Année universitaire 2017-2018 **N° d'ordre:**

THÈSE / UNIVERSITÉ DE MONASTIR

Sous le sceau de la Faculté des Sciences de Monastir

École Doctorale Sciences et Technologies de l'Information

En Cotutelle Internationale avec l'Université de Lille 1

École Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur

Pour l'obtention du grade de : **DOCTEUR**

Spécialité : Mathématiques et Applications

Présentée par : **Marwa KHALIL**

Les variations des processus auto-similaires:

« Contributions à l'étude des draps browniens fractionnaires et de la solution de l'équation stochastique des ondes »

Soutenue le 05 Décembre 2017, à Monastir devant la commission de Jury

M. Afif MASMOUDI	**Professeur à l'Université de Sfax**	**Président / Rapporteur**
M. Jean-Marc BARDET	**Professeur à l'Université de Paris 1**	**Rapporteur**
Mme. Marianne CLAUSEL	**Professeur à l'Université de Lorraine**	**Examinatrice**
M. Faouzi TRABELSI	**Professeur à l'Université de Monastir**	**Examinateur**
M. Ciprian TUDOR	**Professeur à l'Université de Lille1**	**Directeur**
M. Mounir ZILI	**Professeur à l'Université de Monastir**	**Directeur**

Année universitaire 2017-2018 **N° d'ordre:**

"Mahmoud Darwich"

"*À* ma belle rose qui éblouit chaque jour ma vie,
À ma petite fille qui m'avait bien apprit l'espoir aux moments moroses."

À toi *Mirale*.

Remerciements

C'est un énorme plaisir pour moi d'écrire ces lignes par lesquelles je tiens à remercier et dédicacer les nombreuses personnes qui ont contribué chacune de sa manière à ce modeste travail scientifique.

Mes remerciements vont tout d'abord à mon directeur de thèse mr. *Mounir Zili* qui avec une grande générosité m'a fait profiter de ses qualités pédagogiques, de son énergie débordante et ses encouragements quasi-permanents. Sincèrement je lui suis très reconnaissante puisqu'il a énormément contribué à éveiller ma sensibilité probabiliste, non seulement durant les années de mon Doctorat, mais aussi durant mon mémoire de Mastère et pendant ses cours de calcul stochastiques en M2. Également je voudrais adresser un grand remerciement à mon directeur de thèse à Lille mr. *Ciprian Tudor* pour sa disponibilité sans faille, son sens mathématique très aigu, son dynamisme et surtout sa confiance en moi, je tiens aussi à cette occasion à lui remercier pour son aide et sa gentillesse durant mes séjours Lillois afin de les rendre si enrichissants mathématiquement ainsi que humainement. À vrai dire, je ne peux pas mesurer ce que j'ai appris durant ces trois ans aux côtés de mes deux directeurs de thèse, je suis donc très flattée que j'étais en collaboration avec eux et j'espère que cela continuera.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude envers mr. *Afif Masmoudi* pour m'avoir fait l'honneur de rapporter mon mémoire et de présider la soutenance. Ainsi, je remercie vivement mr. *Jean-Marc Bardet* pour la gentillesse avec laquelle il a accepté d'être un rapporteur de ma thèse. Vraiment je suis ravie d'avoir soumis mon travail à leur expertise.

Un immense merci à mme. *Marianne Clausel* et à mr. *Faouzi Trabelsi* qui ont eu l'amabilité d'examiner ce manuscrit et d'accepter de faire partie du jury. Qu'ils sachent combien ma reconnaissance est grande.

Ce travail est le fruit d'un énorme sacrifice de la part de ma (petite et grande) famille, alors il m'est agréable de le dédier à eux avec un grand amour. De ce fait, j'adresse un vif remerciement à mes parents *Mongi* et *Mounira* qui n'ont jamais épargné un effort pour m'aider et qu'ils m'ont soutenu et donné de la force d'aller toujours plus loin, mes recherches restent vaines pour trouver les mots suffisamment forts pour les remercier.

Merci à mon époux *Raouf*, la plus belle chose qui me soit arrivée dans ma vie, merci d'avoir traversé avec moi toutes ces épreuves et de m'épauler avec patience tout au long de mes études, son soutien m'a permis d'avancer dans la vie jusqu'à maintenant et je l'espère pour toujours.

Je ne peux pas passer sans envoyer une dédicace spéciale à ma petite rose, ma fille *Mirale*, qui sa naissance m'a ensoleillée mon quotidien. Que DIEU la garde pour moi.

Je n'oublie pas non plus de dire merci à mon adorable sœur *Minyar* qui m'a souvent remonté le moral lors de mes baisses de régime et de motivation, ainsi qu'un sincère merci à mes deux frères *Khalifa* et *Mounib* pour leur bonne humeur.

Je remercie de tout cœur mes beaux-parents *Hassen* et *Mansoura* pour m'avoir soutenu avec beaucoup d'affection. Un grand merci en particulier à mes oncles *Ali*, *Abdallah* et *Sami*, à mes tantes *Ahlem* et *Anissa*, à mes belles-sœurs *Widèd*, *Houda* et *Samia*, et à mon beau-frère *Mahdi*, qui m'ont constamment encouragé.

Impossible d'oublier mes chères amies *Inès*, *Nida* et *Loubna*, leur vraie amitié m'est précieuse. Merci également à *Meryem* qui m'a épaulé avec charité au tout début de mon arrivée à Paris et qui m'a partagé le bureau à Lille, merci pour tous les bons moments passés ensemble.

Finalement un grand merci à toute personne qui m'a aidé à enrichir, achever et présenter mon Doctorat et je demande à celles ou ceux que j'ai oubliés de bien vouloir me le pardonner.

Table des matières

Introduction

L'axe principal de ces travaux de thèse est la notion d'*auto-similarité* (ou de *scaling*), qui est considérée comme un objet central en théorie de probabilités en général et en calculs stochastiques en particulier. Historiquement parlant, une des premières études systématiques de cette notion a été établie en 1962 par J. Lamperti dans sa fameuse revue [47], il a mis en évidence le fait que les processus auto-similaires peuvent être perçus comme des limites en distribution des processus stochastiques renormalisés. Ce phénomène est connu depuis longtemps dans le domaine des processus de branchement, et il a été aussi observé récemment en théorie de la fragmentation. Également, divers auteurs tels que [12, 17] ont prouvé ce résultat.

Communément, la propriété de l'auto-similarité est définie par la donnée d'invariance de l'échelle [77, 33], c'est à dire qu'un processus stochastique préserve (sous certaine renormalisation) sa loi après un changement d'échelle du temps. L'affirmation selon [30], que l'utilité de l'auto-similarité réside uniquement dans le fait qu'elle est fortement liée aux théorèmes limites est fausse, car en réalité, il est connu que cette notion joue un rôle primordial, puisqu'elle assure la modélisation de plein de phénomènes comme le traffic internet, le traitement d'image, les reliefs géographiques, les mathématiques financières,..., citons entre autres [57, 91, 92] pour plus des applications.

Dans la littérature, il existe divers processus stochastiques (gaussiens et non-gaussiens) auto-similaires, nous nous focalisons sur le traitement du cas gaussien. Précisément, nous travaillerons, d'une part en dimension $d = 1$, avec le *mouvement brownien fractionnaire* $(B_t^H)_{t\geq 0}$ d'indice de *Hurst* $H \in]0,1[$, (mBf en abrégé). Ce processus qui a été introduit initialement par Kolmogorov [45] en 1940, sous l'appellation de "Wiener Spirals", ensuite étudié par Mandelbrot et Van Ness [58] en 1968, est défini comme l'unique processus gaussien centré H-auto-similaire et à accroissements stationnaires. C'est en quelques années que le mBf a connu son plein essor et est devenu un processus incontournable, il a été considéré comme un bon outil pour la modélisation des: réseaux de télécommunications, fluctuations boursières, turbulence,...

L'une des particularités du mBf est que pour $H = \frac{1}{2}$, il s'identifie au *mouvement brownien classique*, (en abréviation mB). Ce processus qui acte sa naissance par les observations intéressantes de Robert Brown en 1828, ensuite par une première étude mathématique rigoureuse en 1923 établie par Wiener, bien qu'il partage avec le mBf certaines propriétés telles que l'auto-similarité, la continuité höldérienne des trajectoires et la stationnarité des accroissements, il présente en contre partie une certaine différence manifestée par l'indépendance de ses accroissements, la propriété de Markov et la propriété de la semi-Martingale.

D'autre part, nous utiliserons aussi un autre type des processus auto-similaires, ceux qui sont en dimension $d = 2$. Notamment, nous prendrons le *drap brownien fractionnaire* $\left(B_{t,s}^{H_1,H_2}\right)_{t,s\geq 0}$, d'indice de Hurst $H = (H_1,H_2) \in]0,1[^2$, (dBf en abrégé), défini dans le sens évoqué par [2]. Clairement, ce champ stochastique gaussien est vu d'un côté, comme une extension anisotrope du mBf en conservant presque les même propriétés, (sauf que la classe des champs gaussiens auto-similaires et à accroissements rectangulaires stationnaires n'est pas unique [55]), et d'un autre côté, comme une généralisation du *drap brownien* classique, (dB), qui s'obtient lorsque $H_1 = H_2 = \frac{1}{2}$. Généralement, le dBf est pleinement employé dans deux domaines: l'imagerie médicale et la géologie, voir [11].

Après avoir présenté notre petite panoplie élémentaire du travail, nous passons proprement dit, pour poser les trois problématiques que nous allons les traiter à travers ce manuscrit, et qu'à leur intersection se trouve le mBf, le dBf et la propriété d'auto-similarité.

La première problématique trouve son origine dans cette idée initiatrice: comme l'ensemble des champs stationnaires est en fait l'image de l'ensemble des champs auto-similaires par une transformation trajectorielle bijective, qui consiste en un changement de l'échelle de temps par la fonction exponentielle, connue par l'appellation de la *transformation de Lamperti* [47, 33], (*transformation de Doob*[1]), et comme la transformée de Lamperti du mBf, qu'on la nomme souvent par le processus d'*Ornstein-Uhlenbeck frac-*

1. Dans [27], cette transformation est dite transformation de Doob au nom du mathématicien Joseph Leo Doob.

tionnaire (de second type) [37, 13, 96, 18], peut être vue d'après [37] comme une solution de l'équation différentielle stochastique (EDS) de type Langevin [18]:

$$\mathrm{d}X_t^\lambda = -\lambda X_t^\lambda \mathrm{d}t + \mathrm{d}Y_t^{\lambda,H}, \tag{0.0.1}$$

où le bruit $Y^{\lambda,H} = (Y_t^{\lambda,H})_{t\geq 0}$ est donné par la formule ci-dessous:

$$Y_t^{\lambda,H} := \int_0^t e^{-\lambda s} \mathrm{d}B^H_{a(s,H)},\, t \geq 0. \tag{0.0.2}$$

avec les coefficients:

$$a(s,H) = \frac{H}{\lambda} e^{\frac{\lambda s}{H}} \;\text{ et }\; X_0^\lambda = B^H_{a(0,H)} \sim \mathcal{N}\Big(0,(\frac{H}{\lambda})^{2H}\Big),\, \lambda > 0. \tag{0.0.3}$$

Alors quel sera l'analogue de ce résultat en dimension 2?. Autrement dit, nous devrons vérifier que la transformée de Lamperti du dBf, est une solution d'une certaine EDS bidimensionnelle de type Langevin analogue à (0.0.1). L'intérêt notable de ceci, c'est que nous pourrons déduire de nouveaux aspects pour le dBf par la procédée de la transformation de Lamperti inverse.

La deuxième problématique se résume tout simplement par une interrogation historique (posée depuis 1986 par [90]) : quel est l'impact d'un bruitage aléatoire (champ stochastique auto-similaire) sur la solution d'une équation aux dérivées partielles?. À vrai dire ce genre de problématique a fait l'objet d'une large littérature, et elle a déjà été beaucoup traitée dans le cas de l'équation de la *chaleur* [90, 73, 80, 86], et aussi dans le cas de l'équation des *ondes* [32, 23, 86]. C'est ainsi, notre focus s'orientera vers une étude de l'équation aux dérivées partielles stochastique (EDPS) des ondes dirigée par un champ aléatoire à 2-paramètres, qui nous le fixerons par un *bruit blanc* en temps et en espace et qui a un comportement pareil à celui du drap brownien. Précisément, nous nous intéresserons à étudier une notion assez importante qui caractérise un processus stochastique quelconque, c'est la notion de la *variation quadratique spatiale*. En effet, les variations quadratiques jouent un rôle fondamental dans l'analyse probabiliste et statistique d'un processus, puisqu'elles servent entre autres à la construction des estimateurs du paramètre d'auto-similarité pour les processus auto-similaires, construction des intégrales d'Itô pour les semi-Martingales,. . . .

La troisième problématique est due à une simple question: que deviendra le résultat évoqué sur l'EDPS des ondes (posée précédemment), lorsque nous serons au delà du cas ordinaire?, c'est à dire, quelles sont les nouvelles propriétés détectées sur le champ solution spatiale lorsque nous remplacerons le bruit blanc temporel par un autre bruit qui se comporte comme un mBf?. Divers travaux tels que [5, 20, 74] ont traité cette situation où le mBf est le bruit directeur de l'EDPS.

Venons-en à une description détaillée des chapitres de ce document qui commencera par un petit glossaire contenant certaines notations utilisées le long de notre travail.

Le Chapitre 1 exposera quelques définitions, propriétés et théorèmes concernant les processus stochastiques dans le cas unidimensionnel et puis dans le cas bidimensionnel. Ces données seront utilisées à plusieurs reprises dans le reste de la thèse.

Le Chapitre 2 traitera la première problématique. Pour cela, nous définirons en premier temps le champ transformée de Lamperti du dBf, ensuite nous présenterons ses divers propriétés (la stationnarité, la mémoire courte, la continuité höldérienne,...). Une fois ceci sera établi, nous énoncerons la version de l'EDS de Langevin vérifiée par la transformée de Lamperti du dBf et nous utiliserons principalement pour la résolution une formule d'intégration de Young dans le plan, qui est une généralisation de la celle unidimensionnelle [95, 6, 76]. Une autre caractérisation de la transformée de Lamperti du dBf que nous visons la donner, ce qu'il sera décomposable, lorsque les indices de Hurst $(H_1,H_2) \in \,]0,\frac{1}{2}[^2$, en une somme infinie des champs qui sont des transformations de Lamperti des drap browniens classiques mutuellement indépendants. L'intérêt remarquable de ce dernier résultat réside dans le fait qu'en appliquant la transformation de Lamperti inverse, nous aurons établi une approximation du dBf par des dB classiques mutuellement indépendants.

Dans le Chapitre 3, nous analyserons le comportement asymptotique spatiale (à temps fixe) de la suite des variations quadratiques associée au processus solution évolutive (connue sous l'appellation de solution mild) de l'EDPS des ondes dirigée par un bruit blanc spatio-temporel, il s'agit donc de la deuxième problématique. Précisément, nous vérifierons le théorème central limite (TCL) pour la renormalisation recentralisée de la suite suivante:

$$S_N = \sum_{j=0}^{N-1} \Big(u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j)\Big)^2, \quad N \geq 1, \tag{0.0.4}$$

où $x_j = \frac{j}{N}$, $j = 0,\ldots,N$ est une subdivision de l'intervalle unitaire $[0,1]$, $(u(t,x_j))_{0\leq j\leq N}$ est la solution évolutive de l'EDPS étudiée et t désigne l'indice du temps qui est fixé dans un horizon $[0,T]$, $T>0$. Pour l'argumentation de ce résultat, d'un côté, nous déterminerons l'expression exacte de la fonction de la covariance de la solution spatiale. Cette expression nous aidera implicitement à déduire que la solution est stationnaire (cependant sa version temporelle est auto-similaire d'indice $H+1-\frac{d}{2}$), à accroissements non-indépendants (mais avec une corrélation assez petite) et à trajectoires continues au sens de Hölder d'ordre $\gamma<\frac{1}{2}$ (même régularité que le mB classique). De l'autre côté, nous utiliserons principalement le récent théorème de Nourdin-Peccati [66, 67] appliqué pour les intégrales multiples de Wiener. En effet, ce théorème, dont la version initiale est connue sous l'appellation '*Fourth moment*', a combiné la méthode classique de Stein [79] qui consiste à donner une approximation d'une loi de probabilités par rapport à une autre, avec quelques éléments du calcul de Malliavin (dit aussi calcul stochastique des variations) qui est introduit en 1976 par Paul Malliavin [56] et qui représente un calcul différentiel sur un espace de dimension infinie. L'ouvrage [68] expose d'une façon très pédagogique les divers notions de calcul de Malliavin.

De ce fait, nous justifierons que la suite (0.0.4) renormalisée recentrée converge en distribution vers une loi normale centrée réduite avec une vitesse de convergence de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{N}}$, ce qui montrera que les variations quadratiques de la solution spatiale auront un comportement limite pareil à celui des variations quadratiques du mB standard. Finalement dans la dernière partie de ce chapitre, nous arriverons à établir le théorème central limite presque sûr (TCL presque sûr) grâce aux nouveaux critères donnés par [36].

Pour le Chapitre 4, nous nous intéresserons à l'analyse de la solution évolutive de l'EDPS linéaire des ondes dirigée par un champ gaussien additif auto-similaire à 2-paramètres qui se comporte comme un mBf de paramètre de Hurst $H\in\,]\frac{1}{2},1[$ par rapport au temps et comme un bruit blanc par rapport à l'espace. Tout d'abord, nous calculerons l'expression de la fonction de covariance de la solution spatiale seulement pour la dimension $d=1$, et nous utiliserons pour ce fait l'expression du noyau de Green associé à l'EDPS étudiée, au lieu de passer par la méthode classique de calcul qui se base essentiellement sur l'expression de la transformée de Fourrier de la solution. Ceci malgré qu'il nous amènera à un arsenal de calcul, mais il nous donnera une expression assez intéressante qui décrira la structure de la corrélation, le moment d'ordre 2 des accroissements spatiaux et la régularité de la solution. Une fois cette première étape est franchie, nous passerons ci-après à l'étude du comportement limite de la suite des variations quadratiques analogue à (0.0.4) pour le cas du mBf temporel. À vrai dire, l'étude asymptotique s'effectuera par le même raisonnement que celui que nous avons utilisé dans le cas blanc spatio-temporel (méthode de Stein-Malliavin, critère d'Ibragimov pour le TCL presque sûr). De ce fait, nous démontrerons que pour $H \in]\frac{1}{2},\frac{3}{4}[$, la suite des variations quadratiques sous sa forme renormalisée recentralisée converge faiblement, et puis presque sûrement vers une loi normale centrée réduite, d'une façon presque identique à celle du mBf qui dirige l'EDPS considérée (description avec les mêmes seuils). Ce résultat surprenant, mettra en évidence la grande influence du mBf (bruit temporel!) sur les différentes propriétés de la solution (spatiale!). Finalement, nous clôturerons ce chapitre par une construction, lorsque le temps est fixé dans un horizon $]1,T]$, d'un estimateur du paramètre de Hurst H. Cet estimateur qui se basera sur la suite des variations quadratiques spatiales, sera un estimateur consistent et asymptotiquement normal. Une interprétation statistique sera évoquée en dernier lieu.

Glossaire

✓ $(\Omega,\, \mathcal{F},\, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\, \mathbb{P})$ est un espace de probabilités filtré, où $\mathcal{F}$ est une tribu sur l'univers Ω, $(\mathcal{F})_{t\geq 0}$ est une filtration et $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité. On associe respectivement à $\mathbb{P}$ l'espérance et la variance correspondantes $\mathbf{E}$ et $\mathbf{V}$.

✓ $\mathcal{F}_t$ est la tribu des événements antérieurs au temps t.

✓ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

✓ $C_c(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^d$ qui sont continues et à support compact.

✓ $C^k(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^d$ qui sont continûment dérivables k fois.

✓ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^d$ à décroissance rapide.

✓ $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des distributions tempérées, c'est le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

✓ $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$ est l'ensemble des mesures de probabilités à support $\mathbb{R}_+$. Il est muni de la topologie de la convergence faible: on dit qu'une famille des mesures de probabilités $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers μ, si pour toute fonction f continue bornée sur $\mathbb{R}$ on a:

$$\int f \mathrm{d}\mu_N \longrightarrow_{N\to\infty} \int f \mathrm{d}\mu.$$

✓ $\mathcal{F}f$ correspond à la transformée de Fourrier de la fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et elle est donnée par l'expression suivante:

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi\cdot x} f(x)\mathrm{d}x, \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

✓ Δf est l'opérateur différentiel Laplacien d'une fonction réelle f de $\mathbb{R}^d$, et il est défini par:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}, \text{ pour tout } x_i \in \mathbb{R}^d.$$

✓ $=^d$ égalité en distribution entre les processus.

Chapitre 1

Préliminaires sur les champs stochastiques

Ce premier chapitre présentera un survol sommaire sur les éléments nécessaires à la compréhension des processus stochastiques (ponctuels) dans le cas unidimensionnel en premier lieu et dans le cas bidimensionnel en second lieu. Les propriétés des processus en dimension 2 sont typiquement des généralisations de celles en dimension 1.

L'objet de la théorie des *champs stochastiques* (ou aléatoires) est l'analyse des phénomènes aléatoires dépendant du temps. On désigne par $\mathbb{T}$ l'ensemble des temps (exemples $\mathbb{T}=\mathbb{R}_+^d$ ou un pavé de $\mathbb{R}_+^d$, $d \geq 1$), et par $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ un espace mesurable appelé *l'espace des états*. Un champ stochastique à valeurs dans $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ basé sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ des variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$. La *trajectoire* du champ $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *associée à* ω, avec $\omega \in \Omega$, est l'application:

$$\begin{aligned} X(\omega) : \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{E} \\ t &\longmapsto X_t(\omega). \end{aligned}$$

Pour ce chapitre on fixe la dimension de l'espace $d = 1$ ou 2, $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+^d$ et $(\mathbb{E}, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, alors un champ stochastique réel $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est dit *un processus à 1-paramètre* si $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$, cependant il est dit *un processus à 2-paramètres* si $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+^2$.

1.1 Préliminaires sur les processus à 1-paramètre

Définition 1.1.1 *Un processus stochastique réel* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est dit auto-similaire, si pour tout réel* $h > 0$*, il existe un réel* $k > 0$ *tel que:*

$$\{X_{ht},\, t \geq 0\} =^d \{kX_t,\, t \geq 0\}. \tag{1.1.1}$$

Il s'agit de la première définition de l'auto-similarité qui a été en faite établie par [47]. Le théorème suivant permet en quelques sorte de bien donner une caractérisation de la notion de l'auto-similarité d'un processus X.

Théorème 1.1.1 *Soit* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique réel non trivial, stochastiquement continu en* $t = 0$ *et auto-similaire, alors il existe un unique* $H > 0$ *tel que:*

$$\{X_{ht},\, t \geq 0\} =^d \{h^H X_t,\, t \geq 0\}, \text{ pour tout } h > 0. \tag{1.1.2}$$

La démonstration de ce théorème a été évoquée dans [47, 30].

Remarque 1.1.1 *On dit qu'un processus stochastique réel* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est:*

-trivial, si pour tout $t \geq 0$ *on a* $X_t = C$*,* $\mathbb{P}$*-presque sûrement avec* C *est une constante.*

-stochastiquement continu en t*, si pour tout* $\epsilon > 0$*, on a* $\lim_{s\to 0} \mathbb{P}\{\mid X_{t+s} - X_t \mid > \epsilon\} = 0$.

Passons maintenant à la définition de la stationnarité d'un processus X, cette notion assure que les caractéristiques de X ne varient pas avec la définition de l'origine du temps. En faite, la stationnarité d'un processus permet d'écrire sa fonction de covariance qui dépend de deux variables comme une fonction d'une seule variable de type positif. En particulier, la stationnarité des accroissements d'un processus quelconque permet de donner des propriétés finies sur ses trajectoires.

Définition 1.1.2 *Un processus stochastique réel* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est dit strictement stationnaire, si pour tout réel* $h > 0$ *on a :*

$$\{X_{t+h},\, t \geq 0\} =^d \{X_t,\, t \geq 0\}. \tag{1.1.3}$$

Néanmoins, on dit qu'un processus réel $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *de carré intégrable est largement stationnaire, s'il vérifie pour tous* t*,* $s \geq 0$ *les propriétés suivantes:*

$$\begin{cases} \mathbf{E}(X_t) & = & C \\ R_X(t,s) & = & R_X(t-s), \end{cases} \tag{1.1.4}$$

où C est une constante et R_X est la fonction de covariance de processus X.

Remarque 1.1.2 *Un processus stochastique du second ordre et strictement stationnaire, alors il est largement stationnaire. La réciproque est fausse, mais si on fait l'hypothèse supplémentaire que le processus est gaussien centré, alors la stationnarité large implique la stationnarité stricte.*

Un exemple des processus H-auto-similaires et qui a les *accroissements stationnaires*, c'est le mouvement brownien fractionnaire (mBf), ce processus est défini comme ci-dessous:

Définition 1.1.3 *Un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in]0,1[$ est un processus gaussien réel centré noté $(B_t^H)_{t\geq 0}$, défini sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et admettant pour tous t, $s \geq 0$ la fonction de covariance:*

$$R^H(t,s) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right). \tag{1.1.5}$$

Propriétés 1.1.1 *Parmi les différentes propriétés du mBf, on cite qu'il est à accroissements non indépendants pour $H \neq \frac{1}{2}$, sa variation quadratique est presque sûrement infinie sur tout intervalle pour $H < \frac{1}{2}$, ses trajetoires sont localement höldériennes d'ordre $\gamma < H$, et pour tout $H \neq \frac{1}{2}$ il est ni une semi-Martingale et ni un processus Markovien.*

L'existence ainsi que le reste des propriétés du mBf peuvent être consignées dans [58, 86, 77, 30] et les références au dedans.

Remarque 1.1.3 *Les cas limites $H = 0$ et $H = 1$ présentent des particularités par rapport aux cas intermédiaires, cependant le cas $H = \frac{1}{2}$, coïncide avec le mouvement brownien standard (dit aussi le processus de Wiener et noté mB en abrégé).*

Une autre notion d'une importance majeure, c'est la notion de la *mémoire longue* d'un processus stochastique, dite aussi la *dépendance à long terme*. Plusieurs définitions peuvent être données selon le domaine envisagé (domaine temporel ou fréquentiel), on pourra consulter notamment [78, 63] pour plus des renseignements. Pour nous, on se contente d'utiliser celle qui était proposée par [63] (spécialement dans le domaine temporel), et qui se base sur la caractérisation du comportement asymptotique de la fonction d'auto-corrélation d'un processus stochastique discret stationnaire.

Définition 1.1.4 *Étant donné un processus stochastique stationnaire centré et à temps discret $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que X est à mémoire longue si la quantité suivante:*

$$\sum_{n\geq 1} \rho_X(n) = \infty. \tag{1.1.6}$$

Sinon le processus est dit à mémoire courte. La suite $(\rho_X(n))_{n\geq 1}$ précitée désigne la mémoire et on la définit par:

$$\rho_X(n) = \mathbf{E}\big(X_1 X_{n+1}\big). \tag{1.1.7}$$

Remarque 1.1.4 *La dépendance à long terme est étroitement associée à la propriété de l'auto-similarité des processus stochastiques auto-similaires à accroissements stationnaires. La connexion est déterminée par l'indice d'auto-similarité de processus consideré qui nous renseigne sur la nature de sa mémoire: courte ou longue.*

Exemple 1.1.1 *Lorsque l'indice de Hurst H, (qui est encore l'indice d'auto-similarité), est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$, le mBf, plus précisément le processus accroissement $X_n = \{B^H_{n+1} - B^H_n,\, n \geq 1\}$ qu'on le nomme par le bruit gaussien fractionnaire, vérifie la dépendance à long terme, cependant pour le cas strictement inférieur à $\frac{1}{2}$, il satisfait la dépendance à court terme. La clé du résultat est le comportement asymptotique de la mémoire associée aux accroissements de $(B^H_n)_{n\geq 1}$ et qui satisfait:*

$$\rho_{B^H}(n) \sim H(2H-1)n^{2H-2}, \quad n \to \infty. \tag{1.1.8}$$

L'article [81] a mis en évidence cette propriété.

Le théorème suivant énonce un critère garantissant la continuité trajectorielle d'un processus stochastique donné à modification près. Il s'agit du critère de régularité de Kolmogorov qui a été donné par Kolmogorov puis démontré par Slutsky et Chentsov au milieu du 20^e siècle, et ce résultat peut être évoqué dans [75, 86].

Théorème 1.1.2 *Soit $X = (X_t)_{t\in K}$, où K est un compact de $\mathbb{R}_+$, un processus stochastique réel défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel qu'il existe des réels α, β et C strictement positifs pour lesquels on a pour tous $t, s \in K$:*

$$\mathbf{E}\big(\mid X_t - X_s \mid^\alpha\big) \leq C \mid t - t' \mid^{1+\beta}. \tag{1.1.9}$$

Alors, pour tout $\gamma \in \,]0, \frac{\beta}{\alpha}[$, il existe une modification $X' = (X'_t)_{t\in K}$ de X dont toutes les trajectoires sont (localement) Hölder continues d'ordre γ.

Définition 1.1.5 *On dit qu'un processus stochastique réel* $X = (X_t)_{t \in K}$*, où* K *est un compact de* $\mathbb{R}$*, est à trajectoires localement Hölder continues d'ordre* $\gamma \in]0,1]$*, si pour tout* $\omega \in \Omega$*, il existe une constante* $C_\omega > 0$*, tel que pour tous* t*,* $s \in K$*, on a l'inégalité suivante:*

$$| X_t(\omega) - X_s(\omega) | \leq C_\omega | t - s |^\gamma. \tag{1.1.10}$$

Cependant $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ *est dit à trajectoires globalement Hölder continues d'ordre* $\gamma \in]0,1]$*, si pour tout* $\omega \in \Omega$*, il existe une constante* $C_\omega > 0$*, tel que pour tous* t*,* $s \in \mathbb{R}$*, on a:*

$$| X_t(\omega) - X_s(\omega) | \leq C_\omega | t - s |^\gamma. \tag{1.1.11}$$

Un exemple direct issu du théorème précédent est le suivant:

Exemple 1.1.2 *Dans le cas où* $B^H = (B_t^H)_{t \in K}$ *est un mBf réel, alors il existe une modification* $X = (X_t)_{t \in K}$ *de* B^H *Hölder continue d'ordre* $\gamma \in]0,H[$*. Au délà de* H*, les trajectoires du mBf n'ont* $\mathbb{P}$*-p.s. pas de continuité höldérienne, ce résultat est typiquement démontré en se basant sur la loi du logarithme itéré prouvée dans [1].*

1.2 Préliminaires sur les processus à 2-paramètres

Définition 1.2.1 *Un processus stochastique réel* $X = (X_{t,s})_{t,s \geq 0}$ *à 2-paramètres est dit auto-similaire d'indice d'auto-similarité* $H = (H_1,H_2) \in]0,+\infty[^2$*, si pour tous réel* h_1*,* $h_2 > 0$*, le champ aléatoire* $\widehat{X}$ *donné par:*

$$\widehat{X}_{t,s} = h_1^{H_1} h_1^{H_2} X_{\frac{t}{h_1}, \frac{s}{h_2}},\ t,\, s \geq 0 \tag{1.2.12}$$

a les mêmes lois finies dimensionnelles que le champ X*.*

Définition 1.2.2 *Un processus stochastique réel* $X = (X_{t,s})_{t,s \geq 0}$ *à 2-paramètres est dit (strictement) stationnaire, si pour tous réel* h_1*,* $h_2 > 0$*, le champ* $\widehat{X}$ *défini par:*

$$\widehat{X}_{t,s} = X_{t+h_1, s+h_2},\ t,\, s \geq 0 \tag{1.2.13}$$

a les mêmes lois finies dimensionnelles que le champ X*.*

Définition 1.2.3 *Un processus stochastique réel $X = (X_{t,s})_{t,s\geq 0}$ à 2-paramètres et nul sur les axes est dit à accroissements rectangulaires stationnaires, si pour tous réel h_1, $h_2 > 0$, le champ défini par:*

$$(X_{t+h_1,s+h_2} - X_{t+h_1,h_2} - X_{h_1,s+h_2} + X_{h_1,h_2})_{t,s\geq 0} \tag{1.2.14}$$

et le champ X ont les mêmes lois finies dimensionnelles.

Un exemple immédiat des processus à 2-paramètres est le drap brownien fractionnaire (dBf), qu'on le définit de la manière suivante:

Définition 1.2.4 *On dit que le champ $B^{H_1,H_2} = \left(B^{H_1,H_2}_{t,s}\right)_{t,s\geq 0}$ est le drap brownien fractionnaire normalisé (anisotrope) d'indice de Hurst $H = (H_1,H_2) \in]0,1[^2$, le processus stochastique à 2-paramètres gaussien centré nul sur les axes, et de fonction de covariance donnée par: pour tous réels t, s, t', $s' \geq 0$,*

$$\begin{aligned} R^{H_1,H_2}\big((t,t'),(s,s')\big) &:= \mathbf{E}\Big(B^{H_1,H_2}_{t,s} B^{H_1,H_2}_{t',s'}\Big) \\ &= R^{H_1}(t,t') R^{H_2}(s,s') \\ &= \frac{1}{4}\Big(t^{2H_1} + t'^{\,2H_1} - |t-t'|^{2H_1}\Big) \\ &\quad \times\Big(s^{2H_2} + s'^{\,2H_2} - |s-s'|^{2H_2}\Big), \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

avec R^H est la fonction de covariance du mBf d'indice de Hurst $H \in]0,1[$.

Remarque 1.2.1 *Les différentes méthodes de la construction du dBf pourront être vues dans les travaux [2, 31, 51]. En fait, il existe divers extensions possibles du mouvement brownien fractionnaire en dimension 2 liées à la généralisation de la fonction de covariance. À titre d'exemple, il y a le champ de Wiener-Chentsov fractionnaire qui a été introduit initialement dans la thèse de Léger [48], et aussi le champ brownien fractionnaire de Lévy qui a été étudié par Bonami et Estrade [14].*

Toutefois, nous nous restreignons à travailler avec l'extension donnée par la Définition 1.2.4 ci-dessus.

Propriété 1.2.1 *Notons que le dBf B^{H_1,H_2} défini au sens de la Définition 1.2.4, est un processus aléatoire à 2-paramètres auto-similaire d'indice d'auto-similarité $H = (H_1,H_2)$ et à accroissements rectangulaires stationnaires, dans le sens des Définitions respectives*

1.2.1 et 1.2.3 (voir [2]). Néanmoins, contrairement au cas du mBf, ce n'est pas l'unique champ gaussien auto-similaire à accroissements rectangulaires stationnaires, (l'explication détaillée de l'absence d'unicité peut être trouvée dans l'article [55]).

Remarque 1.2.2 *Lorsque $H_1 = H_2 = \frac{1}{2}$, il s'agit donc du cas classique et on parle du drap brownien, qu'on le note tout simplement par dB.*

Définition 1.2.5 *On dit qu'un processus stochastique réel $X = (X_{t,s})_{(t,s)\in K}$ à 2-paramètres, avec K un compact de $\mathbb{R}_+^2$, est à trajectoires localement Hölder continues d'ordre $(\gamma_1,\gamma_2) \in]0,1]^2$, si pour tout $\omega \in \Omega$, il existe une constante $C_\omega > 0$, tels que pour tous $(t,t') \in K$ et $(s,s') \in K$ vérifiant $0 \le t' < t$ et $0 \le s' < s$, on a l'inégalité suivante:*

$$\Big| X_{t,s}(\omega) - X_{t,s'}(\omega) - X_{t',s}(\omega) + X_{t',s'}(\omega) \Big| \le C_\omega | \, t - t' \, |^{\gamma_1} | \, s - s' \, |^{\gamma_2}. \tag{1.2.16}$$

Aussi, on dit que le champ stochastique réel $X = (X_{t,s})_{(t,s)\in\mathbb{R}^2}$ est à trajectoires globalement Hölder continues d'ordre $(\gamma_1,\gamma_2) \in]0,1]^2$, si pour tout $\omega \in \Omega$, il existe une constante $C_\omega > 0$, tels que pour tous $0 \le t' < t$ et $0 \le s' < s$, on a:

$$\Big| X_{t,s}(\omega) - X_{t,s'}(\omega) - X_{t',s}(\omega) + X_{t',s'}(\omega) \Big| \le C_\omega | \, t - t' \, |^{\gamma_1} | \, s - s' \, |^{\gamma_2}. \tag{1.2.17}$$

Un outil assez fameux pour la caractérisation de la continuité höldérienne pour les processus bidimensionnels, est le critère de Kolmogorov (voir [2, 40] ou [86] Appendice B).

La dernière définition présentée dans ce chapitre généralise la notion de la *mémoire longue* (ainsi que la *mémoire courte*) pour les champs aléatoires en dimension 2.

Définition 1.2.6 *Un processus stochastique réel $X = (X_{t,s})_{(t,s)\in\mathbb{R}_+^{*2}}$ à 2-paramètres et nul sur les axes, est dit à mémoire courte (dit aussi qu'il vérifie la dépendance à court terme), si la quantité suivante:*

$$\sum_{n,m\ge 1} \rho_X(n,m) < \infty. \tag{1.2.18}$$

Sinon, le champ est dit à mémoire longue (dit aussi qu'il vérifie la dépendance à long terme). La notion ρ précitée désigne la mémoire en dimension 2 et on la définit par:

$$\rho_X(n,m) = \mathbf{E}\Big(X_{1,1} \left(X_{n+1,m+1} - X_{n+1,m} - X_{n,m+1} + X_{n,m} \right) \Big). \tag{1.2.19}$$

Remarque 1.2.3 *Le long de notre travail, on ne considérera que des versions continues des champs aléatoires étudiés, et on se place dans un espace de probabilités filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

Chapitre 2

Transformation de Lamperti du drap brownien fractionnaire

DAns ce second chapitre[1], nous nous intéresserons particulièrement à étudier la *transformée de Lamperti* du drap brownien fractionnaire, ainsi que ses divers propriétés. Dans un premier temps nous définirons le champ transformée de Lamperti du dBf, puis nous présenterons l'équation différentielle stochastique (EDS) vérifiée par ce processus à 2 paramètres. Une version bidimensionnelle de la formule d'intégration par parties sera mise en évidence puisqu'elle est l'ingrédient essentiel pour l'étude de notre EDS considérée. Quant à la dernière partie de ce chapitre, elle sera consacrée pour donner une décomposition en série infinie de la transformée de Lamperti du dBf en fonction de celle du dB classique.

2.1 Intégrale de Young dans le plan

Avant de présenter le cas de l'intégration de Young plane et pour mieux le comprendre, il nous semble important de commençer par énoncer un petit aperçu sur l'intégrale de Young unidimensionnelle. Pour celà nous fixons $\alpha \in]0,1]$ et nous désignons par $\mathbf{H}_{[a,b],\alpha}$ l'espace des fonctions f à valeurs réelles et définies sur l'intervalle $[a,b]$, $a < b$, telle que f est une fonction α-höldérienne. La norme höldérienne d'une telle fonction f est donnée

1. Ce chapitre fait l'objet d'un article [41] publié dans la revue "Fractional Calculus and Applied Analysis".

par:

$$\|f\|_{[a,b],\alpha} = \sup_{a\leq u,v\leq b} \frac{|f(u)-f(v)|}{|u-v|^{\alpha}}, \quad u \neq v. \tag{2.1.1}$$

Nous appuyons essentiellement sur la référence [94] pour rappeler cette notion d'intégrale, et pour plus de détails, le lecteur est invité à se référer à [31, 95]. En faite, soient $f \in \mathbf{H}_{[a,b],\alpha}$ et $g \in \mathbf{H}_{[a,b],\beta}$ tels que $\alpha+\beta > 1$ et $(\alpha,\beta) \in]0,1]^2$, alors:

$$\int_a^b f(u)\mathrm{d}g(u) \tag{2.1.2}$$

existe comme étant la limite de la somme de Riemann-Stieltjes $\sum_{i=0}^{n-1} f(u_i)\big(g(u_{i+1})-g(u_i)\big)$, pour toute subdivision Δ de l'intervalle $[a,b]$ définie par la suite des points $(u_i)_{0\leq i\leq n}$, tels que $a = u_0 < \ldots < u_n = b$ et le pas vérifie $\|\Delta\| := \max_{0\leq i\leq 1} |u_{i+1}-u_i| \rightarrow_{n\to\infty} 0$. L'intégrale définit par (2.1.2) est dite l'*intégrale de Young unidimensionnelle.*

Passons maintenant au cas bidimensionnel, on désigne par $\mathbf{H}_{P,\alpha_1,\alpha_2}$, où $(\alpha_1,\alpha_2) \in]0,1]^2$, l'espace des fonctions f à valeurs réelles définies sur le pavé $P = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$, $a_i > b_i$, $i = 1,2$, et qui sont (α_1,α_2)-höldériennes sur P, c.à.d f est continue avec:

$$\| f(a_1,.) \|_{[a_2,b_2],\alpha_2} < \infty, \quad \| f(.,a_2) \|_{[a_1,b_1],\alpha_1} < \infty \tag{2.1.3}$$

et

$$\| f \|_{P,\alpha_1,\alpha_2} = \sup_{a_i\leq u_i\neq v_i\leq b_i} \frac{\Big|f\big([u_1,v_1]\times[u_2,v_2]\big)\Big|}{|u_1-v_1|^{\alpha_1}|u_2-v_2|^{\alpha_2}} < \infty, \tag{2.1.4}$$

où $f\big([u_1,v_1]\times[u_2,v_2]\big) = f(v_1,v_2)-f(v_1,u_2)-f(u_1,v_2)+f(u_1,u_2)$ indique l'accroissement rectangulaire de la fonction f sur $[u_1,v_1]\times[u_2,v_2] \subset P$.

À ce niveau nous donnons le lemme suivant évoqué dans le Théorème 3.2 de [88].

Lemme 2.1.1 *Soit le pavé $P_{\epsilon_0} = [a_1-\epsilon_0,b_1+\epsilon_0]\times[a_2-\epsilon_0,b_2+\epsilon_0]$, $\epsilon_0 > 0$, et soit $(\alpha_i,\beta_i) \in]0,1]^2$, $i = 1, 2$. Si $f \in \mathbf{H}_{P_{\epsilon_0},\alpha_1,\alpha_2}$ et $g \in \mathbf{H}_{P_{\epsilon_0},\beta_1,\beta_2}$ tel que $\alpha_i+\beta_i > 1$, alors l'intégrale:*

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(u,v)\mathrm{d}g(u,v) \tag{2.1.5}$$

existe et elle est définie comme étant la limite de la somme suivante de Riemann-Stieltjes:

$$S_\Delta(f,g) := \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} f(u_i,v_j)g\Big([u_i,u_{i+1}]\times[v_j,v_{j+1}]\Big), \tag{2.1.6}$$

ceci pour toute subdivision $\Delta = (u_i,v_j)_{0\le i\le n,\,0\le j\le m}$, $a_1 = u_0 < \ldots < u_n = b_1$ *et* $a_2 = v_0 < \ldots < v_m = b_2$ *de* P, *avec* $\|\Delta\| := \max_{0\le i\le n} |u_{i+1}-u_i| + \max_{0\le j\le m} |v_{j+1}-v_j| \to_{n,m\to\infty} 0.$

Aussi, nous présentons le lemme ci-dessous qui étend la formule d'intégration par parties classique, une autre formulation dans le cas à deux variables -plus au moins différente- peut être trouvée dans le Théorème 4 de l'article [93].

Lemme 2.1.2 *Supposons* $f \in \mathbf{H}_{P_{\epsilon_0},\alpha_1,\alpha_2}$ *et* $g \in \mathbf{H}_{P_{\epsilon_0},\beta_1,\beta_2}$ *tel que* $\alpha_i + \beta_i > 1$, $i = 1, 2$. *Alors pour tous* $a_1 \le 0 < t \le b_1$ *et* $a_2 \le 0 < s \le b_2$, *la formule d'intégration par parties pour deux paramètres est donnée par:*

$$\begin{aligned} f(t,s)g(t,s) &= f(0,0)g(0,0) + \int_0^s f(0,v)\mathrm{d}_v g(0,v) + \int_0^s g(0,v)\mathrm{d}_v f(0,v) \\ &\quad + \int_0^t f(u,0)\mathrm{d}_u g(u,0) + \int_0^t g(u,0)\mathrm{d}_u f(u,0) \\ &\quad + \int_0^t\int_0^s \mathrm{d}_u f(u,v)\mathrm{d}_v g(u,v) + \int_0^t\int_0^s \mathrm{d}_v f(u,v)\mathrm{d}_u g(u,v) \\ &\quad + \int_0^t\int_0^s f(u,v)\mathrm{d}g(u,v) + \int_0^t\int_0^s g(u,v)\mathrm{d}f(u,v) \qquad (2.1.7) \end{aligned}$$

Preuve : Tout d'abord nous mentionnons que les fonctions f et g peuvent être prolongeables par continuité par 0 sur $\mathbb{R}^2 \setminus P_{\epsilon_0}$, ce qui assure que f et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$.

Soit $U \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ un noyau qui vérifie: $U \ge 0$, $U(x,y) = 0$ lorsque $\|(x,y)\| \ge 1$ et $\int_{\mathbb{R}^2} U(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$, on construit, pour tout $\epsilon > 0$, la suite de l'approximation de l'unité $U_\epsilon(x,y) = \epsilon^{-2}U(\frac{x}{\epsilon},\frac{y}{\epsilon})$, alors la régularisation par convolution de la fonction f s'écrit:

$$\begin{aligned} f_\epsilon(x,y) &:= (U_\epsilon * f)(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} U_\epsilon(x-u,y-v)f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x-\epsilon u,y-\epsilon v)U(u,v)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \qquad (2.1.8) \end{aligned}$$

Comme $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$, alors clairement $f_\epsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, (mêmement la régularisation g_ϵ de g est dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$). Grâce au théorème de densité, nous obtenons que $f_\epsilon \longrightarrow_{\epsilon\to 0} f$ et $g_\epsilon \longrightarrow_{\epsilon\to 0} g$ uniformément sur le pavé $P = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2] \subset P_{\epsilon_0}$, et nous montrons par la suite que $f_\epsilon \in \mathbf{H}_{P,\alpha_1,\alpha_2}$, en effet, pour $i = 1, 2$, on vérifie que:

$$\begin{aligned}
\| f_\epsilon \|_{P,\alpha_1,\alpha_2} &= \sup_{a_i \le u_i \neq v_i \le b_i} \frac{\Big| f_\epsilon\Big([u_1,v_1] \times [u_2,v_2]\Big)\Big|}{|u_1 - v_1|^{\alpha_1} |u_2 - v_2|^{\alpha_2}} \\
&= \sup_{a_i \le u_i \neq v_i \le b_i} \frac{\Big| f_\epsilon(v_1,v_2) - f_\epsilon(u_1,v_2) - f_\epsilon(v_1,u_2) + f_\epsilon(u_1,u_2)\Big|}{|u_1 - v_1|^{\alpha_1} |u_2 - v_2|^{\alpha_2}} \\
&\le \sup_{a_i \le u_i \neq v_i \le b_i} \int_{I\!R^2} \frac{\Big| f(v_1 - \epsilon x, v_2 - \epsilon y) - f(u_1 - \epsilon x, v_2 - \epsilon y)\Big|}{|u_1 - v_1|^{\alpha_1}} \\
&\quad \times \frac{U(x,y)}{|u_2 - v_2|^{\alpha_2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \sup_{a_i \le u_i \neq v_i \le b_i} \int_{I\!R^2} \frac{\Big| f(v_1 - \epsilon x, u_2 - \epsilon y) - f(u_1 - \epsilon x, u_2 - \epsilon y)\Big|}{|u_1 - v_1|^{\alpha_1}} \\
&\quad \times \frac{U(x,y)}{|u_2 - v_2|^{\alpha_2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\le \frac{2}{|u_2 - v_2|^{\alpha_2}} \sup_{z \in [a_2 - \epsilon_0, b_2 + \epsilon_0]} \| f(.,z) \|_{[a_1 - \epsilon_0, b_1 + \epsilon_0],\alpha_1} \\
&< \infty. \qquad (2.1.9)
\end{aligned}$$

et d'une façon pareille nous nous assurons que $g_\epsilon \in \mathbf{H}_{P,\beta_1,\beta_2}$.

Notre but maintenant est de vérifier la relation (2.1.7) pour les fonctions f_ϵ et g_ϵ, de ce fait nous utilisons la formule d'intégration par parties unidimensionnelle:

$$f(t)g(t) = f(0)g(0) + \int_0^t f(u)\mathrm{d}g(u) + \int_0^t g(u)\mathrm{d}f(u), \;\; f,\, g \in \mathcal{C}^1(I\!R) \qquad (2.1.10)$$

alors nous déduisons le résultat suivant lorsque la variable t varie et la variable s est fixée:

$$\begin{aligned}
f_\epsilon(t,s)g_\epsilon(t,s) &= f_\epsilon(0,s)g_\epsilon(0,s) + \int_0^t f_\epsilon(u,s)\mathrm{d}_u g_\epsilon(u,s) \\
&\quad + \int_0^t g_\epsilon(u,s)\mathrm{d}_u f_\epsilon(u,s). \qquad (2.1.11)
\end{aligned}$$

Également, on applique encore la formule d'intégration par parties (2.1.10) pour chaque terme à droite de la quantité (2.1.11), mais maintenant lorsque la variable s varie et la variable t est fixée. Ceci nous permet d'obtenir aisément la série des résultats ci-dessous:

$$f_\epsilon(0,s)g_\epsilon(0,s) = f_\epsilon(0,0)g_\epsilon(0,0) + \int_0^s f_\epsilon(0,v)\mathrm{d}_v g_\epsilon(0,v) + \int_0^s g_\epsilon(0,v)\mathrm{d}_v f_\epsilon(0,v) \qquad (2.1.12)$$

$$\begin{aligned}\int_0^t f_\epsilon(u,s)\mathrm{d}_u g_\epsilon(u,s) &= \int_0^t f_\epsilon(u,0)\mathrm{d}_u g_\epsilon(u,0) + \int_0^t\int_0^s f_\epsilon(u,v)\mathrm{d}g_\epsilon(u,v)\\ &+ \int_0^t\int_0^s \mathrm{d}_v f_\epsilon(u,v)\mathrm{d}_u g_\epsilon(u,v) \qquad (2.1.13)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^t g_\epsilon(u,s)\mathrm{d}_u f_\epsilon(u,s) &= \int_0^t g_\epsilon(u,0)\mathrm{d}_u f_\epsilon(u,0) + \int_0^t\int_0^s g_\epsilon(u,v)\mathrm{d}f_\epsilon(u,v)\\ &+ \int_0^t\int_0^s \mathrm{d}_u f_\epsilon(u,v)\mathrm{d}_v g_\epsilon(u,v). \qquad (2.1.14)\end{aligned}$$

Regroupons (2.1.12), (2.1.13) et (2.1.14) dans (2.1.11), nous arrivons directement à démontrer que:

$$\begin{aligned}f_\epsilon(t,s)g_\epsilon(t,s) &= f_\epsilon(0,0)g_\epsilon(0,0) + \int_0^s f_\epsilon(0,v)\mathrm{d}_v g_\epsilon(0,v) + \int_0^s g_\epsilon(0,v)\mathrm{d}_v f_\epsilon(0,v)\\ &+ \int_0^t f_\epsilon(u,0)\mathrm{d}_u g_\epsilon(u,0) + \int_0^t g_\epsilon(u,0)\mathrm{d}_u f_\epsilon(u,0)\\ &+ \int_0^t\int_0^s \mathrm{d}_u f_\epsilon(u,v)\mathrm{d}_v g_\epsilon(u,v) + \int_0^t\int_0^s \mathrm{d}_v f_\epsilon(u,v)\mathrm{d}_u g_\epsilon(u,v)\\ &+ \int_0^t\int_0^s f_\epsilon(u,v)\mathrm{d}g_\epsilon(u,v) + \int_0^t\int_0^s g_\epsilon(u,v)\mathrm{d}f_\epsilon(u,v). \qquad (2.1.15)\end{aligned}$$

Pour le reste de la démonstration, on adopte les notations suivantes:

$$\text{pour tout } v\in\mathbb{R},\ f_{1,\epsilon}: u \rightarrow f_\epsilon(u,v) \text{ et } g_{1,\epsilon}: u \rightarrow g_\epsilon(u,v,),$$

$$\text{pour tout } u\in\mathbb{R},\ f_{2,\epsilon}: v \rightarrow f_\epsilon(u,v) \text{ et } g_{2,\epsilon}: v \rightarrow g_\epsilon(u,v),$$

alors le Lemme 2.1.1 nous permet d'obtenir:

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^s f_\epsilon(0,v)\mathrm{d}_v g_\epsilon(0,v) &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^s f_{2,\epsilon}(v)\mathrm{d}g_{2,\epsilon}(v)\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f_{2,\epsilon}(v_i)\Big(g_{2,\epsilon}(v_{i+1}) - g_{2,\epsilon}(v_i)\Big)\end{aligned}$$

pour toute subdivision Δ de l'intervalle $[0,s]$ définie par $0 = v_0 < \ldots < v_n = s$, $n \geq 1$, où $a_2 \leq 0 < s \leq b_2$ et $\|\Delta\| \to_{n\to\infty} 0$.

Or, comme $\lim\limits_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(0,v) = \lim\limits_{\epsilon\to 0} f_{2,\epsilon}(v) = f_2(v)$, il en résulte que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_{2,\epsilon}(v_i)\Big(g_{2,\epsilon}(v_{i+1}) - g_{2,\epsilon}(v_i)\Big) \longrightarrow_{\epsilon\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f_2(v_i)\Big(g_2(v_{i+1}) - g_2(v_i)\Big) \text{ uniformément sur } [0,s],$$

d'où, nous trouvons que:

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^s f_\epsilon(0,v)\mathrm{d}_v g_\epsilon(0,v) &= \lim_{\|\Delta\|\to 0}\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f_{2,\epsilon}(v_i)\Big(g_{2,\epsilon}(v_{i+1})-g_{2,\epsilon}(v_i)\Big)\\ &= \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f_2(v_i)\Big(g_2(v_{i+1})-g_2(v_i)\Big)\\ &= \int_0^s f_2(v)\mathrm{d}g_2(v)\\ &= \int_0^s f(0,v)\mathrm{d}_v g(0,v). \qquad (2.1.16)\end{aligned}$$

D'une façon analogue, nous déduisons les résultats ci-après:

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^s g_\epsilon(0,v)\mathrm{d}_v f_\epsilon(0,v) &= \int_0^s g(0,v)\mathrm{d}_v f(0,v)\\ \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^t f_\epsilon(u,0)\mathrm{d}_u g_\epsilon(u,0) &= \int_0^t f(u,0)\mathrm{d}_u g(u,0)\\ \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^t g_\epsilon(u,0)\mathrm{d}_u f_\epsilon(u,0) &= \int_0^t g(u,0)\mathrm{d}_u f(u,0)\\ \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^t\int_0^s f_\epsilon(u,v)\mathrm{d}g_\epsilon(u,v) &= \int_0^t\int_0^s f(u,v)\mathrm{d}g(u,v)\\ \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^t\int_0^s g_\epsilon(u,v)\mathrm{d}f_\epsilon(u,v) &= \int_0^t\int_0^s g(u,v)\mathrm{d}f(u,v).\end{aligned}$$

Aussi, nous amenons grâce au théorème de Fubini à prouver que:

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^t\int_0^s \mathrm{d}_u f_\epsilon(u,v)\mathrm{d}_v g_\epsilon(u,v)\\ &=\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^s\int_0^t \mathrm{d}f_{1,\epsilon}(u)\mathrm{d}g_{2,\epsilon}(v)\\ &=\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{\|\Delta\|\to 0}\lim_{\|\Delta'\|\to 0}\sum_{i,j=0}^{n-1}\Big(f_{1,\epsilon}(u_{i+1})-f_{1,\epsilon}(u_i)\Big)\Big(g_{2,\epsilon}(v_{j+1})-g_{2,\epsilon}(v_j)\Big)\\ &=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\lim_{\|\Delta'\|\to 0}\sum_{i,j=0}^{n-1}\Big(f_1(u_{i+1})-f_1(u_i)\Big)\Big(g_2(v_{j+1})-g_2(v_j)\Big)\\ &=\int_0^t\int_0^s \mathrm{d}_u f(u,v)\mathrm{d}_v g(u,v), \qquad (2.1.17)\end{aligned}$$

avec Δ' est une subdivision de l'intervalle $[0,t]$ dont le pas tend vers 0 et les éléments sont $0 = u_0 < \ldots < u_n = t$, $n \geq 1$, où $a_1 \leq 0 < t \leq b_1$.

Nous notons qu'à l'aide du même raisonnement que celui de (2.1.17), nous obtenons directement:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^t \int_0^s \mathrm{d}_v f_\epsilon(u,v) \mathrm{d}_u g_\epsilon(u,v) \quad = \quad \int_0^t \int_0^s \mathrm{d}_v f(u,v) \mathrm{d}_u g(u,v). \tag{2.1.18}$$

Tout compte fait, et en insérant les limites précédentes dans (2.1.15), le résultat (2.1.7) est vérifié pour tous fonctions $f \in \mathbf{H}_{P_{\epsilon_0},\alpha_1,\alpha_2}$ et $g \in \mathbf{H}_{P_{\epsilon_0},\beta_1,\beta_2}$. ■

Remarque 2.1.1 *Dans le cas où la fonction f est $\mathcal{C}^2$, (de même pour g), alors respectivement les différentielles $\mathrm{d}_u f(u,.)$, $\mathrm{d}_v f(.,v)$ et $\mathrm{d} f(u,v)$ coïncident avec les dérivées partielles $\frac{\partial f(u,.)}{\partial u}\mathrm{d}u$, $\frac{\partial f(.,v)}{\partial v}\mathrm{d}v$ et $\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u \partial v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.*

Dans la suite de ce chapitre, nous abordons la notion de la transformée de Lamperti qui est très utile pour caractériser un champ aléatoire.

2.2 La transformée de Lamperti du drap brownien fractionnaire

2.2.1 Définition et propriétés de base

Dû à [33] il existe une correspondance bijective entre la classe des champs aléatoires auto-similaires et celle des champs (strictement) stationnaires par le biais de *la transformation de Lamperti*. Ceci peut être applicable pour le cas du dBf, précisément la Proposition 2.2.1 de [33] montre que comme B^{H_1,H_2} est un champ gaussien centré auto-similaire alors sa transformation de Lamperti notée L^{H_1,H_2}, est également un champ gaussien centré nul sur les axes et de plus (strictement) stationnaire.

Rappelons tout d'abord la définition de la transformée de Lamperti du mouvement brownien fractionnaire.

Définition 2.2.1 *La transformée de Lamperti $L^H = \left(\mathcal{L}_t(B^H)\right)_{t\geq 0}$ du mBf B^H est le processus défini par:*

$$\mathcal{L}_t(B^H) = e^{-\alpha t} B^H_{a(t,H)}, \ \ \textit{pour tout}\ t \geq 0, \tag{2.2.19}$$

avec le coefficient

$$a(t,H) = a(t,H,\alpha) := \frac{H}{\alpha} e^{\frac{\alpha t}{H}}, \ \ t \geq 0 \ \textit{et}\ \alpha > 0. \tag{2.2.20}$$

Notons que pour tous t, $s \geq 0$, la fonction de covariance de processus (2.2.19) possède l'expression suivante:

$$\begin{aligned} F_H(t,s) &:= \mathbf{E}\Big(\mathcal{L}_t(B^H)\mathcal{L}_s(B^H)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{H}{\alpha}\right)^{2H}\left(e^{\alpha(t-s)} + e^{\alpha(s-t)} - \left|e^{\frac{\alpha(t-s)}{2H}} - e^{\frac{\alpha(s-t)}{2H}}\right|^{2H}\right) \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

Remarque 2.2.1 *Le processus L^H donné par (2.2.19) est dit aussi le processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire de second type, les auteurs dans [18, 37] ont montré que seulement pour $H = \frac{1}{2}$, (avec un bon choix du coefficient α), ce processus coïncide avec le processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire de premier type et on parle dans ce cas de processus d'Ornstein-Uhlenbeck classique. Nous mentionnons que pour tout $H \in \,]0,1[\setminus\{\frac{1}{2}\}$, le processus d'Ornstein Uhlenbeck fractionnaire de premier type est défini comme étant l'unique solution stationnaire de l'équation de Langevin dirigée par un mouvement brownien fractionnaire $(B_t^H)_{t\geq 0}$ et formalisée de la façon ci-après:*

$$\mathrm{d}X_t^\lambda = -\lambda X_t^\lambda \mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t^H,\ \lambda > 0 \ \text{et}\ t \geq 0 \tag{2.2.22}$$

avec la condition initiale:

$$X_0^\lambda = \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda u}\mathrm{d}B_u^H. \tag{2.2.23}$$

Donc l'expression de ce processus solution est la suivante:

$$X_t^\lambda = \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-u)}\mathrm{d}B_u^H,\ \ t \in \mathbb{R}, \tag{2.2.24}$$

et la propriété de la stationnarité est directement vue à partir de la stationnarité des accroissements du mBf. Plus des aspects sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire de premier type sont cités dans [18, 13, 37].

Remarque 2.2.2 *Lorsque nous considérons le cas limite $H = 1$, il est connu que, pour tout $t \geq 0$, le mBf d'indice de Hurst égal à 1 est réduit à:*

$$B_t^1 = t\eta,\ \ \text{où}\ \eta \sim \mathcal{N}(0,1). \tag{2.2.25}$$

De ce fait, il en résulte que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire de second type (c'est aussi la transformée de Lamperti de $(B_t^1)_{t\geq 0}$) coïncide avec celui de premier type, avec le coefficient $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ et la condition initiale $X_0^\lambda = \frac{1}{\lambda}\eta$. L'article [18] expose plus de détails sur cette situation.

Passons au cas bidimensionnel en énonçant, via la définition suivante, une version plus générale de cette transformation.

Définition 2.2.2 *La transformée de Lamperti* $L^{H_1,H_2} = \Big(\mathcal{L}_{t,s}(B^{H_1,H_2})\Big)_{t,s\geq 0}$ *du dBf* B^{H_1,H_2} *est le champ stochastique donné par:*

$$\mathcal{L}_{t,s}(B^{H_1,H_2}) = e^{-\alpha(t+s)} B^{H_1,H_2}_{a(t,H_1),\, a(s,H_2)}, \;\; \textit{pour tous}\, t,\, s \geq 0, \tag{2.2.26}$$

avec les coefficients

$$a(t,H_i) = a(t,H_i,\alpha) := \frac{H_i}{\alpha} e^{\frac{\alpha t}{H_i}}, \;\; t \geq 0, \;\; \alpha > 0 \; \textit{et} \; i = 1,\, 2. \tag{2.2.27}$$

Remarque 2.2.3 *Par analogie avec le cas unidimensionnel, le champ* L^{H_1,H_2} *peut être nommé le champ d'Ornstein Uhlenbeck fractionnaire de second type.*

La gaussianité et la formule de la fonction de covariance du champ (2.2.26) nous permettent de dégager aisément des divers propriétés. Or pour tous t, s, t', $s' \geq 0$, notons qu'un simple calcul nous conduit à écrire que:

$$\mathbf{E}\Big(\mathcal{L}_{t,s}(B^{H_1,H_2})\; \mathcal{L}_{t',s'}(B^{H_1,H_2})\Big) = F_{H_1}(t,t')F_{H_2}(s,s'), \tag{2.2.28}$$

et par la suite en appuyant essentiellement sur cette dernière formule, nous obtenons la proposition ci-dessous.

Proposition 2.2.1 *Pour tout* $(H_1,H_2) \in \,]0,1[^2$*, la transformée de Lamperti du dBf donnée par (2.2.26) est un champ aléatoire à mémoire courte.*

De plus, ses trajectoires sont localement höldériennes d'ordre (α_1,α_2)*, avec* $0 < \alpha_1 < H_1$ *et* $0 < \alpha_2 < H_2$*.*

Preuve : D'après [18, 37], et en utilisant notamment la caractérisation de la comportement asymptotique de la fonction de covariance F_H de L^H, nous déduisons que pour tout $n \geq 1$, pour tout $H \in \,]0,1[$ et lorsque $n \to \infty$, la mémoire de la transformation de Lamperti du mBf s'écrit:

$$\begin{aligned} \rho_{L^H}(n) &:= \mathbf{E}\Big(\mathcal{L}_1(B^H)\mathcal{L}_n(B^H)\Big) \\ &= F_H(1,n) \\ &= \mathcal{O}\left(e^{\frac{-\alpha(n-1)(n+1-H)}{H}}\right). \end{aligned} \tag{2.2.29}$$

Clairement la séquence stationnaire unidimensionnelle $(\mathcal{L}_n(B^H))_{n\in\mathbb{N}^*}$, (ceci reste aussi vrai pour la séquence $(\mathcal{L}_t(B^H))_{t\geq 0})$, vérifie pour tout $H \in]0,1[$ la propriété de la dépendance à court terme, et par conséquence on peut dire qu'elle n'a pas hérité la propriété de la mémoire longue des accroissements du mBf correspondant.

Regardons maintenant la version bidimensionnelle. En effet, pour tous n, $m \geq 1$, la mémoire du champ L^{H_1,H_2} est présentée de la manière suivante:

$$\begin{aligned}\rho_{L^{H_1,H_2}}(n,m) &:= \mathbf{E}\Big(\mathcal{L}_{1,1}(B^{H_1,H_2})\mathcal{L}_{n,m}(B^{H_1,H_2})\Big)\\ &= F_{H_1}(1,n)F_{H_2}(1,m) \end{aligned}\tag{2.2.30}$$

et elle vérifie:

$$\sum_{n,m\geq 1}\rho_{L^{H_1,H_2}}(n,m) < \infty. \tag{2.2.31}$$

Comme la série ci-dessus est un produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes, alors selon la Définition 1.2.6 du Chapitre 1, L^{H_1,H_2} est un champ à mémoire courte pour tout $(H_1,H_2) \in]0,1[^2$.

Afin de caractériser maintenant la continuité höldérienne locale des trajectoires du champ L^{H_1,H_2}, nous fixons T, $S > 0$ et nous écrivons pour tous $0 \leq t' < t \leq T$ et pour tous $0 \leq s' < s \leq S$,

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\Big(\big|\mathcal{L}_{t,s}(B^{H_1,H_2}) - \mathcal{L}_{t,s'}(B^{H_1,H_2}) - \mathcal{L}_{t',s}(B^{H_1,H_2}) + \mathcal{L}_{t',s'}(B^{H_1,H_2})\big|^2\Big)\\ =\ &\Big[\mathbf{E}(\mathcal{L}_t^2(B^{H_1})) - 2\mathbf{E}(\mathcal{L}_t(B^{H_1})\mathcal{L}_{t'}(B^{H_1})) + \mathbf{E}(\mathcal{L}_{t'}^2(B^{H_1}))\Big]\\ &\times\Big[\mathbf{E}(\mathcal{L}_s^2(B^{H_2})) - 2\mathbf{E}(\mathcal{L}_s(B^{H_2})\mathcal{L}_{s'}(B^{H_2})) + \mathbf{E}(\mathcal{L}_{s'}^2(B^{H_2}))\Big]\\ =\ &\mathbf{E}\Big(\big|\mathcal{L}_t(B^{H_1}) - \mathcal{L}_{t'}(B^{H_1})\big|^2\Big)\mathbf{E}\Big(\big|\mathcal{L}_s(B^{H_2}) - \mathcal{L}_{s'}(B^{H_2})\big|^2\Big). \end{aligned}\tag{2.2.32}$$

Étant donné que $\mathbf{E}\Big(\big|\mathcal{L}_t(B^H) - \mathcal{L}_{t'}(B^H)\big|^2\Big) \leq K(t-t')^{2H}$, avec la constante $K > 0$, (ceci est vérifié par la Proposition 3.4 de l'article [37] et par le critère de Kolmogorov [4] appliqué pour le cas des processus gaussiens), nous déduisons finalement que:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\Big(\big|\mathcal{L}_{t,s}(B^{H_1,H_2}) - \mathcal{L}_{t,s'}(B^{H_1,H_2}) - \mathcal{L}_{t',s}(B^{H_1,H_2}) + \mathcal{L}_{t',s'}(B^{H_1,H_2})\big|^2\Big)\\ &\leq C(t-t')^{2H_1}(s-s')^{2H_2}, \end{aligned}\tag{2.2.33}$$

ce qui achève donc la démonstration. ■

Remarque 2.2.4 *La propriété utilisée dans la preuve précédente et qui a mis en évidence que pour tout $H \in]0,1[$, la transformée de Lamperti L^H du mBf est à mémoire courte, est considérée comme l'un des raisons qui expliquent la non coïncidence entre le processus d'Ornstein-Uhlenbeck de second type et celui de premier type, ceci car la fonction de covariance de ce dernier processus présente, pour tout $H \in]\frac{1}{2},1[$, une décroissance pareille à celle des accroissements du mBf et par conséquent, il en résulte que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck de premier type est à mémoire longue.*

2.2.2 Équation stochastique différentielle

Lors de cette section, nous mettons en place une version bidimensionnelle de l'EDS (0.0.1) de type Langevin et nous la corroborons par la présentation de la notion d'un bruit perturbateur en dimension 2.

Proposition 2.2.2 *La transformée de Lamperti $L^{H_1,H_2} = \left(\mathcal{L}_{t,s}(B^{H_1,H_2})\right)_{t,s\geq 0}$ du dBf est une solution (forte) de l'équation stochastique différentielle suivante:*

$$\begin{aligned} X^{\alpha}_{t,s} &= X^{\alpha}_{0,0} - \alpha\left(\int_0^t X^{\alpha}_{u,v}\mathrm{d}u + \int_0^s X^{\alpha}_{u,v}\mathrm{d}v\right) - \alpha^2\int_0^t\int_0^s X^{\alpha}_{u,v}\mathrm{d}v\mathrm{d}u \\ &\quad + y^{\alpha,H_2}_s + y^{\alpha,H_1}_t + Y^{\alpha,H_1,H_2}_{t,s}, \quad \alpha > 0, \end{aligned} \tag{2.2.34}$$

tels que pour tous t, $s \geq 0$, on désigne par:

$$Y^{\alpha,H_1,H_2}_{t,s} := \int_0^t\int_0^s e^{-\alpha(u+v)}\mathrm{d}B^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(v,H_2)} \tag{2.2.35}$$

et

$$y^{\alpha,H_2}_s := \int_0^s e^{-\alpha v}\mathrm{d_v}B^{H_1,H_2}_{a(0,H_1),a(v,H_2)}, \quad y^{\alpha,H_1}_t := \int_0^t e^{-\alpha u}\mathrm{d_u}B^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(0,H_2)} \tag{2.2.36}$$

Preuve : La représentation (2.2.34) est obtenue proprement dit par l'application directe de la formule d'intégration par parties (2.1.7) avec les fonctions $f(t,s) = e^{-\alpha(t+s)}$ et $g(t,s) = B^{H_1,H_2}_{a(t,H_1),a(s,H_2)}$. En mentionnant que $f \in \mathbf{H}_{P,1,1}$ pour tout rectangle P, alors commodément pour tout $(t,s) \in \mathbb{R}^2_+$, la transformée de Lamperti du dBf peut être réécrite de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{t,s}(B^{H_1,H_2}) &= e^{-\alpha(t+s)}B^{H_1,H_2}_{a(t,H_1),a(s,H_2)} \\
&= B^{H_1,H_2}_{a(0,H_1),a(0,H_2)} - \alpha\int_0^s e^{-\alpha v}B^{H_1,H_2}_{a(0,H_1),a(v,H_2)}\mathrm{d}v + \int_0^s e^{-\alpha v}\mathrm{d}_{\mathrm{v}}B^{H_1,H_2}_{a(0,H_1),a(v,H_2)} \\
&\quad -\alpha\int_0^t e^{-\alpha u}B^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(0,H_2)}\mathrm{d}u + \alpha^2\int_0^t\int_0^s e^{-\alpha(u+v)}B^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(v,H_2)}\mathrm{d}v\mathrm{d}u \\
&\quad -\alpha\int_0^t\int_0^s e^{-\alpha(u+v)}\mathrm{d}_vB^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(v,H_2)}\mathrm{d}u + \int_0^t e^{-\alpha u}\mathrm{d}_uB^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(0,H_2)} \\
&\quad +\int_0^t\int_0^s e^{-\alpha(u+v)}\mathrm{d}B^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(v,H_2)} - \alpha\int_0^t\int_0^s e^{-\alpha(u+v)}\mathrm{d}_uB^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(v,H_2)}\mathrm{d}v \\
&:= \sum_{i=1}^{9} A_i
\end{aligned} \tag{2.2.37}$$

Ici les termes A_1 jusqu'à A_9 sont indiqués par leurs ordres d'apparence dans l'expression (2.2.37). Tout d'abord, au moyen des quantités respectives (2.2.35) et (2.2.36), nous identifions directement:

$$A_8 := Y^{\alpha,H_1,H_2}_{t,s},\ A_3 := y^{\alpha,H_2}_s \text{ et } A_7 := y^{\alpha,H_1}_t. \tag{2.2.38}$$

Évidemment nous trouvons que:

$$\begin{aligned}
A_5 &:= \alpha^2\int_0^t\int_0^s e^{-\alpha(u+v)}B^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(v,H_2)}\mathrm{d}v\mathrm{d}u \\
&= \alpha^2\int_0^t\int_0^s \mathcal{L}_{u,v}(B^{H_1,H_2})\mathrm{d}v\mathrm{d}u.
\end{aligned} \tag{2.2.39}$$

Passons maintenant aux termes A_6 et A_9 de l'égalité (2.2.37) où le calcul de ces deux quantités peuvent être effectuer de la même manière, nous montrons que pour le premier terme:

$$\begin{aligned}
A_6 &:= -\alpha\int_0^t\int_0^s e^{-\alpha(u+v)}\mathrm{d}_vB^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(v,H_2)}\mathrm{d}u \\
&= -\alpha\int_0^t e^{-\alpha u}\int_0^s e^{-\alpha v}\mathrm{d}_vB^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(v,H_2)}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

En utilisant à ce niveau la formule d'intégration par parties en dimension 1, nous prouvons que:

$$\begin{aligned}
&\int_0^s e^{-\alpha v}\mathrm{d}_vB^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(v,H_2)} \\
&= e^{-\alpha s}B^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(s,H_2)} - B^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(0,H_2)} + \alpha\int_0^s e^{-\alpha v}B^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(v,H_2)}\mathrm{d}v,
\end{aligned}$$

et par la suite nous inférons que la quantité A_6 peut être réexprimée de la manière suivante:

$$\begin{aligned} A_6 &= -\alpha \int_0^t e^{-\alpha u}\Big(e^{-\alpha s} B^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(s,H_2)} - B^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(0,H_2)} + \alpha \int_0^s e^{-\alpha v} B^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(v,H_2)} \mathrm{d}v\Big)\, \mathrm{d}u \\ &= -\alpha \int_0^t e^{-\alpha(u+s)} B^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(s,H_2)} \mathrm{d}u \ + \alpha \int_0^t e^{-\alpha u} B^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(0,H_2)} \mathrm{d}u \\ &\quad -\alpha^2 \int_0^t \int_0^s e^{-\alpha(u+v)} B^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(v,H_2)} \mathrm{d}v\mathrm{d}u \\ &= -\alpha \int_0^t \mathcal{L}_{u,s}(B^{H_1,H_2}) \mathrm{d}u - A_4 - \alpha^2 \int_0^t \int_0^s \mathcal{L}_{u,v}(B^{H_1,H_2}) \mathrm{d}v\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{2.2.40}$$

À l'aide d'un raisonnement analogue à celui de A_6, nous obtenons que:

$$A_9 = -\alpha \int_0^s \mathcal{L}_{t,v}(B^{H_1,H_2}) \mathrm{d}v - A_2 - \alpha^2 \int_0^s \int_0^t \mathcal{L}_{u,v}(B^{H_1,H_2}) \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{2.2.41}$$

Les résultats (2.2.38)-(2.2.41) réunis ensemble dans (2.2.37), nous amènent finalement à vérifier l'expression (2.2.34) demandée. ■

Quelques observations utiles peuvent être dégagées à partir de l'équation (2.2.34) et elles sont mentionnées dans la remarque ci-après.

Remarque 2.2.5 *Les processus $(y_s^{\alpha,H_2})_{s\geq 0}$ et $(y_t^{\alpha,H_1})_{t\geq 0}$ donnés par (2.2.36) et qui représentent les bruits unidimensionnels de l'équation (2.2.34), ont respectivement à constante près, les mêmes lois finies dimensionnelles que les processus Y^{α,H_2} et Y^{α,H_1} définis par (0.0.2). En effet, comme les deux processus gaussiens centrés $\{B^{H_1,H_2}_{a(0,H_1),a(s,H_2)},\ s\geq 0\}$ et $\{c_1^{H_1} B^{H_2}_{a(s,H_2)},\ s \geq 0\}$, avec $c_1 = \frac{H_1}{\alpha}$, sont égaux en distributions, alors nous démontrons les égalités suivantes en loi:*

$$\begin{aligned} y_s^{\alpha,H_2} &:= \int_0^s e^{-\alpha v} \mathrm{d}_{\mathrm{v}} B^{H_1,H_2}_{a(0,H_1),a(v,H_2)} \\ &= c_1^{H_1} \int_0^s e^{-\alpha v} \mathrm{d}B^{H_2}_{a(v,H_2)} \\ &= c_1^{H_1} Y_s^{\alpha,H_2}, \end{aligned} \tag{2.2.42}$$

et de même avec la constante $c_2 = \frac{H_2}{\alpha}$,

$$\begin{aligned} y_t^{\alpha,H_1} &:= \int_0^t e^{-\alpha u} \mathrm{d}_{\mathrm{u}} B^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(0,H_2)} \\ &= c_2^{H_2} \int_0^t e^{-\alpha u} \mathrm{d}B^{H_1}_{a(u,H_1)} \\ &= c_2^{H_2} Y_t^{\alpha,H_1}. \end{aligned} \tag{2.2.43}$$

À titre de rappel, le processus Y^{α,H_i}, $i \in \{1, 2\}$, est le processus bruit qui dirige l'équation stochastique de Langevin unidimensionnelle (0.0.1) dont la solution est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire de second type (c'est également la transformée de Lamperti L^{H_i}), la section 3 de l'article [37] a bien traité ce résultat.

Remarque 2.2.6 *Il est plus commode de regrouper tous les termes bruits dans un seul terme qu'on le dénote par:*

$$N_{t,s}^{\alpha,H_1,H_2} := y_s^{\alpha,H_2} + y_t^{\alpha,H_1} + Y_{t,s}^{\alpha,H_1,H_2}, \text{ pour tous } t,\, s \geq 0, \tag{2.2.44}$$

alors, tout simplement l'EDS (2.2.34) peut être représentée de la façon suivante:

$$\begin{aligned} X_{t,s}^{\alpha} &= X_{0,0}^{\alpha} - \alpha \left(\int_0^t X_{u,v}^{\alpha} \mathrm{d}u + \int_0^s X_{u,v}^{\alpha} \mathrm{d}v \right) \\ &\quad -\alpha^2 \int_0^t \int_0^s X_{u,v}^{\alpha} \mathrm{d}v \mathrm{d}u + N_{t,s}^{\alpha,H_1,H_2}. \end{aligned} \tag{2.2.45}$$

Il s'agit donc de la version bidimensionnelle de l'EDS (0.0.1).

2.2.3 Analyse du champ Y^{α,H_1,H_2}

Le long de cette sous section nous examinons les différentes propriétés stochastiques du bruit $Y^{\alpha,H_1,H_2} = (Y_{t,s}^{\alpha,H_1,H_2})_{t,s\geq 0}$, qui est un champ donné par (2.2.35) et il joue le rôle d'un perturbateur aléatoire dans l'EDS (2.2.34). Son analogue unidimensionnel noté par $Y^{\alpha,H}$ et défini par (0.0.2), fait l'objet des travaux de [37]. En particulier, nous rappelons brièvement que ce gaussien $Y^{\alpha,H}$ est à accroissements stationnaires, ainsi que ses trajectoires sont localement höldériennes d'ordre $0 < \alpha < H$ et pour $\frac{1}{2} < H < 1$, il est un processus à mémoire courte, ce qui vérifie bien que ce bruit ne peut pas se comporter ou se comparer à un mouvement brownien fractionnaire.

Nous visons à faire dans ce qui suit, l'analyse similaire pour la version bidimensionnelle. Pour cela, soit Y^{α,H_1,H_2} le processus stochastique à 2-paramètres dont l'expression est donnée par (2.2.35), nous supposons pour le reste du travail que $(H_1,H_2) \in]\frac{1}{2},1[^2$. Comme Y^{α,H_1,H_2} est un drap gaussien centré, alors ses propriétés peuvent être déduites systématiquement en se basant sur la donnée de sa fonction de covariance.

De ce fait, nous avons énormément besoin en premier lieu de citer la formule suivante:

Soient f et g deux fonctions régulières à deux variables, alors pour tout $(H_1,H_2) \in]\frac{1}{2},1[^2$, nous avons:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big(\int_0^\infty\int_0^\infty f(u,v)\mathrm{d}B^{H_1,H_2}_{u,v}\int_0^\infty\int_0^\infty g(u',v')\mathrm{d}B^{H_1,H_2}_{u',v'}\Big)\\
&=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}u'\mathrm{d}v' f(u,v)g(u',v')\\
&\quad\times\frac{\partial^4 R^{H_1,H_2}(u,v,u',v')}{\partial u\partial v\partial u'\partial v'}.
\end{aligned}\tag{2.2.46}$$

Une étude complète et approfondie de cette formule peut être consultée à partir de l'article [85], également l'article [87] contient quelques applications utiles dans un cas plus générale des processus gaussiens.

2.2.3.1 Covariance et stationnarité des accoissements

En se basant principalement sur (2.2.46), nous pourrons calculer la fonction de covariance du champ (2.2.35). En faite, pour tous t, s, t', $s' \geq 0$ et pour tout $(H_1,H_2) \in]\frac{1}{2},1[^2$, nous trouvons que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big(Y^{\alpha,H_1,H_2}_{t,s}\ Y^{\alpha,H_1,H_2}_{t',s'}\Big) &= \int_0^t \mathrm{d}u\int_0^s \mathrm{d}v\int_0^{t'} \mathrm{d}u'\int_0^{s'} \mathrm{d}v' e^{-\alpha(u+v)}e^{-\alpha(u'+v')}\\
&\quad\times\frac{\partial^4 r(u,v,u',v')}{\partial u\partial v\partial u'\partial v'},
\end{aligned}\tag{2.2.47}$$

avec r est la fonction de covariance du champ $\Big(B^{H_1,H_2}_{a(t,H_1),a(s,H_2)}\Big)_{t,s\geq 0}$, or compte tenu de (1.2.15) du Chapitre 1, cette dernière fonction a l'expression suivante:

$$r(u,v,u',v') = R^{H_1}\Big(a(u,H_1),a(u',H_1)\Big)R^{H_2}\Big(a(v,H_2),a(v',H_2)\Big),\tag{2.2.48}$$

où R^H est la fonction de covariance du mBf.

Par conséquent, il est immédiat que l'égalité (2.2.47) peut être réécrite comme ci-dessous:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big(Y^{\alpha,H_1,H_2}_{t,s}Y^{\alpha,H_1,H_2}_{t',s'}\Big) &= \int_0^t \mathrm{d}u\int_0^{t'} \mathrm{d}u' e^{-\alpha(u+u')}\frac{\partial^2 R^{H_1}\Big(a(u,H_1),a(u',H_1)\Big)}{\partial u\partial u'}\\
&\quad\times\int_0^s \mathrm{d}v\int_0^{s'} \mathrm{d}v' e^{-\alpha(v+v')}\frac{\partial^2 R^{H_2}\Big(a(v,H_2),a(v',H_2)\Big)}{\partial v\partial v'}\\
&= \mathbf{E}\Big(Y^{\alpha,H_1}_tY^{\alpha,H_1}_{t'}\Big)\mathbf{E}\Big(Y^{\alpha,H_2}_sY^{\alpha,H_2}_{s'}\Big),
\end{aligned}\tag{2.2.49}$$

tel que le processus $Y^{\alpha,H}$ est donné par (0.0.2) et il indique toujours le bruit unidimensionnel dans l'EDS (0.0.1).

Puisque les propriétés de processus $Y^{\alpha,H}$ sont déjà connues et bien exposées notamment dans la référence [37], alors la relation (2.2.49) nous permet d'obtenir des divers résultats sur le champ Y^{α,H_1,H_2}. Commençons tout d'abord par la vérification que Y^{α,H_1,H_2} est à accroissements rectangulaires stationnaires dans le sens de la Définition 1.2.3. En effet, pour tous h_1, $h_2 > 0$ et pour tout $(H_1,H_2) \in]\frac{1}{2},1[^2$, les lois finies dimensionnelles du champ gaussien centré suivant:

$$\left(Y^{\alpha,H_1,H_2}_{t+h_1,s+h_2} - Y^{\alpha,H_1,H_2}_{t+h_1,h_2} - Y^{\alpha,H_1,H_2}_{h_1,s+h_2} + Y^{\alpha,H_1,H_2}_{h_1,h_2}\right)_{t,s\geq 0}$$

sont les mêmes que celles du champ $\left(Y^{\alpha,H_1,H_2}_{t,s}\right)_{t,s\geq 0}$, car pour tous t, $s \geq 0$, nous avons:

$$Y^{\alpha,H_1,H_2}_{t+h_1,s+h_2} - Y^{\alpha,H_1,H_2}_{t+h_1,h_2} - Y^{\alpha,H_1,H_2}_{h_1,s+h_2} + Y^{\alpha,H_1,H_2}_{h_1,h_2} = \int_{h_1}^{t+h_1}\int_{h_2}^{s+h_2} e^{-\alpha(u+v)}\mathrm{d}B^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(v,H_2)} \quad (2.2.50)$$

et par la suite, en vertu de la formule (2.2.46) et du résultat (2.2.49), nous déduisons que pour tous h_1, h_2, k_1, $k_2 > 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big(\int_{h_1}^{t+h_1}\int_{h_2}^{s+h_2} e^{-\alpha(u+v)}\mathrm{d}B^{H_1,H_2}_{a(u,H_1),a(v,H_2)}\int_{k_1}^{t'+k_1}\int_{k_2}^{s'+k_2} e^{-\alpha(u'+v')}\mathrm{d}B^{H_1,H_2}_{a(u',H_1),a(v',H_2)}\Big)\\
=\ &\int_{h_1}^{t+h_1}\mathrm{d}u\int_{h_2}^{s+h_2}\mathrm{d}v\int_{k_1}^{t'+k_1}\mathrm{d}u'\int_{k_2}^{s'+k_2}\mathrm{d}v' e^{-\alpha(u+v)}e^{-\alpha(u'+v')}\frac{\partial^4 r(u,v,u',v')}{\partial u\partial v\partial u'\partial v'}\\
=\ &\int_{h_1}^{t+h_1}\mathrm{d}u\int_{k_1}^{t'+k_1}\mathrm{d}u' e^{-\alpha(u+u')}\frac{\partial^2 R^{H_1}\Big(a(u,H_1),a(u',H_1)\Big)}{\partial u\partial u'}\\
&\times\int_{h_2}^{s+h_2}\mathrm{d}v\int_{k_2}^{s'+k_2}\mathrm{d}v' e^{-\alpha(v+v')}\frac{\partial^2 R^{H_2}\Big(a(v,H_2),a(v',H_2)\Big)}{\partial v\partial v'}\\
=\ &\mathbf{E}\Big((Y^{\alpha,H_1}_{t+h_1}-Y^{\alpha,H_1}_{h_1})(Y^{\alpha,H_1}_{t'+k_1}-Y^{\alpha,H_1}_{k_1})\Big)\mathbf{E}\Big((Y^{\alpha,H_2}_{s+h_2}-Y^{\alpha,H_2}_{h_2})(Y^{\alpha,H_2}_{s'+k_2}-Y^{\alpha,H_2}_{k_2})\Big)\\
=\ &\mathbf{E}\Big(Y^{\alpha,H_1}_{t}Y^{\alpha,H_1}_{t'}\Big)\mathbf{E}\Big(Y^{\alpha,H_2}_{s}Y^{\alpha,H_2}_{s'}\Big)\\
=\ &\mathbf{E}\Big(Y^{\alpha,H_1,H_2}_{t,s}Y^{\alpha,H_1,H_2}_{t',s'}\Big). \qquad (2.2.51)
\end{aligned}$$

Nous notons que nous avons utilisé précédemment le fait que les accroissements du processus $Y^{\alpha,H}$ sont stationnaires (voir la Proposition 3.2 de [37]).

2.2.3.2 Mémoire et continuité höldérienne

Partons de la relation (2.2.49) et de la donnée que le champ Y^{α,H_1,H_2} est nul sur les axes et à accroissements rectangulaires stationnaires, alors, pour tous n, $m \geq 1$, l'expression de sa mémoire peut être formalisée comme suit:

$$\begin{aligned}
&\rho_{Y^{\alpha,H_1,H_2}}(n,m) \\
&:= \mathbf{E}\left(Y^{\alpha,H_1,H_2}_{1,1}(Y^{\alpha,H_1,H_2}_{n+1,m+1} - Y^{\alpha,H_1,H_2}_{n,m+1} - Y^{\alpha,H_1,H_2}_{n+1,m} + Y^{\alpha,H_1,H_2}_{n,m})\right) \\
&= \mathbf{E}\Big(Y^{\alpha,H_1}_{1}(Y^{\alpha,H_1}_{n+1} - Y^{\alpha,H_1}_{n})\Big)\mathbf{E}\Big(Y^{\alpha,H_2}_{1}(Y^{\alpha,H_2}_{m+1} - Y^{\alpha,H_2}_{m})\Big). \qquad (2.2.52)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(H_1,H_2) \in \,]\frac{1}{2},1[^2$, la propriété de la dépendance à court terme du champ Y^{α,H_1,H_2} est assurée vu que:

$$\sum_{n,m\geq 1} \rho_{Y^{\alpha,H_1,H_2}}(n,m) < \infty. \qquad (2.2.53)$$

Ceci découle notamment du Corollaire 3.7 de [37], là où on a utilisé la caractérisation suivante du comportement asymptotique de la mémoire du processus $Y^{\alpha,H}$,

$$\begin{aligned}
\rho_{Y^{\alpha,H}}(n) &:= \mathbf{E}\Big(Y^{\alpha,H}_{1}(Y^{\alpha,H}_{n+1} - Y^{\alpha,H}_{n})\Big) \\
&= \mathcal{O}\left(e^{\frac{-\alpha n(1-H)}{H}}\right),\ n \geq 1 \qquad (2.2.54)
\end{aligned}$$

Quant à la continuité höldérienne, en appuyant sur la Proposition 3.4 de [37] et sur le critère de Kolmogorov donné par [4], nous mentionnons que pour tous t, $t' \geq 0$,

$$\mathbf{E}\left(\left|Y^{\alpha,H}_{t} - Y^{\alpha,H}_{t'}\right|^2\right) \leq L|t-t'|^{2H},\ L > 0, \qquad (2.2.55)$$

ce qui implique que, pour tout $0 \leq t' < t \leq T$ et pour tout $0 \leq s' < s \leq S$, où T, $S > 0$, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(\left|Y^{\alpha,H_1,H_2}_{t,s} - Y^{\alpha,H_1,H_2}_{t,s'} - Y^{\alpha,H_1,H_2}_{t',s} + Y^{\alpha,H_1,H_2}_{t',s'}\right|^2\right) \\
&= \mathbf{E}\left(\left|Y^{\alpha,H_1}_{t} - Y^{\alpha,H_1}_{t'}\right|^2\right)\mathbf{E}\left(\left|Y^{\alpha,H_2}_{s} - Y^{\alpha,H_2}_{s'}\right|^2\right) \\
&\leq C(t-t')^{2H_1}(s-s')^{2H_2},\ C > 0. \qquad (2.2.56)
\end{aligned}$$

De ce fait, nous arrivons donc à vérifier que, lorsque $(H_1,H_2) \in \,]\frac{1}{2},1[^2$, les trajectoires du bruit Y^{α,H_1,H_2} sont localement höldériennes d'ordre (α_1,α_2), avec $0 < \alpha_1 < H_1$ et $0 < \alpha_2 < H_2$.

2.2.3.3 Distribution limite

Conformément à la Proposition 3.12 de l'article [37], nous notons que pour tout $t \geq 0$ le processus suivant:

$$Z_t^a := \frac{1}{\sqrt{a}} Y_{at}^{\alpha,H}, \ a > 0, \ \frac{1}{2} < H < 1, \tag{2.2.57}$$

converge faiblement, quand $a \to +\infty$ dans l'espace des fonctions continues, vers le processus $(\sigma B_t)_{t\geq 0}$, où $\sigma = \sigma(\alpha,H)$ est une constante strictement positive qui dépend uniquement de α et H, cependant le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ désigne toujours le mouvement brownien standard.

Soient a, $b > 0$, nous considérons maintenant l'expression suivante de la version bidimensionnelle de processus (2.2.57):

$$Z_{t,s}^{a,b} := \frac{1}{\sqrt{ab}} Y_{at,bs}^{\alpha,H_1,H_2}, \text{ avec } t,\, s \geq 0 \text{ et } (H_1,H_2) \in \left]\frac{1}{2},1\right[^2. \tag{2.2.58}$$

Clairement $\left(Z_{t,s}^{a,b}\right)_{t,s\geq 0}$ est un champ gaussien centré, telle que sa fonction de covariance satisfait, pour tous t, s, t', $s' \geq 0$, la relation ci-dessous:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big(Z_{t,s}^{a,b} Z_{t',s'}^{a,b}\Big) &= \frac{1}{ab}\mathbf{E}\left(Y_{at,bs}^{\alpha,H_1,H_2} Y_{at',bs'}^{\alpha,H_1,H_2}\right) \\
&= \frac{1}{ab}\mathbf{E}\big(Y_{at}^{\alpha,H_1}\, Y_{at'}^{\alpha,H_1}\big)\mathbf{E}\big(Y_{bs}^{\alpha,H_2}\, Y_{bs'}^{\alpha,H_2}\big) \\
&\longrightarrow_{a,b\,\to\,\infty} \gamma^2 (t \wedge t')(s \wedge s'),
\end{aligned} \tag{2.2.59}$$

avec $\gamma = \gamma(\alpha,H_1,H_2)$ est une constante strictement positive qui dépend seulement des paramètres α, H_1 et H_2. Ceci entraîne immédiatement que le champ $(Z_{t,s}^{a,b})_{t,s\geq 0}$ converge faiblement vers le champ $(\gamma B_{t,s})_{t,s\geq 0}$, qui est, à constante près, un drap brownien classique.

Par ailleurs, nous pouvons prouver aussi que, comme $(Z_t^a)_{t\geq 0}$ est un processus tendu dans le sens du critère évoqué dans l'article [46] (on peut se reporter également à l'article [37] pour plus de détails), alors d'une manière analogue le champ $(Z^{a,b})_{t,s\geq 0}$ est aussi tendu, c'est à dire pour tout $0 \leq t' < t$ et pour tout $0 \leq s' < s$, nous avons:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big(\Big|Z_{t,s}^{a,b} - Z_{t,s'}^{a,b} - Z_{t',s}^{a,b} + Z_{t',s'}^{a,b}\Big|^2\Big) \\
&= \mathbf{E}\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(Y_{at}^{\alpha,H_1} - Y_{at'}^{\alpha,H_1}\right)\right]^2 \mathbf{E}\left[\frac{1}{\sqrt{b}}\left(Y_{bs}^{\alpha,H_2} - Y_{bs'}^{\alpha,H_2}\right)\right]^2 \\
&\leq C(t-t')(s-s'),\, C > 0.
\end{aligned} \tag{2.2.60}$$

Après avoir citer quelques propriétés du bruit bidimensionnel qui dirige l'EDS (2.2.34) dont la solution est la transformation de Lamperti du dBf, nous concluons ce chapitre par une présentation d'une autre caractérisation de ce dernier champ: c'est la décomposition en série de la transformée de Lamperti du dBf.

2.3 Décomposition en série de la transformée de Lamperti du drap brownien fractionnaire

L'idée directrice de la décomposition de la transformée de Lamperti du dBf en une somme infinie des champs qui sont des moyennes mobiles indépendantes avec des coefficients bien choisis (également, nous pouvons les nommés des champs d'Ornstein-Uhlenbeck classiques), vient du résultat connu pour la transformée de Lamperti du mBf. À vrai dire, cette décomposition permet d'établir une estimation linéaire du champ stationnaire $(\mathcal{L}_{t,s}(B^{H_1,H_2})_{t,s\geq 0}$ en fonction des champs stationnaires qui sont une version bidimensionnelle des processus d'Ornstein-Uhlenbeck classiques, et qui sont bien évidemment à structure plus simple.

Le Théorème 1 de l'article [8] a exposé une version unidimensionnelle qui est formulée de la façon suivante:

Soit $L^H = (\mathcal{L}_t(B^H))_{t\geq 0}$ la transformée de Lamperti du mBf, si $H \in]0,\frac{1}{2}[$ alors, pour tout $t > 0$, nous avons:

$$\mathcal{L}_t(B^H) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t,\alpha_n,\sigma_n), \tag{2.3.61}$$

$$\text{où } \; U_n(t,\alpha_n,\sigma_n) := \sigma_n \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha_n(t-u)} \, \mathrm{d}B_n(u), \; \text{ pour tout } n \geq 1, \tag{2.3.62}$$

et les coefficients:

$$\begin{cases} \alpha_n^2 &= \frac{(2H)_{n-1}}{(n-1)!}(-1)^{n-1}(n-H-1) \\ \sigma_n^2 &= |n-H-1|\,. \end{cases} \tag{2.3.63}$$

Ici $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des mouvements browniens standards indépendants, cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n(t,\alpha_n,\sigma_n)$ est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck classique (un cas particulier des processus moyennes mobiles), dont les paramètres $\alpha_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n \in]0,+\infty[^2$ sont les paramètres de l'EDS classique de Langevin vérifiée par U_n. Les coefficients α_n et σ_n

sont bien choisis de telle sorte que $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma_n^2}{2\alpha_n} < \infty$, cette dernière condition est mise dans le but d'assurer la convergence en moyenne quadratique de la série (2.3.61).

La finalité de cette partie est d'établir l'analogue en dimension 2 de l'égalité (2.3.61). Pour la dimension 1 l'approche était de comparer la fonction de covariance de la transformée de Lamperti du mBf avec la somme des fonctions de covariance des processus $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, le même raisonnement peut être effectué pour le cas des processus à 2-paramètres, mais avec un peu de complexité au niveau de l'identification des termes de l'égalité. Pour cela nous allons définir tout d'abord le processus d'Ornstein-Uhlenbeck classique à 2-paramètres, qui peut être exprimé pour tout $(t,s) \in]0,+\infty[^2$ de la manière suivante:

$$U_n(t,s,\alpha_n,\sigma_n) = \sigma_n \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{s} e^{-\alpha_n(t-u)}\, e^{-\alpha_n(s-v)}\, \mathrm{d}B_n(u,v), \tag{2.3.64}$$

avec $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des draps browniens classiques indépendants.

Nous notons que pour tout $(t,s) \in\ ]0,+\infty[^2$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(t,s,\alpha_n,\sigma_n)$ est convergente dans le sens de la norme $L^2(\Omega)$ si:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{4\alpha_n^2} < \infty, \tag{2.3.65}$$

et nous mentionnons que cette condition est établie dû au fait que:

$$\mathbf{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n(t,s,\alpha_n,\sigma_n)\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{4{\alpha_n}^2}. \tag{2.3.66}$$

Pour la suite, si nous adoptons pour tout $(h,k) \in]0,+\infty[^2$ la notation ci-après:

$$R_{U_n}(t,s,\alpha_n,\sigma_n) = \mathbf{E}\Big(U_n(t+h,s+k,\alpha_n,\sigma_n)\ U_n(h,k,\alpha_n,\sigma_n)\Big), \tag{2.3.67}$$

alors il en résulte que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_{U_n}(t,s,\alpha_n,\sigma_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{4\alpha_n^2} e^{-\alpha_n(t+s)}. \tag{2.3.68}$$

D'autre côté, en utilisant la formule du binôme de Newton généralisée, nous trouvons que l'expression de la fonction de covariance du champ L^{H_1,H_2} donnée par (2.2.28), peut être réexprimée, pour tout $(t,s,h,k) \in]0,+\infty[^4$ et pour tout $(H_1,H_2) \in]0,1[^2$, sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big(\mathcal{L}_{t+h,s+k}(B^{H_1,H_2})\mathcal{L}_{h,k}(B^{H_1,H_2})\Big)\\
&= F_{H_1}(t+h,h)F_{H_2}(s+k,k)\\
&= \frac{1}{4}\Big(\frac{H_1}{\alpha}\Big)^{2H_1}\Big(\frac{H_2}{\alpha}\Big)^{2H_2} \times \left(e^{-\alpha t} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2H_1)_n}{n!}(-1)^{n-1}\, e^{-\alpha t(\frac{n}{H_1}-1)}\right)\\
&\times \left(e^{-\alpha s} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2H_2)_m}{m!}\,(-1)^{m-1}\, e^{-\alpha s(\frac{m}{H_2}-1)}\right). \qquad (2.3.69)
\end{aligned}$$

Nous rappelons que les coefficients binomiaux qui ont été apparus dans (2.3.69), sont définis par:

$$\begin{cases} \frac{(2H)_n}{n!} &= \frac{2H\times(2H-1)\times\cdots\times(2H-n+1)}{n!}, \text{ pour tout } n \geq 1\\ \frac{(2H)_0}{0!} &= 1,\ n=0. \end{cases} \qquad (2.3.70)$$

Une remarque assez utile est que ces coefficients sont strictement positifs seulement pour le cas $H \in]0,\frac{1}{2}[$, c'est à dire

$$\frac{(2H)_n}{n!} > 0, \quad \text{si } H < \frac{1}{2}. \qquad (2.3.71)$$

Ainsi, nous déduisons que les termes de la fonction (2.3.69) sont positifs seulement quand le couple (H_1,H_2) prend sa valeur dans $]0,\frac{1}{2}[^2$, et ceci explique bien la raison derrière laquelle nous nous restreignons uniquement à ce cas, (lorsque les paramètres de Hurst sont au delà de $\frac{1}{2}$, nous prévoyons une situation plus compliquée.)

À ce niveau nous énonçons le théorème principal de cette section.

Théorème 2.3.1 *Si $(H_1,H_2) \in]0,\frac{1}{2}[^2$, alors la transformation de Lamperti $L^{H_1,H_2} = \big(\mathcal{L}_{t,s}(B^{H_1,H_2})\big)_{(t,s)>0}$ du dBf peut être représentée par:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{t,s}(B^{H_1,H_2}) \;=\; &\sum_{n=1}^{\infty}\Big(U_{1,n}(t,s,\alpha,\sigma_{1,n}) + U_{2,n}(t,a_n s,\alpha,\sigma_{2,n}) + U_{3,n}(a'_n t,s,\alpha,\sigma_{3,n})\\
&+U_{4,n}(t,a_n s,\alpha,\sigma_{4,n})\Big),\ t,\, s>0, \qquad (2.3.72)
\end{aligned}$$

où l'égalité (2.3.72) est établie dans le sens des distributions, et pour tous $i=1,\ldots,4$, on désigne par:

$$U_{i,n}(t,s,\alpha,\sigma_{i,n}) = \sigma_{i,n}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s} e^{-\alpha(t-u)}e^{-\alpha(s-v)}\mathrm{d}B_{i,n}(u,v),\ \ \alpha>0, \qquad (2.3.73)$$

avec $(B_{i,n}(t,s))_{i\in\{1,\dots,4\}}$ *sont des draps browniens classiques mutuellement indépendants.*

Aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, les paramètres* $\sigma_{i,n}$*,* a_n *et* a'_n *sont donnés par:*

$$\sigma_{1,n}^2 = \frac{\alpha^{2(1-H_1-H_2)} H_1^{2H_1} H_2^{2H_2}}{n(n+1)} \tag{2.3.74}$$

$$\sigma_{2,n}^2 = (-1)^{n-1} \alpha^{2(1-H_1-H_2)} H_1^{2H_1} H_2^{2H_2} \frac{(2H_2)_n}{n!} \tag{2.3.75}$$

$$\sigma_{3,n}^2 = (-1)^{n-1} \alpha^{2(1-H_1-H_2)} H_1^{2H_1} H_2^{2H_2} \frac{(2H_1)_n}{n!} \tag{2.3.76}$$

$$\sigma_{4,n}^2 = \alpha^{2(1-H_1-H_2)} H_1^{2H_1} H_2^{2H_2} (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{(2H_1)_k}{k!} \frac{(2H_2)_{(n-k)}}{(n-k)!} e^{-\alpha k\left((\frac{1}{H_1}-\frac{2}{k})(t-\frac{s}{H_2})\right)} \tag{2.3.77}$$

et

$$a_n = \frac{n}{H_2} - 1, \quad a'_n = \frac{n}{H_1} - 1. \tag{2.3.78}$$

Preuve : Clairement, pour tout $(t,s,h,k) \in \,]0,+\infty[^4$, la fonction de covariance (2.3.69) peut être décomposée de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big(\mathcal{L}_{t+h,s+k}(B^{H_1,H_2})\mathcal{L}_{h,k}(B^{H_1,H_2})\Big) \\
&= \underbrace{Ae^{-\alpha(t+s)}}_{\mathbf{i}} + \underbrace{A\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2H_2)_m}{m!}(-1)^{m-1}\, e^{-\alpha\left(t+s(\frac{m}{H_2}-1)\right)}}_{\mathbf{ii}} \\
&\underbrace{+A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2H_1)_n}{n!}(-1)^{n-1}\, e^{-\alpha\left(t(\frac{n}{H_1}-1)+s\right)}}_{\mathbf{iii}} \\
&\underbrace{+A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2H_1)_n}{n!}(-1)^{n-1}\, e^{-\alpha t(\frac{n}{H_1}-1)} \times \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2H_2)_m}{m!}(-1)^{m-1} e^{-\alpha s(\frac{m}{H_2}-1)}}_{\mathbf{iv}}
\end{aligned} \tag{2.3.79}$$

avec $A := \frac{1}{4}(\frac{H_1}{\alpha})^{2H_1}(\frac{H_2}{\alpha})^{2H_2} = \frac{H_1^{2H_1}H_2^{2H_2}}{4\alpha^{2(H_1+H_2)}}$.

Nous essayons maintenant d'identifier chacun des quatre termes cités ci-dessus à une série des fonctions de covariance définies comme la forme (2.3.68).

Identification de i: En exploitant le fait que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, et en utilisant l'égalité (2.3.67), nous trouvons que pour tous t, s, h, $k > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{H_1}^{2H_1} {H_2}^{2H_2}}{4n(n+1)\alpha^{2(H_1+H_2)}} e^{-\alpha(t+s)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\Big(U_{1,n}(t+h,s+k,\alpha,\sigma_{1,n}) U_{1,n}(h,k,\alpha,\sigma_{1,n})\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} R_{U_{1,n}}(t,s,\alpha,\sigma_{1,n}), \end{aligned} \tag{2.3.80}$$

avec pour tout $n \geq 1$, les coefficients $\sigma_{1,n}$ sont indiqués par (2.3.74) et $\alpha_{1,n} = \alpha$.

Ici $\sum_{n=1}^{\infty} U_{1,n}(t,s,\alpha,\sigma_{1,n})$ est bien définie car la série numérique:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{1,n}^2}{4\alpha^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_1^{2H_1}\, H_2^{2H_2}}{4n(n+1)\alpha^{2(H_1+H_2)}} \\ &= \frac{{H_1}^{2H_1} {H_2}^{2H_2}}{4\alpha^{2(H_1+H_2)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= A < \infty. \end{aligned} \tag{2.3.81}$$

Identification de ii: Nous considérons ensuite le second terme,

$$\mathbf{ii} := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{{H_1}^{2H_1} {H_2}^{2H_2}}{4\alpha^{2(H_1+H_2)}} \frac{(2H_2)_m}{m!} (-1)^{m-1} e^{-\alpha\left(t+s(\frac{m}{H_2}-1)\right)}. \tag{2.3.82}$$

Or nous remarquons que la fonction de covariance du champ gaussien suivant:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} U_m\Big(t,(\frac{m}{H_2}-1)s,\alpha,\sigma_{2,m}\Big) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{2,m} \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{(\frac{m}{H_2}-1)s} e^{-\alpha(t-u)} e^{-\alpha\left((\frac{m}{H_2}-1)s-v\right)} \mathrm{d}B_m(u,v) \end{aligned} \tag{2.3.83}$$

est égale à:

$$\sum_{m=1}^{\infty} R_{U_m}(t,(\frac{m}{H_2}-1)s,\alpha,\sigma_{2,m}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_{2,m}^2}{4\alpha^2} e^{-\alpha\left(t+(\frac{m}{H_2}-1)s\right)}, \quad t,\ s > 0. \tag{2.3.84}$$

Ce qui entraîne immédiatement que:

$$\mathbf{ii} = \sum_{m=1}^{\infty} R_{U_{2,m}}(t,a_m s,\alpha,\sigma_{2,m}) \tag{2.3.85}$$

avec pour tout $m \geq 1$, les paramètres $\sigma_{2,m}$ et a_m sont respectivement donnés par (2.3.75) et (2.3.78).

De la même manière que précédemment, la série $\sum_{m=1}^{\infty} U_{2,m}(t,a_m s,\alpha,\sigma_{2,m})$ est bien définie dans le sens de $L^2(\Omega)$, car tout simplement nous avons:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_{2,m}^2}{4\alpha^2} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{H_1^{2H_1} H_2^{2H_2}}{4\alpha^{2(H_1+H_2)}} \frac{(2H_2)_m}{m!} (-1)^{m-1} \\
&= \frac{H_1^{2H_1} H_2^{2H_2}}{4\alpha^{2(H_1+H_2)}} \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2H_2)_m}{m!} (-1)^{m-1}}_{=1} \\
&= A \; < \; \infty.
\end{aligned} \tag{2.3.86}$$

Identification de iii: Par analogie avec **ii**, nous déduisons que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{iii} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_1^{2H_1} \; H_2^{2H_2}}{4\alpha^{2(H_1+H_2)}} \frac{(2H_1)_n}{n!} (-1)^{n-1} e^{-\alpha\left(t(\frac{n}{H_1}-1)+s\right)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} R_{U_{3,n}}(a'_n t,s,\alpha,\sigma_{3,n}), \;\; t, \; s > 0,
\end{aligned}$$

où pour tout $n \geq 1$, les coefficients $\sigma_{3,n}$ et a'_n sont respectivement exprimés dans (2.3.76) et (2.3.78). De plus, nous vérifions que la série $\sum_{n=1}^{\infty} U_{3,n}(a'_n t,s,\alpha,\sigma_{3,n})$ est finie par la même raison que dans **ii**.

Identification de iv: Étant donné que le dernier terme:

$$\mathbf{iv} := A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2H_1)_n}{n!} \; (-1)^{n-1} \; e^{-\alpha t(\frac{n}{H_1}-1)} \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2H_2)_m}{m!} \; (-1)^{m-1} \; e^{-\alpha s(\frac{m}{H_2}-1)}, \tag{2.3.87}$$

s'écrit comme un produit de Cauchy de deux séries numériques, alors nous trouvons que:

$$\mathbf{iv} = A \sum_{n=1}^{\infty} C_n$$

avec,

$$C_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{(2H_1)_k}{k!} \frac{(2H_2)_{(n-k)}}{(n-k)!} e^{-\alpha k\left(\frac{t}{H_1}-\frac{s}{H_2}\right)} e^{-\alpha\left(s(\frac{n}{H_2}-1)-t\right)}. \tag{2.3.88}$$

Par la suite, ceci implique que:

$$\begin{aligned}
\textbf{iv} &= \sum_{n=1}^{\infty} A\,(-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(2H_1)_k}{k!}\ \frac{(2H_2)_{(n-k)}}{(n-k)!}\ e^{-\alpha k(\frac{t}{H_1}-\frac{s}{H_2})}\right) e^{-\alpha\left((\frac{n}{H_2}-1)s-t\right)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A(-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(2H_1)_k}{k!} \frac{(2H_2)_{(n-k)}}{(n-k)!} e^{-\alpha k\left((\frac{1}{H_1}-\frac{2}{k})t-\frac{s}{H_2}\right)}\right) e^{-\alpha\left((\frac{n}{H_2}-1)s+t\right)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A(-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(2H_1)_k}{k!} \frac{(2H_2)_{(n-k)}}{(n-k)!} e^{-\alpha k\left((\frac{1}{H_1}-\frac{2}{k})t-\frac{s}{H_2}\right)}\right) e^{-\alpha(a_n s+t)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} R_{U_{4,n}}(t,a_n s,\alpha,\sigma_{4,n}),
\end{aligned} \tag{2.3.89}$$

tels que, pour tout $n \geq 1$, $\sigma_{4,n}$ et a_n sont respectivement donnés par (2.3.77) et (2.3.78).

En dernier lieu, il nous reste juste à vérifier que la série $\sum_{n=1}^{\infty} U_{4,n}(t,a_n s,\alpha,\sigma_{4,n})$ est finie, ce qui est le cas car sa fonction de covariance s'écrit de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} R_{U_{4,n}}(t,a_n s,\alpha,\sigma_{4,n}) \\
&= A\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2H_1)_n}{n!}(-1)^{n-1} e^{-\alpha t(\frac{n}{H_1}-1)} \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2H_2)_m}{m!}(-1)^{m-1} e^{-\alpha s(\frac{m}{H_2}-1)}
\end{aligned}$$

et puisqu'il s'agit d'un produit de deux fonctions de covariance, d'où il est clair que cette covariance est finie.

Regroupons finalement tous les résultats obtenus le long de cette démonstration, alors pour tous t, s, h, $k > 0$, nous dégageons que:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big(\mathcal{L}_{t+h,s+k}(B^{H_1,H_2})\mathcal{L}_{h,k}(B^{H_1,H_2})\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(R_{U_{1,n}}(t,s,\alpha,\sigma_{1,n}) + R_{U_{2,n}}(t,a_n s,\alpha,\sigma_{2,n}) + R_{U_{3,n}}(a'_n t,s,\alpha,\sigma_{3,n}) \\
&+ R_{U_{4,n}}(t,a_n s,\alpha,\sigma_{4,n})\Big),
\end{aligned} \tag{2.3.90}$$

et dû au fait que pour tous $i = 1,\ldots,4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les champs $U_{i,n}$ sont indépendants, nous arrivons au bout du compte à établir la décomposition (2.3.72) souhaitée. ■

Remarque 2.3.1 *Cette décomposition n'est pas unique, les paramètres des champs d'Ornstein-Uhlenbeck classiques utilisés peuvent être choisis avec des différentes manières afin de s'adapter avec (2.3.72). Notre représentation dans ce travail diffère par rapport à celle de [29] et aussi de [3], qui ont établi une décomposition dont les termes sont des fonctions déterministes avec des coefficients aléatoires indépendants.*

Remarque 2.3.2 *Cette décomposition semble être fort puissante puisqu'elle permet en quelque sorte de faire le lien entre le dBf et le dB classique qui est un champ aléatoire riche en propriétés et à structure de dépendance assez simple. Ceci s'obtient également en passant par la transformation de Lamperti inverse, où à travers laquelle nous passons d'un champ aléatoire stationnaire vers un champ aléatoire auto-similaire, de ce fait, nous dégageons directement une représentation du dBf en série de* 4 *champs qui sont des draps browniens indépendants (des dB avec un changement déterministe au niveau de leurs indices du temps).*

Chapitre 3

Variation quadratique spatiale de la solution de l'EDPS des ondes dirigée par un bruit blanc en temps et en espace

Le but de ce troisième chapitre[1] est d'étudier le modèle mathématique décrivant l'équation aux dérivées partielles stochastiques (EDPS) linéaire des ondes forcée par un bruit aléatoire blanc spatio-temporel additif. Tout d'abord, nous mettons en évidence le processus solution (solution de type *évolutive*) relatif à l'EDPS considérée, puis nous vérifions, lorsque le temps est fixé, la normalité asymptotique faible de la suite des variations quadratiques renormalisées. Notre raisonnement repose massivement sur la méthode de Stein-Malliavin, c'est pourquoi nous introduisons les outils à savoir sur cette notion. Un théorème central limite (TCL) presque sûr est vérifié et fait l'objet de la dernière partie de ce chapitre.

1. Ce chapitre fait l'objet d'un article [42] publié dans la revue "*Stochastics and Dynamics*".

3.1 Aperçu sur l'équation stochastique des ondes

Avant d'entrer dans le vif du sujet et de passer au travail proprement dit, il est commode de commencer par un succinct prologue sur l'EDPS des ondes: sa formulation, ses solutions, ses divers propriétés,...

La formulation mathématique de l'équation stochastique linéaire non homogène des ondes dirigée par un mouvement brownien classique W de dimension infinie, est illustrée par le modèle ci-dessous:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) &= \Delta u(t,x) + \dot{W}(t,x), \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Avec Δ désigne le Laplacien sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, et $\dot{W}$ est la dérivée au sens des distributions du champ $W = \{W_t(A);\ t \geq 0,\, A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)\}$. Nous notons que W est un champ gaussien centré défini sur un espace de probabilités filtré complet $(\Omega,\, \mathcal{F},\, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\, \mathbb{P})$, et de fonction de covariance donnée par:

$$\mathbf{E}\Big(W_t(A)W_s(B)\Big) = (t \wedge s)\lambda_d(A \cap B), \text{ pour tous } A,\, B \in \mathcal{B}_d(\mathbb{R}^d). \tag{3.1.2}$$

Ici λ_d est la mesure de Lebesgue de dimension d et $\mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}^d$ dont la mesure de Lebesgue est finie. Par commodité d'écriture, nous identifions le champ $\dot{W}$ au champ W car ils ont les mêmes lois finies dimensionnelles, veuillez voir notamment [90] pour une explication précise.

Communément ce champ aléatoire est appelé *le bruit blanc en temps et en espace* par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, on pourra consulter encore [90] pour plus de renseignements sur ce bruit et [16] pour un exemple typique de l'équation (3.1.1).

3.1.1 Solutions faibles

Une fois la modélisation mathématique de notre équation considérée est mise en place, nous avons besoin de spécifier une solution de (3.1.1), nous commençons par la notion des *solutions faibles* de l'EDPS présentée.

Comme le bruit blanc qui dirige l'équation est nul part dérivable, alors chaque solution de (3.1.1) sera par conséquent nulle part dérivable. Toutefois, nous pouvons réécrire (3.1.1) comme une équation intégrale qui pourra être résolue: c'est la formulation *faible* de l'EDPS des ondes.

Fixons $T > 0$, soit $\varphi \in C^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$ une fonction à support compact sur $\mathbb{R}^d$ tels que $\varphi(T,x) = 0$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(T,x) = 0$. Nous supposons maintenant qu'il existe une solution u et qu'elle est dans l'espace $C^2([0,T] \times \mathbb{R}^d)$, alors lorsque nous multiplions les deux côtés de l'équation (3.1.1) par la fonction φ et ensuite nous les dérivons formellement à l'aide de la formule d'intégration par parties, nous obtenons aisément l'égalité suivante:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\Big(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t,x) - \Delta\varphi(t,x)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t,x)W(\mathrm{d}x,\mathrm{d}t). \tag{3.1.3}$$

De ce fait, u est dite *une solution faible* de (3.1.1) si elle satisfait (3.1.3).

Également, nous remarquons que si la fonction $\varphi \in C^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$ avec un support compact sur $\mathbb{R}^d$, et si elle vérifie $\varphi(T,x) = 0$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(T,x) = 0$, nous pourrons alors retrouver l'équation (3.1.1) à partir de l'équation (3.1.3).

Parmi les particularités de ces solutions, il y a le fait qu'elles peuvent exister lorsque les solutions classiques ne les sont pas et que leur définition est plus forte que celle d'une solution classique, des nombreuses références évoquent la notion des solutions faibles d'une EDPS y compris les travaux [90, 44].

3.1.2 Noyaux de Green

On se donne maintenant l'équation des ondes homogène corroborée avec des conditions initiales spéciales:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2}(t,x) &= \Delta G_1(t,x), \; t > 0, \, x \in \mathbb{R}^d \\ G_1(0,x) &= 0, \qquad\quad x \in \mathbb{R}^d \\ \frac{\partial G_1}{\partial t}(0,x) &= \delta(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Où $\delta(\cdot)$ est la distribution de Dirac et la solution G_1 est *le noyau de Green* (dite aussi *la fonction de Green*) associé à l'équation (3.1.4), sa forme dépend essentiellement de la dimension d de l'espace contrairement au noyau de Green associé à l'EDPS de la chaleur qui conserve la même expression en toute dimension.

Nous mentionnons que $G_1(t,\cdot)$ est une distribution de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et que le moyen le plus pratique pour la définir, c'est via sa transformée de Fourrier [84, 49] qui est donnée par l'expression suivante:

$$\mathcal{F}G_1(t,\cdot)(\xi) = \frac{\sin(t\|\xi\|)}{\|\xi\|}, \text{ pour tous } \xi \in \mathbb{R}^d,\ t > 0 \text{ et } d \geq 1, \tag{3.1.5}$$

avec $\|\cdot\|$ indique la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

Particulièrement pour $d = \{1, 2, 3\}$, ce noyau a des expressions explicites bien connues qui sont intensivement discutées dans [84] et elles peuvent être résumées comme suit:

$$\begin{cases} G_1(t,x) &= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{|x|<t\}}, \quad \text{si } d = 1 \\ G_1(t,x) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{t^2-|x|^2}}\mathbb{1}_{\{|x|<t\}}, \quad \text{si } d = 2 \\ G_1(t,\mathrm{d}x) &= c_d\frac{\sigma_t(\mathrm{d}x)}{t}, \quad \text{si } d = 3, \end{cases} \tag{3.1.6}$$

avec la quantité $\sigma_t(\mathrm{d}x)$ désigne la mesure uniforme sur la surface de la boule tridimensionnelle de rayon t, (il s'agit d'une mesure). Également, nous notons que lorsque d augmente, la fonction de Green de l'équation des ondes devient de plus en plus irrégulière, l'article [32] a mis en relief cette propriété.

Par ailleurs, nous appelons le noyau $(t,x) \mapsto G_1(t,x)$ la *solution fondamentale* de l'équation des ondes (voir [84] pour la construction de G_1), son importance réside dans le fait qu'elle sert à générer toutes les solutions de l'équation des ondes non homogènes, même celles perturbées par d'autre bruits et munies par des conditions initiales plus générales.

Sans bien évidemment rentrer dans les détails qui relèvent de travaux très techniques, on adapte que $G_1(t,x;s,y) = G_1(t-s,x-y)$ est la fonction de Green de l'équation (3.1.1), on s'adresse autant vers [7, 83] pour avoir une idée sur ce résultat.

3.1.3 Solution évolutive

Outre que la solution faible donnée par la relation (3.1.3), nous avons la notion de la solution évolutive de l'équation (3.1.1).

Définition 3.1.1 *Un champ $u = (u(t,x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$ est dit une solution évolutive de (3.1.1), si u est un champ $\mathcal{F}_t$-adapté qui s'écrit $\mathbb{P}$-p.s. de la façon suivante:*

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G_1(t-s,x-y)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s). \tag{3.1.7}$$

Proposition 3.1.1 *Le champ aléatoire solution (3.1.7) existe si et seulement si la dimension spatiale d est égale à 1.*

Preuve : La solution évolutive de (3.1.1) existe si et seulement si, pour tout t et pour tout x, l'intégrale de Wiener dans (3.1.7) par rapport au processus bruit est bien définie. Pour vérifier ceci, nous avons besoin de préciser que la fonction de Green $(s,y) \longmapsto g_{t,x}(s,y) := G_1(t-s,x-y)$ est dans l'espace $L^2([0,t] \times \mathbb{R}^d)$, ce qui engendre deux situations à préciser:

$*$ Pour $d = 1$, fixons $T > 0$, alors il est clair que pour tout $t \in [0,T]$ nous avons:

$$g_{t,x}(s,y) := G_1(t-s,x-y) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{|x-y|<t-s\}} \in L^2([0,t] \times \mathbb{R}).$$

(dans ce cas le support de la solution u est historiquement appelé le cône de la lumière dans le plan).

$*$ Pour $d = 2$, à l'aide de l'expression du noyau de Green (3.1.6), la fonction $g_{t,x}$ n'est plus dans $L^2([0,t] \times \mathbb{R}^d)$ car:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} G_1^2(t-s,x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(t-s)^2 - |x-y|^2}\mathbb{1}_{\{|x-y|<t-s\}}\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^t \int_{|x-y|<t-s} \frac{1}{(t-s)^2 - |x-y|^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^t \int_{|q|<p} \frac{1}{p^2 - |q|^2}\mathrm{d}q\mathrm{d}p.
\end{aligned}$$

En vertu des coordonnées polaires $q = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in [0,2\pi[$, nous obtenons sans peine:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} G_1^2(t-s,x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^t \mathrm{d}p \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^p \frac{r}{p^2-r^2}\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^t \mathrm{d}p \int_0^p \frac{2r}{p^2-r^2}\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^t \mathrm{d}p\Big(-\ln(p^2-r^2)\Big)\Big|_0^p \\
&= +\infty.
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Alors, indubitablement pour $d = 2$, il n'existe aucune solution évolutive pour l'équation (3.1.1), c'est seulement pour $d = 1$ que cette solution existe. ■

Remarque 3.1.1 *La solution évolutive (3.1.7) est un processus uniformément borné dans l'espace $L^2(\Omega)$, la preuve est à voir dans le Théorème 3.2 de l'article [60].*

Avant de passer véritablement à l'étude des variations quadratiques de la solution évolutive considérée, nous concluons cette section par une caractérisation de la relation entre les deux types de solutions évoquées précédemment.

3.1.4 Relation entre solution faible et solution évolutive

Il existe une relation de bijectivité entre une solution faible et une autre évolutive, la proposition ci-après permet de décrire cette correspondance.

Proposition 3.1.2 *Soit $T > 0$ fixé, un processus $(u(t,x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}}$ vérifie la formulation évolutive (3.1.7) donnée par:*

$$u(t,x) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} G_1(t-s,x-y)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s),\ \ \mathbb{P}-p.s$$

si et seulement si, il est $\mathcal{F}_t$-adapté, uniformément borné dans $L^2(\Omega)$ et il satisfait $\mathbb{P}-p.s.$ la formulation faible (3.1.3) exprimée par:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} u(t,x)\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \varphi(t,x)W(\mathrm{d}x,\mathrm{d}t),$$

ceci pour tout $\varphi \in C^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R})$ à support compact inclu dans $\mathbb{R}$, tels que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\varphi(T,x) = 0$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(T,x) = 0$.

Preuve : Tout d'abord nous intéressons à la condition nécessaire et nous considérons $\varphi \in C^\infty([0,\infty)\times\mathbb{R})$ une fonction à support compact dans $\mathbb{R}$ qui vérifie $\varphi(T,x) = 0$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(T,x) = 0$.

Tient au fait que l'expression explicite du noyau est $G_1(t,x;s,y) = G_1(t-s,x-y) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{|x-y|<t-s\}}$, et grâce à la version stochastique du théorème de Fubini, alors nous pourrons écrire que $\mathbb{P}-p.s.$:

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} G_1(t-s,x-y)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} G_1(t-s,x-y)\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}tW(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s). \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

À ce niveau, d'une part nous notons que:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}} G_1(t-s,x-y)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int_s^T \int_{y-t+s}^{y+t-s} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int_{s+y-x}^T \int_{y-T+s}^{y} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{s-y+x}^T \int_{y}^{y+T-s} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int_{y-T+s}^{y} \Big(\partial_1\varphi(T,x) - \partial_1\varphi(s+y-x,x)\Big)\mathrm{d}x\\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{y}^{y+T-s} \Big(\partial_1\varphi(T,x) - \partial_1\varphi(s-y+x,x)\Big)\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{2}\int_{y-T+s}^{y} \partial_1\varphi(s+y-x,x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{y}^{y+T-s} \partial_1\varphi(s-y+x,x)\mathrm{d}x, \quad (3.1.10)
\end{aligned}$$

où la notation $\partial_1\varphi$ désigne la dérivée de la fonction φ par rapport à sa première variable.

D'autre part, nous calculons la deuxième quantité de (3.1.9) et nous trouvons que:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}} G_1(t-s,x-y)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int_s^T \int_{y-t+s}^{y+t-s} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int_s^T \partial_2\varphi(t,y+t-s)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_s^T \partial_2\varphi(t,y-t+s)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int_{y}^{y+T-s} \partial_2\varphi(s-y+x,x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{y-T+s}^{y} \partial_2\varphi(s+y-x,x)\mathrm{d}x, \quad (3.1.11)
\end{aligned}$$

avec la notation $\partial_2\varphi$ indique pareillement la dérivée de la fonction φ par rapport à sa deuxième variable.

En regroupement les deux résultats (3.1.10) et (3.1.11), nous concluons directement que:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}} G_1(t-s,x-y)\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}\Big(\int_y^{y+T-s} \partial_1\varphi(s-y+x,x) + \partial_2\varphi(s-y+x,x)\Big)\mathrm{d}x \\
&\quad +\frac{1}{2}\Big(\int_{y-T+s}^{y} \partial_2\varphi(s+y-x,x) - \partial_1\varphi(s+y-x,x)\Big)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_y^{y+T-s} -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(s-y+x,x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{y-T+s}^{y} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(s+y-x,x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\Big(-\varphi(T,y+T-s) + 2\varphi(s,y) - \varphi(T,y-T+s)\Big) \\
&= \varphi(s,y),
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

et revenons par la suite vers l'égalité (3.1.9), alors il en résulte que $\mathbb{P}-p.s.$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}} u(t,x)\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} G_1(t-s,x-y)\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}tW(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s) \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \varphi(s,y)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s).
\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

D'où la formulation faible est bien vérifiée.

Cherchons maintenant à établir la condition suffisante de la preuve, pour cela nous considérons la suite des fonctions $(\varphi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ définie par:

Pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $(s,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}$,

$$\varphi_\epsilon(s,y) := \int_s^T \int_{\mathbb{R}} \phi_\epsilon(t-s,x-y)G_1(t,x;s,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{3.1.14}$$

avec ϕ_ϵ est une fonction positive donnée par $\phi_\epsilon(s,y) := \phi_\epsilon(t-s,x-y)$, tels que $\phi_\epsilon \in C^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R})$, $supp\phi_\epsilon = \{x,\|x\|_2 < \epsilon\}$ et $\int_{\mathbb{R}^2} \phi_\epsilon(s,y)\mathrm{d}s\mathrm{d}y = 1$.

De ce fait, pour tout $\epsilon > 0$, nous obtenons que $\varphi_\epsilon(s,y) \in C^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R})$ avec le support est un compact inclu dans $\mathbb{R}$, de plus nous indiquons que:

$$\varphi_\epsilon(T,y) = \partial_1\varphi_\epsilon(T,y) = 0 \tag{3.1.15}$$

et

$$\partial_1^2\varphi_\epsilon(s,y) - \partial_2^2\varphi_\epsilon(s,y) = \phi_\epsilon(t-s,x-y). \tag{3.1.16}$$

Soit u un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et uniformément borné dans $L^2(\Omega)$ qui satisfait $\mathbb{P}-p.s.$ la formulation faible (3.1.3), et soit O un ensemble ouvert borné de $([0,T]\times\mathbb{R})$, alors $u\in L^2(O)$ $\mathbb{P}-p.s.$. Ainsi, en utilisant la relation (3.1.16) et en appliquant le théorème de densité dans $L^2(O)$, il en résulte que pour tout $(t,x)\in O$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u(s,y)\Big(\partial_1^2\varphi_\epsilon(s,y)-\partial_2^2\varphi_\epsilon(s,y)\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\
&=\int_0^T\int_{\mathbb{R}} u(s,y)\phi_\epsilon(t-s,x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\
&=(u*\phi_\epsilon)(t,x)\\
&\longrightarrow^{L^2(O)}_{\epsilon\to 0}\ u(t,x),\ \ \mathbb{P}-p.s.
\end{aligned}\tag{3.1.17}$$

Par ailleurs, pour le reste de la démonstration nous définissons l'ensemble compact suivant $I:=\bigcup_{y\in\mathbb{R}}\{supp\varphi_\epsilon(0,y),\,(t,x)\in O\}$, ainsi que la fonction f_ϵ donnée par:

$$f_\epsilon(s,y):=\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\Big(\varphi_\epsilon(s,y)-G_1(t,x;s,y)\Big)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Pour $(s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}$, comme $(t,x)\longmapsto G_1(t,x;s,y)\in L^2(O)$, nous trouvons que $\varphi_\epsilon(s,y)\longrightarrow^{L^2(O)}_{\epsilon\to 0} G_1(t,x;s,y)$, et par conséquent, pour tout $(s,y)\in[0,T]\times I$, nous vérifions que $f_\epsilon(s,y)\longrightarrow_{\epsilon\to 0} 0$.

Or d'après le théorème de la convergence de Lebesgue, il en résulte que la fonction $f_\epsilon(s,y)\longrightarrow^{L^1([0,T]\times I)}_{\epsilon\,\to\,0} 0$, ce qui entraîne par la suite que:

$$\varphi_\epsilon(s,y)\quad\longrightarrow^{L^2([0,T]\times I)}_{\epsilon\,\to\,0}\quad G_1(t,x;s,y),\ \text{pour tout } (t,x)\in O.\tag{3.1.18}$$

Toutefois, compte tenu de la relation (3.1.18) et de l'isométrie de Wiener, nous montrons que:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big(\int_0^T\int_{\mathbb{R}}(\varphi_\epsilon-G_1(t,x;s,y))W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)\Big)^2\\
&=\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\big(\varphi_\epsilon(s,y)-G_1(t,x;s,y)\big)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\
&\quad\longrightarrow_{\epsilon\,\to\,0} 0,\quad \text{pour tout } (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}.
\end{aligned}\tag{3.1.19}$$

Alors,

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\varphi_\epsilon(s,y)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)\longrightarrow^{L^2(\Omega)}_{\epsilon\to 0}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}G_1(t,x;s,y))W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s),\tag{3.1.20}$$

ce qui implique la convergence presque sûr d'une sous-suite.

En conclusion, grâce aux limites $\mathbb{P}-p.s.$ trouvées dans (3.1.17) et dans (3.1.20), le processus u vérifie la formulation évolutive. ■

Remarque 3.1.2 *Si nous nous écartons de la situation où la condition initiale de l'équation (3.1.1) est nulle, en prenant une condition $u(0,x) = u_0(x)$ telle que la fonction u_0 est non nulle, alors la solution évolutive sera définie de la manière suivante:*

$$u(t,x) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^d} G_1(t,x-y)u_0(y)\mathrm{d}y + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G_1(t-s,x-y)W(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y). \quad (3.1.21)$$

Si de plus nous suppossons que la fonction u_0 est régulière, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $t > 0$, l'intégrale de Riemann apparue dans (3.1.21) est une fonction régulière, et par conséquent son intervention dans la solution n'affectera pas le comportement des variations que nous allons les considérer. C'est pourquoi, nous avons choisi, sans perte de généralité, de travailler avec $u_0 = 0$.

Dorénavant, nous nous arrongeons à travailler avec la solution de type évolutive définie dans le sens de la Définition 3.1.1, et nous nous intéressons à étudier les variations quadratiques relative à cette solution.

3.2 Variation quadratique spatiale

Pour la suite de ce travail, on fixe la variable temps $t > 0$ et on se restreint à l'intervalle d'espace $[0,1]$. Pour tout $N \geq 1$ et pour tout $j = 0,\ldots,N$, on choisit une subdivision de l'intervalle $[0,1]$ définie par la suite des points $(x_j)_{0\leq j\leq N}$, tel que $x_j = \frac{j}{N}$, ainsi la suite des variations quadratiques centrées renormalisées définie sur l'intervalle d'unité $[0,1]$ peut être donnée pour tout $N \geq 1$ par l'expression suivante:

$$V_N = \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{\left(u(t,\frac{j+1}{N}) - u(t,\frac{j}{N})\right)^2}{\mathbf{E}\left(u(t,\frac{j+1}{N}) - u(t,\frac{j}{N})\right)^2} - 1 \right]. \quad (3.2.22)$$

Nous visons à caractériser le comportement asymptotique spatial de la séquence V_N lorsque N tend vers ∞. Afin d'y arriver, nous avons besoin tout d'abord d'expliciter la fonction d'auto-corrélation des accroissements associés à la solution $(u(t,x))_{x\in[0,1]}$, c'est à dire, pour tout $N \geq 1$ et pour tout $j,\ k = 0,\dots,N-1$, nous cherchons à expliciter la quantité:

$$\mathbf{E}\Big((u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j))(u(t,x_{k+1}) - u(t,x_k))\Big), \tag{3.2.23}$$

qui joue un rôle important dans notre analyse.

Commençons par mentionner qu'à l'aide de l'isométrie de Wiener, nous obtenons que:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big(\big(u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j)\big)\big(u(t,x_{k+1}) - u(t,x_k)\big)\Big)\\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Big(G_1(t-s,x_{j+1}-y) - G_1(t-s,x_j-y)\Big)\\
&\quad \times \Big(G_1(t-s,x_{k+1}-y) - G_1(t-s,x_k-y)\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

Une formule clé est l'identité de Plancherel qui s'énonce pour tout fonction $f,\, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, comme suit:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}x = C\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f)(\xi)\overline{(\mathcal{F}g)(\xi)}\mathrm{d}\xi. \tag{3.2.25}$$

Ici et partout, C, C_1 et C_2 s'identifient à des constantes génériques qui sont strictement positives et qui peuvent changer d'une ligne à l'autre tout en dépendant dans certaines situations de t.

En utilisant le fait que $\mathcal{F}G_1(t-s,x-y)(\xi) = e^{-i\xi x}\frac{\sin((t-s)|\xi|)}{|\xi|}$, et grâce à l'identité de Plancherel et à (3.2.24), nous trouvons pour des réels arbitraires $x_j < x_{j+1}$ et $x_k < x_{k+1}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big((u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j))(u(t,x_{k+1}) - u(t,x_k))\Big)\\
&= C\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\Big(G_1(t-s,x_{j+1}-y) - G_1(t-s,x_j-y)\Big)(\xi)\\
&\quad \times \overline{\mathcal{F}\Big(G_1(t-s,x_{k+1}-y) - G_1(t-s,x_k-y)\Big)(\xi)}\ \mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\\
&= C\int_0^t \mathrm{d}s \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin((t-s)|\xi|)}{|\xi|}\right)^2 \left(e^{-i\xi x_{j+1}} - e^{-i\xi x_j}\right)\overline{\left(e^{-i\xi x_{k+1}} - e^{-i\xi x_k}\right)}\mathrm{d}\xi
\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

En vertu du théorème de Fubini et de la relation trigonométrique $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, l'intégrale ci-dessus par rapport à la variable s, peut être calculée et son expression est la suivante:

$$\int_0^t \sin^2((t-s)|\xi|)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2|\xi|}\sin(2t|\xi|)\right). \tag{3.2.27}$$

D'où, (3.2.26) est réexprimée comme ci-après:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big((u(t,x_{j+1})-u(t,x_j))(u(t,x_{k+1})-u(t,x_k))\Big)\\
=\;& C\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{|\xi|^2}\left(t-\frac{1}{2|\xi|}\sin(2t|\xi|)\right)\left(e^{-i\xi x_{j+1}}-e^{-i\xi x_j}\right)\overline{\left(e^{-i\xi x_{k+1}}-e^{-i\xi x_k}\right)}\mathrm{d}\xi \qquad (3.2.28)
\end{aligned}$$

Nous énonçons maintenant le premier lemme de ce chapitre dont le résultat va nous aider intensivement dans la suite.

Lemme 3.2.1 *Soient T, $M>0$ et $t\in\,]0,T]$ fixé, alors il existe deux constantes $0<C_2<C_1$ tel que:*

$$C_2|x-y|\leq \mathbf{E}\Big(|u(t,x)-u(t,y)|^2\Big)\leq C_1|x-y| \qquad (3.2.29)$$

pour tous $x\neq y$ appartenant à $[-M,M]$.

Preuve : Notre objectif est d'estimer la norme $L^2(\Omega)$ des accroissements spatiaux. Commençons par la majoration, alors pour tout $t\in(0,T]$ fixé, pour tout $x\neq y$ dans $[-M,M]$ et en s'appuyant sur l'expression (3.2.26), nous trouvons l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big(\mid u(t,x)-u(t,y)\mid^2\Big)\\
&=\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Big(G_1(t-s,x-z)-G_1(t-s,y-z)\Big)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}s\\
&=C\int_0^t\mathrm{d}s\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin((t-s)|\xi|)}{|\xi|}\right)^2|e^{-i\xi x}-e^{-i\xi y}|^2\mathrm{d}\xi\\
&=C\int_0^t\mathrm{d}s\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin((t-s)|\xi|)}{\xi}\right)^2|e^{-i\xi(x-y)}-1|^2\mathrm{d}\xi\\
&=C\int_0^t\mathrm{d}s\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin((t-s)|\xi|)}{\xi}\right)^2\Big(2-2\cos(\xi(x-y))\Big)\mathrm{d}\xi \qquad (3.2.30)\\
&\leq C\int_0^t\mathrm{d}s\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(\xi(x-y))}{\xi^2}\mathrm{d}\xi\\
&\leq C\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(\xi(x-y))}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi. \qquad (3.2.31)
\end{aligned}$$

Prenons $a=\frac{x-y}{|x-y|}$ et effectuons le changement de variable $p=|x-y|\xi$, alors la dernière relation ci-dessus s'exprime comme suit:

$$\mathbf{E}\Big(\mid u(t,x)-u(t,y)\mid^2\Big)\;\leq\; C|x-y|\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(ap)}{p^2}\mathrm{d}p.$$

Or, il est facile de voir que $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(ap)}{p^2}\mathrm{d}p$ est majorée par une constante positive. En effet en utilisant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les relations $1-\cos(x) \leq x^2$ et $0 \leq 1-\cos(x) \leq 2$, nous montrons directement que:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(ap)}{p^2}\mathrm{d}p &= \int_0^{1} \frac{1-\cos(ap)}{p^2}\mathrm{d}p + \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(ap)}{p^2}\mathrm{d}p \\ &\leq a^2+2 \leq 3, \end{aligned} \tag{3.2.32}$$

ce qui implique immédiatement que:

$$\mathbf{E}\Big(\mid u(t,x) - u(t,y) \mid^2 \Big) \leq C_1|x-y|. \tag{3.2.33}$$

Maintenant, il nous reste plus qu'à montrer la deuxième partie de la preuve, c'est la partie minoration. En premier lieu nous utilisons l'expression (3.2.30) et nous divisons l'intégrale en deux parties de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\Big(\mid u(t,x) - u(t,y) \mid^2 \Big) &= C\int_0^t \mathrm{d}s \int_0^1 \left(\frac{\sin((t-s)|\xi|)}{\xi}\right)^2 \Big(1-\cos(\xi(x-y))\Big)\mathrm{d}\xi \\ &+ C\int_0^t \mathrm{d}s \int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin((t-s)|\xi|)}{\xi}\right)^2 \Big(1-\cos(\xi(x-y))\Big)\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Comme la première quantité de l'égalité en haut est positive, alors nous pouvons négliger sa contribution, ceci nous donne, grâce au théorème de Fubini et au résultat (3.2.27), la relation ci-dessous:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\Big(\mid u(t,x) - u(t,y) \mid^2 \Big) &\geq C\int_0^t \mathrm{d}s \int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin((t-s)|\xi|)}{\xi}\right)^2 \Big(1-\cos(\xi(x-y))\Big)\mathrm{d}\xi \\ &\geq C\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(\xi(x-y))}{\xi^2} \left(t - \frac{1}{2|\xi|}\sin(2t|\xi|)\right)\mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{3.2.34}$$

Afin d'obtenir le résultat voulu, nous devons trouver une minoration finie et indépendante de la variable ξ pour la quantité $t - \frac{1}{2|\xi|}\sin(2t|\xi|)$, d'où en se basant sur le fait que $|\xi| \geq 1$ et que $\sin(2t|\xi|) \leq 1$, nous déduisons que:

$$\frac{\sin(2t|\xi|)}{2|\xi|} \leq \frac{1}{2}. \tag{3.2.35}$$

Sans perte de généralité, nous supposons à ce niveau que $t=1$, donc pour tout $|\xi| \geq 1$, nous obtenons $1 - \frac{\sin(2|\xi|)}{2|\xi|} \geq \frac{1}{2}$, et par conséquence l'inégalité (3.2.34) peut être réécrite comme suit:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big(\mid u(t,x) - u(t,y) \mid^2 \Big) \;&\geq\; C\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(\xi(x-y))}{\xi^2}\mathrm{d}\xi \\
&=\; C\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(\xi\frac{(x-y)}{2})}{\xi^2}\mathrm{d}\xi \\
&=\; C\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(a\xi\frac{|x-y|}{2})}{\xi^2}\mathrm{d}\xi \\
&=\; C \mid x-y \mid \int_{\frac{|x-y|}{2}}^{+\infty} \frac{\sin^2(aq)}{q^2}\mathrm{d}q \\
&\geq\; C \mid x-y \mid \int_M^{+\infty} \frac{\sin^2(aq)}{q^2}\mathrm{d}q \\
&\geq\; C_2 \mid x-y \mid . \qquad (3.2.36)
\end{aligned}$$

Nous notons que dans la deuxième et la troisième inégalité, nous avons encore adopté la notation $a = \frac{x-y}{|x-y|}$, et nous avons effectué le changement de variable $q = \frac{\xi|x-y|}{2}$, cependant dans la dernière ligne, nous avons utilisé le fait que l'intégrale $\displaystyle\int_M^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\mathrm{d}\xi$ est finie et indépendante des variables x et y, d'où (3.2.29) est établi et la démonstration est finalement achevée. ∎

Remarque 3.2.1 *L'encadrement (3.2.29) a été vérifié dans [24] dans le cas d'un bruit blanc en temps et coloré en espace. Probablement, celui pour le cas d'un bruit blanc spatio-temporel a été aussi traité, mais puisque nous n'avons pas trouvé malheureusement une référence précise, nous avons préféré d'inclure la preuve au sein de notre travail.*

Des propriétés intéressantes peuvent être déduites à partir du Lemme 3.2.1 et elles s'énonçent comme suit:

Propriétés 3.2.1 *Grâce au théorème de continuité de Kolmogorov, une conséquence du lemme précédent est que les trajectoires $x \longmapsto u(t,x)$ sont presque sûrement Hölder continues d'ordre $\gamma \in]0,\frac{1}{2}[$ (ils ne le sont pas pour tout $\gamma \geq \frac{1}{2}$), voir [24], [20] et [86] pour plus de détails. Au surplus, ce lemme nous renseigne que la solution spatiale est une quasi-hélice d'indice 1 selon le sens évoqué par Kahane [38], et que les accroissements spatiaux associés à cette solution ne sont pas stationnaires.*

3.2.1 Fonction de covariance spatiale

Le lemme suivant est la clé de voûte pour démontrer notre résultat souhaité, il consiste à donner l'expression explicite de la fonction de covariance de la solution spatiale en utilisant pûrement l'expression de noyau de Green associé à l'équation des ondes stochastique considérée, ceci sans passer par la transformée de Fourier comme le cas des études effectuées pour la solution temporelle.

Lemme 3.2.2 *Soit $T > 0$ et $t \in]0,T]$ fixé, alors pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\mathbf{E}\Big(u(t,x)u(t,y)\Big) = \frac{1}{4}\Big(\frac{\mid y-x \mid}{2} - t\Big)^2 \mathbb{1}_{\{|y-x|<2t\}}. \qquad (3.2.37)$$

Preuve : Toujours sous l'hypothèse que t est fixé dans $]0,T]$, et pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, si $\mid y-x \mid< 2t$, nous prouvons que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big(u(t,x)u(t,y)\Big) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_1(t-s,x-z)G_1(t-s,y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{4}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{|x-z|<t-s\}}\mathbb{1}_{\{|y-z|<t-s\}}\mathrm{d}z\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{t-\frac{|y-x|}{2}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{|x-z|<t-s\}}\mathbb{1}_{\{|y-z|<t-s\}}\mathrm{d}z\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{4}\int_{t-\frac{|y-x|}{2}}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{|x-z|<t-s\}}\mathbb{1}_{\{|y-z|<t-s\}}\mathrm{d}z\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{t-\frac{|y-x|}{2}} \Big(2(t-s)- \mid y-x \mid\Big)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{4}\Big(\frac{\mid y-x \mid}{2} - t\Big)^2. \qquad (3.2.38)
\end{aligned}$$

Cependant, si $\mid y-x \mid\geq 2t$, nous voyons que:

$$\mathbf{E}\Big(u(t,x)u(t,y)\Big) = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{|x-z|<t-s\}}\mathbb{1}_{\{|y-z|<t-s\}}\mathrm{d}z\mathrm{d}s = 0, \qquad (3.2.39)$$

ce qui implique que l'expression (3.2.37) est bien vérifiée. ■

Remarque 3.2.2 *À partir de cette fonction de covariance, on tire que $(u(t,x))_{x\in[0,1]}$ est un processus stationnaire, contrairement à son analogue $(u(t,x))_{t\in]0,T]}$ (à temps variable* *et à espace fixé) qui est un processus auto-similaire d'indice* 1. *On rappelle que le livre [86] a évoqué une étude précise de la solution temporelle de l'EDPS des ondes et par la suite la propriété de l'auto-similarité temporelle a été bien mis en évidence.*

3.2.2 Moyenne quadratique des accroissements spatiaux

Le résultat suivant est d'une importance majeure pour notre raisonnement, il affirme que, bien que les accroissements spatiaux associés à notre solution ne soient pas indépendants, mais ils présentent des petites corrélations un peu remarquables qui montrent que les liens de liaison entre ces accroissements sont asymptôtiquement faibles.

Lors du lemme suivant, on est amené à borner la corrélation des accroissements spatiaux dont leur étude nécessite une analyse selon la valeur de l'indice du temps (t est fixe par hypothèse), d'où deux situations seront discutées dans la démonstration.

Lemme 3.2.3 *Prenons $T > 0$ et fixons $t \in]0,T]$. Pour tout $N \geq 1$ et pour tout j, $k = 0,\ldots,N-1$, avec $j \neq k$, nous avons:*

$$\mathbf{E}\Big((u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j))(u(t,x_{k+1}) - u(t,x_k))\Big) \leq \frac{C}{N^2}. \tag{3.2.40}$$

Preuve : En vertu de l'expression de la fonction de covariance donnée par (3.2.37), nous obtenons pour $x_j = \frac{j}{N}$ et $x_k = \frac{k}{N}$, $N \geq 1$, et $j \neq k$,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big(\big(u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j)\big)\big(u(t,x_{k+1}) - u(t,x_k)\big)\Big) \\
&= \frac{1}{16N^2}\Big(2 \mid j-k \mid^2 \mathbb{1}_{\{|j-k|<2tN\}} - \mid j-k-1 \mid^2 \mathbb{1}_{\{|j-k-1|<2tN\}} \\
&\quad - \mid j-k+1 \mid^2 \mathbb{1}_{\{|j-k+1|<2tN\}}\Big) - \frac{t}{4N}\Big(2 \mid j-k \mid \mathbb{1}_{\{|j-k|<2tN\}} \\
&\quad - \mid j-k-1 \mid \mathbb{1}_{\{|j-k-1|<2tN\}} - \mid j-k+1 \mid \mathbb{1}_{\{|j-k+1|<2tN\}}\Big) \\
&\quad + \frac{t^2}{2}\Big(\mathbb{1}_{\{|j-k|<2tN\}} - \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{|j-k-1|<2tN\}} - \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{|j-k+1|<2tN\}}\Big).
\end{aligned} \tag{3.2.41}$$

En ce moment, nous devons différencier deux situations selon la position du temps t par rapport à la valeur $\frac{1}{2}$: $t \geq \frac{1}{2}$ et $t < \frac{1}{2}$.

Commençons par la première situation et supposons que $j > k$, alors si $t \in [\frac{1}{2},T]$, nous avons évidemment $N \leq 2tN$, d'où nous en déduisons que nous avons toujours

$| j-k+1 |< 2tN$ (ceci reste aussi vrai lorsque $j < k$), et par conséquence la valeur absolue de la corrélation spatiale s'écrit de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathbf{E}\Big(\big(u(t,x_{j+1})-u(t,x_j)\big)\big(u(t,x_{k+1})-u(t,x_k)\big)\Big)\Big| \\
&\leq \frac{1}{16N^2}\Big|2\mid j-k\mid^2-\mid j-k-1\mid^2-\mid j-k+1\mid^2\Big| \\
&+\frac{t}{4N}\Big|2\mid j-k\mid-\mid j-k-1\mid-\mid j-k+1\mid\Big| \\
&=\frac{|f_1(j-k)|}{16N^2}+\frac{t\,|f_2(j-k)|}{4N}
\end{aligned} \tag{3.2.42}$$

où, pour tout $x\in\mathbb{R}$, les fonctions f_1 et f_2 sont définies par:

$$f_1 : x \longmapsto 2\mid x\mid^2-\mid x-1\mid^2-\mid x+1\mid^2 \tag{3.2.43}$$

et

$$f_2 : x \longmapsto 2\mid x\mid-\mid x-1\mid-\mid x+1\mid=\begin{cases} 2(x-1)\mathbb{1}_{[0,1]} \\ -2(x+1)\mathbb{1}_{[-1,0[}. \end{cases} \tag{3.2.44}$$

Une remarque assez utile est que, d'un côté on a pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $f_1(x) = -2$, et d'autre côté, comme $\mid j-k\mid\geq 1$, alors la fonction $f_2(j-k) = 0$. Ceci nous permet de vérifier facilement la majoration demandée lorsque $t\in[\frac{1}{2},T]$:

$$\Big|\mathbf{E}\Big(\big(u(t,x_{j+1})-u(t,x_j)\big)\big(u(t,x_{k+1})-u(t,x_k)\big)\Big)\Big| \leq \frac{\mid -2\mid}{16N^2}\leq\frac{C}{N^2}. \tag{3.2.45}$$

Nous nous intéressons maintenant à la deuxième situation lorsque t est fixé dans $]0,\frac{1}{2}[$. Partons encore de l'expression de la covariance spatiale (3.2.41), et supposons sans perte de généralité que $j > k$, donc nous nous rendons compte qu'il faut distinguer quatre cas (le même raisonnement peut être établi lorsque $j < k$).

Premier cas: si $j-k+1 < 2tN\leq N$, alors c'est exactement la première situation lorsque $t\in[\frac{1}{2},T]$ et ainsi nous vérifions:

$$\Big|\mathbf{E}\Big(\big(u(t,x_{j+1})-u(t,x_j)\big)\big(u(t,x_{k+1})-u(t,x_k)\big)\Big)\Big| \leq \frac{C}{N^2}. \tag{3.2.46}$$

Deuxième cas: si $j-k<2tN\leq j-k+1$, nous notons que:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big(\big(u(t,x_{j+1})-u(t,x_j)\big)\big(u(t,x_{k+1})-u(t,x_k)\big)\Big)\\
&=\frac{1}{16N^2}\Big(2\mid j-k\mid^2-\mid j-k-1\mid^2\Big)-\frac{t}{4N}\Big(2\mid j-k\mid-\mid j-k-1\mid\Big)\\
&\quad+\frac{t^2}{4}.
\end{aligned}\tag{3.2.47}$$

Nous indiquons que, comme j et k sont deux entiers naturels et d'après la condition $j-k<2tN\leq j-k+1$, alors nous pourrons, à l'aide de la notion de la valeur entière, identifier j de la manière suivante:

$$j=\begin{cases}[2tN]+k, & \text{si } 2tN \text{ n'est pas un entier}\\ 2tN+k-1, & \text{si } 2tN \text{ est un entier,}\end{cases}\tag{3.2.48}$$

avec $[2tN]$ désigne la partie entière du réel $2tN$. À ce niveau, (3.2.48) nous permet d'exprimer la valeur absolue de la corrélation (3.2.47) comme suit:

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathbf{E}\Big((u(t,x_{j+1})-u(t,x_j))(u(t,x_{k+1})-u(t,x_k))\Big)\Big|\\
&\leq\Big|\Big(\frac{1}{16N^2}\Big(2[2tN]^2-\mid[2tN]-1\mid^2\Big)-\frac{t}{4N}\Big(2[2tN]-\mid[2tN]-1\mid\Big)+\frac{t^2}{4}\Big)\mathbb{1}_{\{j=[2tN]+k\}}\Big|\\
&\quad+\Big|\Big(\frac{1}{16N^2}\Big(2\mid 2tN-1\mid^2-\mid 2tN-2\mid^2\Big)\\
&\qquad-\frac{t}{4N}\Big(2\mid 2tN-1\mid-\mid 2tN-2\mid\Big)+\frac{t^2}{4}\Big)\mathbb{1}_{\{j=2tN+k-1\}}\Big|\\
&\leq R_1+R_2,
\end{aligned}\tag{3.2.49}$$

où pour tout $N \geq 1$, les quantités R_1 et R_2 sont données par:

$$\begin{aligned}
R_1 &:= \left|\frac{1}{16N^2}\Big(2[2tN]^2 - \mid [2tN]-1 \mid^2\Big) - \frac{t}{4N}\Big(2[2tN] - \mid [2tN]-1 \mid\Big) + \frac{t^2}{4}\right| \\
&= \frac{1}{16N^2}\Big|[2tN]^2 - 4tN[2tN] + 4t^2N^2 + 2[2tN] - 4tN - 1\Big| \\
&= \frac{1}{16N^2}\Big|\big([2tN]-2tN\big)^2 + 2[2tN] - 4tN - 1\Big| \\
&= \frac{1}{16N^2}\Big|\{2tN\}^2 + 2[2tN] - 4tN - 1\Big| \\
&\leq \frac{1}{16N^2}\Big(\Big|\{2tN\}^2 - 1\Big| + \Big|2[2tN] - 4tN\Big|\Big) \\
&\leq \frac{1}{16N^2}(2+2) \\
&\leq \frac{C}{N^2}.
\end{aligned} \tag{3.2.50}$$

Ici dans les passages précédents, nous avons fixé la notation $\{2tN\}$ pour indiquer la partie fractionnaire du réel $2tN$ qui est toujours < 1, et de plus nous avons utilisé le fait que $[2tN] \leq 2tN < [2tN] + 1$.

Pour le second terme R_2 apparu dans (3.2.49), comme pour ce cas $j = 2tN + k - 1$, alors ceci entraîne que $2tN = j - k + 1 \geq 2$ et par la suite nous vérifions que:

$$\begin{aligned}
R_2 &:= \left|\frac{1}{16N^2}\Big(2 \mid 2tN-1 \mid^2 - \mid 2tN-2 \mid^2\Big) - \frac{t}{4N}\Big(2 \mid 2tN-1 \mid - \mid 2tN-2 \mid\Big) + \frac{t^2}{4}\right| \\
&= \frac{\mid -2 \mid}{16N^2} \\
&\leq \frac{C}{N^2}.
\end{aligned} \tag{3.2.51}$$

Les résultats (3.2.50) et (3.2.51) réunis ensemble dans (3.2.49) assurent que:

$$\Big|\mathbf{E}\Big((u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j))(u(t,x_{k+1}) - u(t,x_k))\Big)\Big| \leq \frac{C}{N^2}. \tag{3.2.52}$$

Troisième cas: si $j - k - 1 < 2tN \leq j - k$, alors on a:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big((u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j))(u(t,x_{k+1}) - u(t,x_k))\Big) \\
&= \frac{-1}{16N^2} \mid j-k-1 \mid^2 + \frac{t}{4N} \mid j-k-1 \mid - \frac{t^2}{4}.
\end{aligned} \tag{3.2.53}$$

D'une façon pareille à celle du second cas, nous interprétons l'entier j lorsqu'il vérifie la condition $j-k-1 < 2tN \leq j-k$ comme suit:

$$j = \begin{cases} [2tN]+k+1, & \text{si } 2tN \text{ n'est pas un entier} \\ 2tN+k, & \text{si } 2tN \text{ est un entier.} \end{cases} \tag{3.2.54}$$

Ce qui entraîne que:

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathbf{E}\Big((u(t,x_{j+1})-u(t,x_j))(u(t,x_{k+1})-u(t,x_k))\Big)\Big| \\
&\leq \Big|\Big(-\frac{[2tN]^2}{16N^2}+\frac{t}{4N}[2tN]-\frac{t^2}{4}\Big)\mathbb{1}_{\{j=[2tN]+k+1\}}\Big| \\
&+\Big|\Big(-\frac{\mid 2tN-1\mid^2}{16N^2}+\frac{t}{4N}\mid 2tN-1\mid-\frac{t^2}{4}\Big)\mathbb{1}_{\{j=2tN+k\}}\Big| \\
&\leq \frac{\Big|\big([2tN]-2tN\big)^2\Big|}{16N^2}+\Big|-\frac{\mid 2tN-1\mid^2}{16N^2}+\frac{t}{4N}\mid 2tN-1\mid-\frac{t^2}{4}\Big| \\
&\leq \frac{C}{N^2}+R_3.
\end{aligned} \tag{3.2.55}$$

Dû au fait que $2tN = j-k \geq 1$, nous prouvons que:

$$\begin{aligned}
R_3 &= \Big|-\frac{\mid 2tN-1\mid^2}{16N^2}+\frac{t}{4N}\mid 2tN-1\mid-\frac{t^2}{4}\Big| \\
&= \frac{\mid -1\mid}{16N^2} \\
&\leq \frac{C}{N^2}.
\end{aligned} \tag{3.2.56}$$

Le résultat (3.2.56) inséré dans (3.2.55) affirme que:

$$\Big|\mathbf{E}\Big(\big(u(t,x_{j+1})-u(t,x_j)\big)\big(u(t,x_{k+1})-u(t,x_k)\big)\Big)\Big| \leq \frac{C}{N^2}. \tag{3.2.57}$$

Quatrième cas: si $2tN \leq j-k-1$, donc il est clair que:

$$\Big|\mathbf{E}\Big((u(t,x_{j+1})-u(t,x_j))(u(t,x_{k+1})-u(t,x_k))\Big)\Big| = 0 \leq \frac{C}{N^2}. \tag{3.2.58}$$

Une fois les résultats (3.2.46), (3.2.52), (3.2.57) et (3.2.58) sont mis ensemble, on arrive finalement à montrer que lorsque $t \in]0,\frac{1}{2}[$, on a:

$$\Big|\mathbf{E}\Big((u(t,x_{j+1})-u(t,x_j))(u(t,x_{k+1})-u(t,x_k))\Big)\Big| \leq \frac{C}{N^2}, \tag{3.2.59}$$

et par la suite le lemme découle du recoupement des expressions établies dans (3.2.45) et (3.2.59). ■

La section suivante établit une caractérisation du comportement limite de la suite des variations quadratiques définie précédemment par (3.2.22).

3.3 Théorème Central Limite

L'idée directrice ici est d'étudier le comportement asymptotique de (3.2.22) par le biais de la nouvelle théorie de Stein-Malliavin. Cette théorie, qui est récemment apparue grâce aux travaux de Nourdin et Peccati [66, 67], a fait la connection entre le calcul de Malliavin et la méthode classique de Stein. Pour ce faire, en premier lieu nous montrons que notre séquence $(V_N)_{N\geq 1}$ peut être exprimée comme un élément d'un chaos de Wiener d'ordre bien fixé, et en second lieu nous énonçons qu'elle vérifie un TCL puisqu'elle converge en distribution vers une loi centrée réduite.

Nous commençons avant tout par un succinct rappel sur quelques éléments de calcul de Malliavin qui va nous sert énormément dans le reste de notre travail.

3.3.1 Éléments de calcul de Malliavin

Nous allons donner une vue d'ensemble sur les propriétés et les résultats principaux du calcul de Malliavin relativement à un processus gaussien B. Des recueils de résultats, méthodes et applications sur ce type de calcul stochastique se trouvent notamment dans les ouvrages [68, 69].

Considérons $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$ un espace de Hilbert réel séparable, on dit que $B=\{B(\varphi),\ \varphi\in\mathcal{H}\}$ est un processus gaussien *isonormal* défini sur l'espace de probabilités $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, la famille gaussienne centrée définie par les variables aléatoires qui vérifient:

$$\mathbf{E}\Big(B(\varphi)B(\psi)\Big) \;=\; \langle\varphi,\psi\rangle_{\mathcal{H}},\ \text{pour tous}\ \varphi,\ \psi\in\mathcal{H}. \tag{3.3.60}$$

Nous désignons par I_q l'*intégrale multiple de Wiener* d'ordre $q\geq 0$ par rapport au processus B. En faite, I_q définie une isométrie entre l'espace produit tensoriel symétrique $\mathcal{H}^{\odot q}$ muni de la norme $\frac{1}{\sqrt{q!}}\|\cdot\|_{\mathcal{H}^{\otimes q}}$, et le *chaos de Wiener* d'ordre q qu'on le note par $\mathcal{K}_q$.

On mentionne que l'espace gaussien $\mathcal{K}_q$, $q \geq 0$, est défini comme la fermeture dans $L^2(\Omega)$ du sous-espace vectoriel engendré par les variables aléatoires $H_q(B(\varphi))$ où $\varphi \in \mathcal{H}$, $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$ et H_q est le polynôme d'Hermite d'ordre $q \geq 0$ défini par:

$$\begin{cases} H_q(x) &= \frac{(-1)^q}{q!} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^q}{dx^q} \left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right), \, x \in \mathbb{R}, \, q \geq 1 \\ H_0(x) &= 1, \quad q = 0 \end{cases} \tag{3.3.61}$$

Nous rappelons que l'isométrie établie par les intégrales multiples de Wiener assure la caractérisation suivante: pour tous p, $q \geq 1$, lorsque $f \in \mathcal{H}^{\odot p}$ et $g \in \mathcal{H}^{\odot q}$, alors,

$$\mathbf{E}\Big(I_p(f) I_q(g)\Big) = \begin{cases} q!\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes q}} & \text{si } p = q \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{3.3.62}$$

ceci affirme que deux chaos de Wiener avec des ordres différents sont orthogonaux entre eux. Aussi nous notons que la fonction $\tilde{f}$ présentée précédemment désigne la fonction symétrique de f, et elle est donnée par:

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_q) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(q)}) \,, \tag{3.3.63}$$

où $\mathcal{S}_q$ est l'ensemble de toutes les permutations σ de $\{1, \ldots, q\}$. Également, $\tilde{f}$ vérifie la propriété suivante:

$$I_q(f) = I_q\big(\tilde{f}\big), \text{ pour tout } q \geq 1.$$

Une autre donnée assez importante, est la décomposition orthogonale de l'espace $L^2(\Omega)$ en fonction des chaos de Wiener. En effet, toute variable aléatoire F, mesurable par rapport à $\sigma(B)$ et de carré intégrable, est décomposable en fonction des intégrales multiples de Wiener de la façon suivante:

$$F = \mathbf{E}\,(F) + \sum_{q=1}^{\infty} I_q(f_q), \tag{3.3.64}$$

où la convergence est dans le sens $L^2(\Omega)$ et les noyaux f_q sont des éléments de l'espace $\mathcal{H}^{\odot q}$, uniquement déduits à partir de la variable F.

La formule générale décrivant la multiplication entre deux intégrales multiples de Wiener avec des ordres p, $q \geq 1$, est donnée par: pour tous $f \in \mathcal{H}^{\odot p}$ et $g \in \mathcal{H}^{\odot q}$,

$$I_p(f) I_q(g) = \sum_{r=0}^{p \wedge q} r! \binom{p}{r} \binom{q}{r} I_{p+q-2r}(f \otimes_r g), \tag{3.3.65}$$

où $f \otimes_r g$ s'identifie à la r-ième contraction. Dans le cas particulier, lorsque $\mathcal{H} = L^2([0,T])$, $T > 0$, alors la contraction $f \otimes_r g$ est un élément de $\mathcal{H}^{\otimes(p+q-2r)}$ exprimé par:

$$\begin{aligned}&(f \otimes_r g)(s_1, \ldots, s_{p-r}, t_1, \ldots, t_{q-r})\\ &= \int_{[0,T]^r} \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_r f(s_1, \ldots, s_{p-r}, u_1, \ldots, u_r) g(t_1, \ldots, t_{q-r}, u_1, \ldots, u_r),\end{aligned} \qquad (3.3.66)$$

ceci pour tous $f \in L^2([0,T]^p)$, $g \in L^2([0,T]^q)$ et $r = 1, \ldots, p \wedge q$.

Regardons maintenant l'opérateur de dérivation qui est appelé la *dérivée de Malliavin* et qu'on le note tout simplement par D. Comme dans notre raisonnement à faire, nous avons besoin que de la dérivée d'ordre 1, alors nous allons présenter juste le cas scalaire (unidimensionnel).

En effet, cet opérateur agit notamment sur les fonctionnelles cylindriques de la forme:

$$F = g\big(B(\varphi_1), \ldots, B(\varphi_n)\big), \quad n \geq 1,$$

avec $\varphi_i \in \mathcal{H}$, $1 \leq i \leq n$, et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞, qui est bornée ainsi que toutes ses dérivées partielles.

Par la suite, on définit alors la dérivée de Malliavin D par:

$$DF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(B(\varphi_1), \ldots, B(\varphi_n))\varphi_i. \qquad (3.3.67)$$

Il s'agit d'un élément de l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{H})$ et également d'un opérateur continu de l'espace $\mathbb{D}^{\alpha,p}(\mathcal{H})$ dans l'espace $\mathbb{D}^{\alpha-1,p}(\mathcal{H})$. De plus, nous indiquons que cette dérivée a en général toutes les bonnes propriétés d'un opérateur de dérivation classique, citons la règle de dérivation en chaîne, les dérivées d'ordre supérieur,...

3.3.2 Estimation et renormalisation de la suite des variations quadratiques

Afin d'établir le TCL, nous avons besoin de faire une renormalisation de la séquence $(V_N)_{N\geq1}$, c'est à dire de trouver une suite des nombres positifs $(a_N)_{N\geq1}$ qui assure, lorsque $N \to \infty$, la relation ci-dessous:

$$\mathbf{E}\left(a_N V_N\right)^2 \to \sigma^2, \ \sigma \in \mathbb{R}.$$

Pour cette partie on va faire un appel aux différentes notions citées dans la Sous-Section 3.3.1. De ce fait, nous désignons par ξ_1 l'espace des fonctions indicatrices de la forme $\mathbb{1}_{[0,x]}$, $x > 0$, et par $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert canonique asossié au processus solution spatiale $(u(t,x))_{x\in[0,1]}$, que nous le définissons comme la fermeture de l'espace linéaire engendré par ξ_1 au sens du produit scalaire suivant:

$$\langle \mathbb{1}_{[0,x]}, \mathbb{1}_{[0,y]} \rangle_{\mathcal{H}} = \mathbf{E}\Big(u(t,x)u(t,y)\Big), \text{ pour } t \text{ fixé dans }]0,T], \tag{3.3.68}$$

avec pour tous x et $y \in \mathbb{R}$, la fonction $\mathbf{E}\Big(u(t,x)u(t,y)\Big)$ est la covariance donnée par (3.2.37), on note que pour la définition de la notion d'un espace de Hilbert associé à un processus gaussien peut être vu [26].

Par la suite, nous indiquons par I_q, $q \geq 1$, l'intégrale multiple de Wiener par rapport au processus gaussien $(u(t,x))_{x\in[0,1]}$, ce qui implique par conséquent, que l'accroissement $u(t,y) - u(t,x)$ s'identifie, pour tout $x < y$, à l'intégrale $I_1(\mathbb{1}_{[x,y]})$ d'ordre 1 qui est bien évidemment un élément d'un chaos de Wiener.

En appliquant maintenant la formule de multiplication (3.3.65) pour les intégrales multiples de Wiener, nous montrons que:

$$\begin{aligned}
V_N &= \sum_{j=0}^{N-1}\left[\frac{(u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j))^2}{\mathbf{E}\,(u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j))^2} - 1\right] \\
&= \sum_{j=0}^{N-1}\left[\frac{I_1^2\left(\mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}\right)}{\mathbf{E}\Big(u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j)\Big)^2} - 1\right] \\
&= \sum_{j=0}^{N-1}\left[\frac{I_2\left(\mathbb{1}^{\otimes 2}_{[x_j,x_{j+1}]}\right) + \mathbf{E}\Big(u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j)\Big)^2}{\mathbf{E}\Big(u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j)\Big)^2} - 1\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{I_2\left(\mathbb{1}^{\otimes 2}_{[x_j,x_{j+1}]}\right)}{\mathbf{E}\Big(u(t,x_{j+1})-u(t,x_j)\Big)^2} \\
&= I_2\left(\underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\mathbb{1}^{\otimes 2}_{[x_j,x_{j+1}]}}{\mathbf{E}\Big(u(t,x_{j+1})-u(t,x_j)\Big)^2}}_{f_N}\right) \\
&= I_2(f_N), \text{ avec } f_N \in \mathcal{H}^{\otimes 2}. \qquad (3.3.69)
\end{aligned}$$

Ainsi, la formule d'isométrie (3.3.62) assure que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(V_N^2) &= \sum_{j,k=0}^{N-1} \frac{\mathbf{E}\Big(I_2\left(\mathbb{1}^{\otimes 2}_{[x_j,x_{j+1}]}\right) I_2\left(\mathbb{1}^{\otimes 2}_{[x_k,x_{k+1}]}\right)\Big)}{\mathbf{E}\Big(u(t,x_{j+1})-u(t,x_j)\Big)^2 \mathbf{E}\Big(u(t,x_{k+1})-u(t,x_k)\Big)^2} \\
&= 2\sum_{j,k=0}^{N-1} \frac{\langle \mathbb{1}^{\otimes 2}_{[x_j,x_{j+1}]}, \mathbb{1}^{\otimes 2}_{[x_k,x_{k+1}]}\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}}{\mathbf{E}\Big(u(t,x_{j+1})-u(t,x_j)\Big)^2 \mathbf{E}\Big(u(t,x_{k+1})-u(t,x_k)\Big)^2} \\
&= 2\sum_{j,k=0}^{N-1} \frac{\langle \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}, \mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}\rangle^2_{\mathcal{H}}}{\mathbf{E}\Big(u(t,x_{j+1})-u(t,x_j)\Big)^2 \mathbf{E}\Big(u(t,x_{k+1})-u(t,x_k)\Big)^2}. \qquad (3.3.70)
\end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous cherchons une renormalisation $(\tilde{V}_N)_{N\geq 1}$ de notre suite $(V_N)_{N\geq 1}$, le lemme suivant prouve que le moment d'ordre 2 de cette nouvelle suite est asymptôtiquement égale à 1.

Lemme 3.3.1 *Soient $T > 0$ et $t \in]0,T]$ fixé, si on pose la suite suivante:*

$$\tilde{V}_N := \frac{1}{\sqrt{2N}} V_N, \textit{ pour tout } N \geq 1, \qquad (3.3.71)$$

alors on obtient que:

$$\mathbf{E}(\tilde{V}_N^2) \to 1, \ \textit{lorsque} \ \ N \to \infty. \qquad (3.3.72)$$

Preuve : À partir de (3.3.70), nous divisons l'expression de $\mathbf{E}(V_N^2)$ en deux parties: une partie diagonale et une autre non diagonale, ce qui entraîne que:

$$\mathbf{E}(V_N^2) = T_{1,N} + T_{2,N},$$

avec

$$T_{1,N} = 2\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\langle \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}, \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}\rangle_{\mathcal{H}}^2}{\left[\mathbf{E}\Big(u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j)\Big)^2\right]^2} \tag{3.3.73}$$

et

$$T_{2,N} = 2\sum_{j,k=0; j\neq k}^{N-1} \frac{\langle \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}, \mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}\rangle_{\mathcal{H}}^2}{\mathbf{E}\Big(u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j)\Big)^2 \mathbf{E}\Big(u(t,x_{k+1}) - u(t,x_k)\Big)^2}. \tag{3.3.74}$$

Clairement, en se basant sur les deux relations ci-dessous:

$$\langle \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}, \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}\rangle_{\mathcal{H}} = \mathbf{E}\Big(u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j)\Big)^2 \tag{3.3.75}$$

et

$$\langle \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}, \mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}\rangle_{\mathcal{H}} = \mathbf{E}\Big(\,(u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j))\,(u(t,x_{k+1}) - u(t,x_k))\,\Big), \tag{3.3.76}$$

nous montrons immédiatement que la quantité $T_{1,N}$ est explicitement calculée et elle est égale à:

$$T_{1,N} = 2N \tag{3.3.77}$$

Alors il nous reste plus qu'à estimer la deuxième quantité $T_{2,N}$, afin de la comparer avec $T_{1,N}$. À partir des Lemmes 3.2.1 et 3.2.3, il en découle que:

$$\begin{aligned} T_{2,N} &\leq C \sum_{j,k=0; j\neq k}^{N-1} \frac{\left(\frac{1}{N^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{N}\right)^2} \\ &\leq C \end{aligned} \tag{3.3.78}$$

D'où en comparant le deux relations (3.3.77) et (3.3.78) ensemble, on voit que lorsque nous prenons N assez grand, ce dernier terme $T_{2,N}$ est négligeable par rapport à $T_{1,N}$, et par conséquent le terme dominant pour $\mathbf{E}(V_N^2)$ est sans ambiguïté $T_{1,N}$, c'est pourquoi pour $t \in]0,T]$ fixé, on vient de mettre en évidence que:

$$\frac{1}{2N}\mathbf{E}(V_N^2) \to_{N\to\infty} 1. \tag{3.3.79}$$

Ce qui conduit au résultat escompté. ■

3.3.3 Théorème Central Limite et vitesse de la convergence

Cette partie a pour objectif de prouver le TCL pour la suite des variations quadratiques spatiales. Ce théorème fort puissant permet en général de vérifier la convergence en distribution d'une suite des fonctionnelles issues d'un processus gaussien, vers une loi normale centrée réduite, ainsi de présenter une caractérisation de sa vitesse de convergence.

Nourdin et Peccati ont donné dans [66, 67] une version du TCL pour les intégrales multiples de Wiener d'ordre $q \geq 1$ qui sont bien évidemment des éléments qui vivent dans le q-ième chaos de Wiener. Cette version a fait une description de l'approximation normale de cet l'intégrale à l'aide de la notion de la distance d entre deux lois de probabilités sur $\mathbb{R}$, citons: distance de *Kolmogorov*, distance de *Variation Totale*, distance de *Wasserstein* (voir [67] Appendice C pour une présentation détaillée de d), et aussi à l'aide de la notion de la dérivée de Malliavin D.

Ce résultat de Nourdin et Peccati (2009-2012) qui s'énonce par le théorème suivant, joue un rôle fondamental dans la suite de nos calculs.

Théorème 3.3.1 *Soit $q \geq 2$ fixé, on assume que $(G_N)_{N\geq 1} := (I_q(g_N))_{N\geq 1}$, avec $g_N \in \mathcal{H}^{\odot q}$ est une suite des variables aléatoires appartenant au q-ième chaos de Wiener et vérifiant:*

$$\mathbf{E}(G_N^2) \longrightarrow_{N\to\infty} \sigma^2 > 0.$$

Alors, G_N converge en loi vers une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ si et seulement si:

$$\|DG_N\|_{\mathcal{H}}^2 \longrightarrow_{N\to\infty} q\sigma^2. \tag{3.3.80}$$

De plus,

$$d\left(G_N;\mathcal{N}(0,1)\right) \leq C\left(\sqrt{\mathbf{Var}\left(\|DG_N\|_{\mathcal{H}}^2\right)} + \sqrt{\mathbf{E}\left(\|DG_N\|_{\mathcal{H}}^2\right) - q\sigma^2}\right), \tag{3.3.81}$$

avec d désigne l'une des distances suivantes: Kolmogorov, Variation Totale, Wasserstein.

En se basant sur ce dernier théorème, nous obtenons le résultat principal de ce chapitre présenté par le théorème ci-après.

Théorème 3.3.2 *On considère la suite des variables aléatoires $(\tilde{V}_N)_{N\geq 1}$ donnée par (3.3.71), alors $(\tilde{V}_N)_{N\geq 1}$ converge en loi, lorsque $N \to \infty$, vers une loi $\mathcal{N}(0,1)$.*

De plus, pour N assez grand, nous avons:

$$d\left(\tilde{V}_N;\mathcal{N}(0,1)\right) \leq \frac{C}{\sqrt{N}}. \tag{3.3.82}$$

Preuve : En clair, nous sommes en mesure de vérifier les hypothèses du théorème 3.3.1, d'après les résultats précédents, nous avons vu que la suite $(\tilde{V}_N)_{N\geq 1}$ vit dans le deuxième chaos de Wiener et qu'elle possède une variance qui converge asymptôtiquement vers 1, de ce fait il suffit tout simplement de calculer:

$$\mathbf{Var}\left(\|D\tilde{V}_N\|^2_{\mathcal{H}}\right) = \mathbf{E}\left[\|D\tilde{V}_N\|^2_{\mathcal{H}} - \mathbf{E}\left(\|D\tilde{V}_N\|^2_{\mathcal{H}}\right)\right]^2. \tag{3.3.83}$$

Due à la définition de la dérivée de Malliavin donnée par (3.3.67), nous trouvons que:

$$D\tilde{V}_N = \frac{2}{\sqrt{2N}}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{I_1\left(\mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}\right)\mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}}{\mathbf{E}\left(u(t,x_{j+1})-u(t,x_j)\right)^2}, \text{ pour tout } N\geq 1. \tag{3.3.84}$$

Ce qui entraîne qu'en appliquant la formule (3.3.65), nous obtenons:

$$\begin{aligned}\|D\tilde{V}_N\|^2_{\mathcal{H}} &= \frac{2}{N}\sum_{j,k=0}^{N-1}\frac{I_1\left(\mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}\right)I_1\left(\mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}\right)\langle\mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]},\mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}\rangle_{\mathcal{H}}}{\mathbf{E}\left(u(t,x_{j+1})-u(t,x_j)\right)^2\mathbf{E}\left(u(t,x_{k+1})-u(t,x_k)\right)^2}\\ &= \frac{2}{N}\sum_{j,k=0}^{N-1}\frac{I_2\left(\mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}\otimes\mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}\right)\langle\mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]},\mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}\rangle_{\mathcal{H}}}{\mathbf{E}\left(u(t,x_{j+1})-u(t,x_j)\right)^2\mathbf{E}\left(u(t,x_{k+1})-u(t,x_k)\right)^2}\\ &\quad+\mathbf{E}\left(\|D\tilde{V}_N\|^2_{\mathcal{H}}\right).\end{aligned} \tag{3.3.85}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}\left(\|D\tilde{V}\|^2_{\mathcal{H}}\right) &= \mathbf{E}\left[\frac{2}{N}\sum_{j,k=0}^{N-1}\frac{I_2\left(\mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}\otimes\mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}\right)\langle\mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]},\mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}\rangle_{\mathcal{H}}}{\mathbf{E}\left(u(t,x_{j+1})-u(t,x_j)\right)^2\mathbf{E}\left(u(t,x_{k+1})-u(t,x_k)\right)^2}\right]^2\\ &= \frac{8}{N^2}\sum_{j,k,l,m=0}^{N-1}\langle\mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}\tilde{\otimes}\mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]},\mathbb{1}_{[x_l,x_{l+1}]}\tilde{\otimes}\mathbb{1}_{[x_m,x_{m+1}]}\rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}\\ &\quad\times\frac{\langle\mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]},\mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}\rangle_{\mathcal{H}}\langle\mathbb{1}_{[x_l,x_{l+1}]},\mathbb{1}_{[x_m,x_{m+1}]}\rangle_{\mathcal{H}}}{\|\mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}\|^2_{\mathcal{H}}\|\mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}\|^2_{\mathcal{H}}\|\mathbb{1}_{[x_l,x_{l+1}]}\|^2_{\mathcal{H}}\|\mathbb{1}_{[x_m,x_{m+1}]}\|^2_{\mathcal{H}}}\end{aligned} \tag{3.3.86}$$

avec $f\tilde{\otimes}g$ désigne la symétrie du produit tensoriel $f\otimes g$ et elle est donnée par:

$$f\tilde{\otimes}g = \frac{1}{2}\left(f\otimes g + g\otimes f\right) \tag{3.3.87}$$

de plus, elle vérifie, pour toutes fonctions f,g,f_1 et g_1, la relation suivante:

$$\langle f\tilde{\otimes}g, f_1\tilde{\otimes}g_1\rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\Big(\langle f,f_1\rangle_{\mathcal{H}}\langle g,g_1\rangle_{\mathcal{H}} + \langle f,g_1\rangle_{\mathcal{H}}\langle g,f_1\rangle_{\mathcal{H}}\Big). \tag{3.3.88}$$

Par conséquent, il en découle que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}\left(\|D\tilde{V}\|^2_{\mathcal{H}}\right) &= \frac{8}{N^2}\sum_{j,k,l,m=0}^{N-1} \frac{\big\langle \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]},\mathbb{1}_{[x_l,x_{l+1}]}\big\rangle_{\mathcal{H}}\big\langle \mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]},\mathbb{1}_{[x_m,x_{m+1}]}\big\rangle_{\mathcal{H}}}{\|\mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}\|^2_{\mathcal{H}}\|\mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}\|^2_{\mathcal{H}}\|\mathbb{1}_{[x_l,x_{l+1}]}\|^2_{\mathcal{H}}\|\mathbb{1}_{[x_m,x_{m+1}]}\|^2_{\mathcal{H}}} \\
&\qquad \times\big\langle \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]},\mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}\big\rangle_{\mathcal{H}}\big\langle \mathbb{1}_{[x_l,x_{l+1}]},\mathbb{1}_{[x_m,x_{m+1}]}\big\rangle_{\mathcal{H}} \\
&:= U_{4,N} + U_{3,N} + U_{2,N} + U_{1,N}.
\end{aligned} \tag{3.3.89}$$

Ici nous avons noté par $U_{4,N}$ le terme diagonal, c'est à dire le terme dont tous les éléments sont avec des indices égaux $j = k = l = m$. De la même manière, $U_{3,N}$ est le terme dont tous ses éléments sont avec trois indices égaux, Quant à $U_{2,N}$ ses éléments sont ceux avec seulement deux indices égaux, et finalement $U_{1,N}$ contient les éléments dont les indices sont différentes.

Immédiatement, on remarque que:

$$U_{4,N} = \frac{8}{N^2}\sum_{j=0}^{N-1} 1 = \frac{8}{N}. \tag{3.3.90}$$

Cependant pour les autres termes $U_{3,N}$, $U_{2,N}$ et $U_{1,N}$, on peut déduire qu'ils sont dominés par $U_{4,N}$. En faite, grâce aux Lemmes 3.2.1 et 3.2.3, nous dégagons les majorations suivantes:

$$\begin{aligned}
U_{3,N} &\leq \frac{C}{N^2}\sum_{j,m=0}^{N-1}\frac{\|\mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}\|^4_{\mathcal{H}}\big\langle \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]},\mathbb{1}_{[x_m,x_{m+1}]}\big\rangle^2_{\mathcal{H}}}{\|\mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}\|^6_{\mathcal{H}}\|\mathbb{1}_{[x_m,x_{m+1}]}\|^2_{\mathcal{H}}} \\
&\leq \frac{C}{N^2}\sum_{j,m=0}^{N-1}\frac{\left(\frac{1}{N^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{N}\right)^2} \\
&\leq \frac{C}{N^2}.
\end{aligned} \tag{3.3.91}$$

Similairement, nous vérifions que:

$$U_{2,N} \leq \frac{C}{N^2} \text{ et } U_{1,N} \leq \frac{C}{N^2}, \tag{3.3.92}$$

ce qui implique directement que:

$$\mathbf{Var}\left(\|D\tilde{V}_N\|_{\mathcal{H}}^2\right) \leq \frac{C}{N}. \tag{3.3.93}$$

Pour finir, nous avons besoin maintenant de majorer la quantité:

$$\mathbf{E}\Big(\|D\tilde{V}_N\|_{\mathcal{H}}^2\Big) - 2.$$

En utilisant le fait que $\mathbf{E}\Big(\|D\tilde{V}_N\|_{\mathcal{H}}^2\Big) = 2\mathbf{E}(\tilde{V}_N^2)$, et en se référant encore à l'égalité (3.3.77), il en résulte que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big(\|D\tilde{V}_N\|_{\mathcal{H}}^2\Big) &= 2\mathbf{E}(\tilde{V}_N^2) \\
&= \frac{\mathbf{E}(V_N^2)}{N} \\
&= \frac{1}{N}\left(T_{1,N} + T_{2,N}\right) \\
&= 2 + \frac{T_{2,N}}{N}.
\end{aligned} \tag{3.3.94}$$

Alors, en vertu de l'inégalité (3.3.78), nous obtenons que:

$$\mathbf{E}\Big(\|D\tilde{V}_N\|_{\mathcal{H}}^2\Big) - 2 \leq \frac{C}{N} \tag{3.3.95}$$

Ceci vérifie que nous somme donc dans les conditions du Théorème 3.3.1, ce qui garantit le résultat souhaité. ■

Remarque 3.3.1 *Une conséquence remarquable du résultat (3.3.82) réside dans le fait qu'elle décrit la vitesse de convergence vers une loi normale de la suite des variations quadratiques associées à la solution spatiale de l'EDPS (3.1.1). Cette vitesse est indépendante de l'indice du temps t et elle est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{N}}$, ce qui vérifie qu'elle est la même que celle de la convergence de la variation quadratique spatiale de la solution de l'équation stochastique de la chaleur dans le cas d'un forçage aléatoire blanc. Pour une présentation complète sur le comportement asymptotique des variations quadratiques spatiales de l'équation de la chaleur, voir [89].*

3.3.4 Théorème Central Limite Presque Sûr

Une généralisation du TCL est le TCL presque sûr. Cette amélioration, qui est tout d'abord évoquée par Lévy [50], puis pleinement traitée par plusieurs auteurs essentiellement par Ibragimov et Lifshits [36] qui ont mis des nouvelles versions, nous permet de passer d'une convergence faible vers une convergence presque sûr. Dans le contexte de l'analyse dans un espace de Wiener, Bercu, Nourdin et Taqqu [9] ont présenté la condition suffisante qui assure le passage du TCL vers le TCL presque sûr dans le cas des intégrales multiples de Wiener.

Pour notre étude, nous allons utiliser principalement le théorème suivant issu de [9].

Théorème 3.3.3 *Soit $q \geq 2$ fixé, et soit $(G_N)_{N\geq 1}$ une suite des variables aléatoires définie par $G_N := (I_q(g_N))_{N\geq 1}$, $g_N \in \mathcal{H}^{\odot q}$ tels que, pour tout $N \geq 1$, $\mathbf{E}(G_N^2) = q!\|g_N\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes q}} = 1$ et pour tout $r = 1,\dots,q-1$, $\|g_N \otimes_r g_N\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2(q-r)}}$ converge vers 0, lorsque N tend vers ∞, alors, $G_N \xrightarrow{Law} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, quand $N \to \infty$.*

De plus, si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

$$(A_1) \qquad \sum_{N\geq 2} \frac{1}{N\log^2 N} \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{l} \|g_l \otimes_r g_l\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2(q-r)}} < \infty, \text{ pour tout } 1 \leq r \leq q-1,$$

$$(A_2) \qquad \sum_{N\geq 2} \frac{1}{N\log^3 N} \sum_{m,l=1}^{N} \frac{|\,\mathbf{E}(G_m G_l)\,|}{ml} < \infty,$$

alors $(G_N)_{N\geq 1}$ satisfait le TCL presque sûr. Autrement dit, presque sûrement, pour toute fonction continue bornée $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a:

$$\frac{1}{\log N} \sum_{l=1}^{N} \frac{\varphi(G_l)}{l} \longrightarrow \mathbf{E}(\varphi(Z)), \quad \text{quand } N \to \infty. \tag{3.3.96}$$

Ce dernier théorème nous permet d'établir notre second résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.3.4 *La séquence $(\tilde{V}_N)_{N\geq 1}$ donnée par (3.3.71), satisfait le TCL presque sûr lorsque $N \to \infty$.*

Preuve : Il s'agit juste de vérifier les conditions (A_1) et (A_2) du Théorème 3.3.3, car selon le Théorème 3.3.2, $(\tilde{V}_N)_{N\geq 1}$ est bien une séquence qui satisfait le TCL.

Commençons par la première condition (A1). Comme pour tout $N \geq 1$, nous avons $\tilde{V}_N = I_2(g_N)$ avec:

$$g_N := \frac{f_N}{\sqrt{2N}} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\mathbb{1}^{\otimes 2}_{[x_j, x_{j+1}]}}{\mathbf{E}\Big(u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j)\Big)^2}, \tag{3.3.97}$$

alors en s'appuyant sur la définition (3.3.66) d'une contraction d'ordre 1, nous constatons que:

$$\begin{aligned} g_l \otimes_1 g_l &= \frac{1}{2l} \sum_{j,k=0}^{l-1} \frac{\mathbb{1}^{\otimes 2}_{[x_j,x_{j+1}]} \otimes_1 \mathbb{1}^{\otimes 2}_{[x_k,x_{k+1}]}}{\mathbf{E}\Big(u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j)\Big)^2 \mathbf{E}\Big(u(t,x_{k+1}) - u(t,x_k)\Big)^2} \\ &= \frac{1}{2l} \sum_{j,k=0}^{l-1} \frac{\big\langle \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}, \mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]} \big\rangle_{\mathcal{H}} \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]} \otimes \mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}}{\mathbf{E}\Big(u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j)\Big)^2 \mathbf{E}\Big(u(t,x_{k+1}) - u(t,x_k)\Big)^2}. \end{aligned} \tag{3.3.98}$$

Passons ensuite par l'isométrie (3.3.62) et par la formule (3.3.88) d'un produit tensoriel, nous arrivons à écrire:

$$\begin{aligned} \|g_l \otimes_1 g_l\|^2_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} &= \frac{1}{4l^2} \sum_{j,k,m,p=0}^{l-1} \frac{\big\langle \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}, \mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]} \big\rangle_{\mathcal{H}} \big\langle \mathbb{1}_{[x_m,x_{m+1}]}, \mathbb{1}_{[x_p,x_{p+1}]} \big\rangle_{\mathcal{H}}}{\mathbf{E}\Big(u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j)\Big)^2 \mathbf{E}\Big(u(t,x_{k+1}) - u(t,x_k)\Big)^2} \\ &\quad \times \frac{\big\langle \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]} \widetilde{\otimes} \mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}, \mathbb{1}_{[x_m,x_{m+1}]} \widetilde{\otimes} \mathbb{1}_{[x_p,x_{p+1}]} \big\rangle_{\mathcal{H}}}{\mathbf{E}\Big(u(t,x_{m+1}) - u(t,x_m)\Big)^2 \mathbf{E}\Big(u(t,x_{p+1}) - u(t,x_p)\Big)^2} \\ &= \frac{1}{4l^2} \sum_{j,k,m,p=0}^{l-1} \frac{\big\langle \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}, \mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]} \big\rangle_{\mathcal{H}} \big\langle \mathbb{1}_{[x_m,x_{m+1}]}, \mathbb{1}_{[x_p,x_{p+1}]} \big\rangle_{\mathcal{H}}}{\mathbf{E}\Big(u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j)\Big)^2 \mathbf{E}\Big(u(t,x_{k+1}) - u(t,x_k)\Big)^2} \\ &\quad \times \frac{\big\langle \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}, \mathbb{1}_{[x_m,x_{m+1}]} \big\rangle_{\mathcal{H}} \big\langle \mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}, \mathbb{1}_{[x_p,x_{p+1}]} \big\rangle_{\mathcal{H}}}{\mathbf{E}\Big(u(t,x_{m+1}) - u(t,x_m)\Big)^2 \mathbf{E}\Big(u(t,x_{p+1}) - u(t,x_p)\Big)^2}. \end{aligned} \tag{3.3.99}$$

Le calcul effectué dans la preuve du Théorème 3.3.2 et qui a établi les relations (3.3.89)-(3.3.93), nous permet exactement de dégager que le terme dominant dans l'expression (3.3.99) est encore le terme diagonal $j = k = m = p$, c'est ainsi il est immédiat que:

$$\|g_l \otimes_1 g_l\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \leq \frac{C}{l}, \tag{3.3.100}$$

et par conséquent, nous trouvons que:

$$\begin{aligned} \sum_{N \geq 2} \frac{1}{N \log^2 N} \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{l} \|g_l \otimes_1 g_l\|_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} &\leq C \sum_{N \geq 2} \frac{1}{N \log^2 N} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \\ &\leq C \sum_{N \geq 2} \frac{1}{N \log^2 N} \\ &< \infty. \end{aligned} \tag{3.3.101}$$

D'où, la condition (A_1) est bien vérifiée.

En ce qui concerne maintenant la deuxième condition (A_2), nous notons que:

$$\mathbf{E}(\tilde{V}_m \tilde{V}_l) \quad = \quad 2\langle g_m, g_l \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}, \text{ pour tous } 1 \leq m, l \leq N. \tag{3.3.102}$$

Lorsque $m = l$, dus aux Lemmes 3.2.1 et 3.2.3, nous concluons que:

$$\langle g_m, g_m \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \leq \frac{C}{m}. \tag{3.3.103}$$

Mêment à l'aide des Lemmes 3.2.1 et 3.2.3, et sans perte de généralité, si $l < m$ (ceci reste aussi vrai lorsque $m < l$), nous obtenons que:

$$\langle g_m, g_l \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes 2}} \leq C\sqrt{\frac{l}{m}}. \tag{3.3.104}$$

En vertu de la Remarque 3.3 de [9], les inégalités (3.3.103) et (3.3.104) réunies ensemble assurent la validité de la condition (A2), ce qui achève la démonstration. ■

Chapitre 4

Corrélation, variation quadratique spatiale et estimation du paramètre de Hurst de la solution de l'EDPS des ondes dirigée par un bruit fractionnaire

L'idée de ce dernier chapitre[1] est de jouer sur la nature du bruit aléatoire qui dirige l'EDPS linéaire des ondes. Pour ceci, nous imposons un autre type de bruit additif, qui est blanc par rapport à l'espace et fractionnaire (mBf) par rapport au temps. Nous traitons cette problématique en utilisant le même type des arguments (calcul de Malliavin et intégrales multiples de Wiener) que ceux dans le cas du bruit classique. En faite, une étude détaillée de la fonction de covariance de la solution évolutive spatiale, ainsi qu'une analyse asymptotique de sa variation quadratique spatiale ont lieu dans les deux premières parties de ce chapitre. Quant aux deux dernières parties, elles sont consacrées à l'estimation du paramètre de Hurst H du mbf par la suite des variations quadratiques, ainsi, qu'à l'interprétation statistique.

L'important pour nous ici, est de détecter les nouvelles propriétés de la solution, tout en les comparant d'un part par rapport à celles de cas du bruit blanc spatio-temporel, et d'autre part par rapport au mBf.

1. Ce chapitre fait l'objet d'un article [43] soumis dans la revue "Electronic Journal of Statistics".

4.1 Description du contexte

Comme notre principe est d'élargir la classe des processus stochastiques qui forcent l'équation des ondes en prenant un bruit qui n'est plus blanc par rapport au temps, alors il en résulte que les différentes caractéristiques probabilistes et statistiques de la solution évolutive de l'équation considérée, changent par rapport à celles du cas classique vues dans le Chapitre 3. De ce fait, nous avons besoin de commencer par définir un nouveau contexte d'étude.

Lors de ce paragraphe, nous présentons donc le modèle mathématiques de l'EDPS des ondes qu'on vise à examiner, corroboré avec la définition du bruit fractionnaire. Également, l'espace de Hilbert engendré par ce bruit gaussien, ainsi la solution évolutive et ses divers propriétés seront bien évoqués.

Nous considérons ci-dessous l'EDPS non homogène des ondes dirigée par un bruit gaussien additif de dimension infinie noté W^H, alors la formulation est donnée par:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) &= \Delta u(t,x) + \dot{W}^H(t,x), \;\; t \in]0,T],\, T>0,\, x \in \mathbb{R}^d,\, d \geq 1 \\ u(0,x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Ici $W^H = \{W_t^H(A);\; t \in [0,T],\, A \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)\}$ est un champ réel centré gaussien défini sur un espace de probabilités filtré complet $(\Omega,\, \mathcal{F},\, (\mathcal{F})_{t\geq 0},\, \mathbb{P})$ et de fonction de covariance donnée par:

$$\mathbf{E}\left(W_t^H(A)W_s^H(B)\right) = R^H(t,s)\lambda_d(A \cap B), \;\text{ pour tous } A,\, B \in \mathcal{B}_d(\mathbb{R}^d), \tag{4.1.2}$$

avec R^H est la fonction évoquée dans (1.1.5) et qui désigne la covariance du mBf de paramètre de Hurst H.

Généralement, le champ bruit W^H est nommé par *le bruit blanc-fractionnaire*, clairement il se comporte comme un mBf par rapport au temps et comme un champ de Wiener (blanc) par rapport à l'espace.

Le long de ce chapitre, nous prenons que le cas $H \in]\frac{1}{2},1[$.

Remarque 4.1.1 *Fixons le temps t, alors le champ bruit W^H est vu comme un champ de Wiener par rapport à la variable spatiale x, ce qui nous permet de dire que ses accrois-*

sements (spatiaux) sont indépendants. Cependant, lorsque nous fixons l'espace x, alors il s'agit d'un mBf par rapport à la variable temporelle t, ce qui entraine que ses accroissements (temporaux) ne sont plus indépendants et qu'ils présentent des corrélations qui sont positives sont lorsque $H > \frac{1}{2}$.

4.1.1 Espace de Hilbert canonique associé au bruit fractionnaire

Rappelons que dès $H > \frac{1}{2}$, la fonction de covariance du mBf est une fonction définie positive et elle peut être représentée de la façon suivante:

$$R^H(t,s) = \alpha_H \int_0^t \int_0^s \mid u - v \mid^{2H-2} \mathrm{d}u \mathrm{d}v, \text{ pout tous } t, s \in]0,T], \tag{4.1.3}$$

avec $\alpha_H := H(2H-1)$. Un examen complet de la construction de l'espace de Hilbert canonique $\mathcal{H}_B$ associé au mBf peut être consigné dans [72].

Nous désignons par ξ_2 l'espace des fonctions indicatrices de la forme $\mathbb{1}_{\{[0,t]\times A\}}$, avec $t \in]0,T]$ et $A \in \mathcal{B}_d(\mathbb{R}^d)$, alors l'espace canonique de Hilbert $\mathcal{H}_W$ associé au bruit W^H quand $H > \frac{1}{2}$, est défini comme la fermeture de l'espace linéaire engendré par ξ_2, au sens du produit scalaire suivant:

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{1}_{\{[0,t]\times A\}}, \mathbb{1}_{\{[0,s]\times B\}} \rangle_{\mathcal{H}_W} &:= \mathbf{E}\Big(W_t^H(A) W_s^H(B) \Big) \\ &= \alpha_H \lambda_d(A \cap B) \int_0^t \int_0^s \mid u - v \mid^{2H-2} \mathrm{d}u \mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Par un argument de routine, comme l'application $\mathbb{1}_{\{[0,t]\times A\}} \mapsto W_t^H(A)$ décrit une isométrie de l'espace ξ_2 vers un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$, et sachant que ξ_2 est dense dans $\mathcal{H}_W$, alors pour tout $f \in \mathcal{H}_W$, le prolongement $f \mapsto W^H(f) := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x) W^H(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$ est aussi une isométrie de $\mathcal{H}_W$ vers un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)$. Ceci entraîne directement que pour tous f, $g \in \mathcal{H}_W$, nous avons:

$$\begin{aligned} \langle f,g \rangle_{\mathcal{H}_W} &= \mathbf{E}\left(W^H(f) W^H(g) \right) \\ &= \alpha_H \int_0^T \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f(u,x) g(v,x) \mid u - v \mid^{2H-2} \mathrm{d}x \mathrm{d}u \mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Nous passons maintenant à la résolution de l'équation (4.1.1) et nous nous intéressons à étudier la solution de type évolutive.

4.1.2 Solution évolutive

À partir de la Sous-Section 3.1.2 du Chapitre 3, et par le fait que le noyau de Green G_1 de l'équation homogène des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ (voir (3.1.4)), est le moteur générateur de toute solution évolutive de l'équation non homogène des ondes dirigée par n'importe quelle forçage, alors il est possible de donner immédiatement la forme de la solution évolutive de notre EDPS (4.1.1).

Définition 4.1.1 *Un champ $u = (u(t,x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$ est dit une solution évolutive de l'équation (4.1.1), si u est un champ $\mathcal{F}_t$-adapté qui s'écrit $\mathbb{P}$-p.s. de la manière suivante:*

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G_1(t-s,x-y) W^H(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y). \tag{4.1.6}$$

On peut se référer d'un côté à [22] pour avoir plus de détails sur la construction de la solution (4.1.6), et d'autre côté aux [35, 53, 28] et leurs références, pour la définition de l'intégrale stochastique relative à un processus gaussien avec des intégrants déterministes.

Le long de ce travail, toujours C, C_3 et C_4 s'identifient à des constantes génériques strictement positives, qui peuvent changer d'une ligne à l'autre tout en dépendant, dans certaines situations de t et de H. Aussi, nous posons la fonction $g_{t,x} := (s,y) \mapsto G_1(t-s,x-y)$, pour tout $(s,y) \in ([0,T] \times \mathbb{R}^d)$.

À fortiori nous devons à ce niveau justifier l'existence de la solution évolutive (4.1.6), pour cela une condition nécessaire et suffisante sera mise en évidence. Tandis que la démonstration de la proposition suivante pourra être obtenue à partir de [5] ou [86], mais nous préférons de l'inclure ici dans notre manuscrit.

Proposition 4.1.1 *Le champ $u = (u(t,x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$ défini par (4.1.6) existe si et seulement si*

$$d < 2H + 1. \tag{4.1.7}$$

De plus, pour tout $p \geq 2$ et pour tout $T > 0$, nous avons:

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbf{E}\Big(|\ u(t,x)\ |^p \Big) < \infty. \tag{4.1.8}$$

Preuve : Due à la gaussianité du champ W^H, l'intégrale dans (4.1.6) s'identifie à une intégrale de Wiener. Cette intégrale est bien définie si et seulement si la fonction déterministe $g_{t,x} \in \mathcal{H}_W$.

Par le biais de l'identité de Plancherel (3.2.25), nous notons que:

$$\begin{aligned}\|g_{t,x}\|^2_{\mathcal{H}_W} &= \alpha_H \int_0^t\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} g_{t,x}(u,y)g_{t,x}(v,y)\mid u-v\mid^{2H-2}\mathrm{d}y\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &= (2\pi)^{-d}\alpha_H\int_0^t\int_0^t \mid u-v\mid^{2H-2}\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{F}g_{t,x}(u,y)(\xi)\overline{\mathcal{F}g_{t,x}(v,y)(\xi)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Rappelons que $\mathcal{F}g_{t,x}(u,y)(\xi) = e^{-i\xi.x}\frac{\sin((t-u)\|\xi\|)}{\|\xi\|}$, alors nous trouvons que:

$$\begin{aligned}\|g_{t,x}\|^2_{\mathcal{H}_W} &= (2\pi)^{-d}\alpha_H\int_0^t\int_0^t\mid u-v\mid^{2H-2}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\sin((t-u)\|\xi\|)\sin((t-v)\|\xi\|)}{\|\xi\|^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\alpha_H}{\|\xi\|^2}\int_0^t\int_0^t\sin(u\|\xi\|)\sin(v\|\xi\|)\mid u-v\mid^{2H-2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}\xi\\ &= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}N_t(\xi)\mathrm{d}\xi, \qquad (4.1.9)\end{aligned}$$

où la quantité $N_t(\xi) := \frac{\alpha_H}{\|\xi\|^2}\int_0^t\int_0^t\sin((t-u)\|\xi\|)\sin((t-v)\|\xi\|)\mid u-v\mid^{2H-2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

Appuyons essentiellement sur la Proposition 2.13 de [86], (également voir aussi [5]), nous indiquons que pour tout $\|\xi\|\in\mathbb{R}^d$,

$$N_t(\xi)\le C\Big(\frac{1}{1+\|\xi\|^2}\Big)^{H+\frac{1}{2}}, \qquad (4.1.10)$$

ce qui implique immédiatement que:

$$\|g_{t,x}\|^2_{\mathcal{H}_W} \le C\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\frac{1}{1+\|\xi\|^2}\Big)^{H+\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi. \qquad (4.1.11)$$

Or, l'intégrale (4.1.11) peut être ré-écrite de la façon suivante:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\frac{1}{1+\|\xi\|^2}\Big)^{H+\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi &= \int_{\|\xi\|\le 1}\Big(\frac{1}{1+\|\xi\|^2}\Big)^{H+\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi\\ &\quad+\int_{\|\xi\|\ge 1}\Big(\frac{1}{1+\|\xi\|^2}\Big)^{H+\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi. \qquad (4.1.12)\end{aligned}$$

Comme l'intégrant dans (4.1.12) est une fonction positive et que la quantité $1+\|\xi\|^2$ se comporte au voisinage de 0 comme une constante, et au voisinage de ∞ comme $\|\xi\|^2$, alors il en résulte que $\|g_{t,x}\|^2_{\mathcal{H}} < \infty$ si et seulement si $\int_{\|\xi\|\ge 1}\frac{1}{\|\xi\|^{2H+1}}\mathrm{d}\xi < \infty$, ce qui est vrai seulement pour le cas $d < 2H+1$.

Concernant la deuxième partie de la démonstration, nous notons que tout d'abord pour $p = 2$ et grâce à la condition précédente $d < 2H + 1$, il est clair que:

$$\mathbf{E}\Big(\mid u(t,x) \mid^2\Big) \quad = \quad \|g_{t,x}\|^2_{\mathcal{H}} < \infty. \tag{4.1.13}$$

Cependant pour $p \geq 3$, le fait que les variables aléatoires qu'on les traite sont gaussiennes, nous permet d'écrire que:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\Big(\mid u(t,x) \mid^p\Big) &\leq C\Big(\mathbf{E}\mid u(t,x) \mid^2\Big)^{\frac{p}{2}} \\ &< \infty, \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

et par conséquent le résultat demandé est établi. ■

Remarque 4.1.2 *Tenons en compte que $H \in]\frac{1}{2},1[$, alors la condition (4.1.7) n'est vérifiée que lorsque la dimension de l'espace d est égale à 1 ou 2.*

Remarque 4.1.3 *Lorsque le paramètre de Hurst H tend vers $\frac{1}{2}$, alors la condition (4.1.7) est équivalente à $d < 2$, ce qui vérifie par conséquent le résultat évoqué dans la Proposition 3.1.1 du Chapitre 3.*

Lemme 4.1.1 *Soient T, $M > 0$ et $d \in \{1,2\}$. Fixons $t \in]0,T]$, alors ils existent deux constantes $0 < C_3 < C_4$ tel que :*

$$C_3\|x-y\|^{2H+1-d} \leq \mathbf{E}\Big(|u(t,x)-u(t,y)|^2\Big) \leq C_4\|x-y\|^{2H+1-d} \tag{4.1.15}$$

pour tout $x \neq y$ appartenant à $[-M,M]^d$.

Preuve : Il s'agit de la même démonstration que celle de la Proposition 2 de [20]. En faite, cette dernière référence donne une présentation complète dans un cas plus général, puisqu'elle traite l'EDPS des ondes perurbée par un bruit fractionnaire par rapport au temps et coloré par rapport à l'espace. Particulièrement, lorsqu'on prend $\beta = d$, les lignes de la démonstration se coïncident avec notre situation. ■

Remarque 4.1.4 *La démonstration du cas $d = 1$ du Lemme 4.1.1 sera établie dans la Sous-Section à 4.2.2.3 qu'on va la présenter ultérieurement.*

Remarques 4.1.1 • *En vertu du théorème de Kolmogorov, quand le temps t est fixé dans un horizon fini* $]0,T]$*, alors le processus solution spatiale possède une modification dont les trajectoires* $x \mapsto u(t,x)$ *sont presque sûrement Hölder continues d'exposant* $\delta \in]0,H - \frac{d-1}{2}[$*. Ce résultat coïncide avec le cas classique de l'EDPS des ondes traitée précédemment dans le Chapitre 3, où nous avons trouvé que les trajectoires sont Hölder continues d'ordre* $\delta \in]0,\frac{1}{2}[$*.*

• *Lorsque l'exposant* $\delta \geq H - \frac{d-1}{2}$*, on note l'absence de la continuité höldérienne du processus (4.1.6).*

• *Une déduction intéressante est que pour* $d = 1$*, les trajectoires de la solution spatiale ont la même régulatité höldérienne que les trajectoires du mBf* $(B_t^H)_{t\geq 0}$*, puisqu'elles sont Hölder continues d'exposant* $\delta \in]0,H[$*. Ceci concrétise l'impact du bruit fractionnaire (bien évidemment bruit temporel) sur le comportement de la solution spatiale.*

La section suivante évoque un calcul détaillé de la fonction de covariance de la solution évolutive de notre équation des ondes (4.1.1), le résultat qu'on va le trouver permet de bien caractériser la corrélation spatiale des accroissements de processus solution (4.1.6).

4.2 Corrélation spatiale

Le gros du travail maintenant consiste à donner l'expression de la fonction de covariance spatiale de la solution (4.1.6). Pour des raisons liées à la complexité des calculs, on se restreint pour le reste de ce chapitre au cas $d = 1$. Notre raisonnement est axé sur l'expression explicite du noyau de Green G_1 associé à l'équation des ondes au lieu de l'expression de la transformée de Fourier (3.1.5) qui a été toujours dans la littérature la clé de toutes les démonstrations.

L'intérêt de ce calcul réside dans le fait qu'il va nous permettre de déduire en premier lieu la structure de corrélation entre les accroissements spatiaux, et en second lieu le TCL vérifié par la suite des variations quadratiques, ainsi que quelques conséquences.

C'est ainsi le lemme suivant est d'une importance capitale et le résultat évoqué est considéré comme la clé de toutes les prochaines démonstrations

4.2.1 Fonction de covariance spatiale

Lemme 4.2.1 *Soit $T > 0$ et $t \in]0,T]$ fixé, alors pour tous x, $y \in \mathbb{R}$ et pour tout $H > \frac{1}{2}$, on a:*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big(u(t,x)u(t,y)\Big) &= \frac{1}{2}\left(c_H|y-x|^{2H+1} - \frac{t|y-x|^{2H}}{2} + \frac{t^{2H+1}}{2H+1}\right)\mathbb{1}_{\{|y-x|<t\}} \\ &\quad + \frac{(2t-|y-x|)^{2H+1}}{8(2H+1)}\mathbb{1}_{\{t\le|y-x|<2t\}}, \qquad (4.2.16)\end{aligned}$$

avec la constante $c_H := \frac{4H-1}{4(2H+1)}$.

Preuve : La preuve se fait en une série des étapes, tout d'abord, pour t fixé et pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, nous montrons:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big(u(t,x)u(t,y)\Big) &:= R^u(x,y) \\ &= \alpha_H \int_0^t\int_0^t \mathrm{d}u\mathrm{d}v|u-v|^{2H-2}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}zG_1(t-u,x-z)G_1(t-v,y-z) \\ &= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u\int_0^t \mathrm{d}v|u-v|^{2H-2}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}z\mathbb{1}_{\{|x-z|<t-u\}}\mathbb{1}_{\{|y-z|<t-v\}} \\ &= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u\int_0^t \mathrm{d}v|u-v|^{2H-2}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}z\mathbb{1}_{\{|x-z|<u\}}\mathbb{1}_{\{|y-z|<v\}} \\ &= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u\int_0^u \mathrm{d}v(u-v)^{2H-2}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}z\mathbb{1}_{\{|x-z|<u\}}\mathbb{1}_{\{|y-z|<v\}} \\ &\quad + \frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u\int_u^t \mathrm{d}v(v-u)^{2H-2}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}z\mathbb{1}_{\{|x-z|<u\}}\mathbb{1}_{\{|y-z|<v\}} \\ &:= R_1(x,y) + R_2(x,y). \qquad (4.2.17)\end{aligned}$$

Sans perte de généralité nous supposons que $x \le y$, et nous commençons par la suite par calculer le premier terme de l'égalité (4.2.17). Deux situations peuvent être apparues pour R_1: $y-x \ge u-v$ et $y-x < u-v$, d'où nous obtenons:

$$\begin{aligned}R_1(x,y) &:= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u\int_0^u \mathrm{d}v(u-v)^{2H-2}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}z\mathbb{1}_{\{|x-z|<u\}}\mathbb{1}_{\{|y-z|<v\}} \\ &= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u\int_0^u \mathrm{d}v(u-v)^{2H-2}\int_{(x-u)\vee(y-v)}^{(x+u)\wedge(y+v)}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}v (u-v)^{2H-2}\mathbb{1}_{\{u-v\le y-x\}}\int_{(x-u)\vee(y-v)}^{(x+u)\wedge(y+v)}\mathrm{d}z \\
&\quad +\frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}v (u-v)^{2H-2}\mathbb{1}_{\{u-v> y-x\}}\int_{(x-u)\vee(y-v)}^{(x+u)\wedge(y+v)}\mathrm{d}z \\
&= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}v (u-v)^{2H-2}\mathbb{1}_{\{u-v\le y-x\}}\int_{y-v}^{x+u}\mathrm{d}z\mathbb{1}_{\{x+u>y-v\}} \\
&\quad +\frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}v (u-v)^{2H-2}\mathbb{1}_{\{u-v> y-x\}}\int_{y-v}^{y+v}\mathrm{d}z \\
&= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}v (u-v)^{2H-2}\mathbb{1}_{\{u-v\le y-x<u+v\}}(u+v-(y-x)) \\
&\quad +\frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}v 2v(u-v)^{2H-2}\mathbb{1}_{\{u-v> y-x\}} \\
&:= R_{1,1}(x,y)+R_{1,2}(x,y). \qquad (4.2.18)
\end{aligned}$$

Séparément nous déterminons maintenant les termes $R_{1,1}$ et $R_{1,2}$. Pour la première quantité, un changement de variable $\tilde{v}=u-v$ dans l'intégrale dv nous permet de trouver que:

$$\begin{aligned}
R_{1,1}(x,y) &:= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}v (u-v)^{2H-2}\mathbb{1}_{\{u-v\le y-x<u+v\}}(u+v-(y-x)) \\
&= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}v v^{2H-2}\mathbb{1}_{\{v\le y-x<2u-v\}}(2u-v-(y-x)) \\
&= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u \int_0^{u\wedge(y-x)\wedge(2u-(y-x))} v^{2H-2}(2u-v-(y-x)) \\
&= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u\mathbb{1}_{\{u<y-x\}} \int_0^{u\wedge(y-x)\wedge(2u-(y-x))} v^{2H-2}(2u-v-(y-x)) \\
&\quad +\frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u\mathbb{1}_{\{u\ge y-x\}} \int_0^{u\wedge(y-x)\wedge(2u-(y-x))} v^{2H-2}(2u-v-(y-x)).
\end{aligned}$$

Notons que l'ensemble $\{u<y-x\}$ entraîne que: $u\wedge(y-x)\wedge(2u-(y-x))=2u-(y-x)$, néanmoins l'ensemble $\{u\ge y-x\}$ assure que: $u\wedge(y-x)\wedge(2u-(y-x))=y-x$, alors il en résulte que $R_{1,1}$ peut être ré-exprimé de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
R_{1,1}(x,y) &= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^{t\wedge(y-x)} \mathrm{d}u\mathbb{1}_{\{u>\frac{y-x}{2}\}} \int_0^{2u-(y-x)} \mathrm{d}v v^{2H-2}(2u-v-(y-x)) \\
&\quad +\frac{\alpha_H}{4}\mathbb{1}_{\{y-x<t\}}\int_{y-x}^t \mathrm{d}u \int_0^{y-x} \mathrm{d}v v^{2H-2}(2u-v-(y-x)) \\
&:= R_{1,1,A}(x,y)+R_{1,1,B}(x,y), \qquad (4.2.19)
\end{aligned}$$

où l'expression $R_{1,1,A}$ est égale à:

$$\begin{aligned}
R_{1,1,A}(x,y) &:= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^{t\wedge(y-x)} du \mathbb{1}_{\{u>\frac{y-x}{2}\}}\int_0^{2u-(y-x)} dv v^{2H-2}(2u-v-(y-x)) \\
&= \frac{\alpha_H}{4}\mathbb{1}_{\{y-x<t\}}\int_{\frac{y-x}{2}}^{y-x} du \int_0^{2u-(y-x)} dv v^{2H-2}(2u-v-(y-x)) \\
&\quad +\frac{\alpha_H}{4}\mathbb{1}_{\{y-x\geq t\}}\mathbb{1}_{\{y-x<2t\}}\int_{\frac{y-x}{2}}^{t} du \int_0^{2u-(y-x)} dv v^{2H-2}(2u-v-(y-x)) \\
&= \frac{\alpha_H}{8H(2H-1)}\mathbb{1}_{\{y-x<t\}}\int_{\frac{y-x}{2}}^{y-x} du(2u-(y-x))^{2H} \\
&\quad +\frac{\alpha_H}{8H(2H-1)}\mathbb{1}_{\{t\leq y-x<2t\}}\int_{\frac{y-x}{2}}^{t} du(2u-(y-x))^{2H} \\
&= \frac{(y-x)^{2H+1}}{16(2H+1)}\mathbb{1}_{\{y-x<t\}}+\frac{(2t-(y-x))^{2H+1}}{16(2H+1)}\mathbb{1}_{\{t\leq y-x<2t\}}. \qquad (4.2.20)
\end{aligned}$$

Cependant pour $R_{1,1,B}$, en calculant notamment l'intégrale par rapport à la variable v, il en découle que:

$$\begin{aligned}
&R_{1,1,B}(x,y) \\
&:= \frac{\alpha_H}{4}\mathbb{1}_{\{y-x<t\}}\int_{y-x}^{t} du\int_0^{y-x} dv v^{2H-2}(2u-v-(y-x)) \\
&= \frac{\alpha_H}{4}\mathbb{1}_{\{y-x<t\}}\int_{y-x}^{t} du\left[\frac{2u(y-x)^{2H-1}}{2H-1}-\frac{4H-1}{2H(2H-1)}(y-x)^{2H}\right] \\
&= \frac{\alpha_H}{4}\mathbb{1}_{\{y-x<t\}}\left[\frac{(y-x)^{2H-1}}{2H-1}(t^2-(y-x)^2)-\frac{4H-1}{2H(2H-1)}(y-x)^{2H}(t-(y-x))\right] \\
&= \left[\frac{Ht^2}{4}(y-x)^{2H-1}-\frac{(4H-1)t}{8}(y-x)^{2H}+\frac{2H-1}{8}(y-x)^{2H+1}\right]\mathbb{1}_{\{y-x<t\}}. \qquad (4.2.21)
\end{aligned}$$

Les résultats (4.2.20) et (4.2.21) réunis ensemble dans l'expression (4.2.19), nous permettent de dégager que:

$$\begin{aligned}
R_{1,1}(x,y) &= \left[\frac{Ht^2}{4}(y-x)^{2H-1}-\frac{(4H-1)t}{8}(y-x)^{2H}+\frac{8H^2-1}{16(2H+1)}(y-x)^{2H+1}\right]\mathbb{1}_{\{y-x<t\}} \\
&\quad +\frac{(2t-(y-x))^{2H+1}}{16(2H+1)}\mathbb{1}_{\{t\leq y-x<2t\}}. \qquad (4.2.22)
\end{aligned}$$

En regardant maintenant la deuxième quantité $R_{1,2}$ de l'égalité (4.2.18), un minimum de calcul nous conduit à trouver que:

$$
\begin{aligned}
R_{1,2}(x,y) &:= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}v 2v(u-v)^{2H-2}\mathbb{1}_{\{u-v>y-x\}}\\
&= \frac{\alpha_H}{2}\int_0^t \mathrm{d}u \mathbb{1}_{\{u>y-x\}}\int_0^{u\wedge(u-(y-x))} \mathrm{d}v v(u-v)^{2H-2}\\
&= \frac{\alpha_H}{2}\mathbb{1}_{\{y-x<t\}}\int_{y-x}^t \mathrm{d}u \int_0^{u-(y-x)} \mathrm{d}v v(u-v)^{2H-2}\\
&= \frac{\alpha_H}{2}\mathbb{1}_{\{y-x<t\}}\int_{y-x}^t \mathrm{d}u \left[\frac{(y-x)^{2H}}{2H}-\frac{u(y-x)^{2H-1}}{2H-1}+\frac{u^{2H}}{2H(2H-1)}\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[(2H-1)(t-(y-x)(y-x)^{2H}-2H(y-x)^{2H-1}\int_{y-x}^t \mathrm{d}u u+\int_{y-x}^t u^{2H}\right]\mathbb{1}_{\{y-x<t\}}\\
&= \frac{1}{4}\left[(2H-1)(y-x)^{2H}t-\frac{H(2H-1)(y-x)^{2H+1}}{2H+1}-Ht^2(y-x)^{2H-1}\right.\\
&\quad\left.+\frac{t^{2H+1}}{2H+1}\right]\mathbb{1}_{\{y-x<t\}}\\
&= \frac{t^2}{4}\left(\frac{t^{2H-1}}{2H+1}-H(y-x)^{2H-1}\right)\mathbb{1}_{\{y-x<t\}}+\frac{(2H-1)(y-x)^{2H}}{4}\\
&\quad\times\left(t-\frac{H(y-x)}{2H+1}\right)\mathbb{1}_{\{y-x<t\}}. \qquad (4.2.23)
\end{aligned}
$$

Finalement, mettons les deux derniers résultats (4.2.22) et (4.2.23) dans (4.2.18), alors pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, il est immédiat que:

$$
\begin{aligned}
R_1(x,y) &:= R_{1,1}(x,y)+R_{1,2}(x,y)\\
&= \frac{1}{4}\left(c_H|y-x|^{2H+1}-\frac{t|y-x|^{2H}}{2}+\frac{t^{2H+1}}{2H+1}\right)\mathbb{1}_{\{|y-x|<t\}}\\
&\quad+\frac{(2t-(y-x))^{2H+1}}{16(2H+1)}\mathbb{1}_{\{t\le|y-x|<2t\}}, \qquad (4.2.24)
\end{aligned}
$$

avec c_H est une constante qui est égale à $\frac{4H-1}{4(2H+1)}$.

Passons en ce moment pour calculer le second terme R_2 de l'expression (4.2.17). Un changement des variables donné par $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (t-u, t-v)$ permet en quelque sorte d'écrire que:

$$\begin{aligned}
R_2(x,y) &:= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u \int_u^t \mathrm{d}v(v-u)^{2H-2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}z \mathbb{1}_{\{|x-z|<u\}}\mathbb{1}_{\{|y-z|<v\}}\\
&= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}v(u-v)^{2H-2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}z \mathbb{1}_{\{|x-z|<t-u\}}\mathbb{1}_{\{|y-z|<t-v\}}\\
&= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}u(v-u)^{2H-2}\int_{(x-(t-u))\vee(y-(t-v))}^{(x+(t-u))\wedge(y+(t-v))} \mathrm{d}z\\
&= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}v(u-v)^{2H-2}\mathbb{1}_{\{u-v\leq y-x\}}\int_{y-(t-v)}^{x+(t-u)} \mathrm{d}z \mathbb{1}_{\{x+(t-u)>y-(t-v)\}}\\
&\quad +\frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}v(u-v)^{2H-2}\mathbb{1}_{\{u-v>y-x\}}\int_{x-(t-u)}^{x+(t-u)} \mathrm{d}z\\
&= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}v(u-v)^{2H-2}\mathbb{1}_{\{u-(y-x)\leq v\}}\mathbb{1}_{\{x+(t-u)>y-(t-v)\}}\big(2t-(y-x)-(u+v)\big)\\
&\quad +\frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}v(u-v)^{2H-2}\mathbb{1}_{\{u-(y-x)>v\}}2(t-u)\\
&= \frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u \int_0^u \mathrm{d}v v^{2H-2}\mathbb{1}_{\{v\leq(y-x)<2t-(2u-v)\}}\big(2t-(2u-v)-(y-x)\big)\\
&\quad +\frac{\alpha_H}{4}\int_0^t \mathrm{d}u 2(t-u)\mathbb{1}_{\{u>(y-x)\}}\int_0^{u-(y-x)} \mathrm{d}v(u-v)^{2H-2}. \qquad (4.2.25)
\end{aligned}$$

Des calculs exactement de même type que pour R_1, nous donnent le résultat suivant:

$$\begin{aligned}
R_2(x,y) &= R_{1,1}(x,y)+R_{1,2}(x,y)\\
&= R_1(x,y). \qquad (4.2.26)
\end{aligned}$$

En conclusion, compte tenu des quantités calculées (4.2.24) et (4.2.26), nous affirmons que l'expression finale de la fonction de covariance R^u est aboutie, puisque d'après (4.2.17) nous prouvons que:

$$\begin{aligned}
R^u(x,y) &:= R_1(x,y)+R_2(x,y)\\
&= 2R_{1,1}(x,y)+2R_{1,2}(x,y)\\
&= \frac{1}{2}\left(c_H|y-x|^{2H+1}-\frac{t|y-x|^{2H}}{2}+\frac{t^{2H+1}}{2H+1}\right)\mathbb{1}_{\{|y-x|<t\}}\\
&\quad +\frac{(2t-|y-x|)^{2H+1}}{8(2H+1)}\mathbb{1}_{\{t\leq|y-x|<2t\}}, \text{ pour tous } x,\, y\in\mathbb{R}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Remarque 4.2.1 *Il est naturel de penser à vérifier ce dernier résultat dans le cas ordinaire (cas bruit blanc spatio-temporel), de ce fait, nous mentionnons que, lorsque* $H = \frac{1}{2}$ *et pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$*, nous avons:*

d'un côté,

$$R_{1,2} = 0 \tag{4.2.27}$$

et d'autre côté,

$$\begin{aligned} R_{1,1}(x,y) &= \left(\frac{t^2}{8} - \frac{t}{8}|y-x| + \frac{|y-x|2}{32}\right)\mathbb{1}_{\{|y-x|<t\}} + \frac{(2t-|y-x|)^2}{32}\mathbb{1}_{\{t\leq|y-x|<2t\}} \\ &= \frac{(2t-|y-x|)^2}{32}\mathbb{1}_{\{|y-x|<t\}} - \frac{(2t-|y-x|)^2}{32}\mathbb{1}_{\{|y-x|<t\}} + \frac{(2t-|y-x|)^2}{32}\mathbb{1}_{\{|y-x|<2t\}} \\ &= \frac{1}{8}\Big(t - \frac{|y-x|}{2}\Big)^2\mathbb{1}_{\{|y-x|<2t\}}, \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

Regroupons ces deux résultats ensemble, alors il est clair que, pour $H = \frac{1}{2}$*, nous trouvons que:*

$$R^u(x,y) = \frac{1}{4}\Big(t - \frac{|y-x|}{2}\Big)^2\mathbb{1}_{\{|y-x|<2t\}}, \tag{4.2.29}$$

et évidemment nous signalons que l'expression (4.2.29) calculée ici, coïncide avec l'expression de la fonction de covariance (3.2.37) de la solution des ondes dirigée par un bruit blanc en temps et en espace.

Remarque 4.2.2 • *En se basant sur l'expression de la covariance (4.2.16), nous déduisons que la solution spatiale* $(u(t,x))_{x\in\mathbb{R}}$ *est un processus stationnaire, ce qui vérifie que son comportement est quasiment différent de celui de la solution temporelle* $(u(t,x))_{t\in]0,T[}$*, qui est un processus auto-similaire d'indice* $H+1-\frac{d}{2}$*. La Proposition* 2.15 *de [86] a évoqué l'auto-similarité de la solution temporelle.*

• *Nous avons intérêt à mentionner que aussi la solution spatiale de l'EDPS de la chaleur dirigée par un bruit blanc-fractionnaire, se comporte d'une façon distinct à celle de notre solution* $(u(t,x))_{x\in\mathbb{R}}$*, puisqu'elle est auto-similaire d'indice* $H-\frac{d}{2}$*. La Proposition* 2.10 *de [86] a mis en relief cette propriété.*

La sous-section suivante recense quelques résultats qui peuvent être dégagés à partir de l'expression de la fonction de covariance spatiale.

4.2.2 Conséquences de la formule de covariance spatiale

4.2.2.1 Continuité de la fonction de covariance spatiale

En vertu de (4.2.16), nous remarquons que:

$$R^u(x,y) = f(|y-x|), \text{ pour tous } x,\, y \in \mathbb{R},$$

où la fonction f est définie de la manière ci-dessous:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(c_H z^{2H+1} - \frac{t}{2} z^{2H} + \frac{t^{2H+1}}{2H+1}\right) & \text{si } z \in]-\infty,t[\\ \frac{(2t-z)^{2H+1}}{8(2H+1)} & \text{si } z \in [t,2t[\\ 0 & \text{si } z \in [2t,+\infty[. \end{cases} \tag{4.2.30}$$

Clairement, nous déduisons que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, en particulier, elle est continue en $z = t$ et en $z = 2t$, ce qui vérifie bien la continuité de la fonction R^u sur $\mathbb{R}^2$.

4.2.2.2 Distribution de la solution spatiale

Une autre conséquence assez importante qu'on peut la tirer à partir de l'expression (4.2.16) est, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ le moment d'ordre 2 de la solution spatiale est égale à:

$$\begin{aligned} R^u(x,x) &:= \mathbf{E}\Big(u(t,x)^2\Big) \\ &= \frac{t^{2H+1}}{2(2H+1)}, \qquad t \text{ fixé dans }]0,T], \end{aligned} \tag{4.2.31}$$

et comme la solution $(u(t,x))_{x\in\mathbb{R}}$ est un processus gaussien centré, alors nous concluons que:

$$u(t,x) \sim \frac{t^{H+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2(2H+1)}} Z, \text{ avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1). \tag{4.2.32}$$

De plus, nous notons que son moment d'ordre $p \geq 2$ est donné par:

$$\mathbf{E}\Big(|u(t,x)|^p\Big) = \left(\frac{t^{H+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2(2H+1)}}\right)^p \mathbf{E}\big(|Z|^p\big). \tag{4.2.33}$$

4.2.2.3 Estimation des accroissements spatiaux

Venons ici pour démontrer encore une fois le Lemme 4.1.1, mais dans le cas $d = 1$, c'est à dire on cherche à démontrer la double inégalités suivante:

$$C_3|\ x-y\ |^{2H} \leq \mathbf{E}\Big(\ |u(t,x)-u(t,y)|^2\Big) \leq C_4|\ x-y\ |^{2H}, \tag{4.2.34}$$

pour tous $x \neq y$ des réels de $[-M,M]$, $M > 0$.

En faite l'idée est de trouver un encadrement du moment d'ordre 2 des accroissements engendrés par la solution spatiale, en utilisant essentiellement l'expression de la covariance, ceci au lieu de passer, comme auparavant, par l'expression de la transformée de Fourier du noyau de Green G_1.

Heureusement, en se basant sur l'expression (4.2.16), nous pouvons établir facilement (4.2.34), voire nous arrivons à expliciter directement les expressions des constantes C_3 et C_4. Alors, fixons $t > 0$ et pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, nous énonçons que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big(|u(t,x)-u(t,y)|^2\Big) &= 2\Big(R^u(x,x)-R^u(x,y)\Big)\\
&= \frac{t^{2H+1}}{2H+1} - \left(c_H|y-x|^{2H+1} - \frac{t|y-x|^{2H}}{2} + \frac{t^{2H+1}}{2H+1}\right)\mathbb{1}_{\{|y-x|<t\}}\\
&\quad - \frac{(2t-|y-x|)^{2H+1}}{4(2H+1)}\mathbb{1}_{\{t\leq|y-x|<2t\}}.
\end{aligned} \tag{4.2.35}$$

Pour la première situation lorsque $|y-x| < t$, nous obtenons que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big(\ |u(t,x)-u(t,y)|^2\Big) &= \frac{t}{2}|y-x|^{2H} - c_H|y-x|^{2H+1}\\
&= |y-x|^{2H}\left(\frac{t}{2} - \frac{4H-1}{4(2H+1)}|y-x|\right),
\end{aligned} \tag{4.2.36}$$

ce qui entraîne que: d'une part nous avons

$$\mathbf{E}\Big(|u(t,x)-u(t,y)|^2\Big) \geq \frac{3t}{4(2H+1)}|y-x|^{2H} \tag{4.2.37}$$

et d'autre part, nous montrons que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big(|u(t,x)-u(t,y)|^2\Big) &\leq |y-x|^{2H}\left(\frac{t}{2} + \frac{4H-1}{4(2H+1)}|y-x|\right)\\
&\leq |y-x|^{2H}\left(\frac{t}{2} + \frac{4H-1}{4(2H+1)}t\right)\\
&= \frac{(8H+1)t}{4(2H+1)}|y-x|^{2H}.
\end{aligned} \tag{4.2.38}$$

Pour la deuxième situation lorsque $t \leq |y-x| < 2t$, nous trouvons que:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\Big(|u(t,x) - u(t,y)|^2 \Big) &= \frac{1}{2H+1}\left(t^{2H+1} - \frac{1}{4}\Big(2t - |y-x|\Big)^{2H+1}\right) \\ &= \frac{t^{2H+1}}{2H+1}\left(1 - \frac{1}{4}\Big(2 - \frac{|y-x|}{t}\Big)^{2H+1}\right). \end{aligned} \tag{4.2.39}$$

Or en s'appuyant sur le fait que $1 \leq \frac{|y-x|}{t} < 2$, alors il se donne que:

$$\frac{3}{4} \leq 1 - \frac{1}{4}\Big(2 - \frac{|y-x|}{t}\Big)^{2H+1} < 1, \tag{4.2.40}$$

et par la suite nous déduisons les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\Big(|u(t,x) - u(t,y)|^2 \Big) &< \frac{t^{2H+1}}{2H+1} \\ &\leq \frac{t}{2H+1}|y-x|^{2H} \end{aligned} \tag{4.2.41}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\Big(|u(t,x) - u(t,y)|^2 \Big) &\geq \frac{3t^{2H+1}}{4(2H+1)} \\ &\geq \frac{3t}{2^{2H+2}(2H+1)}|y-x|^{2H}. \end{aligned} \tag{4.2.42}$$

L'encadrement est donc acquis car ce n'est rien d'autre qu'un regroupement des résultats (4.2.37), (4.2.38), (4.2.41) et (4.2.42).

Remarque 4.2.3 *À partir de la deuxième situation, il est possible d'établir un nouveau encadrement plus fin que (4.2.34), ce qui nous permet d'assurer plus de régularité pour le moment d'ordre 2 des accroissements spatiaux. En effet, nous pouvons vérifier que, pour $t \leq |y-x| < 2t$, ils existent deux constantes $0 < C_5 < C_6$ tel que :*

$$C_5|y-x|^{2H+1} \leq \mathbf{E}\Big(|u(t,x) - u(t,y)|^2 \Big) \leq C_6|y-x|^{2H+1}, \tag{4.2.43}$$

avec $x \neq y$ des réels de $[-M,M]$, $M > 0$, et les constantes C_5 et C_6 sont bien explicitées.

4.2.2.4 Relation avec le mouvement brownien fractionnaire

D'après l'expression de la covariance (4.2.16), il en résulte une autre propriété intéressante, qui montre que les accroissements spatiaux de la solution sont liés aux accroissements d'un mBf. En effet, pour t fixé dans $]0,T]$ et pour tous x, $y \in \mathbb{R}$ tel qu'ils vérifient

$|y-x| < t$, (nous verrons encore cette situation dans la prochaine section), nous déduisons que:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\Big(\big(u(t,x+1)-u(t,x)\big)\big(u(t,y+1)-u(t,y)\big)\Big) \\ &\quad = \frac{t}{2}\varphi_H(|y-x|) - c_H\varphi_{H+\frac{1}{2}}(|y-x|) \end{aligned} \tag{4.2.44}$$

avec

$$\varphi_H(k) := \frac{1}{2}\left(|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H}\right), \text{ pour tout } k \in \mathbb{R}. \tag{4.2.45}$$

Ceci signifie que, lorsque nous fixons le temps t et nous prenons $|y-x| < t$, un accroissement spatial de la solution u est le même en loi que la somme d'un accroissement de B^H et un accroissement de $B^{H+\frac{1}{2}}$, où les processus B^H et $B^{H+\frac{1}{2}}$ sont des mouvements browniens fractionnaires indépendants avec les indices de Hurst sont respectivement H et $H+\frac{1}{2}$ (ici l'existence du mBf $B^{H+\frac{1}{2}}$ n'est pas garantie).

Par exemple, si $t > 2$, alors le processus $(u(t,x+1)-u(t,x))_{x\in[0,1]}$ a la même distribution que le processus $\left(B^H_{x+1} - B^H_x + B^{H+\frac{1}{2}}_{x+1} - B^{H+\frac{1}{2}}_x\right)_{x\in[0,1]}$.

Dans la section suivante, nous étudions la variation quadratique spatiale de la solution (4.1.6) et ensuite nous passons à une caractérisation de son comportement asymptotique d'une manière analogue à celle réalisée dans le Chapitre 3, ceci sera démontré en utilisant essentiellement l'expression de la fonction de covariance (4.2.16), ainsi que quelques éléments de calculs de Malliavin vus dans la Sous-section 3.3.1.

4.3 Variation quadratique spatiale

Par continuité de l'analyse que nous avons fait dans le précédent chapitre pour le cas d'un EDPS classique des ondes, nous considérons maintenant la même forme de la suite des variations quadratiques spatiales renormalisée et nous cherchons à l'étudier dans le cas d'un bruit fractionnaire par rapport au temps.

Fixons $d = 1$ et $t \in]0,T]$, $T > 0$, nous prenons $(x_j)_{0\le j\le N}$ une subdivision spatiale de l'intervalle unitaire $[0,1]$, tels que pour tout $N \ge 1$ et pour tout $j = 0,\ldots,N$, nous avons $x_j = \frac{j}{N}$. De ce fait, la suite des variations quadratiques centrées normalisées définie sur

[0,1] et associée à la solution évolutive (4.1.6), peut être donnée pour tout $N \geq 1$ de la façon suivante:

$$V_{f,N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{\left(u(t,\frac{j+1}{N}) - u(t,\frac{j}{N})\right)^2}{\mathbf{E}\left(u(t,\frac{j+1}{N}) - u(t,\frac{j}{N})\right)^2} - 1 \right]. \tag{4.3.46}$$

Toujours notre but est de savoir le comportement limite de la suite $V_{f,N}$, tout en utilisant le même démarche que celui de la Section 3.3 du Chapitre 3.

4.3.1 Estimation et renormalisation de la suite des variations quadratiques

Afin de renormaliser la suite $V_{f,N}$, on a besoin en premier lieu de caractériser le comportement asymptotique de la quantité $\mathbf{E}(V_{f,N}^2)$. Ceci est faisable en étudiant soigneusement la fonction d'auto-corrélation des accroissements spatiaux qui est donnée par:

$$\mathbf{E}\Big((u(t,x_{i+1}) - u(t,x_i))(u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j))\Big). \tag{4.3.47}$$

Tout d'abord, en vertu de l'expression (4.2.16), nous notons que l'auto-corrélation (4.3.47) s'exprime, pour tous $0 \leq i, j \leq N$, de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
\Delta R(i,j) &:= \mathbf{E}\Big((u(t,x_{i+1}) - u(t,x_i))(u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j))\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg[2\Big(c_H \frac{|i-j|^{2H+1}}{N^{2H+1}} - \frac{t|i-j|^{2H}}{2N^{2H}} + \frac{t^{2H+1}}{2H+1}\Big)\mathbb{1}_{\{|i-j|<Nt\}} \\
&\quad -\Big(c_H \frac{|i-j+1|^{2H+1}}{N^{2H+1}} - \frac{t|i-j+1|^{2H}}{2N^{2H}} + \frac{t^{2H+1}}{2H+1}\Big)\mathbb{1}_{\{|i-j+1|<tN\}} \\
&\quad -\Big(c_H \frac{|i-j-1|^{2H+1}}{N^{2H+1}} - \frac{t|i-j-1|^{2H}}{2N^{2H}} + \frac{t^{2H+1}}{2H+1}\Big)\mathbb{1}_{\{|i-j-1|<tN\}}\Bigg] \\
&\quad -\frac{1}{8(2H+1)}\Bigg[\Big(2t - \frac{|i-j+1|}{N}\Big)^{2H+1}\mathbb{1}_{\{tN\leq|i-j+1|<2tN\}} \\
&\quad - 2\Big(2t - \frac{|i-j|}{N}\Big)^{2H+1}\mathbb{1}_{\{tN\leq|i-j|<2tN\}} \\
&\quad + \Big(2t - \frac{|i-j-1|}{N}\Big)^{2H+1}\mathbb{1}_{\{tN\leq|i-j-1|<2tN\}}\Bigg].
\end{aligned} \tag{4.3.48}$$

Selon la valeur de l'indice temporel, l'expression (4.3.48) peut être analysée comme suit :

- Si $t \in]1,T]$, il en résulte que $|i-j+1| < tN$ et par la suite nous écrivons que:

$$\Delta R(i,j) = k_1 \varphi_H(i-j) + k_2 \varphi_{H+\frac{1}{2}}(i-j), \tag{4.3.49}$$

où la fonction φ est donnée par (4.2.45) et les constantes sont définies par:

$$k_1 = \frac{t}{2} \text{ et } k_2 = -c_H. \tag{4.3.50}$$

Une remarque intéressante, qu'on peut la rappeler, est que le comportement asymptotique de la fonction φ_H est décrit par:

$$\varphi_H(k) \ \sim_{k\to\infty} \ H(2H-1)|k|^{2H-2}, \tag{4.3.51}$$

avec le symbole " $\sim$ " indique que les deux côtés de l'expression (4.3.51) ont la même limite quand k tend vers ∞.

De point de vue probabiliste, nous notons que ceci nous permet de dire que lorsque le temps t est fixé dans $]1,T]$, les accroissements de la solution spatiale de l'EDPS des ondes (4.1.1) se comportent en quelques sorte comme une somme des accroissements d'un mBf B^H, modulo une constante, et des accroissements d'un mBf $B^{H+\frac{1}{2}}$, modulo une autre constante, sous la condition que le processus $B^{H+\frac{1}{2}}$, (s'il existera bien sûr!), est indépendant de B^H.

Regardons maintenant le deuxième cas.

- Si $t \in]0,1]$, différentes situations peuvent apparaître selon la valeur de tN et aussi selon la valeur de $2tN$, et par conséquent des calculs fastidieux en découlent. C'est pourquoi, il semble qu'il est un peu compliqué d'estimer la norme $L^2(\Omega)$ des accroissements spatiaux en utilisant l'approche (4.3.48), qui est basée principalement sur la structure de la fonction de covariance R^u.

Pour le reste de ce chapitre, on se restreint au cas $t \in]1,T]$. Nous désignons par $\mathcal{H}_u$ l'espace canonique de Hilbert associé au processus gaussien solution $(u(t,x))_{x\in\mathbb{R}}$. Cet espace de Hilbert est défini comme la fermeture de l'espace linéaire engendré par les fonctions indicatrices ξ_1 de la forme $\mathbb{1}_{[0,x]}$, $x > 0$, au sens du produit scalaire suivant:

$$\langle \mathbb{1}_{[0,x]}, \mathbb{1}_{[0,y]} \rangle_{\mathcal{H}_u} = \mathbf{E}\Big(u(t,x)u(t,y)\Big), \text{ avec } t \in]1,T] \text{ fixé.} \tag{4.3.52}$$

En utilisant les outils de calcul de Malliavin évoqués dans la Sous-section 3.3.1 du Chapitre 3, alors le processus solution spatiale $(u(t,x))_{x\in\mathbb{R}}$, avec $t \in]1,T]$, peut être identifié à un processus gaussien isonormal de type $(B(h))_{h\in\mathcal{H}^W}$. Aussi, nous indiquons par I_q, $q \geq 1$, l'intégrale multiple de Wiener par rapport au processus gaussien $(u(t,x))_{x\in\mathbb{R}}$, d'où pour tout $x < y$, l'accroissement spatial $u(t,y) - u(t,x)$ est égale à $I_1(\mathbb{1}_{[x,y]})$.

Dans ce qui suit, nous posons une renormalisation de la suite $(V_{f,N})_{N\geq 1}$, donnée par:

$$F_{f,N} = \frac{V_{f,N}}{\sqrt{v_N}}, \text{ avec } v_{f,N} = \mathbf{E}(V_{f,N}^2),\ N \geq 1, \tag{4.3.53}$$

et nous nous contentons de travailler pour le reste de ce chapitre avec cette suite $(F_{f,N})_{N\geq 1}$, car, pour tout $N \geq 1$, on a $\mathbf{E}(F_{f,N}^2) = 1$.

En se basant maintenant sur (4.3.48), nous mentionnons que pour $t \in]1,T]$ fixé, nous avons:

$$\mathbf{E}\Big(u(t,x_{j+1}) - u(t,x_j)\Big)^2 = \frac{k_1}{N^{2H}} + \frac{k_2}{N^{2H+1}}, \tag{4.3.54}$$

ce qui implique que la suite $(F_{f,N})_{N\geq 1}$ peut être représentée comme un élément du second chaos de Wiener, en faite:

$$\begin{aligned} F_{f,N} &= \frac{1}{\sqrt{v_{f,N}N}}\left[\frac{1}{\frac{k_1}{N^{2H}} + \frac{k_2}{N^{2H+1}}}\right]\sum_{j=0}^{N-1}\left[\left(u(t,\frac{j+1}{N}) - u(t,\frac{j}{N})\right)^2 - \mathbf{E}\left(u(t,\frac{j+1}{N}) - u(t,\frac{j}{N})\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{v_{f,N}N}}\left[\frac{1}{\frac{k_1}{N^{2H}} + \frac{k_2}{N^{2H+1}}}\right] I_2\left(\sum_{j=0}^{N-1}\mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}^{\otimes 2}\right) \\ &= \frac{N^{2H+\frac{1}{2}}}{\sqrt{v_{f,N}}(k_1 N + k_2)} I_2\left(\sum_{j=0}^{N-1}\mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}^{\otimes 2}\right) \\ &= I_2(f_N), \end{aligned} \tag{4.3.55}$$

où la fonction $f_N := \frac{N^{2H+\frac{1}{2}}}{\sqrt{v_{f,N}}(k_1 N + k_2)} \sum_{j=0}^{N-1}\mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}^{\otimes 2}$, pour tout $N \geq 1$.

Le lemme suivant montre que la suite déterministe positive $(v_{f,N})_{N\geq 1}$ converge, lorsque N tend vers ∞, vers une constante strictement positive. En effet, l'intervention de cette suite dans notre calcul n'a aucune influence sur le comportement limite de la suite des variations quadratiques renormalisées $(F_{f,N})_{N\geq 1}$, il s'agit juste d'une suite renormalisante qui assure que $\mathbf{E}({F_{f,N}}^2) = 1$.

Lemme 4.3.1 *Soit $H \in]\frac{1}{2},\frac{3}{4}[$ et $t \in]1,T]$, alors, il existe une constante $C_0 \in]0,\infty[$ tel que:*

$$v_{f,N} \rightarrow_{N\to\infty} C_0, \tag{4.3.56}$$

avec $C_0 := 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\varphi_H(k))^2$.

Preuve : À partir de l'expression (4.3.49) qui caractérise la corrélation entre deux accroissements spatiaux, nous trouvons que:

$$\begin{aligned}
v_{f,N} &:= \mathbf{E}({V_{f,N}}^2) \\
&= \frac{2N^{4H+1}}{(k_1N+k_2)^2}\sum_{i,j=0}^{N-1}\left[\mathbf{E}\left(\left(u(t,\frac{i+1}{N}) - u(t,\frac{i}{N})\right)\left(u(t,\frac{j+1}{N}) - u(t,\frac{j}{N})\right)\right)\right]^2 \\
&= \frac{2N^{4H+1}}{(k_1N+k_2)^2}\sum_{i,j=0}^{N-1}\left[k_1\frac{\varphi_H(i-j)}{N^{2H}} + k_2\frac{\varphi_{H+\frac{1}{2}}(i-j)}{N^{2H+1}}\right]^2 \\
&= 2k_1^2\frac{N^{4H+1}}{(k_1N+k_2)^2}\sum_{i,j=0}^{N-1}\left(\frac{\varphi_H(i-j)}{N^{2H}}\right)^2 \\
&\quad +4k_1k_2\frac{N^{4H+1}}{(k_1N+k_2)^2}\sum_{i,j=0}^{N-1}\frac{\varphi_H(i-j)}{N^{2H}}\frac{\varphi_{H+\frac{1}{2}}(i-j)}{N^{2H+1}} \\
&\quad +2k_2^2\frac{N^{4H+1}}{(k_1N+k_2)^2}\sum_{i,j=0}^{N-1}\left(\frac{\varphi_{H+\frac{1}{2}}(i-j)}{N^{2H+1}}\right)^2 \\
&:= T_1 + T_2 + T_3.
\end{aligned} \tag{4.3.57}$$

L'idée ici est de vérifier que le premier terme T_1 est le terme dominant de l'expression (4.3.57), et qu'il converge vers une limite finie, alors que les autres termes sont négligeables. De ce fait, en utilisant le Théorème de la convergence dominée, nous montrons que:

$$\begin{aligned}
T_1 &:= 2k_1^2\frac{N^{4H+1}}{(k_1N+k_2)^2}\sum_{i,j=0}^{N-1}\left(\frac{\varphi_H(i-j)}{N^{2H}}\right)^2 \\
&= \frac{2k_1^2N^2}{(k_1N+k_2)^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\varphi_H(k))^2\left(1-\frac{|k|}{N}\right)\mathbb{1}_{\{|k|<N\}} \\
&\rightarrow_{N\to\infty} 2\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\varphi_H(k))^2 = C_0.
\end{aligned} \tag{4.3.58}$$

Or, rappelons que la fonction φ_H se comporte, lorsque k est largement grand, comme la fonction $H(2H-2)|k|^{2H-2}$, alors ceci entraîne immédiatement que la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\varphi_H(k))^2$ est finie si et seulement si $H<\frac{3}{4}$. De plus, nous mentionnons que $C_0 \in]0,\infty[$ puisque $\varphi_H(0)=1$.

Passons au second terme T_2, nous vérifions que:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{4k_1k_2}{(k_1N+k_2)^2}\sum_{i,j=0}^{N-1}\varphi_H(i-j)\varphi_{H+\frac{1}{2}}(i-j) \\ &= \frac{4k_1k_2N}{(k_1N+k_2)^2}\sum_{k=0}^{N-1}\varphi_H(k)\varphi_{H+\frac{1}{2}}(k) \\ &\leq \frac{C}{N}\sum_{k=1}^{N}k^{4H-3}\rightarrow_{N\to\infty}0, \end{aligned} \tag{4.3.59}$$

où la limite ici est établie grâce au Lemme de Cesàro et à l'hypothèse que $H<\frac{3}{4}$.

D'une façon analogue à celle utilisée pour le terme T_2, nous prouvons que:

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{2k_2^2}{N(k_1N+k_2)^2}\sum_{i,j=0}^{N-1}\Big(\varphi_{H+\frac{1}{2}}(i-j)\Big)^2 \\ &= \frac{2k_2^2}{(k_1N+k_2)^2}\sum_{k=0}^{N-1}\Big(\varphi_{H+\frac{1}{2}}(k)\Big)^2 \\ &\leq \frac{C}{N^2}\sum_{k=1}^{N}k^{4H-2} \\ &\leq CN^{4H-3}\rightarrow_{N\to\infty}0. \end{aligned} \tag{4.3.60}$$

Finalement une fois ceci est vérifié, alors le résultat voulu est clairement aboutit. ■

Remarque 4.3.1 *L'apparition surprenante du seuil $H=\frac{3}{4}$ dans l'étude du comportement asymptotique de la suite normalisante $(v_{f,N})_{N\geq 1}$ est d'une importance capitale. Il nous prouve encore l'influence du mBf avec son indice de Hurst H sur les propriétés de processus solution spatiale, autre que la régularité qu'on a déjà vue dans la Remarque 4.1.1.*

À ce niveau, nous prévoyons l'apparition du seuil $H=\frac{3}{4}$ dans l'étude des variations quadratiques de processus solution. Ceci fera l'objet de la sous-section suivante.

4.3.2 Théorème Central Limite et vitesse de la convergence

Le but est le même que dans le cas classique, à savoir donner une caractérisation par une loi normale centrée réduite du comportement asymptotique de la suite des variations quadratiques renormalisée $(F_{f,N})_{N\geq 1}$. Notre approche pour la démonstration demeure toujours axé sur le calcul de Malliavin et les intégrales multiples de Wiener combinés avec l'inégalité classique de Berry-Esséen (méthode de Stein). Précisément notre outil principal est le TCL évoqué par le Théorème 5.2.6 de Nourdin et Peccatti [67]. Un rappel de ce dernier théorème est également donné dans le Théorème 3.3.1 du Chapitre 3.

Le théorème suivant annonce le second résultat notable de ce chapitre. Il sera considéré comme une généralisation de celui établi par le Théorème 3.3.2.

Théorème 4.3.1 *Soit $t \in]1,T]$ fixé et soit $H \in]\frac{1}{2},\frac{3}{4}[$, alors la suite des variables aléatoires $(F_{f,N})_{N\geq 1}$ donnée par (4.3.55) converge en distribution, quand $N \to \infty$, vers une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.*

De plus pour $N \geq 3$, il existe une constante $C > 0$ (qui dépend seulement de t et H) tel que:

$$d\left(F_{f,N};\mathcal{N}(0,1)\right) \leq C \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} & si\ H \in]\frac{1}{2},\frac{5}{8}[\\ \sqrt{\frac{\log^3 N}{N}} & si\ H = \frac{5}{8} \\ N^{4H-3} & si\ H \in]\frac{5}{8},\frac{3}{4}[. \end{cases} \tag{4.3.61}$$

avec d désigne l'une des distances de probabilités suivantes: Kolmogorov, Variation Total, Wasserstein.

Preuve : Le résultat voulu est établi lorsque nous vérifions les hypothèses du Théorème 3.3.1. Tout d'abord, nous rappelons que nous avons focalisé la suite renormalisée $(F_{f,N})_{N\geq 1}$ dans le deuxième chaos de Wiener puisque pour tout $N \geq 1$, nous avons montré que:

$$F_{f,N} = I_2(f_N)$$

avec $f_N = \frac{N^{2H+\frac{1}{2}}}{\sqrt{v_{f,N}(k_1N+k_2)}} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{1}^{\otimes 2}_{[x_j,x_{j+1}]} \in \mathcal{H}_u^{\odot 2}$ et $\mathbf{E}(F^2_{f,N}) = 1$.

Alors, il suffit maintenant d'estimer la quantité:

$$\mathbf{Var}\left(\frac{1}{2}\|DF_{f,N}\|^2_{\mathcal{H}_u}\right). \tag{4.3.62}$$

En vertu des résultats de calcul de Malliavin présentés dans la Sous-section 3.3.1, il en résulte que:

$$\begin{aligned}
&\|DF_{f,N}\|^2_{\mathcal{H}_u} - \mathbf{E}\Big(\|DF_{f,N}\|^2_{\mathcal{H}_u}\Big)\\
&= \frac{4N^{4H+1}}{v_{f,N}(k_1N+k_2)^2}\sum_{j,k=0}^{N-1}\left\langle \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]},\mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}\right\rangle_{\mathcal{H}_u} I_2\left(\mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}\otimes \mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}\right). \quad (4.3.63)
\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}\Big(\frac{1}{2}\|DF_{f,N}\|^2_{\mathcal{H}_u}\Big) &= \frac{1}{4}\mathbf{E}\Big(\|DF_{f,N}\|^2_{\mathcal{H}_u} - \mathbf{E}(\|DF_{f,N}\|^2_{\mathcal{H}_u})\Big)^2\\
&= \frac{4N^{8H+2}}{v^2_{f,N}(k_1N+k_2)^4}\sum_{i,j,k,l=0}^{N-1}\left\langle \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]},\mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}\right\rangle_{\mathcal{H}_u}\left\langle \mathbb{1}_{[x_i,x_{i+1}]},\mathbb{1}_{[x_l,x_{l+1}]}\right\rangle_{\mathcal{H}_u}\\
&\quad\times\left\langle \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]},\mathbb{1}_{[x_i,x_{i+1}]}\right\rangle_{\mathcal{H}_u}\left\langle \mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]},\mathbb{1}_{[x_l,x_{l+1}]}\right\rangle_{\mathcal{H}_u}\\
&= \frac{4N^{8H+2}}{v^2_{f,N}(k_1N+k_2)^4}\sum_{i,j,k,l=0}^{N-1}\left[k_1\frac{\varphi_H(j-k)}{N^{2H}} + k_2\frac{\varphi_{H+\frac{1}{2}}(j-k)}{N^{2H+1}}\right]\\
&\quad\times\left[k_1\frac{\varphi_H(i-l)}{N^{2H}} + k_2\frac{\varphi_{H+\frac{1}{2}}(i-l)}{N^{2H+1}}\right]\\
&\quad\times\left[k_1\frac{\varphi_H(j-i)}{N^{2H}} + k_2\frac{\varphi_{H+\frac{1}{2}}(j-i)}{N^{2H+1}}\right]\\
&\quad\times\left[k_1\frac{\varphi_H(k-l)}{N^{2H}} + k_2\frac{\varphi_{H+\frac{1}{2}}(k-l)}{N^{2H+1}}\right]\\
&:= \sum_{i=1}^{5} P_i. \qquad (4.3.64)
\end{aligned}$$

Où nous avons désigné par P_1 la quantité qui contient tous les termes de la forme d'un produit scalaire de quatre fonctions φ_H. Cependant, P_2 est constitué par tous les termes qui s'écrivent comme un produit scalaire d'une seule fonction φ_H et trois fonctions $\varphi_{H+\frac{1}{2}}$. Pour P_3, il est composé des termes qui représentent le produit scalaire de deux fonctions φ_H et deux fonctions $\varphi_{H+\frac{1}{2}}$. Quant à P_4, il comporte tous les termes de la forme d'un produit scalaire de trois fonctions φ_H et une seule fonction $\varphi_{H+\frac{1}{2}}$. Finalement, P_5 englobe tous les termes de la forme d'un produit scalaire de quatre fonctions $\varphi_{H+\frac{1}{2}}$.

Par la suite, nous allons mettre en évidence que le terme dominant de (4.3.64) est le premier terme P_1, et que le reste des termes sont négligeables par rapport à P_1. Afin de démontrer ce résultat, nous allons typiquement se référer à la preuve du Théorème 7.3.1 de [67].

Au préalable, nous posons pour tout $N \geq 1$, les fonctions ci-dessous:

$$\varphi_{H,N}(k) = |\varphi_H(k)| \mathbb{1}_{\{|k| \leq N-1\}}, \tag{4.3.65}$$

et

$$\varphi_{H+\frac{1}{2},N}(k) = |\varphi_{H+\frac{1}{2}}(k)| \mathbb{1}_{\{|k| \leq N-1\}}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}. \tag{4.3.66}$$

Une fois ceci est posé, nous passons à l'interprétation des $(P_i)_{1 \leq i \leq 5}$ terme par terme.

Concernant le premier terme, nous comptons le majorer de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{4k_1^4 N^{8H+2}}{v_{f,N}^2 (k_1 N + k_2)^4} \sum_{i,j,k,l=0}^{N-1} \frac{\varphi_H(j-k)\varphi_H(i-l)\varphi_H(j-i)\varphi_H(k-l)}{N^{8H}} \\
&\leq \frac{4k_1^4 N^2}{v_f^2, N (k_1 N + k_2)^4} \sum_{i,k=0}^{N-1} \sum_{j,l \in \mathbb{Z}} \varphi_{H,N}(j-k)\varphi_{H,N}(i-l)\varphi_{H,N}(j-i)\varphi_{H,N}(k-l) \\
&\leq \frac{C}{N^2} \sum_{i,k=0}^{N-1} (\varphi_{H,N} * \varphi_{H,N})^2 (k-i) \\
&= \frac{C}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\varphi_{H,N} * \varphi_{H,N})^2 (k) \\
&= \frac{C}{N} \|\varphi_{H,N} * \varphi_{H,N}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 .
\end{aligned}$$

L'application de l'inégalité de Young pour $s = 2$ et $p = q = \frac{4}{3}$, nous donne facilement:

$$\begin{aligned}
P_1 &\leq \frac{C}{N} \|\varphi_{H,N}\|_{\ell^{\frac{4}{3}}(\mathbb{Z})}^4 \\
&= \frac{C}{N} \Big(\sum_{k=1-N}^{N-1} |\varphi_H(k)|^{\frac{4}{3}} \Big)^3 .
\end{aligned}$$

Rappelons que la fonction φ_H se comporte, quand $|k|$ tend vers ∞, comme la fonction $C|k|^{2H-2}$, alors il est possible d'établir l'estimation suivante qui sera par la suite la clé de voûte pour le reste de notre raisonnement,

$$\sum_{k=1-N}^{N-1} |\varphi_H(k)|^{\frac{4}{3}} = \begin{cases} O(1) & \text{si } H \in]0, \frac{5}{8}[\\ O(\log N) & \text{si } H = \frac{5}{8} \\ O(N^{\frac{8H-5}{3}}) & \text{si } H \in]\frac{5}{8}, 1[. \end{cases} \tag{4.3.67}$$

Or comme le Lemme 4.3.1 nous renseigne que $v_{f,N}$ tend vers $C_0 \in]0,\infty[$ seulement pour $H \in]\frac{1}{2},\frac{3}{4}[$, alors nous déduisons que:

$$P_1 \leq C \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{si } H \in]\frac{1}{2},\frac{5}{8}[\\ \frac{(\log N)^3}{N} & \text{si } H = \frac{5}{8} \\ N^{8H-6} & \text{si } H \in]\frac{5}{8},\frac{3}{4}[. \end{cases} \tag{4.3.68}$$

Regardons maintenant les autres termes. En effet, en utilisant le même type d'arguments que précédemment, nous montrons le résultat suivant:

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{4k_1k_2^3N^{8H+2}}{v_{f,N}^2(k_1N+k_2)^4}\sum_{i,j,k,l=0}^{N-1}\frac{\varphi_H(j-k)\varphi_{H+\frac{1}{2}}(i-l)\varphi_{H+\frac{1}{2}}(j-i)\varphi_{H+\frac{1}{2}}(k-l)}{N^{8H+3}} \\ &\leq \frac{4k_1k_2^3}{v_{f,N}^2(k_1N+k_2)^4N}\sum_{i,k=0}^{N-1}\sum_{j,l\in\mathbb{Z}}\varphi_{H,N}(j-k)\varphi_{H+\frac{1}{2},N}(i-l)\varphi_{H+\frac{1}{2},N}(j-i)\varphi_{H+\frac{1}{2},N}(k-l) \\ &\leq \frac{C}{N^4}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\varphi_{H,N}*\varphi_{H+\frac{1}{2},N})(k)(\varphi_{H+\frac{1}{2},N}*\varphi_{H+\frac{1}{2},N})(k) \\ &\leq \frac{C}{N^4}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\varphi_{H,N}*\varphi_{H+\frac{1}{2},N})^2(k)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\varphi_{H+\frac{1}{2},N}*\varphi_{H+\frac{1}{2},N})^2(k)\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{C}{N^4}\|\varphi_{H,N}*\varphi_{H+\frac{1}{2},N}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}\|\varphi_{H+\frac{1}{2},N}*\varphi_{H+\frac{1}{2},N}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \\ &\leq \frac{C}{N^4}\|\varphi_{H,N}\|_{\ell^{\frac{4}{3}}(\mathbb{Z})}\|\varphi_{H+\frac{1}{2},N}\|^3_{\ell^{\frac{4}{3}}(\mathbb{Z})} \\ &= \frac{C}{N^4}\Big(\sum_{k=1-N}^{N-1}|\varphi_H(k)|^{\frac{4}{3}}\Big)^{\frac{3}{4}}\Big(\sum_{k=1-N}^{N-1}|\varphi_{H+\frac{1}{2}}(k)|^{\frac{4}{3}}\Big)^{\frac{9}{4}}. \end{aligned}$$

Dû au résultat (4.3.67) et aussi au comportement asymptotique de la fonction $\varphi_{H+\frac{1}{2}}$, qui assure que $\frac{1}{N^4}\Big(\sum_{k=1-N}^{N-1}|\varphi_{H+\frac{1}{2}}(k)|^{\frac{4}{3}}\Big)^{\frac{9}{4}} \leq CN^{6H-\frac{19}{4}}$, nous obtenons directement que, pour tout $N \geq 3$,

$$P_2 \leq C \begin{cases} N^{6H-\frac{19}{4}} & \text{si } H \in]\frac{1}{2},\frac{5}{8}[\\ (\log N)^{\frac{3}{4}}N^{6H-\frac{19}{4}} & \text{si } H = \frac{5}{8} \\ N^{8H-6} & \text{si } H \in]\frac{5}{8},\frac{3}{4}[. \end{cases} \Rightarrow \leq C \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{si } H \in]\frac{1}{2},\frac{5}{8}[\\ \frac{(\log N)^3}{N} & \text{si } H = \frac{5}{8} \\ N^{8H-6} & \text{si } H \in]\frac{5}{8},\frac{3}{4}[. \end{cases} \tag{4.3.69}$$

Par analogie avec le terme P_2, nous trouvons que:

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{4k_1^2k_2^2N^{8H+2}}{v_{f,N}^2(k_1N+k_2)^4}\sum_{i,j,k,l=0}^{N-1}\frac{\varphi_H(j-k)\varphi_H(i-l)\varphi_{H+\frac12}(j-i)\varphi_{H+\frac12}(k-l)}{N^{8H+2}} \\ &\leq \frac{C}{N^3}\Big(\sum_{k=1-N}^{N-1}|\varphi_H(k)|^{\frac43}\Big)^{\frac32}\Big(\sum_{k=1-N}^{N-1}|\varphi_{H+\frac12}(k)|^{\frac43}\Big)^{\frac32}, \end{aligned}$$

et comme l'inégalité $\frac{1}{N^3}\Big(\sum_{k=1-N}^{N-1}|\varphi_{H+\frac12}(k)|^{\frac43}\Big)^{\frac32} \leq CN^{4H-\frac72}$ est justifiée, alors nous pouvons écrire que, pour tout $N\geq 3$,

$$P_3 \leq C\begin{cases} N^{4H-\frac72} & \text{si } H\in]\frac12,\frac58[\\ (\log N)^{\frac32}N^{4H-\frac72} & \text{si } H=\frac58 \\ N^{8H-6} & \text{si } H\in]\frac58,\frac34[. \end{cases} \Rightarrow\leq C\begin{cases} \frac1N & \text{si } H\in]\frac12,\frac58[\\ \frac{(\log N)^3}{N} & \text{si } H=\frac58 \\ N^{8H-6} & \text{si } H\in]\frac58,\frac34[. \end{cases} \quad (4.3.70)$$

Mêmement,

$$\begin{aligned} P_4 &= \frac{4k_1^3k_2N^{8H+2}}{v_{f,N}^2(k_1N+k_2)^4}\sum_{i,j,k,l=0}^{N-1}\frac{\varphi_H(j-k)\varphi_H(i-l)\varphi_H(j-i)\varphi_{H+\frac12}(k-l)}{N^{8H+1}} \\ &\leq \frac{C}{N^2}\Big(\sum_{k=1-N}^{N-1}|\varphi_H(k)|^{\frac43}\Big)^{\frac94}\Big(\sum_{k=1-N}^{N-1}|\varphi_{H+\frac12}(k)|^{\frac43}\Big)^{\frac34}. \end{aligned}$$

Notons que la série $\frac{1}{N^2}\Big(\sum_{k=1-N}^{N-1}|\varphi_{H+\frac12}(k)|^{\frac43}\Big)^{\frac34} \leq N^{2H-\frac94}$, donc il en découle que, pour tout $N\geq 3$,

$$P_4 \leq C\begin{cases} N^{2H-\frac94} & \text{si } H\in]\frac12,\frac58[\\ (\log N)^{\frac94}N^{2H-\frac94} & \text{if } H=\frac58 \\ N^{8H-6} & \text{si } H\in]\frac58,\frac34[. \end{cases} \Rightarrow\leq C\begin{cases} \frac1N & \text{si } H\in]\frac12,\frac58[\\ \frac{(\log N)^3}{N} & \text{si } H=\frac58 \\ N^{8H-6} & \text{si } H\in]\frac58,\frac34[. \end{cases} \quad (4.3.71)$$

En dernier lieu, en étudiant le terme P_5, nous affirmons que:

$$\begin{aligned} P_5 &= \frac{4k_2^4N^{8H+2}}{v_{f,N}^2(k_1N+k_2)^4}\sum_{i,j,k,l=0}^{N-1}\frac{\varphi_{H+\frac12}(j-k)\varphi_{H+\frac12}(i-l)\varphi_{H+\frac12}(j-i)\varphi_{H+\frac12}(k-l)}{N^{8H+4}} \\ &\leq \frac{C}{N^5}\Big(\sum_{k=1-N}^{N-1}|\varphi_{H+\frac12}(k)|^{\frac43}\Big)^{3} \\ &\leq CN^{8H-6}. \end{aligned}$$

Grâce au fait que $N^{8H-6} \leq \frac{1}{N}$ pour tout $H \in]\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]$, il en résulte que, pour tout $N \geq 3$,

$$P_5 \leq C \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{si } H \in]\frac{1}{2}, \frac{5}{8}[\\ \frac{(\log N)^3}{N} & \text{si } H = \frac{5}{8} \\ N^{8H-6} & \text{si } H \in]\frac{5}{8}, \frac{3}{4}[, \end{cases} \tag{4.3.72}$$

Finalement, les résultats (4.3.68)-(4.3.72) regroupés ensemble dans (4.3.64) engendrent directement la conclusion suivante:

$$\begin{aligned} d\left(F_{f,N}; \mathcal{N}(0,1)\right) &\leq C \sqrt{\mathbf{Var}\left(\frac{1}{2}\|DF_{f,N}\|^2_{\mathcal{H}_u}\right)} \\ &\leq C \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} & \text{si } H \in]\frac{1}{2}, \frac{5}{8}[\\ \sqrt{\frac{\log^3 N}{N}} & \text{si } H = \frac{5}{8} \\ N^{4H-3} & \text{si } H \in]\frac{5}{8}, \frac{3}{4}[. \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui vérifie le théorème. ■

Remarques 4.3.1 • *Ce dernier théorème a bien prouvé l'influence remarquable du bruit fractionnaire présenté par le mBf sur la solution spatiale de l'EDPS des ondes. Ce résultat -conformément à nos intentions- montre que pour* $H \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$*, les variations quadratiques de* B^H *et les variations quadratiques spatiales de la solution (4.1.6) ont le même comportement limite. En effet, dû à [67], nous savons que la suite des variations quadratiques du mBf* $(B^H_t)_{t\geq 0}$ *depend principalement du seuil* $H = \frac{3}{4}$*, et elle satisfait un TCL pour* $H \leq \frac{3}{4}$ *(pour* $H > \frac{3}{4}$ *elle vérifie un théorème limite non central en convergeant vers un processus de Rosenblatt). Il en résulte de plus, que les suites des variations quadratiques pour les deux processus (mbf et solution spatiale) possèdent (à constante près) la même vitesse de convergence vers une loi normale centrée réduite, avec la même caractérisation du seuil* $H = \frac{5}{8}$.

• *L'aspect intéressant de ce théorème réside dans le fait que, bien que le côté fractionnaire est uniquement pour l'indice temporel du bruit* W^H *et bien que notre étude se fait que à temps fixe et à espace variable, il est clair que certaines propriétés fractionnaires sont transmises vers le processus solution spatiale.*

• *Une version discrète du Théorème 4.3.1 peut être consultée dans [67]. En faite, ils ont étudié le comportement asymptotique de la suite discrète gaussienne stationnaire*

$\left(\frac{v_t(k)}{\sqrt{\mathbf{E}(v_t(k)^2)}}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$, *où* $v_t(k) := u(t,k+1) - u(t,k)$, $k \in \mathbb{Z}$, *cette suite s'identifie à la normalisation du bruit engendré par le processus solution spatiale de notre EDPS (4.1.1).*

Dans la sous-section suivante nous énonçons une amélioration du TCL, c'est le TCL presque sûr.

4.3.3 Théorème Central Limite Presque Sûr

D'une façon pareille à celle faite pour le cas d'un bruit classique, nous visons lors de cette partie à établir le TCL presque sûr pour la suite des variations quadratiques renormalisée $(F_{f,N})_{N\geq 1}$. C'est grâce aux nouveaux critères établis par Ibragimov et Lifshits [36], puis par Bercu, Nourdin et Taqqu [9], et conformément à ce que nous avons indiqué dans la Sous-section 3.3.4 du Chapitre 3, notamment le Théorème 3.3.3, nous obtenons le résultat suivant illustré par le théorème ci-dessous.

Théorème 4.3.2 *Soient* $t \in]1,T]$ *fixé et* $H \in]\frac{1}{2},\frac{3}{4}[$, *alors la suite* $(F_{f,N})_{N\geq 1}$ *donnée par (4.3.55), satisfait, lorsque* $N \to \infty$, *le TCL presque sûr.*

Preuve : Étant donné que les variables aléatoires de la suite $(F_{f,N})_{N\geq 1}$ sont des éléments du deuxième chaos de Wiener, alors nous avons juste besoin de vérifier que les deux conditions (A_1) and (A_2) du Théorème 3.3.3 sont satisfaites.

D'après (4.3.55), rappelons que pour tout $l \geq 1$, la fonction f_l est définie par:

$$f_l := \frac{l^{2H+\frac{1}{2}}}{\sqrt{v_{f,N}}(k_1 l + k_2)} \sum_{j=0}^{l-1} \mathbb{1}^{\otimes 2}_{[x_j,x_{j+1}]}.$$

Ensuite, nous notons que la contraction d'ordre 1 entre les fonctions f_l est exprimée par:

$$\begin{aligned} f_l \otimes_1 f_l &= \frac{l^{4H+1}}{v_{f,N}(k_1 l + k_2)^2} \sum_{j,k=0}^{l-1} \mathbb{1}^{\otimes 2}_{[x_j,x_{j+1}]} \otimes_1 \mathbb{1}^{\otimes 2}_{[x_k,x_{k+1}]} \\ &= \frac{l^{4H+1}}{v_{f,N}(k_1 l + k_2)^2} \sum_{j,k=0}^{l-1} \langle \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}, \mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]} \rangle_{\mathcal{H}_u} \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]} \otimes \mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}. \end{aligned} \tag{4.3.73}$$

Ainsi, ceci nous permet de trouver que:

$$\begin{aligned} \|f_l \otimes_1 f_l\|^2_{\mathcal{H}_u^{\otimes 2}} &= \frac{l^{8H+2}}{v^2_{f,N}(k_1 l + k_2)^4} \sum_{j,k,m,p=0}^{l-1} \langle \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}, \mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]} \rangle_{\mathcal{H}_u} \langle \mathbb{1}_{[x_m,x_{m+1}]}, \mathbb{1}_{[x_p,x_{p+1}]} \rangle_{\mathcal{H}_u} \\ &\quad \times \langle \mathbb{1}_{[x_j,x_{j+1}]}, \mathbb{1}_{[x_m,x_{m+1}]} \rangle_{\mathcal{H}_u} \langle \mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1}]}, \mathbb{1}_{[x_p,x_{p+1}]} \rangle_{\mathcal{H}_u} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{l^{8H+2}}{v_{f,N}^2(k_1 l+k_2)^4} \sum_{j,k,m,p=0}^{l-1} \left[k_1 \frac{\varphi_H(j-k)}{N^{2H}} + k_2 \frac{\varphi_{H+\frac{1}{2}}(j-k)}{N^{2H+1}} \right] \\
&\quad \times \left[k_1 \frac{\varphi_H(m-p)}{N^{2H}} + k_2 \frac{\varphi_{H+\frac{1}{2}}(m-p)}{N^{2H+1}} \right] \left[k_1 \frac{\varphi_H(j-m)}{N^{2H}} + k_2 \frac{\varphi_{H+\frac{1}{2}}(j-m)}{N^{2H+1}} \right] \\
&\quad \times \left[k_1 \frac{\varphi_H(k-p)}{N^{2H}} + k_2 \frac{\varphi_{H+\frac{1}{2}}(k-p)}{N^{2H+1}} \right] \\
&\leq \frac{l^{8H+2}}{v_{f,N}^2(k_1 l+k_2)^4} \sum_{j,k,m,p=0}^{l-1} \left[k_1 \frac{\varphi_H(j-k)}{l^{2H}} + k_2 \frac{\varphi_{H+\frac{1}{2}}(j-k)}{l^{2H+1}} \right] \\
&\quad \times \left[k_1 \frac{\varphi_H(m-p)}{l^{2H}} + k_2 \frac{\varphi_{H+\frac{1}{2}}(m-p)}{l^{2H+1}} \right] \left[k_1 \frac{\varphi_H(j-m)}{l^{2H}} + k_2 \frac{\varphi_{H+\frac{1}{2}}(j-m)}{l^{2H+1}} \right] \\
&\quad \times \left[k_1 \frac{\varphi_H(k-p)}{l^{2H}} + k_2 \frac{\varphi_{H+\frac{1}{2}}(k-p)}{l^{2H+1}} \right]. \qquad (4.3.74)
\end{aligned}
$$

En effectuant le même raisonnement que celui dans la preuve du Théorème 4.3.1, nous obtenons immédiatement que:

$$
\|f_l \otimes_1 f_l\|_{\mathcal{H}_u^{\otimes 2}} \leq C \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{l}} & \text{si } H \in]\frac{1}{2}, \frac{5}{8}[\\ \frac{(\log l)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{l}} & \text{si } H = \frac{5}{8} \\ l^{4H-3} & \text{si } H \in]\frac{5}{8}, \frac{3}{4}[, \end{cases} \qquad (4.3.75)
$$

ce qui implique que, pour tout $H \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$, nous concluons que:

$$
\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\|f_l \otimes_1 f_l\|_{\mathcal{H}_u^{\otimes 2}}}{l} < \infty. \qquad (4.3.76)
$$

En clair, ceci entraîne la vérification de la première condition (A_1).

Passons maintenant à établir la deuxième condition (A_2), donc pour tous l, $m \geq 1$, nous écrivons que:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big(F_{f,m} F_{f,l}\Big) \\
&= 2\langle f_m, f_l \rangle_{\mathcal{H}_u^{\otimes 2}} \\
&= \frac{2 l^{2H+\frac{1}{2}} m^{2H+\frac{1}{2}}}{v_N(k_1 l+k_2)(k_1 m+k_2)} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{p=0}^{l-1} \langle \mathbb{1}_{[x_j, x_{j+1}]}, \mathbb{1}_{[x_p, x_{p+1}]} \rangle_{\mathcal{H}_u}^2 \\
&= \frac{2 l^{2H+\frac{1}{2}} m^{2H+\frac{1}{2}}}{v_N(k_1 l+k_2)(k_1 m+k_2)} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{p=0}^{l-1} \left[k_1 \frac{\varphi_H(j-p)}{N^{2H}} + k_2 \frac{\varphi_{H+\frac{1}{2}}(j-p)}{N^{2H+1}} \right]^2 \qquad (4.3.77)
\end{aligned}
$$

D'où, grâce à la démonstration du Théorème 4.3.1, il en résulte que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big(F_{f,m}F_{f,l}\Big) &\leq C\frac{l^{2H+\frac{1}{2}}m^{2H+\frac{1}{2}}}{lm}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{p=0}^{l-1}\frac{\Big(\varphi_H(j-p)\Big)^2}{N^{4H}} \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{ml}}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{p=0}^{l-1}\Big(\varphi_H(j-p)\Big)^2 \\
&= C\sqrt{\frac{l}{m}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\varphi_H(k)\Big)^2 \\
&\leq C\sqrt{\frac{l}{m}}, \qquad (4.3.78)
\end{aligned}$$

ceci est vrai, car pour tout $H<\frac{3}{4}$, la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\varphi_H(k)\Big)^2<\infty$.

En vertu de la Remarque 3.3 de [9], le résultat (4.3.78) implique facilement la condition (A_2), et par conséquent la preuve est achevée. ∎

4.4 Estimation du paramètre de Hurst H

En guise d'application, nous donnons dans cette partie l'intérêt réel de l'étude asymptotique des variations quadratiques. Bien évidemment, il est connu que les variations d'un processus stochastique jouent un rôle marquant dans son analyse probabiliste et statistique. Proprement dit, leur étude asymptotique est considérée comme un outil fondamental dans la théorie d'estimation et dans la construction des estimateurs.

De ce fait, nous allons montrer ici que le comportement limite de la suite $(V_{f,N})_{N\geq 1}$ définie par (4.3.46), est fortement lié aux propriétés asymptôtiques d'une classe des estimateurs du paramètre de Hurst H. En réalité, l'estimation de H est d'une importance notable car ce paramètre nous renseigne sur plein des propriétés tels que: la mémoire longue, l'indice d'auto-similarité, la régularité trajectorielle, la nature de la dépendance entre les accroissements, le TCL pour le mBf, et aussi, comme nous avons déjà prouvé, elle nous renseigne sur la régularité et le TCL pour la solution spatiale.

Alors, notre motivation est d'estimer le paramètre de Hurst H du bruit fractionnaire W^H qui dirige l'EDPS des ondes (4.1.1). La méthode classique d'estimation, qui peut être vue dans [21] et ses références, consiste à construire l'estimateur en se basant sur les observations spatiales des variations quadratiques de processus solution $(u(t,x))_{x\in[0,1]}$.

Soit $t \in]1,T]$ fixé, nous considèrons la séquence $u(t,\frac{j}{N})$, $j = 0,\ldots,N$, $N \geq 1$, et nous posons donc la suite suivante:

$$S_N := \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left(u(t,\frac{j+1}{N}) - u(t,\frac{j}{N})\right)^2 \tag{4.4.79}$$

Ceci donne directement que:

$$\begin{aligned} A_N &:= \mathbf{E}\Big(S_N\Big) \\ &= \frac{k_1}{N^{2H}} + \frac{k_2}{N^{2H+1}} \\ &= \frac{k_1}{N^{2H}}\left(1 + \frac{k_2}{k_1 N}\right) \end{aligned} \tag{4.4.80}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \log A_N &= \log \mathbf{E}\Big(S_N\Big) \\ &= \log k_1 - 2H\log N + \log\left(1 + \frac{k_2}{k_1 N}\right) \\ &\sim \log k_1 - 2H\log N, \text{ quand } N \to \infty. \end{aligned} \tag{4.4.81}$$

En se basant essentiellement sur l'expression de S_N, nous construisons l'estimateur suivant:

$$\widehat{H}_N = \frac{-\log S_N + \log k_1}{2\log N}. \tag{4.4.82}$$

Or notons que, pour tout $N \geq 1$, la série S_N peut être ré-écrite comme suit:

$$S_N = A_N\left(1 + \frac{V_{f,N}}{\sqrt{N}}\right), \tag{4.4.83}$$

alors, en appliquant le fait que $\log(1+x) \sim x$, pour x proche de 0, nous obtenons aisément que:

$$\log S_N \sim \log A_N + \frac{V_{f,N}}{\sqrt{N}}, \text{ quand } N \to \infty. \tag{4.4.84}$$

D'où, l'expression (4.4.82) combinée avec les résultats (4.4.84) et (4.4.81), nous permet de trouver que:

$$H - \widehat{H}_N \sim \frac{V_{f,N}}{2\sqrt{N}\log N}, \text{ quand } N \to \infty. \tag{4.4.85}$$

Une déduction immédiate à partir de l'approximation (4.4.85), est que le comportement de la suite $(V_{f,N})_{N\geq 1}$, nous renseigne directement sur le comportement de $H - \widehat{H}_N$, ceci sera mis en évidence par la proposition suivante.

Proposition 4.4.1 *Soit $H \in]\frac{1}{2},\frac{3}{4}[$, alors $\widehat{H}_N$ défini par (4.4.82), est un estiamteur fortement consistant du paramètre de Hurst H, c'est à dire que:*

$$\widehat{H}_N \to_{N\to\infty} H, \text{ presque sûrement.} \tag{4.4.86}$$

De plus, $\widehat{H}_N$ est aussi un estimateur asymptôtiquement normal puisque:

$$\frac{2\sqrt{N}\log N}{\sqrt{v_{f,N}}}(H - \widehat{H}_N) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1). \tag{4.4.87}$$

Preuve : Il s'agit d'un regroupement des résultats que nous avons déjà trouvé. En effet, à l'aide du Lemme de Borel-Cantelli, nous pouvons vérifier que, lorsque N tend vers ∞, la suite $(V_{f,N})_{N\geq}$ converge presque sûrement vers 0, alors d'après la relation (4.4.85), il en résulte que l'estimateur $\widehat{H}_N$ est fortement consistant. Un raisonnement pareil peut être trouvé dans la démonstration de la Proposition 5 de [82].

Concernant la vérification de la normalité asymptotique de cet estimateur, il s'agit donc d'une simple déduction dégagée à partir du Théorème 4.3.1 qui a établi un TCL pour la suite $(V_{f,N})_{N\geq 1}$. ■

4.5 Interprétation Statistique

Nous considérons une corde étroitement tendue sans pente. Soit x un point sur la corde à l'instant $t = 0$, c'est-à-dire à la position d'équilibre. Quand la corde vibre, nous pouvons supposer que le déplacement horizontal du point x est négligeable, ceci est due à l'absence des pentes. Donc $u(t,x)$ représente la position de la corde vibrante à l'instant t et au point x, sous le forçage aléatoire W^H (le bruit gaussien blanc par rapport à l'espace et fractionnaire par rapport au temps).

Par conséquent, les observations $u(t,x_i)$, $i = 0,\ldots,N$, signifient que dans un certain moment $t > 1$, nous pouvons détecter la position de la corde au point x_i, ce qui semble raisonnable du point de vue pratique. Il convient également de noter que seulement à partir des observations discrètes à un temps quelconque arbitraire, il est possible d'obtenir une estimation du paramètre de Hurst H, et par la suite une estimation de l'indice d'auto-similarité du processus temporel $(u(t,x))_{t\geq 0}$ qui est un processus auto-similaire d'indice $H+\frac{1}{2}$. Nous rappelons ainsi, que d'après la section précédente, cet estimateur était fortement consistant et asymptôtiquement normal.

Perspectives

Compte tenu des applications en physique, mathématiques financières, mécanique, etc..., le domaine des équations différentielles partielles stochastiques est en plein essor et l'amélioration des nouvelles méthodes de calcul stochastique pour l'analyse de processus solution l'est tout autant. Les deux derniers chapitres de ce travail auraient montré -nous l'espérons- l'importance de ce sujet, mais réellement une liste non-négligeable de problèmes ouverts reste à traiter. Dans la continuité directe de cette thèse, nous espérons caractériser le comportement asymptotique des variations quadratiques de la solution spatiale fractionnaire lorsque l'indice de Hurst sera au delà de $H \in]\frac{3}{4},1[$ et le temps $t \in]0,1]$. En effet, pour le cas des variations quadratiques du mouvement brownien fractionnaire, divers auteurs ont prouvé la non-normalité asymptotique lorsque $H \in]\frac{3}{4},1[$, et ils ont même trouvé des solutions pour éviter l'absence de la gaussianité en utilisant la notion de "*longer filters*". Aussi, il est possible de voir les variations d'ordre supérieur de la solution (4.1.6) en variant simultanément le temps et l'espace.

Également, ces travaux de thèse peuvent être continués et étendus de différentes manières, par exemple il y a la possibilité d'étudier l'EDPS des ondes en imposant d'autres types de bruits tels que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire, processus transformée de Lamperti du bruit spatio-temporel ou de bruit blanc-fractionnaire,.... Il semble aussi intéressent de s'écarter du cas ou le bruit perturbateur est gaussien, en imposant un bruit non-gaussien: un processus d'Hermite d'ordre $k \geq 2$, nous pensons que cette situation devient beaucoup plus épineuse surtout du point de vue calcul exact de la fonction de covariance de la solution.

Finalement, les pistes de recherche en ce qui concerne ces EDSPs sont nombreuses, et elles peuvent être toujours diversifiées.

Résumé

Cette thèse est divisée en quatre chapitres distincts, ayant comme dénominateur commun l'analyse stochastique de certains champs gaussiens. Les processus stochastiques multiparamétriques qui apparaissent dans ce manuscrit sont généralement auto-similaires. L'auto-similarité est la propriété que certains processus stochastiques préservent leur loi (sous certaine renormalisation) après un changement d'échelle du temps. Dans une première partie, nous avons mis en évidence des nouveaux aspects du drap brownien fractionnaire (dBf) en utilisant essentiellement la notion de la transformation de Lamperti. Un focus sur l'équation différentielle stochastique (EDS) vérifiée par cette transformée, a été aussi évoqué. Dans une deuxième partie, nous avons analysé le comportement asymptotique en loi des variations quadratiques spatiales des processus qui sont des solutions de deux types d'équations différentielles stochastiques partielles (EDPS) des ondes perturbées par deux sortes des bruits gaussiens auto-similaires: bruit blanc en espace-temps, et bruit fractionnaire en temps et blanc en espace. L'outil principal de notre raisonnement était des nouveaux critères basés sur le calcul stochastique de Malliavin et combinés avec la méthode classique de Stein. En guise d'application, nous avons construit un estimateur de l'indice de Hurst H du bruit fractionnaire en se basant sur les variations quadratiques étudiées.

Mots clés:

Auto-similarité; mouvement brownien fractionnaire; mouvement brownien; drap brownien fractionnaire; drap brownien; transformation de Lamperti; intégrale de Young; équation de Langevin; équation stochastique des ondes; bruit blanc; bruit fractionnaire; variation quadratique; calcul de Stein-Malliavin; théorème central limite; théorème central limite presque sûr.

Abstract

This thesis is divided into four distinct chapters with a common denominator which is the stochastic analysis of some Gaussian fields. The multi-parameter stochastic processes that appeared in this manuscript are generally self-similar. Self-similarity is the property that a stochastic process preserves its law (under a suitable renormalization) after a scaling of time. Firstly, we deduced new aspects of the fractional Brownian sheet (fBs), using essentially the notion of the Lamperti transform. A Focus on the stochastic differential equation (SDE) verified by this transform sheet was also mentioned. Secondly, we analyzed the asymptotic behavior of the spatial quadratic variations of processes that are solutions of two types of stochastic wave equations perturbed by two kinds of self-similar Gaussian noises: white noise in space-time, and fractional noise in time and white in space. The main tool in our reasoning was new criteria based on the Malliavin calculus and combined with the classical method of Stein. As an application, we constructed, by the aid of the quadratic variations, an estimator of the Hurst index H of the fractional noise.

Keywords:

Self-similarity; fractional Brownian motion; Brownian motion; fractional Brownian sheet; Brownian sheet; Lamperti transform; Young integral; Langevin equation; Stochastic wave equation; white noise; fractional noise; Quadratic variation; Stein-Malliavin calculus; central limit theorem; Almost sure central limit theorem.

Bibliographie

[1] Arcones, M. (1995). On the law of the iterated logarithm for Gaussian processes. *Journal of Theoretical Probability*, **8**(4), 877-903.

[2] Ayache, A., Leger, S. et Pontier, M. (2002). Drap brownien fractionnaire. *Potential Analysis*, **17**(1), 31-43.

[3] Ayache, A. et Taqqu, M. S. (2003). *J. Fourier Anal. Appl.*, **451**(9).

[4] Azmoodeh, E., Sottinen, T., Viitasaari, L. et Yazigi, A. (2014). Necessary and sufficient conditions for Hölder continuity of Gaussian processes. *Statistics and Probability Letters*, **94**, 230-235.

[5] Balan, R. M. et Tudor, C. A. (2010). The stochastic wave equation with Fractional colored noise: a random field approach. *Stoch. Process. Appl.*, **120**, 2468-2494.

[6] Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E. et Trujillo, J. J. (2012). Fractional calculus: Models and numerical methods. Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos. *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ.*

[7] Barnett, A. H. (2006). Greens Functions for the Wave Equation. *online note*. Disponible sur: **https://math.dartmouth.edu/ ahb/pubs.html**

[8] Baxevani, A. et Podgórski, K. (2009). Series decomposition of Fractional Brownian motion and its Lamperti transform. *Acta Physica Polonica B,* **40**(5), 1395-1435.

[9] Bercu, B., Nourdin, I. et Taqqu, M. (2010). Almost sure central limit theorems on the Wiener space. *Stochastic Process. Appl.*, **120**(9), 1607-1628.

[10] Berman, S. (1973). Local non deterministic and local times of Gaussian processes. *Indiana Journal of Math.*, **23**, 69-94.

[11] Biermé, H. (2005). Champs aléatoires: autosimilarité, anisotropie et étude directionnelle. *Thèse*, Orléans.

[12] Bingham, N. H., Goldie, C. M. et Teugels, J. L. (1989). Regular variation. *Cambridge University Press*, Cambridge.

[13] Bishwal, J. N. (2011). Minimum contrast estimation in fractional Ornstein-Uhlenbeck process: Continuous and discrete sampling. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **14**(3), 375-410; DOI: 10.2478/s13540-011-0024-6.

[14] Bonami, A. et Estrade, A. (2003). Anisotropic analysis of some Gaussian models. *J. Fourier Anal. Appl.* **9**, 215-236.

[15] Breuer, P. et Major, P. (1983). Central limit theorems for non-linear functionals of Gaussian fields. *J. Mult. Anal.* **13**, 425-441.

[16] Cabana, E. (1970). The vibrating string forced by white noise. *Wahrscheinlichkeits, Z. theorie Verw. Geb.*, **15**, 111-130.

[17] Chaumont, L. (2010). Introduction aux processus auto-similaires. Disponible sur: **http://math.univ-angers.fr/ chaumont/rpdfiles/autosim.pdf**.

[18] Cheridito, P., Kawaguchi, H. et Maejima, M. (2003). Fractional Ornstein-Uhlenbeck processes. *Electronic Journal of Probability,* **8**(3), 1-14.

[19] Chronopoulou, A., Tudor, C. A. et Viens, F. (2010). Self-similarity parameter estimation and reproduction property for non-Gaussian Hermite processes. *prépublié dans Communications on Stochastic Analysis.* Disponible sur: **https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00294038v2**

[20] Clarke De la Cerda, J. et Tudor, C. A. (2014). Hitting probabilities for the stochastic wave equation with fractional colored noise. *Rv. Mat. Iberoam.* **30**(2), 685-709.

[21] Coeurjolly, J. F. (2001). Estimating the parameters of a fractional Brownian motion by discrete variations of its sample paths. *Stat. Inference Stoch. Process*, **30**, 199-227.

[22] Dalang, R. C. (1999). Extending the martingale measure stochastic integral with applications to spatially homogeneous SPDEs. *Electr. J. Probab*, **4**(6), 1-29.

[23] Dalang, R. C. (2009). The stochastic wave equation: A minicourse on stochastic partial differential equations. *Lecture Notes in Math*, Springer, Berlin. pp. 39-71.

[24] Dalang, R. C. et Sanz-Solé, M. (2009). Hölder-Sobolev regularity of the solution to the stochastic wave equation in dimension three. *Memoirs of the American Mathematical Society*, **199**(931), 1-70.

[25] Dalang, R. C. et Sanz-Solé, M. (2010). Criteria for hitting probabilities with applications to systems of stochastic wave equations. *Bernoulli*, **16**(4), 1343-1368.

[26] Decreusefond, L. et Üstünel, A. (1999). Stochastic analysis of the fractional Brownian motion. *Potential Anal.*, **10**(2), 177-214.

[27] Doob, J. L. (1942). The Brownian movement and stochastic equations. *Ann. Math.*, **43**(2), 351-369.

[28] Duncan, T. E., H. Yaozhong et Pasik-Duncan, B. (2000). Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion I. Theory. *SIAM J. Control Optim.*, **38**(2), 582-612.

[29] Dzhaparidze, K. et van Zanten, H. (2004). *Prob. Th. Relat. Fields*, **130**(39).

[30] Embrechts, P. et Maejima, M. (2002). Selfsimilar Processes. *Princeton University Press, Oxford, Princeton.*

[31] Feyel, D. et De La Pradelle, A. (1999). On fractional Brownian processes. *Potential Anal.*, **10**(3), 273-288.

[32] Folland, G. B. (1975). Introduction to Partial Differential Equations. *Princeton Univ. Press.*

[33] Genton, M. G., Perrin, O. et Taqqu, M. (2007). Self-similarity and Lamperti transformation for Random Fields. *Stochastic Models*, **23**(3), 397-411.

[34] Giraitis, L. et Surgailis, D. (1985). CLT and other limit theorems for functionals of Gaussian processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **70**, 191-212.

[35] Hung, S. et Cambanis, S. (1978). Gaussian processes: nonlinear analysis and stochastic calculus. Measure theory applications to stochastic analysis (Proc. Conf., Res. Inst. Math., Oberwolfach, 1977), *Lecture Notes in Math*, Springer, Berlin, **695**, 165-177.

[36] Ibragimov, I. A. et Lifshits, M. A. (2000). On the convergence of generalized moments in almost sure central limit theorem. *Theory Probab. Appl.*, **44**(2), 254-272.

[37] Kaarakka, T. et Salminen, P. (2011). On Fractional Ornstein-Uhlenbeck Processes. *Communications on Stochastic Analysis*, **5**(1), 121-133.

[38] Kahane, J. P. (1985). Some Random Series of Functions. *Cambridge University Press, Cambridge.*

[39] Kamont, A. (1996). On the fractionnal anisotropic Wiener field. *Probab. Math. Statist.*, **16**(1), 85-98.

[40] Karatzas, I. et Shreve, S. (1988). Brownian Motion and Stochastic Calculus. *Springer-Verlag.*

[41] Khalil, M., Tudor, C. et Zili, M. (2016). On the Lamperti transform of the fractional Brownian sheet. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **19**(6), 1466-1487; DOI: 10.1515/fca-2016-0076.

[42] Khalil, M., Tudor, C. et Zili, M. (2017). Spatial variation for the solution to the stochastic linear wave equation driven by additive space-time white noise. *Stochastics and Dynamics*, **18**(5), 1-20; DOI: 10.1142/S0219493718500363.

[43] Khalil, M. et Tudor, C. (2017). Correlation structure, quadratic variations and parameter estimation for the solution to the Wave equation with fractional noise. Soumis dans la revue *Electronic Journal for Statistics.*

[44] Khoshnevisan, D. (2010). Analysis of Stochastic Partial Differential Equations. *American Mathematical Society Providence, Rhode Island*, **119**.

[45] Kolmogorov, A. N. (1940). The Wiener spiral and some other intereting curves in Hilbert space. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **26**, 115-118.

[46] Lamperti, J. W. (1962). On convergence of stochastic processes. *Transactions Amer. Math. Soc.*, **104**, 430-435.

[47] Lamperti, J. W. (1962). Semi-stable processes. *Trans. Am. Math. Soc.*, **104**, 62-78.

[48] Leger, S. (2000). Analyse stochastique de signaux multi-fractaux et estimations de paramètres. *Thèse, Université d'Orléans.* Disponible sur: http://www.univ-orleans.fr/SCIENCES/MAPMO/publications/leger/these.php.

[49] Lévêque, O. (2001). Hyperbolic stochastic partial differential equations driven by boundary noises. *Thèse*, 2452, EPFL, Lausanne.

[50] Lévy, P. (1937). Théorie de l'addition des variables aléatoires. *Gauthiers-Villars.*

[51] Lindstrom, T. (1993). Fractional Brownian fields as integrals of white noise. *Bull. London Math. Soc.*, **25**, 83-88.

[52] Liu, J. et Tudor, C. A. (2016). Central limit theorem for the solution to the heat equation with moving time. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Topics*, **19**(1); DOI: 10.1142/S0219025716500053.

[53] Magré, O. (1996). Mouvement brownien fractionnaire: contribution à la modélisation, à la synthèse et à l'analyse. *Thèse*, École Centrale de Nantes.

[54] Major, P. (1981). Multiple Wiener-Itô Integrals. *Lecture Notes in Math.*, Springer, New York.

[55] Makogin, V. et Mishura, Y. (2015). Example of a Gaussian self-similar field with stationary rectangular increments that is not a fractional Brownian sheet. *Stochastic Analysis and Applications*, **33**(3), 413-428.

[56] Malliavin, P. (1976). Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators. *Proc. Int. Symp. on Stochastic Differential Equations, Wiley, New York*, 195-263.

[57] Mandelbrot, B. B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business XXXVI*, 392-417.

[58] Mandelbrot, B. B. et Van Ness, J. (1968). Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev.*, **10**, 422-437.

[59] Mandelbrot, B. B. (2015). The Fractal Geometry of Nature. *San Francisco: W. H. Freeman and Co.*

[60] Martin, A. (1995). Wave equations driven by space-time white noise. *Dissertation soumise pour le diplôme de Master en Sciences. Mathematic Institute, University of Warwick, U.K.*

[61] Maruyama, G. (1982). Applications of the multiplication of the Itô-Wiener expansions to limit theorems. *Proc. Japan Acad.*, **58**, 388-390.

[62] Maruyama, G. (1985). Wiener functionals and probability limit theorems, I: The central limit theorem. *Osaka J. Math.*, **22**, 697-732.

[63] McLeod, A. et Hipel, K. (1978). Preservation of the rescaled adjusted range, 1. A reassessment of the Hurst phenomenon. *Water Resources Research*, **14**, 159-178.

[64] Mueller, C. et Tribe, R. (2002). Hitting properties of a random string. *Electron. J. Probab.*, **10**(7), pp 29.

[65] Nigmatullin, R. R. et Baleanu, D. (2012). The derivation of the generalized functional equations describing self-similar processes. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **15**(4), 718-740; DOI: 10.2478/s13540-012-0049-5.

[66] Nourdin, I. et Peccati, G. (2009). Stein's method on Wiener chaos. *Probability Theory and Related Fields*, **145**(1-2), 75-118.

[67] Nourdin, I. et Peccati, G. (2012). Normal Approximations with Malliavin Calculus From Stein's Method to Universality. *Cambridge University Press.*

[68] Nualart, D. (2006). The Malliavin calculus and related topics. *Probability and its Applications. Second edition. Springer-Verlag, Berlin.*

[69] Nualart, D. (2009). The Malliavin calculus and its Applications. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, R.I.*, no. 110.

[70] Nualart, D. et Ortiz-Latorre, S. (2009). Central limit theorems for multiple stochastic integrals and Malliavin calculus. *Stoch. Proc. Appl.*, **118**(4), 614-628.

[71] Nualart, D. et Peccati, G. (2005). Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals. *The Annals of Probability*, **33**(1), 177-193.

[72] Pipiras, V. et Taqqu, M. S. (2000). Integration questions related to fractional Brownian motion. *Prob. Theory Relat. Fields*, **118**, 251-291.

[73] Pospisil, J. et Tribe, R. (2007). Parameter estimates and exact variations for stochastic heat equations driven by space-time white noise. *Stoch. Anal. Appl.*, **25**(3), 593-611.

[74] Quer-Sardanyons, L. et Tindel, S. (2007). The 1-d stochastic wave equation driven by a fractional Brownian sheet. *Stoch. Proc. Appl*, **117**, 1448-1472.

[75] Revuz, D. et Yor, M. (1991). Continuous martingales and Brownian motion. *Springer.*

[76] Samko, S. G., Kilbas, A. A. et Marichev, O. I. (1993). Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications. *Gordon and Breach, Amsterdam.*

[77] Samorodnitsky, G. et Taqqu, M. (1994). Stable Non-Gaussian Random Variables. *Chapman and Hall*, London.

[78] Samorodnitsky, G. (2007). Long Range Dependence. *Foundations and Trends in Stochastic Systems*, **1**(3), 163-257.

[79] Stein, C. (1971). A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. *Technical report*, **19**, 1-38.

[80] Swanson, J. (2007). Variations of the solution to a stochastic heat equation. *Annals of Probability*, **35**(6), 2122-2159.

[81] Taqqu, M. S. (2003). Theory and Applications of Long-Range Dependence, eds. P. Doukhan, G. Oppenheim, M.S. Taqqu, Birkhäuser, Boston, 5-38.

[82] Torres, S., Tudor, C. A. et Viens, F. G. (2014). Quadratic variations for the fractional-colored stochastic heat equation. *Electron. J. Probab.*, **19**(76), 1-51.

[83] Toscano, R. (2013). Green's functions for the wave, Helmholtz and Poisson equations in a two-dimensional boundless domain. *Brasileira de Ensino de Física*, **35**(1), 1-8.

[84] Treves, F. (1975). Basic Linear Partial Differential Equations. *Academic Press.*

[85] Tudor, C. A. et Viens, F. (2003). Itô formula and local time for the fractional Brownian sheet. *Elect. J. Probab.*, **8**(4), 1-31.

[86] Tudor, C. A. (2013). Analysis of variations for self-similar processes. *A stochastic calculus approach. Springer, Cham.*

[87] Tudor, C. A. et Zili, M. (2014). Covariance measure and stochastic Heat equation with fractional noise. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **17**(3), 807-826.

[88] Tudor, C. et Tudor, M. (2003). On the two-parameter fractional Brownian motion and Stieltjes integrals for Hölder functions. *J. Math. Anal. Appl.*, **286**, 765-781.

[89] Tudor, M. et Tudor, C. A. (2013). Spatial variations for the solution to the heat equation with additive time-space white noise. *Revue Roumaine Math. Pures et Appliquées*, LVIII(4), 453-462.

[90] Walsh, J. B. (1986). An introduction to stochastic partial differential equations. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIV. *Lecture Notes in Math.*, Springer, Berlin, **1180**, 265-439.

[91] Willinger, W., Taqqu, M., Leland, W. E. et Wilson, D. V. (1995). Selfsimilarity in high speed packet traffic: analysis and modelisation of ethernet traffic measurements. *Statist. Sci.*, **10**, 67-85.

[92] Willinger, W., Taqqu, M. et Teverovsky, V. (1999). Long range dependence and stock returns. *Finance and Stochastics*, **3**, 1-13.

[93] Yeh, J. (1963). Cameron-Martin translation theorems in the Wiener space of functions of two-variables. *Transactions of American Mathematical Society*, **107**(3), 409-420.

[94] Young, L. C. (1936). An inequality of the Hölder type connected with Stieltjes integration. *Acta Mathematica*, **67**(1), 251-282.

[95] Zähle, M. (1998). Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. *Probab. Theory and Relat. Fields*, **111**, 333-374.

[96] Zeng, C., Chen, Y. Q. et Yang, Q. (2012). The fBm-driven Ornstein-Uhlenbeck process: Probability density function and anomalous diffusion. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **15**(3), 479-492; DOI: 10.2478/s13540-012-0034-z.