UNIVERSITÉ de LILLE 1, Sciences et Technologies

Laboratoire Paul Painlevé

École Doctorale des Sciences pour l'Ingénieur (Lille)

THÈSE DE DOCTORAT

discipline : **Mathématiques**

présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur par :

CHABBABI Fadil

Les applications qui commutent avec la transformation de Aluthge

Soutenue le 7 juillet 2017

Composition du jury :

Président :	QUEFFÉLEC Hervé	Université Lille 1
Directeur :	MBEKHTA Mostafa	Université Lille 1
Rapporteurs :	GONZALEZ ORTIZ Manuel	Universidad de Cantabria (Espagne)
	MOLNÁR Lajos	University of Szeged (Hungary)
Membres :	CASSIER Gilles	Université Lyon 1
	FINET Catherine	Université de Mons (Belgique)
	GRIVAUX Sophie	Université de Picardie
	VASILESCU Florian-Horia	Université Lille 1
Invités :	DE BIÈVRE Stephan	Université Lille 1
	FRICAIN Emmanuel	Université Lille 1

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma gratitude à mon directeur de thèse Mostafa Mbekhta d'avoir accepté de m'encadrer pendant le mémoire de Master 2, puis de diriger ce travail doctoral, je le remercie encore une fois pour sa disponibilité, ses suggestions, son exigence qui m'ont permis d'apprendre beaucoup de choses durant ces années.
Je tiens à remercier particulièrement Hervé Queffélec qui m'a fait l'honneur de présider le Jury de cette thèse.
Je voudrais exprimer mes plus chaleureux remerciements à mes rapporteurs Lajos Molnár et Manuel Gonzalez Ortiz pour la relecture attentive de cette thèse et pour leurs suggestions. Je remercie également Catherine Finet, Gilles Cassier, Florian-Horia Vasilescu et Sophie Grivaux d'avoir accepté d'être membres du jury.
Ensuite, je souhaite remercier mes invités Stephan De Bièvre et Emmanuel Fricain. Je voudrais exprimer également mes remerciements au labex CEMPI de m'avoir accordé un financement tout au long de mes études (Master et thèse) à l'Université Lille 1.
Je tiens à remercier les membres du laboratoire Paul Painlevé, en particulier Catalin Badea, Pierre Dèbes, Abdellah Hanani et Mohamed M'zari.
Je souhaite exprimer aussi mes remerciements aux organisateurs du séminaire d'analyse fonctionnelle, Chafiq Benhida et Kroum Tzanev, ainsi que tous les participants du groupe de travail d'analyse, de m'avoir permis d'exposer mes travaux à plusieurs reprises. Je tiens aussi à remercier Pascal Lefèvre, Étienne Matheron et Daniel Li. Mes remerciements vont aussi à tous les doctorants, post-doctorants, enseignants-chercheurs et personnels de l'UFR de mathématiques de Lille 1.
Durant mes études à Lille 1 j'ai eu la chance de faire des rencontres formidables avec des personnes qui sont devenus des amis, je pense notamment à Adel, Ahmed, François, Loic, Octave, Noamane, Rafik et Thomas.
Enfin, j'aimerais remercier mes parents et ma famille de m'avoir soutenu tout au long de mes études, d'avoir toujours été proche de moi et de m'avoir encouragé. Sans eux tout cela n'aurai pas été possible.
Mes derniers remerciements et non les moindres, s'adressent à ma femme Siham, qui, pour mon plus grand bonheur partage ma vie. Son soutien a été sans faille et je lui serai éternellement reconnaissant.

Table des matières

Notations

Le but de cette partie est d'indiquer les notations que nous utiliserons dans la suite.

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers naturels, relatifs ;
- $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ l'ensemble des nombres réels, complexes ;
- H, K désignent des espaces de Hilbert complexes ;
- $vect(E)$ le sous-espace vectoriel engendré par E ;
- $< x, y >$ désigne le produit scalaire des vecteurs x et y ;
- $||x||$ la norme du vecteur $x \in H$;
- $\mathcal{B}(H)$ algèbre des opérateurs linéaires continues de H dans H.

  Pour un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$, on notera par :

- T^* l'adjoint de T ;
- $\mathcal{R}(T)$ l'image de l'opérateur T ;
- $\mathcal{N}(T)$ le noyau de T ;
- $\sigma(T)$ le spectre de T ;
- $\sigma_p(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T ;
- $W(T)$ l'image numérique de T ;
- $r(T)$ le rayon spectral de T ;
- $w(T)$ le rayon numérique de T ;
- $tr(T)$ la trace de l'opérateur T.

1. Introduction

Ce travail s'inscrit dans le cadre de l'analyse fonctionnelle et plus précisément dans le domaine de la théorie des opérateurs sur les espaces de Hilbert. Soit un espace de Hilbert H et l'application, dite transformation λ-Aluthge, $\Delta_\lambda : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ où $\mathcal{B}(H)$ désigne l'algèbre des opérateurs bornés de H dans H. Soit l'opération $(A, B) \in \mathcal{B}(H) \times \mathcal{B}(H) \mapsto A \star B$ où $A \star B$ désigne un produit dans l'algèbre $\mathcal{B}(H)$ (par exemple, le produit usuel, le produit de Jordan,...). On dira que l'application $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$, K espace de Hilbert, commute avec Δ_λ pour le produit " $\star$ " si

$$\Delta_\lambda \left(\Phi(A) \star \Phi(B)\right) = \Phi\left(\Delta_\lambda(A \star B)\right), \quad \text{pour tout } \ A, B \in \mathcal{B}(H).$$

Le but principal de ce travail est de décrire la forme complète des applications $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ qui commutent avec Δ_λ pour certains produits (voir Chapitres 5 et 6). Pour atteindre cet objectif, nous utiliserons des techniques de la théorie des préservations.
En 1990, A. Aluthge a introduit dans [1] une transformation qui porte son nom, *la transformation d'Aluthge*, pour étendre quelques propriétés spectrales aux opérateurs p-hyponormaux (i.e. $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$, $p > 0$). Pour un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$, on considère sa décomposition polaire $T = V|T|$. La transformation d'Aluthge de T est définie par

$$\Delta(T) = |T|^{\frac{1}{2}} V |T|^{\frac{1}{2}}. \tag{0.1}$$

Dans [34], K. Okubo a introduit la transformation de Aluthge généralisée. Pour $\lambda \in [0, 1]$, on appelle la transformation λ-Aluthge, l'application $\Delta_\lambda : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ définie par

$$\Delta_\lambda(T) = |T|^{\lambda} V |T|^{1-\lambda}. \tag{0.2}$$

Dans le cas $\lambda = 1$, on a $\Delta_1(T) = |T|V$, qu'on appelle la transformation de Duggal. Pour les détails on pourra se référer à [18]. Pour $\lambda = \frac{1}{2}$ on trouve la définition de la transformation de Aluthge définie dans (0.1). Et pour $\lambda = 0$ on a tout simplement $\Delta_0(T) = V|T| = T$.
Ces dernières années, cette transformation a attiré l'attention de plusieurs mathématiciens (voir par exemple [2, 3, 9, 23–25, 38, 39, 42, 44]). Elle a l'avantage, de conserver plusieurs propriétés de l'opérateur d'origine. Notamment, le spectre de $\Delta_\lambda(T)$ coïncide avec le spectre de l'opérateur T. En fait, cette dernière affirmation est vérifiée pour une large famille des parties du spectre. Par exemple : le spectre approximatif $(\sigma_{ap}(T))$; ponctuel $(\sigma_p(T))$; essentiel $(\sigma_e(T))$ sont tous invariants par la transformation λ-Aluthge ([25]).
Un autre résultat très important, concerne le célèbre problème des sous-espaces invariants. En effet, on trouve dans [25] le résultat suivant : *un opérateur T admet un sous-espace invariant non trivial, si et seulement si $\Delta_\lambda(T)$ en admet un aussi.*
De plus, l'ensemble $Lat(T)$ des sous-espaces invariants par T est en bijection avec $Lat(\Delta(T))$.

Le contenu de cette thèse, se trouve essentiellement dans les quatre publications [10–13]. Elle comporte sept Chapitres :

Dans le Chapitre 1 (Préliminaires), on trouve des notations et des définitions ainsi que quelques résultats connus qui seront utilisés dans la suite. La notion de décomposition polaire d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ sera bien développée (paragraphe 1). Cette décomposition jouera un rôle essentiel dans ce travail. La classe des opérateurs quasi-normaux sera largement étudiée (paragraphe 2). Notamment nous donnons quelques conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un opérateur quasi-normal soit normal. Enfin nous présentons quelques résultats connus sur la classe de Schatten et les opérateurs à trace (paragraphe 3).

Le Chapitre 2 est consacré à l'étude de la transformation λ-Aluthge. Dans un premier temps, nous rappelons quelques résultats connus de cette transformation, mais utiles dans la suite (paragraphe 1). Dans un deuxième temps, nous établissons des résultats nouveaux concernant cette transformation, nécessaires pour la démonstration des théorèmes principaux de ce travail. Par exemple, dans le paragraphe 2, nous démontrons qu'un opérateur T est nilpotent d'ordre $d+1, \ \ d \geq 1)$ si et seulement si $\Delta_\lambda(T)$ est nilpotent d'ordre d. D'autre part, nous montrons que si $\lambda, \mu \in [0,1], \ \ \lambda \neq \mu$, alors T est quasi-normal si et seulement si $\Delta_\lambda(T) = \Delta_\mu(T)$ et $N(T) \subseteq N(T^*)$ où $N(T)$ désigne le noyau de T. Nous donnons également, dans ce paragraphe, des lemmes techniques utiles pour la suite. Finalement, dans le dernier paragraphe de ce chapitre, nous calculons explicitement la transformation de λ-Aluthge d'un opérateur de rang un. En outre, nous montrons que $\Delta_\lambda(TS) = \Delta_\lambda(ST)$ pour tout opérateur de la forme $S = x \otimes x, \ x \in H$ si et seulement si $T = \alpha I, \ \ \alpha \in \mathbb{C}$.

Dans le chapitre 3, on s'intéresse aux applications qui commutent avec la transformation λ-Aluthge. Dans le paragraphe 1, nous rappelons quelques résultats sur les applications qui préservent certains classes d'opérateurs. Dans le paragraphe 2, nous améliorons un résultat de B. Fernanda, L. Molnar et G. Nagy [5, Theorem 1], en remplaçant la linéarité par l'additivité (voir Théorème 3.5). Notre approche pour la preuve de ce résultat est basée sur la forme des applications additives qui préservent les opérateurs nilpotents. Nous montrons alors que si l'application bijective Φ vérifiant $\Phi(0) = 0$ et commute avec Δ_λ, alors elle préserve les nilpotents (Théorème 3.6). Une version locale de ces résultats est donnée au paragraphe 3. Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, nous donnons une description complète des applications bijectives $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ qui satisfont la condition suivante :

$$\Delta_\lambda(\Phi(S) + \omega\Phi(T)) = \Phi(\Delta_\lambda(S + \omega T)), \quad \text{pour tout } S, T \in \mathcal{B}(H),$$

où ω est un nombre complexe non-nul (voir Théorème 3.8).

Théorème 0.1. Soit $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application bijective avec H, K de dimension infinie. Alors, les assertions suivante sont équivalentes :

(1) Φ satisfait la condition précédente ;

(2) il existe un unitaire ou anti-unitaire $U \in \mathcal{B}(H, K)$ et une constante $\alpha \in \mathbb{C}^*$, tels que

$$\Phi(T) = \alpha UTU^* \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{B}(H).$$

Dans le chapitre 4, nous établissons plusieurs résultats techniques nécessaires pour la preuve des théorèmes des chapitres 5 et 6.

Chapitre 5. Dans ce chapitre le résultat principal est de donner une description complète des applications bijectives qui commutent avec Δ_λ pour le produit usuel.

Théorème 0.2. Soit $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application bijective. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) l'application Φ commute avec Δ_λ pour le produit usuel ;

(ii) il existe un opérateur unitaire ou anti-unitaire $U : H \to K$ tel que Φ est de la forme

$$\Phi(T) = UTU^* \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{B}(H).$$

Comme conséquence du théorème précédent, nous obtenons également le résultat suivant,

Théorème 0.3. Une bijection $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ satisfait

$$\Delta_\lambda(\Phi(A_1)\Phi(A_2)\dots\Phi(A_n)) = \Phi(\Delta_\lambda(A_1A_2\dots A_n)), \text{ pour tous } A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}(H),$$

si et seulement si

$$\Phi(T) = \alpha UTU^* \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{B}(H),$$

où $U : H \to K$ est unitaire ou anti-unitaire et $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine $(n-1)$-ième de l'unité.

Dans le chapitre 6, nous étudions les applications qui commutent avec Δ_λ pour le produit de Jordan. Nous rappelons que le produit de Jordan de deux opérateurs $A, B \in \mathcal{B}(H)$ est défini par :

$$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA).$$

Il est facile de voir que le produit " $\circ$ " est commutatif, mais il n'est pas associatif. De plus si A et B commutent ($AB = BA$), alors $A \circ B = AB$.

Le résultat principal de ce chapitre est donné dans le théorème suivant :

Théorème 0.4. Soit $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application bijective. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) l'application Φ commute avec Δ_λ pour le produit de Jordan ;

(ii) il existe un opérateur unitaire ou anti-unitaire $U : H \to K$ tel que Φ est de la forme

$$\Phi(T) = UTU^* \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{B}(H).$$

Comme conséquence du théorème précédent, nous obtenons également le résultat suivant,

Théorème 0.5. Une bijection $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ satisfait

$$\Delta_\lambda(\Phi(A_1) \circ \Phi(A_2) \circ \cdots \circ \Phi(A_n)) = \Phi(\Delta_\lambda(A_1 \circ A_2 \circ \cdots \circ A_n)), \text{ pour tout } A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(H),$$

si et seulement si

$$\Phi(T) = \alpha UTU^* \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{B}(H),$$

où $U : H \to K$ est unitaire ou anti-unitaire et $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine $(n-1)$-ième de l'unité.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous donnerons plusieurs expressions du rayon spectral d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$, via la transformation λ-Aluthge et ses itérées. Nous aurons également plusieurs caractérisations de classes d'opérateurs de type normaloïde. On pourra trouver la formule suivante pour le rayon spectral d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$: pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} r(T) &= \inf\{\|\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1})\|,\ X \in \mathcal{B}(H) \text{ inversible }\} \\ &= \inf\{\|\Delta_\lambda^{(n)}(e^A T e^{-A})\|,\ A \in \mathcal{B}(H) \text{ auto-adjoint }\}. \end{aligned}$$

CHAPITRE 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et résultats bien connus dans la théorie des opérateurs. Il s'agit précisément de la notion de la décomposition polaire d'un opérateur qui sera souvent utilisée dans la suite. Nous donnons aussi quelques résultats précis sur la classe des opérateurs quasi-normaux avec quelques conséquences, notamment nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un opérateur quasi-normal soit normal.

Dans la suite de cette thèse H, K désigneront des espaces de Hilbert complexes, munis d'un produit scalaire noté toujours par $< . \, , \, . >$ et la norme induite sera notée $||.||$. L'ensemble des opérateurs linéaires continus (ou bornés) de H dans K sera noté par $\mathcal{B}(H, K)$. Si $H = K$, on écrira simplement $\mathcal{B}(H)$. Pour $T \in \mathcal{B}(H)$, on notera $\mathcal{N}(T)$ et $\mathcal{R}(T)$, le noyau et l'image de T respectivement. On note également par $\mathcal{K}(H)$ l'idéal bilatéral des opérateurs compacts sur H, $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}_n$) l'ensemble des opérateurs de rang fini (resp. de rang inférieur ou égal à n) .

Pour $T \in \mathcal{B}(H)$, la norme de T est donnée par,

$$||T|| = \sup_{x\in H, ||x||=1} ||Tx||.$$

Si $F \subseteq H$ est un sous-espace vectoriel de H, alors la norme de la restriction de T sur F est notée par $||T||_F$, i.e.

$$||T||_F = \sup_{x\in F, ||x||=1} ||Tx||.$$

Pour deux vecteurs $x, y \in H$, on notera $x \otimes y$ l'opérateur de rang inférieur ou égal à 1, i.e.

$$(x \otimes y)u =< u, y > x, \quad \text{pour tout vecteur } u \in H.$$

On peut remarquer aussi que tout opérateur de rang inférieur ou égal à 1 est de cette forme. La définition suivante précise quelques classes d'opérateurs, que nous allons besoin dans la suite.

Definition 1.1. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. On dira que :

(i) T est une projection orthogonale (ou simplement projection), si $T^2 = T = T^*$.

(ii) T est positif , si $< Tx, x >\geq 0$ pour tout $x \in H$; (et on notera $T \geq 0$).

(iii) T est auto-adjoint, si $< Tx, x >\in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H$; (i.e. $T^* = T$).

(iv) T est normal, si T commute avec son adjoint T^* ; (i.e. $T^*T = TT^*$).

(v) T est quasi-normal, si T commute avec T^*T ; (i.e. $TT^*T = T^*TT$).

(vi) T est hyponormal, si $T^*T \geq TT^*$ (ou bien $\|Tx\| \geq \|T^*x\|$ pour tout $x \in H$).

(vii) T est p-hyponormal pour un réel $p \geq 0$, si $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$.
Lorsque $p = \frac{1}{2}$, T est dit semi-hyponormal.

(viii) T est normaloïde, si $r(T) = \|T\|$ ($r(T)$ désigne le rayon spectral de T).

(ix) T est spectraloïde, si $w(T) = r(T)$ ($w(T)$ désigne le rayon numérique de T).

Remarque 1.1. D'après la définition ci-dessus on a les inclusions suivantes :

$$\text{Positif} \subseteq \text{Auto-adjoint} \subseteq \text{Normal} \subseteq \text{Quasi-normal}$$

$$\subseteq \text{Hyponormal} \subseteq \text{Paranormal} \subseteq \text{Normaloïde}.$$

En dimension infinie les inclusions peuvent être strictes, pour plus de détails (voir T. Furuta [19]).

Dans la suite, nous donnerons un bref rappel sur les opérateurs anti-linéaires. On commence par la définition suivante.

Definition 1.2. Soient H, K deux espaces de Hilbert complexes. On dit qu'une application (ou opérateur) $A : H \to K$ est anti-linéaire, si l'application A est additif et $A(\alpha x) = \bar{\alpha} Ax$ pour tout $x \in H$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Comme le cas des opérateurs linéaires, on peut voir facilement qu'un opérateur anti-linéaire $A : H \to K$ est continu si et seulement si, il est borné sur la boule unité c'est-à-dire :

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < \infty.$$

De plus, si A est anti-linéaire continu, alors il existe un opérateur anti-linéaire continu noté $A^* : K \to H$ tel que

$$< y, Ax >=< x, A^*y >, \quad \text{pour tout} \;\; x \in H, \; y \in K.$$

Dans le cas où $A^* = A^{-1}$, on dira que A est anti-unitaire.

Proposition 1.1. Soient $A, B : H \to K$ deux opérateurs linéaires ou anti-linéaires continus, $T \in \mathcal{B}(K)$ et $x, y \in H$. Alors on a les assertions suivantes :

(i) $(AT)^* = T^*A^*$.

(ii) Si $T \geq 0$, alors $A^*TA \geq 0$.

(iii) $A(x \otimes y)B = Ax \otimes B^*y$.

La preuve de cette proposition est élémentaire.

1. Décomposition polaire d'un opérateur

Il est bien connu que pour tout nombre complexe non nul $z \in \mathbb{C}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}|z|$ où $|z| = \sqrt{z^*z}$ avec $z^* = \bar{z}$ le complexe conjugué.
Dans le cadre des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert complexe H de dimension supérieur ou égale à 2, on a une décomposition analogue.
Avant de donner le théorème qui assure l'existence de cette décomposition, rappelons la définition d'une isométrie partielle.

Definition 1.3. Un opérateur $V \in \mathcal{B}(H)$ est dit isométrie partielle si

$$\|Vx\| = \|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{N}(V)^{\perp}.$$

Remarque 1.2. Il est bien connu que les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) V isométrie partielle ;
(2) $VV^*V = V$;
(3) VV^* projection orthogonale ;
(4) V^*V projection orthogonale.

Étant donné un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$, alors T^*T est positif. Par le calcul fonctionnel continu, le module $|T|$ de T est défini comme la racine carrée positive de T^*T ; c'est à dire $|T| = \sqrt{T^*T}$.
Le théorème suivant donne, l'existence d'une telle décomposition.

Théorème 1.1. (*Théorème de décomposition polaire*)
Pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$, il existe une unique isométrie partielle $V \in \mathcal{B}(H)$, telle que

$$T = V|T| \quad \text{et} \quad \mathcal{N}(V) = \mathcal{N}(T).$$

D'où la définition suivante.

Definition 1.4. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. L'écriture $T = V|T|$ où V est l'isométrie partielle telle que $\mathcal{N}(V) = \mathcal{N}(T)$ est appelée la décomposition polaire de T.

Nous invitons le lecteur à consulter [14, 15, 21] pour plus de détails sur la décomposition polaire.

Remarque 1.3. La condition $\mathcal{N}(V) = \mathcal{N}(T)$ assure l'unicité de la décomposition polaire pour l'opérateur T.
En général, il existe d'autres décompositions de T de la forme $T = V|T|$ avec V une isométrie partielle. Par exemple on peut choisir V comme une isométrie ou une co-isométrie (c'est-à-dire, V^* isométrie), dans ce cas l'écriture $T = V|T|$ est appelée la décomposition polaire maximale de T.

La proposition suivante précise un tel choix de l'isométrie partielle dans la décomposition polaire maximale.

Proposition 1.2. [14] Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Alors on a les assertions suivantes :

(i) Si $dim(\mathcal{N}(T)) = dim(\mathcal{N}(T^*))$, alors T peut s'écrire sous la forme $T = V|T|$ avec V unitaire.

(ii) Si $dim(\mathcal{N}(T)) \leq dim(\mathcal{N}(T^*))$, alors T peut s'écrire sous la forme $T = V|T|$ avec V isométrie.

(iii) Si $dim(\mathcal{N}(T)) \geq dim(\mathcal{N}(T^*))$, alors T peut s'écrire sous la forme $T = V|T|$ avec V co-isométrie.

Le corollaire suivant découle directement du résultat précédent :

Corollaire 1.1.

(i) En dimension finie tout opérateur peut s'écrire comme $T = U|T|$ avec U unitaire.

(ii) Si T et T^* sont injectifs, alors l'isométrie partielle V dans la décomposition de $T = V|T|$ est unitaire.

Remarque 1.4. Il est facile de vérifier que si $T = V|T|$ est la décomposition polaire de T, alors $\mathcal{N}(V^*) = \mathcal{N}(T^*)$, de plus la décomposition polaire de T^* est donnée par
$T^* = V^*(V|T|V^*) = V^*|T^*|$.

2. Opérateurs quasi-normaux

Les opérateurs quasi-normaux ont été introduits par A.Brown [8] en 1953, et ensuite étudiés par plusieurs auteurs, par exemple on peut citer [8, 17, 43]. Ils se situent entre la classe des opérateurs normaux et celle des sous-normaux (un opérateur T est sous-normal, s'il admet une extension normale ; pour les détails voir [16]).

Dans cette partie, nous présenterons quelques résultats fondamentaux sur les opérateurs quasi-normaux, nous donnerons aussi des critères pour qu'un opérateur quasi-normal soit normal.
On commence par la proposition suivante qui donne quelques conditions pour qu'un opérateur soit quasi-normal. Comme pour la classe des opérateurs normaux, la classe des opérateurs quasi-normaux est stable par puissances.

Proposition 1.3. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ et $T = V|T|$ sa décomposition polaire. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) T est quasi-normal.
(ii) T commute avec son module ; $(T|T| = |T|T)$.
(iii) V commute avec $|T|$; $(V|T| = |T|V)$.
(iv) T^n est quasi-normal pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ découle directement de la définition. $(iv) \Rightarrow (i)$ est trivial. Pour $(ii) \Rightarrow (iii)$ il suffit de remarquer que, si $T|T| = |T|T$ alors $T = |T|V$ sur l'image de $|T|$ et avec l'égalité sur les noyaux $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(|T|) = \mathcal{N}(V)$ on obtient $T = |T|V = 0$ sur $\mathcal{N}(|T|)$ ce qui implique l'égalité $T = V|T| = |T|V$ sur H.
Finalement, il reste à démontrer que $(iii) \Rightarrow (iv)$. Si $n = 0$ le résultat est vrai, donc on suppose que $n \geq 1$, et $V|T| = |T|V$. Par passage à l'adjoint on obtient que

$$T^* = V^*|T| = |T|V^*.$$

En particulier, $\mathcal{N}(|T|) = \mathcal{N}(V) \subseteq \mathcal{N}(V^*)$ ainsi $\overline{\mathcal{R}(V)} \subseteq \overline{\mathcal{R}(V^*)}$, d'où

$$V^*VV = V.$$

D'autre part,

$$T^n = (V|T|)^n = V^n|T|^n \quad \text{et} \quad (T^n)^* = (V^*)^n|T|^n.$$

Donc

$$T^n(T^n)^*T^n = V^n(V^*)^nV^n|T|^{3n} = V^n|T|^{3n}.$$

et

$$(T^n)^*T^nT^n = (V^*)^nV^nV^n|T|^{3n} = V^n|T|^{3n}.$$

Ce qui implique que $T^n(T^n)^*T^n = (T^n)^*T^nT^n$, et donc T^n est quasi-normal. □

Remarque 1.5. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur quasi-normal. D'après la définition, $T^*TT = TT^*T$ et donc l'égalité $T^*T = TT^*$ sur $\mathcal{R}(T)$. En particulier, si T^* est injective, alors on a l'équivalence suivante :

$$T \quad \text{est quasi-normal} \iff T \quad \text{est normal}.$$

Pour les opérateurs de rang fini, on a le résultat suivant.

Lemme 1.1. Tout opérateur quasi-normal de rang fini est un opérateur normal. En particulier dans le cas où H est de dimension finie, les opérateurs quasi-normaux sont normaux.

Démonstration. En général, si T est quasi-normal, alors $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(T^*)$ et donc $\overline{\mathcal{R}(T)} \subseteq \overline{\mathcal{R}(T^*)}$. En particulier, si T est de rang fini, alors $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(T^*)$ et $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*)$. Comme T est quasi-normal, alors $T^*T = TT^*$ sur $\mathcal{R}(T)$, de plus $T^*T = TT^* = 0$ sur $\mathcal{N}(T^*)$. Ainsi $T^*T = TT^*$ sur tout H et donc T est normal. □

En dimension infinie le résultat précédent n'est plus valable, c'est-à-dire, il existe des opérateurs quasi-normaux qui ne sont pas normaux. De plus, T quasi-normal n'implique pas T^* ou $T + \alpha I$, $\alpha \neq 0$, quasi-normal. On a l'exemple suivant pour clarifier la situation.

Exemple 1.1. Soit H un espace de Hilbert séparable muni d'une base orthonormée $(e_n)_n$. Le shift à droite $S : H \to H$ est défini sur la base $(e_n)_n$ par

$$S e_n = e_{n+1} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Il est facile de vérifier que

$$S^*S = I \quad \text{et} \quad SS^* = I - P_{e_1},$$

où $P_{e_1} = e_1 \otimes e_1$ est la projection orthogonale suivant le vecteur (e_1). D'où

(i) $SS^*S = S^*SS = S$, en particulier S est quasi-normal. Mais S n'est pas normal.

(ii) De plus, on peut aussi remarquer que S^* et $S + I$ ne sont pas quasi-normaux.

D'autre part, si A, B sont deux opérateurs quasi-normaux doublement commutant ($AB = BA$ et $A^*B = BA^*$), alors l'opérateur $(A + B)$ n'est pas toujours quasi-normal. Par contre ceci aurait été vrai dans le cas des opérateurs normaux.
Le théorème suivant donne une caractérisation des opérateurs normaux à l'aide des opérateurs quasi-normaux. Par exemple on trouve que si T et T^* sont quasi-normaux, alors T est normal. Une partie de ce théorème a été aussi démontrée dans [5].

Théorème 1.2. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) T est normal ;

(2) T et $\alpha T + \beta I$ sont quasi-normaux pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

(3) T et $\alpha T^* + \beta I$ sont quasi-normaux pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$;

Démonstration. Les implications (1) ⇒ (2) et (1) ⇒ (3) sont évidentes. On commence par montrer (2) ⇒ (1), puis (3) ⇒ (1).

On suppose que T est quasi-normal. D'après la définition on a :

$$TT^*T = T^*T^2 \quad \text{équivalent à} \quad T^*TT^* = (T^*)^2T. \tag{1.1}$$

En multipliant la première égalité de (1.1), à gauche et à droite par T^*, on obtient

$$(T^*)^2T^2 = (T^*T)^2 \quad \text{et} \quad T^*T^2T^* = (TT^*)^2. \tag{1.2}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) : comme $\alpha T + \beta I$ est aussi quasi-normal, alors il commute avec $(\alpha T + \beta I)^*(\alpha T + \beta I)$. De plus $\alpha \neq 0$, donc T commute avec $(\alpha T + \beta I)^*(\alpha T + \beta I)$. Ainsi

$$T(\alpha T + \beta I)^*(\alpha T + \beta I) = [(\alpha T + \beta I)^*(\alpha T + \beta I)]T.$$

Après simplification, on obtient

$$\alpha\overline{\alpha}[TT^*T - T^*T^2] = \overline{\alpha}\beta[T^*T - TT^*].$$

D'après l'équation (1.1), $TT^*T - T^*T^2 = 0$. Comme $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, alors $T^*T - TT^* = 0$. Donc T est normal.

(3) $\Rightarrow$ (1). En utilisant le fait que $\alpha T^* + \beta I$ est quasi-normal et $\alpha \neq 0$, on a :

$$T^*[T + \overline{\beta}I][T^* + \beta I] = [T + \overline{\beta}I][T^* + \beta I]T^*.$$

Par simplification et on trouve que

$$T^*TT^* - T(T^*)^2 = \beta[TT^* - T^*T].$$

Ainsi, par l'équation (1.1), on déduit que

$$(T^*)^2T - T(T^*)^2 = \beta[TT^* - T^*T]. \tag{1.3}$$

Si $\beta = 0$, alors $(T^*)^2T = T(T^*)^2$. Par conséquent

$$(T^*)^2T^2 = T^2(T^*)^2 \quad \text{et} \quad T(T^*)^2T = T^2(T^*)^2.$$

En utilisant l'équation (1.2), alors

$$(T^*T)^2 = (T^*)^2T^2 = T^2(T^*)^2 = T(T^*)^2T = (TT^*)^2.$$

Ce qui donne $(T^*T)^2 = (TT^*)^2$. En prenant la racine, on obtient que $T^*T = TT^*$ et donc T est normal.

On suppose maintenant $\beta \neq 0$. En multipliant l'équation (1.3), à droite par T, alors on a :

$$(T^*)^2T^2 - T(T^*)^2T = \beta[TT^*T - T^*T^2] = 0.$$

Ainsi $(T^*)^2T^2 = T(T^*)^2T$ et d'après l'équation (1.2) on déduit que

$$(TT^*)^2 = T(T^*)^2T = (T^*)^2T^2 = (T^*T)^2.$$

Ce qui montre que $(T^*T)^2 = (TT^*)^2$, donc en appliquant la racine carrée on a $T^*T = TT^*$. D'où T est normal. □

Remarque 1.6. Le résultat du Théorème 2.4 reste vrai, si on remplace $\mathcal{B}(H)$ par n'importe quelle C^*-algèbre unitaire.

3. Projection orthogonale

Dans cette partie, nous donnons quelques rappels sur les projections orthogonales.
Il est bien connu qu'un idempotent ($P^2 = P$) n'est pas toujours une projection orthogonale. En effet, soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors on a $P^2 = P$, mais $P \neq P^*$. Le résultat suivant donne quelques critères pour qu'un idempotent soit une projection orthogonale.

Lemme 1.2. Soit $P \in \mathcal{B}(H)$ un idempotent. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) P est une projection orthogonale ;

(ii) $\|P\| \leq 1$;

(iii) P est normal ;

(iv) P est quasi-normal ;

(v) P est normaloïde.

Pour deux opérateurs auto-adjoints $A, B \in \mathcal{B}(H)$, on écrit $B \geq A$ ou $A \leq B$, si $B - A \geq 0$. Dans le cas des projections orthogonales, cette relation peut s'écrire comme ci-dessous.

Proposition 1.4. Soit P et Q deux projections orthogonales. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $P \leq Q$.

(ii) $\mathcal{R}(P) \subseteq \mathcal{R}(Q)$.

(iii) $QP = P$.

(iv) $Q \circ P = P$, où $P \circ Q$ est le produit de Jordan de P et Q.

La preuve de la proposition est élémentaire.

Remarque 1.7. On peut facilement voir que " $\leq$ " définie une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des projections orthogonales. Les projections minimales pour cette relation, sont de rang 1. D'autre part, si $x, y \in H$, alors l'opérateur $x \otimes y$ est projection orthogonale, si et seulement si $x = y$ et $\|x\| = \|y\| = 1$.

4. Classes de Schatten et opérateurs à trace

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques résultats sur les classes de Schatten et les opérateurs à trace.
Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur compact. On désigne par $(s_k(T))_{k\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs singulières (les valeurs propres de l'opérateur $|T|$) non nulles ordonnées par ordre décroissant.
Pour un nombre réel strictement positif $p > 0$, on définit la p-classe de Schatten $\mathcal{S}_p(H)$ comme suit :

$$\mathcal{S}_p(H) = \Big\{T \in \mathcal{K}(H) \ : \ \|T\|_p = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} s_k(T)^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty\Big\}.$$

Si $1 \leq p < \infty$, alors $\|.\|_p$ définit bien une norme sur $\mathcal{S}_p(H)$ et que le couple $(\mathcal{S}_p(H), \|.\|_p)$ est un espace de Banach, pour les détails on renvoie à [41].
On peut facilement voir que si $p \leq q$, alors

$$\mathcal{S}_p(H) \subseteq \mathcal{S}_q(H).$$

D'autre part, $\mathcal{S}_p(H)$ contient tous les opérateurs de rang fini. De plus les opérateurs de rang fini sont denses dans $\mathcal{S}_p(H)$ pour la norme $\|.\|_p$, si $p \geq 1$.
Si $p = 2$, $\mathcal{S}_2(H)$ est appelé la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt.
Si $p = 1$, $\mathcal{S}_1(H)$ est l'ensemble des opérateurs à trace .
Le théorème suivant est bien connu dans la théorie des opérateurs.

Théorème 1.3. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur à trace. Alors, pour toute base orthonormée $(e_i)_{i\in I}$ de H, la famille $(< Te_i, e_i >)_{i\in I}$ est sommable ; c'est-à-dire

$$\sum_{i\in I} | < Te_i, e_i > | = \sup_{J\subseteq I,\ \text{J fini}} \sum_{j\in J} | < Te_j, e_j > | < \infty.$$

De plus, la quantité $\sum_{i\in I} < Te_i, e_i >$ ne dépend pas de la base orthonormée $(e_i)_{i\in I}$.

Comme conséquence, on a la définition suivante :

Definition 1.5. Soit $T \in \mathcal{S}_1(H)$, la trace de l'opérateur T est définie par

$$tr(T) = \sum_{i\in I} < Te_i, e_i > .$$

De plus, l'application $tr : \mathcal{S}_1(H) \to \mathbb{C}$. est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}_1(H)$.

En dimension finie, la trace d'une matrice carrée A est la somme de ses valeurs propres, donc on a la formule suivante :

$$tr(A) = \sum_{\lambda_j\in\sigma(A)} \lambda_j.$$

Le théorème suivant a été démontré par V. B. Lidskii dans [27] en 1959, il donne une généralisation de la formule précédente en dimension infinie pour les opérateurs à trace.

Théorème 1.4. [27] Soient H un espace de Hilbert séparable et $A \in \mathcal{S}_1(H)$. Alors on a l'égalité suivante :

$$tr(A) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda.$$

CHAPITRE 2

Transformation λ-Aluthge

Dans ce chapitre, dans un premier temps, nous rappelons quelques résultats sur la transformation λ-Aluthge, bien utiles dans la suite (paragraphe 1). Dans un deuxième temps, nous établissons des résultats nouveaux concernant cette transformation, nécessaires pour la démonstration des théorèmes principaux de ce travail

1. Premières propriétés de la transformation λ-Aluthge

Dans cette partie, nous effectuerons un bref rappel sur les propriétés fondamentales de la transformation de Aluthge.
Pour $\lambda \in [0, 1]$, on appelle la transformation λ-Aluthge, l'application $\Delta_\lambda : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ définie par

$$\Delta_\lambda(T) = |T|^\lambda V|T|^{1-\lambda}. \tag{2.1}$$

Dans le cas $\lambda = 1$, on a $\Delta_1(T) = |T|V$, qu'on appelle la transformation de Duggal. Pour les détails on pourra se référer à [18]. Pour $\lambda = \frac{1}{2}$ on trouve la définition de la transformation de Aluthge définie dans (0.1). Et pour $\lambda = 0$ on a tout simplement $\Delta_0(T) = V|T| = T$.

Remarque 2.1. (1) Pour $\lambda \in [0, 1[$, la transformation λ-Aluthge ne dépend pas de la décomposition polaire choisie.
En effet, soit $T \in \mathcal{B}(H)$ et $T = V_1|T| = V_2|T|$ deux décompositions polaires de T. Donc, on a l'égalité $V_1|T|^{1-\lambda} = V_2|T|^{1-\lambda}$ sur $\mathcal{R}(|T|^\lambda)$. Comme $\lambda \neq 1$, alors on trouve que $V_1|T|^{1-\lambda} = V_2|T|^{1-\lambda} = 0$ sur $\mathcal{N}(|T|^\lambda)$. Par conséquent l'égalité $V_1|T|^{1-\lambda} = V_2|T|^{1-\lambda}$ est vraie sur

tout H. Ainsi en multipliant à gauche par $|T|^\lambda$, et donc on obtient

$$|T|^\lambda V_1|T|^{1-\lambda} = |T|^\lambda V_2|T|^{1-\lambda}.$$

(2) Par contre si $\lambda = 1$, la transformation de Duggal $\Delta_1(T)$ dépend de la décomposition polaire de l'opérateur T.

En effet, considérons l'opérateur $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$. Alors par un calcule simple on trouve que

$$|T| = \sqrt{T^*T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, posons $V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il est clair que V_1, V_2 sont des isométries partielles et $T = V_1|T| = V_2|T|$.

Par un simple calcul, on a

$$\Delta_1(T) = |T|V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |T|V_1$$

Exemple 2.1. (1) Soient $H = \ell^2(\mathbb{N})$ l'espace de Hilbert des suites de carré sommable et $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels strictement positifs. Le shift à poids, noté $S_\alpha = \text{shift}(\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ associé à la suite α est défini par

$$S_\alpha(x_0, x_1, ...) = (0, \alpha_0 x_0, \alpha_1 x_1, ...), \quad \text{pour tout} \quad x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

Dans le cas $\alpha_i = 1, \forall \in \mathbb{N}$, $S_\alpha = S$ est tout simplement le shift standard sur $\ell^2(\mathbb{N})$.

La transformation λ-Aluthge du shift S_α est aussi un shift à poids, il est donné par :

$$\Delta_\lambda(S_\alpha) = \text{shift}(\alpha_0^{1-\lambda}\alpha_1^\lambda, \alpha_1^{1-\lambda}\alpha_2^\lambda, \dots).$$

(2) Soient (Ω, τ, ν) un espace mesuré σ-fini et $\phi : \Omega \to \Omega$ une application mesurable. On suppose que la mesure $\nu \circ \phi^{-1}$ est absolument continue par rapport à ν, et que sa dérivée de Radon-Nikodym $\frac{d(\nu\circ\phi^{-1})}{d\nu} = h$ est essentiellement bornée, i.e. $h \in L^\infty(\Omega, \tau, \nu)$. Soit $C_\phi : L^2(\Omega, \tau, \nu) \to L^2(\Omega, \tau, \nu)$ l'opérateur de composition sur $L^2(\Omega, \tau, \nu)$ associé au symbole ϕ, i.e.

$$C_\phi f = f \circ \phi, \quad \text{pour tout} \quad f \in L^2(\Omega, \tau, \nu).$$

La transformation λ-Aluthge de l'opérateur de composition C_ϕ est donnée par :

$$\Delta_\lambda(C_\phi)f = \Big(\frac{h}{h\circ\phi}\Big)^{\frac{\lambda}{2}} f \circ \phi, \quad \text{pour tout} \quad f \in L^2(\Omega, \tau, \nu).$$

Nous rappelons que, si $T \in \mathcal{B}(H)$ est un opérateur p-hyponormal, alors T est q-hyponormal pour tout réel positif $q \leq p$. Le premier objectif de la transformation de Aluthge est d'augmenter l'indice d'hyponormalité pour les opérateurs p-hyponormaux en gardant quelques informations sur l'opérateur origine. Le résultat suivant est dû à A. Aluthge.

Théorème 2.1. [1] Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur p-hyponormal avec $p > 0$. Alors on a les assertions suivantes :

(i) si $\frac{1}{2} \leq p < 1$, alors $\Delta(T)$ est hyponormal.
(ii) si $0 < p < \frac{1}{2}$, alors $\Delta(T)$ est $(p + \frac{1}{2})$-hyponormal.

D'autre part, la transformation λ-Aluthge préserve une large famille de spectres de l'opérateur origine. On a le théorème suivant.

Théorème 2.2. [25] Si $T \in \mathcal{B}(H)$, alors on a les égalités suivantes :

$$\sigma(T) = \sigma(\Delta_\lambda(T)), \sigma_p(T) = \sigma_p(\Delta_\lambda(T)), \text{ et } \sigma_{ap}(T) = \sigma_{ap}(\Delta_\lambda(T)).$$

C. Foias ; I. B. Jung ; E. Ko ; C. Pearcy, ont obtenu dans [18], le résultat important suivant.

Théorème 2.3. [18] Si $T \in \mathcal{B}(H)$ et f une fonction holomorphe au voisinage de $\sigma(T)$, alors

$$\|f(\Delta_\lambda(T))\| \leq \|f(T)\|.$$

En particulier,

$$\|\Delta_\lambda(T)\| \leq \|T\|.$$

Concernant, le problème des sous-espaces invariants, dans [25], I. Jung, E. Ko et C. Pearcy ont démontré qu'un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ possède un sous-espace invariant, si et seulement si, sa transformation λ-Aluthge, $\Delta_\lambda(T)$, admet aussi un sous-espace invariant. Rappelons que par définition, $Lat(T)$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés de H, qui sont invariants par T, i.e. $Lat(T) = \left\{ \mathcal{M} \text{ sous-espace fermé de } H, \text{ tel que } T\mathcal{M} \subset \mathcal{M} \right\}$. À partir de cette définition, on a le théorème suivant.

Théorème 2.4. [25] Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur injectif à image dense et $T = V|T|$ sa décomposition polaire. Alors les applications suivantes

$$\Psi : \mathcal{N} \in Lat(T) \longrightarrow \overline{|T|^{1-\lambda}\mathcal{N}} \in Lat(\Delta_\lambda(T)),$$

et

$$\Upsilon : \mathcal{N} \in Lat(\Delta_\lambda(T)) \longrightarrow \overline{V|T|^{\lambda}\mathcal{N}} \in Lat(\Delta_\lambda(T)),$$

sont bien définies.

2. Opérateur nilpotent et opérateur quasi-normal

Dans cette partie, nous étudions quelques interactions entre la transformation de Aluthge et les opérateurs algébriques ou nilpotents. Tout d'abord on commence par la définition suivante.

Definition 2.1. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est algébrique, s'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(T) = 0$.
En particulier T est nilpotent, s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^k = 0$.

Puisque

$$\Delta_\lambda(T)|T|^\lambda = |T|^\lambda T,$$

il est facile de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(\Delta_\lambda(T))^n|T|^\lambda = |T|^\lambda T^n.$$

Et, par suite, on obtient pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$P(\Delta_\lambda(T))|T|^\lambda = |T|^\lambda P(T).$$

De même, si $T = V|T|$ alors l'égalité évidente, $V|T|^{1-\lambda}\Delta_\lambda(T) = TV|T|^{1-\lambda}$ implique que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$V|T|^{1-\lambda}P(\Delta_\lambda(T)) = P(T)V|T|^{1-\lambda}.$$

Comme conséquence directe on a le résultat suivant.

Corollaire 2.1. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors, T est algébrique si et seulement si, $\Delta_\lambda(T)$ l'est aussi.

Démonstration. Pour un polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[X]$, soit $\tilde{P}$ le polynôme défini par $\tilde{P}(X) = XP(X)$.
Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur algébrique. Montrons que si $P(T) = 0$, alors $\tilde{P}(\Delta_\lambda(T)) = 0$. En effet, d'après l'égalité précédente, on obtient

$$P(\Delta_\lambda(T))|T|^\lambda = |T|^\lambda P(T) = 0.$$

D'où

$$\tilde{P}(\Delta_\lambda(T)) = P(\Delta_\lambda(T))\Delta_\lambda(T) = P(\Delta_\lambda(T))|T|^\lambda V|T|^{1-\lambda} = 0.$$

Par conséquent $\Delta_\lambda(T)$ est algébrique.
Réciproquement, si $P(\Delta_\lambda(T)) = 0$ pour un polynôme non nul P, alors $P(T)V|T|^{1-\lambda} = V|T|^{1-\lambda}P(\Delta_\lambda(T)) = 0$. On en déduit que $\tilde{P}(T) = 0$ et donc T est algébrique. □

Dans le cas des opérateurs nilpotents, on obtient un résultat plus précis comme le montre le théorème suivant, qui sera très utile dans la suite.
D'abord, notons $\Delta_\lambda^{(0)}(T) := T$ et $\Delta_\lambda^{(n+1)}(T) := \Delta_\lambda(\Delta_\lambda^{(n)}(T))$ pour tout entier naturel n, (la n-ème itérée de Δ_λ).

Théorème 2.5. Soient $T \in \mathcal{B}(H)$, $\lambda \in]0,1]$ et $d \geq 1$ un entier naturel. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $T^{d+1} = 0$;

(2) $\big(\Delta_\lambda(T)\big)^d = 0$;

(3) $\big(\Delta_\lambda^{(k)}(T)\big)^{d-k+1} = 0$, pour $k \in \{0, 1, \dots, d\}$;

(4) $\Delta_\lambda^{(d)}(T) = 0$.

(5) $\big(\Delta_\lambda^{(d-k+1)}(T)\big)^k = 0$, pour $k \in \{1, 2, \dots, d+1\}$

Démonstration. Démontrons d'abord l'équivalence (1) $\iff$ (2). Ensuite, les implications (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1) se déduisent de l'équivalence (1) $\iff$ (2).
Soit $T = V|T|$ la décomposition polaire de l'opérateur T. On remarque que

$$\Delta_\lambda(T)^d = \Big(|T|^\lambda V|T|^{1-\lambda}\Big)^d = |T|^\lambda T^{d-1} V|T|^{1-\lambda}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\Delta_\lambda(T)^d = 0 &\implies |T|^\lambda T^{d-1} V|T|^{1-\lambda} = 0\\ &\implies V|T|^{1-\lambda}\Big(|T|^\lambda T^{d-1} V|T|^{1-\lambda}\Big)|T|^\lambda = 0\\ &\implies T^{d+1} = 0\end{aligned}$$

Inversement, on a

$$T^{d+1} = (V|T|)^{d+1} = V|T|^{1-\lambda}\Delta_\lambda(T)^d|T|^\lambda.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}T^{d+1} = 0 &\implies V|T|^{1-\lambda}\Delta_\lambda(T)^d|T|^\lambda = 0\\ &\implies V^*V|T|^{1-\lambda}\Delta_\lambda(T)^d|T|^\lambda = 0\\ &\implies |T|^{1-\lambda}\Delta_\lambda(T)^d|T|^\lambda = 0\\ &\implies |T|\Delta_\lambda(T)^d|T| = 0\\ &\implies <\Delta_\lambda(T)^d|T|x, |T|x>= 0 \text{ pour tout } x \in H\end{aligned}$$

Sachant que $\mathcal{N}(|T|) \subseteq \mathcal{N}(\Delta_\lambda(T))$, alors l'égalité $<\Delta_\lambda(T)^d x, x>= 0$ reste vraie pour tout $x \in H$. Ce qui donne $\Delta_\lambda(T)^d = 0$.
(2) $\Rightarrow$ (3) par récurrence sur k en utilisant l'équivalence : (1) $\iff$ (2).

(3) $\Rightarrow$ (4) on prend $k = d$.
(4) $\Rightarrow$ (5) par récurrence sur k en utilisant encore l'équivalence : (1) $\iff$ (2).
(5) $\Rightarrow$ (1) on prend $k = d + 1$. □

Les auteurs dans [25], ont démontré que les opérateurs quasi-normaux sont exactement les points fixes de la transformation λ-Aluthge. On a le lemme suivant qui sera souvent utilisé dans la suite.

Lemme 2.1. [25] Soient $T \in \mathcal{B}(H)$ et $\lambda \in]0, 1]$, alors on a l'équivalence suivante :

$$T \in \text{ est quasi-normal} \iff \Delta_\lambda(T) = T.$$

La proposition suivante donne encore une caractérisation des opérateurs quasi-normaux via les transformations de Aluthge.

Proposition 2.1. Soient $T \in \mathcal{B}(H)$ et $\lambda, \mu \in [0, 1]$ tels que $\lambda \neq \mu$. Supposons que $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T^*)$, alors on a :

$$\Delta_\lambda(T) = \Delta_\mu(T) \iff T \text{ est quasi-normal.}$$

Démonstration. Si T est quasi-normal, alors d'après le Lemme 2.1 précédent on a

$$\Delta_\lambda(T) = \Delta_\mu(T) = T.$$

Inversement, soit $T = V|T|$ la décomposition polaire de T. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mu > \lambda$. Donc on a les implications suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda(T) = \Delta_\mu(T) \quad &\iff \quad |T|^\lambda V|T|^{1-\lambda} = |T|^\mu V|T|^{1-\mu} \\ &\implies \quad (|T|^\lambda V|T|^{\mu-\lambda})|T|^{1-\mu} = |T|^\mu V|T|^{1-\mu}. \end{aligned}$$

Par conséquent, les opérateurs $|T|^\lambda V|T|^{\mu-\lambda}$ et $|T|^\mu U$ sont égaux sur $\mathcal{R}(|T|^{1-\mu})$ et comme ils sont nuls sur $\mathcal{N}(|T|^{1-\mu})$, on a l'égalité

$$|T|^\lambda V|T|^{\mu-\lambda} = |T|^\mu V, \text{ sur } H.$$

En particulier, par passage à l'adjoint on trouve que

$$|T|^{\mu-\lambda}V^*|T|^\lambda = V^*|T|^\mu.$$

De la même façon, on a $|T|^{\mu-\lambda}V^* = V^*|T|^{\mu-\lambda}$ sur l'image $\mathcal{R}(|T|^\lambda)$ de $|T|^\lambda$. D'autre part, d'après l'hypothèse $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T^*) = \mathcal{N}(U^*)$ on obtient $|T|^{\mu-\lambda}V^* = V^*|T|^{\mu-\lambda} = 0$ sur $\mathcal{N}(|T|^\lambda)$. Ainsi, on en déduit que

$$|T|^{\mu-\lambda}V^* = V^*|T|^{\mu-\lambda}, \quad \text{sur } H.$$

Ce qui entraîne, en particulier, que les opérateurs V^* et $|T|^{\mu-\lambda}$ commutent. Donc par le calcul fonctionnel continu V commute également avec $|T|$, ainsi l'opérateur T est quasi-normal. □

Remarque 2.2. Sans la condition $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T^*)$ la proposition précédente n'est plus vraie. Par exemple, si T est nilpotent d'ordre deux ; $T \neq 0$ et $T^2 = 0$, alors $\Delta_\lambda(T) = \Delta_\mu(T) = 0$ pour tous $\lambda, \mu \in]0, 1]$.

Le lemme suivant va jouer un rôle important dans la suite. Il nous permet d'identifier les opérateurs $T \in \mathcal{B}(H)$ tels que $\Delta_\lambda(T) = \alpha T, \quad \alpha \in \mathbb{C}$.

Lemme 2.2. Soient $T \in \mathcal{B}(H)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On suppose que $\Delta_\lambda(T) = \alpha T$, on a les cas suivants :

(i) Si $\alpha = 1$, alors T est quasi-normal $(TT^*T = T^*TT)$;

(ii) Si $\alpha = 0$, alors T est un nilpotent d'ordre 2, ($T^2 = 0$) ;

(iii) Si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, alors $T = 0$.

Démonstration. Si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, alors (i) et (ii) découlent du Théorème 2.5 et du Lemme 2.1 respectivement. Dans la suite on suppose que $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.
Soit $T = V|T|$ la décomposition polaire de T, on suppose que $\Delta_\lambda(T) = \alpha T$. D'après la définition de Δ_λ, on a

$$|T|^\lambda V|T|^{1-\lambda} = \alpha V|T| = \alpha V|T|^\lambda |T|^{1-\lambda}.$$

D'où l'égalité $|T|^\lambda V = \alpha V|T|^\lambda$ sur l'image $\mathcal{R}(|T|^{1-\lambda})$ de $|T|^{1-\lambda}$ et comme on a aussi que $|T|^\lambda V = \alpha V|T|^\lambda = 0$ sur $\mathcal{N}(|T|^{1-\lambda}) = \mathcal{N}(T)$, alors

$$|T|^\lambda V = \alpha V|T|^\lambda \quad \text{sur} \quad H.$$

Par conséquent on a les équations suivantes :

$$V^*|T|^\lambda V = \alpha |T|^\lambda. \tag{2.2}$$

et

$$|T|^\lambda VV^* = \alpha V|T|^\lambda V^*. \tag{2.3}$$

On considère les deux cas suivants :
Cas 1 : Si α n'est pas positif, alors d'après l'équation (2.2), et le fait que $V^*|T|^\lambda V \geq 0$, on trouve que

$$V^*|T|^\lambda V = |T|^\lambda = 0 \quad \text{et donc} \quad T = 0.$$

Cas 2 : maintenant on suppose que $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$, d'après l'équation (2.3), $|T|^\lambda VV^*$ est un opérateur positif, d'où l'égalité

$$|T|^\lambda VV^* = VV^*|T|^\lambda = VV^*|T|^\lambda VV^* = \alpha V|T|^\lambda V^*. \tag{2.4}$$

Sachant que VV^* est une projection orthogonale sur $\overline{\mathcal{R}(T)} = \overline{\mathcal{R}(V|T|^\lambda V^*)}$, alors

$$|T|^\lambda, V|T|^\lambda V^* : \overline{\mathcal{R}(T)} \longrightarrow \overline{\mathcal{R}(T)},$$

sont bien définies. Et d'après (2.4), on obtient que $|T|^\lambda = \alpha V|T|^\lambda V^*$ sur $\overline{\mathcal{R}(T)}$, ainsi

$$\left\||T|^\lambda\right\|_{\overline{\mathcal{R}(T)}} = \alpha\left\|V|T|^\lambda V^*\right\|_{\overline{\mathcal{R}(T)}} = \alpha\left\||T|^\lambda\right\|_{\overline{\mathcal{R}(T)}}.$$

Par conséquent, $|T|^\lambda = 0$ sur $\overline{\mathcal{R}(T)}$, ainsi $T = V|T| = 0$ sur $\overline{\mathcal{R}(T)}$. Finalement, on déduit que $T^2 = 0$, ensuite $0 = \Delta_\lambda(T) = \alpha T$. □

Le résultat suivant donne une caractérisation des opérateurs inversibles, tels que $\Delta_\lambda(T^2) = T$.

Lemme 2.3. Soient $T \in \mathcal{B}(H)$ et $\lambda \in]0,1[$. On suppose que T et T^* sont injectifs. Alors,

$$\Delta_\lambda(T^2) = T \quad\Longrightarrow\quad T^2 = T^*.$$

Démonstration. On considère $T^2 = U|T^2|$ la décomposition polaire de T^2. Sachant que T et T^* sont injectifs, alors T^2 et $(T^2)^*$ sont aussi injectifs et U est unitaire. D'après le définition de Δ_λ on trouve que

$$\begin{aligned}\Delta_\lambda(T^2) = T &\Longrightarrow |T^2|^\lambda U|T^2|^{1-\lambda} = T\\ &\Longrightarrow |T^2|^\lambda U|T^2|^{1-\lambda}|T^2|^\lambda = T|T^2|^\lambda\\ &\Longrightarrow |T^2|^\lambda U|T^2| = T|T^2|^\lambda\end{aligned}$$

D'où

$$|T^2|^\lambda T^2 = T|T^2|^\lambda. \tag{2.5}$$

D'autre part, on a aussi $T\Delta_\lambda(T^2) = T^2$, ce qui implique

$$T|T^2|^\lambda U|T^2|^{1-\lambda} = T^2 = U|T^2| = U|T^2|^\lambda|T^2|^{1-\lambda}.$$

Sachant T^2 est injectif, alors

$$T|T^2|^\lambda U = U|T^2|^\lambda.$$

Donc, d'après (2.5) on a

$$|T^2|^\lambda T^2 U = U|T^2|^\lambda, \quad \text{d'où} \quad |T^2|^\lambda T^2 = U|T^2|^\lambda U^* \geq 0.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}|T^2|^\lambda T^2 = T^{*2}|T^2|^\lambda &= |T^2|U^*|T^2|^\lambda\\ &= |T^2|^\lambda|T^2|^{1-\lambda}U^*|T^2|^\lambda\\ &= |T^2|^\lambda\Delta_\lambda(T^2)^*\\ &= |T^2|^\lambda T^*.\end{aligned}$$

D'où $|T^2|^\lambda\left(T^2 - T^*\right) = 0$. Puisque T^2 injectif, on a $T^2 = T^*$. □

Le résultat suivant caractérise les opérateurs auto-adjoints, en terme de la transformation λ-Aluthge.

Lemme 2.4. Soient $T \in \mathcal{B}(H)$ et $\lambda \in]0,1[$. On suppose que T et T^* sont injectifs. Alors on a l'implication suivante :

$$\Delta_\lambda(T) = T^* \implies T = T^*.$$

Démonstration. Soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T. Puisque T et T^* sont injectifs, U est unitaire. Par définition de Δ_λ et la condition $\Delta_\lambda(T) = T^*$ on trouve que

$$\Delta_\lambda(T)\Delta_\lambda(T)^* = T^*T = |T|^2 = |T|^\lambda U|T|^{1-\lambda}|T|^{1-\lambda}U^*|T|^\lambda.$$

Après simplifications (sachant que T est supposé injectif), on a l'égalité

$$U|T|^{2(1-\lambda)} = |T|^{2(1-\lambda)}U.$$

Par le calcul fonctionnel continu, $|T|$ et U commutent et donc T est quasi-normal. Finalement, d'après l'hypothèse et Lemme 2.1 $T = \Delta_\lambda(T) = T^*$, ce qui prouve le résultat demandé. □

En remplaçant la condition "T et T^* injectifs" du Lemme 2.4, précédent, par le fait que T soit quasi-normal, on aura le même résultat.

Lemme 2.5. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ et $\lambda \in]0,1[$. Si T est quasi-normal, alors :

$$\Delta_\lambda(T^*) = T \implies T = T^*.$$

Démonstration. Soient $T = V|T|$ et $T^* = V^*|T^*|$ les décompositions polaires respectives de T et T^*. D'abord, il est bien connu que $|T^*|^p = V|T|^pV^*$ est valable pour tout $p > 0$. Maintenant, Puisque T est quasi-normal, on a $V|T|^p = |T|^pV$ et $V^*|T|^p = |T|^pV^*$ pour tout $p > 0$. D'où les égalités suivantes

$$\begin{aligned} T = \Delta_\lambda(T^*) &= |T^*|^\lambda V^*|T^*|^{1-\lambda} \\ &= V|T|^\lambda V^*V^*V|T|^{1-\lambda}V^* \\ &= V(V^*)^2|T|. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$V(V^*)^2|T| = V|T|. \tag{2.6}$$

En multipliant cette équation par V^*, on obtient que

$$(V^*)^2|T| = |T|.$$

D'où

$$(V^*)^2|T| = |T|V^2 = V|T|V = |T|.$$

Ainsi

$$T = V|T| = |T|V = V^*V|T|V = V^*|T| = |T|V^* = T^*.$$

Et donc $T = T^*$, ce qui prouve le lemme. □

Comme corollaire des Lemmes 2.3 et 2.4, on a le résultat suivant :

Corollaire 2.2. Soient $T \in \mathcal{B}(H)$ et $\lambda \in]0,1[$. On suppose que T et T^* sont injectifs. Alors

$$\Delta_\lambda(T^2) = T, \text{ si et seulement si, } T = I.$$

3. Transformation λ-Aluthge et opérateur de rang 1

Dans ce paragraphe, nous calculons $\Delta_\lambda(T)$ pour un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ de rang égal à 1. Nous donnerons aussi une caractérisation du centre de l'algèbre des opérateurs $\mathcal{B}(H)$ grâce aux opérateur de rang 1 et Δ_λ. Ces résultats seront très utiles dans les chapitres qui suivent.

Proposition 2.2. Soient $x, y \in H$ deux vecteurs non nuls. Alors,

$$\Delta_\lambda(x \otimes y) = \frac{< x, y >}{||y||^2}(y \otimes y) \quad \text{pour tout } \lambda \in]0,1].$$

Démonstration. On pose $T = x \otimes y$; par un calcul simple

$$T^*T = |T|^2 = ||x||^2(y \otimes y) = (\frac{||x||}{||y||}(y \otimes y))^2,$$

d'où

$$|T| = \sqrt{T^*T} = \frac{||x||}{||y||}(y \otimes y).$$

Ainsi

$$|T|^2 = ||x||||y|||T| \text{ et } |T|^\gamma = (||x||||y||)^{\gamma-1}|T| \quad \text{pour tout réel } \gamma > 0.$$

Maintenant, soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T ; par définition de la transformation λ-Aluthge on a :

$$\begin{aligned}
\Delta_\lambda(T) &= |T|^\lambda U|T|^{1-\lambda} \\
&= (||x||||y||)^{\lambda-1}(||x||||y||)^{-\lambda}|T|U|T| \\
&= \frac{1}{||x||||y||}|T|T \\
&= \frac{1}{||y||^2}(y \otimes y) \circ (x \otimes y) = \frac{< x, y >}{||y||^2}(y \otimes y).
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.6. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ et $\lambda \in]0,1[$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) $\Delta_\lambda(TS) = \Delta_\lambda(ST), \quad \forall S \in \mathcal{B}(H)$;
(2) $\Delta_\lambda(TS) = \Delta_\lambda(ST)$ pour tout opérateur $S = x \otimes x, \quad x \in H$;
(3) $T = \alpha I$, pour un $\alpha \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Les implications (1) $\Longrightarrow$ (2) et (3) $\Longrightarrow$ (1) sont évidentes. Il reste à démontrer l'implication (2) $\Longrightarrow$ (3). On pose $A = T^*$. Observe d'abord que A vérifie la propriété suivante : pour tout $z \in H$, Az est orthogonal à z ou Az et z sont linéairement dépendants. En effet, soit $z \in H$ un vecteur non nul et $S = z \otimes z$; d'après les hypothèses et la Proposition 2.2, on a :

$$\frac{< Tz, z >}{||z||^2} z \otimes z = \Delta_\lambda(Tz \otimes z) = \Delta_\lambda(z \otimes Az).$$

Si $< Tz, z >= 0$, alors Tz est orthogonal à z. On suppose que $< Tz, z > \neq 0$, en particulier $Az \neq 0$, et d'après la dernière égalité on obtient

$$\frac{< Tz, z >}{||z||^2} z \otimes z = \frac{< Tz, z >}{||Az||^2} Az \otimes Az.$$

Ainsi Az et z sont linéairement dépendants.
Maintenant, montrons que l'opérateur A est l'identité multipliée par un scalaire. D'abord, nous démontrons que A vérifie la propriété suivante : pour tout vecteur $z \in H$, Az est orthogonal à z ou bien pour tout vecteur $z \in H$, Az est colinéaire avec z. Dans le premier cas $A = 0$ et dans le deuxième cas $A = \alpha I$ pour certain $\alpha \in \mathbb{C}$.
En effet, par l'absurde : on suppose qu'il existe un vecteur $x \in H$ tel que Ax est orthogonal à x mais Ax n'est pas colinéaire à x et un vecteur $y \in H$ tel que Ay est colinéaire avec y mais Ay et y ne sont pas orthogonaux. Sans perte de généralité on peut supposer que $Ay = y$. En particulier les vecteurs x, y sont linéairement indépendants. On pose $x' = Ax$, pour $t \in]0,1[$ et pour $z_t = tx + (1-t)y$ on a $Az_t = tx' + (1-t)y$. Il est clair que l'équation $< Az_t, z_t >= t(1-t)(< x', y > + < y, x >) + (1-t)^2||y||^2 = 0$ admet au plus une solution $t_1 \in]0,1[$. Sachant que les vecteurs x, y sont indépendants, alors Az_t, z_t sont linéairement indépendants pour tout $t \in]0,1[$ sauf pour au plus un $t_2 \in]0,1[$. Donc, par exemple, pour $t \in]0,1[$ avec $t \neq t_1, t_2$ Az_t n'est ni orthogonal au vecteur z_t ni colinéaire avec z_t. Ce qui complète la preuve. □

Remarque 2.3. L'inclusion suivant découle directement de la définition la transformation λ-Aluthge

$$\mathcal{R}(\Delta_\lambda(T)), \mathcal{R}(\Delta_\lambda(T)^*) \subseteq \overline{\mathcal{R}(T^*)} \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{B}(H).$$

En particulier, si le rang de l'opérateur T est fini, alors le rang de $\Delta_\lambda(T)$ l'est aussi. De plus $\text{rang}(\Delta_\lambda(T)) \leq \text{rang}(T)$.

Proposition 2.3. Soient $T \in \mathcal{B}(H)$, $P \in \mathcal{B}(H)$ une projection orthogonale et $\lambda \in]0, 1[$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\Delta_\lambda(TP) = T$;

(ii) $TP = PT = T$ et T est quasi-normal.

Démonstration. L'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ est triviale. Montrons l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$. Soit $TP = U|TP|$ la décomposition polaire de TP. On suppose que $\Delta_\lambda(TP) = T$, alors on a l'équation suivante :

$$|TP|^\lambda U|TP|^{1-\lambda} = T \quad \text{et} \quad |TP|^{1-\lambda}U^*|TP|^\lambda = T^*. \tag{2.7}$$

Par conséquent, on obtient les inclusions suivantes :

$$\mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{R}(|TP|^\lambda) \subseteq \overline{\mathcal{R}(|TP|^2)},$$

et

$$\mathcal{R}(T^*) \subseteq \mathcal{R}(|TP|^{1-\lambda}) \subseteq \overline{\mathcal{R}(|TP|^2)}.$$

D'autre part, puisque $|TP|^2 = PT^*TP = P|T|^2P$, $\overline{\mathcal{R}(|TP|^2)} \subseteq \mathcal{R}(P)$. Par conséquent, on obtient $\mathcal{R}(T) \subset \mathcal{R}(P)$ et $\mathcal{R}(T^*) \subset \mathcal{R}(P)$. D'où $PT = T$ et $PT^* = T^*$. Ce qui implique

$$PT = TP = T,$$

de plus $\Delta_\lambda(T) = \Delta_\lambda(TP) = T$ et donc T est quasi-normal. □

Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ et $x \in H$ un vecteur de norme 1. La proposition suivante donne un critère pour que x soit une vecteur propre de A pour la valeur propre 1.

Proposition 2.4. Soient $A \in \mathcal{B}(H)$ et x un vecteur unitaire de H. On pose $P = x \otimes x$ la projection de rang 1 suivant le vecteur x. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\Delta_\lambda(A \circ P) = P$.

(ii) $PA = P$, c'est aussi équivalent à $A^*x = x$.

Pour démontrer la proposition précédente on a besoin du l'inégalité de Hölder-Mc Carthy suivante :

Théorème 2.7. [19, Inégalité de Hölder -Mc Carthy] Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur positif. Alors on a les propriétés suivantes :

(i) pour tout nombre réel $\mu \geq 1$ et pour tout vecteur $x \in H$ de norme $||x|| = 1$, on a l'inégalité

$$(< Ax, x >)^\mu \leq < A^\mu x, x > .$$

(ii) pour tout $\mu \in [0,1]$ et pour tout vecteur $x \in H$ de norme $\|x\| = 1$, on a l'inégalité

$$< A^\mu x, x > \leq (< Ax, x >)^\mu.$$

De plus si A inversible, alors

(iii) pour tout nombre réel $\mu \leq 0$ et pour tout vecteur $x \in H$ de norme $\|x\| = 1$, on a l'inégalité

$$(< Ax, x >)^\mu \leq < A^\mu x, x > .$$

Démonstration de la Proposition 2.4. Tout d'abord (ii) implique (i). En effet, si $PA = P$, alors $A^* x = x$ et en particulier $< Ax, x >= 1$. D'après la Proposition 2.2, on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta_\lambda(A \circ P) &= \frac{1}{2}\Delta_\lambda(Ax \otimes x + x \otimes A^* x)\\
&= \frac{1}{2}\Delta_\lambda(Ax \otimes x + x \otimes x)\\
&= \frac{1}{2}\Delta_\lambda((Ax + x) \otimes x)\\
&= \frac{1}{2} < Ax + x, x > x \otimes x\\
&= x \otimes x = P.
\end{aligned}$$

Ce qui montre $(ii) \Rightarrow (i)$.
Maintenant, supposons que $\Delta_\lambda(A \circ P) = P$ et montrons que $A^* x = x$. En effet, si on note $T = A \circ P$, alors

$$T = \frac{1}{2}(Ax \otimes x + x \otimes A^* x).$$

Par un calcul simple, on obtient

$$T^2 = \frac{1}{4}(< Ax, x > Ax \otimes x + Ax \otimes A^* x + < A^2 x, x > x \otimes x + < Ax, x > x \otimes A^* x). \tag{2.8}$$

D'autre part, on a $\Delta_\lambda(T) = P$, en appliquant le Théorème 2.2, alors

$$\sigma(T) = \sigma(\Delta_\lambda(T)) = \sigma(P) = \{0, 1\}.$$

Ainsi, par le théorème spectral

$$\sigma(T^2) = \{0, 1\}.$$

Puisque T est un opérateur de rang au plus 2, la trace de T est égale à la somme de ces valeurs propres. Donc

$$tr(T^2) = tr(T) = 1.$$

D'après les expressions de T et T^2, on a aussi

$$tr(T) =< Ax, x > \quad \text{et} \quad tr(T^2) = \frac{1}{2}(< A^2 x, x > +(< Ax, x >)^2).$$

Par conséquent, on trouve les égalités suivantes :

$$< Ax, x >=< A^2x, x >= 1.$$

En particulier $Tx = \frac{1}{2}(Ax + x)$ et $T^*x = \frac{1}{2}(A^*x + x)$. Ce qui entraîne que

$$< Tx, x >= 1 \;\text{ et }\; < T^*x, x >= 1.$$

D'après (2.8) et les égalités précédentes on obtient,

$$T^2 = \frac{1}{4}(Ax + x) \otimes (A^*x + x) = Tx \otimes T^*x. \tag{2.9}$$

Maintenant, nous considérons $T = U|T|$ la décomposition polaire de T. Par la définition de la transformation λ-Aluthge, on a :

$$\begin{aligned} T^2 &= U|T|U|T| = U|T|^{1-\lambda}(|T|^\lambda U|T|^{1-\lambda})|T|^\lambda \\ &= U|T|^{1-\lambda}\Delta_\lambda(T)|T|^\lambda = U|T|^{1-\lambda}(x \otimes x)|T|^\lambda \\ &= U|T|^{1-\lambda}x \otimes |T|^\lambda x. \end{aligned}$$

En replaçant T^2 par $U|T|^{1-\lambda}x \otimes |T|^\lambda x$ dans (2.9), on trouve que

$$Tx \otimes T^*x = U|T|^{1-\lambda}x \otimes |T|^\lambda x. \tag{2.10}$$

Sachant que $< T^*x, x >= 1$, en appliquant l'équation (2.10) à x, on obtient

$$Tx =< x, |T|^\lambda x > U|T|^{1-\lambda}x.$$

Ainsi

$$|T|^\lambda|T|x = |T|^\lambda U^*Tx =< x, |T|^\lambda x > U^*U|T|x =< x, |T|^\lambda x > |T|x.$$

Par le calcul fonctionnel continu, on déduit que

$$|T|\,|T|x = (< x, |T|^\lambda x >)^{1/\lambda}|T|x.$$

Ce qui implique que

$$< |T|^2x, x >= \||T|x\|^2 = (< x, |T|^\lambda x >)^{1/\lambda} < |T|x, x > .$$

On utilise la deuxième inégalité de Hölder-Mc Carthy (voir (ii) du Théorème 2.7) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit

$$\left\||T|x\right\|^2 = (< x, |T|^\lambda x >)^{1/\lambda} < |T|x, x >\leq (< |T|x, x >)^2 \leq \left\||T|x\right\|^2.$$

Par conséquent on a

$$\left\||T|x\right\| =< |T|x, x > .$$

Et d'après le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$|T|x = \alpha x.$$

D'après (2.10), on en déduit

$$Tx \otimes T^*x = \alpha Ux \otimes x.$$

Ainsi, T^*x et x sont co-linéaires. Donc il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $T^*x = \beta x$. Puisque $< T^*x, x >= 1, \beta = 1$ et $T^*x = x$. D'autre part, on a aussi

$$T^*x = \frac{1}{2}(A^*x + x),$$

d'où l'égalité

$$A^*x = x.$$

□

La proposition suivante donne une caractérisation des projections de rang 1 via la transformation λ-Aluthge avec le produit de Jordan.

Proposition 2.5. Soient $A \in \mathcal{B}(H)$ et $P = x \otimes x$ une projection orthogonale de rang 1 sur H. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\Delta_\lambda(A \circ P) = A$;

(ii) $A = \alpha P$, pour un certain $\alpha \in \mathbb{C}$.

Démonstration. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) est triviale. Nous montrons le sens direct. On pose

$$T := A \circ P = \frac{1}{2}(Ax \otimes x + x \otimes A^*x).$$

Ainsi

$$T^* = \frac{1}{2}(x \otimes Ax + A^*x \otimes x).$$

D'après l'hypothèse, on a $A = \Delta_\lambda(T)$. Sachant que $\mathcal{R}(\Delta_\lambda(T)), \mathcal{R}(\Delta_\lambda(T)^*) \subseteq \mathcal{R}(T^*)$, alors

$$\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{R}(T^*) \subseteq H_0 := \mathrm{vect}\{x, A^*x\}.$$

On remarque que H_0 est un sous-espace invariant de A et A^*.
Fait : Les vecteurs A^*x et x sont colinéaires ; c'est-à-dire : il existe un scalaire $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $A^*x = \delta x$. Dans ce cas, A et A^* sont deux opérateurs de rang inférieur ou égal à 1. De plus, les images $\mathcal{R}(A)$ et $\mathcal{R}(A^*)$ sont incluses dans H_0 qui est la droite engendrée par x. Donc A est de la forme $A = \alpha x \otimes x = \alpha P$ où $\alpha = \overline{\delta}$.
Nous démontrons le **Fait** par l'absurde.
On suppose que A^*x et x sont linéairement indépendants, en particulier la dimension de H_0 est égale à 2. Par le procédé de Gram-Schmidt, on peut choisir un vecteur unitaire $e \in H_0$ tel

que $\{x, e\}$ soit une base orthonormée de H_0 et que $< e, Ax >\geq 0$. Dans cette base l'opérateur A a la forme suivante

$$A = x \otimes A^* x + e \otimes A^* e. \tag{2.11}$$

Nous considérons les cas où $A^* e = 0$ et $A^* e \neq 0$.

Cas 1 : $A^* e = 0$. Nous montrons que $A^* x$ et x sont linéairement dépendants. Ce qui est une contradiction.

D'après (2.11), on a $A = x \otimes A^* x$. Donc

$$T = P \circ A = 1/2(x \otimes A^* x + < Ax, x > x \otimes x) = 1/2 x \otimes (A^* x + < A^* x, x > x).$$

En particulier l'image de T^* est de dimension 1. Elle est engendrée par le vecteur $A^* x + < A^* x, x > x$. Puisque $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(T^*)$ et $x \in \mathcal{R}(A)$, les vecteurs x et $A^* x + < A^* x, x > x$ sont linéairement dépendants. Par conséquent, x et $A^* x$ sont aussi linéairement dépendants.

Cas 2 : $A^* e \neq 0$. Dans ce cas pour avoir une contradiction, nous montrons

$$\begin{cases} Ax = \|A^* e\| e; \\ A^* e = \|A^* e\| x, \end{cases} \tag{2.12}$$

D'abord, on montre la première égalité $Ax = \|A^* e\| e$. En effet, puisque $A = \Delta_\lambda(T)$, on en déduit que

$$\|A\| = \|\Delta_\lambda(T)\| \leq \|T\| = \|\frac{1}{2}(Ax \otimes x + x \otimes A^* x)\| \leq \frac{1}{2}(\|Ax\| + \|A^* x\|) \leq \|A\|.$$

Donc

$$\|A\| = \|Ax\| = \|A^* x\|. \tag{2.13}$$

D'autre part, d'après l'hypothèse, on a

$$tr(A) = tr(\Delta_\lambda(T)) = tr(T) =< Ax, x > .$$

D'après (2.11), on a aussi

$$tr(A) =< Ax, x > + < Ae, e > .$$

Ce qui donne $< Ae, e >= 0$. Comme $A^* e \in H_0$ et $< e, Ax >\geq 0$, on en déduit

$$A^* e =< A^* e, x > x = \|A^* e\| x. \tag{2.14}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Maintenant, nous prouvons que

$$Ax = \|A^* e\| e.$$

En effet : d'après (2.11), on a

$$AA^* = x \otimes AA^* x + e \otimes AA^* e.$$

Ainsi

$$AA^*x = ||A^*x||^2x + < x, AA^*e > e;$$

de plus, d'après (2.13) on obtient

$$||AA^*x||^2 = ||A^*x||^4 + | < x, AA^*e > |^2 \leq ||AA^*||^2 = ||A||^4 = ||A^*x||^4.$$

Ce qui entraîne

$$< x, AA^*e >= 0.$$

Ceci combiné au fait que $A^*e = ||A^*e||x$, donne

$$AA^*x = ||A||^2x \quad \text{et} \quad AA^*e = ||A^*e||^2e = ||A^*e||Ax.$$

par suite

$$Ax = ||A^*e||e. \tag{2.15}$$

Maintenant, par l'équation (2.11) et (2.12) on obtient $A = x \otimes A^*x + ||A^*e||e \otimes x$. Soit encore d'après (2.12),

$$\begin{aligned} A &= \Delta_\lambda(A \circ P) = \frac{1}{2}\Delta_\lambda(Ax \otimes x + x \otimes A^*x) \\ &= \frac{1}{2}\Delta_\lambda(x \otimes A^*x + ||A^*e||e \otimes x) \\ &= \frac{1}{2}\Delta_\lambda(A). \end{aligned}$$

Par conséquent $2A = \Delta_\lambda(A)$ et $2||A|| = ||\Delta_\lambda(A)|| \leq ||A||$. Ainsi $A = 0$, ce qui contredit $Ae \neq 0$, et complète la preuve. □

4. Groupe des unitaires et racines de l'unité

Dans la suite de ce paragraphe, on va noter $\mathcal{U}_n(H)$ l'ensemble des racines n-ièmes unitaires de l'identité ; c'est à dire :

$$\mathcal{U}_n(H) = \{U \in \mathcal{B}(H) \ : \quad U \text{ unitaire et } \ U^n = I\}.$$

Le théorème suivant donne une caractérisation complète de l'ensemble $\mathcal{U}_n(H)$ via la transformation λ-Aluthge.

Théorème 2.8. Soient $T \in \mathcal{B}(H)$ et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Supposons que T et T^* injectifs. Alors, pour tout $\lambda \in]0, 1]$, on a l'équivalence suivante :

$$\Delta_\lambda(T^n) = T \iff T \in \mathcal{U}_{n-1}(H).$$

Démonstration. L'implication directe est triviale ; c'est le fait que tout opérateur unitaire est quasi-normal, et donc un point fixe de Δ_λ. Il reste à démontrer la réciproque.
Soit $T^n = U_n|T^n|$ la décomposition polaire de l'opérateur T^n avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$. Puisque les opérateurs T^n et $(T^*)^n$ sont injectifs, U_n est unitaire. D'après l'hypothèse, on trouve les implications suivantes :

$$\begin{aligned}
\Delta_\lambda(T^n) = T \quad &\Longrightarrow \quad (\Delta_\lambda(T^n))^n = T^n.\\
&\Longrightarrow \quad |T^n|^\lambda (T^n)^{n-1} U_n |T^n|^{1-\lambda} = U_n|T^n| = U_n|T^n|^\lambda |T^n|^{1-\lambda}.\\
&\Longrightarrow \quad |T^n|^\lambda T^{n(n-1)} U_n = U_n |T^n|^\lambda.\\
&\Longrightarrow \quad U_n^* |T^n|^\lambda T^{n(n-1)} = |T^n|^\lambda U_n^*.\\
&\Longrightarrow \quad (\Delta_\lambda(T^n))^* T^{n(n-1)} = |T^n|^{1-\lambda} U_n^* |T^n|^\lambda T^{n(n-1)} = |T^n| U_n^* = (T^n)^*.\\
&\Longrightarrow \quad T^* T^{n(n-1)} = (T^*)^n.\\
&\Longrightarrow \quad T^{n(n-1)} = (T^*)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$T^{n^2-1} = T^{n(n-1)+n-1} = (T^*)^{n-1} T^{n-1} = T^{n-1}(T^*)^{n-1}. \tag{2.16}$$

En particulier, l'opérateur T^{n-1} est normal.
D'autre part, soit $T^{n-1} = U_{n-1}|T^{n-1}|$, la décomposition polaire de T^{n-1}. Puisque T^{n-1} est un opérateur normal et injectif, U_{n-1} est aussi un unitaire qui commute avec $|T^{n-1}|$. D'après (2.16), on en déduit que

$$T^{n^2-1} = (T^{n-1})^{n+1} = U_{n-1}^{n+1} |T^{n-1}|^{n+1} = |T^{n-1}|^2,$$

est un opérateur positif. Comme $|T^{n-1}|^{n+1}$ est positif et à image dense, U_{n-1}^{n+1} est unitaire positif. Par conséquent

$$U_{n-1}^{n+1} = I \;\text{ et donc }\; |T^{n-1}|^{n+1} = |T^{n-1}|^2.$$

Ainsi

$$|T^{n-1}| = I \;\text{ et }\; T^{n-1} = U_{n-1} \;\text{ est unitaire.} \tag{2.17}$$

Maintenant, soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de l'opérateur T. D'après (2.17), on trouve l'équation :

$$T^n = U_{n-1} U|T| = U U_{n-1} U_{n-1}^* |T| U_{n-1}.$$

Comme les opérateurs U, U_{n-1} sont unitaires, alors par l'unicité de la décomposition polaire, on a les égalités suivantes

$$U_{n-1}U = UU_{n-1} = U_n \text{ et } |T| = U_{n-1}^*|T|U_{n-1} = |T^n|.$$

Donc, en particulier, U_{n-1} commute avec U et $|T|$.
Une fois de plus l'hypothèse $\Delta_\lambda(T^n) = T$ donne

$$|T|^\lambda U_{n-1}U|T|^{1-\lambda} = U|T|.$$

Ainsi

$$|T|^\lambda U_{n-1}U = U|T|^\lambda.$$

En multipliant cette équation à droite par U^*, on obtient que $|T|^\lambda U_{n-1} = U|T|^\lambda U^*$, qui est un opérateur positif. Puisque U_{n-1} commute avec $|T|^\lambda$ qui est un opérateur inversible, U_{n-1} est un unitaire positif. D'où l'égalité

$$T^{n-1} = U_{n-1} = I. \tag{2.18}$$

Comme conséquence, on trouve également

$$\Delta_\lambda(T^n) = \Delta_\lambda(T) = T.$$

Finalement, T est un opérateur quasi-normal, il est aussi inversible, donc T est normal.
D'autre part, en utilisant l'équation (2.18), on obtient

$$|T|^{2(n-1)} = (T^{n-1})^*T^{n-1} = I.$$

Par le calcul fonctionnel continu on déduit que $|T| = I$. Donc $T = U$ est unitaire et $T^{n-1} = I$, c'est-à-dire $T \in \mathcal{U}_{n-1}(H)$. □

Le lemme suivant fournit un critère pour qu'un opérateur soit positif sous l'action de sa transformation de Aluthge. Il servira dans la démonstration du Théorème 3.8.

Lemme 2.6. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur inversible. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) T est positif ;

(ii) pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\Delta_\lambda(T)$ est positif ;

(iii) il existe un $\lambda \in [0, 1]$ tel que $\Delta_\lambda(T)$ est positif.

En particulier, si $\Delta_\lambda(T) = cI$ pour une certaine constante non-nulle $c \in \mathbb{C}$, alors $T = cI$.

Démonstration. Les implications $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ sont triviales. Il reste à démontrer l'implication $(iii) \Rightarrow (i)$. Soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T et $\lambda \in [0, 1]$. On suppose que $\Delta_\lambda(T)$ est positif. Puisque T est inversible, $|T|^{1-\lambda}$ est aussi inversible et donc U est unitaire.
Maintenant, on doit démontrer que $U = I$. En effet, si on pose $A = |T|^{2\lambda-1}$, on a

$$\begin{aligned} AU &= |T|^{2\lambda-1}U \\ &= |T|^{\lambda-1}(|T|^{\lambda}U|T|^{1-\lambda})|T|^{\lambda-1} \\ &= |T|^{\lambda-1}\Delta_\lambda(T)|T|^{\lambda-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$AU = |T|^{\lambda-1}\Delta_\lambda(T)|T|^{\lambda-1},$$

est un opérateur positif. En particulier, il est auto-adjoint :

$$AU = (AU)^* = U^*A.$$

En multipliant cette équation par U, on obtient $UAU = A$. Ce qui implique :

$$(AU)^2 = AUAU = A^2.$$

Puisque les opérateurs AU et A sont positifs, $AU = A$. En multipliant par A^{-1}, il vient $U = I$.
Finalement

$$T = U|T| = |T|,$$

est un opérateur positif. □

Remarque 2.4. L'hypothèse "T inversible" est nécessaire dans le lemme précédent. En effet, soit $T = x \otimes y$ l'opérateur de rang 1, avec x, y deux vecteurs linéairement indépendants tels que $< x, y > \geq 0$. En utilisant la Proposition 2.2, on voit que $\Delta_\lambda(T) = \dfrac{< x, y >}{||y||^2} y \otimes y$ est un opérateur positif, mais T n'est pas positif.

CHAPITRE 3

Applications qui commutent avec λ-Aluthge

1. Applications qui préservent certaines classe d'opérateurs

L'objectif de ce paragraphe, est de rappeler quelques résultats connus sur les applications qui préservent certaines classes d'opérateurs. Tout d'abord, on commence par la définition suivante.

Definition 3.1. Soient C une classe d'opérateurs de $\mathcal{B}(H)$, respectivement de $\mathcal{B}(K)$ et soit $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application. On dit que Φ préserve la classe C dans les deux directions (ou sens), si pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$ on a l'équivalence suivante :

$$T \in C \iff \Phi(T) \in C.$$

Dans la littérature, on trouve plusieurs travaux sur les applications qui préservent les opérateurs inversibles, idempotents, nilpotents, normaux, semi-Fredholm,..., on peut par exemple citer les références suivantes [4, 6, 20, 28–31, 37].
Le théorème suivant donne une caractérisation des applications additives $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ qui préservent les éléments nilpotents dans les deux sens. Il a été démontré dans [22].

Théorème 3.1. [22] Soient H, K deux espaces de Hilbert de dimension infinie et $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application additive surjective. Alors, Φ préserve les nilpotents dans les deux directions, si et seulement si, il existe $c \in \mathbb{C}$ et un opérateur inversible $R : H \to K$ linéaire ou anti-linéaire, tels que Φ prenne une des formes suivantes :

$$\Phi(T) = cRTR^{-1}, \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{B}(H), \tag{3.1}$$

ou bien

$$\Phi(T) = cRT^*R^{-1}, \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{B}(H). \tag{3.2}$$

Le résultat suivant est donné par M. Bresar, P. Semrl dans [7]. Il décrit la forme des applications linéaires bijectives qui préservent les opérateurs normaux.
Avant d'énoncer ce théorème, rappelons la définition de la transposée d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ dans une base orthonormée $(e_i)_{i\in I}$ de H, notée T^{tr} et définie sur les éléments de la base par

$$< T^{tr}e_i, e_j >=< Te_j, e_i > .$$

Remarque 3.1. Soit H un espace de Hilbert de dimension supérieur ou égale à 2 et $(e_i)_{i\in I}$ une base orthonormée de H. On considère l'opérateur $J : H \to H$, défini par, $Jx = \overline{x}$, où $x = \sum_{i\in I} x_ie_i \in H$ est un vecteur arbitraire et $\overline{x} = \sum_{i\in I} \overline{x_i}e_i$, en particulier $Je_i = e_i$ pour tout $i \in I$. Il est clair que J est une conjugaison linéaire, c'est à dire, J est un opérateur anti-linéaire tel que $J^2 = I$. De plus J est auto-adjoint ;

$$< Jx, y >=< Jy, x > \quad \text{pour tout} \quad x, y \in H.$$

La transposée T^{tr} d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ dans la base orthonormée $(e_i)_{i\in I}$ est donnée par $T^{tr} = JT^*J$. En effet, soient $i, j \in I$ alors on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} < JT^*Je_i, e_j > &= < JT^*e_i, e_j > \\ &= < Je_j, T^*e_i > \\ &= < Te_j, e_i >=< T^{tr}e_i, e_j > . \end{aligned}$$

D'autre part, soit l'application $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ définie par $\Phi(T) = UT^{tr}U^*$ pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$, avec $U : H \to K$ est opérateur unitaire. Alors Φ peut s'écrire comme

$$\Phi(T) = UJT^*(UJ)^* = \tilde{U}T^*\tilde{U}^* \text{ pour tout } \quad T \in \mathcal{B}(H),$$

où $\tilde{U} = UJ : H \to K$ est un opérateur anti-unitaire.

Théorème 3.2. [7] Soient H, K deux espaces de Hilbert de dimension supérieure ou égale à 3 et $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application linéaire bijective. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Φ préserve les opérateurs normaux.

(ii) Il existe un opérateur unitaire $U : H \to K$, une fonction linéaire $f : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C}$ et une constante non nulle $\alpha \in \mathbb{C}$, tels que Φ soit de la forme

$$\Phi(T) = \alpha UTU^* + f(T)I \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{B}(H), \tag{3.3}$$

ou bien de la forme

$$\Phi(T) = \alpha UT^{tr}U^* + f(T)I \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{B}(H), \tag{3.4}$$

où T^{tr} est la transposée de l'opérateur T dans une base orthonormée de H fixée.

Le théorème suivant a été démontré dans [5]. Il donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une bijection linéaire $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ préserve les opérateurs quasi-normaux.

Théorème 3.3. [5] Soient H et K deux espaces de Hilbert de dimension infinie et $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application linéaire bijective. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) Φ préserve les opérateurs quasi-normaux ;
(2) Il existe un opérateur unitaire $U \in \mathcal{B}(H, K)$ et un scalaire non nul $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que

$$\Phi(T) = \alpha UTU^*, \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{B}(H).$$

En dimension finie les opérateurs quasi-normaux sont normaux, et donc on a le corollaire suivant.

Corollaire 3.1. Soient H, K deux espaces de Hilbert de dimension finie, tel que $dim(H) \geq 3$ et $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application linéaire bijective. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Φ préserve l'ensemble des opérateurs quasi-normaux ;
(ii) Φ préserve l'ensemble des opérateurs normaux ;
(iii) Φ prend une des formes (3.3) ou (3.4) dans le Théorème 3.2.

Remarque 3.2. En dimension infinie, il existe des applications linéaires bijectives qui préservent les opérateurs normaux, mais qui ne préservent pas l'ensemble des opérateurs quasi-normaux.
En effet, soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, $S \in \mathcal{B}(H)$ le shift unilatéral sur H (voir Exemple 1.1). Par le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue $f : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C}$, telle que $f(S) = 1$. On définit l'application $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ par $\Phi(T) = T + f(T)I$ pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$. Alors, Φ est bien linéaire, de plus elle préserve l'ensemble des opérateurs normaux dans les deux directions. D'autre part $\Phi(S) = S + I$ n'est pas quasi-normal.

2. Applications additives qui commutent avec la transformation λ-Aluthge

L'objectif de cette partie est de caractériser les bijections additives $\Phi: B(H) \to \mathcal{B}(K)$ qui commutent avec la transformation λ-Aluthge, pour $\lambda \in]0,1[$. Tout d'abord, nous avons la définition suivante.

Definition 3.2. On dit qu'une application $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ commute avec la transformation λ-Aluthge, si le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(H) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{B}(K) \\ {\scriptstyle \Delta_\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_\lambda} \\ \mathcal{B}(H) & \xrightarrow[\Phi]{} & \mathcal{B}(K) \end{array}$$

est commutatif. Ce qui est équivalent à

$$\Delta_\lambda(\Phi(T)) = \Phi(\Delta_\lambda(T)) \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{B}(H). \tag{3.5}$$

Le premier résultat dans cette direction a été démontré en 2016 par F. Botelho, L. Molár et G.Nagy dans [5]. Les trois auteurs ont caractérisé les applications linéaires bijectives entre deux facteurs de von Neumann qui commutent avec Δ_λ. Nous rappelons qu'une algèbre de von Neumann $\mathcal{A}$ est dite un facteur, si le centre de $\mathcal{A}$ est réduit aux multiples scalaires de l'identité. On a le théorème suivant.

Théorème 3.4. [5, F. Botelho, L. Molár et G.Nagy] Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux facteurs de von Neumann et $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ une application linéaire bijective. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Φ commute avec la transformation λ-Aluthge (pour un certain $\lambda \in]0,1]$).

(ii) Φ est multiple scalaire d'un $*$-isomorphisme ; autrement dit il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\Theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un $*$-isomorphisme, tels que $\Phi = \alpha\Theta$.

Dans le cas $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}(K)$ où H, K sont des espaces de Hilbert de dimension infinie, nous allons améliorer le résultat du théorème précédent, en supposant que l'application $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ est seulement additive. On a le résultat suivant :

Théorème 3.5. Soit H, K deux espaces de Hilbert de dimension infinie et $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une bijection additive. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Φ commute avec la transformation λ-Aluthge pour un certain (ou équivalent, pour tout) $\lambda \in]0,1]$;

(ii) il existe un opérateur unitaire ou anti-unitaire $U : H \to K$ et une constante non-nulle $\alpha \in \mathbb{C}$, tels que
$$\Phi(T) = \alpha UTU^* \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{B}(H).$$

La preuve du théorème précédent est basée sur les applications qui préservent les nilpotents (voir le Théorème 3.1). Pour cela, nous avons besoin de quelques résultats intermédiaires. On commence par le lemme suivant, qui donne l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$.

Lemme 3.1. Soit $U : H \to K$ un opérateur unitaire ou anti-unitaire et $\lambda \in [0, 1]$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$, on a l'égalité :
$$\Delta_\lambda(\alpha UTU^*) = \alpha U \Delta_\lambda(T) U^*.$$

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$ et $T = V|T|$ sa décomposition polaire. Il est facile de vérifier que pour tout opérateur $R \in \mathcal{B}(H)$, on a $\Delta_\lambda(\alpha R) = \alpha \Delta_\lambda(R)$ et donc sans perte de généralité, on peut supposer que $\alpha = 1$.
Par un calcul simple, on trouve que
$$|UTU^*| = U|T|U^* \quad \text{et} \quad |UTU^*|^\lambda = U|T|^\lambda U^*, \quad \lambda \in [0, 1].$$
Ainsi
$$UTU^* = UV|T|U^* = (UVU^*)(U|T|U^*).$$
On pose $\tilde{V} = UVU^*$, d'où
$$\tilde{V}\tilde{V}^*\tilde{V} = UVU^*UV^*U^*UVU^* = UVV^*VU^* = UVU^*.$$
Donc $\tilde{V}$ est une isométrie partielle, telle que $\mathcal{N}(UTU^*) = \mathcal{N}(\tilde{V})$. Ensuite $\tilde{V}|UTU^*|$ est la décomposition polaire de UTU^*. Ce qui implique
$$\begin{aligned}\Delta_\lambda(UTU^*) &= |UTU^*|^\lambda \tilde{V} |UTU^*|^{1-\lambda} \\ &= U|T|^\lambda U^* \tilde{V} U |T|^{1-\lambda} U^* \\ &= U|T|^\lambda V |T|^{1-\lambda} U^* \\ &= U \Delta_\lambda(T) U^*.\end{aligned}$$
Ce qui complète la preuve. □

Le théorème suivant montre que, si Φ commute avec la transformation λ-Aluthge, alors Φ préserve la classe des opérateurs quasi-normaux et celle des opérateurs nilpotents.

Théorème 3.6. Soit $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application bijective. On suppose que Φ commute avec Δ_λ pour un $\lambda \in]0, 1]$. Alors, on a les assertions suivantes :

(i) L'application Φ préserve les opérateurs quasi-normaux dans les deux directions.

(ii) Si, de plus, $\Phi(0) = 0$, alors Φ préserve fortement l'ensemble des opérateurs nilpotents, c'est-à-dire : pour un entier $d \in \mathbb{N}^*$ et $T \in \mathcal{B}(H)$, on a l'équivalence suivante :

$$T^d = 0 \iff (\Phi(T))^d = 0.$$

Démonstration. Tout d'abord on démontre que Φ préserve les quasi-normaux. En effet, soit $T \in \mathcal{B}(H)$, alors on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} T \text{ est quasi-normal} &\iff \Delta_\lambda(T) = T \\ &\iff \Phi(\Delta_\lambda(T)) = \Phi(T) \text{ (} \Phi \text{ est injective)} \\ &\iff \Delta_\lambda(\Phi(T)) = \Phi(T) \\ &\iff \Phi(T) \text{ est quasi-normal.} \end{aligned}$$

Maintenant, on montre que Φ préserve les opérateurs nilpotents. En effet, sachant que Φ commute avec la transformation Δ_λ, par récurrence, Φ commute aussi avec toute les itérées de Δ_λ et donc

$$\Delta_\lambda^{(d)}(\Phi(T)) = \Phi(\Delta_\lambda^{(d)}(T)) \quad \text{pour tout } d \in \mathbb{N} \text{ et } T \in \mathcal{B}(H).$$

D'autre part, l'application Φ est bijective avec $\Phi(0) = 0$, donc d'après le Théorème 2.5, on a :

$$\begin{aligned} T^d = 0 &\iff \Delta_\lambda^{(d-1)}(T) = 0 \\ &\iff \Phi(\Delta_\lambda^{(d-1)}(T)) = 0 \\ &\iff \Delta_\lambda^{(d-1)}(\Phi(T)) = 0 \\ &\iff (\Phi(T))^d = 0, \quad \text{pour tout } d \in \mathbb{N}^* \text{ et } T \in \mathcal{B}(H). \end{aligned}$$

□

Le lemme suivant donne un critère simple pour qu'un opérateur de rang 1 soit quasi-normal.

Lemme 3.2. Soient $x, y \in H$ deux vecteurs non-nuls de H, et $T = x \otimes y$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes

(i) T est normal ;

(ii) T est quasi-normal ;

(iii) x et y sont co-linéaires.

Démonstration. Il est clair que $(i) \Rightarrow (ii)$ et $(iii) \Rightarrow (i)$. Il reste à démontrer que $(ii) \Rightarrow (iii)$. Supposons que T est quasi-normal. Avec le Lemme 2.1 et la Proposition 2.2, on obtient

$$x \otimes y = \Delta_\lambda(x \otimes y) = \frac{< x, y >}{\|y\|^2}(y \otimes y).$$

Par conséquent x et y sont co-linéaires. □

Démonstration du Théorème 3.5. Il est clair que l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ découle du Lemme 3.1. Il reste à démontrer que $(i) \Rightarrow (ii)$.
D'après le Corollaire 3.6, l'application Φ préserve les opérateurs quasi-normaux.
Maintenant, puisque Φ est une bijection additive, d'après (i) du Théorème 3.6, Φ préserve fortement les opérateurs nilpotents dans les deux sens. D'après le Théorème 3.1, il existe $c \in \mathbb{C}$ et un opérateur $R : H \to K$ linéaire ou anti-linéaire, tels que Φ soit de la forme :

$$\Phi(T) = cRTR^{-1}, \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{B}(H), \tag{3.6}$$

ou bien

$$\Phi(T) = cRT^*R^{-1}, \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{B}(H). \tag{3.7}$$

Montrons que l'opérateur R dans (3.6) ou (3.7) est un multiple scalaire d'un unitaire ou anti-unitaire. En effet, soit $x \in H$ avec $\|x\| = 1$, alors

$$\Phi(x \otimes x) = Rx \otimes (R^{-1})^* x.$$

Puisque Φ préserve les opérateurs quasi-normaux, l'opérateur $Rx \otimes (R^{-1})^* x$ est quasi-normal. D'après le Lemme 3.2, les vecteurs Rx et $(R^{-1})^* x$ sont linéairement dépendants pour tout $x \in H$. Par conséquent, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $R = \alpha (R^{-1})^*$. Ainsi $R^*R = I$ sur H et $RR^* = \alpha I$ sur K, ce qui implique en particulier que $\alpha \geq 0$. Posons $U = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} R : H \to K$. Alors U satisfait la conclusion du théorème. Ce qui complète la preuve. □

Remarque 3.3. L'hypothèse de surjectivité dans le Théorème 3.5 est nécessaire. On a l'exemple suivant :

Exemple 3.1. Soient H un espace de Hilbert de dimension infinie et $K = H \oplus H$ la somme directe de H avec lui même. Soit $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ l'application linéaire définie par $\Phi(T) = T \oplus T$ pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$. Il est facile de voir que Φ commute avec Δ_λ. Cependant Φ n'est pas de la forme $T \to \alpha UTU^*$ du Théorème 3.5. Clairement Φ n'est pas surjective.

3. Applications additives commutant localement avec la transformation λ-Aluthge

Dans cette partie, nous étudierons les applications additives qui commutent localement avec la transformation λ-Aluthge. On commence par la définition suivante.

Definition 3.3. On dit qu'une application $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ commute localement avec la transformation λ-Aluthge, si pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$ il existe $\Phi_T : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ telle que :

(i) $\Phi_T(0) = 0$;

(ii) $\Phi(T) = \Phi_T(T)$;

(iii) Φ_T commute avec Δ_λ pour un certain $\lambda \in]0, 1]$,

Le résultat suivant est une conséquence du Théorème 3.5. Il donne une caractérisation des applications additives qui commutent localement avec la transformation λ-Aluthge.

Théorème 3.7. Soient H et K deux espaces de Hilbert de dimension infinie et $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une bijection additive. On suppose que Φ commute localement avec la transformation de λ-Aluthge. Alors, il existe un opérateur unitaire ou anti-unitaire $U : H \to K$ tel que Φ est de la forme :

$$\Phi(T) = \alpha UTU^* \quad \text{pour tout} \;\; T \in \mathcal{B}(H).$$

En particulier, Φ commute avec Δ_λ.

Démonstration. Tout d'abord, on montre que Φ préserve l'ensemble des opérateurs quasi-normaux. Soit T un opérateur quasi-normal. Alors $\Delta_\lambda(T) = T$. D'après l'hypothèse, il existe $\Phi_T : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ commutant avec Δ_λ et tel que, $\Phi(T) = \Phi_T(T)$. Comme conséquence, on a les égalités :

$$\Delta_\lambda(\Phi(T)) = \Delta_\lambda(\Phi_T(T)) = \Phi_T(\Delta_\lambda(T)) = \Phi(T).$$

En particulier, $\Phi(T)$ est quasi-normal. Ce qui entraîne que Φ préserve les opérateurs quasi-normaux.
Démontrons que l'application Φ préserve aussi l'ensemble des opérateurs nilpotents. En effet, soient $T \in \mathcal{B}(H)$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que $T^{d+1} = 0$. D'après le Théorème 2.5, on a $\Delta_\lambda^{(d)}(T) = 0$ et donc

$$\Delta_\lambda^{(d)}(\Phi(T)) = \Delta_\lambda^{(d)}(\Phi_T(T)) = \Phi_T(\Delta_\lambda^{(d)}(T)) = \Phi_T(0) = 0.$$

Ce qui implique que $\Phi(T)$ est nilpotent et que $\Phi(T)^{d+1} = 0$. Par conséquent Φ préserve fortement les éléments nilpotents de $\mathcal{B}(H)$. En appliquant le Théorème 3.1, on voit que Φ est de la forme (3.1) ou bien de la forme (3.2).
Le reste de la preuve est semblable à celui du Théorème 3.5. □

4. Applications commutent avec la transformation λ-Aluthge pour la ω-additivité

Dans cette section, nous allons étudier les applications $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ qui satisfont la condition suivante :

$$\Delta_\lambda\Big(\Phi(S) + \omega\Phi(T)\Big) = \Phi\Big(\Delta_\lambda(S + \omega T)\Big) \quad \forall\, S, T \in \mathcal{B}(H), \tag{3.8}$$

où $\omega \in \mathbb{C}^*$ est fixé. Le théorème suivant donne la forme complète d'une telle application.

Théorème 3.8. Soit $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application bijective et H, K espaces de Hilbert de dimension infinie. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) Φ satisfait la condition (3.8) ;

(2) il existe un unitaire ou anti-unitaire $U : H \to K$ et une constante $\alpha \in \mathbb{C}^*$, tels que

$$\Phi(T) = \alpha UTU^* \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{B}(H).$$

Remarque 3.4. Dans le Théorème 3.8, nous n'avons pas besoin de supposer que l'application Φ soit additive, ni continue. La condition (3.8) est suffisante pour qu'une application bijective Φ soit additive et continue.

La démonstration du Théorème 3.8 sera donnée à la fin de cette section. Pour sa réalisation nous avons besoin d'établir plusieurs lemmes intermédiaires.

Lemme 3.3. Soit $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application bijective satisfaisant la condition (3.8), alors on a :

(i) $\Phi(0) = 0$.

(ii) Φ commute avec la transformation λ-Aluthge.

En particulier Φ préserve les quasi-normaux dans les deux directions.

Démonstration. (*i*) En utilisant la condition (3.8) avec $T = S = 0$, on obtient

$$(1+\omega)\Delta_\lambda(\Phi(0)) = \Delta_\lambda(\Phi(0) + \omega\Phi(0)) = \Phi(0).$$

Donc, si $\omega = -1$, alors $\Phi(0) = 0$ est immédiate. Si $\omega + 1 \neq 0$, l'égalité précédente implique

$$\Delta_\lambda(\Phi(0)) = \frac{1}{1+\omega}\Phi(0).$$

D'après le Lemme 2.2, on trouve $\Phi(0) = 0$.

(*ii*) D'après (*i*), $\Phi(0) = 0$. D'où si on prend $T = 0$ dans (3.8) on obtient que Φ commute avec la transformation λ-Aluthge. En particulier elle préserve les opérateurs quasi-normaux. □

Lemme 3.4. Soit $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application bijective. On suppose que Φ satisfait la condition (3.8), alors :

$$\Phi(S + zT) = \Phi(S) + \Phi(zT) \quad \text{pour tout } S, T \in \mathcal{B}(H),\ S \text{ auto-adjoint et } z \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. Si $z = 0$ le résultat est trivial. On suppose que $z \neq 0$. Nous divisons la preuve en deux étapes :

Étape 1. Montrons d'abord que l'égalité $\Phi(zS - \omega T) = \Phi(zS) - \omega\Phi(T)$ est vérifiée pour tout $T, S \in \mathcal{B}(H)$, S positif et inversible et $z \in \mathbb{C}$.

En effet, en utilisant la condition (3.8) avec $zS-\omega T$ et T, alors on a

$$\Delta_\lambda(\Phi(zS-\omega T)+\omega\Phi(T))=\Phi(\Delta_\lambda(zS-\omega T+\omega T))=\Phi(zS).$$

D'autre part, Puisque l'application Φ commute avec Δ_λ, Φ^{-1} commute aussi avec Δ_λ. D'après la dernière égalité, on déduit que

$$\begin{aligned}\frac{1}{z}\Delta_\lambda\Big(\Phi^{-1}(\Phi(zS-\omega T)+\omega\Phi(T))\Big) &= \frac{1}{z}\Phi^{-1}\Big(\Delta_\lambda(\Phi(zS-\omega T)+\omega\Phi(T))\Big)\\ &= \frac{1}{z}\Delta_\lambda\Big(\Phi^{-1}(\Phi(zS))\Big)\\ &= \frac{1}{z}\Delta_\lambda(zS)=S.\end{aligned}$$

Ce qui implique que l'opérateur

$$\frac{1}{z}\Delta_\lambda\Big(\Phi^{-1}(\Phi(zS-\omega T)+\omega\Phi(T))\Big)=\Delta_\lambda\Big(\frac{1}{z}\Phi^{-1}(\Phi(zS-\omega T)+\omega\Phi(T))\Big),$$

est positif et inversible. En utilisant le Lemme 2.6, on voit que l'opérateur

$$\frac{1}{z}\Phi^{-1}(\Phi(zS-\omega T)+\omega\Phi(T)),$$

est également positif. En particulier, il est quasi-normal et donc c'est un point fixe de Δ_λ.
Ainsi

$$\frac{1}{z}\Delta_\lambda\Big(\Phi^{-1}(\Phi(zS-\omega T)+\omega\Phi(T))\Big)=\frac{1}{z}\Phi^{-1}(\Phi(zS-\omega T)+\omega\Phi(T))=S.$$

D'où

$$\Phi(zS-\omega T)=\Phi(zS)-\omega\Phi(T),$$

pour tout $T\in\mathcal{B}(H)$ et pour tout opérateur positif et inversible $S\in\mathcal{B}(H)$.

Étape 2. Maintenant, soit $S\in\mathcal{B}(H)$ un opérateur auto-adjoint. On peut choisir $\alpha\in\mathbb{R}^*$ tel que $S+\alpha I$ soit un opérateur positif et inversible (par exemple, $\alpha>\|S\|$).
En appliquant l'égalité obtenue dans étape 1, pour $S+\alpha I$ et $T\in\mathcal{B}(H)$ quelconque, on obtient

$$\Phi(z(S+\alpha I)-\omega T)=\Phi(z(S+\alpha I))-\omega\Phi(T). \tag{3.9}$$

Puisque αI est un opérateur positif et inversible, alors d'après étape 1, on a d'une part

$$\begin{aligned}\Phi(z(S+\alpha I)-\omega T) &= \Phi(z\alpha I-\omega(\frac{zS-\omega T}{-\omega}))\\ &= \Phi(z\alpha I)-\omega\Phi(T-\frac{z}{\omega}S),\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\Phi(z(S+\alpha I)) &= \Phi(z\alpha I-\omega(\frac{zS}{-\omega}))\\ &= \Phi(z\alpha I)-\omega\Phi(-\frac{z}{\omega}S).\end{aligned}$$

D'après les égalités précédentes et l'équation (3.9), on a

$$\Phi(z\alpha I) - \omega\Phi(T - \frac{z}{\omega}S) = \Phi(z\alpha I) - \omega\Phi(-\frac{z}{\omega}S) - \omega\Phi(T).$$

Après simplification on obtient

$$\Phi(T - \frac{z}{\omega}S) = \Phi(T) + \Phi(-\frac{z}{\omega}S),$$

pour tout opérateur auto-adjoint $S \in \mathcal{B}(H)$, pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$ et $z \in \mathbb{C}$. Par conséquent, $\Phi(zS + T) = \Phi(zS) + \Phi(T)$, pour tout opérateur auto-adjoint $S \in \mathcal{B}(H)$ et pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$ et $z \in \mathbb{C}$. Ce qui complète la preuve. □

Démonstration du Théorème 3.8. Soit $S, T \in \mathcal{B}(H)$ et $T = T_1 + iT_2$ avec $T_1 = Re(T) et T_2 = Im(T)$ des opérateurs auto-adjoints. D'après le Lemme 3.4 avec $z = 1$ (resp. $z = i$), on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\Phi(S + T) &= \Phi(S + T_1 + iT_2) \\
&= \Phi(S + T_1) + \Phi(iT_2) \\
&= \Phi(S) + \Phi(T_1) + \Phi(iT_2) \\
&= \Phi(S) + \Phi(T_1 + iT_2) \\
&= \Phi(S) + \Phi(T).
\end{aligned}$$

Ce qui montre que l'application Φ est additive. En outre, on sait que Φ commute avec Δ_λ (voir Lemme 3.3). Maintenant on peut appliquer le Théorème 3.5, d'où il existe un opérateur unitaire ou anti-unitaire $U : H \to K$ et une constante non-nulle $\alpha \in \mathbb{C}$, tels que $\Phi(T) = \alpha UTU^*$ pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$. □

CHAPITRE 4

Applications qui préservent l'image numérique

Dans cette section, nous allons étudier les applications $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ qui préservent les projections de rang 1, telles qu'il existe un automorphisme $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant

$$< \Phi(T)y, y >= h(< Tx, x >),$$

pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$ et tout $x \in H, y \in K$ de norme 1, tels que $\Phi(x \otimes x) = y \otimes y$.
Tout d'abord rappelons que pour $T \in \mathcal{B}(H)$, l'image numérique de T est définie par

$$W(T) = \{< Tx, x >; \quad \|x\| = 1\}.$$

Le théorème suivant donne une caractérisation des applications linéaires qui préservent l'image numérique.

Théorème 4.1. [35] Soit $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application linéaire. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'application Φ préserve fortement l'image numérique ;

$$W(\Phi(T)) = W(T), \quad \text{pour tout } \ T \in \mathcal{B}(H).$$

(ii) Il existe un opérateur unitaire $U : H \to K$ tel que Φ soit de la forme

$$\Phi(T) = UTU^* \quad \text{pour tout } \ T \in \mathcal{B}(H), \tag{4.1}$$

ou bien

$$\Phi(T) = UT^{tr}U^* \quad \text{pour tout } \ T \in \mathcal{B}(H), \tag{4.2}$$

où T^{tr} est la transposée de l'opérateur T dans une base orthonormée.

Le résultat suivant jouera un rôle important pour démontrer les théorèmes principaux des chapitres suivants. Il donne une description des applications qui vérifient une condition qui va apparaître dans l'étude des applications qui commutent avec la transformation λ-Aluthge pour le produit usuel et le produit de Jordan.

Théorème 4.2. Soit $\Phi : B(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application bijective. On suppose que Φ préserve les projections orthogonales de rang 1 dans les deux directions, et qu'il existe un morphisme $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tel que pour tous vecteurs unitaires x, y avec $\Phi(x \otimes x) = y \otimes y$, on a

$$< \Phi(T)y, y >= h(< Tx, x >) \text{ pour tout } T \in \mathcal{B}(H).$$

Alors Φ est de la forme :

$$\Phi(T) = UTU^*, \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{B}(H), \tag{4.3}$$

ou bien de la forme

$$\Phi(T) = UT^*U^*, \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{B}(H), \tag{4.4}$$

où $U : H \to K$ est un opérateur unitaire ou anti-unitaire.

Il est bien connu que les automorphismes continus de $\mathbb{C}$ sont l'identité et la conjugaison complexe. Le résultat suivant qui donne un critère simple pour qu'un automorphisme de $\mathbb{C}$ soit continu. Ce résultat sera utilisé pour la preuve du Théorème 4.2.

Théorème 4.3. [26] Soit $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un automorphisme de $\mathbb{C}$, (i.e. h est une bijection additive et multiplicative). Si h est borné sur un segment ou un cercle de $\mathbb{C}$, alors h est continu. En particulier, h est l'identité ou la conjugaison complexe.

Démonstration du Théorème 4.2. Nous divisons la preuve du théorème en trois faits :

Étape 1. Dans cette étape on montre que l'automorphisme h est forcément continu. Pour cela, d'après le Théorème 4.3, il suffit de démontrer que h est bornée sur les ensembles bornés de $\mathbb{C}$.

Soit $\mathcal{E}$ une partie bornée de $\mathbb{C}$. Alors on peut trouver $A \in \mathcal{B}(H)$ tel que $\mathcal{E} \subset W(A)$, où $W(A)$ est l'image numérique de l'opérateur A ; par exemple si $\mathcal{E} \subseteq B(0, r)$ pour un réel positif $r \geq 0$, on prend $A = 2rx \otimes y$ avec x, y deux vecteurs orthogonaux de norme 1. D'après les hypothèses on a :

$$h(\mathcal{E}) \subset h(W(A)) = W(\Phi(A)).$$

Puisque $W(\Phi(A))$ est un ensemble convexe borné de $\mathbb{C}$, $h(\mathcal{E})$ est aussi borné. D'où la fonction h envoie un ensemble borné de $\mathbb{C}$ vers un borné de $\mathbb{C}$. Comme h est un morphisme du corps complexe, d'après le Théorème 4.3, h est continu. En particulier h est l'identité ou la conjugaison complexe, i.e. $h(z) = z$ ou bien $h(z) = \bar{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Étape 2. L'application Φ est linéaire ou anti-linéaire.

Soient $y \in K$ un vecteur de norme 1, comme Φ préserve les projections de rang 1 dans les deux sens, il existe $x \in H$ un vecteur unitaire tel que $y \otimes y = \Phi(x \otimes x)$. D'après l'hypothèse et le **Étape 1.** on a les égalités suivantes pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $A, B \in \mathcal{B}(H)$

$$\begin{aligned}
<\Phi(A+B)y, y> &= h(<(A+B)x, x>)\\
&= h(<Ax, x> + <Bx, x>)\\
&= h(<Ax, x>) + h(<Bx, x>)\\
&= <\Phi(A)y, y> + <\Phi(B)y, y>\\
&= <(\Phi(A)+\Phi(B))y, y>,
\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
<\Phi(\alpha A)y, y> &= h(<\alpha Ax, x>)\\
&= h(\alpha)h(<Ax, x>)\\
&= h(\alpha) <\Phi(A)y, y> .
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\forall A, B \in \mathcal{B}(H), \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \Phi(A+B) = \Phi(A) + \Phi(B) \text{ et } \Phi(\alpha A) = h(\alpha)\Phi(A).$$

Puisque h est l'identité ou la conjugaison complexe, il résulte alors que l'application Φ est linéaire ou anti-linéaire.

Étape 3. Il existe un opérateur unitaire ou anti-unitaire $U : H \to K$ tel que l'application Φ prend l'une des formes suivantes

$$\Phi(T) = UTU^*, \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{B}(H).$$

$$\Phi(T) = UT^*U^*, \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{B}(H).$$

D'après **Étape 2.**, on déduit que Φ ou Φ^* est linéaire, où Φ^* est l'application définie par $\Phi^*(T) = (\Phi(T))^*$ pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$.

D'autre part, d'après **Étape 1.**, h est l'identité ou la conjugaison complexe, et donc d'après l'hypothèse Φ vérifie :

$$< \Phi(T)y, y >=< Tx, x >,$$

ou bien

$$< \Phi^*(T)y, y >=< Tx, x >,$$

pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$ et pour tous les vecteurs unitaires x, y tels que $\Phi(x \otimes x) = y \otimes y$.

Par conséquent, on déduit que

$$W(\Phi(T)) = W(T), \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{B}(H),$$

ou bien

$$W(\Phi^*(T)) = W(T) \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{B}(H).$$

Comme conséquence du Théorème 4.1 et de la Remarque 3.1, l'application Φ est de la forme (4.3) ou bien (4.4).

Ce qui complète la preuve du Théorème 4.2. □

CHAPITRE 5

Applications qui commutent avec Δ_λ pour le produit usuel

Dans ce chapitre, nous étudierons les applications $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ qui commutent avec la transformation λ-Aluthge pour le produit usuel.
Le résultat principal dans cette section est d'obtenir une caractérisation complète des applications bijectives $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ (non supposées linéaires) qui satisfont la condition suivante :

$$\Delta_\lambda(\Phi(A)\Phi(B)) = \Phi(\Delta_\lambda(AB)) \quad \text{pour tout} \quad A, B \in \mathcal{B}(H). \tag{5.1}$$

On a le théorème suivant.

Théorème 5.1. Soit H, K deux espaces de Hilbert de dimension supérieure ou égale à deux. Une application $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ bijective satisfait la condition (5.1) avec $\lambda \in]0, 1[$ fixé, si et seulement si, elle est de la forme

$$\Phi(A) = UAU^* \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B}(H),$$

où $U : H \to K$ est unitaire ou anti-unitaire.

Remarque 5.1.

(i) Dans le Théorème 5.1, l'application Φ n'est pas supposée linéaire ou continue. Par contre la linéarité et la continuité sont automatiques.

(ii) En dimension 1, le Théorème 5.1 n'est plus vrai comme le montre l'exemple suivant : soit $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} \text{ si } z \neq 0, \\ 0 \text{ si } z = 0. \end{cases}$$

Il est clair que Φ est une bijection de $\mathbb{C}$ dans lui même et que Φ est multiplicative, et donc elle vérifie la condition (5.1), mais elle n'est pas additive.

Pour démontrer le Théorème 5.1, on a besoin de plusieurs résultats intermédiaires, que nous allons regrouper dans la section suivante.

1. Premiers résultats sur les applications qui commutent avec Δ_λ pour le produit

Dans la suite de cette section, l'application $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ est supposée bijective, et vérifie la condition (5.1).
Dans la proposition suivante, nous introduirons une fonction $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui sera utilisée pour prouver la linéarité de Φ.

Proposition 5.1. L'application Φ vérifie :

$$\Phi(0) = 0.$$

De plus, il existe une fonction bijective $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que :

(i) Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on a $\Phi(\alpha I) = h(\alpha)I$.

(ii) La fonction h est multiplicative ; ($h(\alpha\beta) = h(\alpha)h(\beta)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$).

(iii) En particulier, $h(1) = 1$ et $h(-\alpha) = -h(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Comme $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ est surjective, il existe $A \in \mathcal{B}(H)$ tel que $\Phi(A) = 0$. En appliquant la condition (5.1), on a immédiatement

$$\Phi(0) = \Delta_\lambda(\Phi(A)\Phi(0)) = 0.$$

(i) Montrons l'existence de $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisfaisant $\Phi(\alpha I) = h(\alpha)I$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.
Si $\alpha = 0$ on pose $h(0) = 0$, sachant que $\Phi(0) = 0$. Supposons $\alpha \neq 0$ et posons $R = \Phi(\alpha I)$. En appliquant la condition (5.1), on obtient pour tout $A \in \mathcal{B}(H)$,

$$\Delta_\lambda(R\Phi(A)) = \Phi(\Delta_\lambda(\alpha A)) = \Delta_\lambda(\Phi(A)\Phi(\alpha I)) = \Delta_\lambda(\Phi(A)R). \tag{5.2}$$

L'application Φ étant surjective, par l'égalité (5.2) on obtient

$$\Delta_\lambda(RT) = \Delta_\lambda(TR),$$

pour tout opérateur $T \in \mathcal{B}(K)$ de la forme $T = y \otimes y$. D'après le Théorème 2.6, il existe une constante $h(\alpha) \in \mathbb{C}$ telle que

$$R = \Phi(\alpha I) = h(\alpha)I,$$

Puisque $\alpha \neq 0$ et que Φ est bijective, on a $h(\alpha) \neq 0$. D'autre part l'application Φ est bijective et son inverse Φ^{-1} vérifie la même condition que Φ, par conséquent la fonction $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est bien définie, de plus elle est bijective de $\mathbb{C}$ dans lui même.
(ii) Maintenant, en utilisant la condition (5.1) pour $A = \alpha I$ et $B = \beta I$, on obtient :

$$h(\alpha\beta)I = \Delta_\lambda(\Phi(\alpha\beta I)) = \Delta_\lambda(\Phi(\alpha I)\Phi(\beta I)) = h(\alpha)h(\beta)I, \quad \text{pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Ainsi la fonction h est multiplicative.
(iii) En appliquant (ii), pour $\alpha = \beta = 1$, on trouve que $(h(1))^2 = h(1)$. Puisque h est bijective et que $h(0) = 0$, on a $h(1) = 1$. De la même façon, on obtient $h(-1) = -1$. Finalement, par (ii), on a

$$h(-\alpha) = h(-1)h(\alpha) = -h(\alpha) \;\; \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{C}.$$

□

Comme conséquence directe de la proposition précédente, on a le corollaire suivant :

Corollaire 5.1. L'application Φ vérifie :

(i) $\Phi(I) = I$.

(ii) L'application Φ commute avec la transformation λ-Aluthge. Donc, en particulier, elle préserve l'ensemble des opérateurs quasi-normaux dans les deux sens.

(iii) $\Phi(\alpha A) = h(\alpha)\Phi(A)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et pour tout opérateur quasi-normal $A \in \mathcal{B}(H)$.

La proposition suivante est le point clé pour la démonstration du Théorème 5.1. Elle regroupe des propriétés importantes des applications Φ qui satisfont la condition (5.1).

Proposition 5.2. L'application Φ vérifie les propriétés suivantes :

(1) $\Phi(A^2) = (\Phi(A))^2$ pour tout opérateur quasi-normal $A \in \mathcal{B}(H)$.

(2) Φ préserve l'ensemble des projections orthogonales.

(3) Φ préserve l'orthogonalité entre les projections dans les deux sens ;

$$P \perp Q \Leftrightarrow \Phi(P) \perp \Phi(Q).$$

(4) Φ préserve la relation d'ordre sur les projections orthogonales dans les deux directions ;

$$Q \leq P \Leftrightarrow \Phi(Q) \leq \Phi(P).$$

(5) $\Phi(P + Q) = \Phi(P) + \Phi(Q)$ pour toute projections orthogonales P, Q tels que $P \perp Q$.

(6) Φ préserve l'ensemble des projections de rang 1 dans les deux directions.

Démonstration. (1) Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur quasi-normal ; en particulier A^2 est aussi quasi-normal (voir la Proposition 1.3). D'après le Corollaire 5.1 $\Phi(A), \Phi(A^2), (\Phi(A))^2$ sont quasi-normaux. En appliquant la condition (5.1), on obtient

$$(\Phi(A))^2 = \Delta_\lambda((\Phi(A))^2) = \Phi(\Delta_\lambda(A^2)) = \Phi(A^2).$$

(2) Il se déduit directement de (1) et le fait que les idempotents quasi-normaux sont des projections orthogonales (voir le Corollaire 1.2).
(3) Soient P, Q deux projections orthogonales, telles que ($P \perp Q$). On note $N = \Phi(P)$ et $M = \Phi(Q)$ qui sont aussi des projections. D'après la condition (5.1), on a

$$\Delta_\lambda(MN) = \Delta_\lambda(NM) = 0.$$

D'après le Théorème 2.5, on a

$$(MN)^2 = MNMN = 0 \quad \text{et} \quad (NM)^2 = NMNM = 0.$$

Par conséquent

$$\|MN\|^2 = \|(MN)^* MN\| = \|NMN\| = \|(NMN)^2\|^{\frac{1}{2}} = \|NMNMN\|^{\frac{1}{2}} = 0$$

Ainsi, $NM = MN = 0$.
Finalement Φ préserve l'orthogonalité des projections.
(4) Maintenant, on suppose que $Q \leq P$, et donc

$$PQ = QP = Q.$$

D'après la condition (5.1), on a

$$\Delta_\lambda(\Phi(Q)\Phi(P)) = \Phi(Q).$$

Comme $\Phi(P)$ est une projection orthogonale, la Proposition 2.3, nous montre que

$$\Phi(Q)\Phi(P) = \Phi(P)\Phi(Q) = \Phi(Q).$$

Ce qui donne

$$\Phi(Q) \leq \Phi(P).$$

Puisque Φ est bijective et que l'application réciproque Φ^{-1} satisfait les mêmes conditions que Φ, on voit que Φ préserve la relation d'ordre entre les projections orthogonales dans les deux directions.
(5) Enfin, on suppose que P, Q sont orthogonales ; c'est à dire $PQ = 0$. Donc, $P + Q$ est aussi une projection orthogonale et de plus

$$P \leq P + Q \quad \text{et} \quad Q \leq P + Q.$$

En appliquant le résultat obtenu dans (4) , alors $\Phi(P) \leq \Phi(P+Q)$ et $\Phi(Q) \leq \Phi(P+Q)$. Par (3) les projections $\Phi(P)$ et $\Phi(Q)$ sont orthogonales entre elles , ce qui implique

$$\Phi(P) + \Phi(Q) \leq \Phi(P+Q).$$

Puisque Φ^{-1} satisfait les mêmes propriétés que Φ, on obtient

$$\begin{aligned} \Phi(P+Q) &= \Phi[\Phi^{-1}(\Phi(P)) + \Phi^{-1}(\Phi(Q))] \\ &\leq \Phi[\Phi^{-1}(\Phi(P) + \Phi(Q))] \\ &= \Phi(P) + \Phi(Q). \end{aligned}$$

Finalement

$$\Phi(P+Q) = \Phi(P) + \Phi(Q).$$

(6) Soit $P = x \otimes x$ une projection de rang 1. D'après ce qui précède $\Phi(P)$ est une projection orthogonale différente de zéro. Il reste à montrer que $\Phi(P)$ est de rang 1. En effet, soit $y \in R(\Phi(P)$ avec $\|y\| = 1$, en particulier, $y \otimes y \leq \Phi(P)$. En appliquant (4), on voit que $\Phi^{-1}(y \otimes y) \leq P$. Puisque $P = x \otimes x$ est minimale et que $\Phi^{-1}(y \otimes y)$ est une projection orthogonale non nulle, on obtient $\Phi^{-1}(y \otimes y) = P$ et $\Phi(P) = y \otimes y$. Donc Φ préserve les projections de rang 1 dans les deux sens. □

Le lemme suivant montre que l'application Φ est additive sur les projections orthogonales entre elles.

Lemme 5.1. Soient $P = x \otimes x$, $Q = x' \otimes x'$ deux projections orthogonales de rang 1 telles que $P \perp Q$. Alors, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a l'égalité suivante :

$$\Phi(\alpha P + \beta Q) = h(\alpha)\Phi(P) + h(\beta)\Phi(Q).$$

Démonstration. Si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, le résultat est une conséquence du Corollaire 5.1 (iii). Supposons donc que $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.
D'abord remarquons que $\alpha P + \beta Q$ est un opérateur normal de rang 2. Par conséquent $\Phi(\alpha P + \beta Q)$ est quasi-normal ; en particulier c'est un point fixe de Δ_λ. En utilisant la condition (5.1) on obtient

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha P + \beta Q) &= \Delta_\lambda(\Phi(\alpha P + \beta Q)) \\ &= \Phi(\Delta_\lambda(\alpha P + \beta Q)) \\ &= \Phi\Big(\Delta_\lambda((\alpha P + \beta Q)(P+Q))\Big) \\ &= \Delta_\lambda(\Phi(\alpha P + \beta Q)\Phi(P+Q)). \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\Phi(\alpha P + \beta Q) = \Delta_\lambda(\Phi(\alpha P + \beta Q)\Phi(P+Q)).$$

Puisque $\Phi(P+Q) = \Phi(P) + \Phi(Q)$ est une projection orthogonale, d'après la Proposition 2.3, on trouve

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha P+\beta Q) &= \Phi(\alpha P+\beta Q)(\Phi(P)+\Phi(Q))\\ &= (\Phi(P)+\Phi(Q))\Phi(\alpha P+\beta Q)\\ &= (\Phi(P)+\Phi(Q))\Phi(\alpha P+\beta Q)(\Phi(P)+\Phi(Q)).\end{aligned}$$

Maintenant, on pose $T = \Phi(\alpha P+\beta Q)$. Puisque Φ préserve les projections de rang 1, il existe deux vecteurs orthogonaux $y, y' \in K$ de norme 1, tels que $\Phi(x\otimes x) = y\otimes y$ et $\Phi(x'\otimes x') = y'\otimes y'$. D'après ce qui précède, on a

$$T = (y\otimes y + y'\otimes y')T(y\otimes y + y'\otimes y').$$

Ainsi, par un simple calcul, on déduit que

$$T =< Ty, y > y\otimes y+ < Ty', y > y\otimes y'+ < Ty, y' > y'\otimes y+ < Ty', y' > y'\otimes y'. \tag{5.3}$$

Pour compléter la preuve, il faut montrer que $< Ty', y >=< Ty, y' >= 0$. En utilisant la condition (5.1), alors on a

$$\begin{aligned}\Delta_\lambda(\Phi(\alpha P+\beta Q)\Phi(P)) &= \Phi(\Delta_\lambda((\alpha P+\beta Q)P))\\ &= \Phi(\alpha P) = h(\alpha)\Phi(P).\end{aligned}$$

Ce qui donne,

$$\Delta_\lambda(Ty\otimes y) = \Delta_\lambda(y\otimes T^*y) = h(\alpha)y\otimes y.$$

Puisque $h(\alpha) \neq 0$, alors $T^*y \neq 0$. Par la Proposition 2.2, on déduit que

$$< Ty, y > y\otimes y = \frac{< y, T^*y >}{||T^*y||^2}T^*y\otimes T^*y = h(\alpha)y\otimes y.$$

Ce qui implique que

$$< Ty, y >= h(\alpha) \quad \text{et} \quad T^*y = \overline{h(\alpha)}y.$$

Maintenant, on utilise l'équation (5.3), pour obtenir

$$T^*y =< T^*y, y > y+ < T^*y, y' > y' = \overline{h(\alpha)}y.$$

Puisque les vecteurs y, y' sont libres,

$$< Ty', y >=< T^*y, y' >= 0.$$

De la même manière, on obtient

$$< Ty', y' >= h(\beta) \quad \text{et} \quad < Ty, y' >= 0.$$

Finalement l'équation (5.3) donne

$$T = h(\alpha)y \otimes y + h(\beta)y' \otimes y'.$$

Donc

$$\Phi(\alpha P + \beta Q) = h(\alpha)\Phi(P) + h(\beta)\Phi(Q).$$

□

Maintenant nous sommes en mesure de donner la preuve du Théorème 5.1.

Démonstration du Théorème 5.1. Nous divisons la preuve en trois étapes.

Étape 1. Montrons que pour tout opérateur $A \in \mathcal{B}(H)$ et pour tous vecteurs unitaires $x \in H, y \in K$, tels que $\Phi(x \otimes x) = y \otimes y$ on a :

(5.4) $$< \Phi(A)y, y >= h(< Ax, x >).$$

En effet, Soit $x \in H, y \in K$ deux vecteurs unitaires tels que $\Phi(x \otimes x) = y \otimes y$. D'après (5.1), on a

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda(\Phi(A)y \otimes y) &= \Delta_\lambda(\Phi(A)\Phi(x \otimes x)) \\ &= \Phi(\Delta_\lambda(A(x \otimes x))) \\ &= \Phi(\Delta_\lambda(Ax \otimes x)). \end{aligned}$$

En utilisant la Proposition 2.2, on obtient

$$< \Phi(A)y, y > y \otimes y = \Phi(< Ax, x > x \otimes x) = h(< Ax, x >)y \otimes y.$$

Par conséquent

$$< \Phi(A)y, y >= h(< Ax, x >).$$

Étape 2. Montrons que la fonction h est additive et donc c'est un automorphisme de $\mathbb{C}$.

En effet, Soit $P = x \otimes x$, $Q = x' \otimes x'$ deux projections orthogonales entre elles ($P \perp Q$) et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On pose $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + x')$. Comme conséquence, on a $||z|| = 1$ et $||Pz|| = ||Qz|| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. En particulier, $z \otimes z$ une projection de rang 1. D'après la Proposition 5.2, il existe un vecteur unitaire $u \in K$ tel que $\Phi(z \otimes z) = u \otimes u$. On prend $A = \alpha P + \beta Q$ dans l'identité (5.4), on obtient

$$\begin{aligned} < \Phi(\alpha P + \beta Q)u, u > &= h(< \alpha Pz + \beta Qz, z >) \\ &= h(\alpha ||Pz||^2 + \beta ||Qz||^2) \\ &= h(\frac{1}{2})h(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Ainsi

$$< \Phi(\alpha P + \beta Q)u, u >= h(\frac{1}{2})h(\alpha + \beta). \tag{5.5}$$

D'autre part, d'après le Lemme 5.1 on a

$$\Phi(\alpha P + \beta Q) = h(\alpha)\Phi(P) + h(\beta)\Phi(Q).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} < \Phi(\alpha P + \beta Q)u, u > &= < \Phi(\alpha P)u + \Phi(\beta Q)u, u > \\ &= < \Phi(\alpha P)u, u > + < \Phi(\beta Q)u, u > \\ &= h(< \alpha Pz, z >) + h(< \beta Qz, z >) \\ &= h(\alpha\|Pz\|^2) + h(\beta\|Qz\|^2) \\ &= h(\frac{1}{2})(h(\alpha) + h(\beta)). \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (5.5) et l'égalité précédente, on obtient

$$h(\frac{1}{2})h(\alpha + \beta) = h(\frac{1}{2})(h(\alpha) + h(\beta)).$$

Puisque $h(\frac{1}{2}) \neq 0$, on obtient

$$h(\alpha + \beta) = h(\alpha) + h(\beta).$$

La fonction $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est donc un automorphisme du corps des complexes.

Étape 3. Montrons que l'application Φ est de la forme $\Phi(T) = UTU^*$, $\forall T \in \mathcal{B}(H)$, où $U : H \to K$ est un unitaire ou anti-unitaire .

D'après ce qui précède, l'application Φ satisfait les conditions du Théorème 4.2. En conséquence, Φ est de la forme (4.3) ou bien de la forme (4.4)

Maintenant, supposons par l'absurde que Φ prend la forme (4.4). Puisque Φ commute avec Δ_λ, on a pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$,

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda(T^*) &= \Delta_\lambda(U^*\Phi(T)U) \\ &= U^*\Delta_\lambda(\Phi(T))U \\ &= U^*\Phi(\Delta_\lambda(T))U \\ &= (\Delta_\lambda(T))^*. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\Delta_\lambda(T^*) = (\Delta_\lambda(T))^*, \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{B}(H). \tag{5.6}$$

En particulier, si $T = x \otimes x'$ avec $x, x' \in H$ deux vecteurs linéairement indépendants avec $\|x\| = \|x'\| =< x, x' >= 1$, alors $T^* = x' \otimes x$ et d'après la Proposition 2.2, on trouve

$$\Delta_\lambda(T) = x' \otimes x' \text{ and } \Delta_\lambda(T^*) = x \otimes x.$$

Ce qui contredit l'identité (5.6).

□

2. Applications qui commutent avec Δ_λ pour le produit général

Dans cette section, nous considérons les applications qui commutent avec Δ_λ pour le produit général, c'est-à-dire, les applications $\Phi : B(H) \to \mathcal{B}(K)$, qui satisfont la condition suivante :

$$(5.7) \qquad \Delta_\lambda(\Phi(T_1)\Phi(T_2)...\Phi(T_n)) = \Phi(\Delta_\lambda(T_1T_2...T_n)) \text{ pour tous } T_1, T_2, ..., T_n \in \mathcal{B}(H).$$

où $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Il est facile de vérifier que, si $U : H \to K$ un opérateur unitaire ou anti-unitaire, alors les applications de la forme

$$\mathcal{B}(H) \ni T \mapsto \alpha U T U^* \in \mathcal{B}(K), \quad \text{avec } \alpha^{n-1} = 1,$$

satisfont la condition (5.7) précédente. Dans le théorème suivant, on démontrera que la réciproque est aussi vraie.

Théorème 5.2. Soient H, K deux espaces de Hilbert de dimension supérieure à 2 et $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application bijective. L'application Φ satisfait la condition (5.7) pour un entier naturel $n \geq 2$, si et seulement si il existe un opérateur unitaire ou anti-unitaire $U : H \to K$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\alpha^{n-1} = 1$ tels que

$$\Phi(T) = \alpha U T U^* \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{B}(H).$$

Remarque 5.2. L'application considérée dans le Théorème 5.2 n'est pas supposée linéaire ou continue, cependant, la continuité et la linéarité sont automatiques.

Dans toute la suite de cette section, nous supposons que $n \geq 2$ est un entier naturel et $\Phi : \mathcal{B}(H) \to B(K)$ une application bijective satisfait la condition (5.7).
Pour démontrer le Théorème 5.2, nous avons besoin d'établir quelques lemmes intermédiaires.

Lemme 5.2. Soit $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application bijective qui vérifie la condition (5.7), alors :

(i) $\Phi(0) = 0$;

(ii) $\Phi(I) \in \mathcal{U}_{n-1}(K)$.

Démonstration. (i). Tout d'abord on montre que $\Phi(0) = 0$. En effet, puisque l'application Φ est surjective, il existe $A \in \mathcal{B}(H)$ tel que $\Phi(A) = 0$. En utilisant la condition (5.7), on trouve que

$$\Phi(0) = \Delta_\lambda(\Phi(A)\Phi(0)^{n-1}) = 0.$$

(ii). Maintenant on montre que $\Phi(I) \in \mathcal{U}_n(K)$.
D'abord, on montre que $\Phi(I)$ et $\Phi(I)^*$ sont injectives. En effet, soit $y \in K$ tel que $\Phi(I)y = 0$. Puisque Φ est surjective, pour $y \otimes y \in \mathcal{B}(K)$, il existe $B \in \mathcal{B}(H)$ tel que $\Phi(B) = y \otimes y$. D'après la condition (5.7) avec $T_1 = \cdots = T_{n-1} = I$ et $T_n = B$, on a

$$0 = \Delta_\lambda(\Phi(I)^{n-1} y \otimes y) = \Delta_\lambda((\Phi(I))^{n-1}\Phi(B)) = \Phi(\Delta_\lambda(B)).$$

Puisque Φ est injective et que d'après (i) $\Phi(0) = 0$, on a $\Delta_\lambda(B) = 0$. D'après le Théorème 2.5 $B^2 = 0$, ce qui entraîne que $B^n = 0$. En appliquant cette fois la condition (5.7) avec $T_1 = \cdots = T_n = B$ on obtient

$$(y \otimes y)^n = \Delta_\lambda(\Phi(B)^n) = \Phi(\Delta_\lambda(B^n)) = \Phi(0) = 0,$$

Comme $(y \otimes y)^n = \|y\|^{2n-2} y \otimes y$, il vient $y = 0$. Ce qui montre que $\Phi(I)$ est injective. De la même façon, $\Phi(I)^*$ est aussi injective.
Maintenant d'après la condition (5.7) avec $T_1 = \cdots = T_n = I$, on trouve

$$\Delta_\lambda(\Phi(I)^n) = \Phi(I).$$

Ainsi l'opérateur $\Phi(I)$ vérifie les hypothèse du Théorème 2.8 ; comme conséquence :

$$\Phi(I) \in \mathcal{U}_{n-1}(K).$$

□

Comme conséquence directe du lemme précédent et (5.7), on a le résultat suivant.

Lemme 5.3. Soit $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application bijective qui satisfait la condition (5.7). Alors,

(i) l'application Φ commute avec la transformation λ-Aluthge.

(ii) Il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\Phi(I) = \alpha I$, avec $\alpha^{n-1} = 1$.

Démonstration. (i). Montrons d'abord que Φ commute avec Δ_λ. En effet, d'après le lemme précédent $\Phi(I) \in \mathcal{U}_{n-1}(K)$ et donc $\Phi(I)^{n-1} = 1$. En utilisant la condition (5.7) avec $T_1 = T$ et $T_2 = \cdots = T_n = I$ on obtient l'égalité :

$$\Delta_\lambda(\Phi(T)) = \Delta_\lambda(\Phi(T)(\Phi(I))^{n-1}) = \Phi(\Delta_\lambda(T)) \text{ pour tout } T \in \mathcal{B}(H).$$

Par conséquence Φ commute avec Δ_λ.
(ii). Puisque $\Phi(I) \in \mathcal{U}_{n-1}(K)$ (voir Lemme (5.2)) et Φ commute avec Δ_λ (voir (i)), la Condition (5.7) implique que pour tout $T \in \mathcal{B}(H)$,

$$\Delta_\lambda(\Phi(I)\Phi(T)\Phi(I)^*) = \Delta_\lambda(\Phi(I)\Phi(T)(\Phi(I))^{n-2}) = \Phi(\Delta_\lambda(T)) = \Delta_\lambda(\Phi(T)).$$

Ainsi

$$\Delta_\lambda(\Phi(I)\Phi(T)\Phi(I)^*) = \Delta_\lambda(\Phi(T)), \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{B}(H). \tag{5.8}$$

D'autre part, la surjectivité de Φ, implique que pour tout vecteur unitaire y de K, il existe $T \in \mathcal{B}(H)$ tel que $\Phi(T) = y \otimes y$. D'après l'équation (5.8), on a

$$\Delta_\lambda(\Phi(I)\Phi(T)\Phi(I)^*) = \Phi(I)y \otimes \Phi(I)y = y \otimes y.$$

Il résulte alors que $\Phi(I)y$ et y sont co-linéaires. Donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\Phi(I)y = \alpha y$ pour tout $y \in K$. Par conséquent, $\Phi(I) = \alpha I$ pour un $\alpha \in \mathbb{C}^*$. D'autre part comme $\Phi(I) \in \mathcal{U}_{n-1}(K)$, $\alpha^{n-1} = 1$. □

Démonstration du Théorème 5.2. Supposons que $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ est bijective et satisfait la condition (5.7). Posons $\Psi = \alpha^{-1}\Phi$. D'après le Lemme 5.3 (ii), $\Psi(I) = I$.
De plus pour tout $T_1, T_2, \ldots, T_n \in \mathcal{B}(H)$ on a les égalités :

$$\begin{aligned}
\Delta_\lambda(\Psi(T_1)\Psi(T_2)\ldots\Psi(T_n)) &= \Delta_\lambda(\alpha^{-n}\Phi(T_1)\Phi(T_2)\ldots\Phi(T_n)) \\
&= \alpha^{-1}\Delta_\lambda(\Phi(T_1)\Phi(T_2)\ldots\Phi(T_n)) \\
&= \alpha^{-1}\Phi(\Delta_\lambda(T_1T_2\ldots T_n)) \\
&= \Psi(\Delta_\lambda(T_1T_2\ldots T_n)).
\end{aligned}$$

Ainsi, l'application Ψ satisfait la condition suivante :

$$\Delta_\lambda(\Psi(T_1)\Psi(T_2)\ldots\Psi(T_n)) = \Psi(\Delta_\lambda(T_1T_2\ldots T_n)), \text{ pour tous } T_1, T_2, \ldots, T_n \in \mathcal{B}(H). \tag{5.9}$$

En utilisant l'équation précédente (5.9) avec $T_3 = T_4 = \cdots = T_n = I$, on trouve.

$$\Delta_\lambda(\Psi(T_1)\Psi(T_2)) = \Psi(\Delta_\lambda(T_1T_2)) \text{ pour tout } T_1, T_2 \in \mathcal{B}(H).$$

Par conséquence Ψ commute avec Δ_λ pour le produit usuel. D'après le Théorème 5.1, il existe un opérateur unitaire ou anti-unitaire $U : H \to K$ tel que Ψ soit de la forme

$$\Psi(T) = UTU^* \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{B}(H).$$

Par conséquent

$$\Phi(T) = \alpha\Psi(T) = \alpha UTU^* \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{B}(H),$$

avec $\alpha^{n-1} = 1$. Ce qui complète la preuve du Théorème 5.2. □

CHAPITRE 6

Applications qui commutent avec Δ_λ pour le produit de Jordan

Dans ce chapitre nous considérons les applications qui commutent avec la transformation λ-Aluthge pour le produit de Jordan ; c'est-à-dire, les applications $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ qui satisfont la condition suivante :

$$\Delta_\lambda(\Phi(A) \circ \Phi(B)) = \Phi(\Delta_\lambda(A \circ B)) \quad \text{pour tout } A, B \in \mathcal{B}(H), \tag{6.1}$$

pour un $\lambda \in]0, 1[$ fixé et $A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$, le produit de Jordan de A et B.
Le résultat principal de cette partie est donné dans le théorème suivant :

Théorème 6.1. Soient H, K deux espaces de Hilbert avec la dimension de H supérieure ou égale à 2 et $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application bijective. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Φ satisfait la condition (6.1) pour un certain $\lambda \in]0, 1[$;

(ii) il existe un opérateur unitaire ou anti-unitaire, $U : H \to K$ tel que

$$\Phi(A) = UAU^* \qquad \text{pour tout } A \in \mathcal{B}(H).$$

Remarque 6.1.
1) L'application Φ considérée dans le Théorème 6.1 n'est pas supposée linéaire ou continue.
2) En dimension 1, le résultat du Théorème 6.1 n'est plus vrai (voir la Remarque 5.1).

1. Quelques résultats sur les applications qui commutent avec Δ_λ pour le produit de Jordan

Dans toute la suite de ce paragraphe l'application $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ est supposée bijective et la condition (6.1) vérifiée. Comme conséquence directe on a la proposition suivante.

Proposition 6.1. L'application Φ vérifie les identités suivantes :

$$\Phi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi(I) = I.$$

Démonstration. Puisque l'application Φ est surjective, il existe $A \in \mathcal{B}(H)$ tel que $\Phi(A) = 0$. Par la condition (6.1), on obtient immédiatement que

$$\Phi(0) = \Delta_\lambda(\Phi(0) \circ \Phi(A)) = \Delta_\lambda(0) = 0.$$

Donc $\Phi(0) = 0$. Il reste à démontrer que $\Phi(I) = I$. Pour simplifier les notations, on pose $T = \Phi(I) \in \mathcal{B}(K)$. D'abord montrons que T est injectif. En effet, soit $y \in K$ tel que $Ty = 0$. Encore par la surjectivité de Φ, il existe $B \in \mathcal{B}(H)$ tel que $\Phi(B) = y \otimes y$. Par la condition (6.1) on obtient

$$\Delta_\lambda((y \otimes y) \circ T) = \Delta_\lambda(\Phi(B) \circ T) = \Delta_\lambda(\Phi(B) \circ \Phi(I)) = \Phi(\Delta_\lambda(B)).$$

D'autre part, on a les égalités

$$\frac{1}{2}\Delta_\lambda(Ty \otimes y + y \otimes T^*y) = \frac{1}{2}\Delta_\lambda(y \otimes T^*y) = \Phi(\Delta_\lambda(B)). \tag{6.2}$$

Comme $Ty = 0$,

$$(y \otimes T^*y)^2 =< Ty, y > y \otimes T^*y = 0.$$

D'après le Théorème 2.5, on a

$$\Delta_\lambda(y \otimes T^*y) = 0,$$

et d'après l'équation (6.2) on trouve $\Phi(\Delta_\lambda(B)) = 0$. Comme Φ est bijective et que $\Phi(0) = 0$, $\Delta_\lambda(B) = 0$. Utilisant encore le Théorème 2.5, on conclu que $B^2 = 0$.
Maintenant, en utilisant la condition (6.1), on a

$$\|y\|^2 y \otimes y = \Delta_\lambda(\Phi(B)^2) = \Delta_\lambda(\Phi(B) \circ \Phi(B)) = \Phi(\Delta_\lambda(B^2)) = 0,$$

D'où, $y = 0$ et donc T est injective. De la même façon on démontre que T^* est aussi injective. On applique (6.1), on en déduit que

$$\Delta_\lambda(T^2) = \Delta_\lambda(\Phi(I) \circ \Phi(I)) = \Phi(\Delta_\lambda(I)) = \Phi(I) = T.$$

D'après le Corollaire 2.2, $T = \Phi(I) = I$, ce qui complète la preuve. □

Proposition 6.2. Soit $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application bijective satisfaisant la condition (6.1). Alors

(i) $\Delta_\lambda(\Phi(A)) = \Phi(\Delta_\lambda(A))$ pour tout $A \in \mathcal{B}(H)$.

En particulier Φ préserve les quasi-normaux dans les deux directions.

(ii) $\Phi(A^2) = (\Phi(A))^2$ pour tout $A \in \mathcal{B}(H)$ quasi-normal.

(iii) Φ préserve l'ensemble des projections orthogonales et l'orthogonalité entre les projections dans les deux directions, i.e.

$$P \perp Q \Leftrightarrow \Phi(P) \perp \Phi(Q) \quad \text{pour tous } P, Q \in \mathcal{P}(H).$$

(iv) Φ préserve la relation d'ordre usuelle sur les projections dans les deux directions, i.e.

$$Q \leq P \Leftrightarrow \Phi(Q) \leq \Phi(P).$$

(v) $\Phi(P + Q) = \Phi(P) + \Phi(Q)$ pour toutes projections orthogonales P, Q telles que $P \perp Q$.

(vi) Φ préserve les projections de rang 1 dans les deux directions.

Démonstration. (i). Puisque $\Phi(I) = I$ (voir Proposition 6.1), on prenant $B = I$ dans (6.1), on trouve

$$\Delta_\lambda(\Phi(A)) = \Phi(\Delta_\lambda(A)) \;\text{ pour tout }\; A \in \mathcal{B}(H).$$

(ii). Soit $A \in \mathcal{B}(H)$ quasi-normal, puisque Φ préserve les opérateurs quasi-normaux, alors les opérateurs $\Phi(A), \Phi(A^2)$ et $(\Phi(A))^2$ sont aussi des opérateurs quasi-normaux. En appliquant (6.1), on trouve

$$\Delta_\lambda((\Phi(A))^2) = \Phi(\Delta_\lambda(A^2)).$$

D'après le Lemme 2.1, on obtient $(\Phi(A))^2 = \Phi(A^2)$.
(iii). C'est une conséquence directe de (i) et (ii).
Dans la suite de la preuve, P, Q désignent deux projections orthogonales.
(iv). Supposons que $P \perp Q$. D'après (iii), les opérateurs $\Phi(P), \Phi(Q)$ sont des projections. En particulier, l'opérateur $\Phi(P) \circ \Phi(Q)$ est auto-adjoint et donc, $\Delta_\lambda(\Phi(P) \circ \Phi(Q)) = \Phi(P) \circ \Phi(Q)$. En utilisant la condition (6.1), on trouve les égalités suivantes :

$$\Phi(P) \circ \Phi(Q) = \Delta_\lambda(\Phi(P) \circ \Phi(Q)) = \Phi(\Delta_\lambda(P \circ Q)) = 0.$$

Ainsi

$$\Phi(P)\Phi(Q) + \Phi(Q)\Phi(P) = 0. \tag{6.3}$$

En multipliant à droite et à gauche l'équation (6.3) par $\Phi(P)$, on obtient

$$\Phi(P)\Phi(Q) + \Phi(P)\Phi(Q)\Phi(P) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi(P)\Phi(Q)\Phi(P) + \Phi(Q)\Phi(P) = 0. \tag{6.4}$$

Il résulte directement de (6.3) et (6.4) que :

$$\Phi(P)\Phi(Q) = \Phi(Q)\Phi(P) = 0.$$

(v). Maintenant, Suppose que $Q \leq P$, par (6.1) on obtient

$$\Phi(P) \circ \Phi(Q) = \Delta_\lambda(\Phi(P) \circ \Phi(Q)) = \Phi(\Delta_\lambda(P \circ Q)) = \Phi(Q).$$

D'où

$$\Phi(Q) \leq \Phi(P).$$

La preuve de (vi) et (vii) est similaire à celle de la Proposition 5.2 (5) et (6). □

Dans la proposition suivante, nous introduisons la fonction $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, qui sera utilisée plus tard pour prouver la linéarité de l'application Φ.

Proposition 6.3. Soit $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application bijective satisfaisant la condition (6.1). Alors, il existe une fonction bijective $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que :

$$h(0) = 0 \quad \text{et} \quad h(1) = 1.$$

De plus h admet les propriétés suivantes :

(i) $\Phi(\alpha I) = h(\alpha)I$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

(ii) $h(\alpha\beta) = h(\alpha)h(\beta)$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(iii) $h(-\alpha) = -h(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

(iv) $\Phi(\alpha A) = h(\alpha)\Phi(A)$ pour tous $A \in \mathcal{B}(H)$ quasi-normal et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Démonstration. D'abord, montrons l'existence de la fonction

$$h : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \text{telle que } \Phi(\alpha I) = h(\alpha)I \ \text{ pour tout } \ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Si $\alpha \in \{0, 1\}$, prendre $h(\alpha) = \alpha$, puisque l'égalité $\Phi(\alpha I) = \alpha I$ est vraie dans ce cas. Supposons que $\alpha \notin \{0, 1\}$. Soit $y \in K$ un vecteur unitaire. D'après la Proposition 6.2 (iii) et (vii), il existe une projection de rang 1, $P = x \otimes x$, telle que $\Phi(P) = y \otimes y$. Ensuite par la condition (6.1) avec $A = P$ et $B = \alpha P$, on obtient

$$\Delta_\lambda\Big(\Phi(\alpha P) \circ \Phi(P)\Big) = \Phi(\Delta_\lambda(\alpha P)) = \Phi(\alpha P).$$

Puisque $\Phi(P)$ est une projection de rang 1, d'après la Proposition 2.5, il existe $h_P(\alpha) \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$\Phi(\alpha P) = h_P(\alpha)\Phi(P).$$

Φ étant bijective et $\alpha \neq 0$, $h_P(\alpha) \neq 0$.

D'autre part, en utilisant (6.1) avec $A = \alpha I$ et $B = P$, on obtient

$$\Delta_\lambda\Big(\Phi(\alpha I) \circ \Phi(P)\Big) = \Phi(\alpha P) = h_p(\alpha)\Phi(P).$$

Ainsi

$$\Delta_\lambda\Big(\frac{\Phi(\alpha I)}{h_p(\alpha)} \circ \Phi(P)\Big) = \Phi(P).$$

Puisque $\Phi(P)$ est une projection de rang 1, d'après la Proposition 2.4, on a

$$\Phi(P)\Phi(\alpha I) = h_P(\alpha)\Phi(P).$$

D'où

$$y \otimes \Phi(\alpha I)^* y = h_P(\alpha) y \otimes y.$$

Donc, en particulier les vecteurs $\Phi(\alpha I)^* y$ et y sont co-linéaires, pour tout vecteur unitaire $y \in K$. Comme conséquence, $\Phi(\alpha I)$ est un multiple scalaire de l'identité. Donc il existe $h(\alpha) \in \mathbb{C}$ tel que $\Phi(\alpha I) = h(\alpha)I$.
Comme l'application Φ est bijective et comme Φ^{-1} vérifie les mêmes propriétés que Φ, la fonction $h : \mathbb{C} \ni \alpha \to h(\alpha) \in \mathbb{C}$ est bien définie, de plus elle est bijective.
(ii). Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Si on prend $A = \alpha I$ et $B = \beta I$ dans (6.1), alors

$$h(\alpha)h(\beta)I = \Delta_\lambda(\Phi(\alpha I) \circ \Phi(\beta I)) = \Phi(\Delta_\lambda(\alpha I \circ \beta I) = h(\alpha\beta)I.$$

Ce qui montre que h est multiplicative.
(iii). D'après (ii), on a $(h(-1))^2 = 1$ et comme h est bijective et $h(1) = 1$, on voit que $h(-1) = -1$. Ainsi

$$h(-\alpha) = h(-1)h(\alpha) = -h(\alpha) \ \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{C}.$$

(iv). Soit A un opérateur quasi-normal et $\alpha \in \mathbb{C}$, en particulier αA est aussi quasi-normal. Puisque Φ préserve l'ensemble des opérateurs quasi-normaux, par la condition (6.1), on obtient

$$h(\alpha)\Phi(A) = \Delta_\lambda(\Phi(A) \circ \Phi(\alpha I)) = \Phi(\Delta_\lambda(\alpha A)) = \Phi(\alpha A).$$

Et la Proposition est démontrée. □

Lemme 6.1. Soient $P = x \otimes x$, $P' = x' \otimes x'$ deux projections orthogonales de rang 1 telles que $P \perp P'$ (c'est-à-dire $< x, x' >= 0$). Alors, on a

$$\Phi(\alpha P + \beta P') = h(\alpha)\Phi(P) + h(\beta)\Phi(P'), \ \text{ pour tout } \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. Si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ le résultat découle de la proposition précédente. Supposons maintenant que $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$. Remarquons que

$$(\alpha P + \beta P') \circ (P + P') = \alpha P + \beta P'.$$

D'après la condition (6.1), appliquée à $A = P + P'$ et $B = \alpha P + \beta P'$, on obtient

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha P + \beta P') &= \Phi(\Delta_\lambda(\alpha P + \beta P'))\\ &= \Phi(\Delta_\lambda((\alpha P + \beta P') \circ (P + P')))\\ &= \Delta_\lambda(\Phi(\alpha P + \beta P') \circ \Phi(P + P'))\\ &= \Delta_\lambda(\Phi(\alpha P + \beta P') \circ (\Phi(P) + \Phi(P'))).\end{aligned}$$

Ce qui entraîne :

$$\Phi(\alpha P + \beta P') = \Delta_\lambda\Big(\Phi(\alpha P + \beta P') \circ \Phi(P) + \Phi(\alpha P + \beta P') \circ \Phi(P')\Big). \tag{6.5}$$

Appliquant de nouveau (6.1) à $A = P$ et $B = \alpha P + \beta P'$, on trouve :

$$\begin{aligned}\Delta_\lambda\Big(\Phi(\alpha P + \beta P') \circ \Phi(P)\Big) &= \Delta_\lambda(\Phi((\alpha P + \beta P') \circ P)))\\ &= \Phi(\Delta_\lambda(\alpha P)) \qquad (\text{sachant } (\alpha P + \beta P') \circ P = \alpha P)\\ &= \Phi(\alpha P) = h(\alpha)\Phi(P).\end{aligned}$$

Ainsi
$$\Delta_\lambda\Big(\frac{\Phi(\alpha P + \beta P')}{h(\alpha)} \circ \Phi(P)\Big) = \Phi(P).$$

D'après la Proposition 2.4, on a

$$\Phi(P)\Phi(\alpha P + \beta P') = h(\alpha)\Phi(P). \tag{6.6}$$

De la même manière, on obtient

$$\Phi(P')\Phi(\alpha P + \beta P') = h(\beta)\Phi(P'). \tag{6.7}$$

Pour simplifier les notation, on pose $T = \Phi(\alpha P + \beta P')$, $\Phi(P) = y \otimes y$ et $\Phi(P') = y' \otimes y'$. Puisque P et P' sont orthogonales entre elles, les vecteurs y et y' sont aussi orthogonaux. D'après les équations (6.6) et (6.7), on obtient :

$$T^* y = \overline{h(\alpha)} y \quad \text{et} \quad T^* y' = \overline{h(\beta)} y',$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha P + \beta P') \circ \Phi(P) &= \frac{1}{2}(h(\alpha)\Phi(P) + \Phi(\alpha P + \beta P')\Phi(P))\\ &= \frac{1}{2}((h(\alpha)y + Ty) \otimes y),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha P + \beta P') \circ \Phi(P') &= \frac{1}{2}(h(\beta)\Phi(P') + \Phi(\alpha P + \beta P')\Phi(P'))\\ &= \frac{1}{2}((h(\alpha)y' + Ty') \otimes y').\end{aligned}$$

En utilisant les égalités précédentes et l'équation (6.5), on trouve que

$$T = \frac{1}{2}\Delta_\lambda\Big((h(\alpha)y + Ty)\otimes y + (h(\alpha)y' + Ty')\otimes y'\Big). \tag{6.8}$$

D'après la Remarque 2.3 et l'équation (6.8), on déduit que T et T^* sont de rang inférieur ou égal à deux. De plus $\mathcal{R}(T), \mathcal{R}(T^*) \subseteq \mathrm{vect}\{y, y'\}$. Puisque $T^*y = \overline{h(\alpha)}y$ et $T^*y' = \overline{h(\beta)}y'$ et puisque y, y' sont linéairement indépendants, T s'écrit comme

$$T = h(\alpha)y\otimes y + h(\beta)y'\otimes y'.$$

Finalement

$$T = \Phi(\alpha P + \beta P') = h(\alpha)\Phi(P) + h(\beta)\Phi(P'),$$

Ce qui achève la preuve du Lemme 6.1. □

Remarque 6.2. Si $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application bijective, qui vérifie (6.1), alors d'après (iii) et (iv) de la Proposition 6.2, l'application Φ préserve l'ensemble des projections orthogonales de rang 1 dans les deux directions et aussi l'orthogonalité entre ces projection. Comme conséquence, pour deux vecteurs $x, x' \in H$ de norme 1 et qui sont orthogonaux entre eux, il existe des vecteurs $y, y' \in K$ de norme 1 et qui sont aussi orthogonaux entre eux, tels que

$$\Phi(x\otimes x) = y\otimes y, \quad \text{et} \quad \Phi(x'\otimes x') = y'\otimes y'.$$

Avec les notations précédentes on a le lemme suivant.

Lemme 6.2. Soient $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application bijective vérifiant (6.1). Alors, il existe une constante $\mu \in \mathbb{C}$ de module $|\mu| = 1$, telle que

$$\Phi(x\otimes x' + x'\otimes x) = \mu y\otimes y' + \bar{\mu}y'\otimes y).$$

En particulier, on a

$$h(2) = 2 \quad \text{et} \quad h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

Démonstration. On pose $A = x\otimes x' + x'\otimes x$. Remarquons d'abord que A est un opérateur auto-adjoint de rang deux. Par un simple calcul on a

$$A^2 = x\otimes x + x'\otimes x',$$

Ainsi A^2 est une projection orthogonale de rang deux. Comme $Tr(A) = 0$, alors le spectre A est $\sigma(A) = \{-1, 0, 1\}$. Par la décomposition spectrale de A, il existe deux vecteurs unitaires et orthogonaux $f_1, f_2 \in H$ tels que

$$A = f_1\otimes f_1 - f_2\otimes f_2. \tag{6.9}$$

D'autre part, si on pose $T = \Phi(A)$, par le Lemme 6.1, on a

$$\begin{aligned} T &= \Phi(f_1 \otimes f_1 - f_2 \otimes f_2) \\ &= \Phi(f_1 \otimes f_1) + h(-1)\Phi(f_2 \otimes f_2) \\ &= \Phi(f_1 \otimes f_1) - \Phi(f_2 \otimes f_2). \end{aligned}$$

Maintenant puisque $\Phi(f_1 \otimes f_1)$ et $\Phi(f_2 \otimes f_2)$ sont des projections orthogonales, on déduit que $T = \Phi(A)$ est aussi un opérateur auto-adjoint de rang deux, et que

$$tr(T) = tr(\Phi(f_1 \otimes f_1)) - tr(\Phi(f_2 \otimes f_2)) = 0.$$

Comme l'opérateur A est auto-adjoint, d'après (ii) et (vi) de la Proposition 6.2 et la condition (6.1), on obtient

$$T^2 = \Phi(A)^2 = \Phi(A^2) = \Phi(x \otimes x + x' \otimes x') = y \otimes y + y' \otimes y'.$$

De plus, on a

$$T^2 = y \otimes y + y' \otimes y'. \tag{6.10}$$

Ainsi $y, y' \in \mathcal{R}(T)$, et donc

$$\mathcal{R}(T) = \mathrm{vect}\{y, y'\}.$$

En outre, il est facile de vérifier que $A = 2A \circ (x \otimes x)$; en utilisant la condition (6.1), on trouve alors que

$$\begin{aligned} T = \Delta_\lambda(T) &= \Delta_\lambda(\Phi(2A \circ (x \otimes x)) \\ &= h(2)\Phi(\Delta_\lambda(A \circ (x \otimes x))) \\ &= h(2)\Delta_\lambda(\Phi(A) \circ \Phi(x \otimes x))) \\ &= h(2)\Delta_\lambda(T \circ (y \otimes y)). \end{aligned}$$

Ainsi

$$T = \frac{h(2)}{2}\Delta_\lambda(Ty \otimes y + y \otimes T^* y) = \frac{h(2)}{2}(Ty \otimes y + y \otimes Ty). \tag{6.11}$$

En appliquant la trace, alors on a

$$tr(T) = h(2) < Ty, y >= 0.$$

En conséquence, on obtient $< Ty, y >= 0$. D'autre part, puisque $\{y, y'\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{R}(T)$, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $Ty = \mu y'$. D'après l'équation (6.11) on obtient

$$T = \frac{h(2)}{2}(\mu y' \otimes y + \bar{\mu} y \otimes y'). \tag{6.12}$$

En particulier,

$$Ty = \frac{h(2)}{2}\mu y' = \mu y'.$$

D'où $h(2) = 2$ et comme h est multiplicative, $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Maintenant, l'équation (6.12) donne

$$T = \mu y' \otimes y + \bar{\mu} y \otimes y'.$$

Ce qui entraîne que

$$T^2 = |\mu|^2 (y \otimes y + y' \otimes y') = y \otimes y + y' \otimes y'.$$

En particulier, $|\mu| = 1$. Ce qui achève la preuve du Lemme 6.2. □

Comme conséquence directe du résultat précédent, on trouve le lemme suivant.

Lemme 6.3. La fonction $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie dans la Proposition 6.3 est un automorphisme du corps des complexes.

Démonstration. D'après (ii) de la Proposition 6.3, la fonction h est multiplicative ; il reste à démontrer que h est additive.
Soient $x, x' \in H$ deux vecteurs unitaires et orthogonaux de H et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On note par

$$P = x \otimes x, \;\; P' = x' \otimes x', \;\; Q = \Phi(P) = y \otimes y, \;\; Q' = \Phi(P') = y' \otimes y'.$$

Maintenant soit $A = x \otimes x' + x' \otimes x$, et $B = \alpha P + \beta P'$. Tout d'abord, remarquons que

$$A \circ P = \frac{1}{2}A \;\text{ et }\; A \circ P' = \frac{1}{2}A,$$

En particulier on a l'égalité suivante :

$$A \circ B = \frac{\alpha + \beta}{2}A.$$

D'après le Lemme 6.1, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ telle que $|\mu| = 1$ et que

$$\Phi(A) = \mu y \otimes y' + \bar{\mu} y' \otimes y.$$

Par un calcul simple on obtient l'égalité suivante :

$$\Phi(P) \circ \Phi(A) = Q \circ \Phi(A) = \frac{1}{2}\Phi(A).$$

D'après les égalités précédentes, le Lemme (6.1) et la condition (6.1), alors on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} h(\frac{\alpha+\beta}{2})\Phi(A) &= \Phi(\frac{\alpha+\beta}{2}A) = \Phi(\Delta_\lambda(\frac{\alpha+\beta}{2}(A))) \\ &= \Phi(\Delta_\lambda(A\circ B)) = \Delta_\lambda(\Phi(B)\circ\Phi(A)) \\ &= \Delta_\lambda\Big(\Phi(\alpha P+\beta P')\circ\Phi(A)\Big) \\ &= \Delta_\lambda\Big(\Phi(\alpha P)\circ\Phi(A)+\Phi(\beta P')\circ\Phi(A)\Big) \\ &= \Delta_\lambda\Big(h(\alpha)\Phi(P)\circ\Phi(A)+h(\beta)\Phi(P')\circ\Phi(A)\Big) \\ &= \frac{1}{2}(h(\alpha)+h(\beta))\Phi(A). \end{aligned}$$

Puisque $h(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ (voir le Lemme 6.2), on déduit que

$$\frac{1}{2}h(\alpha+\beta)=h(\frac{\alpha+\beta}{2})=\frac{1}{2}(h(\alpha)+h(\beta)).$$

Finalement $h(\alpha+\beta)=h(\alpha)+h(\beta)$ pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, et la fonction h est additive. □

Lemme 6.4. La fonction $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie dans la Proposition 6.3 vérifie la propriété suivante :
pour tout $A\in\mathcal{B}(H)$, et pour tous $x\in H, y\in K$ de norme 1 tels que $\Phi(x\otimes x)=y\otimes y$, on a

$$<\Phi(A)y,y>=h(<Ax,x>). \tag{6.13}$$

Démonstration. Soient $A\in\mathcal{B}(H)$, et $x\in H, y\in K$ deux vecteurs unitaires tels que $\Phi(x\otimes x)=y\otimes y$. On note

$$T=2(A\circ(x\otimes x))=Ax\otimes x+x\otimes A^*x$$

Il est clair que T est un opérateur de rang inférieur ou égal à deux. Soient α_1,α_2 les valeurs propres de T. Par la décomposition de Schur de T, il existe deux vecteurs unitaires e_1,e_2 et $\beta\in\mathbb{C}$ tels que T s'écrive sous la forme

$$T=\alpha_1e_1\otimes e_1+\alpha_2e_2\otimes e_2+\beta e_1\otimes e_2. \tag{6.14}$$

Montrons d'abord que

$$tr(\Delta_\lambda(\Phi(T)))=2h(<Ax,x>). \tag{6.15}$$

On distingue deux cas :
Cas 1 : Si $\alpha_1=\alpha_2=0$, alors d'après l'équation (6.14), on a $T=\beta e_1\otimes e_2$ et donc $T^2=0$. Par conséquent $\Delta_\lambda(T)=0$ (voir le Théorème 2.5). Puisque Φ commute avec Δ_λ, on a

$$\Delta_\lambda(\Phi(T))=\Phi(\Delta_\lambda(T))=0.$$

Par conséquent,

$$tr(T) = 2 < Ax, x >= 0 = tr(\Delta_\lambda(\Phi(T))).$$

D'où l'équation (6.15) est satisfaite.
Cas 2 : Maintenant on suppose que $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$. Remarquons que

$$T \circ (e_1 \otimes e_1) = \frac{1}{2}(e_1 \otimes (\bar{\beta} e_2 + 2\bar{\alpha}_1 e_1)) = \frac{1}{2}(e_1 \otimes v),$$

où $v = \bar{\beta} e_2 + 2\bar{\alpha}_1 e_1$ et $< e_1, v >= 2\alpha_1$. D'après la Proposition 2.2, il vient que

$$\Delta_\lambda(T \circ (e_1 \otimes e_1)) = \frac{1}{2}\Delta_\lambda((e_1 \otimes v) = \alpha_1 \frac{1}{||v||^2}(v \otimes v).$$

D'après la condition (6.1), on obtient l'égalité :

$$\begin{aligned} h(\alpha_1)\Phi(\frac{1}{||v||^2}(v \otimes v)) &= \Phi(\Delta_\lambda(T \circ (e_1 \otimes e_1))) \\ &= \Delta_\lambda(\Phi(T) \circ \Phi(e_1 \otimes e_1)). \end{aligned}$$

On a aussi

$$T \circ (e_2 \otimes e_2) = \frac{1}{2}(\beta e_1 + 2\alpha_2 e_2) \otimes e_2.$$

D'où

$$\Delta_\lambda(T \circ (e_2 \otimes e_2)) = \alpha_2 e_2 \otimes e_2.$$

(6.1) de nouveau implique que

$$\begin{aligned} h(\alpha_2)\Phi(e_2 \otimes e_2) &= \Phi(\Delta_\lambda(T \circ (e_2 \otimes e_2))) \\ &= \Delta_\lambda(\Phi(T) \circ \Phi(e_2 \otimes e_2)). \end{aligned}$$

Remarquons que $T \circ (e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) = T$. En appliquant (6.1), on trouve que

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda(\Phi(T)) &= \Phi(\Delta_\lambda(T \circ (e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2))) \\ &= \Delta_\lambda(\Phi(T) \circ \Phi(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2)) \\ &= \Delta_\lambda(\Phi(T) \circ \Phi(e_1 \otimes e_1) + \Phi(T) \circ \Phi(e_2 \otimes e_2)). \end{aligned}$$

Puisque $\Phi(\frac{1}{\|v\|^2}(v\otimes v))$ et $\Phi(e_2\otimes e_2)$ sont des projections, on peut écrire

$$\begin{aligned} tr(\Delta_\lambda(\Phi(T))) &= tr(\Delta_\lambda(\Phi(T)\circ\Phi(e_1\otimes e_1)+\Phi(T)\circ\Phi(e_2\otimes e_2))) \\ &= tr(\Phi(T)\circ\Phi(e_1\otimes e_1)+\Phi(T)\circ\Phi(e_2\otimes e_2)) \\ &= tr(\Phi(T)\circ\Phi(e_1\otimes e_1))+tr(\Phi(T)\circ\Phi(e_2\otimes e_2)) \\ &= tr(h(\alpha_1)\Phi(\frac{1}{\|v\|^2}(v\otimes v))+tr(h(\alpha_2)\Phi(e_2\otimes e_2)) \\ &= h(\alpha_1)+h(\alpha_2) \\ &= h(\alpha_1+\alpha_2)=h(tr(T)) \\ &= 2h(< Ax,x >). \end{aligned}$$

Maintenant montrons l'équation :

$$tr(\Delta_\lambda(\Phi(T))=2< \Phi(A)y,y > . \tag{6.16}$$

D'après la condition (6.1) et $h(2)=2$, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda(\Phi(T)) &= \Delta_\lambda(\Phi(2A\circ(x\otimes x))=\Delta_\lambda(h(2)\Phi(A\circ(x\otimes x)) \\ &= h(2)\Phi(\Delta_\lambda(A\circ(x\otimes x))) \\ &= 2\Delta_\lambda(\Phi(A)\circ\Phi(x\otimes x)) \\ &= 2\Delta_\lambda(\Phi(A)\circ(y\otimes y)). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} tr(\Delta_\lambda(\Phi(T)) &= 2tr(\Delta_\lambda(\Phi(A)\circ(y\otimes y)))=2tr(\Phi(A)\circ(y\otimes y)) \\ &= 2< \Phi(A)y,y > . \end{aligned}$$

Les équations (6.15) et (6.16), entraînent que

$$< \Phi(A)y,y >= h(< Ax,x >),$$

pour tout $A\in\mathcal{B}(H)$ et pour tout vecteurs unitaires $x\in H$ et $y\in K$, tels que $\Phi(x\otimes x)=y\otimes y$. Ce qui complète la preuve du Lemme 6.4. □

Démonstration du Théorème 6.1. D'après les Lemmes 6.3 et 6.4, on déduit que l'application Φ satisfait les conditions du Théorème 4.2. En conséquence, il existe un opérateur unitaire ou anti-unitaire $U: H\to K$, tel que Φ prenne l'une des formes

$$\Phi(T)=UTU^* \quad \text{pour tout} \quad T\in\mathcal{B}(H), \tag{6.17}$$

ou

$$\Phi(T)=UT^*U^* \quad \text{pour tout} \quad T\in\mathcal{B}(H). \tag{6.18}$$

La suite de la preuve est la même que celle du Théorème 5.1, □

2. Applications qui commutent avec Δ_λ pour le star-produit de Jordan

Dans cette dernière section, nous considérons les applications bijectives $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$, qui satisfont la condition suivante

$$\Delta_\lambda(\Phi(A) \circ (\Phi(B))^*) = \Phi(\Delta_\lambda(A \circ B^*)) \quad \text{pour tous} \quad A, B \in \mathcal{B}(H). \tag{6.19}$$

Sous les mêmes hypothèses du Théorème 6.1, on a le résultat suivant.

Théorème 6.2. Soit $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application bijective. Alors, Φ satisfait la condition (6.19), si et seulement si, il existe un opérateur unitaire $U \in \mathcal{B}(H, K)$ tel que

$$\Phi(A) = UAU^* \quad \text{pour tout} \quad A \in \mathcal{B}(H).$$

Remarque 6.3. Pour la démonstration du Théorème 6.2, on suit les mêmes arguments que ceux développés dans la preuve du Théorème 6.1.
Par exemple, si $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ est bijective et satisfait la condition (6.19), alors

(i) $\Phi(0) = 0$,

(ii) $\Phi(I) = I$,

(iii) $\Delta_\lambda(\Phi(A)) = \Phi(\Delta_\lambda(A))$ et $\Delta_\lambda((\Phi(A))^*) = \Phi(\Delta_\lambda(A^*))$ pour tout $A \in \mathcal{B}(H)$,

(iv) Φ préserve l'ensemble des opérateurs quasi-normaux dans les deux directions,

(v) Φ préserve aussi les opérateurs auto-adjoints.

Démonstration. (i). Puisque Φ est surjective, il existe $B \in \mathcal{B}(H)$ tel que $\Phi(B) = 0$. Ainsi d'après (6.19) on trouve

$$\Phi(0) = \Delta_\lambda(\Phi(0) \circ \Phi(B)^*) = 0.$$

(ii). Notons par $T := \Phi(I)$ et montrons d'abord que l'opérateur T est injectif. En effet soit, $y \in K$ tel que $Ty = 0$. Comme Φ est surjective, il existe $B \in \mathcal{B}(H)$ tel que $\Phi(B) = y \otimes y$. D'après (6.19), on a $\Delta_\lambda(T \circ y \otimes y) = y \otimes y$. D'où $y \otimes y = 0$, ce qui implique $y = 0$ et T injectif. La condition (6.19) implique de nouveau que $T \circ T^* = T$. En particulier T est auto-adjoint et que $T^2 = T \circ T^* = T$. Puisque T est injectif, $T = I$. En appliquant la condition (6.19), on obtient immédiatement les égalités demandées.
(iii) et (iv) découlent de (ii).
(v). Soit B est un opérateur auto-adjoint, et $S := \Phi(B)$. Par (iii) S est quasi-normal, et d'après (6.19) avec $A = I$ on obtient $\Delta(S^*) = S$. En utilisant le Lemme 2.5, on voit que $S = S^*$. Ce qui montre que Φ préserve les opérateurs auto-adjoints. □

3. Applications qui commutent avec Δ_λ pour le produit de Jordan général

Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Le produit de Jordan général des opérateurs $T_1, T_2, ..., T_n \in \mathcal{B}(H)$ est défini par
$$T_1 \circ T_2 \circ ... \circ T_n = \frac{1}{2}(T_1T_2...T_n + T_n...T_2T_1).$$
Si $n = 2$, on trouve la définition du produit de Jordan usuel ;
$$T_1 \circ T_2 = \frac{1}{2}(T_1T_2 + T_2T_1).$$
Si $n = 3$, c'est le triple produit de Jordan
$$\{T_1, T_2, T_3\} = T_1 \circ T_2 \circ T_3 = \frac{1}{2}(T_1T_2T_3 + T_3T_2T_1).$$
Dans cette section, nous étudions les applications $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ qui satisfont la condition suivante :

$$\Delta_\lambda(\Phi(T_1) \circ \Phi(T_2) \circ ... \circ \Phi(T_n)) = \Phi(\Delta_\lambda(T_1 \circ T_2 \circ ... \circ T_n)), \forall T_1, ..., T_n \in \mathcal{B}(H), \tag{6.20}$$

Le résultat principal de cette section est donné dans le théorème suivant.

Théorème 6.3. Soit $\Phi : B(H) \to \mathcal{B}(K)$ une application bijective. Alors, Φ satisfait la condition (6.20), si et seulement si, il existe un opérateur unitaire ou anti-unitaire $U : H \to K$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\alpha^{n-1} = 1$ tels que
$$\Phi(T) = \alpha UTU^* \qquad \text{pour tout } T \in \mathcal{B}(H).$$

Remarque 6.4. Pour démontrer le Théorème 6.3, nous allons utiliser le résultat du Théorème 6.1.

Démonstration du Théorème 6.3. Il facile de voir que si Φ est de la forme $T \to \alpha UTU^*$ avec $\alpha^{n-1} = 1$, alors Φ vérifie la condition (6.20). On montre le sens direct. Nous divisons la preuve en quelques faits.

Étape 1. Montrons que $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(I) \in \mathcal{U}_{n-1}(K)$.

Montrons d'abord que $\Phi(0) = 0$. Puisque Φ est surjective, il existe $A \in \mathcal{B}(H)$ tel que $\Phi(A) = 0$. En utilisant la condition (6.20) avec $T_1 = A$ et $T_2 = \cdots = T_n = 0$, on trouve :
$$\Phi(0) = \frac{1}{2}\Delta_\lambda(\Phi(A)\Phi(0)^{n-1} + \Phi(0)^{n-1}\Phi(A)) = 0.$$
Ce qui implique $\Phi(0) = 0$.

Maintenant, démontrons que $\Phi(I) \in \mathcal{U}_n(K)$. D'abord, montrons que $\Phi(I)$ et $\Phi(I)^*$ sont injectifs. En effet, soit $y \in K$ tel que $\Phi(I)y = 0$, en particulier $\Phi(I)^{n-1}y = 0$. Puisque l'application Φ est surjective, il existe $B \in \mathcal{B}(H)$ tel que

$\Phi(B) = y \otimes y$. D'après la condition (6.20), avec $T_1 = T_2 = \cdots = T_{n-1}$ et $T_n = B$ on obtient les égalités :

$$\begin{aligned}
\Phi(\Delta_\lambda(B)) &= \frac{1}{2}\Delta_\lambda(\Phi(I)^{n-1}\Phi(B) + \Phi(B)\Phi(I)^{n-1}) \\
&= \frac{1}{2}\Delta_\lambda(\Phi(I)^{n-1}y \otimes y + y \otimes (\Phi(I)^*)^{n-1}y) \\
&= \frac{1}{2}\Delta_\lambda(y \otimes (\Phi(I)^*)^{n-1}y).
\end{aligned}$$

D'où

$$\Phi(\Delta_\lambda(B)) = \frac{1}{2}\Delta_\lambda(y \otimes (\Phi(I)^*)^{n-1}y). \tag{6.21}$$

On a les deux cas suivants :

Cas 1 : Si $\Phi(I)^*)^{n-1}y = 0$, alors $\Phi(\Delta_\lambda(B)) = 0$. Puisque Φ est bijective et que $\Phi(0) = 0$, on obtient $\Delta_\lambda(B) = 0$. D'après le Théorème 2.5 on déduit que $B^2 = 0$ et ainsi $B^n = 0$. D'où en appliquant la condition (6.20) à $T_1 = \cdots = T_n = B$, on voit que

$$(y \otimes y)^n = \Delta_\lambda(\Phi(B)^n) = \Phi(\Delta_\lambda(B^n)) = \Phi(0) = 0.$$

Par conséquent $y = 0$ et donc $\Phi(I)$ est injectif.

Cas 2 : Si $\Phi(I)^*)^{n-1}y \neq 0$, d'après l'équation (6.21) et la Proposition 2.2 on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\Phi(\Delta_\lambda(B)) &= \frac{1}{2}\Delta_\lambda(y \otimes (\Phi(I)^*)^{n-1}y) \\
&= \frac{1}{2}\frac{< y, (\Phi(I)^*)^{n-1}y >}{\|(\Phi(I)^*)^{n-1}y\|^2}\Big((\Phi(I)^*)^{n-1}y \otimes (\Phi(I)^*)^{n-1}y\Big) \\
&= \frac{1}{2}\frac{< (\Phi(I))^{n-1}y, y >}{\|(\Phi(I)^*)^{n-1}y\|^2}\Big((\Phi(I)^*)^{n-1}y \otimes (\Phi(I)^*)^{n-1}y\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par les mêmes arguments du cas 1, on déduit que $y = 0$. Ce qui montre que $\Phi(I)$ est injectif.

De la même manière, on montre que l'opérateur $\Phi(I)^*$ est injectif.

Finalement, on applique la condition (6.20) à $T_1 = \cdots = T_n = I$, et on obtient

$$\Delta_\lambda(\Phi(I)^n) = \Phi(I).$$

Le Théorème 2.8, implique que

$$\Phi(I) \in \mathcal{U}_{n-1}(K).$$

Étape 2. Montrons qu'il existe une constante $\alpha \in \mathbb{C}$, tel que $\Phi(I) = \alpha I$ avec $\alpha^{n-1} = 1$.

Démontrons d'abord que Φ commute avec Δ_λ. En effet, soit $T \in \mathcal{B}(H)$ arbitraire, d'après la condition (6.20) avec $T_1 = ... = T_{n-1} = I$ et $T_n = T$, puisque $\Phi(I)$ est unitaire et que $\Phi(I)^{n-1} = I$, on a

$$\Delta_\lambda(\Phi(T)) = \Delta_\lambda\Big(\frac{1}{2}(\Phi(I)^{n-1}\Phi(T) + \Phi(T)\Phi(I)^{n-1})\Big) = \Phi(\Delta_\lambda(T)). \tag{6.22}$$

Donc l'application Φ commute avec la transformation λ-Aluthge.

En outre, en utilisant la condition (6.20) et l'équation (6.22), on obtient les égalités :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta_\lambda\Big(\Phi(I)\Phi(T)\Phi(I)^* + \Phi(I)^*\Phi(T)\Phi(I)\Big) &= \frac{1}{2}\Delta_\lambda\Big(\Phi(I)\Phi(T)(\Phi(I))^{n-2} + (\Phi(I))^{n-2}\Phi(T)\Phi(I)\Big)\\
&= \Phi(\Delta_\lambda(T))\\
&= \Delta_\lambda(\Phi(T)).
\end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\frac{1}{2}\Delta_\lambda\Big(\Phi(I)\Phi(T)\Phi(I)^* + \Phi(I)^*\Phi(T)\Phi(I)\Big) = \Delta_\lambda(\Phi(T)), \text{ pour tout } T \in \mathcal{B}(H). \tag{6.23}$$

Maintenant, soit $y \in K$ un vecteur arbitraire de K. Par la surjectivité de l'application Φ, il existe $T \in \mathcal{B}(H)$ tel que $\Phi(T) = y \otimes y$. D'après l'équation (6.23), on obtient

$$\frac{1}{2}\Big(\Phi(I)y \otimes \Phi(I)y + \Phi(I)^*y \otimes \Phi(I)^*y\Big) = y \otimes y. \tag{6.24}$$

Ce qui implique que l'opérateur

$$\Phi(I)y \otimes \Phi(I)y + \Phi(I)^*y \otimes \Phi(I)^*y,$$

est de rang inférieur ou égal à 1, en particulier $\Phi(I)y$ et $\Phi(I)^*y$ sont linéairement dépendants. De plus (6.24) implique que $\Phi(I)y$ et $\Phi(I)^*y$ sont co-linéaires à y. Donc, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\Phi(I)y = \alpha y$ pour tout $y \in K$. Par conséquent $\Phi(I)$ est un multiple de l'identité, c'est-à-dire $\Phi(I) = \alpha I$. Maintenant puisque $\Phi(I) \in \mathcal{U}_{n-1}(K)$, $\alpha^{n-1} = 1$.

Étape 3. Montrons que l'application Φ est de la forme

$$\Phi(T) = \alpha UTU^* \ \text{ pour tout } \ T \in \mathcal{B}(H),$$

avec $U : H \to K$ un opérateur unitaire ou anti-unitaire et $\alpha^{n-1} = 1$.

On pose $\Psi = \alpha^{-1}\Phi$. Il est clair que Ψ est bijective et que

$$\Psi(I) = \alpha^{-1}\Phi(I) = I.$$

D'après, la condition (6.20) avec le fait $\alpha^{n-1} = 1$, l'application Ψ satisfait la condition suivante :

$$\Delta_\lambda(\Psi(T_1) \circ \Psi(T_2)) = \Psi(\Delta_\lambda(T_1 \circ T_2)), \text{ pour tous } T_1, T_2 \in \mathcal{B}(H).$$

Par le Théorème 6.1, il existe un opérateur unitaire ou anti-unitaire $U : H \to K$ tel que Ψ est de la forme suivante :

$$\Psi(T) = UTU^* \text{ pour tout } T \in \mathcal{B}(H).$$

Finalement

$$\Phi(T) = \alpha\Psi(T) = \alpha UTU^* \text{ pour tout } T \in \mathcal{B}(H),$$

avec $\alpha^{n-1} = 1$. Ce qui complète la preuve du Théorème 6.3.

□

CHAPITRE 7

Formules du rayon spectral via la transformation λ-Aluthge

Dans cette section nous donnons plusieurs expressions du rayon spectral d'un opérateur, en terme de la norme de la transformation λ-Aluthge et ses itérées. Dans la dernière section nous donnons également des formules de rayon spectral en terme du rayon numérique de l'opérateur. D'autre part, nous donnons plusieurs caractérisations des opérateurs normaloïdes (les opérateurs $T \in \mathcal{B}(H)$ tel que $r(T) = \|T\|$).

1. Formules du rayon spectral via la transformation λ-Aluthge

Dans cette section, nous utilisons le théorème de Rota [36], afin d'obtenir des nouvelles formules pour le rayon spectral via la transformation λ-Aluthge.
Rappelons que le rayon spectral de $T \in \mathcal{B}(H)$, noté $r(T)$ est par définition,

$$r(T) = \sup\{|\lambda|; \quad \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Le rayon spectral s'obtient également par la formule de Beurling-Gelfand,

$$r(T) = \lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Notons $\Delta_\lambda^{(0)}(T) := T$ et $\Delta_\lambda^{(n+1)}(T) := \Delta_\lambda(\Delta_\lambda^{(n)}(T))$ pour tout entier naturel n, (la n-ème itérée de Δ_λ).
T. Yamazaki [44], a obtenu une nouvelle expression du rayon spectral, en fonction de la limite des itérées de la transformation de Aluthge pour ($\lambda = \frac{1}{2}$),

$$\lim_{n\to\infty} \|\Delta^{(n)}(T)\| = r(T) \tag{7.1}$$

Wang [42] a donné une simple et élégante preuve de cette formule (voir [38] Remark 2.6). Dans [3], Antezana, Massey and Stojanoff ont généralisé ce résultat pour $(0 < \lambda < 1)$, mais dans le cas de la dimension finie. Finalement dans [38], Tam a montré que cet formule reste valable pour $(0 < \lambda < 1)$ en dimension infinie, mais dans le cas des opérateurs inversibles. Le théorème suivant donne une nouvelle expression du rayon spectral en fonction de la transformation de λ-Aluthge.

Théorème 7.1. Pour tout opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$, on la formule suivante

$$\begin{aligned} r(T) &= \inf\{\|\Delta_\lambda(XTX^{-1})\|,\ X \in \mathcal{B}(H) \ \text{ inversible }\} \\ &= \inf\{\|\Delta_\lambda(e^A T e^{-A})\|,\ A \in \mathcal{B}(H) \ \text{ auto-adjoint }\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour tout opérateur $X \in \mathcal{B}(H)$ inversible, on a les égalités :

$$\sigma(\Delta_\lambda(XTX^{-1})) = \sigma(XTX^{-1}) = \sigma(T).$$

Par conséquent

$$r(T) = r(\Delta_\lambda(XTX^{-1})) \leq \|\Delta_\lambda(XTX^{-1})\| \quad \text{pour tout opérateur inversible} \quad X \in \mathcal{B}(H).$$

D'où

$$\begin{aligned} r(T) &\leq \inf\{\|\Delta_\lambda(XTX^{-1})\|;\ \ X \in \mathcal{B}(H) \ \text{ inversible}\} \\ &\leq \inf\{\|\Delta_\lambda(\exp(A)T\exp(-A))\|;\ \ A \in \mathcal{B}(H) \ \text{ auto-adjoint}\}, \end{aligned}$$

D'autre part, pour $\varepsilon > 0$, on a

$$r(\frac{T}{r(T)+\varepsilon}) = \frac{r(T)}{r(T)+\varepsilon} < 1.$$

D'après le théorème de Rota (voir [36, Théorème 2]), l'opérateur $\dfrac{T}{r(T)+\varepsilon}$ est similaire à une contraction. Ainsi, il existe un opérateur inversible $X_\varepsilon \in \mathcal{B}(H)$ tel que

$$\|\Delta_\lambda(X_\varepsilon T X_\varepsilon^{-1})\| \leq \|X_\varepsilon T X_\varepsilon^{-1}\| \leq r(T) + \varepsilon. \tag{7.2}$$

Maintenant, soit $X_\varepsilon = U_\varepsilon |X_\varepsilon|$ la décomposition polaire de l'opérateur X_ε. Il est clair que U_ε est unitaire, et $|X_\varepsilon|$ inversible. Par conséquent il existe $\alpha > 0$ tel que $\sigma(|X_\varepsilon|) \subseteq [\alpha, +\infty[$. D'où par le calcul fonctionnel continu $A_\varepsilon = \ln(|X_\varepsilon|)$ est bien définie, auto-adjoint et on a

$$|X_\varepsilon| = e^{A_\varepsilon} \ \text{ and } \ |X_\varepsilon|^{-1} = e^{-A_\varepsilon}.$$

Il résulte alors :

$$\begin{aligned} \|\Delta_\lambda(X_\varepsilon T X_\varepsilon^{-1})\| &= \|\Delta_\lambda(U_\varepsilon e^{A_\varepsilon} T e^{-A_\varepsilon} U_\varepsilon^*)\| \\ &= \|U_\varepsilon \Delta_\lambda(e^{A_\varepsilon} T e^{-A_\varepsilon}) U_\varepsilon^*\| \\ &= \|\Delta_\lambda(e^{A_\varepsilon} T e^{-A_\varepsilon})\|. \end{aligned}$$

Donc

$$\|\Delta_\lambda(e^{A_\varepsilon} T e^{-A_\varepsilon})\| \leq \|X_\varepsilon T X_\varepsilon^{-1}\| \leq r(T) + \varepsilon.$$

Ce qui donne pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} r(T) &\leq \inf\{\|\Delta_\lambda(XTX^{-1})\|,\ X \in \mathcal{B}(H) \ \text{ inversible }\} \\ &\leq \inf\{\|\Delta_\lambda(e^A T e^{-A})\|,\ A \in \mathcal{B}(H) \ \text{ auto-adjoint }\} \\ &\leq \|\Delta_\lambda(e^{A_\varepsilon} T e^{-A_\varepsilon})\| \leq \|X_\varepsilon T X_\varepsilon^{-1}\| \\ &\leq r(T) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalement, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient

$$\begin{aligned} r(T) &= \inf\{\|\Delta_\lambda(XTX^{-1})\|,\ X \in \mathcal{B}(H) \ \text{ inversible }\} \\ &= \inf\{\|\Delta_\lambda(e^A T e^{-A})\|,\ A \in \mathcal{B}(H) \ \text{ auto-adjoint }\}. \end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve. □

Comme conséquence directe du théorème précédent, on a le corollaire suivant.

Corollaire 7.1. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$, alors pour tout entier $n \geq 0$, on a les égalités :

$$\begin{aligned} r(T) &= \inf\{\|\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1})\|;\ X \in \mathcal{B}(H) \ \text{ inversible }\} \\ &= \inf\{\|\Delta_\lambda^{(n)}(e^A T e^{-A})\|;\ A \in \mathcal{B}(H) \ \text{ auto-adjoint }\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Puisque $\|\Delta_\lambda(T)\| \leq \|T\|$ (voir Théorème 2.3), on voit facilement que pour tout entier $n \geq 0$, on a les inégalités suivantes :

$$\|\Delta_\lambda^{(n)}(T)\| \leq \|\Delta_\lambda^{(n-1)}(T)\| \leq \cdots \leq \|\Delta_\lambda(T)\| \leq \|T\|, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{7.3}$$

Maintenant, puisque $\sigma(\Delta_\lambda^{(n)}(T)) = \sigma(T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors pour tout opérateur inversible $X \in \mathcal{B}(H)$ on a

$$\begin{aligned} r(T) &= r(\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1})) \\ &\leq \|\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1})\| \\ &\leq \|\Delta_\lambda(XTX^{-1})\|. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} r(T) &\leq \inf\{\|\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1})\|,\ X \in \mathcal{B}(H)\ \text{ inversible }\} \\ &\leq \inf\{\|\Delta_\lambda^{(n)}(e^A T e^{-A})\|,\ \ A \in \mathcal{B}(H)\ \text{ auto-adjoint }\} \\ &\leq \inf\{\|\Delta_\lambda(e^A T e^{-A})\|,\ A \in \mathcal{B}(H)\ \text{ auto-adjoint }\} \\ &= r(T). \end{aligned}$$

□

Comme conséquence directe du corollaire précédent, on a le résultat suivant qui donne une caractérisation des opérateurs normaloïdes via la transformation λ-Aluthge.

Corollaire 7.2. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) T est normaloïde ;
(ii) $\|T\| \leq \|\Delta_\lambda(XTX^{-1})\|$, pour tout opérateur inversible $X \in \mathcal{B}(H)$;
(iii) $\|T\| \leq \|\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1})\|$, pour tout opérateur inversible $X \in \mathcal{B}(H)$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Une autre conséquence du Corollaire 7.1 :

Corollaire 7.3. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$, alors les assertions sont équivalentes :
(i) T est normaloïde ;
(ii) $\|T\| \leq \|XTX^{-1}\|$, pour tout opérateur inversible $X \in \mathcal{B}(H)$.

Théorème 7.2. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$. Alors pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} r(T) &= \lim_k \|\Delta_\lambda^{(n)}(T^k)\|^{1/k} \\ &= \lim_k \|\Delta_\lambda(T^k)\|^{1/k}. \end{aligned}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ on a,

$$r(T) = r(\Delta_\lambda^{(n)}(T)) \leq \|\Delta_\lambda^{(n)}(T)\| \leq \|\Delta_\lambda(T)\| \leq \|T\|. \tag{7.4}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ arbitraire, alors il est facile de voir que :

$$r(T)^k = r(T^k) = r(\Delta_\lambda^{(n)}(T^k)) \leq \|\Delta_\lambda^{(n)}(T^k)\| \leq \|\Delta_\lambda(T^k)\| \leq \|T^k\| \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où

$$r(T) \leq \|\Delta_\lambda^{(n)}(T^k)\|^{1/k} \leq \|\Delta_\lambda(T^k)\|^{1/k} \leq \|T^k\|^{1/k}.$$

Ainsi

$$r(T) \leq \lim_k \|\Delta_\lambda^{(n)}(T^k)\|^{1/k} \leq \lim_k \|\Delta_\lambda(T^k)\|^{1/k} \leq \lim_k \|T^k\|^{1/k} = r(T),$$

Ce qui achève la preuve. □

Comme conséquence direct du Théorème 7.2, on a le corollaire suivant.

Corollaire 7.4. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$, alors les assertions sont équivalentes :
(i) T est normaloïde ;
(ii) $\|T\|^k = \|\Delta_\lambda(T^k)\|$, pour tout $k \in \mathbb{N}$;
(iii) $\|T\|^k = \|\Delta_\lambda^{(n)}(T^k)\|$, pour tous $k, n \in \mathbb{N}$.

2. Le rayon spectral via le rayon numérique et la transformation λ-Aluthge

Dans le théorème suivant, nous donnons une nouvelle expression du rayon spectral en terme du rayon numérique et de la transformation λ-Aluthge.

Théorème 7.3. Pour tout opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} r(T) &= \inf\{w(\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1})), \quad X \in \mathcal{B}(H) \text{ inversible } \} \\ &= \inf\{w(\Delta_\lambda^{(n)}(e^A T e^{-A})), \quad A \in \mathcal{B}(H) \text{ auto-adjoint } \}. \end{aligned}$$

Démonstration. Il est bien connu que $r(T) \leq w(T) \leq \|T\|$. Donc, pour tout $X \in \mathcal{B}(H)$ inversible et pour tout entier n, on a

$$r(T) = r(\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1})) \leq w(\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1})) \leq \|\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1})\|$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} r(T) &\leq \inf\{w(\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1})); \quad X \in \mathcal{B}(H) \text{ inversible} \} \\ &\leq \inf\{w(\Delta_\lambda^{(n)}(\exp(A)T\exp(-A))); \quad A \in \mathcal{B}(H) \text{ auto-adjoint} \}, \\ &\leq \inf\{\|\Delta_\lambda^{(n)}(\exp(A)T\exp(-A))\|; \quad A \in \mathcal{B}(H) \text{ auto-adjoint} \} \\ &= r(T) \qquad (\text{ voir Corollaire 7.1}). \end{aligned}$$

D'où les égalités souhaitées sont satisfaites. □

Pour un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$, on note $\mathcal{R}e(T) = \frac{1}{2}(T + T^*)$, la partie réelle de T, et $\overline{W}(S)$ la fermeture de l'image numérique de S. Alors on a

Théorème 7.4. Pour tout opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} r(T) &= \inf\{w(\mathcal{R}e(\Delta_\lambda^{(n)}(\exp(i\theta)XTX^{-1}))), \; X \in \mathcal{B}(H) \text{ inversible } \} \\ &= \inf\{\|\mathcal{R}e(\Delta_\lambda^{(n)}(\exp(i\theta)XTX^{-1}))\|, \; X \in \mathcal{B}(H) \text{ inversible } \}. \end{aligned}$$

Démonstration. D'abord supposons que $r(T) \in \sigma(T)$. Alors pour tout opérateur inversible $X \in \mathcal{B}(H)$, on a

$$r(T) \in \mathcal{R}e(\sigma(T)) = \mathcal{R}e(\sigma(\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1}))).$$

Ainsi

$$r(T) \in \mathcal{R}e(\sigma(\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1}))) \subseteq \mathcal{R}e(\overline{W}(\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1}))) = \overline{W}(\mathcal{R}e(\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1}))).$$

Ce qui implique

$$\begin{array}{rcl} r(T) & \leq & w(\mathcal{R}e(\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1}))) \\ & \leq & \|\mathcal{R}e(\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1}))\| \\ & \leq & \|\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1})\|. \end{array}$$

Puisque la dernière inégalité est vraie pour tout opérateur inversible $X \in \mathcal{B}(H)$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} r(T) & \leq & \inf\{w(\mathcal{R}e(\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1}))) \;\; X \in \mathcal{B}(H) \;\text{ inversible }\} \\ & \leq & \inf\{\|\mathcal{R}e(\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1}))\| \;\; X \in \mathcal{B}(H) \;\text{ inversible }\} \\ & \leq & \inf\{\|\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1})\| \;\; X \in \mathcal{B}(H) \;\text{ inversible }\} \\ & = & r(T) \qquad \text{(voir corollaire 2.1).} \end{array}$$

Nous avons, donc, démontré que si $r(T) \in \sigma(T)$, alors

$$\begin{array}{rcl} r(T) & = & \inf\{w(\mathcal{R}e(\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1}))) \;\; X \in \mathcal{B}(H) \;\text{ inversible }\} \\ & = & \inf\{\|\mathcal{R}e(\Delta_\lambda^{(n)}(XTX^{-1}))\| \;\; X \in \mathcal{B}(H) \;\text{ inversible }\} \end{array}$$

Maintenant soit $T \in \mathcal{B}(H)$ un opérateur arbitraire et soit $z \in \sigma(T)$ tel que $|z| = r(T)$. On pose $\theta = -\arg(z)$. Alors $r(T) = z\exp(i\theta) \in \sigma(\exp(i\theta)T)$. Ainsi, par la première partie de la preuve, nous concluons que

$$\begin{array}{rcl} r(T) = r(\exp(i\theta)T) & = & \inf\{w(\mathcal{R}e(\Delta_\lambda^{(n)}(\exp(i\theta)XTX^{-1}))), \; X \in \mathcal{B}(H) \;\text{ inversible }\} \\ & = & \inf\{\|\mathcal{R}e(\Delta_\lambda^{(n)}(\exp(i\theta)XTX^{-1}))\|, \; X \in \mathcal{B}(H) \;\text{ inversible }\}. \end{array}$$

Ce qui complète la preuve du Théorème 7.4. □

Comme conséquence immédiate du Théorème 7.4, on obtient le corollaire suivant qui est aussi une autre caractérisation des opérateurs normaloïdes.

Corollaire 7.5. Soit $T \in \mathcal{B}(H)$, et n un entier naturel. Alors les assertions suivantes sont équivalentes
(i) T est normaloïde ;
(ii) Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $X \in \mathcal{B}(H)$ inversible ;

$$\|T\| \leq w(\mathcal{R}e(\Delta_\lambda^{(n)}(\exp(i\theta)XTX^{-1})));$$

(iii) Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $X \in \mathcal{B}(H)$ inversible

$$\|T\| \leq \|\mathcal{R}e(\Delta_\lambda^{(n)}(\exp(i\theta)XTX^{-1}))\|.$$

Nous terminons ce paragraphe par le théorème suivant qui donne une nouvelle formule du rayon spectral d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$, en termes de comportement asymptotique du rayon numérique des puissances de T.

Théorème 7.5. Pour tout opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a

$$r(T) = \lim_k w(\Delta_\lambda^{(n)}(T^k))^{1/k}.$$

Démonstration. Soient $k, n \in \mathbb{N}$, alors on a

$$r(T)^k = r(T^k) = r(\Delta_\lambda^{(n)}(T^k)) \leq w(\Delta_\lambda^{(n)}(T^k)) \leq \|\Delta_\lambda^{(n)}(T^k)\|.$$

Ainsi

$$r(T) \leq w(\Delta_\lambda^{(n)}(T^k))^{1/k} \leq \|\Delta_\lambda^{(n)}(T^k)\|^{1/k}.$$

En appliquant le Théorème 7.2, on voit que

$$r(T) = \lim_k w(\Delta_\lambda^{(n)}(T^k))^{1/k},$$

Ce qui complète la preuve. □

Bibliographie

[1] A. Aluthge, *On p-hyponormal operators for* $0 < p < 1$, Integral Equations Operator Theory 13 (1990), 307-315.

[2] T. Ando and T. Yamazaki, *The iterated Aluthge transforms of a 2-by-2 matrix converge*, Linear Algebra Appl. 375 (2003), 299-309

[3] J. Antezana, P. Massey and D. Stojanoff, *λ-Aluthge transforms and Schatten ideals*, Linear Algebra Appl, 405 (2005), 177-199.

[4] B. Aupetit, *Spectrum preserving linear mappings between Banach algebras or Jordan-Banach algebras*, J. London Math. Soc. 62 (2000), 917-924.

[5] F. Botelho, L. Molnár and G. Nagy, *Linear bijections on von Neumann factors commuting with λ-Aluthge transform*, Bull. Lond. Math. Soc. 48 (2016), 74-84.

[6] N. Boudi and M. Mbekhta, *Additive maps preserving strongly generalized inverses*, J. Operator Theory, 64 (2010), 117-130.

[7] M. Bresar, P. Šemrl, *Normal-preserving linear mappings*. Canad. Math. Bull. 37 (1994), 306-309.

[8] A. Brown, *On a class of operators*, Proc. Amer. math. Soc. 4 (1953), 723-728.

[9] G. Cassier, J. Verliat, *Stability for some operator classes by Aluthge transform*, Operator Theory Live, Theta. (2010), 51-67.

[10] F. Chabbabi, *Product commuting maps with the λ-Aluthge transform*, J. Math. Anal. Appl. 449 (2017), 589-600.

[11] F. Chabbabi and M. Mbekhta, *New formulas for the spectral radius via λ-Aluthge transform*, Linear Algebra Appl. 515 (2017), 246-254.

[12] F. Chabbabi and M.Mbekhta, *Jordan product maps commuting with the λ-Aluthge transform*, J. Math. Anal. Appl. 450 (2017), 293-313.

[13] F. Chabbabi and M. Mbekhta, *General product nonlinear maps commuting with the λ-Aluthge transform*, Mediterr. J. Math. 14 (2017), Art. 42, 10 pp.

[14] J. Charles, M. Mbekhta, H. Queffélec *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs : exercices corrigés*, Dunod, 2010.

[15] J. B. Conway , *A Course in Functional Analysis, Second Edition*, Springer-Verlag, 1990.

[16] J.B. Conway, *The Theory of Subnormal Operators*, Mathematical Survey and Monographs, Vol. 36, Amer. Math. Soc. Providence, 1991.

[17] I.B.Conway, P.Y. Wu, *The structure of quasi-normal operators and the double commutant property*, Trans. Amer. Math. Soc. 270 (1982), 641-657.

[18] C. Foias, I. B. Jung, E. Ko and C. Pearcy , *Complete Contractivity of Maps Associated with the Aluthge and Duggal Transforms*, Pacific J. Math. 209 (2003), 249-259.

[19] T. Furuta , *Invitation to linear operators*, Taylor Francis, London 2001.

[20] M. González and M. Mbekhta, *Linear maps on $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ preserving the local spectrum*, Linear Algebra Appl. 427 (2007), 176-182.

[21] P.R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book. 2nd ed.*, Springer-Verlag, New York, 1982

[22] W. Jing, P. Li and S. Lu, *Additive mappings that preserve rank one nilpotent operators*, Linear Algebra Appl. 367 (2003), 213-224.

[23] I. Jung, E. Ko, C. Pearcy, *The iterated Aluthge transform of an operator*, Integral Equations Operator Theory 45 (2003), 375-387.

[24] I. Jung, E. Ko, C. Pearcy, *Spectral pictures of Aluthge transforms of operators*, Integral Equations Operator Theory 40 (2001), 52-60.

[25] I. Jung, E. Ko, and C. Pearcy, *Aluthge transform of operators*, Integral Equations Operator Theory 37 (2000), 437-448.

[26] R. Kallman, R. Simmons, *A theorem on planar continua and an application to automorphisms of the field of complex numbers*, Topology and its Applications 20 (1985), 251-255.

[27] V. B. Lidskii, *Non-selfadjoint operators with a trace*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 125 (1959), 485-587.

[28] M. Mbekhta, *Linear maps preserving the minimum and surjectivity moduli of operators*, Oper. Matrices 4 (2010), 511-518.

[29] M. Mbekhta, *Linear maps preserving the generalized spectrum*, Extracta Math. 22 (2007), 45-54.

[30] M. Mbekhta and P. Šemrl, *Linear maps preserving semi-Fredholm operators and generalized invertibility*, Linear Multilinear Algebra 57 (2009), 55-64.

[31] M. Mbekhta, *Linear maps preserving the set of Fredholm operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), 3613-3619.

[32] L. Molnár *Multiplicative Jordan triple isomorphisms on the self-adjoint elements of von Neumann algebras*, Linear Algebra Appl. 419 (2006), 586-600.

[33] L. Molnár , *On isomorphisms of standard operator algebras*, Studia Math. 142 (2000), 295-302.

[34] K. Okubo, *On weakly unitarily invariant norm and the Aluthge transformation*, Linear Algebra Appl. 371 (2003), 369-375.

[35] Pellegrini, *Numerical range preserving operators on a Banach algebra*, Studia Math. 54 (1975), 143-147.

[36] G. Rota, *On models for linear operators*, comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 496-472.

[37] A. R. Sourour , *Invertibility preserving linear maps on $\mathcal{L}(X)$*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 13-30.

[38] T. Tam, *λ- Aluthge iteration and spectral radius*, Integral Equations Operator Theory 60 (2008), 591-596.

[39] S. Verliart *Transformation de Aluthge et vecteurs extrémaux*, Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard - Lyon1, 2010.

[40] D.Wang, *Heinz and McIntosh inequalities, Aluthge tranformation and the spectral radius*, Math. Inequal. Appl. 6 (2003), 121-124.

[41] P. Wojtaszczyk *Banach spaces for analysts*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 25. Cambridge University Press, Cambridge, (1991).

[42] D.Wang, *Heinz and McIntosh inequalities, Aluthge tranformation and the spectral radius*, Math. Inequal. Appl. 6 (2003), 121-124.

[43] P. Y. Wu *All (?) about quasi-normal Operators*, Operators Theory and Complex Analysis, Sapporo, 1991, Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 59, Birkhauser, (1992), 472-389.

[44] T. Yamazaki, *An expression of the spectral radius via Aluthge transform*, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), 1131-1137.

