Verlag London, 1 edition. (Cité à la page 150)
- Quarteroni, A., Sacco, R., and Saleri, F. (2004). *Méthodes Numériques : Algorithme, analyse et applications*. Springer. (Cité aux pages 48, 48, 48, 53, 54)
- Ramarotafika, R. (2012). *Modélisation stochastique de la variabilité des propriétés magnétiques des matériaux ferromagnétiques : Application sur des stators de machines électriques*. PhD thesis, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers. (Cité à la page 49)
- Rapetti, F. (2000). *Approximation des équations de la Magnétodynamique en domaine tournant par la méthode des éléments joints*. PhD thesis, Université Paris 6. (Cité aux pages 19, 51)
- Rapetti, F. and Rousseaux, G. (2011). Implications of Galilean Electromagnetism in Numerical Modeling. *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, 26(9) :784–791. (Cité aux pages 6, 29, 31)
- Raviart, P.-A. and Thomas, J. (1977). Primal hybrid finite element methods for 2nd order elliptic equations. *Mathematics of computation*, 31(138) :391–413. (Cité à la page 41)
- Reichelt, M., White, J., Allen, J., and Odeh, F. (1988). Waveform relaxation applied to transient device simulation. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1988.*, 2 :1647–1650. (Cité à la page 74)
- Ren, Z. (1995). *Solving 3D Static Field Problems by Dual Formulations Using Potential Variables*, pages 213–216. Springer US, Boston, MA. (Cité à la page 44)
- Ren, Z. (1996). Influence of the rhs on the convergence behaviour of the curl-curl equation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(3, Part : 1) :655 – 658. (Cité aux pages 45, 47)

- Ren, Z., Bouillault, F., Razek, A., Bossavit, A., and Verite, J. C. (1990). A new hybrid model using electric field formulation for 3-d eddy current problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26(2) :470–473. (Cité à la page 34)
- Ren, Z. and Razek, A. (2000). Comparison of some 3d eddy current formulations in dual systems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(4) :751–755. (Cité à la page 34)
- Rousseaux, G. (2013). Forty years of galilean electromagnetism (1973–2013). *The European Physical Journal Plus*, 128(8) :81. (Cité à la page 29)
- Saad, Y. and Schultz, M. H. (1986). Gmres : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on scientific and statistical computing*, 7(3) :856–869. (Cité aux pages 62, 87)
- Sabariego, R. V., Geuzaine, C., Dular, P., and Gyselinck, J. (2012). Time-domain surface impedance boundary conditions enhanced by coarse volume finite-element discretisation. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(2) :631–634. (Cité à la page 40)
- Saleh, R. and White, J. (1990). Accelerating relaxation algorithms for circuit simulation using waveform-newton and step-size refinement. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 9(9) :951–958. (Cité à la page 75)
- Samet, O. (2005). Simulation hybride et distribuée des réseaux électriques. Rapport interne au L2EP : CNRT FUTURELEC-1. (Cité aux pages 6, 73)
- Sato, Y. and Igarashi, H. (2013). Model reduction of three-dimensional eddy current problems based on the method of snapshots. *IEEE Transactions on Magnetics*, 49(5) :1697–1700. (Cité à la page 88)
- Schmidthausler, D., Schops, S., and Clemens, M. (2013). Reduction of linear subdomains for non-linear electro-quasistatic field simulations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 49(5) :1669–1672. (Cité à la page 88)
- Schops, S., De Gersen, H., and Bartel, A. (2012). Higher-order cosimulation of field/circuit coupled problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(2) :535–538. (Cité à la page 75)
- Shi, X. (2005). *Contribution à la simulation du mouvement en 3D avec la méthode des éléments finis, appliquée à la modélisation des machines électriques*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologie de Lille. (Cité à la page 50)
- Shi, X., Menach, Y. L., Ducreux, J. P., and Piriou, F. (2008). Comparison between the mortar element method and the polynomial interpolation method to model movement in the finite element method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(6) :1314–1317. (Cité aux pages 19, 51)

- Sirovich, L. (1987). Turbulence and the dynamics of coherent structures. i - coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45 :561–571. (Cité à la page 150, 150)
- Skelboe, S. (1980). Computation of the periodic steady-state response of nonlinear networks by extrapolation methods. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 27(3) :161–175. (Cité à la page 60)
- Takahashi, Y., Kaimori, H., Kameari, A., Tokumasu, T., Fujita, M., Wakao, S., Iwashita, T., Fujiwara, K., and Ishihara, Y. (2011). Convergence acceleration in steady state analysis of synchronous machines using time-periodic explicit error correction method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 47(5) :1422–1425. (Cité à la page 63)
- Takahashi, Y., Tokumasu, T., Fujita, M., Iwashita, T., Nakashima, H., Wakao, S., and Fujiwara, K. (2013). Time-domain parallel finite-element method for fast magnetic field analysis of induction motors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 49(5) :2413–2416. (Cité à la page 63)
- Takahashi, Y., Tokumasu, T., Fujita, M., Wakao, S., Fujiwara, K., and Ishihara, Y. (2012). Comparison between fast steady-state analysis methods for time-periodic nonlinear magnetic field problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(2) :235–238. (Cité à la page 63)
- Tang, Z. (2012). *Estimateurs d'erreur a posteriori résiduels en éléments finis pour la résolution de problèmes d'électromagnétisme en formulations potentielles*. PhD thesis, Université Lille 1. (Cité à la page 37)
- Tittarelli, R., Ménach, Y. L., Creusé, E., Nicaise, S., Piriou, F., Moreau, O., and Boiteau, O. (2015). Space-time residual-based a posteriori estimator for the $a-\varphi$ formulation in eddy current problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 51(3) :1–5. (Cité aux pages 19, 56)
- Tsukerman, I. A. (1992). Overlapping finite elements for problems with movement. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(5) :2247–2249. (Cité à la page 50)
- van Welij, J. (1985). Calculation of eddy currents in terms of h on hexahedra. *IEEE Transactions on Magnetics*, 21(6) :2239–2241. (Cité à la page 41)
- Wakao, S. and Onuki, T. (1993). Electromagnetic field computations by the hybrid fe-be method using edge elements. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(2) :1487–1490. (Cité à la page 32)
- Wakao, S., Tokuhisa, M., Maeda, A., and Nishioka, N. (2001). Acceleration of convergence characteristics of time-stepping fe analysis for rotating machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, 37(5) :3558–3561. (Cité à la page 60)
- Wang, H., Taylor, S., Simkin, J., Biddlecombe, C., and Trowbridge, B. (2001). An adaptive-step time integration method applied to transient magnetic field problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 37(5) :3478–3481. (Cité à la page 55, 55)

- Webb, J. (1993). Edge elements and what they can do for you. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(2) :1460–1465. (Cité à la page 41)
- White, J. and Sangiovanni-Vincentelli, A. (1985). Waveform relaxation : Theory and practice. *Transactions of the society for computer simulation*, 2(1) :95–133. (Cité à la page 74, 74)
- Whitney, H. (1957). *Geometric Integration Theory*. Princeton University Press. (Cité à la page 41)
- Whittaker, E. T. (2012 (1910)). *A history of the theories of aether and electricity : from the age of Descartes to the close of the nineteenth century*. Oxford City Press. (Cité aux pages 21, 35)
- Wu, A. C. T. and Yang, C. N. (2006). Evolution of the concept of the vector potential in the description of fundamental interactions. *International Journal of Modern Physics A*, 21(16) :3235–3277. (Cité à la page 35)
- Yamada, S. and Bessho, K. (1988). Harmonic field calculation by the combination of finite element analysis and harmonic balance method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(6) :2588–2590. (Cité à la page 56)
- Yamada, S., Bessho, K., and Lu, J. (1989). Harmonic balance finite element method applied to nonlinear ac magnetic analysis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 25(4) :2971–2973. (Cité à la page 56)
- Yee, K. (1966). Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell’s equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14(3) :302–307. (Cité à la page 40)
- Zaidi, H., Santandrea, L., Krebs, G., Bihan, Y. L., and Demaldent, E. (2012). Use of overlapping finite elements for connecting arbitrary surfaces with dual formulations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(2) :583–586. (Cité à la page 50)
- Zhang, H. (1996). A note on windowing for the waveform relaxation method. *Applied Mathematics and Computation*, 76(1) :49–63. (Cité à la page 75)