Université Lille 1 – Laboratoire Paul Painlevé
École Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur 072

Thèse

présentée pour l'obtention du

DIPLÔME DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ LILLE 1

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Continuum Random Cluster Model

par

Pierre HOUDEBERT

Soutenue le 22 mai 2017 à l'Université Lille 1 devant un jury composé de :

Rapporteurs :	M. Pierre	CALKA	Université de Rouen
	M. Olivier	GARET	Université de Lorraine
Examinateurs :	M. Vincent	BEFFARA	Université Grenoble-Alpes
	M. David	COUPIER	Université Lille 1
	Mme Anne	ESTRADE	Université Paris Descartes
Directeur :	M. David	DEREUDRE	Université Lille 1

Remerciements

Je tiens à adresser mes premiers remerciements à mon directeur de thèse, David DEREUDRE. Merci de m'avoir fait confiance et de m'avoir proposer un sujet qui m'a passionné au delà de mes attentes. Merci pour nos nombreuses séances de travail. Je cherche encore par la fenêtre en me demandant ce qui te donne toutes tes idées...

Je remercie chaleureusement Pierre CALKA et Olivier GARET pour avoir accepté de rapporter ma thèse, ainsi que Vincent BEFFARA, David COUPIER et Anne ESTRADE d'être membre de mon jury de thèse. Je suis honoré de bénéficier d'un jury aussi prestigieux.

Je souhaite aussi remercier les personnes rencontrées sans qui je n'aurais certainement pas fait de thèse. Stéphane GERAY, professeur de mathématiques lors de mon année de Terminale, m'a transmis le premier sa passion des mathématiques. Enfin sans les conseils précieux de Jean-Christophe BRETON et Florent MALRIEU lors de mon année de M2 à l'université Rennes 1, je n'aurais certainement pas continuer vers la recherche.

Pendant mes années de thèse j'ai bénéficié d'un cadre mathématique et humain exceptionnel. Je remercie le laboratoire Paul Painlevé, et en particulier l'équipe Proba-Stat, pour le magnifique bureau dont je bénéficie. Je remercie Chi d'assurer une transmission efficace de l'information, Gwenaëlle pour sa bonne humeur contagieuse, Laurence pour ces cours d'éducation civique, David pour avoir mangé avec enthousiasme les gâteaux que j'ai fait, et plus généralement toute l'équipe pour les nombreuses discussions passionnées dans la salle de convivialité.

Je souhaite également remercier le groupes de recherche GeoSto et tous ces membres croisés au cours de ma thèse et qui ont contribué à mon ouverture scientifique. Parmi eux je remercie particulièrement Frédéric LAVANCIER et Jean-François COEURJOLLY qui m'ont aidé lors de ma thèse.

Un grand merci à mes amis (post)doctorants rencontrés pendant ces années. Il y a le groupe "M3-115 étendu" composé de Pierre, personne la plus humble que j'ai rencontré, sauf pour le tennis, et Benjamin qui a toujours eu la défaite souriante. Il y a aussi Émilie et ces nombreuses passions créatives (j'ai gardé tes origamis), Julien, toujours plein de bonne humeur, Florian, qui a subi la marche aléatoire de mes idées, et enfin Rafik et nos discussions footballistique les lendemains de ligue des champions. Il y a aussi les *Boutardo*, Geoffrey, Céline, Hà, Florent et Ahmed, avec qui j'ai bien boutardé. Et je n'oublie pas Giovanni qui m'a coaché avant mon semi. Enfin Je remercie Sara et Simon, dont l'amitié est le plus beau résultat de cette thèse.

Finalement je souhaite remercier ma famille, et plus particulièrement ma mère Isabelle. Depuis que je suis adulte j'ai compris le travail et les sacrifices que tu as fait pour que je ne manque de rien. Tu m'as appris à penser par moi même et tu as soutenu chacun de mes choix. Cette thèse est la conséquence de tes 27 années de travail acharné.

Résumé

Cette thèse de doctorat s'intéresse à l'étude du *Continuum Random Cluster Model* (CRCM), qui est un modèle gibbsien de boules aléatoires défini à partir du *modèle booléen poissonien* stationnaire d'intensité z et de loi des rayons Q. La densité non normalisée est donnée par $q^{N_{cc}}$ où N_{cc} désigne le nombre de composantes connexes dans la structure germe-grain aléatoire et où q est un paramètre positif de connectivité. Ce modèle est une version continue du *Random Cluster Model* introduit dans les années 1960 par FORTUIN et KASTELEYN pour unifier l'étude de modèles tels que le *modèle d'Ising* et le *modèle de Potts*. Le CRCM fut introduit dans les années 1980 pour sa relation avec le *modèle de Widom-Rowlinson*, permettant de donner une nouvelle preuve de la transition de phase pour ce modèle. Mais beaucoup des propriétés étudiées pour le modèle discret ne l'ont pas été dans le cas continu.

Dans cette thèse nous avons dans un premier temps étudié l'existence du CRCM en volume infini pour une large classe de paramètres, incluant le cas $q < 1$ ou les rayons non bornés. Dans le cas où la loi des rayons Q satisfait la condition d'intégrabilité $\int R^d Q(dR) < \infty$, un premier théorème montre l'existence du modèle pour tous les paramètres z et q possibles. Dans le cas extrême des rayons non intégrables ($\int R^d Q(dR) = \infty$), l'interaction est beaucoup plus compliquée à contrôler. Dans ce cas un second théorème montre l'existence, pour les paramètres q entier et z assez petit, d'un CRCM différent du *modèle booléen* qui est une solution triviale dans ce cas. Nous avons de plus conjecturé que pour z grand, cette solution triviale serait l'unique, ce qui fournirait un résultat de transition de phase inédit. La question reste ouverte, mais une version faible de la conjecture a été démontrée en dimension 1. nous montrons que pour z assez grand le CRCM en volume fini et à condition de bord vide converge vers le *modèle booléen*, ce qui n'est pas le cas pour z petit.

Dans un second temps nous avons étudié la percolation du CRCM. La percolation s'intéresse aux propriétés de connectivité des structures aléatoires et en particulier à l'existence d'une composante connexe infinie. Cette propriété peut être interprétée comme la perméabilité ou la conductivité en science des matériaux. La percolation a été étudiée dans de nombreux modèles de géométrie aléatoire discrète (*modèle de percolation de Bernoulli*, *modèle d'Ising*,...) et continue (*modèle booléen*, *modèle Quermass*,...) et est d'autant plus pertinente pour le CRCM puisque l'interaction dépend directement de la connectivité de la structure aléatoire. Nous montrons dans cette thèse l'absence de percolation du CRCM en petite activité et la percolation du modèle en grande activité. Ce résultat permet de généraliser la preuve la transition de phase du *modèle de Widom-Rowlinson* à des rayons non bornés.

Summary

This thesis is focused on the study of the *Continuum Random Cluster Model* (CRCM), defined as a Gibbs modification of the stationary *Boolean model* in $\mathbb{R}^d$ with intensity $z > 0$ and the law of radii Q. The formal unormalized density is given by $q^{N_{cc}}$ where $q > 0$ is a fixed parameter and N_{cc} the number of connected components in the random germ-grain structure.

This model is a continuum version of the well-known *Random Cluster Model* introduced by Fortuin and Kasteleyn to unify the study of models such as *Ising model* or *Potts model*. The CRCM was introduced in the 1980' for its relations with the *Widom-Rowlinson model*, which led to a new proof of the phase transition for this model. But the CRCM has not really been studied and highlighted as its discrete analogous.

In this thesis, we first studied the existence of the model in the infinite volume regime for a large class of parameters including the case $q < 1$ or distributions Q without compact support. When the radii satisfies the integrability assumption $\int R^d Q(dR) < \infty$, a first theorem proves the existence of a stationary CRCM for all parameters possible.

In the extreme setting of non integrable radii (i.e. $\int R^d Q(dR) = \infty$), the interaction is much more complicated to control. If q is an integer larger than 1, we prove for small activities the existence of a CRCM different from the *boolean model* which is a trivial solution in that extreme case. We conjecture that the uniqueness is recovered for z large enough which would provide a phase transition result. This question remains open, but a weak version of the conjecture has been proved in dimension 1. We prove that for z large enough the finite volume CRCM with free boundary condition converge to the *boolean model*, which does not occur when z is small enough.

Then we studied the percolation of the CRCM. Percolation refers mainly to the existence of at least one unbounded (or infinite) connected component in the random structure. This macroscopic property can be interpreted as conductivity or permeability in material science. Percolation has been studied for many discrete (*percolation model*, *Ising model*,...) and continuous (*boolean model*, *quermass model*,...) models in stochastic geometry. Percolation is particularly relevant for the CRCM since the interaction of the model depends on the connectivity of the random structure. We prove in this thesis the absence of percolation for the CRCM with small activity and the percolation of the model with large activity. This provides a generalisation of the phase transition result of the *Widom-Rowlinson model* with unbounded radii.

Table des matières

I Existence du Continuum Random Cluster Model (CRCM) 15

I.1 Processus ponctuel et structure germe-grain . . . 16
I.1.1 Espace d'état . . . 16
I.1.2 Processus ponctuel . . . 17
I.1.3 Stationnarité, ergodicité et entropie spécifique . . . 19
I.1.4 Structure germe-grain et composantes connexes . . . 22
I.2 Processus de Gibbs à volume fini . . . 26
I.2.1 Définition du CRCM sur une fenêtre bornée . . . 26
I.2.2 Simulations . . . 28
I.2.3 Propriétés . . . 29
I.3 Processus de Gibbs à volume infini . . . 33
I.3.1 Définition du CRCM en volume infini . . . 33
I.3.2 Unicité de la composante connexe infinie . . . 36
I.3.3 Existence du CRCM . . . 41
I.3.4 Unicité du CRCM : Résultat et perspective . . . 50
I.3.5 (Perspective) Estimation des paramètres . . . 53

II Modèle de Widom-Rowlinson (WR) à rayons aléatoires 55

II.1 Définition et existence du WR . . . 56
II.1.1 Définition et historique du WR . . . 56
II.1.2 Existence avec rayons non bornés . . . 57
II.1.3 FK-représentation et existence via le CRCM . . . 62
II.2 Percolation du CRCM . . . 65
II.2.1 Preuve de la percolation dans le cas $q > 1$ . . . 68
II.2.2 Preuve de la percolation dans le cas $q < 1$ . . . 71
II.2.3 Transition de phase pour le WR . . . 73

III Le cas extrême des rayons non intégrables **75**
III.1 Présentation du problème 76
III.2 Non unicité du CRCM en petite activité 77
III.2.1 Théorème de non-unicité via le WR 79
III.2.2 Construction d'une phase non monochromatique 79
III.2.3 Construction d'une phase polychromatique satisfaisant DLR 83
III.3 Conjecture d'unicité en grande activité 86
III.3.1 Preuve heuristique de la conjecture 87
III.3.2 Conjecture : un premier pas vers une preuve rigoureuse dans le cas $d = 1$ 89
III.3.3 Perspectives 94

Introduction

Les processus ponctuels sont des objets très étudiés en probabilité et statistique pour modéliser et étudier les données spatiales qui apparaissent dans de nombreux domaines tels que l'écologie, l'astronomie, l'épidémiologie, la géographie, la sismologie, les télécommunications, la science des matériaux, et beaucoup d'autres. Le processus ponctuel le plus populaire et le plus étudié est le processus ponctuel de Poisson [11] où les points n'interagissent pas et sont distribués de manière indépendante. Néanmoins cette indépendance rend l'applicabilité de ce modèle difficile et des modèles avec interaction ont été introduits.

La théorie des processus ponctuels gibbsiens a été introduite à la fin des années 1960 par Dobrushin, Lanford et Ruelle pour formaliser mathématiquement un système physique constitué de nombreuses particules en interaction. Un processus de Gibbs est une famille finie ou dénombrable de variables aléatoires qui admettent des lois conditionnelles données. Ce type de processus ponctuels, dont l'interaction peut être attractive, répulsive ou encore dépendante de caractéristiques géométriques, a pour but principal d'étudier la transition de phase. Ce phénomène traduit le changement abrupte, discontinue, d'une caractéristique macroscopique. Considérons par exemple un métal ferromagnétique comme le fer. Ce métal est constitué d'un grand nombre d'atomes rangés sur un réseau. Chaque atome a un moment magnétique, un spin, dû aux électrons et deux atomes voisins ont tendance à avoir des spins alignés. À haute température cette tendance est compensée par l'agitation thermique. Néanmoins si la température est inférieure à un seuil critique appelé température de Curie, alors les spins s'alignent et donne lieu à un phénomène de magnétisation spontanée du métal. Ce phénomène se modélise et s'étudie avec le *modèle d'Ising*.

L'objet d'étude principal de cette thèse de doctorat est le *Continuum Random Cluster Model* (CRCM). C'est un modèle de boules aléatoires défini en volume fini comme une pénalisation du *modèle booléen poissonien* stationnaire d'intensité $z > 0$ et de loi des rayons Q dans une certaine fenêtre Λ bornée. La densité non normalisée s'exprime comme $q^{N_{cc}}$ où N_{cc} désigne le nombre de composantes connexes de la structure aléatoire et où $q > 0$ est un paramètre. Pour $q = 1$ nous retrouvons le *modèle booléen poissonien*. De plus le nombre moyen de composantes connexes du modèle croît avec q, ce qui donne une interprétation claire de ce paramètre en tant que paramètre de connectivité. Pour définir le modèle en volume infini une densité globale n'a pas de sens et nous définissons le modèle à l'aide des lois conditionnelles et des équations DLR.

Ce modèle est une version continue du *Random Cluster Model*. C'est un modèle d'arêtes aléatoires introduit à la fin des années 1960 par Fortuin et Kasteleyn afin d'unifier l'étude de certains modèles tels que le *modèle de percolation*, le *modèle d'Ising* ou encore le *modèle de Potts*. Ce modèle a été étudié, notamment par Grimmett [29], et de nombreuses propriétés ont été démontrées, comme par exemple l'existence en volume infini, la percolation ou encore l'unicité pour presque tout paramètre p. Ce modèle est encore très étudié à ce jour. Nous pouvons par exemple mentionner la démonstration de la valeur du seuil critique de percolation pour le graphe carré $\mathbb{Z}^2$ démontrée en 2011 dans [2].

Le CRCM a été introduit pour la première fois dans les années 1980 par Klein [36]. En mécanique statistique son intérêt premier fût la FK-représentation qui le relit au *modèle de Widom-Rowlinson* et plus généralement aux *modèles de Potts continus*. Cette représentation a permis de démontrer ou redémontrer des résultats de transition de phase pour ces modèles, voir [7, 21]. Le CRCM est aussi étudié en géométrie stochastique où il permet de représenter des phénomènes physiques, chimiques ou biologiques comme le célèbre exemple d'expansion de la bruyère. Le choix du paramètre de connectivité q permet de "fiter" le mieux possible les jeux de données. Une estimation du paramètre q par maximum de vraisemblance a été faite dans [44] pour le jeu de données de la bruyère.

Tous les travaux mentionnés précédemment concernent le CRCM en volume fini. Le CRCM en volume infini n'a pas été mis en valeur et étudié comme l'a été le modèle discret. Néanmoins l'étude des mesures de Gibbs en volume infini, et en particulier du CRCM, est très intéressante. En géométrie aléatoire le CRCM en volume infini est un modèle plus réaliste que le *modèle booléen* pour les applications en science des matériaux, en modélisation des micro-émulsions, etc. Certaines propriétés macroscopiques, telles que les valeurs moyennes, la perméabilité ou la conductivité, peuvent être étudiées avec la théorie de Palm ou la théorie ergodique. En physique statistique les phénomènes de transition de phase sont observables à partir du modèle en volume infini. Il est conjecturé que l'unicité de CRCM serait enfreinte pour certaines valeurs des paramètres z et q. Enfin en statistique spatiale l'existence des modèles en volume infini permet d'étudier certaines propriétés asymptotiques d'estimateurs, lorsque la fenêtre d'observation croît. Ce type d'étude a déjà été faite pour différents modèles dans [9, 16, 17].

Dans le chapitre I nous nous intéressons à la question de l'existence du CRCM en volume infini. En effet le modèle est alors défini à l'aide des équations DLR, nommées après Dobrushin, Landford et Ruelle, qui définissent les lois conditionnelles du CRCM. La question est donc de savoir s'il existe une mesure satisfaisant ces équations. C'est une question qui a été étudiée pour de nombreux modèles gibbsiens, comme par exemple pour le *modèle Quermass* dans [12]. Il est connu, même si ce n'est pas écrit dans la littérature, que le CRCM existe dans le cas particulier où q est un entier et où les rayons sont constants. Ce résultat est un conséquence de la FK-représentation qui lie le CRCM au *modèle de Widom-Rowlinson*. Notre travail a été de fournir un résultat d'existence le plus général possible et indépendant du *modèle de Widom-Rowlinson*. Le résultat principal de ce premier chapitre est le suivant.

Dans le cas $q < 1$ nous avons l'existence d'un CRCM stationnaire pour tout $z > 0$ dés que les rayons sont bornés.
Dans le cas $q \geq 1$ si les rayons, potentiellement non bornés, du *modèle booléen* sous-jacent satisfont la condition d'intégrabilité $\int R^d Q(dR) < \infty$, alors pour tout $z > 0$ nous avons l'existence d'un CRCM stationnaire.

Le cas $q < 1$ est techniquement beaucoup plus compliqué, et la question de l'existence pour les rayons non bornés reste une question ouverte. En plus d'être très général, la preuve de ce résultat introduit des techniques qui sont utiles à de nombreuses reprises dans ce manuscrit.

Dans le chapitre II nous introduisons en détail le *modèle de Widom-Rowlinson* (WR). C'est un modèle de boules colorées introduit à la fin des années 1960 par Widom et Rowlinson [51] pour modéliser l'interaction de deux gaz. Dans ce modèle la seule interaction est une interaction hard-core entre les particules de différentes couleurs : deux boules de différentes couleurs ne peuvent pas s'intersecter. Outre son applicabilité en physique, ce modèle est le premier modèle continu pour lequel la transition de phase a été démontrée par Ruelle [48] avec une méthode de Peierls, puis redémontrée par Chayes, Chayes et Kotecký [7] en utilisant une technique de percolation basée sur la FK-représentation du WR avec le CRCM. En effet pour une configuration à N boules, parmi les q^N colorations possibles, il y en a seulement $q^{N_{cc}}$ qui sont admissibles, puisque les boules de différentes couleurs ne peuvent pas s'intersecter. Ainsi pour obtenir un WR, il suffit de prendre un CRCM et ensuite de colorier chaque composante connexe.

Dans le début du chapitre nous définissons précisément le WR et nous démontrons le résultat suivant

Si les rayons, potentiellement non bornés, du *modèle booléen* sous-jacent satisfont la condition d'intégrabilité $\int R^d Q(dR) < \infty$, alors pour tous les paramètres z et q nous avons l'existence d'un WR stationnaire.

Nous donnons deux preuves de ce résultat. La première se base sur des outils classiques pour localiser l'interaction du WR et est très semblable au résultat principal du chapitre I. La seconde s'exprime comme un corollaire du résultat d'existence du CRCM dans le chapitre I, couplé avec la FK-représentation.

Ensuite nous étudierons la percolation du CRCM. La théorie de la percolation s'intéresse aux propriétés de connectivité des milieux aléatoires, et particulièrement à l'existence d'une composante infinie dans ce milieu. Considérons l'exemple de la pluie qui tombe sur le sol. À l'endroit où une goute tombe se forme une région circulaire mouillée. Quand la pluie commence à tomber nous observons des petites régions mouillées à l'intérieur d'une grande région sèche. Lorsque la pluie continue de tomber il y a un changement brutal d'observation. Nous passons de "zones mouillées dans une grande zone sèche" à "zones sèches dans une grande zone mouillée". Ce phénomène est un autre exemple de transition de phase.

Il a été montré par HALL en 1985 [31], que si les rayons satisfont une bonne condition d'intégrabilité, alors le *modèle booléen poissonien* ne percole pas pour de faibles intensités. La condition d'intégrabilité optimale $\int R^d Q(dR) < \infty$ a été démontrée par GOUÉRÉ en 2008 [27].

La percolation est d'autant plus intéressante pour le CRCM puisque l'interaction de ce modèle dépend de la connectivité de la structure aléatoire. Le second résultat de ce chapitre est le suivant.

Sous de bonnes hypothèses garantissant l'existence du CRCM, nous avons absence de percolation du CRCM en faible activité et percolation du CRCM en forte activité.

Ce résultat était déjà connu dans le cas où les rayons sont constants. Encore une fois le travail a été de démontrer un résultat le plus général possible. Un corollaire de ce résultat est la transition de phase du WR. Ce corollaire est une généralisation non triviale des résultats de [7] et [21]. Il simplifie grandement la preuve de ces deux articles puisque nous colorions directement le CRCM en volume infini pour obtenir un WR. Enfin il généralise ces résultats au cas des rayons non bornés.

La principale restriction des chapitres I et II est une hypothèse d'intégrabilité sur les rayons. Lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée nous parlons de *cas extrême*. Dans ce cas l'interaction a une très longue portée et devient compliquée à contrôler. Notons que dans ce cas l'existence du CRCM est trivialement démontrée puisque le *modèle booléen* est un CRCM qui recouvre tout l'espace avec une composante connexe géante. Mais lorsque $q > 1$ l'interaction du CRCM favorise des configurations ayant de nombreuses composantes connexes, et une compétition énergie-entropie apparaît. La question est donc de savoir s'il existe ou non un autre CRCM pour lequel tout l'espace n'est pas recouvert. Le premier résultat de ce chapitre est le suivant.

Pour q entier strictement plus grand que 1, nous avons l'existence en petite activité d'un CRCM stationnaire différent du *modèle booléen*.

Ce comportement est très inhabituel en mécanique statistique puisqu'il y a en général unicité en petite activité. De plus nous nous attendons à retrouver l'unicité pour de grandes activités. Cette conjecture est beaucoup plus compliquée à démontrer et nous n'y sommes pas arrivé complètement. Cependant nous fournissons une preuve heuristique de cette conjecture, avant d'en démontrer une version faible en dimension 1. Voici le dernier résultat.

En dimension 1 et pour des activités assez grandes, le CRCM à volume fini et à condition de bord vide converge vers le *modèle booléen poissonien*.

Chapitre I

Existence du Continuum Random Cluster Model (CRCM)

Résumé du chapitre

Dans ce chapitre nous allons définir le *Continuum Random Cluster Model*, dans un premier temps en volume fini avec une densité non normalisée, puis en volume infini avec les équations DLR définissant les lois conditionnelles. Le résultat principal de ce chapitre est le suivant.

Dans le cas $q < 1$ nous avons l'existence d'un CRCM stationnaire pour tout $z > 0$ dés que les rayons sont bornés.
Dans le cas $q \geq 1$ si les rayons, potentiellement non bornés, du *modèle booléen* sous-jacent satisfont la condition d'intégrabilité

$$\int R^d Q(dR) < \infty,$$

alors pour tout $z > 0$ nous avons l'existence d'un CRCM stationnaire.

La preuve de ce résultat est basée sur des outils de domination stochastique, de percolation et de compacité des ensembles de niveau de l'entropie spécifique. Une fois ce théorème d'existence démontré, nous ferons une petite discussion concernant la méthode de *disagreement percolation* qui permet de montrer l'unicité des mesures de Gibbs. Nous présenterons la philosophie de cette technique et discuterons des perspectives. Enfin nous terminerons le chapitre en discutant de la perspective d'étude de l'estimation des paramètres du CRCM.

Sommaire

I.1 Processus ponctuel et structure germe-grain 16
- I.1.1 Espace d'état 16
- I.1.2 Processus ponctuel 17
- I.1.3 Stationnarité, ergodicité et entropie spécifique 19
- I.1.4 Structure germe-grain et composantes connexes 22

I.2 Processus de Gibbs à volume fini 26
- I.2.1 Définition du CRCM sur une fenêtre bornée 26
- I.2.2 Simulations 28
- I.2.3 Propriétés 29

I.3 Processus de Gibbs à volume infini 33
- I.3.1 Définition du CRCM en volume infini 33
- I.3.2 Unicité de la composante connexe infinie 36
- I.3.3 Existence du CRCM 41
- I.3.4 Unicité du CRCM : Résultat et perspective 50
- I.3.5 (Perspective) Estimation des paramètres 53

I.1 Processus ponctuel et structure germe-grain

I.1.1 Espace d'état

Soit d un entier strictement positif qui représente la dimension de l'espace. Nous posons S l'ensemble métrique $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ muni de sa tribu borélienne usuelle. Dans la suite Ω est l'ensemble des mesures positives ω sur S à valeurs entières et finies sur les ensembles $\Lambda \times \mathbb{R}^+$ pour chaque $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ borné. Un élément ω de Ω est appelé *configuration* et peut être représenté comme $\omega = \sum_{i\in I} \delta_{(x_i,R_i)}$ pour une suite finie ou infinie $(x_i, R_i)_{i\in I}$ de points de S sans point d'accumulation pour la suite des $(x_i)_{i\in I}$.

Nous munissons Ω de la tribu $\mathcal{F}$ engendrée par les variables de comptage

$$\begin{cases} \Omega & \longrightarrow \mathbb{N} \\ \omega & \longrightarrow \omega(W) \end{cases}, \quad W \text{ borélien borné de } S.$$

Cette tribu est la tribu borélienne associée à une métrique sur Ω que nous n'expliciterons pas. Nous renvoyons à [40] pour plus de détails.

Pour un sous-ensemble Λ de $\mathbb{R}^d$, la configuration restreinte à Λ est définie par $\omega_\Lambda(.) := \omega(. \cap \Lambda \times \mathbb{R}^+)$ et $\mathcal{F}_\Lambda$ est la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par les variables de comptage

$$\begin{cases} \Omega & \longrightarrow \mathbb{N} \\ \omega & \longrightarrow \omega(W) \end{cases}, \quad W \text{ borélien borné de } \Lambda \times \mathbb{R}^+.$$

Nous notons $(x, R) \in \omega$ si $\omega(\{(x, R)\}) > 0$. Pour une configuration ω et un sous-ensemble Λ de $\mathbb{R}^d$, $\omega(\Lambda)$ est le nombre de points $(x, R) \in \omega$ tel que $x \in \Lambda$.

Enfin pour un borélien borné Λ de $\mathbb{R}^d$, une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable est dite **Λ-locale** si pour tout ω

$$f(\omega) = f(\omega_\Lambda),$$

et plus généralement une fonction mesurable est dite locale s'il existe Λ borné tel que f soit Λ-locale.

I.1.2 Processus ponctuel

En probabilité et statistique, un processus ponctuel est un type particulier de processus stochastique pour lequel une réalisation est un élément ω de Ω, où chaque atome de ω représente un point de S. L'étude des processus ponctuels a des applications dans de nombreux domaines tels que la science des matériaux, les télécommunications ou l'épidémiologie. Formellement un processus ponctuel est une variable aléatoire Γ d'un espace de probabilité abstrait, que nous ne formalisons pas, à valeurs dans Ω.

La loi d'un processus ponctuel, que nous notons en général avec la lettre P, est donc une mesure de probabilité sur Ω. Nous travaillons en général avec cette mesure de probabilité plutôt qu'avec le processus ponctuel lui-même. Cette loi est caractérisée par la loi du nombre de points sur les boréliens bornés, c'est-à-dire par la probabilité des événements $\{\Gamma(W) = k\}$ où k est un entier naturel et W un borélien borné de S. Il existe de nombreuses autres caractérisations de la loi P d'un processus, telles que la fonctionnelle de Laplace ou le théorème de Rényi qui, sous certaines hypothèses qui seront toujours vérifiées par la suite, caractérise la loi d'un processus à l'aide des "probabilités de vide". Nous n'utiliserons pas ces caractérisations et ne formalisons donc pas leurs définitions. Nous renvoyons à [11] pour plus de détails.

Une quantité naturelle associée à un processus ponctuel est le nombre moyen de points dans un borélien W de S. Nous définissons ainsi une mesure μ σ-finie sur S, que nous nommons mesure intensité et qui s'écrit

$$\mu(W) = \mathbb{E}[\Gamma(W)].$$

Dans notre cas il est souvent plus intéressant de considérer seulement le nombre moyen de points "spatiaux", c'est-à-dire de considérer $W = \Lambda \times \mathbb{R}^+$.

Nous présentons maintenant les processus ponctuels de Poisson. Les processus ponctuels de Poisson sont les processus ponctuels les plus connus et les plus étudiés. Nous ne faisons pas de présentation exhaustive des propriétés d'un processus ponctuel de Poisson. Les lecteurs intéressés peuvent trouver dans [8, 11] une étude plus complète.

Définition I.1.1. *Soit $\mathbb{X}$ un espace métrique. Soit μ une mesure σ-finie sur $\mathbb{X}$. Un processus ponctuel Γ sur $\mathbb{X}$ est un **processus ponctuel de Poisson** de mesure intensité μ, si sa loi que nous notons π^μ vérifie, pour tout entier naturel n, pour tous $W_1, \dots W_n$ boréliens bornés disjoints et pour tous $k_1, \dots k_n$,*

$$\pi^\mu(\omega(W_i) = k_i, i \in \{1, \dots, n\}) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\mu(W_i)} \frac{\mu(W_i)^{k_i}}{k_i!}.$$

De la définition nous déduisons que les réalisations du processus sur deux boréliens disjoints sont indépendantes. Nous parlons d'indépendance sur les blocs disjoints.

Sur l'espace produit $S = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ nous considérons à partir de maintenant les processus ponctuels de Poisson de mesure d'intensité $\mu = z\mathcal{L}^d \otimes Q$, où z est un réel strictement positif, où $\mathcal{L}^d$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et où Q est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^+$. Nous notons $\pi^{z,Q}$ la loi de ce processus ponctuel. Cet objet peut aussi être vu comme la réalisation d'un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}^d$ d'intensité $z\mathcal{L}^d$, et où chaque point x du processus est muni d'une marque R de loi Q, indépendante du point x et des autres marques. Ainsi pour simuler une réalisation sous $\pi^{z,Q}$ dans une fenêtre Λ il faut :

- simuler une variable N qui suit une loi de Poisson de paramètre $z\mathcal{L}^d(\Lambda)$,
- simuler $x_1, \dots, x_N$ i.i.d. de loi uniforme sur Λ,
- simuler $R_1, \dots, R_N$ i.i.d. de loi Q.

La prochaine proposition, communément appelée *formule de Slivnyak-Mecke*, a été introduite pour la première fois par Campbell et démontrée par Mecke dans les années 1960. Elle permet de compter la somme moyenne des contributions de chaque point d'une processus ponctuel de Poisson. Cette formule sera généralisée dans le cas du *Continuum Random Cluster Model* avec les équations GNZ, voir Proposition I.2.7 et Proposition I.3.2.

Proposition I.1.2 (Formule de Slivnyak-Mecke)**.** *Pour toute fonction F positive et mesurable, nous avons*

$$\int_\Omega \sum_{X\in\omega} F(X, \omega - \delta_X)\pi^{z,Q}(d\omega) = z \int_\Omega \int_S F(X,\omega) m(dX)\pi^{z,Q}(d\omega),$$

où $X = (x, R)$ est un point marqué et où $m(dX) = m(dx, dR) = \mathcal{L}^d(dx) \otimes Q(dR)$.

Nous allons maintenant définir des processus ponctuels qui sont absolument continus par rapport à un processus ponctuel de Poisson $\pi_\Lambda^{z,Q}$ où Λ est un borélien borné de $\mathbb{R}^d$. Nous notons f_Λ cette densité.

Définition I.1.3. *La densité f_Λ est dite* héréditaire *si*

$$f_\Lambda(\omega) = 0 \Rightarrow f_\Lambda(\omega + \delta_X) = 0 \text{ pour tout } X \in S.$$

Dans ce cas nous pouvons définir une quantité, appelée densité de Papangelou *définie par*

$$h_\Lambda(X, \omega) = \frac{f_\Lambda(\omega + \delta_X)}{f_\Lambda(\omega)} \mathbb{1}_{f_\Lambda(.)\neq 0}(\omega),$$

et qui représente la densité conditionnelle d'ajouter X dans la configuration ω.

La densité de Papangelou, comme la densité, caractérise la loi du processus ponctuel. Elle intervient dans les équations GNZ satisfaites par une mesure de Gibbs, voir par exemple la Proposition I.3.2 pour le cas du *Continuum Random Cluster Model*. Elle permet aussi de montrer des résultats de domination stochastique. Nous allons maintenant introduire cette notion. Nous munissons Ω de l'ordre partielle suivant. Pour deux configurations ω et ω', nous notons $\omega \leq \omega'$ si pour tout borélien W de S nous avons $\omega(W) \leq \omega'(W)$. Autrement dit $\omega \leq \omega'$ si ω a "moins de points" que ω'.

Un événement $A \in \mathcal{F}$ est dit **croissant** si

$$\omega \in A \Rightarrow \omega' \in A, \forall \omega' \geq \omega.$$

Enfin si P et P' sont deux mesures de probabilité sur Ω, nous disons que P' domine stochastiquement P et nous notons $P \preceq P'$ si

$$\forall A \text{ croissant}, \; P(A) \leq P'(A).$$

Théorème I.1.4. *Si pour tout $X \in S$ et tout $\omega \in \Omega$,*

$$h_\Lambda(X,\omega) \leq C \text{ (respectivement } h_\Lambda(X,\omega) \geq C),$$

alors nous avons $f_\Lambda(\omega)\pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega) \preceq \pi_\Lambda^{Cz,Q}$ (respectivement $f_\Lambda(\omega)\pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega) \succeq \pi_\Lambda^{Cz,Q}$).

Ce théorème est une version faible du Théorème 1.1 de [23]. Ce théorème se généralise au cas des mesures de probabilités dont les lois conditionnelles sont absolument continues par rapport à un processus ponctuel de Poisson. Ce résultat nous sera très utile tout le long de ce manuscrit.

Enfin pour finir nous introduisons une topologie sur l'ensemble des mesures de probabilité sur Ω (respectivement l'ensemble des processus ponctuels). Cette topologie, la **topologie de la convergence locale** est la topologie la plus naturelle pour la convergence des mesures de Gibbs.

Définition I.1.5. *Nous disons qu'une suite de mesures de probabilité P_n sur Ω (respectivement une suite de processus ponctuels Γ_n) converge vers P (respectivement Γ) pour la topologie de la convergence locale si pour chaque fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable locale bornée,*

$$\int f(\omega)P_n(d\omega) \underset{n\to\infty}{\to} \int f(\omega)P(d\omega) \text{ (resp. } \mathbb{E}[f(\Gamma_n)] \underset{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}[f(\Gamma)]).$$

Nous allons voir dans la prochaine section un critère de tension très simple pour cette topologie : **l'entropie spécifique**.

I.1.3 Stationnarité, ergodicité et entropie spécifique

Pour $x \in \mathbb{R}^d$, nous définissons la translation de vecteur x sur l'espace des configurations par

$$\tau_x \begin{cases} \Omega & \longrightarrow \quad \Omega \\ \omega = \sum_{i\in I} \delta_{(y_i,R_i)} & \longrightarrow \sum_{i\in I} \delta_{(y_i+x,R_i)} \end{cases},$$

et nous notons $\mathcal{T}$ l'ensemble de toutes les translations. Nous notons aussi $\mathcal{F}_{sta}$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ des événements stables par toutes les translations de $\mathcal{T}$. Alors une mesure de probabilité P sur Ω est dite **stationnaire** (ou invariante par translation) si

$$\forall \tau \in \mathcal{T}, \; P \circ \tau^{-1} = P.$$

Il est très facile de voir que le processus ponctuel de Poisson de loi $\pi^{z,Q}$ est stationnaire. Parmi les mesures stationnaires, certaines mesures jouent un rôle particulier : les mesures ergodiques.

Définition I.1.6. *Une mesure de probabilité stationnaire P sur Ω est dite* ***ergodique*** *si pour tout événement A stationnaire, nous avons*

$$P(A) \in \{0,1\}.$$

Nous pourrons toujours décomposer une mesure de probabilité stationnaire en mélange de mesures ergodiques, ce qui facilitera l'étude. Ceci est détaillé dans la prochaine proposition.

Proposition I.1.7 ([20] chapitre 14)**.**

1. *Une mesure de probabilité P stationnaire est entièrement déterminée par ses valeurs sur $\mathcal{F}_{sta}$.*
2. *Une mesure de probabilité stationnaire est ergodique si et seulement si elle est extrémale dans l'ensemble convexe des mesures de probabilité stationnaires.*
3. *Deux mesures de probabilité ergodiques différentes P et P' sont singulières, c'est-à-dire qu'il existe $A \in \mathcal{F}_{sta}$ tel que $P(A) = 1$ et $P'(A) = 0$.*

Une mesure de probabilité stationnaire se décompose donc en mélange de mesures de probabilité ergodiques et singulières. Dans de nombreux cas, et en particulier en mécanique statistique, il est suffisant (et plus facile) d'étudier les mesures ergodiques.

Nous introduisons maintenant l'entropie spécifique. Cette fonctionnelle de l'ensemble des probabilités stationnaires de Ω est fondamentale en mécanique statistique puisque les mesures de Gibbs stationnaires sont souvent exprimées comme minimum de l'énergie libre, c'est-à-dire l'énergie moyenne plus l'entropie spécifique. De plus l'entropie spécifique a des propriétés très agréables, dont la principale est d'être un outil de tension (pour la topologie de la convergence locale) exceptionnellement facile à utiliser, ce qui permet très simplement de construire des mesures de Gibbs. La vocation principale de cette partie est donc de définir l'entropie spécifique et d'énoncer le résultat de tension démontré par Georgii [20] dans les années 1980.

Définition I.1.8. *Soient P et P' deux mesures de probabilité sur Ω. Soit Λ un borélien de $\mathbb{R}^d$. Nous définissons l'entropie relative de P par rapport à P' sur la fenêtre Λ par*

$$\mathcal{I}_\Lambda(P|P') = \begin{cases} \int_\Omega f \ \ln(f) \ dP'_\Lambda & si \quad P_\Lambda << P'_\Lambda, \ f = \frac{dP_\Lambda}{dP'_\Lambda} \\ +\infty & sinon \end{cases},$$

où P_Λ désigne la restriction de P sur $\mathcal{F}_\Lambda$.

Cette entropie relative diffère de l'entropie "classique" ou "physique" uniquement par un signe.

À partir de maintenant nous allons prendre $P' = \pi^{z,Q}$. Nous voulons introduire une notion d'entropie "globale" et la définition précédente n'est pas envisageable. En effet une condition d'absolue continuité globale est trop restrictive et n'est en général pas vérifiée pour les mesures de Gibbs. Nous allons donc définir l'entropie spécifique en faisant grandir une boîte.

Définition I.1.9. *Soit P une mesure de probabilité stationnaire sur Ω. Soit (Λ_n) une suite de boréliens de $\mathbb{R}^d$ croissant vers $\mathbb{R}^d$. Alors la suite $\frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)}\mathcal{I}_{\Lambda_n}(P|\pi^{z,Q})$ converge vers* $\sup \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda)}\mathcal{I}_\Lambda(P|\pi^{z,Q})$ *qui ne dépend pas de la suite (Λ_n) choisie. Le supremum est pris sur l'ensemble des Λ de la forme $\prod_{i=1}^d [a_i, b_i[$.*

Nous pouvons ainsi définir ***l'entropie spécifique*** *:*

$$\mathcal{I}^z(P) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)}\mathcal{I}_{\Lambda_n}(P|\pi^{z,Q}).$$

Remarque I.1.10. *L'hypothèse de stationnarité est très importante puisqu'elle permet d'assurer la convergence et d'exprimer la limite comme supremum. Ceci a été démontré dans le livre de* GEORGII *[20].*

La prochaine proposition permet très simplement d'identifier les mesures d'entropie spécifique nulle comme étant $\pi^{z,Q}$. Ce résultat nous sera précieux dans le chapitre III.

Proposition I.1.11. *Soit P une mesure de probabilité stationnaire. Si $\mathcal{I}^z(P) = 0$ alors $P = \pi^{z,Q}$.*

Démonstration. Comme l'entropie spécifique est nulle nous avons, grâce à la caractérisation en tant que suprémum, que pour chaque cube Λ, l'entropie relative $\mathcal{I}_\Lambda(P|\pi^{z,Q})$ est nulle. Or il est facile de vérifier que

$$\mathcal{I}_\Lambda(P|\pi^{z,Q}) = \int_\Omega \phi\left(\frac{dP_\Lambda}{d\pi_\Lambda^{z,Q}}\right) d\pi_\Lambda^{z,Q},$$

où $\phi(x) = 1 - x + x\ln(x)$. Cette fonction a un unique minimum 0 lorsque $x = 1$, ce qui implique que $P_\Lambda = \pi_\Lambda^{z,Q}$. Ceci étant vrai pour chaque cube Λ, nous obtenons donc $P = \pi^{z,Q}$. □

Théorème I.1.12. *Relativement à la topologie de la convergence locale induite sur l'ensemble des mesures de probabilité stationnaires de Ω, nous avons*

1. *$\mathcal{I}^z$ est affine, c'est-à-dire que pour tout $\alpha \in [0,1]$ et pour toutes mesures de probabilité stationnaires P_1 et P_2 nous avons*
$$\mathcal{I}^z(\alpha P_1 + (1-\alpha)P_2) = \alpha\mathcal{I}^z(P_1) + (1-\alpha)\mathcal{I}^z(P_2).$$
2. *$\mathcal{I}^z$ est semi-continue inférieurement.*
3. *$\{P \text{ stationnaire}, \mathcal{I}(P) \leq C\}$ est séquentiellement compact, pour tout C réel positif.*

La preuve de ce théorème se trouve dans [20]. Le point 3 du Théorème I.1.12 est un point crucial qui sera utilisé de nombreuses fois dans ce manuscrit. C'est un critère de tension qui va être particulièrement simple à utiliser. En effet l'entropie spécifique d'une mesure de Gibbs admet très souvent une borne simple en majorant par la probabilité (ou son logarithme) d'obtenir la configuration vide. Toutefois la liberté de choix du paramètre z dans le Théorème I.1.12 va conduire au corollaire suivant qui affaiblit l'hypothèse du point 3.

Corollaire I.1.13. *Pour une mesure de probabilité stationnaire P sur Ω, nous notons*

$$i(P) = \int \omega([0,1]^d) P(d\omega).$$

Alors les ensembles $\{P \text{ stationnaire}, \mathcal{I}(P) \leq C + Di(P)\}$ sont séquentiellement compact pour tous C et D positifs, relativement à la topologie de la convergence locale.

Démonstration. Soit P tel que $\mathcal{I}^z(P) \leq C+Di(P)$. Nous allons trouver z' tel que $\mathcal{I}^{z'}(P) \leq C'$. Ainsi le Théorème I.1.12 permettra de conclure. Nous avons

$$\pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega) = e^{(z'-z)\mathcal{L}^d(\Lambda)} \left(\frac{z}{z'}\right)^{\omega(\Lambda)} \pi_\Lambda^{z',Q}(d\omega).$$

Maintenant calculons $\mathcal{I}^{z'}(P)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\Lambda_n}(P|\pi^{z',Q}) &= \int_\Omega \ln\left(\frac{dP_{\Lambda_n}}{d\pi_{\Lambda_n}^{z',Q}}\right) dP_{\Lambda_n} = \int_\Omega \ln\left(\frac{dP_{\Lambda_n}}{d\pi_{\Lambda_n}^{z,Q}} \times \frac{d\pi_{\Lambda_n}^{z,Q}}{d\pi_{\Lambda_n}^{z',Q}}\right) dP_{\Lambda_n} \\
&= \int_\Omega \ln\left(\frac{dP_{\Lambda_n}}{d\pi_{\Lambda_n}^{z,Q}}(\omega) \times \left(\frac{z}{z'}\right)^{\omega(\Lambda_n)} e^{(z'-z)\mathcal{L}^d(\Lambda_n)}\right) P_{\Lambda_n}(d\omega) \\
&= (z'-z)\mathcal{L}^d(\Lambda_n) + \ln\left(\frac{z}{z'}\right) \int_\Omega \omega(\Lambda_n) P_{\Lambda_n}(d\omega) + \mathcal{I}_{\Lambda_n}(P|\pi^{z,Q}).
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{I}^{z'}(P) = \mathcal{I}^z(P) + (z'-z) + \ln\left(\frac{z}{z'}\right) i(P).$$

Maintenant en choisissant z' tel que $\ln\left(\frac{z}{z'}\right) = -C$ nous obtenons

$$\mathcal{I}^z(P) \leq C'$$

pour un C' qui dépend de C, D, z et z'. □

I.1.4 Structure germe-grain et composantes connexes

Dans la prochaine partie nous allons définir le *Continuum Random Cluster Model*. L'interaction de ce modèle est géométrique et dépend de la configuration ω seulement via la structure germe-grain de l'union des boules

$$L(\omega) = \underset{(x,R)\in\omega}{\cup} B(x,R),$$

où $B(x,R)$ désigne la boule euclidienne fermée de centre x et de rayon R.

Les composantes connexes de $L(\omega)$ sont définies à l'aide du graphe de connexion $\mathcal{G}(\omega) = (\mathcal{V}(\omega), \mathcal{E}(\omega))$ dont les sommets sont

$$\mathcal{V}(\omega) = \{(x,R) \in \omega\}$$

et les arêtes sont

$$\mathcal{E}(\omega) = \{\{(x,R),(y,R')\} \subset \mathcal{V}(\omega), \text{ tels que } B(x,R) \cap B(y,R) \neq \emptyset\}.$$

Une composante connexe de $L(\omega)$ est alors définie comme l'union des boules fermées $B(x,R)$ où (x,R) est dans une composante connexe de $\mathcal{G}(\omega)$. Cette définition diffère de la définition topologique usuelle de composante connexe, comme nous pouvons le voir par exemple pour la configuration $\omega = \delta_{(0,0)} + \sum_{n\geq 1} \delta_{((n,0,\ldots,0),n-1/n)}$. La raison pour laquelle nous considérons cette notion de connectivité est que l'interaction d'une configuration infinie dépendra des sous-configurations finies, pour lesquelles les deux notions de composante connexe sont équivalentes. Donc à partir de maintenant quand nous parlerons de composantes connexes et de nombre de composantes connexes, ce sera toujours par rapport à cette règle de connectivité.

Pour une configuration ω nous notons $N_{cc}(\omega)$ le nombre, potentiellement infini, de composantes connexes dans $L(\omega)$. Pour les configurations finies où le nombre de composantes connexes est fini, cette quantité sera utilisée pour définir le *Continuum Random Cluster Model* sur une fenêtre bornée. Malheureusement pour les configurations infinies le nombre de composantes connexes peut être (et sera $\pi^{z,Q}$-presque sûrement) infini. Nous allons donc introduire une quantité finie qui compte "localement" le nombre de composantes connexes.

Définition I.1.14. *Pour chaque configuration $\omega \in \Omega$ et chaque $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ borné, la limite*

$$N_{cc}^{\Lambda}(\omega) = \lim_{\Delta \to \mathbb{R}^d} \left[N_{cc}(\omega_\Delta) - N_{cc}(\omega_{\Delta \setminus \Lambda}) \right]$$

prise pour n'importe quelle suite (Δ_n), existe et est finie. Nous appellons cette quantité ***nombre Λ-local de composantes connexes****.*

Preuve de la convergence. Pour un ω donné nous nous intéressons à la quantité

$$c_n = N_{cc}(\omega_{\Delta_n}) - N_{cc}(\omega_{\Delta_n \setminus \Lambda}),$$

où (Δ_n) est une suite de boréliens croissant vers $\mathbb{R}^d$. Nous allons montrer que la suite (c_n) converge et que sa limite ne dépend pas des Δ_n. Comme la suite (c_n) a des valeurs entières, elle va converger si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.

Pour un sous ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, une composante connexe de $L(\omega_{\Lambda^c})$ est appelée Λ-composante de ω si elle est connectée à $L(\omega_\Lambda)$.

Pour chaque $n \geq 1$ et chaque $X = (x, R) \in \omega_{\Delta_n^c}$ nous introduisons la quantité

$$D_n(X) = N_{cc}(\omega_{\Delta_n} + \delta_X) - N_{cc}(\omega_{\Delta_n \setminus \Lambda} + \delta_X) - [N_{cc}(\omega_{\Delta_n}) - N_{cc}(\omega_{\Delta_n \setminus \Lambda})],$$

qui donne la variation du nombre de composantes connexes quand la boule $B(x, R)$ est ajoutée. Nous remarquons que $D_n(X)$ peut ne pas être nul seulement lorsque l'une des deux situations suivantes est réalisée.

1. La boule $B(x, R)$ est connectée à au moins deux Λ-composantes de ω_{Δ_n}. Ce cas fait diminuer le nombre de Λ-composantes.
2. La boule $B(x, R)$ intersecte une boule B de $L(\omega_\Lambda)$, sans intersecter aucune Λ-composante de ω_{Δ_n} connectée à B (ce cas se produit en particulier quand ω_{Λ_n} n'a aucune Λ-composante). Ce phénomène correspond à la création, ou l'apparition, d'une Λ-composante de $L(\omega)$.

Ces deux cas sont illustrés en Figure I.1. Si nous montrons qu'il existe $N \geq 1$, pouvant dépendre de ω, tel qu'aucune des deux situations précédentes ne se produit pour tout $X \in \omega_{\Delta_N^c}$, alors cela assurera que (c_n) est constante à partir du rang N.

Le second cas ne peut se produit qu'un nombre fini de fois. En effet une fois qu'une telle boule est présente, elle "protège" l'apparition d'une nouvelle dans la même direction.

Enfin pour le premier cas, comme le nombre de Λ-composantes de ω est fini, il existe N tel que le nombre de Λ-composantes de $L(\omega_{\Lambda_n})$ ne varie plus dés que $n \geq N$. Autrement dit les Λ-composantes de $L(\omega)$ sont identifiables dans Λ_N. □

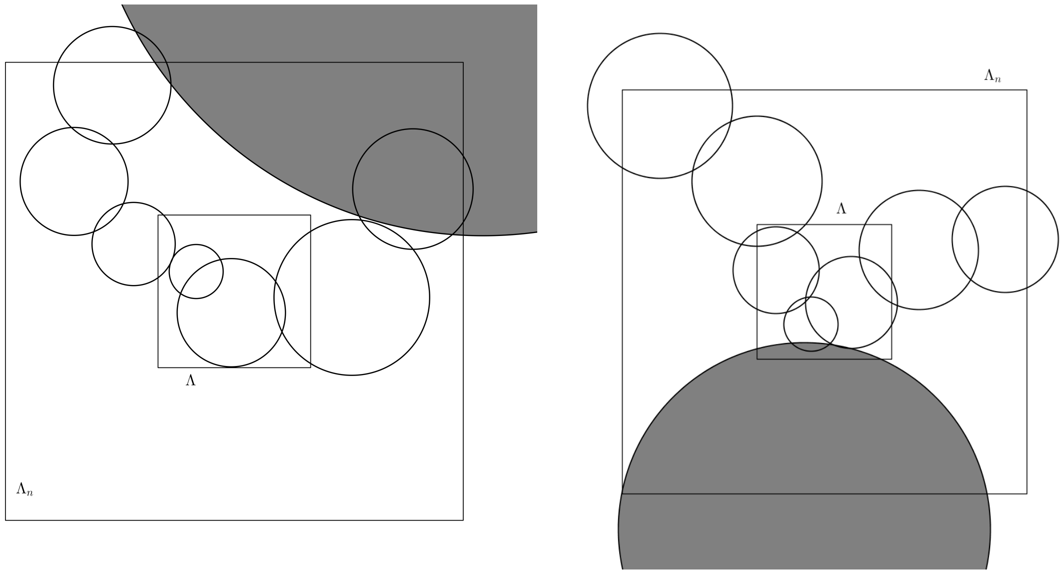

FIGURE I.1 – Le cas 1 illustré à gauche, le cas 2 illustré à droite

Remarque I.1.15. *Pour chaque ω, il existe un Δ borné tel que $N_{cc}^{\Lambda}(\omega) = N_{cc}^{\Lambda}(\omega_{\Delta})$. Cet ensemble Δ n'est bien sûr pas unique (il suffit d'en prendre un plus grand) mais il est important de remarquer que la détermination d'un Δ dépend de toute la configuration. Il faut voir entièrement "l'image" pour pouvoir décider à quelle endroit nous n'avons pas besoin de regarder. La fonction N_{cc}^{Λ} n'est donc pas locale et dépend fortement de ce qui se passe "à l'infini", même dans le cas des rayons bornés. Cette forte dépendance sera l'obstacle principale pour montrer l'existence du CRCM en volume infini.*

La compréhension de N_{cc}^{Λ} est prépondérante pour l'étude qui va être faite dans ce manuscrit. La prochaine proposition est une propriété d'additivité qui aura pour conséquence la consistance des noyaux gibbsiens, qui seront définis dans la prochaine section.

Proposition I.1.16. *Soient $\Lambda \subseteq \Delta$ deux boréliens bornés de $\mathbb{R}^d$. Alors pour toute configuration ω nous avons*

$$N_{cc}^{\Delta}(\omega) = N_{cc}^{\Lambda}(\omega) + N_{cc}^{\Delta}(\omega_{\Lambda^c}). \tag{I.1.1}$$

Démonstration. Nous avons

$$N_{cc}(\omega_{\Gamma}) - N_{cc}(\omega_{\Gamma\setminus\Delta}) = N_{cc}(\omega_{\Gamma}) - N_{cc}(\omega_{\Gamma\setminus\Lambda}) + N_{cc}(\omega_{\Gamma\setminus\Lambda}) - N_{cc}(\omega_{\Gamma\setminus\Delta}),$$

et donc en passant à la limite nous obtenons le résultat. □

Le point important dans la proposition précédente est que la différence $N_{cc}^{\Delta} - N_{cc}^{\Lambda}$ ne dépend que de la configuration extérieure à Λ. Cette proposition permettra de montrer la consistance des noyaux Gibbsiens.

La prochaine proposition donne des bornes de N_{cc}^{Λ}.

Proposition I.1.17. *Pour chaque configuration $\omega \in \Omega$, nous avons*

$$N_{cc}^{\Lambda}(\omega) \leq N_{cc}(\omega_{\Lambda}) \leq \omega(\Lambda). \tag{I.1.2}$$

De plus pour chaque $R_0 > 0$, si chaque point $(x,R) \in \omega_\Lambda$ vérifie $R \leq R_0$, alors il existe une constante réelle K (qui dépend de R_0) telle que

$$N_{cc}^{\Lambda}(\omega) \geq K - \omega\Big(\big(\Lambda \oplus B(0,R_0+2)\big) \setminus \Lambda\Big). \tag{I.1.3}$$

Démonstration. Pour chaque Δ nous avons

$$N_{cc}(\omega_\Delta) \leq N_{cc}(\omega_\Lambda) + N_{cc}(\omega_{\Delta\setminus\Lambda}),$$

ainsi la différence $N_{cc}(\omega_\Delta) - N_{cc}(\omega_{\Delta\setminus\Lambda})$ est majorée par $N_{cc}(\omega_\Lambda)$. Il en est donc de même pour sa limite et nous obtenons les inégalités (I.1.2).

Pour démontrer la minoration (I.1.3), nous commençons par remarquer que le pire cas se produit lorsque $L(\omega_\Lambda)$ a une seule composante connexe qui intersecte un très grand nombre de composantes connexes de $L(\omega_{\Lambda^c})$. Nous allons contrôler ce "très grand nombre" de composantes connexes.

Nous considérons ω satisfaisant les hypothèses de la proposition, et nous prenons $(x,R) \in \omega_{(\Lambda\oplus B(0,R_0+2))^c}$ tel que $B(x,R)$ intersecte $L(\omega_\Lambda)$. Comme chaque boule de $L(\omega_\Lambda)$ a un rayon au plus R_0, nous avons

$$\mathcal{L}^d\Big(B(x,R) \cap (\Lambda \oplus B(0,R_0+2))\Big) \geq v_d,$$

où v_d est le volume de la boule unité de dimension d. Donc le nombre de composantes connexes de $L(\omega_{(\Lambda\oplus B(0,R_0+2))^c})$ qui sont connectées à $L(\omega_\Lambda)$ est majoré par $\alpha = \frac{\mathcal{L}^d(\Lambda\oplus B(0,R_0+2))}{v_d}$. En comptant maintenant les boules de $\omega_{(\Lambda\oplus B(0,R_0+2))\setminus\Lambda}$ nous obtenons

$$N_{cc}^{\Lambda}(\omega) \geq 1 - \alpha - \omega\Big((\Lambda \oplus B(0,R_0+2)) \setminus \Lambda\Big)$$

et l'inégalité (I.1.3) est obtenue en prenant $K = 1 - \alpha$. □

Remarque I.1.18.

1. *L'hypothèse de majoration des rayons pour la minoration de N_{cc}^{Λ} n'est pas très restrictive. En effet il est par exemple possible de choisir R_0 tel que cette condition soit vraie avec grande probabilité relativement à $\pi^{z,Q}$.*
2. *Comme le montre la preuve de la Proposition I.1.17, les bornes obtenues (et en particulier la minoration) sont très grossières. Pourtant nous avons été dans l'incapacité de trouver en toute généralité de meilleurs bornes. Le cas des rayons potentiellement très petit est en particulier problématique.*

Pour finir cette section nous allons introduire la quantité $k((x,R),\omega)$ définie comme étant le nombre de composantes connexes de $L(\omega)$ intersectant la boule $B(x,R)$. Quand $x \in \Lambda$, nous avons

$$1 - k((x,R),\omega) = N_{cc}^{\Lambda}(\omega + \delta_{(x,R)}) - N_{cc}^{\Lambda}(\omega). \tag{I.1.4}$$

Cette quantité sera très utile par la suite puisqu'elle intervient dans les équations GNZ. Pour le moment l'équation (I.1.4) nous permet d'écrire

$$N_{cc}^{\Lambda}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \left[1 - k\left((x_i,R_i), \omega_{\Lambda^c} + \sum_{j=1}^{i-1} \delta_{(x_j,R_j)} \right) \right], \tag{I.1.5}$$

où la configuration $\omega_\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \delta_{(x_i,R_i)}$ a été ordonnée de manière arbitraire.

I.2 Processus de Gibbs à volume fini

Nous allons dans cette section introduire le *Continuum Random Cluster Model* sur une fenêtre bornée. Ce modèle gibbsien est une version continue du *Random Cluster Model*. Ce modèle de connectivité sur un graphe a été introduit à la fin des années 1960 par Fortuin et Kasteleyn pour unifier les modèles de percolation tels que le *modèle d'Ising* ou le *modèle de Potts*. Nous allons présenter ce modèle discret pour le graphe $G = (V, E)$ où $V = \mathbb{Z}^d \cap [-n, n]^d$ est l'ensemble des sommets du graphe et où deux sommets sont connectés s'ils sont à distance euclidienne 1. Maintenant le *Random Cluster Model* est un processus stochastique produisant une configuration $\tilde{E}$ qui est un sous-ensemble aléatoire de E. Nous gardons certaines arêtes et effaçons les autres. La probabilité non normalisée de cette configuration $\tilde{E}$ s'écrit

$$2^{N_{cc}(V,\tilde{E})} p^{\#\tilde{E}} (1-p)^{\#E - \#\tilde{E}},$$

où $N_{cc}(V, \tilde{E})$ est le nombre de composantes connexes du graphe $(V, \tilde{E})$ et où $\#$ désigne le cardinal de l'ensemble considéré. L'intérêt de ce modèle provient de la représentation

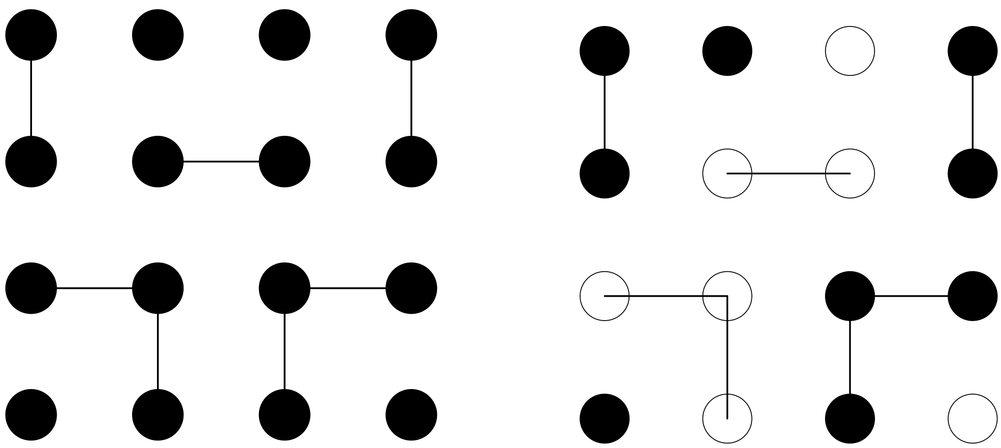

Figure I.2 – Fortuin-Kasteleyn représentation du *modèle d'Ising*.

géométrique qu'il donne au *modèle d'Ising*. En effet maintenant si nous affectons à chaque composante connexe de $(V, \tilde{E})$ un spin $+$ ou $-$ tiré de manière uniforme et indépendante sur toutes les composantes connexes, alors la loi des spins suit un *modèle d'Ising*. Cette représentation est appelée communément la Fortuin-Kasteleyn représentation et permet par exemple d'exprimer la corrélation entre deux sites dans le *modèle d'Ising* en terme de connectivité dans le *Random Cluster Model*. Nous invitons les lecteurs à voir [29] pour plus de détails sur le *Random Cluster Model*.

I.2.1 Définition du CRCM sur une fenêtre bornée

Nous allons dans cette section définir le CRCM sur une fenêtre bornée $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$, avec une condition extérieure ω_{Λ^c}. Nous voulons définir le modèle à l'aide d'une densité non normalisée, par rapport au processus ponctuel de Poisson $\pi_\Lambda^{z,Q}$, de la forme

$$q^{N_{cc}^\Lambda(\omega'_\Lambda+\omega_{\Lambda^c})}.$$

Mais pour que le modèle soit bien défini nous devons nous assurer que la constante de normalisation appelée *fonction de partition*

$$Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c}) = \int q^{N_{cc}^\Lambda(\omega'_\Lambda+\omega_{\Lambda^c})}\pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega'_\Lambda)$$

soit non dégénérée. Pour cela nous introduisons la condition suivante sur q et Q :

$$(\textbf{Condition}) \quad \begin{cases} q \geq 1 \\ \quad ou \\ q < 1 \quad \text{et} \quad Q \text{ a un support compact} \end{cases}.$$

Lemme I.2.1. *Sous la condition (**Condition**) nous avons, pour tout $z > 0$ et toute configuration extérieure ω_{Λ^c},*

$$0 < Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c}) < \infty.$$

Démonstration. Par la Proposition I.1.17, nous avons $N_{cc}^\Lambda(\omega) \leq \omega(\Lambda)$ et donc dans le cas $q \geq 1$ nous obtenons

$$Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c}) \leq \int q^{\omega'(\Lambda)}\pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega') = \exp\Big(z(q-1)\mathcal{L}^d(\Lambda)\Big).$$

Dans le cas $q < 1$ comme les rayons sont majorés par R_0, la même Proposition I.1.17 permet d'obtenir

$$Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c}) \leq q^{K-\omega\Big((\Lambda\oplus B(0,R_0+2))\setminus\Lambda\Big)}.$$

Dans les deux cas nous obtenons donc que la quantité $Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})$ est finie. Elle est de plus trivialement strictement positive puisque

$$Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c}) \geq \pi^{z,Q}(\{\omega(\Lambda)=0\}) = \exp(-\mathcal{L}^d(\Lambda)).$$

$\square$

Nous pouvons donc définir le CRCM sur une fenêtre Λ et de condition extérieure ω_{Λ^c}.

Définition I.2.2. *Pour $z > 0$ et q, Q satisfaisant la condition (**Condition**), Nous définissons le CRCM sur la fenêtre bornée Λ, de paramètres z, Q, q et de condition extérieure ω_{Λ^c} par*

$$\Xi_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda|\omega_{\Lambda^c}) = \frac{q^{N_{cc}^\Lambda(\omega'_\Lambda+\omega_{\Lambda^c})}}{Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})}\pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega'_\Lambda).$$

Remarque I.2.3 (Comparaison avec la définition du modèle discret)**.** *Pour les personnes familières avec le Random Cluster Model discret, la quantité N_{cc}^{Λ} peut ne pas sembler très naturelle. En effet pour le modèle discret le nombre Λ-locale de composantes connexes s'écrit en général "nombre de composantes connexes qui ont un site dans Λ". Le problème d'une telle définition dans le cas continue est que cette quantité ne satisfait pas la Proposition I.1.16 et donc nous aurions un problème de consistance des noyaux gibbsiens pour le modèle en volume infini. Enfin dans le cas discret les deux définitions donnent le même modèle, puisque leur différence ne dépend que de la configuration à l'extérieur de Λ.*

Un cas particulièrement intéressant est le cas de la condition extérieure vide. Dans ce cas la mesure s'écrit

$$\Xi_{\Lambda}^{z,Q,q}(d\omega'_{\Lambda}|\emptyset) = \frac{q^{N_{cc}(\omega'_{\Lambda})}}{Z_{\Lambda}^{z,Q,q}(\emptyset)}\pi_{\Lambda}^{z,Q}(d\omega'_{\Lambda}).$$

Cette dernière a été introduite dans les années 1980 par Klein [36] et étudiée plus en détails par Given et Stell [26]. Cette mesure a aussi été utilisée dans [7] et [21] pour démontrer (ou redémontrer) la transition de phase du *modèle de Widom-Rowlinson* et du *modèle de Potts continu*. Certains articles, voir par exemple [30, 43], s'intéressent à la simulation de processus de Gibbs à interaction géométrique (comme le CRCM) par des algorithmes naissance et mort. Enfin dans [44] les auteurs proposent une estimation par maximum de vraisemblance du paramètre q.

Il est important de remarquer que toutes ces études ont été le plus souvent faites dans le cas de la condition de bord vide, pour des rayons constants et pour q entier. L'un des gros travaux de cette thèse a été de fournir des résultats avec le moins de conditions possibles sur z, Q et q.

Nous allons finir cette section par un résultat de consistance des noyaux Gibbsiens $\Xi_{\Lambda}^{z,Q,q}(.|\omega_{\Lambda^c})$. Ce résultat est une conséquence directe de la Proposition I.1.16.

Proposition I.2.4 (Consistance noyaux Gibbsiens)**.** *Soient $\Lambda \subseteq \Delta$ deux boréliens bornés de $\mathbb{R}^d$. Soit ω_{Δ^c} une configuration. Alors pour toute fonction f mesurable bornée nous avons*

$$\int_{\Omega} f(\omega'_{\Delta} + \omega_{\Delta^c})\Xi_{\Delta}^{z,Q,q}(d\omega'_{\Delta}|\omega_{\Delta^c})$$
$$= \int_{\Omega}\int_{\Omega} f(\omega''_{\Lambda} + \omega'_{\Delta\setminus\Lambda} + \omega_{\Delta^c})\Xi_{\Lambda}^{z,Q,q}(d\omega''_{\Lambda}|\omega'_{\Delta\setminus\Lambda} + \omega_{\Delta^c})\Xi_{\Delta}^{z,Q,q}(d\omega'_{\Delta}|\omega_{\Delta^c}).$$

I.2.2 Simulations

Nous allons dans cette section présenter plusieurs simulations du CRCM à bord vide. Ces simulations sont obtenues à l'aide d'un algorithme de naissance et de mort développé dans [43]. Les trois premières figures I.3, I.4 et I.5 permettent d'observer l'influence du paramètre de connectivité q, pour différents types de rayons Q. Nous remarquons expérimentalement que lorsque $q > 1$, le modèle favorise les configurations avec moins de boules, et celles-ci ont des rayons plus petits (sauf dans le cas des rayons constants). Au contraire lorsque $q < 1$ le modèle favorise plus de boules et celles-ci ont des plus grands rayons. Le comportement des rayons est particulièrement visible sur la figure I.5, où la loi Q est une

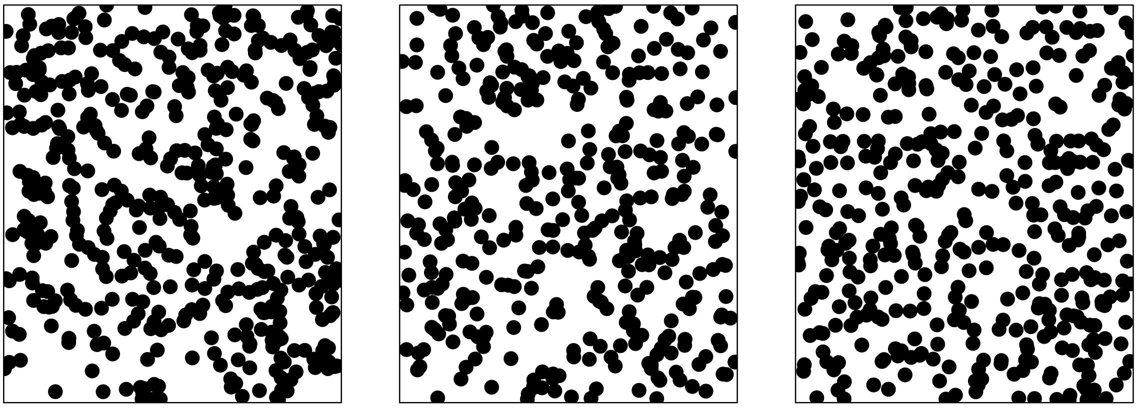

FIGURE I.3 – Simulation sur une fenêtre $\Lambda = [0,15]^2$, $z = 2$ et rayons constants de 0,3. De gauche à droite nous avons $q = 0.5$, $q = 1$ et $q = 2$.

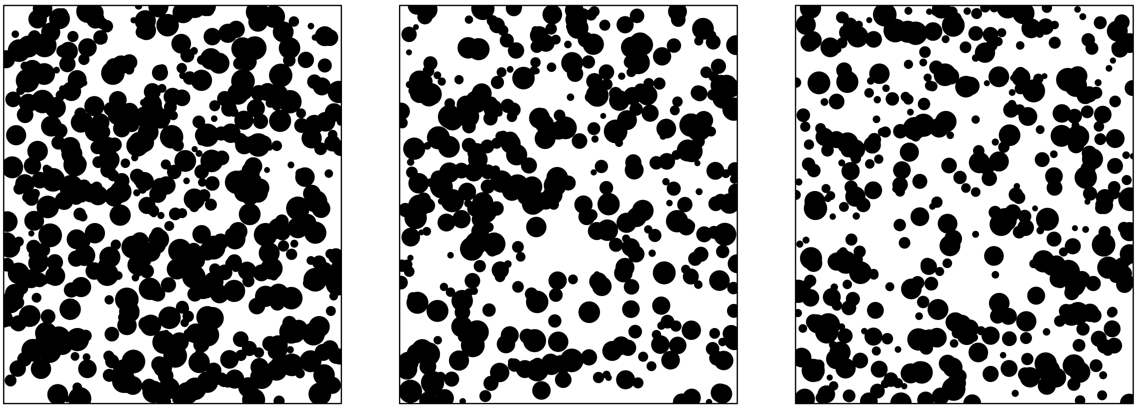

FIGURE I.4 – Simulation sur une fenêtre $\Lambda = [0,15]^2$, $z = 2$ et Q une loi uniforme $\mathcal{U}([0.1, 0.5])$. De gauche à droite nous avons $q = 0.5$, $q = 1$ et $q = 2$.

exponentielle. Enfin nous observons sur les figures I.6 et I.7 l'influence de la loi des rayons Q sur la connectivité. Intuitivement plus les rayons sont "libres", plus nous pourrons voir l'influence du paramètre q. Pour observer cela nous avons choisi deux lois Q qui ont le même moment d'ordre 2.

I.2.3 Propriétés

Nous faisons dans cette section un état des lieux des propriétés de $\Xi_\Lambda^{z,Q,q}(.|\omega_{\Lambda^c})$. Nous commençons par une proposition qui donne la croissance en q du nombre moyen de composantes connexes. Elle permet donc d'avoir une interprétation claire de l'influence du paramètre q. C'est un paramètre qui influence la connectivité et nous le nommerons donc *paramètre de connectivité*.

Proposition I.2.5. *La fonction* $q \mapsto \int N_{cc}^{\Lambda}(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})\Xi_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda|\omega_{\Lambda^c})$ *est croissante.*

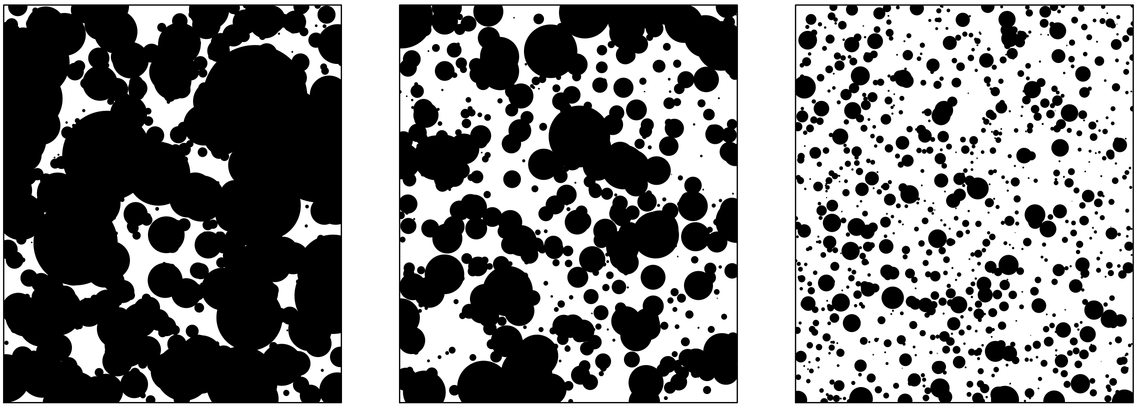

FIGURE I.5 – Simulation sur une fenêtre $\Lambda = [0, 15]^2$, $z = 3$ et Q une loi exponentielle de paramètre 4. De gauche à droite nous avons $q = 0.5$, $q = 1$ et $q = 3$.

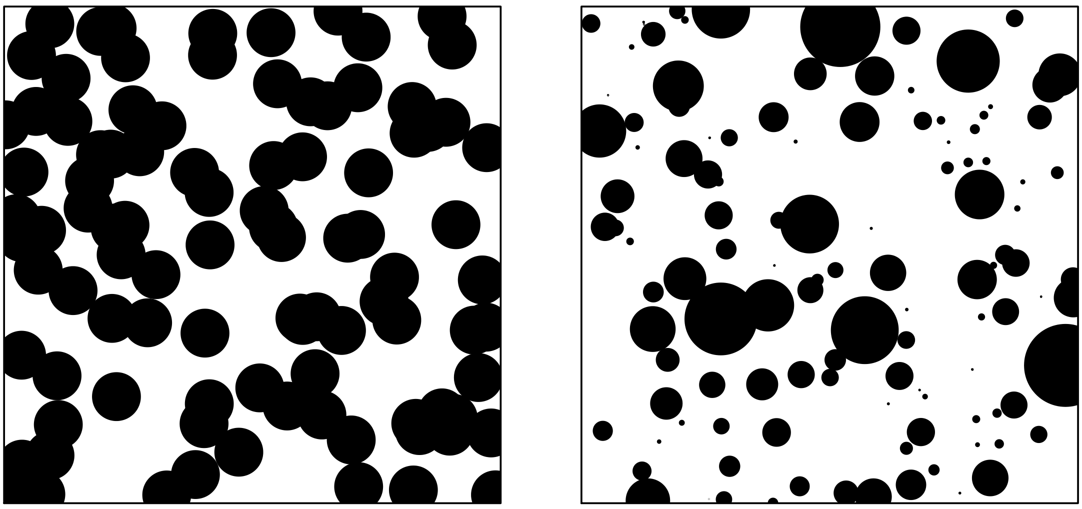

FIGURE I.6 – Simulation sur une fenêtre $\Lambda = [0, 15]^2$, $z = 0.5$ et $q = 2$. À gauche nous avons des rayons constants $1/\sqrt{2}$ et à droite des rayons de loi exponentielle de paramètre 2.

Démonstration. La fonction $f(q) = \int N_{cc}^{\Lambda}(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c}) \Xi_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda | \omega_{\Lambda^c})$ est dérivable et nous avons

$$f'(q) = \frac{\int q^{N_{cc}^{\Lambda}(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})} \times \int N_{cc}^{\Lambda}(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})^2 q^{N_{cc}^{\Lambda}(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})} - \left(\int N_{cc}^{\Lambda}(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c}) q^{N_{cc}^{\Lambda}(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})} \right)^2}{q \times Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c}) \times Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})},$$

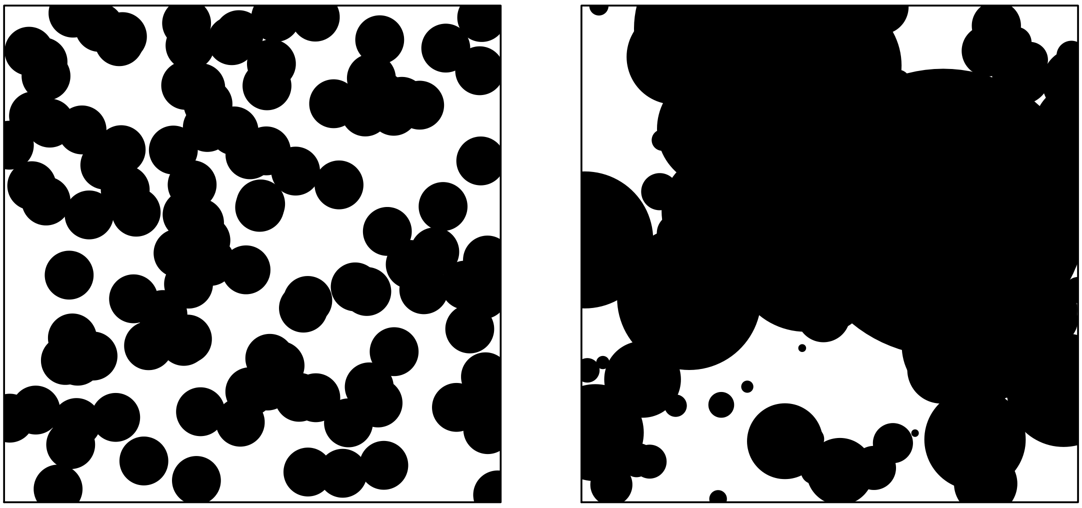

FIGURE I.7 – Simulation sur une fenêtre $\Lambda = [0, 15]^2$, $z = 0.5$ et $q = 0.5$. À gauche nous avons des rayons constants $1/\sqrt{2}$ et à droite des rayons de loi exponentielle de paramètre 2.

où les intégrales sont par rapport à la mesure $\pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega')$. Donc

$$f'(q) = \frac{1}{q}\mathbb{E}[X^2 - XY],$$

où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes de loi $N_{cc}^\Lambda(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})$ par rapport à $\Xi_\Lambda^{z,Q,q}(.|\omega_{\Lambda^c})$. Donc

$$f'(q) = \frac{1}{q}\mathbb{E}[X^2 - XY] = \frac{1}{2q}\mathbb{E}[(X-Y)^2] \geq 0.$$

La fonction f est donc croissante, ce qui prouve le résultat. □

La prochaine proposition est une propriété de domination stochastique. Cette notion a été introduite dans la section I.1.2.

Proposition I.2.6. *Pour le CRCM la densité de Papangelou est*

$$q^{1-k((x,R),\omega)},$$

où la fonction k est définie à la fin de la section I.1.4.

Nous avons donc $\Xi_\Lambda^{z,Q,q}(.|\omega_{\Lambda^c}) \preceq \pi_\Lambda^{qz,Q}$ si $q \geq 1$ et $\pi_\Lambda^{qz,Q} \preceq \Xi_\Lambda^{z,Q,q}(.|\omega_{\Lambda^c})$ si $q < 1$.

Démonstration. Comme la fonction $k(X, \omega)$ est positive, nous avons que la densité de Papangelou de la mesure $\Xi_\Lambda^{z,Q,q}(.|\omega_{\Lambda^c})$ est majorée dans le cas $q \geq 1$, minorée dans le cas $q < 1$, par q. Le Théorème I.1.4 donne directement le résultat. □

Un problème des mesures de Gibbs est la fonction de partition $Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})$. En effet cette constante n'est en générale pas calculable explicitement, rendant les calculs très compliqués. Une manière de contourner ce problème est l'utilisation des équations GNZ. Ces équations ont été introduite par GEORGII et NGUYEN-ZESSIN et généralisent la formule de Slyvniack-Mecke, Proposition I.1.2. L'avantage de ces équations est l'absence de la fonction de partition $Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})$.

Proposition I.2.7 (Équations GNZ). *Pour chaque fonction $F : S \times \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, nous avons*

$$\int_\Omega \sum_{X\in\omega'_\Lambda} F(X,\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c} - \delta_X)\Xi_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda|\omega_{\Lambda^c})$$
$$= z\int_\Omega\int_\Lambda F(X,\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})q^{1-k(X,\omega'_\Lambda+\omega_{\Lambda^c})}m(dX)\Xi_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda|\omega_{\Lambda^c}),$$

où $X=(x,R)$ est un point de S, $m(dX)=m(dx,dR)=\mathcal{L}^d(dx)\otimes Q(dR)$ et où $k(X,\omega)$ a déjà été défini comme étant le nombre de composantes connexes de $L(\omega)$ qui intersectent la boule $B(X)=B(x,R)$.

Démonstration. Cette preuve est en tout point semblable à la preuve de la formule de Slyvniack-Mecke pour le processus ponctuel de Poisson. Pour alléger un peu les notations nous omettons la dépendance en ω_{Λ^c} dans la fonction F, c'est-à-dire que nous notons $F(X,\omega'_\Lambda)$ à la place de $F(X,\omega'_\Lambda+\omega_{\Lambda^c})$.

$$\int_\Omega \sum_{X\in\omega'_\Lambda} F(X,\omega'_\Lambda - \delta_X)\Xi_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda|\omega_{\Lambda^c})$$
$$= \int_\Omega \sum_{X\in\omega'_\Lambda} F(X,\omega'_\Lambda - \delta_X)\frac{q^{N_{cc}^\Lambda(\omega'_\Lambda)}}{Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})}\pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega'_\Lambda)$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} e^{-z\mathcal{L}^d(\Lambda)}\frac{z^n}{n!}\int_{(\Lambda\times\mathbb{R}^+)^n}\sum_{i=1..n}F\left(X_i,\sum_{j\neq i}\delta_{X_j}\right)\frac{q^{N_{cc}^\Lambda\left(\sum_{i=1..n}\delta_{X_i}+\omega_{\Lambda^c}\right)}}{Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})}m(dX_1)\dots m(dX_n).$$

En intervertissant la dernière somme et l'intégrale, nous obtenons une intégrale qui ne dépend pas de i, et donc

$$\int \sum_{X\in\omega'_\Lambda} F(X,\omega'_\Lambda - \delta_X)\Xi_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda|\omega_{\Lambda^c})$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} e^{-z\mathcal{L}^d(\Lambda)}\frac{z^n}{(n-1)!}\int_{(\Lambda\times\mathbb{R}^+)^n}F\left(X_1,\sum_{j\neq 1}\delta_{X_j}\right)\frac{q^{N_{cc}^\Lambda\left(\sum_{i=1..n}\delta_{X_i}+\omega_{\Lambda^c}\right)}}{Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})}m(dX_1)..m(dX_n)$$
$$= z\int_{\Lambda\times\mathbb{R}^+}\int_\Omega F(X,\omega'_\Lambda)\frac{q^{N_{cc}^\Lambda(\omega'_\Lambda+\delta_X+\omega_{\Lambda^c})}}{Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})}\pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega'_\Lambda)m(dX)$$
$$= z\int_\Omega\int_{\Lambda\times\mathbb{R}^+}F(X,\omega'_\Lambda)\,q^{1-k(X,\omega'_\Lambda+\omega_{\Lambda^c})}m(dX)\Xi_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda|\omega_{\Lambda^c}).$$

□

Nous allons finir cette section par les propriétés du *Random Cluster Model* discret qui ne sont pas démontrées pour le modèle continu. Ces différences proviennent du Théorème 1.1 de GEORGII-KÜNETH [23] qui est beaucoup plus compliqué d'utilisation que son homologue discret, le théorème de Holley. Dans le cas discret il est montré que dans le cas $q \geq 1$ le *Random Cluster Model* satisfait la propriété dite FKG de corrélation positive. Cette propriété n'est pas démontrée pour le modèle continu, ce qui a été source de problème pour l'étude de la percolation du modèle en volume infini. Enfin dans le cas discret il y a certaines dominations stochastiques entre deux *Random Cluster Model* avec conditions extérieures différentes et/ou avec des paramètres différents. Il y a par exemple une inégalité de domination stochastique "sandwich" du type

$$\mu^{\text{free}} \preceq \mu \preceq \mu^{\text{wired}},$$

qui encadre un *Random Cluster Model* discret entre celui à bord vide et celui à bord connecté. Encore une fois ce type de résultat n'est pas démontré pour le modèle continu.

I.3 Processus de Gibbs à volume infini

I.3.1 Définition du CRCM en volume infini

Nous introduisons dans cette section le CRCM en volume infini. L'étude des mesures de Gibbs en volume infini est un sujet complexe qui a été étudié pour de nombreux modèles. D'un point de vue physique, les phénomènes de transition de phases peuvent être observés sur les modèles en volume infini, comme ça a été fait pour le *modèle de Widom-Rowlinson* et le *modèle de Potts continu* [7, 21]. Il est conjecturé que l'unicité du CRCM sera enfreinte pour certains paramètres. En géométrie stochastique le CRCM en volume infini est un modèle plus réaliste que le *modèle booléen poissonien* pour des applications en sciences des matériaux ou en modélisation de micro-émulsions. Certaines propriétés macroscopiques (valeurs moyennes, conductivité, perméabilité) s'étudient à l'aide du modèle en volume infini. Enfin en statistique spatiale l'existence du modèle en volume infini permet d'étudier certaines propriétés asymptotiques d'estimateurs, comme cela a été fait pour certains modèles de Gibbs dans [44]. Pour toutes ces raisons il est important de définir et d'étudier le CRCM en volume infini.

Définition I.3.1. *Une mesure de probabilité P sur Ω est un Continuum Random Cluster Model de paramètres z, Q et q (CRCM(z,Q,q)) s'il vérifie pour chaque $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ borné*

- $0 < Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c}) < \infty$ *P-presque sûrement.*
- ***DLR(Λ)*** *: $P(d\omega'_\Lambda|\omega_{\Lambda^c}) = \Xi_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda|\omega_{\Lambda^c})$ P-presque sûrement.*

Les équations **DLR**, nommées après DOBRUSHIN, LANDFORD et RUELLE, définissent les lois conditionnelles d'une mesure de Gibbs en volume infini, et peuvent s'écrire sous forme intégrale : Pour chaque fonction f mesurable bornée et pour chaque Λ borné,

$$\int_\Omega f(\omega)P(d\omega) = \int_\Omega \int_\Omega f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})\Xi_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda|\omega_{\Lambda^c})P(d\omega).$$

Avec cette définition la première question concerne l'existence : existe-il une mesure de probabilité P satisfaisant les conditions de la Définition I.3.1 ? Cette question a été étudiée dans un article [15] que j'ai écrit avec D. Dereudre et que nous allons présenter dans la section I.3.3. L'interaction du CRCM dépend de la connectivité de la structure germe-grain. Pour montrer l'existence, nous avons besoin d'un résultat de percolation concernant le nombre de composantes connexes infinies qui sera traité dans la section I.3.2. Enfin nous regarderons la question de l'unicité du modèle et parlerons de perspectives d'études.

Nous allons finir cette section en donnant une caractérisation du CRCM via les équations GNZ. L'avantage de ces équations, comme pour le CRCM à volume fini, est de ne pas dépendre de la fonction de partition $Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})$. Cette caractérisation sera très utile dans le chapitre II pour montrer par exemple la FK-représentation du CRCM avec le *modèle de Widom-Rowlinson.*

Proposition I.3.2. *Une mesure de probabilité P est un CRCM(z,Q,q) si et seulement si, pour toute fonction $F : S \times \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable bornée positive, nous avons*

$$\int_\Omega \sum_{X\in\omega} F(X,\omega-\delta_X)P(d\omega) = z\int_\Omega\int_S F(X,\omega)q^{1-k(X,\omega)}m(dX)P(d\omega).$$

Démonstration. Cette preuve est largement inspirée de [45], qui énonce le résultat pour un cadre plus général. Supposons dans un premier temps que P est un CRCM(z,Q,q). Soit F une fonction positive mesurable. Par convergence monotone nous pouvons supposer que pour un Λ fixé, nous avons $F(X,\omega)=0$ dés que $X\notin \Lambda\times\mathbb{R}^+$. Alors en utilisant l'équation DLR(Λ) nous avons

$$\int_\Omega \sum_{X\in\omega} F(X,\omega-\delta_X)P(d\omega) = \int_\Omega\int_\Omega \sum_{X\in\omega'_\Lambda} F(X,\omega'_\Lambda+\omega_{\Lambda^c}-\delta_X)\Xi_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda|\omega_{\Lambda^c})P(d\omega),$$

or grâce à la Proposition I.2.7 la mesure $\Xi_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda|\omega_{\Lambda^c})$ satisfait les équations GNZ et donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum_{X\in\omega} & F(X,\omega-\delta_X)P(d\omega)\\ &= \int_\Omega z\int_\Omega\int_{\Lambda\times\mathbb{R}^+} F(X,\omega'_\Lambda+\omega_{\Lambda^c})q^{1-k(X,\omega'_\Lambda+\omega_{\Lambda^c})}\Xi_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda|\omega_{\Lambda^c})P(d\omega)\\ &= \int_\Omega z\int_\Omega\int_S F(X,\omega'_\Lambda+\omega_{\Lambda^c})q^{1-k(X,\omega'_\Lambda+\omega_{\Lambda^c})}\Xi_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda|\omega_{\Lambda^c})P(d\omega)\\ &= z\int_\Omega\int_S F(X,\omega)q^{1-k(X,\omega)}P(d\omega),\end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue de nouveau grâce à l'équation DLR(Λ).

Supposons maintenant que P soit une mesure de probabilité sur Ω satisfaisant les équations GNZ. Soit $\Lambda\subseteq\mathbb{R}^d$ borné. Nous allons montrer que P satisfait l'équation DLR(Λ). Soit f une fonction mesurable bornée. Nous pouvons sans perdre en généralité supposer que f est positive. Alors nous avons

$$\int_\Omega f(\omega)P(d\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_\Omega \mathbb{1}_{\omega(\Lambda)=n} f(\omega)P(d\omega).$$

Pour $n \geq 1$ nous obtenons grâce aux équations GNZ

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \mathbb{1}_{\omega(\Lambda)=n} f(\omega) P(d\omega) &= \int_{\Omega} \sum_{X \in \omega_\Lambda} \frac{1}{n} \mathbb{1}_{\omega(\Lambda)=n} f(\omega) P(d\omega) \\ &= z \int_{\Omega} \int_{\Lambda \times \mathbb{R}^+} \frac{1}{n} \mathbb{1}_{\omega(\Lambda)=n-1} f(\omega + \delta_X) q^{1-k(X,\omega)} m(dX) P(d\omega).\end{aligned}$$

Donc en itérant et en utilisant (I.1.5) nous obtenons que le terme précédent est égal à

$$\frac{z^n}{n!} \int_{\Omega} \int_{(\Lambda \times \mathbb{R}^+)^n} \mathbb{1}_{\omega(\Lambda)=0} f(\omega_{\Lambda^c} + \delta_{X_1} + .. + \delta_{X_n}) q^{N_{cc}^{\Lambda}(\omega_{\Lambda^c} + \delta_{X_1} + \dots + \delta_{X_n})} m(dX_1)..m(dX_n) P(d\omega),$$

qui se réécrit

$$e^{z\mathcal{L}^d(\Lambda)} \int_{\Omega} Z_{\Lambda}^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c}) \mathbb{1}_{\omega(\Lambda)=0} \int_{\Omega} f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c}) \Xi_{\Lambda}^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda | \omega_{\Lambda^c}) P(d\omega).$$

Il est facile de vérifier que cette égalité est encore vraie pour $n = 0$. Nous avons donc finalement

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f dP &= e^{z\mathcal{L}^d(\Lambda)} \int_{\Omega} Z_{\Lambda}^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c}) \mathbb{1}_{\omega(\Lambda)=0} \int_{\Omega} f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c}) \Xi_{\Lambda}^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda | \omega_{\Lambda^c}) P(d\omega) \qquad \text{(I.3.1)} \\ &= e^{z\mathcal{L}^d(\Lambda)} \int_{\Omega} Z_{\Lambda}^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c}) P(\omega(\Lambda) = 0 | \omega_{\Lambda^c}) \int_{\Omega} f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c}) \Xi_{\Lambda}^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda | \omega_{\Lambda^c}) P(d\omega),\end{aligned}$$

et le prochain lemme va permettre de conclure.

Lemme I.3.3. $e^{z\mathcal{L}^d(\Lambda)} Z_{\Lambda}^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c}) P(\omega(\Lambda) = 0 | \omega_{\Lambda^c}) = 1$ *P-presque sûrement.*

Démonstration. En utilisant l'équation (I.3.1) pour $f = \mathbb{1}_C$, où C est un événement de $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$, nous obtenons

$$P(C) = e^{z\mathcal{L}^d(\Lambda)} \int_{C} Z_{\Lambda}^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c}) \mathbb{1}_{\omega(\Lambda)=0} P(d\omega),$$

ce qui prouve le lemme. □

En utilisant le lemme nous obtenons

$$\int_{\Omega} f(\omega) P(d\omega) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c}) \Xi_{\Lambda}^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda | \omega_{\Lambda^c}) P(d\omega),$$

le résultat est donc démontré. □

Remarque I.3.4. *La preuve écrite ci-dessus est celle qui est proposée dans [45]. Une preuve alternative, reposant sur la caractérisation du processus ponctuel de Poisson par la formule de Slivnyak-Mecke, est disponible dans [13].*

I.3.2 Unicité de la composante connexe infinie

Nous montrons dans cette section un résultat d'unicité de la composante connexe infinie. Ce résultat est énoncé en toute généralité pour des mesures de probabilité satisfaisant la propriété de modification locale. Cette propriété de modification locale est satisfaite par de nombreux modèles de Gibbs, comme par exemple le *modèle Qermass* ou le *modèle Hard-sphere*, pour lesquels une propriété alternative est la propriété FKG. Ce résultat et sa preuve sont très largement inspirés de [6, 42].

Définition I.3.5 (Propriété de modification locale)**.** *Une mesure de probabilité P sur Ω satisfait la propriété de modification locale si, pour tout sous-ensemble borné Λ de $\mathbb{R}^d$, pour tout $A \in \mathcal{F}_\Lambda$ satisfaisant $\pi_\Lambda^{z,Q}(A) > 0$ et pour tout $B \in \mathcal{F}_{\Lambda^c}$ satisfaisant $P(B) > 0$ nous avons*

$$P(A \cap B) > 0.$$

Proposition I.3.6. *Tous les CRCM satisfont la propriété de modification locale.*

Démonstration. Soit P un CRCM(z, Q, q) et considérons Λ, A et B comme dans la définition de la modification locale. Grâce aux équations DLR nous avons

$$P(A \cap B) = \int_\Omega \frac{\mathbb{1}_B(\omega_{\Lambda^c})}{Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})} \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega'_\Lambda) q^{N_{cc}^\Lambda(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})} \pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega'_\Lambda) P(d\omega),$$

qui est strictement positif car les fonctions intégrées sont strictement positives et intégrées sur des ensembles de mesures non nulles. □

Nous notons, pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\{N_{cc}^\infty = k\}$ (respectivement $\{N_{cc}^\infty > k\}$) l'événement des configurations contenant k (respectivement strictement plus de k) composantes connexes infinies.

Théorème I.3.7 (Unicité de la composante connexe infinie)**.** *Soit P une mesure de probabilité stationnaire sur Ω satisfaisant la propriété de modification locale. Alors nous avons*

$$P(N_{cc}^\infty > 1) = 0.$$

Démonstration. Comme une mesure de probabilité stationnaire est un mélange de mesures de probabilité ergodiques, nous pouvons sans perdre en généralité supposer que P est ergodique. Nous avons alors pour chaque $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$$P(N_{cc}^\infty = k) = 0 \text{ ou } 1,$$

et il suffit de montrer que cette valeur est nulle pour k plus grand que 2.

- $k \geq 2$ entier.

Supposons par l'absurde que $P(N_{cc}^\infty = k) = 1$. Nous avons donc $P(N_{cc}^\infty = 1) = 0$. Par le théorème de convergence monotone nous avons pour N assez grand (fixé à partir de maintenant)

$$P(B_N) > 1/2,$$

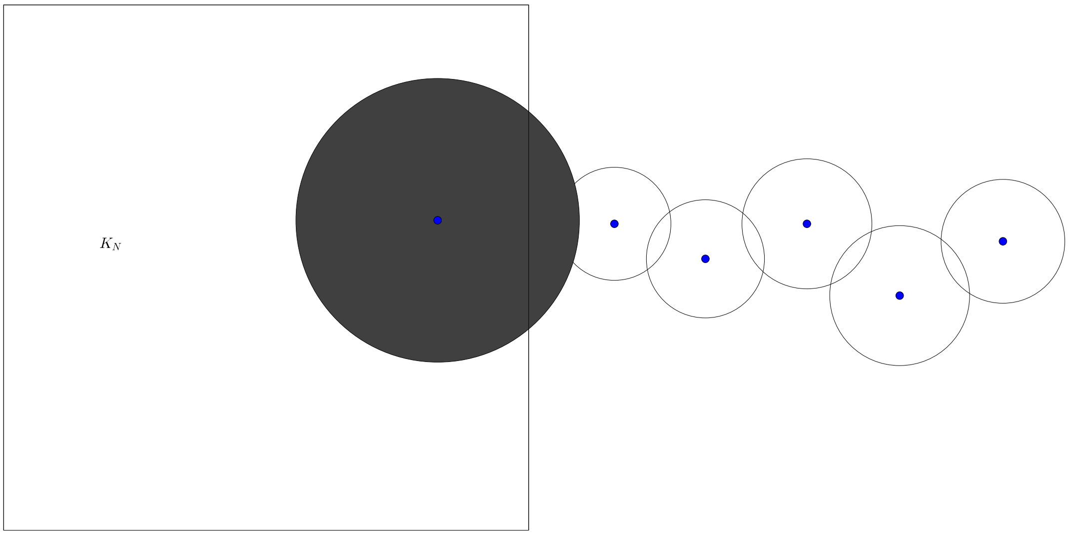

FIGURE I.8 – Pour intersecter la boîte K_N, la composante connexe a besoin de la boule noire centrée à l'intérieur de K_N.

où B_N est l'événement des configurations telles que toutes les composantes connexes infinies intersectent la boite $K_N =]-N, N[^d$. Nous voulons utiliser la propriété de modification locale avec cet événement B_N, mais malheureusement cet événement dépend de toute la configuration et pas seulement de la restriction à l'extérieur de la boîte K_N, voir Figure I.8.

À partir de maintenant nous allons traiter le cas des rayons bornés et non bornés séparément.

— Cas 1 : Q a un support non borné.
Posons $U_N(m) = \{\omega \in \Omega, \forall (x,R) \in \omega_{K_N}, R \leq m\}$. Pour m assez grand, fixé à partir de maintenant, nous avons

$$P(B_N \cap U_N(m)) \geq 1/4.$$

Maintenant posons $\tilde{B}_N(m)$ l'événement

$$\{\omega \in \Omega, \forall U \text{ composante connexe infinie de } \omega_{K_N^c}, d(U, K_N) < m\}.$$

Par construction nous avons $B_N \cap U_N(m) \subseteq \tilde{B}_N(m)$ et donc

$$P(\tilde{B}_N(m)) \geq 1/4,$$

et $\tilde{B}_N(m)$ a été construit pour être un événement de $\mathcal{F}_{K_N^c}$. Nous avons ainsi défini un événement pour lequel les composantes connexes infinies de K_N^c ne sont "pas trop loin" de K_N. Nous définissons à présent

$$A_N(m) = \{\omega \in \Omega, \exists (x,R) \in \omega_{K_N} \text{ tel que } R \geq 2\sqrt{d}N + m\},$$

l'événement des configurations contenant au moins une boule "assez grande" centrée dans K_N. Par construction $A_N(m) \in \mathcal{F}_{K_N}$ et

$$\pi^{z,Q}(A_N(m)) = 1 - \exp\Big(- z\mathcal{L}^d(K_N)Q[2\sqrt{d}N + m, +\infty[\Big) > 0.$$

La propriété de modification locale nous donne donc

$$P(A_N(m) \cap \tilde{B}_N(m)) > 0.$$

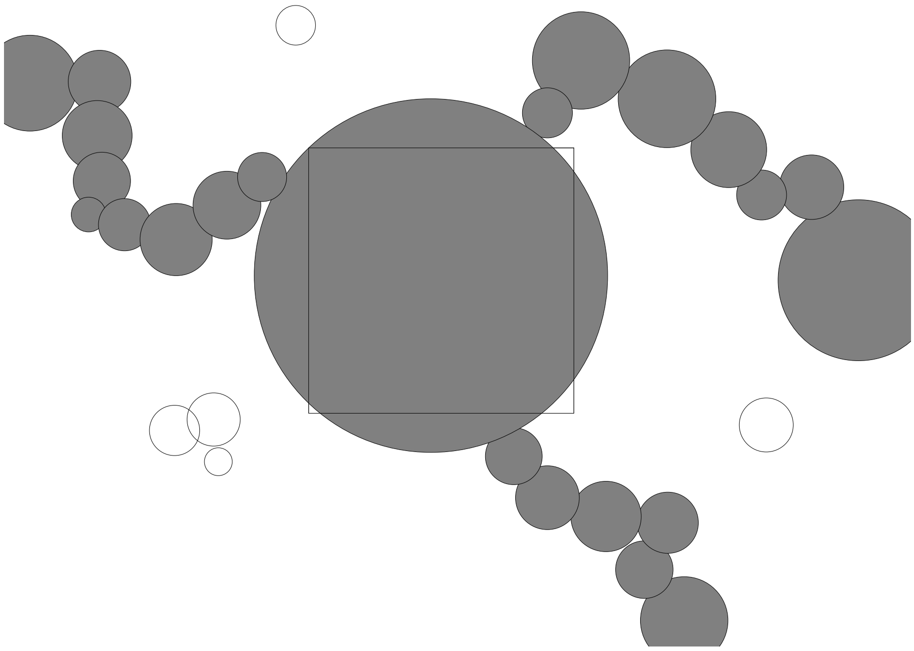

FIGURE I.9 – Lorsque $A_N(m)$ et $\tilde{B}_N(m)$ sont réalisés, il y a une seule composante connexe infinie.

Mais $A_N(m) \cap \tilde{B}_N(m) \subseteq \{N_{cc}^{\infty} = 1\}$, voir Figure I.9, donc $P(N_{cc}^{\infty} = 1) > 0$, ce qui est absurde.

— Cas 2 : Il existe R_0 tel que $Q([0, R_0]) = 1$.
Nous allons supposer que $\forall \eta > 0$, $Q([R_0 - \eta, R_0]) > 0$. Cette hypothèse est réalisée si R_0 est choisi de manière "optimale" pour la loi Q. Posons $\tilde{B}_N$ l'événement

$$\{\omega \in \Omega, \forall U \text{ composante connexe infinie de } \omega_{K_N^c}, d(U, K_N) < R_0\}.$$

Comme les rayons sont bornés par R_0, $B_N \subseteq \tilde{B}_N$ et donc $P(\tilde{B}_N) \geq 1/2$. Maintenant posons $\tilde{B}_N(\epsilon)$ l'événement

$$\{\omega \in \Omega, \forall U \text{ composante connexe infinie de } \omega_{K_N^c}, d(U, K_N) \leq R_0 - \epsilon\}.$$

Pour ϵ assez petit, fixé à partir de maintenant, nous avons

$$P(\tilde{B}_N(\epsilon)) \geq 1/4.$$

Maintenant divisons K_N en petits cubes de côté $a \leq \epsilon/2\sqrt{d}$. Nous allons dans chaque petit cube placer une boule de rayon assez grand, de manière à connecter toutes les composantes connexes infinies de l'extérieur. Pour cela considérons l'événement $A_N(\epsilon)$ défini de la manière suivante :

$$\{\omega \in \Omega, \text{ dans chaque petit cube une boule est centrée avec un rayon } R \geq R_0 - \epsilon/2\}.$$

Par construction nous avons $A_N(\epsilon) \in \mathcal{F}_{K_N}$ et $\pi^{z,Q}_{K_N}(A_N(\epsilon)) > 0$.
Considérons ω dans $A_N(\epsilon) \cap B_N(\epsilon)$. Quitte à prendre un ϵ plus petit, les boules de deux cubes voisins s'intersectent. De plus par construction ce gros amas de boules connecte toutes les composantes connexes infinies de $\omega_{K_N^c}$, voir Figure I.10. Nous

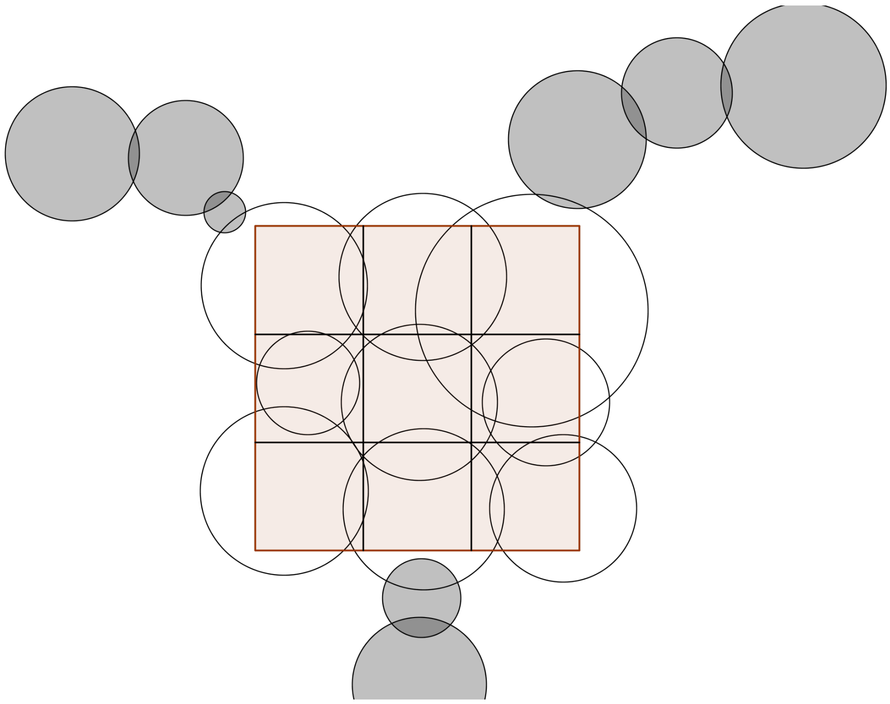

FIGURE I.10 – Les composantes infinies extérieures (noires) sont connectées grâce à chaque boule dans chaque petit cube.

avons donc $A_N(\epsilon) \cap B_N(\epsilon) \subseteq \{N^\infty_{cc} = 1\}$ et donc grâce à la propriété de modification locale

$$P(N^\infty_{cc} = 1) > 0,$$

ce qui est absurde.

- $k = \infty$.

Dans ce cas la méthode appliquée précédemment n'est plus valide car il n'est pas possible que toutes les composantes connexes infinies intersectent une boîte. La démonstration qui va suivre est tirée de [42] et est une adaptation continue de la technique introduite par Burton et Keane [6]. Cette technique introduit la notion de point triple (ou trifurcation) qui permet de comparer un volume et une surface.

Pour la suite nous avons besoin d'un lemme combinatoire qui sera très utile pour le dénombrement des points triples.

Lemme I.3.8. *Soient I un ensemble et J un sous ensemble fini de I, tels que*

1. *Pour chaque $j \in J$, nous avons l'existence de $(C_j^{(1)}, C_j^{(2)}, C_j^{(3)})$ famille de sous-ensembles disjoints de I ne contenant pas j et de cardinal au moins K.*
2. *Pour tous $j, j' \in J$, en écrivant $C_j = C_j^{(1)} \cup C_j^{(2)} \cup C_j^{(3)}$, l'une des deux assertions suivantes est réalisée.*
   (i) $(\{j\} \cup C_j) \cap (\{j'\} \cup C_{j'}) = \emptyset$.
   (ii) Il existe i et i' tels que $\{j'\} \cup C_{j'} \setminus C_{j'}^{(i')} \subseteq C_j^{(i)}$ et $\{j\} \cup C_j \setminus C_j^{(i)} \subseteq C_{j'}^{(i')}$.

Alors $\#I \geq K(\#J + 2) + \#J$.

La preuve de ce lemme technique est omise ici, mais est disponible dans [42, page 71].

Comme précédemment nous allons procéder par l'absurde et supposer que $P(N_{cc}^{\infty} = \infty) = 1$. Pour chaque entier N et chaque $z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{Z}^d$, nous définissons

$$K_N^z = K_N + z,$$

où $K_N = K_N^0 =]-N, N[^d$. En appliquant le même type de technique que dans le cas k entier, il est possible de montrer que pour N assez grand, l'événement suivant a une probabilité positive (η disons).

$E^0(N) = \{$ Il existe (au moins) une composante connexe infinie C' de $L(\omega)$ telle que $C' \cap (K_N^0)^c$ contient au moins trois composantes connexes infinies et telle que C' ait au moins un boule centrée dans K_N^0 $\}$.

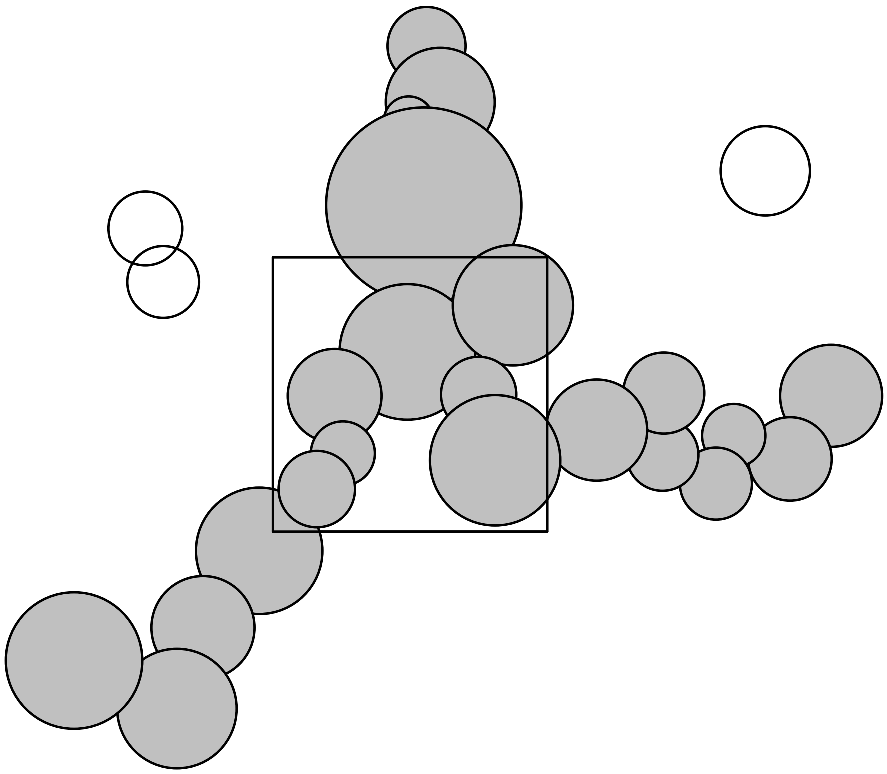

FIGURE I.11 – Illustration de l'événement $E^0(N)$.

Nous appelons "branches" les composantes connexes infinies de $C' \cap (K_N^0)^c$. Maintenant prenons K entier, et considérons M assez grand (fixé à partir de maintenant) tel que l'événement suivant à une probabilité au moins $\frac{\eta}{2}$:
$E^0(N, M) = E^0(N) \cap \{$ Au moins trois de ces branches contiennent (au moins) K boules centrées dans $K_{MN}^0 \setminus K_N^0$ $\}$.

Les événements $E^z(N)$ et $E^z(N, M)$ sont ensuite définis par translation des événements $E^0(N)$ et $E^0(N, M)$. Soit L un entier et considérons l'ensemble

$$J_L = \{z \in \mathbb{Z}^d, K_{MN}^{2Nz} \subseteq B_{LZ}^0 \text{ et } E^{2Nz}(N, M) \text{ est réalisé}\},$$

alors pour L assez grand (fixé à partir de maintenant) nous avons

$$\mathbb{E}_P[\#J_L] \geq \frac{1}{4}\eta L^d.$$

Pour chaque $z \in J_L$, notons $C_z^{(1)}$, $C_z^{(2)}$ et $C_z^{(3)}$ l'ensemble des centres de boules appartenant à trois branches contenant au moins K points dans $K_{LN}^0 \setminus K_N^{2Nz}$ (Ces branches contiennent au moins K points dans $K_{MN}^{2Nz} \setminus K_N^{2Nz}$ donc aussi dans l'ensemble plus grand). Par construction nous avons aussi $C_z^{(i)} \cap C_z^{(i')} = \emptyset$. Maintenant nous associons à chaque $z \in J_L$ le centre d'une boule centrée dans K_N^{2Nz}. Finalement l'ensemble J_L satisfait les hypothèses du Lemme I.3.8. Nous obtenons donc

$$\mathbb{E}_P[\omega(K_{LN}^0)] \geq K\left(\frac{1}{4}\eta L^d + 2\right),$$

mais par stationnarité de P l'espérance du nombre de points dans une boite est proportionnelle au volume de cette boite. Donc il existe une constance $\alpha \geq 0$ tel que

$$\alpha(2NL)^d \geq \frac{K}{4}\eta L^d,$$

ce qui est absurde pour K assez grand (mais avec une condition qui ne dépend pas de M ou L). □

I.3.3 Existence du CRCM

Dans cette section nous énonçons et démontrons un résultat d'existence du CRCM pour une gamme de paramètres (z, Q, q) aussi grande que possible.

Théorème I.3.9.

- *Si Q a un support compact, c'est-à-dire s'il existe R_0 tel que $Q([0, R_0]) = 1$, alors pour tous $z > 0$ et $q > 0$ il existe au moins un CRCM(z, Q, q) stationnaire.*
- *Si $\int R^d Q(dR) < \infty$, alors pour tous $z > 0$ et $q \geq 1$ il existe au moins un CRCM(z, Q, q) stationnaire.*

La preuve de ce théorème suit une stratégie classique de mécanique statistique qui a déjà été utilisée pour plusieurs modèles de Gibbs [12, 14, 21].

Dans un premier temps nous allons construire un "bon candidat". Ceci est fait grâce au Corollaire I.1.13 de tension de l'entropie spécifique. Ce critère nous donne immédiatement la stationnarité de ce "bon candidat".

Ensuite arrive la partie compliquée. Il faut montrer que ce bon candidat satisfait les équations DLR. Dans le cas du CRCM les rayons non bornés créent une intéraction longue portée qui est notre principal problème. Nous allons devoir "localiser" l'interaction, à l'aide du Théorème I.3.7.

Preuve du Théorème I.3.9 : Construction d'un bon condidat P

À partir de maintenant les paramètres z, Q et q sont fixés quelconque. Ce n'est qu'à la fin de la preuve que nous aurons besoin de prendre q et Q comme dans l'énoncé du Théorème I.3.9. Pour un entier naturel n, nous définissons $\Lambda_n =]-n,n]^d$ et nous posons

$$\Xi_n(d\omega') := \Xi^{z,Q,q}_{\Lambda_n}(d\omega'_{\Lambda_n}|\emptyset) = \frac{1}{Z_n} q^{N_{cc}(\omega'_{\Lambda_n})}\pi^{z,Q}_{\Lambda_n}(d\omega'_{\Lambda_n}), \tag{I.3.2}$$

où $Z_n := Z^{z,Q,q}_{\Lambda_n}(\emptyset) = \int_\Omega q^{N_{cc}(\omega)}\pi^{z,Q}_{\Lambda_n}(d\omega)$ est la fonction de partition. Cette fonction de partition est non dégénérée puisque $0 \leq N_{cc}(\omega'_{\Lambda_n}) \leq \omega'_{\Lambda_n}(\Lambda_n)$.

Nous allons maintenant définir une "version" stationnaire de Ξ_n. Pour cela rappelons que τ_x est la translation de vecteur $x \in \mathbb{R}^d$. Posons $\hat{P}_n = \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}^d} \Xi_n \circ \tau^{-1}_{2ni}$ et

$$P_n = \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)} \int_{\Lambda_n} (\hat{P}_n \circ \tau_x^{-1}) dx.$$

Il est facile de vérifier que P_n est stationnaire. Nous allons montrer que la suite $(P_n)_n$ admet un point d'accumulation pour la topologie de la convergence locale qui a été définie dans la Définition I.1.5.

Lemme I.3.10. *Pour tout n nous avons*

$$\mathcal{I}^z(P_n) \leq z + \max(\ln(q), 0) i(P_n),$$

où nous rappelons que $i(P) = \int_\Omega \omega([0,1]^d)P(d\omega)$ est le nombre moyen de points par unité de volume d'une mesure stationnaire P.

Démonstration. Premièrement, comme l'entropie spécifique est affine, voir Théorème I.1.12, nous avons

$$\mathcal{I}^z(P_n) = \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)} \int_{\Lambda_n} \mathcal{I}^z(\hat{P}_n \circ \tau_x^{-1}) dx = \mathcal{I}^z(\hat{P}_n).$$

Ici il y a un abus puisque la mesure $\hat{P}_n$ n'est pas stationnaire, mais seulement invariante pour les translations de vecteurs dans $2n\mathbb{Z}^d$. Mais il est possible de définir l'entropie spécifique pour de telles mesures de probabilité. Maintenant nous avons

$$\mathcal{I}^z(\hat{P}_n) = \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)} \mathcal{I}^z_{\Lambda_n}(\Xi_n|\pi^{z,Q}),$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\Lambda_n}(\Xi_n|\pi^{z,Q}) &= \int_\Omega \ln\left(\frac{q^{N_{cc}(\omega)}}{Z_n}\right)\Xi_n(d\omega)\\ &= -\ln(Z_n) + \ln(q)\int_\Omega N_{cc}(\omega)\Xi_n(d\omega).\end{aligned}$$

De plus nous avons $Z_n \geq P_n(\omega = 0) = \exp(-z\mathcal{L}^d(\Lambda_n))$ et

$$0 \leq \int_\Omega N_{cc}(\omega)\Xi_n(d\omega) \leq \int_\Omega \omega(\mathbb{R}^d)\Xi_n(d\omega) = \mathcal{L}^d(\Lambda_n)i(\Xi_n) = \mathcal{L}^d(\Lambda_n)i(P_n).$$

Finalement nous obtenons le résultat voulu. □

L'existence d'un point d'accumulation P est une conséquence du lemme précédent et du Corollaire I.1.13. Pour éviter l'introduction d'une sous-suite, nous supposons que P_n converge vers P, pour la topologie de la convergence locale.

Preuve du Théorème I.3.9 : P satisfait les équations DLR

Nous allons maintenant montrer que le bon candidat P satisfait les équations DLR. Nous allons pour cela définir une nouvelle suite, convergeant vers P et vérifiant les équations DLR. Nous obtiendrons ensuite le résultat par approximation et passage à la limite.

À partir de maintenant nous fixons $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ borné et nous allons montrer que P satisfait l'équation DLR(Λ). Nous posons

$$P_n^\Lambda = \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)} \int_{\Lambda_n} (\Xi_n \circ \tau_x^{-1}) \mathbb{1}_{\Lambda \subseteq \tau_x(\Lambda_n)} dx.$$

Les mesures P_n^Λ ne sont pas des mesures de probabilité mais la suite est asymptotiquement équivalente à la suite $(P_n)_n$. De plus chaque P_n^Λ satisfait l'équation DLR(Λ).

Proposition I.3.11.

— *Pour toute fonction f mesurable locale bornée, nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_\Omega f(\omega)P_n^\Lambda(d\omega) - \int_\Omega f(\omega)P_n(d\omega)\right| = 0.$$

— *Pour toute fonction f mesurable bornée, nous avons*

$$\int_\Omega f(\omega)P_n^\Lambda(d\omega) = \int_\Omega \int_\Omega f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})\Xi_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda|\omega_{\Lambda^c})P_n^\Lambda(d\omega).$$

Démonstration. Cette preuve est fortement inspirée d'un résultat similaire dans [12]. Pour le premier point considérons une fonction f Δ-locale pour un ensemble Δ borné. Nous supposons de plus que la fonction f est bornée par 1. Prenons n assez grand tel que Λ_n contienne Λ et Δ. Alors nous avons

$$\begin{aligned}&\left| \int_\Omega f(\omega)P_n^\Lambda(d\omega) - \int_\Omega f(\omega)P_n(d\omega)\right| \\ &\quad = \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)} \left| \int_{\Lambda_n} \left(\int_\Omega f(\omega)\hat{P}_n \circ \tau_x^{-1}(d\omega) - \mathbb{1}_{\Lambda \subseteq \tau_x(\Lambda_n)} \int_\Omega f(\omega)\Xi_n \circ \tau_x^{-1}(d\omega)\right) dx \right|.\end{aligned}$$

Lorsque $\Delta \subseteq \tau_x(\Lambda_n)$ et $\Lambda \subseteq \tau_x(\Lambda_n)$ alors les deux intégrales sont égales. Nous avons donc

$$\begin{aligned}&\left| \int_\Omega f(\omega)P_n^\Lambda(d\omega) - \int_\Omega f(\omega)P_n(d\omega)\right| \\ &\quad \leq \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)} \int_{\Lambda_n} \mathbb{1}_{\Lambda\cup\Delta \not\subseteq \tau_x(\Lambda_n)} \left| \int_\Omega f(\omega)\hat{P}_n \circ \tau_x^{-1}(d\omega) - \mathbb{1}_{\Lambda \subseteq \tau_x(\Lambda_n)} \int_\Omega f(\omega)\Xi_n \circ \tau_x^{-1}(d\omega)\right| dx \\ &\quad \leq \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)} \int_{\Lambda_n} \mathbb{1}_{\Lambda\cup\Delta \not\subseteq \tau_x(\Lambda_n)} dx.\end{aligned}$$

Comme $\Lambda \cup \Delta$ est borné, nous avons $\Lambda \cup \Delta \subseteq [-k, k]^d$ pour un certain k plus petit que n, et donc nous pouvons dire que

$$\int_{\Lambda_n} \mathbb{1}_{\Lambda \cup \Delta \not\subseteq \tau_x(\Lambda_n)} dx \leq 2k \times d \times (2n)^{d-1},$$

et donc

$$\Big| \int_{\Omega} f(\omega) P_n^{\Lambda}(d\omega) - \int_{\Omega} f(\omega) P_n(d\omega) \Big| \leq \frac{kd}{n}$$

qui tend vers 0.

Pour montrer que P_n^{Λ} satisfait l'équation DLR(Λ) il suffit de montrer que pour chaque $x \in \Lambda_n$ tel que $\Lambda \subseteq \tau_x(\Lambda_n)$, $\Xi_x \circ \tau_x^{-1}$ satisfait l'équation DLR(Λ). Or ceci est une conséquence de la consistance des noyaux gibbsiens, voir Proposition I.1.16. □

Nous avons donc que chaque P_n^{Λ} satisfait DLR(Λ) et P_n^{Λ} converge vers P. Nous voulons donc faire passer cette propriété DLR à la limite. Compte tenu de la structure de la tribu $\mathcal{F}$, nous pouvons nous restreindre à démontrer l'équation DLR(Λ) pour des fonctions f mesurables locales bornées par 1.

Nous allons avoir besoin qu'il n'y ait pas de boule trop grande dans ω_{Λ}. Pour cela nous introduisons l'événement

$$U_{R_1} = \{\omega \in \Omega, \forall (x, R) \in \omega_{\Lambda}, R \leq R_1\}.$$

Quand nous serons dans le cas des rayons bornés par R_0, nous prendrons bien-sûr $R_1 = R_0$. Dans le cas des rayons non bornés, R_1 sera fixé plus tard et dépendra de Λ, z, Q et q.

À partir de maintenant la fonction f est fixée et nous avons

$$\int f dP_n^{\Lambda} \underset{n \to \infty}{\to} \int f dP.$$

Le terme de gauche de l'équation DLR ne pose donc aucun problème. Mais dans le terme de droite la fonction

$$\omega \mapsto \int f(\omega'_{\Lambda} + \omega_{\Lambda^c}) \Xi_{\Lambda}^{z,Q,q}(d\omega'_{\Lambda} | \omega_{\Lambda^c})$$

n'est pas une fonction locale puisque la fonction N_{cc}^{Λ} dans le noyau $\Xi_{\Lambda}^{z,Q,q}(.|\omega_{\Lambda^c})$ n'est pas locale. Nous allons donc devoir "localiser" l'interaction N_{cc}^{Λ}.

Pour cela nous avons besoin de l'unicité de la composante connexe infinie. Le travail de la section I.3.2 et la prochaine proposition permettent de répondre à cette question.

Proposition I.3.12. *Sous les hypothèses (**Condition**), c'est-à-dire $q \geq 1$ ou $q < 1$ et rayons bornés nous avons*

$$P(N_{cc}^{\infty} \leq 1) = 1.$$

Démonstration. Pour montrer le résultat il suffit de montrer que P satisfait la condition de modification locale. En effet comme P est stationnaire, le résultat se déduira du Théorème I.3.7.

Pour $R_1 > 0$, nous définissons $A_{R_1} = A \cap U_{R_1}$ où nous rappelons que

$$U_{R_1} = \{\omega \in \Omega, \forall (x,R) \in \omega_\Lambda, \ R \leq R_1\}.$$

Par le théorème de convergence monotone, pour R_1 assez grand nous avons $\pi^{z,Q}(A_{R_1}) > 0$. Comme $P(A_{R_1} \cap B) \leq \bar{P}(A \cap B)$, il est suffisant de montrer la propriété de modification locale dans le cas spécial $A = A_{R_1}$.

Par théorème de convergence de martingale nous avons $\mathbb{1}_B = \lim_{\Delta \to \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_P[\mathbb{1}_B | \mathcal{F}_\Delta]$ P-presque sûrement. De plus la fonction $\mathbb{E}_P[\mathbb{1}_B|\mathcal{F}_\Delta]$, que nous noterons ϕ_Δ^B, est locale, donc

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \lim_{\Delta \to \mathbb{R}^d} \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega_\Lambda) \phi_\Delta^B(\omega_{\Delta \setminus \Lambda}) P(d\omega) \\ &= \lim_{\Delta \to \mathbb{R}^d} \lim_{n \to \infty} \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega_\Lambda) \phi_\Delta^B(\omega_{\Delta \setminus \Lambda}) P_n^\Lambda(d\omega) \\ &= \lim_{\Delta \to \mathbb{R}^d} \lim_{n \to \infty} \int_\Omega \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega'_\Lambda) \phi_\Delta^B(\omega_{\Delta \setminus \Lambda}) \frac{q^{N_{cc}^\Lambda(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})}}{Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})} \pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega') P_n^\Lambda(d\omega), \end{aligned}$$

où les deux dernières égalités sont obtenues grâce à la Proposition I.3.11.

À partir de maintenant nous traitons séparément les cas $q \geq 1$ et $q < 1$.

— Cas $q \geq 1$.
Grâce à la Proposition I.1.17, nous avons

$$Z_\Lambda(\omega_{\Lambda_c}) \leq e^{(q-1)z\mathcal{L}^d(\Lambda)}$$

et donc

$$\begin{aligned} \bar{P}(A \cap B) &\geq \lim_{\Delta \to \mathbb{R}^d} \lim_{n \to \infty} \int_\Omega \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega'_\Lambda) \phi_\Delta^B(\omega_{\Lambda^c}) \frac{q^{K - \omega(\Lambda \oplus B(0,R_1+2) \setminus \Lambda)}}{e^{(q-1)z\mathcal{L}^d(\Lambda)}} \pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega') P_n^\Lambda(d\omega) \\ &= \lim_{\Delta \to \mathbb{R}^d} \lim_{n \to \infty} \int_\Omega \phi_\Delta^B(\omega_{\Lambda^c}) \frac{q^{K - \omega(\Lambda \oplus B(0,R_1+2) \setminus \Lambda)}}{e^{(q-1)z\mathcal{L}^d(\Lambda)}} \pi_\Lambda^{z,Q}(A) P_n^\Lambda(d\omega) \\ &= \frac{q^K \times \pi_\Lambda^{z,Q}(A)}{e^{(q-1)z\mathcal{L}^d(\Lambda)}} \int_\Omega \mathbb{1}_B(\omega_{\Lambda^c}) q^{-\omega(\Lambda \oplus B(0,R_1+2) \setminus \Lambda)} P(d\omega), \end{aligned}$$

et donc $\bar{P}(A \cap B) > 0$.

— Cas $q < 1$.
Grâce à la Proposition I.1.17 et à la condition (*Condition*) qui borne les rayons dans ce cas, nous avons

$$Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c}) \leq q^{K - \omega(\Lambda \oplus B(0,R_1+2) \setminus \Lambda)},$$

et donc

$$\begin{aligned} \bar{P}(A \cap B) &\geq \lim_{\Delta \to \mathbb{R}^d} \lim_{n \to \infty} \int_\Omega \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega'_\Lambda) \phi_\Delta^B(\omega_{\Lambda^c}) \frac{q^{\omega'(\Lambda)}}{q^{K - \omega(\Lambda \oplus B(0,R_1+2) \setminus \Lambda)}} \pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega') P_n^\Lambda(d\omega) \\ &= \lim_{\Delta \to \mathbb{R}^d} \lim_{n \to \infty} \int_\Omega \phi_\Delta^B(\omega_{\Lambda^c}) \frac{q^{\omega(\Lambda \oplus B(0,R_1+2) \setminus \Lambda)}}{q^K} P_n^\Lambda(d\omega) \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega'_\Lambda) q^{\omega'(\Lambda)} \pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega') \\ &= \int_\Omega \mathbb{1}_B(\omega_{\Lambda^c}) \frac{q^{\omega(\Lambda \oplus B(0,R_1+2) \setminus \Lambda)}}{q^{(1-K)}} P(d\omega) \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega'_\Lambda) \ q^{\omega'(\Lambda)} \pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega'), \end{aligned}$$

et donc $P(A \cap B) > 0$.

□

Remarque I.3.13. *Il est important de remarquer que dans la Proposition I.3.12 nous n'avons pas besoin d'hypothèse d'intégrabilité $\int R^d Q(dR) < \infty$ des rayons dans le cas $q \geq 1$. Ce résultat pourra donc être utilisé dans le cas où les rayons ne seraient plus intégrable.*

Maintenant nous posons $\Delta_i = [-i, i]^d$ et nous définissons pour $j > i$ les événements

— $A_{i,j} = \{\omega \in \Omega,\ \forall (x, R) \in \omega_{\Delta_j^c}, B(x, R) \cap \Delta_i = \emptyset\}$, voir Figure I.12,

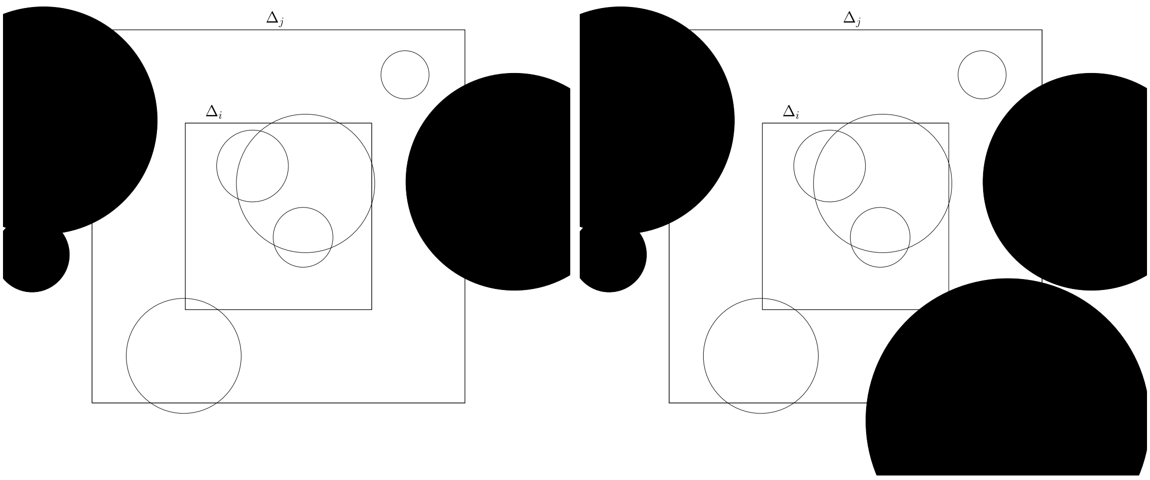

FIGURE I.12 – L'événement $A_{i,j}$ est réalisé à gauche et ne l'est pas à droite (les boules blanches n'interviennent pas dans la décision).

— $W_{i,j}$ l'événement des configurations ω qui ont au plus une composante connexe de $L(\omega_{\Delta_j \setminus \Lambda})$ intersectant $\Lambda \oplus B(0, R_1)$ et Δ_i^c, voir Figure I.13.

La prochaine proposition montre que la fonction N_{cc}^{Λ} est locale sur ces événements.

Proposition I.3.14. *Pour tous $j > i$ assez grands (dépendant de le Λ et R_1) et tous ω dans $U_{R_1} \cap A_{i,j} \cap W_{i,j}$, nous avons*

$$N_{cc}^{\Lambda}(\omega) = N_{cc}^{\Lambda}(\omega_{\Delta_j}).$$

Démonstration. Prenons i et j assez grand pour avoir $\Lambda \oplus B(0, R_1) \subseteq \Delta_i$. Comme ω est une configuration de $W_{i,j} \cap A_{i,j}$, chaque boule de $L(\omega_{\Delta_j^c})$ ne peut donc pas intersecter $L(\omega_\Lambda)$ et peut au plus intersecter une Λ-composante (voir la terminologie dans la preuve de la Définition I.1.14) de $L(\omega_{\Delta_j})$. Donc

$$N_{cc}^{\Lambda}(\omega) = N_{cc}(\omega_{\Delta_j}) - N_{cc}(\omega_{\Delta_j \setminus \Lambda}) = N_{cc}^{\Lambda}(\omega_{\Delta_j}).$$

□

Maintenant nous devons contrôler la probabilité des événements $W_{i,j}$ et $A_{i,j}$.

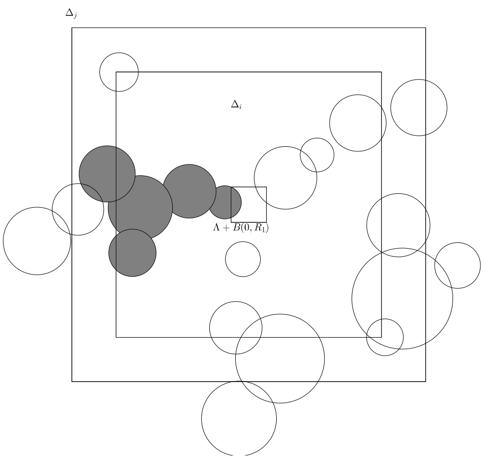

FIGURE I.13 – L'événement $W_{i,j}$ est réalisé à gauche et ne l'est pas à droite (les boules blanches n'interviennent pas dans la décision).

Proposition I.3.15. *Sous les hypothèses (**Condition**) nous avons*

$$\lim_{i\to\infty}\lim_{j\to\infty} P(W_{i,j}) = 1. \tag{I.3.3}$$

Démonstration. Nous remarquons premièrement que $\lim_{i\to\infty}\lim_{j\to\infty} P(W_{i,j}) = P\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\bigcap_{j>i} W_{i,j}\right)$, où $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\bigcap_{j>i} W_{i,j}$ est l'événement des configurations ω telles que $L(\omega_{\Lambda^c})$ a au plus une composante connexe infinie intersectant $\Lambda \oplus B(0,R_1)$. Si nous supposons par l'absurde que cet événement n'est pas total, alors comme P satisfait la propriété de modification locale, nous pouvons montrer qu'avec probabilité positive, nous avons au minimum deux composantes connexes infinies. Ceci est bien sûr en contradiction directe avec la Proposition I.3.12. Donc

$$\lim_{i\to\infty}\lim_{j\to\infty} \bar{P}(W_{i,j}) = 1.$$

□

Les événements $A_{i,j}$ ne sont pas locaux. Nous devons donc obtenir un contrôle plus fort. Ceci est l'objet de la prochaine proposition.

Proposition I.3.16. *Sous les hypothèses du Théorème I.3.9, c'est-à-dire rayons bornés ou $q \geq 1$ et $\int_{\mathbb{R}^+} R^d Q(dR) < +\infty$, alors pour tout $i \geq 1$*

$$\lim_{j\to\infty} \max(P(A^c_{i,j}), \sup_n P^\Lambda_n(A^c_{i,j})) = 0.$$

Démonstration. Le cas des rayons bornés par R_0 (avec $R_1 = R_0$) est très simple puisque $P(A^c_{i,j}) = 0$ et $P^\Lambda_n(A^c_{i,j}) = 0$ dés que $j > i + R_0$. Dans le cas $q > 1$ et rayons satisfaisant la condition d'intégrabilité $\int R^d Q(dR) < \infty$, nous utilisons de la domination stochastique.

En utilisant la Proposition I.2.6 nous avons pour chaque événement croissant A l'inégalité

$$P_n^\Lambda(A) \leq \pi^{qz,Q}(A).$$

Nous ne pouvons pas parler ici de domination stochastique puisque P_n^Λ n'est pas une mesure de probabilité. Comme l'événement $A_{i,j}^c$ est croissant nous avons

$$P_n^\Lambda(A_{i,j}^c) \leq \pi^{qz,Q}(A_{i,j}^c). \tag{I.3.4}$$

Malheureusement l'événement $A_{i,j}^c$ n'est pas local. Nous allons donc introduire la modification locale

$$A_{i,j,k} = \{\omega \in \Omega,\ \forall (x,R) \in \omega_{\Delta_j^c \cap \Delta_k}, B(x,R) \cap \Delta_i = \emptyset\}$$

et nous avons

$$P(A_{i,j}^c) = \lim_k P(A_{i,j,k}^c) = \lim_k \lim_n P_n^\Lambda(A_{i,j,k}^c) \leq \lim_k \lim_n P_n^\Lambda(A_{i,j}^c) \leq \pi^{qz,Q}(A_{i,j}^c). \tag{I.3.5}$$

Lemme I.3.17. *Le nombre moyen de boules dans le modèle booléen poissonien intersectant un borélien borné Δ est $z\int(\mathcal{L}^d(\Delta \oplus B(0,R))Q(dR)$.*

En utilisant ce lemme nous avons en particulier que comme $\int_{\mathbb{R}^+} R^d Q(dR) < +\infty$, le nombre de boules intersectant Δ est fini presque sûrement. Nous en déduisons ainsi que $\lim_{j\to\infty} \pi^{zq,Q}(A_{i,j}^c) = 0$ et le résultat se déduit des équations (I.3.4) et (I.3.5).

Preuve du Lemme. Une preuve plus forte, donnant la loi du nombre de boules intersectant Δ, est disponible dans [8, page 72] en utilisant un "thinning". Nous allons ici utiliser la formule de Slivnyak-Mecke, Proposition I.1.2. Nous considérons donc la fonction $F((x,R),\omega)$ égale à 1 si la boule $B(x,R)$ intersecte Δ et 0 sinon. Nous avons donc en utilisant la Proposition I.1.2 que le nombre moyen de boules du modèle booléen poissonien intersectant Δ s'exprime comme

$$z\int_\Omega \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^d} F((x,R),\omega)\mathcal{L}^d(dx)Q(dR)\pi^{z,Q}(d\omega) = z\int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{L}^d(\Delta \oplus B(0,R))Q(dR).$$

Le résultat est donc démontré. □

□

Remarque I.3.18. *C'est seulement pour cette proposition finale que nous avons eu besoin de l'hypothèse d'intégrabilité $\int R^d Q(dR) < +\infty$ sur les rayons. En effet nous avons utilisé une domination stochastique par un processus ponctuel de Poisson $\pi^{z,Q}$. Mais lorsque les rayons ne satisfont pas la condition d'intégrabilité, ce processus ponctuel de Poisson n'a pas les bonnes propriétés que nous avons utilisé dans la précédente preuve. C'est pour cela que dans le chapitre III nous allons avoir besoin de la FK-représentation.*

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'équation DLR(Λ). Posons

$$\delta = \Big| \int_\Omega f dP - \int_\Omega \int_\Omega f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})\Xi_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda|\omega_{\Lambda^c})P(d\omega)\Big|.$$

Nous allons montrer que δ est arbitrairement petit. Pour cela prenons $\epsilon > 0$.

Lemme I.3.19. *Pour R_1 assez grand et pour tout ω_{Λ^c} nous avons*

$$\left| \int_\Omega f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c}) \Xi_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda|\omega_{\Lambda^c}) - \int_\Omega f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c}) \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\omega'_\Lambda) \frac{q^{N_{cc}^\Lambda(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})}}{Z_{\Lambda,R_1}^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})} \pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega') \right| \leq \epsilon,$$

où $Z_{\Lambda,R_1}^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c}) = \int_\Omega \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\omega'_\Lambda) q^{N_{cc}^\Lambda(\omega'_\Lambda+\omega_{\Lambda^c})} \pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega')$ est la fonction de partition modifiée. La constante R_1 peut être choisie assez grand pour satisfaire $\pi_\Lambda^{z,Q}(U_{R_1}^c) \leq \epsilon$.

Démonstration. Premièrement dans le cas $q < 1$ et rayons bornés, nous avons égalité en posant $R_1 = R_0$. À partir de maintenant nous traitons le cas $q \geq 1$. Nous avons

$$\pi_\Lambda^{z,Q}(U_{R_1}) = \exp\Big(- z\mathcal{L}^d(\Lambda) Q[R_1, \infty[\Big) \underset{R_1 \to \infty}{\to} 1$$

et donc R_1 peut être choisi de manière à satisfaire $\pi_\Lambda^{z,Q}(U_{R_1}^c) \leq \epsilon$.

Pour la première inégalité, le théorème de convergence dominée nous donne la convergence à ω_{Λ^c} fixé. Pour obtenir une convergence uniforme il va falloir trouver une borne plus précise.

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c}) \Xi_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda|\omega_{\Lambda^c}) - \int_\Omega f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c}) \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\omega'_\Lambda) \frac{q^{N_{cc}^\Lambda(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})}}{Z_{\Lambda,R_1}^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})} \pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega') \right| \\
&\leq \left| \int_\Omega f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})(1 - U_{R_1}(\omega'_\Lambda)) \Xi_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega'_\Lambda|\omega_{\Lambda^c}) \right| \\
&\quad + \left| \int_\Omega \frac{f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})}{q^{-N_{cc}^\Lambda(\omega'_\Lambda+\omega_{\Lambda^c})}} \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\omega'_\Lambda) \left(\frac{1}{Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})} - \frac{1}{Z_{\Lambda,R_1}^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})} \right) \pi^{z,Q}(d\omega') \right| \\
&\leq \Xi_\Lambda^{z,Q,q}(U_{R_1}^c|\omega_{\Lambda^c}) + \left| \frac{Z_{\Lambda,R_1}^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})}{Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})} - 1 \right| \\
&\leq \Xi_\Lambda^{z,Q,q}(U_{R_1}^c|\omega_{\Lambda^c}) + \frac{1}{Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})} |Z_{\Lambda,R_1}^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c}) - Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})| \\
&\leq 2\Xi_\Lambda^{z,Q,q}(U_{R_1}^c|\omega_{\Lambda^c}) \leq 2\pi_\Lambda^{qz,Q,q}(U_{R_1}^c),
\end{aligned} \tag{I.3.6}$$

où la dernière inégalité provient de la domination stochastique de la Proposition I.2.6. Nous obtenons le résultat voulu pour R_1 assez grand. □

Nous fixons donc maintenant R_1 comme dans le Lemme I.3.19. Nous avons donc

$$\delta \leq \left| \int f dP - \int \int f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c}) \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\omega'_\Lambda) \frac{q^{N_{cc}^\Lambda(\omega'_\Lambda+\omega_{\Lambda^c})}}{Z_{\Lambda,R_1}^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})} \pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega') P(d\omega) \right| + \epsilon.$$

Grâce à la Proposition I.3.15 et la Proposition I.3.16 nous pouvons choisir $i < j$ assez grands (fixés à partir de maintenant) tels que $P(A_{i,j}^c \cup W_{i,j}^c) \leq \epsilon$ et $P_n^\Lambda(A_{i,j}^c) \leq \epsilon$ pour tout n. Donc

$$\delta \leq \left| \int f dP - \int \int \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\omega'_\Lambda) \mathbb{1}_{A_{i,j} \cap W_{i,j}}(\omega_{\Lambda^c}) f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c}) \frac{q^{N_{cc}^\Lambda(\omega'_\Lambda+\omega_{\Lambda^c})}}{Z_{\Lambda,R_1}^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})} \pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega') P(d\omega) \right| + 2\epsilon.$$

Maintenant à l'aide de la Proposition I.3.14 nous obtenons

$$\begin{aligned}\delta &\leq \Big| \int f dP - \int\int \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\omega'_\Lambda) \mathbb{1}_{A_{i,j}\cap W_{i,j}}(\omega_{\Lambda^c}) f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c}) \frac{q^{N^\Lambda_{cc}(\omega'_\Lambda + \omega_{\Delta_j \setminus \Lambda})}}{Z^{z,Q,q}_{\Lambda,R_1}(\omega_{\Delta_j\setminus\Lambda})} \pi^{z,Q}_\Lambda(d\omega') P(d\omega) \Big| + 2\epsilon \\ &\leq \Big| \int f dP - \int\int \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\omega'_\Lambda) \mathbb{1}_{W_{i,j}}(\omega_{\Lambda^c}) f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c}) \frac{q^{N^\Lambda_{cc}(\omega'_\Lambda + \omega_{\Delta_j \setminus \Lambda})}}{Z^{z,Q,q}_{\Lambda,R_1}(\omega_{\Delta_j\setminus\Lambda})} \pi^{z,Q}_\Lambda(d\omega') P(d\omega) \Big| + 3\epsilon,\end{aligned}$$

et comme la fonction $\mathbb{1}_{W_{i,j}}$ est locale, nous sommes maintenant en mesure d'utiliser la convergence locale de P^Λ_n vers P. Donc pour n assez grand (fixé à partir de maintenant) nous avons

$$\begin{aligned}\delta &\leq \Big| \int f dP^\Lambda_n - \int\int \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\omega'_\Lambda) \mathbb{1}_{W_{i,j}}(\omega_{\Lambda^c}) f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c}) \frac{q^{N^\Lambda_{cc}(\omega'_\Lambda + \omega_{\Delta_j \setminus \Lambda})}}{Z^{z,Q,q}_{\Lambda,R_1}(\omega_{\Delta_j\setminus\Lambda})} \pi^{z,Q}_\Lambda(d\omega') P^\Lambda_n(d\omega) \Big| + 4\epsilon \\ &\leq \Big| \int f dP^\Lambda_n - \int\int \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\omega'_\Lambda) f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c}) \mathbb{1}_{A_{i,j}\cap W_{i,j}}(\omega_{\Lambda^c}) \frac{q^{N^\Lambda_{cc}(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})}}{Z^{z,Q,q}_{\Lambda,R_1}(\omega_{\Lambda^c})} \pi^{z,Q}_\Lambda(d\omega') P^\Lambda_n(d\omega) \Big| + 5\epsilon.\end{aligned}$$

Dans la dernière inégalité l'événement $A_{i,j}$ a été réintroduit (modulo une erreur de ϵ) pour pouvoir utiliser la Proposition I.3.14 et réintroduire les fonctions globales $N^\Lambda_{cc}(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})$ et $Z^{z,Q,q}_{\Lambda,R_1}(\omega_{\Lambda^c})$. Nous obtenons donc

$$\delta \leq \Big| \int f dP^\Lambda_n - \int\int \mathbb{1}_{W_{i,j}} f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c}) \frac{q^{N^\Lambda_{cc}(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})}}{Z^{z,Q,q}_{\Lambda}(\omega_{\Lambda^c})} \pi^{z,Q}_\Lambda(d\omega') P^\Lambda_n(d\omega) \Big| + 7\epsilon.$$

Mais par la Proposition I.3.11, P^Λ_n satisfait l'équation DLR(Λ) et nous avons donc

$$\delta \leq 7\epsilon + P^\Lambda_n(W^c_{i,j}) \leq 8\epsilon.$$

I.3.4 Unicité du CRCM : Résultat et perspective

Le Théorème I.3.9 répond donc positivement à la question de l'existence dans le cas des rayons intégrables. La seconde question concerne l'unicité : existe-il une unique mesure de Gibbs ou y en a-t-il plusieurs ? La dynamique attendue est la suivante. Nous nous attendons à avoir unicité de la mesure de Gibbs pour z assez petit (dépendant de Q et q) et non unicité pour z assez grand. Nous parlons alors de *transition de phase*. Concernant le CRCM il n'y a pour le moment pas de résultat montrant la non-unicité dans le cas des rayons intégrables. Concernant l'unicité certaines techniques sur les réseaux sont adaptables et permettent de montrer l'unicité du CRCM. Nous allons décrire ici la technique de **disagreement percolation** et énoncer le résultat d'unicité.

Nous voulons montrer l'unicité du CRCM(z, Q, q). L'idée est de prendre deux CRCM P_1, P_2 et de construire un couplage de ces deux lois pour lequel les deux processus différent sur un ensemble "de percolation". En montrant l'absence de percolation nous montrons donc que $P_1 = P_2$. Cette idée est formalisée dans la prochaine proposition.

La méthode de disagreement percolation repose sur une domination stochastique par un processus ponctuel de Poisson. À partir de maintenant nous prenons donc $q > 1$.

Définition I.3.20. *Soit Λ borné et soient $\omega^1_{\Lambda^c}$, $\omega^2_{\Lambda^c}$ deux conditions extérieures. Nous disons que Γ_1, Γ_2, Γ' est un* ***disagreement coupling*** *s'il vérifie :*

1. $\Gamma_i \sim \Xi^{z,Q,q}_{\Lambda}(.|\omega^i_{\Lambda^c})$, $i = 1$ *ou* 2,
2. $\Gamma' \sim \pi^{qz,Q}_{\Lambda}$,
3. $\Gamma_i \leq \Gamma'$,
4. $\Gamma_1 = \Gamma_2$ *sur l'ensemble* $(x, R) \in \Gamma'$ *tel que* $B(x, R) \underset{L(\Gamma')}{\not\leftrightarrow} L(\omega^1_{\Lambda^c} + \omega^2_{\Lambda^c})$.

Proposition I.3.21. *Si pour tous Λ, $\omega^1_{\Lambda^c}$, $\omega^2_{\Lambda^c}$ il existe un disagreement coupling, alors pour z assez petit il y a unicité du CRCM.*

Démonstration. Soient P_1 et P_2 deux CRCM(z, Q, q). Par le Théorème I.1.4 nous avons $P_i \preceq \pi^{zq,Q}$. Nous allons montrer que $P_1 = P_2$. Pour cela il suffit de montrer que $P_1(A) = P_2(A)$ pour tous les événements A locaux et nous prenons à partir de maintenant A un événement Δ-local et prenons $\Lambda = [-n, n]^d$ contenant Δ. Alors nous avons

$$\begin{aligned}
|P_1(A) - P_2(A)| &= \left| \int\int \left(\Xi^{z,Q,q}_{\Lambda}(A|\omega^1_{\Lambda^c}) - \Xi^{z,Q,q}_{\Lambda}(A|\omega^2_{\Lambda^c}) \right) P_1(d\omega^1) P_2(d\omega^2) \right| \\
&= \left| \int\int \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A(\Gamma_1) - \mathbb{1}_A(\Gamma_2) \right] P_1(d\omega^1) P_2(d\omega^2) \right| \\
&\leq \int\int \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{L(\Gamma'_\Delta) \underset{L(\Gamma')}{\leftrightarrow} L(\omega^1_{\Lambda^c} + \omega^1_{\Lambda^c})} \right] P_1(d\omega^1) P_2(d\omega^2) \\
&\leq \int\int \pi^{qz,Q}_{\Lambda} \left(L(\omega'_\Delta) \underset{L(\omega')}{\leftrightarrow} L(\omega^1_{\Lambda^c} + \omega^1_{\Lambda^c}) \right) \pi^{qz,Q}(d\omega^1) \pi^{qz,Q}(d\omega^2), \quad \text{(I.3.7)}
\end{aligned}$$

où la dernière majoration est obtenue grâce à la croissance de la fonction intégrée.

— **Méthode simple : Unicité pour** $z < \frac{z_d(Q)}{2q}$.
Par une domination stochastique brutale nous obtenons

$$|P_1(A) - P_2(A)| \leq \pi^{2qz,Q}(L(\omega_\Delta) \leftrightarrow L(\omega_{\Lambda^c})),$$

ce qui tend vers 0 lorsque Λ croit, et lorsque $z < \frac{z_d(Q)}{2q}$, où $z_d(Q)$ est le seuil de percolation de $\pi^{z,Q}$.

— **Méthode compliquée : Unicité pour** $z < \frac{z_d(Q)}{q}$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe R_1 tel que l'équation (I.3.7) devient

$$\begin{aligned}
&|P_1(A) - P_2(A)| \\
&\leq \int\int \pi^{qz,Q}_{\Lambda} \left(\Delta \oplus B(0, R_1) \underset{L(\omega')}{\leftrightarrow} L(\omega^1_{\Lambda^c} + \omega^1_{\Lambda^c}) \right) \pi^{qz,Q}(d\omega^1) \pi^{qz,Q}(d\omega^2) + \epsilon.
\end{aligned}$$

À partir de maintenant nous avons besoin d'un contrôle des rayons pour le *modèle booléen*. Pour cela nous posons

$$\Upsilon_n = \{\omega \in \Omega, \forall (x, R) \in \omega, R \leq \frac{|x|}{2} + n\},$$

et $\Upsilon = \bigcup_{n \geq 1} \Upsilon_n$.

Lemme I.3.22. *Si Q satisfait la condition d'intégrabilité $\int R^d Q(dR) < \infty$, alors*

$$\pi^{z,Q}(\Upsilon) = 1.$$

Démonstration. Notons, pour $k \in \mathbb{Z}^d$, $D_k = [k_1, k_1 + 1[\times \cdots \times [k_d, k_d + 1[$. Il est possible d'indexer les indices k par un entier $n \in \mathbb{N}$ de tel sorte qu'il existe $0 < a < b < \infty$ tels que pour tout n nous avons

$$an2^d \leq |k_n|^d = (k_{n,1}^2 + \cdots + k_{n,d}^2)^{d/2} \leq bn2^d.$$

Une méthode consiste à parcourir les k en tournant autour de l'origine dans une spirale.
Si x est dans D_k alors $|x| \leq |k| + \sqrt{d}$. Nous allons donc considérer la somme

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \pi^{z,Q} \left(\{\omega \in \Omega, \text{ il existe } (x, R) \in \omega_{D_{k_n}},\ R > \frac{|k_n|}{2}\} \right)$$

et montrer que cette somme est finie. Nous avons

$$\begin{aligned} \pi^{z,Q} \left(\{\exists (x, R) \in \omega_{D_{k_n}},\ R > \frac{|k_n|}{2}\} \right) &= 1 - \pi^{z,Q} \left(\{\forall (x, R) \in \omega_{D_{k_n}},\ R \leq \frac{|k_n|}{2}\} \right) \\ &= 1 - exp\Big(- z(1 - Q([0, |k_n|/2])\Big) \\ &\leq zQ(]|k_n|/2, \infty[) \\ &\leq zQ(R^d > an), \end{aligned}$$

nous obtenons donc en sommant

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \pi^{z,Q} \left(\{\exists (x, R) \in \omega_{D_{k_n}},\ R > \frac{|k_n|}{2}\} \right) &\leq z \sum_{n \in \mathbb{N}^*} Q(R^d > an) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{a(n-1)}^{an} Q(R^d > x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} R^d Q(dR) < \infty. \end{aligned}$$

Donc par le lemme de Borel-Cantelli, pour $\pi^{z,Q}$-presque tout ω dans Ω, il existe un rang N (qui dépend de ω) et tel que pour tout $n \geq N$, nous avons

$$\forall (x, R) \in \omega_{D_{k_n}},\ R \leq \frac{|K_n|}{2} \leq \frac{|x|}{2} + \sqrt{d}.$$

En prenant $j = \max\{R, (x, R) \in \omega_{\cup_{n \leq N} D_{k_n}}\} + \sqrt{d}$, nous avons $\omega \in \Upsilon_j$. $\square$

Alors il existe un n tel que $\pi^{z,Q}(\Upsilon_n) \geq 1 - \epsilon$ et il existe $\bar{\Lambda}$, dépendant de Λ et n, et qui tend vers $\mathbb{R}^d$ quand Λ fait de même, tel que

$$\begin{aligned} |P_1(A) - P_2(A)| &\leq \int \int \int \pi_\Lambda^{qz,Q} \left(\Delta \oplus B(0, R_1) \underset{L(\omega')}{\leftrightarrow} \bar{\Lambda}^c) \right) \pi^{qz,Q}(d\omega^1) \pi^{qz,Q}(d\omega^2) + 2\epsilon, \\ &= \pi_\Lambda^{qz,Q} \left(\Delta \oplus B(0, R_1) \underset{L(\omega')}{\leftrightarrow} \bar{\Lambda}^c) \right) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Lorsque $z < \frac{z_d(Q)}{q}$ nous avons donc pour Λ assez grand

$$|P_1(A) - P_2(A)| \leq 3\epsilon$$

pour ϵ arbitrairement petit et donc

$$P_1(A) = P_2(A).$$

□

Le gros du travail est donc de construire un disagreement coupling. L'idée originelle de Van Den Berg et Maes [50] est de construire ce couplage de manière itérative en commençant par les sites à la frontières de Λ. Dans le cas des rayons bornés il est possible d'adapter cette méthode en divisant Λ en des sous-ensembles disjoints de petites tailles (dépendant bien sûr de la borne sur les rayons). Alors en reproduisant la méthode discrète et construisant le couplage successivement sur chacun de ces petits sous-ensemble, nous obtenons un couplage aux bonnes propriétés. Ceci a été développé en détails dans [13].

Malheureusement cette méthode n'est pas applicable dans le cas des rayons non bornés. Cette question est l'objet d'un projet en commun avec C. Hofer-Temmel. Nous projetons de construire un disagreement coupling de manière continue, c'est-à-dire où les petits-ensembles précédents seraient remplacer par des zones dépendants aléatoirement des précédentes itérations.

I.3.5 (Perspective) Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres d'un modèle Gibbsien est une question naturelle qui a été traitée dans de nombreux articles [1, 16, 17, 9, 39, 44]. Dans notre cas où l'existence du modèle en volume infini a été démontrée, dans le Théorème I.3.9, nous pouvons étudier certaines propriétés asymptotiques, telles que la consistance et la normalité, lorsque nous faisons croître la fenêtre d'observation. Deux types d'observations sont possibles :

— Cas 1 : Observation d'un vecteur contenant les centres de boules et les rayons.

— Cas 2 : Observation de la structure germe-grain de l'union des boules.

Pour ces deux types d'observations nous souhaitons estimer les paramètres z, q et éventuellement la loi des rayons Q. Plusieurs techniques ont été développées :

1. Le maximum de vraisemblance est sans doute l'estimateur le plus naturel pour l'estimation en mécanique statistique puisque les modèles sont définis à partir d'une densité non normalisée. Cette constante de normalisation n'est pas connue explicitement et pose donc un problème pratique pour le calcul du maximum de vraisemblance, même si des techniques ont été développées dans le cas des données clairsemées, voir [25, 46]. Ces problèmes pratiques n'empêchent pas l'étude asymptotique de cet estimateur.

   Dereudre et Lavancier [16] ont démontré un résultat général de consistance pour le maximum de vraisemblance pour l'estimation des paramètres d'un modèle de Gibbs satisfaisant des conditions de régularité, de stabilité et satisfaisant un principe variationnel. Il est envisageable de pouvoir montrer que le CRCM satisfait les hypothèses de [16] mais serait un travail compliqué. En effet il est par exemple compliqué de montrer qu'un modèle de Gibbs à longue portée satisfasse un principe variationnel.

La question de la normalité est beaucoup plus compliquée et est toujours ouverte même dans le cas des modèles de Gibbs à portée finie. En effet la transition de phase du modèle peut entraîner des asymptotiques non-standard.

Finalement il est important de remarquer que dans le *cas 2* où nous observons uniquement l'union des boules, le nombre de boules et leurs rayons ne sont pas observés et donc la vraisemblance n'est pas calculable. Cet estimateur est donc utilisable pour estimer (z, q) et Q dans le *cas 1* mais nous pouvons uniquement dans le *cas 2* estimer q, les autres paramètres étant supposés connus.

2. Les estimateurs Takacs-Fiksel ont été introduits dans les années 1980 [18, 49], et se basent sur les équations GNZ satisfaites par un modèle de Gibbs. Contrairement au maximum de vraisemblance, le calcul de ces estimateurs ne dépend pas de le constante de normalisation et le choix infini des fonctions tests donne une infinité d'estimateurs possibles. Il est possible de choisir des fonctions tests adaptées à l'estimation et qui facilitent les calculs. De plus il est envisageable d'estimer simultanément z, q et Q dans le *cas 2* sans observer le nombre et les rayons des boules grâce à de bonnes fonctions tests. Ceci a été fait pour l'estimation de z dans [17] pour le *modèle Quermass*. Des résultats de consistance et de normalité ont été démontrés dans [9] mais ne traitent que le cas des modèles de Gibbs avec portée finie. Il faudrait donc démontrer le même type de résultat pour le CRCM qui a une portée infinie. Il est intéressant de noter que l'estimateur du maximum de pseudo-vraisemblance, développé par exemple dans [34], est un estimateur Takacs-Fiksel pour des fonctions tests particulières.
3. L'estimateur variationnel est basé sur une équation GNZ variationnelle. Cet estimateur a l'avantage d'être très rapide à calculer. La consistance de cet estimateur est historiquement basée sur une hypothèse de différentiabilité de l'interaction qui n'est pas satisfaite par le CRCM, mais [1] propose un résultat de consistance plus général basé sur un lissage aux points où il y a un problème de discontinuité. Il pourrait être intéressant d'étudier les propriétés de cet estimateur pour le CRCM.

Chapitre II

Modèle de Widom-Rowlinson (WR) à rayons aléatoires

Résumé du chapitre

Nous allons présenter le *modèle de Widom-Rowlinson*, modèle gibbsien de boules colorées avec une interaction hard-core entre les boules de différentes couleurs. Le premier résultat de ce chapitre est le suivant.

Si les rayons, potentiellement non bornés, du *modèle booléen* sous-jacent satisfont la condition d'intégrabilité $\int R^d Q(dR) < \infty$, alors pour tous les paramètres z et q nous avons l'existence d'un WR stationnaire.

Nous présentons deux preuves de ce résultat. La première est basée sur les techniques utilisées dans le chapitre I. La seconde démonstration est basée sur la FK-représentation qui exprime le WR comme une coloration du CRCM.

Ensuite nous présentons la théorie de la percolation. La percolation du CRCM est un outil très puissant permettant de montrer la transition de phase du WR. Nous démontrons le résultat suivant concernant la percolation du CRCM.

Sous de bonnes hypothèses garantissant l'existence du CRCM, nous avons absence de percolation du CRCM en faible activité et percolation du CRCM en forte activité.

Ce résultat se base sur deux techniques de domination stochastique, l'une de GEORGII et KÜNETH [23] et l'autre dû à LIGGETT, SCHONMANN et STACEY [38].

Enfin nous utilisons ce résultat de percolation pour simplifier et généraliser le résultat de transition de phase du WR démontré dans [7] et [21].

Sommaire

II.1 Définition et existence du WR **56**
- II.1.1 Définition et historique du WR 56
- II.1.2 Existence avec rayons non bornés 57
- II.1.3 FK-représentation et existence via le CRCM 62

II.2 Percolation du CRCM **65**
- II.2.1 Preuve de la percolation dans le cas $q > 1$ 68
- II.2.2 Preuve de la percolation dans le cas $q < 1$ 71
- II.2.3 Transition de phase pour le WR 73

II.1 Définition et existence du WR

II.1.1 Définition et historique du WR

Quand nous parlons du *modèle de Widom-Rowlinson*, le paramètre q est un entier plus grand que 1, que nous nommons *nombre de couleurs*. Nous notons $\widetilde{S} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \{1, \dots, q\}$ l'ensemble des points avec une marque *rayon* et une marque *couleur*. Nous notons $\widetilde{\Omega}$ l'ensemble des configurations colorées $\widetilde{\omega}$, c'est-à-dire des mesures ponctuels sur $\widetilde{\Omega}$. Cet espace des configurations colorées est muni des tribus $\widetilde{\mathcal{F}}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}_\Lambda$, construites de la même manière que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_\Lambda$ au début du chapitre I. Les notions de fonction locale, de convergence locale et d'entropie spécifique sont elles-aussi définies de manière analogue à ce qui a été fait dans le chapitre I, et les résultats de tension, Théorème I.1.12 et Corollaire I.1.13, sont encore vrais.

Nous munissons cet espace de la mesure de probabilité $\widetilde{\pi}^{z,Q,q}$ loi d'un processus ponctuel de Poisson d'intensité $z\mathcal{L}^d \otimes Q \otimes \mathcal{U}\{1, \dots, q\}$, où $\mathcal{U}\{1, \dots, q\}$ est la loi uniforme sur $\{1, \dots, q\}$. Chaque point de ce processus a donc une marque couleur choisie uniformément parmi les q couleurs, et indépendamment des autres points.

Nous notons $\mathcal{A}$ l'événement des configurations autorisées, c'est-à-dire

$$\mathcal{A} = \{\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega},\ \forall (x, R, k), (x', R', k') \in \widetilde{\omega},\ k \neq k' \Rightarrow |x - x'| > R + R'\}.$$

Autrement dit l'ensemble $\mathcal{A}$ contient les configurations telles que deux boules $B(x, R)$ et $B(x', R')$ de différentes couleurs ne s'intersectent pas.

Définition II.1.1. *Une mesure de probabilité $\widetilde{P}$ sur $\widetilde{\Omega}$ est une mesure de Widom-Rowlinson de paramètres z, Q et q (notée WR(z, Q, q)) si pour tout Λ borné,*

1. $\widetilde{Z}_\Lambda^{z,Q,q}(\widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) := \int \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}'_\Lambda + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) \widetilde{\pi}_\Lambda^{z,Q,q}(d\widetilde{\omega}'_\Lambda) > 0$, *$\widetilde{P}$ presque sûrement.*

2. DLR(Λ) : $\widetilde{P}(d\widetilde{\omega}'_\Lambda|\widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) = \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}'_\Lambda+\widetilde{\omega}_{\Lambda^c})}{\widetilde{Z}^{z,Q,q}_\Lambda(\widetilde{\omega}_{\Lambda^c})}\widetilde{\pi}^{z,Q,q}_\Lambda(d\widetilde{\omega}'_\Lambda)$, $\widetilde{P}$ *presque sûrement.*

Le WR est donc un modèle gibbsien où l'interaction est une interaction hard-core entre les boules de différentes couleurs. Ce modèle a été originellement introduit pour $q = 2$ et des rayons constants par Widom et Rowlinson en 1970 [51]. Ce modèle a deux formulations possibles. L'une en tant que modèle avec interaction entre deux gaz, la seconde en tant que modèle d'un gaz plongé dans un liquid dense. La seconde formulation est obtenue en intégrant par rapport à une espèce. Dans ce cas nous parlons aussi de *area model*. L'intérêt du WR réside non seulement dans son applicabilité pour la description de systèmes continus, mais aussi parce que ce fût le premier modèle continu pour lequel la transition de phase a été démontrée, par Ruelle en 1971 [48]. La preuve de Ruelle utilise l'argument de Peierls et fût ensuite généralisée par Lebowitz et Lieb pour des interactions à portée finie [37]. Une preuve moderne de la transition de phase basée sur la FK-représentation du WR par un CRCM a été donnée par Chayes, Chayes et Kotechý [7] et pour une classe de processus plus large par Georgii et Häggstrom [21].

Dans le cas non symétrique, c'est-à-dire où chaque espèce aurait une fugacité z_i, il a été démontré par Bricmont, Kuroda et Lebowitz [4] que pour chaque r il existe des sous-espaces des paramètres $z_1, \dots, z_q$ où il existe r phases pures. Ce résultat a été obtenu grâce à la théorie de Pirogov-Sinai. Dans certains cas une description précise des phases pures a été donnée par Mazel, Suhov et Stuhl [41].

Nous allons finir cette section en donnant une formulation équivalente du WR ne faisant pas intervenir de fonction de partition : les équations GNZ.

Proposition II.1.2. *Une mesure de probabilité $\widetilde{P}$ sur $\widetilde{\Omega}$ est une mesure de Widom-Rowlinson WR(z,Q,q) si et seulement si elle vérifie, pour chaque fonction $\widetilde{F} : \widetilde{S} \times \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ mesurable positive*

$$\int \sum_{\widetilde{\omega}\in\widetilde{\Omega}} F(\widetilde{X}, \widetilde{\omega} - \delta_{\widetilde{X}})\widetilde{P}(d\widetilde{\omega}) = z \int \int_{\widetilde{S}} \widetilde{F}(\widetilde{X},\widetilde{\omega})\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega} + \delta_{\widetilde{X}})\widetilde{m}(d\widetilde{X})\widetilde{P}(d\widetilde{\omega}),$$

où $\widetilde{X} = (x, R, k)$ et où $\widetilde{m} = \mathcal{L}^d \otimes Q \otimes \mathcal{U}\{1,\dots,q\}$.

II.1.2 Existence avec rayons non bornés

Comme pour le CRCM, la question de l'existence du WR est une question intéressante et non triviale. Dans le cas des rayons bornés, l'interaction du WR est à portée finie et donc l'existence est déjà démontrée [47]. Dans le cas des rayons non bornés l'interaction n'est plus à portée finie mais le prochain théorème répond positivement à la question de l'existence.

Théorème II.1.3 (Existence de WR(z, Q, q))**.** *Si la loi des rayons Q vérifie la condition d'intégrabilité $\int R^d Q(dR) < \infty$, alors pour tout $z > 0$ et tout q entier strictement positif, nous avons l'existence d'un WR(z, Q, q) stationnaire.*

Nous allons donner deux démonstrations de ce théorème.

Pour la première nous allons construire un candidat WR comme point d'accumulation d'une bonne suite à l'aide de l'entropie spécifique. Ensuite nous allons devoir montrer que ce candidat satisfait les équations DLR définissant le WR. Pour cela nous allons localiser l'interaction $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})$ à l'aide du Lemme I.3.22.

Dans la seconde preuve nous allons montrer que le WR en volume infini peut s'obtenir en coloriant les composantes connexes d'un CRCM. C'est la FK-représentation qui est énoncée dans le Théorème II.1.10. Ainsi l'existence du WR est une conséquence de l'éxistence du CRCM démontrée dans le Théorème I.3.9.

Preuve du Théorème II.1.3 : Construction d'un bon candidat

Nous notons $\Lambda_n =]-n,n]^d$. Nous considérons la mesure de Widom-Rowlinson sur la boîte bornée Λ_n à condition de bord vide définie par

$$\widetilde{P}_n(d\omega) = \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega})}{\widetilde{Z}_n} \widetilde{\pi}^{z,Q,q}_{\Lambda_n}(d\widetilde{\omega}_{\Lambda_n}),$$

où $\widetilde{Z}_n = \int \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}) \widetilde{\pi}^{z,Q,q}_{\Lambda_n}(d\widetilde{\omega}_{\Lambda_n})$ est la fonction de partition associée. Nous définissons ensuite $\hat{P}_n = \bigotimes_{i \in 2n\mathbb{Z}^d} \widetilde{P}_n \circ \tau_i^{-1}$ et $\bar{P}_n = \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)} \int_{\Lambda_n} (\hat{P}_n \circ \tau_x^{-1}) dx$. Cette construction est analogue à ce qui a été fait pour la preuve du Théorème I.3.9. Chaque $\bar{P}_n$ est stationnaire et nous avons la proposition suivante.

Proposition II.1.4. *Pour chaque n nous avons*

$$\mathcal{I}^z(\bar{P}_n) \leq z,$$

donc la suite $(\bar{P}_n)$ admet une valeur d'adhérence $\widetilde{P}$ pour la topologie de la convergence locale. La mesure de probabilité $\widetilde{P}$ est stationnaire et nous supposons par la suite que la suite converge vers cette valeur d'adhérence $\widetilde{P}$.

Démonstration. Par additivité de l'entropie spécifique, voir Théorème I.1.12, nous avons

$$\mathcal{I}^z(\bar{P}_n) = \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)} \int \mathcal{I}^z(\hat{P}_n \circ \tau_x^{-1}) dx = \mathcal{I}^z(\hat{P}_n).$$

Ici comme dans le chapitre précédent nous faisons un abus puisque $\hat{P}_n$ n'est pas stationnaire mais seulement invariante pour la famille de translations de vecteur dans $2n\mathbb{Z}^d$. Mais nous pouvons définir l'entropie spécifique pour ce type d'invariance. Maintenant il est facile de voir que

$$\mathcal{I}^z(\hat{P}_n) = \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)} \mathcal{I}_{\Lambda_n}(\widetilde{P}_n | \pi^{z,Q}),$$

avec $\mathcal{I}_{\Lambda_n}(\widetilde{P}_n | \pi^{z,Q}) = \int_{\widetilde{\Omega}} \ln\left(\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega})}{\widetilde{Z}_n}\right) \widetilde{P}_n(d\widetilde{\omega}) = -\ln(\widetilde{Z}_n)$. Or

$$\widetilde{Z}_n = \int_{\widetilde{\Omega}} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}) \pi^{z,Q}_{\Lambda_n}(d\widetilde{\omega}) \geq \exp(-z\mathcal{L}^d(\Lambda_n)).$$

Nous obtenons donc la borne souhaitée. L'existence d'un point d'accumulation est alors une conséquence du Théorème I.1.12. □

Nous avons maintenant notre candidat $\widetilde{P}$ pour être un WR. Avant de montrer que cette mesure de probabilité satisfait les équations DLR, nous allons montrer que cette mesure donne presque sûrement des configurations autorisées.

Proposition II.1.5. *Nous avons* $\widetilde{P}(\mathcal{A}) = 1$, *et donc*

$$\widetilde{Z}_{\Lambda}^{z,Q,q}(\widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) \geq \exp(-z\mathcal{L}^d(\Lambda)) \ \widetilde{P} - \textit{presque sûrement.}$$

Démonstration. L'événement $\mathcal{A}$ n'est pas locale, mais il s'en approche puisque

$$\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}_{\Lambda_k}) \underset{k\to\infty}{\to} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega})$$

pour toute configuration. C'est très facile à voir intuitivement puisque si une configuration n'est pas autorisée, il suffit d'arrêter la vérification dés que nous trouvons deux boules "problématiques". Nous avons donc

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(\mathcal{A}) &= \int_{\widetilde{\Omega}} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega})\widetilde{P}(d\widetilde{\omega}) = \lim_{k\to\infty} \int_{\widetilde{\Omega}} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}_{\Lambda_k})\widetilde{P}(d\widetilde{\omega}) \\ &= \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} \int_{\widetilde{\Omega}} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}_{\Lambda_k})\bar{P}_n(d\widetilde{\omega})\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{\Omega}} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}_{\Lambda_k})\bar{P}_n(d\widetilde{\omega}) &= \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)} \int_{\Lambda_n}\int_{\widetilde{\Omega}} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}_{\Lambda_k})\hat{P}_n \circ \tau_x^{-1}(d\widetilde{\omega})dx \\ &= \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)} \int_{\Lambda_n}\int_{\widetilde{\Omega}} \mathbb{1}_{\mathcal{A}} \circ \tau_x(\widetilde{\omega}_{\Lambda_k})\hat{P}_n(d\widetilde{\omega})dx.\end{aligned}$$

Pour $n > k$, nous avons $\tau_x(\Lambda_k) \subseteq \Lambda_n$ dés que $x \in [k-n, n-k]^d$ et donc

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}_{\Lambda_k})\bar{P}_n(d\widetilde{\omega}) \geq \frac{\mathcal{L}^d([k-n,n-k]^d)}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)},$$

ce qui tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Le résultat est donc démontré. □

Preuve du Théorème II.1.3 : Le bon candidat satisfait DLR

Nous allons modifier la suite $\bar{P}_n$ pour qu'elle soit compatible avec les équations DLR. À partir de maintenant nous fixons $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ borné et nous allons montrer que $\widetilde{P}$ satisfait l'équation DLR(Λ). Posons

$$\widetilde{P}_n^{\Lambda} = \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)} \int_{\Lambda_n} \mathbb{1}_{\Lambda\subseteq\tau_x(\Lambda_n)} \times (\hat{P}_n \circ \tau_x^{-1})dx.$$

Les $\widetilde{P}_n^{\Lambda}$ ne sont plus des mesures de probabilité mais la proposition suivante nous assure que cette suite satisfait de bonnes propriétés.

Proposition II.1.6.

— *Pour chaque fonction $f : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ locale bornée nous avons*

$$\left| \int_{\widetilde{\Omega}} f d\widetilde{P}_n^{\Lambda} - \int_{\widetilde{\Omega}} f d\widetilde{P}_n \right| \to 0,$$

Donc la suite $(\widetilde{P}_n^{\Lambda})$ converge vers $\widetilde{P}$ pour la topologie de la convergence locale.

— *$\widetilde{P}_n^{\Lambda}$ satisfait DLR(Λ).*

Démonstration. Cette preuve est en tout point similaire à la preuve de la Proposition I.3.11. □

Soit f une fonction locale bornée par 1. Nous allons montrer que pour tout réel $\epsilon > 0$, la quantité

$$\delta = \left| \int_{\widetilde{\Omega}} f d\widetilde{P} - \int_{\widetilde{\Omega}} \int_{\widetilde{\Omega}} f(\widetilde{\omega}'_{\Lambda} + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}'_{\Lambda} + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c})}{\widetilde{Z}_{\Lambda}^{z,Q,q}(\widetilde{\omega}_{\Lambda^c})} \widetilde{\pi}_{\Lambda}^{z,Q,q}(d\widetilde{\omega}'_{\Lambda}) \widetilde{P}(d\widetilde{\omega}) \right|$$

est majorée par un multiple de ϵ. La fonction $f_{\Lambda}(\widetilde{\omega}) = \int_{\widetilde{\Omega}} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}'_{\Lambda} + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c})}{\widetilde{Z}_{\Lambda}^{z,Q,q}(\widetilde{\omega}_{\Lambda^c})} \widetilde{\pi}_{\Lambda}^{z,Q,q}(d\widetilde{\omega}'_{\Lambda})$ n'est pas une fonction locale (sauf dans le cas des rayons bornés), ce qui est le principale problème pour cette preuve. Dans l'esprit de ce qui a été fait dans la preuve du Théorème I.3.9, nous posons

$$U_{R_1} = \{\widetilde{\omega}, \forall (x, R, k) \in \widetilde{\omega}_{\Lambda}, R \leq R_1\}.$$

Lemme II.1.7. *Pour R_1 assez grand et pour tout $\widetilde{\omega}_{\Lambda^c} \in \mathcal{A}$ nous avons*

$$\left| \int_{\widetilde{\Omega}} f(. + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(. + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c})}{\widetilde{Z}_{\Lambda}^{z,Q,q}(\widetilde{\omega}_{\Lambda^c})} d\widetilde{\pi}_{\Lambda}^{z,Q,q} - \int_{\widetilde{\Omega}} f(. + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) \mathbb{1}_{U_{R_1}}(.) \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(. + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c})}{\widetilde{Z}_{\Lambda,R_1}^{z,Q,q}(\widetilde{\omega}_{\Lambda^c})} d\widetilde{\pi}_{\Lambda}^{z,Q,q} \right| \leq \epsilon,$$

où $\widetilde{Z}_{\Lambda,R_1}^{z,Q,q}(\widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) = \int \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\widetilde{\omega}'_{\Lambda}) \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}'_{\Lambda} + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) \widetilde{\pi}_{\Lambda}^{z,Q,q}(d\widetilde{\omega}'_{\Lambda})$ est la fonction de partition modifiée. La constante R_1 peut être choisie assez grande de manière à avoir $\widetilde{\pi}_{\Lambda}^{z,Q,q}(U_{R_1}^c) \leq \epsilon$.

Démonstration. La preuve de ce lemme suit exactement la méthode de la preuve du Lemme I.3.19.

□

Donc en utilisant ce lemme nous obtenons

$$\delta \leq \epsilon + \left| \int f d\widetilde{P} - \int \int f(\widetilde{\omega}'_{\Lambda} + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\widetilde{\omega}'_{\Lambda}) \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}'_{\Lambda} + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c})}{\widetilde{Z}_{\Lambda,R_1}^{z,Q,q}(\widetilde{\omega}_{\Lambda^c})} \widetilde{\pi}_{\Lambda}^{z,Q,q}(d\widetilde{\omega}'_{\Lambda}) \widetilde{P}(d\widetilde{\omega}) \right|.$$

Maintenant pour "localiser" les fonctions $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ et $\widetilde{Z}_{\Lambda,R_1}^{z,Q,q}(\widetilde{\omega}_{\Lambda^c})$ nous allons utiliser les événements Υ et Υ_k définis comme dans la section I.3.4 :

$$\Upsilon_k = \{\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}, \forall (x, R, k) \in \widetilde{\omega}, R \leq \frac{|x|}{2} + k\},$$

et $\Upsilon = \bigcup_{k \geq 1} \Upsilon_k$.

Proposition II.1.8. *Il existe k assez grand tel que*

1. $\widetilde{P}(\Upsilon_k^c) \leq \epsilon$,
2. $\widetilde{P}_n^{\Lambda}(\Upsilon_k^c) \leq \epsilon$ *pour tout entier n,*
3. $\widetilde{\pi}^{z,Q,q}(\Upsilon_k^c) \leq \epsilon$.

Démonstration. Le troisième point est une conséquence du Lemme I.3.22. Le second point est une conséquence de la domination stochastique $\widetilde{P}_n^{\Lambda} \preceq \pi^{z,Q}$ qui se prouve en utilisant le Théorème I.1.4. Pour le premier point nous avons

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(\Upsilon_k^c) &= \lim_{j\to\infty} \widetilde{P}(\widetilde{\omega}_{\Lambda_i} \in \Upsilon_k^c) \\ &= \lim_{j\to\infty}\lim_{n\to\infty} \widetilde{P}_n^{\Lambda}(\widetilde{\omega}_{\Lambda_i} \in \Upsilon_k^c) \\ &\leq \lim_{j\to\infty}\lim_{n\to\infty} \widetilde{\pi}^{z,Q,q}(\widetilde{\omega}_{\Lambda_i} \in \Upsilon_k^c) = \widetilde{\pi}^{z,Q,q}(\Upsilon_k^c) \leq \epsilon.\end{aligned}$$

□

Avec la proposition précédente nous obtenons donc

$$\delta \leq 2\epsilon + \left| \int_{\widetilde{\Omega}} f d\widetilde{P} - \int_{\widetilde{\Omega}}\int_{\widetilde{\Omega}} f(\widetilde{\omega}'_{\Lambda} + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\widetilde{\omega}'_{\Lambda}) \mathbb{1}_{\Upsilon_k}(\widetilde{\omega}) \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}'_{\Lambda} + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c})}{\widetilde{Z}^{z,Q,q}_{\Lambda,R_1}(\widetilde{\omega}_{\Lambda^c})} \widetilde{\pi}^{z,Q,q}_{\Lambda}(d\widetilde{\omega}'_{\Lambda}) \widetilde{P}(d\widetilde{\omega}) \right|.$$

Proposition II.1.9. *Il existe Δ, dépendant de R_1 et k, tel que pour $\widetilde{\omega}'_{\Lambda} \in U_{R_1}$ et $\widetilde{\omega} \in \Upsilon_k \cap \mathcal{A}$, nous avons*

$$\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}'_{\Lambda} + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}'_{\Lambda} + \widetilde{\omega}_{\Delta\setminus\Lambda}) \text{ et } \widetilde{Z}^{z,Q,q}_{\Lambda,R_1}(\widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) = \widetilde{Z}^{z,Q,q}_{\Lambda,R_1}(\widetilde{\omega}_{\Delta\setminus\Lambda}).$$

Démonstration. Comme $\widetilde{\omega} \in \mathcal{A}$, il suffit de vérifier que pour une boule $(x,R,k) \in \widetilde{\omega}$ centrée assez loin, cette boule ne peut pas intersecter $L(\omega'_{\Lambda})$. Comme $\omega_{\Lambda} \in U_{R_1}$, nous avons $L(\omega'_{\Lambda}) \subseteq \Lambda \oplus B(0,R_1)$. Enfin comme $\omega \in \Upsilon_k$, nous avons pour un Δ assez grand, que nous n'expliciterons pas, les boules $(x,R,k) \in \widetilde{\omega}_{\Delta^c}$ ne peuvent pas intersecter $\Lambda \oplus B(0,R_1)$. Nous avons donc le résultat voulu. □

Avec cette proposition nous obtenons

$$\begin{aligned}\delta &\leq 2\epsilon + \left| \int_{\widetilde{\Omega}} f\widetilde{P} - \int_{\widetilde{\Omega}}\int_{\widetilde{\Omega}} f(\widetilde{\omega}'_{\Lambda} + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\widetilde{\omega}'_{\Lambda}) \mathbb{1}_{\Upsilon_k}(\widetilde{\omega}) \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}'_{\Lambda} + \widetilde{\omega}_{\Delta\setminus\Lambda})}{\widetilde{Z}^{z,Q,q}_{\Lambda,R_1}(\widetilde{\omega}_{\Delta\setminus\Lambda})} \widetilde{\pi}^{z,Q,q}_{\Lambda}(d\widetilde{\omega}'_{\Lambda}) \widetilde{P}(d\widetilde{\omega}) \right| \\ &\leq 3\epsilon + \left| \int_{\widetilde{\Omega}} f\widetilde{P} - \int_{\widetilde{\Omega}}\int_{\widetilde{\Omega}} f(\widetilde{\omega}'_{\Lambda} + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\widetilde{\omega}'_{\Lambda}) \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}'_{\Lambda} + \widetilde{\omega}_{\Delta\setminus\Lambda})}{\widetilde{Z}^{z,Q,q}_{\Lambda,R_1}(\widetilde{\omega}_{\Delta\setminus\Lambda})} \widetilde{\pi}^{z,Q,q}_{\Lambda}(d\widetilde{\omega}'_{\Lambda}) \widetilde{P}(d\widetilde{\omega}) \right| \\ &\leq 4\epsilon + \left| \int_{\widetilde{\Omega}} f d\widetilde{P}_n^{\Lambda} - \int_{\widetilde{\Omega}}\int_{\widetilde{\Omega}} f(\widetilde{\omega}'_{\Lambda} + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\widetilde{\omega}'_{\Lambda}) \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}'_{\Lambda} + \widetilde{\omega}_{\Delta\setminus\Lambda})}{\widetilde{Z}^{z,Q,q}_{\Lambda,R_1}(\widetilde{\omega}_{\Delta\setminus\Lambda})} \widetilde{\pi}^{z,Q,q}_{\Lambda}(d\widetilde{\omega}'_{\Lambda}) \widetilde{P}_n^{\Lambda}(d\widetilde{\omega}) \right|,\end{aligned}$$

où l'avant dernière inégalité est obtenue grâce à la Proposition II.1.8 et où la dernière inégalité est obtenue grâce à la convergence locale de la Proposition II.1.6 pour un n assez grand fixé à partir de maintenant.

À l'aide de la Proposition II.1.8 et du Lemme II.1.7 nous avons

$$\begin{aligned}
\delta &\leq 6\epsilon + \left| \int_{\widetilde{\Omega}} f d\widetilde{P}_n^\Lambda - \int_{\widetilde{\Omega}} \int_{\widetilde{\Omega}} \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\widetilde{\omega}'_\Lambda) f(\widetilde{\omega}'_\Lambda + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}'_\Lambda + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c})}{\widetilde{Z}^{z,Q,q}_{\Lambda,R_1}(\widetilde{\omega}_{\Lambda^c})} \widetilde{\pi}^{z,Q,q}_\Lambda(d\widetilde{\omega}'_\Lambda) \widetilde{P}_n^\Lambda(d\widetilde{\omega}) \right| \\
&= 6\epsilon + \left| \int_{\widetilde{\Omega}} f d\widetilde{P}_n^\Lambda - \int_{\widetilde{\Omega}} \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\widetilde{\omega}_\Lambda) f(\widetilde{\omega}) \widetilde{P}_n^\Lambda(d\widetilde{\omega}) \right| \\
&\leq 6\epsilon + \widetilde{P}_n^\Lambda(U^c_{R_1}) \leq 7\epsilon,
\end{aligned}$$

où l'avant dernière inégalité provient de la Proposition II.1.6.

II.1.3 FK-représentation et existence via le CRCM

Le CRCM et le WR sont des modèles très liés. En effet lorsque nous considérons un WR et que nous oublions les couleurs, alors le modèle géométrique obtenu est un CRCM. C'est intuitivement très facile à voir en volume fini puisque parmi les $q^{\text{nombre de boules}}$ colorations possibles, il y en a $q^{\text{nombre de clusters}}$ qui sont autorisées et nous voyons donc apparaître la densité du CRCM. C'est la **FK-représentation**. Elle fût introduite par Fortuin et Kasteleyn dans les années 1960 pour représenter le *modèle d'Ising* à l'aide du *Random Cluster Model*.

Avant de donner le résultat nous avons besoin d'introduire quelques notations. Nous allons considérer ici $\mathcal{F}$ en temps que la sous-tribu de $\widetilde{\mathcal{F}}$ des événements qui ne dépendent pas de la coloration. Nous parlons d'événement et de fonction *color blind*. Pour une mesure de probabilité $\widetilde{P}$ sur $\widetilde{\Omega}$, nous notons $\widetilde{P}_{cb}$ la mesure color blind associée, que l'on peut définir comme la trace de $\widetilde{P}$ sur $\mathcal{F}$. Enfin pour une configuration non colorée $\omega \in \Omega$, nous notons $C_{\widetilde{P}}(d\widetilde{\omega}|\omega)$ le noyau de coloration défini comme

$$\int f(\widetilde{\omega}) C_{\widetilde{P}}(d\widetilde{\omega}|\omega) = \mathbb{E}_{\widetilde{P}}[f(\widetilde{\omega})|\mathcal{F}].$$

Le prochain théorème énonce la FK-représentation entre le CRCM et le WR.

Théorème II.1.10. *Une mesure de probabilité $\widetilde{P}$ sur $\widetilde{\Omega}$, ayant au plus une composante connexe infinie, est un WR(z,Q,q) si et seulement si*

1. *$\widetilde{P}_{cb}$ est un CRCM$(z/q,Q,q)$,*
2. *le noyau de coloration $C_{\widetilde{P}}(d\widetilde{\omega}|\omega)$ colorie chaque composante connexe finie de manière indépendante et uniformément parmi les q couleurs. La loi de coloration de l'éventuelle composante connexe infinie n'a pas besoin d'être uniforme, mais elle doit être indépendante des autres composantes connexes.*

Remarque II.1.11. *Concernant l'hypothèse d'unicité de la composante connexe infinie d'un WR, il est important de remarquer que les arguments classiques développés dans la section I.3.2 ne sont pas valable pour le WR qui ne satisfait pas la propriété de modification locale. Pour ce modèle nous ne pouvons pas connecter deux composantes infinies, l'une rouge et l'autre bleue, qui intersectent une grande boite. Néanmoins il semble que les techniques classiques spécifiques à la dimension $d = 2$ permettent de montrer l'unicité de la composante connexe infinie dans ce cas. Néanmoins il semble possible qu'en dimension supérieure il puisse y avoir existence simultanée de plusieurs composantes infinies de couleurs différentes qui s'entrelacent. Donc il semble que l'hypothèse soit nécessaire. Cette intuition est confortée par [3] qui énonce un résultat avec le même type de condition.*

Démonstration. Commençons par montrer le sens réciproque, c'est-à-dire que si P est un CRCM$(z/q, Q, q)$ et si $C(d\widetilde{\omega}|\omega)$ est un noyau de coloration qui colorie chaque composante connexe finie de manière uniforme parmi les q couleurs, et indépendamment de la coloration des autres composantes connexes (finies et infinie), alors la mesure de probabilité

$$\widetilde{P}(d\widetilde{\omega}) = C(d\widetilde{\omega}|\omega)P(d\omega)$$

est un WR(z, Q, q). Pour cela nous allons utiliser le formalisme des équations GNZ.

$$\begin{aligned} z\int_{\widetilde{\Omega}}\int_{\widetilde{S}} &\widetilde{F}(\widetilde{X},\widetilde{\omega})\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}+\delta_{\widetilde{X}})\widetilde{m}(d\widetilde{X})\widetilde{P}(d\widetilde{\omega}) \\ &= \frac{z}{q}\int_{\Omega}\int_{S}\int_{\widetilde{\Omega}}\sum_{k\in\{1..q\}}\widetilde{F}((X,k),\widetilde{\omega})\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}+\delta_{(X,k)})C(d\widetilde{\omega}|\omega)m(dX)P(d\omega) \\ &:= \frac{z}{q}\int_{\Omega}\int_{S} G(X,\omega)m(dX)P(d\omega), \end{aligned} \tag{II.1.1}$$

où $(X, k) := \widetilde{X}$ est un point coloré et où

$$G(X,\omega) = \int_{\widetilde{\Omega}}\sum_{k\in\{1..q\}}\widetilde{F}((X,k),\widetilde{\omega})\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}+\delta_{(X,k)})C(d\widetilde{\omega}|\omega).$$

Nous avons donc en utilisant les équations GNZ

$$\begin{aligned} z\int\int_{\widetilde{S}} &\widetilde{F}(\widetilde{X},\widetilde{\omega})\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}+\delta_{\widetilde{X}})\widetilde{m}(d\widetilde{X})\widetilde{P}(d\widetilde{\omega}) \\ &= \int_{\Omega}\sum_{X\in\omega}G(X,\omega-\delta_X)q^{k(X,\omega-\delta_X)-1}P(d\omega) \\ &= \int_{\Omega}\sum_{X\in\omega}\underbrace{\sum_{k\in\{1..q\}}\int_{\widetilde{\Omega}}\widetilde{F}((X,k),\widetilde{\omega-\delta_X})\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega-\delta_X}+\delta_{(X,k)})}{q^{1-k(X,\omega-\delta_X)}}C(d\widetilde{\omega-\delta_X}|\omega-\delta_X)}P(d\omega). \end{aligned}$$

Dans la quantité sous l'accolade, nous assignons une couleur k à la boule X puis nous colorions le reste de la configuration $\omega - \delta_X$. Enfin l'indicatrice regarde si la configuration construite est autorisée. Parmi les $q^{k(X,\omega-\delta_X)}$ colorations des composantes connexes qui intersectent la boule X, il y en a qu'une qui est autorisée : celle où toutes les composantes connexes ont la couleur k. En sommant sur k et en incluant le terme $q^{k(X,\omega-\delta_X)-1}$ nous obtenons donc

$$\begin{aligned} z\int\int_{\widetilde{S}}\widetilde{F}(\widetilde{X},\widetilde{\omega})\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}+\delta_{\widetilde{X}})\widetilde{m}(d\widetilde{X})\widetilde{P}(d\widetilde{\omega}) &= \int_{\Omega}\sum_{X\in\omega}\int_{\widetilde{\Omega}}\widetilde{F}(\widetilde{X},\widetilde{\omega}-\delta_{\widetilde{X}})C(d\widetilde{\omega}|\omega)P(d\omega) \\ &= \int_{\widetilde{\Omega}}\sum_{\widetilde{X}\in\widetilde{\omega}}\widetilde{F}(\widetilde{X},\widetilde{\omega}-\delta_{\widetilde{X}})\widetilde{P}(d\widetilde{\omega}), \end{aligned}$$

prouvant donc que $\widetilde{P}$ est un WR(z, Q, q), grâce à la Proposition II.1.2.

Maintenant considérons $\widetilde{P}$ un WR(z, Q, q) ayant au plus une composante connexe infinie et montrons que sa loi color blind est un CRCM$(z/q, Q, q)$ et que sa loi de coloration correspond à celle du théorème. Pour la loi de coloration, il est très simple de voir en utilisant les équations DLR que pour tout Λ borné, la loi de coloration des composantes connexes totalement incluses dans Λ est un produit de loi uniforme (et ne dépend donc pas des autres composantes connexes). Comme la boite Λ peut être arbitrairement grande, nous obtenons le résultat. Maintenant étudions la loi color blind $\widetilde{P}_{cb}$. Pour cela considérons une fonction $\widetilde{F}$ color blind, c'est-à-dire qu'il existe F telle que

$$\widetilde{F}(\widetilde{X},\widetilde{\omega}) = F(X,\omega).$$

Alors en appliquant GNZ nous avons

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum_{X\in\omega} F(X,\omega-\delta_X)\widetilde{P}_{cb}(d\omega) &= \int_{\widetilde{\Omega}} \sum_{\widetilde{X}\in\widetilde{\omega}} F(X,\omega-\delta_X)\widetilde{P}(d\widetilde{\omega}) \\ &= z\int_{\widetilde{\Omega}}\int_{\widetilde{S}} F(X,\omega)\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}+\delta_{\widetilde{X}})\widetilde{m}(d\widetilde{X})\widetilde{P}(d\widetilde{\omega}) \\ &= \frac{z}{q}\int_\Omega\int_S \underbrace{\sum_{k=1..q}\int_{\widetilde{\Omega}} F(X,\omega)\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}+(X,k))C_{\widetilde{P}}(d\widetilde{\omega}|\omega)}\, m(dX)\widetilde{P}_{cb}(d\omega). \quad \text{(II.1.2)}\end{aligned}$$

Pour la quantité sur l'accolade, il y a deux cas :

— Toutes les composantes connexes de $\widetilde{\omega}$ intersectées par (X,k) sont finies. Donc parmi toutes les colorations de ces composantes, une seule est autorisée, et nous avons

$$\sum_{k=1..q}\int_{\widetilde{\Omega}} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}+(X,k))C_{\widetilde{P}}(d\widetilde{\omega}|\omega) = \sum_{k=1..q} q^{-k(X,\omega)} = q^{1-k(X,\omega)},$$

— La boule (X,k) intersecte la composante connexe infinie. La coloration de cette composante n'est pas uniforme mais comme nous sommons sur k, nous obtenons le même résultat, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1..q}\int_{\widetilde{\Omega}} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}+(X,k))C_{\widetilde{P}}(d\widetilde{\omega}|\omega) = q^{1-k(X,\omega)}.$$

En remplaçant dans l'équation (II.1.2) nous obtenons

$$\int_\Omega \sum_{X\in\omega} F(X,\omega-\delta_X)P(d\omega) = \frac{z}{q}\int_\Omega\int_S F(X,\omega)q^{1-k(x,\omega)}m(dX)\widetilde{P}_{cb}(d\omega),$$

et donc $\widetilde{P}_{cb}$ est un CRCM$(z/q,Q,q)$.

□

Des simulations du WR à condition de bord vide sont présentés en Figure II.1. Ces simulations sont obtenues en coloriant des simulations de CRCM présentées dans le chapitre I.

Corollaire II.1.12. *Si Q satisfait la condition d'intégrabilité $\int R^d Q(dR) < +\infty$ alors pour chaque $z > 0$ et chaque q entier il existe un WR(z,Q,q) qui est stationnaire.*

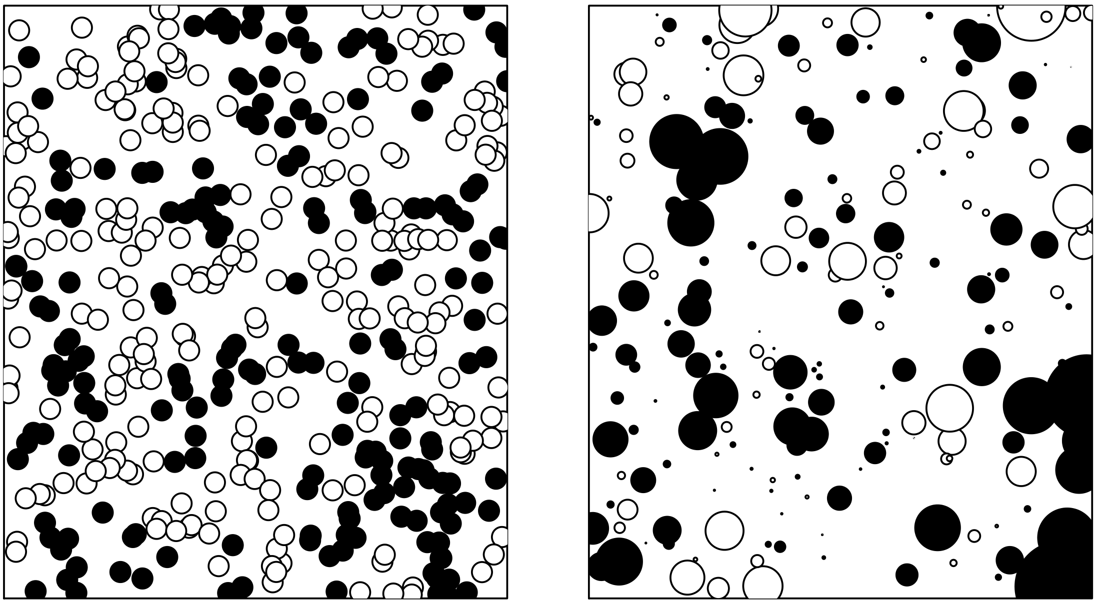

FIGURE II.1 – Simulation du WR à bord vide dans la fenêtre $[0,15]^2$, $q=2$. Rayons constants à gauche, rayons exponentielles à droite.

Démonstration. Le Théorème I.3.9 nous donne l'existence d'un CRCM$(z/q,Q,q)$ pour $q\geq 1$ entier et Q satisfaisant la condition d'intégrabilité $\int R^dQ(dR)<+\infty$. Maintenant si nous colorons toutes les composantes connexes (finies et infinie) de manière indépendante et uniformément parmi les q couleurs, alors le Théorème II.1.10 nous assure que la mesure construire $\widetilde{P}$ est un WR(z,Q,q). □

Ce corollaire montre l'intérêt d'étudier la percolation en vue d'un résultat de non-unicité du WR.

II.2 Percolation du CRCM

La percolation est l'existence d'au moins une composante connexe non bornée (nous disons aussi infinie) dans la structure aléatoire $L(\omega)$. Cette propriété macroscopique peut s'interpréter comme la conductivité ou la perméabilité des matériaux.

La théorie de la percolation fût introduite en 1957 lorsque BROADBENT et HAMMERSLEY [5] ont présenté un modèle de matériaux poreux qu'ils ont appelé *modèle de percolation*. Ils ont démontré [5, 32, 33] l'existence d'un seuil critique de percolation pour ce modèle et ont développé des techniques pour l'étude des deux régimes. Pendant plus de 20 années la conjecture du seuil de percolation par arêtes dans $\mathbb{Z}^2$ a été étudiée avant d'avoir été prouvée être égale à $1/2$ dans un célèbre article de KESTEN [35].

Pour le *modèle booléen poissonien* la percolation est bien comprise, voir par exemple le livre de MEESTER et ROY [42], et nous avons la proposition suivante.

Proposition II.2.1 ([27]). *Si Q satisfait la condition d'intégrabilité $\int R^d Q(dR) < \infty$, il existe $0 < z_c(d,Q) < \infty$ tel qu'il y a absence de percolation (respectivement percolation) $\pi^{z,Q}$-presque sûrement lorsque $z < z_c(d,Q)$ (respectivement $z > z_c(d,Q)$).*

Le but de cette section est de fournir des résultats de percolation pour le CRCM avec des paramètres aussi généraux que possibles. Les deux cas considérés sont les suivants :

— (cas 1) $q \geq 1$, $\int R^d Q(dR) < \infty$,

— (cas 2) $q < 1$, $Q([0, R_0]) = 1$ pour un certains R_0.

Pour ces deux cas l'existence du CRCM est démontrée dans le Théorème I.3.9.

La prochaine proposition répond à la question du nombre de composantes connexes infinies et est une conséquence directe du travail de la section I.3.2.

Proposition II.2.2. *Dans les deux cas, chaque CRCM(z, Q, q) **stationnaire** P vérifie*

$$P(N_{cc}^{\infty} > 1) = 0.$$

La question principale est donc de savoir s'il y a percolation pour le CRCM. Le cas particulier où $Q = \delta_0$ est trivial et il n'y a jamais percolation. Dans ce cas le CRCM est juste un processus ponctuel de Poisson. À partir de maintenant nous omettons ce cas particulier. Pour chacun des deux cas nous allons énoncer un théorème qui donne l'absence de percolation pour z petit et la percolation pour z grand. Ce phénomène est observable sur les Figures II.2 et II.3.

Théorème II.2.3. *Dans le cas 1, si Q vérifie $Q(\{0\}) = 0$ alors nous avons l'existence de deux constantes $0 < z_0(q, Q, q) \leq z_1(d, Q, q) < \infty$ telles que pour chaque CRCM(z, Q, q) P nous avons*

$$P(Perco) = 0 \text{ si } z < z_0(d, Q, q), \;\; P(Perco) = 1 \text{ si } z > z_1(d, Q, q).$$

Théorème II.2.4. *Dans le cas 2, nous avons l'existence de deux constantes $0 < z_0(q, Q, q) \leq z_1(d, Q, q) < \infty$ telles que pour chaque CRCM(z, Q, q) P nous avons*

$$P(Perco) = 0 \text{ si } z < z_0(d, Q, q), \;\; P(Perco) = 1 \text{ si } z > z_1(d, Q, q).$$

Remarque II.2.5.

— *Ce résultat est déjà connu dans le cas des rayons constants, puisque le kissing number nous donne par exemple en dimension 2*

$$0 \leq k(X, \omega) \leq 6,$$

ce qui permet de montrer le résultat grâce au Théorème I.1.4.

— *Nous pensons que l'hypothèse $Q(\{0\}) = 0$ dans le Théorème II.2.3 est purement artificielle, et que le résultat reste vrai si $Q(\{0\}) < 1$. La preuve du théorème que nous présentons dans la prochaine section est directement adaptable pour certaine loi Q ayant un petit atome en 0.*

— *Contrairement au modèle booléen ou au Random Cluster Model discret, le CRCM n'est pas stochastiquement croissant en z. Nous ne pouvons donc rien dire sur l'égalité "$z_0(q, Q, q) = z_1(d, Q, q)$". C'est une conjecture ouverte pour de nombreux modèles gibbsiens.*

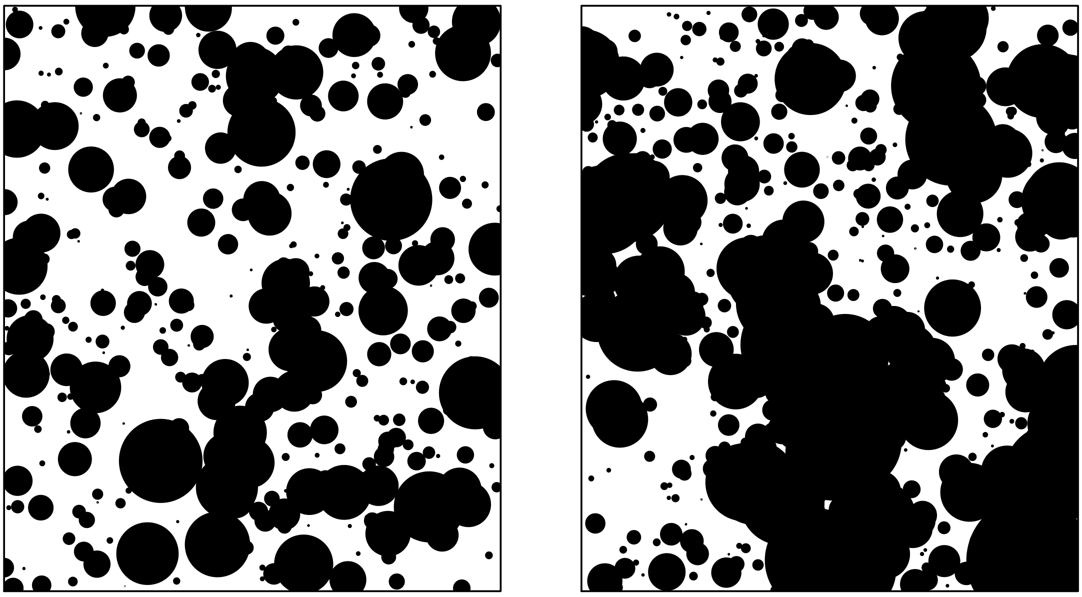

FIGURE II.2 – Simulation dans la fenêtre $\Lambda = [0, 15]^2$, $q = 2$ et rayons exponentielle de paramètre 2. Pour $z = 2$ (à gauche) l'origine n'est pas connectée au bord alors que pour $z = 3$ elle l'est.

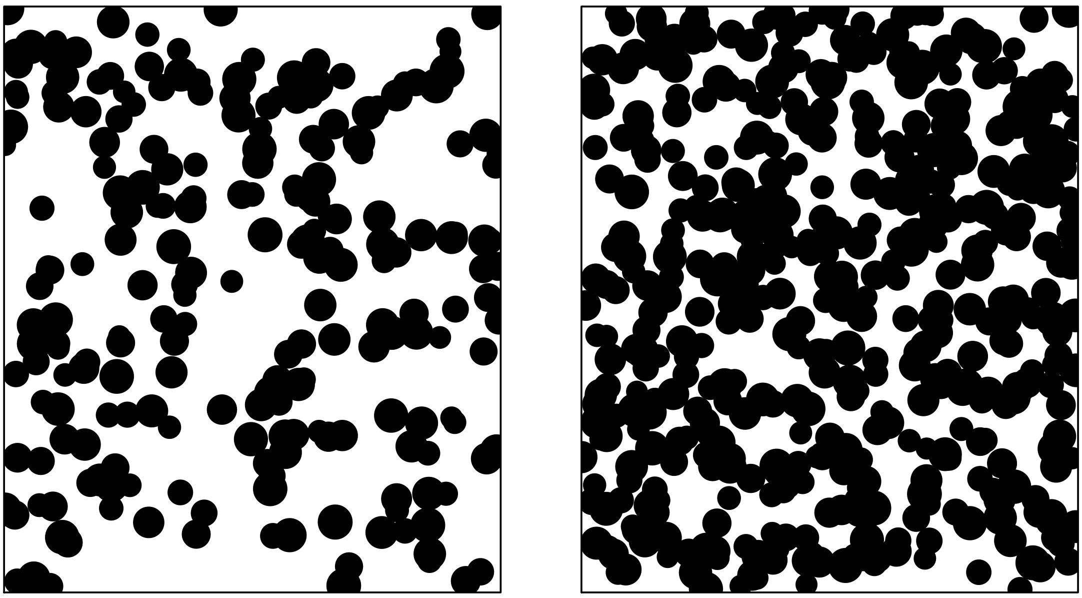

FIGURE II.3 – Simulation dans la fenêtre $\Lambda = [0, 15]^2$, $q = 0.5$ et rayons uniformes sur $[0.3, 0.5]$. Pour $z = 1$ (à gauche) l'origine n'est pas connectée au bord alors que pour $z = 2$ (à droite) elle l'est.

Pour montrer ces deux théorèmes, l'idée est de comparer le modèle avec interaction étudié à un modèle plus simple et mieux compris, tel que le *modèle booléen poissonien* ou le *modèle de percolation de Bernoulli*. Nous utiliserons des techniques de domination stochastique. La terminologie a été introduite en section I.3.2. Puisque $Perco = N_{cc}^{\infty} \geq 1$ est un événement croissant, le Théorème I.1.4 permet de montrer immédiatement l'existence de l'une des constantes de percolation.

Dans le cas général le Théorème I.1.4 ne peut pas être appliqué pour montrer l'existence de la seconde constante de percolation. Cette seconde constante de percolation est beaucoup plus compliquée à obtenir. Pour cela nous utilisons un résultat de domination stochastique discret dû à LIGGETT, SCHONMANN et STACEY [38].

Proposition II.2.6. *Soit $(\xi_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ une famille de variables à valeurs dans $\{0,1\}$ et de loi jointe ν. Soit $p \in [0,1]$ et supposons que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$*

$$\nu(\xi_x = 1|\xi_y, d_\infty(x,y) > k) \geq p \text{ presque sûrement,}$$

où d_∞ est la distance de la norme infinie et où k est un paramètre quelconque. Alors ν domine stochastiquement $\Pi^{f(p)}$, où f est une fonction déterministe dépendant de k telle que $\lim\limits_{p\to 1} f(p) = 1$, et où Π^p est la loi de Bernoulli produit sur $\mathbb{Z}^d$ de paramètre p.

$$\Pi^{f(p)} \preceq \nu.$$

Ce résultat a déjà été utilisé pour montrer la percolation de modèles gibbsiens, voir par exemple [10].

II.2.1 Preuve de la percolation dans le cas $q > 1$

Dans cette section nous nous plaçons dans le cas 1, c'est-à-dire

$$q > 1 \text{ et } \int R^d Q(dR) < +\infty.$$

Nous considérons P un CRCM(z,Q,q). Comme $k(X,\omega) \geq 0$, le Théorème I.1.4 nous donne la domination stochastique $P \preceq \pi^{zq,Q}$ et puisque l'événement Perco est croissant nous avons $P(Perco) = 0$ dés que $z < z_c(d,Q)/q$. Nous pouvons donc prendre $z_0(d,Q,q) = z_c(d,Q)/q$.

À partir de maintenant nous supposons de plus que $Q(\{0\}) = 0$. Nous allons montrer l'existence de $z_2(q,Q,q)$ en utilisant la Proposition II.2.6. L'idée est de construire une famille (ξ_x) liée à la percolation du modèle. Dans ce but nous allons étudier la probabilité de recouvrir un petit cube. Intuitivement si assez de petits cubes sont recouverts alors la configuration va percoler.

Posons $R_1 > 0$ tel que $Q_{R_1} := Q([0,R_1]) < 1/q$ et $\Lambda = [-R_1/2\sqrt{d}, R_1/2\sqrt{d}]^d$. Pour étudier la probabilité de recouvrir le cube Λ, nous utilisons l'événement $U_{\tilde{R}}$ des configurations ω tel que $\forall(x,R) \in \omega_\Lambda$, $R \leq \tilde{R}$. Cet événement a déjà été utilisé dans les chapitres I et II.

Nous définissons la variable aléatoire $\xi := \xi(\omega)$ égale à 1 si $\Lambda \subseteq L(\omega_\Lambda)$ et 0 sinon. Pour utiliser la Proposition II.2.6 nous avons besoin de montrer que

$$\inf_{\omega_{\Delta^c}} P(\xi = 1|\omega_{\Delta^c}) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 1, \tag{II.2.1}$$

où Δ est un ensemble borné contenant Λ et qui sera explicité par la suite. Par construction nous avons

$$P(\xi = 1|\omega_{\Delta^c}) \geq P(U^c_{R_1}|\omega_{\Delta^c}).$$

Le but est donc maintenant de trouver une bonne borne pour la probabilité $P(U_{R_1}|\omega_{\Delta^c})$. Pour contrôler la quantité N^{Λ}_{cc}, nous avons besoin d'introduire une "zone de protection", d'où l'introduction de Δ, et un bon événement B_z dépendant de la configuration sur $\Delta\setminus\Lambda$. Cet événement sera explicité par la suite. Nous avons

$$\begin{aligned} P(U_{R_1}|\omega_{\Delta^c}) &= P(U_{R_1} \cap B_z|\omega_{\Delta^c}) + P(U_{R_1} \cap B^c_z|\omega_{\Delta^c}) \\ &\leq \underbrace{P^z(B_z|\omega_{\Delta^c})}_{(a)} + \underbrace{P^z(U_{R_1} \cap B^c_z|\omega_{\Delta^c})}_{(b)}. \end{aligned} \tag{II.2.2}$$

Commençons par étudier (b). Grâce à l'équation DLR(Λ), nous avons

$$\begin{aligned} &P(U_{R_1} \cap B^c_z|\omega_{\Delta^c}) \\ &= \int\int \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\omega''_\Lambda)\mathbb{1}_{B^c_z}(\omega'_{\Delta\setminus\Lambda}) \frac{q^{N^{\Lambda}_{cc}(\omega''_\Lambda+\omega'_{\Delta\setminus\Lambda}+\omega_{\Delta^c})}}{Z^{z,Q,q}_\Lambda(\omega'_{\Delta\setminus\Lambda}+\omega_{\Delta^c})}\pi^{z,Q}_\Lambda(d\omega''_\Lambda)P(d\omega'_\Delta|\omega_{\Delta^c}) \\ &\leq \int\int \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\omega''_\Lambda)\mathbb{1}_{B^c_z}(\omega'_{\Delta\setminus\Lambda}) \frac{q^{\omega''_\Lambda(\Lambda)}}{Z^{z,Q,q}_\Lambda(\omega'_{\Delta\setminus\Lambda}+\omega_{\Delta^c})}\pi^{z,Q}_\Lambda(d\omega''_\Lambda)P(d\omega'_\Delta|\omega_{\Delta^c}) \\ &= \int \mathbb{1}_{U_{R_1}}(\omega''_\Lambda)q^{\omega''_\Lambda(\Lambda)}\pi^{z,Q}_\Lambda(d\omega''_\Lambda)\int \frac{\mathbb{1}_{B^c_z}(\omega'_{\Delta\setminus\Lambda})}{Z^{z,Q,q}_\Lambda(\omega'_{\Delta\setminus\Lambda}+\omega_{\Delta^c})}P(d\omega'_\Delta|\omega_{\Delta^c}) \\ &\leq e^{-z\mathcal{L}^d(\Lambda)(1-qQ_{R_1})}\int \frac{\mathbb{1}_{B^c_z}(\omega'_{\Delta\setminus\Lambda})}{Z^{z,Q,q}_\Lambda(\omega'_{\Delta\setminus\Lambda}+\omega_{\Delta^c})}P(d\omega'_\Delta|\omega_{\Delta^c}), \end{aligned} \tag{II.2.3}$$

où la première inégalité provient de l'inégalité $N^{\Lambda}_{cc}(\omega) \leq \omega(\Lambda)$ prouvée dans la Proposition I.1.17. Nous pouvons comprendre à partir de l'équation (II.2.3) la condition $Q_{R_1} < 1/q$.

Maintenant nous devons donner une définition précise de Δ et B_z. Pour cela nous introduisons $R_2 > 0$ tel que $Q_{R_2} := Q([0, R_2]) > qQ_{R_1}$, ce qui est possible par le choix de R_1. Nous posons $\Delta := [-1 - R_2 - R_1/2\sqrt{d}, 1 + R_2 + R_1/2\sqrt{d}]$ et nous prenons ϵ tel que $0 < \epsilon < \mathcal{L}^d(\Lambda)(Q_{R_2} - qQ_{R_1})/\ln q$.

Finalement nous prenons $r > 0$ tel que $Q_r := Q([0, r]) < \frac{\epsilon}{qe\mathcal{L}^d(\Delta\setminus\Lambda)}$. Maintenant nous pouvons définir l'événement B_z comme l'événement des configurations qui ont beaucoup de petites boules centrées dans $\Delta \setminus \Lambda$, c'est-à-dire

$$B_z = \{\omega \in \Omega | \#\{(x, R) \in \omega_{\Delta\setminus\Lambda}, R \leq r\} \geq \lceil \epsilon z \rceil\},$$

où $\lceil . \rceil$ est la partie entière supérieure. Le prochain Lemme II.2.7 est une modification de la Proposition I.1.17 adaptée à l'événement B_z.

Lemme II.2.7. *Pour $\omega \in U_{R_2} \cap B^c_z$ nous avons pour une certaine constante K*

$$N^{\Lambda}_{cc}(\omega) \geq K - \lceil \epsilon z \rceil.$$

Pour obtenir une majoration dans l'équation (II.2.3) nous considérons la probabilité conditionnelle

$$
\begin{aligned}
&P(U_{R_2} \cap B_z^c | \omega_{\Delta^c}) \\
&= \int\int \mathbb{1}_{U_{R_2}}(\omega''_\Lambda)\mathbb{1}_{B_z^c}(\omega'_{\Delta\setminus\Lambda}) \frac{q^{N^\Lambda_{cc}(\omega''_\Lambda + \omega'_{\Delta\setminus\Lambda} + \omega_{\Delta^c})}}{Z^{z,Q,q}_\Lambda(\omega'_{\Delta\setminus\Lambda} + \omega_{\Delta^c})} \pi^{z,Q}_\Lambda(d\omega''_\Lambda) P(d\omega'_\Delta | \omega_{\Delta^c}) \\
&\geq \int\int \mathbb{1}_{U_{R_2}}(\omega''_\Lambda)\mathbb{1}_{B_z^c}(\omega'_{\Delta\setminus\Lambda}) \frac{q^{K-\lceil \epsilon z\rceil}}{Z^{z,Q,q}_\Lambda(\omega'_{\Delta\setminus\Lambda} + \omega_{\Delta^c})} \pi^{z,Q}_\Lambda(d\omega''_\Lambda) P(d\omega'_\Delta | \omega_{\Delta^c}) \\
&= q^{K-\lceil \epsilon z\rceil} \int \mathbb{1}_{U_{R_2}}(\omega''_\Lambda) \pi^{z,Q}_\Lambda(d\omega''_\Lambda) \int \frac{\mathbb{1}_{B_z^c}(\omega'_{\Delta\setminus\Lambda})}{Z^{z,Q,q}_\Lambda(\omega'_{\Delta\setminus\Lambda} + \omega_{\Delta^c})} P(d\omega'_\Delta | \omega_{\Delta^c}) \\
&= q^{K-\lceil \epsilon z\rceil} e^{-z\mathcal{L}^d(\Lambda)(1-Q_{R_2})} \int \frac{\mathbb{1}_{B_z^c}(\omega'_{\Delta\setminus\Lambda})}{Z^{z,Q,q}_\Lambda(\omega'_{\Delta\setminus\Lambda} + \omega_{\Delta^c})} P(d\omega'_\Delta | \omega_{\Delta^c}). \qquad \text{(II.2.4)}
\end{aligned}
$$

À partir des inégalités (II.2.3) et (II.2.4) nous obtenons

$$
\begin{aligned}
P^z(U_{R_1} \cap B_z^c | \omega_{\Delta^c}) &\leq q^{\lceil \epsilon z\rceil - K} e^{-z\mathcal{L}^d(\Lambda)(Q_{R_2} - qQ_{R_1})} \\
&\leq q^{-K+1} e^{-z\mathcal{L}^d(\Lambda)(Q_{R_2} - qQ_{R_1})} e^{\epsilon z \ln q}. \qquad \text{(II.2.5)}
\end{aligned}
$$

Cette majoration ne dépend plus de la condition extérieure ω_{Λ^c} et par choix de R_1, R_2 et ϵ nous avons

$$
\mathcal{L}^d(\Lambda)(Q_{R_2} - qQ_{R_1}) - \epsilon \ln q > 0,
$$

et donc la partie droite de l'équation (II.2.5) décroît vers 0 quand z tend vers l'infini.

Nous devons maintenant contrôler la quantité (a) dans l'équation (II.2.2). Par la Proposition I.2.6 la mesure de probabilité $\pi^{qz,Q}_\Delta$ domine stochastiquement $P(.|\omega_{\Delta^c})$, et comme l'événement B_z est croissant nous avons

$$
\begin{aligned}
P(B_z|\omega_{\Delta^c}) &\leq \pi^{qz,Q}_\Delta(B_z) \\
&= e^{-zq\mathcal{L}^d(\Delta\setminus\Lambda)Q_r} \sum_{k\geq\lceil \epsilon z\rceil} \frac{(zq\mathcal{L}^d(\Delta\setminus\Lambda)Q_r)^k}{k!} \\
&\leq \frac{(zq\mathcal{L}^d(\Delta\setminus\Lambda)Q_r)^{\lceil \epsilon z\rceil}}{\lceil \epsilon z\rceil !} \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{\exp\left(\lceil \epsilon z\rceil \ln\left(\frac{zq\mathcal{L}^d(\Delta\setminus\Lambda)Q_r e}{\lceil \epsilon z\rceil}\right)\right)}{\sqrt{2\pi\lceil \epsilon z\rceil}}, \qquad \text{(II.2.6)}
\end{aligned}
$$

où la dernière ligne provient de l'inégalité de Lagrange et de la formule de Stirling. Par le choix des paramètres nous avons

$$
\frac{zq|\Delta\setminus\Lambda|Q_r e}{\lceil \epsilon z\rceil} \leq \frac{zq|\Delta\setminus\Lambda|Q_r e}{\epsilon z} < 1,
$$

donc la partie droite de l'équation (II.2.6) converge vers 0 quand z tend vers l'infini. Comme les majorations (II.2.5) et (II.2.6) ne dépendent pas de la configuration extérieure ω_{Δ^c}, la convergence (II.2.1) est prouvée.

Remarque II.2.8. *Il est important de remarquer que les bornes obtenues ne dépendent de Λ et Δ que par leurs volumes. Donc les même bornes seront vérifiées pour les variables ξ_x qui seront définies par translation de la variable ξ.*

Nous sommes maintenant en mesure de construire notre famille (ξ_x). Pour chaque $x \in \mathbb{Z}^d$ nous associons le petit cube $\Lambda_x = \frac{R_1}{\sqrt{d}} x \oplus \Lambda$ et le grand cube $\Delta_x = \frac{R_1}{\sqrt{d}} x \oplus \Delta$. Nous définissons ξ_x comme nous avons défini $\xi := \xi_0$, c'est-à-dire $\xi_x(\omega)$ égale à 1 si $\Lambda_x \subseteq L(\omega_{\Lambda_x})$, et 0 sinon. Nous considérons k tel que si $d_\infty(x,y) > k$, alors $\Delta_x \cap \Delta_y = \emptyset$. Il suffit de prendre par exemple $k = 2 + \frac{2\sqrt{d}R_2}{R_1} + \frac{2\sqrt{d}}{R_1}$. Pour chaque x nous avons

$$\begin{aligned} P(\xi_x = 1 | \xi_y,\ d_\infty(x,y) > k) &= \mathbb{E}_P[P(\xi_x = 1 | \mathcal{F}_{\Delta_x^c}) | \xi_y,\ d_\infty(x,y) > k] \\ &\geq \inf_{\omega_{\Delta_x^c}} P(\xi_x = 1 | \omega_{\Delta_x^c}). \end{aligned} \tag{II.2.7}$$

Mais en utilisant la convergence (II.2.1) qui est uniforme en x, nous avons pour chaque $p \in]0,1[$ l'existence de $z_1(p)$ tel que pour tout $z > z_1(p)$ et tout x

$$P(\xi_x = 1 | \xi_y,\ d_\infty(x,y) > k) \geq p,\ P\text{-presque sûrement.}$$

En utilisant la Proposition II.2.6, La loi des (ξ_x) domine stochastiquement $\Pi^{f(p)}$. Donc pour p plus grand qu'un certain p_0 nous avons $f(p)$ plus grand que le seuil de percolation par site dans $\mathbb{Z}^d$. Or il est clair que que deux sommets voisins pour lesquels $\xi = 1$ vont correspondre à deux boites voisines totalement recouvertes et donc connectées. Donc finalement en prenant $z_1(d,Q,q) = z_1(p_0)$, nous avons percolation dés que z est plus grand que $z_1(d,Q,q)$.

II.2.2 Preuve de la percolation dans le cas $q < 1$

L'idée de cette preuve est la même que pour le théorème précédent, mais les techniques utilisées vont être différentes.

Dans cette section nous sommes dans le cas 2, c'est-à-dire $q < 1$ et rayons bornés par une constante R_0. Soit P un CRCM(z,Q,q). Sans perdre en généralité nous faisons la preuve dans le cas $R_0 = 1$. Le cas général s'obtient alors par changement d'échelle.

Premièrement comme $k(X,\omega) \geq 0$ nous avons la domination stochastique $\pi^{qz,Q} \preceq P$, et puisque l'événement Perco est croissant nous avons

$$P(Perco) = 1$$

pour $z > \frac{z_c(d,Q)}{q}$. Nous pouvons donc choisir $z_1(d,Q,q) = \frac{z_c(d,Q)}{q}$.

Pour trouver l'autre constante de percolation nous allons construire une famille (ξ_x) pour appliquer la Proposition II.2.6. Nous allons montrer que pour z petit il y a beaucoup de cases qui sont vides, et donc la percolation ne pourra pas être possible.

Soit $\Lambda = [-0.5, 0.5]^d$ et $\Delta = [-8,8]^d$. Nous posons $\xi = \xi(\omega)$ égal à 1 lorsque $L(\omega) \cap \Lambda = \emptyset$ et 0 sinon. La variable ξ ne dépend que de la configuration ω_Δ.

Nous voulons montrer que

$$\inf_{\omega_{\Delta^c}} P^z(\xi = 1 | \omega_{\Delta^c}) \underset{z \to 0}{\longrightarrow} 1. \tag{II.2.8}$$

Pour une configuration ω, nous posons $N_\xi(\omega)$ le nombre de composantes connexes de $L(\omega_\Delta)$ qui intersectent Λ. Les variables aléatoires ξ et N_ξ sont fortement liées puisque $\xi = 1$ si et seulement si $N_\xi = 0$.

Lemme II.2.9. *Il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\int_\Omega N_\xi(\omega) P(d\omega_\Delta | \omega_{\Delta^c}) \leq z\mathcal{L}^d(\Delta) q^{1-\alpha} \text{ } P\text{-presque sûrement.}$$

Démonstration. Nous allons utiliser les équations GNZ satisfaites par la mesure de probabilité $P^z(.|\omega_{\Delta^c})$, voir Proposition I.2.7. Dans ce but nous définissons une fonction F telle que $F((x,R),\omega)$ est égale à 1 si les conditions suivantes sont satisfaites, et 0 dans le cas contraire.

1. $x \in \Delta$.
2. La composante connexe de $B(x,R)$ dans $L(\omega_\Delta + \delta_{(x,R)})$ intersecte Λ.
3. $B(x,R)$ est l'une des boules de sa composante connexe dans $L(\omega_\Delta + \delta_{(x,R)})$ qui minimise la quantité $k((x,R),\omega)$.

Par l'équation GNZ nous avons

$$\int_\Omega \sum_{(x,R)\in\omega_\Delta} F((x,R),\omega - \delta_{(x,R)}) q^{k((x,R),\omega-\delta_{(x,R)})-1} P(d\omega_\Delta|\omega_{\Delta^c})$$
$$= z \int_\Omega \int_{\Delta\times\mathbb{R}^+} F((x,R),\omega) m(dx,dR) P(d\omega_\Delta|\omega_{\Delta^c}) \leq z\mathcal{L}^d(\Delta), \qquad \text{(II.2.9)}$$

où nous rappelons que $m(dx,dR) = \mathcal{L}^d(dx) \otimes Q(dR)$.

Nous cherchons maintenant une borne supérieure pour la quantité $k((x,R),\omega - \delta_{(x,R)})$ lorsque $F((x,R),\omega - \delta_{(x,R)}) = 1$. Pour cela considérons une boule $B(x,R)$ et comptons le nombre maximum de boules disjointes de rayon plus grand que $R/2$ et intersectant $B(x,R)$. Par un argument de volume, cette quantité est plus petite que $\alpha := 4^d$. Cette borne n'est pas optimale mais elle a la bonne propriété de ne pas dépendre de R. Montrons par l'absurde que dans le membre de gauche de l'équation (II.2.9), lorsque F est égale à 1 nous avons

$$k((x,R),\omega - \delta_{(x,R)}) \leq \alpha.$$

Commençons donc par supposer que dans $L(\omega_\Delta)$ il y a une composante connexe $L(\mathcal{C})$ (avec cette notation $\mathcal{C}$ est une sous configuration de ω_Δ) intersectant Λ et telle que $\min_{(x,R)\in\mathcal{C}} k((x,R),\omega - \delta_{(x,R)}) \geq \alpha$.

Soit $(x_1,R_1) \in \mathcal{C}$ tel que $B(x_1,R_1)$ intersecte Λ. Une telle boule existe par hypothèse sur $\mathcal{C}$ et nous avons $R_1 \leq 1$. La distance entre x_1 et Λ est inférieure à 1.

Comme $k((x_1,R_1),\omega - \delta_{(x_1,R_1)}) \geq \alpha$, la boule $B(x_1,R_1)$ est connectée à au moins une boule avec un rayon plus petit que $R_1/2 \leq 1/2$. Notons $B(x_2,R_2)$ cette boule. La distance entre x_2 et Λ est plus petite que $5/2$, ce qui signifie que $(x_2,R_2) \in \mathcal{C}$. Par le même argument nous pouvons construire une suite $(x_n,R_n)_n$ avec $R_n \leq 2^{-n+1}$ et telle que la distance entre x_n et Λ est majorée par 4. Cela signifie que chaque (x_n,R_n) est dans $\mathcal{C}$. Or cela est impossible car $\mathcal{C}$ est une configuration finie.

Donc dans le membre de gauche de l'équation (II.2.9), chaque (x,R) tel que F est égale à 1 satisfait $k((x,R),\omega - \delta_{(x,R)}) \leq \alpha$. Avec cette nouvelle information et comme $q < 1$, l'équation (II.2.9) devient

$$\int \sum_{(x,R)\in\omega_\Delta} F((x,R),\omega - \delta_{(x,R)}) P^z(d\omega_\Delta|\omega_{\Delta^c}) \leq z\mathcal{L}^d(\Delta) q^{1-\alpha}.$$

Mais $\sum_{(x,R)\in\omega_\Delta} F((x,R),\omega - \delta_{(x,R)})$ majore $N_\xi(\omega)$. En effet dans une même composante connexe il peut y avoir plusieurs boules qui minimisent la quantité k. Nous obtenons ainsi le résultat voulu. □

En utilisant la Proposition II.2.9 nous avons

$$\begin{aligned} P(\xi = 0|\omega_{\Delta^c}) = P(N_\xi > 0|\omega_{\Delta^c}) &= P(N_\xi > 0.5|\omega_{\Delta^c}) \\ &\leq 2z\mathcal{L}^d(\Delta)q^{1-\alpha}, \end{aligned} \tag{II.2.10}$$

où la dernière inégalité provient de l'inégalité de Markov conditionnelle. Cette majoration ne dépend pas de la configuration extérieure ω_{Δ^c} et donc la convergence uniforme (II.2.8) est démontrée.

Remarque II.2.10. *Comme dans la section précédente, La borne obtenue dépend de Δ seulement par son volume. Donc quand nous allons définir les ξ_x par translation, la borne sera uniforme en x.*

Pour chaque $x \in \mathbb{Z}^d$, nous définissons $\Lambda_x := x \oplus \Lambda$ et $\Delta_x = x \oplus \Delta$. Nous définissons ξ_x par translation de la variable $\xi = \xi_0$, c'est-à-dire que $\xi_x = 1$ si $L(\omega) \cap \Lambda_x$ et 0 sinon. Nous prenons $k = 17$. Nous avons

$$\begin{aligned} P(\xi_x = 1|\xi_y, d_\infty(x,y) > k) &= \mathbb{E}_P[P(\xi_x = 1|\mathcal{F}_{\Delta_x^c})|\xi_y, d_\infty(x,y) > k] \\ &\geq \inf_{\omega_{\Delta^c}} P(\xi = 1|\omega_{\Delta^c}), \end{aligned} \tag{II.2.11}$$

et donc en utilisant la convergence (II.2.8), nous avons pour chaque $p \in]0,1[$ l'existence de $z_0(p)$ tel que pour chaque $z < z_0(p)$ et chaque x,

$$P(\xi_x = 1|\xi_y, d_\infty(x,y) > k) \geq p, \ P\text{-presque sûrement.}$$

En utilisant la Proposition II.2.6, $\Pi^{1-f(p)}$ domine stochastiquement la loi de $(1-\xi_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$. Et il existe p_0 tel que pour p supérieur à p_0, $1 - f(p)$ est inférieur au seuil de percolation par site dans $\mathbb{Z}^d$.

ξ_x est égal à 0 si la case Λ_x n'est pas vide. Lorsque z est petit le "graphe" des cases non vides ne percole pas et donc la configuration elle aussi ne percole pas.

Donc pour $z_0(d,Q,q) = z_0(p_0)$, nous avons que P-presque sûrement il y a absence de percolation pour $z < z_0(d,Q,q)$.

II.2.3 Transition de phase pour le WR

Le WR est le premier modèle continu pour lequel la transition de phase a été démontrée. Ce résultat a été démontré en 1971 dans [48] puis redémontré dans les années 1990 dans [7, 21]. Ces articles traitent le cas des rayons constants. Dans les deux dernières références, la transition de phase est démontrée en montrant une propriété de percolation en volume fini satisfaite pour le CRCM et en passant à la limite. De plus ces articles utilisent un argument de discrétisation basé sur la bornitude des rayons. Ce type d'argument ne peut pas être généralisé aux rayons non bornés.

Le prochain théorème simplifie la preuve de ces articles en coloriant directement le CRCM en volume infini. En utilisant le résultat de percolation, Théorème II.2.3, valable pour des rayons non bornés, il permet aussi de généraliser le résultat pour les rayons non bornés.

Théorème II.2.11. *Soient q un entier plus grand que 2 et Q satisfaisant la condition d'intégrabilité $\int R^d Q(dR) < +\infty$ et tel que $Q(\{0\}) = 0$. Alors pour z assez grand, il existe q WR(z, Q, q) distincts.*

Démonstration. Soit P un CRCM$(z/q, Q, q)$. Pour z assez grand (plus grand que $q \times z_1(d, Q, q)$), P percole presque sûrement. Maintenant nous colorions chaque composante connexe finie indépendamment et uniformément parmi les q couleurs, et nous assignons la couleur 1 à la composante connexe infinie. Alors la mesure construite $\widetilde{P}_1$ est un WR(z, Q, q), voir le Théorème II.1.10. Nous pouvons de même construire $\widetilde{P}_2, \dots, \widetilde{P}_q$ en coloriant la composante connexe infinie de la couleur $2, \dots, q$. Ces mesures sont toutes distinctes puisque la composante connexe infinie n'a pas la même couleur. Nous avons ainsi construit q WR distincts. $\square$

Chapitre III

Le cas extrême des rayons non intégrables

Résumé du chapitre

Nous allons dans ce chapitre nous intéresser au cas extrême des rayons non intégrables, c'est-à-dire $\int R^d Q(dR) = +\infty$. Dans ce cas l'existence du CRCM est trivialement vérifiée puisque le processus ponctuel de Poisson de loi $\pi^{z,Q}$ est solution des équations DLR. Cette solution recouvre l'espace avec une composante connexe géante. Le premier résultat de ce chapitre est le résultat de non-unicité suivant.

Pour q entier strictement plus grand que 1, nous avons l'existence en petite activité d'un CRCM stationnaire différent du *modèle booléen*.

Pour prouver ce résultat nous utilisons la FK-représentation qui permet de se ramener à l'interaction plus simple du WR. L'objectif est donc de construire un WR polychromatique. Notre outil principal est une discrimination utilisant l'entropie spécifique.

Nous conjecturons que l'unicité est retrouvée pour de grandes activités. Nous donnons une preuve heuristique de cette conjecture et ensuite prouvons en dimension 1 le résultat plus faible suivant.

En dimension 1 et pour des activités assez grandes, le CRCM à volume fini et à condition de bord vide converge vers le *modèle booléen poissonien*.

Comme la limite de cette suite est différente du *modèle booléen* en petite activité, les deux résultats de ce chapitre prouve une transition de phase en dimension 1.

Sommaire

III.1 Présentation du problème **76**
III.2 Non unicité du CRCM en petite activité **77**
III.2.1 Théorème de non-unicité via le WR 79
III.2.2 Construction d'une phase non monochromatique 79
III.2.3 Construction d'une phase polychromatique satisfaisant DLR . . 83
III.3 Conjecture d'unicité en grande activité **86**
III.3.1 Preuve heuristique de la conjecture 87
III.3.2 Conjecture : un premier pas vers une preuve rigoureuse dans le cas $d = 1$ 89
III.3.3 Perspectives 94

III.1 Présentation du problème

Dans le chapitre I nous avons énoncé et démontré le Théorème I.3.9 qui prouve l'existence d'un CRCM(z, Q, q) stationnaire. Dans ce théorème la principale hypothèse est l'intégrabilité des rayons $\int R^d Q(dR) < \infty$, qui permet de localiser l'interaction en montrant que les boules centrées trop loin ne peuvent pas changer la "connectivité" de la configuration. Pour cela nous avons utilisé une propriété similaire pour le *modèle booléen* $\pi^{z,Q}$, ainsi qu'une domination stochastique.

Quand les rayons ne satisfont pas cette condition d'intégrabilité, c'est-à-dire quand $\int R^d Q(dR) = \infty$, nous disons que nous sommes dans le cas extrême. Dans ce cas les propriétés du *modèle booléen* changent drastiquement. En particulier il recouvre tout l'espace.

Lemme III.1.1. *Dans le cas extrême, pour tout $z > 0$ et tout Λ borné nous avons*

$$\Lambda \subseteq L(\omega_{\Lambda^c}) \quad \pi^{z,Q}\text{-preque sûrement.}$$

Démonstration. Nous allons faire la preuve dans le cas spécial $\Lambda = B(0, 1)$. Le cas général s'obtient alors par changement d'échelle et stationnarité. Pour que $L(\omega_{\Lambda^c})$ recouvre Λ, il suffit que la configuration contienne un point (x, R) tel que $R > |x| + 1$. Nous allons faire un thinning du processus ponctuel de Poisson $\pi^{z,Q}$ pour ne garder que ces bons points. Nous effaçons les marques de ce processus. Nous obtenons un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}^d$, de mesure d'intensité

$$\mu(dx) = zQ(]|x| + 1, \infty[)dx,$$

et nous avons

$$\mu(\mathbb{R}^d) \geq C \int_2^{\infty} r^{d-1} Q(]r, \infty[)dr,$$

où C est une constante positive qui dépend de z et d. Comme nous sommes dans le cas extrême, le membre de droite de l'inégalité vaut $+\infty$. Donc $\pi^{z,Q}$-presque sûrement, la configuration ω_{Λ^c} contient une infinité de points qui recouvre Λ. Le résultat est donc démontré.

□

Ainsi dans le cas extrême la question de l'existence du CRCM est très rapidement traitée puisque comme le montre la prochaine proposition, le *modèle booléen* $\pi^{z,Q}$ satisfait les équations DLR définissant le CRCM.

Proposition III.1.2. *Pour $z > 0$ et Q satisfaisant $\int R^d Q(dR) = \infty$ nous avons que $\pi^{z,Q}$ est un CRCM(z,Q,q) pour tout $q > 0$.*

Démonstration. Dans le cas extrême grâce au Lemme III.1.1 nous avons $N_{cc}^{\Lambda}(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c}) = 0$ et $Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c}) = 1$ $\pi^{z,Q}$-presque sûrement. Ainsi

$$\int_\Omega \int_\Omega f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c}) \frac{q^{N_{cc}^{\Lambda}(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c})}}{Z_\Lambda^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda^c})} \pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega'_\Lambda) \pi^{z,Q}(d\omega) = \int_\Omega \int_\Omega f(\omega'_\Lambda + \omega_{\Lambda^c}) \pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega'_\Lambda) \pi^{z,Q}(d\omega)$$
$$= \int_\Omega f(\omega) \pi^{z,Q}(d\omega),$$

et les équations DLR sont ainsi vérifiées. □

La question est donc de savoir si cette solution est unique ou s'il en existe d'autres. À partir de maintenant nous nous plaçons dans le cas $q > 1$. Il y a ainsi une compétition entre deux quantités. D'un côté la densité du type $q^{N_{cc}^{\Lambda}}$ qui favorise à avoir plusieurs composantes connexes et donc du vide entre ces composantes. De l'autre côté nous avons le processus ponctuel de Poisson $\pi^{z,Q}$ qui veut créer une unique composante connexe qui recouvre tout. Ceci peut être interprété comme une compétition énergie-entropie.

Le prochain théorème montre que dans le cas de q entier et z assez petit, cette compétition est remportée par l'énergie et nous avons existence d'une autre phase.

Théorème III.1.3. *Soit q un entier strictement plus grand que 1. Soit Q satisfaisant $\int R^d Q(dR) = \infty$. Alors il existe $\bar{z} := \bar{z}(d,Q,q)$ tel que pour tout $z < \bar{z}$, il existe un CRCM(z,Q,q) stationnaire différent de la solution triviale $\pi^{z,Q}$.*

Ce résultat devrait aussi être vrai pour q non entier, mais notre preuve utilise fortement la FK-représentation qui n'est vraie que pour q entier.

La seconde question concerne le comportement lorsque z est grand. Est-ce que nous obtenons l'unicité du CRCM ou alors existe-il toujours plusieurs phases ? La preuve du Théorème III.1.3 ne permet pas de répondre puisque dans cette preuve la constante $\bar{z}$ est construite de manière artificielle. Néanmoins en nous appuyant sur les simulations de la Figure III.1, nous pensons que pour z grand la compétition énergie-entropie est remportée par l'entropie du *modèle booléen* $\pi^{z,Q}$ et qu'il existe une unique phase stationnaire. Cette intuition est formalisée dans la prochaine conjecture.

Conjecture. *Soit $q > 1$. Si $\int R^d Q(dR) = +\infty$, alors il existe $\bar{z}' < \infty$ tel que pour tout $z > \bar{z}'$ il existe un unique CRCM(z,Q,q) stationnaire, qui est $\pi^{z,Q}$.*

III.2 Non unicité du CRCM en petite activité

Nous démontrons dans cette section le Théorème III.1.3 de non unicité du CRCM en petite activité dans le cas extrême. Dans la preuve du Théorème I.3.9, l'hypothèse d'intégrabilité des rayons $\int R^d Q(dR) < \infty$ a été utilisée à la fin de la preuve pour contrôler

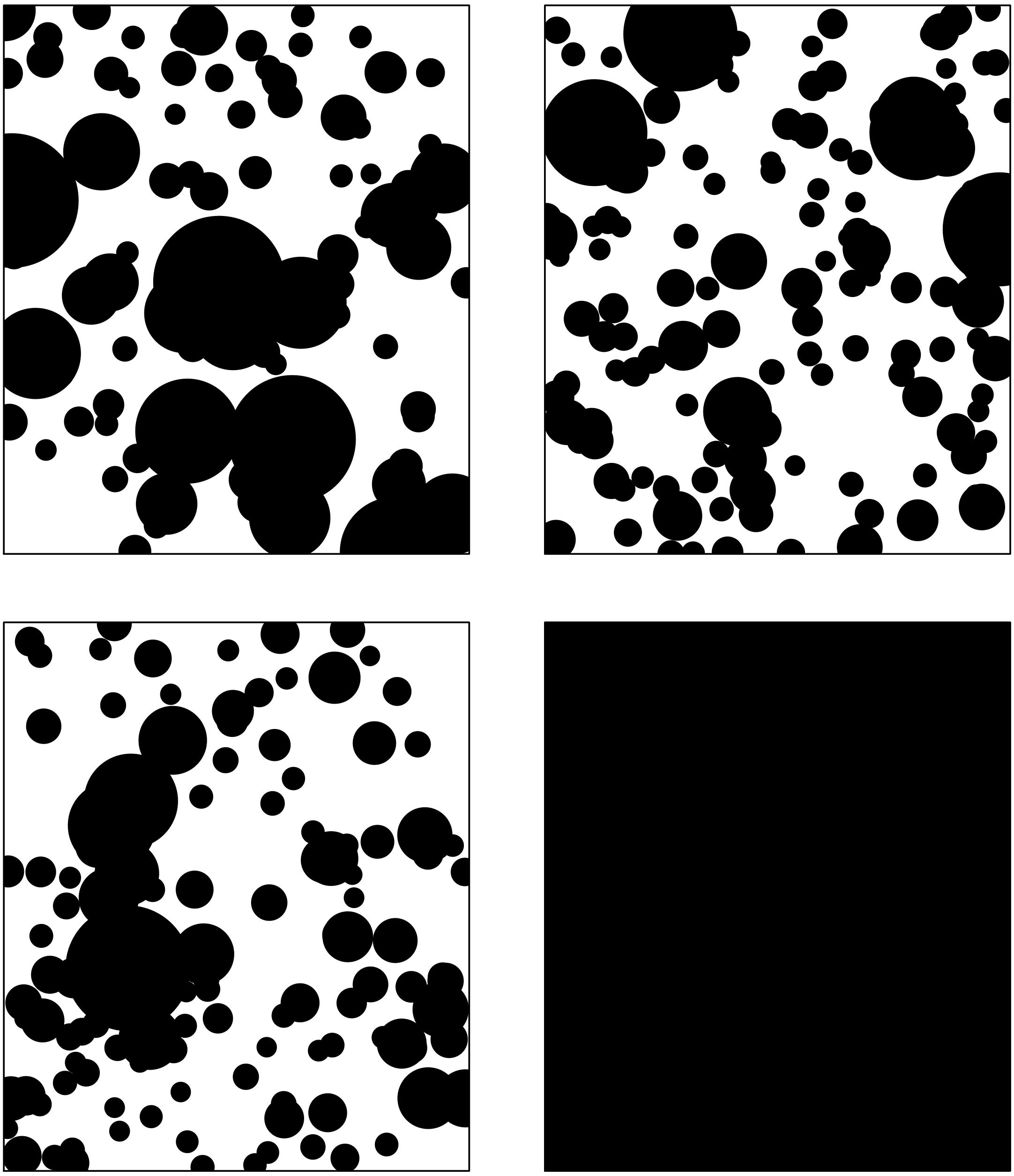

FIGURE III.1 – Simulation sur une fenêtre $[0, 50]^2$ d'un CRCM pour $q = 2$. La loi des rayons Q est l'inverse d'une uniforme sur $[0, 1]$. De gauche à droite et de haut en bas nous avons $z = 0.05$, $z = 0.06$, $z = 0.065$ et $z = 0.066$.

uniformément la probabilité des événements $A_{i,j}$ qui assurait que les boules "trop" loin ne pouvaient pas intersecter les boules "proche" de Λ. Cette partie était cruciale dans la preuve pour localiser la fonction N_{cc}^{Λ}. Nous n'avons pas été en mesure d'appliquer le même type d'argument dans le cas extrême. En effet lorsque $\int R^d Q(dR) = +\infty$, l'interaction est beaucoup trop forte pour appliquer ce type de technique. Nous avons donc décidé d'utiliser la FK-représentation avec le WR. C'est pour cette raison que q a besoin d'être entier. En effet l'interaction de ce modèle est beaucoup plus facile à étudier. Par exemple dans le cas des rayons bornés l'interaction hard-core du WR est locale alors que l'interaction du CRCM ne l'est pas.

Dans un premier temps nous allons énoncer et démontrer la Proposition III.2.1 qui permet de démontrer le Théorème III.1.3 sous réserve d'avoir l'existence d'un WR "polychromatique" ayant au plus une composante connexe infinie. La terminologie monochromatique et polychromatique est introduite au début de la prochaine section. Ce résultat est basé sur la FK-représentation, voir Théorème II.1.10. Il faut ensuite montrer l'existence de ce bon WR. Pour cela nous allons construire une phase qui n'est pas monochromatique. Nous pourrons ainsi conditionner pour avoir une mesure polychromatique et nous montrerons que cette mesure conditionnée est un WR.

III.2.1 Théorème de non-unicité via le WR

Nous disons dans la suite qu'une configuration colorée $\widetilde{\omega}$ est monochromatique s'il existe une couleur k telle que toutes les boules de la configuration ont cette même couleur. Au contraire une configuration est dite polychromatique si au moins deux couleurs sont présentes dans la configuration. Nous notons **Mono** et **Poly** ces événements. Dans le même esprit une mesure de probabilité $\widetilde{P}$ sur $\widetilde{\Omega}$ est dite monochromatique (respectivement polychromatique) si $\widetilde{P}(Mono) = 1$ (respectivement $\widetilde{P}(Poly) = 1$). Une mesure peut donc être ni monochromatique ni polychromatique.

La prochaine proposition permet de transférer le problème étudié vers la problématique plus simple d'existence d'un WR satisfaisant de bonnes propriétés.

Proposition III.2.1. *Soient q et Q satisfaisant les hypothèses du Théorème III.1.3. Soit $\widetilde{P}$ un WR(z, Q, q) polychromatique ayant au plus une composante connexe infinie. Alors la mesure color-blind $\widetilde{P}_{cb}$ associée est un CRCM$(z/q, Q, q)$ différent de la solution triviale $\pi^{z/q,Q}$.*

Démonstration. Comme $\widetilde{P}(N_{cc}^{\infty} \leq 1) = 1$, le Théorème II.1.10 nous assure que $\widetilde{P}_{cb}$ est un CRCM$(z/q, Q, q)$. De plus comme $\widetilde{P}$ est polychromatique, il y a presque sûrement au moins deux composantes connexes dans chaque configuration, et donc $\widetilde{P}_{cb} \neq \pi^{z/q,Q}$ puisque la mesure $\pi^{z/q,Q}$ produit presque sûrement une composante connexe qui recouvre tout. □

Il faut donc maintenant prouver l'existence d'un WR(z, Q, q) stationnaire et polychromatique. C'est pour cette dernière condition que nous aurons besoin de z assez petit.

Proposition III.2.2. *Il existe $\hat{z} > 0$ tel que pour $z < \hat{z}$, nous avons l'existence d'un WR(z, Q, q) stationnaire, polychromatique et ayant au plus une composante connexe infinie.*

La preuve de cette proposition est décomposée dans les prochaines sections.

III.2.2 Construction d'une phase non monochromatique

Nous reprenons dans un premier temps les étapes de la preuve du Théorème II.1.3. Nous notons $\Lambda_n =]-n, n]^d$ et considérons la mesure de Widom-Rowlinson sur la boîte bornée Λ_n avec condition de bord vide définie comme dans le chapitre II par

$$\widetilde{P}_n(d\widetilde{\omega}) = \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega})}{\widetilde{Z}_n}\widetilde{\pi}^{z,Q,q}_{\Lambda_n}(d\widetilde{\omega}),$$

où $\widetilde{Z}_n = \int \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega})\widetilde{\pi}^{z,Q,q}_{\Lambda_n}(d\widetilde{\omega})$. Nous définissons ensuite $\hat{P}_n = \underset{i\in 2n\mathbb{Z}^d}{\otimes} \widetilde{P}_n \circ \tau_i^{-1}$ et $\bar{P}_n = \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)}\int_{\Lambda_n}(\hat{P}_n \circ \tau_x^{-1})dx$. Il a été montré dans la Proposition II.1.4 que la suite $(\bar{P}_n)$ admet une valeur d'adhérence $\widetilde{P}$ pour la topologie de la convergence locale. Cette mesure de probabilité est stationnaire. Elle vérifie aussi $\widetilde{P}(\mathcal{A}) = 1$, voir Proposition II.1.5.

Il est de plus facile de voir avec le travail qui a été fait dans le chapitre I que $\widetilde{P}(N^{\infty}_{cc} \leq 1) = 1$. En effet par la FK-représentation en volume fini, la mesure color-blind associée à $\widetilde{P}_n$ est la mesure $\Xi_n = \frac{q^{N_{cc}(\omega)}}{Z_n}\pi^{z,Q}_{\Lambda_n}(d\omega)$ introduite dans la preuve du Théorème I.3.9. Donc en considérant la limite le long d'une bonne sous-suite, nous avons que $\widetilde{P}_{cb}$ est la mesure P construite dans la preuve du Théorème I.3.9. Nous ne savons pas si P est un CRCM puisque les hypothèses du Théorème I.3.9 ne sont pas toutes vérifiées, mais nous pouvons tout de même dire grâce à la Proposition I.3.12, que $\widetilde{P}_{cb}(N^{\infty}_{cc} \leq 1) = 1$. En effet cette proposition n'utilise pas l'hypothèse sur les rayons Q.

Il suffit donc, pour prouver la Proposition III.2.2 et donc le Théorème III.1.3, de montrer que $\widetilde{P}$ est un WR(z, Q, q) polychromatique. Malheureusement nous ne sommes pas en mesure de montrer ce résultat. Nous allons montrer dans le prochain lemme que $\widetilde{P}$ n'est pas monochromatique et ensuite conditionner pour obtenir une mesure polychromatique. C'est à ce moment là que nous montrerons que cette mesure conditionnée est un WR.

Lemme III.2.3. *Il existe $\hat{z} > 0$ tel que pour $z < \hat{z}$ nous avons*

$$\widetilde{P}(Mono) < 1.$$

Démonstration. Nous allons montrer que la mesure $\widetilde{P}$ est différente de toutes les mesures de probabilité monochromatiques et stationnaires sur $\widetilde{\Omega}$. Nous allons pour cela comparer l'entropie spécifique de $\widetilde{P}$ à l'entropie spécifique de toutes les mesures monochromatiques. La partie facile est de trouver une borne inférieure uniforme pour toutes les mesures monochromatiques. Il faut ensuite trouver une borne supérieure pas trop grande de l'entropie spécifique de $\widetilde{P}$.

La borne inférieure uniforme

Soit $\widetilde{P}^m$ une mesure de probabilité stationnaire et monochromatique sur $\widetilde{\Omega}$. Nous allons dans un premier temps supposer que la couleur est déterministe et égale à 1. Nous allons chercher pour chaque n une minoration de la quantité $\mathcal{I}_{\Lambda_n}(\widetilde{P}^m|\widetilde{\pi}^{z,Q,q})$.

Supposons dans un premier temps que $\widetilde{P}^m_{\Lambda_n}$ est absolument continue par rapport à $\widetilde{\pi}^{z,Q,q}_{\Lambda_n}$. Alors nous avons

$$\mathcal{I}_{\Lambda_n}(\widetilde{P}^m|\widetilde{\pi}^{z,Q,q}) = \int_{\widetilde{\Omega}} \ln\left(\frac{d\widetilde{P}^m_{\Lambda_n}}{d\widetilde{\pi}^{z,Q,q}_{\Lambda_n}}(\widetilde{\omega})\right) \widetilde{P}^m_{\Lambda_n}(d\widetilde{\omega}).$$

Nous décomposons chaque configuration $\widetilde{\omega}$ en séparant les boules de couleur 1, noté $\widetilde{\omega}^{=1}$, et les boules de couleur différente de 1, noté $\widetilde{\omega}^{\neq 1}$. Nous avons alors

$$\frac{d\widetilde{P}^m_{\Lambda_n}}{d\widetilde{\pi}^{z,Q,q}_{\Lambda_n}}(\widetilde{\omega}) = f_1(\widetilde{\omega}^{\neq 1}|\widetilde{\omega}^{=1})f_2(\widetilde{\omega}^{=1}),$$

où $f_1(.|\widetilde{\omega}^{=1})$ est la densité conditionnelle, par rapport à $\widetilde{\pi}^{\frac{q-1}{q}z,Q,q-1}_{\Lambda_n}$, de la configuration $\widetilde{\omega}^{\neq 1}$ sachant $\widetilde{\omega}^{=1}$ et f_2 est la densité de la configuration $\widetilde{\omega}^{=1}$ par rapport à $\widetilde{\pi}^{z/q,Q,1}_{\Lambda_n}$. Comme $\widetilde{P}$ est monochromatique nous avons

$$f_1(\widetilde{\omega}^{\neq 1}|\widetilde{\omega}^{=1}) = \exp\left(\frac{q-1}{q}z\mathcal{L}^d(\Lambda_n)\right)\mathbb{1}_{\emptyset}(\widetilde{\omega}^{\neq 1}),$$

et nous trouvons

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\Lambda_n}(\widetilde{P}^m|\widetilde{\pi}^{z,Q,q}) &= \int_{\widetilde{\Omega}} \ln(f_1(\widetilde{\omega}^{\neq 1}|\widetilde{\omega}^{=1}))\widetilde{P}_{\Lambda_n}(d\widetilde{\omega}) + \int_{\widetilde{\Omega}} \ln(f_2(\widetilde{\omega}^{=1}))\widetilde{P}_{\Lambda_n}(d\widetilde{\omega}) \\ &\geq \frac{q-1}{q}z\mathcal{L}^d(\Lambda_n).\end{aligned}$$

Maintenant si $\widetilde{P}^m_{\Lambda_n}$ n'est pas absolument continue par rapport à $\widetilde{\pi}^{z,Q,q}_{\Lambda_n}$, alors nous avons $\mathcal{I}_{\Lambda_n}(\widetilde{P}^m|\widetilde{\pi}^{z,Q,q}) = \infty$ et la minoration précédente est donc encore vraie. En divisant par $\mathcal{L}^d(\Lambda_n)$ et en prenant la limite nous obtenons

$$\mathcal{I}^z(\widetilde{P}^m) \geq \frac{q-1}{q}z. \tag{III.2.1}$$

Maintenant si la couleur de la mesure monochromatique $\widetilde{P}^m$ est aléatoire, alors cette mesure est un mélange de mesures de probabilité monochromatiques avec couleur déterministe. Comme l'entropie spécifique est une fonctionnelle affine, voir le Théorème I.1.12, la minoration (III.2.1) est toujours vraie pour $\widetilde{P}^m$.

Remarque III.2.4. *La borne trouvée est optimale puisqu'un calcul élémentaire permet de trouver que* $\mathcal{I}^z(\widetilde{\pi}^{z/q,Q,1}) = \frac{q-1}{q}z$.

Borne supérieure de l'entropie spécifique de $\widetilde{P}$

Nous avons montrer dans la Proposition II.1.4 que $\mathcal{I}^z(\widetilde{P}) \leq z$. Cette borne n'est pas suffisante puisqu'elle est plus grande que $\frac{q-1}{q}z$. Pour améliorer cette borne rappelons que nous avons

$$\mathcal{I}^z(\bar{P}_n) = \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)}\mathcal{I}(\widetilde{P}_n|\widetilde{\pi}^{z,Q,q}_{\Lambda_n}) = \frac{-\ln(\widetilde{\pi}^{z,Q,q}_{\Lambda_n}(\mathcal{A}))}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)}.$$

Soit $y > 0$. Nous posons Δ le cube $]0,y]^d$ et nous divisons Λ en k_n copies disjointes de Δ, avec parfois une frontière suivant les valeurs de y et n. Un tel découpage est observable en Figure III.2. Nous notons c_n le volume de cette frontière. Alors $c_n = o(n^d)$ et donc

$$\mathcal{L}^d(\Lambda_n) = (2n)^d = k_n\mathcal{L}^d(\Delta) + c_n = y^d k_n + o(n^d).$$

Nous notons $\phi_y = \frac{1}{y^d}\int_\Delta \int_{\mathbb{R}+} \mathbb{1}_{B(x,R)\subseteq\Delta} Q(dR)dx$ la probabilité qu'une boule centrée dans Δ soit complètement incluse dans Δ. Une configuration $\widetilde{\omega} \in \mathcal{A}$ peut être construite en forçant que les boules centrées dans chaque petit cube de type Δ aient la même couleur et soient complètement incluses dans Δ. Pour la frontière nous pouvons par exemple demandé qu'elle ne contienne pas de boule. Un exemple d'une telle configuration est visible en Figure III.2. Nous avons donc l'inégalité suivante

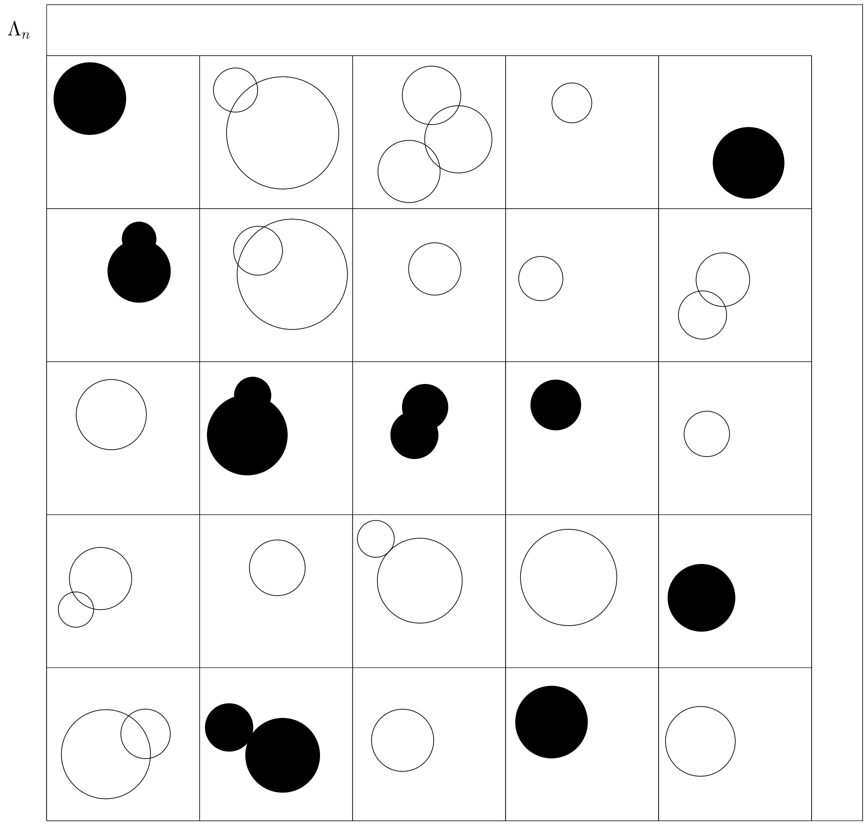

FIGURE III.2 – Chaque petite boite contient des boules d'une seule couleur et qui restent totalement incluses dans cette petite boite.

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}^{z,Q,q}_{\Lambda_n}(\mathcal{A}) &\geq \left[\exp(-zy^d)\left(1+q\sum_{i\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{i!q^i}(zy^d\phi_y)^i\right)\right]^{k_n}\exp(-z((2n)^d-k_ny^d)) \\ &\geq \exp(-z(2n)^d)\times\left(1+\sum_{i\in\mathbb{N}^*}\frac{q}{i!q^i}(zy^d\phi_y)^i\right)^{k_n}, \qquad \text{(III.2.2)}\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^z(P_n) &\leq z - \frac{k_n}{(2n)^d}\ln\left(1-q+q\exp\left(\frac{zy^d\phi_y}{q}\right)\right) \\ &\leq z + \frac{1}{y^d}\left(\frac{c_n}{(2n)^d}-1\right)\ln\left(1-q+q\exp\left(\frac{zy^d\phi_y}{q}\right)\right). \qquad \text{(III.2.3)}\end{aligned}$$

Comme $\frac{c_n}{(2n)^d} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ nous avons $\frac{c_n}{(2n)^d} - 1 \leq -\frac{7}{8}$. Donc pour montrer que la majoration (III.2.3) est plus petite que la minoration dans (III.2.1), il suffit de montrer que la fonction Ψ est négative, où

$$\Psi : z \mapsto \frac{z}{q} - \frac{7}{8y^d} \ln \left(1 - q + q \exp\left(\frac{zy^d \phi_y}{q} \right) \right).$$

Sa dérivée est

$$\Psi'(z) = \frac{1}{q} - \frac{7}{8} \phi_y \frac{\exp(zy^d\phi_y/q)}{1 - q + q\exp(zy^d\phi_y/q)}$$

et s'annule en un seul point $z_y = \frac{q}{\phi_y y^d} \ln\left(\frac{q-1}{q} \frac{1}{1 - 7\phi_y/8} \right)$. Cette racine est positive dés que $\phi_y > \frac{8}{7q}$, ce qui est vrai quand y est assez grand puisque $\phi_y \underset{y\to\infty}{\to} 1$. De plus nous avons $\Psi'(0) < 0$ et $\Psi(0) = 0$.

z	0		z_y		$z^*(y)$	∞
$\Psi'(z)$		$-$	0	$+$		
$\Psi(z)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$0 \nearrow$	∞

Donc la fontion Ψ est strictement négative pour z plus petit que z_y. Il existe donc $\hat{z} > 0$ tel que pour $0 < z < \hat{z}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour $n \geq n_0$

$$\mathcal{I}^z(P_n^{z,Q,q}) \leq \frac{q-1}{q} z - \epsilon. \tag{III.2.4}$$

Comme l'entropie spécifique est semi-continue inférieurement, l'inégalité (III.2.4) reste vraie pour $\widetilde{P}$. Le Lemme III.2.3 est donc démontré. □

III.2.3 Construction d'une phase polychromatique satisfaisant DLR

Pour $z < \hat{z}$, nous pouvons donc conditionner la mesure $\widetilde{P}$ par l'événement Poly des configurations polychromatiques. Nous notons $\widetilde{P}_{poly}$ cette mesure de probabilité. Par construction cette mesure est stationnaire, satisfait $\widetilde{P}_{poly}(\mathcal{A}) = 1$ et $\widetilde{P}_{poly}(N_{cc}^{\infty} \leq 1) = 1$. Il suffit donc de montrer que $\widetilde{P}_{poly}$ satisfait les équations DLR d'un *Widom-Rowlinson* pour conclure la preuve de la Proposition III.2.2.

À partir de maintenant nous fixons Λ borné et nous allons montrer que $\widetilde{P}_{poly}$ satisfait l'équation DLR(Λ).

Événement bouclier

Pour montrer que $\widetilde{P}_{Poly}$ satisfait l'équation DLR(Λ), il faut introduire une suite d'événements qui localisent l'interaction $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$. Pour cela nous allons construire un événement où la boite Λ est encerclée de boules de différentes couleurs. Ces boules empêcheront Λ d'interagir avec les boules centrées trop loin.

Proposition III.2.5. *Il existe une suite $(\Delta_k)_{k\geq 1}$ de sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^d$ et une suite d'événements $(W_k)_{k\geq 1}$, satisfaisant $W_k \in \widetilde{\mathcal{F}}_{\Delta_k}$ (en particulier ces événements sont locaux), tels que*

1. $\widetilde{P}_{poly}(W_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1.$
2. *Pour chaque configuration $\widetilde{\omega}$ dans $\mathcal{A} \cap W_k$ et $\widetilde{\omega}'$ dans $\widetilde{\Omega}$, nous avons*

$$\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}'_\Lambda + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}'_\Lambda + \widetilde{\omega}_{\Delta_k\setminus\Lambda}).$$

Démonstration. Commençons par construire les ensembles Δ_k et les événements W_k. L'idée est très simple. Si des boules de différentes couleurs sont intelligemment placées autour de Λ, alors la condition hard-core empêche les boules centrées trop loin de pouvoir intersecter les boules centrées dans Λ. Nous allons détailler cette idée.

Comme Λ est borné, il est inclus dans un cube $\bar{\Lambda} = [-\alpha, \alpha]^d$ pour un α positif. Maintenant pour $k > \alpha$, nous plaçons à chaque coin de $\bar{\Lambda}$ un cube B_j^k, $j \in \{0,1\}^d$, de côté k :

$$B_j^k = \prod_{i=1..d} (-1)^{j_i}[\alpha, k+\alpha],$$

où $(-1)^{j_i}[\alpha, k+\alpha] = [\alpha, k+\alpha]$ si $j_i = 0$ et $[-\alpha-k, -\alpha]$ si $j_i = 1$. Nous notons W_k^1 l'événement des configurations $\widetilde{\omega}$ qui ont au moins deux boules de deux couleurs différentes centrées dans chaque B_j^k. Par un argument géométrique simple, il existe un réel positif D_1 tel que chaque boule centrée dans Λ et intersectant l'ensemble $G := [-\alpha-k-D_1, \alpha+k+D_1]^d$ doit nécessairement recouvrir un cube B_j^k. Donc l'événement W_k^1 force les boules centrées dans Λ à rester à l'intérieur de G.

Maintenant nous devons empêcher les boules centrées trop loin d'intersecter G. Nous considérons les 2^d cubes suivants :

$$C_j^k = \prod_{i=1..d} (-1)^{j_i}[\alpha+k+D_1+1, \alpha+2k+D_1+1]$$

pour $j \in \{0,1\}^d$. Ces cubes ne sont pas placés aux coins de G mais un peu plus loin. Nous notons W_k^2 l'événement des configurations $\tilde{\omega}$ qui ont au moins deux boules de différentes couleurs centrées dans chaque cube C_j^k. Il existe un réel positif D_2 tel que chaque boule centrée à l'extérieur de

$$\Delta_k = [-\alpha-2k-D_1-1-D_2, \alpha+2k+D_1+1+D_2]^d$$

et qui intersecte G doit nécessairement recouvrir un cube C_j^k. En conclusion l'événement $W_k := W_k^1 \cap W_k^2$ assure que dans une configuration autorisée $\tilde{\omega} \in \mathcal{A}$ les boules centrées

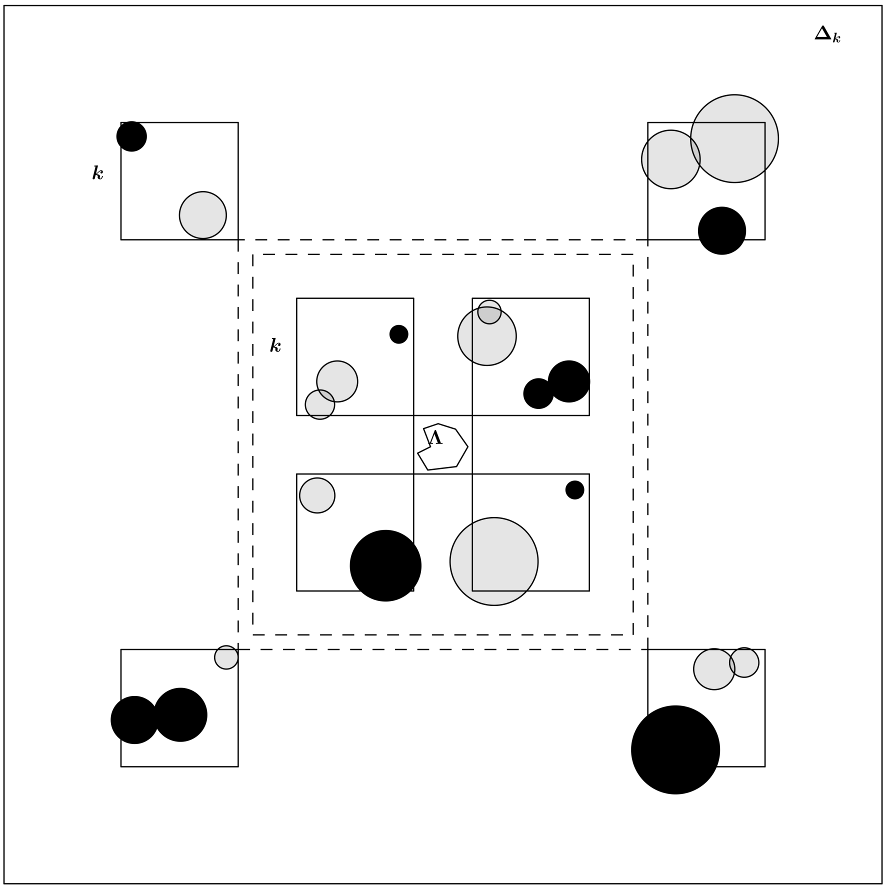

FIGURE III.3 – Événement bouclier W_k

dans Λ n'intersectent pas les boules centrées à l'extérieur de Δ_k. La propriété 2) de la Proposition III.2.5 est donc démontrée. Il reste à démontrer la propriété 1).

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_{poly}(W_k^c) &= \widetilde{P}_{poly}\left(\bigcup_{j\in\{0,1\}^d}\{\widetilde{\omega}_{B_j^k} \notin Poly\} \cup \{\widetilde{\omega}_{C_j^k} \notin Poly\}\right)\\ &\leq \sum_{j\in\{0,1\}^d} \widetilde{P}_{poly}(\{\widetilde{\omega}_{B_j^k} \notin Poly\}) + \widetilde{P}_{poly}(\{\widetilde{\omega}_{C_j^k} \notin Poly\}).\end{aligned}$$

Comme $\widetilde{P}_{poly}$ est une mesure de probabilité stationnaire les probabilités $\widetilde{P}_{poly}(\{\widetilde{\omega}_{B_j^k} \notin Poly\})$ et $\widetilde{P}_{poly}(\{\widetilde{\omega}_{C_j^k} \notin Poly\})$ sont égales et ne dépendent pas de j. Enfin comme $\widetilde{P}_{poly}(Poly) = 1$, cette valeur tend vers 0 quand k tend vers l'infini. La propriété 1) est démontrée. $\square$

Équation DLR(Λ)

Comme dans la preuve du Théorème I.3.9 et du Théorème II.1.3, nous devons introduire une nouvelle suite de mesures. Nous considérons comme dans le chapitre I les mesures

$$\widetilde{P}_n^\Lambda = \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda)} \int_{\Lambda_n} \mathbb{1}_{\Lambda \subset \tau_x(\Lambda_n)} \widetilde{P}_n \circ \tau_x^{-1} dx,$$

et la Proposition II.1.6 reste vraie. Soit f une fonction mesurable locale et bornée par 1. Nous définissons δ comme

$$\delta = \Big| \int_{\widetilde{\Omega}} f d\widetilde{P}_{poly} - \int_{\widetilde{\Omega}^2} f(\widetilde{\omega}'_\Lambda + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}'_\Lambda + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c})}{\widetilde{Z}_\Lambda^{z,Q,q}(\widetilde{\omega}_{\Lambda^c})} \widetilde{\pi}_\Lambda^{z,Q,q}(d\widetilde{\omega}') \widetilde{P}_{poly}(d\widetilde{\omega}) \Big|.$$

Soit $\epsilon > 0$. Grâce à la Proposition III.2.5 il existe k assez grand tel que $\widetilde{P}_{poly}(W_k^c) \leq \epsilon/2$ et donc

$$\delta \leq \Big| \int_{\widetilde{\Omega}} \mathbb{1}_{W_k} f d\widetilde{P}_{poly} - \int_{\widetilde{\Omega}^2} \mathbb{1}_{W_k}(\widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) f(\widetilde{\omega}'_\Lambda + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}'_\Lambda + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c})}{\widetilde{Z}_\Lambda^{z,Q,q}(\widetilde{\omega}_{\Lambda^c})} \widetilde{\pi}_\Lambda^{z,Q,q}(d\widetilde{\omega}') \widetilde{P}_{poly}(d\widetilde{\omega}) \Big| + \epsilon.$$

Nous avons $W_k \subseteq Poly$ et nous avons que $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ et $\tilde{Z}_\Lambda$ sont Δ_k-locales sur W_k. Donc

$$\delta \leq \Big| \int_{\widetilde{\Omega}} \frac{\mathbb{1}_{W_k} f}{\widetilde{P}(Poly)} d\widetilde{P} - \int_{\widetilde{\Omega}^2} \mathbb{1}_{W_k}(\widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) \frac{f(\widetilde{\omega}'_\Lambda + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c})}{\widetilde{P}(Poly)} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}'_\Lambda + \widetilde{\omega}_{\Delta_k \setminus \Lambda})}{\widetilde{Z}_\Lambda^{z,Q,q}(\widetilde{\omega}_{\Delta_k \setminus \Lambda})} \widetilde{\pi}_\Lambda^{z,Q,q}(d\widetilde{\omega}') \widetilde{P}(d\widetilde{\omega}) \Big| + \epsilon.$$

Toutes les quantités intégrées sont locales, donc la Proposition II.1.6 nous assure que pour n assez grand

$$\begin{aligned}
\delta &\leq \Big| \int_{\widetilde{\Omega}} \frac{\mathbb{1}_{W_k} f}{\widetilde{P}(Poly)} d\widetilde{P}_n^\Lambda - \int_{\widetilde{\Omega}^2} \mathbb{1}_{W_k}(\widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) \frac{f(\widetilde{\omega}'_\Lambda + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c})}{\widetilde{P}(Poly)} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}'_\Lambda + \widetilde{\omega}_{\Delta_k \setminus \Lambda})}{\widetilde{Z}_\Lambda^{z,Q,q}(\widetilde{\omega}_{\Delta_k \setminus \Lambda})} \widetilde{\pi}_\Lambda^{z,Q,q}(d\widetilde{\omega}') \widetilde{P}_n^\Lambda(d\widetilde{\omega}) \Big| + 2\epsilon \\
&= \Big| \int_{\widetilde{\Omega}} \frac{\mathbb{1}_{W_k} f}{\widetilde{P}(Poly)} d\widetilde{P}_n^\Lambda - \int_{\widetilde{\Omega}^2} \mathbb{1}_{W_k}(\widetilde{\omega}_{\Lambda^c}) \frac{f(\widetilde{\omega}'_\Lambda + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c})}{\widetilde{P}(Poly)} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\widetilde{\omega}'_\Lambda + \widetilde{\omega}_{\Lambda^c})}{\widetilde{Z}_\Lambda^{z,Q,q}(\widetilde{\omega}_{\Lambda^c})} \widetilde{\pi}_\Lambda^{z,Q,q}(d\widetilde{\omega}') \widetilde{P}_n^\Lambda(d\widetilde{\omega}) \Big| + 2\epsilon \\
&= 2\epsilon,
\end{aligned}$$

où la dernière égalité est une conséquence de l'équation DLR(Λ) satisfaite par les mesures $\widetilde{P}_n^\Lambda$, voir Proposition II.1.6.

III.3 Conjecture d'unicité en grande activité

Commençons par rappeler la conjecture d'unicité du CRCM dans le cas extrême en grande activité.

Conjecture. *Si $\int R^d Q(dR) = +\infty$, alors il existe $\bar{z}' < \infty$ tel que pour tout $z > \bar{z}'$ il existe un unique CRCM(z, Q, q) stationnaire, qui est $\pi^{z,Q}$.*

Nous allons dans un premier temps donner une preuve heuristique de cette conjecture, basée sur les équations GNZ et une domination stochastique. Nous allons ensuite énoncer et démontrer une version faible de cette conjecture en dimension 1.

III.3.1 Preuve heuristique de la conjecture

Nous allons dans cette partie donner une preuve heuristique de la conjecture. Cette preuve n'est pas exacte et nous dirons explicitement le moment non-exact. Par simplicité nous supposons que les rayons sont minorés : Il existe $R_0 > 0$ tel que $Q([R_0; +\infty[) = 1$. Commençons par donner des résultats rigoureux vérifiés par tous les CRCM(z, Q, q). Nous ne faisons pour le moment aucune hypothèse sur l'intégrabilité des rayons. Comme les rayons sont minorés, nous avons pour chaque configuration ω et pour chaque point $X = (x, R)$

$$1 - k(X,\omega) \geq -\frac{v_d(R+2R_0)^d}{v_d R_0^d} \geq -C_0 R^d, \tag{III.3.1}$$

où C_0 est la constante $(3/R_0)^d$. Nous déduisons du Théorème I.1.4 que P domine stochastiquement le processus ponctuel de Poisson $\pi^{z,\tilde{Q}}$ où

$$\tilde{Q}(dR) = q^{-C_0 R^d} Q(dR).$$

Il est important de remarquer que la mesure $\tilde{Q}$ n'est pas une mesure de probabilité (ce qui n'a pas d'importance) mais admet un moment d'ordre d : $\int R^d \tilde{Q}(dR) < +\infty$. Cette domination stochastique donne le comportent général des composantes connexes de P. En effet il est connu, voir par exemple [42] ou [27], que la structure germe-grain $L(\omega) = \cup_{(x,R)\in\omega} B(x,R)$, sous la loi $\pi^{z,\tilde{Q}}$, percole pour z assez grand. De plus pour z assez grand $L(\omega)$ forme un océan de boules connectées avec quelques trous répartis dans l'espace, qui peuvent contenir des petites composantes connexes finies. Comme P domines $\pi^{z,\tilde{Q}}$, P a le même comportent, ou alors P produit un océan de boules connectées sans trous. Dans le second cas P a une seule composante connexe. La conjecture affirme que dans le cas où $\int R^d Q(dR) = \infty$, pour z assez grand le second cas se produit.

Considérons la quantité N_P représentant le nombre moyen de composantes connexes par unité de volume produites par P. Soit $X \in \omega$ et notons $C_X(\omega)$ sa composante connexe. Ici nous considérons $C_X(\omega)$ comme sous-configuration de ω plutôt que comme sous-ensemble de $L(\omega)$. Nous disons que $X = (x, R)$ est le *point le plus à gauche* dans $C_X(\omega)$ si la première coordonnée de x dans $\mathbb{R}^d$ est plus petite que celle des autres $Y \in C_X(\omega)$. Toutes les composantes connexes finies ont un point le plus à gauche qui est unique presque sûrement. Donc une définition possible de N_P est

$$N_P = \int_\Omega \sum_{(x,R)\in\omega} \mathbb{1}_{[0,1]^d}(x) \mathbb{1}_{\{(x,R) \text{ est le point le plus à gauche de } C_{(x,R)}(\omega)\}} P(d\omega).$$

La quantité N_P tend vers 0 lorsque z tend vers l'infini et nous pouvons montrer une décroissance exponentielle.

Lemme III.3.1. *Supposons que les rayons sont minorés par un $R_0 > 0$. Alors il existe $C > 0$ tel que pour z assez grand nous avons*

$$N_P \leq e^{-Cz}.$$

Démonstration. Grâce aux équations GNZ, voir Proposition I.3.2, et à la stationnarité de P nous avons

$$\begin{aligned} N_P &= z\int_\Omega \int_{[0,1]^d} \int_0^{+\infty} q^{1-k((x,R),\omega)} \times \\ &\quad \mathbb{1}_{\{(x,R) \text{ est le point le plus à gauche de } C_{(x,R)}(\omega+\delta_{(x,R)})\}} Q(dR)dxP(d\omega) \\ &\leq zq\int_0^{+\infty} P\Big((0,R) \text{ est le point le plus à gauche de } C_{(0,R)}(\omega+\delta_{(0,R)})\Big)Q(dR). \end{aligned}$$

Comme P domine stochastiquement $\pi^{z,\tilde{Q}}$ nous avons

$$\begin{aligned} N_P &\leq zq\int_0^{+\infty} \pi^{z,\tilde{Q}}\Big((0,R) \text{ est le point le plus à gauche de } C_{(0,R)}(\omega+\delta_{(0,R)})\Big)Q(dR) \\ &\leq zq\int_0^{+\infty} \pi^{z,\tilde{Q}}\Big(0 \notin L(\omega_{\text{gauche}})\Big)Q(dR) \\ &= zqe^{-z\frac{1}{2}v_d\int_0^{+\infty} R^d\tilde{Q}(dR)}, \end{aligned} \tag{III.3.2}$$

où ω_{gauche} est la configuration de points $(x,R) \in \omega$ tels que la première coordonnée de x est négative. La dernière inégalité de (III.3.2) est un calcul standard pour le *modèle booléen*, voir [8]. Le lemme est démontré en choisissant judicieusement la constante C. □

Supposons que P est ergodique. Grâce au théorème ergodique nous avons le lemme suivant.

Lemme III.3.2. *Pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ et pour P-presque toute configuration ω :*

$$\lim_{R\mapsto\infty} \frac{1-k((x,R),\omega)}{v_dR^d} = -N_P.$$

Démonstration. Rappelons que $k((x,R),\omega)$ compte le nombre de composantes connexes de $L(\omega)$ qui intersectent la boule $B(x,R)$. Le théorème ergodique nous donne la convergence P-presque sûr

$$\frac{\#\{Y \in \omega_{B(x,R)}, Y \text{ est le point le plus à gauche de } C_Y(\omega)\}}{v_dR^d} \underset{R\to\infty}{\to} N_P,$$

mais cette quantité n'est pas exactement $k((x,R),\omega)$. En effet nous avons oublié les composantes connexes dont le point le plus à gauche n'est pas dans $B(x,R)$. Nous allons contrôler le nombre de ces "mauvaises" composantes connexes. Nous allons utiliser la borne inférieure R_0 des rayons. Chacune de ces "mauvaises" composantes connexes doit sortir de $B(x,R)$. Considérons l'anneau

$$B(x,R+2R_0) \setminus B(x,R-2R_0).$$

Cette anneau a un volume équivalent à CR^{d-1} où C est une constante positive. Ainsi par un argument de volume le nombre de "mauvaises" composantes connexes a un majorant qui est équivalent à $\tilde{C}R^{d-1}$. En normalisant par v_dR^d ce terme tend vers 0. Nous avons ainsi la convergence P-presque sûr

$$K((x,R)\omega) \underset{r\to\infty}{\to} N_P,$$

et le résultat est démontré. □

Focalisons-nous maintenant sur la preuve non rigoureuse de la conjecture pour la loi particulière $Q(dR) = \frac{d-1}{R^d}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(R)dR$. Nous allons montrer que $N_P = 0$ pour z assez grand, ce qui prouve l'égalité $P = \pi^{z,Q}$.

Grâce au Lemme III.3.2, il existe $K_{x,\omega} > 0$ tel que pour chaque $R > 0$

$$1 - k((x,R),\omega) \geq -2v_d N_P R^d - K_{x,\omega}.$$

Supposons que cette constante K peut être choisi uniformément en x et ω. C'est bien-sûr faux mais quitte à prendre K assez grand ceci peut être vrai avec grande probabilité. **C'est la seule partie non rigoureuse de la preuve**.

En faisant le même type de calculs que dans le Lemme III.3.1 nous obtenons

$$\begin{aligned} N_P &\leq zqe^{-\frac{1}{2}zv_d\int_0^{+\infty} R^d q^{-2v_d N_P R^d - K} Q(dR)} \\ &= zqe^{-\frac{1}{2}zv_d q^{-K}\int_1^{+\infty} q^{-2v_d N_P R^d} dR} \\ &\leq zqe^{-czN_P^{-1/d}} \end{aligned}$$

où c est une constante positive. Pour z assez grand, la seule solution est $N_P = 0$.

III.3.2 Conjecture : un premier pas vers une preuve rigoureuse dans le cas $d = 1$

Nous nous plaçons dans cette section dans le cas $d = 1$. Soit $\Lambda_n =]-n,n]$. Comme dans le chapitre I, pour z, Q et q fixés nous notons

$$\Xi_n(d\omega') = \Xi^{z,Q,q}_{\Lambda_n}(d\omega'_{\Lambda_n}|\emptyset) = \frac{q^{N_{cc}(\omega'_{\Lambda_n})}}{Z_n}\pi^{z,Q}_{\Lambda_n}(d\omega'_{\Lambda_n}).$$

Posons $\hat{P}_n = \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}^d} \Xi_n \circ \tau^{-1}_{2ni}$ et

$$P_n = \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)}\int_{\Lambda_n} (\hat{P}_n \circ \tau_x^{-1})dx.$$

Nous avons déjà démontré avec le Lemme I.3.10 et le Corollaire I.1.13 que la suite (P_n) admet une valeur d'adhérence P. Nous allons montrer que cette valeur d'adhérence est unique et égale à $\pi^{z,Q}$.

Théorème III.3.3. *Pour $d = 1$, $q > 1$, Q satisfaisant les conditions*

1. $\int_1^\infty \exp\left(-\int_1^u Q(]R,\infty[)dR\right) du < \infty$,
2. $Q(\{0\}) = 0$,

et pour z assez grand, la suite (P_n) converge vers $\pi^{z,Q}$ pour la topologie de la convergence locale.

Nous démontrons complètement un phénomène de transition de phase. En effet nous avons montré dans la preuve de du Théorème III.1.3 que cette même suite (P_n) convergeait vers une limite différente de $\pi^{z,Q}$.

Pour montrer ce résultat nous allons prouver que le nombre moyen de composantes connexes, relativement à Ξ_n, est uniformément borné. Intuitivement il en sera de même pour la limite que nous notons P. Or comme P est stationnaire la seule possibilité d'avoir un nombre moyen fini de composantes connexes est 1, ce qui implique que $P = \pi^{z,Q}$. Nous formalisons bien-sûr cette idée, en utilisant l'entropie spécifique qui permet très simplement de montrer la convergence voulue.

Proposition III.3.4. *Pour $d = 1$, $q > 1$, Q satisfaisant les conditions*

1. $\int_1^\infty \exp\left(-\int_1^u Q(]R,\infty[)dR\right) du < \infty$,
2. $Q(\{0\}) = 0$,

et pour z assez grand nous avons l'existence d'une constante $\alpha < \infty$ telle que, pour tout n :

$$\int_\Omega N_{cc}(\omega)\Xi_n(d\omega) \leq \alpha.$$

Supposons dans un premier temps que cette proposition soit vraie. En reprenant les calculs d'entropie qui ont été faits dans la preuve du Lemme I.3.10, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^z(P_n) &= \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)} \mathcal{I}_{\Lambda_n}(\Xi_n|\pi^{z,Q}) = \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)} \int_\Omega N_{cc}(\omega)\Xi_n(d\omega) \\ &\leq \frac{\alpha}{\mathcal{L}^d(\Lambda_n)}, \end{aligned} \tag{III.3.3}$$

où la dernière inégalité est une conséquence de la Proposition III.3.4. Or l'entropie spécifique est semi-continue inférieurement, voir Théorème I.1.12, et nous avons donc que chaque valeur d'adhérence P de la suite satisfait $\mathcal{I}^z(P) = 0$. Or la Proposition I.1.11 affirme alors que $P = \pi^{z,Q}$. Nous avons donc unicité de la valeur d'adhérence et ainsi la convergence de la suite (P_n) vers cette unique valeur d'adhérence $\pi^{z,Q}$.

Remarque III.3.5. *Nous avons utilisé la Proposition III.3.4 pour montrer que la suite des entropies spécifiques $\mathcal{I}^z(P_n)$ converge vers 0. Pour que cette convergence soit vraie il suffit d'avoir*

$$\int_\Omega N_{cc}(\omega)\Xi_n(d\omega) = o(n).$$

Pour prouver la Proposition III.3.4, nous allons introduire la notion de composante connexe à droite. Grâce à un comportement de renouvellement, ce nombre de composantes connexes à droite sera de loi géométrique. Nous utiliserons enfin les propriétés de la loi géométrique pour montrer que ce nombre de composantes connexes à droite admet des moments exponentiels pour z assez grand.

Preuve de la Proposition III.3.4 : phénomène de renouvellement

L'idée est de se ramener à un processus de renouvellement sur $[0,\infty[$. Commençons par remarquer que comme $Z_n \geq 1$, nous avons

$$\int_\Omega N_{cc}(\omega)\Xi_n(d\omega) \leq \int_\Omega N_{cc}(\omega) q^{N_{cc}(\omega)} \pi^{z,Q}_{\Lambda_n}(d\omega) \leq \int_\Omega \tilde{q}^{N_{cc}(\omega)} \pi^{z,Q}_{\Lambda_n}(d\omega), \tag{III.3.4}$$

où nous pouvons prendre par exemple $\tilde{q} = 2q$. Ensuite par indépendance et stationnarité de $\pi^{z,Q}$ nous avons

$$\int_\Omega \tilde{q}^{N_{cc}(\omega)} \pi^{z,Q}_{\Lambda_n}(d\omega) \leq \int_\Omega \tilde{q}^{N_{cc}(\omega_{[0,n]})} \tilde{q}^{N_{cc}(\omega_{]-n,0]})} \pi^{z,Q}(d\omega) = \left(\int_\Omega \tilde{q}^{N_{cc}(\omega_{[0,n]})} \pi^{z,Q}(d\omega) \right)^2. \tag{III.3.5}$$

Malheureusement nous n'avons toujours pas de comportement de renouvellement. En effet lorsque n grandit un segment peut apparaitre est recouvrir tous les précédents segments. Pour palier à ce problème nous allons considérer des demi-segments du type $[x, x+R]$ à la place des segments du type $[x-R, x+R]$. Pour cela nous considérons donc la quantité

$$N^d_{cc}(\omega) = \text{Nombre de composantes connexes de } \bigcup_{(x,R)\in\omega} [x, x+R].$$

Nous avons $N_{cc}(\omega_{[0,n]}) \leq N^d_{cc}(\omega_{[0,n]})$ et puisque $q > 1$

$$\int_\Omega \tilde{q}^{N_{cc}(\omega_{[0,n]})} \pi^{z,Q}(d\omega) \leq \int_\Omega \tilde{q}^{N^d_{cc}(\omega_{[0,n]})} \pi^{z,Q}(d\omega) \leq \int_\Omega \tilde{q}^{N^d_{cc}(\omega_{[0,\infty[})} \pi^{z,Q}(d\omega), \tag{III.3.6}$$

où la dernière inégalité est une conséquence de la croissance de $N^d_{cc}(\omega_{[0,n]})$ par rapport à n. Pour montrer la Proposition III.3.4 il suffit donc de montrer que le membre de droite de l'inégalité (III.3.6), qui ne dépend plus de n, est fini.

Pour cela la première chose à montrer est que la quantité $N^d_{cc}(\omega_{[0,\infty[})$ est finie $\pi^{z,Q}$ presque-sûrement. Ensuite nous pourrons montrer que cette quantité admet des moments exponentiels finis pour z assez grand.

Pour montrer que $N^d_{cc}(\omega_{[0,\infty[})$ est fini $\pi^{z,Q}$ presque-sûrement, nous invoquons un résultat issu de [19] que nous énonçons dans le prochain lemme avec les spécificités de notre problème.

Lemme III.3.6. *Pour tout $z \geq 1$, la quantité $N^d_{cc}(\omega_{[0,\infty[})$ est finie $\pi^{z,Q}$ presque-sûrement si et seulement si*

$$\int_1^\infty \exp\left(- \int_1^u Q(]R,\infty[) dR \right) du < \infty.$$

La preuve de ce lemme, disponible dans [19] utilise la notion de subordinateur. Néanmoins une version plus faible peut se démontrer en utilisant le lemme de Borel-Cantelli. Dans ce cas la condition obtenue est

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \exp\left(- \int_1^n Q(]R,\infty[) dR \right) du < \infty.$$

À partir de maintenant nous nous plaçons sous les hypothèses du Lemme III.3.6. La quantité $N^d_{cc}(\omega_{[0,\infty[})$ est donc finie $\pi^{z,Q}$-presque sûrement et il faut maintenant montrer que pour z assez grand nous avons

$$\int_\Omega \tilde{q}^{N^d_{cc}(\omega_{[0,\infty[})} \pi^{z,Q}(d\omega) < \infty.$$

Preuve de la Proposition III.3.4 : convergence de lois géométriques

Nous avons maintenant le comportement de renouvellement voulu. En effet lorsque nous parcourons la demi-droite réelle $[0, \infty[$, chaque composante connexe rencontrée a une probabilité positive, que nous notons $p(z)$, d'être infinie, et cela indépendamment des précédentes composantes connexes qui ont été rencontrées. Ainsi la variable aléatoire $N_{cc}^d(\omega_{[0,\infty[})$ est une variable aléatoire géométrique de paramètre $p(z)$, et nous avons

$$p(z)^{-1} = \int_\Omega N_{cc}^d(\omega_{[0,\infty[})\pi^{z,Q}(d\omega).$$

Ainsi nous avons un calcul explicite du membre de droite de (III.3.6) :

$$\int_\Omega \tilde{q}^{N_{cc}^d(\omega_{[0,\infty[})}\pi^{z,Q}(d\omega) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} q^k p(z)(1-p(z))^{k-1},$$

et cette intégrale est finie si et seulement si $q(1 - p(z)) < 1$. Ceci est vrai pour z assez grand grâce au prochain lemme.

Lemme III.3.7. *Pour Q et q satisfaisant les hypothèses de la Proposition III.3.4, nous avons*

$$p(z)^{-1} = \int_\Omega N_{cc}^d(\omega_{[0,\infty[})\pi^{z,Q}(d\omega) \underset{z\to\infty}{\to} 1.$$

Ainsi avec ce lemme nous avons que pour z assez grand la quantité $q(1 - p(z))$ est strictement plus petite que 1 et donc

$$\sqrt{\alpha} := \int_\Omega \tilde{q}^{N_{cc}^d(\omega_{[0,\infty[})}\pi^{z,Q}(d\omega) < \infty.$$

Finalement avec les inégalités (III.3.4), (III.3.5) et (III.3.6) nous obtenons

$$\int_\Omega N_{cc}(\omega)\Xi_n(d\omega) \leq \alpha.$$

Il ne reste donc plus qu'à démontrer le Lemme III.3.7.

Démonstration du lemme. Nous savons que $N_{cc}^d(\omega_{[0,\infty[})$, relativement à $\pi^{z,Q}$, suit une loi géométrique de paramètre $p(z)$. Nous notons X_z cette variable aléatoire. Nous allons montrer que X_z converge en loi vers 1. Nous avons

$$\pi^{z,Q}(N_{cc}^d(\omega_{[0,\infty[}) = 1) \geq \pi^{z,Q}(N_{cc}^d(\omega_{[0,\infty[}) = 1, [x+y, \infty[\text{ est recouvert dans } \omega_{]x,\infty[}),$$

où x et y sont des réels strictement positifs et où nous disons que $[x, \infty[$ est recouvert dans ω si

$$[x, \infty[\subseteq \bigcup_{(a,R)\in\omega} [a, a+R].$$

Pour que le nombre de composantes connexes à droite soit égal à 1, il suffit donc que $[x + y, \infty[$ soit recouvert dans $\omega_{]x,\infty[}$ et que dans $[0, x]$, le premier point ait un rayon plus grand que $x+y$. Ceci implique implicitement qu'il y ait au moins un point dans $[0,x]$. Nous obtenons donc

$$\pi^{z,Q}(N^d_{cc}(\omega_{[0,\infty[})=1) \geq \pi^{z,Q}(\text{le premier point de } \omega_{[0,x]} \text{ a un rayon supérieur à } x+y, \\ [x+y,\infty[\text{ est recouvert dans } \omega_{]x,\infty[}).$$

Les deux événements considérés ont été construits de manière à être indépendants relativement à $\pi^{z,Q}$. De plus comme $\pi^{z,Q}$ est stationnaire nous avons

$$\pi^{z,Q}(N^d_{cc}(\omega_{[0,\infty[})=1) \geq (1-e^{-zx})Q([x+y,\infty[)\pi^{z,Q}([y,\infty[\text{ est recouvert dans } \omega_{[0,\infty[})).$$

Lemme III.3.8. *À $y>0$ fixé, la probabilité*

$$\pi^{z,Q}([y,\infty[\textit{ est recouvert dans } \omega_{[0,\infty[}))$$

tend vers 1 lorsque z tend vers l'infini.

Démonstration. Considérons la réalisation d'un processus de Poisson d'intensité $\mathcal{L}^d \otimes Q$. Nous savons grâce au Lemme III.3.6 que le modèle des segments à droite percole, et donc il existe un point aléatoire T qui est le point le plus à gauche de la composante connexe infinie. Si y est dans cette composante connexe infinie alors nous avons gagné. Sinon nous superposons les points d'un nouveau processus ponctuel de Poisson indépendant du premier et d'intensité $z\mathcal{L}^d \otimes Q$. Pour z assez grand (mais aléatoire), le segment $[y,T]$ est entièrement recouvert par ce nouveau processus. Il suffit par exemple d'attendre qu'un point apparaisse dans $[0,y]$ avec un rayon assez grand. Ainsi le segment $[y,\infty[$ est entièrement recouvert par la concaténation des deux processus ponctuels, qui est un processus ponctuel de Poisson d'intensité $(z+1)\mathcal{L}^d \otimes Q$. Nous avons bien la convergence voulue. □

Maintenant considérons $\epsilon>0$. Pour x,y assez petit, grâce à l'hypothèse $Q(\{0\})=0$, nous avons $Q([x+y,\infty[) \geq \sqrt[3]{1-\epsilon}$. Maintenant que x et y sont fixés, pour z assez grand nous avons

$$\pi^{z,Q}([y,\infty[\text{ est recouvert dans } \omega_{[0,\infty[})) \geq \sqrt[3]{1-\epsilon} \text{ et } (1-e^{-zx}) \geq \sqrt[3]{1-\epsilon},$$

et donc finalement pour z assez grand

$$\pi^{z,Q}(N^d_{cc}(\omega_{[0,\infty[})=1) \geq 1-\epsilon.$$

Ainsi nous avons la convergence en loi de X_z vers 1 lorsque z tend vers l'infini. Ceci implique la convergence ponctuelle de la fonction caractéristique et ainsi pour chaque réel t nous avons

$$\frac{p(z)e^{it}}{1-(1-p(z))e^{it}} \underset{z\to\infty}{\to} e^{it},$$

ce qui montre en prenant par exemple $t=\pi$ que $p(z)$ converge vers 1. Le lemme est donc démontré. □

Remarque III.3.9.

- *Concernant l'hypothèse* $\int_1^\infty \exp\left(-\int_1^u Q(]R,\infty[)dR\right) du < \infty$, *il est facile de remarquer que celle-ci implique la non-intégrabilité des rayons* $\int RQ(dR) = \infty$. *Néanmoins il n'y a pas équivalence entre ces deux relations puisque lorsque nous considérons des rayons ayant pour loi* Q *l'inverse d'une uniforme, alors un calcul simple montre que*
$$\int_1^\infty \exp\left(-\int_1^u Q(]R,\infty[)dR\right) du = \infty.$$
La question est donc de savoir si le théorème est toujours vrai dans le cas plus général $\int RQ(dR) = \infty$. *Nous n'avons pas de réponse à cette question.*
- *L'hypothèse* $Q(\{0\}) = 0$ *a été utile à la fin de la preuve de la proposition III.3.4 pour montrer la convergence en loi vers* 1 *des variables géométriques. Cette hypothèse semble nécessaire pour cette convergence. Néanmoins cela dépend de la variable aléatoire* T *point le plus à droite de la composante connexe infinie. Si celui-ci converge vers 0 assez vite alors cela pourrait compenser l'apparition de points à rayons nuls.*

III.3.3 Perspectives

Le Théorème III.3.3 résout une version faible de la conjecture dans le cas particulier de la dimension $d = 1$. Nous allons présenter dans cette section les pistes possibles pour contribuer à la preuve de la conjecture, les idées et les problèmes rencontrés.

Généralisation du Théorème III.3.3 pour toutes les dimensions

Il serait en effet très intéressant de pouvoir généraliser le Théorème III.3.3 pour les dimensions $d \geq 2$. Comme dans le cas $d = 1$ il suffit de montrer la Proposition III.3.4 qui borne le nombre moyen de composantes connexes. Néanmoins la technique du type renouvellement utilisée est uniquement utilisable en dimension 1. Même s'il est possible de se ramener à la dimension 1 en projetant d'une bonne manière les boules sur une droite, le processus projeté obtenu n'est pas stationnaire. Nous n'avons donc plus l'identification du nombre de composantes connexes comme une loi géométrique.

Généralisation du Théorème III.3.3 pour toutes les conditions de bord en dimension $d = 1$

Dans le Théorème III.3.3 nous considérons la suite (P_n) construite à partir des mesures à bord vide
$$\Xi_{\Lambda_n}^{z,Q,q}(d\omega'_{\Lambda_n}|\emptyset) = \frac{q^{N_{cc}(\omega'_{\Lambda_n})}}{Z_n}\pi_{\Lambda_n}^{z,Q}(d\omega'_{\Lambda_n}).$$
Il serait intéressant de considérer des mesures avec des conditions de bord différentes comme
$$\Xi_{\Lambda_n}^{z,Q,q}(d\omega'_{\Lambda_n}|\omega_{\Lambda_n}) = \frac{q^{N_{cc}^{\Lambda_n}(\omega'_{\Lambda_n}+\omega_{\Lambda_n})}}{Z_{\Lambda_n}^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda_n^c})}\pi_{\Lambda_n}^{z,Q}(d\omega'_{\Lambda_n}).$$

Nous pouvons ainsi construire une suite de mesures que nous noterons $P_n^{\omega_{\Lambda_n^c}}$ dont il est possible de montrer l'existence d'un point d'accumulation en utilisant le Corollaire I.1.13. Pour montrer la convergence de P_n vers $\pi^{z,Q}$ il suffit de montrer un résultat du type

$$\int_\Omega N_{cc}^{\Lambda_n}(\omega'_{\Lambda_n} + \omega_{\Lambda_n^c}) \Xi_{\Lambda_n}^{z,Q,q}(d\omega'_{\Lambda_n} | \omega_{\Lambda_n}) \leq \alpha$$

pour α fini. Mais plusieurs des techniques utilisées pour le cas du bord vide ne sont plus utilisables. En effet la fonction de partition $Z_{\Lambda_n}^{z,Q,q}(\omega_{\Lambda_n^c})$ n'est pas dans ce cas plus grande que 1. De plus la quantité N_{cc}^{Λ} est beaucoup moins agréable à utiliser, et il n'est pas clair que nous puissions faire apparaître un phénomène de renouvellement comme dans le cas du bord vide.

Rendre rigoureuse la preuve heuristique ?

Dans la preuve heuristique nous avons utilisé le théorème ergodique pour montrer l'existence d'une bonne constante $K_{x,\omega}$. Nous avons alors supposé que cette constante pouvait être prise uniforme en x et ω, permettant de démontrer une domination stochastique.

Il est très certainement impossible de pouvoir choisir cette constante uniformément. Néanmoins l'utilisation des équations GNZ et de la théorie ergodique pour étudier la quantité N_P pourrait être intéressante, en particulier parce que ces outils ne dépendent pas de la dimension.

Bibliographie

[1] A. Baddeley and D. Dereudre. Variational estimators for the parameters of Gibbs point process models. *Bernoulli*, 19(3) :905–930, 2013.

[2] V. Beffara and H. Duminil-Copin. The self-dual point of the two-dimensional random-cluster model is critical for $q \geq 1$. *Probab. Theory Related Fields*, 153(3-4) :511–542, 2012.

[3] M. Biskup, C. Borgs, J. T. Chayes, and R. Kotecký. Gibbs states of graphical representations of the Potts model with external fields. *J. Math. Phys.*, 41(3) :1170–1210, 2000. Probabilistic techniques in equilibrium and nonequilibrium statistical physics.

[4] J. Bricmont, K. Kuroda, and J. L. Lebowitz. The structure of Gibbs states and phase coexistence for nonsymmetric continuum Widom-Rowlinson models. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 67(2) :121–138, 1984.

[5] S. R. Broadbent and T. Hammersley. Percolation processes : I. crystals and mazes. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 53(4) :629–641, 1957.

[6] R. M. Burton and M. Keane. Density and uniqueness in percolation. *Comm. Math. Phys.*, 121(3) :501–505, 1989.

[7] J. T. Chayes, L. Chayes, and R. Kotecký. The analysis of the widom-rowlinson model by stochastic geometric methods. *Comm. Math. Phys.*, 172(3) :551–569, 1995.

[8] S. N. Chiu, D. Stoyan, W. S. Kendall, and J. Mecke. *Stochastic geometry and its applications*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley and Sons, Ltd., Chichester, third edition, 2013.

[9] J.-F. Coeurjolly, D. Dereudre, R. Drouilhet, and F. Lavancier. Takacs-Fiksel method for stationary marked Gibbs point processes. *Scand. J. Stat.*, 39(3) :416–443, 2012.

[10] D. Coupier and D. Dereudre. Continuum percolation for quermass interaction model. *Electron. J. Probab.*, 19 :no. 35, 19, 2014.

[11] D. J. Daley and D. Vere-Jones. *An introduction to the theory of point processes*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1988.

[12] D. Dereudre. The existence of quermass-interaction processes for nonlocally stable interaction and nonbounded convex grains. *Adv. in Appl. Probab.*, 41(3) :664–681, 2009.

[13] D. Dereudre. Introduction to the theory of Gibbs point processes. *ArXiv e-prints*, January 2017.

[14] D. Dereudre, R. Drouilhet, and H.-O. Georgii. Existence of Gibbsian point processes with geometry-dependent interactions. *Probab. Theory Related Fields*, 153(3-4) :643–670, 2012.

[15] D. Dereudre and P. Houdebert. Infinite volume continuum random cluster model. *Electron. J. Probab.*, 20 :no. 125, 24, 2015.

[16] D. Dereudre and F. Lavancier. Consistency of likelihood estimation for Gibbs point processes. *Ann. Stat.*, to appaer, 2017.

[17] D. Dereudre, F. Lavancier, and K. Stanková Helisová. Estimation of the intensity parameter of the germ-grain quermass-interaction model when the number of germs is not observed. *Scand. J. Stat.*, 41(3) :809–829, 2014.

[18] T. Fiksel. Estimation of parametrized pair potentials of marked and nonmarked Gibbsian point processes. *Elektron. Informationsverarb. Kybernet.*, 20(5-6) :270–278, 1984.

[19] P. J. Fitzsimmons, B. Fristedt, and L. A. Shepp. The set of real numbers left uncovered by random covering intervals. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 70(2) :175–189, 1985.

[20] H.-O. Georgii. *Gibbs measures and phase transitions*, volume 9 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, second edition, 2011.

[21] H.-O. Georgii and O. Häggström. Phase transition in continuum Potts models. *Comm. Math. Phys.*, 181(2) :507–528, 1996.

[22] H.-O. Georgii, O. Häggström, and C. Maes. The random geometry of equilibrium phases. In *Phase transitions and critical phenomena, Vol. 18*, volume 18 of *Phase Transit. Crit. Phenom.*, pages 1–142. Academic Press, San Diego, CA, 2001.

[23] H.-O. Georgii and J. M. Küneth. Stochastic comparison of point random fields. *J. Appl. Probab.*, 34(4) :868–881, 1997.

[24] H.-O. Georgii and H Zessin. Large deviations and the maximum entropy principle for marked point random fields. *Probability Theory and Related Fields*, 96 :177–204, 1993.

[25] C. Geyer and J. Møller. Simulation procedures and likelihood inference for spatial point processes. *Scand. J. Statist.*, 21(4) :359–373, 1994.

[26] J. A. Given and G. Stell. The Kirkwood-Salsburg equations for random continuum percolation. *J. Statist. Phys.*, 59(3-4) :981–1018, 1990.

[27] J.-B. Gouéré. Subcritical regimes in the Poisson Boolean model of continuum percolation. *Ann. Probab.*, 36(4) :1209–1220, 2008.

[28] G. Grimmett. *Percolation*, volume 321 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1999.

[29] G. Grimmett. *The random-cluster model*, volume 333 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[30] O. Häggström, M.-C. N. M. van Lieshout, and J. Møller. Characterization results and Markov chain Monte Carlo algorithms including exact simulation for some spatial point processes. *Bernoulli*, 5(4) :641–658, 1999.

[31] P. Hall. On continuum percolation. *Ann. Probab.*, 13(4) :1250–1266, 1985.

[32] J. M. Hammersley. Percolation processes : Lower bounds for the critical probability. *Ann. Math. Statist.*, 28(3) :790–795, 09 1957.

[33] J. M. Hammersley. Bornes supérieures de la probabilité critique dans un processus de filtration. pages 17–37, 1959.

[34] J. L. Jensen and J. Møller. Pseudolikelihood for exponential family models of spatial point processes. *Ann. Appl. Probab.*, 1(3) :445–461, 1991.

[35] H. Kesten. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals 1/2. *Communications in Mathematical Physics*, 74(1) :41–59, 1980.

[36] W. Klein. Potts-model formulation of continuum percolation. *Phys. Rev. B*, 26 :2677–2678, Sep 1982.

[37] J. L. Lebowitz and E. H. Lieb. Phase transition in a continuum classical system with finite interactions. *Physics Letters A*, 39 :98–100, April 1972.

[38] T. M. Liggett, R. H. Schonmann, and A. M. Stacey. Domination by product measures. *Ann. Probab.*, 25(1) :71–95, 1997.

[39] S. Mase. Asymptotic properties of MLEs of Gibbs models on $\mathbb{R}^d$. *unpublished preprint*, 2002.

[40] K. Matthes, J. Kerstan, and J. Mecke. *Infinitely divisible point processes.* John Wiley and Sons, Chichester-New York-Brisbane, 1978.

[41] A. Mazel, Y. Suhov, and I. Stuhl. A classical WR model with q particle types. *J. Stat. Phys.*, 159(5) :1040–1086, 2015.

[42] R. Meester and R. Roy. *Continuum percolation*, volume 119 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[43] J. Møller and K. Helisová. Power diagrams and interaction processes for union of discs. *Adv. Appli. Prob.*, 40(2) :321–347, 2008.

[44] J. Møller and K. Helisová. Likelihood inference for unions of interacting discs. *Scandinavian Journal of Statistics*, 37(3) :365–381, 2010.

[45] X. Nguyen and H. Zessin. Integral and differential characterizations Gibbs processes. *Mathematische Nachrichten*, 88(1) :105–115, 1979.

[46] Y. Ogata and M. Tanemura. Likelihood analysis of spatial point patterns. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 46(3) :496–518, 1984.

[47] D. Ruelle. *Statistical mechanics : Rigorous results.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[48] D. Ruelle. Existence of a phase transition in a continuous classical system. *Phys. Rev. Lett.*, 27 :1040–1041, Oct 1971.

[49] R. Takacs. Estimator for the pair-potential of a Gibbsian point process. *Statistics*, 17(3) :429–433, 1986.

[50] J. van den Berg and C. Maes. Disagreement percolation in the study of Markov fields. *Ann. Probab.*, 22(2) :749–763, 1994.

[51] B. Widom and J.S Rowlinson. New model for the study of liquid-vapor phase transitions. *J. Chem. Phys.*, 52 :1670–1684, 1970.