

Université Lille 1 – Laboratoire Paul Painlevé
École Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur 072

Thèse

présentée pour l'obtention du

**DIPLÔME DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ LILLE 1**

Spécialité : Mathématiques Appliquées

**Existence et absence de percolation
de modèles germes grains arrêtés**

par

Simon LE STUM

*Soutenue le 11 décembre 2017 à l'Université Lille 1 devant un jury
composé de :*

Rapporteurs :	M. Günter	LAST	K.I.T Karlsruhe
	M. Jean-Baptiste	GOUÉRÉ	Université de Tours
Examinatrices :	Mme. Régine	MARCHAND	Institut Elie Cartan Lorraine
	Mme. Mylène	MAÏDA	Université Lille 1
Directeurs :	M. David	COUPIER	Université Lille 1
	M. David	DEREUDRE	Université Lille 1



Remerciements

Je commence par adresser un grand merci à l'intention de mes directeurs de thèse. Le terme "encadrant" de thèse n'a peut être jamais aussi bien porté son nom ! En plus de leurs nombreux conseils scientifiques et encouragements, ils m'ont offert une confiance rare sans laquelle cette thèse aurait pu prendre un tout autre tournant. La "remontada" n'existe pas seulement en foot ! Je suis reconnaissant de la patience dont ils ont fait preuve. La lecture très attentive du manuscrit par Jean-Baptiste Gouéré a largement contribué à améliorer le contenu de la thèse. Je le remercie d'avoir accepté de rapporter cette thèse, et de l'avoir fait avec beaucoup de minutie et de perfectionnisme.

Les travaux réalisés pas Günter Last ont été un point de départ important de cette thèse et ont largement guidé mes débuts dans la recherche. Je le remercie d'avoir accepté de rapporter le manuscrit ainsi que pour ses suggestions de travaux et de réflexions à venir. J'accueille la présence de Régine Marchand et de Mylène Maïda comme examinatrices avec grand plaisir. Je suis honoré de présenter mes travaux à un jury aussi confirmé et prestigieux.

Comme de nombreux thésards avant moi, j'ai pu bénéficier à Lille d'un cadre de travail privilégié. L'ensemble de l'équipe de probabilités et statistiques a contribué à rendre plus qu'agréable mes trois années de doctorat.

J'adresse également des remerciements au personnel administratif, dont la patience à l'égard de mes tergiversations n'a sans doute pas d'équivalent.

Difficile de rester formel au moment de remercier les deux autres doctorants de David Dereudre ! Pierre Houdebert est à la fois pâtissier, chauffeur alpin de monospace, impact player de pétanque.... Son extrême connaissance des rouages universito-administratifs donnerait le tournis à qui n'est pas très au point dans ce secteur de jeu. Je le remercie pour tous ces bons moments ! Mes plus tendres remerciements sont pour Sara, son soutien et sa confiance furent précieux dans les moments compliqués.

Je finis en remerciant tout ceux et celles qui ont accompagné ou guidé mon parcours mathématique. Certains enseignants de mathématiques ont contribué à développer mon goût pour cette discipline, je pense au professeur Galieue, qui fut mon enseignant en terminale à St Adrien. Je remercie mes parents et ma soeur bien sûr, qui m'ont encouragé dans mes choix, je les remercie d'être là aujourd'hui ! Je remercie aussi Guillaume qui m'a fait remarquer que la racine cubique de x^3 n'était rien d'autre que x , sans doute le tournant de cette thèse.

À frisouille,

Résumé

Dans cette thèse, nous travaillons sur les questions d'existence, puis d'absence de percolation de graphes aléatoires orientés dans \mathbf{R}^d . Les sommets de ces graphes sont distribués par un processus ponctuel de Poisson, et chaque sommet est connecté vers un unique autre sommet par une arête orientée. On parle alors de graphe orienté 'outdegree-one'. La règle permettant de construire l'ensemble des arêtes est invariante par translation et peut également contenir une part d'aléa. De nombreuses dynamiques aléatoires simples se modélisent par de tels graphes : par exemples la marche au plus proche voisin sur un processus ponctuel de Poisson, ou bien le graphe des connexions du modèle Lilypond.

Le premier résultat de la thèse fournit une condition suffisante pour qu'un graphe outdegree-one ne contienne pas de composantes connexes infinies avec probabilité un. Ce résultat s'appuie sur deux hypothèses supplémentaires sur la nature de la règle de connexion des sommets. La preuve de ce résultat s'articule autour d'arguments de transports de masses et d'un théorème important de domination stochastique. Un corollaire important de ce premier résultat affirme que le modèle de segments stoppés ne percole pas, ce qui résout la conjecture d'absence de percolation de ce modèle, formulée par D. Daley, S. Ebert et G. Last en 2014.

Ce modèle défini à partir de segments poussant à vitesse constante dans le plan est un exemple de dynamique germes grains arrêtée. Ces dynamiques constituent des exemples particulièrement intéressants de graphes orientés (on peut aussi penser au modèle Lilypond qui définit une configuration aléatoire de sphères stoppées). Le second chapitre de la thèse propose une définition générale du modèle germes grains arrêté dans le plan et donne une condition suffisante pour qu'un tel modèle soit bien défini. Ce dernier résultat nous permet d'assurer l'existence d'une large classe de graphe outdegree-one. On s'intéresse particulièrement au modèle dont les grains grandissants dans le plan sont soit des mouvements browniens bidimensionnels, soit des segments grandissants à vitesse aléatoire.

En particulier, le résultat d'existence du chapitre 2 nous permet de généraliser le modèle de segments stoppés : chaque segment grandit selon une vitesse distribuée par une loi possédant un moment d'ordre 4. Nous prouvons dans le dernier chapitre que le graphe associé au modèle de segments grandissants ne percole pas dès qu'il existe un réel $s > 1$ tel que la loi distribuant la vitesse possède un moment exponentiel d'ordre s (i.e $\mathbf{E}(\exp(\mathbf{V}^s)) < +\infty$). L'un des arguments importants de la preuve de ce dernier résultat se situe dans le fait qu'il existe un temps suffisamment petit pour lequel l'exploration des segments rapides est incluse dans un modèle booléen qui ne percole pas. Cet argument pourrait être employé pour d'autres dynamiques de grains grandissants.



Summary

In this thesis, we investigate the existence and the absence of percolation for a large family of random graphs. We precisely study the oriented outdegree-one graphs based on a Poisson point process in \mathbf{R}^d . On the random pattern of points, each vertex is connected to its unique "neighbour" according to a fixed connection rule. This rule is translation-invariant and could also include a random part. Many natural simple dynamics can be described by an outdegree-one graph : the classical walk to the nearest neighbour on the graph defined by the hard sphere Lilypond model, etc.

The first result of the thesis establishes sufficient conditions which guarantee the almost sure absence of infinite connected component in the graph. Precisely, each Poisson outdegree-one graph satisfying two precise assumptions does not percolate. The proof uses the mass transport principle, and an important result of stochastic domination. The most important corollary of this theorem is the absence of percolation of the line segment model with unit speed which has been conjectured in 2014 by D. Daley, S. Ebert and G. Last.

The stopped segments model described above is an example of stopped germs grains dynamics : each growing grain ceases its growth when its extremity hurts another growing grain. These dynamics represent an important class of outdegree-one graphs (we can also think to the classical Lilypond model which defines a random configuration of stopped spheres). In the second chapter, we give a general definition of stopped germs grains model in the plane, and we state a sufficient condition ensuring its. This result establishes the existence of a large family of outdegree-one graphs. We particularly study two stopped germs grains models defined thanks to this result : the line segment model with random speed of growth, and a brownian model (the growing grain is defined as a two dimensional brownian motion).

The line segment model with random speed is well defined (as a stopped germs grains model) if the random velocity has an order 4 moment. In the last chapter, we proved that the existence of an order s exponential moment (with $s > 1$) ensures the almost sure absence of percolation of the configuration of stopped segments. One of the key point of this result is the existence of a sufficiently small time \mathbf{T} such that, before the time \mathbf{T} , any quick segments grows inside a boolean model which does not percolate. This argument should be used for different kinds of germs grains dynamics.



Table des matières

I	Graphe aléatoire poissonien orienté avec unique arête sortante	19
I.1	Processus ponctuel de Poisson marqué	20
I.1.1	Espace des configurations marquées	20
I.1.2	Processus ponctuel de Poisson	21
I.1.3	Théorie de Palm et formules de Campbell-Mecke	22
I.1.4	Moments factoriels d'un processus ponctuel de Poisson	23
I.2	Graphe aléatoire avec unique arête sortante (POG)	24
I.2.1	Graphe outdegree-one	24
I.2.2	Poisson outdegree-one graph (POG)	26
I.2.3	Exemples de POG	27
I.3	Absence de percolation	31
I.3.1	Énoncé du Théorème	31
I.3.2	Preuve du Théorème d'absence de percolation	35
I.4	Absence de percolation pour la marche au plus proche voisin	48
I.4.1	Vérification de l'hypothèse Loop	48
I.4.2	Vérification de l'hypothèse Shield	52
I.5	Absence de percolation pour le modèle de navigation	53
I.5.1	Vérification de l'hypothèse Loop	53
I.5.2	Vérification de l'hypothèse Shield	54
I.6	Perspectives	55
II	Modèles germes grains arrêtés	57
II.1	Le modèle Lilypond	58
II.1.1	Définition et existence	58
II.1.2	Absence de percolation	59
II.2	Deux modèles de segments grandissants	61
II.2.1	Définition et existence	62
II.2.2	Absence de percolation	63
II.3	Le modèle germes grains arrêté	64
II.3.1	Notations et définitions	64
II.3.2	Exemples	66
II.4	Existence des SGGM	68
II.4.1	Résultat principal	68
II.4.2	Preuve du Théorème d'existence	69
II.5	Lien avec la théorie des POG	81
II.6	Perspectives	83

III Absence de percolation des modèles germes grains	85
III.1 Modèles de segments grandissants	86
III.1.1 Cas des vitesses constantes	86
III.1.2 Généralisation aux vitesses non bornées	98
III.2 Le modèle Brownien	116
III.3 Perspectives	117

Introduction

Considérons un processus ponctuel de Poisson \mathbf{X} stationnaire de \mathbf{R}^d et un sommet $x \in \mathbf{X}$. En partant de x , on navigue dans l'environnement \mathbf{X} en se déplaçant à chaque itération vers le plus proche voisin dans \mathbf{X} . Cette algorithm se nomme assez naturellement **marche au plus proche voisin sur un processus ponctuel de Poisson**. On peut modéliser cette marche déterministe sur environnement aléatoire par un graphe aléatoire orienté dont l'ensemble des sommets est \mathbf{X} . Il suffit alors de connecter par une arête orientée chaque sommet $x \in \mathbf{X}$ à son **unique** plus proche voisin dans $\mathbf{X} \setminus \{x\}$. L'unicité presque sûre du plus proche voisin assure la bonne définition de cette navigation permet sa modélisation par un graphe aléatoire poissonnien orienté avec unique arête sortante (on utilisera l'acronyme **POG** qui désigne Poisson outdegree-one graph). Nous introduisons en détail ce modèle dans la Section I.2.3 du Chapitre I.

Présentons une autre dynamique pouvant se décrire par un **POG** : en chaque point d'un processus ponctuel de Poisson \mathbf{X} de \mathbf{R}^2 grandit un segment issu de x selon la direction $\theta_x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$. Les directions $(\theta_x)_{x \in \mathbf{X}}$ sont générées par une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées par la loi uniforme sur $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$. Chaque segment grandissant stoppe son exploration lorsque son extrémité touche un autre segment.

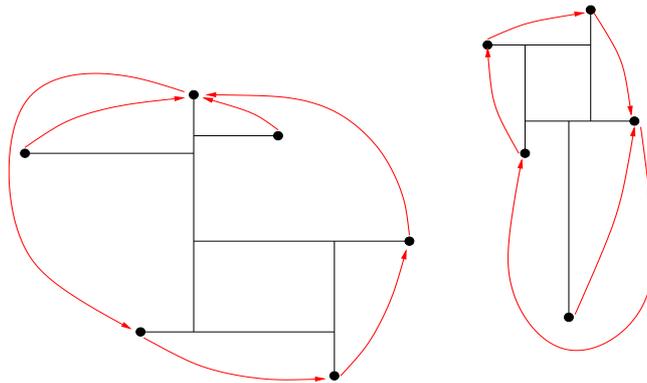


FIGURE 1 – On a représenté par des petits disques noirs certains sommets d'une réalisation d'un processus ponctuel de Poisson dans le plan. Une direction de poussée est associée à chaque sommet. Lorsque tous les segments sont stoppés, on peut faire correspondre à la configuration initiale de sommets, un graphe orienté avec unique arête sortante. On a représenté les arêtes de ce graphe orienté par des flèches rouges, en évitant au maximum les intersections.

Ce modèle fut introduit par C. Hirsch dans [15], il correspond a une version simplifiée

d'un modèle de croissance de segments défini par D. Daley, G. Last et S. Ebert dans [7] où les directions sont tirées uniformément sur $[0, 2\pi]$. C. Hirsch a montré que pour presque toute réalisation d'un processus ponctuel de Poisson \mathbf{X} et presque toute réalisation de la suite $(\theta_x)_{x \in \mathbf{X}}$, tous les segments étaient stoppés par un unique segment stoppant. Ainsi, en connectant chaque sommet $x \in \mathbf{X}$ à l'unique sommet stoppant, on munit \mathbf{X} d'une structure de **POG** (voir Figure 3).

Pour ces deux modèles (comme pour plusieurs autres présentés dans ce manuscrit), le **POG** associé est particulièrement utile pour étudier la question de la percolation ; par exemple, la configuration de segments stoppés contient une composante connexe infinie si et seulement si le graphe orienté qui lui correspond en contient une. Le graphe orienté outdegree-one est un objet souvent plus facile à comprendre et à manipuler que la structure géométrique qui le définit. Nous proposons dans la Section 1.2 une définition générale des **POG**, et nous décrivons les propriétés importantes des composantes connexes de tels graphes.

Pour un **POG** fixé, les composantes connexes d'une réalisation donnée peuvent s'observer de la façon suivante : le Forward d'un sommet x correspond à l'ensemble des "successeurs" de x , c'est-à-dire les sommets que x peut rejoindre en un nombre fini d'étapes en empruntant des arêtes orientées. Le Backward de x est constitué des prédécesseurs de x , c'est-à-dire les sommets qui rejoignent x en un nombre fini d'étapes (autrement dit, le Backward de x est constitué des sommets y pour lesquels x est dans le Forward).

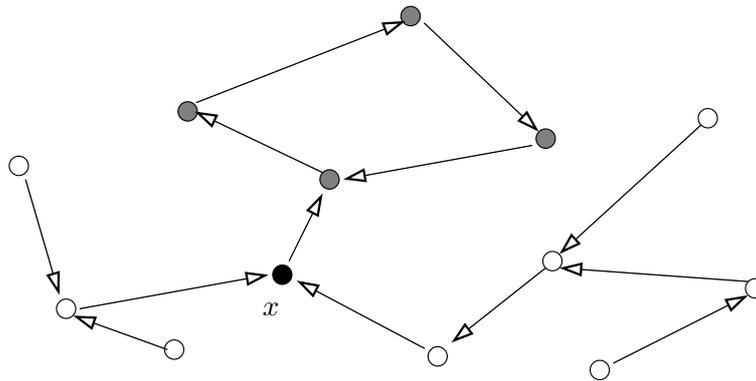


FIGURE 2 – Nous représentons ici le Forward et le Backward d'un sommet x . Les sommets gris appartiennent à l'ensemble Forward de x tandis que les blancs sont dans son Backward.

Le point de départ de l'étude de l'absence de percolation d'un **POG** est l'observation suivante : le graphe aléatoire ne percole pas si et seulement si tous les Forwards sont finis presque sûrement. Cette équivalence est un résultat connu (voir par exemple [8] et [15]) que nous énonçons dans le Corollaire 1.2.5. Il suffit donc de montrer l'absence de percolation Forward d'un **POG** donné pour prouver son absence de percolation. C'est pourquoi il est important de bien comprendre la structure topologique des branches Forwards. Le Forward est une branche orientée qui est finie si et seulement si elle se termine par une boucle. Une boucle est une collection finie de sommets qui se connectent les uns aux autres pour former un cycle (le dernier sommet de la boucle se connecte au premier) et la taille d'une boucle est simplement définie comme le nombre de sommets qui la constituent. Établir l'absence de percolation d'un **POG** revient alors à montrer que toute branche

Forward termine sur une boucle avec probabilité 1. Dans l'exemple de la marche au plus proche voisin, toutes les boucles sont de tailles 2 (elles constituent un couple de mutuels plus proches voisins), alors que dans le modèle des segments grandissants selon les quatre directions de l'espace, la taille d'une boucle est forcément supérieure ou égale à 4 (deux boucles de taille 4 sont représentées sur la Figure 3).

L'absence de percolation des deux modèles introduits ci-dessus est connue. Le **POG** de la marche au plus proche voisin est un graphe pour lequel les arêtes de chaque branche Forward ont des longueurs de plus en plus petites. L'existence d'un Forward infini équivaut alors à l'existence d'une suite infinie $(x_i)_{i \geq 0}$ dans la réalisation du processus ponctuel de Poisson telle que $\|x_{i+1} - x_i\| < \|x_i - x_{i-1}\|$ pour tout $i \geq 1$. Une propriété standard sur les processus ponctuels de Poisson assure qu'une telle suite n'existe pas avec probabilité 1 (voir par exemple le Théorème 4.1 dans [8]). C. Hirsch a démontré l'absence de percolation forward de son modèle de segments aux quatre directions cardinales ; il a proposé deux hypothèses qui constituent une condition suffisante pour qu'un **POG** ne percole pas. Puis il a montré que le modèle de segments satisfait chacune des deux hypothèses. Lorsque les directions de poussées des segments sont indépendamment distribuées par la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$, nous obtenons une nouvelle fois un **POG** (qui fut introduit par D. Daley et al dans [7]). La vérification des hypothèses rédigées par C. Hirsch pour ce modèle est beaucoup trop exigeante et laborieuse (de l'aveu même de l'auteur dans [15]). L'une des motivations initiales de la thèse était de simplifier les hypothèses qui assurent la non percolation d'un **POG**. Nous présentons dans la Section I.3.1 du Chapitre I deux hypothèses plus simples appelées **Loop** et **Shield**. Le Théorème principal du premier chapitre (Théorème I.3.1) assure que chaque **POG** satisfaisant ces deux hypothèses ne percole pas. Avant de décrire ces hypothèses, précisons qu'elles permettent de prouver l'absence de percolation du modèle de segments grandissants dans toutes les directions de $[0, 2\pi]$ introduit dans [7]. Précisément, nous vérifions au début du Chapitre III que ce modèle vérifie les hypothèses Loop et Shield (Théorème III.1.1).

L'hypothèse Shield est directement inspirée de l'une des hypothèses énoncées par C. Hirsch. En revanche, l'hypothèse Loop consiste en une propriété assez simple et qui (à la connaissance de l'auteur) n'apparaît pas dans la littérature actuelle du sujet : elle évoque la possibilité d'ajouter des boucles qui ne modifient que localement une réalisation fixée du **POG**. Sa vérification se révèle assez simple pour de nombreux **POG** (voir par exemple la démonstration de la Proposition III.1.2). D'un point de vue heuristique, un **POG** qui vérifie les conditions Shield et Loop contient beaucoup de boucles que nous parvenons à localiser dans l'espace, une éventuelle branche Forward infinie devrait éviter toutes ses boucles, ce qui est impossible avec probabilité 1. Le Théorème I.3.2 du Chapitre I montre que deux modèles inspirés de la marche au plus proche voisins vérifient également les hypothèses Loop et Shield.

Les modèles de segments grandissants sur un processus ponctuel de Poisson appartiennent à la classe des dynamiques **germes grains arrêtés** dans le plan. Les germes sont les positions données par les sommets du processus ponctuel de Poisson et les grains sont les corps grandissants (ici des segments) qui ne se recouvrent pas les uns les autres (un grain s'arrête lorsque qu'il est contraint d'en croiser un autre). Un autre exemple de dynamique de cette nature est donné par le modèle Lilypond introduit par O. Häggström et R. Meester dans [12] : il se définit de façon semblable au modèle de segments en considérant cette fois des disques grandissants à vitesse constante. Comme pour le cas des

segments, il est montré que presque toute configuration de disques arrêtés peut se décrire par un graphe outdegree-one. Le Chapitre II propose une définition générale du modèle germes grains dans le plan. Cette définition englobe les modèles de segments grandissants et un modèle Brownien, où chaque grain se définit comme la trajectoire d'un mouvement brownien bidimensionnel. Il n'est en général pas facile de montrer qu'un modèle germes grains produit avec probabilité 1 une configuration de grains stoppés (autrement dit, il est parfois difficile de vérifier l'arrêt de tous les grains, et de déterminer qui a stoppé qui). Lorsque cela se produit, on dit que le modèle germes grains est arrêté. Nous proposons dans le Théorème II.4.1 du Chapitre II une condition suffisante pour qu'un modèle germes grains soit arrêté. On vérifie alors que les modèles de segments grandissants sont arrêtés dès que la loi ρ qui distribue les vitesses de poussées possède un moment d'ordre 4 : $\mathbf{E}_\rho(V^4) < +\infty$. Le modèle Brownien satisfait lui aussi la condition du Théorème II.4.1. Il est bien arrêté.

Comme pour les modèles de segments grandissants à vitesse constante, on peut observer les configurations de grains (browniens ou segments grandissants à vitesse aléatoire) stoppés comme un graphe outdegree-one, et s'interroger sur la question de l'absence de percolation. Lorsque la loi ρ n'est pas à support compact, le **POG** associé au modèle de segments ne vérifie plus l'hypothèse Shield, et on ne peut pas appliquer directement le Théorème I.3.1. Néanmoins, une exigence supplémentaire sur les moments de la loi ρ (l'existence d'un réel $s > 1$ tel que $\mathbf{E}_\rho(\exp(V^s)) < +\infty$) et la relative souplesse des hypothèses Loop et Shield nous permettent de contrôler l'action des grains rapides et de traiter les grains restants comme dans la preuve du Théorème I.3.1. On parvient alors à montrer l'absence de percolation des modèles de segments grandissants qui satisfont cette condition sur les moments de ρ (Théorème III.1.10 du Chapitre III).

L'étude de l'absence de percolation du modèle Brownien comporte des difficultés nouvelles : les grains sont beaucoup moins prévisibles et on ne peut plus espérer contrôler aussi bien les trajectoires des branches Forwards. Heuristiquement, un mouvement brownien bidimensionnel peut aisément se tortiller pour éviter les obstacles (boucles) que l'on sème sur sa route afin de le stopper. La préservation de l'hypothèse Loop et plusieurs simulations nous permettent néanmoins de conjecturer l'absence de percolation du modèle. Mais la question reste ouverte.

Introduction

Let \mathbf{X} be a stationary Poisson point process in \mathbf{R}^d and $x \in \mathbf{X}$. Starting from x , we consider the deterministic walk on \mathbf{X} with steps toward the nearest neighbours. This model is currently called **the nearest neighbour walk on \mathbf{X}** . It is possible to describe this deterministic walk by an oriented random graph. The set of vertices is given by \mathbf{X} and the edges are defined by the nearest neighbour relation (i.e. an edge $y \mapsto z$ exists if z is the nearest neighbour of y). The almost sure uniqueness of nearest neighbours guarantees the outdegree-one structure of the random graph (almost surely, it does not exist isosceles triangles in a Poisson point process). By the way the nearest neighbour walk is identified as a Poisson outdegree-one random graph (we will use the acronym **POG**). This model is detailed in Section I.2.3 of Chapter I.

Let us present another model which can be described as a **POG**. A line segment starts to grow from each vertex of a Poisson point process \mathbf{X} in \mathbf{R}^2 . Each segment grows independently with the same velocity in a direction picked uniformly in $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$. A growing line segment stops its exploration when its extremity hits another line segment. This model has been introduced by C. Hirsch in [15] and is a simplified version of the line segment model introduced by D. Daley, G. Last and S. Ebert in [7] where the directions are uniformly distributed in $[0, 2\pi]$. Connecting each vertex $y \in \mathbf{X}$ toward its unique stopping vertex z , this model is a **POG** as well (see Figure 3).

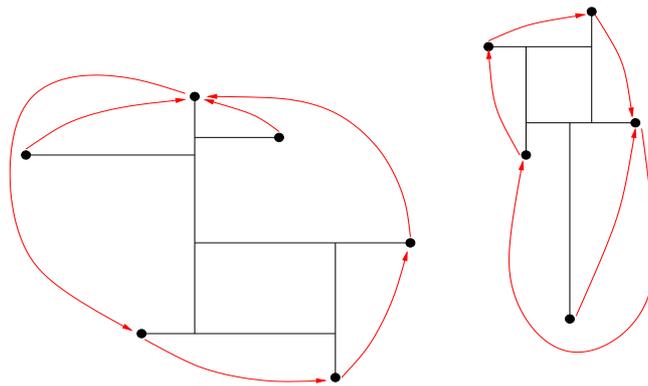


FIGURE 3 – Vertices of a Poisson point process are represented by dark discs. Each vertex is equipped with a direction of propagation. When all segments are stopped, an outdegree-one graph is constructed with edges in red.

For these both models (and others presented in this document), the associated **POG** is particularly suitable to study the question of absence of percolation; for example, the configuration of stopped segments does not contain an infinite connected component if

and only if its associated **POG** does not percolate. The oriented outdegree-one graph is often easier to study than the geometric model. Section 1.2 states a general definition of **POG** and the first properties are given.

For a fixed **POG**, the connected components can be decomposed via Forward and Backward sets. For a given vertex x , the Forward set corresponds to the set of "successors of x ". In other words, the Forward set of x contains the vertices which are attained from x with a finite number of oriented edges. The Backward set of x is constituted with the "predecessors of x " (i.e. the vertices which contain x in their Forward).

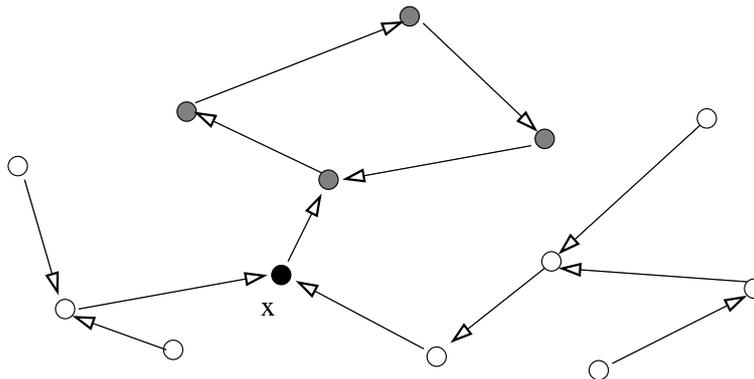


FIGURE 4 – Here is a picture of the cluster of a given vertex x . The gray vertices belong to the Forward set of x whereas the white ones are in its Backward set.

We start the investigation of the absence of percolation of **POG** by the following observation : the random graph does not percolate if and only if all Forwards are finite almost surely. This characterisation is a known result (see for example [8] and [15]) stated here in Corollary 1.2.5. Therefore it is sufficient to show the absence of Forward percolation to establish the absence of percolation. That is the reason why it is important to know the general properties of the Forward branches. A Forward set is an oriented branch which is finite if and only if it contains a loop at the end. A loop is a finite set of vertices $\{x_1, \dots, x_n\}$ such that x_i is connected to x_{i+1} for $i \in \{1 \dots n - 1\}$ and x_n is connected to x_1 . The size of a given loop is simply defined by its number of vertices. The absence of Forward percolation can be formulated like this : all Forwards branches contain a loop with probability 1. In the nearest neighbour walk on \mathbf{X} , the size of each loop is equal to 2. Precisely, a loop is a pair of mutual nearest neighbours. In the 4-directions line segment model, a given loop contains at least 4 vertices (two loops of size 4 are represented on Figure 3).

For both models introduced above, the absence of percolation has been proved recently. In the nearest neighbour walk, the lengths of edges in a Forward branch are decreasing. Hence, the presence of an infinite Forward branch implies the existence of a sequence $(x_i)_{i \geq 0}$ such that $\|x_{i+1} - x_i\| < \|x_i - x_{i-1}\|$ for all $i \geq 1$. A such sequence is called **infinite descending chain**. A standard property of the Poisson point process ensures, with probability one, the non existence of such infinite descending chains (see for example Theorem 4.1 in [8]). C. Hirsch proved the absence of percolation of the 4-directions line segment model by a different way [15]. He gave two sufficient assumptions ensuring the absence of percolation of any **POG**. Then, he checked that the 4-directions line segment

model satisfies these two assumptions. When the random directions are uniform in $[0, 2\pi]$, as in the original line-segment model [7], the verification of Hirsch's assumptions seems likely impossible as mentioned by the author himself. One of the initial motivation of the present thesis was to find more workable assumptions ensuring the absence of percolation of any **POG**. Our two assumptions, called **Loop** and **Shield** are presented in Section I.3.1 of Chapter I. Then the main result of Chapter I (Theorem I.3.1) claims that each **POG** satisfying these assumptions does not percolate. Before giving a short description of these assumptions, let us precise that our theorem allow us to show the absence of percolation of the original line segment model. Precisely, in the beginning of Chapter III, we check that the line segment model satisfies our two assumptions (Theorem III.1.1).

The Shield assumption is directly inspired from the ones by Hirsch (see Section 6 of [15]). More or less, it assumes that with high probability, the graph does not contain edge crossing large boxes. The Loop assumption consists in a simple and original fact : any Forward branch merges to a loop if the process is augmented with a finite collection of well-chosen points (without reducing the size of the Backward). Roughly speaking, this assumption ensures that a loop is possible along a forward branch provided that some points are added. In general this fact is obvious for all models for which the loops are possible. Heuristically, a **POG** which satisfies the assumptions Shield et Loop contains a lot of loops scattered in the hole space. Each possibly infinite branch should avoid all the loops, which is impossible with probability 1.

The line segment models on a Poisson point process belong to the family of stopped germs grains dynamics in the plane. Germs are the positions given by the Poisson point process, and the grains are the growing bodies (segments, discs, squares,...). The overlapping between two different grains is forbidden, hence, a grain ceases to grow when it hits another grain. Another example of such dynamic is given by the classical Lilypond model introduced by Häggström and Meester in [12] which is defined substituting growing segments by growing discs. In Chapter II we give a general definition of planar germs grains models. This definition includes the line segments models and a Brownian model where the grains are simply bi-dimensional Brownian motions. Check that any grain (among an infinite number of grains) is stopped by a unique stopping grain can be a difficult problem. When a unique system of stopped grains is obtained, the germs grains model is said **stopped**. Theorem II.4.1 of Chapter II gives a sufficient condition ensuring the stopped property. We check that the line segment models are stopped if the law ρ distributing the velocities has a 4-moment (i.e. $\mathbf{E}_\rho(V^4) < +\infty$). The Brownian model also satisfies the assumption of Theorem II.4.1 ; the model is stopped.

As in the line segment model with constant velocity, we can represented the stopped germs grains models as a **POG** and the absence of percolation of these new models can be investigated. In the line segment model, when the distribution ρ does not have a compact support, the associated **POG** does not satisfy the Shield assumption. Then, it is impossible to apply Theorem I.3.1 in order to show the absence of percolation. Nevertheless, controlling the segments with high velocity and following the strategy of Theorem I.3.1 we show the absence of percolation for the line segment model as soon as $\mathbf{E}_\rho(\exp(V^s)) < +\infty$ for a real $s > 1$ (Theorem III.1.10 of Chapter III).

The Brownian model is harder to study. The grains have unpredictable trajectories and the Forward branches are difficult to control. Heuristically, the brownian motion can twist round the obstacles (loops) and the assumption shield is irrelevant. Nevertheless,

the Loop assumption is checked, and many simulations allow us to conjecture the absence of percolation for this model. However, its absence of percolation is still an open problem today.

Chapitre I

Graphe aléatoire poissonien orienté avec unique arête sortante

Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, nous allons définir les graphes aléatoires Poissoniens orientés avec unique arête sortante que nous désignerons par l'acronyme **POG** (Poisson outdegree-one graph). Nous donnerons deux exemples simples de tels graphes qui s'apparentent à des marches aux plus proches voisins sur un processus ponctuel de Poisson. Au travers de ces deux exemples, nous motiverons la problématique d'absence de percolation de ces graphes aléatoires : l'absence de percolation est ici entendue comme l'absence presque sûre de composante connexe infinie.

La partie centrale du chapitre expose une condition suffisante pour l'absence de percolation d'un **POG**. Cette condition suffisante se définit comme la vérification de deux hypothèses que nous rédigerons et expliquerons en détails (les hypothèses **Loop** et **Shield**). Nous démontrerons que chaque **POG** vérifiant ces deux hypothèses ne percole pas. La preuve s'articulera autour d'arguments de stationnarité, de résultats classiques de domination stochastique en percolation discrète, et de l'exploitation profonde des deux hypothèses évoquées plus haut.

Dans la dernière partie du chapitre, nous parlerons de la vérification des hypothèses **Loop** et **Shield** pour les deux modèles donnés en exemple. Le chapitre s'achèvera par les possibles extensions du théorème de non percolation.

Sommaire

I.1	Processus ponctuel de Poisson marqué	20
I.1.1	Espace des configurations marquées	20
I.1.2	Processus ponctuel de Poisson	21
I.1.3	Théorie de Palm et formules de Campbell-Mecke	22
I.1.4	Moments factoriels d'un processus ponctuel de Poisson	23
I.2	Graphe aléatoire avec unique arête sortante (POG)	24
I.2.1	Graphe outdegree-one	24
I.2.2	Poisson outdegree-one graph (POG)	26
I.2.3	Exemples de POG	27
I.3	Absence de percolation	31
I.3.1	Énoncé du Théorème	31
I.3.2	Preuve du Théorème d'absence de percolation	35
I.4	Absence de percolation pour la marche au plus proche voisin	48
I.4.1	Vérification de l'hypothèse Loop	48
I.4.2	Vérification de l'hypothèse Shield	52
I.5	Absence de percolation pour le modèle de navigation	53
I.5.1	Vérification de l'hypothèse Loop	53
I.5.2	Vérification de l'hypothèse Shield	54
I.6	Perspectives	55

I.1 Processus ponctuel de Poisson marqué

I.1.1 Espace des configurations marquées

On considère l'espace euclidien \mathbf{R}^d avec $d \geq 1$. Sauf mention du contraire, la norme utilisée dans cet espace sera toujours la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. La tribu borélienne associée sera notée $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ et la mesure de Lebesgue sera désignée par λ_d . On considère un espace mesurable quelconque $(\mathbb{M}, \mathcal{F}_{\mathbb{M}})$ que l'on appellera **espace des marques**. Pour n'importe quel ensemble A , la cardinalité de l'ensemble A sera notée $\#A$ et l'ensemble des parties de A sera noté $\mathcal{P}(A)$. On introduit l'espace des configurations de \mathbf{R}^d marquées par \mathbb{M} de la manière suivante :

Définition I.1.1. *On définit l'ensemble des configurations de \mathbf{R}^d marquées par \mathbb{M} :*

$$\mathcal{C}^{\mathbb{M}} = \{ \phi \subset \mathbf{R}^d \times \mathbb{M} ; \forall A \subset \mathbf{R}^d \text{ borné}, \# \phi_A < +\infty \},$$

où $\phi_A = \phi \cap (A \times \mathbb{M})$. Pour définir une tribu sur l'ensemble $\mathcal{C}^{\mathbb{M}}$, on considère les événements de comptage :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d), \forall F \in \mathcal{F}_{\mathbb{M}}, \forall n \in \mathbf{N}, \text{ on pose : } E_{(A,F,n)} = \{ \phi \in \mathcal{C}^{\mathbb{M}} ; \# \phi \cap (A \times F) \leq n \}.$$

On considère alors la tribu \mathcal{S} engendrée par les événements de comptage,

$$\mathcal{S} = \sigma \{ E_{(A,F,n)}, A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d), F \in \mathcal{F}_{\mathbb{M}}, n \in \mathbf{N} \}.$$

L'espace mesurable $(\mathcal{C}^{\mathbb{M}}, \mathcal{S})$ sera appelé *espace des configurations de \mathbf{R}^d marquées par \mathbb{M}* .

Pour une configuration $\phi \in \mathcal{C}^{\mathbb{M}}$, on désigne par ϕ_{germes} l'ensemble des localisations dans \mathbf{R}^d des points marqués de ϕ .

$$\phi_{\text{germes}} = \{\xi ; (\xi, \varpi) \in \phi\} \subset \mathbf{R}^d.$$

Par ailleurs, pour un borélien $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$, on définit la tribu

$$\mathcal{S}_{\Gamma} = \sigma \{E_{(A,F,n)}, A \subset \Gamma, F \in \mathcal{F}_{\mathbb{M}}, n \in \mathbf{N}\}.$$

I.1.2 Processus ponctuel de Poisson

On désigne par $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé standard.

Une variable aléatoire \mathbf{Y} définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans l'espace mesurable $(\mathcal{C}^{\mathbb{M}}, \mathcal{S})$ est appelée **processus ponctuel sur \mathbf{R}^d marqué par \mathbb{M}** . La loi de cette variable aléatoire sera notée $\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}$, où l'on a : $\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}(\cdot) = \mathbf{P}(\mathbf{Y}^{-1}(\cdot))$. Une théorie générale sur les processus ponctuels est présentée dans [9]. On définit alors la **mesure d'intensité** (ou **intensité**) $\Phi_{\mathbf{Y}}$ du processus ponctuel \mathbf{Y} de la façon suivante :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d) \otimes \mathcal{F}_{\mathbb{M}}, \Phi_{\mathbf{Y}}(B) = \mathbf{E}(\#(\mathbf{Y} \cap B)). \quad (\text{I.1.1})$$

En d'autres termes, la mesure d'intensité associée à un ensemble mesurable B l'espérance mathématique du nombre de points de Y contenus dans B .

Dans ce document, nous travaillerons spécifiquement sur des processus ponctuels de Poisson indépendamment marqués :

Définition I.1.2 (Processus ponctuel de Poisson). *Soit $\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow (\mathcal{C}^{\mathbb{M}}, \mathcal{S})$ un processus ponctuel. On considère $z > 0$ et μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{M}, \mathcal{F}_{\mathbb{M}})$. On dit que \mathbf{X} est un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbf{R}^d \times \mathbb{M}$ d'intensité $z\lambda_d \otimes \mu$ s'il satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d), F \in \mathcal{F}_{\mathbb{M}}$, la variable aléatoire $\#(\mathbf{X} \cap (A \times F))$ suit une loi de Poisson de paramètre $z\lambda_d(A)\mu(F)$.
2. Pour tout $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ deux à deux disjoints, et $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_{\mathbb{M}}$, les variables aléatoires $(\#(\mathbf{X} \cap (A_i \times F_i)))_{1 \leq i \leq n}$ sont mutuellement indépendantes.

Le processus ponctuel \mathbf{X} est aussi appelé **Processus ponctuel de Poisson sur \mathbf{R}^d d'intensité $z\lambda_d$ indépendamment marqué par μ** .

Pour tout couple (z, μ) il existe de tels processus ponctuels (voir par exemple [9]). Un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbf{R}^d \times \mathbb{M}$ d'intensité $z\lambda_d \otimes \mu$ peut être observé comme un sous-ensemble aléatoire localement fini de \mathbf{R}^d sur lequel on ajoute, en chacun des points, une marque distribuée par μ qui est indépendante de toutes les autres marques et du sous-ensemble de \mathbf{R}^d réalisé.

La première propriété importante du processus ponctuel de la Définition I.1.2 est la stationnarité. On introduit un opérateur de translation agissant à la fois sur \mathbf{R}^d , $\mathbf{R}^d \times \mathbb{M}$ et $\mathcal{P}(\mathbf{R}^d \times \mathbb{M})$. Pour $v, \xi \in \mathbf{R}^d, \varpi \in \mathbb{M}$ et $E \subset \mathbf{R}^d \times \mathbb{M}$, on a : $\tau_v(\xi) = \xi + v, \tau_v((\xi, \varpi)) = (\xi + v, \varpi)$ et $\tau_v(E) = \{\tau_v(x) ; x \in E\}$.

L'invariance par translation de la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^d assure que la mesure d'intensité $z\lambda_d \otimes \mu$ sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d) \otimes \mathcal{F}_{\mathbb{M}}$ est aussi invariante par translation :

$$\forall v \in \mathbf{R}^d, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d) \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{M}} : z\lambda_d \otimes \mu(\tau_v(B)) = z\lambda_d \otimes \mu(B),$$

et en conséquence, le processus ponctuel $\tau_v(\mathbf{X})$ a la même loi que \mathbf{X} pour tout vecteur $v \in \mathbf{R}^d$. On dit alors que le processus ponctuel de Poisson \mathbf{X} est stationnaire.

Une autre propriété importante du processus ponctuel de Poisson est l'ergodicité. Un événement $\Gamma \in \mathcal{S}$ est dit **stationnaire** si pour tout $v \in \mathbf{R}^d$:

$$\tau_v(\Gamma) = \{\tau_v(\phi) ; \phi \in \Gamma\} = \Gamma.$$

Proposition I.1.3. *Un processus ponctuel de Poisson indépendamment marqué \mathbf{X} est ergodique, c'est-à-dire que pour tout événement Γ stationnaire, nous avons*

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} \in \Gamma) \in \{0, 1\}.$$

L'ergodicité du processus ponctuel de Poisson est un résultat connu, démontré par exemple dans [9] et [5].

I.1.3 Théorie de Palm et formules de Campbell-Mecke

Dans cette sous-section, nous ne donnerons pas de preuves des résultats que nous énonçons, et qui proviennent de la littérature classique des processus ponctuels (les deux références utilisées pour cette section sont [9] et [5]). Le but de cette section est d'introduire la formule de Campbell-Mecke pour un processus ponctuel quelconque, et de donner sa version pour le cas particulier d'un processus ponctuel de Poisson. Nous commençons par définir la famille des lois de Palm d'un processus ponctuel (Définition I.1.6). Dans toute la section, la tribu $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d) \otimes \mathcal{F}_{\mathbb{M}}$ sera simplement notée \mathcal{B} .

Définition I.1.4. *Soit \mathbf{Y} un processus ponctuel sur \mathbf{R}^d marqué par \mathbb{M} de mesure d'intensité $\Phi_{\mathbf{Y}}$. On appelle **mesure de Campbell** de \mathbf{Y} la mesure $C_{\mathbf{Y}}$ définie sur $\mathcal{B} \otimes \mathcal{S}$ par :*

$$\forall B \in \mathcal{B}, \forall \Gamma \in \mathcal{S}, C_{\mathbf{Y}}(B \times \Gamma) = \mathbf{E} \left(\mathbb{1}_{\{\mathbf{Y} \in \Gamma\}} \sum_{x \in \mathbf{Y}} \mathbb{1}_{\{x \in B\}} \right) \quad (\text{I.1.2})$$

Remarque I.1.5. *Pour $\Gamma \in \mathcal{S}$, on a $C_{\mathbf{Y}}(\cdot \times \Gamma) \ll \Phi_{\mathbf{Y}}(\cdot)$. On note alors $\mathcal{P}(\Gamma) = \frac{dC_{\mathbf{Y}}(\cdot \times \Gamma)}{d\Phi_{\mathbf{Y}}(\cdot)}$ la dérivée de Radon-Nikodym. On a alors :*

$$C_{\mathbf{Y}}(B \times \Gamma) = \int_B \mathcal{P}_x(\Gamma) \Phi_{\mathbf{Y}}(dx).$$

*Si de plus, $\mathcal{P}_x(\cdot)$ est une mesure de probabilité sur $(\mathcal{C}^{\mathbb{M}}, \mathcal{S})$ pour $\Phi_{\mathbf{Y}}$ -presque tout $x \in \mathbf{R}^d \times \mathbb{M}$, on dit que $\mathcal{P}(\Gamma)$ est une **version régulière de la dérivée de Radon-Nikodym**. L'existence de telles versions régulières est prouvée dans [9].*

Définition I.1.6. *Soit \mathbf{Y} un processus ponctuel de \mathbf{R}^d marqué par \mathbb{M} de mesure d'intensité $\Phi_{\mathbf{Y}}$. On appelle $\{\mathcal{P}_x\}_{x \in \mathbf{R}^d \times \mathbb{M}}$ la famille des lois de **Palm** de \mathbf{Y} (où les \mathcal{P}_x sont des versions régulières).*

La formule de Campbell-Mecke a été introduite par Campbell puis démontrée par Mecke dans les années 1960. Nous en donnons l'énoncé :

Proposition I.1.7 (Formule de Campbell-Mecke). *Soit \mathbf{Y} un processus ponctuel sur \mathbf{R}^d marqué par \mathbb{M} . On considère $\Phi_{\mathbf{Y}}$ sa mesure d'intensité et F une fonction mesurable positive sur $(\mathbf{R}^d \times \mathbb{M}) \times \mathcal{C}^{\mathbb{M}}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{S}$, alors on a :*

$$\mathbf{E} \left(\sum_{x \in \mathbf{Y}} F(x, \mathbf{Y}) \right) = \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbb{M}} \left(\int_{\mathcal{C}^{\mathbb{M}}} F(x, \phi) \mathcal{P}_x(d\phi) \right) \Phi_{\mathbf{Y}}(dx) \quad (\text{I.1.3})$$

En général, la famille des lois de Palm d'un processus ponctuel quelconque est difficile à déterminer. Par ailleurs un processus ponctuel est caractérisé par sa famille de lois de Palm. Pour un processus ponctuel de Poisson \mathbf{X} , la famille des lois de Palm est connue, elle permet une nouvelle écriture de la formule (I.1.3).

Théorème I.1.8 (Formule de Slivniak-Mecke). *Soit \mathbf{X} un processus ponctuel de Poisson sur \mathbf{R}^d d'intensité $z\lambda_d$ et indépendamment marqué par μ . Alors pour tout $x \in \mathbf{R}^d \times \mathbb{M}$, on a $\mathcal{P}_x = \mathbf{P}_{\mathbf{X} \cup \{x\}}$. Pour toute fonction mesurable positive F , la formule (I.1.3) nous donne :*

$$\mathbf{E} \left(\sum_{x \in \mathbf{X}} F(x, \mathbf{X}) \right) = z \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbb{M}} \mathbf{E}(F(x, \mathbf{X} \cup \{x\})) \lambda_d \otimes \mu(dx). \quad (\text{I.1.4})$$

I.1.4 Moments factoriels d'un processus ponctuel de Poisson

Nous allons maintenant définir les moments factoriels d'un processus ponctuel de Poisson. Comme dans la section précédente, on notera simplement par \mathcal{B} la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d) \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{M}}$. Pour le produit cartésien $(\mathbf{R}^d \times \mathbb{M}) \times \dots \times (\mathbf{R}^d \times \mathbb{M})$, on considère la tribu borélienne produit $\mathcal{B}^n = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}$.

Définition I.1.9. *Pour un processus de Poisson \mathbf{X} comme dans la Définition I.1.2 et un entier $n \geq 2$, on définit la $n^{\text{ième}}$ puissance factorielle $\mathbf{X}^{(n)}$ de \mathbf{X} comme le processus ponctuel :*

$$\mathbf{X}^{(n)} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{X}^n ; x_i \neq x_j \text{ dès que } i \neq j\}.$$

La mesure d'intensité $\Phi^{(n)}$ de $\mathbf{X}^{(n)}$ s'écrit alors de la façon suivante :

$$\forall B \in \mathcal{B}^n, \Phi^{(n)}(B) = \mathbf{E} \left(\sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{X}^{(n)}} \mathbb{1}_{\{(x_1, \dots, x_n) \in B\}} \right).$$

La Proposition I.1.10 donne l'expression de la formule de Campbell-Mecke pour le processus ponctuel $\mathbf{X}^{(n)}$:

Proposition I.1.10. *La mesure $\Phi^{(n)}$ correspond à la mesure produit :*

$$\Phi^{(n)}(B) = \left(\bigotimes_{i=1}^n (z\lambda_d \otimes \mu) \right)(B).$$

Par ailleurs, pour toute fonction mesurable positive $F : (\mathbf{R}^d \times \mathbb{M})^n \rightarrow \mathbf{R}_+$, on a :

$$\mathbf{E} \left(\sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{X}^{(n)}} F((x_1, \dots, x_n)) \right) = \int_{(\mathbf{R}^d \times \mathbb{M})^n} F((x_1, \dots, x_n)) \Phi^{(n)}(d(x_1, \dots, x_n)). \quad (\text{I.1.5})$$

L'équation (I.1.5) représente une version simplifiée de la formule (I.1.3) pour des fonctions mesurables sur $(\mathbf{R}^d \times \mathbb{M})^n$. Dans la suite de la thèse, nous n'aurons pas recours à la formule générale faisant intervenir la famille des lois de Palm de la $n^{\text{ième}}$ puissance factorielle de \mathbf{X} , c'est pourquoi nous ne les avons pas introduites ci-dessus. Pour plus de détails sur la théorie de Palm des processus ponctuels, nous conseillons les ouvrages [9] et [2].

I.2 Graphe aléatoire avec unique arête sortante (POG)

Dans cette section, nous proposons un cadre général pour l'étude des graphes orientés avec unique arête sortante que l'on peut construire sur un processus ponctuel de Poisson indépendamment marqué. Ces graphes aléatoires seront supposés stationnaires. Par ailleurs, ces graphes seront entièrement déterminés par la configuration marquée sur laquelle on les construit. En d'autres termes, tout l'aléa d'un graphe sera contenu dans le processus ponctuel de Poisson. Nous utiliserons la terminologie **Poisson outdegree-one graph** pour ces graphes, l'acronyme **POG** renverra à cette terminologie. Une attention particulière sera portée à l'étude des composantes connexes, et nous verrons que la condition "outdegree-one" implique plusieurs propriétés topologiques qui seront cruciales au moment d'étudier les questions de percolation. L'étude des **POG** peut s'insérer dans celle plus globale des graphes aléatoires, les livres de B. Bollobàs ([3]) et M. Penrose ([24]) offrent une théorie détaillée et accompagnée de (très) nombreux exemples. En fin de section, nous proposerons plusieurs exemples de **POG**, et de nouveaux exemples seront introduits dans les chapitres suivants.

I.2.1 Graphe outdegree-one

Un graphe outdegree-one est une fonction qui associe à un couple (ϕ, x) tel que $x \in \phi$, l'unique point marqué de ϕ auquel va se connecter x par une arête orientée. Cette fonction n'est en général définie que sur une partie \mathcal{C}' de l'ensemble des configurations marquées $\mathcal{C}^{\mathbb{M}}$.

Définition I.2.1. Soit $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}^{\mathbb{M}}$ un ensemble de configurations invariant par translation. Une fonction h de l'ensemble $\mathcal{C}' \times (\mathbf{R}^d \times \mathbb{M})$ à valeurs dans $\mathbf{R}^d \times \mathbb{M}$ est une **fonction de graphe** si

1. $\forall \phi \in \mathcal{C}', \forall x \in \phi, h(\phi, x) \in \phi \setminus \{x\}$,
2. $\forall v \in \mathbf{R}^d, \forall \phi \in \mathcal{C}', \forall x \in \phi, h(\tau_v(\phi), \tau_v(x)) = \tau_v(h(\phi, x))$.

Le couple (\mathcal{C}', h) définit alors un **graphe outdegree-one** de $\mathcal{C}^{\mathbb{M}}$ et pour une configuration $\phi \in \mathcal{C}'$, on définit le graphe de ϕ pour (\mathcal{C}', h) :

$$\mathcal{G}_h(\phi) = (\phi, \mathcal{V})$$

où $\mathcal{V} = \{(x, h(\phi, x))\}_{x \in \phi}$.

Pourquoi l'introduction d'un sous-ensemble \mathcal{C}' de $\mathcal{C}^{\mathbb{M}}$ est elle nécessaire? Prenons l'exemple de la connexion au plus proche voisin dans le plan. Pour que l'on puisse dessiner un graphe orienté reliant chaque point marqué à son plus proche voisin dans une configuration, il est nécessaire que la configuration possède au moins deux points marqués et

qu'elle ne contienne pas de triangle isocèle. Ainsi la fonction h qui définira le graphe sera uniquement définie sur un sous-ensemble strict de $\mathcal{C}^{\mathbb{M}}$.

Nous pouvons désormais commenter la structure des composantes connexes du graphe $\mathcal{G}_h(\phi)$. Pour un point marqué $x \in \phi$, la branche sortante de x dans le graphe sera appelée **composante Forward** de x dans ϕ ou plus simplement **Forward** de x dans ϕ :

$$\text{For}(\phi, x) = \{x, h(\phi, x), h(\phi, h(\phi, x)), \dots\}.$$

Le Forward $\text{For}(\phi, x)$ est une branche du graphe, éventuellement infinie. On définit également la **composante Backward** ou plus simplement **Backward** de x dans ϕ comme l'ensemble des points $y \in \phi$ dont le Forward contient x :

$$\text{Back}(\phi, x) = \{y \in \phi ; x \in \text{For}(\phi, y)\}.$$

Le point x peut être vu comme la racine de sa composante Backward. On note que les composantes Forward et Backward ne sont pas disjointes (x se trouve dans l'intersection qui peut éventuellement être plus grande). Nous définissons le **cluster** de x dans ϕ comme la réunion de son Forward et son Backward :

$$\text{C}(\phi, x) = \text{For}(\phi, x) \cup \text{Back}(\phi, x).$$

Nous attirons l'attention sur le fait que le cluster de x dans ϕ ne correspond pas exactement à la composante connexe de x dans ϕ . Pour obtenir la composante connexe de x , il faut rajouter au cluster les composantes Backward de tous les points du Forward de x (voir Figure I.1).

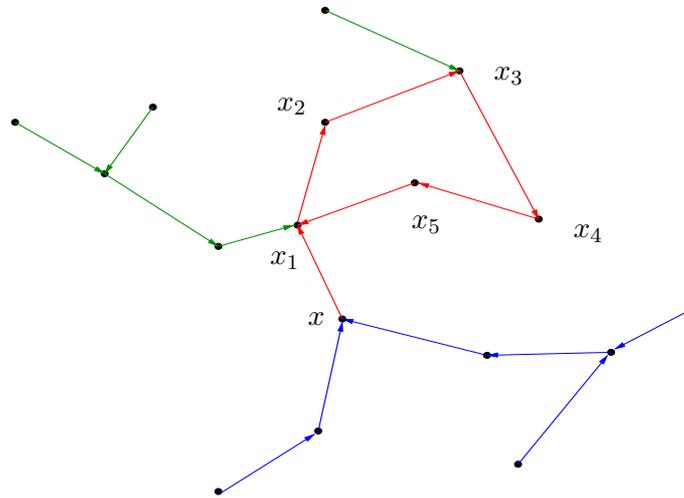


FIGURE I.1 – Cette figure représente la composante connexe du point marqué x . Les arêtes sortantes de la composante Forward apparaissent en rouge tandis que celles de la composante Backward sont bleues. Le cluster de x est alors constitué des points des composantes rouge et bleue. Le reste de la composante connexe de x apparaît en vert.

Il n'est pas difficile d'observer que l'ensemble $\text{For}(\phi, x)$ est fini si et seulement s'il contient une **boucle**. En conséquence, les clusters finis contiennent une boucle.

Définition I.2.2. On se donne $\phi \in \mathcal{C}'$. Une boucle de $\mathcal{G}_h(\phi)$ est un sous-ensemble $\{y_1, \dots, y_l\} \subset \phi$ tel que :

1. $\forall 1 \leq i \leq l-1, h(\phi, y_i) = y_{i+1},$
2. $h(\phi, y_l) = y_1.$

L'entier l définit alors la taille de la boucle.

La structure outdegree-one de $\mathcal{G}_h(\phi)$ assure qu'il y a au plus une boucle par composante connexe. Une première observation importante est que l'absence de composante connexe infinie dans $\mathcal{G}_h(\phi)$ est équivalente à l'absence de cluster infini. En effet, si tous les clusters sont finis, la composante connexe d'un point marqué quelconque x dans $\mathcal{G}_h(\phi)$ contient une boucle $\{x_1, \dots, x_n\}$ (en conséquence de la finitude du Forward de x). La composante connexe du point x correspond alors au Backward de l'un des points de la boucle. Ce Backward est fini car tous les clusters le sont. Ainsi, pour l'étude des problèmes de percolation, il est plus simple de travailler sur les clusters que sur les composantes connexes entières.

Par ailleurs, l'abondance des boucles dans un graphe outdegree-one sera un élément important lorsque nous étudierons les questions de percolation.

Pour $\phi \in \mathcal{C}^{\mathbb{M}}, x \in \phi,$ et $\Lambda \subset \mathbf{R}^d$ on dira que x **boucle** dans Λ pour ϕ si le Forward de x dans ϕ est fini et que la première coordonnée du centre de gravité $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_l}{l}$ de sa boucle $\{y_1, \dots, y_l\}$ appartient à Λ (où $y_i = (\xi_i, \dots)$).

I.2.2 Poisson outdegree-one graph (POG)

La Définition I.2.1 va désormais être employée pour construire un graphe orienté outdegree-one sur une réalisation d'un processus ponctuel de Poisson.

Définition I.2.3. Soit \mathbf{X} un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbf{R}^d \times \mathbb{M}$ d'intensité $z\lambda_d \otimes \mu$ et (\mathcal{C}', h) un graphe outdegree-one de $\mathcal{C}^{\mathbb{M}}$. On dit que le triplet $(\mathcal{C}', h, \mathbf{X})$ est un **Poisson outdegree-one graph (POG)** si

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} \in \mathcal{C}') = 1.$$

En d'autres termes, $(\mathcal{C}', h, \mathbf{X})$ est un **POG** si la fonction de graphe h permet de construire un graphe outdegree-one sur presque toute réalisation de \mathbf{X} .

Dans la Section I.2.1, nous avons vu que, pour un graphe outdegree-one donné, chaque composante connexe finie contient exactement une boucle. On peut se poser la question suivante : existe-t-il des composantes connexes infinies contenant une boucle ? En général, on peut trouver des configurations de \mathcal{C}' dont le graphe possède une composante connexe infinie avec boucle. Néanmoins, nous montrons dès maintenant que pour un **POG** $(\mathcal{C}', h, \mathbf{X})$, presque sûrement, il n'existe pas de composante connexe infinie avec boucle.

Proposition I.2.4. Soit $(\mathcal{C}', h, \mathbf{X})$ un **POG**. Nous avons :

$$\mathbf{P}(\mathcal{G}_h(\mathbf{X}) \text{ possède une composante connexe infinie avec boucle}) = 0.$$

Démonstration :

Pour des sommets $u, u' \in \mathbf{Z}^d$ et une configuration $\phi \in \mathcal{C}'$, on définit :

$$\begin{aligned} Q_u(\phi) &= \left\{ x \in \phi ; x \text{ boucle dans } u \oplus \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right]^d \right\}, \\ Q_{u'}^{u'}(\phi) &= \phi_{u' \oplus \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right]^d} \cap Q_u(\phi). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que pour tout sommet $u \in \mathbf{Z}^d$, $\mathbf{E}(\#Q_u(\mathbf{X})) < +\infty$, ce qui démontrera la Proposition I.2.4. La stationnarité de \mathbf{X} et de h (deuxième item de la Définition I.2.1) nous permet d'écrire :

$$\forall u \in \mathbf{Z}^d, \mathbf{E}(\#Q_u(\mathbf{X})) = \mathbf{E}(\#Q_0(\mathbf{X})),$$

et il nous suffit donc de montrer que $\mathbf{E}(\#Q_0(\mathbf{X})) < +\infty$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\#Q_0(\mathbf{X})) &= \sum_{u \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{E}(\#Q_u^u(\mathbf{X})) \\ &= \sum_{u \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{E}(\#Q_{-u}^0(\mathbf{X})) \end{aligned}$$

où la deuxième égalité est obtenue grâce à la stationnarité de \mathbf{X} et de h . Puisque chaque cluster de $\mathcal{G}(\mathbf{X})$ possède au plus une boucle, on a :

$$\text{p.s.} \sum_{u \in \mathbf{Z}^d} \#Q_{-u}^0(\mathbf{X}) \leq \#\mathbf{X}_{\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right]^d}.$$

Il s'ensuit que $\mathbf{E}(\#Q_0(\mathbf{X})) \leq z$. Ce qui prouve la Proposition I.2.4. L'argument de stationnarité employé ci-dessus est couramment appelé **transport de masse**, il est utilisé de la même façon dans [15]. Pour plus de détails sur l'utilisation du transport de masse dans l'étude de processus ponctuels stationnaires, on peut se référer à [16] et [20]. \square

Ce dernier résultat nous dit que presque sûrement, toutes les composantes connexes de $\mathcal{G}_h(\mathbf{X})$ contenant une boucle sont finies. Il est formulé de la même façon dans [15] et [8]. Pour montrer que toutes les composantes connexes de $\mathcal{G}_h(\mathbf{X})$ sont finies avec probabilité 1, il suffit donc de montrer que presque sûrement, toutes les composantes connexes de $\mathcal{G}_h(\mathbf{X})$ possèdent une boucle.

Corollaire I.2.5. *Soit $(\mathcal{C}', h, \mathbf{X})$ un POG. On a l'équivalence suivante :*

$$\mathbf{P}(\forall x \in \mathbf{X}, \#C(\mathbf{X}, x) < +\infty) = 1 \iff \mathbf{P}(\forall x \in \mathbf{X}, \#For(\mathbf{X}, x) < +\infty) = 1. \quad (\text{I.2.1})$$

La prochaine section présente deux exemples de POG dont les questions d'absence de percolation seront étudiées dans les Sections I.4 et I.5.

I.2.3 Exemples de POG

Marche aléatoire aux $(p_k)_{k \geq 1}$ plus proches voisins

La dimension d est un réel quelconque supérieur ou égal à 2. L'ensemble des marques \mathbb{M} est constitué des entiers strictement positifs : $\mathbb{M} = \mathbf{N}^*$. On considère μ une mesure de

probabilité quelconque sur \mathbf{N}^* et on notera $p_k = \mu(\{k\})$. Pour une configuration $\phi \in \mathcal{C}^{\mathbb{M}}$, et un point marqué $x = (\xi, k) \in \phi$, nous connectons (lorsque cela est possible) x à son unique $k^{\text{ième}}$ plus proche voisin dans $\phi \setminus \{x\}$. Précisément, $x' = (\xi', k') \in \phi$ est un $k^{\text{ième}}$ plus proche voisin de x dans $\phi \setminus \{x\}$ si la boule ouverte de centre ξ et de rayon $\|\xi - \xi'\|$ contient exactement $k - 1$ points de $\phi \setminus \{x\}$.

On définit alors l'ensemble \mathcal{C}' de la façon suivante :

$$\mathcal{C}' = \{ \phi \in \mathcal{C}^{\mathbb{M}} ; \#\phi = +\infty \text{ et } \#S_\phi(x, r) \in \{0, 1\} \text{ pour tout } (x, r) \in \phi \times \mathbf{R}_+ \},$$

où $S_\phi(x, r) = \{x' = (\xi', k') \in \phi ; \|\xi - \xi'\| = r\}$ pour tout $x = (\xi, k) \in \phi$ et $r \in \mathbf{R}_+$. On définit alors la fonction de graphe suivante :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}', \forall x \in \phi, h(\phi, x) = \text{l'unique } k^{\text{ième}} \text{ plus proche voisin de } x \text{ dans } \phi \setminus \{x\}.$$

Si l'on considère \mathbf{X} un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbf{R}^d \times \mathbf{N}^*$ d'intensité $z\lambda_d \otimes \mu$ (avec $z > 0$), alors :

Proposition I.2.6. *Le triplet $(\mathcal{C}', h, \mathbf{X})$ défini ci-dessus est un **POG**.*

Démonstration : L'ensemble \mathcal{C}' est clairement invariant par translation et le couple (\mathcal{C}', h) définit bien un graphe outdegree-one. Il faut maintenant vérifier que $\mathbf{P}(\mathbf{X} \in \mathcal{C}') = 1$. Le fait que $\mathbf{P}(\#\mathbf{X} = +\infty) = 1$ est immédiat. Nous voulons désormais montrer que

$$\mathbf{P}(\forall (x, r) \in \mathbf{X} \times \mathbf{R}_+ ; S_{\mathbf{X}}(x, r) \in \{0, 1\}) = 1. \quad (\text{I.2.2})$$

Pour prouver (I.2.2), nous allons montrer que

$$\mathbf{E} \left(\sum_{(x, x', x'') \in \mathbf{X}^{(3)}} \mathbf{1}_{\{\|\xi - \xi'\| = \|\xi - \xi''\|\}} \right) = 0. \quad (\text{I.2.3})$$

On utilise alors la formule de Campbell-Mecke énoncée en (I.1.5) :

$$\mathbf{E} \left(\sum_{(x, x', x'') \in \mathbf{X}^{(3)}} \mathbf{1}_{\{\|\xi - \xi'\| = \|\xi - \xi''\|\}} \right) = z^3 \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} \mathbf{1}_{\{\|\xi - \xi'\| = \|\xi - \xi''\|\}} d\xi d\xi' d\xi''. \quad (\text{I.2.4})$$

Pour un point $\eta \in \mathbf{R}^d$ et un rayon $r > 0$, on notera $S(\eta, r)$ la sphère de centre η et de rayon r . Le théorème de Fubini permet de calculer le terme de droite de (I.2.4)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\sum_{(x, x', x'') \in \mathbf{X}^{(3)}} \mathbf{1}_{\{\|\xi - \xi'\| = \|\xi - \xi''\|\}} \right) &= z^3 \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} \lambda_d(\{\xi'' \in \mathbf{R}^d ; \|\xi - \xi''\| = \|\xi - \xi'\|\}) d\xi d\xi', \\ &= z^3 \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} \lambda_d(S(\xi, \|\xi - \xi'\|)) d\xi d\xi', \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a bien prouvé (I.2.2). Le triplet $(\mathcal{C}', h, \mathbf{X})$ est un **POG**. □

Finalement le **POG** ci-dessus est entièrement déterminé par la suite $(p_k)_{k \geq 1}$ et on nommera le modèle défini ci-dessus **marche aléatoire aux $(p_k)_{k \geq 1}$ plus proches voisins**.

Lorsque μ est une mesure de Dirac au point 1, ce modèle correspond au graphe de la marche au plus proche voisin sur un processus ponctuel de Poisson. Puisque la marque est identique pour tous les points d'une configuration, on identifie un point marqué à sa localisation dans \mathbf{R}^d . Dans ce modèle précis, les composantes Forward du graphe ont une propriété de décroissance. Pour $\phi \in \mathcal{C}'$ et $x \in \phi$, si l'on écrit le Forward de x dans ϕ comme une suite $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ avec $x_0 = x$ et $x_{i+1} = h(\phi, x_i)$, on a alors la propriété suivante :

$$\forall i \geq 1, \|x_{i+1} - x_i\| \leq \|x_i - x_{i-1}\|, \quad (\text{I.2.5})$$

et il n'y a égalité dans (I.2.5) que si $x_{i-1} = x_{i+1}$, ce qui correspond à une boucle de taille 2 (voir Figure I.2). Dans ce modèle précis, toutes les boucles sont constituées de deux points. Une boucle n'est rien d'autre qu'un couple de "mutuels plus proches voisins".

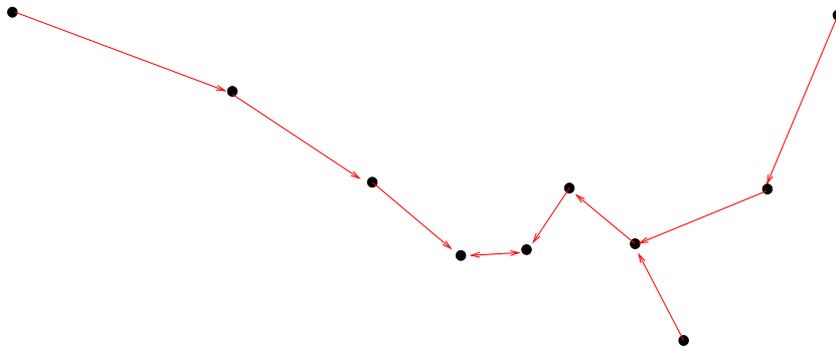


FIGURE I.2 – Sur cette figure, la décroissance de la taille des arêtes de chaque branche Forward apparaît. Précisément cette décroissance est stricte jusqu'à ce que le Forward atteigne un couple de "mutuels plus proches voisins".

Pour que le graphe $\mathcal{G}_h(\phi)$ possède une composante Forward infinie, il faut qu'il existe une suite de points $(x_i)_{i \geq 0}$ de ϕ , qui soit sans répétition ($x_i \neq x_j$ dès que $i \neq j$) et qui vérifie :

$$\forall i \geq 1, \|x_{i+1} - x_i\| < \|x_i - x_{i-1}\|.$$

Une telle suite est appelée **chaîne descendante infinie** de ϕ . D.J. Daley et G. Last ont prouvé dans [8] qu'il n'existait pas, avec probabilité 1, de chaîne descendante infinie dans \mathbf{X} , ce qui démontre l'absence de percolation Forward de la marche au plus proche voisin et donc (Corollaire I.2.5) l'absence de percolation.

L'argument (I.2.5) de décroissance dans les branches Forward se perd dès que l'on considère une autre mesure de probabilité μ sur \mathbf{N}^* . Considérons simplement le cas d'une mesure de Dirac $\delta_{\{k\}}$ avec $k \geq 2$. Il est facile de se convaincre que les arêtes d'une composante Forward ne sont pas forcément de plus en plus petites. Par ailleurs les boucles ne sont pas nécessairement de taille 2. L'absence de percolation Forward pour ces modèles ne peut pas se prouver par un argument d'absence de chaîne descendante.

L'un des enjeux des prochaines sections de ce chapitre est de déterminer une condition sur la suite $(p_k)_{k \geq 1}$ qui assure l'absence de percolation presque sûre de la marche aux $(p_k)_{k \geq 1}$ plus proches voisins.

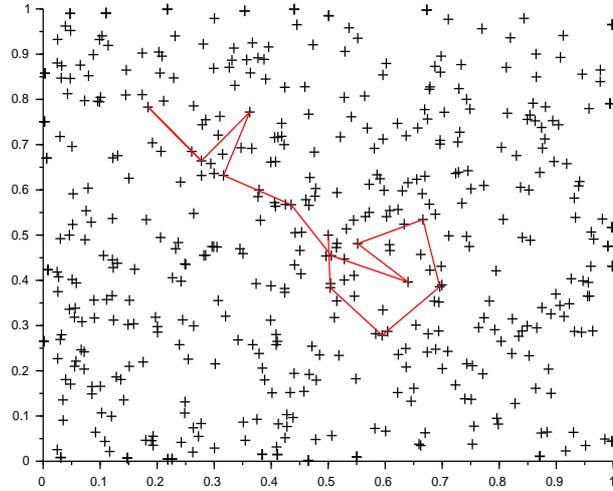


FIGURE I.3 – Sur cette simulation, on observe une marche au 30^{ième} plus proche voisin dans le carré $[0, 1]^2$. On a dessiné en rouge la composante Forward du point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Le paramètre d'intensité z est égal à 500. La composante Forward observée est finie, et sa boucle est de taille 2.

Modèle de navigation

Le modèle suivant représente une marche au plus proche voisin sélectionné dans une région aléatoire. Il est directement inspiré d'un modèle introduit dans [4]. La dimension d est égale à 2 et on se donne un paramètre $\epsilon \in (0, \pi]$ qui correspond à une ouverture angulaire. On considère l'ensemble des marques $\mathbb{M} = [0, 1]$ muni de la tribu borélienne et on se donne μ une mesure de probabilité sur $[0, 1]$. Étant donnée une configuration $\phi \in \mathcal{C}^{\mathbb{M}}$ et un point $x = (\xi, \varpi) \in \phi$, on souhaite relier x à son unique plus proche voisin dans le cône semi-infini d'origine ξ , de direction $2\pi\varpi$ et d'ouverture angulaire 2ϵ :

$$C(x) = \xi \oplus \{(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) ; r > 0 \text{ et } |\alpha - 2\pi\varpi| \leq \epsilon\}.$$

L'ensemble de configurations \mathcal{C}' sur lequel cette construction est permise pour tout point est sensiblement identique à celui considéré dans l'exemple précédent. On ne remontre pas que sa probabilité vaut 1 sous la loi d'un processus ponctuel de Poisson.

Pour $\phi \in \mathcal{C}'$ et $x = (\xi, \varpi) \in \phi$, on définit $h(\phi, x)$ comme étant l'unique point marqué $x' = (\xi', \varpi') \in \phi$ tel que :

$$\|\xi - \xi'\| = \min \{\|\xi - \xi''\| ; \xi'' \in C(x) \cap \phi_{\text{germes}}\}.$$

La Figure I.4 représente une partie d'un exemple de graphe outdegree-one construit de cette façon. En considérant \mathbf{X} un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbf{R}^2 \times [0, 1]$ d'intensité $z\lambda_2 \otimes \mu$, le triplet $(\mathcal{C}', h, \mathbf{X})$ est un **POG**.

Lorsque le paramètre ϵ vaut π , on retrouve la marche au plus proche voisin dans le plan dont l'absence de percolation est déjà connue. Par ailleurs, lorsque la mesure de probabilité

μ est une mesure de Dirac et que le paramètre ϵ vaut $\frac{\pi}{2}$, le modèle de navigation coïncide avec la **Directed Spanning Forest** dans laquelle toutes les branches sont semi-infinies (et donc sans boucle) par construction (voir [6]). Ces deux exemples motivent la recherche d'une condition suffisante sur les paramètres ϵ et μ qui assurerait l'absence de percolation.

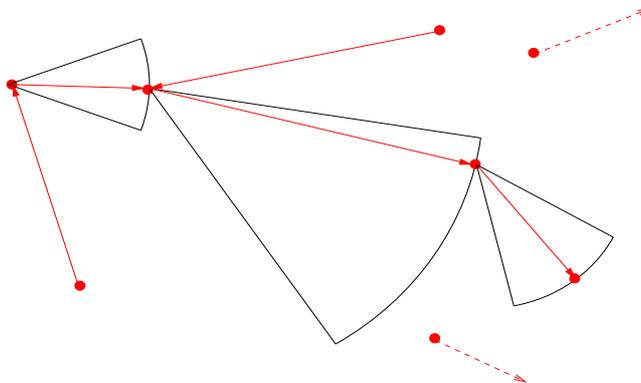


FIGURE I.4 – On a construit en rouge une partie du graphe outdegree-one du modèle de navigation pour une configuration donnée.

Modèles germes grains

De nombreux exemples de **POG** s'obtiennent comme l'état final d'une dynamique germes grains. Ces dynamiques seront précisément étudiées dans le Chapitre II. En chaque point (que l'on appelle germe) d'une configuration de \mathbf{R}^d grandit un grain (qui peut être un segment, une boule, un convexe quelconque). Les grains ne sont pas autorisés à se recouvrir les uns les autres. Ainsi chaque grain grandissant s'arrête lorsqu'il percute un grain plus "robuste" que lui. On parle d'état final de la dynamique germes grains lorsque tous les grains sont arrêtés et le graphe outdegree-one s'obtient en connectant chaque germe au germe du grain stoppant. Un formalisme précis pour l'étude de ces modèles et de nombreux exemples sont donnés dans le Chapitre II.

I.3 Absence de percolation

On se donne $(\mathcal{C}', h, \mathbf{X})$ un **POG**. On dit que $(\mathcal{C}', h, \mathbf{X})$ ne percole pas si :

$$\mathbf{P}(\forall x \in \mathbf{X}, \#C(\mathbf{X}, x) < +\infty) = 1.$$

D'après le Corollaire I.2.5, l'absence de percolation est équivalente à

$$\mathbf{P}(\forall x \in \mathbf{X}, \#\text{For}(\mathbf{X}, x) < +\infty) = 1. \quad (\text{I.3.1})$$

Le Théorème I.3.1 donne une condition suffisante pour que (I.3.1) soit satisfaite. Précisément chaque **POG** vérifiant deux hypothèses (appelées respectivement **hypothèse Loop** et **hypothèse Shield**) vérifie (I.3.1). Dans la première partie de cette section, nous présentons en détail ces deux hypothèses et nous énonçons le Théorème I.3.1. La deuxième partie de la section est dédiée à la preuve du Théorème I.3.1.

Dans toute cette section, l'ensemble des marques \mathbb{M} s'identifie avec le compact $[0, 1]$ et sera toujours muni de la tribu borélienne. La mesure de probabilité μ considérée sur cet espace de marques vérifiera : $\mu(\mathcal{U}) > 0$ pour tout ouvert non vide \mathcal{U} de $[0, 1]$.

I.3.1 Énoncé du Théorème

Nous présentons les deux hypothèses évoquées ci-dessus. On considère $(\mathcal{C}', h, \mathbf{X})$ un **POG**.

Hypothèse Loop

Pour résumer, l'hypothèse Loop exprime la possibilité d'ajouter une boucle au voisinage d'un point marqué x telle que le point x se connecte sur la boucle ajoutée et le Backward de x ne se réduit pas en cardinalité.

Soient $\phi \in \mathcal{C}'$ et $k \in \mathbf{N}^*$. On dit que la configuration ϕ est **k -looping** si pour tout $x \in \phi$, il existe une boule ouverte $A_x \subset (\mathbf{R}^d \times [0, 1])^k$ tel que pour tout $(x_1, \dots, x_k) \in A_x$, on a :

- (i) $\text{For}(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, x) \subset \{x, x_1, \dots, x_k\}$,
- (ii) $\forall 1 \leq i \leq k$, x_i appartient à la composante connexe de x dans $\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}$ et

$$\text{For}(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, x_i) \subset \{x, x_1, \dots, x_k\}.$$

- (iii) $\forall y \in \phi \setminus \{x\}$, tel que $h(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, y) \neq h(\phi, y)$, on a :

$$h(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, y) \in \text{Back}(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, x) \cap \{x, x_1, \dots, x_k\}.$$

En particulier, l'item (iii) implique que :

$$\text{Back}(\phi, x) \subset \text{Back}(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, x). \quad (\text{I.3.2})$$

Nous dirons que $(\mathcal{C}', h, \mathbf{X})$ vérifie l'hypothèse Loop s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que :

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} \text{ est } k\text{-looping}) = 1.$$

Une configuration est **k -looping** si pour chacun de ses points, nous avons la possibilité d'assurer la finitude du Forward sans réduire le Backward en ajoutant un k -uplet de points marqués (voir Figure I.5). La condition (i) semble naturelle à supposer pour garantir l'absence de percolation : on doit pouvoir créer des boucles. En revanche, la condition exprimée par l'équation (I.3.2) apparaît plus surprenante et technique à vérifier dans la pratique. Elle sera un argument crucial de la preuve de la Proposition I.3.8. Enfin, l'item (ii) sera un point clé de la preuve du Lemme I.3.12.

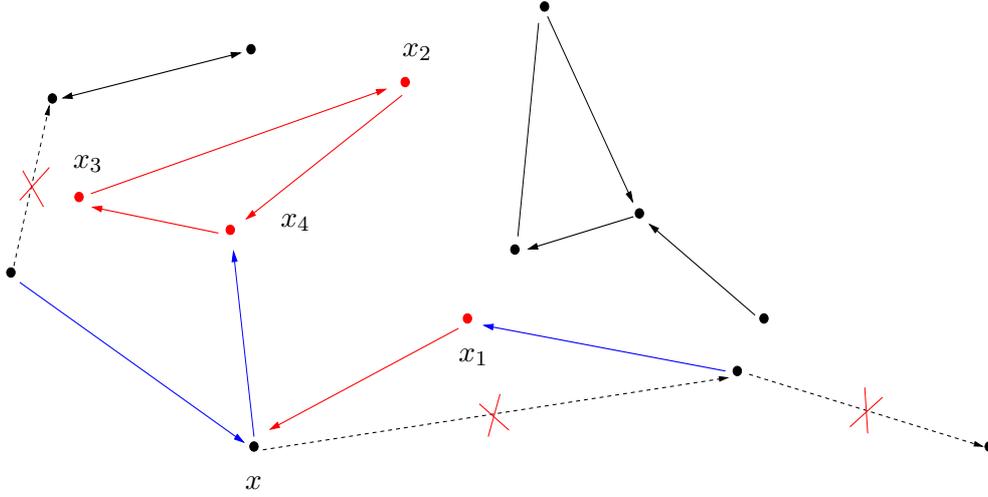


FIGURE I.5 – Sur cette figure, l’entier k vaut 4. Pour simplifier, nous avons dessiné un graphe planaire (pas de croisement entre deux arêtes orientées). Nous avons barré d’une croix rouge les arêtes (dessinées en pointillés bleus) qui ne survivent pas à l’arrivée du quadruplet $\{x_1, \dots, x_4\} \in A_x$, alors que les arêtes noires sont celles qui ne sont pas modifiées. Les arêtes sortantes des points x_1, \dots, x_4 apparaissent en rouge tandis que les nouvelles arêtes produites par l’ajout du quadruplet sont en bleues. On voit que les quatre points marqués ajoutés créent une boucle de taille 3, et le point x va se connecter à cette boucle. Les items (i) et (ii) sont vérifiés. Par ailleurs, toutes les arêtes (trois au total) modifiées par cet ajout de points vont se connecter à l’ensemble $\{x, x_1, \dots, x_4\}$.

Hypothèse Shield

L’hypothèse Shield exprime une propriété de stabilisation : avec grande probabilité, le graphe outdegree-one va comporter de nombreuses murailles fermées. Une muraille fermée est un sous-graphe qui sépare l’espace en deux parties disjointes telles que les comportements du graphe dans chacune des parties sont indépendants. Cette hypothèse est inspirée d’une version légèrement différente énoncée dans [15].

Nous dirons que le triplet $(\mathcal{C}', h, \mathbf{X})$ satisfait l’hypothèse Shield s’il existe un entier α et une suite d’événements $(\mathcal{E}_m)_{m \geq 1}$ tels que :

- (i) $\forall m \geq 1, \mathcal{E}_m \in \mathcal{S}_{[-\alpha m, \alpha m]^d}$,
- (ii) $\mathbf{P}(\mathbf{X} \in \mathcal{E}_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1$,
- (iii) On considère le graphe \mathbf{Z}^d dont les arêtes sont données par $\{\{u, u'\}, \|u - u'\|_\infty = 1\}$. On se donne trois ensembles deux à deux disjoints A_1, A_2, V de \mathbf{Z}^d . On suppose que $\forall i = 1, 2$, la frontière $\partial A_i = \{u \in \mathbf{Z}^d \setminus A_i, \exists u' \in A_i, \|u - u'\|_\infty = 1\}$ est incluse dans V . On pose alors :

$$\mathcal{A}_i = \left(A_i \oplus \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right]^d \right) \setminus (V \oplus [-\alpha, \alpha]^d). \quad (\text{I.3.3})$$

Alors, pour m suffisamment grand et pour toutes configurations $\phi, \phi' \in \mathcal{C}'$ telles que

$\tau_{-mu}(\phi) \in \mathcal{E}_m$ pour tout $u \in V$, nous avons :

$$\forall x \in \phi_{m\mathcal{A}_1}, h(\phi, x) = h(\phi_{m\mathcal{A}_2^c} \cup \phi'_{m\mathcal{A}_2}, x). \quad (\text{I.3.4})$$

Dans l’item (iii), l’ensemble mV porte une muraille infranchissable (d’où la terminologie Shield) (voir Figure I.6). En effet, l’égalité (I.3.4) implique que :

$$\forall x \in \phi_{m\mathcal{A}_1}, h(\phi, x) \in \phi_{m\mathcal{A}_2^c}.$$

Il n’existe donc pas d’arête de $\mathcal{G}_h(\phi)$ qui connecte les composantes $m\mathcal{A}_1$ et $m\mathcal{A}_2$. Plus précisément, toutes modifications de ϕ dans $m\mathcal{A}_2$ (ajouts ou retraits de points) ne changent aucune arête sortante de $\phi_{m\mathcal{A}_1}$; cette information sera un point clé de la preuve de la Proposition I.3.8.

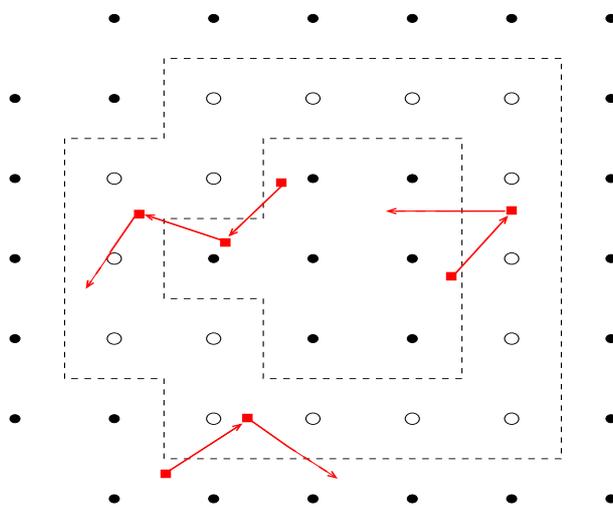


FIGURE I.6 – Pour simplifier l’image, nous avons choisi $\alpha = \frac{1}{2}$ de manière à ce que $\mathcal{A}_i = (A_i \oplus [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d)$, $\forall i = 1, 2$. Les petits disques blancs sont les sommets de mV , ils portent une muraille dessinée en pointillés. Les petits disques noirs sont les sommets de $m\mathcal{A}_1$ (à l’intérieur de mV) et $m\mathcal{A}_2$ (à l’extérieur de mV). Les petits carrés rouges sont des points de ϕ . Si $\tau_{-mu}(\phi) \in \mathcal{E}_m$ pour tout $u \in V$, l’une des conséquences de l’hypothèse Shield stipule qu’il est impossible pour un segment $[\xi, \xi']$, où $x = (\xi, \cdot)$ et $h(\phi, x) = (\xi', \cdot)$, de traverser l’ensemble $m(V \oplus [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d)$ depuis $m\mathcal{A}_1$ vers $m\mathcal{A}_2$ ou depuis $m\mathcal{A}_2$ vers $m\mathcal{A}_1$ par symétrie des rôles de $m\mathcal{A}_1$ et $m\mathcal{A}_2$.

On peut énoncer le théorème principal du chapitre.

Théorème I.3.1. *Soit $(\mathbf{C}', h, \mathbf{X})$ un **POG** qui vérifie les hypothèses Loop et Shield. Alors $(\mathbf{C}', h, \mathbf{X})$ ne percole pas.*

Le Théorème I.3.1 est prouvé dans la Section I.3.2. Nous pouvons vérifier les hypothèses Loop et Shield pour certains **POG** de la Section I.2.3. Précisément :

Théorème I.3.2. *Les **POG** suivant ne percolent pas :*

1. *La marche aux $(p_k)_{k \geq 1}$ plus proches voisins dès que la suite $(p_k)_{k \geq 1}$ est nulle à partir d’un certain rang ;*

2. Le modèle de navigation dès que μ est une mesure strictement positive sur les ouverts non vides de $[0, 1]$.

La vérification des hypothèses pour le modèle de la marche aux plus proches voisins sera l'objet de la Section I.4, tandis que la Section I.5 traitera le cas du modèle de navigation. Remarquons que le modèle de la marche au $(p_k)_{k \geq 1}$ plus proches voisins n'a pas été défini sur $\mathbb{M} = [0, 1]$, il faudra donc le réécrire afin qu'il soit compatible avec les conditions d'utilisation du Théorème I.3.1.

Par ailleurs, la loi de la taille d'une composante connexe typique dans un **POG** qui ne percole pas est un sujet d'étude intéressant. La taille d'une composante connexe se définissant comme le nombre de points. Dans le cas particulier des modèles germes grains que nous étudierons en détail dans le Chapitre II, la taille d'une composante connexe peut prendre une définition liée à la nature du grain (surface, longueur,...) et l'étude de sa loi peut donc nourrir de nombreuses interprétations physiques (on pense notamment à la dynamique des particules).

I.3.2 Preuve du Théorème d'absence de percolation

Nous commençons par donner un résumé de la preuve qui va suivre.

Résumé de la Preuve

Nous allons montrer que tout **POG** vérifiant les hypothèses Loop et Shield satisfait (I.3.1). On va supposer par l'absurde que ce n'est pas le cas :

$$\mathbf{P}(\exists x \in \mathbf{X} ; \#\text{For}(\mathbf{X}, x) = +\infty) > 0. \quad (\text{I.3.5})$$

On pose $\gamma = (0, \mathbf{\Pi})$, où $\mathbf{\Pi}$ est une variable aléatoire de loi μ sur $[0, 1]$ et on écrit $\mathbf{X}_\gamma = \mathbf{X} \cup \{\gamma\}$. En utilisant La formule de Slivnyak-Mecke, nous montrerons que (I.3.5) est équivalent à :

$$\mathbf{P}(\#\text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) = +\infty) > 0. \quad (\text{I.3.6})$$

Dans les Définitions I.3.3 et I.3.5 seront respectivement introduites les notions de **looping points** et de **almost looping points**. Pour résumer, un looping point est un point marqué qui possède une composante Forward finie (i.e. la branche Forward contient une boucle) et un almost looping point est un point marqué qui devient un looping point lorsqu'on ajoute un k -uplet adapté de points marqués. En utilisant les hypothèses Loop et Shield, nous montrerons dans la Proposition I.3.8 que l'équation (I.3.6) force la branche Forward infinie $\text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma)$ à contenir une infinité de almost looping points :

$$\mathbf{P}(\#\{y \in \text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) ; y \text{ est un almost looping point de } \mathbf{X}_\gamma\} = \infty) > 0. \quad (\text{I.3.7})$$

De manière heuristique, on peut penser les almost looping points comme des points marqués qui ont une probabilité positive de posséder un Forward fini. Chaque almost looping point d'une branche infinie représente une possibilité de boucler avec probabilité positive, ainsi la présence d'une infinité de almost looping points dans une branche infinie semble impossible. Cette contradiction évoquée de façon heuristique se matérialise par une utilisation appropriée d'un argument de transport de masse sensiblement identique à celui

utilisé dans la preuve de la Proposition I.2.4. Dans un premier temps, la Proposition I.3.15 montre que l'égalité (I.3.7) implique :

$$\mathbf{E} (\# \text{Back}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) \mathbb{1}_{\{\gamma \text{ est un almost looping point de } \mathbf{x}_\gamma\}}) = \infty. \quad (\text{I.3.8})$$

L'étroite relation entre les définitions de looping point et de almost looping point nous permet d'écrire (I.3.8) pour un looping point typique (Proposition I.3.6) :

$$\mathbf{E} (\# \text{Back}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) \mathbb{1}_{\{\gamma \text{ est un looping point de } \mathbf{x}_\gamma\}}) = \infty. \quad (\text{I.3.9})$$

Finalement, on utilise les arguments de la preuve de la Proposition I.2.4 pour montrer que l'équation (I.3.9) est impossible (Proposition I.3.4).

La composante Backward d'un looping point est finie p.s

Pour un point marqué $x = (\xi, \varpi)$ et un rayon $r > 0$, nous utiliserons la notation $B(x, r)$ pour la boule Euclidienne centrée en ξ et de rayon r .

On peut alors donner la définition d'un looping point.

Définition I.3.3. Soient $0 < r < R$ deux réels strictement positifs, $\phi \in \mathcal{C}'$ une configuration et $K \in \mathbf{N}^*$. Un point marqué $x \in \phi$ est un (r, R, K) -looping point de ϕ si

- (i) $\#\phi_{B(x, R)} \leq K$,
- (ii) x boucle dans la boule $B(x, r)$ (pour ϕ).

Un looping point est donc un point marqué dont le Forward admet une boucle localisée. On a montré (Proposition I.2.4) que le nombre moyen de points dont le Forward boucle dans une région bornée de l'espace est fini. On peut étendre ce résultat pour un looping point : le nombre moyen de points dans le Backward d'un looping point est fini.

Proposition I.3.4. Pour tout triplet (r, R, K) , nous avons :

$$\mathbf{E} (\# \text{Back}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) \mathbb{1}_{\{\gamma \text{ est un } (r, R, K)\text{-looping point de } \mathbf{x}_\gamma\}}) < +\infty. \quad (\text{I.3.10})$$

Démonstration :

On considère $r < R$ deux réels strictement positifs et $K \in \mathbf{N}^*$. On choisit $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que $D_1 \subset D_2$ où

$$D_1 = \bigcup_{\eta \in \left[-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right]^d} B(\eta, r) \text{ and } D_2 = \bigcap_{\eta \in \left[-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right]^d} B(\eta, R).$$

On note \mathcal{J} l'espérance mathématique dans (I.3.10). En utilisant la formule de Slivnyak-Mecke (I.1.4) sur l'ensemble $\Psi = \left[-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right]^d$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \frac{1}{z\epsilon^d} \mathbf{E} \left(\sum_{x \in \mathbf{X}_\Psi} \# \text{Back}(\mathbf{X}, x) \mathbb{1}_{\{x \text{ boucle dans } B(x, r) \text{ pour } \mathbf{X}\}} \mathbb{1}_{\{\#\mathbf{X}_{B(x, R)} \leq K\}} \right) \\ &\leq \frac{1}{z\epsilon^d} \mathbf{E} \left(\sum_{x \in \mathbf{X}_\Psi} \# \text{Back}(\mathbf{X}, x) \mathbb{1}_{\{x \text{ boucle dans } D_1\}} \mathbb{1}_{\{\#\mathbf{X}_{D_2} \leq K\}} \right) \\ &\leq \frac{K}{z\epsilon^d} \mathbf{E} (\#\{y \in \mathbf{X} ; y \text{ boucle dans } D_1\}), \end{aligned} \quad (\text{I.3.11})$$

puisque chaque point marqué y qui boucle dans D_1 est compté au plus K fois dans la somme de (I.3.11). On a montré dans la preuve de la Proposition I.2.4 que le nombre moyen de points qui bouclent dans un borné quelconque de \mathbf{R}^d est fini. Ainsi, cette dernière espérance est finie et le résultat voulu est démontré. \square

Almost looping point

On introduit maintenant la notion de almost looping points. On attire l'attention sur le fait que l'entier k de la définition ci-dessous est le même que celui qui provient de l'hypothèse Loop vérifiée par le **POG**.

Définition I.3.5. Soient $0 < r < R$ deux rayons positifs, $K \in \mathbf{N}^*$, une boule ouverte $A \subset (B(0, r) \times [0, 1])^k$ et une configuration $\phi \in \mathcal{C}'$. Un point marqué $x \in \phi$ est un (r, R, K, A) -almost looping point de ϕ si :

- (i) $\#\phi_{B(x, R)} \leq K$,
- (ii) $\forall (x_1, \dots, x_k) \in A_x$, on a :
 - (ii-a) For($\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, x$) $\subset \{x, x_1, \dots, x_k\}$,
 - (ii-b) $\#\text{Back}(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, x) \geq \#\text{Back}(\phi, x)$,
 où $A_x = \tau_\xi(A)$ avec $x = (\xi, \cdot)$.

En d'autres termes, un (r, R, K, A) -almost looping point de ϕ est un $(r, R, K + k)$ -looping point de $\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}$ dès que $(x_1, \dots, x_k) \in A_x$. On notera par ailleurs que l'hypothèse Loop est fortement liée à la notion de almost looping point. Si le triplet $(\mathcal{C}', h, \mathbf{X})$ vérifie l'hypothèse Loop alors il existe un entier $k \geq 1$ tel que presque sûrement, tous les points de \mathbf{X} sont des almost looping points (pour des paramètres (r, R, K, A) dépendant du point) relativement à k .

Proposition I.3.6. S'il existe des paramètres (r, R, K, A) tels que :

$$\mathbf{E} \left(\#\text{Back}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) \mathbb{1}_{\{\gamma \text{ est un } (r, R, K, A)\text{-almost looping point de } \mathbf{X}_\gamma\}} \right) = +\infty, \quad (\text{I.3.12})$$

alors

$$\mathbf{E} \left(\#\text{Back}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) \mathbb{1}_{\{\gamma \text{ est un } (r, R, K+k)\text{-looping point de } \mathbf{X}_\gamma\}} \right) = +\infty. \quad (\text{I.3.13})$$

Démonstration : La démonstration de cette proposition s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme I.3.7. On se donne Γ un Borélien borné de \mathbf{R}^d , tel que $\lambda_d(\Gamma) > 0$. On désigne par \mathbf{U} la loi uniforme sur Γ . On considère $(X_i)_{1 \leq i \leq k}$ une collection i.i.d de vecteurs aléatoires sur $\Gamma \times [0, 1]$ de loi $\mathbf{U} \otimes \mu$. On suppose également que chaque variable aléatoire X_i est indépendante du processus ponctuel de Poisson \mathbf{X} . On définit alors le processus ponctuel $\mathbf{X}' = \mathbf{X} \cup \{X_1, \dots, X_k\}$. Si l'on note Π et Π' les lois respectives de \mathbf{X} et \mathbf{X}' , alors Π' est absolument continue par rapport à Π et on a

$$\frac{\Pi'(d\phi)}{\Pi(d\phi)} = \frac{1}{(z\lambda_d(\Gamma))^k} \#\phi_\Gamma (\#\phi_\Gamma - 1) \dots (\#\phi_\Gamma - k + 1). \quad (\text{I.3.14})$$

Démonstration : Puisque $\mathbf{X}_{\Gamma^c} = \mathbf{X}'_{\Gamma^c}$, il suffit de contrôler l'absolue continuité de Π' par rapport à Π sur Γ . On considère g une fonction mesurable bornée, on a alors

$$\mathbf{E}_{\Pi_{\Gamma}}(g(\mathbf{X}_{\Gamma})) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-z\lambda_d(\Gamma)}(\lambda_d(\Gamma)z)^l}{l!} \int_{(\Gamma \times [0,1])^l} g(\{y_1, \dots, y_l\})(\mathbf{U} \otimes \mu)^l(dy_1 \dots dy_l).$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\Pi'_{\Gamma}}(g(\mathbf{X}'_{\Gamma})) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-z\lambda_d(\Gamma)}(\lambda_d(\Gamma)z)^l}{l!} \int_{(\Gamma \times [0,1])^{k+l}} g(\{x_1, \dots, x_k\} \cup \{y_1, \dots, y_l\}) \\ &\quad \times (\mathbf{U} \otimes \mu)^{k+l}(dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_l) \\ &= \sum_{m=k}^{\infty} \frac{e^{-z\lambda_d(\Gamma)}(\lambda_d(\Gamma)z)^{m-k}}{(m-k)!} \int_{(\Gamma \times [0,1])^m} g(\{x_1, \dots, x_m\})(\mathbf{U} \otimes \mu)^m(dx_1 \dots dx_m) \\ &= \sum_{m=k}^{\infty} \frac{m(m-1) \dots (m-k+1) e^{-z\lambda_d(\Gamma)}(\lambda_d(\Gamma)z)^m}{(z\lambda_d(\Gamma))^k m!} \\ &\quad \times \int_{(\Gamma \times [0,1])^m} g(\{x_1, \dots, x_m\})(\mathbf{U} \otimes \mu)^m(dx_1 \dots dx_m). \end{aligned}$$

On retrouve l'expression de la densité écrite dans (I.3.14). \square

On revient à la preuve de la proposition. On fixe un quadruplet de paramètres (r, R, K, A) tel que l'équation (I.3.12) soit satisfaite. On va montrer que l'espérance dans (I.3.13), que l'on notera \mathcal{J} est infinie. C'est précisément la densité exprimée dans le Lemme I.3.7 qui va faire le lien entre ces deux espérances. On applique ce lemme au borélien $\Gamma = B(0, R)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\geq \mathbf{E} \left(\# \text{Back}(\mathbf{X}_{\gamma}, \gamma) \mathbf{1}_{\{\gamma \text{ boucle dans } B(0,r) \text{ pour } \mathbf{x}_{\gamma}\}} \mathbf{1}_{\{k \leq \# \mathbf{X}_{B(0,R)} \leq K+k-1\}} \right) \\ &\geq \int_{\mathcal{C}'} \# \text{Back}(\phi_{\gamma}, \gamma) \mathbf{1}_{\{\gamma \text{ boucle dans } B(0,r) \text{ pour } \phi_{\gamma}\}} \mathbf{1}_{\{k \leq \# \phi_{B(0,R)} \leq K+k-1\}} \Pi(d\phi) \\ &\geq \int_{\mathcal{C}'} \# \text{Back}(\phi_{\gamma}, \gamma) \mathbf{1}_{\{\gamma \text{ boucle dans } B(0,r) \text{ pour } \phi_{\gamma}\}} \mathbf{1}_{\{k \leq \# \phi_{B(0,R)} \leq K+k-1\}} \frac{\Pi'(d\phi)}{f(\phi)}, \end{aligned}$$

où la fonction f désigne la densité définie dans (I.3.14). Par ailleurs, lorsque $\# \phi_{B(0,R)} \leq K+k-1$, le rapport $\frac{1}{f(\phi)}$ est plus grand qu'une constante strictement positive C . L'ensemble A ci-dessous est celui provenant de la définition de almost looping point :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\geq C \int_{\mathcal{C}'} \# \text{Back}(\phi_{\gamma}, \gamma) \mathbf{1}_{\{\gamma \text{ boucle dans } B(0,r) \text{ pour } \phi_{\gamma}\}} \mathbf{1}_{\{k \leq \# \phi_{B(0,R)} \leq K+k-1\}} \Pi'(d\phi) \\ &\geq C \int_A \mathbf{E} \left(\# \text{Back}(\mathbf{X}_{\gamma} \cup \{x_1, \dots, x_k\}, \gamma) \right. \\ &\quad \left. \times \mathbf{1}_{\{\gamma \text{ boucle dans } B(0,r) \text{ pour } \mathbf{X}_{\gamma} \cup \{x_1, \dots, x_k\}\}} \mathbf{1}_{\{\# \mathbf{X}_{B(0,R)} \leq K-1\}} \right) (\mathbf{U} \otimes \mu)^k(dx_1 \dots dx_k) \\ &\geq C (\mathbf{U} \otimes \mu)^k(A) \mathbf{E} \left(\# \text{Back}(\mathbf{X}_{\gamma}, \gamma) \mathbf{1}_{\{\gamma \text{ est un } (r,R,K,A)\text{-almost looping point de } \mathbf{X}_{\gamma}\}} \right). \end{aligned}$$

La dernière espérance est infinie par hypothèse, et on a $(\mathbf{U} \otimes \mu)^k(A) > 0$ puisque A est une boule ouverte et que la mesure μ est strictement positive sur les ouverts non vides. On

obtient bien le résultat souhaité. On souligne ici que la deuxième inégalité est obtenue en intégrant sur $(\Gamma \times [0, 1])^k$ et la dernière inégalité s'obtient en utilisant la condition (ii-b) dans la définition de almost looping point. \square

L'objectif est maintenant de montrer que les hypothèses Loop et Shield impliquent l'existence de paramètres tels que (I.3.12) ait lieu. Jusqu'à présent, les hypothèses Loop et Shield n'ont pas été utilisées, ainsi les Propositions I.3.4 et I.3.6 sont vraies pour un POG quelconque.

Existence d'une branche contenant une infinité de almost looping points

À partir de maintenant, on suppose par l'absurde que (I.3.5) est vraie. On commence par se placer du point de vue d'un point typique en montrant que :

$$\mathbf{P}(\exists x \in \mathbf{X} ; \#\text{For}(\mathbf{X}, x) = +\infty) > 0 \iff \mathbf{P}(\#\text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) = +\infty) > 0.$$

En effet, en considérant $\Delta = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$, la stationnarité nous donne :

$$\mathbf{P}(\exists x \in \mathbf{X} ; \#\text{For}(\mathbf{X}, x) = +\infty) > 0 \iff \mathbf{E} \left(\sum_{x \in \mathbf{X}_\Delta} \mathbb{1}_{\{\#\text{For}(\mathbf{X}, x) = +\infty\}} \right) > 0,$$

et d'après la formule de Slivnyak-Mecke (I.1.4), on a

$$\mathbf{E} \left(\sum_{x \in \mathbf{X}_\Delta} \mathbb{1}_{\{\#\text{For}(\mathbf{X}, x) = +\infty\}} \right) = z \mathbf{P}(\#\text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) = +\infty),$$

ce qui prouve bien l'équivalence souhaitée.

On énonce maintenant le résultat crucial de la preuve du Théorème I.3.1, dont la preuve utilise les hypothèses Loop et Shield :

Proposition I.3.8. *Si l'on suppose que $\mathbf{P}(\#\text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) = \infty) > 0$ alors il existe un quadruplet (r, R, K, A) tel que :*

$$\mathbf{P}(\#\{x \in \text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma); x \text{ est un } (r, R, K, A)\text{-almost looping point de } \mathbf{X}_\gamma\} = \infty) > 0. \quad (\text{I.3.15})$$

Démonstration :

Dans toute cette preuve, α désigne le paramètre provenant de l'hypothèse Shield et la suite $(\mathcal{E}_m)_{m \geq 1}$ correspond à la suite d'événements de la même hypothèse. On énonce deux définitions qui facilitent la rédaction de la preuve de la Proposition I.3.8 :

Définition I.3.9. *Soient $\phi \in \mathcal{C}'$ et $m \geq 1$. Un sommet $u \in \mathbf{Z}^d$ est dit m -shield pour la configuration ϕ si $\tau_{-mu}(\phi) \in \mathcal{E}_m$.*

Remarque I.3.10. *On rappelle ici que $\mathcal{E}_m \in \mathcal{S}_{[-\alpha m, \alpha m]^d}$. Ainsi, si ϕ, ϕ' sont deux configurations telles que $\phi_{[-\alpha m, \alpha m]^d} = \phi'_{[-\alpha m, \alpha m]^d}$, alors on a : $\tau_{-mu}(\phi) \in \mathcal{E}_m \iff \tau_{-mu}(\phi') \in \mathcal{E}_m$.*

Définition I.3.11. Soient $\phi \in \mathcal{C}'$ et $m \geq 1$. Un sommet $u \in \mathbf{Z}^d$ est dit m -protecting pour ϕ si tout $u' \in \mathbf{Z}^d$ tel que $\|u - u'\|_\infty \in \{0, 2\alpha, 4\alpha, \dots, 2k\alpha, 2(k+1)\alpha, 2(k+2)\alpha\}$ est m -shield pour ϕ . Par ailleurs, un point marqué $x \in \phi$ est dit m -protected pour ϕ s'il existe un sommet m -protecting $u \in \mathbf{Z}^d$ tel que $x \in (mu \oplus [-\alpha m, \alpha m]^d) \times [0, 1]$.

Pour résumer, un sommet m -protecting est entouré de $k+2$ couronnes de sommets m -shield (idem pour un point marqué m -protected). L'hypothèse Shield stipule que chacune de ces couronnes forme une muraille infranchissable (voir la description de l'hypothèse Shield) assurant une indépendance entre les deux composantes qu'elle sépare. Étant donné un sommet $u \in \mathbf{Z}^d$, et deux entiers positifs $m, l \in \mathbf{N}^*$, on définit :

$$\text{Shield}_m(u, l) = (mu \oplus [-(2l+1)\alpha m, (2l+1)\alpha m]^d) \times [0, 1].$$

De cette façon, pour tout sommet $u \in \mathbf{Z}^d$, la variable aléatoire $\mathbb{1}_{\{u \text{ est } m\text{-protecting pour } \mathbf{x}\}}$ est $\mathcal{S}_{\text{Shield}_m(u, k+2)}$ -mesurable.

Pour un point marqué m -protected, les k -uplets (de l'hypothèse Loop) qui permettent de former une boucle dans son Forward sont localisés :

Lemme I.3.12. Soient $\phi \in \mathcal{C}'$ et $m \geq 1$. On considère un sommet $u \in \mathbf{Z}^d$ qui soit m -protecting pour ϕ et on se donne $x \in \phi_{mu \oplus [-\alpha m, \alpha m]^d}$ un point marqué m -protected. Alors la région A_x définie dans l'hypothèse Loop est incluse dans l'hypercube marqué :

$$A_x \subset (\text{Shield}_m(u, k))^k.$$

Démonstration : (du Lemme I.3.12.)

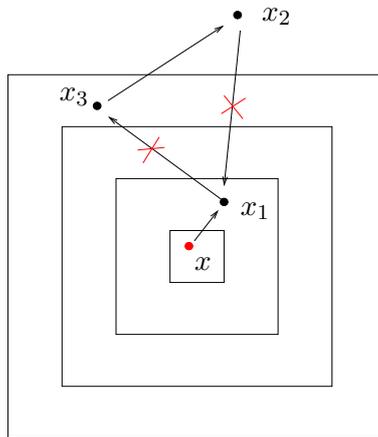


FIGURE I.7 – Sur cette figure, l'entier k provenant de l'hypothèse Loop vaut 3. L'absence de points ajoutés dans la deuxième couronne rend impossible les connexions barrées d'une croix rouge. Ici, c'est le point x_2 qui joue le rôle du x_{i_0} du lemme ci-dessus, et on a $x_2 \in \text{For}(\varphi, x)$.

Pour un k -uplet fixé $(x_1, \dots, x_k) \in A_x$, il faut montrer que pour tout $1 \leq i \leq k$, $x_i \in \text{Shield}_m(u, k)$. On suppose donc par l'absurde qu'il existe un i_0 tel que x_{i_0} n'appartient

pas à cet ensemble. Forcément, au moins une des k premières couronnes de sommets m -shield entourant u (c'est-à-dire une des k couronnes de $\text{Shield}_m(u, k)$) ne contient pas de points de $\{x_1, \dots, x_k\}$ (voir Figure I.7). Il existe un entier $j \in \{1, \dots, k\}$ tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, x_i \notin \bigcup_{u' \in \mathbf{Z}^d; \|u' - u\|_\infty = 2\alpha j} ((mu' \oplus [-\alpha m, \alpha m]^d) \times [0, 1]). \quad (\text{I.3.16})$$

On va alors appliquer le troisième item de l'hypothèse Shield à l'ensemble $V = \{u' \in \mathbf{Z}^d; \|u' - u\|_\infty = 2\alpha j\}$ et à la configuration $\varphi = \phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}$. En effet, la Remarque I.3.10 et l'équation (I.3.16) assurent que pour tout $u' \in V$, $\tau_{-mu'}(\varphi) \in \mathcal{E}_m$. On obtient alors qu'aucune arête orientée dans $\mathcal{G}_h(\varphi)$ ne peut chevaucher la muraille définie en (I.3.16). Mais d'un autre côté, le deuxième item de l'hypothèse Loop nous assure que x_{i_0} appartient à la composante connexe de x et on a $x \in \text{For}(\varphi, x_{i_0})$ ou bien $x_{i_0} \in \text{For}(\varphi, x)$ (ce n'est pas un "ou exclusif"). Chacun de ces deux Forwards est inclus dans $\{x, x_1, \dots, x_k\}$. Il existe donc nécessairement une arête connectant deux points marqués de $\{x, x_1, \dots, x_k\}$ qui traverse la muraille définie en (I.3.16), d'où la contradiction. \square

On se donne un sommet $u \in \mathbf{Z}^d$ et une configuration $\phi \in \mathcal{C}'$ tels que u est m -protecting pour ϕ . On considère un point marqué $x \in \phi_{mu \oplus [-\alpha m, \alpha m]^d}$. On sait alors d'après le Lemme I.3.12 que $A_x \subset \text{Shield}_m(u, k)$. On va montrer que pour n'importe quel k -uplet de points marqués (x_1, \dots, x_k) localisés dans $\text{Shield}_m(u, k)$, le contrôle des trois items de l'hypothèse Loop ne dépend que de $\phi \cap \text{Shield}_m(u, k+2)$ (voir Figure I.8) :

- (i) On veut vérifier que $\text{For}(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, x) \subset \{x, x_1, \dots, x_k\}$. Il suffit pour cela de déterminer les arêtes sortantes des points marqués x, x_1, \dots, x_k dans le graphe $\mathcal{G}_h(\varphi)$ (où $\varphi = \phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}$). Puisque le sommet u est m -protecting, on peut appliquer la troisième hypothèse de l'hypothèse Shield à l'ensemble $V = \{u' \in \mathbf{Z}^d; \|u' - u\|_\infty = 2\alpha(k+1)\}$. En effet, les sommets de V sont encore m -shield pour φ et la muraille $(mV \oplus [-\alpha m, \alpha m]^d) \times [0, 1]$ sépare l'espace marqué en deux parties dont l'une est $\text{Shield}_m(u, k)$. L'hypothèse Shield nous dit alors que les arêtes sortantes issues des points de $\varphi \cap \text{Shield}_m(u, k)$ ne dépendent pas de $\varphi \cap \text{Shield}_m(u, k+1)^c$. Comme $x, x_1, \dots, x_k \in \text{Shield}_m(u, k)$, on peut déterminer leurs arêtes sortantes et ainsi vérifier le premier item sans regarder l'état de ϕ à l'extérieur de $\text{Shield}_m(u, k+1)$.
- (ii) On veut vérifier que pour tout $1 \leq i \leq k$, x_i appartient à la composante connexe de x dans $\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}$ et on a

$$\text{For}(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, x_i) \subset \{x, x_1, \dots, x_k\}.$$

Comme pour le premier item, il suffit de déterminer les arêtes sortantes de $\mathcal{G}_h(\varphi)$ des points de $\{x, x_1, \dots, x_k\}$. On raisonne exactement de la même façon en utilisant le même ensemble V pour appliquer l'hypothèse Shield.

- (iii) On veut vérifier que : $\forall y \in \phi \setminus \{x\}$, tel que $h(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, y) \neq h(\phi, y)$, on a :

$$h(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, y) \in \text{Back}(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, x) \cap \{x, x_1, \dots, x_k\}.$$

On distingue trois différents cas :

Si $y \in \text{Shield}_m(u, k)$, l'hypothèse Shield appliquée à l'ensemble V défini dans le premier item nous permet de déterminer $h(\varphi, y)$ et de vérifier si oui ou non il vérifie l'équation ci-dessus.

Si $y \in (mV \oplus [-\alpha m, \alpha m]^d) \times [0, 1]$, on va utiliser l'hypothèse Shield pour l'ensemble de sommets $V' = \{u' \in \mathbf{Z}^d ; \|u' - u\|_\infty = 2\alpha(k + 2)\}$. En effet, les sommets de V' sont m -shield pour la configuration φ et la muraille $(mV' \oplus [-\alpha m, \alpha m]^d) \times [0, 1]$ sépare l'espace marqué en deux parties dont l'une est $\text{Shield}_m(u, k + 1)$. L'hypothèse Shield nous dit alors que les arêtes sortantes issues des points de $\varphi \cap \text{Shield}_m(u, k + 1)$ ne dépendent pas de $\varphi \cap \text{Shield}_m(u, k + 2)^c$. Comme on a supposé $y \in (mV \oplus [-\alpha m, \alpha m]^d) \times [0, 1] \subset \text{Shield}_m(u, k + 1)$, on peut déterminer $h(\varphi, y)$.

Si $y \in \text{Shield}_m(u, k + 1)^c$, l'hypothèse Shield appliquée à l'ensemble V nous permet d'affirmer que $h(\phi, y) = h(\varphi, y)$.

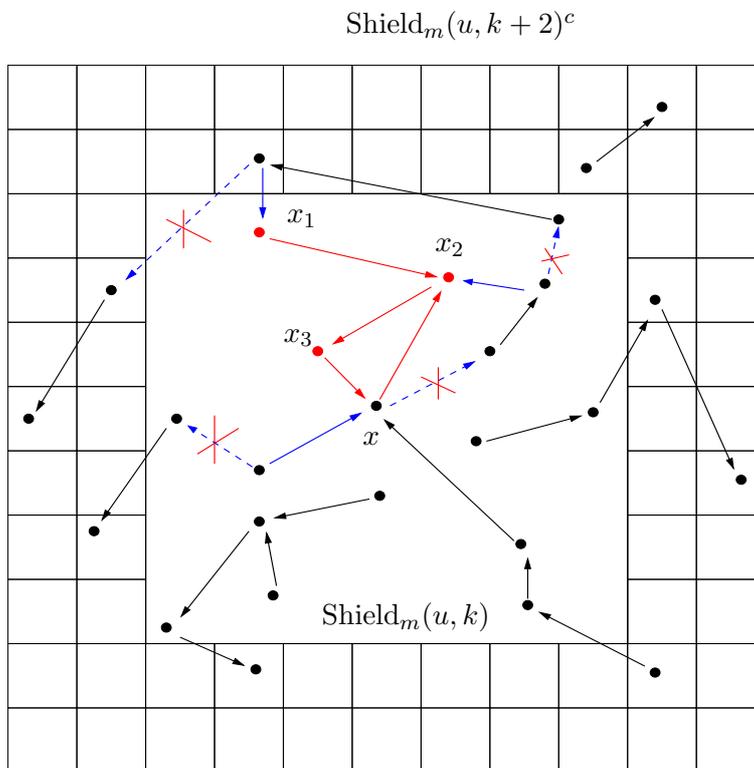


FIGURE I.8 – Sur cette figure, l'entier k vaut 3. On vérifie que le triplet $(x_1, x_2, x_3) \in A_x$. On voit que $\{x, x_2, x_3\}$ forme une boucle de taille 3 sur laquelle x_1 se connecte, les deux premiers items de l'hypothèse Loop sont bien vérifiés. Par ailleurs, toutes les arêtes modifiées par l'ajout du triplet se connectent à l'ensemble $\{x, x_1, x_2, x_3\} \subset \text{Back}(\varphi, x)$ (ces arêtes modifiées apparaissent en bleues sur le dessin). Le troisième item de l'hypothèse Loop est alors bien vérifié.

On vient donc de montrer que pour un point marqué x qui est m -protected pour ϕ , la région A_x se détermine en observant uniquement la configuration ϕ autour de x . Par la suite, on notera par $\text{rad}(A_x)$ le rayon de la boule ouverte A_x . Il existe une suite d'entiers

positifs $(K_m)_{m \geq 1}$ et une suite de réels positifs $(\delta_m)_{m \geq 1}$ telles que l'événement

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_m &= \{0 \text{ est } m\text{-protecting pour } \mathbf{X}\} \cap \{\#\mathbf{X} \cap \text{Shield}_m(u, k+2) \leq K_m\} \\ &\quad \cap \{\forall x \in \mathbf{X}_{[-\alpha m, \alpha m]^d}, \text{rad}(A_x) > \delta_m\} \end{aligned}$$

a une probabilité qui tend vers 1 lorsque m tend vers $+\infty$. Par ailleurs, pour tout $m \geq 1$, on a $\mathcal{E}'_m \in \mathcal{S}_{[-\alpha(2k+5)m, \alpha(2k+5)m]^d}$. Notons également que $\mathcal{E}'_m \subset \mathcal{E}_m$, ainsi, la suite d'événements (\mathcal{E}'_m) satisfait l'hypothèse Shield pour le paramètre $\alpha' = \alpha(2k+5)$.

Étant donné une configuration $\phi \in \mathcal{C}'$ et un point marqué $x \in \phi$, on dira que x est un point m -good de ϕ s'il existe un sommet $u \in \mathbf{Z}^d$ tel que $\tau_{-mu}(\phi) \in \mathcal{E}'_m$ et $x \in \phi_{mu \oplus [-\alpha m, \alpha m]^d}$.

Le résultat suivant affirme que pour m suffisamment grand, le nombre de points marqués m -good dans une branche Forward typique est infini avec probabilité strictement positive.

Lemme I.3.13. *On suppose que $\mathbf{P}(\#\text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) = \infty) > 0$. Alors il existe un entier m_0 tel que pour tout $m \geq m_0$,*

$$\mathbf{P}\left(\#\{x \in \text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) ; x \text{ est } m\text{-good pour } \mathbf{X}_\gamma\} = \infty\right) > 0. \quad (\text{I.3.17})$$

Démonstration : (du Lemme III.1.24.)

On commence par définir le champ de Bernoulli stationnaire Ξ_m (avec $m \geq 1$) sur \mathbf{Z}^d de la façon suivante :

$$\Xi_m = \left(\mathbb{1}_{\{\tau_{-mu}(\mathbf{X}) \notin \mathcal{E}'_m\}}\right)_{u \in \mathbf{Z}^d}.$$

On va montrer que pour m suffisamment grand, presque sûrement le champ Ξ_m ne percole pas dans \mathbf{Z}^d pour la norme l_∞ . On observe dans un premier temps que pour tout $u \in \mathbf{Z}^d$, $\mathbf{P}(\tau_{-mu}(\mathbf{X}) \notin \mathcal{E}'_m) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \notin \mathcal{E}'_m)$. On dit que Ξ_m est un champ de Bernoulli identiquement distribué de paramètre $p_m = \mathbf{P}(\mathbf{X} \notin \mathcal{E}'_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

Par ailleurs, on rappelle que $\mathcal{E}'_m \in \mathcal{S}_{[-\alpha' m, \alpha' m]^d}$, où $\alpha' = \alpha(2k+5)$. La propriété d'indépendance du processus ponctuel de Poisson (deuxième item de la Définition I.1.2) nous permet alors de statuer que les variables aléatoires $\mathbb{1}_{\{\tau_{-mu}(\mathbf{X}) \notin \mathcal{E}'_m\}}$ et $\mathbb{1}_{\{\tau_{-mu'}(\mathbf{X}) \notin \mathcal{E}'_m\}}$ sont indépendantes dès que $\|u - u'\|_\infty > 2\alpha' = 2(2k+5)\alpha$. On peut alors utiliser un résultat classique de domination stochastique démontré par T.M. Liggett, R.H. Schommann et A.M. Stacey [22] : le champ aléatoire Ξ_m est dominé stochastiquement par un champ de Bernoulli i.i.d de paramètre $f(p_m)$, avec $f(p) \xrightarrow{p \rightarrow 0} 0$.

Il est prouvé (voir [17]) qu'un champ de Bernoulli i.i.d dans \mathbf{Z}^d ne percole pas presque sûrement pour la norme l_∞ dès que son paramètre est strictement plus petit qu'une probabilité critique $p_c(d) > 0$. Puisque $p_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ et que $f(p) \xrightarrow{p \rightarrow 0} 0$, il existe m_0 suffisamment grand pour que $f(p_m) < p_c(d)$ dès que $m \geq m_0$. Ainsi, en vertu de la domination stochastique évoquée plus haut, on a :

$$\forall m \geq m_0, \mathbf{P}\left(\Xi_m \text{ ne percole pas dans } \mathbf{Z}^d \text{ pour la norme } l_\infty\right) = 1. \quad (\text{I.3.18})$$

Le livre de Grimmett [11] offre une théorie complète de la percolation par sites et par arêtes, tandis que le livre de Liggett [21] consacre un chapitre entier aux résultats de domination stochastique.

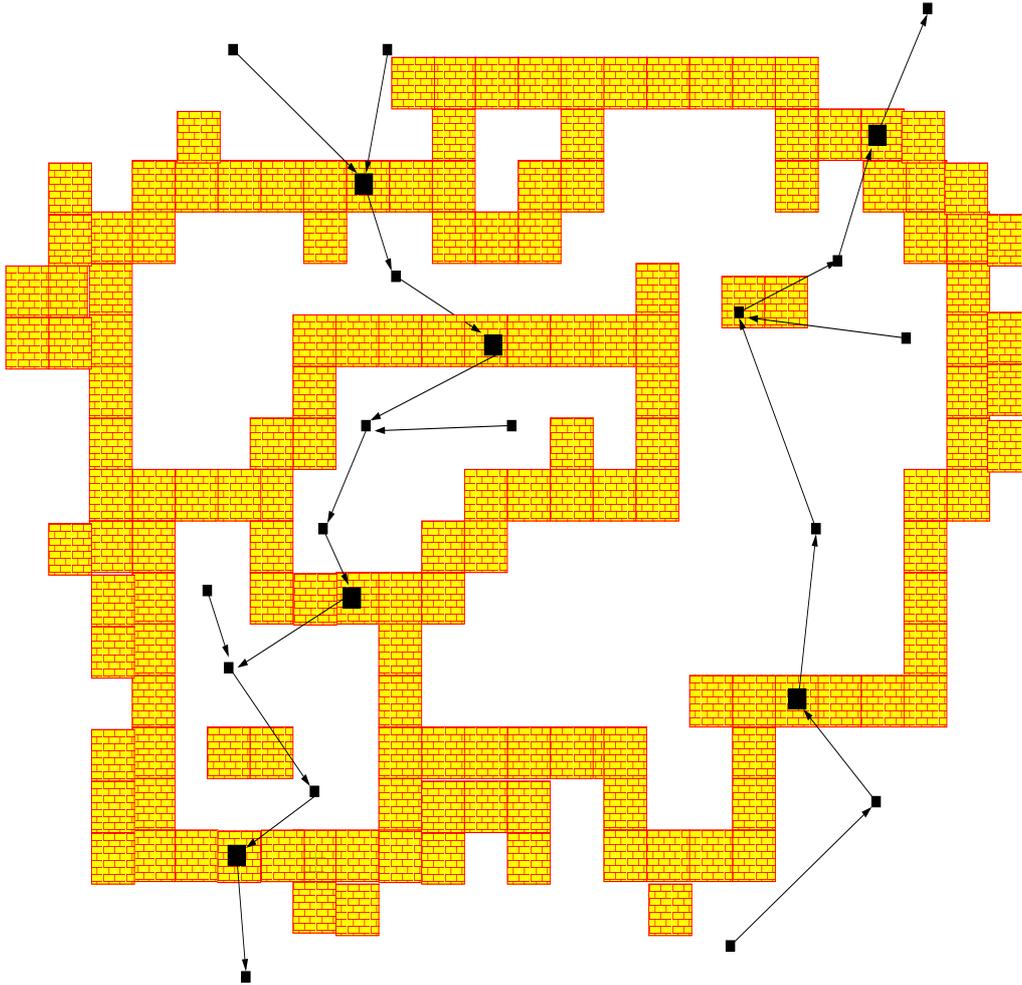


FIGURE I.9 – Sur cette figure nous avons représenté par des carrés jaunes les hypercubes $mu \oplus [-\alpha m, \alpha m]^d$ avec $u \in \mathbf{Z}^d$ tel que $\tau_{-mu}(\mathbf{X}) \in \mathcal{E}'_m$. L'équation (I.3.18) nous dit que pour $m \geq m_0$, presque sûrement, toute branche infinie de $\mathcal{G}_h(\mathbf{X})$ va devoir traverser une infinité de murailles fermées jaunes. Le troisième item de l'hypothèse Shield assure que la branche va contenir au moins un point de la muraille qu'elle traverse.

On fixe maintenant un entier $m \geq m_0$. L'éventuelle branche infinie $\text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma)$ doit alors traverser une infinité de muraille l_∞ de sommets m -shield. En effet, si un sommet $u \in \mathbf{Z}^d$ vérifie $\tau_{-mu}(\mathbf{X}) \in \mathcal{E}'_m$, alors, a fortiori, il est m -shield. Or, d'après le troisième item de l'hypothèse Shield, aucune arête orientée ne peut traverser une muraille de sommets m -shield. La branche $\text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma)$ est alors forcée de passer par un point marqué vivant dans la muraille (autrement dit un point m -good).

□

Pour le reste de cette section, on fixe un entier $m \geq m_0$ où m_0 est donné par le Lemme III.1.24. On sait alors qu'un point m -good $x = (\xi, \cdot)$ de la branche $\text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma)$ est un (\cdot, \cdot, \cdot, A) -almost looping point de \mathbf{X}_γ (c'est ici qu'on utilise rigoureusement tous les items de l'hypothèse Loop), avec $A = \tau_\xi(A_x)$ et $\text{rad}(A) > \delta_m$. On considère un recouvrement du compact $\text{Shield}_m(0, k)$ par une collection finie de boules ouvertes $\{\mathcal{H}_j, 1 \leq j \leq j(m)\}$

de rayons égaux à $\frac{\delta_m}{2}$. Le principe des tiroirs nous permet d'établir le résultat suivant :

Lemme I.3.14. *On suppose que $\mathbf{P}(\#\text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) = \infty) > 0$. Alors, il existe un indice $1 \leq j_0 \leq j_m$ tel que :*

$$\mathbf{P}(\#\{x \in \text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) ; \tau_x(\mathcal{K}_{j_0}) \subset A_x\} = \infty) > 0,$$

où $\tau_x(\mathcal{K}_{j_0}) = \tau_\xi(\mathcal{K}_{j_0})$ lorsque $x = (\xi, \cdot)$.

Démonstration : (du Lemme I.3.14.)

Pour $1 \leq j \leq j(m)$, on pose $\mathcal{Y}_j = \{\#\{x \in \text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) ; \tau_x(\mathcal{K}_j) \subset A_x\} = \infty\}$. On suppose alors que :

$$\#\{x \in \text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) ; x \text{ est } m\text{-good pour } \mathbf{X}_\gamma\} = \infty .$$

D'après le Lemme I.3.12, pour tout point marqué m -good x , il existe un sommet $u \in \mathbf{Z}^d$ tel que la boule A_x soit incluse dans $\text{Shield}_m(u, k)$. Puisque $\text{rad}(A_x) > \delta_m$, la boule A_x contient au moins une boule $\tau_x(\mathcal{K}_j)$, pour un certain indice aléatoire $1 \leq j \leq j(m)$. Ainsi, par le Lemme III.1.24, on obtient :

$$0 < \mathbf{P}\left(\#\{x \in \text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) ; x \text{ est } m\text{-good pour } \mathbf{X}_\gamma\} = \infty\right) \leq \sum_{1 \leq j \leq j(m)} \mathbf{P}(\mathcal{Y}_j) .$$

Le lemme est bien démontré. □

On peut maintenant conclure la démonstration de la Proposition I.3.8. On considère l'indice j_0 donné par le lemme précédent et on choisit deux réels positifs $0 < r < R$ tels que :

$$\mathcal{K}_{j_0} \subset (B(0, r) \times [0, 1])^k \subset (B(0, R) \times [0, 1])^k \subset (\text{Shield}_m(0, k))^k .$$

Alors, tout point marqué m -good $x \in \text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma)$ qui vérifie $\tau_x(\mathcal{K}_{j_0}) \subset A_x$ est un (r, R, K, A) -almost looping point de \mathbf{X}_γ avec $A = \mathcal{K}_{j_0}$ et $K = K_m$. Les paramètres r, R, K et A sont déterministes. En utilisant le résultat du Lemme I.3.14, on obtient :

$$\mathbf{P}\left(\#\{x \in \text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) ; x \text{ est un } (r, R, K, A)\text{-almost looping point de } \mathbf{X}_\gamma\} = \infty\right) > 0 .$$

Ainsi, la Proposition I.3.8 est démontrée. □

Du Forward au Backward

Dans cette dernière partie de la preuve du Théorème I.3.1, on montre que l'espérance mathématique de la taille du Backward d'un almost looping point typique est infinie dès que le Forward d'un point typique contient une infinité de almost looping points avec probabilité positive. La Proposition I.3.15 transforme un résultat portant sur le Forward en un résultat portant sur le Backward qui sera crucial pour achever la démonstration du Théorème I.3.1.

Proposition I.3.15. *S'il existe des paramètres r, R, K, A tels que*

$$\mathbf{P}\left(\#\{x \in \text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) ; x \text{ est un } (r, R, K, A)\text{-almost looping point de } \mathbf{X}_\gamma\} = \infty\right) > 0 , \quad (\text{I.3.19})$$

alors :

$$\mathbf{E}\left(\#\text{Back}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma)\mathbf{1}_{\{\gamma \text{ est un } (r, R, K, A)\text{-almost looping point de } \mathbf{x}_\gamma\}}\right) = \infty . \quad (\text{I.3.20})$$

Démonstration :

On fixe dès maintenant des paramètres r, R, K, A tels que l'équation (I.3.19) soit vérifiée. On notera $\text{For}^*(\mathbf{X}_\gamma, \gamma)$ le sous-ensemble de $\text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma)$ constitué des (r, R, K, A) -almost looping points :

$$\text{For}^*(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) = \{x \in \text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) ; x \text{ est un } (r, R, K, A)\text{-almost looping point de } \mathbf{X}_\gamma\} .$$

Nous souhaitons minorer la "densité" de $\text{For}^*(\mathbf{X}_\gamma, \gamma)$ dans la branche $\text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma)$. Nous reportons la preuve du lemme suivant à la fin de la démonstration de la Proposition I.3.15.

Lemme I.3.16. *Il existe une fonction $g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \infty$ et*

$$\mathbf{P}\left(\forall n \geq 1, \#\left(\text{For}^*(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) \cap ([-n, n]^d \times [0, 1])\right) \geq g(n)\right) > 0 .$$

Nous dirons qu'un point marqué $x = (\xi, \varpi)$ est *dense* pour \mathbf{X} si pour tout entier $n \geq 1$,

$$\#\left(\text{For}^*(\mathbf{X}, x) \cap ([\xi - n, \xi + n]^d \times [0, 1])\right) \geq g(n) .$$

Le Lemme I.3.16 stipule que le point typique γ est dense pour \mathbf{X}_γ avec probabilité strictement positive.

On pose $\Lambda_n = [-n, n]^d$ pour $n \geq 1$. La formule de Slivnyak-Mecke (I.1.4) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\left(\#\text{Back}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma)\mathbf{1}_{\{\gamma \text{ est un } (r, R, K, A)\text{-almost looping point de } \mathbf{X}_\gamma\}}\right) \\ &= \frac{1}{z(4n)^d} \mathbf{E}\left(\sum_{x \in \mathbf{X}_{\Lambda_{2n}}} \#\text{Back}(\mathbf{X}, x)\mathbf{1}_{\{x \text{ est un } (r, R, K, A)\text{-almost looping point de } \mathbf{X}\}}\right) . \end{aligned}$$

Si le point marqué $x \in \mathbf{X}_{\Lambda_n}$ est dense pour \mathbf{X} , alors il existe au moins $g(n)$ points marqués de $\mathbf{X}_{\Lambda_{2n}}$ qui possèdent x dans leurs composantes Backward. C'est de cette façon que l'on obtient un résultat portant sur le Backward. On a alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\#\text{Back}(\mathbf{X}_\gamma)\mathbf{1}_{\{\gamma \text{ est un } (r, R, K, A)\text{-almost looping point de } \mathbf{x}_\gamma\}}\right) &\geq \frac{g(n)}{z(4n)^d} \mathbf{E}\left(\sum_{x \in \mathbf{X}_{\Lambda_n}} \mathbf{1}_{\{x \text{ est dense pour } \mathbf{X}\}}\right) \\ &= \frac{g(n)}{2^d} \mathbf{P}(\gamma \text{ est dense pour } \mathbf{X}_\gamma) . \end{aligned}$$

L'équation (I.3.20) s'obtient en faisant tendre n vers l'infini et en utilisant le résultat du Lemme I.3.16.

Pour achever la preuve de la proposition, il reste à démontrer le lemme.

Démonstration : (du Lemme I.3.16.)

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs telle que la série de terme général $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\frac{\beta}{2}$, où l'on a posé $\beta = \mathbf{P}(\#\text{For}^*(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) = \infty)$. En procédant par récurrence, on va définir une suite croissante d'entiers $(n_k)_{k \geq 1}$ et une suite d'événements $(B_k)_{k \geq 0}$ comme suit :

On commence par définir B_0 comme l'événement $\{\#\text{For}^*(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) = \infty\}$ et n_1 comme le plus petit entier n tel que

$$\mathbf{P}\left(B_0 \cap \left\{ \# \left(\text{For}^*(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) \cap ([-n, n]^d \times [0, 1]) \right) \geq 1 \right\} \right) \geq \beta - a_1 .$$

Puisque la probabilité ci-dessus tend vers β quand n tend vers $+\infty$, l'entier n_1 est bien défini. Nous définissons alors l'événement B_1 comme :

$$B_1 = B_0 \cap \left\{ \# \left(\text{For}^*(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) \cap ([-n_1, n_1]^d \times [0, 1]) \right) \geq 1 \right\} .$$

Pour un entier quelconque $k \geq 2$, on définit l'entier n_k comme le plus petit entier n tel que

$$\mathbb{P}\left(B_{k-1} \cap \left\{ \# \left(\text{For}^*(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) \cap ([-n, n]^d \times [0, 1]) \right) \geq k \right\} \right) \geq \beta - \sum_{1 \leq i \leq k-1} a_i .$$

L'événement B_k s'écrit alors de la façon suivante :

$$B_k = B_{k-1} \cap \left\{ \# \left(\text{For}^*(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) \cap ([-n_k, n_k]^d \times [0, 1]) \right) \geq k \right\} .$$

Finalement, on peut définir la fonction g de la manière suivante : $g(n) = \sum_k \mathbb{1}_{[n_k, n_{k+1})}(n)$. La valeur $g(n)$ correspond au nombre d'entiers n_k plus petits que n . La fonction g a été construite de sorte qu'elle satisfasse :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k \geq 1} B_k\right) \leq \mathbf{P}\left(\forall n \geq 1, \#\text{For}^*(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) \cap ([-n, n]^d \times [0, 1]) \geq g(n)\right) .$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que la probabilité de l'événement $\bigcap_{k \geq 1} B_k$ est supérieure à $\beta - \sum_{k \geq 1} a_k = \frac{\beta}{2}$. □

On a bien démontré la Proposition I.3.15. □

On peut donc appliquer tour à tour les Propositions I.3.6 et I.3.4 pour obtenir la contradiction. Le théorème est bien démontré. Les deux prochaines parties sont consacrées à la démonstration du Théorème I.3.2.

I.4 Absence de percolation pour la marche au plus proche voisin

On va vérifier que la marche aléatoire aux $(p_k)_{k \geq 1}$ plus proches voisins satisfait les hypothèses Loop et Shield dès que $(p_k)_{k \geq 1}$ est une suite à support compact.

Pour pouvoir correctement appliquer le Théorème I.3.1, on commence par réécrire le modèle avec un espace de marques $\mathbb{M} = [0, 1]$. On rappelle que la loi μ de la marque du modèle est définie comme :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \mu(\{k\}) = p_k, \text{ avec } \sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1.$$

Pour un entier $n \geq 1$, la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série $\sum p_k$ sera notée S_n . Les sommes partielles de la série $\sum p_k$ nous permettent alors de subdiviser l'intervalle $[0, 1]$:

$$0 \leq S_1 \leq \dots \leq S_k \leq S_{k+1} \leq \dots \leq 1,$$

et cette subdivision est finie si et seulement si μ est à support compact. Par convention, on pose $S_0 = 0$. On considère alors la mesure uniforme σ sur $[0, 1]$. Un point marqué $(\cdot, m) \in \mathbf{R}^d \times [0, 1]$ d'une configuration se connectera à son $k^{\text{ième}}$ plus proche voisin si et seulement si $m \in [S_{k-1}, S_k)$. Ainsi, la probabilité pour qu'un point marqué se connecte à son $k^{\text{ième}}$ plus proche voisin vaut $\sigma([S_{k-1}, S_k)) = p_k$.

Dans toute la suite de la section, on considérera $\mathbb{M} = [0, 1]$ et μ désignera la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Théorème I.4.1. *Lorsque la suite $(p_k)_{k \geq 1}$ est nulle à partir d'un certain rang, la marche aléatoire aux $(p_k)_{k \geq 1}$ plus proches voisins satisfait les hypothèses Loop et Shield.*

I.4.1 Vérification de l'hypothèse Loop

Proposition I.4.2. *Si l'on pose $k = \max(l \geq 1 ; p_l > 0)$, alors presque toutes les configurations de \mathcal{C}' sont k -looping,*

On va introduire plusieurs notations utiles. Pour un point marqué $x = (\xi, \varpi) \in \mathbf{R}^d \times [0, 1]$ et un rayon $r > 0$, on notera par $B(x, r)$ la boule Euclidienne de centre ξ et de rayon r . Par ailleurs, pour $x, x' \in \mathbf{R}^d \times [0, 1]$, on notera $\|x - x'\|$ au lieu de $\|\xi - \xi'\|$ lorsque $x = (\xi, \cdot)$ et $x' = (\xi', \cdot)$. Enfin pour une marque $\varpi \in [0, 1]$, l'entier $l(\varpi)$ définit l'unique entier l tel que $\varpi \in [S_{l-1}, S_l)$.

Étant donné une configuration $\phi \in \mathcal{C}'$ et un point marqué $x = (\xi, \varpi) \in \phi$ on va subdiviser la boule $B(x, \|x - h(\phi, x)\|)$ en $l(\varpi)$ régions disjointes. On procède par récurrence. Pour $i \in \mathbf{N}$, on définit $v_i(\phi, x)$ comme suit : $v_0(\phi, x) = x$, et pour $i \geq 1$, $v_i(\phi, x)$ est défini comme l'unique plus proche voisin de x dans la configuration $\phi \setminus \{v_0(\phi, x), \dots, v_{i-1}(\phi, x)\}$. Précisément, pour $i \geq 1$, $v_i(\phi, x)$ désigne l'unique $i^{\text{ième}}$ plus proche voisin de x dans $\phi \setminus \{x\}$. En particulier, $h(\phi, x) = v_{l(\varpi)}(\phi, x)$. On pose alors, pour $i \in \{1, \dots, l(\varpi)\}$,

$$\begin{aligned} C_1(\phi, x) &= B(x, \|x - v_1(\phi, x)\|), \\ \forall i \in \{2, \dots, l(\varpi)\}, C_i(\phi, x) &= B(x, \|x - v_i(\phi, x)\|) \setminus B(x, \|x - v_{i-1}(\phi, x)\|). \end{aligned}$$

On a alors la subdivision :

$$B(x, \|x - h(\phi, x)\|) = \bigcup_{1 \leq i \leq l(\varpi)} C_i(\phi, x).$$

Démonstration : On va prouver qu'il existe $\mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}'$ tel que toute configuration de \mathcal{C}'' est k -looping et $\mathbf{P}(\mathbf{X} \in \mathcal{C}'') = 1$.

Pour une configuration $\phi \in \mathcal{C}'$ et un point marqué $x = (\xi, \varpi) \in \phi$, ajouter une boucle dans la composante forward de x n'est pas difficile. Il suffit par exemple de réduire le rayon de la boule ouverte $C_1(\phi, x)$ en le divisant par 3 et d'ajouter exactement k points marqués à l'intérieur (le fait que l'on divise le rayon par 3 est justifié plus bas). Dans le reste de la preuve, on notera par $\mathbf{B}(\phi, x)$ la boule ouverte $B(x, \frac{\|x - v_1(\phi, x)\|}{3})$. Pour tout $(x_1, \dots, x_k) \in (\mathbf{B}(\phi, x) \times [0, 1])^k$, on a :

- (a) $h(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, x) \in \{x_1, \dots, x_k\}$,
- (b) $\forall 1 \leq i \leq k, h(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, x_i) \in \{x, x_1, \dots, x_k\} \setminus \{x_i\}$.

L'item (a) est immédiat : les k points ajoutés deviennent les k plus proches voisins de x dans la nouvelle configuration, et on a $l(\varpi) \leq k$.

Vérifions maintenant l'item (b). Pour un point marqué ajouté $x_i = (\xi_i, \varpi_i)$ et pour tout point $y \in \{x, x_1, \dots, x_k\} \setminus \{x_i\}$, on a $\|x_i - y\| < \frac{2\|x - v_1(\phi, x)\|}{3}$. Une simple utilisation de l'inégalité triangulaire montre que pour tout $1 \leq i \leq k, B(x_i, \frac{2\|x - v_1(\phi, x)\|}{3}) \subset B(x, \|x - v_1(\phi, x)\|)$. On obtient ainsi que les k plus proches voisins de x_i sont exactement $\{x, x_1, \dots, x_k\} \setminus \{x_i\}$, et on a bien $h(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, x_i) \in \{x, x_1, \dots, x_k\} \setminus \{x_i\}$.

Les items (a) et (b) stipulent que chaque k -uplet de $\mathbf{B}(\phi, x) \times [0, 1]$ va satisfaire le premier item de l'hypothèse Loop :

- (i) $\text{For}(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, x) \subset \{x, x_1, \dots, x_k\}$.

En revanche, rien n'assure que les k points marqués ajoutés vont satisfaire les deuxième et troisième items de l'hypothèse Loop :

- (ii) $\forall 1 \leq i \leq k, x_i$ appartient à la composante connexe de x dans $\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}$ et on a :

$$\text{For}(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, x_i) \subset \{x, x_1, \dots, x_k\}.$$

- (iii) $\forall y \in \phi \setminus \{x\}$, tel que $h(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, y) \neq h(\phi, y)$, on a :

$$h(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, y) \in \text{Back}(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, x) \cap \{x, x_1, \dots, x_k\}.$$

Pour assurer la validité de l'item (iii), il faut contrôler les modifications du graphe qui portent sur les points $y \in \phi \setminus \{x\}$ tel que la boule $B(y, \|y - h(\phi, y)\|)$ contient au moins un point parmi $\{x_1, \dots, x_k\}$. On définit alors le sous-ensemble

$$\mathcal{E}(x, \phi) = \{y \in \phi \setminus \{x\} ; B(y, \|y - h(\phi, y)\|) \cap \mathbf{B}(\phi, x) \neq \emptyset\}.$$

Le reste de la preuve de la Proposition s'organise de la manière suivante : dans un premier temps, on montre que lorsque l'ensemble $\mathcal{E}(x, \phi)$ est fini, on peut trouver des k -uplets de points marqués qui vont satisfaire les trois items ci-dessus. Pour conclure la preuve, il suffira de montrer que l'événement

$$\mathcal{C}'' = \{\phi \in \mathcal{C}' ; \forall x \in \phi, \#\mathcal{E}(x, \phi) < \infty\} \tag{I.4.1}$$

a une probabilité égale à 1 sous la loi d'un processus ponctuel de Poisson.

On commence par montrer que toutes les configurations de \mathcal{C}'' sont k -looping. On se donne $\phi \in \mathcal{C}''$ et $x \in \phi$. Puisque $\mathcal{E}(x, \phi)$ est fini, il existe une boule ouverte $\Gamma \subset \mathbf{B}(\phi, x)$ telle que pour tout $y = (\xi', \varpi') \in \mathcal{E}(x, \phi)$ et pour tout $i \in \{1, \dots, l(\varpi')\}$, on a :

$$C_i(\phi, y) \cap \Gamma \neq \emptyset \implies \Gamma \subset C_i(\phi, y). \quad (\text{I.4.2})$$

Cette implication est illustrée par la Figure I.10.

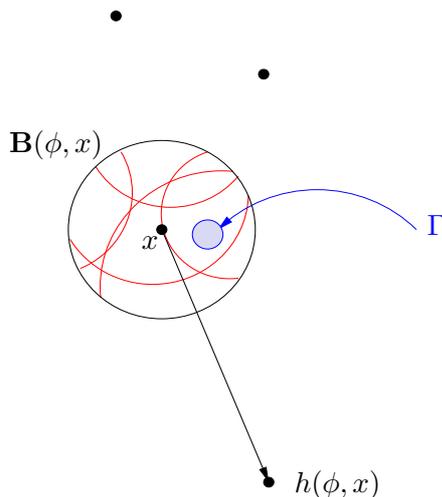


FIGURE I.10 – On représente ici le cas de la dimension 2. Pour chaque point $y \in \mathcal{E}(x, \phi)$, la frontière du disque $C_i(\varphi, y)$ est représentée par un arc de cercle rouge. Par hypothèse, seulement un nombre fini d'arcs de cercles intersectent le disque $\mathbf{B}(\varphi, x)$. C'est pourquoi il est possible d'insérer à l'intérieur de $\mathbf{B}(\varphi, x)$ un petit disque Γ qui n'est intersecté par aucun arc de cercle.

On suppose par ailleurs que le diamètre de Γ est choisi strictement plus petit que la distance entre x et Γ . On définit alors l'ensemble \mathcal{A}_x comme suit :

$$\mathcal{A}_x = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in (\Gamma \times [S_{k-1}, 1])^k ; \forall i \neq j, \xi_i \neq \xi_j\},$$

où on a considéré $x_i = (\xi_i, \cdot)$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Étant donnée une boule ouverte $A_x \subset \mathcal{A}_x$, montrons que A_x satisfait les trois items de l'hypothèse Loop. On se donne un k -uplet $(x_1, \dots, x_k) \in A_x$:

— Puisque $A_x \subset (\mathbf{B}(\phi, x) \times [0, 1])^k$, d'après ce qui précède, on a bien :

$$h(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, x) \in \{x_1, \dots, x_k\}.$$

Par ailleurs, pour tout $1 \leq i \leq k$, la condition sur le diamètre de Γ assure que l'on a $v_k(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, x_i) = x$. D'un autre côté, on a $\varpi_i \in [S_{k-1}, 1]$ où ϖ_i désigne la marque du point x_i . On a donc :

$$\forall 1 \leq i \leq n, h(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, x_i) = x.$$

Les deux premiers items de l'hypothèse Loop sont donc bien vérifiés.

— Pour montrer que le troisième item de l'hypothèse Loop est vérifié, on va prouver que pour tout $y \in \phi \setminus \{x\}$ tel que $h(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, y) \neq h(\phi, y)$, on a :

$$h(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, y) \in \{x_1, \dots, x_k\}. \quad (\text{I.4.3})$$

Pour un point marqué $y = (\xi', \varpi') \in \phi \setminus \{x\}$, deux situations peuvent se produire. Ou bien $B(y, \|y - h(\phi, y)\|) \cap \Gamma = \emptyset$, et dans ce cas on a $h(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, y) = h(\phi, y)$.

Ou bien $B(y, \|y - h(\phi, y)\|) \cap \Gamma \neq \emptyset$, et dans ce cas l'équation (I.4.2) nous affirme qu'il existe $1 \leq i \leq l(\varpi')$ tel que $\Gamma \subset C_i(\phi, y)$. On a donc $\{x_1, \dots, x_k\} \subset B(y, \|y - h(\phi, y)\|)$ ce qui implique que l'on a forcément $v_{l(\varpi')}(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, y) \in \{x_1, \dots, x_k\}$. Puisque $h(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, y) = v_{l(\varpi')}(\phi \cup \{x_1, \dots, x_k\}, y)$, l'équation (I.4.3) est bien prouvée.

Pour terminer la preuve de la Proposition, il faut montrer que l'événement défini en (I.4.1) a une probabilité égale à 1 sous la loi de \mathbf{X} . On va montrer que :

$$\mathcal{M} = \mathbf{E}(\#\{x \in \mathbf{X} ; B(x, \|x - h(\mathbf{X}, x)\|) \cap B(0, 1) \neq \emptyset\}) < +\infty.$$

On notera par ν_d le volume de la boule euclidienne unité de dimension d . On calcule \mathcal{M} en utilisant la formule de Slivnyak-Mecke (I.1.4) :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= z \int_{\mathbf{R}^d \times [0,1]} \mathbf{P}(B(x, \|x - h(\mathbf{X} \cup \{x\}, x)\|) \cap B(0, 1) \neq \emptyset) \lambda_d(d\xi) \mu(d\varpi), \\ &\leq z\nu_d + z \int_{B(0,1)^c \times [0,1]} \mathbf{P}(\|x - h(\mathbf{X} \cup \{x\}, x)\| \geq \|x\| - 1) \lambda_d(d\xi) \mu(d\varpi), \\ &\leq z\nu_d + z \int_{B(0,1)^c \times [0,1]} \mathbf{P}(\#\mathbf{X}_{B(x, \|x\| - 1)} \leq k) \lambda_d(d\xi) \mu(d\varpi). \end{aligned}$$

En effectuant un changement de coordonnées standard dans la dernière intégrale et en utilisant la stationnarité de \mathbf{X} , on obtient :

$$\mathcal{M} \leq z\nu_d + z \int_1^{+\infty} r^d \mathbf{P}(\#\mathbf{X}_{B(0, r-1)} \leq k) dr,$$

On écrit le polynôme $\Pi_k(r) = 1 + \frac{z\nu_d r^d}{1} + \dots + \frac{(z\nu_d r^d)^k}{k!}$. La dernière inégalité donne alors :

$$\mathcal{M} \leq z\nu_d + z \int_1^{+\infty} \exp(-z\nu_d r^d) r^d \Pi_k(r) dr < +\infty$$

□

La Proposition I.4.2 est bien démontrée.

I.4.2 Vérification de l'hypothèse Shield

On commence par subdiviser l'hypercube $[-m, m]^d$ en $\kappa = (d \lfloor m^{1/d} \rfloor)^d$ sous cubes Q_1^m, \dots, Q_κ^m ($\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière). Chacun de ces sous cubes a un volume égal à

$$\left(\frac{dm}{d \lfloor m^{1/d} \rfloor} \right)^d.$$

Le volume d'un sous cube est donc d'ordre m^{d-1} . On définit alors l'événement \mathcal{E}_m de la manière suivante :

$$\mathcal{E}_m = \bigcap_{1 \leq i \leq \kappa} \{ \# \mathbf{X}_{Q_i^m} \geq k \},$$

où l'on a toujours $k = \max(l \geq 1 ; p_l > 0)$.

Proposition I.4.3. *Pour $\alpha = 1$ et la suite d'événements $(\mathcal{E}_m)_{m \geq 1}$, l'hypothèse Shield est bien vérifiée.*

Démonstration :

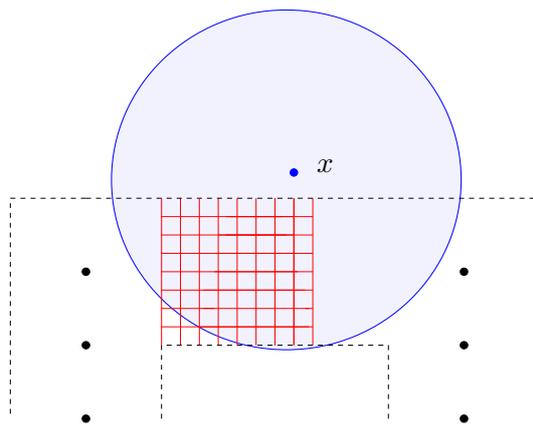


FIGURE I.11 – Les points noirs sont les sommets mu pour $u \in V$. L'événement \mathcal{E}_m réalisé en chaque $mu \oplus [-m, m]^d$ construit une muraille entre $m\mathcal{A}_1$ et $m\mathcal{A}_2$. Aucune boule centrée en x ne peut intersecter $m\mathcal{A}_2$ sans contenir au moins un sous cube de la muraille.

On observe dans un premier temps que l'événement \mathcal{E}_m est bien dans la tribu $\mathcal{S}_{[-m, m]^d}$. On vérifie maintenant que sa probabilité tend vers 1. Par stationnarité, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{X} \in \mathcal{E}_m^c) &= \kappa \mathbf{P}(\# \mathbf{X}_{Q_1^m} < k), \\ &\leq \kappa \left(1 + \frac{z \lambda_d(Q_1^m)}{1} + \dots + \frac{(z \lambda_d(Q_1^m))^{k-1}}{(k-1)!} \right) \exp(-z \lambda_d(Q_1^m)). \end{aligned}$$

On a donc majoré $\mathbf{P}(\mathbf{X} \in \mathcal{E}_m^c)$ par le produit d'un polynôme en m et d'un terme équivalent à $\exp(-zm^{d-1})$. Il s'ensuit que $\mathbf{P}(\mathbf{X} \in \mathcal{E}_m^c)$ tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$. Les deux premiers items de l'hypothèse Shield sont donc vérifiés.

On se concentre maintenant sur l'item (iii). On considère trois sous-ensembles $V, A_1, A_2 \subset \mathbf{Z}^d$ tels que les conditions topologiques décrites dans l'hypothèse Shield soient satisfaites.

Pour $i \in \{1, 2\}$ On définit \mathcal{A}_i comme dans (I.3.3) . On se donne $\phi \in \mathcal{C}'$ tel que pour tout sommet $u \in V$, $\tau_{-mu}(\phi) \in \mathcal{E}_m$. Soit $x \in \phi_{m\mathcal{A}_1}$, il convient de remarquer que pour tout $m \geq 1$, une boule ouverte centrée en x qui intersecte $m\mathcal{A}_2$ contient nécessairement un sous-cube $mu \oplus Q_i^m$ en son intérieur (voir Figure I.11) et contient donc au moins k points marqués de $m\mathcal{A}_2^c$. Ainsi, toute modification de ϕ dans la composante $m\mathcal{A}_2$ n'a aucune répercussion sur l'arête $(x, h(\phi, x))$. En particulier, on a $h(\phi, x) \in m\mathcal{A}_2^c$. Le troisième item s'obtient par symétrie des rôles de $m\mathcal{A}_1$ et $m\mathcal{A}_2$. □

I.5 Absence de percolation pour le modèle de navigation

À partir de maintenant, le paramètre $\epsilon \in (0, \pi]$ est fixé.

On va montrer que le modèle de navigation vérifie les hypothèses Loop et Shield dès que la mesure de probabilité μ sur $[0, 1]$ est strictement positive sur les ouverts non vides de $[0, 1]$.

Théorème I.5.1. *On suppose que pour tout ouvert non vide \mathcal{U} de $[0, 1]$, $\mu(\mathcal{U}) > 0$. Alors le modèle de navigation associé à la mesure μ vérifie les hypothèses Loop et Shield.*

La vérification des deux hypothèses comportent de nombreux points communs avec celle effectuée dans la Section I.4.

On rappelle que pour une configuration $\phi \in \mathcal{C}'$ et un point marqué $x = (\xi, \varpi) \in \phi$, on définit $h(\phi, x)$ comme le plus proche voisin de x dans le demi-cône :

$$C(x) = \xi \oplus \{(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) ; r > 0 \text{ et } |\alpha - 2\pi\varpi| \leq \epsilon\}.$$

I.5.1 Vérification de l'hypothèse Loop

Proposition I.5.2. *Chaque configuration de \mathcal{C}' est 1 – looping.*

Comme dans la Section I.4, pour deux points marqués $x = (\xi, \varpi), x' = (\xi', \varpi') \in \mathbf{R}^d \times [0, 1]$, nous utiliserons la notation $\|x - x'\|$ au lieu de $\|\xi - \xi'\|$. Pour un point marqué $x = (\xi, \varpi)$ et un réel positif r , la boule Euclidienne $B(\xi, r)$ sera parfois notée $B(x, r)$.

Démonstration : On se donne une configuration $\phi \in \mathcal{C}'$ et un point marqué $x = (\xi, \varpi) \in \phi$. On définit alors le cône arrêté issue de x :

$$C_{\text{stop}}(x) = \xi \oplus \{(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) ; 0 < r < \|x - h(\phi, x)\| \text{ et } |\alpha - 2\pi\varpi| < \epsilon\}.$$

Ainsi, $\phi_{C_{\text{stop}}(x)} = \emptyset$. On considère d_x un réel strictement positif suffisamment petit pour que $\phi_{B(x, d_x)} = \{x\}$. On définit alors le sous-ensemble $\mathcal{A}_x \subset B(x, \frac{d_x}{2}) \times [0, 1]$ de la façon suivante :

$$\mathcal{A}_x = \left\{ y \in \left(B(x, \frac{d_x}{2}) \cap C_{\text{stop}}(x) \right) \times [0, 1] ; \xi \in C(y) \right\}$$

On va montrer que toute boule ouverte $A_x \subset \mathcal{A}_x$ vérifie les trois items de l'hypothèse Loop. On se donne un point marqué $y \in A_x$:

- Puisque $y \in C_{\text{stop}}(x) \times [0, 1]$, et $\phi_{C_{\text{stop}}(x)} = \emptyset$, on a forcément $h(\phi \cup \{y\}, x) = y$. Par ailleurs, l'inégalité triangulaire nous garantit l'inclusion $B(y, \|y - x\|) \subset B(x, d_x)$. Ainsi, puisque $x \in C(y) \times [0, 1]$, on a bien $h(\phi \cup \{y\}, y) = x$. Les deux premiers items de l'hypothèse Loop sont bien vérifiés et on a :

$$\text{For}(\phi \cup \{y\}, x) = \{x, y\}.$$

- On va maintenant montrer que pour tout point marqué $y' \in \phi \setminus \{x\}$, on a l'équivalence suivante :

$$h(\phi \cup \{y\}, y') \neq h(\phi, y') \iff h(\phi \cup \{y\}, y') = y.$$

Si $h(\phi \cup \{y\}, y') \neq h(\phi, y')$ alors on a nécessairement $y \in C_{\text{stop}}(y') \times [0, 1]$ et y devient alors le plus proche voisin de y' dans $C(y') \times [0, 1]$. On obtient donc $h(\phi \cup \{y\}, y') = y$ et en particulier, $y' \in \text{Back}(\phi \cup \{y\}, x)$. Le troisième item de l'hypothèse Loop est bien vérifié.

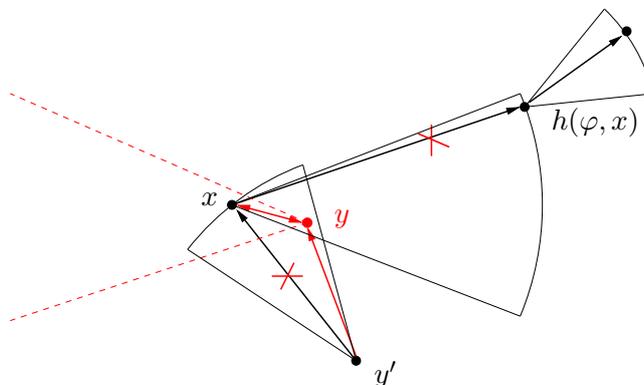


FIGURE I.12 – L'ajout du point marqué y crée une boucle de taille deux $\{x, y\}$. Le point marqué y' va se connecter sur le point ajouté y et contribue donc à "augmenter" le Backward du point x .

□

I.5.2 Vérification de l'hypothèse Shield

La vérification de l'hypothèse Shield est presque identique en tout point à celle effectuée pour la marche au plus proche voisin.

On subdivise l'hypercube $[-m, m]^2$ en $\kappa = (2\lfloor\sqrt{m}\rfloor)^2$ sous cubes Q_1^m, \dots, Q_κ^m . Chacun de ces sous-cubes a un volume égal à

$$\left(\frac{2m}{2\lfloor m^{1/2} \rfloor} \right)^2.$$

Le volume d'un sous-cube est donc d'ordre m . On définit l'événement \mathcal{E}_m de la manière suivante :

$$\mathcal{E}_m = \bigcap_{1 \leq i \leq \kappa} \{ \# \mathbf{X}_{Q_i^m} \geq 1 \},$$

Proposition I.5.3. *Pour $\alpha = 1$ et la suite d'événements $(\mathcal{E}_m)_{m \geq 1}$, l'hypothèse Shield est bien vérifiée.*

Démonstration : Il est clair que \mathcal{E}_m appartient à la tribu $\mathcal{S}_{[-m,m]^2}$. En procédant comme dans la preuve de la Proposition I.4.3, on vérifie que $\mathbf{P}(\mathbf{X} \in \mathcal{E}_m)$ tend vers 1 lorsque m tend vers $+\infty$. Les deux premiers items de l'hypothèse Shield sont donc vérifiés.

On se concentre maintenant sur l'item (iii). On considère trois sous-ensembles $V, A_1, A_2 \subset \mathbf{Z}^2$ tels que les conditions topologiques décrites dans l'hypothèse Shield soient satisfaites. Pour $i \in \{1, 2\}$, on définit \mathcal{A}_i comme dans (I.3.3). On se donne $\phi \in \mathcal{C}'$ tel que pour tout sommet $u \in V$, $\tau_{-mu}(\phi) \in \mathcal{E}_m$. On considère $x \in \phi_{m\mathcal{A}_1}$. Si le demi-cône infini $C(x)$ n'intersecte pas $m\mathcal{A}_2$ alors $h(\phi, x)$ ne dépend pas des modifications pouvant être effectuées dans $\phi_{m\mathcal{A}_2}$. On suppose maintenant que $C(x) \cap m\mathcal{A}_2$ n'est pas vide (voir Figure I.13). Il est suffisant de remarquer que pour tout entier $m \geq m_0(\epsilon)$, le cône arrêté $C_{\text{stop}}(x)$ n'intersecte pas $m\mathcal{A}_2$. Sinon, l'ensemble $C_{\text{stop}}(x)$ contiendrait nécessairement un sous cube $mu + Q_i^m$ (pour un certain $u \in V$ et $1 \leq i \leq \kappa$) et donc au moins un point marqué (puisque $\tau_{-mu}(\phi) \in \mathcal{E}_m$) ce qui est impossible en vertu de la définition de $C_{\text{stop}}(x)$. Ainsi, comme pour le cas précédent, $h(\phi, x)$ ne dépend pas des changements effectués sur ϕ dans $m\mathcal{A}_2$. \square

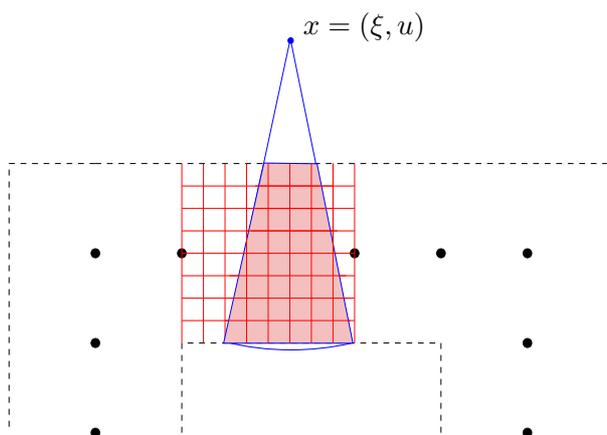


FIGURE I.13 – Tous les sous-cubes de la muraille contiennent au moins un point. Le point marqué x ne peut donc pas se connecter à un points situé de l'autre côté de la muraille.

I.6 Perspectives

Le Théorème I.3.1 prouve l'absence de percolation d'une famille importante de **POG**. Intuitivement, un **POG** dans lequel il est possible de rencontrer des boucles et qui ne forme pas de trop grandes arêtes semble disposé à satisfaire les hypothèses Loop et Shield. Néanmoins, on rencontre encore des modèles de **POG** dont l'absence de percolation est connue, et qui ne vérifient pas les hypothèses Loop et Shield. Par exemple, le modèle Lilypond que nous présenterons au début du Chapitre II, est un exemple de **POG** qui ne percole pas et qui ne vérifie pas l'hypothèse Loop. Cette observation nous encourage

à travailler pour relaxer l'hypothèse Loop. C'est un travail difficile car tous les points décrits dans l'hypothèse Loop apparaissent cruciaux dans la preuve de la Proposition I.3.8. La recherche d'une condition nécessaire et suffisante pour l'absence de percolation d'un **POG** est un travail exigeant et difficile. Il serait tout à fait agréable de dégager une caractérisation simple des **POG** non percolants, d'autant que les sciences physiques et humaines fournissent une grande quantité de phénomènes modélisables par ces graphes. Certains outils de la preuve du Théorème I.3.1 peuvent constituer un point de départ raisonnable pour la recherche d'une telle caractérisation.

L'exemple de la marche aux $(p_k)_{k \geq 1}$ plus proches voisins souligne une autre limite du Théorème I.3.1 : lorsque le support de la suite $(p_k)_{k \geq 1}$ n'est pas compact, une muraille comme celle construite dans les preuves des Propositions I.4.3 et I.5.3 n'est pas efficace pour les points marqués ayant une marque $l \in \mathbf{N}^*$ très grande. Un point marqué positionné d'un côté de la muraille peut éventuellement "sauter" par dessus si sa marque est plus grande qu'un certain entier. En d'autres termes, l'hypothèse Shield n'est pas vérifiée pour un tel modèle. Par ailleurs, il est impossible de trouver un k uniforme (indépendant de la configuration et du sommet) pour l'hypothèse Loop : plus un sommet a une marque grande, plus il faut ajouter des points pour former la boucle (en suivant la stratégie de la preuve de la Proposition I.5.2). Néanmoins, la non-compactité du support de la suite $(p_k)_{k \geq 1}$ n'est certainement pas une condition suffisante pour la percolation de la marche ; certaines propriétés sur la queue de distribution de la marque, ou bien sur ses moments, pourraient assurer l'absence de percolation.

La genèse du Théorème I.3.1 est née de l'étude du **line segment model** introduit par D.J. Daley, S. Ebert et G. Last dans [7]. Ce modèle sera rigoureusement défini dans le Chapitre II et des résultats d'absence de percolation seront énoncés et prouvés dans le Chapitre III. En particulier, on montrera qu'une dynamique de segments grandissants à vitesse constante fournit un exemple de **POG** qui vérifie les hypothèses Loop et Shield.

Comme mentionné dans la Section I.3.1, on souhaite obtenir le maximum de propriétés sur la loi de la taille d'un cluster typique dans un **POG** qui ne percole pas. La taille étant simplement définie comme le nombre de points. Il apparaît que la densité de points m -shield est fortement reliée à la loi de la taille d'un cluster. Là encore, la recherche d'un résultat donnant des informations sur la loi de la taille d'un cluster pour n'importe quel **POG** qui vérifie les hypothèses Loop et Shield est une motivation importante. Il s'agit de tirer le maximum de la preuve du Théorème I.3.1 en affinant peu à peu sa compréhension.

Chapitre II

Modèles germes grains arrêtés

Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, nous présentons une définition du modèle germes grains Poissoniens dans le plan. Cette définition est directement inspirée de modèles de segments grandissants étudiés lors de la dernière décennie. En exemple, nous introduisons un modèle de mouvements browniens grandissants. Lorsque tous les grains sont stoppés avec probabilité 1, on dit que le modèle germes grains est arrêté. Le résultat principal du chapitre (Théorème [II.4.1](#)) donne une condition suffisante sur les paramètres d'un modèle germes grains pour qu'il soit arrêté.

La démonstration du théorème d'existence de modèles germes grains arrêtés est directement inspirée de la preuve d'existence d'intensité sous critique pour la percolation dans le modèle Poisson booléen. Nous montrerons qu'un modèle général de segments grandissants vérifie la condition suffisante exprimée par le théorème, et qu'il en est de même pour le modèle brownien évoqué plus haut (Corollaire [II.4.2](#)).

La structure des composantes connexes de grains stoppés peut être mise en relation avec celle d'un graphe outdegree-one. Ainsi, toute la théorie des **POG** établie dans le premier chapitre s'avère utile à l'étude de l'absence de percolation de certains modèles germes grains arrêtés (les modèles arrêtés en temps fini). Cette relation étroite entre un système de grains arrêtés et un graphe orienté outdegree-one avait déjà été exploitée dans l'étude du modèle Lilypond. Une partie du chapitre sera dédiée à la présentation de ce modèle qui a largement impulsé les problématiques présentées dans cette thèse.

Sommaire

II.1 Le modèle Lilypond	58
II.1.1 Définition et existence	58
II.1.2 Absence de percolation	59
II.2 Deux modèles de segments grandissants	61
II.2.1 Définition et existence	62
II.2.2 Absence de percolation	63
II.3 Le modèle germes grains arrêté	64
II.3.1 Notations et définitions	64
II.3.2 Exemples	66
II.4 Existence des SGGM	68
II.4.1 Résultat principal	68
II.4.2 Preuve du Théorème d'existence	69
II.5 Lien avec la théorie des POG	81
II.6 Perspectives	83

II.1 Le modèle Lilypond

Le modèle Lilypond fut introduit par Häggström et Meester en 1996 ([12]). À partir d'un processus ponctuel de Poisson sans marque dans \mathbf{R}^d , une dynamique de boules grandissantes s'enclenche : en tout point du processus ponctuel grandit une boule centrée en le point. Chaque boule grandit avec la **même vitesse**, et les boules ne peuvent pas se recouvrir. Ainsi, une boule s'arrête lorsque sa frontière percute la frontière d'une autre boule. Lorsque toutes les boules sont arrêtées, on étudie les propriétés des composantes connexes. Häggström et Meester ont prouvé l'absence presque sûre de composante connexe infinie dans la configuration de boules arrêtées (Theorem 2.1 dans [12]). Une nouvelle preuve de ce résultat a été donnée par Daley et Last (Theorem 5.1 dans [8]). Cette dernière preuve s'articule autour de l'absence de chaîne descendante infinie dans la configuration de boule arrêtée et fait le lien avec l'étude des graphes outdegree-one.

II.1.1 Définition et existence

On se donne un entier $d \geq 2$ et on définit l'ensemble des configurations de \mathbf{R}^d comme :

$$\mathcal{C} = \{ \phi \subset \mathbf{R}^d ; \forall A \subset \mathbf{R}^d \text{ borné, } \#\phi_A < +\infty \},$$

où on a posé $\phi_A = \phi \cap A$. De la même façon qu'au chapitre précédent, on définit l'espace mesurable $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$. Par ailleurs, comme dans la Définition I.1.2, on définit un processus ponctuel de Poisson sur \mathbf{R}^d d'intensité $z\lambda_d$ en ne considérant pas d'espace de marques.

Étant donnée une configuration $\phi \in \mathcal{C}$, un **système de boules** de ϕ est la donnée d'une fonction $R_\phi : \phi \rightarrow [0, +\infty]$ qui associe à chaque point de la configuration ϕ le rayon de la boule fermée centrée en ce point.

Définition II.1.1. Soit $\phi \subset \mathcal{C}$ une configuration telle que $\#\phi \geq 2$ et R_ϕ un système de boules de ϕ . On dit que R_ϕ est un système **Lilypond** si :

- (a) $\forall x \neq y \in \phi, R_\phi(x) + R_\phi(y) \leq \|x - y\|,$
- (b) $\forall x \in \phi \exists y \in \phi \setminus \{x\} ; R_\phi(x) + R_\phi(y) = \|x - y\|$ et $R_\phi(y) \leq R_\phi(x).$

Pour résumer, un système Lilypond caractérise une collection de boules dont les intersections se produisent uniquement sur les frontières (item (a)), et telle que chaque boule est en contact avec au moins une boule de rayon plus petit (item (b)). La Définition II.1.1 est équivalente à la description purement dynamique évoquée plus haut (chaque boule grandit puis s'arrête car stoppée par une autre). L'existence et l'unicité du système Lilypond pour n'importe quelle configuration de \mathcal{C} d'au moins deux points est un résultat récent, démontré par Heveling et Last (Theorem 4.1 dans [14]).

Théorème II.1.2 (Heveling, Last 2006). Pour toute configuration $\phi \in \mathcal{C}$ telle que $\#\phi \geq 2$, il existe un unique système Lilypond R_ϕ et on note alors :

$$\text{Lilypond}(\phi) = \bigcup_{x \in \phi} \overline{B}(x, R_\phi(x)), \quad (\text{II.1.1})$$

où $\overline{B}(x, R_\phi(x))$ désigne la boule fermée de centre x et de rayon $R_\phi(x)$.

II.1.2 Absence de percolation

Nous allons voir à présent que le modèle de boule Lilypond(ϕ) possède des particularités topologiques remarquables lorsque la configuration ne contient pas de **chaîne descendante infinie** ni de **points en configuration réseau**. On rappelle que la notion de chaîne descendante infinie a déjà été évoquée dans la Section I.2.3 (voir I.2.5) :

Définition II.1.3. Soit $\phi \in \mathcal{C}$, une chaîne descendante infinie de ϕ est une suite sans répétition $(x_i)_{i \geq 0} \in \phi^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall i \geq 1, \|x_{i+1} - x_i\| \leq \|x_i - x_{i-1}\|.$$

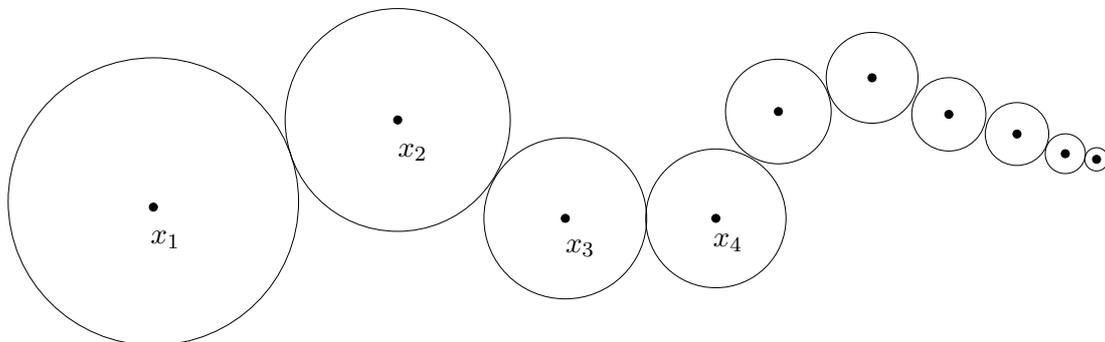


FIGURE II.1 – On a représenté ici la configuration Lilypond de boules associée à un morceau de chaîne descendante infinie $(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$

Définition II.1.4. Soient $\phi \in \mathcal{C}$ et $m \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$. On considère $x_1, \dots, x_m \in \phi$ deux à deux distincts. On dit que le sous-ensemble $\{x_1, \dots, x_m\}$ est en configuration réseau s'il existe une collection d'entiers non tous nuls $(\alpha_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq m}$ telle que :

$$\sum_{1 \leq i \neq j \leq m} \alpha_{ij} \|x_i - x_j\| = 0$$

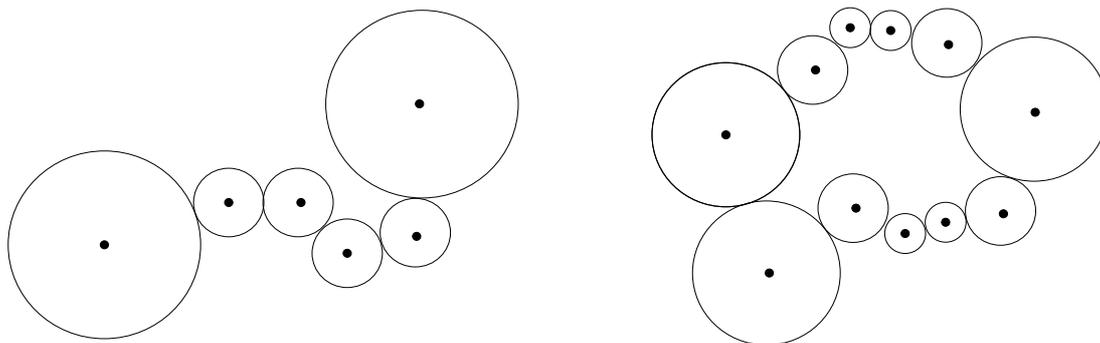


FIGURE II.2 – On a représenté ici deux configurations Lilypond de boules pour des ensembles de points en configuration réseau.

Proposition II.1.5 (Daley, Last 2008). Soit $\phi \in \mathcal{C}$ une configuration d'au moins deux points sans chaîne descendante infinie ni points en configuration réseau. Alors le système Lilypond R_ϕ vérifie :

$$\forall x \in \phi, \exists! y \in \phi \setminus \{x\} ; R_\phi(x) + R_\phi(y) = \|x - y\| \text{ et } R_\phi(y) \leq R_\phi(x). \quad (\text{II.1.2})$$

Notons par \mathcal{C}' l'ensemble des configurations d'au moins deux points sans chaîne descendante ni points en configurations réseau. Pour une configuration $\phi \in \mathcal{C}'$, le modèle de boules Lilypond(ϕ) peut être observé comme un graphe outdegree-one : $\forall x \in \phi$, on définit $h(\phi, x)$ comme l'unique point y de l'équation (II.1.2). On obtient de cette façon un graphe outdegree-one $\mathcal{G}_h(\phi)$ sur la configuration ϕ .

Les composantes connexes du graphe $\mathcal{G}_h(\phi)$ correspondent aux composantes connexes du modèle de boules Lilypond(ϕ), ainsi, l'existence d'une composante connexe infinie dans Lilypond(ϕ) est équivalente à l'existence d'un cluster infini dans $\mathcal{G}_h(\phi)$. Les boucles du graphe outdegree-one $\mathcal{G}_h(\phi)$ sont de taille 2 (comme sur la Figure II.3) et correspondent à un couple de boules tangentes de même rayon dans Lilypond(ϕ).

La Figure II.2 montre assez bien que la présence de points en configuration réseau rend impossible la construction d'un graphe outdegree-one. Prenons l'exemple d'une configuration ϕ réduite à un triangle équilatéral : Le modèle **Lilypond**(ϕ) sera constitué de trois boules tangentes de même rayon, l'équation (II.1.2) n'est donc pas valide.

Pour $\phi \in \mathcal{C}'$, le graphe $\mathcal{G}_h(\phi)$ ne contient donc pas de chaîne descendante infinie. Par ailleurs, comme pour la marche au plus proche voisin, une branche Forward dans $\mathcal{G}_h(\phi)$ possède la propriété de décroissance d'arêtes. En utilisant les mêmes arguments que ceux évoqués dans la Section I.2.3 du Chapitre I, on en déduit que le graphe $\mathcal{G}_h(\phi)$ ne possède pas de composante Forward infinie.

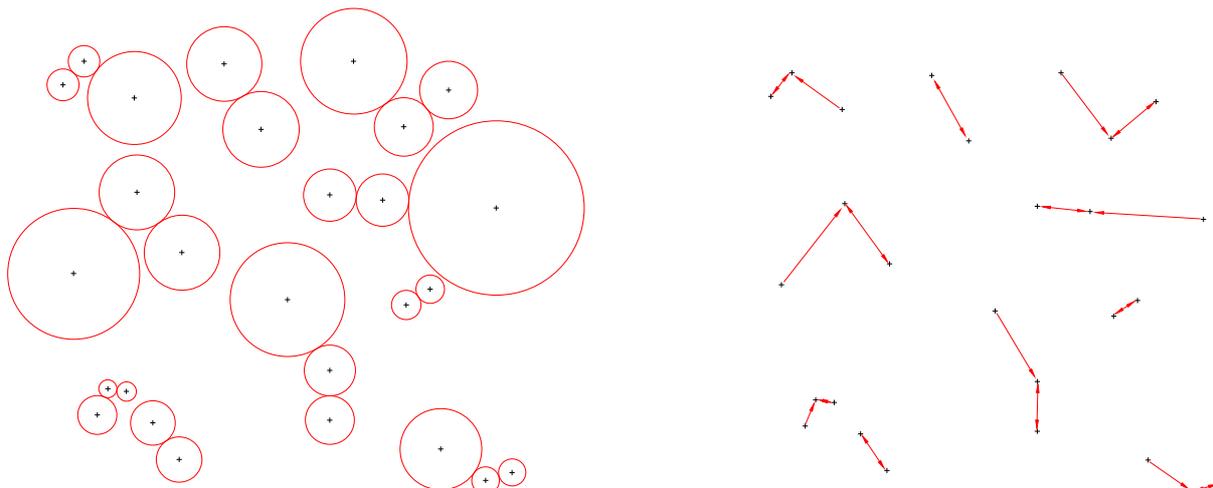


FIGURE II.3 – On a simulé un processus ponctuel de Poisson d'intensité $30\lambda_2$ dans le carré $[0, 1]^2$ et la configuration de boules arrêtées correspondante. Dans la fenêtre de droite figure le graphe outdegree-one associé à cette configuration de boules. On s'aperçoit que la dynamique a formé de nombreuses composantes connexes qui sont constituées d'un faible nombre de boules.

Étant donné un processus ponctuel de Poisson \mathbf{X} sur \mathbf{R}^d d'intensité $z\lambda_d$, des propriétés standards des moments factoriels impliquent que $\mathbf{P}(\mathbf{X} \in \mathcal{C}') = 1$ (voir la Section 3 de [8]). En conséquence de ce qui précède, on obtient :

Théorème II.1.6 (Häggström et Meester 1996, Daley et Last 2004). *Soit \mathbf{X} un processus ponctuel de Poisson sur \mathbf{R}^d d'intensité $z\lambda_d$. On a :*

$$\mathbf{P}(\text{Lilypond}(\mathbf{X}) \text{ ne percole pas}) = 1.$$

La loi de la taille d'une composante connexe typique dans $\text{Lilypond}(\mathbf{X})$ fut étudiée par Last et Penrose dans [19]. Trois définitions sont données pour la taille d'une composante connexe : volume, diamètre et nombre de boules constituantes. Last et Penrose ont montré (Theorem 4.1 dans [19]) la décroissance exponentielle de la fonction de survie de la taille d'une composante connexe typique pour chacune des trois définitions.

II.2 Deux modèles de segments grandissants

Ce modèle se construit dans le plan. En chaque point d'un processus ponctuel de Poisson dans \mathbf{R}^2 grandit non plus une sphère, mais un segment qui suit une direction donnée par une marque. Le point de départ du segment devient le centre du segment grandissant. En d'autres termes, chaque segment grandit selon une croissance **bilatérale**. Dans un premier temps, on considère que la vitesse de poussée du segment est la même pour tous les points, et que les directions de poussées sont indépendamment distribuées par la loi uniforme sur $[0, \pi]$ (puisque la croissance est bilatérale, il suffit de considérer $[0, \pi]$ plutôt que $[0, 2\pi]$). Comme pour le modèle Lilypond, les segments ne sont pas autorisés à se croiser, ainsi, chaque segment stoppe sa croissance lorsque l'une de ses extrémités tape

un autre segment. Ce modèle de segments grandissants fut introduit par Daley, Ebert et Last dans [7], et ils montrèrent que la dynamique converge presque sûrement vers une configuration de segments arrêtés. Dans le même article, les auteurs ont conjecturé l'absence de percolation du modèle, tout en insistant sur le fait que l'argument d'absence de chaîne descendante n'était pas efficace pour prouver la non percolation. La recherche d'une preuve de cette conjecture a motivé l'introduction de variantes du modèle défini par Daley et al : on peut considérer que les segments grandissent depuis chaque point de manière unilatérale (avec une seule extrémité grandissante), on peut aussi considérer les directions de poussées indépendamment distribuées par une loi uniforme sur $\{0, \frac{\pi}{2}\}$ (version bilatérale) ou sur $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ (version unilatérale). Ces variantes seront présentées dans cette section.

II.2.1 Définition et existence

Modèle unilatéral

On commence par donner un formalisme général pour le modèle de croissance unilatéral. On considère $\mathbb{M} = [0, 2\pi]$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{M}}$ la tribu borélienne associée. On désigne par μ la loi uniforme sur $(\mathbb{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{M}})$. L'espace des configuration $(\mathcal{C}^{\mathbb{M}}, \mathcal{S})$ est défini comme dans la Section I.1.1. Pour une configuration $\phi \in \mathcal{C}^{\mathbb{M}}$, un point marqué $x = (\xi, \theta)$ et un temps $t \in (0, +\infty]$, on définit le grain issu de x à l'âge t :

$$\text{Grain}(x, t) = \{\xi + s(\cos(\theta), \sin(\theta)) ; s \in [0, t)\},$$

qui correspond au segment semi-ouvert issu de ξ , de longueur t et de direction θ . Pour $t < +\infty$, on définit l'**extrémité** du grain comme :

$$H(x, t) = \{\xi + t(\cos(\theta), \sin(\theta))\}.$$

Si $H(x, t)$ est défini comme un ensemble et non comme un élément de \mathbf{R}^2 , c'est pour pouvoir regrouper les modèles unilatéral et bilatéral sous une même définition (Définition II.2.1). Pour une configuration $\phi \in \mathcal{C}^{\mathbb{M}}$, une exploration est une fonction $f_{\phi} : \phi \rightarrow (0, +\infty]$ qui associe à chaque point marqué la durée de croissance de son segment :

Définition II.2.1. Soit $\phi \in \mathcal{C}^{\mathbb{M}}$. Une exploration f_{ϕ} est dite **arrêtée** si elle satisfait :

- (a) $\forall x \neq y \in \phi, \text{Grain}(x, f_{\phi}(x)) \cap \text{Grain}(y, f_{\phi}(y)) = \emptyset,$
- (b) $\forall x \in \phi \text{ tel que } f_{\phi}(x) < +\infty, \exists ! y \in \phi \setminus \{x\} ; H(x, f_{\phi}(x)) \cap \text{Grain}(y, f_{\phi}(y)) \neq \emptyset.$

Cette définition est une version adaptée de la Définition II.1.1 pour le modèle unilatéral de segments grandissants. La condition (a) assure qu'il n'y a pas d'intersection entre les grains arrêtés tandis que la condition (b) stipule que chaque grain stoppé est arrêté par un unique stoppant.

Modèle bilatéral

Pour définir un modèle de croissance bilatérale comme celui évoqué ci-dessus, on considère $\mathbb{M} = [0, \pi]$ au lieu de $[0, 2\pi]$. Pour un point marqué $x = (\xi, \theta)$ d'une configuration $\phi \in \mathcal{C}^{\mathbb{M}}$, on pose :

$$\forall t \in (0, +\infty], \text{Grain}(x, t) = \{\xi + s(\cos(\theta), \sin(\theta)) ; s \in (-t, t)\},$$

qui correspond au segment ouvert centré en ξ , de longueur $2t$ et de direction θ . Enfin, pour un temps $t < +\infty$, on définit l'**extrémité** du grain comme :

$$H(x, t) = \{\xi + t(\cos(\theta), \sin(\theta)), \xi - t(\cos(\theta), \sin(\theta))\}.$$

On peut alors naturellement appliquer la Définition II.2.1 à ce modèle bilatéral.

Existence d'une unique exploration arrêtée

Pour l'un et l'autre des deux modèles de segments grandissants, on désigne par \mathbf{X} un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbb{M}$ d'intensité $z\lambda_2 \otimes \mu$. Daley, Ebert et Last ont prouvé dans [7] que pour $\mathbf{P}_{\mathbf{X}}$ -presque toute configuration, il existe une unique exploration arrêtée, et cette exploration ne contient pas de grains non bornés :

Théorème II.2.2 (Daley, Ebert, Last 2013). *Pour le modèle unilatéral comme pour le modèle bilatéral, il existe une unique exploration arrêtée f_ϕ pour $\mathbf{P}_{\mathbf{X}}$ -presque toute configuration $\phi \in \mathcal{C}^{\mathbb{M}}$. On peut alors définir l'exploration arrêtée aléatoire $f_{\mathbf{X}}$. On a alors :*

$$\mathbf{P}(\forall x \in \mathbf{X}, f_{\mathbf{X}}(x) < +\infty) = 1$$

En résumé, le fait que les vitesses de croissance des grains soient bornées (elles sont même constantes et égales) permet l'écriture d'un algorithme qui détermine l'unique grain stoppant d'un grain fixé. Par exemple, dans le modèle unilatéral, les germes de départ des grains pouvant stopper un grain fixé avant le temps t appartiennent à une boule déterministe. La locale finitude assure donc que les candidats pour l'arrêt d'un grain fixé avant un temps t son en nombre fini. Dans la section suivante, nous généraliserons ces deux modèles de segments grandissants en considérant des vitesses de poussées distribuées par une loi à support non compact, la stratégie employée dans la preuve de II.2.2 pour démontrer l'existence d'une unique exploration arrêtée ne sera plus valide.

II.2.2 Absence de percolation

On commence par définir \mathcal{C}' comme l'ensemble des configurations de $\mathcal{C}^{\mathbb{M}}$ dont l'unique exploration arrêtée ne contient pas de grain infini. Le Théorème II.2.2 stipule alors que $\mathbf{P}(\mathbf{X} \in \mathcal{C}') = 1$. Pour $\phi \in \mathcal{C}'$ et $x \in \phi$, on définit alors $h(\phi, x)$ comme l'unique point marqué $y \in \phi \setminus \{x\}$ tel que $H(x, f_\phi(x)) \cap \text{Grain}(y, f_\phi(y)) \neq \emptyset$. On obtient de la sorte un graphe outdegree-one $\mathcal{G}_h(\phi)$ (voir Figure II.4). Comme pour le modèle Lilypond, on se focalise sur la question de la percolation du graphe aléatoire $\mathcal{G}_h(\mathbf{X})$.

Daley et al ont conjecturé l'absence de percolation des deux modèles (unilatéral et bilatéral) de segments grandissants (c'est-à-dire l'absence de percolation du graphe $\mathcal{G}_h(\mathbf{X})$) dans [7]. En 2014, C. Hirsch a démontré l'absence de percolation d'un modèle unilatéral légèrement modifié : $\mathbb{M} = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ et la mesure μ est la loi uniforme sur \mathbb{M} . Cette démonstration donnée par Hirsch dans [15] a fourni de nombreux arguments clés pour la rédaction du Théorème I.3.1. Finalement, la conjecture sera démontrée dans le Chapitre III, où nous vérifierons que les **POG** correspondant aux deux modèles satisfont les hypothèses Loop et Shield.

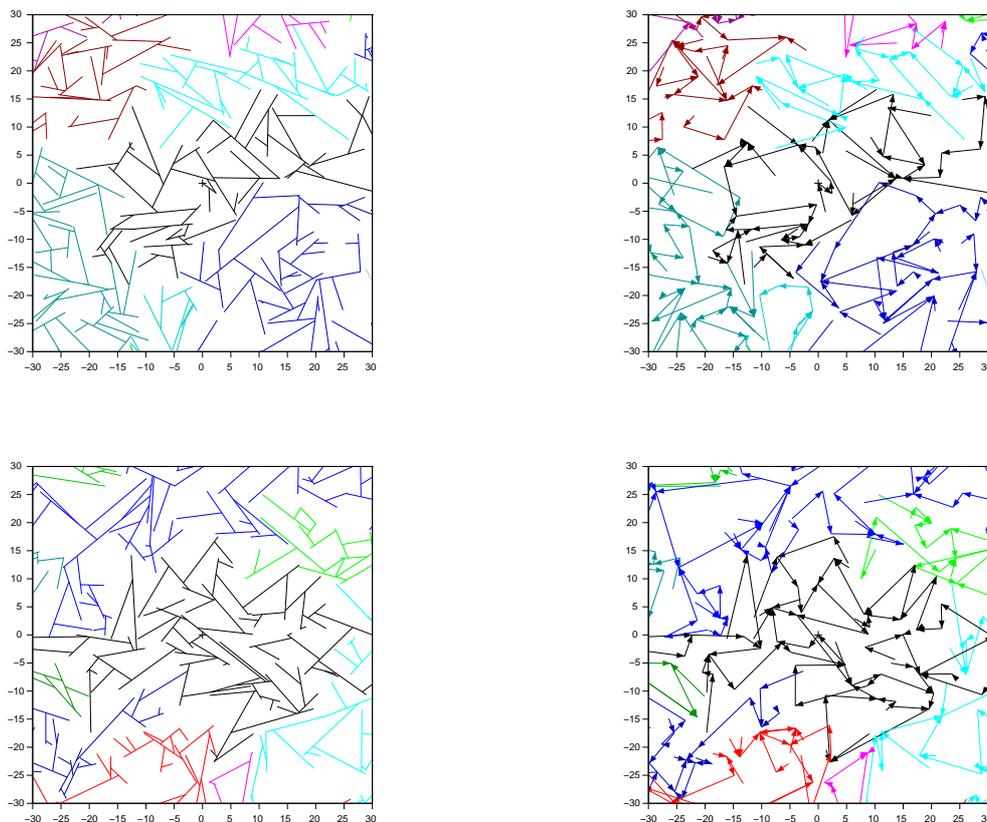


FIGURE II.4 – Dans les deux fenêtres de gauche, on a simulé la dynamique de poussée unilatérale de segments sur un processus ponctuel de Poisson dans la boîte $[-100, 100]^2$. Nous avons colorié de différentes couleurs les composantes connexes de segments stoppés, puis nous avons effectué un zoom pour mieux les distinguer. Dans la partie droite, nous avons représenté la partie du graphe outdegree-one correspondante à chaque configuration de segments arrêtés en respectant le code couleur des composantes connexes.

II.3 Le modèle germes grains arrêté

Cette section présente une définition générale du modèle germes grains arrêté dans le plan. Cette définition englobera les modèles de segments grandissants présentés dans la Section II.2.

L'ensemble des germes est un sous-ensemble localement fini de \mathbf{R}^2 distribué par un processus ponctuel de Poisson dans le plan. Depuis chaque germe, un grain grandit. Un grain est constitué d'un nombre aléatoire de branches aléatoires qui grandissent. Chacune des branches à la même loi et se définit comme le support géométrique d'un processus continu de \mathbf{R}^2 (par exemple, le mouvement brownien bidimensionnel). Les branches d'un même grain ne seront pas supposées indépendantes, mais les grains provenant de différents germes le seront. Toutes les branches d'un grain donné cessent de grandir lorsque

l'extrémité de l'une d'elles touche un autre grain. L'existence d'un état final pour une telle dynamique est le sujet d'étude de cette section.

II.3.1 Notations et définitions

Tous les modèles que nous considérerons seront planaires. On fixe un réel $z > 0$ qui correspond au paramètre d'intensité du processus ponctuel de Poisson distribuant les germes. Le nombre de branches par grain est distribué par la mesure de probabilité δ sur \mathbf{N}^* . L'espace mesurable des grains est défini de la façon suivante :

$$\mathbf{F} = (\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^2))^{\mathbf{N}} = \{(f_n)_{n \geq 0} ; \forall n \geq 0, f_n : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}^2 \text{ est continue}\}.$$

Sur l'ensemble \mathbf{F} , on considère la tribu produit \mathcal{F} où $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^2)$ est muni de la tribu engendrée par les ensembles ouverts pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. On se donne également une mesure de probabilité \mathcal{L} sur l'ensemble $(\mathbf{F}, \mathcal{F})$ qui satisfait :

- Toutes les lois marginales d'un processus $(Y_0, Y_1, \dots, Y_n, \dots)$ distribué par \mathcal{L} sont identiques.
- $Y_0(0) = 0$ presque sûrement.

On peut alors définir l'ensemble des marques de notre modèle comme $\mathbb{M} = \mathbf{N}^* \times \mathbf{F}$ que l'on munit de la tribu $\mathcal{F}_{\mathbb{M}} = \mathcal{P}(\mathbf{N}^*) \otimes \mathcal{F}$. De la même façon qu'au début du Chapitre I on définit l'ensemble des configurations de \mathbf{R}^2 marquées par \mathbb{M} :

$$\mathcal{C}^{\mathbb{M}} = \{\phi \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbb{M} ; \#\phi_A < \infty, \text{ pour tout borné } \Lambda \subset \mathbf{R}^2\},$$

où $\phi_A = \phi \cap (A \times \mathbb{M})$. Comme dans la Section I.1.1, on considère les événements de comptage :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^2), \forall F \in \mathcal{F}_{\mathbb{M}}, \forall n \in \mathbf{N}, \text{ on pose : } E_{(A,F,n)} = \{\phi \in \mathcal{C}^{\mathbb{M}} ; \#\phi \cap (A \times F) \leq n\}.$$

On munit alors l'ensemble $\mathcal{C}^{\mathbb{M}}$ de la tribu :

$$\mathcal{S} = \sigma \{E_{(A,F,n)}, A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^2), F \in \mathcal{F}_{\mathbb{M}}, n \in \mathbf{N}\}.$$

On peut alors donner la définition du modèle germes grains.

Définition II.3.1. *Un modèle germes grains d'information (z, δ, \mathcal{L}) est un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbb{M}$ d'intensité $z\lambda_2 \otimes \delta \otimes \mathcal{L}$.*

Nous notons que ce formalisme n'inclut pas le modèle Lilypond. Pour ce modèle précis, les grains grandissants ne peuvent être écrits de la même façon. Pour un modèle germes grains \mathbf{X} , on définit le processus de germes $\mathbf{X}_{\text{germs}} \subset \mathbf{R}^2$ associé à \mathbf{X} .

$$\mathbf{X}_{\text{germs}} = \{\xi ; (\xi, \cdot, \cdot) \in \mathbf{X}\}.$$

Pour une configuration $\phi \in \mathcal{C}^{\mathbb{M}}$ et un point marqué $(\xi, k, Y) \in \phi$, l'entier k correspond au nombre de branches qui grandissent depuis la position ξ . Précisément, parmi la collection de fonctions continues $Y = (Y_i)_{i \geq 0} \in \mathbf{F}$, seulement les k premières seront actives

dans la dynamique, toutes les autres seront des branches fantômes qui ne joueront aucun rôle.

Étant donné un temps $t \in [0, +\infty]$ et un point marqué $x = (\xi, k, Y) \in \phi$, on définit le **grain** partant de x et d'âge t :

$$\text{Grain}(x, t) = \{\xi + Y_i(s) ; 0 \leq i \leq k - 1, s \in [0, t]\}.$$

Par ailleurs, lorsque $t < +\infty$ on définit l'extrémité du grain d'âge t :

$$H(x, t) = \{\xi + Y_i(t) ; 0 \leq i \leq k - 1\}.$$

L'existence presque sûre d'un état final de grains arrêtés n'est pas garantie en toute généralité. Nous verrons dans la Section II.3.2 trois exemples de modèles germes grains pour lesquels il est nécessaire de regarder la configuration dans une région non bornée du plan pour savoir si un grain donné a une durée de vie supérieure à un instant t fixé. On ne peut donc plus utiliser un argument de local finitude pour écrire un algorithme qui détermine le grain stoppant. Nous verrons dans la preuve du Théorème II.4.1 qu'un résultat d'absence de percolation (énoncé par le Lemme II.4.9) garantit l'existence d'un algorithme de même type. On commence par généraliser la Définition II.2.1 à n'importe quel modèle germes grains :

Définition II.3.2. Soit $\phi \in \mathcal{C}^{\mathbb{M}}$. Une **exploration** est une fonction définie sur ϕ qui fixe une durée de vie à chaque grain :

$$f : \phi \longrightarrow (0, +\infty].$$

Une **exploration** f de ϕ est dite **arrêtée** si elle vérifie les deux conditions :

- $\forall x, y \in \phi, x \neq y, \text{Grain}(x, f(x)) \cap \text{Grain}(y, f(y)) = \emptyset$.
- $\forall x \in \phi, \text{tel que } f(x) < +\infty, \exists! y \in \phi \setminus \{x\} ; H(x, f(x)) \cap \text{Grain}(y, f(y)) \neq \emptyset$.

L'existence d'une telle **exploration arrêtée** n'est pas facile à vérifier en général. On distingue les modèles germes grains pour lesquels presque toutes les configurations ont une unique exploration arrêtée.

Définition II.3.3. Un modèle germes grains d'information (z, δ, \mathcal{L}) est un **modèle germes grains arrêté** si pour presque toute configuration, il existe une unique exploration arrêtée.

Le résultat principal du chapitre (Théorème II.4.1) donne une condition suffisante pour qu'un modèle germes grains soit arrêté. Par la suite, nous utiliserons l'acronyme **SGGM** pour désigner un modèle germes grains arrêté (**Stopped Germ-Grain Model**). Pour un **SGGM** donné, on dit que le modèle est arrêté en temps fini si tous les grains sont stoppés avec probabilité 1 :

Définition II.3.4. Soit \mathbf{X} un modèle germes grains d'information (z, δ, \mathcal{L}) . On dit que \mathbf{X} est arrêté en temps fini si

$$\mathbf{P}(\forall x \in \mathbf{X}, f_{\mathbf{X}}(x) < +\infty) = 1, \tag{II.3.1}$$

où $f_{\mathbf{X}}$ est une fonction aléatoire qui désigne l'unique exploration arrêtée de \mathbf{X} .

II.3.2 Exemples

On présente dans cette section les modèles germes grains que nous étudierons en détail dans les Chapitres II et III. Les deux premiers modèles généralisent les modèles de segments étudiés dans la Section II.2 au cas des vitesses de poussées aléatoires.

Le modèle unilatéral de segments grandissants

Le modèle unilatéral de segments grandissants est obtenu en considérant que le nombre de branches par grain est distribué par δ_1 la mesure de Dirac au point 1 (le nombre de segments par grain sera toujours égal à 1). Pour construire la mesure de probabilité \mathcal{L} , on introduit deux variables aléatoires indépendantes : Θ uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$ (c'est ce qui définira l'orientation du segment grandissant) et \mathbf{V} distribuée sur \mathbf{R}_+^* (qui correspond à la vitesse de croissance du segment). On peut alors définir Y_0 comme :

$$\forall t \geq 0, Y_0(t) = t\mathbf{V}(\cos(\Theta), \sin(\Theta)), \quad (\text{II.3.2})$$

et on définit la mesure de probabilité \mathcal{L} comme la loi de la suite de variables aléatoires $(Y_0, Y_0, \dots, Y_0, \dots)$.

En fixant un paramètre d'intensité $z > 0$, on peut alors définir le modèle unilatéral de segments grandissants comme un modèle germes grains d'information $(z, \delta_1, \mathcal{L})$.

Dans toute la suite du document, le modèle unilatéral de segments grandissant sera étudié via un formalisme plus spécifique et adapté : on définit le modèle comme un processus ponctuel de Poisson \mathbf{X} sur $\mathbf{R}^2 \times [0, 2\pi] \times \mathbf{R}_+^*$ avec mesure d'intensité $z\lambda_2 \otimes \Xi \otimes \rho$, où Ξ est la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$ et ρ définit la loi de \mathbf{V} . Parfois, nous utiliserons l'écriture :

$$\mathbf{X} = \bigcup_{\xi \in \mathbf{X}_{\text{germs}}} (\xi, \theta_\xi, V_\xi).$$

Cette description du modèle est plus adaptée aux questions de percolation que la description générale des modèles germes grains proposée dans la Définition II.3.1.

Un point marqué $x = (\xi, \theta, V)$ génère un segment grandissant depuis ξ dans la direction θ à la vitesse V .

Nous montrerons (Théorème II.4.1) que le modèle converge presque sûrement vers un état final de grains arrêtés lorsque $\mathbf{E}_\rho(\mathbf{V}^4) < +\infty$. Plus précisément, nous vérifierons que le Théorème II.2.2 reste vrai si l'on considère des vitesses de poussées aléatoires et indépendamment distribuées par ρ telles que $\mathbf{E}_\rho(\mathbf{V}^4) < +\infty$. Par ailleurs, dans le Chapitre III, nous établirons (Théorème III.1.1 et Théorème III.1.10) l'absence de percolation du modèle de segments grandissants dès qu'il existe un réel $s > 1$ tel que $\mathbf{E}_\rho(\exp(\mathbf{V}^s)) < +\infty$.

Modèle bilatéral de segments grandissants

Pour ce modèle, le nombre de branches par grain est distribué par δ_2 la mesure de Dirac au point 2. On considère les deux variables aléatoires indépendantes Θ et \mathbf{V} définies pour le modèle précédent. Le processus Y_0 est défini comme dans (II.3.2). On définit alors la mesure de probabilité \mathcal{L} comme la loi de la suite

$$\mathbf{Y} = (Y_0, -Y_0, Y_0, \dots, Y_0, \dots).$$

Le choix de la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$ garantit l'égalité en loi des marginales. En revanche, les deux branches d'un même grain sont symétriques, et donc dépendantes, c'est l'une des raisons pour laquelle nous n'avons pas supposé l'indépendance des marginales dans la définition de \mathcal{L} .

Comme pour le cas unilatéral, nous privilégierons une écriture du modèle par un processus ponctuel de Poisson \mathbf{X} sur $\mathbf{R}^2 \times [0, 2\pi] \times \mathbf{R}_+^*$ avec mesure d'intensité $z\lambda_2 \otimes \Xi \otimes \rho$. Dans ce cas, un point marqué (ξ, θ, V) génère deux segments grandissants depuis ξ en suivant les deux directions opposées θ et $-\theta$. La vitesse de croissance de chacun des deux segments est égale à V .

Les résultats d'existence et d'absence de percolation évoqués à la fin de la description du modèle unilatéral restent vrais pour le modèle bilatéral.

Modèle brownien

On présente ici le modèle brownien évoqué dans l'introduction et le résumé de chapitre. À la différence des deux modèles de segments, le nombre de branches par grain est **aléatoire** : on se donne δ une mesure de probabilité sur \mathbf{N}^* et \mathbf{K} une variable aléatoire distribuée par δ . On suppose que la mesure δ possède un moment d'ordre 2 fini : $\mathbf{E}_\delta(\mathbf{K}^2) < +\infty$.

On considère une suite de mouvements browniens bidimensionnels indépendants et issus de 0 : $\mathbf{B} = (B_i)_{i \geq 0}$. La mesure de probabilité \mathcal{L} est simplement définie comme la loi de \mathbf{B} . Un point marqué (ξ, K, B) génère K branches browniennes indépendantes qui grandissent depuis ξ (ce sont les \mathbf{K} premières trajectoires de \mathbf{B}).

II.4 Existence des SGM

II.4.1 Résultat principal

Le résultat principal de ce chapitre donne une condition suffisante pour qu'un modèle germes grains soit un **SGGM**.

On se donne \mathbf{X} un modèle germes grains d'information (z, δ, \mathcal{L}) , une variable aléatoire \mathbf{K} distribuée par δ et une suite de processus $Y = (Y_i)_{i \geq 0}$ distribuée par \mathcal{L} . On définit les variables aléatoires $M_{t,t'}$ comme suit :

$$\forall t, t' \geq 0, M_{t,t'} = \max_{0 \leq k \leq \mathbf{K}-1} \sup_{0 \leq s \leq t'} \|Y_k(t+s) - Y_k(t)\|.$$

On peut énoncer le théorème principal du chapitre :

Théorème II.4.1. *Soit \mathbf{X} un modèle germes grains d'information (z, δ, \mathcal{L}) tel que $\mathbf{E}_\delta(\mathbf{K}^2) < +\infty$. On note par χ la loi des marginales de \mathcal{L} . On suppose que :*

1.

$$\lim_{t' \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \mathbf{E}(M_{t,t'}^4) = 0, \tag{II.4.1}$$

2. *Étant donné U_1, U_2 deux processus indépendants distribués par χ :*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\lambda_2(\{U_1(t), t \geq 0\}) = 0) &= 1, \\ \mathbf{P}(\lambda_2(\{U_1(t) - U_2(t), t \geq 0\}) = 0) &= 1, \end{aligned}$$

alors, \mathbf{X} est un **SGGM**.

Avant de donner une preuve de ce théorème, nous vérifions que les trois modèles définis dans la Section II.3.2 sont des **SGGM**.

Corollaire II.4.2. *Les modèles suivant sont des **SGGM** :*

- Le modèle brownien,
- les modèles de segments grandissants qui vérifient $\mathbf{E}(\mathbf{V}^4) < +\infty$.

Démonstration : (du Corollaire II.4.2.)

Pour les deux modèles de segments, on a $M_{t,t'} = \mathbf{V}.t'$ et la condition (II.4.1) est rapidement vérifiée. Par ailleurs la condition 2. est immédiate.

Pour vérifier la condition (II.4.1) pour le modèle brownien, on va montrer que

$$\lim_{t' \rightarrow 0} \mathbf{E} (M_{0,t'}^4) = 0, \quad (\text{II.4.2})$$

et la conclusion proviendra de la stationnarité des accroissements du mouvement brownien. On rappelle que :

$$M_{0,t'} = \max_{0 \leq k \leq \mathbf{K}-1} \sup_{0 \leq s \leq t'} \|B_k(s)\|,$$

où $(B_k)_{0 \leq k \leq \mathbf{K}-1}$ est une collection de \mathbf{K} mouvements browniens bidimensionnel indépendants. Par changement d'échelle, on obtient :

$$\mathbf{E} (M_{0,t'}^4) = (t')^2 \mathbf{E} (M_{0,1}^4)$$

Pour prouver (II.4.2), il suffit de montrer que l'espérance dans le terme de droite de l'inégalité ci-dessus est finie. Pour $0 \leq k \leq \mathbf{K} - 1$, on pose :

$$W_k = \sup_{0 \leq s \leq 1} \|B_k(s)\|.$$

On obtient alors que

$$\mathbf{E} (M_{0,1}^4) = \mathbf{E} \left(\max_{0 \leq k \leq \mathbf{K}-1} W_k^4 \right) \leq \mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{\mathbf{K}-1} W_k^4 \right).$$

Pour tout entier $k \geq 1$ on a :

$$\mathbf{E} \left(\sum_{i=0}^{\mathbf{K}-1} W_i^4 \mid \mathbf{K} = k \right) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{E} (W_i^4) \leq k \mathbf{E} (W_k^4).$$

Finalement,

$$\mathbf{E} \left(\sum_{k=0}^{\mathbf{K}-1} W_k^4 \right) \leq \mathbf{E} (W_0^4) \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathbf{K} = k) k < +\infty,$$

puisque la variable aléatoire \mathbf{K} est intégrable et l'intégrale $\mathbf{E} (W_0^4)$ est finie.

Par ailleurs, la mesure de Lebesgue du mouvement brownien bidimensionnel est presque sûrement égale à 0 et le processus $B_1 - B_2$ est un mouvement brownien si B_1 et B_2 sont deux mouvements browniens indépendants. La deuxième condition est donc vérifiée. \square

La prochaine sous-section est dédiée à la preuve du Théorème II.4.1.

II.4.2 Preuve du Théorème d'existence

Idée de la preuve

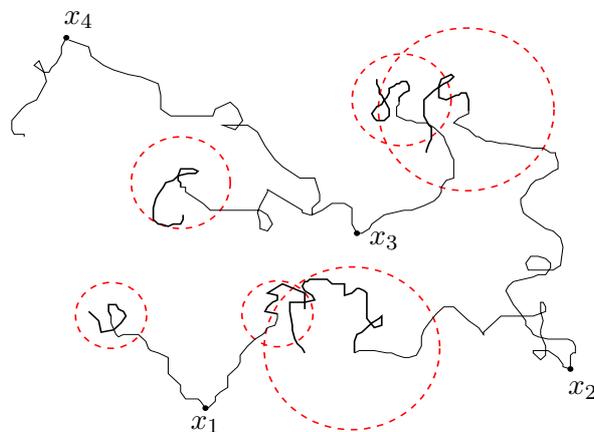


FIGURE II.5 – Au temps t , le grain partant du point marqué x_4 est déjà stoppé, tous les autres grains de la figure sont encore vivants. Pour s'assurer de la survie du grain partant de x_1 (resp x_2, x_3) entre les temps t et $t + t'$, il suffit de regarder la dynamique des branches à l'intérieur des disques dessinés en rouge.

On présente ici l'idée générale de la preuve. Considérons un temps $t > 0$ et une configuration $\phi \in \mathcal{C}^{\mathbb{M}}$. On suppose que l'on a déterminé l'ensemble des grains stoppés avant l'instant t . On se focalise sur les grains encore vivants dans la dynamique. Durant un intervalle de temps $[t, t + t']$, chaque branche grandissante se déplace à l'intérieur d'un disque (représenté en rouge sur la Figure II.5) dont la loi du rayon est la même que celle de la variable $M_{t,t'}$. La dynamique germes grains génère alors une collection de disques rouges qui matérialise le domaine d'interaction possible de chaque branche entre les instants t et $t + t'$. La survie d'un grain donné de ϕ jusqu'à l'instant $t + t'$ ne dépend que de l'observation des branches grandissantes à l'intérieur d'un cluster de disques rouges. La définition rigoureuse de cluster sera donnée dans la Définition II.4.3. La partie importante de la preuve consiste à montrer l'existence d'un temps $t' > 0$ suffisamment petit et uniforme en t tel que pour tout $t > 0$, presque sûrement, la collection de disques rouges provenant de la dynamique sur l'intervalle $[t, t + t']$ ne contient pas de cluster infini. Ce résultat d'absence de percolation garantit que l'algorithme permettant de vérifier si oui ou non un grain fixé a été stoppé entre t et $t + t'$ est fini pour chaque grain.

Preuve

La preuve s'articule autour d'un résultat de percolation (Lemme II.4.9) qui généralise le Théorème 2 de [13]. Avant d'énoncer ce lemme, il est nécessaire d'introduire certains objets et notations.

On se donne un modèle germes grains \mathbf{X} qui vérifie les hypothèses du Théorème II.4.1. On définit, pour $t \geq 0$ et $t' > 0$:

$$\text{Bool}_{(t,t')}(\mathbf{X}) = \bigcup_{(\xi,k,Y) \in \mathbf{X}} \bigcup_{l=0}^{k-1} B \left(\xi + Y_l(t), \max_{0 \leq l \leq k-1} \sup_{0 \leq s \leq t'} \|Y_l(t+s) - Y_l(t)\| \right). \quad (\text{II.4.3})$$

Pour tous $t, t' \geq 0$, chaque point marqué $(\xi, k, Y) \in \mathbf{X}$ produit exactement k disques ayant le même rayon. Deux disques (non nécessairement différents) sont dits **associés** s'ils sont produits par le même point marqué. On équipe la configuration aléatoire \mathbf{X} d'une structure de graphe non orienté :

Définition II.4.3. Soient $t, t' \geq 0$. On définit le **graphe généalogique** d'ordre (t, t') de \mathbf{X} comme le graphe aléatoire non orienté $\mathcal{G}_{t,t'}(\mathbf{X})$ défini comme suit :

- Les sommets de $\mathcal{G}_{t,t'}(\mathbf{X})$ sont les points marqués de \mathbf{X} .
- Les arêtes de $\mathcal{G}_{t,t'}(\mathbf{X})$ sont les paires $\{x, y\}$ avec $x \neq y \in \mathbf{X}$ telle que l'un des disques produits par x dans $\text{Bool}_{(t,t')}(\mathbf{X})$ intersecte au moins un des disques produits par y .

Une composante connexe de $\mathcal{G}_{t,t'}(\mathbf{X})$ sera appelée **cluster généalogique** de $\mathcal{G}_{t,t'}(\mathbf{X})$.

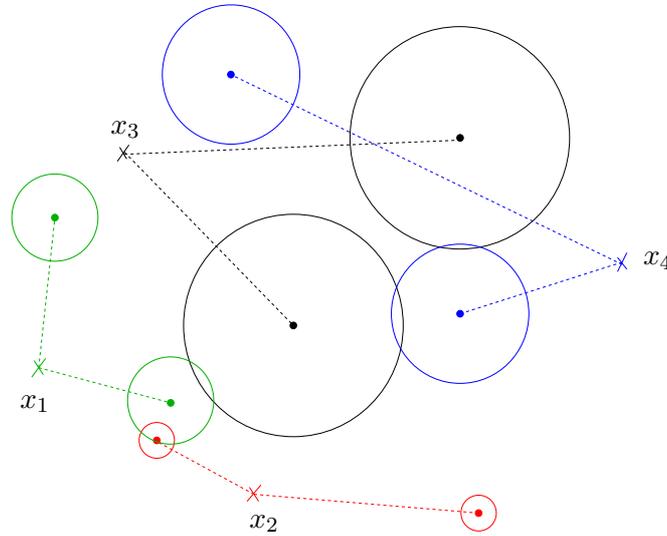


FIGURE II.6 – Nous avons considéré ici que la mesure δ était une mesure de Dirac en 2. Tous les points marqués d'une configuration engendrent deux disques de même rayon. Sur cette figure, tous les points marqués appartiennent au même cluster généalogique (voir Définition II.4.3). Cette figure permet de mettre en relation le modèle défini en (II.4.3) et l'idée générale de la preuve exprimée dans la Figure II.5.

Pour un point marqué $x \in \mathbf{X}$, le cluster généalogique de x dans $\mathcal{G}_{t,t'}(\mathbf{X})$ correspond à l'ensemble de grains à observer entre les instants t et $t + t'$ pour déterminer la survie (ou non) du grain issu de x entre ces mêmes instants. Si cette "composante connexe" de grains est finie pour tout point marqué, alors on sait exactement dire quels sont les grains encore en croissance à l'instant t' .

Comme précédemment, on dira que le graphe $\mathcal{G}_{t,t'}(\mathbf{X})$ ne percole pas si :

$$\mathbf{P}(\mathcal{G}_{t,t'}(\mathbf{X}) \text{ ne possède pas de cluster infini}) = 1.$$

Proposition II.4.4. Soit \mathbf{X} un modèle germes grains qui vérifie l'hypothèse (II.4.1) :

$$\lim_{t' \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \mathbf{E}(M_{t,t'}^4) = 0.$$

Alors il existe $t' > 0$ suffisamment petit tel que

$$\forall t \geq 0, \mathbf{P}(\mathcal{G}_{t,t'}(\mathbf{X}) \text{ ne possède pas de cluster infini}) = 1.$$

La Proposition II.4.4 sera démontrée dans un second temps. Nous montrons d'abord que le résultat qu'elle énonce nous permet de conclure la démonstration du Théorème II.4.1.

On se donne un temps $t' > 0$ suffisamment petit tel que pour tout $t \geq 0$, le graphe généalogique aléatoire $\mathcal{G}_{t,t'}(\mathbf{X})$ ne percole pas. Alors l'événement

$$\mathcal{E} = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} \{\mathcal{G}_{(kt',t')}(\mathbf{X}) \text{ ne contient pas de cluster infini}\}$$

a une probabilité égale à 1. On va alors montrer que pour toute configuration $\phi \in \mathcal{E}$, il existe une unique **exploration arrêtée** f_ϕ .

Dans un premier temps, on détermine l'ensemble $A_{t'}$ des grains stoppés entre les instants 0 et t' . La configuration de disques $\text{Bool}_{(0,t')}(\phi)$ n'est alors rien d'autre qu'une réalisation d'un modèle Poisson Booléen de \mathbf{R}^2 (voir Figure II.7). Pour un point marqué $x = (\xi, k, Y) \in \phi$, on note $C_\phi^{(0)}(x)$ le cluster généalogique fini de x dans $\mathcal{G}_{(0,t')}(\phi)$.

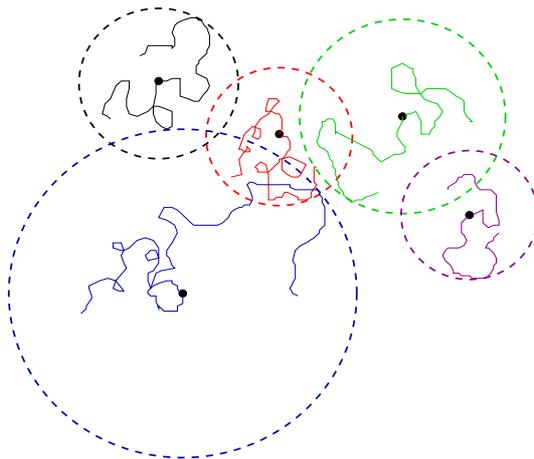


FIGURE II.7 – Les germes de ϕ sont les points noirs. Sur cette figure, chaque grain possède exactement 2 branches ayant exploré jusqu'au temps t' . On a dessiné une composante connexe de $\text{Bool}_{(0,t')}(\phi)$. Le grain bleu est le seul pouvant éventuellement stopper le grain rouge (et réciproquement). Pour différencier le stoppant du stoppé, il suffit de savoir quelle branche est arrivée la première au croisement (le Lemme II.4.5 montrera qu'il est toujours possible de savoir quelle est la première branche arrivée à l'intersection).

Les grains ayant la possibilité de stopper le grain partant de ξ entre les instants 0 et t' sont ceux dont le point marqué générateur est relié à x par une arête dans $C_\phi^{(0)}(x)$, ils sont donc en nombre fini. On peut itérer cette observation aux candidats stoppant de x et ainsi de suite. On obtient alors qu'un algorithme fini (on peut dire aussi algorithme bouclant) permet de vérifier si le grain issu de ξ a été arrêté ou non avant le temps t' (on détaillera la structure de cet algorithme un peu plus tard). Cet algorithme va identifier les croisements de branches ayant lieu dans la composante connexe de ξ dans $\text{Bool}_{(0,t')}(\phi)$ et

contrôler pour chaque croisement si l'intersection est réelle ou virtuelle (si l'une des deux branches du croisement a été arrêtée avant que l'intersection n'ait lieu). Le lemme suivant assure que pour chaque croisement de branches il est possible de déterminer quel est le grain stoppé, et quel est le grain stoppant.

Lemme II.4.5. *Nous avons l'égalité suivante :*

$$\mathbf{P}(\exists x \neq y \in \mathbf{X}, \exists t \geq 0; H(x, t) \cap H(y, t) \neq \emptyset) = 0.$$

Démonstration : Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il n'y a qu'une seule branche par grain. On identifie alors l'extrémité $H(\cdot, t)$ à son unique point. On va utiliser la formule de Campbell-Mecke énoncée en (I.1.5) pour montrer que

$$\mathcal{J} := \mathbf{E}(\#\{(x, y) \in \mathbf{X}^{(2)}; \exists t \geq 0, H(x, t) = H(y, t)\}) = 0. \quad (\text{II.4.4})$$

En utilisant la formule (I.1.5), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= z^2 \int \mathbf{1}_{\{\exists t \geq 0; \xi_1 + U_1(t) = \xi_2 + U_2(t)\}} (\lambda_2 \otimes \chi)^2(d(\xi_1, U_1), d(\xi_2, U_2)), \\ &= z^2 \int \mathbf{1}_{\{\exists t \geq 0; U_1(t) - U_2(t) = \xi_2 - \xi_1\}} (\lambda_2 \otimes \chi)^2(d(\xi_1, U_1), d(\xi_2, U_2)), \end{aligned}$$

En effectuant un simple changement de variable et en notant $\chi \otimes \chi$ la mesure produit par χ en dimension 2, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= z^2 \int \mathbf{1}_{\{\exists t \geq 0; (U_1 - U_2)(t) = u\}} \lambda_2(du) \chi \otimes \chi(dU_1, dU_2), \\ &= z^2 \mathbf{E}(\lambda_2(\{U_1(t) - U_2(t); t \geq 0\})). \end{aligned}$$

Cette dernière espérance est nulle d'après la deuxième condition du Théorème II.4.1. \square

Précisément, pour $x', x'' \in C_\phi^{(0)}(x)$ tels que les trajectoires de grains se sont croisées (une ou plusieurs fois) avant le temps t' , on va s'intéresser au premiers temps de croisement $t_{(x', x'')}$ des deux grains correspondant. La continuité des trajectoires des branches assurent l'existence d'un tel premier temps de croisement. On regarde alors le plus petit premier temps de croisement de la composante connexe $C_\phi^{(0)}(x)$ (bien défini car la composante connexe est finie) et on se concentre sur les intersections des branches ayant eu lieu en ce temps : pour chacune d'entre elles, on détermine quel grain est stoppé grâce au Lemme II.4.5. Précisons que l'arrêt mutuel de deux grains n'est pas problématique (pour un temps $t'' \leq t'$, on a à la fois $H(x, t'') \cap \text{Grain}(y, t'') \neq \emptyset$ et $H(y, t'') \cap \text{Grain}(x, t'') \neq \emptyset$). Après avoir traité tous les croisements et effacé les morceaux de branches virtuels, certaines intersections de branches peuvent disparaître (les branches qui auraient intersecté le grain stoppé après son arrêt de croissance), on efface donc une partie des premiers temps de croisements, et on regarde le minimum parmi les premiers temps de croisements restants. On recommence ainsi jusqu'à ce qu'il ne reste plus de croisements de branches non étudiés. Puisque les clusters sont finis, on peut écrire cette procédure sous la forme d'un algorithme en temps fini (c'est-à-dire un algorithme qui ne tourne pas indéfiniment).

En conclusion, pour tout $x \in \phi$, on vérifie de manière algorithmique si $f_\phi(x) \leq t'$ ou non. Si $x \in A_{kt'}$, on définit $f_\phi^{(0)}(x)$ comme l'instant ou le grain issue de x a été stoppé (et on a alors $f_\phi^{(0)}(x) \leq t'$), sinon, on pose $f_\phi^{(0)}(x) = t'$. On définit alors les **grains de première exploration** de ϕ :

$$\mathbf{G}_1 = \bigcup_{x \in \phi} \text{Grain}(x, f_\phi^{(0)}(x)).$$

On poursuit la preuve en raisonnant par récurrence. On suppose que pour un entier $k \in \mathbf{N}^*$, $A_{kt'}$ est bien défini comme l'ensemble des points marqués de ϕ dont le grain a été stoppé avant le temps kt' . On suppose également que $f_\phi^{(k-1)}$ et \mathbf{G}_k sont connus. Maintenant, nous montrons qu'il est possible de déterminer l'ensemble des grains stoppés entre les temps kt' et $(k+1)t'$. Si $x \in A_{kt'}$, on pose simplement $f_\phi^{(k)}(x) = f_\phi^{(k-1)}(x)$ et on a $x \in A_{(k+1)t'}$. On s'intéresse aux points marqués $x = (\xi, k, Y) \in A_{kt'}^c$ et on définit l'ensemble $C_\phi^{(k)}(x)$ des points du cluster de x dans $\mathcal{G}_{(kt', t')}(\phi)$ qui sont encore en vie à l'instant kt' . Entre les instants kt' et $(k+1)t'$ un grain provenant de $C_\phi^{(k)}(x)$ peut être arrêté par un grain mort (un grain constituant de \mathbf{G}_k), et il peut aussi être stoppé par un grain grandissant provenant de $C_\phi^{(k)}(x)$. On commence par montrer qu'un grain toujours en vie à l'instant kt' ne peut toucher qu'un nombre fini de grains (arrêtés ou non à l'instant kt') entre les instants kt' et $(k+1)t'$. Puisque les trajectoires des branches d'un grain vivant entre kt' et $(k+1)t'$ sont incluses à l'intérieur d'un borné (union finie de disques), il suffit de vérifier l'inégalité suivante :

$$\forall t, r > 0, \mathbf{E}(\#\{x \in \mathbf{X} ; \text{Grain}(x, t) \cap B(0, r) \neq \emptyset\}) < +\infty \quad (\text{II.4.5})$$

On note $\text{Esp}(t, r)$ l'espérance ci dessus, la formule de Campbell-Mecke (I.1.4) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \text{Esp}(t, r) &\leq z \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathbf{K} = k) k \right) \int_{[0, t]} \int_{\mathbf{R}^2} \int_{\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^2)} \mathbb{1}_{\{\xi + U(s) \in B(0, r)\}} \lambda_2(ds) \lambda_2(d\xi) \chi(dU) \\ &\leq z \mathbf{E}(\mathbf{K}) \int_{[0, t]} \left(\int_{\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^2)} \lambda_2(B(-U(s), r)) \chi(dU) \right) \lambda_2(ds) \\ &\leq z \pi r^2 \mathbf{E}(K) t. \end{aligned}$$

On a donc bien prouvé (II.4.5).

La finitude du cluster $C_\phi^{(k)}(x)$ dans $\mathcal{G}_{(kt', t')}(\phi)$ (voir Figure II.5) nous permet de déterminer par un algorithme fini quels sont les grains stoppés avant l'instant $(k+1)t'$. On détermine alors $A_{(k+1)t'}$, et pour $x \in A_{(k+1)t'}$, on définit $f_\phi^{(k)}(x)$ comme le temps d'arrêt correspondant, et pour $x \in A_{(k+1)t'}^c$, on pose $f_\phi^{(k)}(x) = (k+1)t'$. Les **grains de $(k+1)$ ème exploration** de ϕ sont alors définis par :

$$\mathbf{G}_{k+1} = \bigcup_{x \in \phi} \text{Grain}(x, f_\phi^{(k)}(x)),$$

et on a $\mathbf{G}_1 \subset \dots \subset \mathbf{G}_{k-1} \subset \mathbf{G}_k \subset \mathbf{G}_{k+1} \subset \dots$. Puisque la suite $(f_\phi^{(k)}(x))_{k \geq 0}$ est croissante pour tout $x \in \phi$, l'unique exploration arrêtée de ϕ est définie comme :

$$\forall x \in \phi, f_\phi(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_\phi^{(k)}(x) \in (0, +\infty].$$

Cette dernière valeur est infinie si et seulement si le grain généré par x n'est jamais stoppé. Pour conclure la preuve, nous devons prouver l'unicité du grain stoppant. Nous allons vérifier que

$$\forall x \in \phi \text{ tel que } f_\phi(x) < +\infty, \exists ! y \in \phi \setminus \{x\} ; \mathbf{H}(x, f_\phi(x)) \cap \text{Grain}(y, f_\phi(y)) \neq \emptyset.$$

Cette assertion est obtenue comme conséquence du lemme suivant :

Lemme II.4.6. *Soient $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{X}^{(3)}$, avec $x_i = (\xi^{(i)}, k^{(i)}, Y^{(i)})$. On définit la variable aléatoire $\tau_{(x_1, x_2, x_3)}$ de la façon suivante :*

- $\tau_{(x_1, x_2, x_3)} = 0$ si $k^{(1)} = 1$,
- $\tau_{(x_1, x_2, x_3)} = \inf \left(t \geq 0 ; \xi^{(1)} + Y_0^{(1)}(t) \in \text{Grain}(x_2, t) \right)$ si $k^{(1)} > 1$.

Alors on a le résultat suivant :

$$\mathbf{P} \left(\exists (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{X}^{(3)} ; \xi^{(1)} + Y_0^{(1)}(\tau) \in \text{Grain}(x_3, \tau) \right) = 0, \quad (\text{II.4.6})$$

où l'on a écrit τ au lieu de $\tau_{(x_1, x_2, x_3)}$ pour alléger l'écriture.

Pour résumer, le Lemme II.4.6 stipule qu'avec probabilité 1, deux branches d'un même grain ne peuvent connaître un croisement au même moment.

Démonstration : Pour prouver (II.4.6), il suffit de montrer que :

$$\mathcal{H} := \mathbf{E} \left(\#\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{X}^{(3)} ; \exists u \leq \tau ; \xi^{(1)} + Y_1^{(1)}(\tau) = \xi^{(3)} + Y_0^{(3)}(u)\} \right) = 0.$$

On sait que pour χ -presque tout $W \in \mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^2)$, on a :

$$\lambda_2 \left(\{\eta \in \mathbf{R}^2 ; \exists u \geq 0, W(u) = \eta\} \right) = 0.$$

On utilise alors la formule de Campbell-Mecke pour calculer \mathcal{H} :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= z^3 \int \mathbf{1}_{\{\exists u \leq \tau ; \xi^{(1)} + Y_1^{(1)}(\tau) = \xi^{(3)} + Y_0^{(3)}(u)\}} (\lambda_2 \otimes \delta \otimes \mathcal{L})^3(dx_1, dx_2, dx_3), \\ &= z^3 \int_{(\mathbf{N}^* \times \mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^2))^2} \left(\int_{(\mathbf{R}^2)^3} \left(\int_{\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^2)} \mathbf{1}_{\{\exists u \leq \tau ; Y_0^{(3)}(u) = \xi^{(1)} - \xi^{(3)} + Y_1^{(1)}(\tau)\}} \chi(dY_0^{(3)}) \right) d\xi^{(1)} d\xi^{(2)} d\xi^{(3)} \right) \\ &\quad (\delta \otimes \mathcal{L})^2(d(k^{(1)}, Y^{(1)}), d(k^{(2)}, Y^{(2)})). \end{aligned}$$

On va alors montrer que lorsque les variables $Y^{(1)}$ et $Y^{(2)}$ sont connues, on a :

$$\mathcal{F} := \int_{(\mathbf{R}^2)^3} \left(\int_{\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^2)} \mathbf{1}_{\{\exists u \leq \tau ; Y_0^{(3)}(u) = \xi^{(1)} - \xi^{(3)} + Y_1^{(1)}(\tau)\}} \chi(dY_0^{(3)}) \right) d\xi^{(1)} d\xi^{(2)} d\xi^{(3)} = 0.$$

En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, on calcule :

$$\mathcal{F} \leq \int_{\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^2)} \left(\int_{(\mathbf{R}^2)^3} \mathbf{1}_{\{\exists u \geq 0 ; Y_0^{(3)}(u) = \xi^{(1)} - \xi^{(3)} + Y_1^{(1)}(\tau)\}} d\xi^{(1)} d\xi^{(2)} d\xi^{(3)} \right) \chi(dY_0^{(3)}).$$

On attire l'attention sur le fait que le temps d'arrêt τ ne dépend pas que de $Y^{(1)}$ et $Y^{(2)}$, il dépend aussi de $\xi^{(1)}$ et $\xi^{(2)}$. Ainsi, pour que τ se comporte comme une constante dans l'intégrale, il faut utiliser Fubini encore une fois :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} &\leq \int_{\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^2)} \left(\int_{(\mathbf{R}^2)^2} \left(\int_{\mathbf{R}^2} \mathbf{1}_{\{\exists u \geq 0 ; Y_0^{(3)}(u) = \xi^{(1)} - \xi^{(3)} + Y_1^{(1)}(\tau)\}} d\xi^{(3)} \right) d\xi^{(1)} d\xi^{(2)} \right) \chi(dY_0^{(3)}), \\
 &\leq \int_{\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^2)} \left(\int_{(\mathbf{R}^2)^2} \lambda_2 \left(\{\eta \in \mathbf{R}^2 ; \exists u \geq 0 ; Y_0^{(3)}(u) = \eta\} \right) d\xi^{(1)} d\xi^{(2)} \right) \chi(dY_0^{(3)}), \\
 &\leq \int_{(\mathbf{R}^2)^2} \left(\int_{\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^2)} \lambda_2 \left(\{\eta \in \mathbf{R}^2 ; \exists u \geq 0 ; Y_0^{(3)}(u) = \eta\} \right) \chi(dY_0^{(3)}) \right) d\xi^{(1)} d\xi^{(2)}, \\
 &\leq \int_{(\mathbf{R}^2)^2} \mathbf{E} \left(\lambda_2 \left(\{Y^{(3)}(t) ; t \geq 0\} \right) \right) d\xi^{(1)} d\xi^{(2)}, \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Le lemme est bien démontré. \square

On a ainsi garanti l'unicité du grain stoppant. Finalement, le Théorème II.4.1 est bien démontré.

Nous allons maintenant prouver la Proposition II.4.4.

Démonstration : (de la Proposition II.4.4.)

On introduit un processus auxiliaire \mathbf{Y} pour lequel on énoncera un résultat général de percolation continue (le Lemme II.4.9) qui impliquera l'énoncé de la Proposition II.4.4.

Soient Γ et δ deux mesures de probabilités respectivement définies sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+^*$ et \mathbf{N}^* . On considère une variable aléatoire \mathbf{K} distribuée par δ et $\mathbf{Z} = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n, \dots)$ une suite de variables aléatoires identiquement distribuées par Γ . Les variables \mathbf{K} et \mathbf{Z} sont supposées indépendantes. La loi de \mathbf{Z} sera notée \mathcal{W} . Pour un entier $i \in \mathbf{N}$, la variable aléatoire variable Z_i s'écrit $(Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)})$ avec $Z_i^{(1)} \in \mathbf{R}^2$ et $Z_i^{(2)} \in \mathbf{R}_+^*$. On définit alors la variable aléatoire suivante :

$$\mathbf{M} = \max_{0 \leq i \leq \mathbf{K}-1} Z_i^{(2)}. \quad (\text{II.4.7})$$

Le rôle des variables aléatoires $Z_i^{(1)}$ et $Z_i^{(2)}$ sera expliqué dans la Remarque II.4.8.

Définition II.4.7. Soit \mathbf{Y} un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{N}^* \times (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+^*)^{\mathbf{N}}$ d'intensité $z\lambda_2 \otimes \delta \otimes \mathcal{W}$. On définit le modèle de disques :

$$Bool(\mathbf{Y}) = \bigcup_{(\xi, k, Z) \in \mathbf{Y}} \bigcup_{0 \leq i \leq k-1} B \left(\xi + Z_i^{(1)}, \max_{0 \leq i \leq k-1} Z_i^{(2)} \right). \quad (\text{II.4.8})$$

On définit le **graphe généalogique** de \mathbf{Y} comme le graphe aléatoire non orienté $\mathcal{G}_{\mathbf{Y}}$ défini comme suit :

- Les sommets de $\mathcal{G}_{\mathbf{Y}}$ sont les points marqués de \mathbf{Y} .
- Les arêtes de $\mathcal{G}_{\mathbf{Y}}$ sont les paires $\{x, y\}$ avec $x \neq y \in \mathbf{Y}$ telle que l'un des disques produits par x dans $Bool(\mathbf{Y})$ intersecte au moins un des disques produits par y .

Une composante connexe de $\mathcal{G}_{\mathbf{Y}}$ sera appelée **cluster généalogique** de $\mathcal{G}_{\mathbf{Y}}$. Pour un point marqué $y \in \mathbf{Y}$, on notera par $C_y(\mathbf{Y})$ le cluster généalogique de y dans $\mathcal{G}_{\mathbf{Y}}$.

Remarque II.4.8. *Étant donné un modèle germes grains \mathbf{X} d'information (z, δ, \mathcal{L}) et deux temps $t \geq 0$ et $t' > 0$, on peut associer à \mathbf{X} un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{N}^* \times (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+^*)^{\mathbf{N}}$ de la façon suivante : à un point marqué $x = (\xi, k, Y)$ on fait correspondre l'unique point marqué $y_x = (\xi, k, Z)$ tel que*

$$\begin{aligned} \forall i \geq 0, Z_i^{(1)} &= Y_i(t), \\ Z_i^{(2)} &= \max_{0 \leq i \leq k-1} \sup_{0 \leq s \leq t'} \|Y_i(t+s) - Y_i(t)\|. \end{aligned}$$

Le processus ponctuel de Poisson ainsi obtenu s'écrit $\mathbf{Y}_{(\mathbf{x}, t, t')}$. Les graphes généalogiques $\mathcal{G}_{t, t'}(\mathbf{X})$ et $\mathcal{G}(\mathbf{Y}_{(\mathbf{x}, t, t')})$ sont identiques modulo les valeurs des marques. Ainsi,

$$\mathcal{G}_{t, t'}(\mathbf{X}) \text{ ne percole pas} \iff \mathcal{G}(\mathbf{Y}_{(\mathbf{x}, t, t')}) \text{ ne percole pas.} \quad (\text{II.4.9})$$

Le lemme suivant donne une condition suffisante sur \mathbf{Y} pour que tous les clusters généalogiques soient finis presque sûrement :

Lemme II.4.9. *Soit \mathbf{Y} un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{N}^* \times (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+^*)^{\mathbf{N}}$ d'intensité $z\lambda_2 \otimes \delta \otimes \mathcal{W}$. On suppose que $z\mathbf{E}(\mathbf{M}^4)\mathbf{E}_\delta(\mathbf{K}^2) < \frac{1}{16\pi}$. Alors :*

$$\mathbf{P}(\mathcal{G}_{\mathbf{Y}} \text{ ne contient pas de cluster infini}) = 1.$$

Dans le cas particulier où $\delta = \delta_1$ est une mesure de Dirac au point 1 et $Z_i = (0, R)$ pour tout $i \in \mathbf{N}$ (où R est une variable aléatoire positive), le Lemme II.4.9 exprime le Théorème 2 de [13]. La preuve du lemme suit celle de ce théorème.

Avant de démontrer le Lemme II.4.9, montrons comment il permet de conclure la preuve de la Proposition II.4.4. Pour un modèle germes grains \mathbf{X} qui satisfait l'hypothèse (II.4.1), il existe $t' > 0$ tel que :

$$\forall t \geq 0, z\mathbf{E}(M_{t, t'}^4)\mathbf{E}_\delta(\mathbf{K}^2) < 1/16\pi.$$

La construction effectuée dans la Remarque II.4.8 nous assure alors que le processus ponctuel $\mathbf{Y}_{(\mathbf{x}, t, t')}$ vérifie la condition suivante :

$$z\mathbf{E}(\mathbf{M}^4)\mathbf{E}_\delta(\mathbf{K}^2) < 1/16\pi.$$

Le Lemme II.4.9 nous donne l'absence de percolation du graphe $\mathcal{G}(\mathbf{Y}_{(\mathbf{x}, t, t')})$. La Proposition II.4.4 découle alors de l'équivalence (II.4.9).

Démonstration : (du Lemme II.4.9.)

On note par C_0 le cluster généalogique du point typique aléatoire $(0, \mathbf{K}, \mathbf{Z})$ dans $\mathcal{G}_{\mathbf{Y} \cup \{(0, \mathbf{K}, \mathbf{Z})\}}$. On va montrer que $\mathbf{P}(\#C_0 < +\infty) = 1$, la formule de Slivnyak-Mecke (I.1.4) appliquée au processus ponctuel de Poisson \mathbf{Y} nous permettra alors de conclure :

$$\mathbf{E}(\#\{y \in \mathbf{Y} ; \#C_y(\mathbf{Y}) = +\infty\}) = z \int \mathbf{P}(\#C_0 = +\infty) \lambda_2 \otimes \delta \otimes \mathcal{W}(dx) = 0.$$

On rappelle que $\#C_0$ désigne le nombre de points marqués de C_0 . Sans perte de généralité on remplace la variable aléatoire \mathbf{M} par $\lfloor \mathbf{M} \rfloor + 1$ (en d'autres termes, on considère que \mathbf{M} est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbf{N}^*). Les rayons des disques de

$\text{Bool}(\mathbf{Y} \cup \{(0, \mathbf{K}, \mathbf{Z})\})$ ont donc des valeurs entières positives. Ainsi, un disque sera dit de type $i \in \mathbf{N}^*$ si son rayon vaut i , et puisque qu'un point marqué engendre une collection finie de disques de même rayon, on pourra tout aussi bien dire d'un point marqué qu'il est de type i . Pour simplifier, on notera par p_i la probabilité $\mathbf{P}(\mathbf{M} = i)$.

On va suivre la même stratégie que celle employée dans la preuve du Théorème 2 de [13] (cette stratégie est également décrite dans [23]). On construit un processus de branchement multi-types dont le nombre moyen d'individus dans toutes générations est à la fois fini et supérieur ou égal au nombre moyen de disques dans C_0 . Précisément, pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, la quantité $\mathbf{E}(\#C_0 \mid 0 \text{ est de type } i)$ est majorée par le nombre moyen d'individus de toutes générations d'un processus de branchement dont les individus de la première génération sont les \mathbf{K} disques engendrés par $(0, \mathbf{K}, \mathbf{Z})$. Le lecteur peut se référer au livre de Athreya et Ney ([1] page 184) pour une théorie complète des processus de branchement multi-types. Dans le processus de branchement que l'on considère, les individus sont des disques. Les individus de la 0^{ième} génération sont les \mathbf{K} disques engendrés par le point marqué $(0, \mathbf{K}, \mathbf{Z})$. Étant donné un entier $n \geq 0$ et les $N^{(n)}$ individus $\{B_l^{(n)}\}_{1 \leq l \leq N^{(n)}}$ de la n ^{ième} génération, on définit la $(n+1)$ ^{ième} génération de la manière suivante : soit $\mathbf{Y}^{(n+1)}$ un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{N}^* \times (\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+^*)^{\mathbf{N}}$ d'intensité $z\lambda_2 \otimes \delta \otimes \mathscr{W}$, indépendant de tous les processus ponctuels de Poisson déjà définis. Les individus de la $(n+1)$ ^{ième} génération sont les disques de $\text{Bool}(\mathbf{Y}^{(n+1)})$ dont au moins un des disques associés intersecte un disque de la n ^{ième} génération.

On introduit plusieurs variables aléatoires utiles à l'écriture du processus de branchement. Étant donnés deux entiers $n \in \mathbf{N}$ et $i \in \mathbf{N}^*$, on définit la variable aléatoire $N_i^{(n)}$ comme le nombre de disques de type i de la n ^{ième} génération, on a alors $N^{(n)} = \sum_i N_i^{(n)}$. L'espérance mathématique de $N_i^{(n)}$ sera simplement notée par $v_i^{(n)}$. On définit alors les constantes :

$$\begin{aligned} v^{(n)} &= \left(v_1^{(n)}, v_2^{(n)}, \dots, v_i^{(n)}, \dots \right), \\ \#v^{(n)} &= \sum_{i=1}^{+\infty} v_i^{(n)}. \end{aligned}$$

La quantité aléatoire $\#v^{(n)}$ correspond au nombre moyen d'individus de la n ^{ième} génération. Nous donnons maintenant une formule de récurrence qui établit la transition entre les générations successives :

$$N_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{N_j^{(n)}} \mathbf{U}_{(j,i)}^{(l)}, \quad (\text{II.4.10})$$

où :

- Pour $j \in \mathbf{N}^*$, les $N_j^{(n)}$ disques de type j , que l'on note $(B_{(j,l)}^{(n)})_{1 \leq l \leq N_j^{(n)}}$, sont ordonnés selon l'ordre lexicographique de la position de leur centre.
- Pour $i, j, l \in \mathbf{N}^*$,

$$\mathbf{U}_{(j,i)}^{(l)} = \sum_{y=(\xi,k,Z) \in \mathbf{Y}^{(n+1)}} k \mathbf{1}_{\{y \text{ est de type } i \text{ et au moins un des } k \text{ disques engendrés par } y \text{ intersecte } B_{(j,l)}^{(n)}\}}$$

La loi des variables aléatoires $\mathbf{U}_{(j,i)}^{(l)}$ ne dépend pas de $N_j^{(n)}$. Ainsi, pour tout $1 \leq l \leq N_j^{(n)}$:

$$\mathbf{E} \left(\mathbf{U}_{(j,i)}^{(l)} \right) = \mathbf{E} \left(\sum_{y=(\xi,k,Z) \in \mathbf{Y}} k \mathbb{1}_{\{y \text{ est de type } i \text{ et au moins un des } k \text{ disques engendrés par } y \text{ intersecte } B(0,j)\}} \right).$$

Dans la suite de la preuve, $\mathbf{E} \left(\mathbf{U}_{(j,i)}^{(l)} \right)$ sera noté $\mu_{(j,i)}$. Alors, en majorant l'indicatrice de la dernière espérance par une somme de k indicatrices, on obtient :

$$\mu_{(j,i)} \leq \mathbf{E} \left(\sum_{y=(\xi,k,Z) \in \mathbf{Y}} k^2 \mathbb{1}_{\{y \text{ est de type } i \text{ et le premier disque engendré par } y \text{ intersecte } B(0,j)\}} \right),$$

où le premier disque engendré par un point marqué $y = (\xi, k, Z)$ est celui dont le centre est donné par $\xi + Z_0^{(1)}$.

Pour un point marqué $y = (\xi, k, Z)$, on définit le genre de y comme le couple (i, k) tel que i est le type de y et k est le nombre de disques engendrés par y . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mu_{(j,i)} &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \mathbf{E} \left(\# \left\{ y = (\xi, k, Z) \in \mathbf{Y} \text{ de genre } (i, k) \text{ tel que } B(\xi + Z_0^{(1)}, i) \cap B(0, j) \neq \emptyset \right\} \right), \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \mathbf{E} \left(\# \left\{ y = (\xi, k, Z) \in \mathbf{Y} \text{ de genre } (i, k), \text{ tel que } \xi + Z_0^{(1)} \in B(0, i + j) \right\} \right), \end{aligned}$$

Nous avons $\lambda_2(B(0, i + j)) = 4\pi(i + j)^2$. En utilisant la formule de Slivnyak-Mecke et la stationnarité, on va montrer que :

$$\mathcal{Q} := \mathbf{E} \left(\# \left\{ y \in \mathbf{Y} \text{ de genre } (i, k) ; \xi + Z_0^{(1)} \in R_j^i \right\} \right) = 4\pi z\delta(\{k\})p_i(i + j)^2. \quad (\text{II.4.11})$$

En effet, d'après la formule (II.5.2), on a :

$$\mathcal{Q} = z\delta(\{k\}) \int_{\mathbf{R}^2} \left(\int_{(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+^*)^{\mathbf{N}}} \mathbb{1}_{\{(\xi,k,Z) \text{ est de type } i\}} \mathbb{1}_{\{\xi + Z_0^{(1)} \in B(0, i + j)\}} \lambda_2(d\xi) \right) \mathcal{L}(dZ).$$

On note par Υ_i la loi de la variable aléatoire $Z_0^{(1)}$ conditionnée par l'événement $\{\mathbf{M} = i\}$. L'égalité ci-dessus devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= z\delta(\{k\})p_i \int_{\mathbf{R}^2} \left(\int_{\mathbf{R}^2} \mathbb{1}_{\{\xi \in \tau_{-Z_0^{(1)}}(B(0, i + j))\}} \lambda_2(d\xi) \right) \Upsilon_i(dZ_0^{(1)}), \\ &= z\delta(\{k\})p_i \int_{\mathbf{R}^2} \lambda_2(B(0, i + j)) \Upsilon_i(dZ_0^{(1)}), \\ &= z\delta(\{k\})p_i \lambda_2(B(0, i + j)), \\ &= 4\pi z\delta(\{k\})p_i(i + j)^2. \end{aligned}$$

On a bien démontré l'équation (II.4.11).

Alors on obtient :

$$\begin{aligned}\mu_{(j,i)} &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} 4k^2 \pi \delta(\{k\}) z p_i (i+j)^2 \\ &\leq 4\mathbf{E}(\mathbf{K}^2) \pi z p_i (i+j)^2.\end{aligned}\tag{II.4.12}$$

En utilisant l'indépendance de la suite de processus ponctuel $(\mathbf{Y}^{(n)})_n$, l'équation (II.4.10) nous permet d'obtenir une borne supérieure pour $v_i^{(n+1)}$:

$$v_i^{(n+1)} \leq \sum_{j=1}^{+\infty} v_j^{(n)} \mu_{(j,i)}.\tag{II.4.13}$$

Les vecteurs infinis $v^{(n)}$ et $v^{(n+1)}$ sont reliés par le produit matriciel suivant : $v^{(n+1)} \leq v^{(n)} \mathbf{A}$, où $\mathbf{A} = (\mu_{(k,l)})$ est une matrice ayant une infinité de lignes (indexées par k) et de colonnes (indexées par l). En itérant cette inégalité, on obtient que pour tout $n \geq 0$, $v^{(n)} \leq v^{(0)} \mathbf{A}^n$. On suppose à présent que le point marqué $(0, \mathbf{K}, \mathbf{Z})$ est de type $i \in \mathbf{N}^*$ (dans ce cas, $v^{(0)} = (0, \dots, \mathbf{E}(\mathbf{K}), \dots)$ est le vecteur ligne infini dont le $i^{\text{ième}}$ coefficient est $\mathbf{E}(\mathbf{K})$ et tous les autres coefficients sont nuls), et le nombre moyen d'individus de toutes générations est alors noté par μ_i . Le travail ci-dessus nous permet d'obtenir une borne supérieure pour μ_i :

$$\mu_i \leq \mathbf{E}(\mathbf{K}) + \mathbf{E}(\mathbf{K}) \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} a_{(i,j)}^{(n)},\tag{II.4.14}$$

où $a_{(i,j)}^{(n)}$ est le $(i, j)^{\text{ième}}$ coefficient de la matrice \mathbf{A}^n . Le point clé de la démonstration est l'observation suivante :

$$\mathbf{E}(\#C_0 \mid 0 \text{ est de type } i) \leq \mu_i.\tag{II.4.15}$$

Cette inégalité provient de l'observation suivante : le comptage de $\#C_0$ peut se faire en suivant une échelle de génération tout en **mémorisant** les disques déjà comptés pour ne pas les compter deux fois. Le fait de tirer un nouveau processus ponctuel de Poisson à chaque fin de comptage d'une génération brise cette propriété de mémoire et nous fait donc "recompter" (en loi) des disques déjà comptés. La démonstration rigoureuse de cette inégalité sera omise ici pour ne pas alourdir la preuve du théorème, le lecteur peut se référer à [23] pour plus de détails.

Le reste de la preuve consiste à rechercher une bonne majoration de μ_i . En utilisant (II.4.12), on parvient à majorer les coefficients $a_{(i,j)}^{(n)}$. Pour $i, j \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}a_{(i,j)}^{(2)} &= \sum_{l=1}^{+\infty} a_{(i,l)}^{(1)} a_{(l,j)}^{(1)} = \sum_{l=1}^{+\infty} \mu_{(i,l)} \mu_{(l,j)}, \\ &\leq (4\mathbf{E}(\mathbf{K}^2) \pi z)^2 p_j \sum_{l=1}^{+\infty} p_l (j+l)^2 (i+l)^2, \\ &\leq (4\mathbf{E}(\mathbf{K}^2) \pi z)^2 p_j \sum_{l=1}^{+\infty} 16 p_l (ijl)^4, \\ &\leq (16\mathbf{E}(\mathbf{K}^2) \pi \mathbf{E}(\mathbf{M}^4) z)^2 p_j j^4 i^4.\end{aligned}$$

Si pour tout i, j , nous avons $a_{(i,j)}^{(n-1)} \leq (16\mathbf{E}(\mathbf{K}^2)\pi\mathbf{E}(\mathbf{M}^4)z)^{n-1} p_j j^4 i^4$, alors on obtient facilement que $a_{(i,j)}^{(n)} \leq (16\mathbf{E}(\mathbf{K}^2)\pi\mathbf{E}(\mathbf{M}^4)z)^n p_j j^4 i^4$, et on tire de cette façon une formule de majoration (démontrée par récurrence sur n) pour tout i, j et pour tout n . En injectant ces inégalités dans (II.4.14) on observe que :

$$\mu_i \leq \mathbf{E}(\mathbf{K}) + i^4 \mathbf{E}(\mathbf{K}) \mathbf{E}(\mathbf{M}^4) \sum_{n=1}^{+\infty} (16\mathbf{E}(\mathbf{K}^2)\pi\mathbf{E}(\mathbf{M}^4)z)^n.$$

Le terme de droite de cette dernière inégalité est fini dès que $16\mathbf{E}(\mathbf{K}^2)\pi\mathbf{E}(\mathbf{M}^4)z < 1$. Finalement, l'inégalité (II.4.15) nous permet de conclure que $\mathbf{E}(\#C_0 \mid 0 \text{ is type } i) < +\infty$. Le lemme est bien démontré. \square

On a bien démontré la Proposition II.4.4. \square

Le Théorème II.4.1 est prouvé.

II.5 Lien avec la théorie des POG

Dans cette partie, on se focalise sur les **SGGM** qui satisfont (II.3.1). On se donne \mathbf{X} un **SGGM** arrêté en temps fini. Presque sûrement, un graphe orienté outdegree-one peut être construit sur son état final. Ce graphe est obtenu en connectant chaque point marqué au point marqué qui le stoppe.

Définition II.5.1. Soit \mathbf{X} un **SGGM** arrêté en temps fini. On défini \mathcal{C}' comme l'ensemble des configurations de $\mathcal{C}^{\mathcal{M}}$ qui satisfont :

$$\forall x \in \phi, f_\phi(x) < +\infty. \tag{II.5.1}$$

Par définition, on a $\mathbf{P}(\mathbf{X} \in \mathcal{C}') = 1$, et, pour $\phi \in \mathcal{C}'$ et $x \in \phi$, on définit $h(\phi, x)$ comme l'unique point marqué de ϕ stoppant x . Le triplet $(\mathcal{C}', h, \mathbf{X})$ est alors un **POG**.

En particulier, on peut étudier la question de l'absence de percolation d'un **SGGM** arrêté en temps fini au travers de la théorie des **POG** détaillé dans les Sections I.2 et I.3.

La Proposition suivante affirme que les trois modèles présentés dans la Section II.3.2 sont des **SGGM** arrêtés en temps fini.

Proposition II.5.2. Les modèles germes grains suivants sont des **SGGM** arrêtés en temps finis :

- Le modèle brownien,
- Le modèle unilatéral et le modèle bilatéral de segments grandissants lorsque $\mathbf{E}(\mathbf{V}^4) < +\infty$.

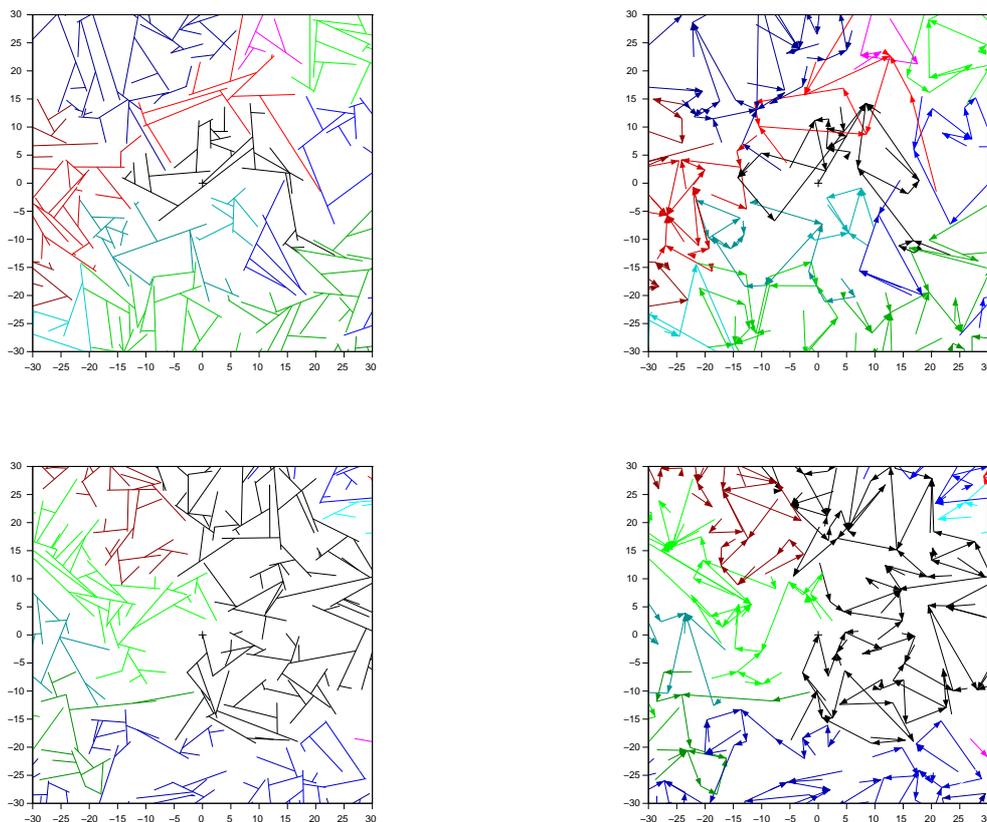


FIGURE II.8 – Ces simulations s’obtiennent comme celles de la Figure II.4. Au lieu de considérer les vitesses de poussées constantes et communes, elles sont distribuées comme le carré d’une variable aléatoire normale d’espérance 10 et de variance 1. L’existence d’un moment d’ordre 3 pour cette distribution de vitesse garantit l’arrêt de la dynamique et la structure de POG du système de segments arrêtés. Comme dans la Figure II.4, les graphes orientés apparaissent dans la partie droite de l’image.

Démonstration : Le Théorème II.4.1 assure que ces trois modèles sont des **SGGM**. Il suffit de vérifier que l’équation (II.3.1) est vérifiée pour chacun des modèles.

On traite d’abord le cas du modèle unilatéral de segments grandissants. On rappelle que ce modèle est décrit par un processus ponctuel de Poisson \mathbf{X} sur $\mathbf{R}^2 \times [0, 2\pi] \times \mathbf{R}_+^*$ (voir Section II.3.2). On définit γ le point typique localisé à l’origine du plan : $\gamma = (0, \Theta, \mathbf{V})$ où Θ est une variable aléatoire uniforme sur $[0, 2\pi]$ et $\mathbf{E}(\mathbf{V}^4) < +\infty$ par hypothèse. On va raisonner par l’absurde : on suppose que $\mathbf{P}(\exists x \in \mathbf{X} ; f_{\mathbf{X}}(x) = +\infty) > 0$. Alors la formule (I.1.4) nous donne que $\mathbf{P}(f_{\mathbf{X}_\gamma}(\gamma) = +\infty) > 0$ avec $\mathbf{X}_\gamma = \mathbf{X} \cup \{\gamma\}$. Par ailleurs, pour tout borélien $\Delta \subset \mathbf{R}^2$, la formule de Slivnyak-Mecke nous donne :

$$\mathbf{E} \left(\sum_{x \in \mathbf{X}_\Delta} \mathbb{1}_{\{f_{\mathbf{X}}(x) = +\infty\}} \right) = z \lambda_2(\Delta) \mathbf{P}(f_{\mathbf{X}_\gamma}(\gamma) = +\infty), \quad (\text{II.5.2})$$

La variable aléatoire uniforme Θ étant isotrope, on a $\mathbf{P}(f_{\mathbf{X}_\gamma}(\gamma) = +\infty \text{ et } \Theta \in [0, \frac{\pi}{8}]) > 0$.

En utilisant la formule (I.1.4), on obtient :

$$\mathbf{P} \left(\exists x = (\xi, \theta, V) \in \mathbf{X} ; f_{\mathbf{X}}(x) = \infty, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right] \right) > 0. \quad (\text{II.5.3})$$

L'événement dans la probabilité en (II.5.3) est stationnaire. La propriété d'ergodicité du processus ponctuel de Poisson (Proposition I.1.3) assure que sa probabilité appartient à l'ensemble $\{0, 1\}$. Finalement :

$$\mathbf{P} \left(\exists x = (\xi, \theta, V) \in \mathbf{X} ; f_{\mathbf{X}}(x) = \infty, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right] \right) = 1. \quad (\text{II.5.4})$$

On va maintenant montrer que :

$$\mathbf{P} \left(\forall (q_1, q_2) \in \mathbf{Q}^2, \exists x' = (\xi', \theta', V') \in \mathbf{X} ; f_{\mathbf{X}}(x') = \infty, \theta' \in \left[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right], \xi'_1 > q_1, \xi'_2 < q_2 \right) = 1,$$

où on a posé $\xi' = (\xi'_1, \xi'_2)$. Ainsi, en combinant cette dernière égalité avec (II.5.4), on obtient qu'il existe avec probabilité 1, deux demi-droites infinies qui s'intersectent, ce qui est bien entendu impossible compte tenu du premier item de la Définition II.3.2.

On commence par établir que

$$\mathbf{P} \left(\exists x = (\xi, \theta, V) \in \mathbf{X} ; f_{\mathbf{X}}(x) = \infty, \theta \in \left[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right] \right) = 1,$$

par les mêmes arguments (Slivnyak-Mecke, ergodicité) que ceux utilisés pour prouver (II.5.4). Pour tout $\epsilon \in (0, 1)$, il existe un point à coordonnées rationnels $q(\epsilon) = (q_1(\epsilon), q_2(\epsilon))$ tel que :

$$\mathbf{P} \left(\exists x' = (\xi', \theta', V') \in \mathbf{X} ; f_{\mathbf{X}}(x') = \infty, \theta' \in \left[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right], \xi'_1 > q_1(\epsilon), \xi'_2 < q_2(\epsilon) \right) \geq 1 - \epsilon.$$

La stationnarité de \mathbf{X} assure alors que pour tout $(q_1, q_2) \in \mathbf{Q}^2$:

$$\mathbf{P} \left(\exists x' = (\xi', \theta', V') \in \mathbf{X} ; f_{\mathbf{X}}(x') = \infty, \theta' \in \left[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right], \xi'_1 > q_1, \xi'_2 < q_2 \right) \geq 1 - \epsilon.$$

La dernière égalité étant vraie pour tout $\epsilon \in (0, 1)$, on obtient le résultat suivant :

$$\forall (q_1, q_2) \in \mathbf{Q}^2, \mathbf{P} \left(\exists x' = (\xi', \theta', V') \in \mathbf{X} ; f_{\mathbf{X}}(x') = \infty, \theta' \in \left[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right], \xi'_1 > q_1, \xi'_2 < q_2 \right) = 1.$$

On obtient le résultat recherché en considérant une intersection dénombrable (points de coordonnées rationnelles) d'événements de probabilité 1. Le modèle unilatéral de segments grandissants est donc bien arrêté en temps fini. Le cas du modèle bilatéral est plus simple à traiter puisque qu'on doit gérer des intersections de droites et non de demi-droites. La preuve suit exactement la même stratégie, nous ne la rédigeons donc pas.

On se focalise maintenant sur le modèle brownien. Comme pour le modèle des segments, on raisonne par l'absurde en supposant que $\mathbf{P}(f_{\mathbf{X}_\gamma}(\gamma) = +\infty) > 0$. En utilisant la formule de Slivniak-Mecke, on montre que :

$$\mathbf{P}(\exists x \neq x' \in \mathbf{X} ; f_{\mathbf{X}}(x) = f_{\mathbf{X}}(x') = +\infty) > 0.$$

Par ailleurs, si l'on considère B_1, B_2 deux mouvements browniens bidimensionnels indépendants issus de 0 et deux positions ξ_1, ξ_2 , alors :

$$\mathbf{P}(\{\xi_1 + B_1(t), t \geq 0\} \cap \{\xi_2 + B_2(t), t \geq 0\} \neq \emptyset) = 1.$$

Cette dernière égalité implique que deux grains non stoppés vont nécessairement se croiser, ce qui est impossible compte tenu du premier item de la Définition II.3.2. Le modèle brownien est donc bien un **SGGM** arrêté en temps fini. □

II.6 Perspectives

La Section II.5 fait le lien avec le chapitre précédent : tout **SGGM** arrêté en temps fini peut être interprété comme un **POG**. Dès le chapitre suivant, nous étudierons ces questions de percolation pour les trois exemples de **SGGM** présentés.

On peut se demander s'il existe une condition suffisante pour la non existence d'un **SGGM**. En effet, la preuve du Théorème II.4.1 est fortement reliée au résultat d'existence d'intensité sous critique pour la percolation dans le modèle Poisson booléen. L'existence d'une transition de phase pour ce dernier modèle est connue (voir [10] et [13]). Existe-t'il le même phénomène de transition de phase pour un modèle germes grains ? Prenons l'exemple du modèle de segments grandissants (unilatéral ou bilatéral), lorsque la variable aléatoire \mathbf{V} n'est même pas intégrable, le modèle germes grains associé est-t'il toujours un **SGGM** ? On peut alors se demander où se situe la transition de phase ?

Le Théorème II.4.1 ne s'applique que pour une nature précise de grains, en particulier, le modèle Lilypond défini en Section II.1 ne rentre pas dans ce cadre. Un travail peut être fait pour relaxer les conditions d'utilisation du théorème et ainsi pouvoir inclure de nouvelles formes de grains grandissants.

Chapitre III

Absence de percolation des modèles germes grains

Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, nous énonçons des résultats d'absence de percolation pour le modèle des segments grandissants. Lorsque tous les segments poussent à la même vitesse, le modèle de **POG** associé satisfait les hypothèses Loop et Shield du Chapitre I (que ce soit le modèle unilatéral ou bilatéral). On obtient donc l'absence de percolation comme conséquence du Théorème I.3.1.

On étend ce résultat à des vitesses de croissance aléatoires : lorsque les vitesses de poussées sont indépendamment distribuées par une variable aléatoire \mathbf{V} telle que $\mathbf{E}(\exp(\mathbf{V}^s)) < +\infty$ pour un certain réel $s > 1$, alors les modèles unilatéraux et bilatéraux ne percolent pas. Pour prouver ce nouveau résultat, on réussit à contrôler la zone de poussée des grains rapides jusqu'à un certain temps (appelée zone de pollution), puis on exploite des versions modifiées des hypothèses Loop et Shield dans l'ensemble complémentaire de cette zone polluée. Encore une fois, la construction d'événements locaux et l'utilisation de résultats de domination stochastique se révèlent cruciaux.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous dressons plusieurs observations qui motivent la conjecture d'absence de percolation du modèle brownien. En particulier, on vérifie l'hypothèse Loop pour ce modèle et plusieurs images issues de simulations suggèrent qu'il n'existe pas de cluster infini.

Sommaire

III.1 Modèles de segments grandissants	86
III.1.1 Cas des vitesses constantes	86
III.1.2 Généralisation aux vitesses non bornées	98
III.2 Le modèle Brownien	116
III.3 Perspectives	117

III.1 Modèles de segments grandissants

Dans cette section, on étudie l'absence de percolation pour les modèles de segments grandissants. Dans un premier temps, nous verrons que lorsque la vitesse de croissance \mathbf{V} est constante et identique pour chaque segment, le **POG** associé ne percole pas (que ce soit pour le cas unilatéral ou bilatéral). Nous établirons ce résultat en montrant que le **POG** en question satisfait les hypothèses Loop et Shield du Théorème I.3.1. Dans un second temps, nous montrerons que ce résultat d'absence de percolation reste vrai si la variable aléatoire \mathbf{V} admet un moment exponentiel d'ordre s pour un certain $s > 1$.

III.1.1 Cas des vitesses constantes

Dans toute cette partie, on considère que la loi ρ distribuant les vitesses de poussées des segments est une mesure de Dirac au point 1. On retrouve alors les modèles définis dans la Section II.2.1. Néanmoins, nous allons légèrement changer leurs écritures pour s'adapter au formalisme de la Section I.3 : pour pouvoir vérifier les hypothèses Loop et Shield du Théorème I.3.1, on définit chacun des deux modèles (unilatéral et bilatéral) par un processus ponctuel de poisson \mathbf{X} sur $\mathbf{R}^2 \times [0, 1]$ d'intensité $z\lambda_2 \otimes \mu$, où μ est la loi uniforme sur $[0, 1]$. Le Théorème II.2.2 assure que ces deux modèles sont des **POG**. On fait correspondre les ensembles de configurations \mathcal{C}' associés aux modèles ainsi que les fonctions h et h_g de la Définition II.5.1. Pour $\phi \in \mathcal{C}'$, $x = (\xi, \varpi)$ et $t \geq 0$, on a respectivement :

$$\begin{aligned} \text{Grain}(x, t) &= \{\xi + s(\cos(2\pi\varpi), \sin(2\pi\varpi)) ; s \in [0, t]\} \text{ (modèle unilatéral),} \\ \text{Grain}(x, t) &= \{\xi + s(\cos(2\pi\varpi), \sin(2\pi\varpi)) ; s \in (-t, t)\} \text{ (modèle bilatéral)} \end{aligned}$$

On a le résultat suivant :

Théorème III.1.1. *Les **POG** associés au modèle unilatéral et au modèle bilatéral de segments grandissants à vitesse constante ne percole pas. Précisément, ils vérifient les hypothèses Loop et Shield du Théorème I.3.1.*

Les vérifications des hypothèses étant presque identiques en tout point pour les deux modèles, nous ne démontrerons ici le théorème que pour la version unilatérale. Néanmoins, nous présenterons sous forme de remarques les quelques différences que nous jugeons notables.

Avant d'entamer la rédaction de la preuve, nous introduisons une nouvelle notation propre au modèle unilatéral de segments grandissants : pour un point marqué $x = (\xi, \varpi) \in$

ϕ , et un temps $t > 0$ l'ensemble $H(x, t)$ est réduit à un point (qui correspond à l'extrémité du segment). Nous identifierons l'ensemble $H(x, f_\phi(x))$ à son unique point que l'on notera $h_g(\phi, x)$ (voir Figure III.1). Ainsi, dans certaines parties de la preuve, nous privilégierons l'écriture $[\xi, h_g(\phi, x))$ au lieu de $\text{Grain}(x, f_\phi(x))$. Pareillement, en notant $\vec{u} = (\cos(2\pi\varpi), \sin(2\pi\varpi))$, on pourra écrire $[\xi, \xi + t\vec{u})$ au lieu de $\text{Grain}(x, t)$.

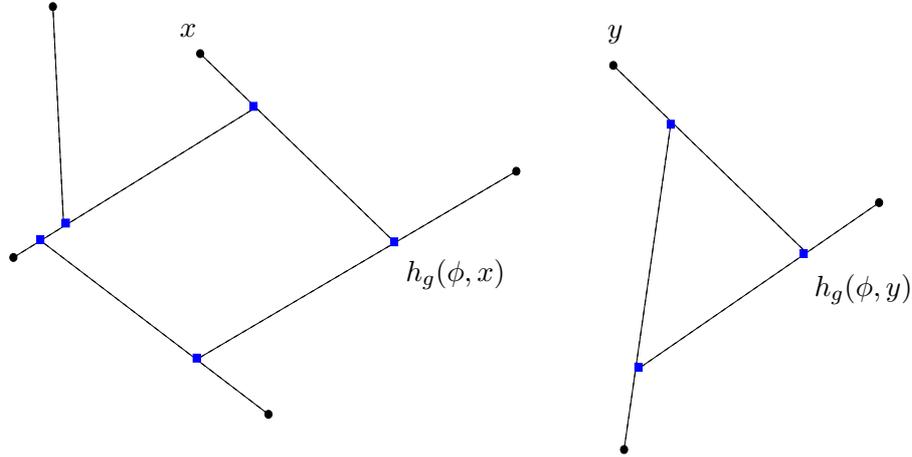


FIGURE III.1 – Sur cette figure, on a représenté deux composantes connexes provenant d'une dynamique unilatérale de segments grandissants. La notation h_g utilisée simplifiera la rédaction de certaine preuve.

Démonstration :

Vérification de l'hypothèse Loop

Le triplet $(\mathcal{C}', h, \mathbf{X})$ désigne le **POG** associé au modèle. L'objectif de cette partie est de prouver le résultat suivant :

Proposition III.1.2. *Avec probabilité 1, \mathbf{X} est une configuration 3-looping.*

Démonstration : (de la Proposition III.1.2.)

On va montrer qu'il existe un ensemble $\mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}'$ tel que toute configuration ϕ de \mathcal{C}'' est 3-looping et $\mathbf{P}(\mathbf{X} \in \mathcal{C}'') = 1$. On commence par noter \mathcal{B} l'ensemble des disques ouverts de \mathbf{R}^2 . On définit alors \mathcal{C}'' comme l'ensemble des configurations dont le système de segments arrêtés est localement fini :

$$\mathcal{C}'' = \{\phi \in \mathcal{C}' ; \forall B \in \mathcal{B}, \#\{x = (\xi, \varpi) \in \phi ; [\xi, h_g(\phi, x)] \cap B \neq \emptyset\} < +\infty\}.$$

Avant de montrer que $\mathbf{P}(\mathbf{X} \in \mathcal{C}'') = 1$, on va montrer que toute configuration de \mathcal{C}'' est 3-looping. Pour une configuration $\phi \in \mathcal{C}''$ et un point marqué $x = (\xi, \varpi) \in \phi$, on va vérifier que l'on peut construire un petit disque à proximité de $h_g(\phi, x)$ dans lequel on ajoutera les triplets de points marqués de l'hypothèse Loop. L'ensemble $\text{Back}^{-1}(\phi, x)$ des points marqués de ϕ stoppés par x est défini comme :

$$\text{Back}^{-1}(\phi, x) = \{y \in \phi, h(\phi, y) = x\}.$$

Puisque $\phi \in \mathcal{C}''$, l'ensemble $\text{Back}^{-1}(\phi, x)$ est fini. Cela veut dire qu'il n'y a qu'un nombre fini de segments qui se connectent à $[\xi, h_g(x, \phi)]$. Pour un point $y \in \text{Back}^{-1}(\phi, x)$, le point d'impact $h_g(\phi, y)$ appartient au segment $[\xi, h_g(\phi, x)]$, la finitude de $\text{Back}^{-1}(\phi, x)$ implique qu'il existe un réel strictement positif r tel que :

$$[h_g(\phi, x) - r\vec{u}, h_g(\phi, x)] \cap \{h_g(\phi, y), y \in \text{Back}^{-1}(\phi, x)\} = \emptyset, \quad (\text{III.1.1})$$

où on a posé $\vec{u} = (\cos(2\pi\varpi), \sin(2\pi\varpi))$. On écrit alors $w = h_g(\phi, x) - \frac{r}{2}\vec{u}$. La définition de \mathcal{C}'' assure l'existence d'un rayon strictement positif $r' \leq r$ tel que l'on ait à la fois

$$\left(\bigcup_{y=(\eta, \cdot) \in \phi} [\eta, h_g(\phi, y)] \right) \cap B(w, r') = [\xi, h_g(\phi, x)] \cap B(w, r') \quad (\text{III.1.2})$$

et

$$2r' \leq \|\xi - w\|_2 - r'. \quad (\text{III.1.3})$$

La Figure III.2 représente la construction de ce petit disque. Le disque $B(w, r')$ est une région propice à la création d'un obstacle pour le segment issu de x qui ne modifiera aucun autre segment.

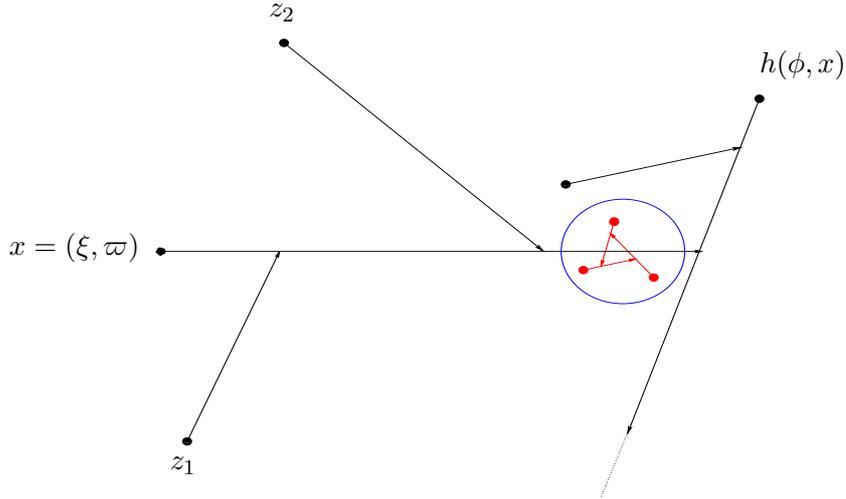


FIGURE III.2 – Sur cette figure, l'ensemble $\text{Back}^{-1}(\phi, x)$ est constitué des points z_1 et z_2 . Le cercle bleu délimite le disque $B(w, r')$. Le seul segment arrêté qui intersecte le disque $B(w, r')$ est celui issu de x . Le triangle rouge, formé après l'ajout d'un triplet de A_x stoppe le segment issu de x et crée une boucle de trois points dans son Forward. Aucun autre segment arrêté de ϕ n'est modifié par l'ajout du triplet.

On définit \mathcal{A}_x comme l'ensemble des triplets $(x_0, x_1, x_2) \in (B(w, r') \times [0, 1])^3$ tels que :

- (i) $h(\phi \cup \{x_0, x_1, x_2\}, x_i) = x_{i+1}$ pour $i = 0, 1, 2$ (où l'indice $i + 1$ est pris modulo 3),
- (ii) Le triangle défini par les trois sommets $h_g(\phi \cup \{x_0, x_1, x_2\}, x_i)$, $i = 0, 1, 2$, est inclus dans le disque $B(w, r')$ et contient le point w .

La condition (III.1.3) assure que chaque triplet de \mathcal{A}_x forme un triangle stoppant avant l'arrivée du segment issu de x (en d'autres termes, x est trop loin pour que son segment puisse empêcher la création de l'obstacle, il sera donc stoppé par le triangle formé).

Sans difficulté, on observe que \mathcal{A}_x contient une boule ouverte non vide $A_x \subset (B(w, r') \times [0, 1])^3$. On peut alors vérifier que l'ensemble A_x satisfait les trois items de l'hypothèse Loop. On se donne un triplet $(x_0, x_1, x_2) \in A_x$ que l'on ajoute à ϕ . En utilisant (III.1.3), (i) et (ii), on établit que

$$\begin{aligned} \text{For}(\phi \cup \{x_0, x_1, x_2\}, x) &= \{x, x_0, x_1, x_2\}, \\ \forall i \in \{0, 1, 2\}, \text{For}(\phi \cup \{x_0, x_1, x_2\}, x_i) &= \{x_0, x_1, x_2\}. \end{aligned}$$

Les deux premiers items de l'hypothèse Loop sont bien vérifiés. Par ailleurs, l'égalité (III.1.2) couplée aux conditions (i) et (ii) implique qu'aucun autre segment que celui issu de x est perturbé par l'ajout des points $\{x_0, x_1, x_2\}$. Aucune autre arête orientée que $(x, h(\phi, x))$ n'est modifiée par l'opération, le troisième item de l'hypothèse Loop est donc vérifié, et on a l'égalité :

$$\text{Back}(\phi \cup \{x_0, x_1, x_2\}, x) = \text{Back}(\phi, x).$$

Pour conclure la preuve de la Proposition III.1.2, nous devons montrer que $\mathbf{P}(\mathcal{C}'') = 1$. Par des arguments standards de stationnarité et de séparabilité, il suffit de montrer que :

$$\mathbf{P}(\#\{x = (\xi, \varpi) \in \mathbf{X} ; [\xi, h_g(\mathbf{X}, x)] \cap B(0, 1) \neq \emptyset\} < +\infty) = 1.$$

On va montrer que :

$$\mathcal{E} = \mathbf{E}(\#\{x = (\xi, \varpi) \in \mathbf{X} ; [\xi, h_g(\mathbf{X}, x)] \cap B(0, 1) \neq \emptyset\}) < +\infty.$$

On utilise la formule de Slivnyak-Mecke et on procède de la même façon que dans la fin de la preuve de la Proposition I.4.2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= z\pi + z \int_{(B(0,1) \times [0,1])^c} \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{[\xi, h_g(\mathbf{X} \cup \{x\}, x)] \cap B(0,1) \neq \emptyset\}}) \lambda_2(d\xi) \mu(d\varpi), \\ &\leq z\pi + 2\pi z \int_0^1 \left(\int_1^{+\infty} \mathbf{P}(\|\xi - h_g(\mathbf{X} \cup \{x\}, x)\| \geq r - 1) r dr \right) \mu(d\varpi), \\ &\leq z\pi + 2\pi z \int_0^1 \left(\int_1^{+\infty} \mathbf{P}(\|h_g(\mathbf{X} \cup \{(0, \varpi)\}, (0, \varpi))\| \geq r - 1) r dr \right) \mu(d\varpi). \end{aligned}$$

Si l'on note \mathcal{O} le point $(0, 0) \in \mathbf{R}^2 \times [0, 1]$, alors l'isotropie du modèle nous permet d'écrire :

$$\forall \varpi \in [0, 1], \forall r > 0, \mathbf{P}(\|h_g(\mathbf{X} \cup \{(0, \varpi)\}, (0, \varpi))\| \geq r) = \mathbf{P}(\|h_g(\mathbf{X}_{\mathcal{O}}, \mathcal{O})\| \geq r),$$

avec $\mathbf{X}_{\mathcal{O}} = \mathbf{X} \cup \{\mathcal{O}\}$. Schreiber & Soja ont prouvé (Théorème 4 dans [25]) qu'il existait deux constantes positives $c, c' > 0$ telles que $\mathbf{P}(\|h_g(\mathbf{X}_{\mathcal{O}}, \mathcal{O})\| \geq r) \leq ce^{c'r}$ pour tout $r \geq 0$. Cette décroissance exponentielle assure la finitude de \mathcal{E} . Ce qui achève la démonstration de la Proposition III.1.2. \square

Vérification de l'hypothèse Shield

Pour construire la suite d'événements $(\mathcal{E}_m)_{m \geq 1}$ candidate à la réalisation de l'hypothèse Shield, on a besoin de définir des **hexagones bloquants** qui seront les morceaux élémentaires constituant les murailles bloquantes. Pour définir proprement ces structures, nous travaillons sur des structures construites à partir du réseau triangulaire.

On commence par considérer le réseau triangulaire

$$\Pi = \left\{ a \vec{i} + b \vec{j} : a, b \in \mathbf{Z} \right\},$$

où $\vec{i} = (\sqrt{3} \cos(\frac{\pi}{6}), \sqrt{3} \sin(\frac{\pi}{6}))$ et $\vec{j} = (0, \sqrt{3})$. La distance de graphe sur Π est noté d_Π . Pour un point $u \in \Pi$, nous introduisons $B^n(u)$ et $S^n(u)$ les boules et sphères fermées de centre u et de rayon n associées à la distance d_Π . Pour un point $u \in \Pi$, on définit $\text{Hex}(u)$ la cellule de Voronoï de u dans Π :

$$\text{Hex}(u) = \left\{ \eta \in \mathbf{R}^2, \|\eta - u\| \leq \inf_{u' \in \Pi \setminus \{u\}} \|\eta - u'\| \right\}.$$

On peut généraliser en définissant le complexe hexagonal de taille $n \in \mathbf{N}$ centré en $u \in \Pi$ comme :

$$\text{Hex}^n(u) = \bigcup_{u' \in B^n(u)} \text{Hex}(u').$$

Pour n'importe quel point $\eta \in \mathbf{R}^2$ et n'importe quel entier $n \in \mathbf{N}$, on pose $\text{Hex}^n(\eta) = \eta + \text{Hex}^n(0)$. Finalement, pour un entier $n \geq 1$, on définit la ceinture d'hexagones $C_n(\eta) = \text{Hex}^n(\eta) \setminus \text{Hex}^{n-1}(\eta)$ (on a $\text{Hex}^0(\eta) = \text{Hex}(\eta)$).

On va maintenant définir des événements localisés dans ces hexagones élémentaires grâce à l'observation cruciale suivante : pour un point marqué $x = (\xi, \varpi) \in \mathbf{R}^2 \times [0, 1]$ et un réel $r > 0$, la variable aléatoire

$$\mathbb{1}_{\{f_{\mathbf{X} \cup \{x\}}(x) \leq r\}}$$

est $\mathcal{S}_{B(\xi + r\vec{u}, r)}$ -mesurable, avec $\vec{u} = (\cos(2\pi\varpi), \sin(2\pi\varpi))$ (Voir Figure III.3). Cette propriété de localité est vraie car tous les segments grandissent à la même vitesse. On se donne une configuration $\phi \in \mathcal{C}'$ et une région bornée Λ de \mathbf{R}^2 . Pour chaque point marqué $x = (\xi, \varpi) \in \phi_\Lambda$, on pose

$$r(x, \Lambda) = \sup\{r \geq 0, B(\xi + r\vec{u}, r) \subset \Lambda\}.$$

D'après ce qui précède, pour tout $r \leq r(x, \Lambda)$, il est possible de vérifier si $f_\phi(x)$ est plus petit que r ou non en observant uniquement ϕ à l'intérieur de la fenêtre Λ . On définit alors l'ensemble de décision du point x à l'intérieur de Λ comme

$$D_\Lambda(x) = B(\xi + r(x, \Lambda)\vec{u}, r(x, \Lambda)).$$

Pour un point marqué $x = (\xi, \varpi) \in \phi_\Lambda$, deux situations peuvent se produire : si le stoppant $h(\phi, x)$ de x dans ϕ appartient à l'ensemble de décision $D_\Lambda(x)$ alors on détermine le vrai segment arrêté $[\xi, h_g(\phi, x)]$ en observant ϕ_Λ . Dans ce cas, on pose $f_\phi(\Lambda, x) = f_\phi(x) \leq r(x, \Lambda)$. Sinon, on peut seulement assurer que le segment issu de x sera d'une longueur

supérieure ou égale à $r(x, \Lambda)$ et dans ce cas, on pose $f_\phi(\Lambda, x) = r(x, \Lambda) \leq f_\phi(x)$. Dans chacune des deux situations,

$$f_\phi(\Lambda, x) \leq f_\phi(x), \text{ et} \\ \text{Grain}(x, f_\phi(\Lambda, x)) \subset \text{Grain}(x, f_\phi(x)).$$

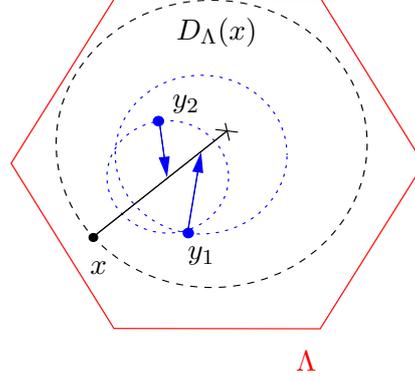


FIGURE III.3 – L'ensemble borné Λ est ici un hexagone comme ceux définis plus haut. On peut vérifier si le segment issu de $x = (\xi, \varpi)$ grandit jusqu'au point $\xi + r(x, \Lambda) \vec{u}$ en observant uniquement ϕ_Λ . On trouve deux candidats pour l'arrêt de x : les points y_1 et y_2 . Si l'un de ces deux points est le stoppant $h(\phi, x)$ de x , alors on aura déterminé le segment arrêté issu de x par la seule observation de ϕ_Λ , sinon, on pourra seulement dire que le segment a une longueur plus grande que $r(x, \Lambda)$. Pour vérifier que les point y_1 (resp y_2) stoppe x , il suffit de regarder à l'intérieur du disque pointillé bleu correspondant.

Remarque III.1.3. *On procède légèrement différemment pour le modèle bilatéral : pour tout réel $t > 0$, et pour tout point marqué x la variable $\mathbb{1}_{\{f_{\mathbf{X} \cup \{x\}}(x) \leq t\}}$ n'est pas mesurable par rapport à une tribu locale déterministe. En effet, pour vérifier si le segment bilatéral issu de x a été arrêté avant le temps t , il est nécessaire d'observer les points de \mathbf{X} dans une région bornée mais **aléatoire** (qui dépend de \mathbf{X}) autour de x (voir la preuve du Théorème 4.3 dans [7]). Pour contourner ce problème, on utilise simplement la locale finitude d'une configuration $\phi \in \mathcal{C}'$: étant donné $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$, $\phi \in \mathcal{C}'$ et $x = (\xi, \varpi) \in \phi_\Lambda$, on définit :*

$$\text{Reg}(x, r) = B(\xi + r \vec{u}, r) \cup B(\xi - r \vec{u}, r), \\ r(x, \Lambda) = \sup \{ r \geq 0 ; \text{Reg}(x, r) \subset \Lambda \text{ et } \phi_{\text{Reg}(x, r)} = \emptyset \},$$

où $\vec{u} = (\cos(2\pi\varpi), \sin(2\pi\varpi))$. On pose alors $f_\phi(\Lambda, x) = r(x, \Lambda)$ pour tout $x \in \Lambda$.

Le travail ci-dessus nous permet d'énoncer sans preuve le résultat suivant :

Lemme III.1.4. *Respectivement aux notations introduites plus haut, l'ensemble aléatoire suivant est \mathcal{S}_Λ -mesurable :*

$$\text{Graph}_\Lambda(\phi) = \bigcup_{x \in \phi_\Lambda} \text{Grain}(x, f_\phi(\Lambda, x)).$$

On peut alors introduire la notion d'hexagone bloquant pour une configuration.

Définition III.1.5. Soient $\phi \in \mathcal{C}'$, $\epsilon \in (0, 1)$ et $\eta \in \mathbf{R}^2$. L'hexagone $\text{Hex}(\eta)$ est dit ϵ -**bloquant** pour la configuration ϕ si pour tout couple $(a, b) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ tel que $a \notin \text{Hex}(\eta)$ et $b \in \eta + \epsilon \text{Hex}(0)$, nous avons

$$(a, b) \cap \text{Graph}_{\text{Hex}(\eta)}(\phi) \neq \emptyset .$$

Par ailleurs, pour tout entier $n > 0$ et tout sous-ensemble $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \Pi$, la collection d'hexagone $\{\text{Hex}(u_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ est dite ϵ -bloquante pour ϕ si pour tout indice i , $\text{Hex}(u_i)$ est ϵ -bloquant pour ϕ .

En d'autres termes, l'hexagone $\text{Hex}(\eta)$ est ϵ -bloquant (pour ϕ) dès que l'ensemble de segments $\text{Graph}_{\text{Hex}(\eta)}(\phi)$ édifie un obstacle dans la couronne $\text{Hex}(\eta) \setminus (\eta + \epsilon \text{Hex}(0))$ séparant le coeur de l'hexagone $\eta + \epsilon \text{Hex}(0)$ de la partie extérieure $\text{Hex}(\eta)^c$. En procédant "manuellement" par l'utilisation de petits segments, il n'est pas difficile de se convaincre que pour tout $\epsilon \in (0, 1)$, un hexagone donné est ϵ -bloquant pour \mathbf{X} avec probabilité strictement positive :

$$\forall \epsilon \in (0, 1), p_\epsilon = \mathbf{P}(\text{Hex}(0) \text{ est } \epsilon\text{-bloquant pour } \mathbf{X}) > 0 . \quad (\text{III.1.4})$$

La notion d'ensemble de décision $D_\Lambda(\cdot)$ et l'ensemble de segments $\text{Graph}_\Lambda(\cdot)$ ont été introduits pour pouvoir utiliser la propriété d'indépendance du processus ponctuel de Poisson \mathbf{X} . En se référant au Lemme III.1.4, pour tout couple de sommets $(u, u') \in \Pi^2$ tel que $u \neq u'$, les hexagones $\text{Hex}(u)$ and $\text{Hex}(u')$ sont indépendamment ϵ -bloquants.

Les hexagones ϵ -bloquants seront les maillons élémentaires de structure bloquante : un ensemble constitué de nombreux hexagones sera ϵ -imperméable dès qu'un nombre suffisamment important d'hexagones de sa structure sont ϵ -bloquants. Précisément :

Définition III.1.6. On considère $m \in \mathbf{N}^*$ un entier et $\phi \in \mathcal{C}'$ une configuration. Une position $\eta \in \mathbf{R}^2$ est dite m -**imperméable** pour ϕ si :

- (♣) Pour tout $x = (\xi, \varpi) \in \phi_{\text{Hex}^{2m}(\eta)^c}$, $[\xi, h_g(\phi, x)] \cap \text{Hex}^m(\eta) = \emptyset$;
- (♠) Pour tout $x \in \phi_{\text{Hex}^m(\eta)}$, $h_g(\phi, x) \in \text{Hex}^{2m}(\eta)$.

Résumons rapidement cette définition : lorsque η est m -**imperméable**, aucun segment provenant de $\text{Hex}^m(\eta)$ ne peut quitter l'ensemble $\text{Hex}^{2m}(\eta)$ et aucun segment provenant de l'extérieur $\text{Hex}^{2m}(\eta)^c$ ne peut pénétrer dans $\text{Hex}^m(\eta)$. En d'autres termes, la traversée de $\text{Hex}^{2m}(\eta) \setminus \text{Hex}^m(\eta)$ est impossible.

Nous allons maintenant montrer qu'il existe un événement $E_m \in \mathcal{S}_{\text{Hex}^{2m}(0)}$ tel que sur E_m , 0 est presque sûrement m -imperméable (Proposition III.1.7). L'événement E_m sera construit de sorte que $\text{Hex}^{2m}(0) \setminus \text{Hex}^m(0)$ contienne suffisamment d'hexagones ϵ -bloquants pour rendre impossible la traversée de cette couronne. Dans un deuxième temps, nous montrerons que la probabilité de l'événement E_m tend vers 1 lorsque $m \rightarrow \infty$ (Proposition III.1.8). L'événement \mathcal{E}_m de l'hypothèse Shield sera alors obtenu par une légère modification de E_m .

On commence par introduire un certain nombre de notations et de définitions utiles à la construction de E_m . Pour un point $\eta \in \partial \text{Hex}^m(0)$ (où $\partial \Lambda$ désigne la frontière topologique de $\Lambda \subset \mathbf{R}^2$) et pour $v \in [0, 1]$, on définit la demi-droite issue de η et dirigée par $\vec{v} =$

$(\cos(2\pi v), \sin(2\pi v))$ comme : $l(\eta, \vec{v}) = \{\eta + t\vec{v}, t \geq 0\}$. Alors, on écrit \mathcal{L}^m l'ensemble des demi-droites $l(\eta, \vec{v})$ issues de $\partial\text{Hex}^m(0)$ et qui n'intersectent pas l'intérieur topologique de $\text{Hex}^m(0)$:

$$\mathcal{L}^m = \{l(\eta, \vec{v}) ; l(\eta, \vec{v}) \cap \text{Int}(\text{Hex}^m(0)) = \emptyset \text{ et } (\eta, v) \in \partial\text{Hex}^m(0) \times [0, 1]\} .$$

Pour chaque demi-droite $l \in \mathcal{L}^m$, on va regarder l'ensemble des hexagones inclus dans la couronne $\text{Hex}^{2m}(0) \setminus \text{Hex}^m(0)$ et qui sont parcourus par l :

$$\text{Cross}(l) = \{\text{Hex}(u), m+1 \leq d_{\Pi}(0, u) \leq 2m \text{ et } l \cap \text{Hex}(u) \neq \emptyset\} .$$

Cet ensemble d'hexagones peut être observé étage par étage en utilisant la définition de couronne : pour $m+1 \leq i \leq 2m$, l'ensemble $\text{Cross}_i(l)$ contient les hexagones de $\text{Cross}(l)$ inclus dans la $i^{\text{ième}}$ couronne $C_i(0)$:

$$\text{Hex}(u) \in \text{Cross}_i(l) \iff \text{Hex}(u) \in \text{Cross}(l) \text{ et } \text{Hex}(u) \subset C_i(0).$$

On observe que pour chaque demi-droite $l \in \mathcal{L}^m$, il existe un indice $m+1 \leq i(l) \leq 2m$ tel que pour tout $i(l) \leq i \leq 2m$, l'ensemble $\text{Cross}_i(l)$ contient au plus trois hexagones. L'indice $i(l)$ dépend bien entendu de l , mais aussi de m , nous donnerons (sans preuve, en raisonnant sur la Figure III.5), une borne supérieure pour $i(l)$, uniforme en l et qui ne dépendra plus que de m . L'ensemble d'hexagones $\text{Cross}(l)$ est dit (ϵ, m) -**infranchissable** pour la configuration ϕ s'il contient deux étages consécutifs $\text{Cross}_i(l)$ et $\text{Cross}_{i+1}(l)$, pour $i(l) \leq i \leq 2m-1$, qui soient tous les deux ϵ -bloquants pour ϕ . On définit alors l'événement $E_m(\epsilon)$ de la façon suivante :

$$E_m(\epsilon) = \bigcap_{l \in \mathcal{L}^m} \{\text{Cross}(l) \text{ est } (\epsilon, m)\text{-infranchissable pour } \mathbf{X}\} . \quad (\text{III.1.5})$$

Il est crucial de remarquer que l'événement $E_m(\epsilon)$ appartient à la tribu $\mathcal{S}_{\text{Hex}^{2m}(0)}$ puisque sa vérification ne dépend que de l'observation de \mathbf{X} dans les hexagones constituant $\text{Hex}^{2m}(0)$. Nous allons maintenant montrer que lorsque ϵ est suffisamment proche de 1, le point 0 est presque sûrement m -**imperméable** pour \mathbf{X} dès que $\mathbf{X} \in E_m(\epsilon)$.

Proposition III.1.7. *Il existe $\epsilon \in (0, 1)$ (proche de 1) tel que, presque sûrement, sur l'événement $E_m(\epsilon)$, 0 est m -imperméable.*

Démonstration : Supposons que l'événement $E_m(\epsilon)$ soit réalisé. Alors, pour prouver que 0 est m -imperméable (c'est-à-dire vérifier (\clubsuit) et (\spadesuit)), il suffit de contrôler que chaque demi-droite $l \in \mathcal{L}^m$ traverse le coeur $u + \epsilon\text{Hex}(0)$ d'un hexagone ϵ -bloquant.

Étant donné une demi-droite $l \in \mathcal{L}^m$ et un sommet $u \in B^{2m}(0) \setminus B^{i(l)-1}(0)$, on définit $d_{u,l}$ comme suit :

$$d_{u,l} = \sup_{x \in l \cap \text{Hex}(u)} d(x, \partial\text{Hex}(u))$$

et $d_{u,l} = 0$ si $l \cap \text{Hex}(u)$ est vide (où la distance d utilisée ci-dessus est euclidienne). Alors, on pose :

$$\gamma = \inf_{l \in \mathcal{L}^m} \sup \{d_{u,l}, u \in B^{2m}(0) \setminus B^{i(l)-1}(0) \text{ and } \text{Hex}(u) \text{ est } \epsilon\text{-bloquant}\} .$$

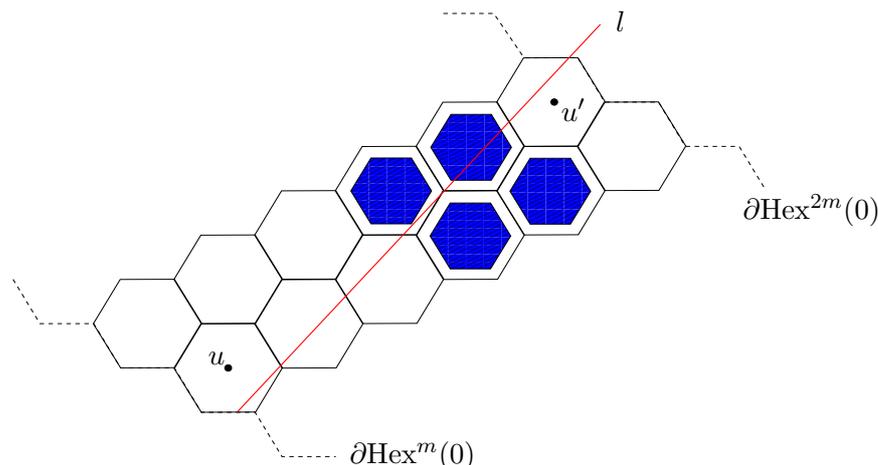


FIGURE III.4 – On a dessiné en rouge une demi-droite $l \in \mathcal{L}^m$ issue de $\partial\text{Hex}^m(0)$. Cette demi-droite traverse deux étages ϵ -bloquants consécutifs ($\text{Cross}_i(l)$ et $\text{Cross}_{i+1}(l)$). Chaque hexagone $\text{Hex}(u)$ appartenant à l'un de ces deux étages a son coeur intérieur $u + \epsilon\text{Hex}(0)$ colorié en bleu. Comme la figure le montre, lorsque ϵ est proche de 1, il est impossible pour la demi-droite l d'éviter le coeur intérieur d'un hexagone lors de la traversée des deux étages.

Sur l'événement $E_m(\epsilon)$, chaque demi-droite l traverse deux étages consécutifs ϵ -bloquant. La construction par maillage d'hexagones assure que la valeur γ est **strictement positive** (voir Figure III.4). Si l'on pose $\epsilon = 1 - \gamma/2$, chaque demi-droite est forcée de traverser le coeur d'un hexagone ϵ -bloquant. \square

Dans toute la suite, on écrira E_m au lieu de $E_m(\epsilon)$ où ϵ est donné par la Proposition III.1.7. La proposition suivante stipule que la probabilité de cet événement tend vers 1 avec m :

Proposition III.1.8. *La probabilité de l'événement E_m tend vers 1 lorsque m tend vers $+\infty$.*

Démonstration : On commence par réécrire l'intersection qui définit l'événement E_m dans (III.1.5). Pour $u \in S^{m+1}(0)$ et $u' \in S^{2m}(0)$, on considère l'ensemble $\text{Cross}(u, u')$ constitué des hexagones $\text{Hex}(u'')$ traversés par au moins une demi-droite $l \in \mathcal{L}^m$ issue de $\partial\text{Hex}(z)$ et sortant de $\text{Hex}^{2m}(0)$ par $\text{Hex}(u')$. Comme précédemment, on peut observer l'ensemble d'hexagones $\text{Cross}(u, u')$ étage par étage. Ainsi, pour un indice $m + 1 \leq i \leq 2m$, $\text{Cross}_i(u, u')$ désigne l'ensemble des hexagones de $\text{Cross}(u, u')$ qui sont inclus dans $C_i(0)$. Il existe alors un indice $m + 1 \leq i(u, u') \leq 2m$ tel que $\text{Cross}_i(u, u')$ contient au plus trois hexagones dès que $i(u, u') \leq i \leq 2m$. Comme précédemment, $\text{Cross}(u, u')$ est dit (ϵ, m) -**infranchissable** pour \mathbf{X} s'il contient deux étages consécutifs $\text{Cross}_i(u, u')$ et $\text{Cross}_{i+1}(u, u')$, pour $i(l) \leq i \leq 2m - 1$, qui soient tous les deux ϵ -bloquants pour \mathbf{X} . Alors,

$$\bigcap_{(u, u') \in S^{m+1}(0) \times S^{2m}(0)} \{\text{Cross}(u, u') \text{ est } (\epsilon, m)\text{-infranchissable pour } \mathbf{X}\} \subset E_m . \quad (\text{III.1.6})$$

L'objectif de la suite de la preuve est de trouver une borne uniforme en $(u, u') \in S^{m+1}(0) \times S^{2m}(0)$ pour \mathbf{P} (Cross(u, u') n'est pas (ϵ, m) -infranchissable pour \mathbf{X}). Précisément, on va montrer que :

$$\mathbf{P}(\text{Cross}(u, u') \text{ n'est pas } (\epsilon, m)\text{-infranchissable pour } \mathbf{X}) \leq (1 - p_\epsilon^6)^{\frac{m}{10}}, \quad (\text{III.1.7})$$

où p_ϵ provient de (III.1.4) (on rappelle que $p_\epsilon > 0$). On commence par observer l'inclusion suivante :

$$\{\text{Cross}(u, u') \text{ n'est pas } (\epsilon, m)\text{-infranchissable pour } \mathbf{X}\} \subset \bigcap_{k=i(u, u')}^{2m-1} U_k$$

où $U_k = \{\text{Cross}_k(u, u') \text{ et } \text{Cross}_{k+1}(u, u') \text{ sont } \epsilon\text{-bloquant pour } \mathbf{X}\}^c$.

Pour pouvoir utiliser la propriété d'indépendance du processus ponctuel de Poisson, nous avons besoin de considérer des sous-ensembles disjoints d'hexagones. Ainsi, on pose :

$$T_m = \bigcap_{k=0}^{\lfloor \frac{2m-1-i(u, u')}{2} \rfloor} U_{i(u, u') + 2k}$$

qui est bien défini comme une intersection d'événements indépendants, et on a :

$$\{\text{Cross}(u, u') \text{ n'est pas } (\epsilon, m)\text{-infranchissable pour } \mathbf{X}\} \subset T_m.$$

Nous allons alors majorer $\mathbf{P}(T_m)$. Nous savons que pour un indice $i(u, u') \leq k \leq 2m$, l'ensemble $\text{Cross}_i(u, u')$ contient entre un et trois hexagones. Ainsi, pour tout $i(u, u') \leq k \leq 2m - 1$:

$$(1 - p_\epsilon^2) \leq \mathbf{P}(U_k) \leq 1 - p_\epsilon^6.$$

Par ailleurs, il n'est pas difficile de vérifier que pour un entier m suffisamment grand et pour tout $(u, u') \in S^{m+1}(0) \times S^{2m}(0)$, le nombre $\lfloor \frac{2m-1-i(u, u')}{2} \rfloor + 1$ d'événements indépendants dans l'écriture de T_m est supérieur ou égal à $\frac{m}{10}$ (voir Figure III.5). On obtient alors que :

$$\mathbf{P}(T_m) \leq (1 - p_\epsilon^6)^{\frac{m}{10}},$$

et finalement :

$$\mathbf{P}(\text{Cross}(u, u') \text{ n'est pas } (\epsilon, m)\text{-infranchissable pour } \mathbf{X}) \leq (1 - p_\epsilon^6)^{\frac{m}{10}}.$$

On peut alors montrer que $\mathbf{P}(\mathbf{X} \in E_m^c)$ tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{X} \in E_m^c) &\leq \mathbf{P}(\exists(u, u') ; \text{Cross}(u, u') \text{ n'est pas } (\epsilon, m)\text{-infranchissable pour } \mathbf{X}), \\ &\leq \#(S^{m+1}(0) \times S^{2m}(0)) (1 - p_\epsilon^6)^{\frac{m}{10}}, \\ &\leq 36(m+1)2m (1 - p_\epsilon^6)^{\frac{m}{10}}. \end{aligned}$$

On en déduit alors le résultat souhaité. □

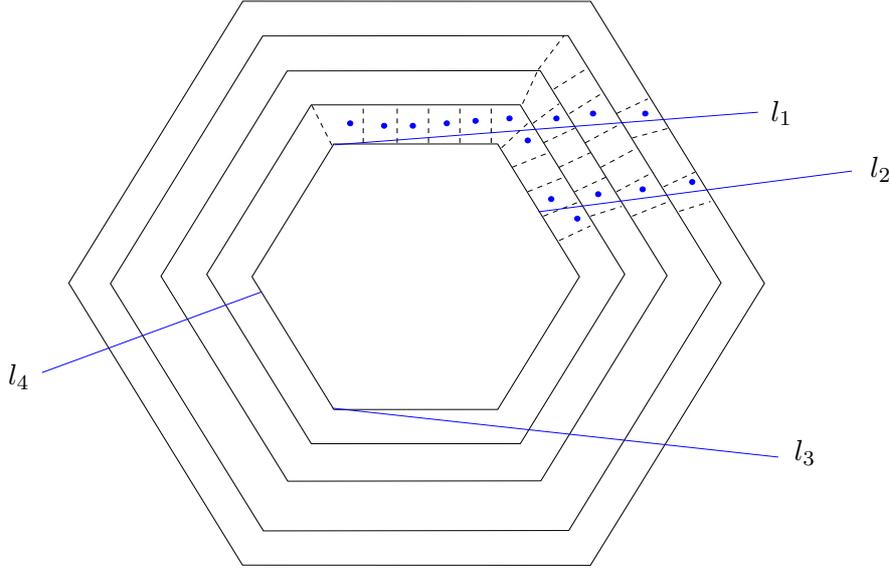


FIGURE III.5 – En observant cette figure, on peut se convaincre que le nombre d’hexagones de $\text{Cross}_i(u, u')$ est très rapidement majoré par 3, et ce pour n’importe quel choix du couple (u, u') . Seuls les premiers étages traversés peuvent contenir un grand nombre d’hexagones (cela se produit pour les rayons l_1 et l_4). Ainsi, il est raisonnable d’affirmer que lorsque l’indice i est plus grand que $\frac{3m}{4}$, le nombre d’éléments de $\text{Cross}_i(u, u')$ est inférieur ou égale à 3 pour n’importe quel choix du couple (u, u') . La quantité $\lfloor \frac{2m-1-i(u, u')}{2} \rfloor + 1$ est alors grossièrement minorée par $\frac{m}{10}$.

On peut alors énoncer le résultat qui conclut la preuve :

Proposition III.1.9. *Le **POG** du modèle unilatéral de segments grandissants à vitesse constante vérifie l’hypothèse Shield pour $\alpha = 32$ et $\mathcal{E}_m = E_m \cap E_{2m}$.*

Démonstration : Nous devons vérifier que le modèle satisfait les trois items de l’hypothèse Shield. Par construction, on a $\mathcal{E}_m = E_m \cap E_{2m} \in \mathcal{S}_{\text{Hex}^{4m}(0)}$ et le premier item (i) provient alors du fait que pour tout $\eta \in \text{Hex}^{4m}(0)$, on a $\|\eta\| \leq 4m\sqrt{3} + 1 \leq 8m$. Le deuxième item (ii) est donné par la Proposition III.1.8. Pour conclure la preuve, il reste à vérifier l’item (iii).

On fixe alors trois sous-ensembles deux à deux disjoints V, A_1, A_2 de \mathbf{Z}^2 tels que les l_∞ -frontières ∂A_1 et ∂A_2 soient incluses dans V . Pour $i \in \{1, 2\}$, on écrit :

$$\mathcal{A}_i = \left(A_i \oplus \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right]^2 \right) \setminus (V \oplus [-32, 32]^2) .$$

On se donne $m \in \mathbf{N}^*$ un entier et deux configurations $\phi, \phi' \in \mathcal{C}'$ telles que $\tau_{-mu}(\phi) \in \mathcal{E}_m$, pour tout $u \in V$. Nous devons alors vérifier que :

$$\forall x \in \phi_{m\mathcal{A}_1}, h(\phi, x) = h(\bar{\phi}, x) , \quad (\text{III.1.8})$$

où $\bar{\phi}$ désigne la configuration $\phi_{m\mathcal{A}_2} \cup \phi'_{m\mathcal{A}_2}$. La raison pour laquelle (III.1.8) se produit peut être brièvement résumée de la façon suivante : le remplacement de ϕ par $\bar{\phi}$, qui ne

concerne que l'ensemble $m\mathcal{A}_2$, peut engendrer des modifications sur les arêtes orientées issues de $m\mathcal{A}_2^\xi$ mais pas au delà de la muraille mV . Les arêtes partantes de $m\mathcal{A}_1$ sont toutes préservées.

Pour prouver (III.1.8), on commence par définir l'ensemble Shield :

$$\text{Shield} := mV \oplus \text{Hex}^{2m}(0),$$

et on prouve le résultat suivant :

$$\forall x \in \phi_{\text{Shield}}, h(\bar{\phi}, x) = h(\phi, x). \quad (\text{III.1.9})$$

En effet, chaque $x = (\xi, \cdot) \in \phi_{\text{Shield}}$ appartient à un ensemble $\text{Hex}^{2m}(mu)$, où mu est $2m$ -imperméable pour ϕ (car on a en particulier $\tau_{-mu}(\phi) \in E_{2m}$). La propriété (\spadesuit) de la Définition III.1.6 assure alors que $h_g(\phi, x)$ appartient à l'ensemble $\text{Hex}^{4m}(mu)$, on a alors : $\|\xi - h_g(\phi, x)\| \leq 2(4m\sqrt{3} + 1) \leq 16m$. En conclusion, pour tout point $x \in \phi_{\text{Shield}}$,

$$B(h_g(\phi, x), \|\xi - h_g(\phi, x)\|) \subset mV \oplus [-32m, 32m]^2.$$

L'inclusion ci-dessus justifie le choix du paramètre $\alpha = 32$. En raisonnant comme dans la Figure III.3, cette dernière inclusion assure que le remplacement de ϕ par ϕ' à l'extérieur de $mV \oplus [-32m, 32m]^2$ n'engendre aucune modification sur les arêtes sortantes de ϕ_{Shield} . La propriété (III.1.9) est donc bien démontrée. Par ailleurs, on observe le fait suivant : puisque $mV \oplus \text{Hex}^{4m}(0)$ est inclus dans $mV \oplus [-32m, 32m]^2$ et que \mathcal{E}_m est $\mathcal{S}_{\text{Hex}^{4m}(0)}$ -mesurable, on a :

$$\forall u \in V, \tau_{-mu}(\bar{\phi}) \in \mathcal{E}_m. \quad (\text{III.1.10})$$

En d'autres termes, la muraille de sommets m -shield (voir Définition I.3.9) mu , $u \in V$, est conservée lorsque l'on remplace ϕ par $\bar{\phi}$.

Il reste à montrer que (III.1.8) s'obtient comme conséquence de (III.1.10) et (III.1.9). Lorsqu'on effectue le passage de ϕ à $\bar{\phi}$, certaines arêtes sont modifiées : pour deux points marqués $x \in \phi \cup \bar{\phi}$ et $y \in \bar{\phi}$, on dit que x modifie y lors du passage de ϕ à $\bar{\phi}$ lorsque l'une des deux situations suivantes se produit :

- le point marqué x devient le nouveau stoppant de y dans $\bar{\phi}$. On a $x \neq h(\phi, y)$ et $x = h(\bar{\phi}, y)$.
- le point marqué x était le stoppant de y pour ϕ , et il ne l'est plus. On a $x = h(\phi, y)$ et $x \neq h(\bar{\phi}, y)$.

Une chaîne de modification est alors une collection de points $(x_i)_{i=0}^n$ de $\bar{\phi}$ telles que :

$$\begin{aligned} x_0 &\in \phi_{m\mathcal{A}_2} \cup \phi'_{m\mathcal{A}_2}, \\ \forall 0 \leq i \leq n-1, \quad x_i &\text{ modifie } x_{i+1}. \end{aligned}$$

Pour conclure la démonstration de (III.1.8), il suffit de montrer qu'une chaîne de modification ne peut pas contenir de points de $\phi_{m\mathcal{A}_1}$. On commence par observer que $\mathbf{R}^2 \setminus \text{Shield}$ contient deux composantes connexes Coc_1 et Coc_2 telles que $m\mathcal{A}_1 \subset \text{Coc}_1$ et $m\mathcal{A}_2 \subset \text{Coc}_2$ (voir Figure III.6). Puisque qu'aucune arête sortante de ϕ_{Shield} n'est modifiée (condition (III.1.9)), une chaîne de modification ne contient pas de points de ϕ_{Shield} . On suppose par l'absurde que $x_n \in \phi_{m\mathcal{A}_1}$. Alors, il existe forcément un indice $0 \leq i \leq n-1$ tel que $x_i \in \bar{\phi}_{\text{Coc}_2}$ et $x_{i+1} \in \bar{\phi}_{\text{Coc}_1}$. On a alors $x_i = h(\bar{\phi}, x_{i+1})$ ou bien

$x_i = h(\phi, x_{i+1})$. Ces deux égalités impliquent nécessairement que l'un des quatre segments $\text{Grain}(x_i, f_\phi(x_i))$, $\text{Grain}(x_{i+1}, f_\phi(x_{i+1}))$, $\text{Grain}(x_i, f_{\bar{\phi}}(x_i))$ ou $\text{Grain}(x_{i+1}, f_{\bar{\phi}}(x_{i+1}))$ traverse une bande $\text{Hex}^{2m}(mu) \setminus \text{Hex}^m(mu)$ avec $u \in V$. Mais cela est impossible puisque pour tout $u \in V$, nous avons $\tau_{-mu}(\phi) \in E_m$ et $\tau_{-mu}(\bar{\phi}) \in E_m$. La propriété (\clubsuit) de la Définition III.1.6 serait alors contredite. L'équation (III.1.8) est bien vérifiée. \square

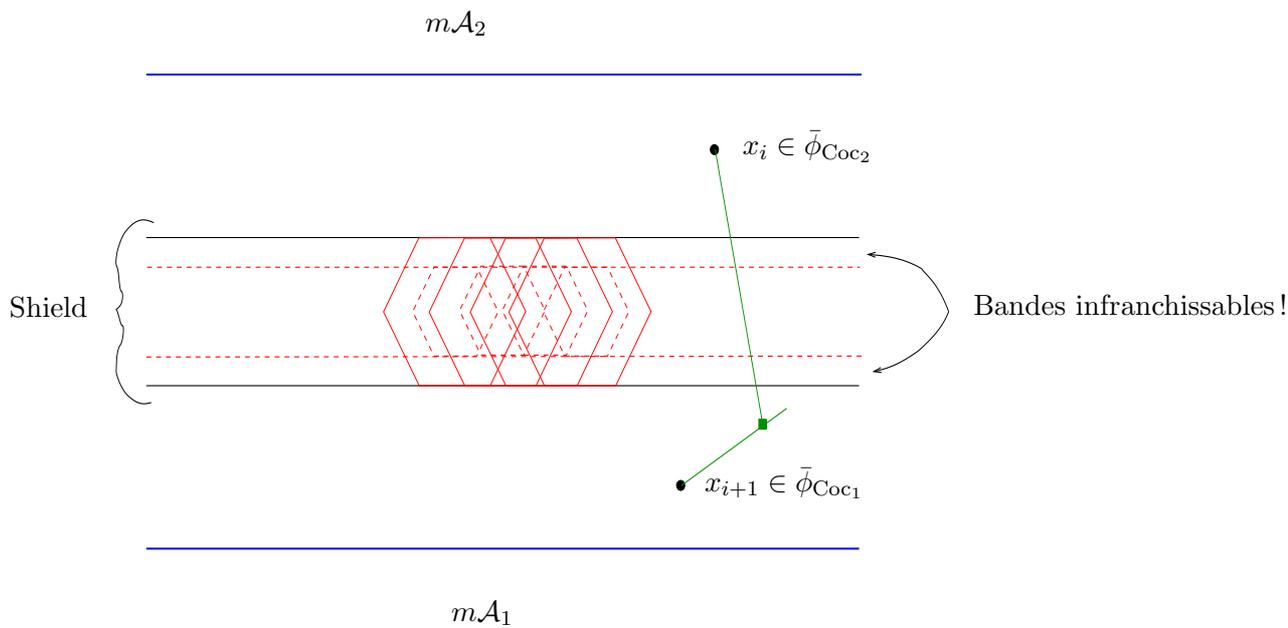


FIGURE III.6 – Les bandes infranchissables correspondent aux deux composantes connexes de l'ensemble $(mV \oplus \text{Hex}^{2m}(0)) \setminus (mV \oplus \text{Hex}^m(0))$. Le segment issu de x_i et celui issu de x_{i+1} ne peuvent donc pas se rencontrer.

On a bien vérifié l'hypothèse Shield. Le Théorème III.1.1 est bien prouvé. \square

III.1.2 Généralisation aux vitesses non bornées

On va maintenant généraliser le Théorème III.1.1 pour un modèle de segments grandissants avec des vitesses aléatoires. On se donne \mathbf{X} un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbf{R}^2 \times [0, 2\pi] \times \mathbf{R}_+^*$ avec mesure d'intensité $z\lambda_2 \otimes \Xi \otimes \rho$, où Ξ est la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$ et ρ définit la loi de \mathbf{V} .

Théorème III.1.10. *Les POG associés au modèle unilatéral et au modèle bilatéral de segments grandissants à vitesse \mathbf{V} ne percolent pas s'il existe un réel $s > 1$ tel que $\mathbf{E}_\rho(\exp(\mathbf{V}^s)) < +\infty$.*

Comme dans la section précédente, on démontrera le Théorème III.1.10 pour le cas unilatéral. Nous emploierons également la notation h_g .

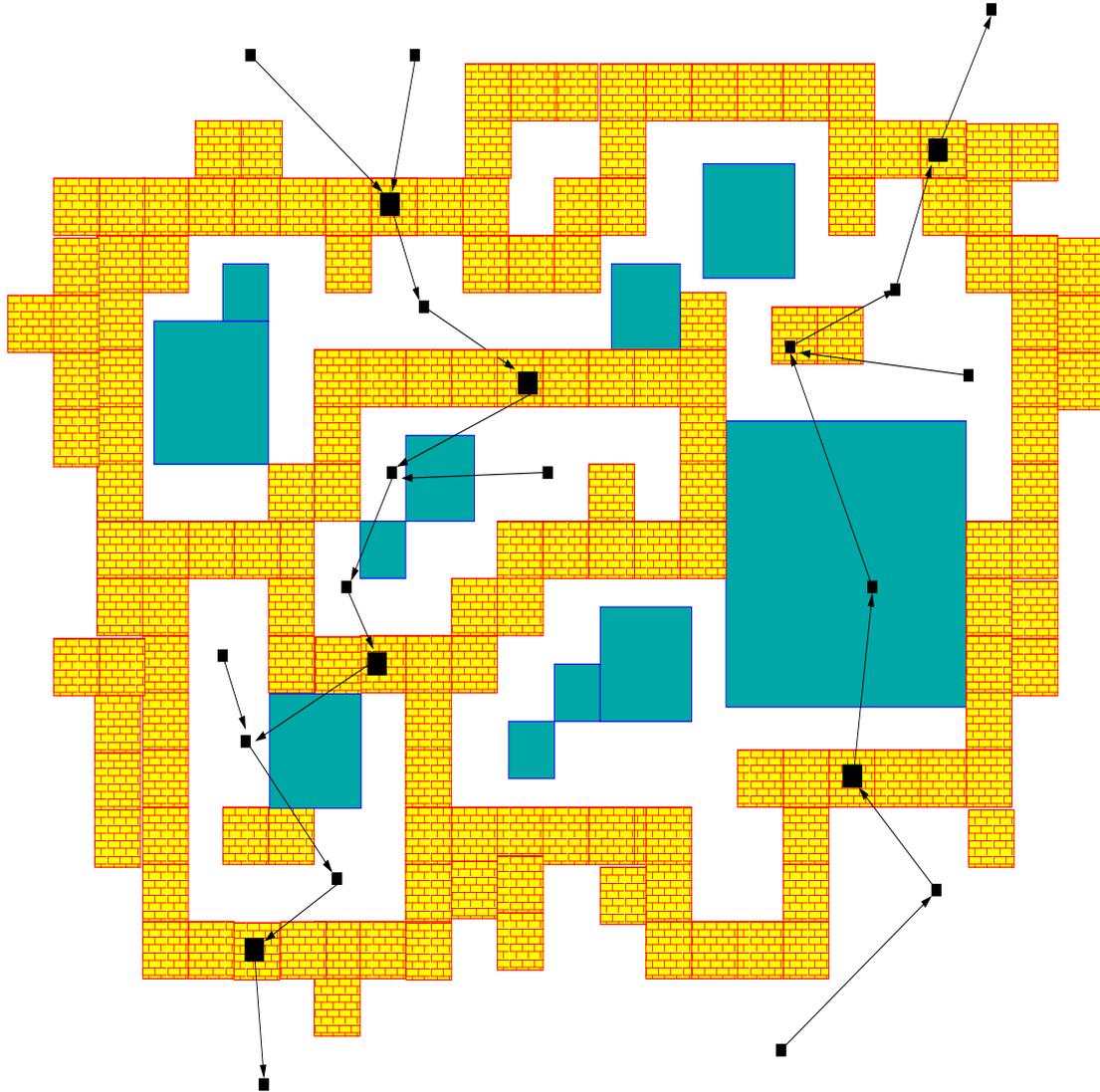


FIGURE III.7 – Sur cette figure, les carrés bleus représentent la zone dans laquelle grandissent les segments rapides jusqu'à l'instant $\mathbf{T} = 1$. Dans le complémentaire de cette région bleue, les carrés jaunes représentent les briques portées par les sommets boucliers. L'absence de percolation de la réunion du champ de pollution (bleu) et des sommets non boucliers (blancs) implique la formation de murailles jaunes. Une branche forward infinie doit alors traverser une infinité de murailles de sommets boucliers. La Proposition III.1.14 garantit que chaque traversée se paye par la rencontre d'un almost looping point : chaque branche infinie contient alors une infinité de almost looping points.

Résumé de la preuve

L'hypothèse Shield du Théorème I.3.1 devient invérifiable lorsque le support de la loi ρ n'est pas bornée. En effet, pour vérifier qu'un segment fixé a une durée de vie supérieure à un temps fixé, on peut être amené à regarder des grains très éloignés du segment fixé. L'un des enjeux de la preuve est de contrôler le champ d'action des segments trop rapides, pour pouvoir ensuite ré-effectuer des constructions locales de boucliers à l'aide de fragments

de segments (comme dans la preuve du Théorème III.1.1). La preuve ne suit donc pas la stratégie de vérification des hypothèses Loop et Shield, néanmoins, elle utilise à maintes reprises des arguments présents dans ces deux conditions.

Comme précédemment, on fixe $\gamma = (0, \Theta, \mathbf{V})$ un point typique et on suppose par l'absurde que

$$\mathbf{P}(\#\text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) = +\infty) > 0. \quad (\text{III.1.11})$$

De la même façon que dans la preuve du Théorème I.3.1, nous allons raisonner en utilisant la notion de **almost looping points**. Nous donnerons une version adaptée au modèle de la notion de almost looping points. Nous savons que l'existence avec probabilité positive d'une branche forward contenant une infinité de almost looping points de mêmes paramètres est impossible dans un **POG** (voir la preuve du Théorème I.3.1). Ainsi pour obtenir la contradiction souhaitée, il est suffisant de montrer que l'équation (III.1.11) implique que

$$\mathbf{P}(\#\{y \in \text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) ; y \text{ est un almost looping point de } \mathbf{X}_\gamma\} = +\infty) > 0, \quad (\text{III.1.12})$$

où tous les almost looping points de $\text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma)$ ont les mêmes paramètres (voir Définition III.1.13). La preuve du Théorème III.1.10 est alors réduite à la démonstration de (III.1.11) \implies (III.1.12). Nous résumons ici les arguments importants qui articulent la preuve de cette implication. On commence par contrôler le domaine d'influence des segments rapides : pour un entier $m \geq 1$, on identifie une région aléatoire $B_{(\alpha, m)} \subset \mathbf{Z}^2$ (avec α un paramètre entier) qui représente le lieu dans lequel grandissent les segments rapides (c'est-à-dire ayant une vitesse $V \geq V_c(m)$) jusqu'à l'instant de temps unitaire $\mathbf{T} = 1$. L'ensemble complémentaire $B_{(\alpha, m)}^c$ contient deux types de sommets. Un sommet $u \in B_{(\alpha, m)}^c$ est un sommet bouclier si le graphe $\mathcal{G}_h(\mathbf{X})$ érige une barrière de segments autour de u avant le temps $\mathbf{T} = 1$ (un sommet bouclier s'apparente à un sommet m -shield de la Définition I.3.9). La définition exacte d'un sommet bouclier est donnée dans la Remarque III.1.15. Nous prouverons dans la Proposition III.1.22 que pour un paramètre α convenablement fixé et pour m suffisamment grand, la réunion $B_{(\alpha, m)} \cup \{\text{sommets non-boucliers}\}$ ne percole pas. Comme dans la preuve du Théorème I.3.1, chaque branche forward infinie doit alors pénétrer une infinité de murailles de sommets boucliers dans laquelle elle trouve un almost looping point (Proposition III.1.14).

Pollution des segments rapides

On commence par résumer ce que nous allons faire dans cette partie. On se donne un entier $m \in \mathbf{N}^*$ et on fixe une vitesse critique $V_c(m) > 0$. La valeur de $V_c(m)$ est choisie pour rendre effectif le Lemme III.1.19 et la Proposition III.1.22. On fixera alors pour ces raisons là $V_c(m) = \log(m^3)^{\frac{1}{s}}$ pour tout $m \geq 1$. Le segment grandissant depuis le point marqué $x = (\xi, \theta, V)$ sera considéré **rapide** si $V \geq V_c(m)$. La rapidité d'un tel segment fait qu'il pourrait empêcher la formation des structures de boucliers que nous définirons dans la prochaine partie. Ces structures se forment en un temps $\mathbf{T} = 1$; il faut garantir qu'aucun segment rapide ne pénètre dans la zone de construction du bouclier jusqu'au temps $\mathbf{T} = 1$ pour que ce dernier devienne actif. Le paramètre α correspond à la taille de la zone de construction d'un bouclier. Nous allons donc contrôler la zone d'influence des segments rapides jusqu'au temps $\mathbf{T} = 1$.

Nous utiliserons une nouvelle fois le réseau dilaté $m\mathbf{Z}^2$. Pour un sommet $u \in \mathbf{Z}^2$, on regarde quelle est la vitesse de poussée maximale des segments de \mathbf{X} grandissants depuis l'intérieur du carré $mu \oplus [-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}]^2$:

$$V_m^{\max}(u) = \max \left\{ V_x ; x \in \mathbf{X}_{mu \oplus [-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}]^2} \right\},$$

où V_x désigne la vitesse de croissance du segment issu de x . La stationnarité de \mathbf{X} et la propriété d'indépendance du processus ponctuel de Poisson assurent que les variables aléatoires $(V_m^{\max}(u))_{u \in \mathbf{Z}^2}$ sont indépendantes et identiquement distribuées.

Considérons $u \in \mathbf{Z}^2$ un sommet. Au temps $\mathbf{T} = 1$, l'extrémité $H(\cdot, 1)$ de n'importe quel segment grandissant depuis $mu \oplus [-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}]^2$ appartient au carré $mu \oplus [-Z_m(u), Z_m(u)]^2$, où on a posé $Z_m(u) = V_m^{\max}(u) + \frac{m}{2}$.

On peut alors définir le **rayon de pollution** d'un sommet $u \in \mathbf{Z}^2$ de la façon suivante :

$$R_{(\alpha, m)}(u) = \mathbb{1}_{\{V_m^{\max}(u) \geq V_c(m)\}} \left(\lfloor \frac{V_m^{\max}(u)}{m} + \frac{1 + \alpha}{2} \rfloor + 1 \right),$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la fonction partie entière. On peut alors définir le champ de pollution :

Définition III.1.11. Soient $m, \alpha \in \mathbf{N}^*$ deux entiers positifs. Le (α, m) -**champ de pollution** est défini comme le sous-ensemble de \mathbf{Z}^2 :

$$\mathbf{B}_{(\alpha, m)} = \bigcup_{u \in \mathbf{Z}^2} B_{\|\cdot\|_\infty}(u, R_{(\alpha, m)}(u)), \quad (\text{III.1.13})$$

où $B_{\|\cdot\|_\infty}(u, R_{(\alpha, m)}(u)) = \{u' \in \mathbf{Z}^2 ; \|u - u'\|_\infty < R_{(\alpha, m)}(u)\}$. Un sommet $u \in \mathbf{B}_{(\alpha, m)}$ sera dit **pollué**.

L'ensemble aléatoire $\mathbf{B}_{(\alpha, m)}$ est défini de sorte que pour chaque sommet $u' \notin \mathbf{B}_{(\alpha, m)}$, le carré $mu' \oplus [-\frac{\alpha m}{2}, \frac{\alpha m}{2}]^2$ n'est pénétré par aucun segment rapide avant le temps $\mathbf{T} = 1$

Lemme III.1.12. Soit $u' \in \mathbf{Z}^2$ tel que $u' \in \mathbf{B}_{(\alpha, m)}^c$. Le carré $mu' \oplus [-\frac{\alpha m}{2}, \frac{\alpha m}{2}]^2$ n'est pénétré par aucun segment rapide avant le temps $\mathbf{T} = 1$.

Démonstration : Soit $u \in \mathbf{Z}^2$ tel que $V_m^{\max}(u) \geq V_c(m)$. Alors nous savons que $u' \notin B_{\|\cdot\|_\infty}(u, R_{(\alpha, m)}(u))$. On a alors $\|u - u'\|_\infty \geq \lfloor \frac{V_m^{\max}(u)}{m} + \frac{1 + \alpha}{2} \rfloor + 1$. En multipliant par m , on obtient :

$$\begin{aligned} \|mu - mu'\|_\infty &\geq V_m^{\max}(u) + \frac{m(\alpha + 1)}{2}, \\ &\geq Z_m(u) + \frac{\alpha m}{2}. \end{aligned}$$

On obtient alors le résultat souhaité. □

Nous verrons dans la Proposition III.1.22 que $\mathbf{B}_{(\alpha, m)}$ ne percole pas (percolation par site pour la norme l_∞) lorsque m est suffisamment grand. On se concentre maintenant sur l'ensemble complémentaire $\mathbf{B}_{(\alpha, m)}^c$.

Murailles de boucliers bloquants

Dans cette partie, nous travaillons sur les sommets non pollués, c'est-à-dire les sommets de $\mathbf{B}_{(\alpha,m)}^c$. Pour un tel sommet $u \in \mathbf{B}_{(\alpha,m)}^c$, on sait qu'aucun segment rapide ne peut entrer dans la boîte $mu \oplus \left[\frac{-\alpha m}{2}, \frac{\alpha m}{2} \right]^2$ avant le temps $\mathbf{T} = 1$. Cette observation implique que pour un point marqué $x \in \mathbf{X}_{mu \oplus \left[\frac{-\alpha m}{2}, \frac{\alpha m}{2} \right]^2}$, il existe un temps $\tau(x) \leq 1$ suffisamment petit tel que la survie du segment $\text{Grain}(x, \cdot)$ jusqu'au temps $\tau(x)$ dépende uniquement de la configuration \mathbf{X} à l'intérieur de $mu \oplus \left[\frac{-\alpha m}{2}, \frac{\alpha m}{2} \right]^2$. Cette propriété importante de "survie locale" est étroitement liée à celle que l'on a utilisée dans le cas des vitesses constantes, elle sera détaillée dans la preuve de la Proposition III.1.14.

On commence par donner une définition de **almost looping point** adaptée à notre modèle :

Définition III.1.13. Soient $0 < r < R$ deux rayons positifs, un entier $K \in \mathbf{N}^*$, une vitesse maximale $W > 0$ et une boule ouverte $A \subset (B(0, r) \times [0, 2\pi] \times [0, W])^3$. Un point marqué $x \in \mathbf{X}$ est un $(r, R, , W, K, A)$ -**almost looping point** de \mathbf{X} si :

- (i) $\#\mathbf{X}_{B(x,R)} \leq K$;
 - (ii) $\forall (x_1, x_2, x_3) \in A_x$, nous avons :
 - (ii-a) $\text{For}(\mathbf{X} \cup \{x_1, x_2, x_3\}, x) \subset \{x, x_1, x_2, x_3\}$;
 - (ii-b) $\#\text{Back}(\mathbf{X} \cup \{x_1, x_2, x_3\}, x) \geq \#\text{Back}(\mathbf{X}, x)$;
- où on a posé $A_x = \tau_\xi(A)$ avec $x = (\xi, \cdot)$.

La raison pour laquelle on doit considérer une vitesse maximale $W > 0$ est reliée à l'argument de compacité qui nous permettra de recouvrir $(B(0, r) \times [0, 2\pi] \times [0, W])^3$ par un nombre fini de boules ouvertes (comme on l'a déjà fait dans le Lemme I.3.14). On notera que l'on a privilégié ici une écriture avec la configuration aléatoire \mathbf{X} plutôt que la version plus générale avec une configuration fixée. On peut alors énoncer le résultat principal de la section :

Proposition III.1.14. Il existe une suite d'événements $(\mathcal{E}_m)_{m \geq 1}$ telle que :

- (i) $\forall m \geq 1$, l'événement \mathcal{E}_m est observable dans le carré $[-8m, 8m]^2$ dès lors que $0 \in \mathbf{B}_{(16,m)}^c$.
- (ii) $\mathbb{P} \left(\mathbf{X} \in \mathcal{E}_m \mid 0 \in \mathbf{B}_{(16,m)}^c \right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1$.
- (iii) On considère $\mathcal{W} \subset \mathbf{B}_{(16,m)}^c$ tel que $\mathbf{Z}^2 \setminus \mathcal{W}$ contient au moins deux composantes connexes au sens l_1 que l'on note A_1 et A_2 . On suppose que l'on a :

$$\forall i \in \{1, 2\}, \mathcal{A}_i = \left(A_i \oplus \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right]^2 \right) \setminus (\mathcal{W} \oplus [-8, 8]^2) \neq \emptyset. \quad (\text{III.1.14})$$

Si l'on suppose que pour tout $u \in \mathcal{W}$ on a $\tau_{-mu}(\mathbf{X}) \in \mathcal{E}_m$, alors :

$$\forall x \in \mathbf{X}_{mA_1} \text{ tq } \text{For}(\mathbf{X}, x) \cap \mathbf{X}_{mA_2} \neq \emptyset, \exists y \in \text{For}(\mathbf{X}, x) \cap \mathbf{X}_{m\mathcal{W} \oplus [-8m, 8m]^2} \text{ un } \mathbf{ALP},$$

$$\forall x \in \mathbf{X}_{mA_2} \text{ tq } \text{For}(\mathbf{X}, x) \cap \mathbf{X}_{mA_1} \neq \emptyset, \exists y \in \text{For}(\mathbf{X}, x) \cap \mathbf{X}_{m\mathcal{W} \oplus [-8m, 8m]^2} \text{ un } \mathbf{ALP},$$

où on a utilisé l'acronyme **ALP**=almost looping point.

Remarque III.1.15. L'événement \mathcal{E}_m de la Proposition III.1.14 est relié à celui défini dans l'hypothèse Shield, à la différence près qu'il est observé dans des carrés que l'on sait non pollués. Comme dans la preuve du Théorème I.3.1, une muraille de sommets m -boucliers (cette fois, un sommet m -bouclier est un sommet $u \in \mathbf{B}_{(16,m)}^c$ tel que $\tau_{-mu}(\mathbf{X}) \in \mathcal{E}_m$) force chaque branche forward qui la traverse à rencontrer un **ALP**.

La preuve de la Proposition III.1.14 consiste à définir une suite d'événements locaux candidate à la réalisation des trois items. Les Définitions III.1.16 et III.1.17 construisent ces événements candidats. Le premier item est directement obtenu par construction de l'événement \mathcal{E}_m , le second est vérifié dans le Lemme III.1.19. Enfin, le Lemme III.1.20 est dédié à la vérification du troisième item.

Démonstration : (de la Proposition III.1.14.)

On suppose que $0 \in \mathbf{B}_{(16,m)}^c$ avec $m \in \mathbf{N}^*$ fixé. L'événement \mathcal{E}_m se construit de la même manière que celui de l'hypothèse Shield pour le modèle des segments grandissants à vitesse constante. Ainsi, on va utiliser les structures et notations reliées au réseau triangulaire.

On rappelle que l'on se donne le réseau triangulaire

$$\Pi = \left\{ a \vec{i} + b \vec{j} : a, b \in \mathbf{Z} \right\},$$

où $\vec{i} = (\sqrt{3} \cos(\frac{\pi}{6}), \sqrt{3} \sin(\frac{\pi}{6}))$ et $\vec{j} = (0, \sqrt{3})$. On a défini $B^n(u)$ et $S^n(u)$ les boules et sphères fermées de centre u et de rayon n associées à la distance d_Π .

On insiste sur le fait que la condition $0 \in \mathbf{B}_{(16,m)}^c$ implique que tous les segments issus de $\text{Hex}^{4m}(0)$ grandissent à une vitesse inférieure ou égale à $V_c(m)$.

$$0 \in \mathbf{B}_{(16,m)}^c \implies \forall x = (\xi, \theta, V) \in \mathbf{X}_{\text{Hex}^{4m}(0)} ; V \leq V_c(m). \quad (\text{III.1.15})$$

On considère $u \in B^{4m}(0)$ et $x = (\xi, \theta, V) \in \mathbf{X}_{\text{Hex}(u)}$. Il n'est pas difficile de vérifier que $\text{Hex}(u) \subset \text{Hex}^{4m}(0) \subset [-8m, 8m]^2$. De ce fait, aucun segment rapide ne peut pénétrer l'hexagone $\text{Hex}(u)$ avant le temps $\mathbf{T} = 1$. On peut alors raisonner comme dans le modèle des segments grandissants à vitesses constantes : il existe $0 < \tau_{(u,m)}(x) \leq 1$ tel que la réalisation de l'événement

$$\{f_{\mathbf{X}}(x) \leq \tau_{(u,m)}(x)\}$$

ne dépend que de l'état de \mathbf{X} dans l'hexagone $\text{Hex}(u)$. Il suffit de considérer $\tau_{(u,m)}(x)$ suffisamment petit pour que le disque de centre $H(x, \tau_{(u,m)}(x))$ et de rayon $\tau_{(u,m)}(x) \cdot V_c(m)$ soit inclus dans $\text{Hex}(u)$ (voir la Figure III.8 pour une représentation géométrique). Précisément :

$$\tau_{(u,m)}(x) = \sup \{0 \leq t \leq 1, B(H(x, t), t \cdot V_c(m)) \subset \text{Hex}(u)\}.$$

Pour un point marqué $x = (\xi, \theta, V) \in \mathbf{X}_{\text{Hex}^{4m}(0)}$, deux situations peuvent se produire : si le stoppant $h(\mathbf{X}, x)$ de x appartient à la boule $B(H(x, \tau_{(u,m)}(x)), \tau_{(u,m)}(x) \cdot V_c(m))$ alors on détermine le vrai segment arrêté $\text{Grain}(x, f_{\mathbf{X}}(x))$ à la seule vue de $\mathbf{X}_{\text{Hex}(u)}$. Dans ce cas, on pose $f_{(u,m)}(x) = f_{\mathbf{X}}(x)$. Sinon, on peut seulement assurer que le segment issu de x sera d'une longueur supérieure ou égale à $\tau_{(u,m)}(x)V$ et dans ce cas, on pose $f_{(u,m)}(x) = \tau_{(u,m)}(x)$. Dans chacune des deux situations,

$$\text{Grain}(x, f_{(u,m)}(x)) \subset \text{Grain}(x, f_{\mathbf{X}}(x)).$$

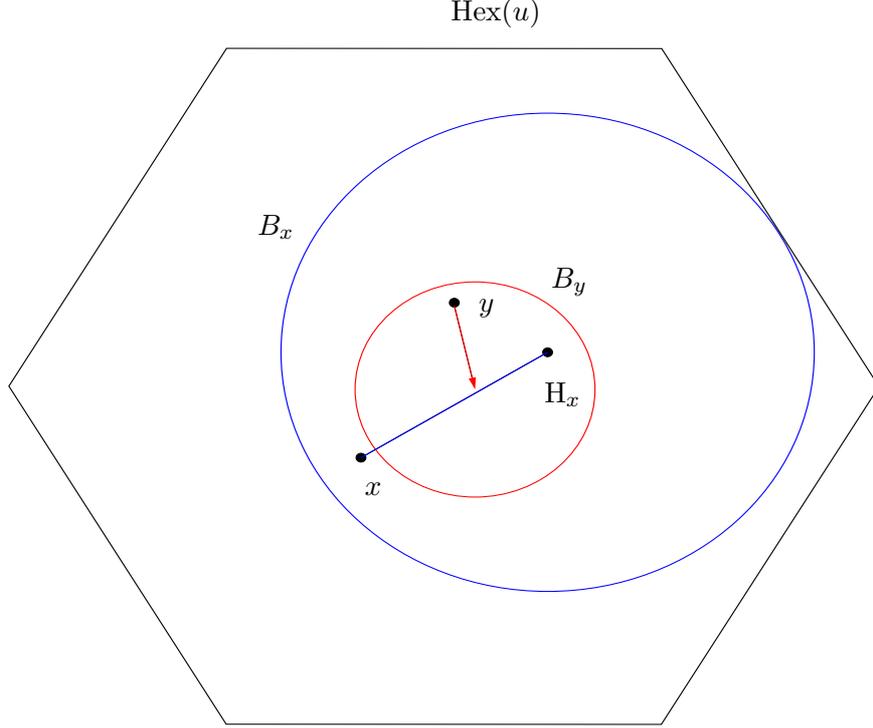


FIGURE III.8 – Sur cette figure : $H_x = H(x, \tau_{(u,m)}(x))$ et $B_x = B(H(x, \tau_{(u,m)}(x)), V_c(m)\tau_{(u,m)}(x))$. Le point marqué y peut éventuellement stopper x avant le temps $\tau_{(u,m)}(x)$. La vitesse du segment grandissant depuis y étant inférieure à $V_c(m)$ (puisque $\text{Hex}(u)$ n'est pas pollué), on a nécessairement $y \in \mathbf{X}_{B_x}$. Supposons qu'il existe $0 \leq t \leq \tau_{(u,m)}(x)$ tel que $H(x, t) \cap \text{Grain}(y, t) \neq \emptyset$. Pour contrôler que le segment issu de y stoppe celui partant de x au temps t , il faut nous assurer que le grain issu de y n'est pas arrêté avant le temps t . Pour cela, nous avons seulement besoin d'observer la configuration \mathbf{X}_{B_y} , où $B_y = B(H(y, t), tV_c(m))$ (toujours grâce à l'absence de pollution). Alors, l'inégalité triangulaire assure que $B_y \subset B_x$. En poursuivant ce raisonnement par récurrence, on obtient que la réalisation de l'événement $\{f_{\mathbf{X}}(x) \leq \tau_{(u,m)}(x)\}$ dépend uniquement de \mathbf{X}_{B_x} .

Comme dans le Lemme III.1.4, pour tout $u \in B^{4m}(0)$, nous obtenons un sous-graphe $\mathcal{S}_{\text{Hex}(u)}$ -mesurable qui contient tout ce que l'on a pu voir pousser jusqu'au temps $\mathbf{T} = 1$ à partir de la seule observation de $\mathbf{X}_{\text{Hex}(u)}$:

$$\forall u \in B^{4m}(0), \text{Graph}_{(\text{Hex}(u), m)}(\mathbf{X}) = \bigcup_{x \in \mathbf{X}_{\text{Hex}(u)}} \text{Grain}(x, f_{(u,m)}(x)).$$

On donne alors une version adaptée de la notion d'hexagone ϵ -bloquant donnée dans la Définition III.1.5 :

Définition III.1.16. Soient $\epsilon \in (0, 1)$ et $u \in B^{4m}(0)$. L'hexagone $\text{Hex}(u)$ est dit (ϵ, m) -bloquant pour \mathbf{X} si pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ tels que $a \notin \text{Hex}(u)$ et $b \in u \oplus \epsilon \text{Hex}(0)$, nous avons

$$(a, b) \cap \text{Graph}_{(\text{Hex}(u), m)}(\mathbf{X}) \neq \emptyset.$$

Par ailleurs, pour tout entier $n > 0$ et tout sous-ensemble $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset B^{4m}(0)$, la collection d'hexagones $\{\text{Hex}(u_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ est dite (ϵ, m) -bloquante pour \mathbf{X} si pour tout indice i , $\text{Hex}(u_i)$ est (ϵ, m) -bloquant pour \mathbf{X} .

Pour un sommet $u \in B^{4m}(0)$, l'hexagone $\text{Hex}(u)$ est (ϵ, m) -bloquant lorsque les morceaux de segments de $\text{Graph}_{(\text{Hex}(u), m)}(\mathbf{X})$ produisent, avant le temps $\mathbf{T} = 1$, un bouclier dans la bande $\text{Hex}(u) \setminus (u \oplus \epsilon \text{Hex}(0))$. Lorsque $0 \in \mathbf{B}_{(16, m)}^c$, l'observation de \mathbf{X} à l'intérieur de $\text{Hex}(u)$ suffit pour vérifier que $\text{Hex}(u)$ est (ϵ, m) -bloquant. Comme dans le cas des segments grandissants à vitesse constante, on a :

$$\forall \epsilon \in (0, 1), \forall u \in B^{4m}(0), p_{(\epsilon, m)} = \mathbf{P}(\text{Hex}(u) \text{ est } (\epsilon, m)\text{-bloquant} \mid 0 \in \mathbf{B}_{(16, m)}^c) > 0.$$

Pour la construction de l'événement \mathcal{E}_m , on va suivre la démarche employée dans le modèle des segments grandissants à vitesse constante en adaptant la Définition III.1.6

Définition III.1.17. Soient $m \in \mathbf{N}^*$ et $\beta \in \{1, 2\}$, l'ensemble $\text{Hex}^{2\beta m}(0)$ est dit *m -imperméable* pour \mathbf{X} si :

- (♣) Pour tout $y = (\xi', \theta', V') \in \mathbf{X}$ tel que $\xi' \in \text{Hex}^{2\beta m}(0)^c$, $[\xi, h_g(\mathbf{X}, y)] \cap \text{Hex}^{\beta m}(0) = \emptyset$.
- (♠) Pour tout $x \in \mathbf{X}_{\text{Hex}^{\beta m}(0)}$, $h_g(\mathbf{X}, x) \in \text{Hex}^{2\beta m}(0)$.

Dans la suite, pour $\beta \in \{1, 2\}$, nous construisons un événement $E_m^{(\beta)}$ sur lequel $\text{Hex}^{2\beta m}(0)$ est presque sûrement m -imperméable (Lemme III.1.18). Précisément, la réalisation de l'événement $E_m^{(\beta)}$ impliquera la présence de nombreux hexagones (ϵ, m) -bloquants dans l'ensemble $\text{Hex}^{2\beta m}(0) \setminus \text{Hex}^{\beta m}(0)$. Dans un deuxième temps, nous prouverons que la probabilité $\mathbf{P}(\mathbf{X} \in E_m^{(\beta)} \mid 0 \in \mathbf{B}_{(16, m)}^c)$ tend vers 1 lorsque $m \rightarrow \infty$ (Lemme III.1.19). La suite d'événements $\left(E_m^{(1)} \cap E_m^{(2)}\right)_{m \geq 1}$ sera alors candidate pour la Proposition III.1.14.

Pour construire l'événement $E_m^{(\beta)}$, on procède de la même façon que dans la section précédente. On définit alors les ensembles

$$\mathcal{L}_\beta^m = \{l(\eta, \vec{v}) ; l(\eta, \vec{v}) \cap \text{Int}(\text{Hex}^{\beta m}(0)) = \emptyset \text{ et } (\eta, v) \in \partial \text{Hex}^{\beta m}(0) \times [0, 1]\},$$

puis, pour une demi-droite $l \in \mathcal{L}_\beta^m$, on définit par $\text{Cross}^{(\beta)}(l)$ l'ensemble des hexagones de $\text{Hex}^{2\beta m}(0) \setminus \text{Hex}^{\beta m}(0)$ traversés par l :

$$\text{Cross}^{(\beta)}(l) = \{\text{Hex}(u) ; \beta m + 1 \leq d_\Pi(0, u) \leq 2\beta m \text{ et } l \cap \text{Hex}(u) \neq \emptyset\}.$$

On considère une nouvelle fois les ensembles $\text{Cross}_i^{(\beta)}(l)$ pour $\beta m + 1 \leq i \leq 2\beta m$, constitués des hexagones de $\text{Cross}^{(\beta)}(l)$ appartenant à la ceinture $C_i(0)$. On peut alors définir l'indice $i(l)$ qui définit le niveau à partir duquel l'ensemble $\text{Cross}_i^{(\beta)}(l)$ contient au plus trois hexagones. L'ensemble d'hexagones $\text{Cross}^{(\beta)}(l)$ est alors (ϵ, m) -infranchissable pour \mathbf{X} s'il contient deux étages consécutifs $\text{Cross}_i^{(\beta)}(l)$ et $\text{Cross}_{i+1}^{(\beta)}(l)$, pour $i(l) \leq i \leq 2\beta m - 1$, qui soient tous les deux ϵ -bloquants pour \mathbf{X} . On peut alors définir l'événement $E_m^{(\beta)}(\epsilon)$ de la façon suivante :

$$E_m^{(\beta)}(\epsilon) = \bigcap_{l \in \mathcal{L}_\beta^m} \left\{ \text{Cross}^{(\beta)}(l) \text{ est } (\epsilon, m)\text{-infranchissable pour } \mathbf{X} \right\}. \quad (\text{III.1.16})$$

Conditionné au fait que $0 \in \mathbf{B}_{(16,m)}^c$, les événements $E_m^{(1)}(\epsilon)$ et $E_m^{(2)}(\epsilon)$ sont respectivement observables dans les régions $\text{Hex}^{2m}(0)$ et $\text{Hex}^{4m}(0)$. On note que ces deux régions sont incluses dans $[-8m, 8m]^2$.

Lemme III.1.18. *Il existe $\epsilon \in (0, 1)$ (proche de 1) tel que, pour tout $\beta \in \{1, 2\}$, sur l'événement $E_m^{(\beta)}(\epsilon)$, $\text{Hex}^{2\beta m}(0)$ est presque sûrement m -imperméable pour \mathbf{X} .*

Démonstration : (du Lemme III.1.18.) Pour $\beta \in \{1, 2\}$, la preuve de la Proposition III.1.7 assure qu'il existe ϵ_β suffisamment proche de 1 pour que, sur l'événement $E_m^{(\beta)}(\epsilon_\beta)$, presque sûrement, toutes les demi-droites de \mathcal{L}_β^m soient bloquées (chaque demi-droite $l \in \mathcal{L}_\beta^m$ heurte un graphe local $\text{Graph}_{\text{Hex}(\cdot)}(\mathbf{X})$ à l'intérieur de l'ensemble $\text{Hex}^{2\beta m}(0) \setminus \text{Hex}^{\beta m}(0)$). On obtient alors que, sur l'événement $E_m^{(\beta)}(\epsilon_\beta)$, l'ensemble $\text{Hex}^{2\beta m}(0)$ est presque sûrement m -imperméable : l'item (\spadesuit) est une conséquence de (III.1.15) qui assure que les segments grandissants depuis $\text{Hex}^{\beta m}(0)$ ne sont pas suffisamment rapides pour échapper au bouclier qui se forme dans $\text{Hex}^{2\beta m}(0) \setminus \text{Hex}^{\beta m}(0)$. L'item (\clubsuit) est directement impliqué par le fait que $0 \in \mathbf{B}_{(16,m)}^c$: il n'existe pas de segment provenant de l'extérieur $\text{Hex}^{2\beta m}(0)$ qui puisse traverser $\text{Hex}^{2\beta m}(0) \setminus \text{Hex}^{\beta m}(0)$. On peut donc conclure la preuve en considérant $\epsilon = \max\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. \square

Dans la suite, on écrira $E_m^{(\beta)}$ au lieu de $E_m^{(\beta)}(\epsilon)$, où ϵ est donné par le Lemme III.1.18. De la même manière, on écrira p_m au lieu de $p_{(\epsilon,m)}$.

Nous pouvons énoncer le résultat suivant, dont la preuve s'inspire de celle de la Proposition III.1.8

Lemme III.1.19. *Nous avons la convergence suivante :*

$$\forall \beta \in \{1, 2\}, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(\mathbf{X} \in E_m^{(\beta)} \mid 0 \in \mathbf{B}_{(16,m)}^c) = 1$$

Démonstration : (du Lemme III.1.19.) Pour $\beta \in \{1, 2\}$, la preuve de la Proposition III.1.8 nous donne :

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} \notin E_m^{(\beta)} \mid 0 \in \mathbf{B}_{(16,m)}^c) \leq K_\beta 36m(m+1)2m(1-p_m^6)^{\frac{m}{10}}, \quad (\text{III.1.17})$$

où K_β est une constante qui ne dépend que de β . On cherche alors à minorer p_m pour pouvoir montrer que le terme de droite de l'inégalité (III.1.17) tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$. Précisément, on va montrer qu'il existe deux constantes positives $C_1, C_2 > 0$ telles que :

$$\forall m \geq 1, \quad p_m \geq \left(\frac{C_1}{V_c(m)^2} \right)^{\frac{V_c(m)}{C_2}}. \quad (\text{III.1.18})$$

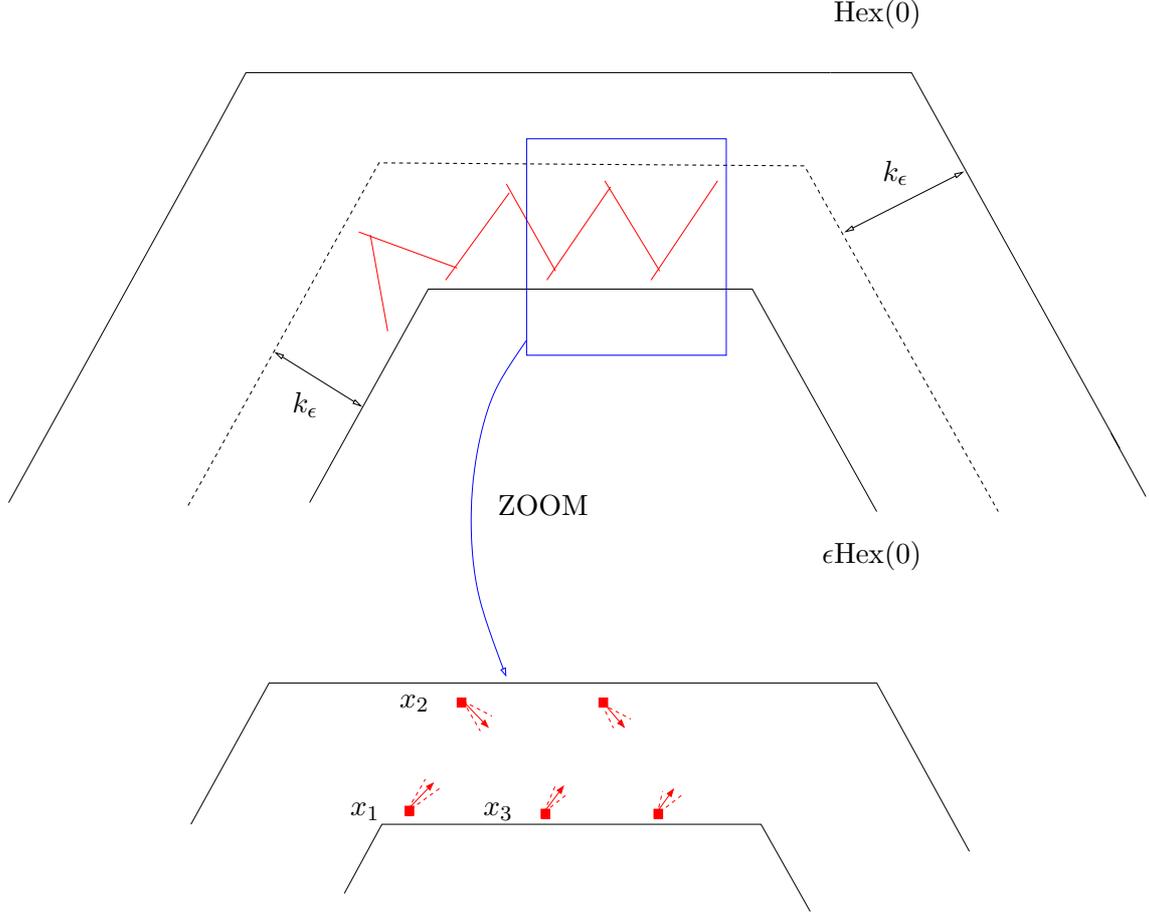


FIGURE III.9 – On construit manuellement une boucle $\{x_1, \dots, x_n\}$ dans une bande d'épaisseur k_ϵ . Chaque segment x_i de la boucle peut grandir pendant un temps de l'ordre de $\frac{k_\epsilon}{V_c(m)}$ sans que les segments situés en dehors de $\text{Hex}(0)$ n'influent sur sa durée de vie. On s'arrange donc pour chaque segment puisse grandir durant ce temps (avec une vitesse supérieure à une constante \mathcal{V} indépendante de m) sans être stoppé. Pour cela on impose qu'une boule centrée en l'extrémité grandissante du segment et de rayon $\frac{k_\epsilon \mathcal{V}}{V_c(m)}$ ne contienne aucun autre point que le germe associé au segment. Enfin, la direction de poussé de chaque segment est choisie pour que le segment x_i soit stoppé par le segment x_{i+1} (un intervalle d'angle d'épaisseur fixé convient). Alors il existe une constante $C_2 > 0$ telle que le nombre maximal de segments dans la boucle est plus petit que $\frac{V_c(m)}{C_2}$. La propriété d'indépendance du processus ponctuel de Poisson et les descriptions ci dessus assurent alors que la probabilité d'enfermer $\epsilon \text{Hex}(0)$ dans une boucle est plus grande que $\left(\frac{C_1}{V_c(m)^2}\right)^{\frac{V_c(m)}{C_2}}$, où C_1 est une constante positive indépendante de m .

Avant de prouver l'inégalité (III.1.18), montrons comment elle permet de conclure. En insérant l'inégalité (III.1.18) dans (III.1.17), on obtient :

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} \notin E_m^{(\beta)} \mid 0 \in \mathbf{B}_{(16,m)}^c) \leq K_\beta 36m(m+1)2m \left(1 - \left(\frac{C_1}{V_c(m)^2}\right)^{\frac{6V_c(m)}{C_2}}\right)^{\frac{m}{10}}. \quad (\text{III.1.19})$$

Le terme de droite dans l'inégalité (III.1.19) est équivalent (lorsque m tend vers $+\infty$) à

$$I_m := K_\beta 36m(m+1)2m \exp\left(\frac{-m}{10} \exp(-CV_c(m) \log(V_c(m)))\right),$$

où C est une constante strictement positive. Puisque $V_c(m) = (\log(m^3))^{\frac{1}{s}}$, on obtient que :

$$\begin{aligned} I_m &\leq K_\beta 36m(m+1)2m \exp\left(\frac{-m}{10} \exp(-CV_c(m)^2)\right), \\ &\leq K_\beta 36m(m+1)2m \exp\left(\frac{-m}{10} \exp(-C(\log(m^3))^{\frac{1}{s}})\right). \end{aligned}$$

Nous pouvons alors montrer que pour m suffisamment grand : $\exp(-C \log(m^3)^{\frac{1}{s}}) \geq \frac{1}{\sqrt{m}}$. En effet, puisque $s > 1$ nous avons :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{\log(m)}{2} - 3^{\frac{1}{s}} C \log(m)^{\frac{1}{s}}\right) = +\infty.$$

On obtient alors :

$$I_m \leq K_\beta 36m(m+1)2m \exp\left(\frac{-\sqrt{m}}{10}\right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

On a donc bien démontré que $\mathbf{P}\left(\mathbf{X} \notin E_m^{(\beta)} \mid 0 \in \mathbf{B}_{(16,m)}^c\right)$ tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$. Pour conclure la preuve du Lemme III.1.19, il reste à prouver l'inégalité (III.1.18).

On va montrer que la probabilité que l'hexagone $\epsilon\text{Hex}(0)$ soit encerclé par une boucle de segments stoppés est supérieure ou égale à $\left(\frac{C_1}{V_c(m)^2}\right)^{\frac{V_c(m)}{C_2}}$. On procède géométriquement (voir Figure III.9) en construisant une boucle de points entre les hexagones $\epsilon\text{Hex}(0)$ et $\text{Hex}(0)$. □

Le prochain lemme achève la démonstration de la Proposition III.1.14 :

Lemme III.1.20. *Si l'on considère l'événement $\mathcal{E}_m = E_m^{(1)} \cap E_m^{(2)}$, les trois items de la Proposition III.1.14 sont vérifiés.*

Démonstration : (du Lemme III.1.20.) Nous allons vérifier les trois items de la Proposition III.1.14. Puisque l'on a $0 \in \mathbf{B}_{(16,m)}^c$, et par construction de l'événement \mathcal{E}_m , la variable aléatoire $\mathbb{1}_{\{\mathbf{X} \in \mathcal{E}_m\}}$ est $\mathcal{S}_{\text{Hex}^{4m}(0)}$ -mesurable. Le premier item se déduit de l'inclusion $\text{Hex}^{4m}(0) \subset [-8m, 8m]^2$. Le deuxième item est une conséquence du Lemme III.1.19. Il reste à vérifier la validité du troisième item.

On se donne trois sous-ensembles \mathcal{W}, A_1, A_2 de \mathbf{Z}^2 comme ceux décrits dans l'énoncé de la proposition. On rappelle que pour $i \in \{1, 2\}$, on a

$$\mathcal{A}_i := \left(A_i \oplus \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right]^2 \right) \setminus (\mathcal{W} \oplus [-8, 8]^2).$$

On fixe un entier positif m et on suppose que pour tout sommet $u \in \mathcal{W}$, on a $\tau_{-mu}(\mathbf{X}) \in \mathcal{E}_m$. Nous devons vérifier que :

$\forall x \in \mathbf{X}_{m\mathcal{A}_1}$ t.q $\text{For}(\mathbf{X}, x) \cap \mathbf{X}_{m\mathcal{A}_2} \neq \emptyset$, $\exists y \in \text{For}(\mathbf{X}, x) \cap \mathbf{X}_{m\mathcal{W} \oplus [-8m, 8m]^2}$ un **ALP**. (III.1.20)

On fixe alors un point marqué $x = (\xi, \theta, V) \in \mathbf{X}_{m\mathcal{A}_1}$ tel que $\text{For}(\mathbf{X}, x) \cap \mathbf{X}_{m\mathcal{A}_2} \neq \emptyset$. Pour faciliter la rédaction, on va écrire $\text{For}(\mathbf{X}, x)$ comme une suite $(x_j)_{j \geq 0}$, avec $x_0 = x$ et $x_{j+1} = h(\mathbf{X}, x_j)$ pour tout $j \in \mathbf{N}$. Par hypothèse, il existe un indice $n \geq 1$ tel que $x_n \in \mathbf{X}_{m\mathcal{A}_2}$. Nous allons alors vérifier qu'il existe un indice $1 \leq i \leq n$ et un sommet $u \in \mathcal{W}$ tel que $[\xi_i, h_g(\mathbf{X}, x_i)] \subset \text{Hex}^{2m}(mu)$, où $x_i = (\xi_i, \theta_i, V_i)$.

On commence par observer qu'il existe un indice $1 \leq i \leq n$ et un sommet $u \in \mathcal{W}$ tels que $[\xi_i, h_g(\mathbf{X}, x_i)] \cap \text{Hex}^m(mu) \neq \emptyset$. Le fait que $\tau_{-mu}(\mathbf{X}) \in E_m^{(1)}$ implique l'inclusion suivante : $[\xi_i, h_g(\mathbf{X}, x_i)] \subset \text{Hex}^{2m}(mu)$. En effet, la bande $\text{Hex}^{2m}(mu) \setminus \text{Hex}^m(mu)$ ne peut pas être traversée d'après la Définition III.1.17.

Pour prouver (III.1.20), il suffit de montrer que x_i est un **almost looping point** de \mathbf{X} . On définit par u_i l'unique point de $mu \oplus B^{2m}(0)$ tel que $\xi_i \in \text{Hex}(u_i)$. On pose alors :

- $\text{Grain}(x_i, f_{(u_i, m)}(x_i))$, comme le grain déduit de l'observation de $\text{Hex}(u_i)$
- $\text{Grain}(x_i, F_{(u, m)}(x_i))$ comme le plus grand grain (segment) issu de x_i et inclus dans l'ensemble $\text{Hex}^{2m}(mu)$.

Puisque nous avons garanti l'inclusion $[\xi_i, h_g(\mathbf{X}, x_i)] \subset \text{Hex}^{2m}(mu)$, on a :

$$f_{(u_i, m)}(x_i) \leq f_{\mathbf{X}}(x_i) \leq F_{(u, m)}(x_i),$$

et $h_g(\mathbf{X}, x_i) \in [\text{H}(x_i, f_{(u_i, m)}(x_i)), \text{H}(x_i, F_{(u, m)}(x_i))]$.

Pour vérifier que x_i est un almost looping point, on doit exhiber une boule ouverte de triplets de points marqués qui "cassent" la branche Forward de x_i . Cette boule ne peut se déterminer que si l'on connaît la position de $h_g(\mathbf{X}, x_i)$: en effet, pour créer une boucle de taille 3 dans le Forward de x_i , on doit placer un triangle de points marqués qui casse le segment $[\xi_i, h_g(\mathbf{X}, x_i)]$ (exactement comme dans la preuve de la Proposition III.1.2). En général, on ne peut pas déterminer quel est le point marqué stoppant $x_{i+1} = h(\mathbf{X}, x_i)$ en observant \mathbf{X} uniquement à l'intérieur de $mu \oplus [-8m, 8m]^2$. Néanmoins, le sommet u défini plus haut est dans \mathcal{W} , on sait alors que $\tau_{-mu}(\mathbf{X}) \in E_m^{(2)}$, et donc $h(\mathbf{X}, x_i) \in \text{Hex}^{4m}(mu)$.

Nous n'avons donc qu'un nombre fini de candidats pour le point marqué stoppant de x_i . Un point marqué $x' \in \mathbf{X}_{\text{Hex}^{4m}(mu)} \setminus \{x_i\}$ est un candidat stoppant pour x_i si et seulement si $\text{Grain}(x', \infty) \cap [\text{H}(x_i, f_{(u_i, m)}(x_i)), \text{H}(x_i, F_{(u, m)}(x_i))] \neq \emptyset$. Puisque les candidats stoppant de x_i sont en nombre fini, on peut en faire la liste $\{y_1, \dots, y_l\} \subset \mathbf{X}_{\text{Hex}^{4m}(mu)} \setminus \{x_i\}$. Puisque nous savons que $h(\mathbf{X}, x_i) \in \text{Hex}^{4m}(mu)$, cet ensemble est non vide et on a forcément $l \in \mathbf{N}^*$. On a :

$$\forall 1 \leq k \leq l, \text{Grain}(y_k, \infty) \cap \text{Grain}(x_i, F_{(u, m)}(x_i)) \neq \emptyset,$$

et on définit par t_k l'unique temps qui vérifie $\text{H}(x_i, t_k) \in \text{Grain}(y_k, \infty)$. Quitte à renuméroter les éléments de $\{y_1, \dots, y_l\}$, on peut supposer que $0 < t_1 < \dots < t_l \leq F_{(u, m)}(x_i)$.

Le grain stoppant de x_i dans \mathbf{X} appartient donc à l'ensemble $\{y_1, \dots, y_l\}$. Par ailleurs, lorsque $t_k < f_{(u_i, m)}(x_i)$, le segment issu de y_k n'est pas capable de stopper le segment partant de x_i . C'est pourquoi on définit

$$j = \min \{k \in \llbracket 1, l \rrbracket ; t_k \geq f_{(u_i, m)}(x_i)\}.$$

L'entier j est bien défini puisque nous savons que $h(\mathbf{X}, x_i) \in \text{Hex}^{4m}(mu)$.

Finalement $h(\mathbf{X}, x_i) \in \{y_j, \dots, y_l\}$. Vérifier quel est le vrai point marqué stoppant de x_i peut nécessiter l'observation de \mathbf{X} à l'extérieur de $mu \oplus [-8m, 8m]^2$. Pour la suite de la démonstration du Théorème III.1.10, il est crucial de préserver la nature locale des événements que l'on construit (ce sera précisément utilisé dans (III.1.30)). Nous pouvons identifier exactement $\#\{y_j, \dots, y_l\} = l - j + 1$ boules candidates pour "la région de bouclage" définie dans la Définition III.1.13. Une seule de ces boules est appropriée pour la définition de almost looping point.

Fixons $k \in \llbracket j, l \rrbracket$, on note w_k le milieu du segment $[H(x_i, t_{k-1}), H(x_i, t_k)]$ (avec $t_0 = 0$ et $H(x_i, 0) = \xi_i$). Il existe un rayon $r_k > 0$ tel que :

$$B(w_k, r_k) \cap \text{Rayons}(u, m, x_i) = \emptyset \quad (\text{III.1.21})$$

et

$$r_k < \|\xi_i - w_k\|, \quad (\text{III.1.22})$$

où on a posé

$$\text{Rayons}(u, m, x_i) = \bigcup_{x' \in \text{Hex}^{4m}(mu) \setminus \{x_i\}} \text{Grain}(x', \infty).$$

Supposons que $h(\mathbf{X}, x_i) = y_k$, la boule $B(w_k, r_k)$ devient alors une région appropriée pour créer un obstacle triangulaire au segment partant de x_i tout en ne réduisant pas la taille de son Backward. Nous ajouterons un triplet de points marqués dans $B(w_k, r_k)$ qui formera un triangle. Ce triangle sera actif avant l'arrivée du grain partant de x_i (condition (III.1.22)) et ne perturbera aucun autre grain (condition (III.1.21)). Encore une fois, cette démarche est une simple adaptation de celle effectuée dans la preuve de la Proposition III.1.2.

On note $x_i = (\xi_i, \theta_i, V_i)$ et on considère l'ensemble $\mathcal{A}_{x_i}^{(k)} \in (B(w_k, r_k) \times [0, 2\pi] \times [V_i, V_c(m)])^3$ tel que pour tout triplet $(a_0, a_1, a_2) \in \mathcal{A}_{x_i}^{(k)}$:

- (i) $h(\mathbf{X} \cup \{a_0, a_1, a_2\}, a_l) = a_{l+1}$ pour $l = 0, 1, 2$ (où l'indice $l + 1$ est pris modulo 3).
- (ii) Le triangle défini par les sommets $h_g(\mathbf{X} \cup \{a_0, a_1, a_2\}, a_l)$, $l = 0, 1, 2$, est inclus dans la boule $B(w_k, r_k)$ et contient son centre w_k .

Sans difficulté, on observe que $\mathcal{A}_{x_i}^{(k)}$ contient une boule ouverte non vide $A_{x_i}^{(k)} \subset (B(w_k, r_k) \times [0, 2\pi] \times [V_i, V_c(m)])^3$. On rappelle que l'on travaille ici sous l'hypothèse que $h(\mathbf{X}, x_i) = y_k$. En conséquence de (III.1.22), (i) et (ii), chaque ajout de triplet $(a_0, a_1, a_2) \in A_{x_i}^{(k)}$ implique que le segment grandissant depuis x_i heurte la boucle produite par a_0, a_1, a_2 :

$$\text{For}(\mathbf{X}, x_i \cup \{a_0, a_1, a_2\}) = \{x_i, a_0, a_1, a_2\}.$$

Par ailleurs, les conditions (III.1.22), (i) et (ii) assurent qu'aucun autre segment que celui issu de x_i n'est perturbé par l'ajout des points $\{a_0, a_1, a_2\}$:

$$\text{Back}(\mathbf{X}, x_i \cup \{a_0, a_1, a_2\}) = \text{Back}(\mathbf{X}, x_i).$$

Nous avons alors prouvé que x_i est un almost looping point pour la "région de bouclage" $A_{x_i}^{(k)}$ dès que $h(\mathbf{X}, x_i) = y_k$. Ce qui démontre le Lemme III.1.20. □

La Proposition III.1.14 est démontrée. □

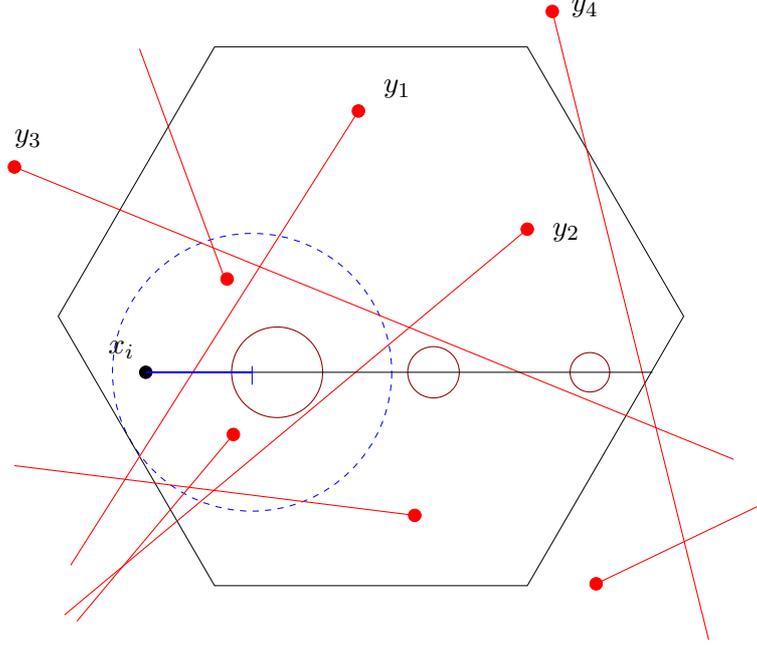


FIGURE III.10 – Sur cette figure, $l = 4$ et $j = 2$. Les trois disques $B(w_k, r_k)$ (for $2 \leq k \leq 4$) sont dessinés par des cercles marrons. Le grain $\text{Grain}(x_i, f_{u_i}(x_i))$ est représenté par un segment bleu épais, alors que le grain $\text{Grain}(x_i, F_u(x_i))$ est représenté par un segment bleu fin. Le cercle en pointillé bleu représente la frontière du disque qui a permis de définir $f_{u_i}(x_i)$.

Remarque III.1.21. La construction des ensembles $A_{x_i}^{(k)}$ s'effectue en ne considérant que $\mathbf{X}_{\text{Hex}^{Am}(mu)}$. On pose $\mathcal{A}_{x_i} = \{A_{x_i}^{(k)}\}_{j \leq k \leq l}$. Si l'on définit

$$\minrad(\mathcal{A}_{x_i}) = \min \{ \text{rad}(A_{x_i}^{(k)}), j \leq k \leq l \},$$

où $\text{rad}(A_{x_i}^{(k)})$ désigne le rayon de la boule ouverte $A_{x_i}^{(k)}$, alors la variable aléatoire $\minrad(\mathcal{A}_{x_i})$ est $\mathcal{S}_{\text{Hex}^{Am}(mu)}$ -mesurable. Cette observation sera utilisée au début de la preuve de la Proposition III.1.23.

Domination stochastique

On commence par définir deux processus ponctuels de Poisson indépendants : $\mathbf{X}_{\text{fast}}^{(m)}$ de mesure d'intensité $z\lambda_2 \mathbf{P}(\mathbf{V} \geq V_c(m)) \otimes \Xi \otimes \mathcal{L}(\mathbf{V} \mid \mathbf{V} \geq V_c(m))$ et $\mathbf{X}_{\text{slow}}^{(m)}$ de mesure d'intensité $z\lambda_2 \mathbf{P}(\mathbf{V} < V_c(m)) \otimes \Xi \otimes \mathcal{L}(\mathbf{V} \mid \mathbf{V} < V_c(m))$, où $\mathcal{L}(\mathbf{V} \mid \cdot)$ désigne la loi conditionnelle de la variable aléatoire \mathbf{V} dans chacun des deux cas. On définit alors le processus ponctuel \mathbf{X} :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\text{fast}}^{(m)} \sqcup \mathbf{X}_{\text{slow}}^{(m)}.$$

On obtient alors que \mathbf{X} est un processus ponctuel de Poisson d'intensité $z\lambda_2 \otimes \Xi \otimes \rho$.

Pour un sommet $u \in \mathbf{Z}^2$, on définit la variable aléatoire $\zeta_u^{(m)} = \mathbb{1}_{\{\tau_{-mu}(\mathbf{X}_{\text{slow}}^{(m)}) \notin \mathcal{E}_m\}}$. On

obtient alors :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathbf{Z}^2, \mathbf{P}(\zeta_u^{(m)} = 1) &= \mathbf{P}(\tau_{-mu}(\mathbf{X}_{\text{slow}}^{(m)}) \notin \mathcal{E}_m), \\ &= \mathbf{P}(\tau_{-mu}(\mathbf{X}) \notin \mathcal{E}_m \mid u \notin \mathbf{B}_{(16,m)}) = p_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

$\mathbf{S}_m = \{\zeta_u^{(m)}\}_{u \in \mathbf{Z}^2}$ définit un champ de Bernoulli stationnaire de paramètre p_m . L'ensemble complémentaire de \mathbf{S}_m dans \mathbf{Z}^2 correspond aux positions des possibles sommets m -bouclier. Par le même argument que celui utilisé dans la preuve du Lemme III.1.24, on montre que les variables aléatoires $\zeta_u^{(m)}$ et $\zeta_{u'}^{(m)}$ sont indépendantes dès que $\|u - u'\|_\infty > 16$. Le résultat de domination stochastique énoncé dans [22] nous permet de montrer que le champ \mathbf{S}_m est stochastiquement dominé par un champ de Bernoulli i.i.d $\mathbf{G}_m = \{\eta_u^{(m)}\}_{u \in \mathbf{Z}^2}$ de paramètre $f(p_m)$ tel que $\lim_{m \rightarrow +\infty} f(p_m) = 0$.

Le champ $\mathbf{B}_{(16,m)}$ dépend uniquement du processus ponctuel $\mathbf{X}_{\text{fast}}^{(m)}$, il est donc indépendant de \mathbf{S}_m et de \mathbf{G}_m . On définit le champ aléatoire de \mathbf{Z}^2 :

$$\mathbf{B}'_{(16,m)} = \mathbf{B}_{(16,m)} \cup \mathbf{G}_m.$$

qui domine stochastiquement le champ aléatoire $\mathbf{B}_{(16,m)} \cup \mathbf{S}_m$. Par ailleurs, il sera pratique d'observer $\mathbf{B}'_{(16,m)}$ comme un modèle booléen discret (les rayons sont indépendants et identiquement distribués) sur le réseau \mathbf{Z}^2 . Précisément, on définit :

$$\forall u \in \mathbf{Z}^2, R'_{(16,m)}(u) = \max(R_{(16,m)}(u), \mathbf{1}_{\{u \in \mathbf{G}_m\}}), \quad (\text{III.1.23})$$

où $R_{(16,m)}(z)$ est le rayon défini dans la partie **Pollution des segments rapides**. Le modèle booléen $\mathbf{B}'_{(16,m)}$ s'écrit alors de la manière suivante

$$\mathbf{B}'_{(16,m)} = \bigcup_{u \in \mathbf{Z}^2} B_{\|\cdot\|_\infty}(u, R'_{(16,m)}(u)).$$

Comme dans la Définition III.1.11, les boules sont considérées ouvertes. Il est important d'observer que les variables $(R'_m(u))_{u \in \mathbf{Z}^2}$ sont indépendantes et identiquement distribuées. Le résultat principal de cette partie peut être énoncé :

Proposition III.1.22. *On suppose qu'il existe un réel strictement positif $s > 0$ tel que $\mathbf{E}_\rho(\exp(\mathbf{V}^s)) < +\infty$. Alors il existe un entier $m_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $m \geq m_0$,*

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}'_{(16,m)} \text{ ne percole pas}) = 1.$$

On précise ici que la percolation du champ de site $\mathbf{B}'_{(16,m)}$ correspond à l'existence d'une composante connexe infinie de sommets pour la norme l_∞ .

Puisque \mathbf{S}_m est dominé stochastiquement par \mathbf{G}_m , on déduit de la Proposition III.1.22 que

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}_{(16,m)} \cup \mathbf{S}_m \text{ ne percole pas}) = 1.$$

Rappelons que l'ensemble aléatoire $\mathbf{B}_{(16,m)} \cup \mathbf{S}_m$ correspond (à dilatation près), à la zone de pollution à laquelle on ajoute les sommets sur lesquels l'événement \mathcal{E}_m n'est pas vérifié.

Démonstration : (de la Proposition III.1.22.) Nous allons vérifier que :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbf{E} \left(\left(R'_{(16,m)}(0) \right)^2 \right) = 0, \quad (\text{III.1.24})$$

le résultat énoncé par la proposition sera alors obtenu comme conséquence d'une application discrète d'un résultat classique de percolation continue : l'existence d'intensité sous-critique pour le modèle Poisson booléen (Theorem 2.1 dans [10]).

Dans un premier temps, (III.1.23) nous donne :

$$\mathbf{E} \left(\left(R'_{(16,m)}(0) \right)^2 \right) \leq \mathbf{E} \left(\left(R_{(16,m)}(0) \right)^2 \right) + 2\mathbf{E} \left(R_{(16,m)}(0) \right) + f(p_m).$$

Par ailleurs, on a toujours $R_{(16,m)}(0) \leq R'_{(16,m)}(0)$. On obtient

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbf{E} \left(\left(R_{(16,m)}(0) \right)^2 \right) = 0 \iff \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbf{E} \left(\left(R'_{(16,m)}(0) \right)^2 \right) = 0,$$

puisque $f(p_m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$. Nous devons maintenant montrer que la quantité $\mathbf{E}(R_{(16,m)}(0)^2)$ tend vers 0 lorsque $m \rightarrow +\infty$. Pour commencer, on va majorer la probabilité $\mathbf{P}(R_{(16,m)}(0) = k)$. D'après la définition de $R_{(16,m)}$ donnée dans la partie **Pollution des segments rapides**, on a la majoration :

$$\mathbf{P} \left(R_{(16,m)}(0) = k \right) \leq \mathbf{P} \left(V_m^{\max}(0) \geq m \left(k - \frac{19}{2} \right) \right). \quad (\text{III.1.25})$$

On pose alors $q_{(m,k)} = m \left(k - \frac{19}{2} \right)$. Pour obtenir une majoration de $\mathbf{P} \left(V_m^{\max}(0) \geq q_{(m,k)} \right)$, nous étudions la fonction de survie de la variable aléatoire $V_m^{\max}(0)$. Vérifions que l'on a l'inégalité suivante :

$$\forall t \geq 0, \mathbf{P} \left(V_m^{\max}(0) \geq t \right) = 1 - e^{-zm^2 \mathbf{P}(\mathbf{V} \geq t)}. \quad (\text{III.1.26})$$

On prouve (III.1.26) en utilisant un conditionnement standard :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(V_m^{\max}(0) < t \right) &= \mathbf{P} \left(\forall x \in \mathbf{X}_{\left[\frac{-m}{2}, \frac{m}{2} \right]^2}, V_x < t \right) \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} \mathbf{P} \left(\forall x \in \mathbf{X}_{\left[\frac{-m}{2}, \frac{m}{2} \right]^2}; V_x < t \mid \#\mathbf{X}_{\left[\frac{-m}{2}, \frac{m}{2} \right]^2} = l \right) \mathbf{P} \left(\#\mathbf{X}_{\left[\frac{-m}{2}, \frac{m}{2} \right]^2} = l \right) \\ &= e^{-zm^2} \left(\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(\mathbf{P}(V_x < t) zm^2)^l}{l!} \right) \\ &= e^{-zm^2 \mathbf{P}(\mathbf{V} \geq t)}. \end{aligned}$$

On obtient (III.1.26) en considérant la probabilité de l'événement complémentaire.

La probabilité $\mathbf{P}(\mathbf{V} \geq t)$ peut être majorée par l'inégalité de Markov (on utilise ici le fait que $\mathbf{E}(\exp(\mathbf{V}^s)) < +\infty$) :

$$\mathbf{P}(\mathbf{V} \geq t) \leq \frac{\mathbf{E}(\exp(\mathbf{V}^s))}{\exp(t^s)}.$$

Il vient

$$\mathbf{P}(V_m^{\max}(0) \geq q_{(m,k)}) \leq 1 - \exp\left(\frac{-zm^2\mathbf{E}(\exp(\mathbf{V}^s))}{\exp(m^s(k - \frac{19}{2})^s)}\right). \quad (\text{III.1.27})$$

Pour alléger l'écriture des prochaines équations, on pose : $x_{(m,k)} = 1 - \exp\left(\frac{-zm^2\mathbf{E}(\exp(\mathbf{V}^s))}{\exp(m^s(k - \frac{19}{2})^s)}\right)$. D'après les équations (III.1.25) et (III.1.27), nous avons pour tout $m \in \mathbf{N}^*$:

$$\mathbf{E}\left((R_{(16,m)}(0))^2\right) \leq U_m + U'_m, \quad (\text{III.1.28})$$

où on a posé

$$U_m = \sum_{k=1}^9 \mathbf{P}(R_{(16,m)}(0) = k)k^2,$$

$$U'_m = \sum_{k=10}^{+\infty} x_{(m,k)}k^2 = \sum_{k=10}^{+\infty} \left(1 - \exp\left(\frac{-zm^2\mathbf{E}(\exp(\mathbf{V}^s))}{\exp(m^s(k - \frac{19}{2})^s)}\right)\right)k^2.$$

Pour conclure la preuve, nous vérifions que le terme de droite de (III.1.28) tend vers 0 quand $m \rightarrow +\infty$. Autrement dit, nous devons montrer que les suites $(U_m)_{m \geq 1}$ et $(U'_m)_{m \geq 1}$ tendent vers 0.

Pour prouver que la suite $(U_m)_{m \geq 1}$ tend vers 0, il suffit de vérifier que la suite de variables aléatoires $(R_{(16,m)}(0))_{m \geq 1}$ converge vers 0 en probabilité.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(R_{(16,m)}(0) \geq 1) &= \mathbf{P}(V_m^{\max}(0) \geq V_c(m)), \\ &= 1 - \exp(-zm^2\mathbf{P}(\mathbf{V} \geq V_c(m))), \\ &\leq 1 - \exp\left(\frac{-zm^2\mathbf{E}(\exp(\mathbf{V}^s))}{\exp(V_c(m)^s)}\right) \end{aligned}$$

Puisque $V_c(m) = \log(m^3)^{\frac{1}{s}}$, on vérifie facilement que $\frac{m^2}{\exp(V_c(m)^s)}$ tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$ (on rappelle que $V_c(m) = (\log(m^3))^{\frac{1}{s}}$). On obtient bien la convergence en probabilité souhaitée.

Pour vérifier que la suite $(U'_m)_{m \geq 1}$ tend vers 0, on commence par observer que pour tout $m \geq 1$, on a $U'_m < +\infty$. En effet, le terme de général de la série qui définit U'_m est équivalent (lorsque k tend vers $+\infty$) à $\frac{C_m k^2}{\exp(k^s)}$, où C_m est une constante qui ne dépend que de m .

On observe maintenant que pour tout entier $k \geq 10$, la suite $(x_{(m,k)})_{m \geq 1}$ décroît vers 0. La suite $(U_m)_{m \geq 1}$ est alors une suite décroissante et positive de nombres réels, elle est donc convergente. Pour un réel $\delta > 0$, il existe $k_\delta \geq 10$ et $m_0(\delta) \in \mathbf{N}^*$ tels que

$$\begin{aligned} \forall m \geq 1, \quad \sum_{k=k_\delta}^{+\infty} x_{(m,k)}k^2 &\leq \frac{\delta}{2} \\ \forall m \geq m_0(\delta), \quad \sum_{k=10}^{k_\delta} x_{(m,k)}k^2 &\leq \frac{\delta}{2}, \\ \text{Finalement : } \forall m \geq m_0(\delta), \quad \sum_{k=10}^{+\infty} x_{(m,k)}k^2 &\leq \delta. \end{aligned}$$

On a donc bien montré que la suite $(U'_m)_{m \geq 1}$ tend vers 0, la proposition est bien démontrée. \square

La prochaine partie montre que les résultats énoncés par les Propositions III.1.14 et III.1.22 forcent toutes les éventuelles branches infinies à contenir une infinité de almost looping points de mêmes paramètres.

Existence d'une infinité de almost looping points

On rappelle que l'on a défini γ comme le point typique aléatoire $\gamma = (0, \Theta, \mathbf{V})$, où Θ est une variable aléatoire uniforme sur $[0, 2\pi]$ et \mathbf{V} est une variable aléatoire distribuée par ρ .

Proposition III.1.23. *Si la probabilité $\mathbf{P}(\#\text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) = +\infty)$ est strictement positive, alors il existe des paramètres (r, R, W, K, A) tels que :*

$$\mathbf{P}(\#\{x \in \text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) ; x \text{ est un } (r, R, W, K, A)\text{-almost looping point de } \mathbf{X}_\gamma\} = +\infty) > 0. \quad (\text{III.1.29})$$

Démonstration : (de la Proposition III.1.23.) On commence par modifier légèrement la suite d'événements $(\mathcal{E}_m)_{m \geq 1}$ construite dans la preuve de la Proposition III.1.14. Il existe une suite d'entiers $(K_m)_{m \geq 1}$ et une suite de nombres réels strictement positifs $(\delta_m)_{m \geq 1}$ tels que l'événement

$$\mathcal{E}'_m = \mathcal{E}_m \cap \{\forall x \in \mathbf{X}_{\text{Hex}^{2m}(0)}, \text{minrad}(\mathcal{A}_x) > \delta_m\} \cap \{\#\mathbf{X}_{\text{Hex}^{4m}(0)} \leq K_m\} \quad (\text{III.1.30})$$

a toujours une probabilité tendant vers 1 quand m tend vers l'infini. D'après l'observation faite dans la Remarque III.1.21, l'événement \mathcal{E}'_m est encore dans la tribu $\mathcal{S}_{[-8m, 8m]^2}$ dès que $0 \in \mathbf{B}_{(16, m)}^c$. Ainsi, on peut appliquer le résultat d'absence de percolation de la Proposition III.1.22 en remplaçant \mathcal{E}_m par \mathcal{E}'_m .

On commence par démontrer le résultat suivant, qui est une conséquence directe des Propositions III.1.14 et III.1.22 :

Lemme III.1.24. *On suppose que $\mathbf{P}(\#\text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) = \infty) > 0$. Alors,*

$$\mathbf{P}(\#\{x \in \text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) ; x \text{ est un almost looping point de } \mathbf{X}_\gamma\} = \infty) > 0. \quad (\text{III.1.31})$$

Démonstration : (du Lemme III.1.24.) Dans toute la suite, on fixe un entier $m \geq m_0$ où m_0 est le seuil de percolation donné par la Proposition III.1.22 appliquée au nouvel événement \mathcal{E}'_m .

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}_{(16, m)} \cup \mathbf{S}_m \text{ ne percole pas}) = 1.$$

Pour conclure, il suffit d'observer que chaque branche infinie doit traverser une infinité de murailles bloquantes (une muraille bloquante est une structure du type $m\mathcal{W} \oplus \text{Hex}^{4m}(0)$ avec $\tau_{-mu}(\mathbf{X}) \in \mathcal{E}'_m, \forall u \in \mathcal{W}$). Cette observation s'obtient en conséquence du fait que chaque cluster de $\mathbf{B}_{(16, m)} \cup \mathbf{S}_m$ est fini (comme illustré sur la Figure III.7). La Proposition III.1.14 assure que chaque traversée de murailles bloquantes se paye par la visite d'un almost looping point. \square

Considérons un almost looping point $x = (\xi, \theta, V) \in \text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma)$ tel qu'il existe $u_x \in \mathbf{Z}^2$ tel que $\tau_{-mu_x}(\mathbf{X}) \in \mathcal{E}'_m$ et $[\xi, h_g(\mathbf{X}_\gamma, x)] \subset \text{Hex}^{2m}(mu_x)$. Il n'est pas difficile de contrôler que x est un $(5m, 6m, V_c(m), K_m, \cdot)$ -almost looping point. Précisément, nous avons :

- $\text{Hex}^{2m}(mu_x) \subset B(\xi, 5m)$, ce qui implique : $A_x \subset (B(\xi, 5m) \times [0, 2\pi] \times [0, V_c(m)])^3$.
- $B(\xi, 5m) \subset B(\xi, 6m) \subset \text{Hex}^{4m}(mu_x)$, alors $\#\mathbf{X}_{B(\xi, 6m)} \leq K_m$.

On va procéder de la même façon que dans le Lemme I.3.14. On considère un recouvrement du compact $(B(0, 5m) \times [0, 2\pi] \times [0, V_c(m)])^3$ par un nombre fini de boules ouvertes $\{\mathcal{K}_j, 1 \leq j \leq j(m)\}$ de rayons $\frac{\delta_m}{2}$. Le principe des tiroirs nous donne alors le résultat suivant, dont la preuve est rigoureusement identique à celle du Lemme I.3.14 :

Lemme III.1.25. *On suppose que $\mathbf{P}(\#\text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma) = \infty) > 0$. Alors il existe un indice $1 \leq j_0 \leq j(m)$ tel que*

$$\mathbf{P}\left(\#\{y \in \text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma); \tau_y(\mathcal{K}_{j_0}) \subset A_y\} = \infty\right) > 0 .$$

Nous sommes maintenant capables de conclure la preuve de la Proposition III.1.23. On se donne l'indice j_0 donné par le lemme précédent. Alors :

$$\mathbf{P}(\#\{x \in \text{For}(\mathbf{X}_\gamma, \gamma); x \text{ est un } (5m, 6m, V_c(m), K_m, \mathcal{K}_{j_0})\text{-almost looping point of } \mathbf{X}_\gamma\} = +\infty) > 0.$$

□

III.2 Le modèle Brownien

Nous étudions dans cette section le **POG** associé au modèle Brownien. La trajectoire des grains de ce modèle est beaucoup plus sinueuse et imprévisible. Lorsque nous avons construit les événements m -imperméables dans les modèles de segments, le caractère rectiligne de chaque trajectoire nous a permis d'édifier des obstacles infranchissables. Cette stratégie ne fonctionne plus pour le modèle Brownien, l'hypothèse Shield semble alors difficilement vérifiable. Néanmoins, comme pour le modèle des segments grandissants avec vitesse aléatoire, on pourrait définir un champ de pollution contrôlant à la fois les grains trop rapides et les grains trop oscillants. Nous pourrions édifier, dans le complémentaire de ce champ de pollution, des structures m -imperméable qui seraient efficaces pour tous les autres grains. La difficulté est qu'il ne paraît pas évident du tout que la probabilité d'être m -imperméable tende vers 1.

Le modèle Brownien vérifie en revanche l'hypothèse Loop pour l'entier $k = 2$. On peut ajouter des couples de browniens mutuellement arrêtés qui bloquent un grain sans modifier aucune autre arête du graphe (voir Figure III.11)

La préservation de cette hypothèse conforte l'idée d'une absence de percolation pour ce modèle. Par ailleurs, des simulations montrent que les grains sont assez rapidement stoppés. Comme pour le modèle Lilypond, on trouve des composantes connexes formées par un faible nombre de grains, cela pourrait être dû au fait que les trajectoires du brownien ont tendance à faire des tours sur elles mêmes et occupent un espace comparable à celui du disque.

Conjecture III.2.1. *Le modèle Brownien ne percole pas.*

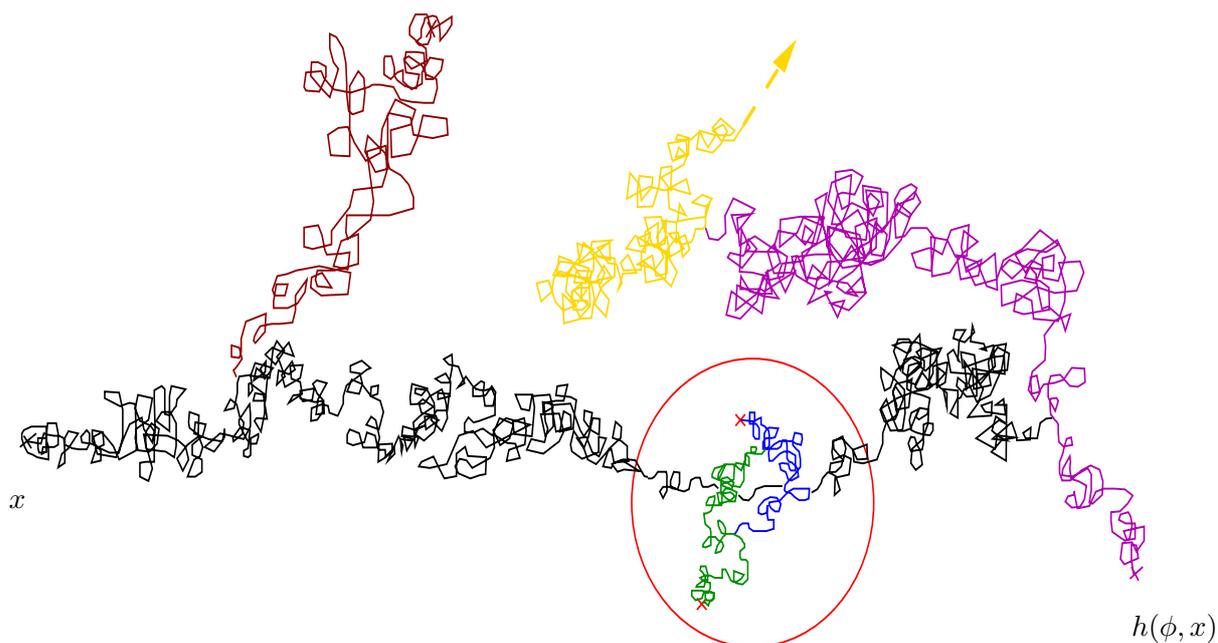


FIGURE III.11 – Sur cette figure, on a représenté quatre grains d’une configuration ϕ : ils apparaissent en noir, jaune, violet et rouge bordeaux. Comme sur la Figure III.2, on ajoute, dans une boule suffisamment petite, un couple de mouvements browniens mutuellement stoppés (le grain vert et le grain bleu) qui bloque la route du brownien issu de x . Aucun autre grain que celui partant de x n’est perturbé par l’ajout de cette boucle. Les trois items de l’hypothèse Loop sont donc bien vérifiés.

III.3 Perspectives

La démonstration de l’absence de percolation du modèle Brownien représente un premier projet de recherche attrayant qui pourrait offrir des méthodes différentes de celles utilisées pour les modèles de segments. En particulier, la trajectoire du mouvement Brownien se construit avec beaucoup plus de données aléatoires que celles d’un segment grandissant (deux données aléatoires suffisent ici : orientation et vitesse). L’étude des composantes connexes du modèle Brownien s’effectuera sans doute à l’aide d’outils probabilistes (propriété de Markov forte, loi des oscillations, etc.) d’avantage que par des observations géométriques déterministes comme celles effectuées à l’aide d’hexagones pour le modèle de segments. La démonstration de l’absence de percolation du modèle brownien pourrait fournir certains outils importants en vue de l’écriture d’un théorème général d’absence de percolation pour les modèles germes grains arrêtés.

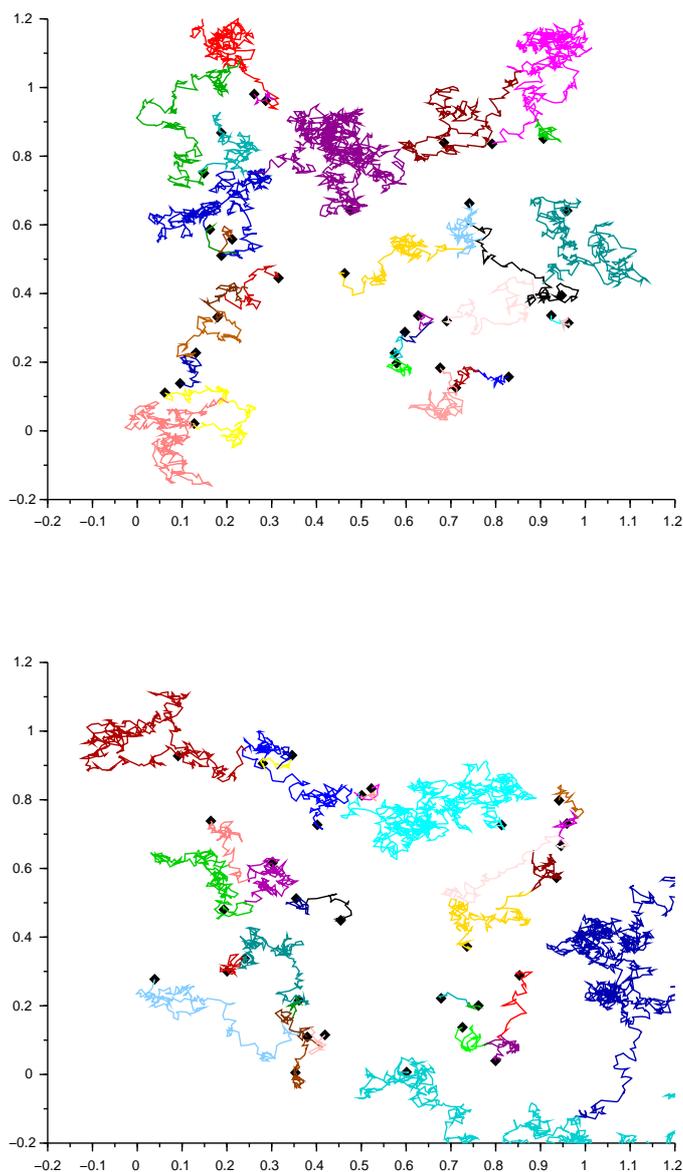


FIGURE III.12 – On a simulé un processus ponctuel de Poisson d'intensité $30\lambda_2$ dans chacune des deux fenêtres ci-dessus. Sur chacune des deux simulations, tous les grains sont stoppés, à l'exception du grain bleu turquoise en bas de la deuxième image. Par ailleurs, chacune des deux simulations compte au moins 6 composantes connexes. Ces deux observations confortent la conjecture d'absence de percolation du modèle Brownien.

Par ailleurs, la condition $\mathbf{E}(\exp(\mathbf{V}^s)) < +\infty$ pour l'absence de percolation du modèle des segments n'est peut être pas optimale et pourrait être relaxer. La stratégie utilisée dans la preuve du Théorème III.1.10 centrée sur le contrôle des grains polluants, peut sans doute être employée à d'autres modèles de **POG** : nous évoquons le problème d'absence de percolation pour les marches au $(p_k)_{k \geq 1}$ plus proches voisins lorsque le support n'est pas compact. De la même façon que pour le modèle des segments, on pourrait considérer qu'un point marqué pollue lorsque sa marque dépasse un certain seuil k_0 et implique donc une connexion à un point pouvant être très éloigné. Par ailleurs, la vitesse de diffusion d'un brownien grandissant satisfait cette condition d'existence de moment exponentiel, certaines technique employées dans la preuve du Théorème III.1.10 pourraient alors rester efficace pour ce modèle.

Dans cette thèse, les grains des modèles que nous considérons ont une structure particulière (collection de branches), il serait intéressant d'élargir la définition de modèles germes grains pour y inclure les modèles de corps convexes grandissants (voir par exemple [18]). Bien entendu, le théorème d'existence devrait être reformulé.

Bibliographie

- [1] K.B. Athreya and P.E Ney. *Branching processes*. Courier Corporation, 2004.
- [2] F. Baccelli and P. Brémaud. *Elements of queueing theory : Palm Martingale calculus and stochastic recurrences*, volume 26. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] B. Bollobás. Random graphs. In *Modern Graph Theory*, pages 215–252. Springer, 1998.
- [4] N. Bonichon and J.-F. Marckert. Asymptotics of geometrical navigation on a random set of points in the plane. *Advances in Applied Probability*, 43(4) :899–942, 2011.
- [5] S.N. Chiu, D. Stoyan, W.S. Kendall, and J. Mecke. *Stochastic geometry and its applications*. John Wiley & Sons, 2013.
- [6] D. Coupier and V. C. Tran. The 2D-directed spanning forest is almost surely a tree. *Random Structures Algorithms*, 42(1) :59–72, 2013.
- [7] D. Daley, S. Ebert, and G. Last. Two lilypond systems of finite line-segments. *To appear in Probability and Mathematical Statistics*, 2014.
- [8] D. Daley and G. Last. Descending chains, the lilypond model, and mutual-nearest-neighbour matching. *Advances in applied probability*, pages 604–628, 2005.
- [9] D. Daley and D. Vere-Jones. *An introduction to the theory of point processes : volume II : general theory and structure*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [10] J-B. Gouéré. Subcritical regimes in the poisson boolean model of continuum percolation. *The Annals of Probability*, pages 1209–1220, 2008.
- [11] G. Grimmett. Percolation, volume 321 of *grundlehren der mathematischen wissenschaften*, 1999.
- [12] O. Häggström and R. Meester. Nearest neighbor and hard sphere models in continuum percolation. *Random Structures & Algorithms*, 9(3) :295–315, 1996.
- [13] P. Hall. On continuum percolation. *The Annals of Probability*, pages 1250–1266, 1985.
- [14] M. Heveling and G. Last. Existence, uniqueness, and algorithmic computation of general lilypond systems. *Random Structures & Algorithms*, 29(3) :338–350, 2006.
- [15] C. Hirsch. On the absence of percolation in a line-segment based lilypond model. *Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 52(1) :127–145, 2016.
- [16] A. Holroyd and Y. Peres. Trees and matchings from point processes. *Electronic communications in probability*, 8 :17–27, 2003.

- [17] H. Kesten. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $1/2$. *Communications in mathematical physics*, 74(1) :41–59, 1980.
- [18] G. Last and S. Ebert. On a class of growth-maximal hard-core processes. *Stochastic Models*, 31 :153–184, 2013.
- [19] G. Last and M. Penrose. Percolation and limit theory for the poisson lilypond model. *Random Structures & Algorithms*, 42(2) :226–249, 2013.
- [20] G. Last and H. Thorisson. Invariant transports of stationary random measures and mass-stationarity. *The Annals of Probability*, pages 790–813, 2009.
- [21] T. Liggett. *Interacting particle systems*, volume 276. Springer Science & Business Media, 2012.
- [22] T. Liggett, R. Schonmann, and A. Stacey. Domination by product measures. *The Annals of Probability*, 25(1) :71–95, 1997.
- [23] R. Meester and R. Roy. *Continuum percolation*, volume 119. Cambridge University Press, 1996.
- [24] M. Penrose. *Random geometric graphs*, volume 5 of *Oxford Studies in Probability*. Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [25] T. Schreiber and N. Soja. Limit theory for planar gilbert tessellations. *Probab. Math. Statist*, 2010.