École doctorale n° 072 : Sciences Pour l'Ingénieur

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

Université Lille 1

présentée et soutenue publiquement par

Jacques DARNÉ

le 20 mars 2018

Autour du problème d'Andreadakis

Directeur de thèse : **Antoine TOUZÉ**
Co-encadrant de thèse : **Aurélien DJAMENT**

Jury

M. MASSUYEAU Gwénaël,	Professeur, Dijon	Rapporteur
M. SATOH Takao,	Associate Professor, Tokyo	Rapporteur
Mme LIVERNET Muriel,	Professeur, Paris	Examinateur
M. VIRELIZIER Alexis,	Professeur, Lille	Examinateur
M. TOUZÉ Antoine,	Professeur, Lille	Directeur
M. DJAMENT Aurélien,	Chargé de Recherches, Nantes	Directeur

Université Lille 1
Laboratoire Paul Painlevé
UMR CNRS 8524, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

THESE

Résumé/Abstract

Autour du problème d'Andreadakis

Soit F_n le groupe libre de rang n. On considère le groupe IA_n des automorphismes de F_n qui agissent trivialement sur son abélianisé. Deux filtrations canoniques de IA_n sont définies : la première est sa suite centrale descendante Γ_* ; la seconde est la filtration d'Andreadakis $\mathcal{A}_*$, définie à partir de l'action sur F_n. Le problème d'Andreadakis est l'étude de la différence entre ces deux filtrations. Après avoir mis en place un cadre général pour l'étude de telles filtrations et des filtrations sur les algèbres de groupes qui leur sont associées, nous étudions différentes versions de ce problème. En particulier, nous examinons sa restriction à certains sous-groupes de IA_n : nous montrons que les deux filtrations coïncident si on les restreint aux groupes triangulaires et aux groupes de tresses. Nous examinons aussi le problème stable : nous montrons que le morphisme canonique entre les algèbres de Lie associées aux filtrations est surjectif si n est assez grand devant le degré considéré. Nous étudions également une version p-restreinte du problème, calculant au passage l'algèbre de Lie du groupe de congruence. Les méthodes employées sont essentiellement d'ordre algébrique. Elles proviennent de la théorie combinatoire des groupes ainsi que d'outils développés pour l'étude des groupes de difféotopie, et sont souvent reformulées avec un langage catégorique approprié.

On the Andreadakis problem

Let F_n be the free group on n generators. Consider the group IA_n of automorpisms of F_n acting trivially on its abelianization. There are two canonical filtrations on IA_n : the first one is its lower central series Γ_* ; the second one is the Andreadakis filtration $\mathcal{A}_*$, defined from the action on F_n. Andreadakis asked if and how these filtrations were different. We begin by describing a framework adapted to the study of such filtrations and their counterparts on group algebras. We then study several versions of the problem. In particular, we look at its restriction to some subgroups of IA_n : we show that the two filtration coïncide when restricted to the triangular subroups and to braid groups. We also consider a stable version of the problem : we establish that the canonical morphism between the associated graded Lie rings is surjective when n is big enough compared to a fixed degree. We also investigate a p-restricted version of the Andreadakis problem, and provide a calculation of the Lie algebra of the classical congruence group. Our methods are algebraic in nature. The tools come from combinatorial group theory and the study of mapping class groups ; we often introduce some categorical langage to reformulate them.

Remerciements

Je voudrais remercier ici toutes les personnes qui m'ont écouté, soutenu, aidé, pendant toute la durée de cette grande aventure qu'est la thèse.

Merci d'abord à mes directeurs de thèse, Aurélien Djament et Antoine Touzé. Merci pour les longues discussions mathématiques, les encouragements, les conseils, les remarques, les nombreuses relecture de ma prose parfois hésitante. Merci pour tout le temps que vous avez su m'accorder, pour la patience dont vous avez su faire preuve, pour tout ce que vous m'avez apporté. Je dois dire que je n'aurais pu rêver meilleur encadrement et, pour cela : Merci ! J'espère d'ailleurs que notre collaboration fructueuse ne s'arrêtera pas là, et que nous aurons l'occasion de travailler ensemble dans les années à venir.

Merci à Gwenaël Massuyeau et Takao Satoh d'avoir accepté de prendre le temps de relire mon travail. Leurs retours m'ont été précieux, et ont grandement contribué à aboutir à la version finale de cette thèse.

Merci aux autres membres du jury, Muriel Livernet et Alexis Virelizier, d'avoir accepté de venir m'écouter parler de mes travaux.

*****

Ces années de thèses au laboratoire Paul Painlevé ont été l'occasion de belles rencontres, et de bons moments passés devant un exposé, autour d'un repas ou autour d'un incontournable café.

Je tiens à remercier les membres de mon équipe pour les vendredi après-midi passés à travailler dans la bonne humeur : merci à Benoît, Daniel, Ivo, Alexis, Antoine, Hongyi, Huafeng et les visiteurs plus occasionnels.

Merci aussi à tous les responsables des tâches administratives, sans qui le laboratoire ne pourrait fonctionner ; merci en particulier à Sabine pour sa disponibilité et sa bonne humeur, merci à Soledad, Fatima, Ludivine, Véronique, Anaïs. Merci également aux bibliothécaires, sans qui ce travail n'aurait pas été possible.

Merci à tous mes collègues doctorants et post-doctorants dont la compagnie a égayé ces années de thèse. Merci à ceux qui m'ont accueilli en première année, merci particulièrement à Najib qui m'a précédé sur la même voie, merci à Pierre-Louis, à Landry, à Claire. Merci à ceux qui ont accompagné ma deuxième année, merci à Hana et James pour les longues pauses dans le bureau du deuxième étage, les échanges littéraire ou mathématiques et une joie de vivre communicative, merci à Alexandre pour la musique et les lettres, merci à Antoine, Loïc, Stefana, Clément, Tonie, Hubert, Giulio, Mohammed, Antonietta, Pierre et tant d'autres... Merci, enfin, à mes collègues de bureau qui en ont fait un endroit chaleureux et convivial : merci à Meryem, à François, à Johanna, et à Octave.

*****

Ces trois années de thèse ont été aussi trois années passées au conservatoire, et si la musique a été plus d'une fois le refuge des mauvais jours, plus important encore a été le soutien de mes collègues et amis musiciens qui m'ont accueilli et écouté, en particulier pendant la difficile phase de rédaction. Ils sont trop nombreux pour que je les cite tous ici ; je les remercie tous du fond du cœur.

Je voudrais aussi remercier tous mes amis d'ici ou d'ailleurs et, plus généralement, tous ceux dont la rencontre a contribué, un tant soit peu, à faire de moi ce que je suis aujourd'hui ; tous ont participé à cet ouvrage, sans forcément le savoir.

Merci, enfin, à mes parents, mes frères et sœurs, et toute ma famille, qui me supportent depuis bien longtemps, pour leur indéfectible soutien.

Table des matières

Introduction

Soit F_n le groupe libre sur n générateurs. Pour étudier la structure du groupe $\mathrm{Aut}(F_n)$ de ses automorphismes, on peut d'abord considérer l'action des automorphismes sur $F_n^{ab} \cong \mathbb{Z}^n$, c'est-à-dire considérer la projection de $\mathrm{Aut}(F_n)$ dans $GL_n(\mathbb{Z})$. Puis l'on peut mettre de côté cette partie linéaire, et s'intéresser à la structure du noyau IA_n de cette projection : IA_n est le sous-groupe des automorphismes agissant trivialement sur $\mathbb{Z}^n$.

On connaît un ensemble fini de générateurs de IA_n depuis longtemps [Nie24] – voir aussi [BBM07, 5.6]. Ce sont :

$$K_{ij} : x_t \longmapsto \begin{cases} x_j x_i x_j^{-1} & \text{si } t = i \\ x_t & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{e} \quad K_{ijk} : x_t \longmapsto \begin{cases} [x_j, x_k] x_i & \text{si } t = i \\ x_t & \text{sinon.} \end{cases} \qquad (0.0.0.1)$$

Néanmoins, la structure de IA_n reste très mal connue. Par exemple, IA_3 n'est pas de présentation finie [KM97], et on ne sait pas si IA_n l'est pour $n > 3$.

L'une des motivations pour l'étude de ces groupes provient de leurs liens avec la géométrie des surfaces : IA_n est l'analogue du *sous-groupe de Torelli* du groupe de difféotopie (connu dans la littérature anglophone sous le nom de *mapping class group*). Précisément, si Σ_g^1 est une surface compacte orientable de genre g avec une composante de bord, alors son groupe de difféotopie $\mathcal{M}_g^1 = \pi_0 \,\mathrm{Diff}_\partial^+(\Sigma_g^1)$ agit sur le groupe fondamental $\pi_1(\Sigma_g^1) \cong F_{2g}$, et cette action est fidèle (par un résultat classique dû à Dehn, Nielsen et Baer). Ainsi, $\mathcal{M}_g^1$ se plonge dans $\mathrm{Aut}(F_{2g})$. Le *sous-groupe de Torelli* de $\mathcal{M}_g^1$ est le sous-groupe des automorphismes agissant trivialement sur $H_1(\Sigma_g^1) \cong \pi_1(\Sigma_g^1)^{ab}$: c'est exactement $\mathcal{M}_g^1 \cap IA_{2g}$. Avec ce point de vue, la décomposition de $\mathrm{Aut}(F_n)$ en une extension de $GL_n(\mathbb{Z})$ par IA_n décrite ci-dessus est analogue à la décomposition du groupe de difféotopie en une extension du groupe symplectique par le sous-groupe de Torelli. Ces décompositions peuvent aussi être reliées à la décomposition du groupe de tresses d'Artin (qui se plonge dans $\mathrm{Aut}(F_n)$ par l'action d'Artin) en une extension du groupe symétrique par le groupe de tresses pures.

Depuis les travaux de Nielsen et Magnus dans les années 1920, les groupes d'automorphismes des groupes libres ont été beaucoup étudiés, avec différents points de vue. Par exemple, le groupe $\mathrm{Out}(F_n)$ agit sur un espace de module de graphes, appelé *espace extérieur* (*outer space*). Cet espace fut introduit par Culler et Vogtmann dans [CV86], et beaucoup étudié par la suite, pour obtenir de nombreux renseignements sur $\mathrm{Out}(F_n)$ (voir par exemple [BBM07]). L'homologie stable de ces groupes a aussi été un sujet d'étude fructueux. L'homologie stable à coefficients constants des $\mathrm{Aut}(F_n)$ fut déterminée par Galatius dans [Gal11]. Un résultat général de stabilité est démontré dans [RWW17], englobant plusieurs résultats plus anciens (voir par exemple [HV98]). Des calculs d'homologie stable à coefficients tordus furent obtenus dans [DV15] ou plus récemment dans [Dja16a]. Enfin, citons deux autres résultats récents concernant ces groupes : une *L-présentation finie* de IA_n est donnée dans [DP16] ; chaque cran de la suite centrale descendante de IA_n est de type fini pour n assez grand [EH17, CP17].

Problème d'Andreadakis : présentation

Soit $F_n = \Gamma_1(F_n) \supseteq \Gamma_2(F_n) \supseteq \cdots$ la suite centrale descendante du groupe libre F_n. À partir de cette filtration, on peut définir la *filtration d'Andreadakis* :

$$IA_n = \mathcal{A}_1 \supseteq \mathcal{A}_2 \supseteq \cdots$$

On définit $\mathcal{A}_j$ comme le sous-groupe des automorphismes qui induisent l'identité sur $F_n/\Gamma_{j+1}(F_n)$ (qui est le groupe nilpotent de classe j libre sur n générateurs). Cette filtration est une *N-série* (elle est *fortement centrale*), c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall i, j,\ [\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j] \subseteq \mathcal{A}_{i+j}.$$

En particulier, elle contient la N-série minimale sur IA_n, qui est sa suite centrale descendante : pour tout k, $\mathcal{A}_k \supseteq \Gamma_k(IA_n)$. La question de la comparaison de ces deux filtrations se pose donc naturellement ; c'est le *problème d'Andreadakis* :

Problème 1 (Andreadakis)**.** *Quelle est la différence entre $\mathcal{A}_*$ et $\Gamma_*(IA_n)$?*

Puisque les deux filtrations sont des N-séries, les gradués associés sont munis d'une structure d'anneau de Lie (*i.e.* de $\mathbb{Z}$-algèbres de Lie) : le commutateur $(x, y) \mapsto [x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ induit un crochet de Lie sur le gradué (qui est un groupe abélien). L'inclusion $i : \Gamma_*(IA_n) \subseteq \mathcal{A}_*$ induit un morphisme d'anneaux de Lie :

$$i_* : \mathcal{L}(\Gamma_*(IA_n)) = \bigoplus \Gamma_j(IA_n)/\Gamma_{j+1}(IA_n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A}_*) = \bigoplus \mathcal{A}_j/\mathcal{A}_{j+1}. \tag{0.0.0.2}$$

On peut donc reformuler le problème précédent en une question équivalente :

Problème 1 (Andreadakis)**.** *À quel point le morphisme* (0.0.0.2) *ressemble-t-il à un isomorphisme ?*

Andreadakis conjectura que les deux filtrations coïncidaient [And65, p. 253]. Dans [Bar13], Bartholdi montra, à l'aide de l'outil informatique, que ce n'était pas le cas. Il essaya de prouver que les deux filtrations coïncidaient à indice fini près, mais dans l'erratum [Bar16], il montra qu'en fait même cette forme plus faible est fausse. La preuve de cette dernière assertion repose sur la L-présentation de IA_n donnée dans [DP16], à laquel il applique les méthodes algorithmiques décrites dans [BEH08] pour calculer (à l'aide du logiciel GAP) les premiers crans des gradués des deux filtrations.

Dans cette thèse, nous étudions principalement deux variantes de ce problème : le problème d'Andreadakis pour certains sous-groupes de IA_n, et le problème d'Andreadakis stable.

Problème d'Andreadakis pour les sous-groupes de IA_n

Si G est un sous-groupe de IA_n, on peut prendre l'intersection des deux filtrations $\Gamma_*(IA_n)$ et $\mathcal{A}_*$ avec G, et se poser la question de l'égalité entre les filtrations obtenues. De plus, comme ces deux filtrations sont des N-séries, elles contiennent la suite centrale descendante de G, qui est la plus petite N-série sur G :

$$\Gamma_*(G) \subseteq \Gamma_*(IA_n) \cap G \subseteq \mathcal{A}_* \cap G.$$

On peut alors se poser la question suivante :

Problème 2 (Problème d'Andreadakis pour un sous-groupe de IA_n). *Pour quels sous-groupes G de IA_n ces inclusions sont-elles des égalités ?*

Pour les sous-groupes triangulaires et les groupes de tresse pures (plongés par l'action d'Artin), nous obtenons l'égalité. L'énoncé pour les groupes triangulaires a été obtenu indépendamment par Satoh [Sat17].

Théorème 4.0.4. . *Pour $G = IA_n^+$ et $G = P_n$, les inclusions précédentes sont des égalités :*

$$\Gamma_*(G) = \Gamma_*(IA_n) \cap G = \mathcal{A}_* \cap G.$$

Problème d'Andreadakis stable

On peut se poser la question d'Andreadakis dans le domaine stable, c'est-à-dire quand le rang n de F_n est assez grand devant le cran de la filtration qu'on considère :

Problème 3 (Andreadakis - version stable). *Quelle est la différence entre $\mathcal{A}_k(F_n)$ et $\Gamma_k(IA_n)$ pour $n \gg k$?*

Comme ci-dessus, on peut énoncer une version équivalente en termes d'anneaux de Lie :

Problème 3 (Andreadakis - version stable). *À quel point le morphisme*

$$i_* : \mathcal{L}_k(\Gamma_*(IA_n)) = \Gamma_k(IA_n)/\Gamma_{k+1}(IA_n) \longrightarrow \mathcal{L}_k(\mathcal{A}_*) = \mathcal{A}_k/\mathcal{A}_{k+1} \tag{0.0.0.3}$$

ressemble-t-il à un isomorphisme quand $n \gg k$? Peut-on calculer son noyau et son conoyau ?

Nous obtenons la réponse partielle suivante, qui a été obtenue rationnellement par Massuyeau et Sakasai [MS17, th. 5.1] :

Théorème 5.5.7 (Surjectivité stable). *Quand $n \geqslant k+2$, le morphisme (0.0.0.3) est surjectif.*

Problème d'Andreadakis p-restreint

On peut considérer une variante p-restreinte de la construction d'Andreadakis. Précisément, pour tout groupe G, on peut définir sa *suite centrale descendante p-restreinte* $\Gamma_*^{[p]}G$, qui est la N-série minimale sur G qui est *p-restreinte*, au sens où :

$$\forall i,\ \left(\Gamma_i^{[p]}G\right)^p \subseteq \Gamma_{ip}^{[p]}G.$$

À partir de la la suite centrale descendante p-restreinte $\Gamma_*^{[p]}(F_n)$ du groupe libre, on peut définir la *filtration d'Andreadakis p-restreinte* $\mathcal{A}_*^{[p]}$ sur le sous-groupe $IA_n^{[p]}$ des automorphismes agissant trivialement sur $F_n^{ab} \otimes \mathbb{F}_p \cong \mathbb{F}_p^n$:

$$IA_n^{[p]} = \mathcal{A}_1^{[p]} \supseteq \mathcal{A}_2^{[p]} \supseteq \cdots$$

On définit $\mathcal{A}_j^{[p]}$ comme le sous-groupe des automorphismes qui induisent l'identité de $F_n/\Gamma_{j+1}^{[p]}(F_n)$. On montre que $\mathcal{A}_*^{[p]}$ est une N-série p-restreinte (proposition 2.5.4) d'où l'inclusion :

$$\Gamma_*^{[p]}\left(IA_n^{[p]}\right) \subseteq \mathcal{A}_*^{[p]}.$$

Par conséquent, on peut considérer une version p-restreinte du problème d'Andreadakis :

Problème 4 (Andreadakis – version p-restreinte)**.** *Quelle est la différence entre les suites fortement centrales p-restreintes $\mathcal{A}_*^{[p]}$ et $\Gamma_*^{[p]}(IA_n^{[p]})$?*

En adaptant les méthodes utilisées dans le cas classique, on peut étudier la version stable de ce problème. On n'a cette fois pas surjectivité stable, mais on donne les bornes suivantes sur le conoyau stable du morphisme induit par l'inclusion :

Proposition 5.6.6. *Soit n un entier. Considérons seulement les degrés $k \leqslant n-2$. Le conoyau du morphisme canonique*

$$i_* : \mathcal{L}\left(\Gamma_*^{[p]} IA_n^{[p]}\right) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}_*^{[p]})$$

est concentré en degrés $k = pl - 1$ et $k = pl$ (pour $l \geqslant 1$).

Plan détaillé de la thèse

La présente thèse est divisée en cinq chapitres. Le premier est une introduction générale à la théorie des N-séries, avec un point de vue catégorique. Le second est une étude des N-séries obtenues à partir de filtrations de l'algèbre de groupe. Le troisième examine ces constructions pour le groupe libre. Enfin, le quatrième examine le problème d'Andreadakis pour des sous-groupes de IA_n, tandis que le dernier examine la version stable du problème.

Chapitre 1

Le premier chapitre pose un cadre général pour l'étude des N-séries et des anneaux de Lie qui leur sont associées. On introduit une catégorie $\mathcal{SFC}$ des N-séries (ou *suites fortement centrales*). La définition catégorique d'une *action* d'un objet sur un autre peut s'appliquer dans ce contexte. Ceci nous permet de réinterpréter une ancienne construction de Kaloujnine (cf. le théorème 1.3.1) comme la construction d'actions universelles dans $\mathcal{SFC}$. De plus, la construction de l'anneau de Lie associé à une N-série s'interprète comme un foncteur $\mathcal{L}$ de $\mathcal{SFC}$ vers la catégorie des anneaux de Lie. Ce foncteur préserve les actions ; le *morphisme de Johnson* se généralise alors comme le morphisme universel associé à une action entre anneaux de Lie obtenue à partir d'une action dans $\mathcal{SFC}$.

La construction classique de Lazard est retrouvée comme un cas particulier de la construction de Kaloujnine (comme suggéré par [Laz54, rq. 3.4]). On obtient aussi des filtrations de groupes de congruence, et l'on montre que la filtration obtenue sur le groupe de congruence classique $\mathrm{GL}_n(q\mathbb{Z})$ coïncide stablement (pour $n \geqslant 5$) avec sa suite centrale descendante. Par conséquent, on peut généraliser le calcul de l'abélianisé [LS76, Th. 1.1] en un calcul de tout l'anneau de Lie :

Corollaire 1.4.5. *Pour $n \geqslant 5$ et $q \geqslant 3$, le morphisme canonique entre les anneaux de Lie (gradués, en degré au moins 1) est un isomorphisme :*

$$\mathcal{L}(GL_n(q\mathbb{Z})) \cong \mathfrak{sl}_n(\mathbb{Z}/q)[t],$$

où t est de degré 1, et le crochet de Lie de Mt^i et Nt^j est donné par $[M, N]t^{i+j}$.

On donne ensuite quelques résultats de comparaison entre certaines filtrations obtenues par la construction de Kaloujnine, et le chapitre s'achève sur la description d'un analogue du problème d'Andreadakis, modulo un entier q.

Chapitre 2

Le deuxième chapitre s'ouvre sur une interprétation de la construction de Lazard comme un relèvement de l'adjonction de l'algèbre de groupe en contexte filtré. Précisément, si G_* est une N-série, on peut définir une filtration $\mathfrak{a}_*^{\Bbbk}(G_*)$ de l'algèbre de groupe $\Bbbk G$. Réciproquement, une filtration d'algèbre A_* donne une N-série $A_*^\times := A^\times \cap (1+A_*)$. Ces constructions réciproques définissent une adjonction :

$$\mathcal{SFC} \underset{(-)_*^\times}{\overset{\mathfrak{a}_*}{\rightleftarrows}} f\mathcal{A}lg,$$

On peut alors se demander pour quelles N-séries l'inclusion $G_* \subseteq G \cap (1 + \mathfrak{a}_*^{\Bbbk}(G_*))$ est une égalité. Une réponse partielle à ce problème est donnée par le théorème de clôture :

Théorème 2.1.8 (Théorème de clôture)**.** *Supposons que $\Bbbk$ soit un anneau de caractéristique 0 (resp. p premier), et G_* une filtration fortement centrale sans torsion (resp. p-restreinte). Sous ces hypothèses :*

$$G_* = \overline{G_*} \quad \left(= G \cap (1 + \mathfrak{a}_*^{\Bbbk}(G_*))\right).$$

On donne des éléments de preuve du théorème, qui a pour corollaire une description de l'opération de clôture $G_* \mapsto \overline{G_*}$ sur un corps de caractéristique zéro ou un anneau de caractéristique p :

Corollaire 2.1.9. *Si $\Bbbk$ est un corps de caractéristique 0 (resp. un anneau de caractéristique première p), $\overline{G_*}$ est la plus petite suite fortement centrale sans torsion (resp. p-restreinte) contenant G_*.*

Le reste du chapitre donne une description explicite de ces opérations de clôture, ce qui permet de retrouver la description classique des groupes de dimension (propositions 2.1.12 et 2.1.14), ainsi que celle des groupes de dimension de Lie (propositions 2.A.10 et 2.A.11). Cette dernière description nécessite la *formule de Sandling* (proposition 2.A.7), que l'on retrouve par des méthodes catégoriques.

On introduit également une version *p-restreinte* du problème d'Andreadakis (qui est à distinguer du problème *modulo p* introduit au chapitre 1). Le fait que ce problème est bien posé découle de [HM17, prop. 8.5]. On démontre en fait un peu plus, ce qui répond aux question posées dans [HM17] à ce sujet.

Chapitre 3

Le troisième chapitre introduit l'algèbre de Magnus, afin de démontrer la liberté de l'anneau de Lie du groupe libre. On y retrouve que F_n est résiduellement nilpotent, puis l'on utilise le morphisme de Johnson pour calculer l'abélianisé de IA_n. Après tous ces rappels classiques, on rappelle le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, qui nous permet de déduire du théorème de clôture une version du théorème de Quillen sur $\mathbb{Z}$:

Théorème 3.3.10. *Soit $\Bbbk$ un anneau de caractéristique 0, et G_* une suite fortement centrale sans torsion sur un groupe de type fini $G = G_1$. Alors le morphisme canonique :*

$$\mathcal{U}(\mathcal{L}(G_*) \otimes \Bbbk) \longrightarrow \mathrm{gr}(\mathfrak{a}_*^{\Bbbk}(G_*))$$

entre l'algèbre enveloppante de $\mathcal{L}(G_*) \otimes \Bbbk$ et le gradué de l'algèbre de groupe pour la filtration $\mathfrak{a}_*^{\Bbbk}(G_*)$ est un isomorphisme.

Le chapitre s'achève sur quelques problèmes et conjectures autour des calculs possibles de l'anneau de Lie d'un groupe à partir d'une présentation du groupe.

Chapitre 4

Le quatrième chapitre étudie le problème d'Andreadakis pour les sous-groupes de IA_n. Une base ordonnée de F_n étant fixée, on introduit le sous-groupe des automorphismes triangulaires, qui sont ceux obtenus en faisant agir chaque générateur sur les suivants. On peut également plonger le groupe des tresses pures P_n dans IA_n par l'action d'Artin. Ces deux sous-groupes ont en commun de se décomposer en produits semi-directs itérés dont on comprend bien les facteurs. En utilisant cette décomposition, on peut décrire explicitement leur suite centrale descendante et leur algèbre de Lie. Cette description explicite rend aisée la comparaison avec la filtration d'Andreadakis, ce qui permet d'obtenir le résultat annoncé ci-dessus, qui englobe le résultat de [Sat17] :

Théorème 4.0.4. . *Pour $G = IA_n^+$ et $G = P_n$, les inclusions :*

$$\Gamma_*(G) \subseteq \Gamma_*(IA_n) \cap G \subseteq \mathcal{A}_* \cap G$$

sont des égalités.

On introduit également les *sous-groupes de McCool*, qui sont ceux qui transforment chaque élément de la base choisie en un de ses conjugués. Ces sous-groupes admettent une décomposition en produits semi-directs itérés, mais les morceaux en sont moins bien compris. Nous ne sommes pas parvenu à les décrire complètement, mais nous énonçons tout de même :

Conjecture 1. *Les sous-groupes de McCool $P\Sigma_n$ vérifient l'égalité d'Andreadakis :*

$$\Gamma_*(P\Sigma_n) = \Gamma_*(IA_n) \cap P\Sigma_n = \mathcal{A}_* \cap P\Sigma_n.$$

Chapitre 5

Le dernier chapitre étudie la version stable du problème d'Andreadakis :

Problème 3 (Andreadakis - version stable)**.** *À quel point le morphisme*

$$i_* : \mathcal{L}_k(\Gamma_*(IA_n)) = \Gamma_k(IA_n)/\Gamma_{k+1}(IA_n) \longrightarrow \mathcal{L}_k(\mathcal{A}_*) = \mathcal{A}_k/\mathcal{A}_{k+1} \tag{0.0.0.4}$$

ressemble-t-il à un isomorphisme quand $n \gg k$?

Notre résultat principal est la surjectivité stable :

Théorème 5.5.7 (Surjectivité stable)**.** *Quand $n \geqslant k+2$, le morphisme* (0.0.0.4) *est surjectif.*

Pour démontrer ce résultat, on a besoin d'introduire quelques outils de *calcul différentiel libre*. En particulier, on définit la matrice jacobienne Df d'un automorphisme f de F_n. L'application D est en fait une *dérivation* de $\mathrm{Aut}(F_n)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}F_n)$, qui envoie la filtration d'Andreadakis dans la filtration de congruence $\mathrm{GL}_n((IF_n)^*)$ (l'anneau de groupe $\mathbb{Z}F_n$ est filtré par les puissances de son idéal d'augmentation). On étudie alors les dérivations et les applications qu'elles induisent entre les anneaux de Lie associés aux N-séries qu'elles préservent. On déduit de cette étude que la *trace*, définie par $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(Df - \mathbb{1}_n)$, induit une application bien définie :

$$\mathrm{Tr} : \mathcal{L}(\mathcal{A}_*) \longrightarrow \mathrm{gr}(\mathbb{Z}F_n).$$

L'algèbre graduée $\mathrm{gr}(\mathbb{Z}F_n)$ est en fait l'algèbre tensorielle TV sur $V = F_n^{ab}$. Un résultat de [BLGM90] implique que la trace est à valeurs dans $[TV, TV]$. En étudiant les liens entre le calcul différentiel libre et le calcul différentiel dans TV, on montre que cette trace est exactement celle introduite par Morita [Mor93, Def. 6.4] : on en donne la description explicite en termes de la contraction utilisée par Satoh [Sat12].

En notant τ et τ' les morphismes de Johnson, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(IA_n) \arrow[d, "i_*"'] \arrow[dr, "\tau'"] & & \\
\mathcal{L}(\mathcal{A}_*) \arrow[r, hook, "\tau"] & \mathrm{Der}(\mathfrak{L}V) \arrow[r, "\mathrm{Tr}"] & TV.
\end{tikzcd}$$

Ceci donne les inclusions de sous-espaces de $\mathrm{Der}(\mathfrak{L}V)$:

$$\mathrm{Im}(\tau') \subseteq \tau\left(\mathcal{L}(\mathcal{A}_*)\right) \subseteq \mathrm{Tr}^{-1}([TV, TV]).$$

Les calculs de [Sat12] (qui marchent en fait sur $\mathbb{Z}$) impliquent que les sous-espaces $\mathrm{Im}(\tau')$ et $\mathrm{Tr}^{-1}([TV, TV])$ sont stablement égaux ; ces inclusions sont donc des égalités dans le domaine stable, ce qui implique la surjectivité stable de i_*.

Enfin, une adaptation de ces méthodes au cas p-restreint permet de montrer le résultat énoncé ci-dessus sur le conoyau du morphisme induit par l'inclusion :

Proposition 5.6.6. *Soit n un entier. Considérons seulement les degrés $k \leqslant n-2$. Le conoyau du morphisme canonique*

$$i_* : \mathcal{L}\left(\Gamma_*^{[p]} IA_n^{[p]}\right) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}_*^{[p]})$$

est concentré en degrés $k = pl - 1$ et $k = pl$ (pour $l \geqslant 1$).

Chapitre 1

Suites fortement centrales et algèbres de Lie

Sommaire

1.1 Notations et rappels

Dans toute la thèse, G désignera un groupe quelconque, et $\Bbbk$ un anneau commutatif unitaire. On note les actions par conjugaison de G sur lui-même par $x^y := y^{-1}xy$ (action à droite) et ${}^y x := yxy^{-1}$ (action à gauche). Le *commutateur* de deux éléments x et y de G est noté :

$$[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}.$$

Si A et B sont deux parties de G, on note $[A, B]$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs de la forme $[a, b]$ avec $(a, b) \in A \times B$. Si $\varphi : G \longrightarrow H$ est un morphisme de groupes, on a :

$$\forall x, y,\ \varphi([x, y]) = [\varphi x, \varphi y].$$

Par conséquent, si $\varphi(A) \subseteq A'$ et $\varphi(B) \subseteq B'$, alors $\varphi([A, B]) \subseteq [A', B']$. En appliquant ceci aux automorphismes de G donnés par la conjugaison (resp. à tous les automorphismes), on voit que si A et B sont des parties de G stables par conjugaison par G (resp. par tous les automorphismes de G), alors $[A, B]$ est un sous-groupe normal (resp. caractéristique) de G. Par exemple, $[G, G]$ est un sous-groupe caractéristique de G, appelé *sous-groupe dérivé*. Le quotient $G^{ab} := G/[G, G]$ est l'*abélianisé* de G : c'est son plus grand quotient abélien.

On peut en fait définir beaucoup d'autres sous-groupes caractéristiques de G de cette manière :

Définition 1.1.1. La *suite centrale descendante* de G, notée $\Gamma_*(G)$, ou simplement Γ_*, est la suite de sous-groupes de G donnée par :

$$\begin{cases} \Gamma_1 := G, \\ \Gamma_{k+1} := [G, \Gamma_k]. \end{cases}$$

Définition 1.1.2. Le groupe G est dit *nilpotent* si cette suite s'arrête, c'est-à-dire s'il existe un entier c tel que $\Gamma_{c+1}(G) = \{1\}$. Si c est minimal pour cette propriété, on dit que G est nilpotent *de classe c.*

Définition 1.1.3. Le groupe G est dit *résiduellement nilpotent* si sa suite centrale descendante est *séparante*, *i.e.* si :

$$\bigcap \Gamma_i(G) = \{1\}.$$

Les formules suivantes se vérifient aisément :

Proposition 1.1.4.
- $[x, x] = 1,$
- $[x, y]^{-1} = [y, x],$
- $[x, yz] = [x, y]\,({}^y[x, z])\,,$
- $[[x, y], {}^y z] \cdot [[y, z], {}^z x] \cdot [[z, x], {}^x y] = 1,$
- $[[x, y^{-1}], z^{-1}]^x \cdot [[z, x^{-1}], y^{-1}]^z \cdot [[y, z^{-1}], x^{-1}]^y = 1.$

Les deux dernières formules sont deux versions de l'*identité de Witt-Hall*, qui a pour corollaire le lemme suivant :

Lemme 1.1.5 (des trois sous-groupes)**.** *Soient A, B et C trois sous-groupes d'un groupe G. Si deux des groupes suivants sont triviaux, le troisième l'est aussi :*

$$[A, [B, C]], \quad [B, [C, A]], \quad [C, [A, B]].$$

De manière équivalente, l'un d'entre eux est inclus dans la clôture normale de la réunion des deux autres.

Notation 1.1.6. On note $\Bbbk G$ *l'algèbre du groupe* G à coefficients dans l'anneau $\Bbbk$, $\varepsilon : \Bbbk G \longrightarrow \Bbbk$ l'*augmentation* canonique, et $I_{\Bbbk}G := \ker(\varepsilon)$ l'*idéal d'augmentation* (qu'on notera parfois simplement IG, ou même I, suivant le contexte).

On rappelle que $\Bbbk G$ est le $\Bbbk$-module de base G, muni de la multiplication induite par celle de G par bilinéarité. Cette algèbre est universelle parmi les $\Bbbk$-algèbres A munies d'un morphisme de G vers le groupe $A^\times$ de leurs inversibles :

$$\mathrm{Hom}(G, A^\times) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}lg_{\Bbbk}}(\Bbbk G, A).$$

L'augmentation $\varepsilon : \Bbbk G \longrightarrow \Bbbk$ est induite par $g \mapsto 1$ pour $g \in G$. C'est un morphisme de $\Bbbk$-algèbres.

1.2 Suites fortement centrales, algèbres de Lie associées

La théorie des suites fortement centrales doit beaucoup à M. Lazard, dont on pourra consulter le travail classique [Laz54]. Dans cette section, on rappelle les définitions et propriétés de base de cette théorie, puis l'on étudie la catégorie $\mathcal{SFC}$ des suites fortement centrales.

1.2.1 Definitions et premières propriétés

Définition 1.2.1. Soit G un groupe. Une *suite fortement centrale* de G (aussi appelée N*-série* dans la littérature – on parlera aussi de *filtration fortement centrale*) est une filtration

$$G = G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_i \supseteq \cdots$$

de G par des sous-groupes vérifiant :

$$[G_i, G_j] \subseteq G_{i+j}.$$

Remarque 1.2.2. L'indexation doit commencer à $G = G_1$. En particulier, $[G, G_i] \subseteq G_{i+1} \subseteq G_i$, ce qui signifie exactement que les G_i sont *normaux* dans G.

Certaines constructions définissent des suites fortement centrales à partir de suites fortement centrales données. Par exemple, l'image réciproque d'une suite fortement centrale par un morphisme de groupes en est une. L'intersection de deux suites fortement centrales sur un même groupe en est une. Le produit de suites fortement centrales est une suite fortement centrale sur le produit des groupes. On verra (proposition 1.2.13) que ces constructions sont des cas particuliers de la construction générale des limites dans la catégorie des suites fortement centrales.

Proposition 1.2.3. *Soit G un groupe. La suite centrale descendante $\Gamma_*(G)$ est fortement centrale, et c'est la plus petite suite fortement centrale sur G.*

Démonstration. Une récurrence immédiate donne, pour n'importe quelle suite fortement centrale G_* sur $G = G_1$: $G_i \supseteq \Gamma_i(G)$ pour tout $i \geqslant 1$. La forte centralité s'obtient par récurrence à partir du lemme des trois sous-groupes (cf. 1.9.5 pour une preuve détaillée). □

Soit maintenant $G = G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_k \supseteq \cdots$ une filtration fortement centrale d'un groupe G. Considérons le quotient $\mathcal{L}_i(G_*) := G_i/G_{i+1}$. Il est abélien car, pour $i \geqslant 1$:

$$[G_i, G_i] \subseteq G_{2i} \subseteq G_{i+1}.$$

On pose alors :

$$\mathcal{L}(G_*) := \bigoplus_{i \geqslant 1} \mathcal{L}_i(G_*).$$

Le commutateur dans G définit par passage au quotient un crochet :

$$[,] : \mathcal{L}_i(G_*) \times \mathcal{L}_j(G_*) \longrightarrow \mathcal{L}_{i+j}(G_*).$$

Remarquons que l'action de G induite par la conjugaison sur G_i/G_{i+1} est triviale car si $x \in G_i$ et $g \in G$,

$${}^g x = gxg^{-1}x^{-1}x = [g, x]x \equiv x \pmod{G_{i+1}}.$$

En utilisant cette remarque, on vérifie facilement à partir de 1.1.4 que le crochet est bilinéaire alterné, et vérifie l'identité de Jacobi (qui est une conséquence de l'identité de Witt-Hall dans G). Son extension à $\mathcal{L}(G_*)$ par bilinéarité définit ainsi une structure de $\mathbb{Z}$-*algèbre de Lie* (*i.e.* d'*anneau de Lie*) graduée sur $\mathcal{L}(G_*)$.

Notation 1.2.4. : On note $\mathcal{L}(G)$ pour $\mathcal{L}(\Gamma_*(G))$ (autrement dit, si l'on ne précise pas une filtration fortement centrale sur un groupe, on le considérera muni de sa suite centrale descendante).

Proposition 1.2.5. $\mathcal{L}(G)$ *est* engendrée en degré 1*, c'est-à-dire qu'elle est engendrée, comme algèbre de Lie, par* $\mathcal{L}_1(G) = G^{ab}$*. En particulier, si* G *est de type fini, chaque* $\mathcal{L}_n(G)$ *l'est aussi.*

Démonstration. Par définition, $\Gamma_k(G)$ est engendré par les k-commutateurs d'éléments de G, donc $\Gamma_k(G)/\Gamma_{k+1}(G)$ est engendré par les k-crochets d'éléments de $G/\Gamma_2(G)$. □

Si G_* est une suite centrale descendante sur $G = G_1$, l'étude de la structure de $\mathcal{L}(G_*)$ donne des informations sur la structure de la filtration G_*. Pour que ces renseignements se traduisent en des résultats sur la structure du groupe G, il est naturel de considérer des filtrations *séparantes*, c'est-à-dire de supposer :

$$\bigcap_i G_i = \{1\}.$$

Ceci revient à dire que n'importe quel élément x de G se voit dans le gradué, au sens où il existe k tel que $x \in G_k - G_{k+1}$, c'est-à-dire que $\overline{x}$ définit une classe non nulle dans G_k/G_{k+1}. Or, si cette hypothèse est vraie pour une suite fortement centrale G_* sur G, elle doit être vraie pour $\Gamma_* G \subseteq G_*$: le groupe G doit être *résiduellement nilpotent*. Ceci justifie les hypothèses de nilpotence (résiduelle) apparaissant dans la suite de cette section, et dans la suite de la thèse.

Si G est nilpotent de type fini, $\mathcal{L}(G)$, qui est alors borné en degré, est un $\mathbb{Z}$-module de type fini, donc noethérien. De ceci découle la propriété fondamentale de *noethérianité* des groupes nilpotents de type fini :

Proposition 1.2.6. *Soit* G *un groupe nilpotent de type fini, de classe* c*. Tout sous-groupe de* G *est encore nilpotent de type fini, de classe au plus* c*.*

Démonstration. Soit H un sous-groupe de G. La filtration $H_* := (\Gamma_* G) \cap H$ est une suite fortement centrale sur H, donc contient $\Gamma_* H$, et $(\Gamma_{c+1} G) \cap H = \{1\}$, ce qui prouve que H est nilpotent de classe au plus c. De plus, le morphisme induit par l'inclusion :

$$\mathcal{L}(H_*) \hookrightarrow \mathcal{L}(G)$$

est une injection (par définition de la filtration sur H). On en déduit que $\mathcal{L}(H_*)$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini. En relevant des générateurs des quotients H_i/H_{i+1}, on montre alors par récurrence descendante sur i que les H_i sont de type fini. Finalement $H = H_1$ l'est aussi. □

On déduit de cette proposition le corollaire très utile :

Corollaire 1.2.7. *Soit G un groupe de type fini, et G_* une suite fortement centrale sur G. Alors les groupes abéliens $\mathcal{L}_i(G_*)$ sont de type fini.*

Démonstration. La suite fortement centrale G_* contient $\Gamma_* G$, donc G/G_{i+1} est nilpotent, de type fini puisque G l'est. Par conséquent, son sous-groupe $\mathcal{L}_i(G_*) = G_i/G_{i+1}$ l'est aussi. □

Ce corollaire sera en particulier utile dans la preuve du théorème de clôture (section 2.4) ou dans celle du théorème de Quillen 3.3.10 : le théorème de structure des groupes abéliens de type fini y sera utilisé de manière cruciale. Pour le moment, donnons-en une autre application : les groupes résiduellement nilpotents de type fini sont *hopfiens*.

Définition 1.2.8. Un groupe G est dit *hopfien* si tout morphisme surjectif de G dans G est un automorphisme.

On peut utiliser le corollaire 1.2.7 pour montrer la proposition suivante :

Proposition 1.2.9. *Les groupes résiduellement nilpotents de type fini sont hopfiens.*

Celle-ci repose sur le résultat plus faible :

Proposition 1.2.10. *Les groupes abéliens de type fini sont hopfiens.*

Démonstration. C'est évident pour les groupes abéliens finis.

Si A est abélien libre de type fini, soit un morphisme surjectif $\pi : A \longrightarrow A$. Le rang de son noyau est nul, donc π est injectif. Ainsi, A est hopfien.

Soit maintenant A abélien de type fini, et $\pi : A \longrightarrow A$ un morphisme surjectif. Celui-ci induit un morphisme de suites exactes courtes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tors}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Tors}(\pi)"] & A \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\pi"] & A/\mathrm{Tors}(A) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\overline{\pi}"] & 1 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tors}(A) \arrow[r] & A \arrow[r] & A/\mathrm{Tors}(A) \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Le lemme du serpent implique que $\overline{\pi}$ est encore surjectif. Or $A/\mathrm{Tors}(A)$ est libre de type fini, c'est donc un isomorphisme. En appliquant de nouveau le lemme du serpent, on voit que $\mathrm{Tors}(\pi)$ est aussi surjectif. Comme $\mathrm{Tors}(A)$ est fini, c'est aussi un isomorphisme. Enfin, une dernière application du lemme du serpent donne l'injectivité de π. □

Démonstration de la proposition 1.2.9. Soit G un groupe résiduellemnt nilpotent de type fini, et $\pi : G \longrightarrow G$ un morphisme surjectif. Alors $\mathcal{L}(\pi)$ est surjectif. En effet, tout élément de $\mathcal{L}(\pi)$ s'écrit comme une somme de commutateurs, et les éléments définissant ces commutateurs se relèvent à travers π. Alternativement, on peut justifier ceci par un raisonnement catégorique : Γ_* est un adjoint à gauche, donc préserve les coégalisateurs, que $\mathcal{L}$ envoie sur des surjections (cf. la proposition 1.6.1).

Or le corollaire 1.2.7 assure que les $\mathcal{L}_k(G)$ sont abéliens de type fini, donc hopfiens par la proposition 1.2.10. Par conséquent, $\mathcal{L}(\pi)$ est un isomorphisme.

Soit alors x un élément de $\ker(\pi)$. Supposons que x soit dans $\Gamma_k G$. Soit $\overline{x}$ sa classe dans $\mathcal{L}_k(G)$. Par hypothèse, $\mathcal{L}(\pi)(\overline{x}) = 0$, donc $\overline{x} = 0$: x est en fait dans $\Gamma_{k+1}G$. Par récurrence, x est dans tous les $\Gamma_k(G)$. Puisque G est résiduellement nilpotent, x doit être trivial, ce qui achève de prouver l'injectivité de π. □

Remarque 1.2.11. On peut aussi déduire la proposition 1.2.9 du fait que les groupes résiduellement nilpotents de type fini sont polycycliques, donc résiduellement finis [Bau71, cor. 1.21], et que les groupes résiduellement finis de type fini sont hopfiens [MKS04, p. 415].

1.2.2 Catégorie des suites fortement centrales, foncteur de Lie

Définition 1.2.12. On considère $\mathcal{SFC}$ la *catégorie des suites fortement centrales*, obtenue comme sous-catégorie pleine de la catégorie des groupes filtrés. Plus précisément, ses objets sont les filtrations fortement centrales $(G_i)_{i\geqslant 1}$, et un morphisme de G_* dans G'_* est un morphisme de groupes $\varphi : G_1 \longrightarrow G'_1$ préservant les filtrations : $\varphi(G_i) \subseteq G'_i$.

Cette catégorie est munie d'un foncteur d'oubli $\omega_1 : G_* \longmapsto G_1$ vers la catégorie $\mathcal{G}rpes$ des groupes. La suite centrale descendante définit un foncteur $\Gamma : G \longmapsto \Gamma_*(G)$ de $\mathcal{G}rpes$ dans $\mathcal{SFC}$, qui est adjoint à gauche à ce foncteur d'oubli :

$$\mathcal{G}rpes(G, G_1) \cong \mathcal{SFC}(\Gamma_*(G), G_*),$$

pour tout groupe G et toute suite fortement centrale G_*.

La plus petite suite fortement centrale sur un groupe G définit ainsi un adjoint à gauche à l'oubli, et la plus grande (celle constante égale à G) définit évidemment un adjoint à droite. Par conséquent, le foncteur d'oubli $\omega_1 : G_* \longmapsto G_1$ commute aux limites et aux colimites qui existent dans $\mathcal{SFC}$.

Proposition 1.2.13. *La catégorie $\mathcal{SFC}$ est complète et cocomplète. De plus, le foncteur d'oubli $\omega_1 : G_* \longmapsto G_1$ vers la catégorie des groupes commute aux limites et aux colimites.*

Démonstration. On a déjà vu que l'oubli, qui possède des adjoints à gauche et à droite, commute aux limites et aux colimites. En fait, s'il ne crée pas les limites, ni les colimites (au sens de [ML98], V.1), nous allons voir qu'il n'est pas loin de le faire.

Soit en effet un diagramme $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{SFC}$. On peut en général munir la colimite G_∞ du diagramme de groupes $\omega_1 F$ de plusieurs filtrations fortement centrales qui font des morphismes canoniques $\omega_1 F(d) \longrightarrow G_\infty$ des morphismes de $\mathcal{SFC}$ (en particulier, la filtration triviale marche toujours). Cependant, si l'on prend la filtration minimale qui vérifie cette propriété (l'intersection de toutes les filtrations qui marchent), il est facile de vérifier qu'elle réalise la colimite du diagramme F.

De même, on peut munir la limite G^∞ du diagramme de groupes $\omega_1 F$ de plusieurs filtrations fortement centrales qui font des projections canoniques $\varphi_d : G^\infty \longrightarrow \omega_1 F(d)$

des morphismes de $\mathcal{SFC}$ (en particulier, la suite centrale descendante marche toujours). Cependant, si l'on prend la filtration maximale qui vérifie cette propriété, donnée par :

$$G_*^\infty = \bigcap_d \varphi_d^{-1}(F(d)),$$

il est facile de vérifier que G_*^∞ réalise la limite du diagramme F. $\square$

La démonstration ci-dessus donne en fait une description explicite des limites et des colimites dans $\mathcal{SFC}$. Cependant, on notera que la description des limites est bien plus explicite que celle des colimites. Les exemples 1.2.14 et 1.2.15 illustrent cette différence.

Exemple 1.2.14. Si G_* et H_* sont des filtrations fortement centrales sur $G = G_1$ et $H = H_1$, on peut former leur produit $G_* \times H_*$, donné par :

$$(G_* \times H_*)_i = G_i \times H_i.$$

Exemple 1.2.15. De même, si G_* et H_* sont des filtrations fortement centrales sur $G = G_1$ et $H = H_1$, on peut former leur coproduit $G_* * H_*$, qui est la filtration fortement centrale sur $G * H$ la plus petite qui fait des inclusions canoniques des morphismes de $\mathcal{SFC}$. Notons qu'il n'est pas si évident de donner une description explicite de cette filtration.

La construction du paragraphe 1.2.1 définit un foncteur depuis $\mathcal{SFC}$ vers les $\mathbb{Z}$-algèbres de Lie graduées :

$$\mathcal{L} : G_* \longmapsto \mathcal{L}(G_*).$$

En particulier, si un groupe K agit sur une filtration fortement centrale G_* par automorphismes de $\mathcal{SFC}$, c'est-à-dire si K agit sur $G = G_1$ par automorphismes de groupes préservant la filtration G_*, alors, par fonctorialité de $\mathcal{L}$, on obtient une action de K sur $\mathcal{L}(G_*)$, par automorphismes d'algèbres de Lie graduées.

Notation 1.2.16. En accord avec la notation 1.2.4, on note encore $\mathcal{L}$ pour la composée $\mathcal{L} \circ \Gamma$.

Par fonctorialité, l'action canonique de $\mathrm{Aut}(G)$ sur G induit une action de $\mathrm{Aut}(G)$ sur $\mathcal{L}(G)$.

1.3 Construction de filtrations fortement centrales

Dans cette section, on démontre un théorème de Kaloujnine (théorème 1.3.1), dont on déduit un théorème de Lazard (théorème 1.3.5). Ces deux théorèmes seront nos outils principaux pour la construction de suites fortement centrales. Notamment, le théorème de Lazard montre que les sous-groupes de dimension forment une filtration fortement centrale (corollaire 1.3.8). Le théorème de Kaloujnine est, quant à lui, l'ingrédient principal dans la construction de la filtration d'Andreadakis (section 1.7) et de ses variantes (sections 1.9 et 2.5).

Soit (G_*) une suite fortement centrale sur $G = G_1$. Le théorème suivant, cité par Lazard dans [Laz54, p. 117], dû à Kaloujnine [Kal50a, Kal50b], donne une suite fortement centrale sur un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G_*)$ ($\mathrm{Aut}(G_*)$ est le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$ des automorphismes préservant la filtration) :

Théorème 1.3.1 (Kaloujnine). *Pour $j \geqslant 1$ entier, soit $\mathcal{A}_j(G_*) \subseteq \mathrm{Aut}(G_*)$ le sous-groupe des automorphismes agissant trivialement sur tous les quotients G_i/G_{i+j}. Alors $\mathcal{A}_*(G_*)$ est une suite fortement centrale sur $\mathcal{A}_1(G_*) \subseteq \mathrm{Aut}(G)$.*

Notation 1.3.2. Comme pour les algèbres de Lie (notation 1.2.4), on abrège $\mathcal{A}_*(\Gamma_* G)$ en $\mathcal{A}_*(G)$.

La définition de $\mathcal{A}_j(G_*)$ s'écrit aussi :

$$\mathcal{A}_j(G_*) = \ker\left(\mathrm{Aut}(G_*) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Aut}\left(G_i/G_{i+j}\right)\right).$$

La preuve repose sur une autre formulation de cette définition. Pour n'importe quel groupe G, on peut considérer *l'holomorphe de G*, qui est le groupe :

$$G \rtimes \mathrm{Aut}(G).$$

On rappelle que ce groupe a pour ensemble sous-jacent $G \times \mathrm{Aut}(G)$ et que le produit y est défini par :

$$(g, \sigma) \cdot (h, \tau) := (g\sigma(h), \sigma\tau).$$

On identifie G et $\mathrm{Aut}(G)$ aux sous-groupes $G \times 1$ et $1 \times \mathrm{Aut}(G)$ de $G \rtimes \mathrm{Aut}(G)$. Cette identification permet de définir le commutateur d'un automorphisme avec un élément du groupe :

$$[\sigma, g] = \sigma(g)g^{-1}.$$

Remarquons que $[\mathrm{Aut}(G), G] \subseteq G$.

Avec ce point de vue :

$$\mathcal{A}_j(G_*) = \{\ \sigma \in \mathrm{Aut}(G_*) \mid \forall i \geqslant 1,\ [\sigma, G_i] \subseteq G_{i+j}\ \} \ \subseteq\ G \rtimes \mathrm{Aut}(G_*). \tag{1.3.2.1}$$

Démonstration du théorème 1.3.1. Notons $\mathcal{A}_j$ pour $\mathcal{A}_j(G_*)$. On a évidemment $\mathcal{A}_{j+1} \subseteq \mathcal{A}_j$.

La forte centralité découle du lemme des trois sous-groupes (1.1.5). En effet, soient deux entiers $\alpha, \beta \geqslant 1$. Pour tout $i \geqslant 1$, on a :

$$[[\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\beta], G_i] \subseteq\ \mathcal{N}\left([[\mathcal{A}_\alpha, G_i], \mathcal{A}_\beta] \cup [[\mathcal{A}_\beta, G_i], \mathcal{A}_\alpha]\right),$$

où $\mathcal{N}$ désigne la clôture normale dans $G \rtimes \mathrm{Aut}(G_*)$.

Par définition des $\mathcal{A}_j$, les groupes $[[\mathcal{A}_\alpha, G_i], \mathcal{A}_\beta]$ et $[[\mathcal{A}_\beta, G_i], \mathcal{A}_\alpha]$ sont inclus dans $G_{i+\alpha+\beta}$, qui est normal dans G, donc dans $G \rtimes \mathrm{Aut}(G_*)$.

Finalement,

$$[[\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\beta], G_i] \subseteq G_{i+\alpha+\beta},$$

et par conséquent :

$$[\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{A}_\beta] \subseteq \mathcal{A}_{\alpha+\beta},$$

ce qui achève la preuve. □

Remarque 1.3.3. Le groupe $\mathcal{A}_1(G_*)$ est le groupe des automorphismes de G préservant G_* et agissant trivialement sur $\mathcal{L}(G_*)$. De plus, la définition des $\mathcal{A}_j(G_*)$ fait sens pour $j = 0$, donnant : $\mathcal{A}_0(G_*) = \mathrm{Aut}(G_*)$.

Définition 1.3.4. Une *algèbre filtrée* A_* est une $\mathbb{k}$-algèbre associative A munie d'une filtration par des idéaux : $A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq ...$, telle que : $\forall i, j,\ A_i A_j \subseteq A_{i+j}$. Une telle filtration est appelée *filtration d'algèbre* sur A. On note $f\mathcal{A}lg$ la catégorie des algèbres filtrées (avec les morphismes préservant les filtrations).

On peut déduire du théorème 1.3.1 le corollaire très utile suivant [Laz54, th. 3.1] :

Théorème 1.3.5 (Lazard). *Soit $A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots$ une algèbre filtrée. Alors $A_*^\times := A^\times \cap (1 + A_*)$ est une filtration fortement centrale sur le sous-groupe $A_1^\times \subseteq A^\times$ de $A^\times$, et $(-) - 1$ induit un plongement d'anneaux de Lie : $\mathcal{L}(A_*^\times) \hookrightarrow \mathrm{gr}_*(A_1)$.*

La structure d'algèbre de Lie sur $\mathrm{gr}_*(A)$ est induite par sa structure d'algèbre associative graduée, héritée de la structure d'algèbre associative filtrée de A. Autrement dit, le crochet est induit par :

$$[a, b] = ab - ba.$$

Remarque 1.3.6. Soit $A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots$ une algèbre filtrée, et G un groupe. Supposons donné un morphisme $\alpha : G \longrightarrow A^\times$. L'image réciproque de la filtration donnée par le théorème donne alors une filtration fortement centrale $G_* := \alpha^{-1}(1+A_*)$ sur G_1. L'application $\alpha - 1$ induit alors un plongement d'algèbres de Lie :

$$\mathcal{L}(G_*) \hookrightarrow \mathrm{gr}_*(A_1).$$

Remarquons que si α est à valeurs dans $1 + A_1$ (par exemple pour $\alpha : A^\times \cap (1 + A_i) \hookrightarrow A^\times$), alors évidemment $G = G_1$.

Démonstration du théorème 1.3.5. La filtration $A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots$ peut être vue comme une filtration du groupe abélien A, nécessairement fortement centrale (l'indexation est décalée de 1, ce qui ne change rien ici puisque les commutateurs sont triviaux). Considérons le morphisme donné par la multiplication à gauche :

$$\rho : A^\times \longrightarrow \mathrm{Aut}(A, +).$$

Pour $a \in A^\times$, il est facile de voir que $\rho(a)$ est dans $\mathcal{A}_j(A_*)$ si et seulement si a est dans $1 + A_j$ (pour le sens direct, évaluer $\rho(a)$ en 1). Ainsi, $A^\times \cap (1 + A_j) = \rho^{-1}(\mathcal{A}_j(A_*))$ est une filtration fortement centrale, comme annoncé.

Reste à montrer que $\partial = (-) - 1$ induit bien un morphisme de Lie (qui sera un plongement par définition des $A_i^\times$). On donne ici une preuve élémentaire, qui sera réécrite dans un cadre un peu plus formel au paragraphe 5.2.

L'application induite est bien définie par le lemme suivant (immédiat à partir des définitions) :

Lemme 1.3.7. *Soit A une algèbre associative unitaire, et $J \subseteq A$ un idéal (bilatère). Soient u et v dans $A^\times$. Alors $A^\times \cap (1 + J)$ est un sous-groupe normal de $A^\times$, et :*

$$u \equiv v \pmod{J} \Leftrightarrow u \equiv v \pmod{A^\times \cap (1 + J)}.$$

La préservation des crochets de Lie découle de la formule suivante, pour g et h dans $A^\times$:

$$[g, h] - 1 = [g - 1, h - 1]g^{-1}h^{-1}.$$

Puisque l'action par multiplication à droite par des éléments de $A^\times \cap (1+A_1)$ sur $\mathrm{gr}_*(A_1)$ est triviale, ceci justifie que $(-) - 1$ induit un morphisme de Lie, qui est injectif par définition. □

En appliquant le théorème 1.3.5 à l'inclusion canonique d'un groupe G dans son algèbre de groupe $\Bbbk G$ (filtrée par les puissances de l'idéal d'augmentation $I_\Bbbk G$), on en déduit :

Corollaire 1.3.8. *Les* sous-groupes de dimension *de G à coefficients dans $\Bbbk$, définis par :*

$$D_i^{\Bbbk} := G \cap \left(1 + (I_\Bbbk G)^i\right),$$

forment une filtration fortement centrale sur G. En particulier, $\Gamma_i \subseteq D_i^{\mathbb{Z}} =: D_i$, autrement dit :

$$\Gamma_i \subseteq 1 + I_{\mathbb{Z}}^i.$$

Remarque 1.3.9. La suite fortement centrale $D_*^{\Bbbk}$ est fonctorielle en l'anneau $\Bbbk$. En effet, si $\varphi : \Bbbk \longrightarrow \Bbbk'$ est un morphisme d'anneaux, le morphisme induit de $\Bbbk G$ dans $\Bbbk' G$ envoie $(I_\Bbbk G)^*$ dans $(I_{\Bbbk'} G)^*$ donc : $D_*^{\Bbbk} \subseteq D_*^{\Bbbk'}$. En particulier, $D_*^{\mathbb{Z}}$ est la filtration de dimension minimale.

La question de la différence entre $D_*^{\mathbb{Z}} G$ et $\Gamma_* G$ est connue sous le nom de *problème de la dimension*. Ces filtrations sont par exemple égales pour le groupe libre, comme on le verra plus loin (cor. 3.1.7) : on dit que le groupe libre vérifie la *propriété de la dimension*. Pendant longtemps, il a été conjecturé que cela devait être le cas pour n'importe quel groupe, jusqu'à ce que Rips [Rip72] donne un exemple de groupe pour lequel elles diffèrent. Le lecteur pourra consulter [MP09, chap. 2] pour davantage de détails à ce sujet.

La seconde partie du théorème 1.3.5 donne, en précomposant avec le morphisme de $\mathcal{L}(G)$ dans $\mathcal{L}(D_* G)$ induit par l'inclusion entre les filtrations :

Corollaire 1.3.10. *Soit G un groupe. L'application $\delta : g \longmapsto g - 1$ de G dans $\mathbb{Z}G$ (en fait dans $I_{\mathbb{Z}} G$) induit un morphisme d'algèbres de Lie graduées :*

$$\delta_* : \mathcal{L}(G) \longrightarrow \mathrm{gr}_*(\mathbb{Z}G),$$

où le gradué est pris par rapport à la filtration par les puissances de l'idéal d'augmentation.

1.4 Groupes de congruence

Soit I un anneau (associatif) sans unité. Son *groupe de congruence* $GL_n(I)$ est défini par :

$$GL_n(I) := \ker(GL_n(A) \longrightarrow GL_n(A/I)),$$

où A est n'importe quel anneau (associatif) unitaire contenant I comme idéal (bilatère) (*e.g.* $A = I \rtimes \mathbb{Z}$). Ce groupe dépend seulement de I, puisque c'est le groupe des inversibles du monoïde $\mathbb{1} + M_n(I)$.

Si $A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots$ est une algèbre filtrée (définition 1.3.4), alors l'algèbre $M_n(A)$ est aussi filtrée, par la filtration $M_n(A_*)$. Le théorème 1.3.5 donne alors une filtration fortement centrale du groupe de congruence :

$$GL_n(A_1) = GL_n(A) \cap (\mathbb{1} + M_n(A_1)) = \ker(GL_n(A) \longrightarrow GL_n(A/A_1))$$

par les groupes de congruence :

$$GL_n(A_j) = GL_n(A) \cap (\mathbb{1} + M_n(A_j)) = \ker(GL_n(A) \longrightarrow GL_n(A/A_j)).$$

L'anneau de Lie associé se plonge dans une algèbre de matrices :

$$\mathcal{L}(GL_n(A_*)) \hookrightarrow \mathrm{gr}_*(M_n(A_*)) \cong M_n(\mathrm{gr}_*(A_*)).$$

Comme dans la preuve du théorème 1.3.5, cette filtration peut être interprétée comme suit :

$$GL_n(A_*) = \mathcal{A}_*(A_*^n) \cap GL_n(A) \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(A^n).$$

Le théorème de Lazard est en fait le cas $n = 1$ de cette construction.

Supposons A_* commutative. Dans ce cas, le déterminant fournit un morphisme de groupes filtrés :

$$\det : GL_n(A_*) \longrightarrow GL_1(A_*) = A_*^\times.$$

En effet, pour $M \in M_n(A_j)$, $\det(\mathbb{1} + M)$ est un élément de $1 + A_j$. La proposition suivante décrit le morphisme induit entre les gradués :

Proposition 1.4.1. *On a un carré commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(GL_n(A_*)) \arrow[r, hook, "(-)-\mathbb{1}"] \arrow[d, "\det"] & M_n(\mathrm{gr}(A_*)) \arrow[d, "\mathrm{Tr}"] \\
\mathcal{L}(A_*^\times) \arrow[r, hook, "(-)-1"] & \mathrm{gr}(A_*).
\end{tikzcd}$$

Ce carré est en fait cartésien :

$$\mathcal{L}(GL_n(A_*)) \cong \mathrm{Tr}^{-1}(\mathcal{L}(A_*^\times) - 1).$$

Par conséquent, les noyaux de det et de Tr coïncident. On retrouve ainsi (sous une forme un peu plus générale) un résultat de [Lop14] :

Corollaire 1.4.2. *Soit $SL_n(A_*)$ le noyau du déterminant. Alors :*

$$\mathcal{L}(SL_n(A_*)) \cong \ker(\mathrm{Tr}) = \mathfrak{sl}_n(\mathrm{gr}(A_*)).$$

Remarque 1.4.3. Si $\mathcal{L}(A_*^\times) = 0$, alors $\mathcal{L}(GL_n(A_*)) = \mathcal{L}(SL_n(A_*))$, et cet anneau de Lie est en fait $\mathfrak{sl}_n(\mathrm{gr}(A_*))$. Ceci arrive par exemple quand $GL_1(A_1) = \{1\}$ (ce qui implique $SL_n(A_*) = GL_n(A_*)$). C'est le cas pour $A_* = q^*\mathbb{Z}$ (avec $q > 2$), ou pour $A_* = t^*\Bbbk[t]$.

Démonstration de la proposition 1.4.1. Soit $M \in M_n(A_j)$. Alors :

$$\det(\mathbb{1} + M) \equiv 1 + \mathrm{Tr}(M) \pmod{A_j^2}.$$

Quand $j \geqslant 1$, on a $A_j^2 \subseteq A_{j+1}$; ceci entraîne la commutativité du carré étudié.

Le module $\mathrm{Tr}^{-1}(\mathcal{L}_j(A_*^\times) - 1)$ est additivement engendré par les matrices :

$$\bar{a}\mathbf{e}_{\alpha\beta},\ \ \bar{a}(\mathbf{e}_{11} - \mathbf{e}_{\alpha\alpha}) \text{ et } \bar{b}\mathbf{e}_{11}, \quad \text{pour } \alpha \neq \beta, a \in A_j \text{ et } 1 + b \in A_j^\times.$$

Si l'on remplace $\bar{a}(\mathbf{e}_{11} - \mathbf{e}_{\alpha\alpha})$ par $\bar{a}(\mathbf{e}_{11} + \mathbf{e}_{1\alpha} - \mathbf{e}_{\alpha 1} - \mathbf{e}_{\alpha\alpha})$, on peut les relever en des matrices de $GL_n(A_j)$:

$$\begin{cases} \mathbb{1} + a\mathbf{e}_{\alpha\beta} & \text{relève} \quad \bar{a}\mathbf{e}_{\alpha\beta}, \\ \mathbb{1} + a(\mathbf{e}_{11} + \mathbf{e}_{1\alpha} - \mathbf{e}_{\alpha 1} - \mathbf{e}_{\alpha\alpha}) & \text{relève} \quad \bar{a}(\mathbf{e}_{11} + \mathbf{e}_{1\alpha} - \mathbf{e}_{\alpha 1} - \mathbf{e}_{\alpha\alpha}), \\ \mathbb{1} + b\mathbf{e}_{11} & \text{relève} \quad \bar{b}\mathbf{e}_{11}. \end{cases}$$

Ceci achève la preuve de la proposition. □

Supposons $n \geqslant 3$. Si A est un « *anneau de Dedekind de type arithmétique, non totalement imaginaire* », dont $\mathfrak{q}$ est un idéal, alors [BMS67, cor. 4.3 (b)] $SL_n(\mathfrak{q})$ est normalement engendré dans $SL_n(A)$ (en fait dans le groupe des matrices élémentaires $E_n(A)$) par les transvections $\mathbb{1} + t\mathbf{e}_{\alpha\beta}$ telles que $\alpha \neq \beta$ et $t \in \mathfrak{q}$. Cette hypothèse est vérifiée par exemple par $A = \mathbb{Z}$ et $\mathfrak{q} = (q)$. De ceci, on peut déduire ce qu'on interprétera plus loin comme une réponse au problème d'Andreadakis modulo q pour $\mathbb{Z}^n$, quand $n \geqslant 5$ (remarque 1.9.12) :

Proposition 1.4.4. *Sous les hypothèses ci-dessus, si $n \geqslant 5$:*

$$\Gamma_*(SL_n(\mathfrak{q})) = SL_n(\mathfrak{q}^*).$$

Démonstration. La filtration $SL_n(\mathfrak{q}^*)$ est fortement centrale sur $SL_n(\mathfrak{q})$, donc contient sa suite centrale descendante. Réciproquement si $n \geqslant 5$, en utilisant les relations :

$$\begin{cases} \mathbb{1} + (a+b)\mathbf{e}_{\alpha\beta} = (\mathbb{1} + a\mathbf{e}_{\alpha\beta})(\mathbb{1} + b\mathbf{e}_{\alpha\beta}) & \text{if } \alpha \neq \beta, \\ \mathbb{1} + ab\mathbf{e}_{\alpha\beta} = [\mathbb{1} + a\mathbf{e}_{\alpha\gamma}, \mathbb{1} + b\mathbf{e}_{\gamma\beta}] & \text{if } \alpha, \beta \text{ and } \gamma \text{ are pairwise distinct,} \end{cases}$$

on vérifie facilement que pour tout t dans $\mathfrak{q}^k$ et tout $\alpha \neq \beta$:

$$\mathbb{1} + t\mathbf{e}_{\alpha\beta} \in \Gamma_k(SL_n(\mathfrak{q})).$$

Le résultat de [BMS67] implique que ces éléments engendrent normalement $SL_n(\mathfrak{q}^k)$ dans $SL_n(A)$. Par conséquent, $SL_n(\mathfrak{q}^k) \subseteq \Gamma_k(SL_n(\mathfrak{q}))$, ce qui achève la preuve. □

Pour $A = \mathbb{Z}$et $\mathfrak{q} = (q)$, l'anneau de Lie gradué $\mathrm{gr}(q^*\mathbb{Z})$ est $(\mathbb{Z}/q)[t]$. De plus, $GL_n(q\mathbb{Z}) = SL_n(q\mathbb{Z})$ (cf. la remarque 1.4.3). De la proposition 1.4.4 et du corollaire 1.4.2, on peut ainsi déduire :

Corollaire 1.4.5. *Pour $n \geqslant 5$ et $q \geqslant 3$, le morphisme canonique entre les anneaux de Lie (gradués, en degré au moins 1) est un isomorphisme :*

$$\mathcal{L}(GL_n(q\mathbb{Z})) \cong \mathfrak{sl}_n(\mathbb{Z}/q)[t],$$

où t est de degré 1, et le crochet de Lie de Mt^i et Nt^j est donné par $[M,N]t^{i+j}$.

Remarque 1.4.6. Ceci généralise [LS76, Th. 1.1], qui en est le degré 1.

Remarque 1.4.7. Pour $n = 2$, si $q \geqslant 5$ est premier, alors le groupe $SL_2(q\mathbb{Z})$ est libre sur $1 + q(q^2-1)/12$ générateurs [Gro52, Fra33]. Son anneau de Lie est alors libre sur le même nombre de générateurs (théorème 3.1.4). L'auteur ne connaît pas de calcul complet si $n = 3$ ou 4 : le calcul précédent donne bien l'abélianisé, mais ne détermine pas la suite centrale descendante.

1.5 Actions dans la catégorie des suites fortement centrales

1.5.1 Produits semi-directs

Nous aurons souvent besoin de considérer l'action d'un groupe sur un autre groupe par automorphismes de groupes. La donnée d'une telle action de K sur H peut être codée par une structure de *produit semi-direct* $H \rtimes K$. Le groupe $H \rtimes K$ a pour ensemble sous-jacent le produit $H \times K$, la loi de groupe étant défini par :

$$(h,k)(h',k') := (h \cdot {}^k h', kk').$$

Les groupes $H = H \times 1$ et $K = 1 \times K$ sont des sous-groupes de $H \rtimes K$. De plus, H est un sous-groupe normal, et la conjugaison dans $H \rtimes K$ reproduit l'action initiale de K sur H :

$$(1,k)(h,1)(1,k)^{-1} = ({}^k h, 1).$$

Soit maintenant G un groupe, muni de deux sous-groupes H et K, avec H normal dans G. On peut considérer l'action de K sur H induite par la conjugaison dans G, et former le produit semi-direct correspondant $H \rtimes K$. On vérifie facilement que $(h,k) \longmapsto hk$ définit un morphisme de $H \rtimes K$ dans G. C'est un isomorphisme si et seulement si $H \cap K = \{1\}$ et $HK = G$, auquel cas on dit que *G se décompose en un produit semi-direct de H par K*. L'existence d'une telle décomposition est en fait équivalente au fait que l'épimorphisme $G \twoheadrightarrow G/H$ soit scindé, auquel cas chaque section de ce morphisme définit une telle décomposition.

On peut faire une construction parfaitement similaire dans la catégorie $\mathcal{L}ie_{\Bbbk}$, en considérant l'action d'une algèbre de Lie sur une autre par dérivations. Si $\mathfrak{g}$ est une $\Bbbk$-algèbre de Lie, $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{End}_{\Bbbk}(\mathfrak{g})$ désigne la sous-algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire des endomorphismes $\Bbbk$-linéaires d vérifiant :

$$d([x,y]) = [dx,y] + [x,dy].$$

Une action d'une algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ sur une algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est la donnée d'un morphisme d'algèbres de Lie :

$$\mathfrak{k} \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{h}).$$

Par exemple, toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ agit sur elle-même par la *représentation adjointe* :

$$\mathrm{ad} : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\Bbbk}(\mathfrak{g}) \\ x & \longmapsto & \mathrm{ad}_x : y \mapsto [x,y], \end{array} \right.$$

qui est bien à valeurs dans $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, par l'identité de Jacobi. Par définition, un sous-module de $\mathfrak{g}$ est un *idéal de Lie* s'il est stable par l'action adjointe. C'est alors en particulier une sous-algèbre de Lie. De même que pour les groupes, on peut coder une action de $\mathfrak{k}$ sur $\mathfrak{h}$ par une structure de *produit semi-direct* $\mathfrak{h} \rtimes \mathfrak{k}$. L'espace sous-jacent est $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$, le crochet étant défini par :

$$[(x,y)(x',y')] := \left([x,x'] + y \cdot x' - y' \cdot x, [y,y']\right),$$

pour $x, x' \in \mathfrak{h}$ et $y, y' \in \mathfrak{k}$. Les algèbre de Lie $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \oplus 0$ et $\mathfrak{k} = 0 \oplus \mathfrak{k}$ sont des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{h} \rtimes \mathfrak{k}$. De plus, $\mathfrak{h}$ est un idéal de Lie, et l'action adjointe dans $\mathfrak{h} \rtimes \mathfrak{k}$ reproduit l'action initiale de $\mathfrak{k}$ sur $\mathfrak{h}$:

$$[(0,y),(x,0)] = (y \cdot x, 0).$$

Exactement comme dans le cas des actions de groupes, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, munie de deux sous-algèbres de Lie $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$, telles que $\mathfrak{h}$ soit un idéal de Lie, on peut considérer l'action de $\mathfrak{k}$ sur $\mathfrak{h}$ induite par l'action adjointe de $\mathfrak{g}$ et former le produit semi-direct correspondant $\mathfrak{h} \rtimes \mathfrak{k}$. On vérifie facilement que $(x,y) \longmapsto x + y$ définit un morphisme de $\mathfrak{h} \rtimes \mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$. C'est un isomorphisme si et seulement si $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k} = \{0\}$ et $\mathfrak{h} + \mathfrak{k} = \mathfrak{g}$, auquel cas on dit que $\mathfrak{g}$ *se décompose en un produit semi-direct de* $\mathfrak{h}$ *par* $\mathfrak{k}$. L'existence d'une telle décomposition est en fait équivalente au fait que l'épimorphisme $\mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ soit scindé, auquel cas chaque section de ce morphisme définit une telle décomposition.

Les deux situations ci-dessus sont deux instances d'une situation générale. Pour la décrire, nous utiliserons le langage développé dans [BB04]. Une référence concise et accessible sur le sujet est [HL11].

Les catégories $\mathcal{G}rpes$ et $\mathcal{L}ie_{\Bbbk}$ sont des catégories *protomodulaires* [BB04, déf. 3.1.3] : ces catégories sont pointées et admettent des limites finies, et la donnée d'une extension scindée $X \hookrightarrow Y \overset{\curvearrowleft}{\twoheadrightarrow} Z$ ne contient pas trop de structure en plus de la donnée de la fibre X et de la base Y (contrairement à ce qui peut se passer dans la catégorie des ensembles pointés, par exemple). Les catégories $\mathcal{G}rpes$ et $\mathcal{L}ie_{\Bbbk}$ sont en fait semi-abéliennes [BB04, déf. 5.1.1]. La catégorie $\mathcal{SFC}$, elle, ne l'est pas, mais elle est tout de même homologique [BB04, déf. 4.1.1]. Les lemmes usuels d'algèbre homologique (le lemme des neuf, le lemme des cinq, le lemme du serpent, *etc.*) y sont donc vrais. Le résultat suivant sera montré au paragraphe 1.5.3 :

Proposition 1.5.12. *La catégorie $\mathcal{SFC}$ est protomodulaire, et même homologique, mais pas semi-abélienne.*

Dans ce contexte, on a besoin de distinguer les épimorphismes (resp. les monomorphismes) des épimorphismes (resp. monomorphismes) *réguliers*, *i. e.* ceux qui sont des coégalisateurs (resp. des égalisateurs). Dans $\mathcal{SFC}$, comme on le montre dans l'appendice (paragraphe 1.A.2), les premiers sont les u tels que $u_1 = \omega_1(u)$ est surjectif (resp. injectif), alors que les seconds sont les *surjections* (resp. les *injections*) :

Définition 1.5.1. Soit $u : G_* \longrightarrow H_*$ un morphisme dans $\mathcal{SFC}$. On dit que u est une *injection* (resp. une *surjection*) si u_1 est injectif (resp. surjectif) et $u^{-1}(H_i) = G_i$ (resp. $u(G_i) = H_i$) pour tout i.

Remarque 1.5.2. On peut aussi expliciter la notion générale de *suite exacte courte* [BB04, Def 4.1.5] dans le cas de la catégorie $\mathcal{SFC}$: $1 \longrightarrow G_* \xrightarrow{u} H_* \xrightarrow{v} K_* \longrightarrow 1$ est une suite exacte courte si et seulement si :

$$\begin{cases} u \text{ est une injection,} \\ v \text{ est une surjection,} \\ u(G_1) = \ker(v), \end{cases}$$

ce qui revient à dire que pour tout i, $1 \longrightarrow G_i \xrightarrow{u} H_i \xrightarrow{v} K_i \longrightarrow 1$ est une suite exacte courte de groupes.

1.5.2 Actions : définition abstraite

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie protomodulaire admettant des limites finies. En général, contrairement à ce qui se passe dans les catégories abéliennes, deux extensions scindées entre les mêmes objets de $\mathcal{C}$ ne sont pas isomorphes (par un isomorphisme préservant les sections). Ceci donne du sens à la définition suivante :

Définition 1.5.3. Soit X et Z deux objets de $\mathcal{C}$. Une *action* de Z sur X est une suite exacte scindée (avec section donnée) :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] & Y \arrow[r, two heads] & Z. \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

Si une action de Z sur X est donnée, on dira que Z *agit sur* X et on écrira $Z \circlearrowleft X$. Les actions dans $\mathcal{C}$ forment une catégorie $\mathcal{A}ct(\mathcal{C})$, un morphisme étant un diagramme de la forme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y \arrow[r, two heads] \arrow[d] & Z \arrow[l, bend right] \arrow[d] \\ X' \arrow[r, hook] & Y' \arrow[r, two heads] & Z'. \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

où tous les carrés commutent (en particulier, le carré des sections commute).

Remarque 1.5.4. Le choix de la section est crucial. Par exemple, l'extension canonique :

$$X \xrightarrow{\iota_1} X \times X \xrightarrow{\pi_2} X$$

peut être scindée par ι_2 ou par la diagonale δ. Le premier choix donne l'action triviale, alors que le second donne l'*action adjointe*, qui est non triviale : dans $\mathcal{L}ie$, c'est la représentation adjointe ; dans $\mathcal{G}rpes$, c'est l'action d'un groupe sur lui-même par conjugaison.

Exemple 1.5.5. La catégorie $\mathcal{A}ct(\mathcal{G}rpes)$ est la catégories usuelle des actions de groupes $G \circlearrowleft H$: un morphisme de $G \circlearrowleft H$ dans $G' \circlearrowleft H'$ est la donnée d'un morphisme $u : G \to G'$ et d'un morphisme $v : H \to H'$ qui est u-équivariant, au sens où :

$$\forall g \in G,\ \forall h \in H,\ v(g \cdot h) = u(g) \cdot v(h).$$

Définition 1.5.6. On note $\ltimes$ le foncteur de $\mathcal{A}ct(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$ qui envoie une action

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] & Y \arrow[r, two heads] & Z \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

sur Y (qu'on note $Z \ltimes X$), et ad le foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}ct(\mathcal{C})$ qui envoie un objet C sur *l'action adjointe* :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\iota_1"] & C^2 \arrow[r, "\pi_2"'] & C. \arrow[l, bend right, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

Proposition 1.5.7. *Les foncteurs ci-dessus forment une adjonction canonique :*

$$\mathcal{A}ct(\mathcal{C}) \underset{\mathrm{ad}}{\overset{\ltimes}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}.$$

Démonstration. Soient C, X et Z des objets de $\mathcal{C}$. Supposons donnée une action de Z sur X. Un morphisme $\varphi : Z \ltimes X \to C$ induit un morphisme d'actions :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\varphi i"'] & Z \ltimes X \arrow[r, two heads, "p"'] \arrow[d, "{(\varphi, \varphi s p)}"'] & Z \arrow[l, bend right, "s"'] \arrow[d, "\varphi s"] \\ C \arrow[r, "\iota_1"] & C^2 \arrow[r, "\pi_2"'] & C. \arrow[l, bend right, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

Réciproquement, un morphisme entre les actions donne en particulier un morphisme $\varphi : Z \ltimes X \to C^2 \xrightarrow{\pi_1} C$. On vérifie facilement que ces constructions sont inverses l'une de l'autre. □

Exemple 1.5.8. Pour $\mathcal{C} = \mathcal{G}rpes$, le foncteur ad associe à G l'action canonique $G \circlearrowleft G$ par conjugaison. On peut *définir* le produit semi-direct comme l'adjoint à gauche de ce foncteur.

Soit un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Il préserve nécessairement les épimorphismes scindés. Par conséquent :

Lemme 1.5.9. *Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur entre deux catégories protomodulaires. Alors pour toute action $Z \circlearrowleft X$ dans $\mathcal{C}$:*

$$F(Z \ltimes X) = F(Z) \ltimes \ker(F(Z \ltimes X \twoheadrightarrow Z)).$$

On pose alors :

$$F_\#\left(\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] & Y \arrow[r, two heads, "p"'] & Z \arrow[l, bend right, "s"'] \end{tikzcd} \right) := \begin{tikzcd} \ker(Fp) \arrow[r, hook] & F(Y) \arrow[r, two heads, "Fp"'] & F(Z) \arrow[l, bend right, "Fs"'] \end{tikzcd}. \tag{1.5.9.1}$$

Remarquons que la description de $F_\#$ est particulièrement simple quand F préserve les noyaux d'épimorphismes scindés, puisqu'alors $\ker(Fp) = F(X)$.

Cette construction $F \mapsto F_\#$ définit un foncteur $\mathcal{A}ct(-)$. Il est facile de voir que c'est en fait un 2-foncteur. A ce titre, il préserve les adjonctions. Si $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ est une adjonction, alors on peut écrire le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}ct(\mathcal{C}) \arrow[r, shift left, "\ltimes"] \arrow[d, shift right, "F_\#"'] & \mathcal{C} \arrow[l, shift left, "\mathrm{ad}"] \arrow[d, shift right, "F"'] \\ \mathcal{A}ct(\mathcal{D}) \arrow[r, shift left, "\ltimes"] \arrow[u, shift right, "G_\#"'] & \mathcal{D}. \arrow[l, shift left, "\mathrm{ad}"] \arrow[u, shift right, "G"'] \end{tikzcd} \tag{1.5.9.2}$$

Puisque G commute aux limites, on a $G_\# \circ \mathrm{ad} = \mathrm{ad} \circ G$: le carré des adjoints à gauche est commutatif. Évidemment, celui des adjoints à droite l'est aussi.

Définition 1.5.10. Soit $Z \in \mathcal{C}$. On définit la catégorie $Z - \mathcal{C}$ des objets de $\mathcal{C}$ munis d'une action de Z, comme la sous-catégorie de $\mathcal{A}ct(\mathcal{C})$ formées de actions $Z \circlearrowleft X$, les morphismes de $Z \circlearrowleft X$ vers $Z \circlearrowleft Y$ étant ceux de la forme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d] & Z \ltimes X \arrow[r, two heads] \arrow[d] & Z \arrow[l, bend right] \arrow[d, equal] \\ Y \arrow[r, hook] & Z \ltimes Y \arrow[r, two heads] & Z. \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur et $Z \in \mathcal{C}$, alors la construction (1.5.9.1) donne un foncteur induit $F_\# : Z - \mathcal{C} \to F(Z) - \mathcal{D}$. Si F commute aux noyaux d'épimorphismes scindés (par exemple si F est adjoint à gauche ou si F est exact), ce foncteur envoie une action $Z \circlearrowleft X$ sur une action $F(Z) \circlearrowleft F(X)$.

L'ensemble $\mathrm{Act}(Z, X)$ des actions de Z sur X est fonctoriel en Z : la restriction d'une action le long d'un morphisme est définie *via* un produit fibré. Dans $\mathcal{G}rpes$, comme dans $\mathcal{L}ie$, ce foncteur (contravariant) est représentable, pour tout X. En effet, une action d'un groupe K sur un groupe G est exactement la donnée d'un morphisme $K \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$. De même, une action d'une algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ sur une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ correspond à un morphisme $\mathfrak{k} \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Cette situation a été étudiée notamment dans [BJK05]. On utilisera la terminologie suivante [BB07, Def. 1.1] :

Définition 1.5.11. On dit que *les actions sont représentables* dans une catégorie protomodulaire $\mathcal{C}$ si le foncteur $\mathrm{Act}(-, X)$ est représentable, pour tout objet $X \in \mathcal{C}$.

Un représentant pour $\mathrm{Act}(-, X)$ est une *action universelle* sur X. Explicitement, c'est une action d'un objet $\mathcal{A}(X)$ sur X telle que toute action $Z \circlearrowleft X$ est obtenue par restriction le long d'un unique morphisme $Z \to \mathcal{A}(X)$. Par exemple, dans $\mathcal{G}rpes$, l'action universelle sur un groupe G est :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, hook] & G \rtimes \mathrm{Aut}(G) \arrow[r, two heads] & \mathrm{Aut}(G) \arrow[l, bend right] \end{tikzcd},$$

où le groupe $G \rtimes \mathrm{Aut}(G)$ est *l'holomorphe* de G (cf. la section 1.3).

1.5.3 Applications à la catégorie $\mathcal{SFC}$

Proposition 1.5.12. *La catégorie $\mathcal{SFC}$ est protomodulaire, et même homologique, mais pas semi-abélienne.*

Démonstration. Pour vérifier que $\mathcal{SFC}$ est homologique, on vérifie par exemple les axiomes de [HL11]. Le lecteur est renvoyé à l'appendice pour plus de détails (paragraphe 1.A.2). Elle n'est pas semi-abélienne puisqu'il existe des relations d'équivalence $R_* \subseteq G_*^2$ pour lesquelles R_* n'est pas la filtration induite sur R_1 ; une telle relation ne peut pas être un égalisateur (cette situation est similaire à celle des groupes topologiques, dans lesquels une relation d'équivalence n'est pas nécessairement munie de la topologie induite [BB04, ex. A.5.18]). □

Proposition 1.5.13. *Une action $K_* \circlearrowleft G_*$ dans $\mathcal{SFC}$ est la donnée d'une action de groupes de $K = K_1$ sur $G = G_1$ vérifiant :*

$$\forall i, j, \ \ [K_i, G_j] \subseteq G_{i+j}.$$

Démonstration. Soit une action de K_* sur G_* dans $\mathcal{SFC}$:

$$\begin{tikzcd} G_* \arrow[r, hook] & H_* \arrow[r, two heads] & K_* \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}.$$

Le foncteur d'oubli $\omega_1 : G_* \mapsto G_1$, de $\mathcal{SFC}$ dans $\mathcal{G}rpes$ a un adjoint à gauche $G \mapsto \Gamma_* G$. Par conséquent, il préserve les noyaux. En appliquant ce foncteur à l'action considérée, on obtient une action de groupes :

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, hook] & H_1 \arrow[r, two heads] & K_1 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}.$$

Ainsi, H_1 se décompose en un poduit semi-direct $G_1 \rtimes K_1$.

En fait, il y a d'autres foncteurs d'oubli $\omega_i : G_* \mapsto G_i$, et chacun admet un adjoint à gauche $G \mapsto \Gamma_{\lceil \frac{*}{i} \rceil} G$ (où $\lceil - \rceil$ désigne la partie entière supérieure). Comme ci-dessus, on obtient des extensions scindées :

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, hook] & H_i \arrow[r, two heads] & K_i \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}.$$

Ainsi, H_i se décompose en un poduit semi-direct $G_i \rtimes K_i$.

Comme H_* est une filtration fortement centrale, on peut appliquer le lemme 1.5.14 ci-dessous pour obtenir la relation cherchée. Réciproquement, le même lemme assure que si l'on donne une action de groupes comme dans la proposition 1.5.13, on peut définir une filtration fortement centrale du produit semi-direct $K \rtimes G$ par $H_* = K_* \rtimes G_*$. Il est alors évident que la suite scindée correspondante dans $\mathcal{SFC}$ est exacte. □

Lemme 1.5.14. *Soit $K \circlearrowright G$ une action dans $\mathcal{G}rpes$. Soient G_* et K_* des filtrations sur $G = G_1$ et $K = K_1$ respectivement. Alors les ensembles $H_i := G_i \rtimes K_i$ sont des sous-groupes de $H = G \rtimes K$ qui forment une filtration fortement centrale si et seulement si :*

$$\begin{cases} K_* \text{ est une filtration fortement centrale de } K, \\ G_* \text{ est une filtration fortement centrale de } G, \\ \forall i, j, \ [K_j, G_i] \subseteq G_{i+j}. \end{cases}$$

Démonstration. Supposons que $(G_i \rtimes K_i)_i$ soit fortement centrale. Alors K_*, qui est son intersection avec K, l'est aussi. De même pour G_*. Puis :

$$[K_j, G_i] \subseteq (G_{i+j} \rtimes K_{i+j}) \cap G = G_{i+j}.$$

Pour la réciproque, remarquons d'abord que les sous-groupes G_i de G sont stables sous l'action de $K = K_1$, ce qui implique que les $G_i \rtimes K_j$ sont des sous-groupes de $G \rtimes K$. On utilise ensuite les formules de 1.1.4 pour calculer $[kg, k'g']$, avec k, g, k', g' respectivement dans K_i, G_i, K_j et G_j :

$$\begin{aligned} [kg, k'g'] &= [kg, k'] \cdot^{g'} [kg, g'] \\ &= {}^{k}[g, k'] \cdot [k, k'] \cdot {}^{k'k}[g, g'] \cdot {}^{k'}[k, g'] \\ &\in G_{i+j} \cdot K_{i+j} \cdot G_{i+j} \cdot G_{i+j} = G_{i+j} \rtimes K_{i+j}. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du lemme. □

Proposition 1.5.15. *Soit G_* une suite fortement centrale. La suite fortement centrale $\mathcal{A}_*(G_*)$ donnée par le théorème de Kaloujnine 1.3.1 agit canoniquement sur G_*, et cette action est universelle. En particulier, les actions sont représentables dans $\mathcal{SFC}$.*

Démonstration. Le fait que la filtration $\mathcal{A}_*(G_*)$ agit sur G_* découle de la formule (1.3.2.1) et de la proposition 1.5.13.

Soit une action de K_* sur G_* dans $\mathcal{SFC}$. L'action de groupe sous-jacente est décrite par un unique morphisme de K_1 dans $\mathrm{Aut}(G_1)$. D'après la proposition 1.5.13, ce morphisme envoie K_j dans $\mathcal{A}_j(G_*)$. Réciproquement, la même proposition assure que tout morphisme de K_* vers $\mathcal{A}_*(G_*)$ dans $\mathcal{SFC}$ définit une action de groupes se relevant en une action dans $\mathcal{SFC}$. □

Proposition-définition 1.5.16. *Soit K un groupe agissant sur un groupe G muni d'une filtration fortement centrale G_*. Il existe alors une plus grande filtration parmi les filtrations fortement centrales d'un sous-groupe de K qui agissent sur G_*. Elle est donnée par :*

$$K_j = \mathcal{A}_j(K, G_*) := \{\ k \in K \mid \forall i,\ [k, G_i] \subseteq G_{i+j}\ \}. \tag{1.5.16.1}$$

En fait, si K'_* est une filtration fortement centrale sur un sous-groupe de K, alors K'_* agit sur G_* (à travers l'action de K) si et seulement si $K'_* \subseteq \mathcal{A}_*(K, G_*)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que K_* est l'image réciproque de la filtration $\mathcal{A}_*(G_*)$ par le morphisme :

$$K \longrightarrow \mathrm{Aut}(G),$$

qui décrit l'action de K sur G. La filtration K_* est donc fortement centrale, et elle agit sur G par définition. Le reste de la proposition est immédiat. □

1.6 Morphismes de Johnson

1.6.1 Exactitude du foncteur de Lie

Proposition 1.6.1. *Le foncteur de Lie $\mathcal{L} : \mathcal{SFC} \longrightarrow \mathcal{L}ie_{\mathbb{Z}}$ est* exact*, c'est-à-dire qu'il préserve les suites exactes courtes [BB04, Def 4.1.5].*

Démonstration. L'exactitude du foncteur $\mathcal{L}$ est équivalente à l'exactitude de chaque $\mathcal{L}_i : \mathcal{SFC} \longrightarrow Ab$. On considère les foncteurs d'oubli $\omega_i : G_* \mapsto G_i$ de $\mathcal{SFC}$ dans $\mathcal{G}rpes$. Chaque ω_i a un adjoint à gauche $G \mapsto \Gamma_{\lceil \frac{*}{i} \rceil} G$, donc ces foncteurs préservent les noyaux. De plus, ils préservent les épimorphismes réguliers, puisque ceux de $\mathcal{SFC}$ sont les surjections (cf. la définition 1.5.1). Par conséquent, ils sont exacts. Puisque $\mathcal{L}_i$ est le conoyau de l'injection $\omega_{i+1} \hookrightarrow \omega_i$, son exactitude découle du lemme des neuf dans $\mathcal{G}rpes$. Précisément, si $\mathcal{E} :\ G_* \hookrightarrow H_* \twoheadrightarrow K_*$ est une suite exacte courte dans $\mathcal{SFC}$, on applique le lemme des neuf au diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\omega_{i+1}(G_*) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \omega_i(G_*) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathcal{L}_i(G_*) \arrow[d] \\
\omega_{i+1}(H_*) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \omega_i(H_*) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathcal{L}_i(H_*) \arrow[d] \\
\omega_{i+1}(K_*) \arrow[r, hook] & \omega_i(K_*) \arrow[r, two heads] & \mathcal{L}_i(K_*)
\end{tikzcd}$$

pour obtenir l'exactitude de $\mathcal{L}_i(\mathcal{E})$ à partir de celle de $\omega_i(\mathcal{E})$ et de $\omega_{i+1}(\mathcal{E})$. □

Remarque 1.6.2. La description explicite des suites exactes courtes donnée dans la remarque 1.5.2 implique qu'une suite courte $\mathcal{E}$ est exacte dans $\mathcal{SFC}$ si et seulement si les $\omega_i(\mathcal{E})$ le sont. Quand on se restreint aux suites fortement centrales finies séparantes (sur des groupes nécessairement nilpotents), ceci équivaut à l'exactitude des $\mathcal{L}_i(\mathcal{E})$: on le voit par récurrence à partir de la même application du lemme des neuf que dans la démonstration ci-dessus. Ainsi, la restriction de $\mathcal{L}$ à la sous-catégorie pleine des suites fortement centrales finies séparantes *reflète l'exactitude.*

Remarque 1.6.3. En utilisant la description explicite des suites exactes courtes donnée dans la remarque 1.5.2, on peut écrire une démonstration explicite de la proposition 1.6.1, similaire à [Bou61, prop. 2].

Remarque 1.6.4. Le foncteur $\mathcal{L} : \mathcal{SFC} \longrightarrow \mathcal{L}ie$ ne commute pas aux colimites, en général. En effet, si c'était le cas, $\mathcal{L} \circ \Gamma$ devrait commuter aux colimites (Γ a un adjoint à droite, donc commute aux colimites). En appliquant ceci à :

$$G^{ab} = \mathrm{coeq}\left(\Gamma_2 G \overset{incl}{\underset{1}{\rightrightarrows}} G \right),$$

on aurait :

$$\mathcal{L}(G^{ab}) = \mathrm{coeq}\left(\mathcal{L}(\Gamma_2 G) \overset{0}{\underset{0}{\rightrightarrows}} \mathcal{L}(G) \right) = \mathcal{L}(G),$$

ce qui n'est vrai que pour G abélien.

1.6.2 Morphismes de Johnson

La proposition 1.6.1 implique que le foncteur $\mathcal{L}$ préserve les actions. Précisément, étant donnée une action dans $\mathcal{SFC}$:

$$\begin{tikzcd} G_* \arrow[r, hook] & H_* \arrow[r, two heads] & K_*, \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

on peut lui appliquer $\mathcal{L}$ pour obtenir une action dans la catégorie des anneaux de Lie gradués :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(G_*) \arrow[r, hook] & \mathcal{L}(H_*) \arrow[r, two heads] & \mathcal{L}(K_*). \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

Une telle action correspond à un morphisme d'anneaux de Lie (gradués) :

$$\mathcal{L}(K_*) \longrightarrow \mathrm{Der}_*(\mathcal{L}(G_*)), \tag{1.6.4.1}$$

où l'on considère l'anneau de Lie gradué des dérivations graduées : une dérivation est de degré k lorsqu'elle augmente le degré des éléments homogènes de k.

Définition 1.6.5. Le morphisme (1.6.4.1) est appelé *morphisme de Johnson* associé à l'action $K_* \circlearrowleft G_*$.

Explicitement, le morphisme de Johnson (entre les gradués) est induit par l'application :

$$k \longmapsto (h \longmapsto [k,h] = ({}^k h)h^{-1}).$$

Exemple 1.6.6. Le morphisme de Johnson associé à l'action universelle $\mathcal{A}_*(G_*) \circlearrowleft G_*$ est le morphisme :

$$\tau : \mathcal{L}(\mathcal{A}_*(G_*)) \longrightarrow \mathrm{Der}_*(\mathcal{L}(G_*))$$

induit par $\sigma \mapsto (x \mapsto \sigma(x)x^{-1})$.

Si K_1 est en fait un sous-groupe d'un groupe K_0 vérifiant l'hypothèse de la proposition 1.5.13 pour $j = 0$ (*i.e.* $\forall i,\ [K_0, G_i] \subseteq G_i$), tels que les K_i soient normaux dans K_0, alors l'action de K_0 sur $\mathcal{L}(G_* \rtimes K_*)$ (induite par la conjugaison) se factorise par K_0/K_1 et, puisque c'est une action par automorphismes de l'algèbre de Lie :

Lemme 1.6.7. *Si $K_0 \geqslant K_1$ est donné comme ci-dessus, le morphisme de Johnson τ est K_0/K_1-équivariant.*

L'action sur les dérivations se fait par conjugaison à partir de l'action sur $\mathcal{L}(G_*)$. Précisément :

$$\tau(g \cdot x) = [g \cdot x, -] = g \cdot [x, g^{-1} \cdot -] = g \circ \tau(x) \circ g^{-1}.$$

De plus, l'injectivité du morphisme de Johnson équivaut à la maximalité de K_* :

Lemme 1.6.8. *Soit K_* une filtration fortement centrale agissant sur G_*. Le morphisme de Johnson $\tau : \mathcal{L}(K_*) \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathcal{L}(G_*))$ est injectif si et seulement si $K_* = \mathcal{A}_*(K, G_*)$.*

Démonstration. Tout élément non nul du noyau de τ_j se relève en un élément de $\mathcal{A}_j(K, G_*) - K_j$. Réciproquement, un élément σ de $\mathcal{A}_j(K, G_*) - K_j$ est dans $K_k - K_{k+1}$ pour un $k < j$, et alors $\overline{\sigma} \in K_k/K_{k+1} - \{0\}$ est un élément non nul du noyau de τ. $\square$

Remarque 1.6.9. La définition 1.5.16 fait sens pour $j = 0$, donnant un sous-groupe $K_0 = \mathcal{A}_0(K, G_*)$ de K agissant comme ci-dessus, pour lequel τ est équivariant. En fait, une telle structure est une *N-série étendue*, au sens de [HM17] (on notera plus loin $\mathcal{SFC}_+$ la catégorie formée par ces objets - paragraphe 2.A.2). Les actions sont en fait représentables dans $\mathcal{SFC}_+$. Un grosse partie de [HM17] consiste à montrer que les actions sont aussi représentables dans la catégorie $eg\mathcal{L}ie$ des algèbres de Lie *étendues*, c'est-à-dire munies d'une action d'un groupe, ce qui leur permet de faire les mêmes constructions que ci-dessus dans ce contexte.

1.6.3 Algèbre de Lie d'un produit semi-direct

On peut appliquer la machinerie ci-dessus pour étudier la suite centrale descendante et l'algèbre de Lie des produits semi-directs. Soit en effet un produit semi-direct $G = H \rtimes K$. En appliquant la proposition 1.5.9 au foncteur $F = \Gamma$, on obtient une décomposition en produit semi-direct :

$$\Gamma_* G = H_* \rtimes \Gamma_* K,$$

où H_i est le noyau de la projection scindée :

$$\begin{tikzcd} \Gamma_i G \arrow[r, two heads] & \Gamma_i K. \arrow[l, bend right, dashed] \end{tikzcd}$$

Le but de cette section est de donner une description explicite de H_* (donc de $\Gamma_\#$, avec les notations de 1.5.2) et d'identifier les conditions sous lesquelles H_* n'est autre que $\Gamma_* H$.

Commençons par une construction générale :

Proposition-définition 1.6.10. *Soit G un groupe, et H un sous-groupe normal. On définit une suite fortement centrale $\Gamma_*^G(H)$ sur H par :*

$$\begin{cases} \Gamma_1^G(H) := H, \\ \Gamma_{k+1}^G := [G, \Gamma_k^G(H)]. \end{cases}$$

Démonstration. Les inclusions $\Gamma_{k+1}^G \subseteq \Gamma_k^G$ s'obtiennent par récurrence à partir de la première, qui n'est autre que la normalité de H :

$$[G, H] \subseteq H.$$

Comme pour 1.2.3, la forte centralité s'obtient par récurrence à partir du lemme des trois sous-groupes 1.1.5. □

Puisque $[G, \Gamma_k^G(H)] \subseteq \Gamma_k^G(H)$, les $\Gamma_k^G(H)$ sont en fait normaux dans G. En fait, on a mieux :

$$[G, \Gamma_k^G(H)] \subseteq \Gamma_{k+1}^G(H), \text{ donc } G = \mathcal{A}_1(G, \Gamma_*^G(H)).$$

Par conséquent, $\mathcal{A}_*(G, \Gamma_*^G(H))$ est une suite fortement centrale sur G, donc contient $\Gamma_*(G)$. Ainsi, $\Gamma_*(G)$ agit sur $\Gamma_*^G(H)$. De plus, il est clair que $\Gamma_*^G(H)$ est la plus petite suite fortement centrale sur H telle que l'action de G sur H induise une action de $\Gamma_*^G(H)$.

Si maintenant K agit sur H, on peut appliquer la construction précédente avec $G = H \rtimes K$. On écrira encore $\Gamma_*^K(H)$ pour $\Gamma_*^{H \rtimes K}(H)$ (ce qui n'entrainera pas de confusion : si H est un sous-groupe normal d'un groupe G, on a $\Gamma_*^K(H) = \Gamma_*^{H \rtimes G}(H)$, pour le produit semi-direct correspondant à l'action par conjugaison de G sur H).

La proposition suivante identifie la filtration H_* définie ci-dessus :

Proposition 1.6.11. *Si un groupe K agit sur un groupe H, on a :*

$$\Gamma_*(H \rtimes K) = \Gamma_*^K(H) \rtimes \Gamma_* K.$$

Démonstration. Puisque la suite fortement centrale $\Gamma_*(K) \subseteq \Gamma_*(H \rtimes K)$ agit sur $\Gamma_*^K(H)$, la filtration $\Gamma_*^K(H) \rtimes \Gamma_*(K)$ est fortement centrale sur $H \rtimes K$, donc contient $\Gamma_*(H \rtimes K)$. L'inclusion réciproque découle directement des définitions. □

Remarque 1.6.12. On a ainsi identifié $\Gamma_\# = \mathcal{A}ct(\Gamma)$ (avec les notations de 1.5.2) :

$$\Gamma_\# : K \circlearrowleft H \longmapsto \Gamma_*(K) \circlearrowleft \Gamma_*^K(H).$$

Dans ce contexte, le diagramme (1.5.9.2) s'écrit :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}ct(\mathcal{SFC}) \arrow[r, shift left, "\ltimes"] \arrow[d, shift right, "\Gamma_\#"'] & \mathcal{SFC} \arrow[l, shift left, "c"] \arrow[d, shift right, "\Gamma"'] \\ \mathcal{A}ct(\mathcal{G}rpes) \arrow[r, shift left, "\ltimes"] \arrow[u, shift right, "\omega_1"'] & \mathcal{G}rpes. \arrow[l, shift left, "c"] \arrow[u, shift right, "\omega_1"'] \end{tikzcd}$$

On peut identifier les conditions sous lesquelles $\Gamma_*^K(H) = \Gamma_*(H)$:

Proposition 1.6.13. *Soit un produit semi-direct $H \rtimes K$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'action de K sur H^{ab} est triviale,*
2. $[K, H] \subseteq [H, H] = \Gamma_2(H)$,
3. *$K \circlearrowleft H$ induit une action $\Gamma_* K \circlearrowleft \Gamma_* H$.*
4. $\Gamma_*^K(H) = \Gamma_* H$,
5. $\forall i,\ \Gamma_i(H \rtimes K) = \Gamma_i H \rtimes \Gamma_i K$,
6. $\mathcal{L}(H \rtimes K) \cong \mathcal{L}(H) \rtimes \mathcal{L}(K)$.
7. $(H \rtimes K)^{ab} \cong H^{ab} \times K^{ab}$,

Démonstration. L'assertion (2) signifie que K agit trivialement sur H^{ab}, donc sur $\mathcal{L}(H)$, puisque celle-ci est engendrée en degré 1 (proposition 1.2.5). Autrement dit :

$$\forall i,\ [K, \Gamma_i H] \subseteq \Gamma_{i+1} H.$$

Mais ceci équivaut à l'égalité : $K = \mathcal{A}_1(K, \Gamma_* H)$, donc à $\Gamma_* K \subseteq \mathcal{A}_*(K, \Gamma_* H)$, puisque $\mathcal{A}_*(K, \Gamma_* H)$ est fortement centrale. Cette dernière inclusion équivaut à (3).

Comme $\Gamma_* H$ est la plus petite filtration fortement centrale sur H, et $\Gamma_*^K(H)$ est la plus petite sur laquelle $\Gamma_* K$ agit (à travers l'action donnée de K sur H), l'équivalence avec (4) suit. L'assertion (5) lui est clairement équivalente, et l'exactitude de $\mathcal{L}$ (proposition (1.6.1)) montre qu'elles impliquent (6). Les implications (6) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (2) sont immédiates. □

On verra plus loin (paragraphe 4.2.1) qu'on peut appliquer ceci pour comprendre la structure de l'algèbre de Lie du groupe de tresses pures P_n. L'algèbre obtenue est un produit semi-direct d'algèbres de Lie libres, et est appelée algèbre de Drinfeld-Kohno (proposition 4.2.2). On se servira des mêmes outils pour décomposer en produits semi-directs itérés l'algèbre de Lie du groupe des automorphismes triangulaires, ainsi que celui du groupe de McCool (cf. le chapitre 4)

1.7 Problème d'Andreadakis

Soit G un groupe. Pour étudier la structure de $\mathrm{Aut}(G)$, on peut d'abord considérer l'action des automorphismes sur G^{ab}, c'est-à-dire considérer la projection de $\mathrm{Aut}(G)$ dans $GL(G^{ab})$. Puis l'on peut mettre de côté cette partie linéaire, et s'intéresser à la structure du noyau IA_G de cette projection. Celui-ci est résiduellement nilpotent quand G l'est, et est muni de deux filtration fortement centrales : sa suite centrale descendante, et la *filtration d'Andreadakis* (cette dernière n'est autre que la filtration de Kaloujnine associée la suite centrale descendante de G). La question de la comparaison de ces deux filtrations se pose naturellement : c'est le problème d'Andreadakis 1, que nous explorerons par la suite pour les groupes libres. Le chapitre 4 sera dédié à l'étude de ce problème restreint à certains sous-groupes de $IA_n = IA_{F_n}$; dans le chapitre 5, nous donnerons une réponse partielle à la version stable du problème (problème 3).

Appliquons le théorème 1.3.1 à la suite centrale descendante $G_* = \Gamma_G$. On obtient une filtration fortement centrale $\mathcal{A}_*(G) := \mathcal{A}_*(\mathrm{Aut}(G), \Gamma_G)$ sur un sous-groupe $\mathcal{A}_1(G)$ de $\mathrm{Aut}(G)$. Par la remarque 1.3.3, $\mathcal{A}_1(G)$ est le groupe des automorphismes qui préservent les Γ_i (ce qui est automatiquement vérifié) et agissent trivialement sur $\mathcal{L}(G)$. Or $\mathcal{L}(G)$ est engendrée en degré 1 (proposition 1.2.5). Cette dernière condition revient donc à demander que l'action sur $\mathcal{L}_1(G) = G^{ab}$ soit triviale. Ainsi, $\mathcal{A}_1(G)$ est le groupe, noté IA_G (pour « Identity on Abelianization »), des automorphismes agissant trivialement sur l'abélianisation de G :

$$\mathcal{A}_1(G) = IA_G := \ker\left(\mathrm{Aut}(G) \longrightarrow GL(G^{ab})\right).$$

Comme $IA_G = \mathcal{A}_1(G)$ est le noyau de l'action canonique de $\mathrm{Aut}(G)$ sur $\mathcal{L}(G)$, cette action se factorise en une action fidèle de $\mathrm{Aut}(G)/IA_G$ ($\leqslant GL(G^{ab})$).

En fait, on a une caractérisation similaire de chacun des $\mathcal{A}_j(G)$:

Lemme 1.7.1. *Les éléments de $\mathcal{A}_j(G)$ sont les automorphismes qui induisent l'identité sur $G/\Gamma_{j+1}(G)$,* i.e. *:*

$$\mathcal{A}_j(G) = \{\ \sigma \in \mathrm{Aut}(G) \mid [\sigma, G] \subseteq \Gamma_{j+1}(G)\ \}.$$

Démonstration. Notons K_j le sous-groupe défini par le membre de droite de l'égalité cherchée, et montrons par récurrence qu'il est inclus dans $\mathcal{A}_j(G)$ (l'autre inclusion est évidente). On vient de voir que c'est vrai pour $j = 1$. Supposons que ce soit vrai au rang $j - 1$. Soit σ dans K_j. En particulier, σ est dans $K_{j-1} = \mathcal{A}_{j-1}(G)$, donc induit une dérivation $[\sigma, -]$ de degré $j - 1$ de $\mathcal{L}(G)$, par ce qu'on a vu en 1.5. Supposer que $[\sigma, G]$ est inclus dans Γ_{j+1} revient exactement à dire que cette dérivation est triviale en degré 1. Par 1.2.5, elle est alors triviale en tout degré i : pour tout i, $[\sigma, \Gamma_i]$ est inclus dans Γ_{i+j}, ce qu'on voulait démontrer. □

On donne un nom à la filtration ainsi obtenue :

Définition 1.7.2. La *filtration d'Andreadakis* sur $\mathrm{Aut}(G)$ est donnée par :

$$\mathcal{A}_j(G) := \ker\left(\mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G/\Gamma_{j+1}(G))\right).$$

Cette filtration est une suite fortement centrale de $\mathcal{A}_1 = IA_G$; par conséquent, $\mathcal{A}_k(G)$ contient $\Gamma_k(IA_G)$.

Si G est c-nilpotent, alors pour $j \geqslant c$, $\mathcal{A}_j(G) = \{\mathbb{1}_G\}$, donc $\Gamma_j(IA_G) = \{\mathbb{1}_G\}$. La proposition ainsi obtenue était la motivation de Kaloujnine pour son théorème 1.3.1 :

Proposition 1.7.3. *Soit G un groupe nilpotent de classe c. Alors IA_G est nilpotent de classe $c-1$.*

La proposition est en fait encore vraie pour $c = \omega$, *i.e.* si G est *résiduellement nilpotent*, autrement dit si :
$$\bigcap_i \Gamma_i(G) = \{1\}.$$
Supposons en effet que ce soit le cas. Soit $\varphi \in \bigcap \mathcal{A}_j(G)$. Par définition de la filtration d'Andreadakis :
$$[\varphi, G] \subseteq \bigcap \Gamma_i(G) = \{1\}.$$
Autrement dit, pour tout g dans G :
$$1 = [\varphi, g] = \varphi(g)g^{-1},$$
donc φ ne peut être que l'identité de G. Finalement :
$$\bigcap \Gamma_j(IA_G) \subseteq \bigcap \mathcal{A}_j(G) = \{\mathbb{1}_G\},$$
et on a bien montré :

Proposition 1.7.4. *Si G est un groupe résiduellement nilpotent, alors IA_G l'est aussi.*

La question suivante est cruciale pour la compréhension de la structure des groupes d'automorphismes de groupes résiduellement nilpotents, en particulier pour comprendre la structure de $\mathrm{Aut}(F_n)$:

Problème 1.7 (Andreadakis)**.** *Quelle est la différence entre les filtrations $\mathcal{A}_*(G)$ et $\Gamma_*(IA_G)$ de IA_G ?*

Exemple 1.7.5. Le groupe alterné A_n a pour groupe d'automorphismes Σ_n (agissant par conjugaison) pour $n \neq 6$, comme on le déduit facilement de [Rot95, cor. 7.5]. Si $n \geqslant 5$, alors A_n est simple et non commutatif, donc parfait : $[A_n, A_n] = A_n$. La filtration d'Andreadakis est donc triviale, toujours égale à $IA(A_n) = \mathrm{Aut}(A_n) = \Sigma_n$. Mais la filtration centrale descendante de Σ_n est $\Sigma_n, A_n, A_n, ...$, distincte de la précédente.

Si $G = F_n$ (groupe libre sur n générateurs), on note IA_n pour IA_G. Nous nous intéresserons notamment (chapitre 5) à une question plus faible, pour laquelle l'égalité est peut-être vérifiée :

Problème 3 (Andreadakis - version stable)**.** *Quelle est la différence entre $\mathcal{A}_k(F_n)$ et $\Gamma_k(IA_n)$ pour $n \gg k$?*

Le morphisme de Johnson se révèle être un outil particulièrement utile pour l'étude de la filtration d'Andreadakis (qui est l'analogue pour $\mathrm{Aut}(F_n)$ de la *filtration de Johnson* sur les groupes de difféotopie, défine par Johnson dans [Joh83])).

Précisément, explicitons les constructions du paragraphe 1.6 dans ce cadre. Puisque $\mathcal{A}_*$ agit sur Γ_*G, le crochet dans $G \rtimes IA_G$ induit une structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{L}(G) \oplus \mathcal{L}(\mathcal{A})$, qui est un produit semi-direct $\mathcal{L}(G) \rtimes \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Le morphisme de Johnson décrivant cette structure prend la forme :
$$\tau : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(\mathcal{L}(G)) \\ \sigma & \longmapsto & \mathrm{ad}_\sigma |_{\mathcal{L}(G)}. \end{array} \right. \tag{1.7.5.1}$$
Ceci revient à la définition explicite classique (exemple 1.6.6). Puisque la suite centrale descendante est constituée de sous-groupes caractéristiques, $\mathcal{A}_0(G) = \mathrm{Aut}(G)$, et en appliquant les lemmes 1.6.7 et 1.6.8, on obtient :

Lemme 1.7.6. *τ est injectif et $\mathrm{Aut}(G)/IA_G$-équivariant.*

Ici, $\mathrm{Aut}(G)$ agit par son action induite par la conjugaison sur $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, et par conjugaison sur les dérivations à l'arrivée.

Remarquons qu'on peut faire exactement la même construction en remplaçant la filtration $\mathcal{A}_*$ par la filtration $\Gamma_*(IA_G)$. En effet, puisque $\Gamma_k(IA_G) \subseteq \mathcal{A}_k$ pour tout k, $\Gamma_*(IA_G)$ agit aussi sur Γ_G (au sens de la proposition 1.5.14). En fait, par définition de IA_G, la proposition 1.6.11 s'applique dans ce cadre :

$$\mathcal{L}(G \rtimes IA_G) \cong \mathcal{L}(G) \rtimes \mathcal{L}(IA_G).$$

On munit ainsi $\mathcal{L}(G) \oplus \mathcal{L}(IA_G)$ d'une structure de produit semi-direct d'algèbres de Lie, muni d'un morphisme canonique $id \rtimes i_*$ vers $\mathcal{L}(G) \rtimes \mathcal{L}(\mathcal{A})$, induit par l'inclusion $i : \Gamma_*(IA_G) \subseteq \mathcal{A}$. Le morphisme de Johnson correspondant à cette décomposition est noté τ' :

$$\tau' : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\Gamma_{IA_G}) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(\mathcal{L}(G)) \\ \sigma & \longmapsto & \mathrm{ad}_\sigma|_{\mathcal{L}(G)}. \end{array} \right. \tag{1.7.6.1}$$

Il se factorise à travers τ :

$$\tau' = \tau \circ i_*,$$

où i_* est induit par l'inclusion $i : \Gamma_*(IA_G) \subseteq \mathcal{A}$. Cette factorisation correspond au fait que l'inclusion induit un morphisme $id \rtimes i_*$ entre les produits semi-directs.

Remarque 1.7.7. Le morphisme τ' est encore équivariant, mais il n'est injectif que si la conjecture d'Andreadakis est vraie sur G (c'est-à-dire si i_* est un isomorphisme).

1.8 Comparaison de suites fortement centrales

Si G est un groupe agissant sur deux suites fortement centrales H_* et K_* (par automorphismes préservant les filtrations), on peut se demander quel lien existe entre $\mathcal{A}_*(G, H_*)$ et $\mathcal{A}_*(G, K_*)$ en fonction des liens qui existent en H_* et K_*. Nous explorons dans cette section quelques liens possibles, et énonçons quelques résultats utilisés de manière cruciale dans la suite.

La proposition suivante décrit le comportement de la construction $\mathcal{A}_*(G, -)$ vis-à-vis des injections, surjections et produits semi-directs (cf. la définition 1.5.1) de la catégorie $G - \mathcal{SFC}$ des suites fortement centrales munies d'une action de G, avec les morphismes respectant les actions :

Proposition 1.8.1. *Soit G un groupe agissant sur les suites fortement centrales N_*, H_* et K_*. Tous les morphismes ci-dessous sont supposés G-équivariants.*

Si $N_* \hookrightarrow H_*$ est une injection, alors $\mathcal{A}_*(G, H_*) \subseteq \mathcal{A}_*(G, N_*)$.

Si $H_* \twoheadrightarrow K_*$ est une surjection, alors $\mathcal{A}_*(G, H_*) \subseteq \mathcal{A}_*(G, K_*)$.

Si $N_* \hookrightarrow H_* \overset{\leftarrow}{\twoheadrightarrow} K_*$ est une suite exacte courte scindée (par une section G-équivariante), alors :

$$\mathcal{A}_*(G, H_*) = \mathcal{A}_*(G, K_*) \cap \mathcal{A}_*(G, N_*).$$

Démonstration. Dans le premier cas, on identifie $N = N_1$ à un sous-groupe de $H = H_1$. Soit $g \in \mathcal{A}_j(G, H_*)$. On écrit :

$$[g, N_i] = [g, N \cap H_i] \subseteq [g, N] \cap [g, H_i] \subseteq N \cap H_{i+j} = N_{i+j}.$$

Pour montrer la seconde assertion, notons p la surjection considérée, et prenons $g \in A_j(G, H_*)$. On écrit :

$$[g, K_i] = [g, p(H_i)] = p([g, H_i]) \subseteq p(H_{i+j}) = K_{i+j},$$

L'hypothèse de la troisième assertion revient à demander que H_* s'écrive comme une produit semi-direct $K_* \ltimes N_*$, avec l'action de G donnée par l'action sur les facteurs. Mais alors on a des isomorphismes G-équivariants :

$$H_i/H_{i+j} \cong K_i/K_{i+j} \ltimes N_i/N_{i+j}.$$

L'égalité cherchée traduit simplement le fait qu'un élément g de G agit trivialement sur le membre de gauche si et seulement s'il agit trivialement . □

Exemple 1.8.2. On peut appliquer la proposition 1.8.1 pour les produits directs :

$$\mathcal{A}_*(G, N_* \times K_*) = \mathcal{A}_*(G, N_*) \cap \mathcal{A}_*(G, K_*).$$

Remarque 1.8.3. Pour une suite exacte $1 \longrightarrow N_* \xrightarrow{u} H_* \xrightarrow{v} K_* \longrightarrow 1$ non scindée dans $G - \mathcal{SFC}$, la première partie de la proposition 1.8.1 donne :

$$\mathcal{A}_*(G, H_*) \subseteq \mathcal{A}_*(G, K_*) \cap \mathcal{A}_*(G, N_*).$$

Néanmoins, en général, on n'a pas l'égalité. En effet, les suites :

$$1 \longrightarrow N_i/N_{i+j} \xrightarrow{u} H_i/H_{i+j} \xrightarrow{v} K_i/K_{i+j} \longrightarrow 1$$

sont exactes, mais la trivialité de l'action sur le noyau et le quotient ne suffisent pas à déduire que l'action est triviale sur le terme central. Par exemple parce que $H^1(G) = \mathrm{Ext}^1_G(\mathbb{Z}^{triv}, \mathbb{Z}^{triv})$ est en général non trivial.

Remarque 1.8.4. Avec les notations de la définition 1.5.10, étant donnée une suite exacte courte $N_* \hookrightarrow H_* \twoheadrightarrow K_*$ dans $G - \mathcal{SFC}$, la proposition 1.8.1 (ou la remarque 1.8.3) implique que c'est en fait une une suite exacte courte dans $\mathcal{A}_*(G, H_*) - \mathcal{SFC}$. Si l'on applique le foncteur de Lie (qui est exact par la proposition 1.6.1), on obtient une suite exacte $\mathcal{L}(N_*) \hookrightarrow \mathcal{L}(H_*) \twoheadrightarrow \mathcal{L}(K_*)$ qui est $\mathcal{L}(\mathcal{A}_*(G, H_*))$-équivariante (cf. la remarque qui suit la définition 1.5.10).

Proposition 1.8.5. *Soit $K \circlearrowright N$ une action dans $G - \mathcal{G}rpes$. Soit N_* une suite fortement centrale sur N. Alors :*

$$\mathcal{A}_*(G, N_*) \subseteq \mathcal{A}_*\left(G, \mathcal{A}_*(K, N_*)\right).$$

Démonstration. Notons K_* la filtration $\mathcal{A}_*(K, N_*)$ et G_* la filtration $\mathcal{A}_*(G, N_*)$. L'inclusion suivante provient d'une application directe du lemme des trois sous-groupes (lemme 1.1.5) dans $(N \rtimes K) \rtimes G$:

$$[[G_\alpha, K_\beta], N_\gamma] \subseteq N_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Ainsi, $[G_\alpha, K_\beta] \subseteq \mathcal{A}_{\alpha+\beta}(K, N_*) = K_{\alpha+\beta}$, c'est-à-dire : $G_\alpha \subseteq \mathcal{A}_\alpha(G, K_*)$. □

Corollaire 1.8.6. *Soit G un groupe agissant sur une algèbre filtrée A_* par automorphismes d'algèbre filtrée. Alors :*

$$\mathcal{A}_*(G, A_*) \subseteq \mathcal{A}_*(G, A_*^\times).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 1.8.5 à la suite exacte scindée G-équivariante :

$$A \hookrightarrow A \rtimes A^\times \overset{\curvearrowleft}{\twoheadrightarrow} A^\times,$$

où $A^\times$ agit sur A par multiplication à gauche, et le groupe additif A est filtré par la filtration donnée. □

Remarque 1.8.7. L'action de G-groupes $A \hookrightarrow A \rtimes A^\times \overset{\curvearrowleft}{\twoheadrightarrow} A^\times$ se relève en une action de $A_*^\times$ sur A_* dans la catégorie $\mathcal{A}_*(G, A_*) - \mathcal{SFC}$. D'après la remarque 1.8.4, celle-ci induit une action $\mathcal{L}(\mathcal{A}_*(G, A_*))$-équivariante d'anneaux de Lie.

On peut en considérer une variante, en remplaçant la section triviale par la section $\sigma = (d, \mathbb{1})$ où d désigne la dérivation

$$d := (-) - 1 : A^\times \longrightarrow A.$$

Comme G agit par automorphismes d'algèbre, c'est bien une section G-équivariante. Avec le même raisonnement que ci-dessus, on constate que l'application $\overline{d}$ induite sur les gradués est $\mathcal{L}(\mathcal{A}_*(G, A_*))$-équivariante. On peut aussi donner une démonstration directe de l'équivariance. Précisément $g \in \mathcal{A}_j$ et $x \in A_i^\times$:

$$\begin{aligned} d([g,x]) - [g, dx] &= d((gx)x^{-1}) - (g(dx) - dx) \\ &= d(gx) - (gx)x^{-1}dx - g(dx) + dx \\ &= (1 - [g,x])dx \in A_{i+j}A_i \subseteq A_{i+j+1}. \end{aligned}$$

Concluons cette section avec un cas d'égalité dans l'inclusion du corollaire 1.8.6 :

Proposition 1.8.8. *Soit G un groupe, et $\mathbb{k}$ un anneau. Alors :*

$$\mathcal{A}_*\left(\mathrm{Aut}(G), D_*^{\mathbb{k}}G\right) = \mathcal{A}_*\left(\mathrm{Aut}(G), (\mathbb{k}G)^\times \cap (1 + I_{\mathbb{k}}^*G)\right) = \mathcal{A}_*\left(\mathrm{Aut}(G), I_{\mathbb{k}}^*G\right).$$

Démonstration. Considérons l'algèbre filtrée $A = \mathbb{Z}G$, munie de la filtration par les puissances de l'idéal d'augmentation : $A_j := (IG)^j$. $\mathrm{Aut}(G)$ agit sur A_* par automorphismes d'algèbre filtrée.

Par définition de la suite de dimension, on a une injection de groupes filtrés :

$$D_*^{\mathbb{k}}G \hookrightarrow A_*^\times,$$

qui induit (par 1.8.1) la première des inclusions :

$$\mathcal{A}_*(\mathrm{Aut}(G), D_*^{\mathbb{k}}G) \supseteq \mathcal{A}_*(\mathrm{Aut}(G), A_*^\times) \supseteq \mathcal{A}_*(\mathrm{Aut}(G), A_*),$$

la seconde étant donnée par 1.8.6.

Pour montrer l'égalité, prenons $\varphi \in \mathcal{A}_j(\mathrm{Aut}(G), D_*^{\mathbb{k}}G)$, alors :

$$\forall g \in G = D_1G, \quad [\varphi, g] = (\varphi(g)g^{-1} - 1)g \in (D_{j+1} - 1)G \subseteq I^{j+1}.$$

On montre alors par récurrence sur $i \geqslant 1$:

$$[\varphi, I^i] \subseteq I^{i+j},$$

en utilisant la formule :

$$[\varphi, uv] = [\varphi, u]\varphi(v) + u[\varphi, v].$$

Remarquons que, dans le langage de la section 5.3, la dernière formule signifie que $[\varphi, -]$ est une $(\mathbb{1}, \varphi)$-dérivation, donc on a en fait utilisé le lemme 5.3.5. □

1.9 Problème d'Andreadakis modulo un nombre entier

1.9.1 Suite centrale descendante modulo q

Soit q est un nombre entier. Une version modulo q de la suite centrale descendante est définie par Stallings dans [Sta65] :

Définition 1.9.1. La *suite centrale descendante modulo* q d'un groupe G, qu'on note $\Gamma^{(q)}(G)$, $\Gamma^{(q)}_G$ ou simplement $\Gamma^{(q)}$, est la suite de sous-groupes de G donnée par :

$$\begin{cases} \Gamma_1^{(q)} := G, \\ \Gamma_{k+1}^{(q)} := [G, \Gamma_k^{(q)}](\Gamma_k^{(q)})^q, \end{cases}$$

où K^q désigne le sous-goupe engendré par l'ensemble $\{\ g^q \mid g \in K\ \}$.

Notation 1.9.2. Pour le reste de cette section, afin d'alléger les notations, on omettra souvent la mention de q, et on notera simplement Γ_* cette filtration.

Remarque 1.9.3. Le sous-groupe Γ_{k+1} est contenu dans Γ_k : c'est l'image réciproque de $q(\Gamma_k)_G$, sous-groupe du quotient abélien $(\Gamma_k)_G := \Gamma_k/[G, \Gamma_k]$ de Γ_k. En particulier, $\Gamma_k/\Gamma_{k+1} = (\Gamma_k)_G/q(\Gamma_k)_G$ est un groupe abélien de q-torsion. De plus, ce sont des sous-groupes verbaux de G (cf. par exemple [Pas79] pour la notion de *sous-groupe verbal*). En particulier, les Γ_k sont des sous-groupes caractéristiques de G.

Définition 1.9.4. Une filtration fortement centrale G_* est dite *de q-torsion* si $\mathcal{L}(G_*)$ est de q-torsion, c'est-à-dire si :

$$\forall i \geqslant 1,\ G_i^q \subseteq G_{i+1}.$$

Comme pour la suite centrale descendante classique (qui peut être vue comme le cas particulier $q = 0$), on a :

Proposition 1.9.5. *Pour tout groupe G, la suite centrale descendante $\Gamma_*^{(q)}G$ est fortement centrale. C'est la plus petite filtration fortement centrale de q-torsion sur G.*

Démonstration. On démontre que $[\Gamma_i, \Gamma_j] \subseteq \Gamma_{i+j}$, pour tout $i \geqslant 1$, par récurrence sur j. Si $j = 1$, ceci découle directement de la définition. Supposons la conclusion vraie pour j, et montrons-la pour $j + 1$. En utilisant la formule $[a, bc] = [a, b]({}^b[a, c])$, on obtient :

$$[\Gamma_i, \Gamma_{j+1}] = \left[\Gamma_i, [G, \Gamma_j]\Gamma_j^q\right] \subseteq [\Gamma_i, [G, \Gamma_j]] \cdot \mathcal{N}\left([\Gamma_i, \Gamma_j^q]\right),$$

où $\mathcal{N}(-)$ désigne la clôture normale. Par le lemme des trois sous-groupes (1.1.5) et l'hypothèse de récurrence :

$$[\Gamma_i, [G, \Gamma_j]] \subseteq \mathcal{N}\left([[\Gamma_i, G], \Gamma_j] \cup [G, [\Gamma_i, \Gamma_j]]\right) \subseteq \mathcal{N}(\Gamma_{i+j+1}) = \Gamma_{i+j+1}.$$

Puis, si x et y sont des éléments de Γ_i et Γ_j respectivement, on écrit :

$$[x, y^q] = [x, y]({}^y[x, y]) \cdots ({}^{y^{q-1}}[x, y]) \equiv [x, y]^q \pmod{\Gamma_{i+j+1}},$$

puisque $[x, y]$ est dans Γ_{i+j} par hypothèse de récurrence, donc $[y, [x, y]] \in \Gamma_{i+j+1}$, c'est-à-dire que y et $[x, y]$ commutent modulo Γ_{i+j+1}. Par définition de Γ_*, le crochet $[x, y^q]$ est alors dans Γ_{i+j+1}. On a montré :

$$[\Gamma_i, \Gamma_j^q] \subseteq \Gamma_{i+j+1},$$

ce qui achève la preuve de la forte centralité.

La remarque 1.9.3 assure que $\mathcal{L}(\Gamma_*^{(q)}G)$ (qu'on notera $\mathcal{L}^{(q)}(G)$) est de q-torsion, ce qui signifie que la filtration $\Gamma_*^{(q)}G$ est de q-torsion. La minimalité est évidente : si G est une autre filtration fortement centrale de q-torsion sur G, on montre par une récurrence immédiate : $\Gamma_*^{(q)} \subseteq G_*$. □

Remarque 1.9.6. On donnera une description alternative de la filtration $\Gamma_*^{(q)}G$ dans l'exemple 2.3.8.

1.9.2 Théorème de Stallings

Une propriété remarquable de ces filtrations est donnée par le théorème de Stallings ([Sta65], théorème 3.4). On note ici $\Bbbk$ pour $\mathbb{Z}/q$ ($= \mathbb{Z}$ si $q = 0$), et $H_*(-)$ pour $H_*(-, \Bbbk)$.

Théorème 1.9.7. *Soit $f : G \longrightarrow K$ un morphisme de groupes induisant un isomorphisme $H_1(G) \cong H_1(K)$, et tel que le morphisme induit de $H_2(G)$ dans $H_2(K)$ soit surjectif. Alors f induit des isomorphismes :*

$$G/\Gamma_k(G) \cong K/\Gamma_k(K).$$

En particulier, f induit un isomorphisme :

$$\mathcal{L}(\Gamma_*(G)) \cong \mathcal{L}(\Gamma_*(K)).$$

Démonstration. Considérons la suite exacte à 5 termes associée à l'extension :

$$1 \to \Gamma_k \to G \to G/\Gamma_k \to 1.$$

Celle-ci s'écrit :

$$H_2(G) \to H_2(G/\Gamma_k) \to H_0(G, H_1(\Gamma_k)) \to H_1(G) \to H_1(G/\Gamma_k) \to 0.$$

Posons :

$$M := H_1(\Gamma_k) = \Gamma_k^{ab} \otimes \Bbbk = \Gamma_k/([\Gamma_k, \Gamma_k]\Gamma_k^q).$$

Le terme central de la suite exacte à 5 termes s'écrit :

$$H_0(G, M) = M_G = M/[G, M] = \Gamma_k/([G, \Gamma_k]\Gamma_k^q) = \Gamma_k/\Gamma_{k+1}.$$

En écrivant la même chose pour K, et en écrivant le morphisme de suites exactes induit par f, une application directe du lemme des 5 donne que $(\Gamma_k/\Gamma_{k+1})(f)$ est un isomorphisme si f induit des isomorphismes modulo Γ_k. Ceci donne le résultat par récurrence (l'initialisation est évidente : $G/\Gamma_2 = H_1(G)$). □

1.9.3 Opérations et engendrement en degré 1

La propriété d'engendrement en degré 1 (1.2.5) n'est plus vérifiée telle quelle pour $q > 0$. Néanmoins, on peut en conserver le contenu en considérant plutôt des algèbres de Lie (graduées) munies d'une certaine opération de puissance q-ième.

On note $\mathcal{SFC}_q$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{SFC}$ dont les objets sont les filtration fortement centrales de q-torsion. Soit N_* une telle filtration. Soit $x \in N_i - N_{i+1}$. Par définition de N_*, x^q définit un élément de N_{i+1}. L'application $x \mapsto x^q$ induit en fait une application bien définie :

$$N_i/N_{i+1} \longrightarrow N_{i+1}/N_{i+2}.$$

En effet, si $\eta \in N_{i+1}$, on a $[x, \eta] \in N_{2i+1} \subseteq N_{i+2}$, donc x et η commutent modulo N_{i+2}, et par conséquent :

$$(x\eta)^q \equiv x^q \eta^q \equiv x^q \pmod{N_{i+2}}.$$

Ceci définit une application de $\mathcal{L}_i(N_*)$ dans $\mathcal{L}_{i+1}(N_*)$, naturelle en $N_* \in \mathcal{SFC}_q$, qui a certaines propriétés de compatibilité avec la strucure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{L}(N_*)$. Précisément :

Lemme 1.9.8. $(-)^q$ *est linéaire sur* $\mathcal{L}_i(N_*)$*, pour* $i \geqslant 2$*. De plus :*

$$\forall i,\ \forall x, y \in \mathcal{L}_i(N_*),\ [x, y]^q = [x, y^q].$$

Démonstration. Pour $i \geqslant 2$, si x et y sont dans N_i, ils commutent modulo $[N_i, N_i] \subseteq N_{i+2}$, donc :

$$(xy)^q \equiv x^q y^q \pmod{N_{i+2}},$$

ce qui prouve la première assertion, puisque la somme dans $\mathcal{L}(N_*)$ est induite par le produit dans G.

Pour la seconde, on écrit :

$$[x, y^q] = [x, y]({}^y[x, y]) \cdots ({}^{y^{q-1}}[x, y]) \equiv [x, y]^q \pmod{\Gamma_{i+2}},$$

puisque $[y, [x, y]] \in \Gamma_{3i} \subseteq \Gamma_{i+2}$, c'est-à-dire que y et $[x, y]$ commutent modulo Γ_{i+2}. □

Une algèbre de Lie munie d'une telle opération de puissance q-ième sera dite q-*alimentée*. Par définition de $\Gamma_*^{(q)}$, on obtient un analogue de la proposition 1.2.5, qui se démontre de la même façon :

Proposition 1.9.9. $\mathcal{L}^{(q)}(G)$ *est* engendrée en degré 1*, c'est-à-dire qu'elle est engendrée, comme algèbre de Lie* q*-alimentée, par* $\mathcal{L}_1^{(q)}(G) = G^{ab} \otimes \mathbb{Z}/q$*. En particulier, si* G *est de type fini, chaque* $\mathcal{L}_n^{(q)}(G)$ *l'est aussi.*

On peut examiner comment se comportent les constructions du paragraphe 1.5 vis-à-vis de l'opération que l'on vient d'introduire. Par exemple, sous les hypothèses de la proposition 1.5.14, si H_* et K_* sont de q-torsion, $H_* \rtimes K_*$ l'est aussi, et le morphisme de Johnson associé (définition 1.6.5) est à valeurs dans les dérivations préservant l'opération.

De plus, si H_* est une suite fortement centrale de q-torsion, et K agit sur $H = H_1$, alors $\mathcal{L}(\mathcal{A}_*(K, H_*))$ (définition 1.5.16) s'injecte dans $\mathrm{Der}(\mathcal{L}(H_*))$ (lemme 1.6.8), donc $\mathcal{A}_*(K, H_*)$ est aussi de q-torsion.

1.9.4 Problème d'Andreadakis modulo q

La construction de 1.3 donne un analogue modulo q de la filtration d'Andreadakis :

$$\mathcal{A}_j^{(q)}(G) := \mathcal{A}_j\left(\mathrm{Aut}(G), \Gamma_*^{(q)} G\right) = \left\{ \sigma \in \mathrm{Aut}(G) \;\middle|\; \forall i, \left[\sigma, \Gamma_i^{(q)} G\right] \subseteq \Gamma_{i+j}^{(q)} G \right\}.$$

Ceci définit une filtration fortement centrale sur $\mathcal{A}_1^{(q)}(G) =: IA^{(q)}(G)$. Comme Cooper [Coo15], on montre que les conditions définissant $\mathcal{A}_j^{(q)}(G)$ sont redondantes : il suffit d'avoir la condition correspondant à $i = 1$.

Lemme 1.9.10. *Pour tout entier $j \geqslant 1$:*

$$\mathcal{A}_j^{(q)}(G) = \left\{ \sigma \in \mathrm{Aut}(G) \;\middle|\; [\sigma, G] \subseteq \Gamma_{j+1}^{(q)} G \right\} = \ker\left(\mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G/\Gamma_{j+1}^{(q)} G)\right).$$

En particulier, $IA^{(q)}(G)$ est le noyau du morphisme :

$$\mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G^{ab} \otimes \mathbb{Z}/q).$$

Démonstration. Comme en 1.7, notons K_j le groupe :

$$\{ \sigma \in \mathrm{Aut}(G) \mid [\sigma, G] \subseteq \Gamma_{j+1} G \},$$

et montrons par récurrence sur j qu'il est inclus dans $\mathcal{A}_j(G)$ (l'autre inclusion est évidente). Soit $\sigma \in K_1$. Alors σ induit un endomorphisme $\overline{\sigma}$ de l'algèbre de Lie q-alimentée $\mathcal{L}(\Gamma_* G)$, qui est trivial en degré 1. La proposition 1.9.9 implique $\overline{\sigma} = \mathbb{1}$, donc $\sigma \in \mathcal{A}_1$.

Supposons à présent que K_{j-1} soit égal à $\mathcal{A}_{j-1}(G)$. Soit $\sigma \in K_j \subseteq K_{j-1} = \mathcal{A}_{j-1}(G)$. Alors σ induit une dérivation $\tau(\sigma) = [\sigma, -]$ de degré $j-1$ de l'algèbre de Lie q-alimentée $\mathcal{L}(\Gamma_* G)$ (elle préserve l'opération de puissance q-ième par 1.9.8). Par hypothèse, cette dérivation est nulle en degré 1. Elle est donc nulle, et $\sigma \in \mathcal{A}_j$, ce qui achève la preuve. □

Remarque 1.9.11. Le lemme 1.9.10 est en fait aussi vrai pour $j = 0$, puisque les $\Gamma_i^{(q)} G$ sont caractéristiques dans G.

Comme on l'a remarqué à la fin du paragraphe 1.9.3, la suite fortement centrale $\mathcal{A}_*^{(q)}(G)$ est de q-torsion. Par conséquent, $\Gamma_*^{(p)}(IA^{(q)}(G)$ est inclus dans $\mathcal{A}_*^{(q)}(G)$. On peut alors poser une question analogue au problème d'Andreadakis :

Problème 5 (Andreadakis modulo q)**.** *Quelle est la différence entre les filtrations $\mathcal{A}_*^{(q)}(G)$ et $\Gamma_*^{(p)}(IA^{(q)}(G))$ de $IA^{(q)}(G)$?*

Remarque 1.9.12. Contrairement au problème d'Andreadakis classique (problème 1.7), ce problème est loin d'être trivial pour les groupes abéliens. Par exemple, pour $G = \mathbb{Z}^n$, $\Gamma_*^{(q)} G$ n'est autre que $p^* \mathbb{Z}^n$. La filtration d'Andreadakis correspondante est alors la filtration du groupe de congruence $IA^{(q)}(G) = GL_n(q\,\mathbb{Z})$ par $\mathcal{A}_*^{(q)}(\mathbb{Z}^n) = GL_n(q^*\,\mathbb{Z})$ rencontrée au paragraphe 1.4. Ainsi, la proposition 1.4.4 peut être vue comme une réponse au problème d'Andreadakis modulo q stable (et un peu plus : les deux filtrations sont égales à la suite centrale descendante de $GL_n(q^*\,\mathbb{Z})$, si $n \geqslant 5$.

Remarque 1.9.13. Les méthodes que nous utilisons au chapitre 5 pour étudier le problème d'Andreadakis reposent de manière cruciale sur les structures algébriques associées aux filtrations par les groupes de dimension $D_*^{\mathbb{Z}}(F_n) = \Gamma_*(F_n)$, ou $D_*^{\mathbb{F}_p}(F_n) = \Gamma_*^{[p]}(F_n)$ (version p-restreinte - cf. la section 2.5). En particulier, elles ne sont donc pas adaptées pour l'étude du problème ci-dessus.

1.A Appendice : Étude de la catégorie $\mathcal{SFC}$

Dans cet appendice, nous examinons différentes notions classiques d'épimorphismes, puis nous les interprétons dans la catégorie $\mathcal{SFC}$ afin de montrer qu'elle est homologique (proposition 1.5.12).

1.A.1 Monomorphismes et Épimorphismes

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Si p est un morphisme dans $\mathcal{C}$, on rappelle que p est un *épimorphisme* si :

$$\forall u, v, \quad up = vp \;\Rightarrow\; u = v.$$

La notion duale est celle de *monomorphisme*.

Si α, β et f sont des morphismes de $\mathcal{C}$, on rappelle que f est un *coégalisateur* de α et β si $f\alpha = f\beta$ et si :

$$\forall g, \quad g\alpha = g\beta \;\Rightarrow\; \exists!\ \overline{g},\ g = \overline{g}f.$$

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \bullet \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \bullet \arrow[d, dashed, "\overline{g}"] \\
 & & \bullet .
\end{tikzcd}$$

On note $f = \operatorname{coeq}(\alpha, \beta)$. La notion duale est celle d'*égalisateur*.

L'unicité de la factorisation assure alors que f est un épimorphisme. En fait, f est aussi un *épimorphisme fort*, au sens où une factorisation $f = if'$ par un monomorphisme i ne peut exister que si i est un isomorphisme. En effet, f' égalise alors α et β, donc $f' = jf$. Mais alors $f = ijf$, donc $ij = \mathbb{1}$, puis $iji = i$, donc $ji = \mathbb{1}$.

Si l'on suppose en plus que la catégorie $\mathcal{C}$ admet des égalisateurs finis, les épimorphismes forts sont toujours des épimorphismes. En effet, si f est un épimorphisme fort, si $\alpha f = \beta f$, en notant e l'égalisateur de α et β, il existe $\overline{f}$ tel que $f = e\overline{f}$. Comme e est un monomorphisme, c'est un isomorphisme. Or $e\alpha = e\beta$, donc $\alpha = \beta$.

Remarquons qu'en l'absence d'égalisateurs finis, ceci n'est plus vrai. Par exemple, dans la catégorie à trois objets X, Y et Z et quatre morphismes (en plus des identités) $f : X \to Y$, $a, b : Y \to Z$ et $g = af = bf$, le morphisme f n'est pas un épimorphisme, mais c'est un épimorphisme fort au sens de la définition ci-dessus. Néanmoins, nous n'utiliserons ces notions que dans des catégories possédant des égalisateurs finis, dans lesquelles la terminologie de présente pas d'ambiguïté.

Si $\mathcal{C}$ est *pointée* (*i.e.* si elle admet un objet initial et final 0), alors on définit le *conoyau* d'un morphisme f comme étant $\operatorname{coeq}(f, 0)$. On le note $\operatorname{coker}(f)$. La notion duale est celle de *noyau*.

Une autre notion forte d'épimorphisme est celle d'*épimorphisme scindé* : un épimorphisme scindé est un morphisme p tel qu'il existe i vérifiant $pi = \mathbb{1}$. Un épimorphisme scindé est toujours un épimorphisme, puisque $up = vp$ implique $u = upi = vpi = v$. C'est en fait toujours un coégalisateur : $p = \operatorname{coeq}(\mathbb{1}, ip)$.

Résumons ce que nous avons montré jusque-là :

Lemme 1.A.1. *Dans une catégorie $\mathcal{C}$ pointée avec des égalisateurs, on dispose de cinq notions d'épimorphisme, qui vérifient :*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \textit{épimorphisme scindé} & & & & \\
 & & \Downarrow & & & & \\
\textit{conoyau} & \Rightarrow & \textit{coégalisateur} & \Rightarrow & \textit{épimorphisme fort} & \Rightarrow & \textit{épimorphisme.}
\end{array}$$

Dualement (en appliquant ceci à $\mathcal{C}^{op}$), on a cinq notions de monomorphismes, qui vérifient les mêmes implications (si $\mathcal{C}$ admet des coégalisateurs).

On parle aussi de morphisme *régulier* pour un morphisme qui est un coégalisateur. Si $\mathcal{C}$ admet des produits fibrés, un tel f est alors le coégalisateur des morphismes p_0 et p_1 obtenus en faisant le produit fibré de f par f :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, dashed, "p_0"] \arrow[d, dashed, "p_1"'] & \bullet \arrow[d, "f"] \\ \bullet \arrow[r, "f"] & \bullet. \end{tikzcd}$$

Exemple 1.A.2. Dans la catégorie des groupes, un monomorphisme est un morphisme injectif. Tout monomorphisme est régulier :

$$\text{Si } H \hookrightarrow G, \quad H = \mathrm{eq}\left(G \rightrightarrows G \underset{H}{*} G\right). \tag{1.A.2.1}$$

Ceci provient du théorème d'écriture sous forme normale dans les sommes amalgamées de groupes [Ser77, Th. 1]. Cependant, un monomorphisme de groupes n'est un noyau que si c'est (à isomorphisme près) l'injection d'un sous-groupe *normal*. Remarquons que ceci donne un exemple de catégorie où un monomorphisme scindé n'est pas nécessairement un noyau, puisque K n'est en général pas normal dans $H \rtimes K$.

Dans cette même catégorie des groupes, Soit $p : K \longrightarrow G$ un épimorphisme. Si l'on avait $\mathrm{Im}\, p \neq G$, en prenant $H = \mathrm{Im}\, p$ dans (1.A.2.1), on trouverait deux morphismes distincts que p égaliserait. Ainsi, p doit être surjectif. Mais c'est alors le conoyau de son noyau : tout épimorphisme est un conoyau. Ainsi, seule la notion d'épimorphisme scindé se distingue des quatre autres.

1.A.2 Application à la catégorie $\mathcal{SFC}$

Examinons à présent ce que deviennent ces notions dans la catégorie $\mathcal{SFC}$ des suites fortement centrales.

Le foncteur d'oubli ω_1 vers les groupes admet un adjoint à droite, donc préserve les épimorphismes. Il est aussi fidèle, donc les reflète. Ainsi, p est un épimorphisme dans $\mathcal{SFC}$ si et seulement si $\omega_1(p)$ est surjectif. De même, comme ω_1 admet un adjoint à gauche et est fidèle, les monomorphismes de $\mathcal{SFC}$ sont ceux qui induisent des injections entre les groupes sous-jacents.

Soit maintenant $p : G_* \longrightarrow K_*$ un épimorphisme fort dans $\mathcal{SFC}$. La catégorie $\mathcal{SFC}$ est complète, donc p est aussi un épimorphisme, c'est-à-dire qu'il induit une surjection de $G = G_1$ sur $K = K_1$. Mais alors $p(G_*)$ est une filtration fortement centrale de $K = p(G)$, et p se factorise par l'inclusion de $p(G_*)$ dans K_*. Cette inclusion est un monomorphisme (c'est un isomorphisme sur les groupes sous-jacents), qui doit être un isomorphisme :

$$p(G_*) = K_*.$$

Il est facile de voir que cette condition est en fait équivalente à la condition d'épimorphisme fort dans $\mathcal{SFC}$.

Un raisonnement similaire montre qu'un morphisme $i : H_* \longrightarrow G_*$ est un monomorphisme fort si et seulement si :

$$i^{-1}(G_*) = H_*.$$

Si $p : G_* \longrightarrow K_*$ est un épimorphisme fort, la description des colimites dans $\mathcal{SFC}$ donnée dans la preuve de la proposition 1.2.13 implique que p est le conoyau de son noyau.

Si $i : H_* \longrightarrow G_*$ est un monomorphisme fort dans $\mathcal{SFC}$, la description des limites dans $\mathcal{SFC}$ donnée dans la preuve de la proposition 1.2.13, combinée avec la formule (1.A.2.1), implique :

$$H_* = i^{-1}(G_*) = \mathrm{eq}\left(G_* \rightrightarrows G_* \underset{H_*}{*} G_*\right).$$

Ceci implique que tout monomorphisme fort est régulier. Néanmoins, i n'est un noyau que si l'on a en plus :

$$i(H) \lhd G,$$

auquel cas il est bien le noyau de son conoyau.

La proposition suivante résume les conclusions de notre étude :

Proposition 1.A.3. *Dans la catégorie $\mathcal{SFC}$, les implications du lemme 1.A.1 deviennent :*

$$\textit{conoyau} \;\Leftrightarrow\; \textit{coégalisateur} \;\Leftrightarrow\; \textit{épimorphisme fort} \;\Rightarrow\; \textit{épimorphisme},$$

et la dernière implication est stricte : les épimorphismes sont les p tels que $\omega_1(p)$ est surjectif, alors que les épimorphismes réguliers sont les surjections *(définition 1.5.1).*

Quand aux monomorphismes, ils vérifient :

$$\textit{noyau} \;\Rightarrow\; \textit{égalisateur} \;\Leftrightarrow\; \textit{monomorphisme fort} \;\Rightarrow\; \textit{monomorphisme}.$$

les monomorphismes sont les i tels que $\omega_1(i)$ est injectif, les monomorphismes réguliers sont les injections *(définition 1.5.1), et les noyaux sont les injections dont l'image est normale.*

On utilise ces résultats pour montrer :

Proposition 1.5.12. *La catégorie $\mathcal{SFC}$ est homologique.*

Démonstration. On vérifie les axiomes A.1-A.3 de [HL11].
A.1) La catégorie est évidemment pointée, et l'existence des limites et colimites finies est donnée par la proposition 1.2.13.
A.2) Si l'on a une extension scindée de H_* par K_*, on vérifie facilement que le morphisme $H_* * K_* \longrightarrow H_* \rtimes K_*$ correspondant est une surjection.
A.3) La définition des produits fibrés dans $\mathcal{SFC}$ (proposition 1.2.13) implique que le produit fibré d'une surjection avec n'importe quel autre morphisme en est une. $\square$

Chapitre 2

Filtrations de l'algèbre de groupe

Sommaire

2.1 Théorème de clôture

Le but de cette section est d'énoncer le théorème de clôture 2.1.8 et d'en donner quelques conséquences, notamment la description (classique) des groupes de dimension (propositions 2.1.12 et 2.1.14), qui se trouve être une instance particulière de constructions plus générales. Ces constructions seront examinées en détail dans les sections 2.2 et 2.3.

2.1.1 Filtrations d'algèbres universelles

On s'intéresse aux filtrations fortement centrales obtenues par la méthode du théorème de Lazard (1.3.5), en particulier à partir de filtrations des algèbres de groupe $\Bbbk G$ (pour différents anneaux commutatifs $\Bbbk$).

Soit A_* une $\Bbbk$-algèbre associative filtrée (cf. la définition 1.3.4). D'après le théorème de Lazard (1.3.5), une telle filtration définit une suite fortement centrale $A_*^\times$ sur le groupe $A_1^\times = A^\times \cap (1 + \mathfrak{a}_1)$ par :

$$A_i^\times := A^\times \cap (1 + \mathfrak{a}_i).$$

On dispose également d'une construction dans l'autre sens : si G_* est une filtration fortement centrale sur un groupe $G = G_1$, on peut définir une filtration de l'algèbre $\Bbbk G$ par :

$$F_i := \Bbbk G \cdot (G_i - 1) = \ker(\Bbbk G \longrightarrow \Bbbk(G/G_i)).$$

Notons que F_1 n'est autre que l'idéal d'augmentation IG. Cette filtration n'est pas une filtration d'algèbre, mais on peut prendre la filtration d'algèbre qu'elle engendre, qu'on note $\mathfrak{a}_*^\Bbbk(G_*)$:

$$\mathfrak{a}_j^\Bbbk(G_*) := \sum_{i_1+\cdots+i_n \geqslant j} \Bbbk G \cdot (G_{i_1} - 1)\cdots(G_{i_n} - 1).$$

Cette construction définit un foncteur $\mathfrak{a}_*$ de $\mathcal{SFC}$ vers la catégorie $f\mathcal{A}lg$ des algèbres filtrées. De plus, un morphisme de $\Bbbk G$ dans une algèbre filtrée A_* envoie $\mathfrak{a}_j(G_*)$ dans A_j si et seulement s'il envoie chaque $G_j - 1$ dans A_j, c'est-à-dire si le morphisme correspondant de G dans $A^\times$ envoie G_j dans $1 + A_j$. Par conséquent :

Proposition 2.1.1. *On a une adjonction qui relève l'adjonction canonique de l'algèbre de groupe à un contexte filtré :*

$$\mathcal{SFC} \underset{(-)_*^\times}{\overset{\mathfrak{a}_*}{\rightleftarrows}} f\mathcal{A}lg,$$

où $A_*^\times = A^\times \cap (1 + A_*)$.

Remarque 2.1.2. La catégorie $f\mathcal{A}lg$ admet des limites et des colimites, qui sont construites exactement comme celles de $\mathcal{SFC}$, à partir du foncteur d'oubli vers les $\Bbbk$-algèbres (cf. le paragraphe 1.2.2). Celui-ci admet aussi un adjoint à droite, qui munit une algèbre de sa filtration triviale.

Par exemple, si A_* et B_* sont des filtrations d'algèbres sur $A = A_0$ et $B = B_0$, on peut former leur coproduit $A_* * B_*$, qui est la filtration d'algèbre sur $A * B$ la plus petite qui fait des inclusions canoniques des morphismes de $f\mathcal{A}lg_\Bbbk$. Cette filtration admet une description explicite : $(A_* * B_*)_i$ est engendré linéairement par les $a_1b_1\cdots a_nb_n$ avec $a_j \in A_{k_j}$, $b_j \in B_{l_j}$ et $\sum(k_j + l_j) \geqslant i$.

Pour comparer l'adjonction 2.1.1 à la propriété universelle de l'algèbre de groupes, on a besoin de changer un peu de point de vue (une autre comparaison, dans un contexte un peu différent, apparaît au paragraphe 2.A.2)

Définition 2.1.3. On note $\mathcal{A}lg_+$ la catégorie des $\Bbbk$-algèbres *augmentées*, *i.e.* munies d'un morphisme d'algèbres ε vers $\Bbbk$, appelé *augmentation*. Ses morphismes sont les morphismes d'algèbres qui préservent l'augmentation, c'est-à-dire que $\mathcal{A}lg_+$ est la catégorie des algèbres au-dessus de $\Bbbk$. Pour A une algèbre augmentée, on note IA l'*idéal d'augmentation* $\ker(\varepsilon : A \longrightarrow \Bbbk)$.

Définition 2.1.4. Une algèbre filtrée A_* est dite *connexe*, si elle vérifie :

$$A_0/A_1 \cong \Bbbk,$$

par l'unique morphisme d'algèbres $\Bbbk \longrightarrow A_0/A_1$. Cette condition définit une sous-catégorie pleine de $f\mathcal{A}lg$, que l'on note $f\mathcal{A}lg_c$.

Remarque 2.1.5. Pour qu'un morphisme d'algèbres $\varphi : A \longrightarrow B$ entre algèbres augmentées préserve l'augmentation, il suffit d'avoir $\varphi(IA) \subseteq IB$. En effet, tout élément de A s'écrit sous la forme $\lambda \cdot 1 + x$, pour $x \in IA$ et $\lambda \in \Bbbk$, et on a :

$$\varepsilon(\varphi(\lambda \cdot 1 + x)) = \varepsilon(\lambda \cdot 1 + \varphi(x)) = \lambda = \varepsilon(\lambda \cdot 1 + x)$$

L'algèbre d'un groupe est en fait une algèbre augmentée. Par la remarque ci-dessus, un morphisme d'algèbres $\varphi : \Bbbk G \longrightarrow A$ préserve l'augmentation si et seulement si $\varphi(G-1) \subseteq IA$. Par conséquent, dans ce cadre, l'adjonction de l'algèbre de groupe s'écrit :

$$\mathcal{A}lg_+(\Bbbk G, A) = \mathcal{G}rpes(G, A^\times \cap (1 + I(A))). \tag{2.1.5.1}$$

Le foncteur $\mathfrak{a}_*$ est en fait à valeurs dans $f\mathcal{A}lg_c$, puisque $\mathfrak{a}_1(G_*) = IG$. Ainsi, l'adjonction (2.1.1) se relève en une adjonction vers $f\mathcal{A}lg_c$. Celle-ci est reliée à l'adjonction de l'algèbre de groupes (dans sa version augmentée (2.1.5.1)) par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{SFC} \arrow[r, shift left, "\mathfrak{a}_*"] \arrow[d, "\omega"] & f\mathcal{A}lg_c \arrow[l, shift left, "(-)^\times_*"] \arrow[d, "\omega"] \\
\mathcal{G}rpes \arrow[u, bend left, "\Gamma"] \arrow[u, bend right, "c"'] \arrow[r, shift left, "\Bbbk[-]"] & \mathcal{A}lg_+, \arrow[l, shift left, "(-)^\times\cap(1+I(-))"] \arrow[u, bend left, "I^*"] \arrow[u, bend right, "c"']
\end{tikzcd} \tag{2.1.5.2}$$

où ω désigne les foncteurs d'oubli. Celui de $f\mathcal{A}lg_c$ vers $\mathcal{A}lg_+$ est donné par :

$$\omega : A_* \longmapsto (A_0,\ \varepsilon : A_0 \twoheadrightarrow A_0/A_1 \cong \Bbbk).$$

Les adjoints à droite sont triviaux : $c(G)$ est la filtration constante égale à G et $c(A)$ est la filtration $A, I(A), I(A), ...$, où $I(A) := \ker(\varepsilon_A)$ est l'idéal d'augmentation. Les adjoints à droite aux oublis sont la suite centrale descendante Γ et la filtration par les puissances de l'idéal d'augmentation $I^*(A)$.

Remarquons que le carré contenant les foncteurs d'oubli est commutatif (les deux côtés envoient A_* sur $A^\times \cap (1 + A_1)$), donc le carré des adjoints à gauche l'est aussi. On retrouve :

Proposition 2.1.6. *Pour tout groupe G :*

$$\mathfrak{a}_*(\Gamma_* G) = I^*(G).$$

Cette proposition est aussi une conséquence directe du corollaire 1.3.8.

2.1.2 Le théorème de clôture

Soit G_* une suite fortement centrale sur un groupe $G = G_1$. L'unité de l'adjonction (2.1.1) se traduit par l'inclusion de filtrations fortement centrales :

$$G_* \subseteq \overline{G}_* := G \cap (1 + \mathfrak{a}_*^{\Bbbk}(G_*)),$$

et on peut se demander, en fonction de l'anneau $\Bbbk$, pour quelles filtrations cette inclusion est en fait une égalité.

Pour une filtration d'algèbre $\mathfrak{a}_*$ de $\Bbbk G$, le théorème de Lazard 1.3.5 donne un plongement d'algèbres de Lie :

$$\mathcal{L}\left(G \cap (1 + \mathfrak{a}_*)\right) \hookrightarrow \mathrm{gr}(\mathfrak{a}_*).$$

Ceci impose certaines restrictions sur la nature de la suite fortement centrale $G_* := G \cap (1 + \mathfrak{a}_*)$ en fonction de $\Bbbk$. Par exemple, si $\Bbbk$ est un corps de caractéristique 0, elle doit être sans torsion, au sens où son gradué doit être sans $\mathbb{Z}$-torsion (définition 2.2.2).

Si $\Bbbk$ est un anneau de caractéristique première p, soit $g \in G \cap (1 + \mathfrak{a}_i)$. On a :

$$g^p - 1 = (g-1)^p \in \mathfrak{a}_i^p \subseteq \mathfrak{a}_{pi},$$

donc, pour tout i, $G_i^p \subseteq G_{pi}$. Ceci motive la définition suivante :

Définition 2.1.7. Soit p un nombre premier. Une suite fortement centrale G_* est dite *p-restreinte* si :

$$\forall i,\ G_i^p \subseteq G_{pi}.$$

Ces restrictions seront en particulier valables pour une filtration $\overline{G}_*$ obtenue à partir d'une suite fortement centrale G_* sur G par la méthode ci-dessus. L'égalité $G_* = \overline{G}_*$ n'est donc possible que sous certaines hypothèses sur G_*. Le critère principal pour cette égalité est donné par le théorème de clôture suivant [Pas79, chap. III, théorèmes 1.6 et 1.7] :

Théorème 2.1.8 (Théorème de clôture). *Supposons que $\Bbbk$ soit un anneau de caractéristique 0 (resp. p premier), et G_* une filtration fortement centrale sans torsion (resp. p-restreinte). Sous ces hypothèses :*

$$G_* = \overline{G}_* \quad \left(= G \cap (1 + \mathfrak{a}_*^{\Bbbk}(G_*))\right).$$

Des éléments de preuve de ce théorème sont donnés à la section 2.4.

Si $\Bbbk$ est un corps de caractéristique 0, ou un anneau de caractéristique première p, alors, pour toute suite fortement centrale G_*, $\overline{G}_*$ vérifie les hypothèses du théorème, donc :

$$\overline{\overline{G}}_* = \overline{G}_*.$$

Cette opération est alors une opération de clôture, que le théorème permet de décrire :

Corollaire 2.1.9. *Si $\Bbbk$ est un corps de caractéristique 0 (resp. un anneau de caractéristique première p), $\overline{G}_*$ est la plus petite suite fortement centrale sans torsion (resp. p-restreinte) contenant G_*.*

Démonstration. La filtration fortement centrale $\overline{G}_*$ est sans torsion (resp. p-restreinte) et contient G_*. Soit H_* une autre suite fortement centrale sans torsion (resp. p-restreinte) contenant G_*. En appliquant le théorème, on trouve que $H_* = \overline{H}_* \supseteq \overline{G}_*$, ce qui achève la preuve. □

Le but des sections 2.2 et 2.3 est de donner une description plus explicite des opérations de clôture décrites ci-dessus. En particulier, l'application à la suite centrale descendante de G permet de retrouver la description classique des groupes de dimension rationnels et modulo p.

Le cas où $\Bbbk$ est un corps de caractéristique 0 est résolu par le théorème 2.2.9 :

Proposition 2.1.10. *Si $\Bbbk$ est un corps de caractéristique 0, pour toute filtration fortement centrale G_*, on a :*

$$\overline{G}_* = \sqrt{G_*}$$

Le cas où $\Bbbk$ est un anneau de caractéristique première p se déduit de la conséquence du théorème de Dark 2.3.1 énoncée dans la proposition 2.3.6 :

Proposition 2.1.11. *Si $\Bbbk$ est un anneau de caractéristique première p, pour toute filtration fortement centrale G_*, on a :*

$$\overline{G}_* = \prod_{ip^j \geqslant *} G_i^{p^j}.$$

On peut appliquer les propositions 2.1.10 et 2.1.11 pour calculer les groupes de dimension (définis dans le corollaire 1.3.8). En effet, la proposition 2.1.6 implique :

$$\overline{\Gamma_* G} = G \cap (1 + I^* G) = D_*(G).$$

On déduit ainsi de la proposition 2.1.10 la description classique des groupes de dimension rationnels, telle qu'on la trouve dans [Pas79, IV, th. 1.5], ou encore dans [Pas85, chap. 11, th. 1.10] :

Proposition 2.1.12. *Pour tout groupe G :*

$$D_*^{\mathbb{Q}} G = \sqrt{\Gamma_* G}.$$

C'est la plus petite suite fortement centrale sans torsion sur G.

Remarque 2.1.13. En particulier, si la suite centrale descendante d'un groupe G est sans torsion, alors elle coïncide avec $D_*^{\mathbb{Q}} G$, donc aussi avec $D_*^{\mathbb{Z}} G$, par la remarque 1.3.9. Le groupe G a alors la propriété de la dimension.

De même, on déduit de la proposition 2.1.11 la description classique des groupes de dimension modulo p (cf. [Pas79, IV, th. 1.9], [Laz54, th. 5.6]) :

Proposition 2.1.14. *Pour tout groupe G :*

$$D_*^{\mathbb{F}_p}(G) = \prod_{ip^j \geqslant *} (\Gamma_i G)^{p^j}.$$

C'est la plus petite suite fortement centrale p-restreinte sur G.

On verra en appendice une description similaire des groupes de dimension de Lie, qui repose sur les mêmes arguments (propositions 2.A.10 et 2.A.11).

Remarque 2.1.15. Si la suite centrale descendante d'un groupe G est p-restreinte, alors elle coïncide avec $D_*^{\mathbb{F}_p} G$, donc aussi avec $D_*^{\mathbb{Z}} G$, par la remarque 1.3.9.

2.2 Cas de la caractéristique nulle - Suites fortement centrales et torsion

Le but de cette section est de décrire explicitement la première opération de clôture décrite dans le corollaire 2.1.9, c'est-à-dire de décrire la plus petite suite fortement centrale sans torsion contenant une suite fortement centrale H_* donnée. Cet objectif est atteint avec l'énoncé du théorème 2.2.9. Ce dernier repose sur la description de la torsion dans les groupes nilpotents donnée dans la proposition classique 2.2.3.

Définition 2.2.1. Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. On défini *l'isolateur* de H dans G par :

$$\sqrt{H} := \{\ x \in G \mid \exists n \neq 0,\ x^n \in H\ \}.$$

Remarquons que ce n'est *a priori* pas un sous-groupe de G.

Proposition-définition 2.2.2. *Soit H_* une filtration fortement centrale sur $G = H_1$. Le groupe abélien $\mathcal{L}(H)$ est sans torsion si et seulement si :*

$$\forall k,\ \sqrt{H_k} = H_k.$$

Une filtration fortement centrale vérifiant cette condition sera dite sans torsion.

Démonstration. Soit $x \in H_k$ vérifiant :

$$\begin{cases} n \cdot \bar{x} = 0 \in \mathcal{L}_k(H) = H_k/H_{k+1} \\ \bar{x} \neq 0. \end{cases}$$

Ceci signifie exactement que $x \notin H_{k+1}$ et que $x^n \in H_{k+1}$, donc $\sqrt{H_{k+1}} \neq H_{k+1}$.

Réciproquement, si $\sqrt{H_k} \neq H_k$ pour un certain k, soit $x \in \sqrt{H_k} - H_k$, et n tel que $x^n \in H_k$. Il existe un l, nécessairement strictement plus petit que k, tel que $x \in H_l - H_{l+1}$. Alors :

$$\begin{cases} \bar{x} \neq 0 \in \mathcal{L}_l(H) = H_l/H_{l+1} \\ n \cdot \bar{x} = 0 \text{ puisque } x^n \in H_k \subseteq H_{l+1}. \end{cases}$$

Par conséquent, $\bar{x}$ est de torsion dans $\mathcal{L}_l(H)$, ce qui achève la preuve. □

En fait, dans ce cadre, les isolateurs sont des sous-groupes. Ceci provient de la nilpotence des G/H_k et de la proposition suivante [Pas85, chap. 11, lemme 1.2] :

Proposition 2.2.3. *Soit G un groupe nilpotent. Alors ses éléments d'ordre fini forment un sous-groupe.*

Démonstration. Soit $\mathrm{Tors}(G)$ l'ensemble les éléments d'ordre fini de G. Soit $H := \langle \mathrm{Tors}(G) \rangle$ le sous-groupe qu'ils engendrent. La proposition 1.2.5 assure que l'anneau de Lie $\mathcal{L}(H)$ est engendré par des éléments de torsion (engendrant $\mathcal{L}_1(H) = H^{ab}$), donc est un groupe abélien de torsion. De plus, G est nilpotent, donc H aussi : la filtration $\Gamma_* H$, incluse dans $H \cap \Gamma_* G$, s'arrête. Le lemme ci-dessous implique alors $H \subseteq \mathrm{Tors}(G)$, ce qui achève la preuve. □

Lemme 2.2.4. *Soit N_* une suite fortement centrale* finie *sur un groupe $G = N_1$. Si $\mathcal{L}(N_*)$ est un groupe abélien de torsion, alors tous les éléments de G sont d'ordre fini.*

Démonstration. Si $N_2 = \{1\}$, $G = N_1/N_2 = \mathcal{L}(N_*)$, et le résultat est évident. On procède ensuite par récurrence sur c tel que $N_{c+1} = \{1\}$. Si le lemme est vrai pour $c-1$, soit N_* une suite fortement centrale vérifiant $N_{c+1} = \{1\}$, et $g \in G = N_1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence dans G/N_c, il existe n tel que $g^n \in N_c$. Puis $N_c = \mathcal{L}_c(G)$ est de torsion, donc il existe m tel que $g^{nm} = 1$, ce qui achève la preuve. □

On peut en fait montrer mieux que cela : dans le cadre de la proposition 2.2.2, les isolateurs des H_k, en plus d'être des sous-groupes, forment une suite fortement centrale. Avant de pouvoir énoncer ce théorème (2.2.9), nous aurons besoin de quelques résultats sur les groupes nilpotents.

Définition 2.2.5. Soit G un groupe. On note $\mathcal{Z}G$ son *centre*, défini comme suit :

$$\mathcal{Z}G := \{\ x \in G \mid [x, G] = \{1\}\ \}.$$

On définit les *centres itérés* de G par récurrence :

$$\mathcal{Z}^{j+1}G := \left\{\ x \in G \;\middle|\; [x, G] \subseteq \mathcal{Z}^j G\ \right\}.$$

On montre facilement qu'un groupe G est nilpotent si et seulement si la suite des centres itérés s'arrête, *i.e.* s'il existe c tel que $\mathcal{Z}^{c+1}G = G$. Le plus petit entier c vérifiant cette condition est alors la classe de nilpotence de G. Ceci découle des inclusions :

$$\Gamma_i G \subseteq \mathcal{Z}^{c-i+1}G,$$

que l'on montre par récurrence sur i sous l'hypothèse $\mathcal{Z}^{c+1}G = G$, et par récurrence sur $c - i$ si $\Gamma_{c+1}G = \{1\}$.

Lemme 2.2.6. *Soit G un groupe nilpotent, et $H \triangleleft G$. Si $H \neq \{1\}$, alors $H \cap \mathcal{Z}G \neq \{1\}$.*

Démonstration. La filtration fortement centrale $\Gamma_*^G(H)$ (définie en 1.6.10), incluse dans $\Gamma_* G$, est finie. Il existe donc un entier d maximal tel que $\Gamma_d^G(H)$ ne soit pas trivial. Mais alors :

$$[G, \Gamma_d^G(H)] = \Gamma_{d+1}^G(H) = \{1\},$$

donc $\Gamma_d^G(H) \subseteq \mathcal{Z}G$. Comme $\{1\} \neq \Gamma_d^G(H) \subseteq H$, on a montré le lemme. □

Proposition 2.2.7. *Soit G un groupe nilpotent sans torsion. Alors $G/\mathcal{Z}G$ est sans torsion.*

Démonstration. Supposons au contraire que le groupe $\mathrm{Tors}(G/\mathcal{Z}G)$ ne soit pas trivial. Notons T son image réciproque dans G. Par le lemme précédent :

$$\mathrm{Tors}(G/\mathcal{Z}G) \cap \mathcal{Z}(G/\mathcal{Z}G) \neq \{1\}.$$

Il existe donc un élément x dans $(T \cap \mathcal{Z}^2 G) - \mathcal{Z}G$.

D'une part, puisque $x \in T$:

$$\exists n,\ \ x^n \in \mathcal{Z}G,$$

c'est-à-dire $[x^n, G] = 1$.

D'autre part, $x \in \mathcal{Z}^2 G$ signifie $[x, G] \in \mathcal{Z}G$, donc :

$$\forall y, z, \quad [y, zx] = [y, z]^z[y, x] = [y, z][y, x].$$

Par récurrence, on obtient :

$$\forall y,\ \forall k,\quad [y, x^k] = [y, x]^k.$$

En appliquant ceci avec $k = n$:

$$\forall y,\quad [y, x]^n = [y, x^n] = 1.$$

Comme G est sans torsion, on en déduit :

$$\forall y,\quad [y, x] = 1,$$

c'est-à-dire que x est dans $\mathcal{Z}G$, une contradiction. □

Lemme 2.2.8 ([Pas85], chap. XI, lemme 1.4)**.** *Soient x et y dans G nilpotent sans torsion. S'il existe r et s non nuls tels que x^r commute avec y^s, alors x commute avec y.*

Démonstration. Supposons $[x, y] \neq 1$. Puisque G est nilpotent, il existe i tel que :

$$[x, y] \in (\mathcal{Z}^i - \mathcal{Z}^{i-1})(G).$$

On peut donc, en travaillant dans $G/\mathcal{Z}^{i-1}(G)$ (qui est encore nilpotent sans torsion, par la proposition ci-dessus), supposer que $[x, y]$ est un élément non nul de $\mathcal{Z}G$. Mais alors, comme dans la démonstration ci-dessus, on montre :

$$\forall k,\quad [x, y^k] = [x, y]^k \in \mathcal{Z}G,$$

puis de même :

$$\forall k,\ \forall l,\quad [x^l, y^k] = [x, y]^{kl}.$$

Finalement, on obtient :

$$[x, y]^{rs} = [x^r, y^s] = 1,$$

donc $[x, y] = 1$, ce qui est impossible. □

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le théorème annoncé, qui généralise [Pas85, chap. 11, lemme 1.8] :

Théorème 2.2.9. *Soit H_* une filtration fortement centrale sur $G = H_1$. Les isolateurs $\sqrt{H_k}$ forment une filtration fortement centrale de G. Par la proposition 2.2.2, c'est la plus petite filtration fortement centrale sans torsion de G contenant H_*.*

Démonstration. C'est une filtration par des sous-groupes par la proposition 2.2.3 appliquée aux G/H_k. La forte centralité découle du lemme précédent : soient x et y vérifiant $x^r \in H_\alpha$ et $y^s \in H_\beta$. On a $[x^s, y^r] \in H_{\alpha+\beta}$. On peut alors appliquer le lemme précédent aux images $\bar{x}$ et $\bar{y}$ de x et y dans $G/\sqrt{H_{\alpha+\beta}}$, qui est nilpotent sans torsion. On obtient $[\bar{x}, \bar{y}] = 1$, ce qui montre que $[x, y]$ est dans $\sqrt{H_{\alpha+\beta}}$. □

2.3 Cas de la caractéristique p - Théorème de Dark et constructions combinatoires de filtrations fortement centrales

Le but de cette section est de décrire explicitement la seconde opération de clôture décrite dans le corollaire 2.1.9, c'est-à-dire de décrire la plus petite suite fortement centrale p-restreinte contenant une suite fortement centrale H_* donnée. On utilise pour cela le théorème de Dark 2.3.1 pour vérifier que la formule la plus naïve donne effectivement le résultat attendu, énoncé dans la proposition 2.3.6. Le contenu de cette section est une généralisation de [Pas79, IV, 1] à un contexte un peu plus général, qui permettra notamment de traiter simultanément le cas des sous-groupes de dimension (proposition 2.1.14) et celui des sous-groupes de dimension de Lie (proposition 2.A.11).

2.3.1 Théorème de Dark

Le théorème de Dark [Dar68] permet de décomposer un mot du groupe libre dans lequel on remplace chaque générateur par une de ses puissances.

Théorème 2.3.1 (Dark)**.** *Soit Y un ensemble, F_Y le groupe libre sur Y. On fixe une partition $Y = Y_1 \sqcup \cdots \sqcup Y_m$. Soit $w \in F_Y$. Si $\boldsymbol{r} = (r_1, ..., r_m)$ est un élément de $\mathbb{N}^m$, notons $w(\boldsymbol{r})$ le mot obtenu à partir de w en remplaçant chaque facteur $y \in Y_i^{\pm 1}$ par y^{r_i}.*

Il existe alors une application $\theta : \mathbb{N}^m \longrightarrow F_Y$ unique vérifiant :

$$\forall \boldsymbol{r} \in \mathbb{N}^m,\ w(\boldsymbol{r}) = \prod_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^m} \theta(\boldsymbol{s})^{\binom{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{s}}},$$

où $\binom{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{s}}$ désigne $\prod_i \binom{r_i}{s_i}$.

De plus, chaque $\theta(\boldsymbol{s})$ appartient au sous-groupe de F_Y engendré par les mots de la forme :

$$[y_1, ..., y_n],$$

où les y_i sont dans $Y^{\pm 1}$ et, pour tout i, au moins s_i d'entre eux sont dans $Y_i^{\pm 1}$.

On se référera à [Pas79, chap. IV, th. 1.11] pour une preuve du théorème. Remarquons que l'unicité de θ est évidente : on peut la définir par récurrence.

L'intérêt de ce théorème réside dans son universalité : l'identité énoncée est vraie dans n'importe quel groupe, en remplaçant les éléments de Y par n'importe quels éléments du groupe.

C'est en fait surtout le corollaire suivant qui nous sera utile [Pas79, IV, cor. 1.16] :

Corollaire 2.3.2. *Il existe une unique application $\theta : (\mathbb{N}^*)^2 \longrightarrow F_2 = \langle x, y \rangle$ vérifiant :*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N},\ [x^\alpha, y^\beta] = \prod_{r,s \geqslant 1} \theta(r,s)^{\binom{\alpha}{r}\binom{\beta}{s}},$$

et chaque $\theta(r,s)$ est un produit de $\{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}\}$-commutateurs tel que $x^{\pm 1}$ apparaît au moins r fois et $y^{\pm 1}$ au moins s fois dans chaque facteur.

Démonstration. C'est une application directe du théorème précédent. Il faut simplement remarquer que $\theta(r, 0) = \theta(0, s) = 1$, ce qui se voit en prenant α ou β nul. □

L'énoncé suivant, connu depuis longtemps (cité dans [Pas85, chap. 11, th. 1.14] il apparaît déjà dans [Hal34], est un autre corollaire qui nous sera utile :

Corollaire 2.3.3 (du théorème 2.3.1)**.** *Il existe une unique application $\theta : \mathbb{N} \longrightarrow F_2 = \langle x, y \rangle$ vérifiant :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N},\ x^\alpha y^\alpha = \prod_{r \geqslant 0} \theta(r)^{\binom{\alpha}{r}},$$

et chaque $\theta(r)$ est un produit de $\{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}\}$-commutateurs de longueur au moins r.

2.3.2 Construction combinatoire de filtrations fortement centrales

On peut utiliser le corollaire 2.3.2 pour construire des filtrations fortement centrales à partir d'une filtration fortement centrale G_* donnée.

Soit en effet $F : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On pose :

$$G_r^F := \prod_{F(i,\alpha) \geqslant r} G_i^\alpha.$$

On peut alors énoncer :

Proposition 2.3.4 ([Pas79], chap. IV, cor. 1.18)**.** *Soit $F : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ une application.*

Si F satisfait :

$$\forall i, j, r, s, \alpha, \beta \geqslant 1,\ \text{si } 1 \leqslant r \leqslant \alpha \text{ et } 1 \leqslant s \leqslant \beta,\ \text{alors :}$$
$$F\left(ri + sj, \binom{\alpha}{r}\binom{\beta}{s}\right) \geqslant F(i, \alpha) + F(j, \beta),$$

alors G_*^F est une suite fortement centrale sur G_1^F.

Si de plus F satisfait :

$$\forall i, \alpha,\ F(i, q\alpha) \geqslant F(i, \alpha) + 1$$

pour un certain entier q, alors G_*^F est de q-torsion.

Si F satisfait en fait :

$$\forall i, \alpha,\ F(i, p\alpha) \geqslant pF(i, \alpha)$$

pour p premier, alors la filtration est p-restreinte.

Démonstration. La forte centralité découle du corollaire 2.3.2. Soit en effet $x \in G_i$ et $y \in G_j$, et α, β vérifiant $F(i, \alpha) \geqslant m$, et $F(j, \beta) \geqslant n$, si bien que x^α et y^β sont des générateurs de G_m^F et G_n^F, respectivement. Alors (en notant encore $\theta(r, s)$, par abus de langage, pour son évaluation en des éléments x et y de G fixés), puisque G_* est fortement centrale :

$$\theta(r, s) \in G_{rm+sn}.$$

En appliquant l'hypothèse sur F, on obtient :

$$\theta(r, s)^{\binom{\alpha}{r}\binom{\beta}{s}} \in G_{m+n}^F.$$

Par conséquent, $[x^\alpha, y^\beta] \in G^F_{m+n}$, comme annoncé.

Le groupe abélien G^F_m/G^F_{m+1} est engendré par les $\overline{x^\alpha}$, avec $x \in G_i$ et α vérifiant $F(i,\alpha) \geqslant m$. Sous la seconde hypothèse, $x^{q\alpha}$ est dans G^F_{m+1}, c'est-à-dire : $q\overline{x^\alpha} = 0$. Ainsi, G^F_m/G^F_{m+1} est de q-torsion.

Le cas p-restreint fonctionne de la même manière, en considérant G^F_m/G^F_{pm} au lieu de G^F_m/G^F_{m+1}. Le même raisonnement assure que, sous la troisième hypothèse, ce groupe est *engendré* par des éléments de p-torsion. Néanmoins, G^F_m/G^F_{pm} n'est pas abélien, mais seulement $(p-1)$-nilpotent. Ceci suffit néanmoins pour conclure, grâce au lemme qui suit. □

Lemme 2.3.5 ([Pas85], chap. XI, lemme 1.15)**.** *Soit p premier, et G un groupe nilpotent de classe au plus $p-1$. Si G est engendré par des éléments d'ordre p, alors G est d'exposant p (*i.e.* $G^p = \{1\}$).*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la classe de nilpotence de G. Si G est abélien, le résultat est évident. Soit G soit c-nilpotent, avec $2 \leqslant c < p$. Supposons le résultat vrai pour les c strictement inférieurs.

Soient x et y des éléments d'ordre p de G. Le sous groupe $L = \langle x, [x,y] \rangle$ vérifie $\Gamma_2 L \subseteq \Gamma_3 G$, puisque $\Gamma_2(L)$ est engendré normalement par $[x,[x,y]]$. Par une récurrence immédiate, $\Gamma_i L \subseteq \Gamma_{i+1} G$ pour $i \leqslant 2$. Par conséquent, la classe de nilpotence de L est strictement inférieure à celle de G. Comme L est engendré par x et y^x, qui sont d'ordre p, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à L. On obtient $L^p = \{1\}$, donc $[x,y]^p = 1$.

Le sous-groupe $\Gamma_2 G$ est engendré par les conjugués des $[x,y]$, pour x et y parcourant des générateurs de G. Si x et y sont d'ordre p, $[x,y]$ l'est aussi, par ce qui précède. Ainsi, $\Gamma_2 G$ vérifie l'hypothèse de récurrence. Par conséquent :

$$(\Gamma_2 G)^p = \{1\}.$$

Nous sommes alors en mesure d'appliquer le corollaire 2.3.3 au théorème de Dark. Soient x et y dans G. Toujours en notant abusivement $\theta(n)$ pour son évaluation dans G, on écrit :

$$\begin{cases} \theta(0) = 1, \\ \theta(1) = xy, \\ \forall 1 < r < p,\ \theta(i)^{\binom{p}{r}} \in (\Gamma_2 G)^p = \{1\}, \\ \theta(p) \in \Gamma_p G = \{1\}. \end{cases}$$

Notons que la troisième assertion utilise de manière cruciale la primalité de p.

La formule pour $n = p$ se réduit donc à :

$$x^p y^p = (xy)^p.$$

Les éléments d'ordre 1 ou p de G forment donc un sous-groupe, ce qui permet de conclure. □

2.3.3 Applications

On peut appliquer la proposition 2.3.4 à :

$$F(i,\alpha) = ip^{v_p(\alpha)},$$

où v_p désigne la valuation p-adique. On obtient ainsi la construction attendue :

Proposition 2.3.6. *Soit G_* une filtration fortement centrale. La filtration définie par :*

$$G_*^F = \prod_{ip^j \geqslant *} G_i^{p^j}$$

est aussi fortement centrale, et c'est la plus petite suite fortement centrale p-restreinte contenant G_*.

Démonstration. F vérifie évidemment la troisième hypothèse de la proposition 2.3.4. Pour vérifier la première, on utilise l'inégalité :

$$v_p\left(\binom{\alpha}{r}\right) = v_p\left(\frac{\alpha}{r}\binom{\alpha-1}{r-1}\right) \geqslant (v_p(\alpha) - v_p(r))_+, \tag{2.3.6.1}$$

où $n_+ = \max(n, 0)$.

En notant a, b, u et v les valuations p-adiques respectives de α, β, r et s, avec $r = r'p^u$ et $s = s'p^v$, on calcule :

$$\begin{aligned} F\left(ri + sj, \binom{\alpha}{r}\binom{\beta}{s}\right) &\geqslant (ri + sj)p^{(a-u)_+}p^{(b-v)_+} \\ &\geqslant r'p^a \cdot ip^{(b-v)_+} + s'p^b \cdot jp^{(a-u)_+} \\ &\geqslant ip^a + jp^b = F(i, \alpha) + F(j, \beta). \end{aligned}$$

On peut ainsi appliquer la proposition 2.3.4 pour conclure que G_*^F est fortement centrale, et p-restreinte. De plus, la minimalité annoncée est évidente. □

On peut aussi, plus généralement, regarder :

$$F(i, \alpha) = ip^{\lfloor \frac{v_p(\alpha)}{t} \rfloor},$$

où t est un entier.

Cette fonction vérifie encore la première des hypothèses de la proposition, mais vérifie seulement :

$$F(i, p^t\alpha) \geqslant pF(i, \alpha).$$

La suite G_*^F est alors la plus petite suite fortement centrale p^t-*restreinte* contenant G_*, au sens où elle vérifie :

$$(G_i^F)^{p^t} \subseteq G_{pi}^F.$$

Soit q un nombre entier non nul. On peut définir la valuation q-adique d'un autre entier n comme :

$$v_q(n) = \max\{\, v \mid q^v | n \,\}.$$

L'inégalité (2.3.6.1) est encore vérifiée en remplaçant p par q non nécessairement premier. On peut alors appliquer la proposition 2.3.4 à :

$$F : (i, \alpha) \longmapsto i + v_q(\alpha).$$

Proposition 2.3.7. *Soit G_* une filtration fortement centrale. La filtration définie par :*

$$G_*^F = \prod_{i+j \geqslant *} G_i^{q^j}$$

est aussi fortement centrale, et c'est la plus petite suite fortement centrale de q-torsion contenant G_*.

Démonstration. On vérifie l'hypothèse :

$$\begin{aligned} F\left(ri+sj, \binom{\alpha}{r}\binom{\beta}{s}\right) &\geqslant (ri+v_q(\alpha)-v_q(r))+(sj+v_q(\beta)-v_p(s)) \\ &\geqslant (i+v_q(\alpha))+(j+v_q(\beta)) = F(i,\alpha)+F(j,\beta), \end{aligned}$$

car :

$$ri+v_q(\alpha)-v_q(r) = (i+v_q(\alpha))+((r-1)i-v_q(r)).$$

Or $i \geqslant 1$, et $1+v_q(r) \leqslant r$, donc le second terme est positif.

De plus, la fonction F vérifie évidemment la seconde hypothèse de la proposition 2.3.4, qui permet donc de conclure. □

Exemple 2.3.8. Si l'on applique la proposition 2.3.7 à la filtration fortement centrale minimale $G_* = \Gamma_* G$ sur un groupe G, on obtient la plus petite filtration fortement centrale de q-torsion sur G, qui n'est autre que $\Gamma_*^{(q)} G$, d'après la proposition 1.9.5 :

$$\Gamma_*^{(q)} G = \prod_{i+j \geqslant *} (\Gamma_i G)^{q^j}.$$

2.4 Éléments de preuve du théorème de clôture 2.1.8

On donne ici quelques éléments de preuve du théorème 2.1.8, dont on rappelle l'énoncé :

Théorème 2.1.8 (Passi)**.** *Supposons que* $\Bbbk$ *soit un anneau de caractéristique* 0 *(resp.* p *premier), et* N_* *une filtration fortement centrale sans torsion (resp.* p*-restreinte). Sous ces hypothèses :*

$$N_* = \overline{N}_* \quad \left(= G \cap (1+\mathfrak{a}_*^{\Bbbk}(N_*))\right).$$

Éléments de preuve du théorème.

On commence par **se ramener au cas où G est de type fini**. Supposons le théorème prouvé dans ce cas. Soit alors N_* une filtration fortement centrale vérifiant les hypothèses, sur G quelconque. Soit $g \in \overline{N}_j$. On peut alors écrire g sous la forme $g = 1+a$, avec :

$$a \in \mathfrak{a}_j^{\Bbbk}(N_*) := \sum_{i_1+\cdots+i_n \geqslant j} \Bbbk G \cdot (N_{i_1}-1)\cdots(N_{i_n}-1).$$

Ecrivons a sous la forme d'une somme finie de mônomes en les $n-1$, suivant la décomposition ci-dessus. Soit alors H le sous-groupe des éléments n apparaissant dans cette décomposition de a. La filtration $H \cap N_*$ est fortement centrale sur H et vérifie les hypothèses du théorème. Comme H est de type fini, on peut appliquer le théorème :

$$H \cap N_* = H \cap (1+\mathfrak{a}_*^{\Bbbk}(H \cap N_*)).$$

Or, par construction, a est dans $a_j^{\Bbbk}(H \cap N_*))$. Ainsi, $g = 1+a$ est dans $H \cap N_j$, donc dans N_j.

On peut aussi **se restreindre au cas où N_* est une filtration finie**. En effet, supposons le théorème est vrai dans ce cas. Soit N_* une filtration fortement centrale vérifiant les hypothèses. La filtration N_* induit une filtration fortement centrale finie N_*/N_{c+1} de G/N_{c+1}.

Par construction, l'égalité $N_i = \overline{N}_i$ pour $i \leqslant c+1$ est équivalente à l'injectivité de :

$$\mathcal{L}_{\leqslant c}(N_*) \longrightarrow \mathrm{gr}_{\leqslant c}(\mathfrak{a}_*(N_*)).$$

Le théorème, appliqué à N_*/N_{c+1}, donne l'injectivité de :

$$\mathcal{L}_{\leqslant c}(N_*) \cong \mathcal{L}(N_*/N_{c+1}) \hookrightarrow \mathrm{gr}(\mathfrak{a}_*(N_*/N_{c+1})).$$

Or la surjection canonique de G sur G/N_{c+1} induit un isomorphisme :

$$\mathrm{gr}_{\leqslant c}(\mathfrak{a}_*(N_*)) \cong \mathrm{gr}_{\leqslant c}(\mathfrak{a}_*(N_*/N_{c+1})).$$

En effet, la flèche induite est évidemment surjective (on peut relever explicitement les éléments). De plus, le noyau de la projection de $\Bbbk G$ sur $\Bbbk(G/N_{c+1})$ est l'idéal de $\Bbbk G$ engendré par $(N_{c+1}-1)$, inclus dans $\mathfrak{a}_{c+1}(N_*)$. On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Bbbk G \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "p"'] & \Bbbk(G/N_{c+1}) \arrow[d] \\
 & \Bbbk G/\mathfrak{a}_{c+1}(N_*),
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{gr}_{\leqslant c}\, p$ est l'identité, d'où l'injectivité de $\mathrm{gr}_{\leqslant c}\, \pi$.

Finalement, on a bien l'injectivité voulue, et comme ceci est vrai pour tout c, on en déduit le théorème pour la filtration N_*.

Supposons donc que N_* est une filtration fortement centrale finie sur le groupe de type fini $G = N_1$. Le corollaire 1.2.7 assure alors que les quotients N_i/N_{i+1} sont des groupes abéliens de type fini. On peut donc les décomposer en sommes directes de groupes cycliques, et choisir une « base », en choisissant un générateur $\overline{x}_\alpha$ pour chaque facteur cyclique. En fait, vu les hypothèses faites, tous les facteurs sont isomorphes à $\mathbb{Z}$ où à $\mathbb{Z}/p$, et c'est vraiment une base de $\mathcal{L}(N_*)$ (sur $\mathbb{Z}$ ou sur $\mathbb{F}_p$) que l'on obtient. On peut relever chaque $\overline{x}_\alpha$ en un élément x_α de G. Une telle famille (x_α) (que l'on supposera totalement ordonnée) est appelée *base de G*.

Supposons que $\Bbbk$ est de caractéristique 0. Soit $M > 0$ entier. On considère les monômes $v_1 \cdots v_n \in \Bbbk G$, où :

$$v_i = (x_{\alpha_i} - 1)^{r_i}, \quad \text{avec } r_i > 0, \quad \text{ou} \quad v_i = (x_{\alpha_i} - 1)^M x_{\alpha_i}^{r_i}, \quad \text{avec } r_i < 0.$$

Si $\Bbbk$ est de caractéristique p, on considère plutôt les monômes $v_1 \cdots v_n \in \Bbbk G$, où :

$$v_i = (x_{\alpha_i} - 1)^{r_i}, \quad \text{avec } 0 < r_i < p.$$

Dans les deux cas, on inclut le monôme 1, qui correspond à $n = 0$.

Alors [Pas79, chap. III, lemme 2.10] :

Lemme 2.4.1. *Les monômes $v_1 \cdots v_n$, avec $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$, forment une base de $\Bbbk G$.*

Notons $\mu(\alpha)$ la valuation de x_α (c'est-à-dire le plus petit entier μ tel que $x_\alpha \in N_\mu - N_{\mu+1}$). On définit un poids sur les monômes par :

$$\nu(v_1 \cdots v_n) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} r_i \mu(\alpha_i) & \text{si les } r_i \text{ sont tous positifs,} \\ M & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $0 \leqslant r \leqslant M$ entier, soit E_r le sous-module de $\Bbbk G$ engendré par les monômes de poids au moins r. Pour $r \geqslant M$, on pose $E_r := E_M$. Évidemment, pour $r \leqslant M$, E_r est inclus dans $\mathfrak{a}_r(N_*)$.

On déduit immédiatement du lemme que, si $r < M$, le module E_r/E_{r+1} est libre, une base étant donnée par les (classes des) monômes de poids exactement r.

Le cœur de la preuve du théorème est dans le lemme suivant, dont Passi donne une démonstration assez technique, par récurrence ([Pas79], chap. III, th. 2.15). C'est ici que l'on utilise que N_* est p-restreinte (et pas seulement de p-torsion) :

Lemme 2.4.2. *La filtration E_* est une filtration d'algèbre de $\Bbbk G$.*

Puisque E_r contient $N_r - 1$, comme $\mathfrak{a}_*(N_*)$ est la filtration d'algèbre minimale contenant $N_* - 1$, on obtient :

$$\forall r,\ \mathfrak{a}_r(N_*) \subseteq E_r.$$

Pour $r \leqslant M$, on a l'autre inclusion, donc l'égalité :

$$\forall r \geqslant M,\ \mathfrak{a}_r(N_*) = E_r. \tag{2.4.2.1}$$

En appliquant le théorème de Lazard (1.3.5), puis en étendant les scalaires sur la source, on obtient un morphisme, induit par $g \longmapsto g - 1$:

$$\mathcal{L}(N_*) \otimes \Bbbk \longrightarrow \operatorname{gr}(E_*),$$

où le produit tensoriel est pris au-dessus de $\mathbb{Z}$. Supposons $r < M$. Le morphisme envoie $\overline{x}_\alpha$ sur le monôme $\overline{x}_\alpha - 1$. Puisque les $\overline{x}_\alpha$ forment une base de N_r/N_{r+1} (sur $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{F}_p$, suivant le cas), et les $\overline{x}_\alpha - 1$ font partie de la $\Bbbk$-base de E_r/E_{r+1} donnée par les monômes ci-dessus, ce morphisme est injectif, c'est-à-dire :

$$\forall r \leqslant M,\ N_r = G \cap (1 + E_r). \tag{2.4.2.2}$$

En combinant 2.4.2.1 et 2.4.2.2, on obtient le résultat voulu :

$$\forall r \leqslant M,\ N_r = G \cap (1 + \mathfrak{a}_r(N_*)).$$

Comme M a été choisi arbitrairement, c'est en fait vrai pour tout r. □

Remarque 2.4.3. La preuve ci-dessus donne en particulier une base explicite du gradué $\operatorname{gr}(\mathfrak{a}_*(N_*))$. En effet, $\mathfrak{a}_r/\mathfrak{a}_{r+1} \cong E_r/E_{r+1}$ (en choisissant $M > r$ en caractéristique 0) a pour base les monômes

$$\prod_i (x_{\alpha_i} - 1)^{r_i}$$

qui sont de poids r.

2.5 Problème d'Andreadakis p-restreint

2.5.1 Généralités sur les suites fortement centrales p-restreintes

Soit N_* une suite fortement centrale p-restreinte. Le théorème de clôture (2.1.8) assure que le morphisme :

$$\mathcal{L}(N_*) \longmapsto \operatorname{gr}(\mathfrak{a}_*^{\mathbb{F}_p}(N_*))$$

induit par $g \longmapsto g-1$ est un plongement d'algèbres de Lie. On peut donc identifier $\mathcal{L}(N_*)$ à son image. Or cette image est stable par l'opération $(-)^p$, dans l'algèbre associative $\mathrm{gr}(\mathfrak{a}_*^{\mathbb{F}_p}(N_*))$, puisque $(g-1)^p = g^p - 1$. On en déduit que $\mathcal{L}(N_*)$ est une *algèbre de Lie p-restreinte* (au sens de [Jac41]), où l'opération de puissance p-ième est induite par $g \longmapsto g^p$.

La plus petite filtration fortement centrale p-restreinte sur un groupe G est la filtration $D_*^{\mathbb{F}_p}G$ par les sous-groupes de dimension modulo p d'un groupe G (proposition 2.1.14). Cette filtration admet une description par récurrence analogue à la définition de la suite centrale descendante (cf. [Laz54, Th. 5.6] ou [Pas79, Th. IV.1.9]). Pour cela, on la note $\Gamma_*^{[p]}$ et on l'appelle *suite centrale descendante p-restreinte*. Le lecteur pourra consulter [CE16] pour une discussion des suites fortement centrales définies par récurrence.

La description explicite donnée dans la proposition 2.1.14 a pour conséquence un résultat similaire à la proposition 1.2.5 (on écrit $\mathcal{L}^{[p]}(G)$ pour $\mathcal{L}(\Gamma_*^{[p]}G)$) :

Proposition 2.5.1. *L'algèbre de Lie p-restreinte $\mathcal{L}^{[p]}(G)$ est* engendrée en degré 1. *Précisément, elle est engendrée (comme algèbre de Lie p-restreinte) par $\mathcal{L}_1^{[p]}(G) = G^{ab} \otimes \mathbb{F}_p$.*

Remarque 2.5.2. La filtration $\Gamma_*^{[p]}G$ apparaît la première fois dans [Zas39]. A ce titre, on l'appelle parfois *filtration de Zassenhaus*, notamment pour la distinguer de la filtration de Stallings $\Gamma_*^{(p)}G$ (définition 1.9.1), définie dans [Sta65].

2.5.2 Problème d'Andreadakis p-restreint

On abrège $\mathcal{A}_*(\Gamma_*^{[p]}G)$ en $\mathcal{A}_*^{[p]}(G)$. Remarquons que $\mathcal{A}_1^{[p]}(G)$ est le groupe $IA_G^{[p]}$ des automorphismes agissant trivialement sur $\mathcal{L}_1(\Gamma_*^{[p]}G) = G^{ab} \otimes \mathbb{F}_p$, donc sur toute l'algèbre $\mathcal{L}(\Gamma_*^{[p]}G)$ (par la proposition 2.5.1). Si l'on montre que $\mathcal{A}_*^{[p]}(G)$ est p-restreinte (ce que l'on fera à la proposition 2.5.4) alors on aura une inclusion :

$$\Gamma_*^{[p]}\left(IA_G^{[p]}\right) \subseteq \mathcal{A}_*^{[p]}(G).$$

Par conséquent, on peut considérer une version p-restreinte du problème d'Andreadakis :

Problème 4 (Andreadakis – version p-restreinte)**.** *Quelle est la différence entre les suites fortement centrales p-restreintes $\mathcal{A}_*^{[p]}(G)$ et $\Gamma_*^{[p]}(IA_G^{[p]})$?*

Remarque 2.5.3. Le groupe $IA_G^{[p]}$ contient le sous-groupe normal IA_G. De plus, le quotient $IA_G^{[p]}/IA_G$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)/IA_G$, donc de $GL(G^{ab})$. En fait, par définition de $IA_G^{[p]}$, ce quotient est contenu dans le groupe de congruence modulo p :

$$GL(pG^{ab}) = \ker(GL(G^{ab}) \to GL(G^{ab} \otimes \mathbb{F}_p)).$$

Si $G = F_n$ est un groupe libre de type fini, alors $\mathrm{Aut}(G)/IA_G \cong GL_n(\mathbb{Z})$, et $IA_G^{[p]}/IA_G$ est exactement $GL_n(p\mathbb{Z})$.

Proposition 2.5.4 ([HM17], prop. 8.5)**.** *Supposons donnés N_* une suite fortement centrale p-restreinte, et G un groupe agissant sur N_*. Alors $\mathcal{A}_*(G, N_*)$ est une suite fortement centrale p-restreinte.*

Démonstration. On utilise le théorème de Dark, ou plutôt son corollaire 2.3.2.

Soit $g \in \mathcal{A}_j(G, N_*)$ et $x \in N_i$. On écrit :

$$[g^p, x] = \prod_{k=1}^{p} \theta(k,1)^{\binom{p}{k}},$$

avec $\theta(k,1) \in N_{i+kj}$, pour tout k. Si $k < p$, on a :

$$\theta(k,1)^{\binom{p}{k}} \in N_{p(i+kj)} \subseteq N_{i+pj+1}.$$

Comme $\theta(p,1)$ est aussi dans N_{i+pj}, on trouve bien :

$$[g^p, x] \in N_{i+pj}.$$

Ceci est vrai pour tout $x \in N_i$, pour tout i, donc $g \in \mathcal{A}_{pj}(G, N_*)$, ce qui achève la preuve. □

En fait, on a mieux :

Proposition 2.5.5. *Sous les mêmes hypothèses, $\mathcal{A}_*(G, N_*) \ltimes N_*$ est une suite fortement centrale p-restreinte.*

Démonstration. On utilise cette fois le corollaire 2.3.3 au théorème de Dark.

Notons $\mathcal{K}_*$ pour $\mathcal{A}_*(G, N_*) \ltimes N_*$. Un élément de $\mathcal{K}_j = \mathcal{A}_j \ltimes N_j$ est de la forme $g \cdot x$, avec $g \in \mathcal{A}_j$ et $x \in N_j$. On écrit :

$$g^p x^p = \prod_{k=1}^{p} \theta(k)^{\binom{p}{k}} = (gx)^p \cdot \theta(2)^{\binom{p}{2}} \cdots \theta(p-1)^p \cdot \theta(p),$$

avec $\theta(1) = gx$ et $\theta(k) \in \mathcal{K}_{kj}$, pour tout k, par forte centralité de $\mathcal{K}_*$.

On va utiliser cette identité pour montrer par récurrence sur $d \leqslant p$ le résultat suivant :

$$\forall j,\ \mathcal{K}_j^p \subseteq \mathcal{K}_{dj}.$$

Cette assertion est évidemment vraie pour $d = 1$. Supposons-la vraie pour $d - 1$.

Soit $gx \in \mathcal{K}_j$. Pour plus de clarté, on récrit l'identité sous la forme :

$$(gx)^p = g^p x^p \cdot \theta(p)^{-1} \cdot \prod_{k=p-1}^{2} \theta(k)^{-\binom{p}{k}}.$$

En utilisant respectivement que $\mathcal{A}_*$ est p-restreinte (proposition 2.5.4), que N_* l'est (par hypothèse) et que $\mathcal{K}_* = \mathcal{A}_* \ltimes N_*$ est fortement centrale, on obtient :

$$g^p, x^p, \theta(p) \in \mathcal{K}_{pj} \subseteq \mathcal{K}_{dj},$$

l'inclusion provenant de l'inégalité $d \leqslant p$.

Si $2 \leqslant k < p$, $\theta(k)$ est dans $\mathcal{K}_{kj}$. Comme p divise $\binom{p}{k}$, l'hypothèse de récurrence assure que :

$$\theta(k)^{\binom{p}{k}} \in \mathcal{K}_{kj}^p \subseteq \mathcal{K}_{(d-1)kj} \subseteq \mathcal{K}_{dj},$$

puisque $(d-1)kj \geqslant dj$.

Finalement, on obtient bien :

$$(gx)^p \in \mathcal{K}_{dj},$$

ce qui achève la récurrence, et la preuve de la proposition. □

Soit $\mathcal{SFC}_p$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{SFC}$ dont les objets sont les suites fortement centrales p-restreintes. On déduit des propositions 2.5.4 et 2.5.5 :

Corollaire 2.5.6. *Les actions sont représentables dans la catégorie $\mathcal{SFC}_p$, l'action universelle sur G_* étant donnée par $\mathcal{A}_*(G_*) \circlearrowleft G_*$.*

On peut aussi répondre à [HM17, rk. 8.6]. En effet, d'après le paragraphe 2.5.1, la restriction du foncteur de Lie donne un foncteur $\mathcal{L} : \mathcal{SFC}_p \longrightarrow p\mathcal{L}ie$, à valeurs dans la catégorie $p\mathcal{L}ie$ des algèbres de Lie p-restreintes (sur $\mathbb{F}_p$). Les actions dans $p\mathcal{L}ie$ sont représentées par les *dérivations p-restreintes*, au sens de Jacobson [Jac41]. Comme au paragraphe 1.6.2, une action $K_* \circlearrowleft G_*$ dans $\mathcal{SFC}_p$ induit, par exactitude du foncteur de Lie, une action $\mathcal{L}(K_*) \circlearrowleft \mathcal{L}(G_*)$ dans $p\mathcal{L}ie$, qui est codée par un morphisme d'algèbres de Lie p-restreintes :

$$\tau : \mathcal{L}(K_*) \longrightarrow \mathrm{Der}^{[p]}(\mathcal{L}(G_*)),$$

où $\mathrm{Der}^{[p]} \subseteq \mathrm{Der}$ est la sous-algèbre de Lie p-restreinte des dérivations p-restreintes, *i.e.* des dérivations ∂ vérifiant :

$$\partial(a^p) = \mathrm{ad}_a^{p-1}(\partial a).$$

Insistons sur le fait que pour $\mathfrak{g} \in p\mathcal{L}ie$, l'algèbre de Lie $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ est bien une sous-algèbre de Lie p-restreinte de $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_p}(\mathfrak{g})$, mais elle n'agit pas sur $\mathfrak{g}$ dans $p\mathcal{L}ie$: l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \rtimes \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ n'a pas de structure p-restreinte canonique.

Remarque 2.5.7. En utilisant la proposition 2.5.1 au lieu de la proposition 1.2.5, et en remplaçant les dérivations par des dérivations p-restreintes dans la preuve, on peut obtenir une version p-restreinte du lemme 1.7.1 pour $\mathcal{A}_*^{[p]}(G)$:

$$\mathcal{A}_j^{[p]}(G) = \left\{ \sigma \in \mathrm{Aut}(G) \;\middle|\; [\sigma, G] \subseteq \Gamma_{j+1}^{[p]}(G) \right\}.$$

En d'autres termes, $\mathcal{A}_j^{[p]}(G)$ est le sous-groupe des automorphismes agissant trivialement sur $G/\Gamma_{j+1}^{[p]}(G)$. Ce qui est exactement la définition utilisée par Cooper [Coo15, def 3.2].

Remarque 2.5.8. Dans [Coo15], Cooper décrit deux filtrations d'Andreadakis-Johnson modulo p, qui sont celles que nous considérons ici et dans la section 1.9. En particulier, il prouve la forte centralité de la version de p-torsion $\mathcal{A}^{(p)}$ à partir de sa définition (qui est la description donnée dans le lemme 1.7.1). Néanmoins, nous n'arrivons pas à le suivre lorsqu'il affirme que le cas p-restreint fonctionne de la même manière [Coo15, Lem. 3.7], et il nous semble difficile d'échapper au travail technique fait ci-dessus (proposition 2.5.4).

2.A Appendice : Formule de Sandling et groupes de dimension de Lie

Le but de cet appendice est de retrouver la formule de Sandling (propositions 2.A.7 et 2.A.8) et la description des groupes de dimension de Lie (propositions 2.A.10 et 2.A.11) dans un cadre catégorique proche des méthodes du reste du chapitre.

2.A.1 Idéaux dans les algèbres de groupes

On reformule ici les résultats élémentaires de [Pas85, I.1], qui nous permettrons notamment de montrer que le théorème de clôture 2.1.8 fonctionne aussi dans un contexte équivariant (corollaire 2.A.5).

Soit G un groupe et H un sous-groupe normal de G. L'algèbre $\Bbbk H$ est alors une sous-algèbre de $\Bbbk G$, sur laquelle G agit par conjugaison. On dira qu'un idéal de $\Bbbk H$ est *G-invariant* s'il est stable sous cette action.

Si J est un idéal G-invariant de $\Bbbk H$, alors $\Bbbk G \cdot J$ est un idéal (bilatère) de G, la stabilité par multiplication à gauche par G étant assurée par l'hypothèse de G-stabilité :

$$\forall g \in G, \quad (\Bbbk G \cdot J) \cdot g = \Bbbk G \cdot g^{-1} J g = \Bbbk G \cdot J.$$

On définit la projection (linéaire) π_H de $\Bbbk G$ sur $\Bbbk H$ par :

$$\pi_H \left(\sum_{g \in G} \lambda_g \cdot g \right) := \sum_{h \in H} \lambda_h \cdot h.$$

Proposition-définition 2.A.1. *Soit G un groupe et H un sous-groupe normal de G On a les adjonctions entre ensembles ordonnés (par l'inclusion) :*

$$\begin{tikzcd}
\left\{ \begin{array}{c} \textit{Idéaux} \\ G\textit{-invariants} \\ \textit{de } \Bbbk H \end{array} \right\} \arrow[r, "i = \Bbbk G \cdot -"] & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Idéaux} \\ \textit{de } \Bbbk G \end{array} \right\} \arrow[l, bend right=50, "p = \Bbbk H \cap -"'] \arrow[l, bend left=50, "q = \pi_H(-)"]
\end{tikzcd},$$

Précisément, i a pour adjoint à gauche p et pour adjoint à gauche q. De plus :

$$p \circ i = q \circ i = id.$$

Un idéal appartenant à l'image de i est dit contrôlé *par le sous-groupe H.*

Démonstration. L'adonction entre p et i revient à l'équivalence évidente suivante, pour J un idéal G-invariant de $\Bbbk H$ et I un idéal de $\Bbbk G$:

$$\Bbbk G \cdot J \subseteq I \;\Leftrightarrow\; J \subseteq I \cap \Bbbk H.$$

Pour montrer l'autre adjonction, on utilise :

$$\forall g \in G,\ \forall x \in \Bbbk H, \quad \pi_H(gx) = \begin{cases} gx & \text{si } g \in H \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.A.1.1}$$

dont on tire immédiatement :

$$\pi_H(\Bbbk G \cdot J) = J,$$

pour tout idéal J de $\Bbbk H$. Ainsi :

$$I \subseteq \Bbbk G \cdot J \quad \Rightarrow \quad \pi_H(I) \subseteq \pi_H(\Bbbk G \cdot J) = J.$$

Montrons l'implication réciproque. Supposons $\pi_H(I) \subseteq J$. Pour tout élément k de G/H, choisissons un représentant s_k de k dans G. Étant donné $x = \sum \lambda_g \cdot g$ dans I, on écrit :

$$x = \sum_{g \in G} \lambda_g \cdot g = \sum_{\substack{k \in G/H, \\ h \in H}} \lambda_{s_k h} \cdot s_k h = \sum_{k \in G/H} s_k \left(\sum_{h \in H} \lambda_{s_k h} \cdot h \right).$$

La formule (2.A.1.1) permet alors d'écrire :

$$\sum_{h \in H} \lambda_{s_k h} \cdot h = \pi_H(s_k^{-1} x).$$

Par hypothèse, cet élément est dans J, ce qui achève de prouver que x est dans $\Bbbk G \cdot J$.

De plus, i est nécessairement pleinement fidèle, ce qui implique (REF ?) que l'unité $p \circ i \longrightarrow id$ et la couinité $id \longrightarrow q \circ i$ sont des isomorphismes. Ce sont donc nécessairement des égalités. □

Corollaire 2.A.2. *Soit G un groupe et H un sous-groupe normal de G. Soit J un idéal propre G-invariant de $\Bbbk H$. Notons $I = \Bbbk G \cdot J$. Alors :*

$$G \cap (1 + I) = H \cap (1 + J).$$

Démonstration. Soit $g \in G \cap (1 + I)$. La proposition 2.A.1 implique :

$$\pi_H(g - 1) \in \pi_H(I) = J.$$

Or, si $g \notin H$, par définition de la projection, $\pi_H(g - 1)$ est égal à -1, qui ne peut être dans J que si $J = \Bbbk H$, ce qui est exclus, par hypothèse. Ainsi, on a nécessairement $g \in H$ et $g - 1 = \pi_H(g - 1) \in J$, ce qui achève la preuve. □

2.A.2 Un diagramme d'adjonctions

On peut transposer le diagramme (2.1.5.2) dans un contexte un peu plus général. On remplace pour cela la catégorie $\mathcal{SFC}$ par la catégorie $\mathcal{SFC}_+$ des filtrations $G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots$ vérifiant la propriété de forte centralité :

$$[G_i, G_j] \subseteq G_{i+j},$$

y compris pour $i = 0$ (ou $j = 0$).

Remarque 2.A.3. La catégorie $\mathcal{SFC}_+$ est exactement celle des *N-séries étendues* considérée dans [HM17].

On considère la catégorie $\mathcal{N}(\mathcal{G}rpes)$ des paires de groupes (G, H), telles que $H \lhd G$, avec les morphismes évidents. Cette catégorie est équivalente à la catégorie des surjections de $\mathcal{G}rpes$, qui est une sous-catégorie pleine de la catégorie des flèches $\mathcal{F}l(\mathcal{G}rpes)$.

On définit un foncteur d'oubli par :

$$\omega : \begin{cases} \mathcal{SFC}_+ & \longrightarrow & \mathcal{N}(\mathcal{G}rpes) \\ G_* & \longmapsto & (G_0 \rhd G_1). \end{cases}$$

La catégorie $\mathcal{A}lg_+$ sera remplacée par la catégorie $\mathcal{N}(\mathcal{A}lg)$ des paires (A, I) où I est un idéal de la $\Bbbk$-algèbre A. On notera souvent $(A \rhd I)$ une telle paire. Cette catégorie est équivalente à celle des surjections d'algèbres (on peut penser à une surjection $\varepsilon : A \longrightarrow B$ comme à une augmentation généralisée).

Avec ces notations, on peut écrire un diagramme analogue à (2.1.5.2) :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{SFC}_+ \arrow[r, shift left, "\mathfrak{a}_*^+"] \arrow[d, "\omega"] & f\mathcal{A}lg \arrow[l, shift left, "(-)_*^\times"] \arrow[d, "\omega"] \\ \mathcal{N}(\mathcal{G}rpes) \arrow[u, bend left, "\Gamma"] \arrow[u, bend right, "c"'] \arrow[r, shift left, "\Bbbk[-]"] & \mathcal{N}(\mathcal{A}lg), \arrow[l, shift left, "(-)^\times"] \arrow[u, bend left, "I^*"] \arrow[u, bend right, "c"'] \end{tikzcd}$$

où les adjoints aux oublis sont donnés par :

$$\begin{cases} c(G \rhd H) & := (G, H, H, \ldots), \\ c(A \rhd I) & := (A, I, I, \ldots), \\ \Gamma(G \rhd H) & := (G, \Gamma_1 H, \Gamma_2 H, \ldots), \\ I^*(A \rhd I) & := (A, I, I^2, \ldots). \end{cases}$$

Le foncteur $\mathfrak{a}_*^+$ envoie G_* sur $\Bbbk G_0$, muni de sa filtration d'algèbre engendrée par les $G_i - 1$. Cette filtration est l'extension à $\Bbbk G_0$ de la filtration de $\Bbbk G_1$ donnée par $\mathfrak{a}_*(G_{\geqslant 1})$:

$$\forall j \geqslant 1,\ \mathfrak{a}_j^+(G_*) = \Bbbk G_0 \cdot \mathfrak{a}_j(G_{\geqslant 1}). \tag{2.A.3.1}$$

Son adjoint envoie A_* sur $A_*^\times := A^\times \cap (1 + A_*)$ (en degré 0, cette formule donne : $A_0^\times = A^\times$).

L'adjonction de l'algèbre de groupe s'étend à ce contexte par :

$$\begin{cases} \Bbbk[G \rhd H] & := (\Bbbk G \rhd \Bbbk G \cdot (H - 1), \\ (A \rhd I)^\times & := (A^\times \rhd A^\times \cap (1 + I)). \end{cases}$$

Ceci correspond à l'extension évidente de $\Bbbk[-]$ aux catégories de surjections : la première formule décrit le noyau de $\Bbbk G \twoheadrightarrow \Bbbk(G/H)$. De même, la seconde formule décrit le noyau de $A^\times \longrightarrow (A/I)^\times$.

De même qu'au paragraphe 2.1.1, le carré contenant les foncteurs d'oubli est commutatif (les deux côtés envoient A_* sur $(A^\times \rhd A^\times \cap (1 + A_1))$), donc le carré des adjoints à gauche l'est aussi. On trouve ainsi un analogue de la proposition 2.1.6 :

Proposition 2.A.4.

$$\mathfrak{a}_*^+(\Gamma(G \rhd H) = (\Bbbk G \cdot (H - 1))^*,$$

où $\Bbbk G \cdot (H - 1)$ est le noyau de $\Bbbk G \twoheadrightarrow \Bbbk(G/H)$.

On peut se demander ce que devient le théorème de clôture 2.1.8 dans ce contexte. Précisément, on peut considérer l'adjonction :

$$\mathcal{SFC}_+ \underset{(-)^\times_*}{\overset{\mathfrak{a}^+_*}{\rightleftarrows}} f\mathcal{A}lg,$$

analogue à l'adjonction 2.1.1. Si $G_* \in \mathcal{SFC}_+$, on peut considérer la filtration d'algèbre $\mathfrak{a}^+(G_*)$ de $\Bbbk G_0$, puis la filtration $G_0 \cap (1 + \mathfrak{a}^+(G_*))$ sur $G = G_0$, qui contient G_*. En fait, comme tous les idéaux considérés sont contrôlés par G_1, cette nouvelle filtration est décrite par l'ancien théorème de clôture, appliqué à la suite fortement centrale $G_{\geqslant 1}$. En effet, on déduit immédiatement du corollaire 2.A.2 :

Corollaire 2.A.5. *Soit $G_* \in \mathcal{SFC}_+$. Alors pour tout $j \geqslant 1$:*

$$G_0 \cap (1 + \mathfrak{a}^+_j(G_*)) = G_1 \cap (1 + \mathfrak{a}_j(G_{\geqslant 1})).$$

Démonstration. C'est une application directe du corollaire 2.A.2, avec $G = G_0$, $H = G_1$ et $J = \mathfrak{a}_j(G_{\geqslant 1})$, puisque la formule (2.A.3.1) assure que :

$$\Bbbk G \cdot J = \Bbbk G \cdot \mathfrak{a}_j(G_{\geqslant 1}) = \mathfrak{a}^+_j(G_*).$$

On remarquera que J est un idéal propre de $\Bbbk H$ puisqu'il est inclus dans IH. $\square$

2.A.3 Formule de Sandling

On peut utiliser ce formalisme catégorique pour donner une preuve de la formule dite « de Sandling » (proposition 2.A.8), telle qu'on la trouve dans [San72, th. 3.9], cité par [Pas79, th. I.1.8]. À partir de là, le théorème de clôture 2.1.8 permettra de retrouver la description classique des groupes de dimension de Lie (propositions 2.A.10 et 2.A.11), qui est similaire à celle des groupes de dimension (propositions 2.1.12 et 2.1.14).

Nous aurons besoin pour cela de considérer des algèbres de Lie filtrées. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, on dit qu'une filtration $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \supseteq \mathfrak{g}_2 \supseteq \ldots$ est *fortement centrale* si :

$$\forall i, j \geqslant 1,\ [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}.$$

Notamment, comme dans le cas des groupes, la *suite centrale descendante* $\Gamma_*\mathfrak{g}$, définie par :

$$\begin{cases} \Gamma_1 := \mathfrak{g}, \\ \Gamma_{k+1} := [\mathfrak{g}, \Gamma_k], \end{cases}$$

est une filtration fortement centrale. Pour le voir, il suffit de copier la preuve par récurrence de 1.9.5 en remplaçant le lemme des trois sous-groupes par l'identité de Jacobi.

De même que pour les groupes, on définit une catégorie des suites fortement centrales sur les algèbres de Lie. Celle-ci est munie d'un foncteur d'oubli vers la catégorie $\mathcal{L}ie_\Bbbk$ des algèbres de Lie, dont la suite centrale descendante définit un adjoint à gauche Γ.

En fait, cette dernière adjonction se relève aux *algèbres (associatives) Lie-filtrées*, *i.e.* aux $\Bbbk$-algèbres (associatives) munies d'une filtration par des idéaux (d'algèbre associative) qui est une filtration fortement centrale de l'algèbre de Lie sous-jacente. Un morphisme d'algèbres Lie-filtrées est un morphisme d'algèbres (associatives) préservant la filtration. On note $fLie\mathcal{A}lg$ la catégorie ainsi obtenue. Dans ce contexte, on adopte une autre définition de la suite centrale descendante.

Soit A une k-algèbre. On définit $\Gamma_* A$ par :

$$\begin{cases} \Gamma_1 := A, \\ \Gamma_{k+1} := A[A, \Gamma_k], \end{cases} .$$

On utilise la formule :

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$$

pour montrer simultanément que c'est encore une suite fortement centrale sur l'algèbre de Lie sous-jacente, mais aussi que c'est la suspension d'une filtration d'algèbre de A, c'est-à-dire :

$$\Gamma_i \cdot \Gamma_j \subseteq \Gamma_{i+j-1}.$$

Le foncteur ainsi défini est adjoint à gauche au foncteur d'oubli :

$$\mathcal{A}lg \underset{\omega}{\overset{\Gamma}{\rightleftarrows}} fLie\mathcal{A}lg.$$

Notons $f\mathcal{A}lg^{com}$ la sous-catégorie pleine de $f\mathcal{A}lg$ formée par les algèbres filtrées dont le gradué est commutatif. La commutativité du gradué d'une telle algèbre A_* se traduit exactement par :

$$\forall i, j \geqslant 0,\ [A_i, A_j] \subseteq A_{i+j+1}.$$

La *suspension* de cette filtration, définie par $\Sigma(A_*)_i = A_{i+1}$, est alors un élément de $fLie\mathcal{A}lg_{\mathbb{k}}$. Ceci définit un foncteur :

$$\Sigma : f\mathcal{A}lg^{com} \longrightarrow fLie\mathcal{A}lg.$$

On a vu que, pour une algèbre associative A, la filtration $\Gamma_* A$ est dans l'image de ce foncteur. Cette remarque permet de relever l'adjonction précédente en une adjonction :

$$\mathcal{A}lg \underset{\omega}{\overset{\Gamma}{\rightleftarrows}} f\mathcal{A}lg^{com}.$$

Notons $\mathcal{SFC}_+^{com}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{SFC}_+$ formée par les filtrations dont le gradué est abélien, au sens où :

$$\left(\begin{array}{l} Lie(G_{\geqslant 1}) \text{ est abélienne}, \\ G_0/G_1 \text{ est abélien}, \\ G_0/G_1 \text{ agit trivialement sur } \mathcal{L}(G_{\geqslant 1}). \end{array} \right.$$

Ces conditions se traduisent par :

$$[G_i, G_j] \subseteq G_{i+j+1},$$

y compris pour $i = 0$ (ou $j = 0$). Par conséquent, $\mathcal{SFC}_+^{com}$ est isomorphe, *via* la suspension, à la catégorie $\mathcal{SFC}$.

Cette sous-catégorie est reliée par une adjonction à $f\mathcal{A}lg^{com}$:

Lemme 2.A.6. *L'adjonction :*

$$\mathcal{SFC}_+ \underset{(-)^\times_*}{\overset{\mathfrak{a}^+_*}{\rightleftarrows}} f\mathcal{A}lg.$$

se restreint en une adjonction entre les sous-catégories :

$$\mathcal{SFC}_+^{com} \underset{(-)^\times_*}{\overset{\mathfrak{a}^+_*}{\rightleftarrows}} f\mathcal{A}lg^{com}.$$

Démonstration. Il faut montrer que ces sous-catégories pleines sont envoyées l'une sur l'autre par les deux adjoints.

Soit A_* un élément de $f\mathcal{A}lg^{com}$. Le plongement de Lie provenant du théorème de Lazard :

$$\mathcal{L}(A_*^\times) \hookrightarrow \mathrm{gr}(A_*)$$

assure que $\mathcal{L}(A_*^\times)$ est abélienne, puisque $\mathrm{gr}(A_*)$ est commutative. De plus, pour $i \geqslant 0$:

$$[A^\times, A_i^\times] \subseteq 1 + A_{i+1}.$$

Ceci se déduit de l'inclusion $[A_0, A_i] \subseteq A_{i+1}$ et de la formule :

$$[g,h] - 1 = [g-1, h-1]g^{-1}h^{-1}.$$

Ainsi, $A_*^\times$ est bien, dans $\mathcal{SFC}_+^{com}$.

Soit maintenant G_* un élément de $\mathcal{SFC}_+^{com}$. Considérons le morphisme donné par le théorème de Lazard :

$$\alpha : \mathcal{L}(G_{\geqslant 1}) \longrightarrow \mathrm{gr}(\mathfrak{a}_*(G_{\geqslant 1})).$$

Par définition de la filtration d'algèbre engendrée, $\mathrm{gr}(\mathfrak{a}_*(G_{\geqslant 1}))$ est engendrée, comme algèbre associative, par l'image de α. Or, par hypothèse, $\mathcal{L}(G_{\geqslant 1})$ est une algèbre de Lie abélienne. En utilisant la formule :

$$[ab, c] = a[b,c] + [a,c]b,$$

on en déduit que les crochets dans $\mathrm{gr}(\mathfrak{a}_*(G_{\geqslant 1}))$ sont dans l'idéal engendré par ceux de $\mathcal{L}(G_{\geqslant 1})$, donc sont nuls : $\mathrm{gr}(\mathfrak{a}_*(G_{\geqslant 1}))$ est commutative.

Notons G pour G_0. La filtration $\mathfrak{a}_*^+$ sur $\Bbbk G$ est donnée par $\mathfrak{a}_0 = \Bbbk G$ et, pour $i \geqslant 1$, par la formule (2.A.3.1) :

$$\mathfrak{a}_i^+ = \Bbbk G \cdot \mathfrak{a}_i \ (= \mathfrak{a}_i \cdot \Bbbk G).$$

Par hypothèse, G/G_1 est abélien, c'est-à-dire $[G,G] \subseteq G_1$. Par conséquent, si g et h sont des éléments de G :

$$gh - hg = ([g,h]-1)hg \in (G_1 - 1)\Bbbk G \subseteq \mathfrak{a}_1^+.$$

De plus, $[G, \mathfrak{a}_i] \subseteq \mathfrak{a}_{i+1}$, et $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j] \subseteq \mathfrak{a}_{i+j+1}$. On en déduit, pour $g, h \in G$, $a \in \mathfrak{a}_i$ et $b \in \mathfrak{a}_j$:

$$\begin{aligned}[g, ha] &= [ga, h]b + h[ga, b] \\ &= [g,h]ab + g[a,h]b + h[g,b]a + hg[a,b] \\ &\in \ \mathfrak{a}_1^+ \cdot \mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_j + \Bbbk G \cdot \mathfrak{a}_{i+1}\mathfrak{a}_j + \Bbbk G \cdot \mathfrak{a}_{j+1}\mathfrak{a}_i + \Bbbk G \cdot [\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j] \ \subseteq \ \mathfrak{a}_{i+j+1}^+,\end{aligned}$$

ce qui achève de prouver que $\mathrm{gr}(\mathfrak{a}_*(G_*))$ est commutatif. □

On peut regrouper les adjonctions obtenues dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{SFC}_+^{com} \arrow[rr, shift left, "\mathfrak{a}_*^+"] \arrow[d, shift left, "\Sigma"] & & f\mathcal{A}lg^{com} \arrow[ll, shift left, "(-)^\times_*"] \arrow[dd, shift left, "\omega"] \\
\mathcal{SFC} \arrow[u, shift left, "\Sigma^{-1}"] \arrow[d, shift left, "\omega"] & & \\
\mathcal{G}rpes \arrow[u, shift left, "\Gamma"] \arrow[rr, shift left, "\Bbbk[-]"] & & \mathcal{A}lg. \arrow[ll, shift left, "(-)^\times"] \arrow[uu, shift left, "\Gamma"]
\end{tikzcd}$$

Le diagramme des adjoints à gauche commute, donc aussi celui des adjoints à droite, d'où la proposition :

Proposition 2.A.7 (formule de Sandling)**.** *Pour tout groupe G et tout anneau $\Bbbk$:*

$$\Gamma_*(\Bbbk G) = \mathfrak{a}_*^+(\Sigma^{-1}(\Gamma_* G)).$$

Remarquons que $\Gamma_*(\Bbbk G)$ correspond (au degré 1 près) à la filtration $\Delta^{(*)}G$ de Passi [Pas79]. L'égalité ci-dessus est donc bien son théorème I.1.8 :

Proposition 2.A.8 (formule de Sandling)**.** *Pour tout groupe G et tout anneau $\Bbbk$:*

$$\forall n \geqslant 2,\ \Gamma_n(\Bbbk G) = \sum \Bbbk G \cdot \prod_j (\Gamma_{n_j}(G) - 1),$$

où la somme est prise sur les partitions de $n-1$: les n_j sont des entiers strictement supérieurs à 1 vérifiant :

$$\sum (n_j - 1) = n - 1.$$

La proposition 2.A.7 est l'analogue, pour la filtration de Lie $\Gamma_*(\Bbbk G)$, de la proposition 2.1.6 pour les puissances de l'idéal d'augmentation : elle permet d'interpréter la filtration $\Gamma_*(\Bbbk G)$ comme provenant d'une filtration du groupe par le foncteur $\mathfrak{a}_*^+$. On peut alors utiliser le théorème de clôture pour décrire la structure des sous-groupes de dimension de Lie.

Définition 2.A.9. Les *sous-groupes de dimension de Lie* d'un groupe G sont définis par :

$$DL_*^{\Bbbk}(G) := G \cap (1 + \Gamma_*(\Bbbk G)).$$

Le théorème de Lazard 1.3.5 assure que DL_* est un élément de $\mathcal{SFC}_+$.

Le corollaire 2.A.5, appliqué à $\Sigma^{-1}(\Gamma_* G)$, permet de ramener la description de ces sous-groupes à une application du théorème de clôture 2.1.8. En effet, ce corollaire donne :

$$\begin{aligned}
\forall j \geqslant 1,\ G \cap (1 + \Gamma_j(\Bbbk G)) &= \Gamma_2 G \cap \left(1 + a_j \left(\Sigma^{-1}(\Gamma_* G)_{\geqslant 1}\right)\right) \\
&= \Gamma_2 G \cap (1 + a_j(\Gamma_{\geqslant 2} G)).
\end{aligned}$$

On peut ainsi déduire de la proposition 2.1.10, appliquée à la suite fortement centrale $\Gamma_{\geqslant 2} G$ sur $\Gamma_2 G$, la description des groupes de dimension de Lie rationnels :

Proposition 2.A.10. *([Pas79], IV.2.2) Soit $\Bbbk$ un corps de caracxtéristique 0. Pour tout groupe G :*
$$\forall k \geqslant 1,\ DL_k^{\Bbbk}(G) = \sqrt[\Gamma_2 G]{\Gamma_{k+1}G},$$
où l'isolateur est pris dans $\Gamma_2 G$.

De même, on déduit de la proposition 2.1.11 la description des groupes de dimension de Lie modulo p :

Proposition 2.A.11. *([Pas79], IV.2.8) Soit $\Bbbk$ un anneau de caractéristique première p. Pour tout groupe G :*
$$\forall k \geqslant 1,\ DL_k^{\Bbbk}(G) = \prod_{ip^j \geqslant k} (\Gamma_{i+1}G)^{p^j}$$

Chapitre 3

Cas des groupes libres - algèbre de Magnus

Sommaire

3.1 Suites fortement centrales sur le groupe libre

3.1.1 L'algèbre de Magnus, complété de l'algèbre du groupe libre

On considère *la* $\mathbb{k}$*-algèbre tensorielle* sur un $\mathbb{k}$-module V :

$$TV = \bigoplus_{k\geqslant 0} V^{\otimes k}.$$

C'est la $\mathbb{k}$-algèbre associative (unitaire) libre sur V : si A est une algèbre associative (unitaire) :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}lg_{\mathbb{k}}}(TV, A).$$

Elle est munie d'une filtration par des idéaux T_iV, avec :

$$T_iV := \bigoplus_{k\geqslant i} V^{\otimes k}.$$

Remarquons que T_1V est le noyau de l'augmentation canonique $TV \longrightarrow \mathbb{k}$ (le morphisme d'algèbres qui envoie V sur 0), et que pour tout i :

$$T_iV = (T_1V)^i,$$

en tant qu'idéaux : c'est l'idéal engendré par les monômes de degré i en les éléments de V.

Définition 3.1.1. *L'algèbre de Magnus* est le complété de TV par rapport à la filtration ci-dessus :

$$\widehat{T}V := \varprojlim_i (TV/T_iV) \cong \prod_{k\geqslant 0} V^{\otimes k}.$$

Si V est libre sur l'anneau $\mathbb{k}$, le choix d'une base $(X_i)_{i\in I}$ de V permet d'identifier $\widehat{T}V$ à l'algèbre des séries formelles en des indéterminées $(X_i)_{i\in I}$ qui ne commutent pas :

$$\widehat{T}V \cong \mathbb{k}\langle\langle X_i\rangle\rangle_{i\in I}.$$

On écrira souvent un élément $z = (z_k)$ du produit sous la forme :

$$z = \sum_{k\geqslant 0} z_k.$$

Remarquons que c'est en fait une vraie série convergente, pour la topologie pro-discrète de $\widehat{T}V$. L'algèbre $\widehat{T}V$ est filtrée par les idéaux $\widehat{T}_iV$, qui sont les complétés des T_iV, décrits par :

$$\widehat{T}_iV = \prod_{k\geqslant i} V^{\otimes k}.$$

Ceux-ci forment une base de voisinages de 0 dans $\widehat{T}V$. On remarquera que $\widehat{T}_iV = (\widehat{T}_1V)^i$ (c'est ici encore l'idéal engendré par les monômes de degré i en les éléments de V).

On remarque également que $1 + \widehat{T}_1V$ est un sous-groupe du groupe des inversibles $(\widehat{T}V)^\times$, en vertu d'un calcul classique sur les séries formelles.

Soit un groupe G. Rappelons qu'on note $\mathbb{k}G$ son algèbre de groupe à coefficients dans $\mathbb{k}$, $\varepsilon : \mathbb{k}G \longrightarrow \mathbb{k}$ l'augmentation, et IG l'idéal d'augmentation. On munit $\mathbb{k}G$ de la filtration par les puissances de l'idéal d'augmentation, IG^k. Le complété pour cette filtration sera noté $\widehat{\mathbb{k}G}$:

$$\widehat{\mathbb{k}G} := \varprojlim_k \left(\mathbb{k}G/(IG)^k\right).$$

Proposition 3.1.2. *Si l'on fixe une base $(x_i)_{i\in I}$ d'un groupe libre F, qui correspond à une base $(X_i)_{i\in I}$ de V, la correspondance $x_i - 1 \longleftrightarrow X_i$ définit un* isomorphisme *:*

$$\widehat{\Bbbk F} \cong \widehat{T}V,$$

où $V = \Bbbk \otimes F^{ab}$. Autrement dit, $\widehat{\Bbbk F}$ est une algèbre de séries formelles sur les $x_i - 1$.

Démonstration. On construit les isomorphismes réciproques par propriétés universelles.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] \arrow[d, "\theta_0"'] & \Bbbk F \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "\theta_0^{\Bbbk}"'] & \widehat{\Bbbk F} \arrow[d, dashed, "\widehat{\theta_0^{\Bbbk}}"] \\
1 + \widehat{T}_1 V \arrow[rr] & & \widehat{T}V.
\end{tikzcd}$$

On définit θ_0 par $x_i \mapsto 1 + X_i$, que l'on étend à F par la propriété universelle du groupe libre ($1 + \widehat{T}_1 V$ est un groupe pour la multiplication). Ce morphisme s'étend à son tour en un morphisme d'algèbres $\theta_0^{\Bbbk}$ par la propriété universelle de $\Bbbk F$. Comme $\theta_0^{\Bbbk}(IF) \subseteq \widehat{T}_1 V$ (puisque $\theta_0^{\Bbbk}(F - 1) \subseteq \widehat{T}_1 V$), $\theta_0^{\Bbbk}$ est continu, donc se prolonge en un unique morphisme continu $\widehat{\theta_0^{\Bbbk}}$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r] \arrow[dr, "\kappa"'] & TV \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\kappa^{\Bbbk}"] & \widehat{T}V \arrow[d, dashed, "\widehat{\kappa^{\Bbbk}}"] \\
& \Bbbk F \arrow[r] & \widehat{\Bbbk F}.
\end{tikzcd}$$

On définit κ par $X_i \longrightarrow x_i - 1$, qu'on étend par linéarité, puis on l'étend en $\kappa^{\Bbbk}$ par propriété universelle de TV, et $\kappa^{\Bbbk}(V) \subseteq IF$, donc $\kappa^{\Bbbk}(T_1 V) \subseteq IF$ (puisque V engendre l'idéal $T_1 V$ dans TV) : $\kappa^{\Bbbk}$ est continu, donc se prolonge en $\widehat{\kappa^{\Bbbk}}$

Pour conclure la démonstration de la proposition, il suffit de remarquer que $\widehat{\kappa^{\Bbbk}} \circ \widehat{\theta_0^{\Bbbk}}$ (resp. $\widehat{\theta_0^{\Bbbk}} \circ \widehat{\kappa^{\Bbbk}}$) est un endomorphisme d'algèbre continu de $\widehat{\Bbbk F}$ (resp. de $\widehat{T}V$), qui fixe F (resp. V), donc est l'identité, par unicité dans les diverses propriétés universelle. □

La preuve de la proposition suivante donnée ici est issue de [Laz54, p. 118].

Proposition 3.1.3. *[Magnus] L'application $x_i \longmapsto 1 + X_i$ définie dans la proposition 3.1.2 induit un plongement :*

$$\theta_0 : F \hookrightarrow 1 + \widehat{T}_1 V.$$

Démonstration. Il faut montrer que le sous-groupe de $1 + \widehat{T}_1 V$ engendré par les $1 + X_i$ est libre, autrement dit que :

$$(1 + X_{i_1})^{\alpha_1} \cdots (1 + X_{i_l})^{\alpha_l} \neq 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} i_j \neq i_{j+1} \\ 0 \neq \alpha_j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Le coefficient de $X_{i_1}^{\beta_1} \cdots X_{i_l}^{\beta_l}$ dans cette expression est :

$$\binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_l}{\beta_l},$$

où chaque coefficient binômial $\binom{\alpha}{\beta}$ est le coefficient de X^β dans le développement en série formelle de $(1+X)^\alpha$ (y compris pour α négatif). Soit p premier, divisant la caractéristique de $\Bbbk$. On décompose chaque α_j en $\beta_j\gamma_j$ avec β_j une puissance de p et $p \nmid \gamma_j$. Alors :

$$\binom{\alpha_j}{\beta_j} \equiv \gamma_j \not\equiv 0 \pmod p,$$

car c'est le coefficient de $X_{i_j}^{\beta_j}$ dans :

$$(1+X_{i_j})^{\alpha_j} = (1+X_{i_j})^{\beta_j\gamma_j} \equiv (1+X_{i_j}^{\beta_j})^{\gamma_j} = 1 + \gamma_j X_{i_j}^{\beta_j} + \cdots$$

Ainsi, avec ce choix de β_j :

$$\binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_l}{\beta_l} \not\equiv 0 \pmod p.$$

Cet entier est donc non nul dans $\Bbbk$, ce qui achève la démonstration. $\square$

3.1.2 Filtrations classiques sur le groupe libre

Le théorème suivant est bien connu [Laz54, th. 4.2], [MKS04, 5.7] :

Théorème 3.1.4. *Soit F un groupe libre. L'algèbre de Lie $\mathcal{L}(F)$ s'identifie naturellement à l'algèbre de Lie libre sur $V = F^{ab} = \mathcal{L}_1(F)$.*

Si F est libre sur un ensemble X, on parlera indifféremment de l'algèbre de Lie libre sur l'ensemble X ou sur le module V de base X. On le note $\mathfrak{L}X$ ou $\mathfrak{L}V$.

Démonstration. Le corollaire 1.3.10 fournit un morphisme d'algèbres de Lie graduées :

$$\mathcal{L}(F) \longrightarrow \mathrm{gr}_*(\mathbb{Z}\,F) = \mathrm{gr}_*\left(\widehat{\mathbb{Z}\,F}\right) \cong \mathrm{gr}_*\left(\widehat{T}V\right) = TV.$$

Ce morphisme envoie x_i sur $x_i - 1 \in \mathrm{gr}_*(\widehat{\mathbb{Z}\,F})$. Celui-ci est envoyé sur $X_i \in TV$, par définition de l'isomorphisme du milieu (donné par la proposition 3.1.2 ci-dessus). C'est donc un morphisme sur la sous-algèbre de Lie engendrée par V de l'algèbre tensorielle TV. Cette sous-algèbre de Lie n'est autre, par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (précisément, par le corollaire 3.3.3), que l'algèbre de Lie libre sur V. Or une surjection d'une algèbre de Lie contenant V sur l'algèbre de Lie libre $\mathfrak{L}V$ qui induit l'identité de V est nécessairement un isomorphisme (l'inverse se construit par propriété universelle). Ceci achève la preuve du théorème. $\square$

Remarque 3.1.5. Remarquons que cet isomorphisme, obtenu par restriction du morphisme canonique donné par le théorème de Lazard (induit par $g \mapsto g-1$), est naturel : c'est un isomorphisme entre foncteurs sur les groupes libres de type fini. En particulier, il ne dépend pas d'un choix de base, ni du choix du *développement de Magnus* $x_i \mapsto 1 + X_i + \cdots$ utilisé pour identifier $\widehat{\Bbbk F}$ à $\widehat{T}V$ (théorème 3.1.2). Le lecteur est invité à consulter [Kaw06] pour plus de détails sur les développements de Magnus.

L'analogue en caractéristique p est vrai, en considérant des algèbres de Lie p-restreintes [Laz54, th. 6.5] :

Théorème 3.1.6. *L'algèbre de Lie $\mathcal{L}^{[p]}(F)$ s'identifie naturellement à l'algèbre de Lie p-restreinte libre sur $V = F^{ab} \otimes \mathbb{F}_p = \mathcal{L}_1^{[p]}(F)$.*

Démonstration. C'est la même que pour le théorème 3.1.4, en remplaçant $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{F}_p$, et le corollaire 3.3.3 par le corollaire 3.3.7. □

On peut déduire davantage de la preuve du théorème 3.1.4. Notamment, $\mathcal{L}(F) \longrightarrow \mathrm{gr}_*(\mathbb{Z}\,F)$ est injectif (c'est l'injection canonique de $\mathfrak{L}V$ dans TV). Ce qui a pour corollaire :

Corollaire 3.1.7. *Soit F un groupe libre. Alors les inclusions suivantes sont des égalités :*

$$\forall k \geqslant 1,\ \Gamma_k(F) \subseteq F \cap (1 + IF^k) = D_k^{\mathbb{Z}}(F) \subseteq D_k^{\mathbb{Q}}(F)$$

En particulier, les groupes libres vérifient la propriété de la dimension (cf. la remarque 1.3.9).

Démonstration. L'injectivité du morphisme :

$$\mathcal{L}(F) \longrightarrow \mathrm{gr}_*(\mathbb{Z}\,F),$$

qui se factorise à travers l'injection $\mathcal{L}(D_*^{\mathbb{Z}}(F)) \hookrightarrow \mathrm{gr}_*(\mathbb{Z}\,F)$, implique que le morphisme $\mathcal{L}(F) \longrightarrow \mathcal{L}(D_*^{\mathbb{Z}}(F))$ induit par l'inclusion est un isomorphisme. Ceci se traduit immédiatement par :

$$\Gamma_*(F) = F \cap (1 + IF^*) =: D_*^{\mathbb{Z}}(F).$$

Mais cette injectivité implique aussi que $\mathcal{L}(F)$ (donc $\Gamma_*(F)$) est sans torsion. Par conséquent, la proposition 2.1.12 implique :

$$D_*^{\mathbb{Q}}(F) = \Gamma_*(F).$$

Ceci donne une autre preuve (moins directe) de l'égalité avec $D_*^{\mathbb{Z}}(F)$, comme dans la remarque 2.1.13. □

On peut aussi montrer :

Proposition 3.1.8. *Un groupe libre F est* résiduellement nilpotent, i.e. *:*

$$\bigcap_{k \geqslant 1} \Gamma_k(F) = 1.$$

Démonstration. Le plongement

$$\theta_0 : F \hookrightarrow 1 + \widehat{T}_1 V \subseteq \widehat{T}V$$

donné par la proposition 3.1.3 s'identifie à la flèche canonique $i : F \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}\,F}$, pourvu que l'on identifie $\widehat{\mathbb{Z}\,F}$ à $\widehat{T}V$ comme dans la proposition 3.1.2. Ainsi, i est injective. Or, en notant ι la flèche canonique de $\mathbb{Z}\,F$ dans son complété, on a :

$$\iota^{-1}\left(\widehat{IF^k}\right) = IF^k.$$

On peut alors écrire (en utilisant le corollaire 3.1.7) :

$$\Gamma_k(F) = F \cap (1 + IF^k) = F \cap \left(1 + \widehat{IF^k}\right) = F \cap \left(1 + \widehat{T}_k V\right).$$

L'intersection des $\widehat{T}_k V$ étant évidemment nulle dans $\widehat{T}V$, on a le résultat. □

Corollaire 3.1.9. *Les groupes IA_n sont résiduellement nilpotents.*

Démonstration. On déduit ceci de la proposition 3.1.8 par la proposition 1.7.4. □

On déduit aussi de la proposition 1.2.9 le corollaire suivant de la proposition 3.1.8 :

Corollaire 3.1.10. *Les groupes libres de type fini sont hopfiens.*

Pour le confort du lecteur, nous reformulons ce corollaire :

Corollaire 3.1.11. *Soit F_n le groupe libre sur n générateurs. Soit $(y_1, \dots, y_n)$ une famille génératrice de cardinal n de F_n. Alors F_n est libre sur $y_1, \dots, y_n$.*

Démonstration. Si l'on note x_i une base de F_n, un morphisme surjectif π de F_n sur F_n n'est autre que la donnée d'une famille génératrice $(y_i = \pi(x_i))$ de cardinal n de F_n. Ce corollaire n'est donc qu'une reformulation du corollaire précédent. □

3.2 Détermination de IA_n^{ab}

On interprète ici les constructions de la section 1.7 dans le cas où G est un groupe libre, et on rappelle la description classique de IA_n^{ab} (proposition 3.2.2).

Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt assure que l'algèbre de Lie libre $\mathfrak{L}V$ peut être décrite explicitement comme la sous-algèbre de Lie de l'algèbre tensorielle TV engendrée par V (cf. le corollaire 3.3.3). Ceci en fait une algèbre de Lie graduée (la graduation est aussi celle de $\mathcal{L}(F)$) et permet par exemple de décrire $\mathfrak{L}_2V$:

$$\mathfrak{L}_2V = \Lambda^2V.$$

C'est en effet le sous-module de $V^{\otimes 2}$ engendré par les $[u, v] = u \otimes v - v \otimes u$ (pour $u, v \in V$), qui est en fait libre sur les $[x, y]$ (pour $x, y \in X$ tels que $x < y$ pour un ordre total fixé sur X).

Quand V est de type fini, on peut décrire explicitement l'algèbre des dérivations de $\mathfrak{L}V$.

De manière générale, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, on peut munir le module sous-jacent à $\mathfrak{g}$ du crochet nul, pour obtenir une algèbre de Lie $\mathfrak{g}^\circ$. Pour le crochet nul, tous les endomorphismes sont des dérivations :

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}^\circ) = \mathrm{End}_{\Bbbk}(\mathfrak{g}).$$

L'action adjointe de $\mathfrak{g}$ sur lui-même est donc aussi une action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}^\circ$. Or, il est facile de vérifier que la donnée d'une dérivation de $\mathfrak{g}$ équivaut à la donnée d'une section $\sigma = (\partial, \mathbb{1}_{\mathfrak{g}})$ de la projection canonique :

$$\begin{tikzcd} (\mathfrak{g}^\circ) \rtimes \mathfrak{g} \arrow[r, "p"'] & \mathfrak{g}. \arrow[l, bend right, dashed, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

En appliquant ceci à l'algèbre de Lie libre, on en déduit, comme [Reu03, 0.7. (iii)], que toute application linéaire α de V dans $\mathfrak{L}V$ se prolonge de manière unique en une dérivation de $\mathfrak{L}V$. En effet, l'application linéaire $(\mathbb{1}, \alpha) : V \longrightarrow (\mathfrak{L}V^\circ) \rtimes \mathfrak{L}V$ se prolonge en un unique morphisme depuis $\mathfrak{L}V$, qui est une section de la projection considérée.

On en déduit qu'en posant :

$$\mathrm{Der}_k(\mathfrak{L}V) = \{\ d \in \mathrm{Der}(\mathfrak{L}V) \mid d(V) \subseteq \mathfrak{L}_{k+1}V\ \},$$

on a :

$$\mathrm{Der}_k(\mathfrak{L}V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, \mathfrak{L}_{k+1}V) \cong V^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{L}_{k+1}V.$$

Si V est de type fini et ∂ est une dérivation de $\mathfrak{L}V$, on peut décomposer l'application linéaire $\partial : V \longrightarrow \mathfrak{L}V$ correspondante en une somme de composantes homogènes, qui s'étendent elles-mêmes en des dérivations, ce qui justifie :

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{L}V) \cong \bigoplus_k \mathrm{Der}_k(\mathfrak{L}V).$$

De plus, cette graduation fait de $\mathrm{Der}(\mathfrak{L}V)$ une algèbre de Lie graduée (par définition du crochet).

Le morphisme de Johnson (1.7.5.1) d'un groupe libre de rang fini respecte la graduation ainsi obtenue. :

$$\tau = \bigoplus_k \tau_k : \mathcal{L}(\mathcal{A}_*) = \bigoplus_k \mathcal{A}_k/\mathcal{A}_{k+1} \longrightarrow \bigoplus_k V^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{L}_{k+1}V.$$

On rappelle que $\mathcal{A}_*$ désigne la filtration d'Andreadakis sur IA_F (définition 1.7.2).

Remarque 3.2.1. L'injectivité de $\tau : \mathcal{L}(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{L}V)$ (lemme 1.7.6) montre que $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ est sans $\mathbb{Z}$-torsion (sur $\mathbb{Z}$, $\mathfrak{L}V \subset TV$ est sans torsion). Par conséquent, en appliquant la proposition 2.1.12 :

$$\Gamma_k(IA_n) \subseteq D_k^{\mathbb{Q}}(IA_F) \subseteq \mathcal{A}_k.$$

Lorsque $G = F_n$ est de type fini, le morphisme $\mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G^{ab})$ (dont IA_G est le noyau) est surjectif, donc (en notant IA_n pour IA_{F_n}) :

$$\mathrm{Aut}(F_n)/IA_n \cong \mathrm{GL}(V).$$

La surjectivité se voit en relevant les générateurs usuels de $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ en des éléments de $\mathrm{Aut}(F_n)$. Ainsi, dans le cas du groupe libre, les actions considérées dans le lemme 1.7.6 sont des actions de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. De plus, l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ sur $\mathrm{Der}_k(\mathfrak{L}V) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, V^{\otimes k+1})$ est bien l'action canonique : il s'agit de l'action par conjugaison (et l'inclusion est GL_n-équivariante).

On rappelle qu'en précomposant le morphisme de Johnson τ avec le morphisme induit par l'inclusion $\Gamma_*(IA_n)$ dans $\mathcal{A}_*$, on obtient le morphisme de Johnson τ' (1.7.6.1). La proposition suivante est bien connue [Kaw06, th. 6.1] :

Proposition 3.2.2. *Le premier cran du morphisme de Johnson est un isomorphisme* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$*-équivariant :*

$$\tau_1' : IA_n^{ab} \cong V^* \otimes \Lambda^2 V.$$

Démonstration. On rappelle que τ_1' est induit par l'application explicite :

$$\begin{cases} IA_n & \longrightarrow & V^* \otimes \Lambda^2 V \\ \varphi & \longmapsto & \left(\overline{x} \longmapsto \overline{\varphi(x)x^{-1}}\right). \end{cases}$$

On admettra [Nie24] que IA_n est de type fini, engendré par les générateurs :

$$K_{ij} : x_t \longmapsto \begin{cases} x_j x_i x_j^{-1} & \text{si } t = i \\ x_t & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad K_{ijk} : x_t \longmapsto \begin{cases} x_i[x_j, x_k] & \text{si } t = i \\ x_t & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le lecteur pourra consulter [BBM07, 5.6] pour une preuve de ce résultat classique. Remarquons que ce système est redondant : $K_{ii} = K_{jj} = \mathbb{1}_{F_n}$ et $K_{ijk} = K_{ikj}^{-1}$, donc on peut se limiter à $i \neq j$ pour les premiers, et $j < k$ pour les seconds.

Calculons $\tau_1(K_{ij})$:

$$\tau_1(K_{ij})(x_t) = [K_{ij}, x_t] = K_{ij}(x_t)x_t^{-1} = \begin{cases} x_j x_i x_j^{-1} x_i^{-1} = [x_j, x_i] & \text{si } t = i \\ x_t x_t^{-1} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\tau_1(K_{ij}) = x_i^* \otimes [x_j, x_i] \in V^* \otimes \Lambda^2 V.$$

Un calcul similaire donne :

$$\tau_1(K_{ijk}) = x_i^* \otimes [x_j, x_k] \in V^* \otimes \Lambda^2 V.$$

Le morphisme $\bar{\tau}_1$ envoie ainsi un ensemble de générateurs de IA_n^{ab} sur une base de $V^* \otimes \Lambda^2 V$ (qui est $\mathbb{Z}$-libre). Il admet donc un inverse, que l'on construit en envoyant la base de $V^* \otimes \Lambda^2 V$ sur les générateurs correspondants de IA_n^{ab}. $\square$

3.3 Foncteur de Lie, présentations et coproduits

3.3.1 Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt

Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{k}$-algèbre de Lie. On peut considérer son *algèbre enveloppante* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ définie par :

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/(g \otimes h - h \otimes g - [g, h]).$$

C'est l'algèbre associative (unitaire) universelle munie d'un morphisme d'algèbres de Lie depuis $\mathfrak{g}$. Autrement dit, $\mathcal{U} : \mathcal{L}ie_{\mathbb{k}} \longrightarrow \mathcal{A}lg_{\mathbb{k}}$ est adjoint à gauche au foncteur d'oubli $\mathcal{A}lg_{\mathbb{k}} \longrightarrow \mathcal{L}ie_{\mathbb{k}}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}ie_{\mathbb{k}}}(\mathfrak{g}, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}lg_{\mathbb{k}}}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), A),$$

où le crochet de Lie sur A est donné par $(a, b) \longmapsto ab - ba$.

Cette algèbre n'est en général par graduée, mais admet une filtration croissante donnée par l'image de la filtration sur $T(\mathfrak{g})$ donnée par :

$$T^{\leqslant n}\mathfrak{g} := \bigoplus_{i=0}^{n} \mathfrak{g}^{\otimes i}.$$

Cette filtration (par des sous-modules) vérifie :

$$\mathcal{U}^{\leqslant n}\mathfrak{g} \cdot \mathcal{U}^{\leqslant m}\mathfrak{g} \ \subseteq \ \mathcal{U}^{\leqslant m+n}\mathfrak{g}.$$

Le gradué associé hérite donc d'une structure d'algèbre, et la projection π de $T(\mathfrak{g})$ sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ induit une surjection d'algèbres :

$$\mathrm{gr}(\pi) : T(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{gr}(T(\mathfrak{g})) \twoheadrightarrow \mathrm{gr}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})).$$

Or, pour g et h dans $\mathfrak{g}$, on a $\pi(g \otimes h - h \otimes g) = \pi([g, h])$, d'où l'on déduit :

$$\mathrm{gr}(\pi)(g \otimes h - h \otimes g) = 0.$$

Par conséquent, $\mathrm{gr}(\pi)$ se factorise en une surjection depuis l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$. En particulier, $\mathrm{gr}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ est commutative.

Nous sommes alors en mesure d'énoncer le :

Théorème 3.3.1 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *Supposons que $\Bbbk$ soit principal, ou de Dedekind, ou encore que le $\Bbbk$-module sous-jacent à $\mathfrak{g}$ vérifie l'une des propriétés suivantes :*

- *$\mathfrak{g}$ est $\Bbbk$-projectif,*
- *$\mathfrak{g}$ est uniquement divisible comme groupe abélien (*i.e. *$\mathfrak{g}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel),*
- *$\mathfrak{g}$ est une somme directe de $\Bbbk$-modules cycliques.*

Alors le morphisme $S(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathrm{gr}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ défini ci-dessus est un isomorphisme.
En particulier, le morphisme de $\mathfrak{g}$ dans son algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est injectif.

Cet énoncé regroupe les résultats de la section 6 de [Hig69]. Le lecteur peut se référer à ce très bel article pour une preuve.

Si $\mathfrak{g}$ est un $\Bbbk$-module libre, dont on note (x_i) une base ordonnée, alors $S(\mathfrak{g})$ l'est aussi, une base étant donnée par les monômes :

$$x_{i_1}^{r_1} \cdots x_{i_n}^{r_n} \text{ pour } n \geqslant 0,\ i_1 < \cdots < i_n \text{ et } r_1, ..., r_n > 0.$$

On en déduit aisément que les mêmes monômes forment une $\Bbbk$-base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ dans ce cas.

On peut déduire du théorème le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.2. *Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ des algèbres de Lie vérifiant les hypothèses du théorème 3.3.1. Soit $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un morphisme d'algèbres de Lie. Supposons que le morphisme $\mathcal{U}\varphi$ induit par φ entre les algèbres enveloppantes soit un isomorphisme. Alors φ est un isomorphisme.*

Démonstration. Le morphisme $\mathrm{gr}(\varphi)$ est encore un isomorphisme, et il s'identifie à $S(\varphi) : S(\mathfrak{g}) \longrightarrow S(\mathfrak{h})$. La partie de degré 1 de $S(\varphi)$ n'est autre que φ, qui est donc un isomorphisme. □

3.3.2 Algèbre de Lie libre et coproduits

On peut utiliser le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt pour étudier la structure des algèbres de Lie libres :

Corollaire 3.3.3. *Supposons que $\Bbbk$ soit principal, ou de Dedekind. Alors l'algèbre de Lie libre sur un $\Bbbk$-module libre V est la sous-algèbre de Lie de TV engendrée en degré 1.*

Démonstration. Notons L la sous-algèbre de Lie de TV engendrée par V. Montrons que c'est l'algèbre de Lie libre sur V. Soit $\mathfrak{g}$ une $\Bbbk$-algèbre de Lie, et $\lambda : V \longrightarrow \mathfrak{g}$ une application linéaire. Par le théorème 3.3.1, $\mathfrak{g}$ se plonge dans son algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. La propriété universelle de l'algèbre tensorielle permet de prolonger λ en un morphisme d'algèbres :

$$\begin{tikzcd} TV \arrow[r, dashed, "\bar{\lambda}"] & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \\ V \arrow[u] \arrow[r, "\lambda"] & \mathfrak{g}. \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Or $\bar{\lambda}(L)$ est inclus dans la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ engendrée par l'image de V, donc dans $\mathfrak{g}$. Par conséquent, le morphisme $\bar{\lambda}$ se restreint en un prolongement de λ en un morphisme d'algèbres de Lie de L dans $\mathfrak{g}$. Ce prolongement est évidemment unique. □

Avec exactement la même preuve, on peut en fait montrer un peu plus :

Corollaire 3.3.4. *Supposons que $\Bbbk$ soit principal, ou de Dedekind. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ deux $\Bbbk$-algèbres de Lie. On note $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) * \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ le coproduit de leurs algèbres enveloppantes (comme $\Bbbk$-algèbres associatives). Alors la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) * \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ engendrée en degré 1 est le coproduit $\mathfrak{g} * \mathfrak{h}$ des algèbres de Lie.*

Remarquons que comme $\mathcal{U}$ est un adjoint à gauche, $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) * \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ s'identifie à $\mathcal{U}(\mathfrak{g} * \mathfrak{h})$.

3.3.3 Cas de la caractéristique p - algèbres de Lie p-restreintes

Sur un anneau $\Bbbk$ de caractéristique p, on considère souvent des algèbres de Lie p-restreintes, c'est-à-dire des algèbres de Lie munies d'une opération $(-)^{[p]}$ qui se comporte vis-à-vis de la structure d'algèbre de Lie comme la puissance p-ième dans les algèbres associatives [Jac41]. Si $\mathfrak{g}$ est une $\Bbbk$-algèbre de Lie p-restreinte, on peut considérer son *algèbre enveloppante p-restreinte* $\mathcal{U}^r(\mathfrak{g})$ définie par :

$$\mathcal{U}^r(\mathfrak{g}) := \mathcal{U}(\mathfrak{g})/(g^p - g^{[p]}).$$

C'est la $\Bbbk$-algèbre associative universelle munie d'un morphisme d'algèbres de Lie p-restreintes depuis $\mathfrak{g}$. Autrement dit, $\mathcal{U}^r : p\mathcal{L}ie_\Bbbk \longrightarrow \mathcal{A}lg_\Bbbk$ est adjoint à gauche au foncteur d'oubli $\mathcal{A}lg_\Bbbk \longrightarrow p\mathcal{L}ie_\Bbbk$:

$$\mathrm{Hom}_{p\mathcal{L}ie_\Bbbk}(\mathfrak{g}, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}lg_\Bbbk}(\mathcal{U}^r(\mathfrak{g}), A),$$

où la structure p-restreinte sur A est donnée par la puissance p-ième classique.

La filtration de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ définie au paragraphe 3.3.1 induit une filtration de $\mathcal{U}^r(\mathfrak{g})$, et on vérifie facilement que la surjection de $S(\mathfrak{g})$ sur $\mathrm{gr}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ induit une surjection de $S(\mathfrak{g})/(g^p)$ sur $\mathrm{gr}(\mathcal{U}^r(\mathfrak{g}))$.

Nous pouvons alors énoncer le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt en caractéristique p [Jac41, th. 1] :

Théorème 3.3.5 (Poincaré-Birkhoff-Witt - cas d'un corps de caractéristique p)**.** *Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique p. Alors le morphisme $S(\mathfrak{g})/(g^p) \twoheadrightarrow \mathrm{gr}(\mathcal{U}^r(\mathfrak{g}))$ défini ci-dessus est un isomorphisme.*

En particulier, le morphisme de $\mathfrak{g}$ dans son algèbre enveloppante p-restreinte $\mathcal{U}^r(\mathfrak{g})$ est injectif.

On peut en déduire, avec les mêmes preuves, des corollaires analogues aux corollaires 3.3.2, 3.3.3 et 3.3.4 (sur un corps $\Bbbk$ de caractéristique p) :

Corollaire 3.3.6. *Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ des $\Bbbk$-algèbres de Lie p-restreintes. Soit $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un morphisme. Supposons que le morphisme $\mathcal{U}^r\varphi$ induit par φ entre les algèbres enveloppantes p-restreintes soit un isomorphisme. Alors φ est un isomorphisme.*

Corollaire 3.3.7. *L'algèbre de Lie p-restreinte libre sur un $\Bbbk$-espace vectoriel V est la sous-algèbre de Lie p-restreinte de TV engendrée en degré 1.*

Corollaire 3.3.8. *Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ deux $\Bbbk$-algèbres de Lie. On note $\mathcal{U}^r(\mathfrak{g}) * \mathcal{U}^r(\mathfrak{h})$ le coproduit de leurs algèbres enveloppantes restreintes (comme $\Bbbk$-algèbres associatives). Alors la sous-algèbre de Lie p-restreinte de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) * \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ engendrée en degré 1 est le coproduit $\mathfrak{g} * \mathfrak{h}$ des algèbres de Lie p-restreintes.*

Remarque 3.3.9. Ces résultats pourraient sans doute être généralisés à un contexte un peu plus large (sur des bons anneaux de caractéristique première). Notamment, on pourrait se demander comment adapter la machinerie de [Hig69] à ce contexte : faut-il définir une variante de l'invariant de Baer $B(\mathfrak{g})$, ou peut-on montrer le théorème sous dans le cas où ce même $B(\mathfrak{g})$ s'annule ? L'auteur n'a pas la réponse, à ce jour.

3.3.4 Théorème de Quillen

En utilisant la remarque 2.4.3, on peut démontrer une généralisation du théorème de Quillen (cf. [Qui68]. Voir aussi le th. VIII, 5.2 de [Pas79], ou le théorème 5.3 de [Mas07]) :

Théorème 3.3.10. *Soit $\Bbbk$ un anneau de caractéristique 0, et G_* une suite fortement centrale sans torsion sur un groupe de type fini $G = G_1$. Alors le morphisme canonique :*

$$\mathcal{U}(\mathcal{L}(G_*) \otimes \Bbbk) \longrightarrow \mathrm{gr}(\mathfrak{a}_*^{\Bbbk}(G_*))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Le morphisme canonique est induit par le morphisme de Lazard, qui est injectif par le théorème de clôture (2.1.8) :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(G_*) \otimes \Bbbk \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{gr}(\mathfrak{a}_*^{\Bbbk}(G_*)). \\ \mathcal{U}(\mathcal{L}(G_*) \otimes \Bbbk) \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Comme G est de type fini, le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt 3.3.1 s'applique, car $\mathcal{L}(G_*)$ est libre sur $\mathbb{Z}$. Si (x_α) désigne une base ordonnée (homogène) de $\mathcal{L}(G_*)$ l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathcal{L}(G_*) \otimes \Bbbk)$ a donc pour base les monômes :

$$x_{\alpha_1}^{r_1} \cdots x_{\alpha_n}^{r_n} \quad \text{pour } n \geqslant 0,\ \alpha_1 < \cdots < \alpha_n \text{ et } r_1, ..., r_n > 0.$$

Or φ est le morphisme d'algèbres induit par $x_\alpha \longmapsto x_\alpha - 1$. On a donc :

$$\varphi\left(x_{\alpha_1}^{r_1} \cdots x_{\alpha_n}^{r_n}\right) = (x_{\alpha_1} - 1)^{r_1} \cdots (x_{\alpha_n} - 1)^{r_n}.$$

Ainsi, φ induit une bijection entre une base de $\mathcal{U}(\mathcal{L}(G_*) \otimes \Bbbk)$ et une base de $\mathrm{gr}(\mathfrak{a}_*^{\Bbbk}(G_*))$ (remarque 2.4.3) : c'est bien un isomorphisme. □

3.3.5 Foncteur de Lie, présentations et coproduits

Le foncteur de Lie $\mathcal{L} : \mathcal{SFC} \longrightarrow \mathcal{L}ie$ envoie la *filtration fortement centrale libre* $\Gamma_*(F_n)$ sur l'algèbre de Lie libre $\mathfrak{L}V$ (où $V = F_n^{ab} = \mathbb{Z}^n$). On peut se poser la question générale suivante :

Problème 6. *Pour quels groupes G et H a-t-on $\mathcal{L}(G * H) \cong \mathcal{L}(G) * \mathcal{L}(H)$?*

L'exactitude de $\mathcal{L}$, donnée par la proposition 1.6.1, peut s'appliquer dans le cas particulier suivant : supposons donnés G un groupe, et $1 \to R \to F \to G \to 1$ une présentation de G (avec F libre, et donc R aussi). Alors $\Gamma_* F \longrightarrow \Gamma_* G$ est une surjection de groupes filtrés, et si l'on munit R de la filtration $R_* := R \cap \Gamma_* F$ induite par celle de F, on obtient une suite exacte courte de groupes filtrés :

$$1 \to R_* \to \Gamma_* F \to \Gamma_* G \to 1.$$

Par exactitude de $\mathcal{L}$, on en déduit une suite exacte courte d'algèbres de Lie :

$$0 \to \mathcal{L}(R_*) \to \mathcal{L}(F) \to \mathcal{L}(G) \to 0.$$

Puisque $\mathcal{L}(F)$ est libre, ceci est une présentation de l'algèbre de Lie de G. Cependant, il nous manque une description précise de l'idéal $\mathcal{L}(R_*)$ des relations pour faire de ceci un outil de calcul efficace. On peut donc énoncer :

Problème 7. *Dans ce cadre, peut-on calculer des générateurs de l'idéal $\mathcal{L}(R_*)$ de $\mathcal{L}(F)$ à partir de générateurs normaux de R dans F ?*

Une réponse à ce problème devrait fournir une réponse au problème 6. S'il semble illusoire d'espérer trouver une réponse générale à ce problème, un certain nombre de résultats devraient être accessibles sous des hypothèses plus restrictives. On pourra consulter [PS04, cor. 5.6] ou [DK92, th. 2.1] pour des résultats allant dans ce sens. Une autre piste est donnée par les conjectures ci-dessous.

Le foncteur $\Gamma : \mathcal{L}ie \longrightarrow \mathcal{SFC}$, adjoint à droite de l'oubli, commute aux coproduits. Le problème 6 peut donc se généraliser en :

Problème 8. *Pour quelles suites fortement centrales G_* et H_* a-t-on :*

$$\mathcal{L}\left((G_*) * (H_*)\right) \cong \mathcal{L}(G_*) * \mathcal{L}(H_*) \text{ ?}$$

La conjecture suivante donnerait une réponse partielle à cette question :

Conjecture 2. *Si G_* et H_* sont des filtrations fortement centrales sans torsion sur des groupes de type fini, alors le morphisme canonique :*

$$\mathcal{L}(G_*) * \mathcal{L}(H_*) \longrightarrow \mathcal{L}(G_* * H_*)$$

est un isomorphisme.

Nous montrons ici l'équivalence entre cette conjecture et la conjecture suivante :

Conjecture 3. *La catégorie $\mathcal{SFC}_0^{t.f.}$ des suites fortement centrales sans torsion de type fini est stable par le coproduit de $\mathcal{SFC}$. Autrement dit, si G_* et H_* sont des filtrations fortement centrales sans torsion sur des groupes de type fini, alors $G_* * H_*$ l'est aussi.*

Remarque 3.3.11. Rappelons que, d'après la proposition 2.1.12, la suite centrale descendante Γ_*G d'un groupe G est sans torsion si et seulement si elle coïncide avec la filtration de dimension rationnelle (on dira que le groupe vérifie la propriété de la dimension rationnelle). De plus, le foncteur $\Gamma : \mathcal{G}rpes \to \mathcal{SFC}$, qui est adjoint à gauche, commute aux coproduits. Par conséquent, un corollaire de cette conjecture serait que le produit libre de deux groupes vérifiant la propriété de la dimension rationnelle la vérifie encore. En particulier, comme $\mathbb{Z}$ la vérifie évidemment, on retrouverait le corollaire 3.1.7.

Démonstration de l'équivalence entre les deux conjectures. Le premier énoncé implique le second, puisqu'un coproduit d'anneaux de Lie sans torsion est sans torsion.

Le morphisme canonique φ entre les algèbres de Lie de la conjecture 2 induit un morphisme $\mathcal{U}\varphi$ entre leurs algèbres enveloppantes. Le corollaire 3.3.2 au théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt assure que φ est un isomorphisme si et seulement si $\mathcal{U}\varphi$ en est un. Or $\mathcal{U}\varphi$ n'est autre que le morphisme canonique :

$$\mathcal{U}\left(\mathcal{L}\, G_*\right) * \mathcal{U}\left(\mathcal{L}\, H_*\right) \cong \mathcal{U}\left(\mathcal{L}(G_*) * \mathcal{L}(H_*)\right) \longrightarrow \mathcal{U}\,\mathcal{L}\left(G_* * H_*\right),$$

où le premier isomorphisme provient de la qualité d'adjoint à gauche de $\mathcal{U}$.

Si l'on suppose la conjecture 3 vraie, les coproduits dans $\mathcal{SFC}_0^{t.f.}$ sont calculés comme dans $\mathcal{SFC}$. Sous cette hypothèse, la conjecture 2 équivaut à la commutation aux coproduits du foncteur $\mathcal{U}\,\mathcal{L} : \mathcal{SFC}_0^{t.f.} \longrightarrow \mathcal{A}lg$. Or le théorème 3.3.10 identifie ce foncteur à $\mathrm{gr} \circ \mathfrak{a}_*$. Le foncteur $\mathfrak{a}_*$ est adjoint à gauche, donc commute aux coproduits.

De plus, si G_* est sans torsion, alors $\mathrm{gr}(\mathfrak{a}_*(G_*)) \cong \mathcal{U}\,\mathcal{L}(G_*)$ l'est aussi (par le théorème PBW), donc $\mathfrak{a}_*$ envoie les filtrations sans torsion sur des filtrations sans torsion, qui sont connexes (cf. définition 2.1.4 et ce qui suit). Reste à montrer que gr commute aussi aux coproduits quand les filtrations sont connexes sans torsion de type fini : c'est le contenu du lemme 3.3.12 qui suit. □

Lemme 3.3.12. *Si $\mathfrak{a}_*$ et $\mathfrak{b}_*$ sont des anneaux filtrés connexes de type fini sans torsion, alors le morphisme canonique est un isomorphisme :*

$$\mathrm{gr}(\mathfrak{a}_*) * \mathrm{gr}(\mathfrak{b}_*) \cong \mathrm{gr}(\mathfrak{a}_* * \mathfrak{b}_*).$$

Remarque 3.3.13. On note $f\mathcal{A}lg_-$ la catégorie des algèbres ($\mathbb{N}$ -)filtrées non unitaires. On a un foncteur :

$$\Bbbk \ltimes - : f\mathcal{A}lg_- \longrightarrow f\mathcal{A}lg_{\Bbbk},$$

qui est adjoint à gauche au foncteur d'oubli. Notons (en anticipant sur la section 5.3) que ce foncteur associe à une algèbre A_* le produit semi-direct $\Bbbk \ltimes A_*$ associé à l'unique action de $\Bbbk$ sur A_*. La catégorie $f\mathcal{A}lg_c$ des algèbres connexes est l'image essentielle des algèbres concentrées en degrés au moins 1 par le foncteur $\Bbbk \ltimes -$. Celui-ci commute aux coproduits, ce qui permet de ramener le calcul du coproduit d'algèbre connexes à un coproduit d'algèbres non-unitaires (quitte à rajouter ensuite l'unité en degré 0).

Démonstration du lemme 3.3.12. D'après la remarque ci-dessus, il suffit de montrer le lemme pour des anneaux filtrés sans unité $\mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \cdots$ et $\mathfrak{b}_1 \supseteq \mathfrak{b}_2 \supseteq \cdots$. Par hypothèse, les $\mathrm{gr}_k(\mathfrak{a}_*)$ sont sans torsion. Ils sont aussi de type fini. En effet, si l'on choisit des générateurs $a_1, ..., a_r$ de $\mathfrak{a}_1$, le groupe abélien $\mathrm{gr}_k(\mathfrak{a}_*)$ est engendré par les classes des monômes de longueur au plus k en les a_i qui sont dans $\mathfrak{a}_k$ (ceux de longueur au moins $k+1$ sont dans $\mathfrak{a}_{k+1}$). On peut ainsi choisir une base $(\overline{x_\alpha})$ de $\mathrm{gr}_*(\mathfrak{a}_*)$ formée d'éléments homogènes. Remarquons que les x_α forment alors une base de $\mathfrak{a}_1$. De même, on choisit une base $(\overline{y_\beta})$ de $\mathrm{gr}_*(\mathfrak{b}_*)$ formée d'éléments homogènes. Le morphisme canonique de $\mathrm{gr}(\mathfrak{a}_*) * \mathrm{gr}(\mathfrak{b}_*)$ dans $\mathrm{gr}(\mathfrak{a}_* * \mathfrak{b}_*)$ envoie les monômes $\overline{x_{\alpha_1}} \cdot \overline{y_{\beta_1}} \cdots \overline{x_{\alpha_n}} \cdot \overline{y_{\beta_n}}$ sur les monômes $\overline{x_{\alpha_1} y_{\beta_1} \cdots x_{\alpha_n} y_{\beta_n}}$. Les premiers forment une base du coproduit des gradués. La conclusion suivra si l'on montre que les seconds forment une base du second membre. Or le coproduit $\mathfrak{a}_* * \mathfrak{b}_*$ des anneaux filtrés est le coproduit des anneaux, muni de la filtration minimale contenant les deux filtrations $\mathfrak{a}_*$ et $\mathfrak{b}_*$. Par conséquent, parmi les monômes $x_{\alpha_1} y_{\beta_1} \cdots x_{\alpha_n} y_{\beta_n}$, qui forment une base de $\mathfrak{a}_1 * \mathfrak{b}_1$, ceux de degré total k engendrent $(\mathfrak{a}_* * \mathfrak{b}_*)_k$. Ceci implique que les $\overline{x_{\alpha_1} y_{\beta_1} \cdots x_{\alpha_n} y_{\beta_n}}$ forment une base du gradué, comme attendu. □

Chapitre 4

Sous-groupes de IA_n

Sommaire

Dans ce chapitre, on étudie la restriction du problème d'Andreadakis 1.7 pour F_n à certains sous-groupes de IA_n. Précisément, soit G un sous-groupe de IA_n. On peut tirer en arrière sur G la filtration centrale descendante de IA_n et la filtration d'Andreadakis. On obtient deux filtrations centrales descendantes sur G, que l'on peut comparer à la suite centrale descendante $\Gamma_* G$:

$$\Gamma_*(G) \subseteq \Gamma_*(IA_n) \cap G \subseteq \mathcal{A}_* \cap G. \tag{4.0.0.1}$$

Le dernier terme n'est autre que la filtration $\mathcal{A}_*(G, \Gamma_*(F_n))$ (définition 1.5.16).

Le but de ce chapitre est l'étude du problème suivant :

Problème 2 (Problème d'Andreadakis pour un sous-groupe de IA_n)**.** *Pour quels sous-groupes G de IA_n ces inclusions sont-elles des égalités ?*

Évidemment, ce ne sera pas toujours le cas : par exemple, la première ne sera pas une égalité pour G cyclique engendré par un élément de $\Gamma_2(IA_n)$. Un exemple moins trivial est donné par le groupe de Torelli :

Exemple 4.0.1. Le groupe de difféotopie $\mathcal{M}_g^1$ se plonge dans $\mathrm{Aut}(F_{2g})$ (par l'action fidèle sur le groupe fondamental de la surface Σ_g^1 – cf. l'Introduction). Le *sous-groupe de Torelli* $\mathcal{T}$ est son intersection avec IA_{2g}. La filtration $\mathcal{A}_* \cap \mathcal{T}$ est connue sous le nom de *filtration de Johnson* [Joh83]. Or :

$$(\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{T})/\Gamma_2\mathcal{T} \cong (\mathbb{Z}/2)^{1+2g+\binom{2g}{2}} \quad \text{et} \quad (\mathcal{A}_3 \cap \mathcal{T})/\Gamma_3\mathcal{T} \otimes \mathbb{Q} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}.$$

Définition 4.0.2. Fixons $(x_1, ..., x_n)$ une base ordonnée de F_n. Considérons le sous-groupe IA_n^+ de IA_n des *automorphismes triangulaires supérieurs*, qui sont les automorphismes φ de la forme :

$$\varphi : x_i \longmapsto (x_i^{w_i})\gamma_i,$$

où $w_i \in \langle x_j \rangle_{j<i} \cong F_{i-1}$ et $\gamma_i \in \Gamma_2(F_{i-1})$.

On rappelle également la définition de l'action d'Artin du groupe de tresses sur le groupe libre :

Proposition-définition 4.0.3. *Fixons $(x_1, ..., x_n)$ une base de F_n. Le groupe de tresses d'Artin B_n se plonge dans $\mathrm{Aut}(F_n)$, par le morphisme associant au générateur standard σ_i l'automorphisme :*

$$\begin{cases} x_i & \longmapsto & {}^{x_i}x_{i+1} \\ x_{i+1} & \longmapsto & x_i \end{cases}$$

Le groupe de tresses pures P_n est alors l'intersection de B_n avec IA_n.

L'un des principaux objectifs de ce chapitre est la proposition suivante :

Théorème 4.0.4. *Pour $G = IA_n^+$ et $G = P_n$, les inclusions précédentes sont des égalités :*

$$\Gamma_*(G) = \Gamma_*(IA_n) \cap G = \mathcal{A}_* \cap G = \mathcal{A}_*(G, \Gamma_*(F_n)).$$

Dans les deux cas, on utilisera une décomposition du sous-groupe en produit semi-direct itéré pour calculer sa suite centrale descendante. L'énoncé pour les groupes triangulaires a été obtenu récemment par Satoh [Sat17].

Un autre sous-groupe dont la structure présente des similarités avec le précédent est donné par le sous-groupe de McCool :

Définition 4.0.5. Fixons $(x_1, ..., x_n)$ une base de F_n. Le *sous-groupe de McCool* $P\Sigma_n$ de IA_n est le sous-groupe formé par les automorphismes agissant par conjugaison dans cette base, c'est-à-dire des automorphismes φ tels que chaque $\varphi(x_i)$ soit conjugué à x_i.

Le sous-groupe de McCool est connu sous différents noms, qui traduisent différents interprétations géométriques. C'est d'abord le groupe de mouvements de cercles dans l'espace, ou « group of loops » [Gol81], qui s'interprète aussi comme le groupe fondamental de l'espace de configurations de cercles non noués dans $\mathbb{R}^3$. Il s'identifie au groupe des *tresses-rubans*, qui s'interprète en termes de diagrammes, formant le groupe des *tresses soudées*. Une présentation de ces différents points de vues peut être trouvée dans [Dam17].

Nous ne sommes pas parvenus à comprendre suffisamment la structure de ce groupe pour démontrer ou infirmer la conjecture d'Andreadakis le concernant. Néanmoins, nous exposons quelques progrès effectués dans cette direction.

4.1 Automorphismes triangulaires

Considérons le sous-groupe de IA_n^+ formé par les automorphismes triangulaires fixant tous les générateurs sauf le i-ième. Ce sous-groupe est en fait le noyau de la projection $IA_i^+ \to IA_{i-1}^+$ induite par $x_i \mapsto 1$. Il est isomorphe à $F_{i-1} \ltimes \Gamma_2(F_{i-1})$, par l'isomorphisme :

$$(\varphi : x_i \mapsto (x_i^w)\gamma) \longmapsto (w, \gamma),$$

où le produit semi-direct correspond à l'action par conjugaison à droite :

$$(v, \delta) \cdot (w, \gamma) = (vw, \delta^w \cdot \gamma).$$

Ainsi, on obtient une suite exacte courte :

$$F_{n-1} \ltimes \Gamma_2(F_{n-1}) \hookrightarrow IA_n^+ \twoheadrightarrow IA_{n-1}^+, \tag{4.1.0.1}$$

qui est scindée, une section étant donnée par l'extension par action triviale sur x_n. On a ainsi une décomposition en produit semi-direct :

$$IA_n^+ = (F_{n-1} \ltimes \Gamma_2(F_{n-1})) \rtimes IA_{n-1}^+.$$

4.1.1 Suite centrale descendante

Lemme 4.1.1. *Soit G un groupe et i un entier. On a l'égalité :*

$$\Gamma_*(\Gamma_i G \rtimes G) = \Gamma_{*+i-1}(G) \rtimes \Gamma_* G.$$

Démonstration. La relation suivante, vraie pour tout i, découle immédiatement des définitions 1.1.1 et 1.6.10 (G agissant sur $\Gamma_i G$ par conjugaison) :

$$\Gamma_*^G(\Gamma_i G) = \Gamma_{*+i-1}(G).$$

Le résultat suit, par la proposition 1.6.11. □

En particulier, pour $G = F_{n-1}$ et $i = 2$, ceci détermine la suite centrale descendante de $\Gamma_2(F_{n-1}) \rtimes F_{n-1}$:

$$\Gamma_*(F_{n-1} \ltimes \Gamma_2(F_{n-1})) = \Gamma_* F_{n-1} \ltimes \Gamma_{*+1}(F_{n-1}).$$

On en déduit notamment son abélianisé :

$$(F_{n-1} \ltimes \Gamma_2(F_{n-1}))^{ab} = F_{n-1}^{ab} \times \Gamma_2/\Gamma_3(F_{n-1}) = (\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2)(F_{n-1}).$$

L'extension (4.1.0.1) induit une action de IA_{n-1}^+ sur cet abélianisé. On peut vérifier que cette action n'est autre que l'action diagonale obtenue à partir de l'action canonique de IA_{n-1}^+ sur l'algèbre de Lie de F_{n-1}, qui est triviale, par définition de IA_n. On peut donc appliquer la proposition 1.6.13 pour calculer la suite centrale descendante de IA_n^+ par récurrence :

Proposition 4.1.2. *Pour tout entier n :*

$$\begin{aligned}\Gamma_*(IA_n^+) &= \Gamma_*(F_{n-1} \ltimes \Gamma_2(F_{n-1})) \rtimes \Gamma_*(IA_{n-1}^+) \\ &= (\Gamma_* F_{n-1} \ltimes \Gamma_{*+1}(F_{n-1})) \rtimes \Gamma_*(IA_{n-1}^+).\end{aligned}$$

En particulier, l'algèbre de Lie de IA_n^+ se décompose en :

$$\mathcal{L}(IA_n^+) = (\mathfrak{L}_*(\mathbb{Z}^{n-1}) \ltimes \mathfrak{L}_{*+1}(\mathbb{Z}^{n-1})) \rtimes \mathcal{L}(IA_{n-1}^+),$$

où le produit semi-direct de gauche correspond à la restriction de la représentation adjointe.

4.1.2 Filtration d'Andreadakis

La décomposition en produits semi-directs itérés de IA_n^+ correspond à une écriture de ses éléments sous une forme maniable : tout automorphisme $\varphi \in IA_n^+$ s'écrit sous la forme :

$$\varphi : x_i \longmapsto (x_i^{w_i}) \cdot \gamma_i,$$

avec w_i dans F_{i-1} et γ_i dans $\Gamma_2(F_{i-1})$. Nous allons utiliser ceci pour montrer les égalités annoncées dans le théorème 4.0.4, c'est-à-dire pour retrouver le résultat principal de [Sat17] :

Théorème 4.1.3. *Le sous-groupe des automorphismes triangulaires vérifie l'égalité d'Andreadakis, c'est-à-dire :*

$$\Gamma_*(IA_n^+) = \Gamma_*(IA_n) \cap IA_n^+ = \mathcal{A}_* \cap IA_n^+ = \mathcal{A}_*(IA_n^+, \Gamma_*(F_n)).$$

Démonstration. Soit $\varphi \in IA_n^+$. Avec les notations ci-dessus, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\varphi \in \mathcal{A}_j \ &\Leftrightarrow\ \forall i,\ \varphi(x_i) \equiv x_i \pmod{\Gamma_{j+1}(F_n)} \\ &\Leftrightarrow\ \forall i,\ \gamma_i \equiv [x_i, w_i] \pmod{\Gamma_{j+1}(F_n)}.\end{aligned}$$

Or, ceci n'est possible que si γ_i est dans $\Gamma_{j+1}(F_n)$ et w_i dans $\Gamma_j(F_n)$. Soit en effet k tel que $w_i \in \Gamma_k - \Gamma_{k+1}$ (un tel k existe car F_n est résiduellement nilpotent). Si (par l'absurde) $k < j$, alors :

$$0 \neq \overline{w}_i \in \mathcal{L}_k(F_{i-1}) \subseteq \mathcal{L}_k(F_n).$$

Puisque $\mathcal{L}_*(F_n)$ est l'algèbre de Lie libre sur les $\overline{x}_s$, et $\overline{w}_i$ ne contient pas d'occurence de $\overline{x}_i$, le crochet $[\overline{x}_i, \overline{w}_i]$ est non nul dans $\mathcal{L}_{k+1}(F_n)$, et ne peut en fait pas être dans $\mathcal{L}(F_{i-1})$. En particulier, il ne peut être égal à $\overline{\gamma}_i$, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, on doit avoir $k \geqslant j$, c'est-à-dire $w_i \in \Gamma_j$, et donc $\gamma_i \equiv [x_i, w_i] \in \Gamma_{j+1}$ (pour tout i).

Au vu de la description de la suite centrale descendante donnée par la proposition 4.1.2, ceci signifie exactement que $\mathcal{A}_j \cap IA_n^+$ est inclus dans $\Gamma_j(IA_n^+)$, d'où le résultat. □

4.1.3 Générateurs de IA_n^+

On donne des générateurs du groupe triangulaire :

Lemme 4.1.4. *IA_n^+ est engendré par les automorphismes (fixant tous les générateurs x_t de F_n sauf un) :*

$$\begin{cases} K_{ij} : x_i & \longmapsto & x_i^{x_j} & \textit{pour } j < i, \\ K_{ijk} : x_i & \longmapsto & x_i[x_j, x_k] & \textit{pour } j, k < i, \end{cases}$$

Démonstration. Notons G le sous-groupe engendré par les éléments définis dans le lemme. Soit $\varphi \in IA_n^+$, envoyant chaque x_i sur un $(x_i^{w_i})\gamma_i$ (comme dans la définition 4.0.2). On peut décomposer φ en une composée $\varphi = \varphi_n \circ \cdots \circ \varphi_2$, où φ_i fixe tous les générateurs sauf le i-ième, et envoie x_i sur $(x_i^{w_i})\gamma_i$. Il suffit de montrer que chaque φ_i est dans G. Fixons donc i, et considérons seulement les automorphismes fixant tous les générateurs sauf le i-ième. Il est facile de vérifier que le sous-groupe de G engendré par les K_{ij} $(j < i)$ est l'ensemble des automorphismes de la forme $c_{i,w} : x_i \longmapsto x_i^w$ (pour $w \in F_{i-1}$). En utilisant les formules 1.1.4, ainsi que la formule $[a^{-1}, b] = [b, a]^a$, on peut décomposer le produit de commutateurs γ_i sous la forme :

$$\gamma_i = \prod_{k=1}^{m} [x_{\alpha_k}, x_{\beta_k}]^{\omega_k},$$

où les ω_k sont dans F_{i-1}. On peut alors décomposer φ_i comme :

$$\varphi_i = c_{i,w_i} \circ K_{i,\alpha_1,\beta_1}^{c_{i,\omega_1}} \circ \cdots \circ K_{i,\alpha_m,\beta_m}^{c_{i,\omega_m}},$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

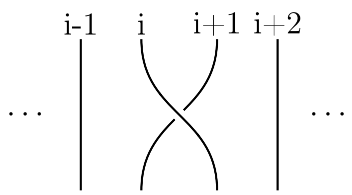
Remarque 4.1.5. Fixons $i \geqslant 1$. La preuve du lemme 4.1.4 montre que les automorphismes :

$$\begin{cases} x_i & \longmapsto & x_i^{x_j} & \text{pour } j < i & (x_j \in F_{i-1}), \\ x_i & \longmapsto & x_i[x_j, x_k] & \text{pour } j, k < i & ([x_j, x_k] \in \Gamma_2(F_{i-1})), \end{cases}$$

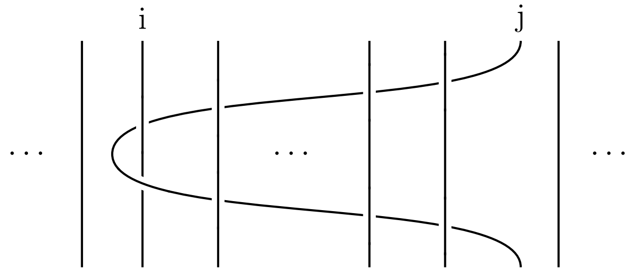
engendrent le sous-groupe de IA_n^+ formé par les automorphismes triangulaires fixant tous les générateurs sauf le i-ième.

4.2 Groupes de tresses pures

On renvoie au livre de Birman [Bir74] pour une présentation détaillée des groupes de tresses. Le lecteur pourra également consulter l'exposé plus récent [BB05]. On notera comme lui B_n le groupe de tresses d'Artin, engendré par les σ_i $(1 \leqslant i < n)$, et P_n le sous-groupe des tresses pures, engendré par les A_{ij} $(1 \leqslant i < j <\leqslant n)$. Géométriquement, σ_i est donnée par :



et $A_{ij} = {}^{(\sigma_{n-1}\cdots\sigma_{i+1})}\sigma_i^2$ par :



On a une injection évidente de B_n dans B_{n+1}, envoyant σ_i sur σ_i (*i.e.* identifiant B_n au sous-groupe des tresses sur les n premiers brins). Dans B_{n+1}, les $A_{i,n+1} =: x_i$ engendrent un groupe libre F_n, qui est stable par conjugaison par B_n. Cette action par conjugaison est l'action d'Artin, où σ_i agit par :

$$\begin{cases} x_i & \longmapsto & {}^{x_i}x_{i+1}. \\ x_{i+1} & \longmapsto & x_i \end{cases}$$

La liberté du groupe $\langle A_{i,n+1}\rangle$ se justifie par un argument géométrique : c'est le noyau de la surjection de P_{n+1} sur P_n obtenue en oubliant le dernier brin, noyau qui s'identifie canoniquement à $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{n \text{ points}\})$ [Bir74, th. 1.4]. Cette surjection de P_{n+1} sur P_n est scindée, une section étant induite par l'inclusion de B_n dans B_{n+1} mentionnée ci-dessus. Par conséquent, on a une décomposition en produit semi-direct :

$$P_{n+1} = P_n \ltimes F_n.$$

Si β est une tresse de P_n, on peut donc l'écrire de manière unique sous la forme $\beta'\beta_n$ avec $\beta' \in P_{n-1}$ et $\beta_n \in \langle A_{1,n}, ..., A_{n-1,n}\rangle \cong F_{n-1}$. En itérant ce procédé, on obtient une décomposition unique de β sous la forme :

$$\beta = \beta_1 \cdots \beta_n, \quad \text{avec} \quad \beta_k \in \langle A_{1,k}, ..., A_{k-1,k}\rangle \cong F_{k-1}.$$

On dit alors qu'on a *peigné* la tresse β. En utilisant ce procédé, on peut montrer par exemple :

Proposition 4.2.1. *L'action d'Artin de B_n sur F_n est fidèle.*

On peut ainsi plonger B_n dans $\mathrm{Aut}(F_n)$. On identifiera souvent B_n à son image dans $\mathrm{Aut}(F_n)$. Cependant, notons qu'un tel plongement dépend du choix d'une base de F_n. L'action de B_n sur F_n^{ab} se fait d'ailleurs par permutation des vecteurs de la base correspondante. Par conséquent, indépendamment de la base choisie :

$$B_n \cap IA_n = P_n. \tag{4.2.1.1}$$

Démonstration de la proposition 4.2.1. Soit $\beta \in B_n$ une tresse agissant trivialement sur F_n. On remarque d'abord que son action sur F_n^{ab} est trivale, donc c'est nécessairement une tresse pure. On peut alors peigner β comme ci-dessus :

$$\beta = \beta_1 \cdots \beta_n \quad \text{avec} \quad \beta_k \in \langle A_{1,k}, ..., A_{k-1,k}\rangle \cong F_{k-1}.$$

Raisonnons par l'aburde : supposons $\beta \neq 1$. On peut alors choisir i maximal tel que $\beta_i \neq 1$. La trivialité de l'action sur F_n (définie par conjugaison dans B_{n+1}) implique :

$$1 = [\beta, A_{i,n+1}] = [\beta_1 \cdots \beta_i, A_{i,n+1}].$$

Or, $A_{i,n+1}$ commute avec tous les β_k, pour $k < i$. Finalement :

$$1 = [\beta_i, A_{i,n+1}].$$

Cependant, $\beta_i \in \langle A_{1,i}, ..., A_{i-1,i}\rangle$ et, par le même argument géométrique que ci-dessus, le groupe $\langle A_{1,i}, ..., A_{i-1,i}, A_{i,i+1}, ..., A_{i,n+1}\rangle$ est un sous-groupe libre de B_{n+1}, sur les générateurs indiqués. On en déduit que β_i ne peut commuter avec $A_{i,n+1}$ que s'il est trivial, ce qui est impossible. □

4.2.1 Suite centrale descendante, algèbre de Lie

On utilise la décomposition de P_n en produit semi-direct itéré pour décrire sa suite centrale descendante et son algèbre de Lie.

D'après la formule (4.2.1.1), P_{n-1} agit trivialement sur F_{n-1}^{ab}. On peut donc appliquer la proposition 1.6.13 à la décomposition en produit semi-direct $P_n = P_{n-1} \ltimes F_{n-1}$, pour obtenir :

$$\forall j,\ \Gamma_j(P_n) = \Gamma_j(P_{n-1}) \ltimes \Gamma_j(F_{n-1}),$$

et une décomposition de l'algèbre de Lie de P_n en un produit semi-direct d'algèbres de Lie :

$$\mathcal{L}(P_n) = \mathcal{L}(P_{n-1}) \ltimes \mathcal{L}(F_{n-1}) = \mathcal{L}(P_{n-1}) \ltimes \mathfrak{L}(\mathbb{Z}^{n-1}). \tag{4.2.1.2}$$

Ainsi, $\mathcal{L}(P_n)$ se décompose en un produit semi-direct itéré d'algèbres de Lie libres.

La trivialité de l'action de P_{n-1} sur F_{n-1}, c'est-à-dire l'inclusion de $[P_{n-1}, F_{n-1}]$ dans $\Gamma_2(F_{n-1})$, peut aussi se lire directement sur la présentation de P_n donnée dans [Bir74], qui donne, pour $r < s < n$ et $i < n$, en notant x_α pour $A_{\alpha,n}$:

$$[A_{rs}, x_i] = [A_{rs}, A_{in}] = \begin{cases} 1 \text{ si } s < i \text{ ou } i < r, \\ [x_i^{-1}, x_r^{-1}] \text{ si } s = i, \\ [x_s^{-1}, x_i] \text{ si } r = i, \\ [[x_r, x_s]^{-1}, x_i] \text{ si } r < i < s. \end{cases} \tag{4.2.1.3}$$

Pour se convaincre que ces relations sont vérifiées, le lecteur peut dessiner les tresses correspondant au membre de gauche, et les déformer pour les mettre sous forme peignée, avec seulement le n-ième brin tournant autour des autres.

On peut déduire de la présentation ci-dessus une présentation de l'anneau de Lie de P_n, qui n'est autre que l'algèbre de Drinfeld-Kohno. Le lecteur pourra consulter l'article [Koh85], ou le livre [Fre17, section 10.0], où cette algèbre apparaît dans un contexte un peu différent. :

Proposition 4.2.2. *L'anneau de Lie de P_n est engendrée par les générateurs t_{ij} ($1 \leqslant i, j \leqslant n$) soumis aux relations :*

$$\begin{cases} t_{ij} = t_{ji},\ t_{ii} = 0 & \forall i, j, \\ [t_{ij}, t_{ik} + t_{kj}] = 0 & \forall i, j, k, \\ [t_{ij}, t_{kl}] = 0 & si\ \{i, j\} \cap \{k, l\} = \varnothing. \end{cases}$$

Démonstration. Notons $\mathfrak{p}_n$ l'anneau de Lie défini par la présentation ci-dessus. On déduit de la présentation (4.2.1.3) de P_n que les mêmes relations sont vraies pour les classes des A_{ij} dans $\mathcal{L}(P_n)$, ce qui donne un morphisme u_n de $\mathfrak{p}_n$ dans $\mathcal{L}(P_n)$. On peut aussi définir une projection π_n (scindée) de $\mathfrak{p}_n$ sur $\mathfrak{p}_{n-1}$ en envoyant t_{ij} sur 0 si $n \in \{i, j\}$, et sur t_{ij} sinon. Notons $\mathfrak{k}_n$ le noyau de π_n. Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{k}_n \arrow[r, hook] \arrow[d, "v_n"] & \mathfrak{p}_n \arrow[r, two heads, "\pi_n"] \arrow[d, "u_n"] & \mathfrak{p}_{n-1} \arrow[d, "u_{n-1}"] \\
\mathcal{L}(F_{n-1}) \arrow[r, hook] & \mathcal{L}(P_n) \arrow[r, two heads] & \mathcal{L}(P_{n-1})
\end{tikzcd}$$

où la deuxième ligne provient de la décomposition (4.2.1.2). L'algèbre $\mathfrak{k}_n$ est l'idéal de $\mathfrak{p}_n$ engendré par les t_{in}, mais comme la sous-algèbre de Lie engendrée par les t_{in} est déjà un idéal, $\mathfrak{k}_n$ est engendrée, comme algèbre de Lie, par les t_{in}. Puisque v_n envoie les t_{in} sur une base de l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}(F_{n-1})$, c'est un isomorphisme (son inverse est construit par la propriété universelle de l'algèbre de Lie libre). Comme u_1 est évidemment un isomorphisme, le lemme des cinq permet de conclure, par récurrence, que u_n est un isomorphisme. □

4.2.2 Filtration d'Andreadakis

On raisonne comme dans la démonstration de la proposition 4.2.1, pour montrer cette fois que le noyau de l'action de P_n sur $F_n/\Gamma_{j+1}(F_n)$ est exactement $\Gamma_j(P_n)$, comme annoncé dans le théorème 4.0.4 :

Théorème 4.2.3. *Le sous-groupe de tresses pures vérifie l'égalité d'Andreadakis, c'est-à-dire :*

$$\Gamma_*(P_n) = \Gamma_*(IA_n) \cap P_n = \mathcal{A}_* \cap P_n = \mathcal{A}_*(P_n, \Gamma_*(F_n)).$$

Remarque 4.2.4 (G. Massuyeau)**.** La filtration d'Andreadakis pour les tresses n'est autre que la filtration donnée par l'annulation des premiers invariants de Milnor. Précisément, une tresse pure β agit par conjugaison sur les générateurs (fixés) du groupe libre, x_i étant conjugué par le *parallèle* w_i [Mil57, Ohk82]. La tresse est dans $\mathcal{A}_j$ si et seulement si le parallèle est dans $\Gamma_j F_n$ (cf. la preuve ci-dessous), c'est-à-dire si et seulement si son développement de Magnus est dans $1 + (X_1, ...X_n)^k$. Cette dernière condition signifie exactement que ses invariants de Milnor de longueur inférieure à k s'annulent. Le théorème 4.2.3 peut alors être vu comme une conséquence de deux faits classiques de théorie des noeuds : Les invariants de Milnor de longueur au plus $d + 1$ des tresses pures engendrent les invariants de Vassiliev de degré au plus d ; une tresse est dans $\Gamma_{d+1}P_n$ si et seulement is les invariants de Vassiliev de degré au plus d ne la détectent pas [HM00, MW02].

Démonstration du théorème 4.2.3. Soit $\beta \in \mathcal{A}_j(F_n) \cap P_n$, que l'on suppose non triviale. On peigne β, comme dans la preuve de la proposition 4.2.1 :

$$\beta = \beta_1 \cdots \beta_n \quad \text{avec} \quad \beta_k \in \langle A_{1,k}, ..., A_{k-1,k} \rangle \cong F_{k-1},$$

où $\beta_i \neq 1$. On note x_i pour $A_{i,n+1}$, qui est un générateur de F_n (identifié au sous-groupe $\langle A_{1,n+1}, ..., A_{n,n+1} \rangle$ de B_{n+1}). Toujours comme dans la preuve de la proposition 4.2.1, on a :

$$[\beta, x_i] = [\beta_i, x_i].$$

Par hypothèse, $[\beta, x_i]$ est dans $\Gamma_{j+1}(F_n)$, qui est inclus dans $\Gamma_{j+1}(P_{n+1})$, par le calcul de la suite centrale descendante de P_{n+1}.

Cependant, β_i et x_i appartiennent à une autre copie du groupe libre à n générateurs dans P_{n+1} : celle engendrée par $A_{1,i}, ..., A_{i-1,i}, A_{i,i+1}, ..., A_{i,n+1}$, que l'on note $\tilde{F}_n$. Or, quitte à échanger les rôles des brins i et $n+1$, les arguments du début de la section donnent une décomposition en produit semi-direct $P_{n+1} = P_n \ltimes \tilde{F}_n$, et les arguments de 4.2.1 donnent :

$$\Gamma_{j+1}(P_{n+1}) \cap \tilde{F}_n = \Gamma_{j+1}(\tilde{F}_n).$$

Finalement, le crochet $[\beta_i, x_i]$ est dans $\Gamma_{j+1}(\tilde{F}_n)$. Il nous reste à montrer que β_i est alors dans $\Gamma_j(\tilde{F}_n)$. Puisque $\beta_i \in \langle A_{1,i}, ..., A_{i-1,i}\rangle = F_{i-1}$, il n'y a pas d'occurrence du générateur $x_i = A_{i,n+1}$ de $\tilde{F}_n$ dans une décomposition réduite de β_i, et l'on peut utiliser le lemme 4.2.5 ci-dessous, qui donne :

$$\beta_i \in \Gamma_j(\tilde{F}_n) \cap F_{i-1} = \Gamma_j(F_{i-1}) \subseteq \Gamma_j(P_n).$$

Modulo $\Gamma_j(P_n)$, β est donc égal à $\beta\beta_i^{-1}$. En appliquant le même raisonnement à $\beta\beta_i^{-1}$, on obtient par récurrence que $\beta \in \Gamma_j(P_n)$. Ce qui achève la preuve □

Lemme 4.2.5. *Soit $w \in F_n$ tel que pour un certain i, $[w, x_i] \in \Gamma_{j+1}(F_n)$. Alors :*

$$\exists n \in \mathbb{Z},\ wx_i^n \in \Gamma_j(F_n).$$

En particulier, si $w \in \langle x_1, ..., \hat{x}_i, ..., x_n\rangle$, ou si $w \in \Gamma_2(F_n)$, on doit avoir $n = 0$, et $w \in \Gamma_j(F_n)$.

Démonstration. Soit k tel que $w \in \Gamma_k - \Gamma_{k+1}$ (un tel k existe car F_n est résiduellement nilpotent). Supposons (par l'absurde) $2 \leqslant k < j$. Alors $[\bar{w}, x_i] = 0$ dans $\mathcal{L}_{k+1}(F_n) = \mathfrak{L}_{k+1}(V)$, puisque $k+1 < j+1$. Ainsi, $\bar{w}$ est un élément non nul du commutant $C(x_i)$ de x_i dans l'algèbre de Lie libre $\mathfrak{L}(V)$. Comme $C(x_i) = \mathbb{Z}x_i \subseteq \mathfrak{L}_1(V)$, on obtient que k doit être égal à 1, une contradiction.

Si $w \in F_n - \Gamma_2$, on a $\bar{w} \in C(x_i) = \mathbb{Z}x_i$, donc il existe n tel que $w \equiv x_i^n \pmod{\Gamma_2}$. Puis wx_i^{-n} est dans Γ_2 et vérifie encore les hypothèses du lemme, donc est dans Γ_j par la première partie de la démonstration. □

4.3 Sous-groupe de McCool

La présente section esquisse la structure du groupe de McCool, en vue d'une possible future réponse au problème d'Andreadakis pour ce sous-groupe.

4.3.1 Définition et présentation

Définition 4.3.1. Fixons une base $(x_1, ..., x_n)$ de F_n. Le groupe des automorphismes de F_n agissant par conjugaison sur les éléments de la base (c'est-à-dire des automorphismes φ tels que chaque $\varphi(x_i)$ soit conjugué à x_i) est un sous-groupe de IA_n appelé *sous-groupe de McCool* et noté $P\Sigma_n$.

Remarque 4.3.2. L'intersection de $P\Sigma_n$ avec IA_n^+ est notée $P\Sigma_n^+$. Les mêmes arguments que pour IA_n^+ montrent que ce sous-groupe s'écrit comme un produit semi-direct itéré de groupes libres, et vérifie l'égalité d'Andreadakis :

$$\Gamma_*(P\Sigma_n^+) = \mathcal{A}_* \cap P\Sigma_n^+.$$

Il suffit en effet de reprendre *verbatim* les arguments de la section 4.1 en remplaçant à chaque occurrence $F_i \ltimes \Gamma_2(F_i)$ par F_i.

McCool [McC86] a donné une présentation du groupe $P\Sigma_n$. Précisément, on peut adapter l'argument d'Artin utilisé dans la preuve de [Bir74, th. 1.9] pour montrer que $P\Sigma_n$ est le sous-groupe de IA_n engendré par les K_{ij} (K_{ij} envoie x_i sur ${}^{x_j}x_i$ – cf. la preuve de la proposition 3.2.2). La présentation de McCool (voir aussi [CPVW08, th. 1.1]) est alors :

Théorème 4.3.3 (Présentation de $P\Sigma_n$ par générateurs et relations)**.** *Le groupe $P\Sigma_n$ est engendré par les générateurs K_{ij} $(i \neq j)$ soumis aux relations :*

$$\begin{cases} [K_{ik}K_{jk}, K_{ij}] = 1 & \textit{pour } i,j,k \textit{ deux-à-deux distincts,} \\ [K_{ik}, K_{jk}] = 1 & \textit{pour } i,j,k \textit{ deux-à-deux distincts,} \\ [K_{ij}, K_{kl}] = 1 & \textit{si } \{i,j\} \cap \{k,l\} = \varnothing. \end{cases}$$

Proposition 4.3.4. *L'abélianisé de $P\Sigma_n$ est libre, une base étant donnée par les classes $\overline{K}_{ij}$ $(i \neq j)$.*

Démonstration. C'est la même preuve que pour IA_n (proposition 3.2.2) : puisque le morphisme de Johnson $\tau_1 : P\Sigma_n^{ab} \to V^* \otimes \Lambda^2 V$ envoie les $\overline{K}_{ij}$ (qui engendrent $P\Sigma_n^{ab}$) sur une famille libre, c'est un isomorphisme sur son image. □

4.3.2 Interprétation géométrique

Le groupe de McCool admet aussi une interprétation géométrique, qui justifie la terminologie souvent utilisée de « group of loops ».

Définition 4.3.5. Soit M une variété lisse orientée et N une sous-variété compacte. On définit le groupe de mouvements de N dans M comme :

$$\mathcal{M}(M,N) := \pi_1\left((\mathrm{Diff}_\partial^+(M), \mathrm{Diff}_\partial^+(M,N)), \mathbb{1}_M\right),$$

où $\mathrm{Diff}_\partial^+(M)$ est le groupe des difféomorphismes à support compact de M préservant l'orientation et fixant ∂M, et $\mathrm{Diff}_\partial^+(M,N)$ en est le sous-groupe préservant globalement N.

Remarque 4.3.6. En fait, la définition de [Gol81, prop. 2.6] part des groupes d'homéomorphismes, mais il y a une équivalence d'homotopie permettant d'identifier la version continue et la version différentiable, au moins dans le cas qui nous occupe [Wat72].

Appliquons cette définition pour $M = \mathbb{R}^3$, N étant la réunion disjointe de n cercles non entrelacés dans $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{M}_n := \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^3, \coprod_n S^1\right).$$

Ce groupe agit sur le groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 - \coprod_n S^1$, qui est libre sur n générateurs. Intuitivement, chaque générateur est une boucle partant d'un point de base (fixé) et passant dans un cercle - ce qui donne au passage une orientation du cercle. Le mouvement des cercles (loin du point de base) emmêle ces boucles pour donner d'autres éléments de F_n. Cette action est en fait fidèle, et le sous-groupe obtenu est engendré par les automorphismes :

$$\begin{cases} x_i \mapsto x_i^{-1}, & \text{(mouvement renversant l'orientation du } i\text{-ième cercle),} \\ x_i \mapsto x_{\sigma(i)} & \text{pour } \sigma \in \Sigma_n, \text{ (mouvement permutant les cercles),} \\ x_i \mapsto x_i^{x_j} & \text{(passage du cercle } i \text{ dans le cercle } j \text{ - avec la bonne orientation).} \end{cases}$$

L'argument d'Artin évoqué ci-dessus permet de montrer que ces automorphismes engendrent le sous-groupe des automorphismes de F_n de la forme $x_i \mapsto (x_{\sigma(i)}^{\pm 1})^{w_i}$ avec $\sigma \in \Sigma_n$ et $w_i \in F_n$ [Gol81, th. 5.3]. Celui-ci s'identifie donc à $\mathcal{M}_n$. Avec ce point de vue, le groupe $P\Sigma_n$ est le sous-groupe des *mouvements purs*, c'est-à-dire le noyau de la projection canonique :

$$\mathcal{M}_n \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \Sigma_n.$$

Cette projection est évidemment scindée. Par conséquent :

$$\mathcal{M}_n \cong ((\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \Sigma_n) \ltimes P\Sigma_n.$$

On peut donner une interprétation géométrique plus concrète de $\mathcal{M}_n$. Précisément, comme $\mathrm{Diff}_\partial^+(\mathbb{R}^3) \simeq *$ [Hat83, appendice], la suite exacte longue en homotopie relative permet d'identifier $\mathcal{M}(\mathbb{R}^3, N)$ avec le groupe de difféotopie relatif :

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^3, N) \cong \pi_0(\mathrm{Diff}_\partial^+(\mathbb{R}^3, N)),$$

pour toute sous-variété N de $\mathbb{R}^3$. De même, si l'on définit le groupe des mouvements purs par :

$$P\mathcal{M}(\mathbb{R}^3, N) := \pi_1\left((\mathrm{Diff}_\partial^+(\mathbb{R}^3), P\,\mathrm{Diff}_\partial^+(\mathbb{R}^3, N)), \mathbb{1}_{\mathbb{R}^3}\right),$$

où $P\,\mathrm{Diff}_\partial^+(\mathbb{R}^3, N)$ est le sous-groupe de $\mathrm{Diff}_\partial^+(\mathbb{R}^3)$ fixant chaque point de N, celui-ci s'identifie à $\pi_0(P\,\mathrm{Diff}_\partial^+(\mathbb{R}^3, N))$. Notons que le morphisme de $P\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$ n'est en général pas injectif, mais il l'est quand N est une union disjointe de cercles non entrelacés (parce que le quotient de $\mathrm{Diff}_\partial^+(\mathbb{R}^3, N)$ par $P\,\mathrm{Diff}_\partial^+(\mathbb{R}^3, N)$ est discret – égal à $(\mathbb{Z}/2)^n \rtimes \Sigma_n$ – dans ce cas) .

Puis l'on peut considérer l'espace des plongements de N dans $\mathbb{R}^3$ isotopes à l'inclusion $N \subseteq \mathbb{R}^3$, qu'on appelle *espace de configurations* de N dans $\mathbb{R}^3$, et qu'on note $\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^3, N)$. L'évaluation en N définit une fibration [Dam17, lem. 3.8] :

$$ev : \mathrm{Diff}_\partial^+(\mathbb{R}^3) \to \mathrm{Conf}(\mathbb{R}^3, N)$$

de fibre $P\,\mathrm{Diff}_\partial^+(M, N)$. La suite exacte longue en homotopie donne alors l'identification :

$$P\mathcal{M}(\mathbb{R}^3, N) \cong \pi_1(\mathrm{Conf}(\mathbb{R}^3, N)).$$

En particulier :

$$P\Sigma_n \cong \pi_1\left(\mathrm{Conf}\left(\mathbb{R}^3, \coprod_n S^1\right)\right).$$

Pour plus de détails à ce sujet (et l'identification avec les groupes de tresse soudées), le lecteur pourra consulter [Dam17].

4.3.3 Décomposition

On a une projection scindée de $P\Sigma_n$ sur $P\Sigma_{n-1}$, qui s'interprète géométriquement comme l'oubli du n-ième cercle. On peut aussi la définir algébriquement. Le noyau de la projection de F_n sur F_{n-1} définie par $x_n \mapsto 1$ est la clôture normale $\mathcal{N}(x_n)$ de x_n dans F_n, c'est-à-dire l'ensemble des produits de conjugués de x_n et de son inverse. Ce sous-groupe est évidemment stable par tout $\varphi \in P\Sigma_n$, donc un tel automorphisme induit un automorphisme du quotient, qui est la projection cherchée.

Notation 4.3.7. On note $\mathcal{K}_n$ le noyau de la projection de $P\Sigma_n$ sur $P\Sigma_{n-1}$ définie ci-dessus.

On a alors une décomposition en produit semi-direct :

$$P\Sigma_n \cong \mathcal{K}_n \rtimes P\Sigma_{n-1}.$$

Ce noyau $\mathcal{K}_n$ est engendré par les conjugués des K_{in} et des K_{ni}. En fait, on a mieux :

Proposition 4.3.8. *Le groupe $\mathcal{K}_n$ est engendré par les K_{in} et les K_{ni}.*

Démonstration. On utilise les relations du théorème 4.3.3 pour montrer que le sous-groupe G engendré par les K_{in} et les K_{ni} est normal dans $P\Sigma_n$, c'est-à-dire que $[P\Sigma_n, G] \subseteq G$.

Le crochet $[K_{in}, K_{\alpha\beta}]$ est évidemment dans G si α ou β vaut n. Si ce n'est pas le cas, il est trivial sauf si $\alpha = i$ ou $\beta = i$. Dans le premier cas (en remarquant que $K_{n\beta}$ et $K_{i\beta}$ commutent) :

$$1 = [K_{in}, K_{n\beta}K_{i\beta}] = [K_{in}, K_{n\beta}](^{K_{n\beta}}[K_{in}, K_{i\beta}]),$$

donc $[K_{in}, K_{i\beta}] \in G$. Dans le second cas :

$$1 = [K_{in}K_{\alpha n}, K_{\alpha i}] = (^{K_{in}}[K_{\alpha n}, K_{\alpha i}])[K_{in}, K_{\alpha i}],$$

donc, en utilisant le premier cas : $[K_{in}, K_{\alpha i}] \in G$.

De même, le crochet $[K_{ni}, K_{\alpha\beta}]$ est dans G si α ou β vaut n. Si ce n'est pas le cas, il est trivial sauf si $\alpha = i$. Or : Dans le premier cas :

$$1 = [K_{ni}, K_{i\beta}K_{n\beta}] = [K_{ni}, K_{i\beta}](^{K_{n\beta}}[K_{in}, K_{n\beta}]),$$

donc $[K_{ni}, K_{i\beta}] \in G$. Ainsi, G est stable par conjugaison par tous les générateurs de $P\Sigma_n$, donc est normal dans $P\Sigma_n$. □

Remarque 4.3.9. Le sous-groupe $\mathcal{K}_n$ est le noyau de la projection de $P\Sigma_n \times (\mathbb{Z}/2)^n$ dans $P\Sigma_{n-1} \times (\mathbb{Z}/2)^n$, qui s'identifie à l'oubli du n-ième cercle :

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^3; \underbrace{S^1, S^1, ..., S^1}_{n}) \twoheadrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^3; \underbrace{S^1, S^1, ..., S^1}_{n-1}).$$

Par [Gol81, prop. 3.10], il s'identifie à $\mathcal{M}\left(\mathbb{R}^3 - \coprod_{n-1} S^1; S^1\right)$.

Corollaire 4.3.10. *L'abélianisé de $\mathcal{K}_n$ est libre sur les générateurs $\overline{K}_{in}$ et $\overline{K}_{ni}$ ($i \neq n$).*

Démonstration. Le morphisme canonique de $\mathcal{K}_n^{ab}$ dans $P\Sigma_n^{ab}$ envoie ces générateurs sur une famille libre (proposition 4.3.4), donc est un isomorphisme sur son image. □

Ainsi, $P\Sigma_n^{ab}$ se décompose en un produit direct de $\mathcal{K}_n^{ab}$ et de $P\Sigma_{n-1}^{ab}$. On peut donc appliquer la proposition 1.6.13 au produit semi-direct $P\Sigma_n \cong \mathcal{K}_n \rtimes P\Sigma_{n-1}$, pour retrouver [CPVW08, th. 1.3] :

Corollaire 4.3.11. *L'algèbre de Lie de $P\Sigma_n$ se décompose en un produit semi-direct :*

$$\mathcal{L}(P\Sigma_n) \cong \mathcal{L}(\mathcal{K}_n) \rtimes \mathcal{L}(P\Sigma_{n-1}).$$

On peut encore décomposer $\mathcal{K}_n$: il est muni d'une projection scindée p vers F_{n-1}, donnée par $p(x_i \mapsto x_i^{w_i}) = \overline{w_n}$, où $\overline{w}$ est l'image de $w \in F_n$ par la projection dans F_{n-1} donnée par $x_n \mapsto 1$. Ceci définit bien un morphisme de $\mathcal{K}_n$ dans F_{n-1}. En effet, si $\varphi : x_i \mapsto x_i^{v_i}$ et $\psi : x_i \mapsto x_i^{w_i}$ sont deux éléments de $\mathcal{K}_n$, alors :

$$\varphi\psi(x_n) = \varphi(x_n^{w_n}) = x_n^{v_n\varphi(w_n)},$$

mais $\overline{\varphi(w_n)} = \overline{w_n} \in F_{n-1}$, justement parce que $\varphi \in \mathcal{K}_n$. Ce morphisme est scindé par la section ι envoyant w sur le morphisme conjuguant x_n par w. Remarquons que l'image de cette section est stable par l'action (par conjugaison) de $P\Sigma_{n-1}$; cette action n'est autre que l'action canonique de $P\Sigma_{n-1}$ sur F_{n-1} : si $\varphi(x_n) = x_n$, on a ${}^{\varphi}(\iota(w)) : x_n \mapsto x_n^{\varphi(w)}$.

En notant $\mathcal{K}'_n$ le noyau de la section ainsi décrite, on a une décomposition en produit semi-direct :

$$\mathcal{K}_n \cong \mathcal{K}'_n \rtimes F_{n-1}.$$

Le sous-groupe $\mathcal{K}'_n$ est engendré par les conjugués des K_{in} (par $\iota(F_{n-1})$).

Chapitre 5

Traces et surjectivité stable

Sommaire

5.1 Calcul différentiel libre

On rappelle ici quelques bases de calcul différentiel libre. Le lecteur pourra consulter [Fox53] pour plus de détails.

Définition 5.1.1. Soit G un groupe, et M un $\Bbbk G$-module. Une *dérivation* (de Fox) de G dans M est une application $\partial : G \longrightarrow M$ vérifiant :

$$\forall x, y \in G, \quad \partial(xy) = \partial x + x \cdot \partial y.$$

Un tel ∂ s'étend à $\Bbbk G$ par linéarité, et la formule devient :

$$\partial(uv) = \partial u \cdot \varepsilon(v) + u \cdot \partial(v),$$

où ε désigne l'augmentation de $\Bbbk G$. On note $\mathrm{Der}(G, M)$, ou $\mathrm{Der}(\Bbbk G, M)$, l'espace des dérivations de G dans M. On s'intéresse ici à des dérivations de $\Bbbk G$ dans lui-même, et on abrégera en général $\mathrm{Der}(\Bbbk G, \Bbbk G)$ en $\mathrm{Der}(\Bbbk G)$.

Remarque 5.1.2. Si $G = F_S$ est le groupe libre sur un ensemble S, la propriété universelle s'étend aux dérivations, ce qui s'explique par le fait que celles-ci s'identifient aux sections de $M \rtimes G \twoheadrightarrow G$: $\mathrm{Der}(\Bbbk F_S, M) \cong M^S$, pour tout $\Bbbk G$-module M.

Définition 5.1.3. Si $S = (x_i)_i$ est une base fixée d'un groupe libre F, on définit une dérivation de $\mathbb{Z} F$ par :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : x_t \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La propostion suivante est à la base du calcul différentiel libre :

Proposition 5.1.4. *Soit $\lambda : F_Y \longrightarrow G$ un morphisme de groupes, où F_Y désigne le groupe libre de base $Y = \{y_j\}$. Alors, pour tout u dans $\mathbb{Z} F_Y$ et toute dérivation ∂ dans* $\mathrm{Der}(\mathbb{Z} G)$ *:*

$$\partial(\lambda u) = \sum_j \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial y_j}\right) \partial(\lambda y_j).$$

Remarque 5.1.5. La somme ci-dessus est finie, puisque seul un nombre fini de générateurs apparaît dans une expression de u.

Démonstration de la proposition 5.1.4. On vérifie que les deux membres de l'égalité sont des dérivations de $\mathbb{Z} F_Y$ dans $\mathbb{Z} G$, ce dernier étant considéré comme un module sur $\mathbb{Z} F_Y$ par $y \cdot g = \lambda(y)g$. Comme ces dérivations coïncident sur les générateurs, elles sont égales. □

Si $G = F_X = \langle x_i \rangle$ est libre, on peut appliquer la proposition à $\partial = \frac{\partial}{\partial x_i}$ pour écrire :

$$\frac{\partial(\lambda u)}{\partial x_i} = \sum_j \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial y_j}\right) \frac{\partial(\lambda y_j)}{\partial x_i}.$$

Pour $X = Y$ et $\lambda = \mathbb{1}_{F_X}$, la formule est similaire à la formule usuelle de changement de base.

La définition suivante poursuit l'analogie avec le calcul différentiel classique :

Définition 5.1.6. Soit $f \in \mathrm{Hom}(F_Y, F_X)$ un morphisme entre groupes libres. On définit sa *matrice jacobienne* (par rapport aux bases X et Y considérées) par :

$$D(f) := \left(\frac{\partial f(y_j)}{\partial x_i}\right)_{ji} \in M_{YX}(\mathbb{Z} F_X).$$

Remarque 5.1.7. Un morphisme f est en fait déterminé par Df. En effet, la proposition 5.1.4, appliquée à $\lambda = 1$, $\partial : v \longmapsto v - \varepsilon(v)$ et $u = f(x_i)$, donne :

$$f(x_i) - 1 = \sum_j \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_j}(x_j - 1).$$

La proposition 5.1.4 donne, pour des groupes libres $F_Y = \langle y_j \rangle$ et $F_X = \langle x_i \rangle$, et des morphismes $F_Z \xrightarrow{g} F_Y \xrightarrow{f} F_X$, la formule de dérivation d'une composée :

$$\frac{\partial f(g(z_k))}{\partial x_i} = \sum_j f\left(\frac{\partial g(z_k)}{\partial y_j}\right)\frac{\partial f(y_j)}{\partial x_i},$$

c'est-à-dire :

Corollaire 5.1.8. *Soient des morphismes $F_Z \xrightarrow{g} F_Y \xrightarrow{f} F_X$ entre groupes libres dont on a fixé une base, comme ci-dessus. Alors :*

$$D(fg) = f(Dg)D(f).$$

Remarque 5.1.9. Le lecteur aura sans doute remarqué que cette formule de dérivation d'une composée est « dans le mauvais sens ». Ceci s'explique comme suit : Le morphisme $f : F_Y \longrightarrow F_X$ est en fait un r-uplet de monômes $f(y_j) = f_j(x_i) \in \mathbb{Z} F_X$, et doit plutôt être considéré comme une « fonction polynomiale de F_X dans F_Y », dont les coordonnées seraient les f_j. Avec ce point de vue, fg est une « fonction polynomiale de F_X dans F_Z » de coordonnées les $fg(z_k) = g_k(f_j(x_i))$: c'est plutôt « $g \circ f$ » !

Notons que l'analogie avec la géométrie algébrique est ici flagrante. Pour la préciser, il faudrait pouvoir interpréter $\mathbb{Z} F_X$ comme une algèbre de fonctions sur un objet géométrique associé à X. Un tel objet devrait ressembler à un point muni d'une structure locale (puisque Df détermine f).

5.2 Dérivations et filtrations fortement centrales

Cette section introduit la notion de dérivation d'un groupe G dans un groupe H sur lequel il agit. L'objectif est de mettre en place un cadre formel pour l'étude des matrices jacobiennes introduites dans la section précédente. Précisément, l'application donnant la matrice jacobienne dans une base fixée est une dérivation, d'après le corollaire 5.1.8. L'étude de la dérivation $g \longmapsto g - 1$ de G dans $\Bbbk G$ nous permet aussi de revisiter la preuve du théorème de Lazard 1.3.5.

Définition 5.2.1. Soit H un groupe sur lequel un groupe G agit par automorphismes. Une application $\partial : G \longrightarrow H$ est une *dérivation* si :

$$\forall\, x, y \in G,\ \partial(xy) = \partial x \cdot {}^x\partial y.$$

Remarque 5.2.2. De telles dérivations sont aussi appelées *morphismes croisés*. La définition peut aussi être vue comme une condition de 1-cocycle.

Remarque 5.2.3. Dans le cas où $M = H$ est un groupe abélien, c'est-à-dire une représentation d'un groupe G, on retrouve la définition usuelle d'une dérivation de G dans M (définition 5.1.1).

Les formules suivantes sont immédiates :

$$\begin{cases} \partial(1) = 1, \\ \partial(x^{-1}) = {}^{x^{-1}}(\partial x)^{-1}. \end{cases}$$

Si l'on considère la structure de produit semi direct $H \rtimes G$ codant l'action de G sur H, la donnée d'une dérivation $\partial : G \longrightarrow H$ est équivalente à la donnée d'une section $\sigma = (\partial, \mathbb{1}_G)$ de la projection canonique :

$$\begin{tikzcd} H \rtimes G \arrow[r, "p"'] & G. \arrow[l, bend right, dashed, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

Avec cette interprétation, le lemme suivant est immédiat :

Lemme 5.2.4. *Si ∂ est une dérivation de G dans H, alors ∂^{-1} envoie les sous-groupes G-stables sur des sous-groupes.*

Preuve. $(\partial, \mathbb{1}_G)$ est une section de $H \rtimes G \twoheadrightarrow G$ et, si $K \subseteq H$ est un sous-groupe G-stable, alors $K \rtimes G$ est un sous-groupe de $H \rtimes G$.

Alternativement, on peut invoquer la formule : $\partial(xy^{-1}) = \partial x \cdot {}^{xy^{-1}}(\partial y)^{-1}$. □

On peut appliquer les constructions du paragraphe 1.5 dans ce cadre. Si une filtration fortement centrale H_* est donnée sur H, on obtient une filtration $\mathcal{A}_*(G, H_*)$ sur un sous-groupe de G, maximale parmi celles agissant sur H_*.

Soit G_* une filtration fortement centrale sur un sous-groupe G_1 de G, agissant sur H_* à travers l'action donnée de G sur H (cette condition équivaut à : $G_* \subseteq \mathcal{A}_*(G, H_*)$). Étant donnée une dérivation ∂ de G dans H, on peut tirer en arrière sur G la filtration $H_* \rtimes G_*$ par la section σ correspondante, et on obtient une filtration fortement centrale donnée par :

$$\sigma^{-1}(H_i \rtimes G_i) = G_i \cap \partial^{-1}(H_i).$$

C'est une filtration fortement centrale sur $G_1 \cap \partial^{-1}(H_1)$.

Remarque 5.2.5. Dans le cas où $G_* = \mathcal{A}_*(G, H_*)$, cette construction donne une filtration fortement centrale sur $\mathcal{A}_1 \cap \partial^{-1}(H_1)$. Ce sous-groupe est égal à G si et seulement si :

$$\begin{cases} G \text{ stabilise } H_*, \\ G \text{ agit trivialement sur } \mathcal{L}(H_*), \\ \partial(G) \subseteq H_1. \end{cases} \tag{5.2.5.1}$$

Sous ces conditions, $\mathcal{A}_* \cap \partial^{-1}(H_*)$ est donc une suite fortement centrale sur G, et en particulier, elle contient $\Gamma_*(G)$.

Toujours avec les notations ci-dessus, le morphisme $\sigma = (\partial, \mathbb{1}_G)$ induit un morphisme d'algèbres de Lie (injectif par définition de la filtration sur la source) :

$$\bar{\sigma} : \mathcal{L}(G_* \cap \partial^{-1}(H_*)) \hookrightarrow \mathcal{L}(H_*) \rtimes \mathcal{L}(G_*).$$

Ceci assure que ∂ induit une application linéaire $\bar{\partial}$ bien définie entre les gradués. De plus, la préservation du crochet par $\bar{\sigma} = (\bar{\partial}, \mathbb{1}) : x \longmapsto \bar{\partial}x + x$ équivaut à :

$$\bar{\partial}([x,y]) = [\bar{\partial}x, y] + [x, \bar{\partial}y] + [\bar{\partial}x, \bar{\partial}y]. \tag{5.2.5.2}$$

Si l'action de $\mathcal{L}(G_*)$ sur $\mathcal{L}(H_*)$ est triviale (*i.e.* si $\mathcal{L}(H_*) \rtimes \mathcal{L}(G_*)$ est en fait un produit direct), les deux premiers termes s'annulent, et ∂ induit un morphisme de Lie. La trivialité de l'action se traduit exactement par les inclusions :

$$G_j \subseteq \mathcal{A}_{j+1}(G, H_*).$$

Si au contraire $\mathcal{L}(H_*)$ est abélienne, c'est le dernier terme qui s'annule, et $\bar{\partial}$ est une dérivation d'algèbres de Lie. Ce dernier cas advient notamment lorsque H est un groupe abélien.

Retour sur la démonstration du théorème de Lazard 1.3.5. Prenons pour H le groupe (abélien) $(A, +)$, filtré par les A_i, et pour G le groupe $A^\times$, agissant par la multiplication à gauche ρ. On a déjà constaté que dans ce cadre :

$$\mathcal{A}_j(A^\times, A_*) = A^\times \cap (1 + A_j).$$

Soit ∂ la dérivation de $A^\times$ dans A donnée par $g \longmapsto g - 1$. C'est une dérivation car :

$$\partial(gh) = gh - 1 = (g-1) + g(h-1) = \partial(g) + g\partial(h).$$

De plus, par définition, $\partial^{-1}(A_j) = A^\times \cap (1 + A_j)$, qui est donc égal au groupe $\mathcal{A}_j(A^\times, A_*)$, et donc au groupe $\mathcal{A}_j(A^\times, A_*) \cap \partial^{-1}(A_j)$ considéré ci-dessus. On notera désormais $A_j^\times$ pour $A^\times \cap (1 + A_j)$.

Comme l'algèbre $\mathcal{L}(A_*)$ est abélienne (puisque A est un groupe abélien), l'application $\bar{\partial}$ est une dérivation (pour l'action canonique de $\mathcal{L}(A_*^\times)$ sur $\mathcal{L}(A_*)$) :

$$\bar{\partial} : \mathcal{L}(A_*^\times) \longrightarrow \mathcal{L}(A_*).$$

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(A_*)$, abélienne, est différente de l'algèbre $\mathrm{gr}(A_1)$ apparaissant dans l'énoncé du théorème 1.3.5 : on a oublié la structure associative de A. Néanmoins, une partie de cette structure reste encodée par l'action de $\mathcal{L}(A_*^\times)$ (héritée de l'action par multiplication à gauche de G sur $(A, +)$), et nous allons voir qu'en fait, la propriété de dérivation de $\bar{\partial}$ vis-à-vis de cette action traduit exactement le fait que $\bar{\partial} : \mathcal{L}(A_*^\times) \longrightarrow \mathrm{gr}(A_1)$ est un morphisme de Lie.

En effet, cette propriété s'écrit :

$$\bar{\partial}([x,y]) = [\bar{\partial}x, y] + [x, \bar{\partial}y].$$

Or, ces crochets sont décrits par l'action de $\mathcal{L}(A_*^\times)$ sur $\mathcal{L}(A_*)$, induite par la structure de $A \rtimes A^\times$:

$$\forall g \in A_1^\times,\ \forall x \in A,\ [g, x] = gx - x.$$

Par conséquent :

$$\bar{\partial}([x,y]) = -(y(x-1) - (x-1)) + (x(y-1) - (y-1)) = xy - yx,$$

comme annoncé. $\square$

Terminons cette section avec une autre application de notre travail sur les dérivations, qui généralise l'inclusion $\Gamma_i - 1 \subseteq I^i$ donnée en 1.3.8 (cf. aussi la proposition 5.3.8 et la remarque 5.3.10) :

Proposition 5.2.6. *Soit ∂ une dérivation de $\mathbb{Z}G$ (au sens de la définition 5.1.1) telle que $\partial(\mathbb{Z}G) \subseteq (IG)^l$. Pour tout entier k, on a :*

$$\partial(\Gamma_{k+1}G) \subset (IG)^{k+l}.$$

Démonstration. Soit $l \geqslant 0$ entier. Considérons la puissance de l'idéal d'augmentation $(IG)^l$. C'est un groupe abélien, muni d'une filtration (nécessairement fortement centrale) $(IG)^{*+l-1}$, sur laquelle G agit par multiplication à gauche. L'action de $G-1$ est nulle sur le gradué, donc celle de G y est triviale. Par conséquent, cette action vérifie les deux premières conditions de la remarque 5.2.5.

Or, la troisième condition est exactement l'hypothèse de la proposition. □

Remarque 5.2.7. On peut aussi donner une preuve directe, par récurrence sur k. C'est évident pour $k = 0$, puis si $u \in \Gamma_k$ et $v \in \Gamma_1 = G$:

$$\partial\left([u,v]\right) = \underbrace{\left(1 - uvu^{-1}\right)}_{\in IG}\underbrace{\partial u}_{\in IG^{k+l-1}} + u\underbrace{\left(1 - vu^{-1}v^{-1}\right)}_{\in IG^k}\underbrace{\partial v}_{\in IG^l} \in IG^k,$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence pour le premier terme, et $\Gamma_k - 1 \subset IG^k$ pour le second (cf. le corollaire 1.3.8).

5.3 Algèbres, actions et dérivations

Nous examinons à présent les dérivations d'algèbres. Ceci nous permet de constater que le calcul différentiel libre induit, après passage au gradué, un calcul différentiel sur l'algèbre tensorielle (cf. proposition 5.3.12). On utilisera ceci dans la section 5.4.2 pour obtenir la description explicite de la trace utilisée notamment par Satoh dans [Sat12].

Soit $\mathcal{A}lg_-$ la catégorie des algèbres (associatives) non unitaires sur un anneau (commutatif) $\Bbbk$ fixé. Cette catégorie est pointée (par 0) et protomodulaire. On peut donc y définir des actions, comme dans la section 1.5. Les actions dans $\mathcal{A}lg_-$ sont représentables. Précisément, pour toute algèbre I, soit $\mathrm{End}_r(I)$ (resp. $\mathrm{End}_l(I)$) l'algèbre des endomorphismes I-linéaires à droite (resp. à gauche) de I, *i.e.* des applications $\Bbbk$-linéaires u de I dans I vérifiant :

$$\forall x, y \in I,\ u(xy) = u(x)y \ \ (\text{resp. } u(xy) = xu(y)).$$

Soit $\mathrm{End}_{r,l}(I)$ le noyau de :

$$\alpha : \begin{cases} \mathrm{End}_r(I) \times \mathrm{End}_l(I) & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\Bbbk}(I) \\ (u,v) & \longmapsto & u \circ v - v \circ u. \end{cases}$$

Proposition 5.3.1. *Une action $A \circlearrowright I$ dans $\mathcal{A}lg_-$ peut être représentée par un (unique) morphisme :*

$$A \xrightarrow{(\lambda,\rho)} \mathrm{End}_{r,l}(I).$$

où $\mathrm{End}_r(I)$

Démonstration. Soit une action dans $\mathcal{A}lg_-$:

$$I \hookrightarrow B \twoheadrightarrow A.$$

Alors $\lambda(a)$ (resp. $\rho(a)$) est défini par la multiplication à gauche (resp. à droite) par a dans B. Réciproquement, à partir d'un morphisme (λ, ρ) comme ci-dessus, on construit une structure d'algèbre (associative) sur $I \times A$ définissant une action de A sur I. □

Remarquons que pour $I^2 = 0$ (c'est-à-dire quand la structure d'algèbre de I est triviale), une action de A sur I est simplement une structure de A-bimodule.

Remarque 5.3.2. La même construction marche dans la catégorie des algèbres filtrées (non unitaires) $f\mathcal{A}lg_-$: les actions y sont aussi représentables. Les algèbres $\mathrm{End}_r(I)$ et $\mathrm{End}_l(I)$ sont alors munies de la filtration usuelle : un morphisme u est de degré au moins j si $u(I_i) \subseteq I_{i+j}$ pour tout i.

Définition 5.3.3. Soit A agissant sur I comme ci-dessus. Une *dérivation* de A dans I est une application $\Bbbk$-linéaire $\partial : A \longrightarrow I$ telle que :

$$\partial(ab) = \partial a \cdot b + a \cdot \partial b.$$

Le $\Bbbk$-module des dérivations de A dans I est noté $\mathrm{Der}(A, I)$.

Remarque 5.3.4. La relation définissant une dérivation dépend seulement de la structure de A-bimodule de I. Ceci nous amène à considérer l'algèbre I^o, obtenue en prenant la structure de $\Bbbk$-module sous-jacente à I que l'on munit du produit trivial. Cette construction est universelle, au sens où le morphisme canonique $I \to I^o$ est l'unité de l'adjonction :

$$\mathcal{A}lg_- \underset{(-)^o}{\overset{\omega}{\rightleftarrows}} \mathcal{M}od_{\Bbbk},$$

où ω est le foncteur d'oubli. Une action de A sur I induit une action de A sur I^o ; une dérivation de A dans I est exactement une section de la projection :

$$I^o \rtimes A \twoheadrightarrow A$$

dans la catégorie des algèbres.

Dans le contexte des algèbres filtrées, $\mathrm{Der}(A, I)$ est filtré, une dérivation ∂ étant de degré au moins j si $\partial(A_i) \subseteq I_{i+j}$ pour tout i. Si A est filtrée par ses puissances A^i, il suffit d'avoir cette condition en degré 1 :

Lemme 5.3.5. *Soit A une algèbre, filtrée par ses puissances $A_i := A^i$, qui agit sur une algèbre filtrée I_*. Soit $\partial \in \mathrm{Der}(A, I)$. Alors ∂ est de degré au moins j si et seulement si :*

$$\partial(A) \subseteq I_{j+1}.$$

Démonstration. Une action $A_* \circlearrowright I_*$ est donnée par la multiplication à gauche et à droite, qui préservent la filtration : $A_i I_j \subseteq I_{i+j}$ et $I_j A_i \subseteq I_{i+j}$. Il suffit donc d'utiliser la formule :

$$\partial(a_1 \cdots a_i) = \sum_k a_1 \cdots a_{k-1} \partial(a_k) a_{k+1} \cdots a_i$$

pour obtenir le résultat. □

Les premiers exemples d'actions sont les actions adjointes (définition 1.5.6). Précisément, l'action adjointe de A est juste la structure évidente de A-bimodule sur A. Les dérivations pour cette structure sont les dérivations d'algèbre usuelles.

Soit une action $A \circlearrowright I$ représentée par (ρ, λ). On peut la tordre par des endomorphismes φ et ψ de A, e, faisant agir A sur I par $(\rho \circ \varphi, \lambda \circ \psi)$. Explicitement, $a \in A$ agit sur I par $\varphi(a) \cdot -$ à gauche, et par $- \cdot \psi(a)$ à droite. On donne un nom aux dérivations de A vers le A-bimodule I ainsi tordu.

Définition 5.3.6. Soit φ et ψ des endomorphismes de A. Une (φ, ψ)-*dérivation* est une application linéaire $\partial : A \longrightarrow I$ vérifiant :

$$\partial(ab) = \partial a \cdot \psi b + \varphi a \cdot \partial b.$$

On note $\mathrm{Der}_{(\varphi,\psi)}(A, I)$ le $\Bbbk$-module de ces dérivations.

Exemple 5.3.7. Appliquons cette construction à l'algèbre de groupe $A = \Bbbk G$ agissant sur un $\Bbbk G$-module M. On peut faire de M un bimodule en faisant agir $\Bbbk G$ trivialement à droite (c'est-à-dire à travers ε). Alors, $\mathrm{Der}(\Bbbk G, M)$ est exactement l'espace des dérivations décrites dans la définition 5.1.1. Si l'on prend $M = \Bbbk G$, c'est déjà un bimodule, mais la structure triviale à droite peut être obtenue en tordant l'action adjointe par $\eta\varepsilon : g \mapsto \varepsilon(g) \cdot 1$: $\mathrm{Der}(\Bbbk G) = \mathrm{Der}_{(id,\eta\varepsilon)}(\Bbbk G, \Bbbk G)$.

On peut appliquer le lemme 5.3.5 à $A = I = IG$. On obtient ainsi :

Corollaire 5.3.8. *Soit ∂ une dérivation de $\mathbb{Z}G$ telle que $\partial(\mathbb{Z}G) \subseteq (IG)^{l+1}$ (ce qui est toujours vérifié pour $l = -1$). Pour tout entier k, on a :*

$$\partial((IG)^k) \subset (IG)^{k+l}.$$

Remarque 5.3.9. Insistons sur le fait que la preuve donnée ici est très directe. En fait, on peut même la rendre encore plus courte, puisque dans le cas étudié : $\forall v \in I,\ \partial(uv) = u \cdot \partial v$.

Remarque 5.3.10. L'inclusion de $\Gamma_k - 1$ dans IG^k (corollaire 1.3.8) implique, sous l'hypothèse de la proposition 5.3.8 : $\partial(\Gamma_k) \subseteq (IG)^{k+l}$, puisque $\partial(1) = 0$. On retrouve ainsi la proposition 5.2.6.

Remarque 5.3.11. Certains espaces de dérivations de A dans lui-même peuvent hériter d'un peu plus qu'une structure de module. Précièment, si l'on tord l'action adjointe de A par (φ, ψ), si l'on suppose que φ et ψ sont idempotents, alors le module des (φ, ψ)-dérivations de A dans A commutant à φ et ψ est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}_\Bbbk(A)$:

$$\begin{aligned}[\partial, \partial'](ab) &= \partial\partial' a \cdot \psi^2 b + \varphi\partial' a \cdot \partial\psi b + \partial\varphi a \cdot \psi\partial' b + \varphi^2 a \cdot \partial\partial' b \\ &\quad - \partial'\partial a \cdot \psi^2 b - \varphi\partial a \cdot \partial'\psi b - \partial'\varphi a \cdot \psi\partial b - \varphi^2 a \cdot \partial'\partial b \\ &= [\partial, \partial'](a) \cdot \psi(b) + \varphi(a) \cdot [\partial, \partial'](b).\end{aligned}$$

En particulier, si $(\varphi, \psi) = (\mathbb{1}, \mathbb{1})$, alors $\mathrm{Der}(A)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}_\Bbbk(A)$. C'est aussi le cas pour $A = \Bbbk G$ et $(\varphi, \psi) = (\mathbb{1}, \eta\varepsilon)$. Dans ce dernier cas, on a mieux : considérons la filtration par les puissances de l'idéal d'augmentation sur $\Bbbk G$. Soient deux dérivations $\partial, \partial' \in \mathrm{Der}(\Bbbk G)$ telles que ∂' est de degré au moins 0. Alors $\partial \circ \partial' \in \mathrm{Der}(\Bbbk G)$, puisque $\varepsilon(\partial' v) = 0$ pour tout v.

Soit $A_* \circlearrowleft I_*$ une action d'algèbres filtrées. Puisque le foncteur gr : $f\mathcal{A}lg \longrightarrow gr\mathcal{A}lg$ depuis les algèbres filtrées vers le algèbres graduées est exact (par le même argument que pour l'exactitude de $\mathcal{L}$ - proposition 1.6.1), cette action est envoyée sur une action d'algèbres graduées $\mathrm{gr}(A_*) \circlearrowleft \mathrm{gr}(I_*)$. De plus, gr commute avec $(-)^o$ (la définition de $(-)^o$ s'adapte aux algèbres graduées de manière évidente). Par conséquent, on obtient un morphisme canonique :

$$\mathrm{gr}(\mathrm{Der}(A_*, I_*)) \hookrightarrow \mathrm{Der}_*(\mathrm{gr}(A_*), \mathrm{gr}(I_*)),$$

dont le but est le module gradué des dérivations graduées. Ce morphisme est évidemment injectif. Il est en fait obtenu par restriction de l'injection naturelle :

$$\mathrm{gr}(\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M_*, N_*)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_*(\mathrm{gr}(M_*), \mathrm{gr}(N_*))$$

entre bifoncteurs sur les modules gradués. Par conséquent, il préserve toute la structure algèbrique héritée de la structure de bifoncteur additif (cf. la remarque 5.3.11).

Appliquons ceci à une algèbre de groupe $\Bbbk G$, filtrée par les puissances de IG, agissant sur elle-même (par l'action décrite dans l'exemple 5.3.7). On obtient un morphisme préservant la structure induite par la composition :

$$\mathrm{gr}(\mathrm{Der}(\Bbbk G)) \hookrightarrow \mathrm{Der}_*(\mathrm{gr}(\Bbbk G)).$$

Proposition 5.3.12. *Soit G un groupe libre, et M_* un $\Bbbk G$-module filtré (considéré comme un bimodule, avec l'action triviale à droite). Alors le morphisme canonique entre les espaces de (id, ε)-dérivations :*

$$\mathrm{gr}(\mathrm{Der}(\Bbbk G, M_*)) \hookrightarrow \mathrm{Der}_*(\mathrm{gr}(\Bbbk G), \mathrm{gr}(M_*))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Soit S une base de G. Alors $V = G^{ab}$ est abélien libre sur S, et $\mathrm{gr}(\Bbbk G) \cong TV$ est l'algèbre tensorielle (proposition 3.1.2). En identifiant les dérivations avec des sections, comme ci-dessus (cf. remarque 5.3.4), on voit qu'une dérivation est uniquement déterminée par le choix de ses valeurs sur S :

$$\mathrm{Der}_*(TV, N_*) = \mathcal{F}_*(S, N_*),$$

pour tout TV-bimodule gradué N_*, où $\mathcal{F}_*(S, N_*)$ désigne le module (gradué) $\coprod N_i^S$ des applications de S dans les N_i. La même chose est vraie pour l'autre membre : une dérivation de $\Bbbk G$ dans M est une section de la projection $M \rtimes G \twoheadrightarrow G$, donc est déterminée par une application $S \to M$:

$$\mathrm{Der}(\Bbbk G, M_*) = \mathrm{Der}(G, M_*) \cong M_*^S.$$

Le second membre est l'ensemble des applications de S dans M, munie de la filtration héritée de celle de M. L'isomorphisme recherché est donc exactement : $\mathrm{gr}(M_*^S) \cong \mathcal{F}_*(S, \mathrm{gr}(M_*))$. □

Remarque 5.3.13. Si M est un G-module quelconque, on peut le munir de sa $\Bbbk G$-filtration universelle $(IG)^* \cdot M$.

Remarque 5.3.14. L'isomorphisme $\mathrm{gr}(\mathrm{Der}(\Bbbk G)) \cong \mathrm{Der}_*(TV)$ ainsi obtenu préserve les structures algébriques obtenues à partir de la composition des dérivations.

5.4 Traces

Dans [Bar13], Bartholdi définit la trace d'un automorphisme φ de F_n par :

$$\mathrm{Tr}(\varphi) := \mathrm{Tr}(D\varphi - \mathbb{1}) \in \mathbb{Z}\, F_n, \tag{5.4.0.1}$$

où $D\varphi$ est la jacobienne de φ, et la trace du second membre est la trace usuelle. Nous allons voir que cette application Tr passe au gradué et donne une application, toujours notée Tr :

$$\mathrm{Tr} : \mathcal{L}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{gr}(\mathbb{Z}\, F_n) \cong TV.$$

Le but de cette section est de montrer que cette application est bien définie (c'est une conséquence de la proposition 5.4.1), et de montrer qu'elle coïncide avec la trace de Morita-Satoh. Cette dernière est définie algébriquement à partir de la contraction par rapport à la dernière variable $\Phi : V^* \otimes TV \to TV$. Cette description est donnée par la proposition 5.4.6.

5.4.1 Passage au gradué

Soit $\varphi \in \mathcal{A}_k(F_n)$. Par définition de $\mathcal{A}_k$, $\varphi_i := x_i^{-1}\varphi(x_i) \in \Gamma_{k+1}$. On peut expliciter la jacobienne de φ :

$$(D\varphi)_{ij} = \frac{\partial(x_i\varphi_i)}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{\delta_{ij}} + x_i \frac{\partial(\varphi_i)}{\partial x_j}.$$

Ainsi :

$$D\varphi - \mathbb{1} = \left(x_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{ij}.$$

Remarquons que d'après la proposition 5.2.6, cette matrice est en fait dans $M_n(I^k)$ (on abrège IF_n en I dans la suite). De plus, l'action de la multiplication par x_i est triviale modulo I^{k+1}. On en déduit la formule suivante pour la trace :

$$\mathrm{Tr}(D\varphi - \mathbb{1}) = \sum_i x_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \equiv \sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \pmod{I^{k+1}}. \tag{5.4.0.2}$$

Soit G un groupe quelconque. On peut appliquer les constructions du paragraphe 1.4 à $\Bbbk G$ filtré par les puissances de l'idéal d'augmentation. Ceci donne une suite fortement centrale $GL_n(I^*G)$ sur le groupe de congruence $GL_n(IG)$, et un plongement d'algèbres de Lie :

$$\mathcal{L}(GL_n(I^*G)) \hookrightarrow \mathrm{gr}(M_n(\mathbb{Z}\, G)) \cong M_n(\mathrm{gr}(\mathbb{Z}\, G)).$$

La proposition suivante remplace l'énoncé proposé dans la section 6 de [Bar13] :

Proposition 5.4.1. *La jacobienne D induit un morphisme de modules gradués :*

$$D : \mathcal{L}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{L}(GL_n(I^*F_n)),$$

qui vérifie :

$$D([f,g]) = [g, Df] + [Dg, f] + [Dg, Df].$$

Pour faire face au problème du sens de la composition évoqué dans la remarque 5.1.9, introduisons quelques notations avant de prouver la proposition. Si G est un groupe, G^{op} désigne le groupe opposé, où la multiplication est donnée par :

$$g \cdot_{op} h = hg.$$

Si G_* est une filtration fortement centrale sur G, alors G_*^{op} en est une sur G^{op}, et il est facile de vérifier que :

$$\mathcal{L}(G_*^{op}) = \mathcal{L}(G_*)^{op},$$

où le crochet de $\mathcal{L}(G_*)^{op}$ est donné par l'opposé du crochet de $\mathcal{L}(G_*)$:

$$[x, y]_{op} = [y, x].$$

Remarque 5.4.2. L'anneau $M_n(\mathbb{Z} F_n)$ est isomorphe à son opposé : l'application inv $x \mapsto x^{-1}$ est un isomorphisme (involutif) $F_n \cong F_n^{op}$, qui se prolonge en un isomorphisme $\mathbb{Z} F_n \cong \mathbb{Z} F_n^{op}$, noté $u \mapsto \overline{u}$. Puis un isomorphisme d'anneaux $\varphi : A \cong A^{op}$ induit un isomorphisme $M \mapsto {}^t\varphi(M)$ entre $M_n(A)$ et $M_n(A)^{op}$. On peut donc utiliser l'application $M \mapsto {}^t\overline{M}$ pour identifier $M_n(\mathbb{Z} F_n)$ et son opposé.

Preuve de la proposition. Le corollaire 5.1.8 assure que la jacobienne D est une dérivation de IA_n dans $GL(I)^{op} \subset M_n(\mathbb{Z} F_n)^{op}$, où $M_n(\mathbb{Z} F_n)$ est munie de l'action évidente de $\mathrm{Aut}(F_n)$. On peut donc appliquer la machinerie de 5.2 à $\partial = D$, avec $G = \mathrm{Aut}(F_n)$, et $H = GL_n(I)^{op}$, muni de la filtration fortement centrale $H_* = GL_n(I*)^{op}$.

La filtration fortement centrale $\mathcal{A}_*(G, H_*)$ est alors la filtration d'Andreadakis $\mathcal{A}_* = \mathcal{A}_*(F_n)$ sur $\mathcal{A}_1 = IA_n \subset \mathrm{Aut}(F_n)$. En effet, $\mathcal{A}_* = \mathcal{A}_*(G, \Gamma_*(F_n)) = \mathcal{A}_*(G, D_*(F_n))$ (puisque $\Gamma_*(F_n) = D_*(F_n)$ - corollaire 3.1.7), et on a la série d'inclusions :

$$\mathcal{A}_* \left(G, D_*F_n\right) \supseteq \mathcal{A}_* \left(G, GL_n(I^*)\right) \supseteq \mathcal{A}_* \left(G, M_n(I^*)\right) = \mathcal{A}_* \left(G, I^*\right).$$

La première provient de 1.8.1 appliquée à l'injection de D_*F_n dans $GL_n(I^*)$ donnée par $g \longmapsto g\mathbb{1}_n$ (où $\mathbb{1}_n$ désigne la matrice identité). La deuxième est un cas particulier de 1.8.6, et l'égalité provient du fait que G agit sur les coefficients des matrices :

$$[g, (m_{ij})] = g \cdot (m_{ij}) - (m_{ij}) = ([g, m_{ij}]).$$

Or, par la proposition 1.8.8 appliquée à F_n, ces inclusions sont en fait des égalités.

De plus, par le calcul effectué au début de la section, D envoie $\mathcal{A}_*$ dans $GL(I^*)^{op}$. La filtration $\mathcal{A}_* \cap \partial^{-1}(H_*)$ est donc simplement $\mathcal{A}_*$. Le travail fait dans la section 5.2 donne alors le résultat (en particulier, la formule pour $D([f, g])$ découle de la formule (5.2.5.2)). □

On peut composer l'application définie par la proposition avec le morphisme

$$\mathcal{L}(GL_n(I^*F_n)) \xrightarrow{(-)-\mathbb{1}} \mathrm{gr}(M_n(\mathbb{Z} F_n)) \cong M_n(\mathrm{gr}(\mathbb{Z} F_n)) = M_n(TV).$$

Ainsi, pour φ dans $\mathcal{A}_k/\mathcal{A}_{k+1}$, $D\varphi - \mathbb{1}$ est bien défini modulo $M_n(I^{k+1})$. En composant ensuite avec la trace, on obtient, comme annoncé, une application linéaire graduée bien définie :

$$\mathrm{Tr} : \mathcal{L}(\mathcal{A}) \longrightarrow TV,$$

induite par $\varphi \longmapsto \mathrm{Tr}(D\varphi - \mathbb{1})$.

Remarque 5.4.3. On pouvait aussi voir explicitement que $D - \mathbb{1}$ passe au gradué (donc Tr aussi), mais le comportement vis-à-vis du crochet est moins clair avec ce point de vue.

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{A}_k$. Si $\varphi = \psi\chi$ avec $\chi \in \mathcal{A}_{k+1}$, alors :

$$\psi(x_i) = \varphi(x_i\chi_i) = x_i\varphi_i\varphi(\chi_i).$$

Comme χ_i est dans Γ_{k+2}, $\varphi(\chi_i)$ aussi, et :

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} + \varphi_i \underbrace{\frac{\partial\varphi(\chi_i)}{\partial x_j}}_{\in I^{k+1}} \equiv \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} \pmod{I^{k+1}}.$$

5.4.2 Évaluation et contraction

Considérons l'application d'évaluation :

$$ev : \mathrm{Der}_{(\mathbb{1},\varepsilon)}(TV) \otimes TV \longrightarrow TV.$$

En utilisant la propriété universelle de TV, comme dans la preuve de la proposition 5.3.12, on obtient un isomorphisme linéaire :

$$\mathrm{Der}_{(\mathbb{1},\varepsilon)}(TV) \cong \mathrm{Hom}(V, TV) \cong V^* \otimes TV.$$

L'évaluation est donc donnée par :

$$\begin{cases} V^* \otimes TV \otimes TV & \longrightarrow & TV \\ \omega \otimes u \otimes v & \longmapsto & \Phi(\omega \otimes v)u, \end{cases}$$

où Φ est la contraction par rapport à la dernière variable :

$$\Phi : \begin{cases} V^* \otimes V^{\otimes k+1} & \longrightarrow & V^{\otimes k} \\ \alpha \otimes X_{i_1} \cdots X_{i_{k+1}} & \longmapsto & X_{i_1} \cdots X_{i_k}\alpha(X_{i_{k+1}}), \end{cases}$$

étendue par zéro sur $\Bbbk \cdot 1$. Ceci provient du fait que toute $(\mathbb{1}, \varepsilon)$-dérivation ∂ vérifie :

$$\partial(uv) = u \cdot \partial v,$$

quand le degré de v est au moins 1 (c'est-à-dire quand $\varepsilon(v) = 0$), et $\partial(1) = 0$.

On a ainsi montré :

Proposition 5.4.4. *Soit* $\partial \in \mathrm{Der}_{(\mathbb{1},\varepsilon)}(TV)$. *Alors :*

$$\partial = \Phi(\partial|_V \otimes -).$$

Considérons à présent la dérivation $\frac{\partial}{\partial x_i}$ de $\mathbb{Z}F_n$. Par passage au gradué, elle induit une $(\mathbb{1}, \varepsilon)$-dérivation de degré -1 de TV, qu'on note ∂_i (toute dérivation de $\Bbbk G$ est de degré au moins -1, par le corollaire 5.3.8). Puisque $\partial_i|_V = X_i^*$, on obtient :

Corollaire 5.4.5. *La* $(\mathbb{1}, \varepsilon)$*-dérivation de* TV *induite par* $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathrm{Der}(\mathbb{Z}F_n)$ *est :*

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_i}} = \partial_i = \Phi(X_i^* \otimes -) : TV \longrightarrow TV.$$

Nous sommes alors en mesure de donner la description annoncée de la trace en termes d'algèbre linéaire :

Proposition 5.4.6. *La trace* $\mathrm{Tr} : \mathcal{L}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{gr}(\mathbb{Z}\,F_n)$ *(définie par la formule (5.4.0.1)) est décrite par :*

$$\mathrm{Tr} = \Phi \circ \iota \circ \tau,$$

où τ *est le morphisme de Johnson (exemple 1.6.6),* ι *désigne l'inclusion de* $\mathrm{Der}_k(\mathfrak{L}V) \cong V^* \otimes \mathfrak{L}_{k+1}V$ *dans* $\mathrm{Der}_k(TV) \cong V^* \otimes V^{\otimes k+1}$*, et* Φ *est la contraction.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{A}_k$. Alors $\tau(\varphi)$ est défini par :

$$\tau(\varphi)(X_i) = \overline{x_i^{-1}\varphi(x_i)} = \overline{\varphi_i} \ \in \Gamma_{k+1}/\Gamma_{k+2} \cong \mathfrak{L}_{k+1}V.$$

Au début de paragraphe 5.4.1, on a vu que la trace était donnée par :

$$\mathrm{Tr}(D\varphi - \mathbb{1}) = \sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}.$$

La proposition est donc équivalente à la formule :

$$\Phi\left(\sum_i X_i^* \otimes \overline{\varphi_i}\right) = \overline{\sum_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}}.$$

Pour l'obtenir, on évalue l'égalité donnée par le corollaire 5.4.5 aux éléments $\overline{\varphi_i - 1}$ (sachant que l'inclusion de $\Gamma_{k+1}/\Gamma_{k+2}(F_n) \cong \mathfrak{L}_{k+1}V$ dans $T_{k+1}V$ est donnée par $\overline{w} \mapsto \overline{w-1}$). □

5.5 Surjectivité stable

5.5.1 Annulation de la trace

On montre ici que la trace est à valeurs dans les crochets de TV. Ce résultat est aussi montré dans [MS17, Prop. 5.3], avec des méthodes rationnelles.

Proposition 5.5.1 ([BLGM90, th. 2.1], cité dans [Bar13, th. 6.2])**.** *Soit* $k \geqslant 2$*, et* $J \in GL_m(I_{\mathbb{Z}}^k F_n)$*. On note toujours* V *l'abélianisation* $V = F_n^{ab} \cong \mathbb{Z}^n$*. Alors :*

$$\mathrm{Tr}\,(J - \mathbb{1}) \in [TV, TV]_k \subset V^{\otimes k} \cong I^k/I^{k+1}.$$

Ce résultat repose sur le critère suivant :

Proposition 5.5.2 ([BLGM90, prop. 2.2])**.** *Soit* $f(X_1, ..., X_n) \in V^{\otimes k}$*. Soit* $\mathcal{C} \subset M_k(\mathbb{Z})$ *le sous-*$\mathbb{Z}$*-module engendré par les* $\mathbf{e}_{i,i+1}$*. Supposons :*

$$\forall C_i \in \mathcal{C},\ \ \mathrm{Tr}(f(C_1, ..., C_n)) = 0.$$

Alors $f \in [TV, TV]_k$*.*

Pour une preuve de ce résultat, le lecteur peut se référer à la démonstration de la proposition 5.6.2, qui est exactement celle donnée dans [BLGM90], adaptée au cas - légèrement plus compliqué - de la caractéristique positive.

Preuve de la proposition 5.5.1. L'argument consiste à utiliser des évaluations vers des matrices sur des algèbres commutatives, où l'on peut utiliser la proposition 1.4.1. On utilise alors le critère ci-dessus pour obtenir la conclusion.

Soit $\mathbb{1} + tA_i \in GL_k(t\Bbbk[t])$. On dispose d'un morphisme d'évaluation $x_i \mapsto \mathbb{1} + tA_i$ de F_n vers $GL_k(t\,\mathbb{Z}[t])$, qui s'étend en un morphisme de $\Bbbk F_n$ vers $M_k(t\Bbbk[t])$ envoyant I^* dans $t^*M_k(\Bbbk[t])$. En prenant les groupes de congruence associés, on obtient un morphisme d'évaluation :

$$ev_{\mathbb{1}+tA_i} : GL_m(I^*F_n) \longrightarrow GL_m(t^*M_k(\Bbbk[t])) = GL_{mk}(t^*\Bbbk[t]).$$

Celui-ci fait partie du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(GL_m(I^*F_n)) \arrow[r, hook, "(-)-\mathbb{1}"] \arrow[d, "ev_{\mathbb{1}+tA_i}"] & M_m(TV) \arrow[r, "Tr"] \arrow[d, "ev_{tA_i}"] & TV \arrow[d, "ev_{tA_i}"] \\
\mathcal{L}(GL_{mk}(t^*\Bbbk[t])) \arrow[r, hook, "(-)-\mathbb{1}"] \arrow[d, "det"] & M_{mk}(\Bbbk[t]) \arrow[r, "Tr_m"] \arrow[d, "Tr"] & M_m(\Bbbk[t]) \arrow[dl, "Tr"] \\
\mathcal{L}(\Bbbk[t]_*^\times) = 0 \arrow[r, hook, "(-)-1"] & \Bbbk[t] &
\end{tikzcd}$$

Ici, on identifie $\mathrm{gr}(I^*F_n)$ avec TV par $x_i \mapsto 1 + X_i$. On identifie aussi $\mathrm{gr}(t^*\Bbbk[t])$ avec $\Bbbk[t]$. L'évaluation $x_i \mapsto \mathbb{1} + tA_i$ induit donc le morphisme $X_i \mapsto tA_i$ entre les gradués. Le carré du bas est celui de la proposition 1.4.1. L'application Tr_m est la trace usuelle de matrices à coefficients dans $M_m(\Bbbk[t])$ – en identifiant canoniquement $M_{mk}(\Bbbk[t])$ avec $M_k(M_m(\Bbbk[t]))$.

Prenons maintenant $\Bbbk = \mathbb{Z}$ et $f = \mathrm{Tr}(J - \mathbb{1}) \in V^{\otimes k}$. La commutativité du diagramme ci-dessus implique :

$$0 = \mathrm{Tr}(f(tA_i)) = t^k\,\mathrm{Tr}(f(A_i)).$$

Par conséquent, $\mathrm{Tr}(f(A_i)) = 0$, pour tout $\mathbb{1} + tA_i \in GL_k(t\,\mathbb{Z}[t])$. On peut évaluer ceci en $t = 0$ pour obtenir : $\mathrm{Tr}(f(\pi A_i)) = 0$. Cette évaluation π est exactement :

$$\pi : \mathcal{L}_1(GL_k(t^*\,\mathbb{Z}[t]) \hookrightarrow M_k\left(t\,\mathbb{Z}[t]/t^2\,\mathbb{Z}[t]\right) \cong M_k(\mathbb{Z}).$$

De la proposition 1.4.2 et de la remarque 1.4.3, on déduit que son image est $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{Z})$. On peut donc appliquer la proposition 5.5.2 pour conclure. □

Le résultat énoncé dans la proposition 5.5.1, nous incite à considérer la trace comme prenant ses valeurs dans l'abélianisé $TV^{ab} = TV/[TV, TV]$ de l'algèbre de Lie TV. Puisque $[TV, TV]_k$ est engendré par les éléments :

$$[X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_p}, X_{i_{p+1}} \otimes \cdots \otimes X_{i_k}] = X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_k} - t^p \cdot X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_k},$$

avec $t = \bar{1} \in \mathbb{Z}/k$, le module TV^{ab} est le module des *puissances cycliques* C_*V :

$$(TV^{ab})_k = C_kV := V^{\otimes k}/(\mathbb{Z}/k).$$

La conclusion de la proposition 5.5.1 devient, dans ce contexte : $\mathrm{Tr}\,(J - \mathbb{1}) = 0 \in C_*V$.

5.5.2 Algèbre linéaire

Considérons le second morphisme de Johnson (1.7.6.1) :

$$\tau' : \mathcal{L}\left(\Gamma_{IA_n}\right) \longrightarrow \mathrm{Der}\left(\mathcal{L}(F_n)\right).$$

On a vu qu'il induit un isomorphisme en degré 1 (prop. 3.2.2). De plus, $\mathcal{L}\left(\Gamma_{IA_n}\right)$ est engendré en degré 1 (cf. 1.2.5). Par conséquent, l'image de τ' est exactement la sous-algèbre engendrée en degré 1 de $\mathrm{Der}\left(\mathcal{L}(F_n)\right)$. Comme de plus $\mathcal{L}(F_n) \cong \mathfrak{L}H$, la détermination de $\mathrm{coker}(\tau')$ est un problème purement du ressort de l'algèbre linéaire.

Définition 5.5.3. La *trace de Morita-Satoh* est définie comme la composée :

$$\mathrm{Tr}_M : V^* \otimes \mathfrak{L}_{k+1}V \xrightarrow{\iota} V^* \otimes V^{\otimes k+1} \xrightarrow{\Phi} V^{\otimes k} \xrightarrow{\pi} C_kV := V^{\otimes k}/(\mathbb{Z}/(k)),$$

où ι et π désignent les flèches évidentes. Toutes les flèches considérées sont évidemment $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$-équivariantes (pour les actions canoniques).

D'après la proposition 5.4.6, la trace peut être vue comme la composée du morphisme de Johnson $\tau : \mathcal{L}_k(\mathcal{A}_*(F_n)) \to \mathrm{Der}_k(\mathfrak{L}V) \cong V^* \otimes \mathfrak{L}_{k+1}V$ avec Tr_M.

Notation 5.5.4. On note $\mathfrak{I}$ l'image de τ', c'est-à-dire la sous-algèbre de Lie engendrée en degré 1 de $\mathrm{Der}(\mathfrak{L}V)$.

La proposition suivante peut être vue comme une conséquence de la proposition 5.5.1. Précisément, $\mathfrak{I} = \mathrm{Im}(\tau') \subseteq \mathrm{Im}(\tau)$, et la proposition 5.5.1 implique que $\mathrm{Tr}_M \circ \tau = \mathrm{Tr}$ s'annule. Une autre démonstration (utilisant seulement de l'algèbre linaire) est donnée dans l'appendice de ce chapitre.

Proposition 5.5.5. *Pour tout $k \geqslant 2$, $\mathrm{Tr}_M(\mathfrak{I}_k) = \{0\}$.*

5.5.3 Conoyau stable de τ' et surjectivité stable

On déduit de la proposition 5.5.5, pour $k \geqslant 2$, un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{I}_k \arrow[r, hook] \arrow[d, dotted, "\phi"] & V^* \otimes \mathfrak{L}_{k+1}V \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\Phi"] & \mathrm{coker}(\tau') \arrow[d, dotted, "\overline{\Phi}"] \\
{[TV, TV]_k} \arrow[r, hook] & V^{\otimes k} \arrow[r, two heads, "\pi"] & C_kV.
\end{tikzcd}$$

Dans [Sat12], Satoh montre que :

$$\begin{cases} \text{Pour } n \geqslant k+1, & \Phi \text{ est surjective.} & \text{(lemme 3.2)} \\ \text{Pour } n \geqslant k+2, & \phi \text{ est surjective.} & \text{(prop. 3.2)} \\ \text{Pour } n \geqslant k+2, & \ker \Phi \subseteq \mathfrak{I}. & \text{(prop. 3.3)} \end{cases}$$

Son théorème 3.1 est donc vrai sur $\mathbb{Z}$:

Proposition 5.5.6. *Pour $k \geqslant 2$ et $n \geqslant k+2$, $\overline{\Phi}$ est un isomorphisme $GL_n(\mathbb{Z})$-équivariant :*

$$\mathrm{coker}(\tau'_k) \cong C_k.$$

Démonstration. En notant K et L le noyau et le conoyau de $\overline{\Phi}$, on a un diagramme commutatif dans $Gl_n(\mathbb{Z}) - \mathcal{M}od_{\mathbb{Z}}$:

$$\begin{tikzcd}
& \ker \Phi \arrow[r, dotted, "0"] \arrow[dl, dotted] \arrow[d] & K \arrow[d] \\
\mathfrak{I}_k \arrow[r, hook] \arrow[d, dotted, "\phi"] & V^* \otimes \mathfrak{L}_{k+1} V \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\Phi"] & \operatorname{coker}(\tau') \arrow[d, dotted, "\overline{\Phi}"] \\
{[TV, TV]_k} \arrow[r, hook] \arrow[d] & V^{\otimes k} \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d] & C_k V \arrow[d] \\
0 & 0 & L.
\end{tikzcd}$$

Le lemme du serpent donne alors que K et L sont nuls : $\overline{\Phi}$ est un isomorphisme. □

Théorème 5.5.7. *Si $k + 2 \leqslant n$, alors la flèche naturelle*

$$\mathcal{L}_k(IA_n) \longrightarrow \mathcal{L}_k(\mathcal{A}(F_n))$$

est surjective et τ induit un isomorphisme : $\mathcal{A}_k/\mathcal{A}_{k+1} = \mathcal{L}_k(\mathcal{A}_*(F_n)) \cong \mathfrak{I}_k$.

Remarque 5.5.8. Si l'on fixe des bases, on peut définir une injection de F_n dans $F_{n+1} \cong F_n * \mathbb{Z}$. Un automorphisme φ de F_n peut être étendu en un automorphisme $\varphi * \mathbb{1}$ de F_{n+1}. Ceci induit des injections $IA_n \hookrightarrow IA_{n+1}$ qui induisent des morphismes $\mathcal{L}(\mathcal{A}_*(F_n)) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}_*(F_{n+1}))$. En prenant la colimite sur n, on peut alors définir un anneau de Lie $\mathcal{L}^{st}(\mathcal{A}_*)$. De la même manière, on obtient des injections de $\operatorname{Der}(\mathcal{L}(F_n^{ab}))$ dans $\operatorname{Der}(\mathcal{L}(F_{n+1}^{ab}))$, et l'on peut prendre la colimites $\mathfrak{I}^{st}$ des sous-algèbres engendrées en degré 1. Avec ce point de vue, l'isomorphisme du théorème 5.5.7 est en fait un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées :

$$\tau^{st} : \mathcal{L}^{st}(\mathcal{A}_*) \cong \mathfrak{I}^{st},$$

ce qui signifie exactement que $\mathcal{L}^{st}(\mathcal{A})$ est engendré en degré 1.

En fait, toutes les constructions qui apparaissent ici sont des foncteurs sur la catégorie notée $\mathbf{S}(\mathbb{Z})$ dans [Dja16b, section 7], où il est montré (par des méthodes similaires à celles de [CEFN14]) que ces foncteurs sont à support fini. Ceci implique que le fait que τ_k^{st} soit un isomorphisme est équivalent à ce que τ_k en soit un pour n assez grand.

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(IA_n) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\tau'"'] & \mathcal{L}(\mathcal{A}) \arrow[d, "\tau"] \\
& \operatorname{Der}(\mathfrak{L}V)
\end{tikzcd}$$

L'image de τ' est $\mathfrak{I}$, sous-algèbre engendrée en degré 1 de $\operatorname{Der}(\mathfrak{L}V)$. Les résultats du paragraphe 5.5.3 indiquent qu'en degré $k \geqslant n - 2$, c'est aussi le noyau de la trace de Morita-Satoh Tr.

Or la proposition ci-dessus (5.5.1) assure que $\operatorname{Tr} \circ \tau = 0$, donc que $\operatorname{Im} \tau_k \subseteq \ker \operatorname{Tr}_k = \operatorname{Im} \tau'_k$, si $k \geqslant n - 2$. Par conséquent, $\operatorname{Im} \tau = \operatorname{Im} \tau'$. Comme τ est injectif (1.7.6), c'est un isomorphisme sur son image, d'où le résultat. □

5.6 Le cas p-restreint

On peut adapter les méthodes de la section qui précède pour étudier la version p-restreinte du problème d'Andreadakis stable, présentée au paragraphe 2.5.2. Le morphisme induit par l'inclusion n'est pas stablement surjectif dans ce cas, mais nous donnons des bornes sur la taille de son conoyau stable (proposition 5.6.6)

5.6.1 Annulation de la trace

Dans le contexte p-restreint, la proposition 5.5.1 est remplacée par :

Proposition 5.6.1. *Soit $k \geqslant 2$, et $J \in GL_m(I^k_{\mathbb{F}_p} F_n)$. Alors :*

$$\mathrm{Tr}\,(J - \mathbb{1}) \in [TV, TV]_k + (TV)^p \subset V^{\otimes k} \cong I^k/I^{k+1},$$

où $V = F_n^{ab} \otimes \mathbb{F}_p \cong \mathbb{F}_p^n$.

La preuve est exactement la même que celle de la proposition 5.5.1, sur $\mathbb{F}_p$ au lieu de $\mathbb{Z}$, la proposition 5.5.2 étant remplacée par :

Proposition 5.6.2. *Soit $f(X_1, ..., X_n) \in V^{\otimes k}$. Soit $\mathcal{C} \subset M_k(\mathbb{F}_p)$ le sous-$\mathbb{Z}$-module engendré par les $\mathbf{e}_{i,i+1}$. Supposons :*

$$\forall C_i \in \mathcal{C},\ \ \mathrm{Tr}(f(C_1, ..., C_n)) = 0.$$

Alors $f \in [TV, TV]_k + (TV)^p$.

Démonstration. On dit que deux éléments u et u' de $V^{\otimes k}$ sont *cycliquement équivalents*, et on écrit $u \sim u'$, s'ils sont conjugués sous l'action de $\mathbb{Z}/p$. Notre but est de montrer que f est cycliquement équivalent à une puissance p-ième. Pour cela, décomposons f, à équivalence cyclique près, en une somme de monômes deux-à-deux non cycliquement équivalents : $f \sim \sum \mu_g g$, où chaque g est de la forme $g = X_{i_1} \cdots X_{i_k}$. Si les i_α apparaissant dans l'écriture de g sont deux-à-deux distincts, évaluons X_{i_α} en $C_{i_\alpha} = \mathbf{e}_{\alpha,\alpha+1}$, et tous les X_i n'apparaissant pas dans g en $C_i = 0$. Alors $\mu_g = \mathrm{Tr}(f(C_1, ..., C_n)) = 0$. Ainsi, de tels g ne peuvent pas apparaître dans notre décomposition de f.

Soit λ le morphisme d'algèbres (associatives) de TV dans $T(V \otimes V)$ donné par $X_i \mapsto \sum_j X_{ij}$ (où $X_{ij} = X_i \otimes X_j$). Soit un monôme $g = X_{i_1} \cdots X_{i_k}$. Son image est $\lambda(g) = \sum_{\mathbf{j}} X_{i_1 j_1} \cdots X_{i_k j_k}$, où la somme est prise sur les $\mathbf{j} = (j_1, ..., j_k) \in \{1, ..., k\}^k$. Soit r le nombre de monômes cycliquement équivalents à $h = X_{i_1 1} \cdots X_{i_k k}$ dans cette somme. Ce nombre r est exactement le nombre d'éléments de $\mathbb{Z}/k$ qui stabilisent g. C'est un multiple de p si et seulement si g est une puissance p-ième. Si l'on décompose $\lambda(f)$ à équivalence cyclique près, comme on l'a fait pour f, les seules occurrences de h doivent provenir de $\lambda(g)$: le coefficient de h est $r\mu_g$. Or, $\lambda(f)$ vérifie la même hypothèse que f, puisque $\mathcal{C}$ est stable par addition. Puisque les $X_{i_\alpha \alpha}$ sont deux-à-deux distincts, on peut déduire de l'argument ci-dessus que $r\mu_g = 0$. Ainsi, $\mu_g = 0$ ou g est une puissance p-ième. D'où le résultat. □

Remarque 5.6.3. Les crochets et les puissances p-ièmes vérifient la condition de la proposition 5.6.2. Pour les crochets, ceci découle du fait que la trace d'un crochet est une somme de crochets. Pour les puissances p-ièmes, on remarque que si $M = \sum m_i \mathbf{e}_{i,i+1} \in M_n(R)$, avec R un anneau associatif de caractéristique p, alors $M^p = (\prod m_i) \cdot \mathbb{1}_p$, et $\mathrm{Tr}(\mathbb{1}_p) = p \cdot 1 = 0$ dans $\Bbbk$. Si $k = pl$ et $f = (X_{i_1} \cdots X_{i_l})^p$, on applique cette remarque à $M = C_{i_1} \cdots C_{i_l}$ (avec $C_{i_\alpha} \in \mathcal{C}$), vue comme une matrice $p \times p$ à coefficients dans $M_l(\Bbbk)$.

Au vu de la proposition 5.6.1, en caractéristique p, on considérera la trace comme prenant ses valeurs dans $C_*^{[p]}V = TV/([TV,TV] + (TV)^p)$, qui est le quotient des puissances cycliques C_*V par les puissances p-ièmes. La conclusion de la proposition 5.6.1 devient ainsi : $\mathrm{Tr}\,(J - \mathbb{1}) = 0 \in C_*^{[p]}V$.

5.6.2 Algèbre linéaire

Les constructions du paragraphe 3.2 s'adaptent sans problème dans le cadre p-restreint : une dérivation p-restreinte de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ est une section de la projection $\mathfrak{g}^o \rtimes \mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}$, où $\mathfrak{g}^o$ est le module sous-jacent à $\mathfrak{g}$, muni de la structure d'algèbre de Lie p-restreinte triviale. Par conséquent, l'algèbre de Lie p-restreinte libre $\mathfrak{L}^{[p]}V$ vérifie la propriété universelle pour les dérivations p-restreintes, d'où l'on déduit un isomorphisme :

$$\mathrm{Der}^{[p]}\left(\mathfrak{L}^{[p]}V\right) \cong V^* \otimes \mathfrak{L}^{[p]}V.$$

Considérons le morphisme de Johnson

$$(\tau^{[p]})' : \mathcal{L}^{[p]}\left(IA_n^{[p]}\right) \longrightarrow \mathrm{Der}_*^{[p]}\left(\mathcal{L}^{[p]}(F_n)\right) \cong V^* \otimes \mathfrak{L}^{[p]}V.$$

Si $p \neq 2$, le morphisme $(\tau_1^{[p]})'$ est surjectif. En effet, l'algèbre de Lie libre (sur $\mathbb{F}_p$) $\mathfrak{L}V$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie p-restreinte libre $\mathfrak{L}^{[p]}V$, et cette inclusion est un isomorphisme en degré premier à p. En particulier, $\mathfrak{L}_2^{[p]}V \cong V^* \otimes \Gamma^2 V$, dont une base est formée par l'image des générateurs canoniques de IA_n (cf. la preuve de la proposition 3.2.2).

De plus, $\mathcal{L}^{[p]}\left(IA_n^{[p]}\right)$ est engendré en degré 1 en tant qu'algèbre de Lie p-restreinte (proposition 2.5.1). Par conséquent, l'image de τ' est exactement la sous-algèbre de Lie p-restreinte engendrée en degré 1 de $\mathrm{Der}_*^{[p]}(\mathfrak{L}^{[p]}V)$.

Le lecteur peut vérifier aisément que l'analogue p-restreint de la proposition 5.4.6 est vérifé : la trace obtenue définie par le calcul différentiel libre est la composée du morphisme de Johnson $\tau_k : \mathcal{L}_k(\mathcal{A}_*^{[p]}(F_n)) \to \mathrm{Der}_k^{[p]}(\mathfrak{L}^{[p]}V) \cong V^* \otimes \mathfrak{L}_{k+1}^{[p]}V$ avec la trace de Morita-Satoh :

$$\mathrm{Tr}_M : V^* \otimes \mathfrak{L}_{k+1}^{[p]}V \xrightarrow{\iota} V^* \otimes V^{\otimes k+1} \xrightarrow{\Phi} V^{\otimes k} \xrightarrow{\pi} C_k^{[p]}V,$$

où ι et π sont les applications canoniques.

Notation 5.6.4. Soit $\mathfrak{I}^{[p]}$ l'image de $(\tau^{[p]})'$, c'est-à-dire la sous-algèbre de Lie p-restreinte de $\mathrm{Der}(\mathfrak{L}V)$ engendrée en degré 1.

La proposition suivante peut être vue comme une conséquence de la proposition 5.6.1 :

Proposition 5.6.5. *Pour tout* $k \geqslant 2$, $\mathrm{Tr}_M(\mathfrak{I}_k^{[p]}) = \{0\}$.

Considérons le sous-espace $\mathrm{Der}_{\mathcal{L}V}^{[p]}(\mathcal{L}^{[p]}V)$ des dérivations p-restreintes de $\mathfrak{L}^{[p]}V$ qui stabilisent l'algèbre de Lie libre (sur $\mathbb{F}_p$) $\mathcal{L}V \subset \mathcal{L}^{[p]}V$. C'est une sous-algèbre de Lie p-restreinte de $\mathrm{Der}^{[p]}(\mathcal{L}^{[p]}V)$. Puisque toute dérivation de $\mathfrak{L}V$ s'étend en une unique dérivation p-restreinte de $\mathcal{L}^{[p]}V$, cette sous-algèbre est isomorphe à $\mathrm{Der}(\mathfrak{L}V)$. Sous l'identification de $\mathrm{Der}^{[p]}(\mathcal{L}^{[p]}V)$ avec le module gradué $V^* \otimes \mathfrak{L}^{[p]}V$, elle correspond exactement à $V^* \otimes \mathfrak{L}V$. Par conséquent, si $p \neq 2$, cette inclusion est un isomorphisme en degré 1. Par conséquent :

$$\mathfrak{I}^{[p]} \subseteq \mathrm{Der}_{\mathcal{L}V}^{[p]}(\mathcal{L}^{[p]}V).$$

On déduit de cette inclusion qu'il n'y a **pas de surjectivité stable dans ce cas**. On peut en effet facilement exhiber des automorphismes dont la dérivation associée ne préserve pas $\mathcal{L}V$. Par exemple, soit w un mot de $\Gamma_k(F_n)$ ne contenant pas d'occurrence de x_1. L'automorphisme φ, défini par $x_1 \mapsto w^p x_1$ et $x_i \mapsto x_i$ si $i \neq 1$, est évidemment dans $\mathcal{A}_{pk-1}^{[p]}$, mais $\tau(\varphi) = X_1^* \otimes (\overline{w-1})^p$ envoie X_1 en-dehors de $\mathfrak{L}V$.

5.6.3 Conoyau stable de i_*

On donne tout de même des bornes sur le manque de surjectivité stable dans le cas p-restreint.

Soit $k \geqslant 2$. Comme au paragraphe 5.5.3, on a un diagramme commutatif aux lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
\bar{\mathfrak{I}}_k \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "\phi"] & V^* \otimes \mathfrak{L}_{k+1}V \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\Phi"] & X_k \arrow[d, dashed, "\overline{\Phi}"] \\
{[TV, TV]_k} \arrow[r, hook] & V^{\otimes k} \arrow[r, two heads, "\pi"] & C_k V.
\end{tikzcd}$$

Ici, V désigne $F_n^{ab} \otimes \mathbb{F}_p$, et $\bar{\mathfrak{I}}_* = \mathfrak{I}_* \otimes \mathbb{F}_p$ est la sous-algèbre de Lie engendrée en degré 1 dans $\mathrm{Der}(\mathfrak{L}V)$. L'espace X_k est simplement le quotient de $V^* \otimes \mathfrak{L}_{k+1}V$ par $\bar{\mathfrak{I}}_k$.

C'est en fait un diagramme un peu différent qui nous intéresse :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{I}_k^{[p]} \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "\phi"] & V^* \otimes \mathfrak{L}_{k+1}V \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\Phi"] & X'_k \arrow[d, dashed, "\overline{\Phi}"] \\
{[TV, TV]_k + (TV)^p} \arrow[r, hook] & V^{\otimes k} \arrow[r, two heads, "\pi"] & C_k^{[p]} V.
\end{tikzcd}$$

On peut encore appliquer les calculs de [Sat12], et l'on obtient que si $n \geqslant k+2$, alors Φ est surjectif et $\ker \Phi \subseteq \bar{\mathfrak{I}}_k \subseteq \mathfrak{I}_k^{[p]}$. Seulement, contrairement à ce qui se passait auparavant, ϕ peut avoir un conoyau non trivial. On déduit tout de même de [Sat12] que son image contient les crochets : son conoyau ne peut provenir que des puissances p-ièmes. En particulier, il est concentré en les degrés divisibles par p. Notons K ce conoyau. La même application du lemme du serpent que dans la preuve de la proposition 5.5.6 donne que K est aussi le noyau de $\overline{\Phi}$, et que $\overline{\Phi}$ est surjectif.

Considérons à présent le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{I}_k^{[p]} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "\iota"] & V^* \otimes \mathfrak{L}_{k+1}V \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & X'_k \arrow[d, two heads, "\overline{\Phi}"] \\
\ker(\mathrm{Tr}_M)_k \arrow[r, hook] & V^* \otimes \mathfrak{L}_{k+1}^{[p]}V \arrow[r, two heads, "\mathrm{Tr}_M"] & C_k^{[p]} V.
\end{tikzcd}$$

Soit L le conoyau de l'inclusion du milieu. Alors $L = V^* \otimes (\mathfrak{L}_{k+1}^{[p]}V / \mathfrak{L}_{k+1}V)$ est concentré en degrés $k = pl - 1$ (avec $l \geqslant 1$). Le lemme du serpent donne donc une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathrm{coker}(\iota) \longrightarrow L \longrightarrow 0.$$

Puisque la trace $\mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}_M \circ \tau$ s'annule, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^{[p]}(IA_n^{[p]}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\tau'"'] & \mathcal{L}(\mathcal{A}_*^{[p]}) \arrow[d, hook, "\tau"] \\
 & \ker(\mathrm{Tr}_M).
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, le conoyau de i_* s'injecte dans le conoyau de ι. Nous avons ainsi prouvé :

Proposition 5.6.6. *Soit n un entier. Considérons seulement les degrés $k \leqslant n-2$. Le conoyau du morphisme canonique*

$$i_* : \mathcal{L}^{[p]}(IA_n^{[p]}) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}_*^{[p]}(F_n))$$

est concentré en degrés $k = pl-1$ et $k = pl$ (pour $l \geqslant 1$). Si $k = pl-1$, alors $\mathrm{coker}((i_*)_k)$ *s'injecte dans $V^* \otimes (\mathfrak{L}_{k+1}^{[p]}V/\mathfrak{L}_{k+1}V)$. Si $k = pl$, c'est un sous-quotient de $V^{\otimes l}$.*

Remarque 5.6.7. La puissance tensorielle $V^{\otimes l}$ qui apparaît dans la proposition est en fait le *twist de Frobenius* de $V^{\otimes l}$. Ceci est sans conséquence ici, puisque le morphisme de Frobenius est trivial sur $\mathbb{F}_p$, mais une (future) étude fonctorielle de la situation devra en tenir compte.

5.A Appendice : Trace de Morita-Satoh - Algèbre linéaire

Le but de cet appendice est de donner une démonstration directe de la proposition suivante (qui peut aussi être vue comme une conséquence de la proposition 5.5.1) :

Proposition 5.5.5. *Pour tout* $k \geqslant 2$, $\mathrm{Tr}(\mathfrak{I}_k) = \{0\}$.

Avant de démontrer la proposition, on donne une description explicite de la structure d'algèbre de Lie sur :

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{L}V) \cong \bigoplus_k V^* \otimes \mathfrak{L}_{k+1}V \cong V^* \otimes \mathfrak{L}V.$$

Pour cela, on préfère travailler dans l'algèbre $\mathrm{Der}(TV)$ des dérivations d'algèbre associative de TV. La propriété universelle de TV, valable également pour les dérivations, donne $\mathrm{Der}(TV) \cong V^* \otimes TV$, et l'inclusion canonique

$$V^* \otimes \mathfrak{L}V \hookrightarrow V^* \otimes TV$$

est un morphisme entre les deux algèbres de Lie considérées.

Autrement dit, toute dérivation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{L}V$ se prolonge de manière unique en une dérivation associative de TV, uniquement déterminée par sa restriction à V. Et ce de manière compatible au crochet, puisque la structure est donnée des deux côtés par :

$$[\partial, \partial'] = \partial \circ \partial' - \partial' \circ \partial.$$

Etant donnée $g : V \longrightarrow V^{\otimes k+1}$, la dérivation de TV associée, qu'on notera $g \star -$ est donnée par :

$$g \star (t_1 \otimes \cdots \otimes t_n) = \sum_\alpha t_1 \otimes \cdots \otimes g(t_\alpha) \otimes \cdots \otimes t_n.$$

Si on se donne $f : V \longrightarrow V^{\otimes l+1}$, on définit

$$g \star f := \left(\sum_{\alpha=0}^{l} \mathbb{1}^{\otimes \alpha} \otimes g \otimes \mathbb{1}^{\otimes l-\alpha} \right) \circ f.$$

La structure de Lie sur $V^* \otimes TV$ (donc sur $V^* \otimes \mathfrak{L}V$) s'écrit alors :

$$[f, g] = f \star g - g \star f.$$

Il s'agit à présent d'étudier l'action de la trace, en particulier celle de Φ.

Lemme 5.A.1. *Pour tous* f *et* g *dans* $H^* \otimes TV$, *on a*

$$\Phi([f, g]) \equiv f \star \Phi(g) - g \star \Phi(f) \pmod{[TV, TV]}.$$

Preuve. Soient

$$\begin{cases} f : V \longrightarrow V^{\otimes l+1} \\ g : V \longrightarrow V^{\otimes k+1}. \end{cases}$$

On calcule :

$$\Phi(f \star g) = \sum_{\alpha=0}^{k} \Phi\left(\left(\mathbb{1}^{\otimes \alpha} \otimes f \otimes \mathbb{1}^{\otimes k-\alpha} \right) \circ g \right).$$

Or, par définition de Φ :
$$\Phi((u \otimes \mathbb{1}) \circ g) = u(\Phi(g)).$$
Ceci est applicable aux termes pour lesquels $\alpha \neq k$, et l'on obtient :
$$\Phi(f \star g) = \underbrace{\left(\sum_{\alpha=0}^{k-1} \mathbb{1}^{\otimes \alpha} \otimes f \otimes \mathbb{1}^{\otimes k-\alpha}\right) \circ \Phi(g)}_{f \star \Phi(g)} + \Phi\left((\mathbb{1}^{\otimes k} \otimes f) \circ g\right).$$

Pour l'étude du second terme, écrivons f et g sous la forme :
$$g = \sum_{i=1}^{n} X_i^* \otimes g(X_i) \text{ et } f = \sum_{j=1}^{n} X_j^* \otimes f(X_j).$$
Par définition de Φ :
$$(\mathbb{1}^{\otimes k} \otimes f)(X) = \sum_{j=1}^{n} f(X_j)\Phi(X_j^* \otimes X),$$
ce qui implique directement, en composant :
$$(\mathbb{1}^{\otimes k} \otimes f) \circ g = \sum_{i,j \leqslant n} X_i^* \otimes f(X_j)\Phi(X_j^* \otimes g(X_i)).$$
On peut ainsi expliciter le second terme :
$$\Phi\left((\mathbb{1}^{\otimes k} \otimes f) \circ g\right) = \sum_{i,j \leqslant n} \Phi(X_i^* \otimes f(X_j))\Phi(X_j^* \otimes g(X_i)).$$

Tout ceci donne finalement :
$$\Phi([f, g]) = f \star \Phi(g) - g \star \Phi(f) + \overbrace{\sum_{i,j \leqslant n} \left[\Phi(X_i^* \otimes f(X_j)), \Phi(X_j^* \otimes g(X_i))\right]}^{\in [TV, TV]},$$
ce qui achève le calcul. □

On peut à présent prouver la proposition :

Preuve de 5.5.5. Montrons par récurrence sur $k \geqslant 2$ que
$$\Phi(\mathfrak{I}_k) \subseteq [TV, TV].$$
Par abus de notation, on notera encore K_{ij} et K_{ijk} pour $\tau'(K_{ij})$ et $\tau'(K_{ij})$ respectivement (avec les notations de 3.2.2), c'est-à-dire pour $x_i^* \otimes [x_j, x_i]$ et $x_i^* \otimes [x_j, x_k]$. Ce sont des générateurs de $\mathfrak{I}$. Un calcul direct donne :
$$\begin{cases} \Phi(K_{ijk}) = 0 & (i, j, k \text{ distincts}), \\ \Phi(K_{ij}) = x_j. \end{cases}$$
Par conséquent, si g est un des générateurs ci-dessus et $f \in H^* \otimes \mathfrak{L}_{\geqslant 2} H$, alors $f \star \Phi(g)$ est soit nul, soit égal à $f \star x_j = f(x_j) \in \mathfrak{L}V \subseteq [TV, TV]$, donc est toujours nul modulo $[TV, TV]$.

En considérant le cas où f et g sont parmi les K_{ij} et les K_{ijk}, on a bien :

$$\Phi\left([f,g]\right) \equiv f \star \Phi(g) - g \star \Phi(f) \equiv 0 \pmod{[TV,TV]},$$

ce qui montre le cas $k=2$.

Supposons à présent que g soit parmi ces générateurs et que $f \in V^* \otimes \mathfrak{L}_{k-1}V$. Par hypothèse de récurrence, $\Phi(f) \in [TV,TV]$. Alors :

$$\Phi\left([f,g]\right) \equiv -g \star \Phi(f) \pmod{[TV,TV]},$$

mais puisque $g \star (-)$ est une dérivation, $g \star \Phi(f)$ est aussi dans $[TV,TV]$, ce qui achève la récurrence. □

Bibliographie

[And65] Stylianos Andreadakis. On the automorphisms of free groups and free nilpotent groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 15 :239–268, 1965. 2

[Bar13] Laurent Bartholdi. Automorphisms of free groups. I. *New York J. Math.*, 19 :395–421, 2013. 2, 106, 109

[Bar16] Laurent Bartholdi. Automorphisms of free groups. I. — erratum [MR3084710]. *New York J. Math.*, 22 :1135–1137, 2016. 2

[Bau71] Gilbert Baumslag. *Lecture notes on nilpotent groups.* Regional Conference Series in Mathematics, No. 2. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1971. 14

[BB04] Francis Borceux and Dominique Bourn. *Mal'cev, protomodular, homological and semi-abelian categories*, volume 566 of *Mathematics and its Applications.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004. 22, 25, 27

[BB05] Joan S. Birman and Tara E. Brendle. Braids : a survey. In *Handbook of knot theory*, pages 19–103. Elsevier B. V., Amsterdam, 2005. 87

[BB07] Francis Borceux and Dominique Bourn. Split extension classifier and centrality. In *Categories in algebra, geometry and mathematical physics*, volume 431 of *Contemp. Math.*, pages 85–104. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007. 24

[BBM07] Mladen Bestvina, Kai-Uwe Bux, and Dan Margalit. Dimension of the Torelli group for $\mathrm{Out}(F_n)$. *Invent. Math.*, 170(1) :1–32, 2007. 1, 76

[BEH08] Laurent Bartholdi, Bettina Eick, and René Hartung. A nilpotent quotient algorithm for certain infinitely presented groups and its applications. *Internat. J. Algebra Comput.*, 18(8) :1321–1344, 2008. 2

[Bir74] Joan S. Birman. *Braids, links, and mapping class groups.* Princeton University Press, Princeton, N.J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974. Annals of Mathematics Studies, No. 82. 87, 88, 89, 92

[BJK05] Francis Borceux, George Janelidze, and Gregory M. Kelly. On the representability of actions in a semi-abelian category. *Theory Appl. Categ.*, 14 :No. 11, 244–286, 2005. 24

[BLGM90] Roger M. Bryant, Frank Levin, Chander K. Gupta, and Horace Y. Mochizuki. Nontame automorphisms of free nilpotent groups. *Comm. Algebra*, 18(11) :3619–3631, 1990. 7, 109

[BMS67] Hyman Bass, John Milnor, and Jean-Pierre Serre. Solution of the congruence subgroup problem for $\mathrm{SL}_n\,(n \geqslant 3)$ and $\mathrm{Sp}_{2n}\,(n \geqslant 2)$. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (33) :59–137, 1967. 20

[Bou61] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fascicule XXVIII. Algèbre commutative. Chapitre 3 : Graduations, filtrations et topologies. Chapitre*

4 : Idéaux premiers associés et décomposition primaire. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1293. Hermann, Paris, 1961. 27

[CE16] Michael Chapman and Ido Efrat. Filtrations of free groups arising from the lower central series. *J. Group Theory*, 19(3) :405–433, 2016. 58

[CEFN14] Thomas Church, Jordan S. Ellenberg, Benson Farb, and Rohit Nagpal. FI-modules over Noetherian rings. *Geom. Topol.*, 18(5) :2951–2984, 2014. 112

[Coo15] James Cooper. Two mod-p Johnson filtrations. *J. Topol. Anal.*, 7(2) :309–343, 2015. 38, 60

[CP17] Thomas Church and Andrew Putamn. Generating the johnson filtration ii : finite generation. arXiv :1704.01529, 2017. 1

[CPVW08] Frederick R. Cohen, Jonathan N. Pakianathan, Vladimir V. Vershinin, and J. Wu. Basis-conjugating automorphisms of a free group and associated Lie algebras. In *Groups, homotopy and configuration spaces*, volume 13 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 147–168. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2008. 92, 94

[CV86] Marc Culler and Karen Vogtmann. Moduli of graphs and automorphisms of free groups. *Invent. Math.*, 84(1) :91–119, 1986. 1

[Dam17] Celeste Damiani. A journey through loop braid groups. *Expo. Math.*, 35(3) :252–285, 2017. 85, 93

[Dar68] Rex S. Dark. *On nilpotent products of groups of prime order*. PhD thesis, University of Cambridge, 1968. 51

[Dja16a] Aurélien Djament. Décomposition de hodge pour l'homologie stable des groupes d'automorphismes des groupes libres. arXiv :1510.03546, 2016. 1

[Dja16b] Aurélien Djament. Des propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux. *Fund. Math.*, 233(3) :197–256, 2016. 112

[DK92] G. Duchamp and D. Krob. The lower central series of the free partially commutative group. *Semigroup Forum*, 45(3) :385–394, 1992. 80

[DP16] Matthew B. Day and Andrew Putamn. On the second homology group of the torelli subgroup of $aut(f_n)$. arXiv :1408.6242v3, 2016. 1, 2

[DV15] Aurélien Djament and Christine Vespa. Sur l'homologie des groupes d'automorphismes des groupes libres à coefficients polynomiaux. *Comment. Math. Helv.*, 90(1) :33–58, 2015. 1

[EH17] Mikhail Ershov and Sue He. On finiteness properties of the johnson filtrations. arXiv :1703.04190, 2017. 1

[Fox53] Ralph H. Fox. Free differential calculus. I. Derivation in the free group ring. *Ann. of Math. (2)*, 57 :547–560, 1953. 98

[Fra33] Hermann Frasch. Die Erzeugenden der Hauptkongruenzgruppen für Primzahlstufen. *Math. Ann.*, 108(1) :229–252, 1933. 20

[Fre17] Benoit Fresse. *Homotopy of operads and Grothendieck-Teichmüller groups. Part 1*, volume 217 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017. The algebraic theory and its topological background. 89

[Gal11] Søren Galatius. Stable homology of automorphism groups of free groups. *Ann. of Math. (2)*, 173(2) :705–768, 2011. 1

[Gol81] Deborah L. Goldsmith. The theory of motion groups. *Michigan Math. J.*, 28(1) :3–17, 1981. 85, 92, 93, 94

[Gro52] Emil Grosswald. On the parabolic generators of the principal congruence subgroups of the modular group. *Amer. J. Math.*, 74 :435–443, 1952. 20

[Hal34] Philip Hall. A contribution to the theory of groups of prime-power order. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 36 :29–95, 1934. 52

[Hat83] Allen E. Hatcher. A proof of the Smale conjecture, $\mathrm{Diff}(S^3) \simeq \mathrm{O}(4)$. *Ann. of Math. (2)*, 117(3) :553–607, 1983. 93

[Hig69] Philip J. Higgins. Baer invariants and the Birkhoff-Witt theorem. *J. Algebra*, 11 :469–482, 1969. 77, 78

[HL11] Manfred Hartl and Bruno Loiseau. A characterization of finite cocomplete homological and of semi-abelian categories. *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.*, 52(1) :77–80, 2011. 22, 25, 42

[HM00] Nathan Habegger and Gregor Masbaum. The Kontsevich integral and Milnor's invariants. *Topology*, 39(6) :1253–1289, 2000. 90

[HM17] Kazuo Habiro and Gwenael Massuyeau. Generalized johnson homomorphisms for extended n-series. *arXiv :1707.07428*, 2017. 5, 29, 58, 60, 62

[HV98] Allen Hatcher and Karen Vogtmann. Cerf theory for graphs. *J. London Math. Soc. (2)*, 58(3) :633–655, 1998. 1

[Jac41] Nathan Jacobson. Restricted Lie algebras of characteristic p. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 50 :15–25, 1941. 58, 60, 78

[Joh83] Dennis Johnson. A survey of the Torelli group. In *Low-dimensional topology (San Francisco, Calif., 1981)*, volume 20 of *Contemp. Math.*, pages 165–179. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983. 32, 84

[Kal50a] Léo Kaloujnine. Sur quelques propriétés des groupes d'automorphismes d'un groupe abstrait. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 230 :2067–2069, 1950. 15

[Kal50b] Léo Kaloujnine. Sur quelques propriétés des groupes d'automorphismes d'un groupe abstrait. (Généralisation d'un theorème de M. Ph. Hall). *C. R. Acad. Sci. Paris*, 231 :400–402, 1950. 15

[Kaw06] Nariya Kawazumi. Cohomological aspects of magnus expansions. *arXiv :math/0505497*, 2006. 72, 75

[KM97] Sava Krstić and James McCool. The non-finite presentability of $\mathrm{IA}(F_3)$ and $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}[t, t^{-1}])$. *Invent. Math.*, 129(3) :595–606, 1997. 1

[Koh85] Toshitake Kohno. Série de Poincaré-Koszul associée aux groupes de tresses pures. *Invent. Math.*, 82(1) :57–75, 1985. 89

[Laz54] Michel Lazard. Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3)*, 71 :101–190, 1954. 4, 11, 15, 17, 47, 58, 71, 72

[Lop14] Jonathan Lopez. Lie algebras and cohomology of congruence subgroups for $SL_n(R)$. *J. Pure Appl. Algebra*, 218(2) :256–268, 2014. 19

[LS76] Ronnie Lee and Robert H. Szczarba. On the homology and cohomology of congruence subgroups. *Invent. Math.*, 33(1) :15–53, 1976. 4, 20

[Mas07] Gwenael Massuyeau. Finite-type invariants of 3-manifolds and the dimension subgroup problem. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 75(3) :791–811, 2007. 79

[McC86] J. McCool. On basis-conjugating automorphisms of free groups. *Canad. J. Math.*, 38(6) :1525–1529, 1986. 92

[Mil57] John Milnor. Isotopy of links. Algebraic geometry and topology. In *A symposium in honor of S. Lefschetz*, pages 280–306. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957. 90

[MKS04] Wilhelm Magnus, Abraham Karrass, and Donald Solitar. *Combinatorial group theory*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, second edition, 2004. Presentations of groups in terms of generators and relations. 14, 72

[ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998. 14

[Mor93] Shigeyuki Morita. Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces. *Duke Math. J.*, 70(3) :699–726, 1993. 7

[MP09] Roman Mikhailov and Inder Bir Singh Passi. *Lower central and dimension series of groups*, volume 1952 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009. 18

[MS17] Gwenael Massuyeau and Takuya Sakasai. Morita's trace maps on the group of homology cobordisms. *arXiv :1606.08244*, 2017. 3, 109

[MW02] Jacob Mostovoy and Simon Willerton. Free groups and finite-type invariants of pure braids. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 132(1) :117–130, 2002. 90

[Nie24] Jakob Nielsen. Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen. *Math. Ann.*, 91(3-4) :169–209, 1924. 1, 75

[Ohk82] Tetsusuke Ohkawa. The pure braid groups and the Milnor $\bar{\mu}$-invariants of links. *Hiroshima Math. J.*, 12(3) :485–489, 1982. 90

[Pas79] Inder Bir S. Passi. *Group rings and their augmentation ideals*, volume 715 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979. 36, 46, 47, 51, 52, 56, 57, 58, 64, 67, 68, 79

[Pas85] Donald S. Passman. *The algebraic structure of group rings*. Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, FL, 1985. Reprint of the 1977 original. 47, 48, 50, 52, 53, 61

[PS04] Stefan Papadima and Alexander I. Suciu. Chen Lie algebras. *Int. Math. Res. Not.*, (21) :1057–1086, 2004. 80

[Qui68] Daniel G. Quillen. On the associated graded ring of a group ring. *J. Algebra*, 10 :411–418, 1968. 79

[Reu03] Christophe Reutenauer. Free Lie algebras. In *Handbook of algebra, Vol. 3*, pages 887–903. North-Holland, Amsterdam, 2003. 74

[Rip72] Eliyahu Rips. On the fourth integer dimension subgroup. *Israel J. Math.*, 12 :342–346, 1972. 18

[Rot95] Joseph J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*, volume 148 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1995. 32

[RWW17] Oscar Randal-Williams and Nathalie Wahl. Homological stability for automorphism groups. *Adv. Math.*, 318 :534–626, 2017. 1

[San72] Robert Sandling. The dimension subgroup problem. *J. Algebra*, 21 :216–231, 1972. 64

[Sat12] Takao Satoh. On the lower central series of the IA-automorphism group of a free group. *J. Pure Appl. Algebra*, 216(3) :709–717, 2012. 7, 102, 111, 115

[Sat17] Takao Satoh. On the Andreadakis conjecture restricted to the "lower-triangular" automorphism groups of free groups. *J. Algebra Appl.*, 16(5) :1750099, 31, 2017. 3, 6, 84, 86

[Ser77] Jean-Pierre Serre. *Arbres, amalgames,* SL_2. Société Mathématique de France, Paris, 1977. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46. 41

[Sta65] John Stallings. Homology and central series of groups. *J. Algebra*, 2 :170–181, 1965. 36, 37, 58

[Wat72] Frank Wattenberg. Differentiable motions of unknotted, unlinked circles in 3-space. *Math. Scand.*, 30 :107–135, 1972. 92

[Zas39] Hans Zassenhaus. Ein Verfahren, jeder endlichen p-Gruppe einen Lie-Ring mit der Charakteristik p zuzuordnen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 13(1) :200–207, 1939. 58

Index