

Développement de solveurs non linéaires robustes pour la méthode des éléments finis appliquée à des problèmes électromagnétiques basses fréquences

Thèse de
Doctorat de l'Université de Lille

Spécialité : **Génie électrique**

par

Riheb Cherif

Soutenue le 16 Décembre 2019 devant le jury composé de :

M. Nelson SADOWSKI	Président, rapporteur	Professeur à l'UFSC
Mme Amel BEN ABDA	Examinatrice	Professeur à l'ENIT
M. Fabien SIXDENIER	Rapporteur	Maître de conférences à l'Université Lyon 1
Mme Natacha BEREUX	Invitée	Ingénieur de recherche à EDF R&D
M. Yvonnick LE MENACH	Directeur de thèse	Professeur à l'Université de Lille
M. Frédéric GUYOMARCH	Encadrant de thèse	Maître de conférences à l'Université de Lille
M. Zuqi TANG	Encadrant de thèse	Maître de conférences à l'Université de Lille

Table des matières

Contexte et enjeux de la thèse	12
Introduction générale	14
1 Modélisation des problèmes électromagnétiques	19
1.1 Les équations de Maxwell	20
1.2 Lois de comportement	20
1.2.1 Loi d'Ohm	21
1.2.2 Loi de comportement magnétique	21
1.2.3 Les modèles de comportement	22
1.2.3.1 Modèles isotropes	22
1.2.3.2 Modèles anisotropes	23
1.2.3.3 Modèles hystérétiques	28
1.2.3.4 Choix du modèle	31
1.3 Conditions aux limites	32
1.4 Espaces fonctionnels continus	33
1.5 Les formulations de la magnétostatique	35
1.5.1 Formulation en potentiel scalaire magnétique	35
1.5.2 Formulation en potentiel vecteur magnétique	36
1.6 Les formulations de la magnétodynamique	36
1.6.1 Formulation magnétique $\mathbf{T} - \Omega$	37
1.6.2 Formulation électrique $\mathbf{A} - \varphi$	37
1.7 Les formulations couplées circuit	38

1.7.1	Les différentes méthodes de couplage	38
1.7.2	Le couplage électrique	39
1.7.2.1	Les formulations à courant imposé	39
1.7.2.2	Les formulations à tension imposée	40
1.8	Domaine discret	41
1.8.1	Fonction de base	43
1.8.2	Espaces fonctionnels discrets	44
1.8.3	Les formulations discrètes	44
1.9	Conclusion	46
2	État de l'art sur les solveurs non linéaires	47
2.1	Résolution des problèmes linéaires creux	48
2.1.1	Les méthodes directes	48
2.1.2	Les méthodes itératives	49
2.1.2.1	Les méthodes de Krylov	50
2.1.2.2	Les méthodes de relaxation	52
2.1.3	Conclusion	53
2.2	Résolution des problèmes non linéaires	54
2.2.1	La méthode du point fixe	54
2.2.1.1	Description de la méthode	54
2.2.1.2	Exemple	55
2.2.1.3	Étude de convergence	57
2.2.1.4	Avantages et inconvénients	58
2.2.2	La méthode de Newton-Raphson	58
2.2.2.1	Description de la méthode	58
2.2.2.2	Exemple 1	59
2.2.2.3	Étude de la convergence	61
2.2.2.4	Exemple 2	61
2.2.2.5	Avantages et inconvénients	63
2.2.3	Les techniques de globalisation	64
2.2.3.1	Les méthodes de recherche linéaire	64
	Recherche exacte	65
	Recherche Inexacte	67
2.2.3.2	Les méthode à régions de confiance	71
	Les méthodes à régions de confiance classiques	72
	Newton-région de confiance	73
2.2.3.3	Tests numériques	77

2.2.4	Accélération de la méthode	80
2.2.4.1	La méthode de Newton-Inexacte	80
	Description de la méthode	80
	Étude de convergence	80
	Tests numériques	83
2.2.4.2	La méthode de Quasi-Newton	85
	Description de la méthode	86
	Tests numériques	89
2.2.5	Conclusion	90
3	ISP-Newton	92
3.1	ISP-Newton en 2D	93
3.1.1	ISP-Newton pour des lois d'aimantations isotropes non linéaires	93
3.1.1.1	Applications	95
	Transformateur	95
	T.E.A.M Workshop 13	97
	T.E.A.M Workshop 13 modifié	103
3.2	ISP-Newton en 3D	106
3.2.1	Magnétostatique 3D : en potentiel vecteur A	106
3.2.1.1	Applications	106
	T.E.A.M. Workshop 13	106
	T.E.A.M Workshop 13 modifié	113
3.2.2	Magnétostatique 3D : en potentiel scalaire	115
3.2.2.1	Applications	116
	T.E.A.M. Workshop 13	116
	T.E.A.M. Workshop 13 modifié	120
3.2.3	Le couplage circuit en présence de régions ferromagnétiques .	121
3.2.3.1	Application pour le couplage circuit en potentiel vec-	
	teur magnétique	121
	Transformateur triphasé	121
	Maquette du turbo-alternateur 26 kW	125
3.2.3.2	Application pour couplage circuit en potentiel sca-	
	laire magnétique	127
	Turbo-alternateur 1400 MW (2D extrudée)	127
3.2.4	La magnétodynamique	128
3.2.4.1	Application	129
3.3	Conclusion	131

Conclusion générale	134
A Algorithmes de résolution linéaires	137
A.1 LU	137
A.2 Gradient conjugué	138
A.3 GMRES	139
A.4 BiCGSTAB	140
A.5 Méthode de Jacobi	141
A.6 Gauss-Seidel	141
A.7 Relaxation	142
B Développement mathématique du calcul de la jacobienne	143
B.1 En potentiel scalaire magnétique	143
B.2 En potentiel vecteur magnétique	144
C Résultats de calculs pour la loi de Fröhlich en 2D	149
C.1 Formulation en potentiel vecteur magnétique	150
C.1.1 Exemple 1 : Transformateur	150
C.1.1.1 Newton-classique vs ISP-Newton	150
C.1.2 Exemple 2 : T.E.A.M Workshop 13	150
C.1.2.1 Newton-classique vs ISP-Newton	150
C.1.2.2 Newton-Inexacte vs ISP-Newton-Inexacte	150
C.1.2.3 Quasi-Newton vs ISP-Quasi-Newton	150
C.1.3 Exemple 3 : T.E.A.M Workshop 13 modifié	153
C.1.3.1 Newton-classique vs ISP-Newton	153
D Résultats de calculs pour la loi de Fröhlich en 3D	154
D.1 Formulation en potentiel vecteur magnétique	155
D.1.1 Exemple 1 : T.E.A.M. Workshop 13	155
D.1.1.1 Newton-classique vs ISP-Newton	155
D.1.1.2 Newton-Inexacte vs ISP-Newton-Inexacte	157
D.1.1.3 Quasi-Newton vs ISP-Quasi-Newton	157
D.2 Formulation en potentiel scalaire magnétique	157
D.2.1 Exemple 1 : T.E.A.M. Workshop 13	157
D.2.1.1 Newton-classique vs ISP-Newton	157
D.2.1.2 Newton-Inexacte vs ISP-Newton-Inexact	157
D.2.1.3 Quasi-Newton vs ISP-Quasi-Newton	160
Résumé	170

Abstract

171

Table des figures

1.1	Comparaison des lois de comportement.	23
1.2	Notations.	24
1.3	Principe de modèle des deux axes.	25
1.4	Schéma elliptique pour \mathbf{H} de norme constante.	26
1.5	Schéma elliptique avec rotation d'axes	27
1.6	Comparaison entre les modèles.	28
	(a) Matériau de référence	28
	(b) Modèle conventionnel	28
	(c) Modèle elliptique	28
	(d) Modèle elliptique avec rotation des axes	28
1.7	Cycle d'hystérésis.	29
1.8	Modèle de Rayleigh	30
1.9	Cycle élémentaire du dipôle	30
1.10	Courbe de première aimantation et courbe anhystérétique.	32
1.11	Domaine d'étude D	33
1.12	Exemple d'une maille de circuit électrique.	40
1.13	Types d'éléments de discrétisation disponibles dans code_Carmel.	43
2.1	L'élimination de m relie tous ses voisins.	49
2.2	Effet de technique de renumérotation sur le phénomène de remplissage.	49
2.3	Méthode de point fixe.	55
2.4	Convergence de la méthode de Newton.	60
2.5	Loi de comportement du matériau ferromagnétique.	62

2.6	Maillage du problème magnétostatique non linéaire.	63
2.7	Règles de Cauchy et de Curry.	66
2.8	Dichotomie	66
2.9	Règles d'Armijo.	68
2.10	Règle de Wolfe.	70
2.11	La méthode à régions de confiance.	73
2.12	La méthode de Newton-classique vs Newton-Armijo.	77
2.13	Convergence de différents algorithmes.	79
2.14	Illustration de l'oversolving.	84
	(a) Gradient conjugué avec précision constante	84
	(b) Gradient conjugué avec précision variable	84
2.15	Convergence pour différentes méthodes de Newton-Krylov.	85
2.16	Convergence pour différentes méthodes de Quasi-Newton.	89
3.1	Maillage du problème magnétostatique non linéaire.	96
3.2	Induction B	97
	(a) Distribution de l'induction magnétique	97
	(b) Distribution de la norme de l'induction magnétique par élément	97
3.3	Maillage du problème magnétostatique non linéaire.	97
3.4	Interprétation physique de premier point de départ pour les solveurs non linéaires.	99
	(a) Distribution de l'induction magnétique pour $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	99
	(b) Loi de comportement	99
	(c) Distribution de l'induction magnétique pour $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	99
	(d) Loi de comportement	99
3.5	Convergence de différents algorithmes pour 2500 At.	101
3.6	Convergence de différents algorithmes.	102
3.7	Maillage de problème T.E.A.M Workshop 13 modifié.	104
3.8	Structure de T.E.A.M. Workshop Problem 13.	107
3.9	Différents maillages utilisés pour T.E.A.M. Workshop Problem 13.	107
	(a) Maillage 1	107
	(b) Maillage 2	107
	(c) Maillage 3	107
3.10	Comportement de convergence pour différents algorithmes pour 3000 At.	110
	(a) Maillage 2	110
	(b) Maillage 3	110

3.11	Convergence de différents algorithmes pour le maillage 2.	112
3.12	Convergence de différents algorithmes.	113
3.13	Distribution d'induction magnétiques pour différentes valeurs du courant.	114
	(a) 1000 At	114
	(b) 1300 At	114
	(c) 1500 At	114
	(d) 1700 At	114
	(e) 2000 At	114
	(f) 2500 At	114
	(g) 3000 At	114
	(h) 5000 At	114
3.14	T.E.A.M Workshop 13 modifié.	115
3.15	Résultats de convergence de différents algorithmes.	119
	(a) Newton-classique vs ISP-Newton	119
	(b) Newton-Inexacte vs ISP-Newton-Inexacte	119
3.16	T.E.A.M Workshop 13 modifié.	121
3.17	Distribution de l'induction magnétique pour différentes tailles de plaques.	122
	(a) Induction magnétique pour P30	122
	(b) Plaque P30	122
	(c) Induction magnétique pour P50	122
	(d) Plaque P50	122
	(e) Induction magnétique pour P70	122
	(f) Plaque P70	122
3.18	Structure de transformateur triphasé.	123
3.19	Maillage de transformateur triphasé.	124
3.20	Évolution des courants à vide dans les trois enroulements du primaire.	124
3.21	Distribution de l'induction magnétique à vide.	126
3.22	Structure de turbo-alternateur 26 kW.	127
3.23	Structure de turbo alternateur 1400 MW.	128
3.24	Distribution d'induction magnétique.	129
	(a) 1000 At	129
	(b) 1800 At	129
	(c) 5000 At	129
3.25	Structure de la plaque.	130
3.26	Résultats de calculs pour le $\delta^{\text{ème}}$ pas et pour le cas de 90 At.	131
	(a) Courbe de convergence pour les différents algorithmes	131

(b) Distribution de l'induction magnétique	131
B.1 Définition des repères et direction de \mathbf{B}	148
D.1 Exemple 1 : Newton-Inexacte vs ISP-Newton Inexacte pour 3000 At.	159

Liste des Algorithmes

2.1	Algorithme de point fixe.	57
2.2	Algorithme de Newton.	59
2.3	Modèle quadratique.	67
2.4	Algorithme de rebroussement pour la règle d'Armijo.	69
2.5	Newton-région de confiance.	76
2.6	Algorithme de Newton-Inexact.	81
2.7	Algorithme de la corde.	86
2.8	Algorithme de Broyden.	88
3.1	Algorithme de Newton appliqué à la formulation en potentiel vecteur A	93
3.2	Algorithme d'ISP Newton.	94
3.3	ISP-Newton avec couplage circuit appliqué à la formulation en potentiel vecteur A	123
A.1	Algorithme LU.	137
A.2	Algorithme de gradient conjugué.	138
A.3	Algorithme de GMRES.	139
A.4	Algorithme de BiCGSTAB.	140
A.5	Méthode de Jacobi.	141
A.6	Les itérations de Gauss-Seidel.	141
A.7	Les itérations de relaxation.	142

Contexte et enjeux de la thèse

Contexte scientifique

Cette thèse intitulée "Développement de solveurs non linéaires robustes pour la méthode des éléments finis appliquée à des problèmes électromagnétiques basse fréquence" s'est déroulée au sein du laboratoire d'électrotechnique et d'électronique de Puissance de Lille (L2EP) au sein de l'équipe Outils et Méthodes Numériques. Les travaux sont orientés autour de deux axes principaux : l'optimisation et la modélisation.

Pour améliorer le rendement des machines électriques, l'une des solutions les plus connues est d'utiliser des matériaux magnétiques de hautes performances qui sont malheureusement fortement non linéaires et anisotropes. Avant d'évaluer précisément le rendement, on s'appuie sur une modélisation éléments finis qui doit tenir compte de ces caractères induisant des difficultés numériques lors de la simulation. De plus, les temps de calcul peuvent devenir très lourds si la simulation concerne l'étude du comportement transitoire d'une machine en mouvement. Un solveur non linéaire robuste et performant permettrait d'étudier le fonctionnement de machine en régime extrême de sursaturation.

Contexte industriel

Un code de calcul par éléments finis dénommé `code_Carmel`¹ (Code Avancé de Recherche en Modélisation Électromagnétique) est utilisé. Ce code a été conçu ini-

1. <http://code-carmel.univ-lille1.fr>

tialement par l'Université des Sciences et Technologies de Lille au sein de l'équipe Modélisation du laboratoire L2EP puis co-développé en partenariat avec EDF R&D à partir du janvier 2006 dans le cadre d'un laboratoire commun, nommé LAMEL (Laboratoire Avancé de Modélisation du Matériel Électrique). Ce logiciel de calcul tridimensionnel est codé en Fortran 90. Il existe actuellement en deux versions : une version dite temporelle dédiée à la résolution des problèmes électromagnétiques quasi statiques et l'étude des machines électriques en régime transitoire et une autre version spectrale permettant de traiter les problèmes de la magnétoharmonique et étudier les machines électriques en régime permanent. Les deux versions de code_Carmel permettent de résoudre les formulations en potentiels (vecteurs et scalaires).

Financement

Cette thèse bénéficie d'un financement de 50 % de l'Université de Lille via la Maison de Simulation² et 50 % du Laboratoire de Modélisation du Matériel Électrique LAMEL³.

2. <http://maisondelasimulation.fr>

3. <http://lamel.univ-lille.fr>

Introduction générale

Les équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires apparaissent naturellement dans plusieurs domaines scientifiques qui vont de la physique à la chimie en passant par l'électromagnétisme. En effet, dans ce secteur, la simulation numérique joue un rôle primordial. Elle vise à déterminer le champ électromagnétique en réponse à une excitation dans un espace comportant des sources (apparaîtront soit comme un courant électrique, soit comme une surface caractérisée par un champ électrique) et des structures variées et hétérogènes (comme le corps humain, les systèmes électroniques, etc.). Cette tâche est assurée par différentes techniques et méthodes de modélisation permettant de résoudre des problèmes électromagnétiques, dans le domaine temporel ou fréquentiel. Parmi lesquelles, la méthode des éléments finis qui est devenue une approche de référence pour la résolution des problèmes électromagnétiques en basse fréquence⁴ [Gouri and Gilbert, 1984; Monk, 2003]. Elle s'adapte à des géométries complexes et permet de prendre en compte le comportement non linéaire des matériaux ferromagnétiques.

Dans le cas d'un problème stationnaire linéaire, la discrétisation par éléments finis conduit à la résolution d'un système linéaire creux qui s'avèrent très coûteux, car le nombre d'inconnues peut atteindre plusieurs dizaines de millions.

Diverses méthodes permettent de résoudre tels systèmes, on peut nommer les méthodes directes et itératives [Kelley, 1995]. Les méthodes directes sont connues pour leurs robustesses et leurs précisions mais elles deviennent très gourmandes en espace mémoire et engendrent un coût de calcul élevé pour des systèmes tridimensionnels

4. Basse fréquence désigne le fait qu'il n'y a pas une propagation d'onde dans le dispositif étudié autrement dit la longueur d'onde est grande par rapport à la longueur caractéristique du dispositif.

de grande dimension. Les méthodes itératives de type Krylov, employées depuis une trentaine d'années, sont généralement plus performante et efficaces dans les problèmes de grande taille. La plupart des méthodes itératives manipulent le système linéaire au travers de produits "matrice-vecteur", produits scalaires et additions de vecteurs dont le coût est proportionnel au nombre d'inconnues. Cependant, assurer une précision satisfaisante de la solution approchée peut nécessiter un nombre élevé d'itérations car la vitesse de convergence peut dépendre par exemple du conditionnement de la matrice. C'est pourquoi, elles sont le plus souvent utilisées sur un système préconditionné.

Les méthodes multigrilles [Falgout et al., 2006; Notay, 2008] constituent une autre classe de méthodes que l'on peut considérer comme hybrides de part l'utilisation conjointe des méthodes directes et itératives sur lesquelles elles reposent. Elles permettent alors d'obtenir une solution avec un nombre d'itérations réduit tout en bénéficiant d'une plus grande robustesse sur de nombreuses classes de problèmes. Elles présentent également l'avantage de pouvoir être utilisées aussi bien en solveur qu'en préconditionneur.

Quand les matériaux étudiés ont un comportement non linéaire, la discrétisation par élément finis conduit à la résolution d'un problème non linéaire dont on n'est pas capable de trouver une solution exacte. Il existe des algorithmes itératives qui vont résoudre ce problème par une succession de systèmes linéaires.

Deux méthodes sont couramment utilisées, la méthode de point fixe et la méthode de Newton.

La méthode de point fixe consiste à transformer le problème non linéaire en une succession de problèmes linéaires à partir d'une estimation initiale et construit une suite convergeant vers la solution [Miellou and Spiteri, 1985]. Cette méthode est connue par sa robustesse et sa simplicité de mise en œuvre. Cependant, elle a une vitesse de convergence très lente car elle est seulement linéaire et pour des problèmes de grandes dimensions, le temps de calcul devient inacceptable.

La méthode de Newton [Dennis and Schnabel, 1996; Kelley, 2003] se base sur le même principe de linéarisation que la méthode de point fixe et résout un problème linéarisé pour obtenir une nouvelle estimation de la solution. Si l'estimation initiale est choisie dans le bassin de convergence (suffisamment proche de la solution), la convergence sera quadratique. Cependant, à chaque itération, la méthode de Newton requiert la résolution d'un problème linéaire. Une partie très importante des temps de calcul sera donc consacré à l'évaluation de la matrice Jacobienne et la résolution de systèmes linéaires impliquant cette dernière matrice.

La convergence de la méthode de Newton est locale au sens que l'estimation initiale

est proche de la solution. Pour assurer une convergence à partir d'une estimation initiale quelconque, des méthodes de globalisation sont introduites. Si le pas de Newton n'aboutit pas à une décroissance suffisante du résidu non linéaire, les méthodes de globalisation vont assurer un certain progrès vers la solution. On peut citer les méthodes de recherche linéaires et les méthodes à régions de confiance.

Les méthodes à base de recherche linéaire estiment la direction de Newton puis choisissent une longueur de pas qui assure une réduction suffisante du résidu non linéaire [Brown and Saad, 1994; Kelley, 1995; Dennis and Schnabel, 1996]. Ces méthodes sont faciles à implémenter et à combiner avec n'importe quelle méthode localement convergente. Cependant, elle peut être coûteuse en CPU time à cause du nombre d'évaluations supplémentaires de la fonction qu'elle peut demander à chaque réduction du pas.

Les méthodes à régions de confiance contrairement aux méthodes de recherche linéaire choisissent l'amplitude maximale autorisée, connue sous le nom de rayon de confiance, calculent ensuite la direction et la meilleure longueur du pas et résolvent le problème à l'aide d'un modèle approché [Sorensen, 1982; Conn et al., 2000; Shi and Zhang, 2005]. La robustesse et la bonne performance de ces méthodes sont assurées par le bon choix de rayon de région de confiance.

Lorsqu'il s'agit de résoudre des systèmes qui dépassent le million d'inconnues comme c'est le cas pour les machines modélisées au sein du L2EP, une grande précision lors de la résolution du système impliquant la matrice Jacobienne n'est pas nécessaire surtout si l'estimation initiale est loin de la solution. Les méthodes de Newton-Inexactes [Dembo et al., 1982] sont introduites pour diminuer le coût de la résolution du système linéaire en approchant la solution par une méthode itérative souvent du type Krylov et en adaptant la précision de ce solveur grâce à des paramètres appelés termes forçants [Eisenstat and Walker, 1996]. Ces termes jouent un rôle important dans la robustesse. La convergence de la méthode reste alors super-linéaire.

La résolution d'un système linéaire impliquant la matrice Jacobienne devient de plus en plus coûteuse lorsque le système atteint des dimensions très élevées. C'est l'idée des méthodes de Quasi-Newton qui se basent sur un calcul approché de la Jacobienne à travers des formules récurrentes durant les itérations [Broyden et al., 1973; Dennis and Moré, 1977]. Prenant l'exemple des méthodes de Broyden [Broyden et al., 1973], le calcul de la Jacobienne est approché par des mises à jour successives d'une matrice fournie par l'utilisateur. Les méthodes de Quasi-Newton possèdent une vitesse de convergence super-linéaire.

Objectif de la thèse et stratégie d'organisation

L'objectif de cette thèse est d'implémenter des méthodes numériques adaptées aux calculs à hautes performances pour traiter les problèmes non linéaires. Ces méthodes seront des versions robustes et accélérées des méthodes existantes comme les méthodes du type Newton. Une première partie de la thèse sera consacrée à tester les différentes méthodes et stratégies numériques existantes. Une maquette éléments finis 2D a été développée sur Matlab durant ces travaux de thèse. Ce code permet de faire une simulation par éléments finis des dispositifs électrotechniques en effectuant une résolution qui prend en compte les lois de comportement non linéaires. Des versions robustes et accélérées des méthodes existantes ont été développées sur cette maquette et testées sur des exemples académiques. La deuxième partie de la thèse visera l'étude des modèles en 3D. Les différents solveurs non linéaires étudiés tels que les méthodes du type Newton (Newton-Inexacte et Quasi-Newton) avec les stratégies de globalisation telle que les méthodes de recherche linéaires, sont implémentées et testées dans `code_Carmel`. Les versions accélérées développées sont implémentées pour les quatre formulations employées dans le code : les deux formulations en potentiel vecteur et scalaire de la magnétostatique \mathbf{A} et Ω et les deux formulations de la magnétodynamique $(\mathbf{A} - \phi)$ et $(\mathbf{T} - \Omega)$. Ces nouveaux algorithmes sont testés et validés par des exemples académiques et industriels.

Articulation de l'étude

Ce mémoire est décomposé en trois chapitres. Le premier chapitre intitulé "Modélisation des problèmes électromagnétiques" décrit le comportement électromagnétique des dispositifs étudiés. Les modèles continus et numériques issus des équations de Maxwell seront donnés. Le deuxième chapitre présentera un état de l'art sur la résolution d'équations aux dérivées partielles. Dans la première partie de ce chapitre, on présentera rapidement les méthodes de résolution de systèmes linéaires, les méthodes directes et les méthodes itératives. La deuxième partie de chapitre se concentrera sur les méthodes de résolution non linéaires telles que la méthode de point fixe et la méthode de Newton, les techniques de globalisation ainsi que les méthodes d'accélération. Le dernier chapitre introduira le nouvel algorithme l'ISP-Newton permettant d'améliorer la robustesse et réduire les temps de calcul. En premier temps, cet algorithme sera validé à travers des exemples numériques dans le cas 2D pour différentes lois de comportements non linéaires. En deuxième temps, les performances de différents algorithmes proposées sont présentés en 3D à

travers des applications académiques et industrielles.

1

Modélisation des problèmes électromagnétiques

Ce chapitre consiste à construire une représentation simplifiée des dispositifs électrotechniques dans le cadre de l'électromagnétisme. Nous exposons tout d'abord les équations de Maxwell et leurs lois constitutives qui permettent de décrire les formulations mathématiques associées aux phénomènes électromagnétiques. La simulation numérique de ces phénomènes nécessite la représentation discrète des champs électriques et magnétiques. Cette étape est réalisée grâce à la méthode des éléments finis.

Sommaire

1.1	Les équations de Maxwell	20
1.2	Lois de comportement	20
1.3	Conditions aux limites	32
1.4	Espaces fonctionnels continus	33
1.5	Les formulations de la magnétostatique	35
1.6	Les formulations de la magnétodynamique	36
1.7	Les formulations couplées circuit	38
1.8	Domaine discret	41
1.9	Conclusion	46

1.1 Les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell, appelées aussi équations de Maxwell-Lorentz, permettent de formaliser les principes de bases des machines électriques utilisées en électrotechnique [Durand, 1953; Ciarlet, 2013]. Celles-ci décrivent de façon mathématique les liens et les interactions des charges électriques, le courant électrique, le champ électrique et le champ magnétique. Elles décrivent quantitativement les phénomènes électriques, magnétiques et lumineux [Griffiths, 2013].

Les répartitions spatiale et temporelle de champs électromagnétiques sont décrites par quatre fonctions associant un vecteur à tout point de l'espace $x \in \mathbb{R}^3$ et à tout instant $t \in \mathbb{R}$ tel que :

1. Le champ électrique $\vec{\mathbf{E}}(x, t)$ [$V.m^{-1}$].
2. Le champ magnétique $\vec{\mathbf{H}}(x, t)$ [$A.m^{-1}$].
3. L'induction électrique $\vec{\mathbf{D}}(x, t)$ [$C.m^{-2}$].

Afin d'alléger l'écriture, la dépendance en temps et en espace des inconnues est abandonnée et toutes les fonctions vectorielles seront notées $\mathbf{E} = \vec{\mathbf{E}}(x, t)$.

Les équations de Maxwell sous forme différentielle s'écrivent sous la forme suivante :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.1)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}. \quad (1.2)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (1.3)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.4)$$

Les équations (1.1), (1.2), (1.3) et (1.4) sont respectivement appelées équations de Maxwell-Faraday, Maxwell-Ampère, Maxwell-Thomson et Maxwell-Gauss. D'autres grandeurs physiques entrent en jeu, comme \mathbf{J} la densité de courant exprimé en [$A.m^{-2}$] et ρ la densité volumique de charge exprimée en [$C.m^{-3}$].

1.2 Lois de comportement

Les lois de comportement permettent de prendre en compte la nature du matériau employée. Dans ces travaux de thèse on ne considérera pas la troisième loi de comportement liée au matériaux diélectriques.

Les équations (1.1), (1.2), (1.3) et (1.4) ont un caractère purement géométrique. Donc, pour modéliser le comportement des matériaux, les lois de comportements dites aussi relations constitutives [Benabou, 2002] sont introduites entre \mathbf{H} et \mathbf{B} ainsi que \mathbf{J} et \mathbf{E} .

1.2.1 Loi d'Ohm

Cette loi a été découverte par Georg Simon Ohm en 1827. Elle permet de lier l'intensité du courant électrique à la tension par :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.5)$$

Où σ est la conductivité électrique exprimée en [$S.m^{-1}$].

1.2.2 Loi de comportement magnétique

Dans les matériaux magnétiques, la relation qui lie le champ magnétique \mathbf{H} et l'induction magnétique \mathbf{B} est la suivante

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.6)$$

avec μ [$H.m^{-1}$] désigne la perméabilité magnétique qui caractérise la capacité d'un matériau à modifier les lignes de flux magnétique.

Mathématiquement les propriétés des matériaux sont présentées par un tenseur liant le champ magnétique à l'induction nommée tenseur de perméabilité [$\mu(\mathbf{H})$] tel que

$$\mathbf{B} = [\mu(\mathbf{H})].\mathbf{H} \quad (1.7)$$

Dans le cas tridimensionnel, le tenseur décrit les interactions de toutes les directions telles que :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mu_{xx}(\mathbf{H}) & \mu_{xy}(\mathbf{H}) & \mu_{xz}(\mathbf{H}) \\ \mu_{yx}(\mathbf{H}) & \mu_{yy}(\mathbf{H}) & \mu_{yz}(\mathbf{H}) \\ \mu_{zx}(\mathbf{H}) & \mu_{zy}(\mathbf{H}) & \mu_{zz}(\mathbf{H}) \end{pmatrix} \mathbf{H}. \quad (1.8)$$

Ce tenseur peut être non linéaire (sa valeur varie avec le champ magnétique) et peut présenter de fortes différences selon les axes notamment pour les tôles à grains orientés. Dans ce cas, la relation $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ est dite anisotrope. La détermination de tenseur en prenant compte de l'anisotropie du matériau n'est pas triviale et fait l'objet de recherches en caractérisation magnétiques des matériaux. Par ailleurs le comportement peut être aussi hystérétique [Bertotti, 1998] et la relation $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ ne sera plus présentée par une simple loi de proportionnalité.

Pour retranscrire un comportement réaliste du système, il faut pouvoir disposer des modèles adéquats.

1.2.3 Les modèles de comportement

Plusieurs modèles de comportement ont été utilisés dans la littérature, on trouve des modèles simples isotropes, des modèles anisotropes et enfin les modèles hystériques.

1.2.3.1 Modèles isotropes

Un matériau est dit isotrope, si ses propriétés et son comportement sont invariants dans toutes les directions.

Les modèles isotropes sont connus pour leur simplicité de mise en œuvre. ils sont souvent présents dans les codes de calculs car ils ne nécessitent qu'une fonction entre le champ \mathbf{H} et l'induction magnétique \mathbf{B} qui sera parallèle au champ en tout point. Donc il existe une loi scalaire qui lie la norme du champ magnétique à la norme de l'induction. On peut citer les modèles de Marrocco, Langevin, Fröhlich, ... ou encore l'interpolation par spline [Lee et al., 2001]. Par la suite nous ne présentons que les modèles de Marrocco et Fröhlich.

Marrocco

Le modèle de Marrocco [Marrocco, 1977] exprime le champ magnétique en fonction de l'induction magnétique par :

$$\|\mathbf{H}\| = \|\mathbf{B}\| \nu_0 \left(\epsilon + \frac{(c - \epsilon) \|\mathbf{B}\|^{2\alpha}}{\|\mathbf{B}\|^{2\alpha} + \tau} \right),$$

avec ν_0 est représenté la reluctivité de l'air et ϵ , c , τ et α sont des constantes fixées. En générale, ces coefficients sont obtenues expérimentalement à partir d'une courbe $B(H)$ en utilisant une régression non-linéaire.

Fröhlich

Ce modèle anystérique [Swift et al., 2001], a été développé par Fröhlich en 1881. La relation entre l'induction et le champ magnétique peuvent être présentée sous deux manières :

$$\mu(\|\mathbf{H}\|) = \frac{\alpha}{1 + \alpha\beta\|\mathbf{H}\|},$$

ou

$$\nu(\|\mathbf{B}\|) = \frac{1}{\alpha - \beta\|\mathbf{B}\|},$$

avec $\alpha = \mu_m$ la perméabilité maximale et $\beta = \frac{\alpha}{\|\mathbf{B}_{\text{sat}}\|}$ où \mathbf{B}_{sat} la valeur de l'induction magnétique à la saturation.

Comparaison des modèles

Des mesures menées au laboratoire d'une tôle M600-65A données à titre d'exemple, sont comparées aux modèles de Marrocco et Fröhlich dans la figure (1.1).

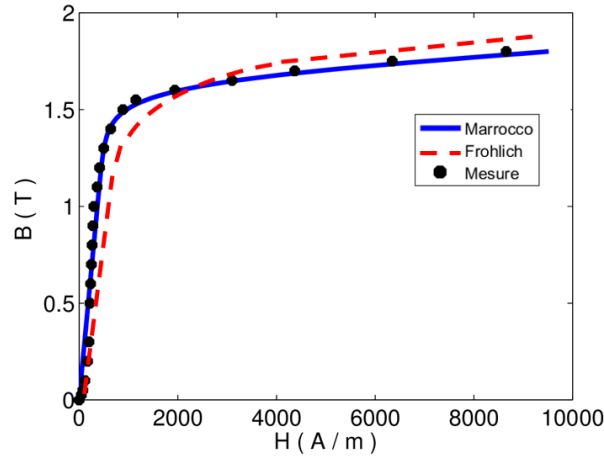


FIGURE 1.1 – Comparaison des lois de comportement.

La meilleur lissage est obtenue pour le modèle de Marrocco qui à l'aide de ces quatre paramètres permet de mieux décrire quantitativement les tôles comparativement au modèle de Fröhlich. En revanche, avec sa pente plate à l'origine, des difficultés numériques peuvent être engendré lors de la résolution.

1.2.3.2 Modèles anisotropes

Un matériau est dit anisotrope, quand les propriétés magnétiques dépendent de la direction [Bertotti, 1998]. L'anisotropie peut fortement influencer le comportement magnétique. Dans ce cas, le tenseur de perméabilité relative sera plein et prendra en compte toutes les directions comme décrites dans l'équation (1.9) pour le cas 2D. Toutefois, les valeurs antidiagonaux sont difficiles à quantifier et par défaut on considérera un tenseur diagonal comme présenté dans l'équation (1.10). Ce dernier est souvent utilisé dans les logiciels EF de commerce.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mu_{xx}(\mathbf{H}) & \mu_{xy}(\mathbf{H}) \\ \mu_{yx}(\mathbf{H}) & \mu_{yy}(\mathbf{H}) \end{pmatrix} \mathbf{H}. \quad (1.9)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mu_{xx}(\mathbf{H}) & 0 \\ 0 & \mu_{yy}(\mathbf{H}) \end{pmatrix} \mathbf{H}. \quad (1.10)$$

La figure (1.2) représente les notations utilisées dans les modèles qui suivent.

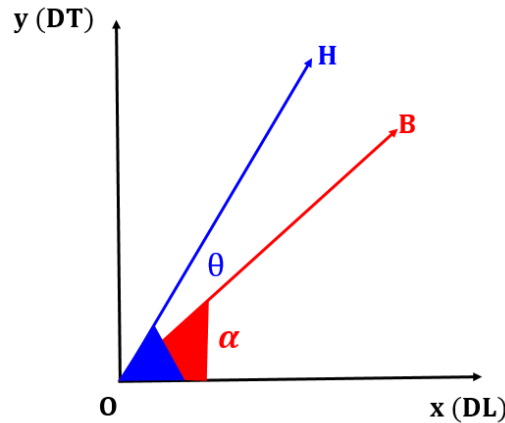


FIGURE 1.2 – Notations.

Remarque : les rappels sur les phénomènes d’aimantation et la classification des matériaux ferromagnétiques étudiés en génie électrique ne sont pas mentionnés. Une étude complète sur ces phénomènes est détaillé dans [Bozorth, 1993].

Modèle de séparation des axes

Le modèle de séparation des axes est connu sous le nom du modèle conventionnel car souvent utilisé dans les logiciels EF [Nakata et al., 1975]. Il permet de prendre en compte l’anisotropie de la manière la plus simple possible. En effet, dans le cas 2D il suffit de prendre uniquement les caractéristiques magnétiques dans les deux directions principales dans le plan de la tôle : la direction de laminage et la direction transverse notées respectivement DL et DT. Ces derniers sont caractérisés par deux fonctions mesurables de la perméabilité notées μ_L et μ_T qui sont facilement déterminés en expérimentale.

Les composantes de \mathbf{B} sont déterminées à partir des relations suivantes :

$$\mathbf{B}_x = \mu_L(\mathbf{H}_x) \mathbf{H}_x, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{B}_y = \mu_T(\mathbf{H}_y) \mathbf{H}_y, \quad (1.12)$$

avec μ_L est la perméabilité suivant l’axe x (direction de laminage) et μ_T est la perméabilité suivant l’axe y (direction transverse).

Un exemple numérique de ce modèle traité dans [Pera, 1994] montre une certaine imprécision de ce modèle quand \mathbf{H} a des valeurs très élevées. En effet, pour une tôle à grains non orientés (NO) et pour $\mathbf{H} = 5000$ A/m l’induction dans la direction du laminage est de l’ordre de 1.62 T et dans la direction transverse elle vaut 1.53 T. Pour

$\mathbf{H} = 7071 \text{ A/m}$ orienté de 45° par rapport à la direction de laminage, l'induction vaut 2.23 T ce qui dépasse largement la saturation et montre les limites de cet approche.

Modèle des deux axes

Ce modèle est introduit dans [Huttenloher et al., 1984]. Il ne nécessite comme données expérimentales que la courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ dans les directions de laminage et transverse comme décrit dans la figure (1.3).

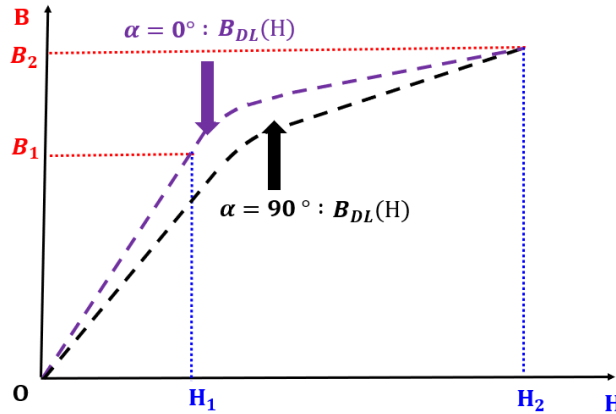


FIGURE 1.3 – Principe de modèle des deux axes.

\mathbf{H}_2 représente le point de saturation où les deux courbes $\mathbf{B}(\mathbf{H}_x)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{H}_y)$ se rejoignent. Pour éviter les problèmes provoqués par le modèle précédent, il est conseillé d'utiliser une interpolation linéaire lors de calculs des caractéristiques magnétiques dans les directions intermédiaires et de considérer deux zones dans les courbes d'aimantation : une zone linéaire et une zone de saturation.

Pour la zone linéaire (où $\mathbf{B} \leq \mathbf{B}_1$), les composantes de l'induction magnétique dans les directions x et y sont donnée par

$$\mathbf{B}_x = \mu_L \mathbf{H}_x = \mathbf{B}_L(\mathbf{H}_x), \quad (1.13)$$

$$\mathbf{B}_y = \mu_T \mathbf{H}_y = \mathbf{B}_T(\mathbf{H}_y). \quad (1.14)$$

Pour la zone de saturation (où $\mathbf{B} > \mathbf{B}_1$), l'induction magnétique est défini tel que :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_L(\mathbf{H}) + \frac{\theta}{90} [\mathbf{B}_T(\mathbf{H}) - \mathbf{B}_L(\mathbf{H})], \quad (1.15)$$

avec : $\alpha = \alpha_1 + \frac{\theta - \alpha_1}{\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_1)$,

où $\alpha_1 = \arctan\left(\frac{\mu_T}{\mu_L}\right) \tan \theta$, est l'angle entre \mathbf{B} et l'axe x pour $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$.

\mathbf{H} et θ sont obtenus par interpolation linéaire pour tout $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 90$.

Modèle elliptique

Sous un champ \mathbf{H} de norme constante, le vecteur \mathbf{B} décrit une ellipse dans le plan \mathbf{B}_x - \mathbf{B}_y [Di Napoli and Paggi, 1983; Dedulle, 1990] tel que :

$$\frac{\mathbf{B}_x^2}{a^2} + \frac{\mathbf{B}_y^2}{b^2} = 1. \tag{1.16}$$

Cette équation peut être décrite en fonction des reluctivités mesurées ν_x et ν_y tel que :

$$[\mathbf{B}_x \nu_x(\mathbf{H})]^2 + [\mathbf{B}_y \nu_y(\mathbf{H})]^2 = \mathbf{H}^2.$$

Cette équation est schématisée dans la figure (1.4).

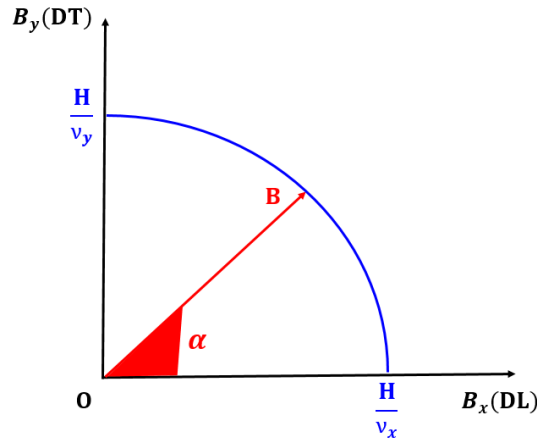


FIGURE 1.4 – Schéma elliptique pour \mathbf{H} de norme constante.

Sachant que $\tan \theta = \frac{\mathbf{H}_y}{\mathbf{H}_x}$ et l'angle $\alpha = \arctan(\frac{\nu_x}{\nu_y} \tan \theta)$.

Modèle elliptique avec rotation d'axes

Ce modèle est dédié pour l'application des tôles à grains orientés. Il permet d'apporter un remède à l'erreur commise sur la direction de difficile aimantation comme détaillé dans [Di Napoli and Paggi, 1983; Dedulle, 1990]. L'idée proposée est de faire subir à l'ellipse décrite dans le modèle précédent une rotation avec l'intermédiaire d'un nouveau repère $(O, \mathbf{B}'_x, \mathbf{B}'_y)$. Ce dernier aura des axes décalés d'un angle ζ par rapport au repère $(O, \mathbf{B}_x, \mathbf{B}_y)$ comme schématisé dans la figure (1.5).

L'équation de l'ellipse est donné par :

$$a\mathbf{B}'_x{}^2 + b\mathbf{B}'_y{}^2 = \mathbf{H}^2, \tag{1.17}$$

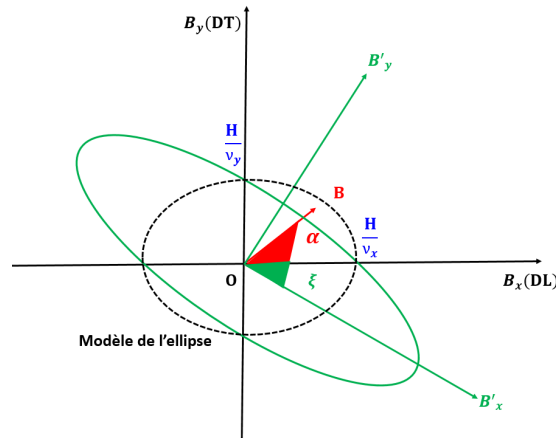


FIGURE 1.5 – Schéma elliptique avec rotation d'axes

avec

$$a = \frac{\nu_x^2 \cos^2 \zeta - \nu_y^2 \sin^2 \zeta}{\cos 2\zeta}. \quad (1.18)$$

$$b = \frac{\nu_y^2 \cos^2 \zeta - \nu_x^2 \sin^2 \zeta}{\cos 2\zeta}. \quad (1.19)$$

On fait coïncider dans le repère (O, x, y) , le plus petit module $\mathbf{B}'(\sqrt{\mathbf{B}_x'^2 + \mathbf{B}_y'^2})$ avec l'angle de difficile aimantation tel que :

$$\zeta = 90^\circ - \arctan \sqrt{2},$$

et donc le module de \mathbf{B} en fonction de l'angle α pour un champ \mathbf{H} constant est donné par :

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{(a \cos^2(\alpha + \zeta) + b \sin^2(\alpha + \zeta))}}. \quad (1.20)$$

Comparaison des modèles

Les différents modèles décrit précédemment : le modèle de deux axes ou le modèle conventionnel, le modèle elliptique et le modèle elliptique avec rotation d'axes sont appliqués pour un matériau fictif proche d'une tôle à grains orientés. Le modèle des deux axes n'est pas étudié car il utilise une interpolation linéaire dans la partie linéaire de la courbe d'aimantation et quand la direction de laminage DL et la direction transverse DT se rejoignent, le point de saturation \mathbf{H}_2 sera difficile à déterminer. Le matériau fictif est donné dans la figure (1.6) pour différentes valeurs de $\mathbf{H} = \{60, 240, 960\} A/m$.

On constate que pour tous les modèles, les valeurs de B_x et B_y sont égaux si $\alpha = 0^\circ$ ou $\alpha = 90^\circ$. De plus, pour des valeurs de champ très faibles ($\mathbf{H} = 50 A/m$),

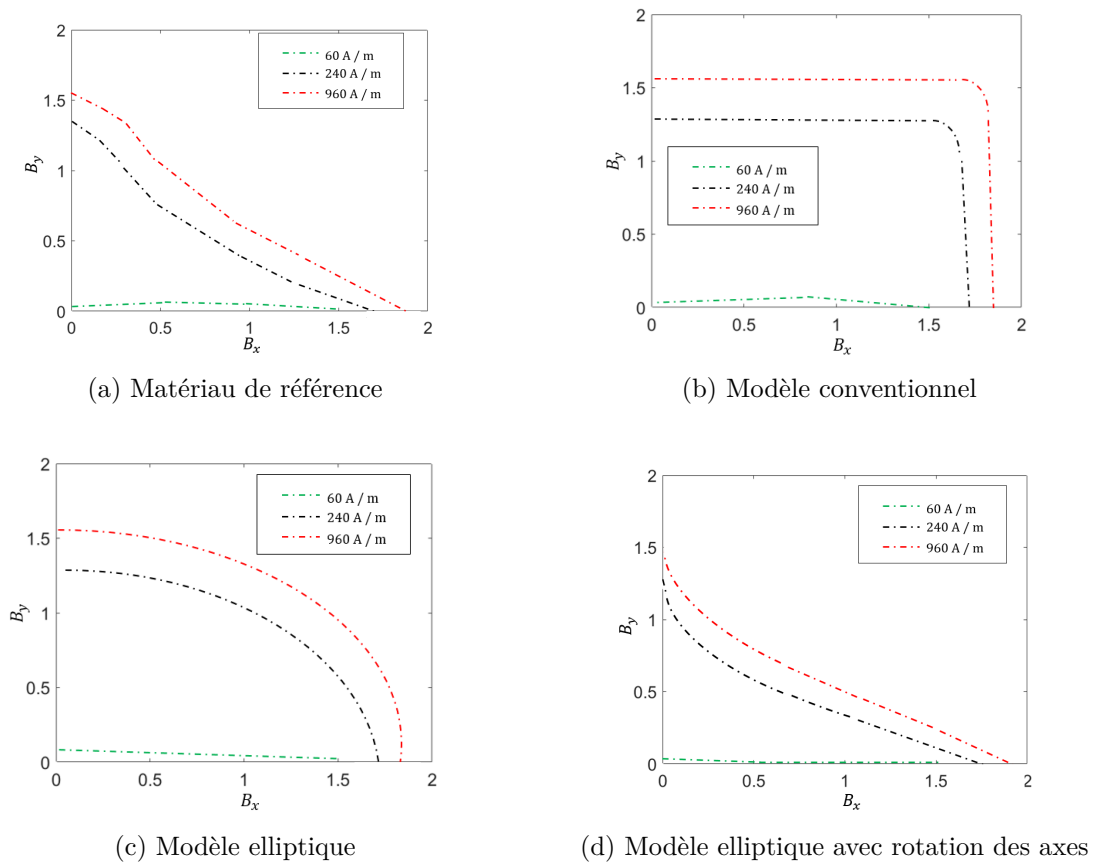


FIGURE 1.6 – Comparaison entre les modèles.

l'anisotropie ne peut pas être précisément prise en compte. Pour des valeurs de champ plus élevées ($\mathbf{H} = 240$ et 960 A/m), le modèle de deux axes est très loin de la réalité et garde des valeurs de composantes quasi constantes pour différentes valeurs de α . Le modèle elliptique approche mieux le comportement du matériau mais il reste aussi loin des mesures réelles quant au modèle elliptique avec rotation d'axe, il concorde bien avec le comportement du matériau de référence.

1.2.3.3 Modèles hystérétiques

On appelle hystérésis les phénomènes irréversibles par lesquels l'aimantation provoquée par un champ magnétique dépend, non seulement de l'intensité actuelle de ce champ, mais aussi des états magnétiques antérieurs du corps aimanté. La courbe d'hystérésis est présentée dans la figure (1.7).

Actuellement, de nombreuses recherches sont effectuées pour obtenir un bon modèle [Leite et al., 2009; Messal et al., 2012; Padilha et al., 2017]. Par la suite, nous présentons que trois modèles très connus dans la littérature qui sont Rayleigh [Rayleigh,

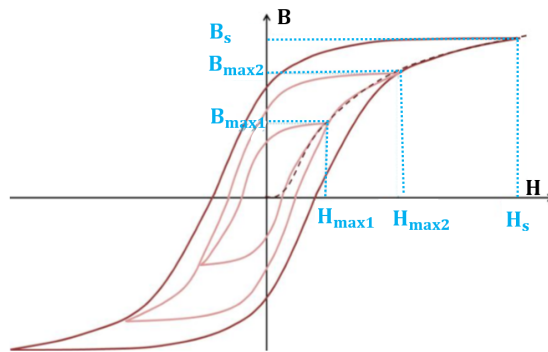


FIGURE 1.7 – Cycle d'hystérésis.

1887], Preisach [Preisach, 1935] et Jiles Atherton [Jiles and Atherton, 1986; Jiles et al., 1992].

Rayleigh

Ce modèle est considéré comme l'un des plus anciens modèles analytiques. Il ne pourra s'appliquer que hors zone de saturation où les champs sont très faibles. La relation liant le champ magnétique \mathbf{H} à l'induction magnétique \mathbf{B} se présente sous forme d'un polynôme du second ordre tel que :

$$\mathbf{B} = (\mu_0 + \eta \mathbf{H}_{\max}) \mathbf{H} + \text{sgn}(d\mathbf{H}) \frac{\eta}{2} (\mathbf{H}^2 - \mathbf{H}_{\max}^2), \quad (1.21)$$

avec μ_0 est la perméabilité initiale, \mathbf{H}_{\max} représente le champ maximal, η représente les effets du phénomène d'aimantation appelée la constante de Rayleigh et sgn est une fonction mathématique définie telle que :

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'allure de cycle d'hystérésis en utilisant le modèle de Rayleigh est décrite dans la figure (1.8).

Preisach

Ce modèle est créé en 1935 par Frederick Preisach afin de décrire le phénomène de dissipation d'énergie par hystérésis. Il est largement utilisé dans le domaine du magnétisme pour la description des matériaux ferromagnétiques. Le modèle de Preisach décompose le matériau magnétique en un ensemble d'entités magnétiques. Chaque entité se comporte comme un dipôle magnétique, tel qu'en présence d'un champ

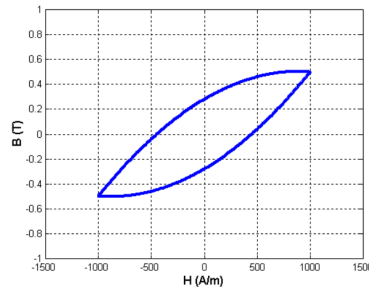


FIGURE 1.8 – Modèle de Rayleigh

magnétique extérieur, le dipôle peut basculer d'un état magnétique à un autre état stable opposé en signe et de même amplitude comme décrit dans la figure (1.9). L'aimantation en tout instant peut être calculée tel que :

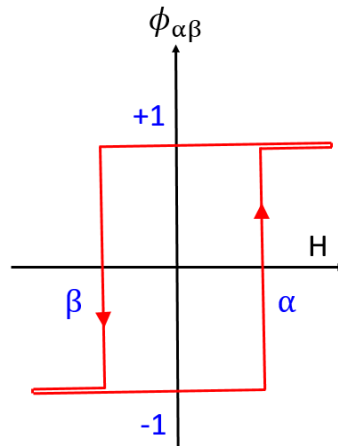


FIGURE 1.9 – Cycle élémentaire du dipôle

$$\mathbf{M}(t) = \int \int \rho(\alpha, \beta) \phi_{\alpha\beta} [\mathbf{H}(t)] d\alpha d\beta, \quad (1.22)$$

avec $\rho(\alpha, \beta)$ est la fonction de distribution des cycles élémentaire appelée fonction de Preisach, $\phi_{\alpha\beta}$ est l'opérateur mathématique associé au dipôle qui prend la valeur +1 ou -1 selon la valeur du champ par rapport au champ du basculement et selon le sens de variation du champ magnétique. Le modèle de Preisach représente d'une manière fiable le comportement statique des matériaux. Cependant, en lançant des calculs éléments finis, ce modèle exige dans chaque élément, de stocker l'histoire magnétique du comportement magnétique ce qui est relativement lourd à exploiter en termes de ressources en espace mémoire et en temps de calculs. De plus, plusieurs mesures doivent être effectuées pour utiliser le modèle de Preisach.

Jiles Atherton

Le modèle de Jiles-Atherton est développé dans les années 80, il décrit le phénomène d'hystérésis dans les matériaux ferromagnétiques à partir des considérations énergétiques liées au déplacement des parois au sein du système magnétique. L'aimantation \mathbf{M} peut être considérée comme la somme des composantes réversibles et irréversibles regroupant respectivement les mouvement réversibles et irréversibles des parois des domaines magnétiques telles que :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{rev}} + \mathbf{M}_{\text{irr}}. \quad (1.23)$$

Pour calculer l'aimantation totale, il faut déterminer l'aimantation irréversible telle que :

$$\frac{d\mathbf{M}_{\text{irr}}}{d\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{M}_{\text{an}}(\mathbf{H}_e - \mathbf{M}_{\text{irr}})}{k \text{sgn}(d\mathbf{H}) - \alpha(\mathbf{M}_{\text{an}}(\mathbf{H}_e) - \mathbf{M}_{\text{irr}})}, \quad (1.24)$$

avec \mathbf{M}_{an} est définie comme l'aimantation anhystérétique tel que :

$$\mathbf{M}_{\text{an}}(H_e) = M_s \left[\coth\left(\frac{\mathbf{H}_e}{a}\right) - \frac{a}{\mathbf{H}_e} \right], \quad (1.25)$$

où \mathbf{H}_e est le champ effectif défini par : $\mathbf{H}_e = \mathbf{H} + \alpha\mathbf{M}$. L'aimantation réversible est décrite par :

$$\mathbf{M}_{\text{rev}} = c(\mathbf{M}_{\text{an}}(\mathbf{H}_e) - \mathbf{M}_{\text{irr}}). \quad (1.26)$$

L'aimantation totale est la somme de \mathbf{M}_{rev} et \mathbf{M}_{irr} .

La génération d'un cycle à l'aide du modèle de Jiles-Atherton suppose une connaissance exacte des cinq paramètres du modèle : M_s qui présente l'aimantation à la saturation, a le facteur de forme pour l'aimantation anhystérétique \mathbf{M}_{an} , α qui est lié au couplage entre les moments magnétiques atomiques, k le facteur lié à l'irréversibilité du mouvement des parois et c qui représente le coefficient de réversibilité des parois.

1.2.3.4 Choix du modèle

Idéalement, un modèle d'hystérésis est mieux approprié pour prendre en considération le comportement non linéaire des matériaux. Malheureusement, dans le cadre de cette thèse, nous n'avons pas traité les modèles d'hystérésis implémentés dans les éléments finis. Actuellement au L2EP, un calcul en post-processing permet d'évaluer les pertes fer à partir du modèle de Bertotti [Fratila, 2012]. Durant cette thèse, nous avons abordé les lois anisotropes B. Toutefois, les résultats obtenus étaient cohérents mais pas suffisamment validés pour les présenter dans le manuscrit.

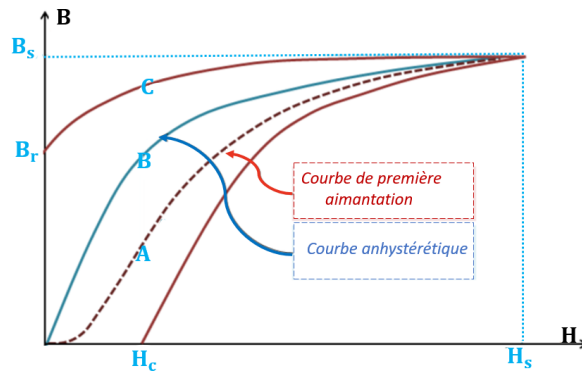


FIGURE 1.10 – Courbe de première aimantation et courbe anhystérétique.

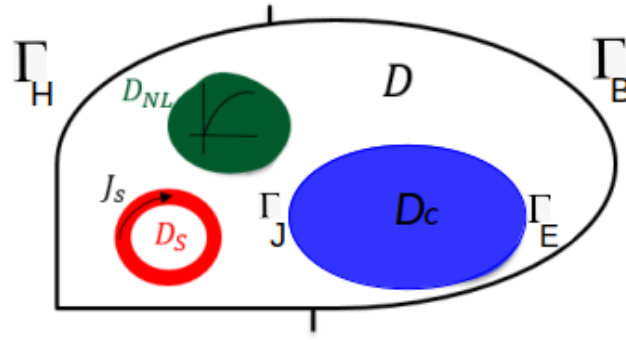
Par la suite, les lois de comportement isotropes non linéaire sont utilisées. Ils sont présentés par des courbes anhystérétiques comme décrit dans la figure (1.10).

Avec la courbe de première aimantation (A) est la courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ obtenue lorsque à partir d'une aimantation nulle le matériau est soumis à un champ magnétique \mathbf{H} strictement croissant (varie de zéro vers l'infini) et la courbe anhystérétique est la courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ obtenue en l'absence de phénomènes d'hystérésis (sans pertes).

1.3 Conditions aux limites

La résolution du système d'équations (1.1), (1.2), (1.3) et (1.4) en tenant compte des lois de comportement (1.6) et (1.5) admet une infinité de solutions. Donc, pour assurer l'unicité de la solution, il est nécessaire d'imposer des conditions aux limites temporelles et spatiales associées aux champs. Ces conditions dépendent du problème posé et du milieu en contact avec le domaine.

On considère le domaine d'étude D comme présenté dans la figure (1.11) de la frontière $\partial D = \Gamma_B \cup \Gamma_H$ avec $\Gamma_B \cap \Gamma_H = \emptyset$. Le domaine D est un domaine simplement connexe ouvert de \mathbb{R}^3 contenant un sous-domaine source D_s , un sous-domaine conducteur D_c de frontière ∂D_C connexe et lipschitzienne. Cette frontière peut être décomposée en deux parties Γ_E et Γ_J avec $\partial D_C = \Gamma_E \cup \Gamma_J$ et Γ_E et Γ_J sont disjoints. Enfin, un sous-domaine D_{NL} est caractérisé par un comportement magnétique non linéaire.

FIGURE 1.11 – Domaine d'étude D .

Les conditions aux limites homogènes du type magnétique s'énoncent comme suit :

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_H} = \mathbf{0}, \quad (1.27)$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_B} = 0, \quad (1.28)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_E} = \mathbf{0}, \quad (1.29)$$

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_J} = 0. \quad (1.30)$$

avec $\mathbf{n}|_{\Gamma}$ un vecteur unitaire normal de la frontière Γ . Ces relations montrent que les composantes tangentielles des vecteurs champs magnétiques et champs électriques (1.27), (1.29) sont toujours continues ainsi que la composante normale de l'induction magnétique et de densité de courant (1.28), (1.30). La résolution directe des équations (1.27), (1.28), (1.29) et (1.30) est difficile à cause de la discontinuité des grandeurs physiques aux interfaces des régions ayant des propriétés physiques différentes. Donc pour se rapprocher de la solution exacte il faut utiliser une variable d'état secondaire continu qui sera le potentiel. Cela introduit les deux formulations en potentiels : la première utilise le potentiel vecteur magnétique et le potentiel scalaire électrique, appelée "formulation électrique" ou " $\mathbf{A} - \varphi$ " et la deuxième est à base de potentiel scalaire magnétique et de potentiel vecteur électrique, appelée "formulation magnétique" ou " $\mathbf{T} - \Omega$ ".

1.4 Espaces fonctionnels continus

Les équations de Maxwell définis précédemment utilisent trois opérateurs différentiels qui sont le gradient d'une fonction scalaire, le rotationnel et la divergence de vecteur. Pour assurer une bonne résolution des équations, il est nécessaire de construire les espaces fonctionnels dans lesquels ces grandeurs sont bien définies [Girault and Raviart, 1986; Dular, 1994].

On définit dans un premier temps l'espace L^2 qui est l'espace des fonctions scalaires de carré intégrable sur le domaine D , un domaine spatial borné inclus dans \mathbb{R}^3 .

$$L^2(D) = \left\{ u; \int_D \|u\|^2 < +\infty \right\}, \quad (1.31)$$

et l'espace des fonctions vectorielles de carré intégrable défini par la forme suivante :

$$\mathbf{L}^2(D) = \left\{ \mathbf{u}; \int_D \|\mathbf{u}\|^2 < +\infty \right\}, \quad (1.32)$$

avec $\|\cdot\|$ présente la norme euclidienne de \mathbb{R}^3 .

L'espace de Sobolev $\mathbf{H}^1(D)$ que l'on définit par

$$\mathbf{H}^1(D) = \left\{ u \in L^2(D); \mathbf{grad} u \in \mathbf{L}^2(D) \right\}, \quad (1.33)$$

est muni de la norme :

$$\|u\|_{\mathbf{H}^1} = \left(\|u\|_D^2 + \|\mathbf{grad} u\|_D^2 \right)^{1/2}. \quad (1.34)$$

On définit $\mathbf{H}_\Gamma^1(D)$ le sous-espace de $\mathbf{H}^1(D)$ qui contient les éléments nuls sur la frontière Γ tel que

$$\mathbf{H}_\Gamma^1(D) = \left\{ u \in \mathbf{H}^1(D); u|_\Gamma = 0 \right\}. \quad (1.35)$$

Les opérateurs intervenant dans les équations de Maxwell, sont définies dans les espaces suivants tels que :

$$\mathbf{H}^1(D) = \left\{ u \in L^2(D), \mathbf{grad} u \in \mathbf{L}^2(D) \right\}. \quad (1.36)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{rot}, D) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(D), \mathbf{rot} \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(D) \right\}. \quad (1.37)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{div}, D) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(D), \mathbf{div} \mathbf{u} \in L^2(D) \right\}. \quad (1.38)$$

où les espaces $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, D)$ et $\mathbf{H}(\mathbf{div}, D)$ représentent respectivement le domaine de définition des grandeurs physiques (\mathbf{E}, \mathbf{H}) et (\mathbf{J}, \mathbf{B}) .

Pour prendre en compte les conditions aux limites sur Γ , des ensembles de sous espaces sont définis par des restrictions des espaces $\mathbf{H}^1(D)$, $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, D)$ et $\mathbf{H}(\mathbf{div}, D)$ tel que :

$$\mathbf{H}_\Gamma^1(D) = \left\{ u \in \mathbf{H}^1(D), u = 0|_\Gamma \right\}. \quad (1.39)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{rot}, D)_\Gamma = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, D), \mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}|_\Gamma \right\}. \quad (1.40)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{div}, D)_\Gamma = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, D), \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0|_\Gamma \right\}. \quad (1.41)$$

1.5 Les formulations de la magnétostatique

La magnétostatique est l'étude des phénomènes magnétiques en régime statique. Donc, la donnée temporelle est abandonnée pour ce type de problème et le champ magnétique \mathbf{H} ne dépend que des courants stationnaires imposés par la densité de courant \mathbf{J}_s [Le Menach, 1999]. Le domaine d'étude dans le cas de la magnétostatique est identique à ce qui est présenté dans la figure (1.11) sans la zone conductrice D_c et les conditions aux limites sont définies seulement sur les frontières Γ_H et Γ_B . Il s'agit uniquement de résoudre :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_s, \quad (1.42)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.43)$$

À ces équations, On y associe la loi de comportement magnétique intrinsèque au matériau défini dans (1.6). Pour les matériaux non linéaires, μ dépend de $\|\mathbf{H}\|$ dans le cas isotrope, et plus généralement μ dépend de \mathbf{H} dans le cas anisotrope¹.

La résolution des équations (1.42) et (1.43) est faite en ajoutant les conditions aux limites données (1.27) et (1.28). Cette résolution est effectuée en adoptant deux formulations en potentiels : la formulation en potentiel scalaire magnétique Ω et la formulation en potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} .

1.5.1 Formulation en potentiel scalaire magnétique

Pour tenir compte de la présence d'excitation, le champ magnétique devient la superposition d'un champ source \mathbf{H}_s dont le rotationnel représente la densité effective de courant \mathbf{J}_s et la réaction du circuit magnétique \mathbf{H}_m dû à l'existence de \mathbf{H}_s .

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m, \quad (1.44)$$

et comme dans le cas magnétostatique, \mathbf{H}_s est le terme relatif à l'inducteur qui vérifie :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s, \quad (1.45)$$

alors à partir de l'équation (1.42) et (1.45) le champ magnétique \mathbf{H}_m vérifie :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H}_m = 0, \quad (1.46)$$

donc la grandeur \mathbf{H}_m dérive d'un potentiel scalaire magnétique Ω qui s'écrit tel que :

$$\mathbf{H}_m = -\mathbf{grad} \Omega. \quad (1.47)$$

1. Dans le cas de l'hystérésis magnétique, la dépendance peut être plus compliquée et faire intervenir l'historique relatif au champ \mathbf{H} .

En substituant cette équation (1.47) dans les relations (1.43) et (1.6), la formulation en potentiel scalaire magnétique prend la forme suivante :

$$\operatorname{div} \mu(\mathbf{H}_s - \mathbf{grad} \Omega) = 0. \quad (1.48)$$

1.5.2 Formulation en potentiel vecteur magnétique

D'après la loi de Gauss magnétique (1.4), $\mathbf{B} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, D)$ est à divergence nulle, donc on peut introduire un potentiel vecteur \mathbf{A} qui vérifie la relation suivante :

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (1.49)$$

avec $\mathbf{A} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, D)$ et $\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ sur Γ_B .

En ajoutant la loi de comportement et combinant les équations (1.43) et (1.49), il s'agit de résoudre :

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}_s. \quad (1.50)$$

Vu qu'il y a une infinité de potentiels vecteurs magnétiques, cette formulation nécessite une condition de jauge pour assurer l'unicité de la solution [Kettunen et al., 1999].

1.6 Les formulations de la magnétodynamique

Dans le cas de la magnétodynamique, les matériaux constituant le système d'étude sont des conducteurs et l'effet des courants induits n'est plus négligeable. Ceci nous ramène au même domaine d'étude présentée dans la figure (1.11). La présence de domaine conducteur $D_c \subset D$ nécessite de prendre en compte le champ \mathbf{E} qui sera exprimé en fonction de potentiels. Dans ce cas, il s'agit de résoudre :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.51)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{ind}} + \mathbf{J}_s. \quad (1.52)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (1.53)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.54)$$

À ces équations, il faut ajouter les conditions aux limites et les lois de comportement de matériaux (1.5) et (1.6), pour établir le lien entre les différentes grandeurs électriques et magnétiques.

1.6.1 Formulation magnétique $\mathbf{T} - \Omega$

Pour la formulation magnétique, il s'agit de résoudre les deux équations (1.51) et (1.54). Le champ magnétique \mathbf{H} est exprimé en fonction de trois termes tels que

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m + \mathbf{T}, \quad (1.55)$$

avec \mathbf{H}_s , le terme relatif aux inducteurs qui vérifie $\mathbf{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s$, \mathbf{H}_m est la réaction de circuit magnétique dû à l'existence de \mathbf{H}_s et \mathbf{T} est le potentiel vecteur électrique qui vérifie $\mathbf{J}_{\text{ind}} = \mathbf{rot} \mathbf{T}$ (comme la densité de courant induite est à divergence nulle). L'équation (1.52) devient :

$$\mathbf{rot} (\mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m + \mathbf{T}) = \mathbf{J}_{\text{ind}} + \mathbf{J}_s. \quad (1.56)$$

En prenant en compte la définition de \mathbf{H}_s et \mathbf{T} , on montre que le champ \mathbf{H}_m est à rotationnel nul. On a alors :

$$\mathbf{H}_m = -\mathbf{grad} \Omega, \quad (1.57)$$

avec Ω le potentiel scalaire magnétique. En utilisant ses termes et en introduisant les lois de comportement, la formulation $\mathbf{T} - \Omega$ s'écrit :

$$\mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} (\mathbf{rot} \mathbf{H}_s + \mathbf{rot} \mathbf{T}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mu (\mathbf{H}_s + \mathbf{T} - \mathbf{grad} \Omega), \quad (1.58)$$

$$\text{div} \mu (\mathbf{H}_s - \mathbf{grad} \Omega + \mathbf{T}) = 0. \quad (1.59)$$

Pour assurer l'unicité de la solution, une condition de jauge doit être appliquée sur le potentiel vecteur \mathbf{T} qui sera défini que dans le domaine conducteur D_c .

1.6.2 Formulation électrique $\mathbf{A} - \varphi$

Cette formulation permet de résoudre les équations (1.52) et (1.53) du système d'équations de Maxwell. En remplaçant l'équation (1.49) dans (1.51), la loi de Faraday locale s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.60)$$

Le terme $\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$ dérive d'un potentiel scalaire électrique φ et donc, le champ électrique \mathbf{E} peut s'écrire tel que :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad} \varphi. \quad (1.61)$$

Grâce à la loi de comportement électrique défini dans (1.5), on peut remplacer le champ magnétique \mathbf{H} et la densité de courant \mathbf{J}_{ind} en fonction de potentiel \mathbf{A} et φ tel que :

$$\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}_s - \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right). \quad (1.62)$$

De même que pour la formulation de la magnétostatique, pour assurer l'unicité de la solution, il est nécessaire de jauger le problème [Le Bellac and Lévy-Leblond, 1973].

1.7 Les formulations couplées circuit

Le couplage devient indispensable dans le traitement de dispositifs industriels tels que les transformateurs de courant ou les moteurs électriques. En effet, dans la plupart des dispositifs électrotechniques, on impose très souvent la tension. Or, les formulations qui ont été présentées dans les sections précédentes 1.5 et 1.6 ne sont pas indépendantes les unes des autres et nécessitent la connaissance de la densité du courant dans les inducteurs. Donc leurs résolutions exigent de coupler les formulations et les potentiels avec les équations du circuit électrique d'alimentation.

1.7.1 Les différentes méthodes de couplage

Au fil des années, le couplage des équations électromagnétiques avec les équations du circuit électrique d'alimentation, a été imposé selon deux directions principales qui sont le couplage indirect [Williamson and Begg, 1985] et le couplage direct. Dans ces travaux de thèse, le couplage entre le champ magnétique et les circuits électriques est effectué d'une manière directe [Piriou and Razek, 1993] et les deux systèmes électromagnétique et électrique sont résolus simultanément. Ce couplage direct utilise mieux la place mémoire. En effet, les matrices issues des systèmes magnétiques et électriques sont construites d'une manière traditionnelle, et que les termes de couplage sont ajoutés.

La structure de la matrice peut être présentée sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} S_{\text{magn}} & T_{\text{coup}} \\ T_{\text{coup}} & S_{\text{élec}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{\text{magn}} \\ X_{\text{élec}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\text{magn}} \\ F_{\text{élec}} \end{bmatrix}, \quad (1.63)$$

avec S_{magn} et $S_{\text{élec}}$ désignent respectivement les systèmes magnétiques et électriques, T_{coup} représente le terme de couplage, X_{magn} , $X_{\text{élec}}$ et F_{magn} , $F_{\text{élec}}$ désignent respectivement les variables et les sources magnétiques et électriques.

La matrice de rigidité reste toujours une matrice creuse ce qui permet de traiter des problèmes électromagnétiques en 3D de taille importante. Par contre, la matrice est moins bien conditionnée car il existe parfois un écart entre les termes des équations de champs et des équations de circuit.

1.7.2 Le couplage électrique

Supposant que l'inducteur ait n_s spires avec une section S constante, à basse fréquence la densité de courant \mathbf{J}_s est répartie uniformément dans l'inducteur. Celle-ci est proportionnelle au courant i qui circule dans l'inducteur telle que :

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{N}i, \quad (1.64)$$

avec \mathbf{N} la fonction de bobinage défini sous la forme suivante :

$$\mathbf{N} = \frac{n_s}{S} \mathbf{n}, \quad (1.65)$$

où \mathbf{n} le vecteur unitaire normal à la section de la bobine.

De plus, le champ \mathbf{N} est par définition, un champ de vecteur à divergence nulle qui permet de définir la géométrie de l'inducteur. Donc, en se basant sur les propriétés de \mathbf{N} un nouveau vecteur \mathbf{K} est introduit tel que :

$$\mathbf{rot} \mathbf{K} = \mathbf{N}. \quad (1.66)$$

À partir des relations 1.42, 1.64 et 1.66, on peut déduire :

$$\mathbf{H}_s = \mathbf{K}i. \quad (1.67)$$

Les vecteurs \mathbf{N} et \mathbf{K} sont des outils qu'on va l'utiliser pour réaliser le couplage entre le champ magnétique et les circuits électriques [Le Menach, 1999].

1.7.2.1 Les formulations à courant imposé

Cas de la magnétostatique

Pour la formulation en potentiel scalaire Ω , l'équation (1.48) sera présenté à l'aide de (1.67) tel que :

$$\mathbf{div} \mu(\mathbf{K}i - \mathbf{grad} \Omega) = 0. \quad (1.68)$$

Pour le cas de la formulation en potentiel vecteur \mathbf{A} , (1.50) se réécrit en se basant sur (1.64) tel que :

$$\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \right) = \mathbf{N}i. \quad (1.69)$$

Cas de la magnétodynamique

De même pour imposer le courant, il est possible de modifier la formulation magnétique ($\mathbf{T} - \Omega$) (1.58) à l'aide de (1.67) tel que :

$$\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} \right) + \mu \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} - \mathbf{grad} \Omega \right) = - \frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathbf{K}i) - \mathbf{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{K}i \right), \quad (1.70)$$

Et pour le cas de la formulation, ($\mathbf{A} - \varphi$), le courant est imposé à l'aide des conditions aux limites sur la surface externe des conducteurs.

1.7.2.2 Les formulations à tension imposée

Deux grandeurs peuvent être imposées, soit le courant en introduisant les vecteurs \mathbf{N} et \mathbf{K} comme décrit précédemment soit la tension aux bornes des inducteurs.

Équation de circuit

Pour un problème qui comporte m bobines, le courant de la $k^{\text{ème}}$ d'entre elles est solution de :

$$U_k = R_k I_k + \frac{\partial \varphi_k}{\partial t}, \tag{1.71}$$

avec, U_k , I_k , φ_k et R_k désignent respectivement la tension aux bornes de l'inducteur, le courant, le flux dans la bobine et la résistance du bobinage comme décrit dans la figure (1.12).

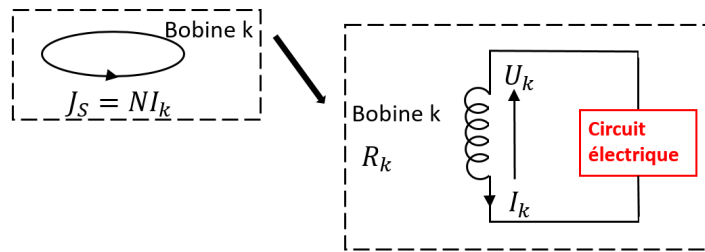


FIGURE 1.12 – Exemple d'une maille de circuit électrique.

Dans ces travaux de thèse l'étude des conducteurs multifilamentaires est mise en œuvre. Donc, le couplage entre les équations de circuit et les équations magnétiques est réalisé qu'avec l'intermédiaire du flux d'induction φ et le vecteur \mathbf{K} vu que le courant i est inconnu.

Le flux magnétique

Le flux de l'induction magnétique est défini tel que :

$$\varphi = \int_D \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} dD. \tag{1.72}$$

En introduisant cette expression dans la loi de Faraday on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_D \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} dD = V - Ri, \tag{1.73}$$

où V représente la différence de potentiel et R la résistance de l'inducteur.

En exprimant l'induction magnétique \mathbf{B} en fonction du potentiel vecteur \mathbf{A} et en utilisant les propriétés des opérateurs vectoriels, le flux φ aura comme expression :

$$\varphi = \int_D \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{K} dD, \quad (1.74)$$

En utilisant l'équation (1.66), le flux de l'induction magnétique peut se présenter alors sous la forme suivante :

$$\varphi = \int_D \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} dD. \quad (1.75)$$

Le couplage circuit avec la formulation en potentiel scalaire magnétique

En se basant sur la définition du champ magnétique \mathbf{H} décrite dans la section 1.5.1 et la définition de flux dans l'équation (1.72), le système à résoudre s'écrit :

$$\operatorname{div} \mu(\mathbf{K}i - \mathbf{grad} \Omega) = 0, \quad (1.76)$$

$$\frac{d}{dt} \int_D \mu(\mathbf{K}i - \mathbf{grad} \Omega) \mathbf{K} dv + Ri = V. \quad (1.77)$$

Le couplage circuit avec la formulation en potentiel vecteur magnétique

Nous utilisons d'une part l'équation de circuit électrique, comme décrit dans la figure (1.12) et la relation entre le flux et le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} comme présenté dans (1.74). le système à résoudre peut-être présenté tel que :

$$\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \right) = \mathbf{rot} \mathbf{K}i, \quad (1.78)$$

$$\frac{d}{dt} \int_D \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{K} dv + Ri = V. \quad (1.79)$$

et en utilisant l'équation (1.66), le système peut être présenté à l'aide de vecteur \mathbf{N} tel que :

$$\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \right) = \mathbf{N}i, \quad (1.80)$$

$$\frac{d}{dt} \int_D \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} dD + Ri = V. \quad (1.81)$$

1.8 Domaine discret

Les formulations développées ci-dessus, sont dures à résoudre analytiquement pour des systèmes et des géométries complexes. C'est pourquoi, il est nécessaire de discrétiser le problème en ayant recours à des méthodes numériques.

La méthode des éléments finis [Tonti, 2002] est la méthode la plus couramment utilisée en électromagnétisme. Elle est appréciée pour des applications industrielles et permet de résoudre les problèmes en statique ou en magnétodynamique avec une grande robustesse.

Cette méthode, est basée sur un processus de discrétisation qui consiste à remplacer les espaces fonctionnels continus de dimensions infinies par des espaces fonctionnels discrets de dimension finie appelés espaces d'approximation à l'aide de la méthode de Ritz-Galerkin [Ern and Guermond, 2004].

Considérons un système d'équations aux dérivées partielles sous la forme :

$$A(u) = f \quad \text{dans } D, \tag{1.82}$$

Où A désigne un opérateur différentiel, f désigne une fonction donnée et u l'inconnue du problème. Soit V un espace de Hilbert, $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ et $l(\cdot)$ une forme linéaire dans V . En utilisant la méthode de Galerkin, la première étape principale de méthode des éléments finis consiste à convertir la formulation forte (1.82) en une formulation faible sous la forme suivante :

$$\text{trouver } u \in V \quad \text{tel que } a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V. \tag{1.83}$$

Lorsque a est continue et coercive² sur V et $l(\cdot)$ continu, le théorème de Lax-Milgram garantit l'unicité de solution du problème (1.83).

La deuxième étape consiste à discrétiser la formulation faible en construisant un espace V_h de dimension finie qui approche l'espace V de dimension infinie, donc la formulation faible discrétisée prend la forme suivante :

$$\text{trouver } u_h \in V_h \quad \text{tel que } a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{1.84}$$

En choisissant une base w_1, \dots, w_n de V_h , la solution approchée s'écrit comme

$$u_h = \sum_{i=1}^n u_i w_i, \tag{1.85}$$

avec u_i les coefficients à déterminer caractérisant la solution numérique.

Ainsi l'équation (1.84) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^n a(w_i, w_j) u_i = l(w_j) \quad 1 \leq j \leq n. \tag{1.86}$$

Afin de mieux discrétiser la géométrie du système, plusieurs formes d'éléments sont utilisées comme décrits dans la figure (1.13). Ces formes appelées fonctions d'interpolations, ou éléments de Whitney [Bossavit, 1998] ont pour support le maillage du

2. La propriété de coercivité assure qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout $v \in V$ on a $a(u, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$.

domaine qui est décomposé en nœuds, arêtes, facettes ou éléments [Gradinaru and Hiptmair, 1999; Ren and Ida, 2000]. En effet, en se basant sur les valeurs de la solution sur ces entités du maillage, on interpole la solution qui sera une combinaison linéaire de fonctions nodales, d'arêtes, de facettes et de volumes.

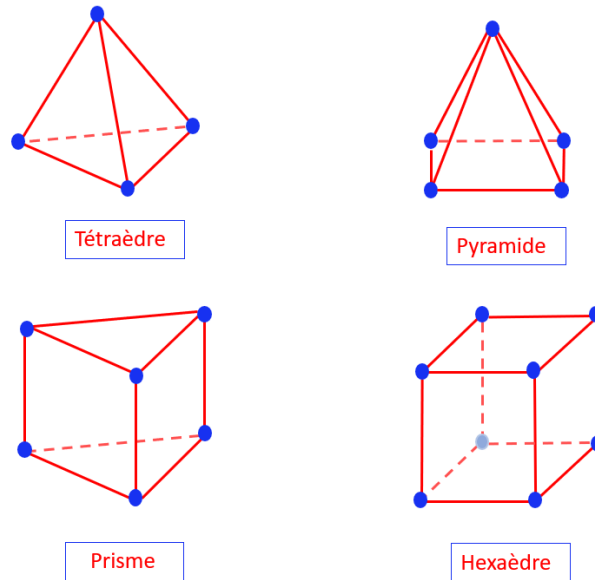


FIGURE 1.13 – Types d'éléments de discrétisation disponibles dans code_Carmel.

1.8.1 Fonction de base

Nous notons N , A , F et E les ensembles des indices respectivement des nœuds, des arêtes, des facettes et des éléments.

Fonction de base nodale

À chaque nœud n du maillage on associe une fonction scalaire w_n continue sur tout le domaine D . Elle est égale à 1 au nœud n et 0 sur tous les autres :

$$\sum_{n \in N} w_n^0 = 1. \quad (1.87)$$

Fonction d'arête

Chaque arête a du maillage est associée à une fonction vectorielle \mathbf{w}_a où sa circulation est égale à 1 sur a et 0 sur toute autre arête :

$$\int_{a'} \mathbf{w}_a^1 \mathbf{dl} = \begin{cases} 1, & \text{si } a' = a, \\ 0, & \text{si } a' \neq a. \end{cases} \quad (1.88)$$

Fonction de facette

De même, on définit une fonction de facette \mathbf{w}_f^2 dont le flux à travers une facette f vaut 1, et 0 à travers les autres facettes. On note par \mathbf{n} le vecteur unitaire normal à la facette f .

$$\int_{f'} \mathbf{w}_f^2 \cdot \mathbf{n} ds = \begin{cases} 1, & \text{si } f' = f, \\ 0, & \text{si } f' \neq f. \end{cases} \quad (1.89)$$

Fonction de volume

À chaque élément e du maillage, on associe une fonction w_e^3 tel que :

$$w_e^3 = \begin{cases} \frac{1}{\text{Vol}(e)}, & \text{dans } e, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (1.90)$$

où $\text{Vol}(e)$ le volume de l'élément.

1.8.2 Espaces fonctionnels discrets

Après l'introduction des fonctions de base, On peut définir respectivement, W^0 , W^1 et W^2 , les sous-espaces discrets comme les sous-espaces $H^1(D)$, $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, D)$ et $\mathbf{H}(\mathbf{div}, D)$ et on définit les restrictions liées aux conditions aux limites sur Γ :

$$W_\Gamma^0 = \{ \mathbf{u} \in W^0, \mathbf{u} = 0|_\Gamma \}. \quad (1.91)$$

$$\mathbf{W}_\Gamma^1 = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{W}_\Gamma^1, \mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}|_\Gamma \}. \quad (1.92)$$

$$\mathbf{W}_\Gamma^2 = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{W}_\Gamma^2, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0|_\Gamma \}. \quad (1.93)$$

Donc, l'espace des éléments finis nodaux W^0 seront utiles pour approcher des potentiels scalaire tandis que les potentiels vecteurs magnétiques seront approchés par l'espace des éléments finis d'arêtes \mathbf{W}^1 .

1.8.3 Les formulations discrètes

Pour résoudre numériquement les formulations précédentes, nous employons des formulations faibles. Par exemple pour le cas de la magnétostatique et pour la formulation en potentiel scalaire magnétique Ω , la forme intégrale s'écrit sous la forme suivante :

$$\int_D \mu(\mathbf{grad} W \cdot \mathbf{grad} \Omega) dD = \int_D \mu(\mathbf{grad} W \cdot \mathbf{H}_s) dD, \quad (1.94)$$

où W est une fonction de test.

De même, pour la formulation en potentiel vecteur \mathbf{A} , la forme intégrale s'écrit :

$$\int_D \frac{1}{\mu} (\mathbf{rot} \mathbf{W} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}) dD = \int_D (\mathbf{W} \mathbf{rot} \mathbf{H}_s) dD, \quad (1.95)$$

avec \mathbf{W} une fonction test.

Pour la formulation magnétodynamique en potentiels $(\mathbf{A} - \varphi)$, la forme intégrale est décrite à partir de deux équations :

$$\begin{cases} \int_D \left[\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{W} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A} + \sigma \mathbf{W} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \right] dD = 0, \\ \int_D \sigma \mathbf{grad} W \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) dD = 0. \end{cases} \quad (1.96)$$

Le système matriciel associés à ces formulations, après la discrétisation s'écrit :

$$\mathbf{S} \mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (1.97)$$

avec \mathbf{S} la matrice de rigidité, \mathbf{X} le vecteur des inconnues et \mathbf{F} le vecteur des forces externes au système.

Dans le domaine des machines électriques, les matériaux utilisés lors de la fabrication des noyaux magnétiques sont en général des matériaux ferromagnétiques qui possèdent des lois de comportement non linéaires. La non-linéarité ne s'exprime pas en fonction de l'inconnue recherchée mais en fonction de sa dérivée (\mathbf{rot} ou \mathbf{grad}). Le système (1.97) peut être présenté tel que :

$$\mathbf{M}_X \mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (1.98)$$

avec $\mathbf{M}_X = \mathbf{M}_{\mathbf{rot} X}$ ou $\mathbf{M}_{\mathbf{grad} X}$. Les expressions des dérivées lors de la résolution de système (1.98) sont détaillées pour les deux formulations de la magnétostatique dans l'annexe B.

1.9 Conclusion

Ce chapitre a été introduit pour présenter les différents outils mathématiques et numériques qui permettent de décrire les dispositifs électrotechniques et modéliser les problèmes dans le cadre de l'électromagnétisme.

Les équations de Maxwell ont été rappelées. Les différentes lois de comportement non linéaire isotropes, anisotropes et hystérétiques permettant d'obtenir l'évolution des champs magnétiques et électriques ont été présentées. Les conditions aux limites ainsi que les espaces fonctionnelles de différents opérateurs et grandeurs électromagnétiques ont été introduits. Les formulations en potentiels pour les problèmes magnétostatiques et magnétodynamiques ont été présentées. Une brève introduction sur les différentes méthodes et formulations pour le couplage circuit en présence de régions ferromagnétiques a été faite. Une étape de discrétisation permettant d'effectuer la résolution numérique des équations a été réalisée grâce à la méthode des éléments finis.

Après la discrétisation, le système matriciel associé aux formulations développées est un grand système d'équations non linéaires difficile à résoudre vu que les matériaux utilisés lors de la fabrication des noyaux magnétiques sont en général des matériaux ferromagnétiques possédant des lois de comportement non linéaires.

Par conséquent, le chapitre suivant est dédié aux méthodes de résolution adaptées au différents problèmes d'électromagnétisme.

2

État de l'art sur les solveurs non linéaires

Dans ce chapitre, nous introduirons un état de l'art sur les méthodes de résolution. Cette présentation sera suffisamment généraliste pour permettre au lecteur de se familiariser avec les concepts utilisés et de décrire au mieux le contexte dans lequel s'inscrivent les travaux de cette thèse. Les solveurs linéaires tels que les méthodes directes et itératives sont présentées dans la première partie. Dans la deuxième partie, les solveurs non linéaires sont détaillées, nous introduisons les méthodes de point fixe, les méthodes de Newton ainsi que les techniques de globalisation et nous complétons ces études par des exemples numériques.

Sommaire

2.1	Résolution des problèmes linéaires creux	48
2.2	Résolution des problèmes non linéaires	54

2.1 Résolution des problèmes linéaires creux

Les systèmes d'équations linéaires creux permettent de modéliser de nombreux problèmes complexes dans plusieurs domaines scientifiques ou industriels. L'accroissement de la taille et de la complexité de ces systèmes nécessite la mise en œuvre de méthodes de résolution robustes et performantes en termes de temps de calcul et de consommation d'espace mémoire. Il existe deux grandes familles de méthodes pour la résolution des systèmes linéaires creux : les méthodes directes et les méthodes itératives.

2.1.1 Les méthodes directes

La résolution de systèmes linéaires creux $Ax = b$ par les méthodes directes est basée sur une élimination de Gauss, c'est-à-dire une factorisation de la matrice $A = a_{ij}$ en matrices $L = l_{ij}$ et $U = u_{ij}$, triangulaires inférieure et supérieure.

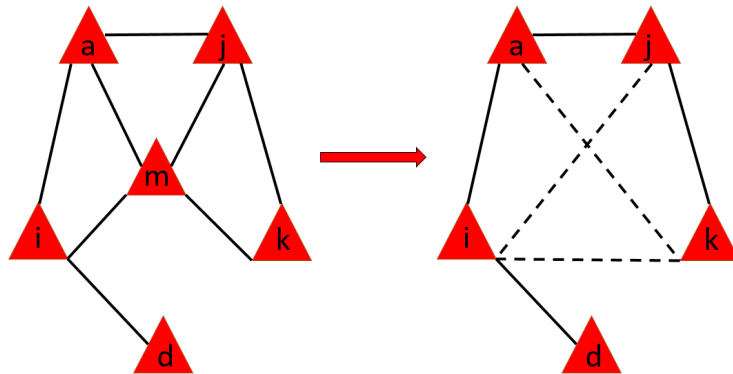
Le système linéaire à résoudre devient donc une succession de deux systèmes triangulaires creux que l'on peut résoudre très efficacement. L'idée de cette méthode est présentée dans l'algorithme dans l'annexe A.1 qui s'adapte naturellement aux autres types de factorisation existante (Cholesky $A = LL^T$ et Crout $A = LDL^T$).

Avec le développement de solveurs directs creux parallèles comme les solveurs MUMPS [Amestoy et al., 2000], SuperLU [Li and Demmel, 2003] ou PARADISO [Schenk and Gärtner, 2004], il est possible de résoudre maintenant des équations linéaires de très grandes tailles. Les solutions obtenues par ces solveurs sont généralement très précises.

Le principal souci des méthodes directes intervient pendant le processus de factorisation : les opérations entre les éléments non nuls en génèrent de nouveau dans la matrice factorisée, là où il y avait un zéro avant. C'est à dire que certains termes l_{ik} et u_{ki} respectivement dans les matrices L et U sont non nuls alors que les termes initiaux a_{ik} et a_{ki} de la matrice A sont nuls. Les facteurs sont plus remplis que la matrice initiale, ce qu'on appelle le phénomène de remplissage. Ce phénomène est illustré dans la figure (2.1) où les triangles représentent toutes les inconnues du système et on a :

- les triangles i et k sont reliés si et seulement si le terme a_{ik} est non nul.
- si le terme a_{ik} est nul et i et k sont reliés à m alors pour éliminer m il suffit de relier i et k .

Pour réduire le nombre d'opérations à effectuer et permettre une factorisation efficace de matrices, de nombreuses techniques ont été développées. La principale est

FIGURE 2.1 – L'élimination de m relie tous ses voisins.

la technique de renumérotation comme décrit dans la figure (2.2).

Comme le remplissage des facteurs est directement lié à l'ordre d'élimination des inconnues, il s'agit de permuter les lignes et les colonnes du système linéaire à travers une permutation \mathbf{P} telle que le remplissage de la factorisation de \mathbf{PAP}^T soit minimal.

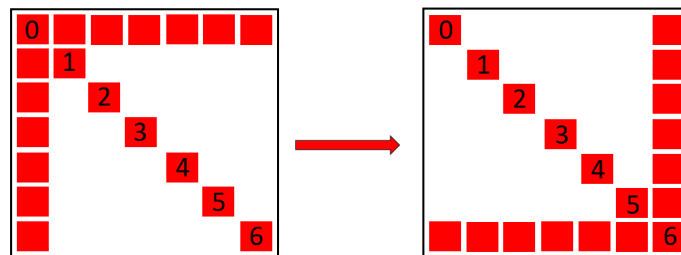


FIGURE 2.2 – Effet de technique de renumérotation sur le phénomène de remplissage.

Si l'efficacité des méthodes directes est maintenant difficile à surpasser sur des problèmes 2D, les inconnues des problèmes 3D sont plus couplées et les facteurs sont plus denses qu'en 2D. Donc, le coût de calcul et de mémoire devient de plus en plus inacceptable.

2.1.2 Les méthodes itératives

Les méthodes itératives ont rapidement gagné en popularité dans les différents domaines du calcul scientifique grâce à leur faible coût de calcul et de mémoire, à leur simplicité de mise en œuvre et leur adaptabilité au calcul haute performance. Parmi les plus utilisées : les méthodes basées sur un espace dit de Krylov.

2.1.2.1 Les méthodes de Krylov

Ces méthodes itératives sont largement utilisées pour la résolution des systèmes linéaires creux de grandes dimensions [Saad, 2003]. Elles consistent à construire une suite de sous espaces emboîtés de tailles croissantes qui vont contenir à la limite la solution recherchée. Elles sont basées sur une technique de projection sur un sous-espace de Krylov, de dimension m ($m \leq n$) plus petite que la taille n du problème. Ces méthodes diffèrent l'une de l'autre par le type de projection qui est appliqué et le choix des sous-espaces de Krylov. On peut citer la méthode de gradient conjugué, les méthodes de GMRES...

Méthode de gradient conjugué

La méthode de Krylov la plus étudiée dans le cas des problèmes à matrices symétriques définies positives, est dite la méthode du Conjugate Gradient (CG) [Hestenes and Stiefel, 1952]. Elle est considérée tout d'abord comme une méthode directe. En 1971, elle a été redécouverte par Reid en tant que méthode itérative. La méthode CG est basée sur les deux objectifs suivants :

1. La minimisation de résidu sur des espaces de Krylov
2. Les récurrences de calcul courts.

Grâce à son faible coût de stockage et son nombre d'opérations par itération, le gradient conjugué est adapté pour la résolution des systèmes linéaires creux de grande taille.

Considérant la résolution du système $Ax = b$ avec $x, b \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. On définit dans la fonction $\psi(x)$ qui sera minimale pour $x = A^{-1}b$ tel que :

$$\psi(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b. \tag{2.1}$$

Notons $R_0 = b - Ax_0$ le résidu avec x_0 est la première approximation de x . La fonction ψ définie dans (2.1) décroît le plus rapidement dans la direction $-\nabla\psi(x_0) = R_0$. La solution du système linéaire le long de la direction R_0 est obtenue en effectuant les itérations $x_{n+1} = x_n + \gamma_n R_{n-1}$ avec γ_n minimise $\psi(x + \gamma R_0)$. La méthode est dite alors la méthode de la plus rapide descente.

Pour la méthode de gradient conjugué, il s'agit de construire la direction p_n qui se rapproche le plus de R_{n-1} tel que $p_n^T A p_{n-1} = 0$. L'algorithme est détaillé dans l'annexe A.2.

Remarque : pour $x_0 = 0$, la solution x_n se trouve dans l'espace de Krylov noté $\mathcal{K}^n(R_0, A)$ tel que :

$$\mathcal{K}^n(R_0, A) = span\{R_0, AR_0, \dots, A^{n-1}R_0\}. \tag{2.2}$$

La démonstration se trouve dans [Golub and VAN Loan, 1996].

Méthode de GMRES

Si le système n'est pas symétrique et on choisit de conserver le premier objectif 1 alors la méthode de GMRES développée par Saad et Shultz en 1986 est utilisée. L'idée générale est de trouver une approximation de la solution exacte qui permet de minimiser au mieux le résidu [der Vorst and Vuik, 1993]. Le vecteur x_n qui minimise le résidu $\|b - Ax_n\|_2$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$x_n = x_0 + V_n y, \quad (2.3)$$

avec V_n présente la matrice construite des vecteurs orthonormés de la base $\mathcal{K}^n(R_0, A)$. À chaque nouvelle itération de l'algorithme GMRES, le stockage de la matrice V_n est demandé. Donc, la taille des matrices produites augmente entraînant des coûts en termes de temps de calcul et de mémoire de plus en plus importants.

Pour y remédier, on utilise le GMRES (m) restarté ou redémarré. En effet, au bout d'un nombre fixe d'itérations m , V_n sera supprimé et le procédé est arrêté et relancé et à chaque redémarrage, on choisit la dernière approximation x_n calculé comme nouvelle solution initiale pour l'algorithme de GMRES. Une présentation de l'algorithme GMRES est donnée dans l'annexe A.3.

Méthode de BiCG

La méthode de gradient bi-conjugué a été développée par Fletcher en 1974. Elle est étudiée dans le cas où l'opérateur n'est pas symétrique et en conservant le deuxième objectif 2 de la méthode du gradient conjugué [Cardoso and Benites, 1995]. La méthode BiCG peut être utilisée aussi dans le cas des matrices symétriques définies positives et on retrouve exactement la méthode du gradient conjugué, mais avec deux fois plus de calcul. Parmi les inconvénients de cette méthode, la solution approchée calculée à une itération précise ne minimise pas une certaine norme du vecteur résidu. C'est pour cette raison que la convergence peut être très irrégulière et il peut y avoir de nombreux pics sur la courbe de résidu.

Méthode de BiCGSTAB

Cette méthode est une version plus stable de la méthode de BiCG. Elle a été développée par Van Der Vorst en 1992 [Saad and Van der Vorst, 2000]. On peut voir l'étape de stabilisation comme une itération de la méthode de GMRES. L'algorithme de BiCGSTAB est présenté dans l'annexe A.4.

Le préconditionnement

Lorsque le conditionnement de système augmente, la vitesse de convergence des méthodes de Krylov se dégrade. C'est pourquoi en pratique, il est toujours nécessaire d'accélérer la convergence par des méthodes de préconditionnement.

La résolution de systèmes $Ax = b$ est donc remplacé par $P^{-1}Ax = P^{-1}b$, dans le cas de système préconditionné à gauche et par $AP^{-1}y = b$ avec $Px = y$ quand le système est préconditionné à droite. Pour les méthodes de Krylov, seul le produit matrice vecteur est demandé, et en général ni la construction de la matrice P ni son inverse sera nécessaire. Lorsque le préconditionneur est adapté, il permet non seulement de réduire le conditionnement du système et le temps de calcul de la solution, mais aussi d'améliorer l'efficacité et la robustesse des méthodes de Krylov [Kelley, 1995]. Plusieurs méthodes sont utilisées pour préconditionner le système linéaire, on peut citer les méthodes de décomposition de domaine [Engquist and Zhao, 1998], les méthodes de factorisation incomplète [Kelley, 1995] ou les méthodes multigrilles [Falgout et al., 2006; Notay, 2008].

2.1.2.2 Les méthodes de relaxation

Méthode de Jacobi

Cette méthode remonte à Jacobi (1845), appelée encore méthode de déplacement simultané. Elle consiste à décomposer la matrice \mathbf{A} en trois matrices : une matrice diagonale dont les coefficients sont les coefficients diagonaux de \mathbf{A} et deux matrices triangulaires de \mathbf{A} l'une est inférieure et l'autre est supérieure telle que :

$$Ax = 0 \iff \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j + A_{ii}x_i + \sum_{j=i+1}^n A_{ij}x_j = b_i \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Cette méthode se base sur des relations entre ces matrices pour construire à partir d'une valeur initiale donnée une suite par récurrence afin de fournir une réponse approximative de la solution. La méthode de Jacobi est présentée dans l'annexe 10. La convergence de cette méthode n'est pas toujours garantie sauf par exemple si la matrice \mathbf{A} est définie positive ou si elle est diagonalement dominante [Allaire, 2005].

Méthode de Gauss-Seidel

Cette méthode est publiée en 1874 par Ludwig-Seidel (1821-1896). Elle est considérée comme une amélioration de la méthode de Jacobi. Car, pour calculer la nouvelle solution, cette méthode utilise les nouvelles composantes calculées à l'itération courante au fur et à mesure du calcul et non à l'issue d'une itération

comme la méthode de Jacobi [Gilli, 2006]. Par conséquent, le solveur Gauss-Seidel permet d'effectuer moins d'itérations et donc d'avoir une convergence plus rapide que le solveur de Jacobi. Ce gain est réalisé grâce à cette technique de mise à jour des composantes de vecteur solution mais au prix d'une destruction du parallélisme intrinsèque à la méthode de Jacobi. La méthode de Gauss-Seidel est présentée dans l'annexe A.6.

Malgré la convergence rapide aux premières itérations, les méthodes de Jacobi et Gauss Seidel sont caractérisées par un faible taux de convergence globale. En effet, leur incapacité à réduire les basses fréquences de l'erreur conduit à une décroissance lente de la norme du résidu durant les dernières itérations de la résolution et donc une difficulté de maintenir leur vitesse de convergence. Pour y remédier, les méthodes multigrilles introduite dans les années 1970 sont utilisées.

SOR/SSOR

La convergence d'une méthode de relaxation ne dépend pas du choix de vecteur initial, mais la rapidité de convergence en dépend. D'où l'idée d'introduire la méthode de successive over-relaxation qui a été développée dans le contexte de la résolution d'équations aux dérivées partielles [Southwell, 1946]. Cette méthode est intermédiaire entre les deux méthodes précédentes grâce à son facteur de relaxation qui est définie entre 0 et 2 pour assurer la convergence. Si ce facteur dépasse le 2, la méthode diverge et s'il vaut 1 on retombe sur la méthode de Gauss Seidel et s'il dépasse 1 on parle de la surrelaxation (SSOR) qui est en général la préférée vu qu'elle conduit à accroître la longueur de déplacement suggérée par la méthode de Gauss-Seidel et accélérer sa convergence. Les itérations de relaxation sont résumées dans l'annexe A.7.

2.1.3 Conclusion

Les deux familles de méthodes pour la résolution des systèmes linéaires creux : les méthodes directes et les méthodes itératives sont présentées dans cette partie. Les méthodes directes ont l'avantage d'être très robustes, et l'inconvénient d'être, en général, très gourmande en capacité mémoire et lorsque le système est grand et tridimensionnel le coût ce calcul devient de plus en plus élevé. Contrairement aux méthodes itératives qui ont l'avantage d'utiliser que la matrice du système en tant que opérateur linéaire c'est-à-dire de garder en mémoire que les coefficients non nuls. Il est donc possible de réduire le stockage de la matrice à ses éléments non nuls. Par contre ces méthodes sont extrêmement sensibles aux propriétés du système. En effet,

si le système est mal conditionné, la méthode itérative peut converger lentement ou diverger ou stagner vu que le solveur itératif peut ne pas réussir à passer en-dessous du seuil de tolérance fixé par l'utilisateur à cause des erreurs d'arrondis qui ont été amplifiées par le conditionnement de la matrice.

Les méthodes itératives, en particulier les méthodes de Krylov (CG, GMRES(m), BiCGSTAB) seront étudiés dans les tests numériques des parties suivantes.

2.2 Résolution des problèmes non linéaires

Contrairement au cas des systèmes d'équations linéaires, la résolution des systèmes non linéaires s'avère beaucoup plus délicate. En effet, on se donne une estimation du problème, on linéarise le problème autour de cette estimation et on résout le problème linéaire posé pour obtenir une nouvelle estimation de la solution. Il n'est pas possible de garantir la convergence vers la solution correcte, car les calculs sont complexes et croient très vite en fonction de la dimension du système [Culioli, 1994].

Les approches suivantes constituent les techniques les plus souvent utilisées pour la résolution des systèmes non linéaires.

2.2.1 La méthode du point fixe

2.2.1.1 Description de la méthode

La méthode du point fixe, appelée aussi méthode de Picard [Miellou and Spiteri, 1985], consiste à transformer l'équation du système initial $f(x) = 0$ en une autre, équivalente $g(x) = x$ ayant la même solution comme décrit dans la figure (2.3). Donc, approcher des zéros de la fonction initiale f revient à approcher les points fixes de la fonction équivalente g qui sera motivée par les exigences du théorème de point fixe. Pour mieux comprendre le mécanisme de cette méthode on a besoin d'introduire quelques définitions.

Définition 2.2.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, on appelle zéro ou racine de f tout $\bar{x} \in I$ qui satisfait $f(\bar{x}) = 0$.

Définition 2.2.2. On appelle point fixe de f tout \bar{x} qui satisfait $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Théorème 2.2.1. Théorème des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$. Alors f atteint toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$, $\forall d \in [f(a), f(b)]$, il existe $c \in I$ tel que $f(c) = d$.

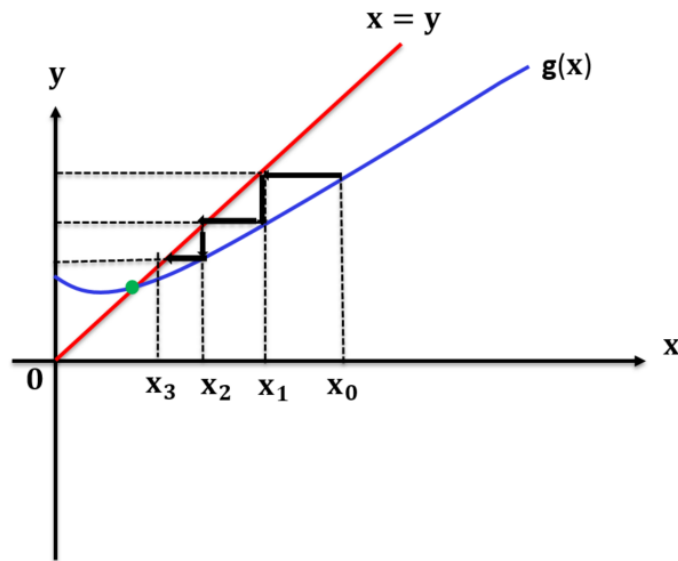


FIGURE 2.3 – Méthode de point fixe.

Corollaire 2.2.1. Soit $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(a)f(b) < 0$, c'est-à-dire que $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls et de signes opposés. Alors il existe $\bar{x} \in]a, b[$ tel que $f(\bar{x}) = 0$. Si de plus f est strictement monotone, alors \bar{x} est unique.

Corollaire 2.2.2. théorème de point fixe : Soit $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue sur $[a, b]$. Alors g admet un point fixe \bar{x} dans l'intervalle $[a, b]$.

Démonstration 2.2.1. Supposons que par l'absurde que g n'admet pas de point fixe sur $[a, b]$. Alors en particulier $g(a) > a$ et $g(b) < b$. Posons $f(x) = g(x) - x$, f est continue puisque g l'est. De plus $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires 2.2.1 permet de donner l'existence d'un zéro de f dans $[a, b]$, \bar{x} , qui est par définition de f un point fixe de g .

2.2.1.2 Exemple

On suppose de résoudre l'équation $f(x) = x^3 - 3 = 0$. On peut choisir la fonction g telle que :

1. $g(x) = x^3 + x - 3$.
2. $g(x) = x^4 - 2x$.

Avec ces deux choix on a bien $f(x) = 0 \iff g(x) = x$, à condition que l'on soit sur un intervalle ne contenant pas $x = 0$. Quelle que soit la forme utilisée, on peut toujours choisir :

$$g(x) = x + \beta(x)f(x),$$

avec β est une fonction typiquement continue et strictement positive. On essaye de construire une suite x_n qui s'approche le plus possible de la solution \bar{x} de la manière suivante :

$\forall x_0 \in]a, b[$ choisie d'une manière arbitraire, on construit par récurrence :

$$x_{n+1} = x_n + \beta(x_n)f(x_n).$$

La fonction $\beta(\cdot)$ doit être choisie de manière à assurer que cette suite doit être convergente. Pour assurer que cette suite est convergente, on a besoin d'introduire des conditions suffisantes sur la fonction g .

Définition 2.2.3. Une fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite contractante s'il existe $0 < \eta < 1$ tel que pour tout $x, y \in [a, b]$, on ait

$$|g(x) - g(y)| \leq \eta|x - y|.$$

Théorème 2.2.2. Soit $g : [a, b] \leftarrow [a, b]$ une fonction contractante. Alors, la suite x_n définie par $x_0 \in [a, b]$, $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers l'unique point fixe de g dans $[a, b]$.

Schéma et solutions approchées du point fixe

Il existe trois sources d'erreurs qui conduisent à utiliser le schéma approché.

1. le modèle mathématique étudié, représenté dans notre cas par la fonction f peut dépendre des paramètres qui sont des résultats de données expérimentales, de mesures faites avec une précision finie ou de calculs approchés.
2. les erreurs d'arrondis dues à certaines arithmétiques utilisées par les ordinateurs.
3. les erreurs d'approximation et de troncature : après un nombre fini d'étapes, les processus limites sont arrêtés et les fonctions transcendantes sont remplacées par des approximations.

Au lieu de considérer le schéma classique $x_{n+1} = g(x_n)$ pour le calcul du point fixe x de f , le calcul de x_{n+1} est fait avec une erreur $\varepsilon > 0$ tel que

$$d(x_{n+1}, g(x_n)) \leq \varepsilon. \tag{2.5}$$

Il y a toujours une possibilité que les trois erreurs peuvent s'y présenter simultanément ce qui conduit à utiliser le schéma itératif. Des études plus approfondies ont été développées pour des problèmes non linéaires par Chatelin et Frayssé [Chaitin-Chatelin and Frayssé, 1996] et par N.Higham [Higham, 2002] pour l'algèbre linéaire. Le schéma que nous allons étudier est présenté suivant l'algorithme 2.1.

Algorithme 2.1 : Algorithme de point fixe.

```

1 début
  Entrées :  $x_0 \in \mathbb{R}^N, \varepsilon > 0$ 
2 tant que  $|x_{n+1} - x_n| \geq \varepsilon$  faire
3   Calcul  $x_{n+1} = g(x_n)$ 
4   Incrémentation  $n = n + 1$ 
5 fin
6 retourner  $x_{n+1}$ 
7 fin

```

2.2.1.3 Étude de convergence

Pour mesurer la rapidité avec laquelle les suites vont converger vers le point fixe, on a besoin de présenter quelques outils. On définit par $e_n = x_n - x_*$ l'erreur de l'approximation. où x_* est le minimum et x_n l'estimation à l'itération n . La vitesse de convergence désigne la vitesse de décroissance vers 0 de l'erreur e_n . On définit comme ordre de convergence de la suite e_n vers 0, le plus grand $p > 0$ tel qu'il existe une limite finie α avec :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^p} \leq \alpha$$

On distingue différents cas :

1. Convergence linéaire ou géométrique de taux α si $p = 1$ et $\alpha < 1$.
2. Convergence superlinéaire si $p = 1$ et $\alpha = 0$.
3. Convergence quadratique si $p = 2$

Le comportement de la méthode dépend de x_0 , comment choisir ce point garantissant la convergence ?

Définition 2.2.4. *Le bassin d'attraction d'un point fixe \bar{x} de g est l'ensemble des points x_0 pour lesquels la méthode converge vers \bar{x} .*

Idéalement, le point de départ est choisi dans le bassin d'attraction. Les points fixes sont caractérisés à l'aide de la relation entre le bassin et la dérivée de g .

1. Si $0 < |g'(\bar{x})| < 1$, le point fixe est dit attractif.
2. Si $|g'(\bar{x})| > 1$, le point fixe est dit répulsif.
3. Si $g'(\bar{x}) = 1$, le point fixe est indéterminé, on peut rien dire.

Les méthodes que nous allons voir ensuite (les méthodes de Newton) fonctionnent toutes sur un principe commun qui est réinterpréter l'équation $f(x) = 0$ comme un problème du point fixe $g(x) = x$, pour une certaine fonction g . Le choix pour la fonction g va entraîner l'existence de ces différentes méthodes.

2.2.1.4 Avantages et inconvénients

La méthode de point fixe se caractérise par sa robustesse et sa simplicité lors de l'implémentation, par contre elle a une vitesse de convergence lente, vu qu'elle est seulement linéaire et le facteur de convergence est faible généralement.

2.2.2 La méthode de Newton-Raphson

Cette méthode a été exposé par Isaac Newton (1643 - 1727) et apparaît dans un contexte très général dans "*De analysis per aequationes numero terminorum infinitas*" de 1669, où Newton considère des équations polynomiales et utilise une technique de linéarisation. En 1687, il a publié un ouvrage intitulé "*Philosophiae naturalis paricipia mathematicia*", où il a décrit le cas de l'équation de Kepler connue sous la forme $x - \text{esin}(x) = M$ qui n'est pas polynomiale. Vu qu'il n'est plus possible de linéariser cette méthode par des techniques algébriques, Joseph Raphson (1648 - 1715) a présenté une nouvelle méthode de résolution des équations polynomiales dans son ouvrage "*Analysis aequationum universalis*" en 1690. Puis vient Simpson (1710 - 1761) qui a introduit dans son essai "*Essays in Mathematicks*", la méthode des fluxions c'est-à-dire les dérivées en 1740. Les premières preuves de convergence ont été développées par J. R. Mouraille (1721 - 1808) en 1768, puis J. Fourier et A. Cauchy pour le cas des fonctions d'une variable.

L. Kantorovich (1912 - 1986) et A. Ostrowski (1893 - 1986) qui sont parmi les plus grands noms de l'analyse numérique, ont apporté des résultats précis sur la convergence de la méthode de Newton. Sans oublier S. Smale, le dernier des grands noms associés à la méthode de Newton qui a introduit la "*théorie alpha*" qui est apparue très récemment, au cours des années 1980-1990. Pour plus d'informations, l'histoire de la méthode de Newton est détaillée dans Ypma [[Ypma, 1995](#)].

2.2.2.1 Description de la méthode

Cette méthode consiste à linéariser le problème non linéaire à partir des valeurs approchées de la solution et construire une suite convergente vers la solution [[Dembo and Steihaug, 1983](#)]. Si l'estimation de départ est dans le bassin de convergence, la méthode de Newton Raphson converge en général rapidement vers la solution

cherchée sinon elle diverge à cause de la direction et la longueur du pas qui sont peu fiables [Kuczmann, 2010].

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I . Pour une équation $f(x) = 0$, la méthode de Newton est fondée sur l'étude de la suite :

$$d_n = -f'(x_n)^{-1}f(x_n), \quad x_{n+1} = x_n + d_n, \quad \forall x_0 \in I. \quad (2.6)$$

Définition 2.2.5. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, d un vecteur non nul de \mathbb{R}^n est dit une direction de descente, s'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $\alpha \in]0, \lambda[$, on a $f(x + \alpha d) < f(x)$.

La méthode de Newton correspond à $d_n = -G(x_n).f'(x_n)$. d_n est une direction de descente si la matrice Hessienne $G(x_n)$ est définie positive.

L'algorithme de Newton multidimensionnel est donné dans 2.2.

Algorithme 2.2 : Algorithme de Newton.

```

1 début
  Entrées :  $x_0 \in \mathbb{R}^N, \varepsilon > 0$ 
2 pour  $n \rightarrow n + 1$  faire
3   tant que  $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > \varepsilon$  faire
4     Résoudre  $d_n = -[f'(x_n)]^{-1}f(x_n)$ 
5     Actualisation  $x_{n+1} = x_n + d_n$ 
6     Calcul de résidu  $f(x_{n+1})$ 
7   fin
8 fin
9 retourner  $x_{n+1}$ 
10 fin

```

Chaque itération de cet algorithme demande l'évaluation de la matrice Jacobienne $J = [\frac{\partial f}{\partial x_i}]$ et la résolution d'un système linéaire impliquant la matrice Jacobienne qui peut être mal conditionnée [Kelley, 2003].

2.2.2.2 Exemple 1

Pour illustrer cet algorithme, on propose d'approcher numériquement une solution du système académique très simple d'équations :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2. \\ x^2 - y^2 = 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Ce système est réécrit sous la forme : $f(x_1, x_2) = 0$,

où f est une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 qui au vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ associe le vecteur

$$Y = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 2 \\ x_1^2 - x_2^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Pour appliquer la méthode de Newton il suffit de regarder la solution $f(X) = 0$ comme solution de l'équation $F(X) = X$ avec $F(X) = X - Df(X)^{-1}f(X)$ où $DF(X)$ représente la matrice Jacobienne que l'on suppose inversible.

Dans cette exemple, la matrice Jacobienne s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix},$$

inversible pour x_1 et x_2 non nuls.

On construit la suite de vecteur (X_n) définie par X_0 pour tout entier naturel tel que :

$$X_{n+1} = F(X_n).$$

On arrête le calcul des termes successifs de la suite lorsque $\|X_{n+1} - X_n\| < \varepsilon$, où ε est la précision prise à 10^{-10} .

La figure (2.4) représente la décroissance du résidu non linéaire durant les itérations.

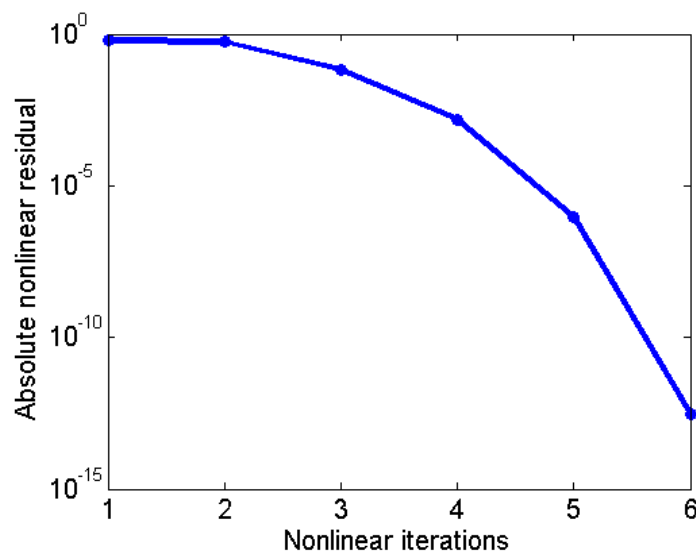


FIGURE 2.4 – Convergence de la méthode de Newton.

La méthode de Newton est caractérisée par sa convergence quadratique, c'est-à-dire que le nombre de chiffres significatifs double à chaque itération. Par contre cette convergence est locale, i.e. l'estimation initiale x_0 doit être proche de la solution exacte. Pour prouver la convergence quadratique locale de la méthode de Newton nous aurons besoin du théorème 2.2.3.

2.2.2.3 Étude de la convergence

Théorème 2.2.3. Soit $f : \Omega \rightarrow E$, une application de classe \mathcal{C}^2 , où E est un espace vectoriel normé complet et Ω un ouvert de E . Si $f(x) = 0$ a une solution $x_* \in \Omega$, alors il existe un voisinage B de x_* tel que pour tout $x_0 \in B$, alors la suite x_n généré par :

$$x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1}f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

existe et converge vers x_* . En outre, il existe un nombre réel $C > 1$ tel que pour tout $n \leq 0$

$$|x_n - x_*| \leq C^{-2^n}.$$

Démonstration 2.2.2. Comme f' est continue, que $f'(x_*)$ est inversible et que l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$ est ouvert, il existe un nombre réel $r > 0$ tel que $f'(x)$ soit inversible pour tout $x \in B(x_*, r)$. Soit $F : B(x_*, r) \rightarrow E$ l'application définie par $F(x) = x - f'(x)^{-1}f(x)$. Elle est de classe \mathcal{C}^1 sur B . Il se trouve que, quitte à diminuer r , F est contractante. Calculons sa différentielle en x_* :

$$\begin{aligned} F(x_* + h) - F(x_*) &= F(x_* + h) - x_* = h - f'(x_* + h)^{-1}(f(x_* + h)) \\ &= h - (f'(x_*) + O(\|h\|))^{-1}(f'(x_*)(h) + O(\|h\|^2)) \\ &= h - f'(x_*)^{-1} \circ f'(x_*)(h) + O(\|h\|^2) \\ &= O(\|h\|^2). \end{aligned}$$

Soit donc C tel que $\|F(x) - x_*\| \leq C\|x - x_*\|^2$ pour tout $x \in B$. Donc, il vient que la suite $\|F(x) - x_*\| \leq \|x - x_*\|$ si $\|x - x_*\| < \frac{1}{C}$. Ainsi, en remplaçant r par $\min(r, \frac{1}{C})$, il vient que la suite (x_n) définie par la relation $x_{n+1} = F(x_n)$ est défini pour tout n si x_0 appartient à $B(x_*, r)$. De plus, l'inégalité $\|x_n - x_*\| \leq C^{-1}C^{-2^n}$ entraîne que :

$$\|x_{n+1} - x_*\| \leq C^{-1}C^{-2^{n+1}}$$

Par suite, si $\|x_0 - x_*\| \leq C^{-2}$, on aura $\|x_n - x_*\| \leq C^{-1-2^n}$ pour tout n . La méthode de Newton converge quadratiquement vers x_* pour tout premier terme x_0 qui appartient à la boule de centre x_* et de rayon $\frac{1}{C^2}$ ce qui démontre le théorème.

2.2.2.4 Exemple 2

Le problème adopté pour tous les exemples numériques présentés dans ce chapitre est le problème magnétostatique non linéaire en potentiel vecteur A. Il s'agit de

résoudre :

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}_s. \tag{2.8}$$

La figure (2.6) présente le domaine d'étude de cet exemple 2D inspiré d'un Workshop T.E.A.M 13 [Nakata et al., 1995]. Il est constitué de deux noyaux ferromagnétiques en forme "U" disposées symétriquement sur les deux côtés d'une troisième plaque centrale qui est entourée par une bobine de courant continu, ce qui fait quatre entrefers. Comme les plaques ont des propriétés ferromagnétiques non linéaires, le point mesuré de la courbe $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ représenté dans la figure (2.5) est pris selon le modèle de Marrocco 1.2.3.1. Les caractéristiques des différents domaines physiques sont :

- Air : perméabilité magnétique $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.
- Fer : perméabilité non linéaire $\mu(\mathbf{B})$.
- Bobines : les forces magnétomotrices de la bobine d'excitation sont de 1000 At et 3000 At, ce qui est suffisant pour saturer les plaques.

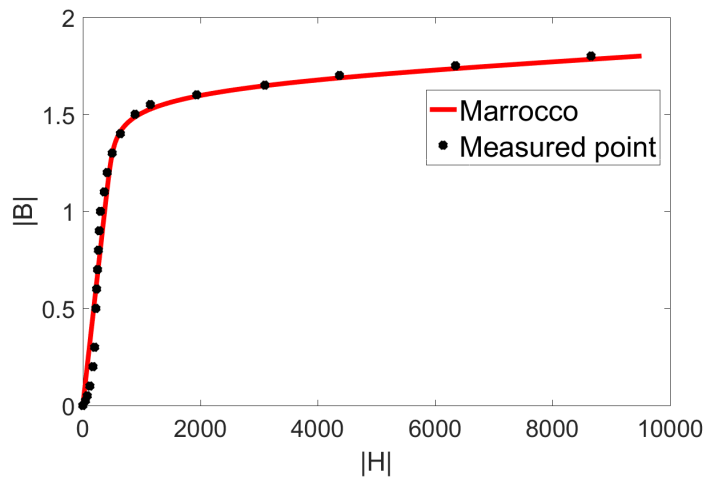


FIGURE 2.5 – Loi de comportement du matériau ferromagnétique.

Différentes finesses de maillages sont adoptés pour ce problème comme décrit dans le tableau (2.1).

Maillages	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3
Nombre d'éléments	7 122	28 488	113 952
Nombre de nœuds	1207	4828	19 313

TABLE 2.1 – Informations sur les maillages utilisés.

La méthode de Newton-classique est testé pour différentes finesses de maillages et

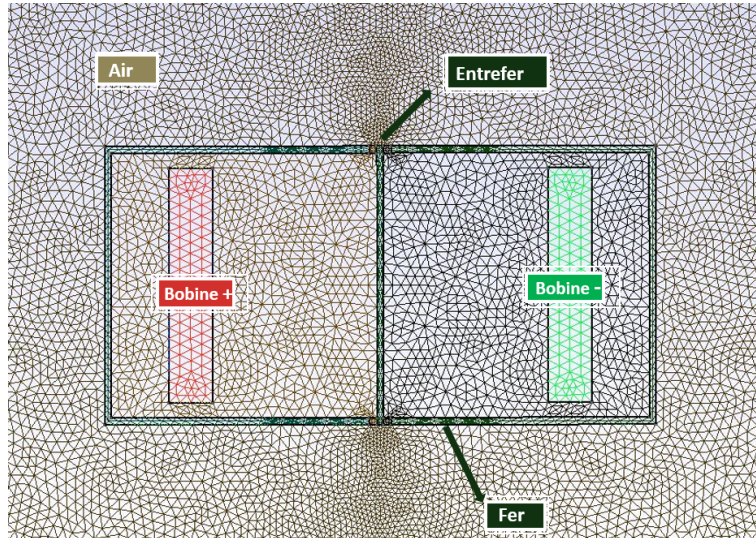


FIGURE 2.6 – Maillage du problème magnétostatique non linéaire.

différentes valeurs de courant (500, 1000, 2000 et 3000 At) avec le point de départ classique $\mathbf{A} = 0$.

Les résultats de convergences sont résumés dans le tableau (2.2).

Courants	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3
500 At	5	8	10
1000 At	9	Diverge	Diverge
2000 At	Diverge	Diverge	Diverge
3000 At	Diverge	Diverge	Diverge

TABLE 2.2 – Résultat de convergence pour différents maillages.

On remarque que la méthode de Newton diverge dès que la taille de système devient de plus en plus élevée et dès que la forte saturation apparaitre.

2.2.2.5 Avantages et inconvénients

L'avantage majeur de la méthode de Newton par rapport à une méthode de point fixe est sa vitesse de convergence d'ordre 2. Cette convergence reste toujours locale. On peut d'ailleurs remarquer que si la méthode ne converge pas, par exemple si l'estimation initial x_0 n'a pas été choisie dans le bassin de convergence, alors la méthode peut diverger très vite. L'inconvénient majeur de la méthode de Newton est son coût : l'évaluation de la matrice de la Jacobienne est demandée à chaque itération, et d'autre part la résolution de systèmes linéaires $f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -f(x_n)$ impliquant la matrice Jacobienne qui peut être mal-conditionnée. (On rappelle que

pour résoudre un système linéaire, on ne calcule pas l'inverse de la matrice, mais plutôt la factoriser sous la forme LU par exemple, ensuite on calcule les solutions des systèmes avec des matrices triangulaires.)

2.2.3 Les techniques de globalisation

Les méthodes du type Newton ne possèdent qu'une convergence locale. Cela signifie que l'estimation initiale x_0 doit être assez proche de la solution x_* pour assurer la convergence. Par conséquent, de nombreuses techniques ont été développées pour forcer la convergence et atteindre un niveau acceptable de robustesse à partir d'une estimation initiale quelconque. Il s'agit de mettre en œuvre un calcul automatique du coefficient de relaxation associé au méthodes de Newton. On pourra citer les méthodes de recherche linéaire comme décrit dans [Kelley, 1995; Eisenstat and Walker, 1996] ou utilisés inexactement dans [Eisenstat and Walker, 1994; Pu and Zhang, 2000] et les méthodes à régions de confiance comme décrit dans [Sorensen, 1982; Conn et al., 2000; Wright and Nocedal, 2006].

La recherche linéaire est facile à adapter à divers problèmes en particulier aux problèmes de grandes taille et aux plusieurs algorithmes de résolution mais elle est parfois moins robuste que la globalisation par région de confiance.

2.2.3.1 Les méthodes de recherche linéaire

À partir d'une direction d_n choisie, la longueur du pas α_n est déterminée pour assurer une réduction suffisante de la fonction f . La distance pour se déplacer le long de la direction d_n peut être trouvée en résolvant approximativement le problème de minimisation suivant :

$$\min_{\alpha > 0} g_n(\alpha), \quad g_n : \alpha \rightarrow g_n(\alpha) = f(x_n + \alpha d_n). \quad (2.9)$$

Il peut être inutilement coûteux pour chercher le minimum de la fonction (2.9) le long de la direction de la descente, car le minimum global de la fonction peut ne pas se trouver nécessairement sur cette direction. Une meilleure idée est de générer un nombre d'essais limités de longueur de pas jusqu'à trouver un qui soit acceptable. Au nouveau point, on calcule une nouvelle direction de recherche et une nouvelle longueur de pas, et le processus se répète comme décrit dans la suite :

$$f(x_{new}) = f(x_{n-2}) + \alpha(f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})), \quad (2.10)$$

avec $f(x_{n-1})$ est l'estimée de f , obtenue à l'itération $n-1$. À l'itération n , la nouvelle fonction $f(x_{new})$ est utilisée à la place de $f(x_{n-1})$ et $(f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}))$ définit la

direction.

Choix du pas

Dans cette partie nous allons définir les différentes manières pour déterminer un pas α_n le long d'une direction de descente d_n . Deux objectifs existants :

1. Faire décroître f suffisamment tel que :

$$f(x_n + \alpha_n d_n) \leq f(x_n) + u, \quad (2.11)$$

avec u est un terme négatif qui joue un rôle important dans la convergence de l'algorithme. En effet, s'il existe une constante K telle que $f(x_n) \geq K$ pour toute valeur de n alors on a $u_n \rightarrow 0$. De plus, on peut montrer que le gradient lui-même tend vers zéro grâce à la convergence de cette suite u_n .

2. Empêcher le pas $\alpha_n > 0$ d'être trop petit et trop proche de zéro ce qu'on traduit par le phénomène de stagnation (si le pas décroît trop vite, la somme des pas s'arrête avant d'atteindre le minimum ou elle peut atteindre le minimum mais de plus en plus lentement).

Recherche exacte

Pour minimiser la fonction f , la méthode classique était de chercher à minimiser le critère le long de la direction d_n et déterminer α_n solution de problème

$$\min_{\alpha > 0} g_n(\alpha),$$

c'est ce que l'on appelle la règle de Cauchy et le pas déterminé par cette règle appelé pas de Cauchy. Pour certains cas, une règle dite de Curry est introduite pour utiliser le plus petit point stationnaire de g_n qui fait décroître cette fonction telle que :

$$\alpha_n = \inf \{ \alpha \geq 0 : g'_n(\alpha) = 0, g_n(\alpha) < g_n(0) \}.$$

Les deux règles de Cauchy et de Curry sont illustrées dans la figure (2.7). Elles sont utilisées dans des cas particuliers, par exemple si g_n est quadratique. De plus, pour une fonction non linéaire arbitraire, la détermination de pas de Cauchy ou de Curry demande un temps de calcul inacceptable.

La méthode de dichotomie elle est considérée comme la première méthode utilisée historiquement pour rechercher un pas optimal dans le cas où on dispose seulement de l'évaluation numérique de la fonction. Elle est basée sur une méthode

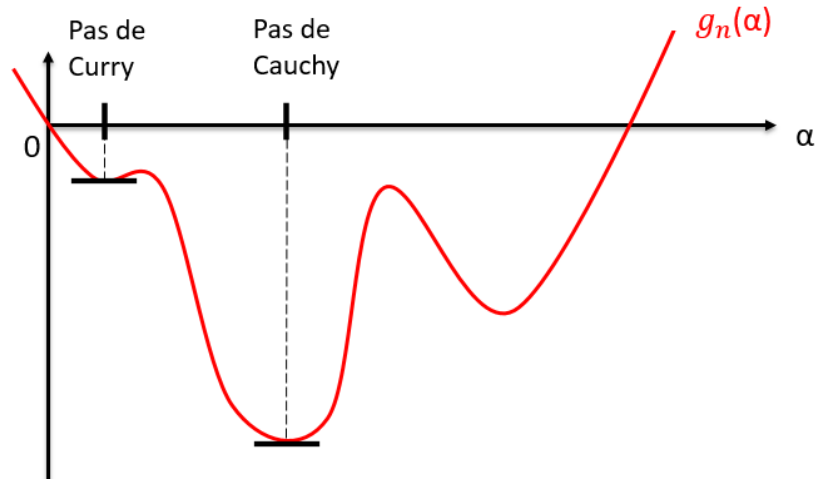


FIGURE 2.7 – Règles de Cauchy et de Curry.

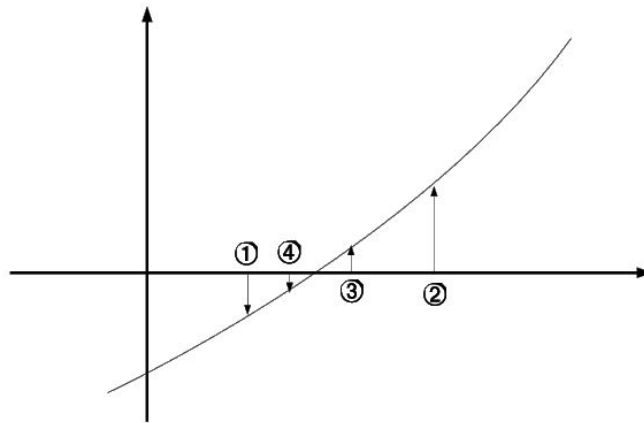


FIGURE 2.8 – Dichotomie

de réduction qui sert à diminuer α de moitié à chaque itération de Newton de façon continue. La méthode de dichotomie est schématisée dans la figure (2.8).

L'intervalle initial $[\textcircled{1}, \textcircled{2}]$ est divisé en deux par $\textcircled{3}$, puis l'intervalle devient $[\textcircled{1}, \textcircled{3}]$. On choisit un intervalle $[a, b] = [\textcircled{1}, \textcircled{2}]$ encadrant une racine de la fonction f étudiée. On divise cet intervalle en 2 par un point $c = \textcircled{3}$. On évalue $f(a).f(c)$, si $f(a).f(c) < 0$, alors le nouvel intervalle devient (a, c) , sinon (c, b) . Et l'on recommence ainsi jusqu'à ce que l'intervalle satisfasse le critère de convergence.

Approximation quadratique cette méthode consiste à interpoler la fonction entre les valeurs connues par un polynôme pour lequel on peut résoudre explicitement le problème de minimisation. Soit un polynôme de degré 2 interpolant la fonction f aux points a, b, c . Le minimum du polynôme interpolant est atteint en :

$$c_* = \frac{1}{2}(a + c) + \frac{1}{2} \frac{(f(a) - f(c))(c - b)(b - a)}{(c - b)f(a) + (b - a)f(c) + (a - c)f(b)}$$

La fonction est évalué à c_* , ce nouveau point remplaçant un des trois autres, puis un autre point est prédit, encore par interpolation quadratique en utilisant le nouvel ensemble de trois points.

La méthode est terminée quand la fonction prédite à un nouveau point est suffisamment proche de la vraie valeur avec une tolérance donnée comme décrit dans 2.3. Cet

Algorithme 2.3 : Modèle quadratique.

```

1 début
  Entrées : Initialisation de  $\{a, b, c\} \in \mathbb{R}$  tel que  $f(c) < f(a) < f(b)$ 
2 tant que  $|c - c_*| > \varepsilon$  faire
3   Calcul  $c_*$ 
4   Actualisation de triplet  $\{a, b, c\}$  en incluant  $c_*$ 
5 fin
6 retourner  $c_*$ 
7 fin

```

algorithme souffre parfois d'instabilités qui conduisent à la divergence. Par exemple, l'algorithme peut faire, un pas énorme si les trois points sont sur une ligne. De plus, il y'a toujours une possibilité qu'à n'importe quel pas, les trois points peuvent déterminer une parabole avec un maximum au lieu qu'un minimum. Après chaque pas, il y a un choix à faire sur lesquels 2 des 3 précédents points à retenir pour le prochain pas. Il est plus raisonnable et facile de retenir les trois plus récents points, mais ce choix peut conduire à rejeter les meilleurs points et avoir des instabilités.

Recherche Inexacte

Au lieu de demander que α_n minimise g_n de manière exacte, il est préférable d'imposer des conditions plus faciles à vérifier et moins restrictives afin d'assurer la convergence des algorithmes. En effet, il y aura tout un intervalle de pas ou plusieurs intervalles vérifiant ces conditions au lieu d'un unique pas ou quelques pas afin de rendre leur recherche plus facile. C'est que l'on fait avec les règles d'Armijo, de Glodstein et de Wolfe décrites ci-dessous.

Règle d'Armijo une condition naturelle demandée pour accepter une longueur de pas α_n est d'avoir une réduction de f tel que $f(x_{n+1}) < f(x_n)$. Cette condition n'est pas suffisante pour garantir la convergence de la suite x_n vers un minimum de f . D'où la condition d'Armijo [Armijo, 1966] qui assure la décroissance de f d'une

portion $w_1 \in]0, 1[$ tel que :

$$f(x_n + \alpha_n d_n) \leq f(x_n) + w_1 \alpha_n \nabla f(x_n)^T d_n. \tag{2.12}$$

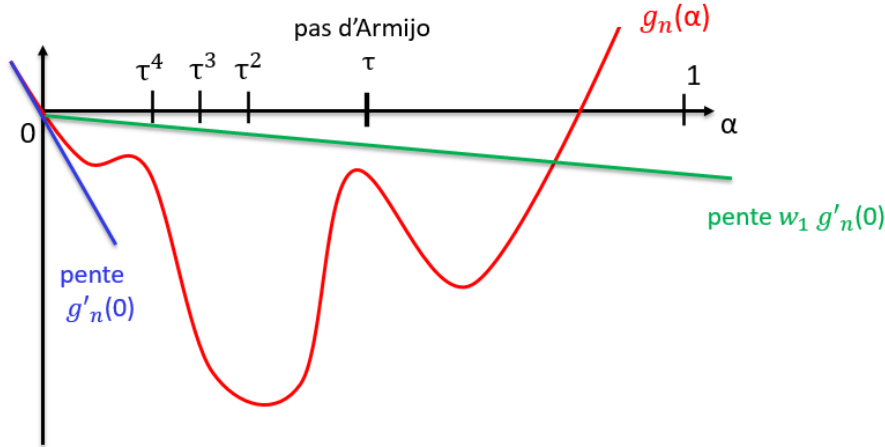


FIGURE 2.9 – Règles d’Armijo.

La figure (2.9) illustre la diminution suffisante pour la condition (2.12) qui est toujours vérifié si $\alpha_n > 0$ est suffisamment petit. En effet, le membre droit de (2.11) est une fonction linéaire à pente négative car w_1 est choisi dans $]0, 1[$. Typiquement, w_1 est égale à 10^{-4} .

La règle d’Armijo peut conduire à accepter des pas trop petits. Cela pouvait conduire à une stagnation ou fausse convergence. C’est-à-dire qu’il y’a une possibilité de se trouver dans une situation où l’algorithme converge vers une valeur qui n’est pas un minimum. Pour empêcher des pas trop petits, un mécanisme supplémentaire est ajouté. Il repose sur deux techniques appelées respectivement la technique de rebroussement ou la condition de Goldstein.

Règle de Goldstein cette règle impose les deux conditions à la fois :

$$\begin{cases} f(x_n + \alpha_n d_n) \leq f(x_n) + w_1 \alpha_n \nabla f(x_n)^T d_n, \\ f(x_n + \alpha_n d_n) \geq f(x_n) + (1 - w_1) \alpha_n \nabla f(x_n)^T d_n. \end{cases} \tag{2.13}$$

Pour ne pas exclure le minimum de la recherche dans certains cas, il est nécessaire de prendre $w_1 < \frac{1}{2}$. Le lemme (2.2.1) montre qu’il est toujours possible de trouver un pas vérifiant les conditions (2.13) lorsque g_n est continue et bornée inférieurement.

Lemme 2.2.1. Si $g_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par (2.9) est continue et bornée inférieurement, si d_n est une direction de descente de f en x_n et si $w_1 \in]0, 1[$, alors il existe un pas $\bar{\alpha}_n > 0$ tel que $g_n(\bar{\alpha}_n) = f(x_n) + w_1 \bar{\alpha}_n \nabla f(x_n)^T d_n$.

Démonstration 2.2.3. Soit $F = \{\alpha > 0 : (2.12) \text{ est vérifié pour tout } \alpha_n \in [0, \alpha]\}$. Comme $w_1 < 1$ et $g'_n(0) < 0$, F est non vide. D'autre part, $\bar{\alpha}_n = \sup F$ est fini, car g_n est bornée inférieurement et $w_1 > 0$. Par continuité de g_n , le résultat est vérifié avec le pas $\bar{\alpha}_n$.

Recherche linéaire avec rebroussement cette méthode est connue par sa simplicité. Elle permet d'obtenir un pas vérifiant la règle d'Armijo (2.12). Le pas $\alpha_n = \tau^{i_n}$ où $\tau \in]0, 1[$ est une constante et i_n est le plus petit entier positif vérifiant la condition d'Armijo (2.12). α_n est alors considéré le plus grand réel de la suite décroissante $\{\tau^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ (d'où le nom de rebroussement). Le pas initial α_n est pris à 1 dans les méthodes de Newton, mais, peut avoir des valeurs différentes dans d'autres algorithmes tels que les méthodes à direction de descente ou le gradient conjugué. Si le pas initiale n'est pas acceptable, on rebrousse chemin en essayant des pas plus petits τ, τ^2, \dots , ce qui permet de vérifier la condition (2.12) et garantir que le pas ne sera pas trop petit.

La méthode d'Armijo à rebroussement est présenté dans l'algorithme 2.4.

Algorithme 2.4 : Algorithme de rebroussement pour la règle d'Armijo.

1 **début**

Entrées : $\alpha > 0, \tau \in]0, \frac{1}{2}[, i = 1$

2

3 **tant que** $f(x_n + \alpha_n d_n) > f(x_n) + w_1 \alpha_n \nabla f(x_n)^T d_n$ **faire**

4 Choisir $\alpha_n^{i+1} \in [\tau \alpha_n^i, (1 - \tau) \alpha_n^i]$

5 $i = i + 1$ et $\alpha_n = \alpha_n^i$

6 **fin**

7 **fin**

Condition de Wolfe cette condition consiste toujours à déterminer un pas α_n , appelé pas de Wolfe, vérifiant la condition (2.12). Comme la condition d'Armijo est satisfaite pour toutes les valeurs suffisamment petites de α_n , la condition de Wolfe permet d'éviter des pas trop courts en exigeant que ce dernier satisfasse les deux inégalités suivantes :

$$f(x_n + \alpha_n d_n) \leq f(x_n) + w_1 \alpha_n \nabla f(x_n)^T d_n, \quad (2.14)$$

$$(\nabla f(x_n + \alpha_n d_n))^T d_n \geq w_2 \nabla f(x_n)^T d_n, \quad (2.15)$$

tout en imposant $0 < w_1 < w_2 < 1$. La réduction de f est proportionnelle à la longueur du pas α_n et à la dérivée directionnelle de $\nabla f(x_n)^T d_n$. Comme décrit dans

la figure (2.10), on peut observer que $g'_n(0) = f'(x_n)d_n < 0$ et l'inégalité (2.15) s'écrit aussi $g'_n(\alpha_n) \geq w_2 g'_n(0)$. En pratique, la valeur de $w_1 = 10^{-4}$ et $w_2 = 0.99$ s'utilisent fréquemment. Il est possible de forcer la condition de Wolfe à devenir plus restrictive, vu que les conditions de Wolfe sont vérifiées par une longueur de pas α_n sans être nécessairement proche d'un minimum de g_n . Il s'agit de remplacer la condition (2.15) par :

$$|(\nabla f(x_n + \alpha_n d_n))^T d_n| \leq w_2 |\nabla f(x_n)^T d_n|. \tag{2.16}$$

C'est la condition "forte" de Wolfe, et la seule différence avec la condition de Wolfe est que les trop grandes pentes de $g'_n(\alpha)$ ne sont pas acceptées.

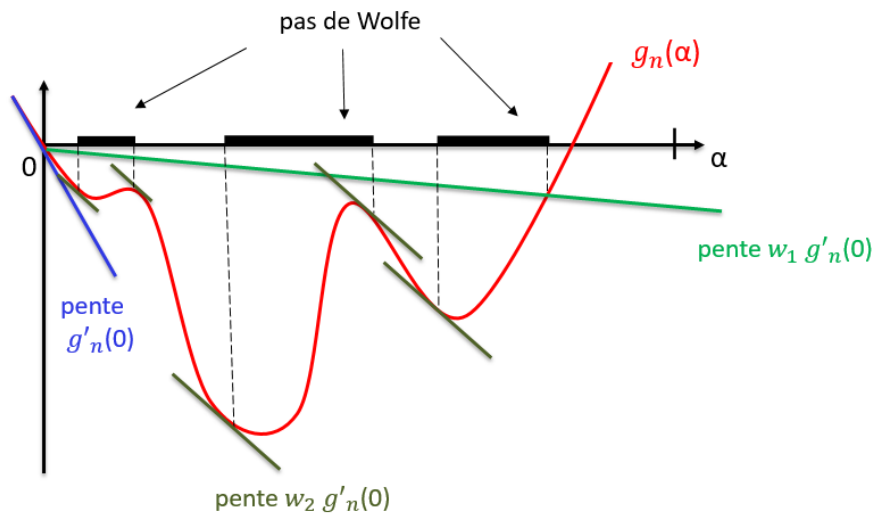


FIGURE 2.10 – Règle de Wolfe.

Le théorème 2.2.4 montre l'existence du pas de Wolfe.

Théorème 2.2.4. *Si $g_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par (2.9) est continue et bornée inférieurement, si d_n est une direction descente de f en x_n et si $0 < w_1 < w_2 < 1$, alors il existe un pas α_n qui satisfait les inégalités (2.14) et (2.15) définissant la règle de Wolfe.*

(Voir la preuve dans [Dennis and Schnabel, 1996]).

L'étude de la convergence dans le cas de la règle de Wolfe s'exprime par le résultat suivant :

$$\theta_n = \arccos \frac{-\nabla f(x_n)^T d_n}{\|\nabla f(x_n)\| \|d_n\|}, \tag{2.17}$$

avec θ_n est l'angle entre la direction de descente d_n et $-\nabla f(x_n)$ et on désigne :

$$\mathcal{N}_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_1)\}, \tag{2.18}$$

l'ensemble de sous-niveau déterminé par le premier itéré x_1 . Cela se traduit par la condition de Zoutendijk [Zoutendijk, 1970]

Théorème 2.2.5. *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un voisinage de \mathcal{N}_1 et \mathcal{C}^1 sur \mathcal{N}_1 . On considère un algorithme à directions de descente d_n , qui génère une suite $\{x_n\}$ en utilisant la règle de Wolfe (2.14)-(2.15) et tel que $\{f(x_n)\}$ soit borné inférieurement. Alors on a*

$$\sum_{n \geq 1} \|\nabla f(x_n)\|^2 \cos^2 \theta_n < \infty. \quad (2.19)$$

D'après le théorème 2.2.5, la règle de recherche linéaire de Wolfe permet de faire converger l'algorithme du gradient ($\theta_n = 0$) ou tout algorithme qui maintient le $\cos \theta_n$ uniformément positif. On obtient, alors l'expression de la convergence de l'algorithme avec $\nabla f(x_n) \rightarrow 0$.

2.2.3.2 Les méthode à régions de confiance

Les méthodes décrites précédemment, effectue une recherche le long d'une direction d_n choisie pour déterminer un pas assurant une réduction suffisante de la fonction f . Pour obtenir la convergence globale, il faut non seulement avoir des longueurs de pas bien choisies mais le choix de la direction de recherche joue aussi un rôle important. Prenant l'algorithme de résolution Newton, si sa direction n'est pas satisfaisante, c'est probablement parce que le modèle quadratique ne représente pas bien la fonction dans la région contenant le point de Newton. En effet, lorsque, l'angle θ_n définit en (2.17) tend vers $\frac{\pi}{2}$ (voir le théorème 2.2.5), il y'a une possibilité de corriger la direction d_n lorsque le $\cos \theta_n$ passe en dessous d'un seuil strictement positif fixé d'une manière arbitraire, par contre il existe le risque de détériorer la qualité des performances supposées portées par les directions d_n . Au lieu de garder la même direction et de raccourcir le pas, on choisit un pas plus petit et on détermine une nouvelle direction. C'est ce qu'on appelle la méthode à régions de confiance connue par sa propriété de redressement de la direction. La première notion qui caractérise cette méthode est sa région de confiance. La région de confiance est une sphère dont le rayon traduit la confiance qu'on l'on a envers les modèles créés. Si nous arrivons à construire des modèles qui respectent bien f , alors la région de confiance devient de plus en plus grande. Inversement, si les modèles créés ne satisfont pas f , la région de confiance se rétrécit.

À l'intérieur de région de confiance, on y définit un modèle m_n facilement minimisable qui fournit une bonne approximation de la fonction f dans une certaine région

R_n de confiance autour d'un point x_n donnée telle que :

$$R_n = \{x_n + d_n, \|d_n\| \leq \Delta_n\}.$$

Cette région est centrée en x_n et son rayon vaut Δ_n . Elle doit être suffisamment petite pour que :

$$m_n(x_n + d_n) \cong f(x_n + d_n). \quad (2.20)$$

Donc, au lieu de résoudre l'équation

$$f(x_{n+1}) = \min_{\|d_n\| \leq \Delta} f(x_n + d_n),$$

on résout $m_n(x_{n+1}) = \min_{\|d_n\| \leq \Delta_n} m_n(x_n + d_n)$ pour trouver x_{n+1} .

Pour assurer une bonne performance de cette méthode, il faut bien choisir le rayon de région de confiance. En effet, choisir un rayon trop petit conduit à une fausse convergence, c'est-à-dire à l'intérieur de la région de confiance, la solution converge vers un point qui ne correspond pas au minimum de la fonction, ce qui ramène à faire des calculs inutiles. Inversement, si le rayon est trop grand, le point qui permet de minimiser la fonction-modèle sera assez éloigné du point qui minimise la fonction objective. Dans ce cas, une étape de réduction de la taille de la région (diminution de Δ_n) est mise en œuvre.

Le rayon de la région de confiance est déterminée en se basant sur la performance de l'algorithme au cours des dernières itérations. Le choix du rayon est résumé en trois étapes :

1. Commencer par une valeur arbitraire de rayon.
2. Évaluer la qualité du point obtenu (en introduisant la concordance ρ_n qui est le ratio entre la décroissance de f et celle du modèle).
3. Adapter le rayon en fonction de la qualité.

Pour mieux comprendre le mécanisme des régions de confiance, on donne des seuils de concordance η_1 et η_2 tels que $0 < \eta_1 \leq \eta_2 < 1$ ($\eta_1 = 0.01$ et $\eta_2 = 0.09$).

La deuxième étape de l'algorithme ($\rho_n \geq \eta_1$) a la même idée que la recherche linéaire d'Armijo. La seule différence est que à chaque réduction du rayon de confiance, le déplacement d_n n'est pas colinéaire au précédent, mais quand Δ_n est petit elle est mieux alignée sur $-\nabla f$.

Les méthodes à régions de confiance classiques

Les méthodes à régions de confiance, dites classiques, utilisent des fonctions modèles quadratiques. Les deux premiers termes qui interviennent dans la fonction-modèle

m_n , sont les mêmes premiers termes intervenant dans la série de Taylor de f autour de x_n . on peut écrire donc :

$$m_n^{quad}(x_n + d) = f(x_n) + \nabla f(x_n)^T d + \frac{1}{2} d^T B_n d, \quad (2.21)$$

avec $\nabla f(x_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne le gradient de f au point x_n et $B_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique représentant l'Hessien de f à l'itérée x_n .

Les régions de confiance ajoutent au problème initial une contrainte sur la longueur du pas. On cherche la solution de problème suivant :

$$\min_{d \in \mathbb{R}^n} m_n^{quad}(x_n + d) = f(x_n) + \nabla f(x_n)^T d + \frac{1}{2} d^T B_n d, \quad (2.22)$$

sous la contrainte $\|d\| \leq \Delta_n$. On précise que la norme euclidienne $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ est choisie. L'utilisation de cette norme permet de prouver que la fonction m_n^{quad} est minimisée à l'intérieur de la région de confiance par la solution d_n^* du problème (2.22). La figure (2.11) illustre la méthode à région de confiance.

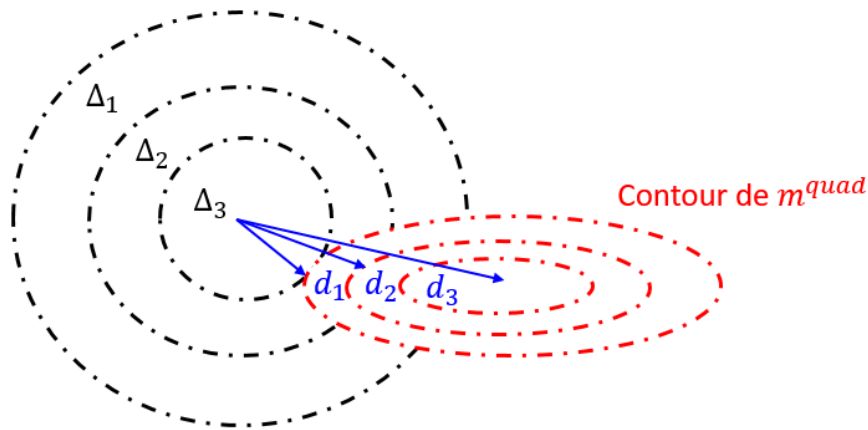


FIGURE 2.11 – La méthode à régions de confiance.

Newton-région de confiance

La globalisation de l'algorithme de Newton par régions de confiance existe quand l'Hessien exact est utilisée. Autrement dit quand la fonction modèle présentée dans (2.22) est construite en utilisant les trois premiers termes de la série de Taylor de f en x_n . Lorsque f est bien approchée par un quadratique (par exemple, proche d'un optimum), la méthode de Newton converge très rapidement en exploitant les informations de second ordre de la matrice hessienne. Cependant, lorsque la fonction n'est pas bien approximée par un quadratique, soit parce que le point de départ est

loin de l'optimum, ou la fonction a une forme plus irrégulière, les pas de Newton peuvent être très grands et mènent à une divergence.

L'itération de base de Newton peut être écrite sous la forme suivante :

$$x_{n+1} = x_n - G_n^{-1} \nabla f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.23)$$

avec $\nabla f(x_n)$ est le gradient de f , $G_n = \nabla^2 f(x_n)$ est la matrice Hessian qui contient les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f . L'algorithme présenté dans (2.5) demande que f soit deux fois dérivables pour tout point x appartenant au domaine de f et que ses dérivées puissent être évaluées d'une manière explicite. Pour appliquer la méthode à région de confiance, l'itération de Newton doit être modifiée pour différentes raisons. Premièrement, l'itération initiale doit être proche du minimum local pour assurer la convergence de la méthode. Deuxièmement, même si l'itération converge à une valeur x_* ($\nabla f(x_*) = 0$), il n'y a aucune garantie que x_* sera un minimum local. Troisièmement, l'itération x_{n+1} peut ne pas être bien définie avec (2.23) si le Hessian G_n est singulier.

Avant de présenter l'algorithme de Newton à région de confiance, on introduit une factorisation de la matrice hessienne tel que, pour chaque n , on a

$$B_n = J_n^T G_n J_n, \quad (2.24)$$

avec $B_n = B_n^T$ et J est la jacobienne du résidu. Pour chaque n , on introduit $\psi_n(d) = f(x_n + J_n d)$. Cette fonction $\psi_n(d)$ peut être vue comme une fonction objective locale. Les trois premiers termes de série de Taylor de la fonction ψ_n autour de $d = 0$ présentent un modèle quadratique local tel que :

$$\psi_n(d) = f_n + g_n^T d + \frac{1}{2} d^T B_n d, \quad (2.25)$$

avec $g_n^T = \nabla f(x_n)^T J_n$ et $f_n = f(x_n) = \psi(0)$. La solution de (2.25) est cherché sous la contrainte $\|d\| \leq \Delta_n$.

Relation entre la méthode de recherche linéaire et la méthode de région de confiance

Il existe des relations intéressantes entre ces deux techniques de globalisations. Par exemple, les critères utilisés pour accepter le pas sont très similaires. Supposons que la recherche linéaire nécessite seulement la condition d'Armijo-Glodstein-Wolfe défini par :

$$f(x_n + \alpha_n d_n) \leq f(x_n) + w_1 \alpha_n \nabla f(x_n)^T d_n, \quad (2.26)$$

pour accepter le pas d_n . Cette condition peut être écrite comme :

$$\frac{f(x_n) - f(x_n + \alpha_n d_n)}{-\alpha_n \nabla f(x_n)^T d_n} \geq w_1, \quad (2.27)$$

qui est similaire à la condition utilisée dans la méthode de région de confiance :

$$\frac{f(x_n) - f(x_n + d_n)}{-\nabla f(x_n)^T d_n - d_n^T B_n d_n} \geq \eta. \quad (2.28)$$

La principale différence entre ces deux familles réside dans l'ordre par lequel elles estiment la direction et la longueur du pas. Les techniques de recherche linéaire estiment en premier lieu une direction, puis proposent la longueur de pas à minimiser et enfin mettre à jour la solution. À l'inverse, les méthodes dites à régions de confiance choisissent l'amplitude maximale autorisée, notée Δ_n et connue sous le nom de rayon de confiance, calculent ensuite la direction et la meilleure longueur du pas et résolvent le problème à l'aide d'un modèle approché. Si l'amélioration effectuée est acceptable, le rayon de région de confiance et la solution sont mis à jour.

Algorithme 2.5 : Newton-région de confiance.

Entrées : Soit $n=1$, $0 < \eta_1 \leq \eta_2 < 1$, $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2$ des constantes fixe,
soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$ et $\Delta_1 > 0$

1 **répéter**

2 | Évaluer $f_n = f(x_n)$; $G_n = \nabla^2 f(x_n)$;

3 | Factoriser $B_n = J_n^T G_n J_n$;

4 | Évaluer $g_n = J_n^T \nabla f(x_n)$;

5 **jusqu'à** *Convergence*

6 Calculer une solution d_n de problème $\min \{\psi_n(d) : \|d\| \leq \Delta_n\}$: avec

$$\psi_n(d) = f_n + g_n^T d + \frac{1}{2} d^T B_n d$$

Calculer

$$\rho_n = \frac{\phi_n(0) - \phi_n(d_n)}{\phi_n(0) - \psi_n(d_n)}, \quad \phi_n(d) = f(x_n + J_n d)$$

si $\rho_n < \eta_1$ **alors**

7 | Adéquation entre le modèle et la fonction est mauvaise \rightarrow rejeter le point et
réduire fortement le rayon $\Delta_n = \gamma_1 \Delta_n$ (réduire la région de confiance);

8 | Aller au 6

9 **si** $\rho_n \geq \eta_1$ **alors**

10 | Adéquation entre le modèle et la fonction est bonne \rightarrow accepter le point et
réduire un peu le rayon. $x_{n+1} \leftarrow x_n + J_n d_n$ (réduire un peu la région de
confiance)

11 **si** $\rho_n > \eta_2$ **alors**

12 | Adéquation entre le modèle et la fonction est excellente \rightarrow accepter le
point et augmenter le rayon; $\Delta_n = \gamma_2 \Delta_n$ (Agrandir la région de
confiance)

13 | $\Delta_{n+1} = \Delta_n$, $n = n + 1$;

14 Aller à 13.

2.2.3.3 Tests numériques

Les techniques de globalisation : les méthodes de recherches linéaires et les méthodes à régions de confiance sont testés et validés sur le problème (2.8) en utilisant le même exemple (2.6) décrit précédemment. Deux finesses de maillages (maillage 2 et maillage 3) sont testées pour différentes valeurs de courant.

Exemple1

Une comparaison entre la méthode de Newton exacte et la méthode de Newton globalisée à l'aide des règles de recherche linéaire avec rebroussement est présentée dans la figure (2.12) pour le maillage 2 et pour un courant 2000 At. Dans cet exemple la condition de Goldestein (2.15) n'est pas nécessaire car l'utilisation de la technique de rebroussement évite des longueurs de pas excessivement petites.

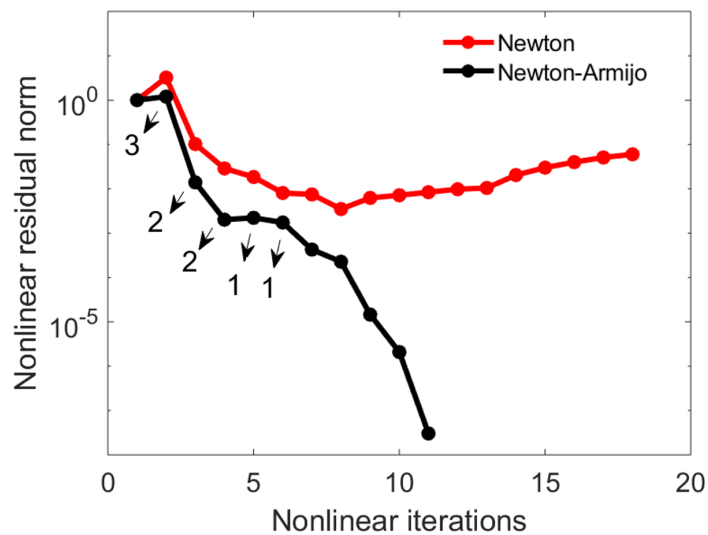


FIGURE 2.12 – La méthode de Newton-classique vs Newton-Armijo.

La méthode de Newton classique diverge vu que l'estimation initiale est loin de la solution. Contrairement à la méthode de Newton-Armijo qui arrive à converger grâce à une combinaison entre la méthode classique de Newton et la technique de recherche linéaire avec rebroussement. La longueur de pas subit une réduction suffisante par la condition d'Armijo (2.12).

Les flèches sur la figure indiquent le nombre de fois où la longueur de pas a été réduite pour chaque itération. Le coût des premières itérations est important à cause du nombre d'évaluations de la fonction f . La convergence quadratique de la méthode de Newton-Armijo apparaît seulement à partir de l'itération 8 où le résidu décroît avec le pas non corrigé de Newton.

Exemple 2

Le problème décrit dans (2.6) est utilisé ici avec deux tailles de maillages différents : maillage 2 ($N = 28\,488$ éléments) et maillage 3 ($N = 113\,952$ éléments). Une comparaison entre la méthode de recherche linéaire avec rebroussement et la méthode de région de confiance appliquées à la méthode de Newton est présentée pour les différents maillages respectivement dans les tableaux (2.3) et (2.4).

Concernant l'algorithme de recherche linéaire inexacte, les conditions de Wolfe (2.14) et (2.16) sont utilisés tel que :

$$f(x_{n+1}) \leq f(x_n) + 0.01 \nabla f(x_n)^T d_n, \forall n$$

$$|\nabla f(x_n)^T d_n| \leq -0.9 |\nabla f(x_n)^T d_n|, \forall n$$

Concernant la méthode de région de confiance, la longueur de pas est déterminé suivant l'algorithme 2.5, le rayon initial est pris tel que $\Delta_0 = 1$ et les constantes η_1 et η_2 sont fixées tels que $\eta_1 = 0.25$ et $\eta_2 = 0.75$.

Courants (At)	Recherche linéaire		Régions de confiance	
	Itérations (f)	Temps CPU	Itérations (f)	Temps CPU
1000	8 (7)	0m29s	6 (6)	0m20s
1500	10 (9)	0m33s	9 (9)	0m27s
2000	13 (12)	0m54s	14 (14)	0m55s
2500	15 (11)	1m04s	13 (13)	0m59s
3000	16 (13)	1m17s	15 (15)	1m11s

TABLE 2.3 – Recherche linéaire et région de confiance pour maillage 2.

Courants (At)	Recherche linéaire		Régions de confiance	
	Itérations (f)	Temps CPU	Itérations (f)	Temps CPU
1000	13 (9)	2m12s	19 (19)	3m21s
1500	17 (19)	3m27s	25 (25)	4m12s
2000	22 (32)	4m07s	29 (29)	4m59s
2500	21 (34)	4m37s	32 (32)	5m02s
3000	24 (33)	5m17s	30 (30)	5m58s

TABLE 2.4 – Recherche linéaire et région de confiance pour maillage 3.

Pour les deux algorithmes et pour chaque valeur de courant, on présente le nombre d'itérations non linéaires et le nombre d'évaluations de la fonction f (indiqué entre parenthèses). La méthode de recherche linéaire et la méthode à régions de confiance sont données respectivement dans les colonnes 2 et 4. Les colonnes 3 et 5 présentent les temps de calcul. Le nombre d'itérations non linéaires dans la méthode à régions de confiance est égal au nombre d'évaluation de la fonction f car on a exactement une seule fonction à évaluer à chaque itération contrairement à la méthode de recherche linéaire.

On constate que dans le tableau (2.3), pour chaque valeur du courant, la méthode à régions de confiance demande moins d'itérations non linéaires et donc moins d'évaluation de la fonction f et gagne en robustesse et en temps de calcul par-apport à la méthode de recherche linéaire. Mais, dès que la taille du système devient plus grande, la méthode de recherche linéaire avec rebroussement devient plus efficace que les régions de confiance [Nocedal and Yuan, 1998; Shi and Zhang, 2005] et une réduction intéressante en temps de calcul est apparues pour toutes les valeurs du courant.

Prenons le cas de 1000 At comme décrit dans la figure (2.13), la méthode de Newton globalisée par recherche linéaire a mis 13 itérations non linéaires et 9 réductions du pas pour converger avec un temps de calcul égale à 2m12s tandis que par région de confiance la méthode a mis 19 itérations non linéaire et donc 19 évaluations de f avec un temps de calcul vaut 3m21s.

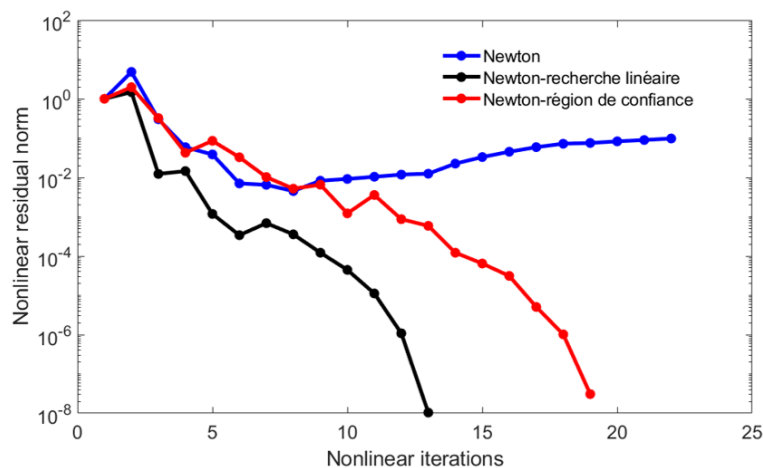


FIGURE 2.13 – Convergence de différents algorithmes.

2.2.4 Accélération de la méthode

2.2.4.1 La méthode de Newton-Inexacte

La méthode de Newton a été largement préférée pour résoudre les problèmes non linéaires grâce à sa convergence quadratique, si le choix de l'estimation initial est suffisamment bon. Par contre, lorsque le nombre d'inconnues est important, une grande précision pendant la résolution du système linéaire impliquant la matrice Jacobienne peut ne pas être justifiée si l'itération de la méthode de Newton est loin de la solution. Par conséquent, la méthode de Newton-Inexacte est introduite pour résoudre approximativement le système linéaire pour l'itération de Newton en utilisant une méthode itérative, souvent du type Krylov, de sorte que les critères d'arrêt du solveur linéaire sont contrôlés par le résidu non linéaire et la convergence peut être obtenue avec un coût meilleur.

Description de la méthode

Le principe est le même que pour la méthode de Newton classique, l'unique différence se situe lors de la résolution du système linéaire où le vecteur d_n est seulement une approximation de la solution du système linéaire à résoudre. Ce vecteur est une solution de la condition de Newton-Inexacte :

$$\|f'(x_n)d_n + f(x_n)\| \leq \eta_n \|f(x_n)\|. \quad (2.29)$$

L'efficacité et la robustesse de la méthode de Newton-Inexacte sont déterminées grâce à η_n appelé le terme forçant qui peut varier à chaque itération comme décrit dans l'algorithme 2.6. Plus cette valeur est petite, plus on se rapproche de la méthode de Newton classique et moins on gagnera du temps lors de la résolution de systèmes linéaire. Cependant, si cette valeur est grande, on risque de faire plus d'itérations de Newton. Pour éviter de faire plus d'itérations que la méthode de Newton classique puisse le faire, il faut trouver un bon compromis entre résoudre rapidement les systèmes linéaires et le nombre d'itérations non linéaires [Dembo et al., 1982]. La section suivante est consacrée à l'étude de la convergence de la méthode de Newton-Inexacte en fonction du terme forçant.

Étude de convergence

Nous présentons un théorème donnant des résultats sur la convergence des méthodes de Newton-Inexactes.

Algorithme 2.6 : Algorithme de Newton-Inexact.

```

1 début
  Entrées :  $x_0 \in \mathbb{R}^N, \varepsilon > 0$ 
2 pour  $n \rightarrow n + 1$  faire
3   tant que  $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > \varepsilon$  faire
4     Résoudre  $d_n = -[f'(x_n)]^{-1}f(x_n) + r_n, \|r_n\| \leq \eta_n \|f(x_n)\|$ 
5     Actualisation  $x_{n+1} = x_n + d_n$ 
6     Calcul de résidu  $f(x_{n+1})$ 
7   fin
8 fin
9 retourner  $x_{n+1}$ 
10 fin

```

Théorème 2.2.6. *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continûment différentiable dans un domaine ouvert convexe $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ contenant x_* . On suppose que $f(x_*) = 0$ et que $f'(x_*)$ est non singulière et k -lipschitzienne dans \mathcal{D} ¹. Supposons que la suite η_n satisfait $0 \leq \eta_n \leq \eta < 1$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $\|x_0 - x_*\| \leq \varepsilon$, la suite x_n générée par la méthode de Newton-Inexacte converge vers x_* linéairement. De plus si $\eta_n \rightarrow 0$, alors la suite x_n converge super-linéairement vers x_* . Enfin, si $\eta_n = O(\|f(x_n)\|)$ alors la suite x_n a une convergence quadratique.*

La preuve de ce théorème se trouve dans [Sun and Yuan, 2006].

Méthodes de Newton-Krylov

Les méthodes de Newton-Krylov, du type inexacte, résolvent le système linéaire en utilisant le caractère itératif des méthodes de Krylov [Meurant, 1999; Saad, 2003]. Le test d'arrêt pour la résolution de systèmes linéaires par la méthode de Krylov est donné par la condition de Newton-Inexacte (2.29). Les méthodes de Krylov diffèrent l'une de l'autre par le type de projection qui est appliqué et le choix des sous-espaces de Krylov. On cherche toujours à adapter la précision de la résolution à chaque itération de Newton de façon à faire le moins d'itérations de Krylov possible, tout en gardant une bonne convergence de la méthode de Newton.

Différence entre les itérations (Newton et Krylov) la méthode de Newton permet de construire une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'approximation de x_* . Une méthode de

1. f est k -lipschitzienne si $\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Krylov construit à chaque itération $n + 1$ une suite $(d_n^i)_{i \geq 0}$ d'approximation de d solution de $f'(x_n)d = -f(x_n)$. On précise que $x_n^i = x_n + d_n^i$.

Quand on atteint le critère de convergence décrit par (2.29), les itérations de Krylov s'arrêtent et on aura

$$x_n^q = x_{n+1},$$

avec q est le numéro de l'itération où le critère de convergence est satisfait.

Choix des termes forçant une étape très importante dans l'utilisation de Newton-Krylov est le choix du terme forçant [Eisenstat and Walker, 1996]. Le but est de dire quand on est loin de la solution, il n'est pas nécessaire d'être très précis, donc d'adapter toujours au mieux la précision η_n demandée pour limiter au mieux les itérations de Krylov et donc obtenir une convergence rapide avec un coût minimal de calculs. Pour s'approcher au mieux de cet objectif, plusieurs schémas pour calculer la suite des η_n ont été proposés. Cai et al [Cai et al., 1994], ont proposé pour toute itération de Newton, une constante $\eta_n = 10^{-4}$ pour garantir une précision uniforme de l'approximation de la direction de Newton. Dembo et Steihaug [Dembo and Steihaug, 1983] ont développé la première stratégie adaptative de termes forçants décrit par (2.30). Pour les premières itérations, la direction de Newton est moins précise pour ce choix.

$$\eta_n = \min\left\{\frac{1}{2+n}, \|f(x_n)\|\right\}, \quad (2.30)$$

Citons le choix proposé par Brown et Saad [Brown and Saad, 1990] :

$$\eta_n = \frac{1}{2^{n+1}}, \quad (2.31)$$

pour ce choix, le solveur linéaire demande moins d'itérations quand n est très petit. Mais aucune information sur f n'est utilisée et η_n peut tendre trop rapidement vers zéro.

On trouve dans [Eisenstat and Walker, 1996], les choix de Eisenstat et Walker :

$$\eta_n^{Res} = \gamma \frac{\|f(x_n)\|^2}{\|f(x_{n-1})\|^2}, \quad (2.32)$$

avec $\gamma \in (0, 1]$ est un paramètre fixé par l'utilisateur.

Pour éviter la décroissance rapide de la suite des η_n et résoudre précisément le système inutilement, ce qu'on appelle la sur-résolution (oversolving), le schéma complet est introduit :

$$\eta_n = \min\left(\eta_{max}, \max\left(\eta_n^*, 0.5 \varepsilon \frac{\|f(x_n)\|^2}{\|f(x_{n-1})\|^2}\right)\right), \quad (2.33)$$

avec ε la précision relative fixée et η_n^* est égale à :

$$\begin{cases} \eta_{max} & \text{si } n = 0. \\ \min(\eta_{max}, \eta_n^{Res}) & \text{si } n > 0, \quad \gamma\eta_n^2 \leq 0.1. \\ \min(\eta_{max}, \max(\eta_n^{Res}, \gamma\eta_n^2)) & \text{si } n > 0, \quad \gamma\eta_n^2 > 0.1. \end{cases}$$

Tests numériques

Les tests de la méthode de Newton-Krylov, ont été faits, dans le but d'évaluer les performances de cette méthode numérique et également tester sa robustesse. on pourra distinguer la méthode de CG [Hestenes and Stiefel, 1952], GMRES(m) [Saad and Schultz, 1986] et BiCGSTAB [Van der Vorst, 1992].

Les algorithmes de résolution appliqués sont Newton-CG, Newton-GMRES(20) et Newton-BICGSTAB sont testés sur le problème (2.8) en utilisant l'exemple (2.6) avec une estimation initiale $x_0 = (0, \dots, 0)^T$. Pour le test d'arrêt, nous prenons $\varepsilon_a = \varepsilon_r$ et nous cherchons la solution de l'inégalité

$$\|f(x_n)\| \leq \varepsilon_a + \varepsilon_r \|f(x_0)\|,$$

avec ε_a et ε_r désignent respectivement, les tolérances absolues et relatives.

Exemple 1 Afin de comprendre le phénomène de la sur-résolution (l'oversolving), nous avons appliqué la méthode de Newton avec un gradient conjugué sur le problème (2.8) de maillage 2 (28 488 éléments) pour un courant égale à 500 At avec deux manières différentes. La première sert à utiliser une précision relative constante et égale à 10^{-6} pour la résolution de systèmes linéaires, la deuxième sert à utiliser la même méthode mais avec une précision qui varie selon le schéma complet (2.33). Dans la figure (2.14), les valeurs successives des résidus non linéaires $f(x_n)$ sont représentés par des cercles. Les valeurs du résidu linéaire $f'(x_n)d_n^i + f(x_n)$ sont données en traits pleins et en traits pointillés une estimation grossière de $f(x_n^i)$. En comparant les deux méthodes, on remarque que le résidu non linéaire dans la figure (2.14a) ne décroît pas beaucoup par rapport au figure (2.14b) ce qui montre que la grande précision de résolution est inutile.

Le tableau (2.5) résume le nombre d'itérations effectuées ainsi que le temps d'exécution dans chaque cas.

Avec le schéma utilisé, le nombre d'itérations de Krylov est réduit, et $\|f(x_n)\|$ décroît suffisamment par rapport à la précision du calcul. Ce qui a permis d'annuler le phénomène de l'oversolving. De plus, le temps de calcul est réduit avec un speedup de 1.35, étant donné le coût des deux itérations supplémentaires de Newton.

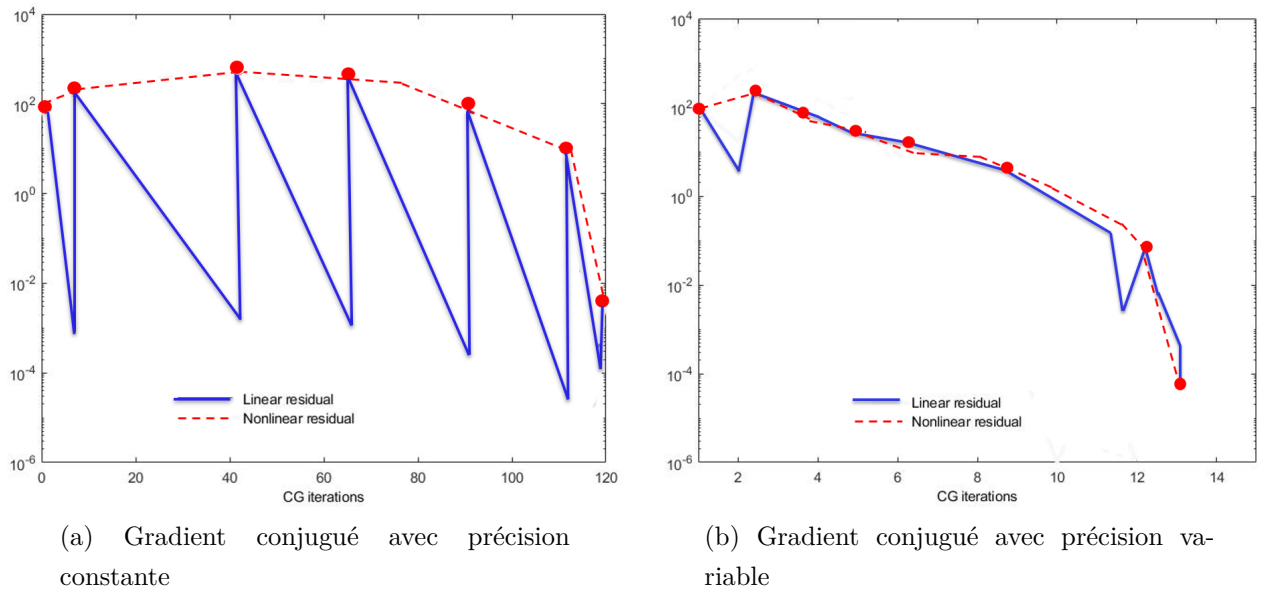


FIGURE 2.14 – Illustration de l'oversolving.

	CG	CG+termes forçants
Nombre d'itérations non linéaires	5	7
Nombre total des itérations linéaires	120	12
Temps CPU (s)	264.03 s	195.07 s

TABLE 2.5 – Tableau résumant les résultats obtenus pour différentes précisions.

Exemple 2 Les méthodes de Newton-CG, Newton-GMRES et Newton-BiCGSTAB globalisées à l'aide des règles de recherche linéaire avec rebroussement sont testées avec le même problème (2.8) pour le maillage 2 et pour un courant de 1500 At. La précision est prise à 10^{-8} et le terme forçant est calculé selon le choix de Brown et Saad (2.31). Le résidu non linéaire en fonction de nombre d'itérations non linéaires est donné dans la figure (2.15) pour les trois méthodes.

Pour la résolution de ce système, on constate que la méthode de CG est la méthode la plus efficace par rapport aux autres méthodes car la matrice est symétrique semi-définie positive.

Quand la taille de problème devient grande, le coût de la méthode de Newton augmente à chaque itération. Le coût d'exécution va dépendre de nombre d'inconnue N associés à la discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis et le nombre d'itérations non linéaires N_{nl} générés par la méthode de Newton.

En effet, pour chaque itération non linéaire, il faut évaluer $N^2 + N$ fonctions (les N^2 dérivées partielles de la matrice Jacobienne, plus les N fonctions coordonnées). Donc,

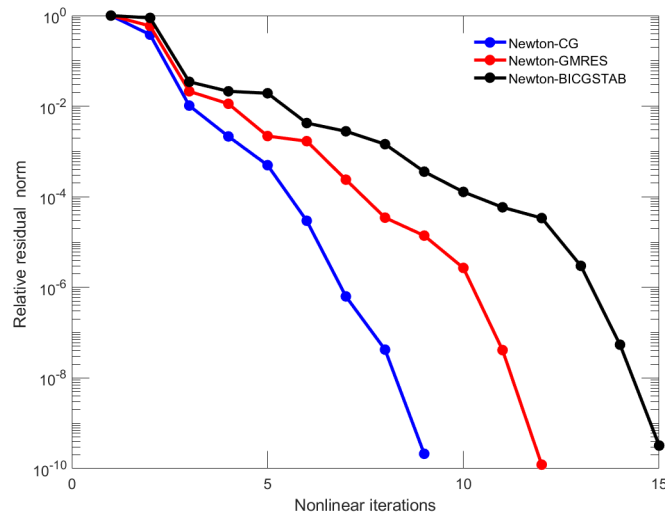


FIGURE 2.15 – Convergence pour différentes méthodes de Newton-Krylov.

un parcours sur toute la liste des éléments non linéaire noté Ne_{nl} est nécessaire. De plus, la résolution de système linéaire de taille N avec les méthodes itératives du type Krylov (le CG, le GMRES et le BiCGSTAB) nécessite $K_r \cdot N$ opérations avec K_r le nombre d'itérations de l'approche.

La complexité de résolution totale est exprimé en fonction de nombre d'itérations non linéaires, le nombre d'éléments situé dans les parties ferromagnétiques, le nombre d'itérations linéaires et la taille du système ($C_{total} = \theta(N_{nl} \cdot (Ne_{nl} + K_r(N) \cdot N)$).

Pour diminuer le coût de la résolution, il est fréquent d'éviter le calcul de la matrice Jacobienne à chaque itération, mais seulement de temps en temps. Donc, à ce moment-là, la convergence n'est plus quadratique, mais on pourra avoir une réduction intéressante en temps de calcul. D'où l'introduction de méthodes de Quasi-Newton [Dennis and Moré, 1977].

2.2.4.2 La méthode de Quasi-Newton

On appelle le Quasi-Newton toute variante de Newton où on cherche à approcher par un moyen quelconque la Jacobienne. Parmi les variantes on peut citer, la formule de Davidon-Fletcher-Powell (DFP) qui a été proposé en premier temps par Davidon [Davidon, 1991], puis améliorée et popularisée par Fletcher et Powell [Fletcher and Powell, 1963] en 1963. Elle est connue aussi sous le nom de "*Méthodes à métrique variable*". Elle consiste en une mise à jour de l'inverse de la matrice Jacobienne par une correction de rang au plus égale à deux. En 1970, Broyden [Broyden, 1970], Fletcher [Fletcher, 1970], Goldfarb [Goldfarb, 1970] et shanno [Shanno, 1970] ont développé une formule de Quasi-Newton sous le nom de BFGS. Cette formule est

considérée la plus robuste, elle permet de construire directement une approximation de l'inverse de la Jacobienne en démarrant de la matrice identité.

Description de la méthode

La méthode de Quasi-Newton consiste à remplacer le calcul de la matrice de la Jacobienne $f'(x_n)$ à chaque itération par une matrice β_n plus facile à calculer, et à laquelle on peut imposer certaines propriétés. Le fait qu'elle soit une approximation de l'inverse de la matrice Jacobienne se traduit par la relation de Quasi-Newton suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n^{-1} f(x_n), \quad \beta_n \approx f'(x_n). \tag{2.34}$$

Parmi les méthodes de Quasi-Newton on peut citer : la méthode de la corde, la méthode de Shamanski, la méthode d'approximation par différence finie et la méthode de Broyden.

Corde

La méthode de la corde consiste à prendre la Jacobienne $J(x)$ égale à la Jacobienne initiale $J(x_0)$ pour toutes les itérations de Newton.

L'algorithme de cette méthode est décrit dans 2.7.

Algorithme 2.7 : Algorithme de la corde.

```

1  début
   |  Entrées :  $x_0 \in \mathbb{R}^N, \varepsilon > 0$ 
2  |  pour  $n \rightarrow n + 1$  faire
3  |  |  tant que  $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > \varepsilon$  faire
4  |  |  |  Résoudre  $d_n = -[f'(x_0)]^{-1} f(x_n)$ 
5  |  |  |  Actualisation  $x_{n+1} = x_n + d_n$ 
6  |  |  |  Calcul de résidu  $f(x_{n+1})$ 
7  |  |  fin
8  |  fin
9  |  retourner  $x_{n+1}$ 
10 fin
    
```

La méthode de la corde est caractérisé par une vitesse de convergence linéaire. Ce que l'on pourra le voir dans le théorème 2.2.7.

Théorème 2.2.7. *Supposons que les hypothèses standards sont satisfaites. Alors il existe des constantes $K_c > 0$ et $r > 0$, tel que si $x_0 \in B(x_*, r)$, les itérations de la*

méthode de la corde convergent linéairement vers x_* et on a :

$$\|x_{n+1} - x_*\| \leq K_c \|x_0 - x_*\| \|x_n - x_*\|.$$

La preuve de ce théorème se trouve dans Kelly [Kelley, 1995].

Shamanski

La méthode de Shamanski consiste à recalculer la Jacobienne à chaque q itérations au lieu de le prendre fixe pour toutes les itérations comme décrites dans la méthode de la corde. Une itération de la méthode de shamanskii peut être résumée comme suit :

1. $z_1 = x_n - f'(x_n)f(x_n)$.
2. $z_{i+1} = z_i - f'(x_n)f(z_i)$ pour $1 \leq i < q - 1$.
3. $x_{n+1} = z_q$.

avec q est un entier suffisamment petit. Cette méthode est caractérisée par une convergence superlinéaire d'ordre $q+1$ dans le cas où toutes les hypothèses standard sont vérifiées. C'est le résultat de théorème 2.2.8.

Théorème 2.2.8. *Supposons que les hypothèses standards sont satisfaites que $q \geq 0$. Alors il existe des constantes $K_s > 0$ et $r > 0$, telle que si $x_0 \in B(x_*, r)$, l'itération de Shamanski converge superlinéairement vers x_* et on :*

$$\|x_{n+1} - x_*\| \leq K_s \|x_n - x_*\|^{q+1}.$$

La méthode de Shamanski combine la méthode de la corde et la méthode de Newton. En effet, pour $q = 1$ on pourra retrouver facilement la méthode de Newton et pour $q = \infty$ on trouve la méthode de la corde.

Broyden

Cette méthode permet de déterminer à chaque itération une approximation approchée de la matrice Jacobienne. La matrice est construite par des mises à jour successives de la matrice β_0 fournie par l'utilisateur. Elle est basée un peu sur le même principe de la méthode de la sécante qui revient à approcher en dimension un $f'(x_n)$ par :

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

et en dimension N , la matrice β_n est imposée de manière à vérifier la même relation le long de la direction Newton :

$$\beta_n(x_n - x_{n-1}) = f(x_n) - f(x_{n-1}), \quad (2.35)$$

cette relation ne permet pas de définir la matrice β_n , mais elle permet d'imposer sa valeur dans une direction. Grâce au choix simple que Broyden a proposé, le passage de β_n au β_{n+1} se fait en rajoutant seulement une matrice de rang 1. L'étape d'actualisation de la matrice β_n s'écrit sous la forme suivante :

$$\beta_{n+1} = \beta_n + (z_n - \beta_n d_n) \frac{d_n^T}{d_n^T d_n}, \tag{2.36}$$

avec $d_n = x_{n+1} - x_n$ et $z_n = f(x_{n+1}) - f(x_n)$. On vérifie immédiatement que la suite de matrice β_n définit dans (2.36) satisfait bien (2.35). La méthode de Broyden est décrite dans l'algorithme 2.8. Il est prouvé dans [Broyden et al., 1973; Dennis and Walker, 1981] que la convergence de cet algorithme est localement super-linéaire.

Algorithme 2.8 : Algorithme de Broyden.

```

1  début
   |   Entrées :  $x_0 \in \mathbb{R}^N, \varepsilon > 0$ 
2  |   pour  $n \rightarrow n + 1$  faire
3  |       tant que  $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > \varepsilon$  faire
4  |           Résoudre  $d_n = -\beta_n^{-1} f(x_n)$ 
5  |           Actualisation  $x_{n+1} = x_n + d_n$ 
6  |           Calcul de  $z_n = f(x_{n+1}) - f(x_n)$ 
7  |           Actualisation  $\beta_{n+1} = \beta_n + (z_n - \beta_n d_n) \frac{d_n^T}{d_n^T d_n}$ 
8  |       fin
9  |   fin
10 |   retourner  $x_{n+1}$ 
11 fin

```

La valeur initiale de la matrice initiale de Broyden peut être prise tel que $\beta_0 = I$, il faut évidemment attendre un certain temps avant d'avoir une approximation raisonnable de la matrice Jacobienne.

Des techniques de recherche linéaire peuvent être également utilisées dans cette méthode. En effet, l'étape 4 de l'algorithme 2.8 est remplacée par $d_n = -\alpha \beta_n^{-1} f(x_n)$ où α minimise la norme de $f(x_{n+1})$.

Lorsque cette méthode demande un grand nombre d'itérations pour converger et atteindre la tolérance désirée, le coût de stockage des mises à jour augmente. Pour éviter cet inconvénient, une autre version de Broyden dite Broyden redémarré est introduite [Kelley, 1995, 2003]. Après chaque m itérations non linéaires, l'algorithme redémarre pour libérer la mémoire. Cela induit un ralentissement de convergence vu qu'une grande partie des informations emmagasinées est totalement perdue et doit

être reconstruite. Pour y remédier, une autre version de la méthode de Broyden qui utilise une mémoire limitée a été développée comme détaillé dans [Nocedal, 1980; Ziani and Guyomarc'h, 2008].

Tests numériques

Afin de tester les performances des méthodes de Quasi-Newton, on applique les différents algorithmes présentés précédemment en utilisant l'exemple (2.6) pour résoudre le problème (2.8). Le courant est fixé à 2000 At et la tolérance est fixée à 10^{-8} .

Exemple 1 La méthode de Newton, la Corde et Shamanski globalisées à l'aide des règles de recherche linéaire avec la condition d'Armijo sont étudiés en premier temps avec le maillage 3 ($N = 113\,925$) et avec une estimation initiale $x_0 = (0, \dots, 0)^T$.

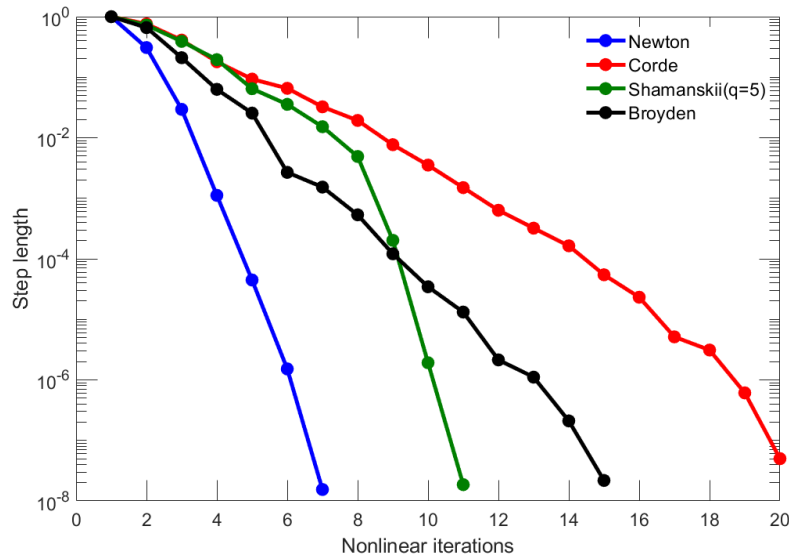


FIGURE 2.16 – Convergence pour différentes méthodes de Quasi-Newton.

Solveurs non-linéaires	Itérations non linéaires	Temps CPU
Newton	9(2)	4m12s
Corde	20(9)	3m52s
Shamanski	11(2)	2m23s
Broyden	15(7)	3m01s

TABLE 2.6 – Résultats de convergence pour différents solveurs.

Comme décrit dans la figure (2.16), la méthode la plus efficace est la méthode de Newton qui a une convergence quadratique, mais elle demande l'évaluation de

la Jacobienne à chaque itération contrairement à la méthode de la corde qui n'a qu'une convergence linéaire mais elle demande moins d'évaluation de la fonction f . La méthode de Shamanski qui combine les deux à la fois possède par contre une convergence super-linéaire. Les temps de calculs pour différents solveurs non linéaires sont données dans le tableau 2.6.

Exemple 2 La méthode de Broyden est testée pour différentes tailles du système. La valeur de la matrice initiale de Broyden est prise égale à la matrice d'identité. Le tableau (2.7) résume les résultats de convergence pour la méthode de Broyden pour différentes tailles de systèmes.

Nombre d'éléments	7 122	28 488	113 952
Nombre d'itérations non linéaires	15	15	15
Temps d'évaluation de f (s)	10.661	45.555	150.129
Temps de calcul de d_n (s)	2.492	12.825	40.213
Temps de mise-à-jour de β_n (s)	0.630	3.856	10.460
Temps de calcul (s)	13.783	62.236	200.802

TABLE 2.7 – Tableau résumant les résultats de convergence de la méthode de Broyden pour différent N .

On constate que quand la taille de problème augmente, le coût de la méthode de Broyden augmente aussi. En effet, l'évaluation de la fonction f , le calcul de d_n et la mise à jour de la matrice β_n demande plus de temps quand la taille de problème augmente.

La convergence de la méthode de Broyden est illustré dans (2.16) pour le maillage le plus fin de taille $N = 113\ 952$ éléments. Quoique, la méthode de Broyden ne demande pas l'évaluation de la Jacobienne, elle aboutit toujours à une convergence super-linéaire.

2.2.5 Conclusion

Les différentes méthodes de résolution non linéaires : les méthodes de point fixe et les méthodes de Newton sont analysées et testés à travers des exemples académiques en 2D. La méthode de point fixe est robuste et simple à implémenter, mais elle possède une vitesse de convergence très lente et peut engendrer des temps de calculs inacceptables quand la taille du système est grande. La méthode de Newton a une convergence quadratique mais elle est locale dans le sens que l'estimation initiale doit être assez proche de la solution.

Les méthodes de globalisations telles que les méthodes de recherche linéaire et les méthodes à régions de confiance sont utilisées pour assurer la convergence des méthodes de Newton et atteindre un niveau acceptable de robustesse.

Les tests numériques montrent que quand le pas de Newton n'aboutit pas à une décroissance suffisante du résidu non linéaire, c'est-à-dire quand l'estimation initiale est loin de la solution, ces techniques permettent de réduire ce pas et améliorer efficacement la convergence.

De plus, quand la taille de système devient de plus en plus élevée, les méthodes de recherche linéaires deviennent plus efficaces que les méthodes à régions de confiance. La résolution du système avec la méthode de Newton s'avère très coûteuse à cause de l'évaluation de la Jacobienne, de la fonction et de la résolution de systèmes linéaires à chaque itération. Les méthodes de Newton-Inexactes sont introduites pour réduire le coût de la résolution de systèmes linéaires en utilisant une méthode du type Krylov. La précision de solveur linéaire est adaptée avec un coût minimal par des termes dit termes forçant. Les tests numériques montrent que le choix de termes forçants peut contrôler l'efficacité et la robustesse de la méthode.

L'évaluation de la matrice Jacobienne devient de plus en plus coûteuse et les dérivées sont de plus en plus dures à calculer quand le système à résoudre atteint des dimensions élevées. Les méthodes de Quasi-Newton sont testées en approchant la matrice Jacobienne par des formules récurrentes ne demandant que l'évaluation de la fonction. Les tests numériques montrent une réduction intéressante en coût de calculs avec ces méthodes.

3

ISP-Newton

Ce chapitre permet d'introduire l'algorithme développé nommé Improved Starting Point (ISP-) Newton. Ce dernier sera validé en premier temps en 2D à travers une maquette éléments finis sur Matlab en utilisant des exemples académiques appliqués à différentes lois de comportements non linéaires. En deuxième temps, nous analysons dans le cas 3D les performances des algorithmes implémentées dans code_Carmel, en interprétant les résultats physiquement avec des applications industrielles.

Sommaire

3.1	ISP-Newton en 2D	93
3.2	ISP-Newton en 3D	106
3.3	Conclusion	131

3.1 ISP-Newton en 2D

La méthode de Newton possède une convergence quadratique si l'estimation initiale est proche de la solution. Trouver une information a priori sur cette solution reste toujours une idée attrayante. Si on arrive à trouver la bonne condition pour choisir l'estimation initiale, la robustesse de la méthode de Newton sera améliorée ainsi que son efficacité.

Sur la base du choix rapporté dans Luo et Teng [Luo and Teng, 2016] qui est dédié au problème 2D p-Laplace, nous avons proposé une solution initiale adaptée au problème 2D de la magnétostatique et nous l'avons testé pour la formulation \mathbf{A} en l'implémentant dans notre maquette éléments finis.

3.1.1 ISP-Newton pour des lois d'aimantations isotropes non linéaires

On se place dans les conditions classiques de la magnétostatique en potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} définies dans le paragraphe 1.5. On rappelle en premier temps, les différentes étapes de l'algorithme comme détaillé dans 3.1.

Algorithme 3.1 : Algorithme de Newton appliqué à la formulation en potentiel vecteur \mathbf{A} .

```

1 début
2    $i = 0, \mathbf{A}^i = 0$ 
3   pour  $i = 1 \dots$  jusqu'à convergence faire
4     T1 : mise à jour de  $\mathbf{R}(\mathbf{A}^{i-1})$  et de  $\mathbb{M}_{\text{Jacob}}(\mathbf{A}^{i-1})$ 
5     T2 : résoudre  $\mathbb{M}_{\text{Jacob}}(\mathbf{A}^{i-1}) \mathbf{d}^i = -\mathbf{R}(\mathbf{A}^{i-1})$ 
6     T3 : réduire le pas si c'est nécessaire :  $\mathbf{A}^i = \mathbf{A}^{i-1} + \lambda^i \mathbf{d}^i$ 
7   fin
8 fin
```

Il s'agit de résoudre :

$$\mathbb{M}_{\text{Jacob}}(\mathbf{A}^{i-1}) \mathbf{d}^i = -\mathbf{R}(\mathbf{A}^{i-1}), \quad \mathbf{A}^i = \mathbf{A}^{i-1} + \mathbf{d}^i, \quad (3.1)$$

avec \mathbf{A}^i est le $i^{\text{ème}}$ solution de Newton, \mathbf{R} est le résidu non linéaire de taille N_e (liée au nombre d'inconnues du problème éléments finis défini dans 1.98 tel que :

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}^{i-1}) = \mathbb{S}(\mathbf{A}^{i-1})\mathbf{A}^{i-1} - \mathbf{F}, \quad (3.2)$$

et $\mathbb{M}_{\text{Jacob}}$ est la matrice Jacobienne de taille $N_e \times N_e$, qui devrait être mise à jour à chaque étape comme :

$$\mathbb{M}_{\text{Jacob}}(\mathbf{A}^{i-1}) = \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{A}^{i-1})}{\partial \mathbf{A}^{i-1}} = \mathbb{S}(\mathbf{A}^{i-1}) + \frac{\partial \mathbb{S}(\mathbf{A}^{i-1})}{\partial \mathbf{A}^{i-1}} \mathbf{A}^{i-1}. \quad (3.3)$$

Un critère d'arrêt comparant $\|\mathbf{R}(\mathbf{A}^{i-1})\|$ avec un paramètre défini par l'utilisateur ε est utilisé pour déterminer si l'algorithme a convergé ou non.

En deuxième temps, on introduit le principe de la méthode d'ISP-Newton qui est décomposé en deux étapes telles que :

1. Nous résolvons un problème linéaire L_S avec une reluctivité ν_0 constante (comme la reluctivité de l'air) dans le domaine, c'est-à-dire trouver \mathbf{A}_S tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{rot}(\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_S) = \mathbf{J}_s, \\ \mathbf{A}_S \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.4)$$

2. À partir de cette solution \mathbf{A}_S , la reluctivité ν_1 est mise à jour par $\nu_1 = \nu(\mathbf{rot} \mathbf{A}_S)$, puis nous cherchons la solution initiale \mathbf{A}_N en résolvant le problème linéaire L_N suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{rot}(\nu_1 \mathbf{rot} \mathbf{A}_N) = \mathbf{J}_s, \\ \mathbf{A}_N \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Par la suite, nous utilisons la méthode de Newton classique en commençant par cette estimation \mathbf{A}_N .

L'algorithme d'ISP-Newton est donné dans 3.2.

Algorithme 3.2 : Algorithme d'ISP Newton.

```

1 début
2    $i = 1$ ,  $\mathbf{T0}_S$  : résoudre le système  $L_S$  (3.4) pour obtenir  $\mathbf{A}_S$ 
3    $i = 2$ ,  $\mathbf{T0}_N$  : résoudre le système  $L_N$  (3.5) pour obtenir  $\mathbf{A}_N$ 
4   pour  $i = 3 \dots$  jusqu'à convergence faire
5      $\mathbf{T1}$  : mise à jour de  $\mathbf{R}(\mathbf{A}^{i-1})$ , mise à jour de  $\mathbb{M}_{\text{Jacob}}(\mathbf{A}^{i-1})$ 
6      $\mathbf{T2}$  : résoudre  $\mathbb{M}_{\text{Jacob}}(\mathbf{A}^{i-1}) \mathbf{d}^i = -\mathbf{R}(\mathbf{A}^{i-1})$ 
7      $\mathbf{T3}$  : réduire le pas si c'est nécessaire :  $\mathbf{A}^i = \mathbf{A}^{i-1} + \lambda^i \mathbf{d}^i$ 
8   fin
9 fin

```

Cette approche est différente des solutions usuelles qui consiste à effectuer des itérations de point fixe avant d'aboutir l'algorithme de Newton [Chiampi et al., 1980; Chiampi et al., 1994].

Remarque importante :

Partout dans la thèse, le nombre total d'itérations d'ISP-Newton est présenté en prenant en compte les deux précalculs dans (3.4) et (3.5). Il convient de mentionner ici, que notre méthode est facile à mettre en œuvre avec n'importe quel code FE, car il s'agit seulement de construire et résoudre deux systèmes linéaires dont le coût de calcul est inférieur au coût de deux itérations de Newton.

3.1.1.1 Applications

Cette partie est dédiée seulement à l'étude des phénomènes électromagnétiques et les phénomènes mécaniques ou thermiques qui pourraient être induits ne sont pas pris en compte.

Les hypothèses de nos problèmes sont les suivantes :

- Tous les problèmes traités dans cette partie sont en deux dimensions (2D).
- Le régime considéré est stationnaire, les phénomènes étudiés ne varient pas suivant le temps.
- Les sources de champs inducteurs sont parcourues par des courants continus.
- Les courants induits sont négligés.
- Les matériaux ferromagnétiques ont des propriétés non linéaires. Leur hystérésis n'est pas prise en compte.

Transformateur

Ce problème se résume dans la figure (3.1). On peut distinguer deux types de régions : une région (cuivre) qui contient les bobines inductrices parcourue par un courant \mathbf{J}_s et une région perméable (Fer) dépourvue de courant dont la loi de comportement ferromagnétique est non linéaire. Cette loi est modélisée par le modèle de Marrocco comme détaillé dans (1.2.3.1). Les calculs selon le modèle de Fröhlich seront détaillés dans l'annexe C.1.1.

La taille de maillage est de 78 000 éléments.

Newton-classique vs ISP-Newton

On impose des valeurs du courant allant de 500 At à 3000 At et on applique les deux algorithmes commençant par les deux points de départ : le point classique $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ et le point proposé \mathbf{A}_N .

Pour chaque valeur du courant, le nombre d'itérations non linéaires, le temps de calcul et le taux d'accélération entre les deux algorithmes sont donnés dans le tableau (3.1).

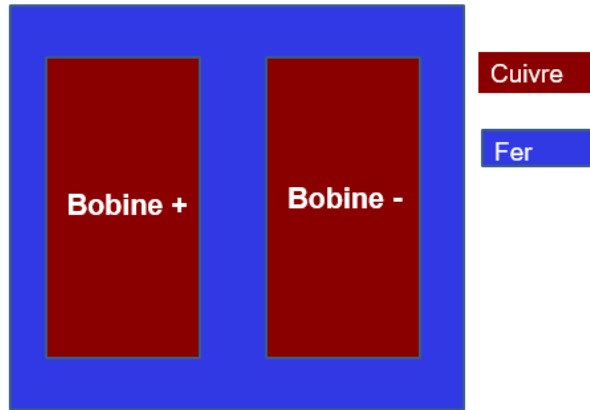


FIGURE 3.1 – Maillage du problème magnétostatique non linéaire.

Courant (At)	Newton-classique		ISP-Newton		Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU	
500	5	0m47s	5	0m23s	2.04
1000	6	0m51s	5	0m33s	1.54
1500	8	1m22s	6	0m58s	1.41
2000	9	1m43s	6	1m07s	1.69
2500	9	1m49s	6	1m09s	1.78
3000	10	1m59	7	1m11s	1.67

TABLE 3.1 – Résultats de convergence pour le transformateur

Les résultats de calculs, montrent que les deux algorithmes convergent pour chaque valeur du courant sans avoir besoin de réduire le pas et activer un algorithme de globalisation.

De plus, une réduction en nombre d’itérations non linéaires et en temps de calcul en utilisant notre algorithme proposé est observée pour chaque valeur du courant. En effet, pour le cas de 2500 At, 3 itérations non linéaires ont été réduites avec le point \mathbf{A}_N et le speedup est 1.78 plus vite qu’avec le point classique $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

La distribution de l’induction magnétique est donné dans la figure (3.2) pour la valeur de 2500 At. Les lignes de \mathbf{B} se referment par les culasses.

Afin de tester les performances de l’algorithme proposé, d’autres exemples numériques plus compliqués ont été étudiés.

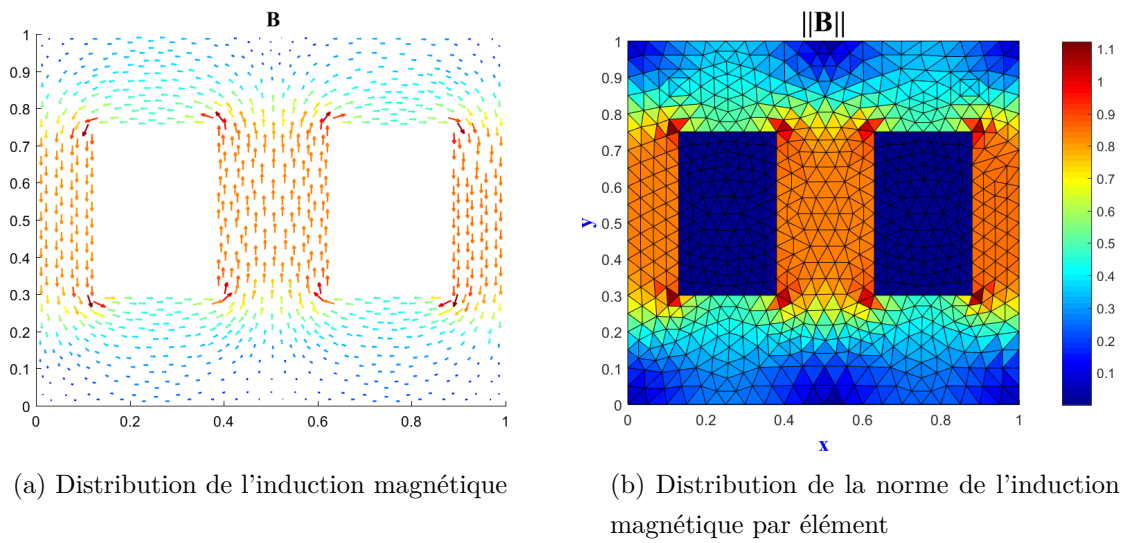


FIGURE 3.2 – Induction B

T.E.A.M Workshop 13

Le même domaine d'étude décrit dans 10 a été modélisé et maillé en 2D avec le maillage $M3 = 113\,952$ éléments. Nous le rappelons dans la figure (3.3).

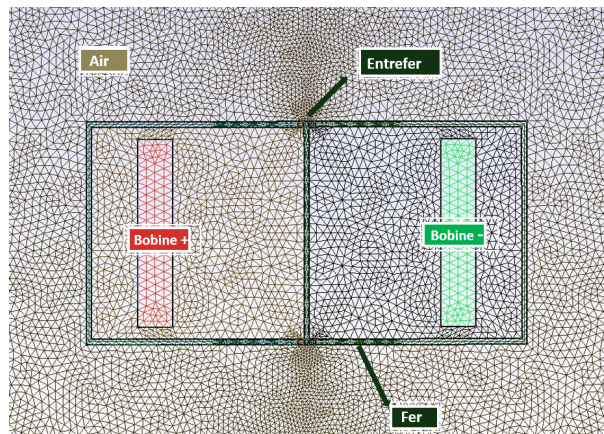


FIGURE 3.3 – Maillage du problème magnétostatique non linéaire.

Deux lois sont utilisées pour modéliser le caractère non linéaire : la loi de Marrocco et la loi de Fröhlich comme défini dans (1.2.3.1). Il faut mentionner que les résultats obtenus sont semblables pour les deux lois. Nous présentons que ceux obtenus avec la loi de Marrocco. Pour la loi de Fröhlich, les résultats sont détaillés dans l'annexe C.1.2.

Interprétations

Le choix de premier point de départ est interprété physiquement pour les deux solveurs : Newton-classique et ISP-Newton dans la figure (3.4).

En commençant par le point classique $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ comme décrit dans la figure (3.4a), le champ est concentré au début dans le fer avec des valeurs élevées. Après les itérations de Newton, le champ sera déplacé dans l'air du aux saturations comme le montre la figure (3.4b). Dans le cas de l'algorithme proposé avec $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$, le champ est uniformément distribué et dispersé au début dans l'espace comme décrit dans (3.4c) puis avec les itérations de Newton, il sera ramené dans le fer ce qui signifie le sens pris dans la figure (3.4d).

Newton-classique vs ISP-Newton

Les valeurs du courant sont réglées de 500 At à 5000 At qui sont suffisantes pour saturer les plaques. Le tableau (3.2) présente les résultats de différents algorithmes commençant par le point classique $\mathbf{A} = 0$ et par le point amélioré $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$ sans utiliser aucune technique de globalisation.

Pour chaque valeur du courant, le nombre d'itérations non linéaires, le temps de calcul et le taux d'accélération sont donnés pour les deux méthodes.

Courant (At)	Newton-classique		ISP-Newton		Énergie (J)	Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU		
500	5	1m01s	5	0m49s	5.21E-2	1.22
1000	7	1m12s	7	1m02s	0.102	1.19
1300	9	1m54s	7	1m05s	0.175	1.88
1500	13	2m32s	9	1m39s	0.203	1.53
1700	14	2m47s	11	1m56s	0.221	1.43
2000	16	3m15s	12	2m04s	0.278	1.61
2500	Diverge	–	13	2m12s	0.321	–
3000	–	–	14	2m47s	0.496	–
5000	–	–	15	3m07s	1.112	–

TABLE 3.2 – Résultats de convergence de différents algorithmes non globalisés

On constate que la méthode de Newton-classique diverge à partir de 2500 At à cause des fortes saturations. Tandis qu'avec l'algorithme ISP, la convergence est atteinte pour toutes les valeurs du courant. De plus, on constate une réduction intéressante

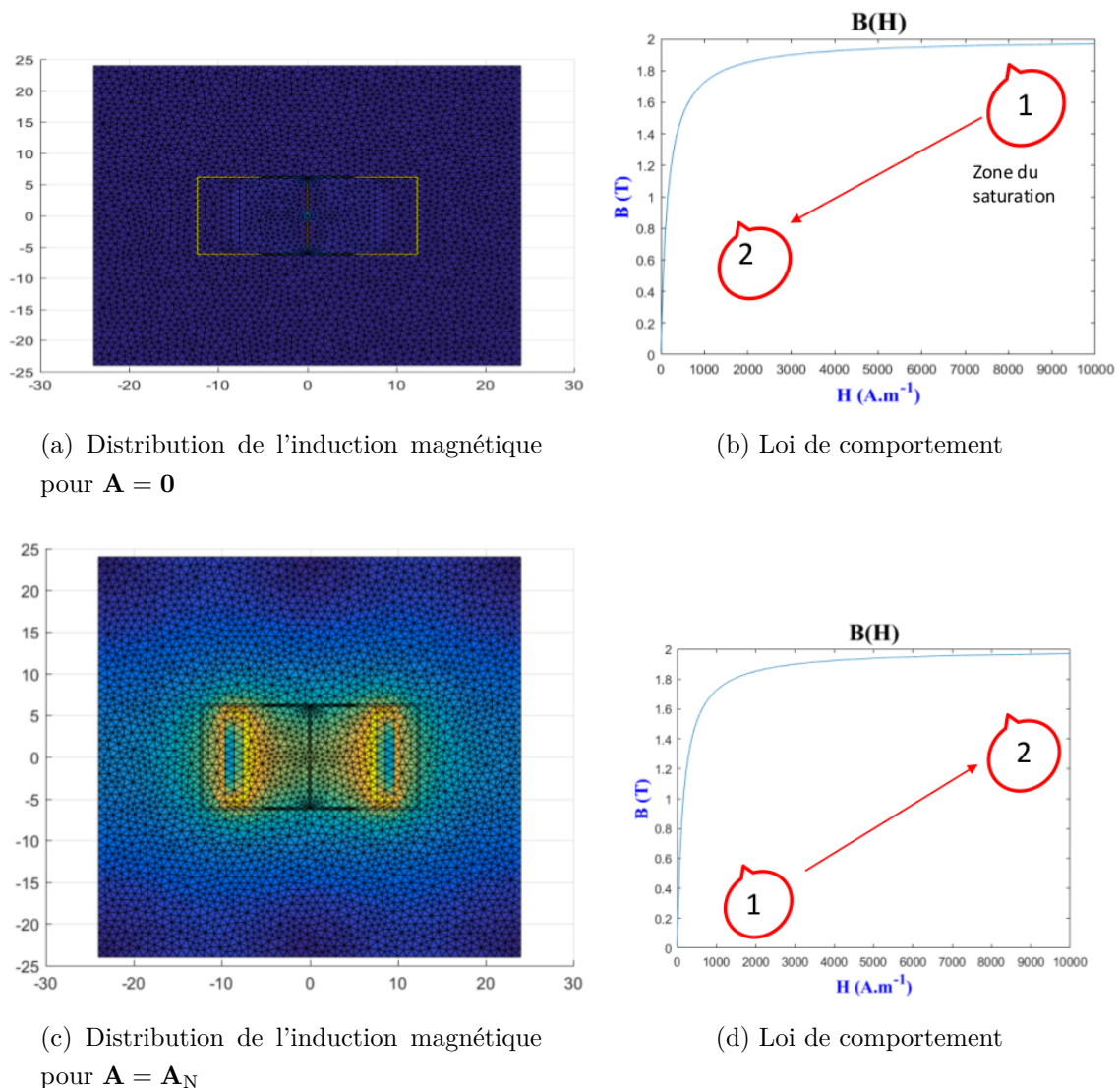


FIGURE 3.4 – Interprétation physique de premier point de départ pour les solveurs non linéaires.

du temps de calcul. Par exemple, pour la valeur du courant 500 At (respectivement 1000 At), le speedup est de 1.22 (respectivement 1.19) sachant qu'on a le même nombre d'itérations non linéaires. Ceci est expliqué par le fait que avec ISP-Newton dans les deux premières itérations, seulement deux systèmes linéaires sont construits et résolus dont le coût est inférieur à deux itérations de Newton.

Le nouveau point proposé permet de garantir la robustesse de l'algorithme et d'améliorer son efficacité.

Pour améliorer la robustesse de la méthode de Newton, les méthodes de la recherche linéaire ont été implémentés.

Newton-globalisé vs ISP-Newton

Le tableau (3.3) présente les résultats de convergence de Newton globalisé par la méthode de la recherche linéaire avec la technique de rebroussement comme définit dans l’algorithme 2.4. Le nombre de réduction de pas est indiqué entre parenthèses.

Courant (At)	Newton-classique		ISP-Newton		Énergie (J)	Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU		
500	5	1m01s	5	0m49s	5.21E-2	1.22
1000	7	1m12s	7	1m02s	0.102	1.19
1300	9	1m54s	7	1m05s	0.175	1.88
1500	13	2m32s	9	1m39s	0.203	1.53
1700	14	2m47s	11	1m56s	0.221	1.43
2000	16(1)	3m20s	12	2m04s	0.278	1.66
2500	17(3)	3m45s	13	2m12s	0.321	1.70
3000	18(4)	4m09s	14	2m47s	0.496	1.44
5000	18(2)	4m01s	15	3m07s	1.112	1.32

TABLE 3.3 – Résultats de convergence de différents algorithmes globalisés

On remarque que la robustesse de la méthode de Newton-classique est améliorée. Il converge pour différentes valeurs du courant mais avec des réductions de pas durant le processus de la recherche linéaire. De plus, en utilisant le point proposé \mathbf{A}_N , une réduction intéressante en nombre d’itérations non linéaires et en coût de calcul est observée pour toutes les valeurs du courant.

La figure (3.5) résume les vitesses de convergence des différents algorithmes nommés respectivement Newton non globalisé, Newton globalisé et l’ISP-Newton pour le courant 2500 At. La méthode d’ISP-Newton converge quadratiquement sans activer la recherche linéaire alors que la méthode de Newton ne converge qu’après avoir réduit le pas 3 fois dans la deuxième itération non linéaire. Suite au coût de réduction, le taux d’accélération entre le Newton-classique et la méthode de ISP-Newton augmente et la réduction de temps de calcul devient plus intéressante.

Newton-Inexact vs ISP-Newton-Inexact

Un calcul similaire a été fait sur les méthodes de Newton-Inexacte.

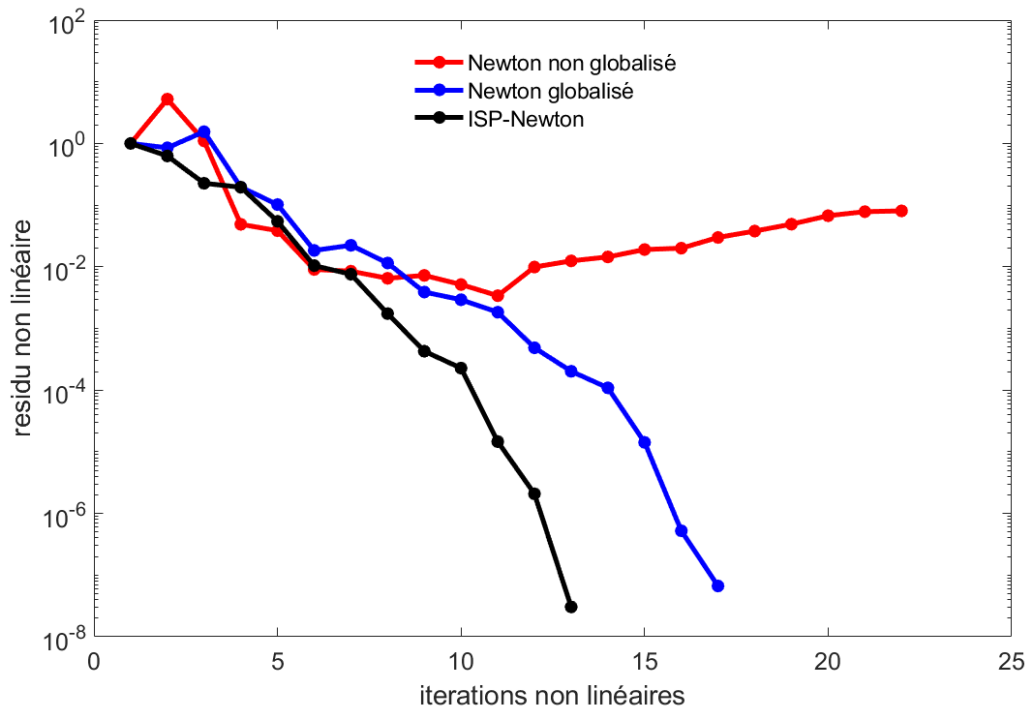


FIGURE 3.5 – Convergence de différents algorithmes pour 2500 At.

Il s'agit de résoudre

$$\mathbb{M}_{\text{Jacob}}(\mathbf{A}^{i-1}) \mathbf{d}^i = -\mathbf{R}(\mathbf{A}^{i-1}) + \mathbf{r}^i, \quad \frac{\|\mathbf{r}^i\|}{\|\mathbf{R}(\mathbf{A}^{i-1})\|} \leq \eta^i, \quad (3.6)$$

avec \mathbf{r}^i est le résidu linéaire, η^i est le terme forçant choisi selon le critère décrit dans (2.33).

Il est nécessaire d'utiliser une technique de globalisation pour assurer la convergence de la méthode de Newton-Inexacte. La technique de la recherche linéaire avec rebroussement est adopté ici. Le nombre d'itérations non linéaires, le nombre de réduction de pas (indiqué entre parenthèse) ainsi que le nombre de gradient conjugué sont donnés pour chaque valeur du courant dans le tableau (3.4).

On peut observer qu'avec le point de départ amélioré, l'ISP-Newton-Inexact arrive à converger pour les différentes valeurs du courant sans réduire le pas contrairement à l'algorithme de Newton-classique. En effet, pour le cas de 3000 At, la méthode de Newton-Inexacte a mis 17 itérations non linéaires et 3 réductions pour converger alors que l'ISP-Newton a convergé au bout de 14 itérations sans activer l'algorithme de la recherche linéaire. De plus, une réduction du nombre d'itérations de gradient conjugué par l'ISP-Newton (respectivement l'ISP-Newton-Inexact) est apparu à chaque valeur du courant comparant avec Newton (respectivement Newton-Inexact) comme décrit dans la figure (3.6).

Courant (At)	Newton-Inexact			ISP-Newton-Inexact			Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	CG	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	CG	Temps CPU	
500	9	1200	0m58s	7	650	0m37s	1.56
1000	11	1480	1m03s	9	840	0m48s	1.25
1300	13	1517	1m15s	10	1078	0m57s	1.31
1500	15	1910	1m49s	11	1100	1m07s	1.79
1700	15(2)	2315	2m41s	11	1180	1m28s	1.82
2000	17(1)	2510	2m53s	13	1290	1m47s	1.61
2500	18(2)	2730	3m15s	13	1320	1m59s	1.63
3000	17(3)	2640	3m47s	14	1471	2m07s	1.88
5000	18(2)	2678	3m57	16	1612	2m47s	1.41

TABLE 3.4 – Résultats de convergence pour Newton-Inexact globalisé

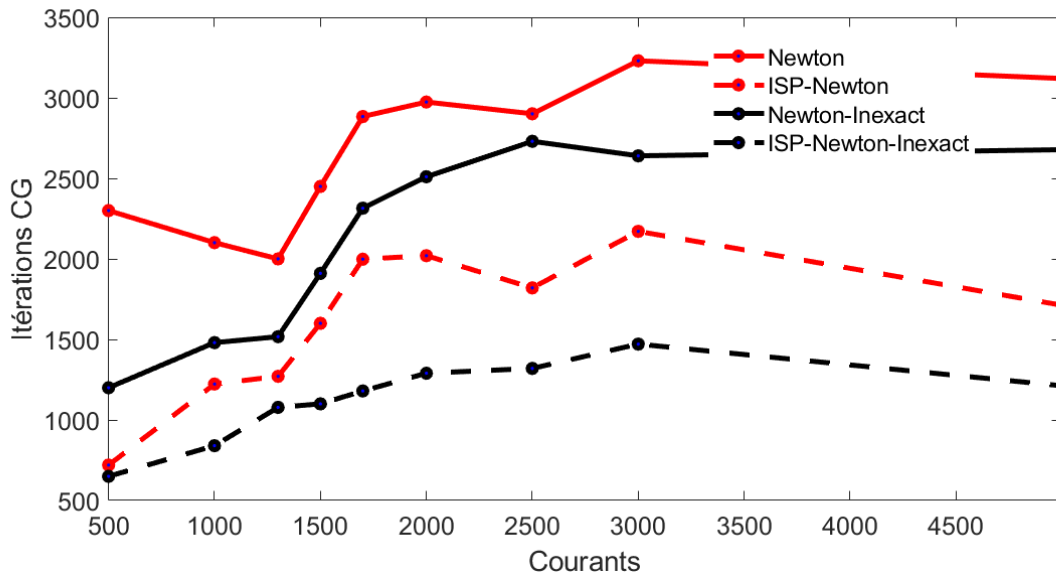


FIGURE 3.6 – Convergence de différents algorithmes.

Choix des termes forçants

Un bon choix de termes forçants permet d'améliorer la performance et l'efficacité de solveur avec un coût minimal de calcul. Quelques stratégies introduite dans la partie (10) comme Cai et al. [Cai et al., 1994] et Dembo et Steihaug [Dembo and Steihaug, 1983] et Brown et Saad [Brown and Saad, 1990] ont été testées pour les deux algorithmes de Newton : le Newton-Inexact et l'ISP-Newton-Inexact comme indiqué dans le tableau (3.5).

Courant (At)	Newton-Inexact		ISP-Newton-Inexact		Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU	
Cai et al.	14	1m27s	10	1m01s	1.44
Dembo et Steihaug	15(3)	1m53s	12	1m10s	1.61
Brown et Saad	16(1)	2m07s	13	1m16s	1.58

TABLE 3.5 – Résultat de convergence pour différents termes forçants pour le cas de 1700 At

On observe une réduction en nombre d’itération non linéaires ainsi que le temps de calcul en utilisant l’ISP-Newton-Inexact. Ce dernier arrive à converger avec différentes stratégies de termes forçants sans avoir besoin d’activer la recherche linéaire contrairement à la méthode de Newton-Inexacte. Un speedup est obtenue entre 1.44 et 1.61.

Quasi-Newton vs ISP-Quasi-Newton

L’algorithme proposé est testé pour les variantes de Quasi-Newton telles que la méthode de la corde, la méthode de Shamanski et la méthode de Broyden comme décrit dans dans la section (2.2.4.2). Il s’agit donc de résoudre $\mathbb{M}_{\text{Jacob}}(\mathbf{A}^i)$ de manière à éviter les calculs des dérivées qui sont souvent coûteux.

Les résultats de convergence sont présentés respectivement pour deux valeurs du courant (1000 At et 3000 At) dans les tableaux (3.6a) et (3.6b).

On observe, avec le point proposé \mathbf{A}_N , une amélioration de la robustesse de la méthode qui converge pour toutes les variantes de Quasi-Newton et pour les deux valeurs du courant. De plus, suite au nombre de réductions de pas de Newton durant le processus de globalisation, la réduction de temps de calcul devient plus intéressante en utilisant l’ISP-Quasi-Newton.

T.E.A.M Workshop 13 modifié

La géométrie inspirée de T.E.A.M Workshop 13 est modifiée pour rendre le problème plus difficile à résoudre afin de tester les performances des algorithmes. La plaque centrale est remplacée par deux plaques pointues qui se touchent comme décrit dans la figure (3.7). En effet, les pointes ont tendance à augmenter les valeurs des potentiels et donc augmenter les valeurs du champ magnétique.

On teste les deux algorithmes commençant par les deux points de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$ pour trois valeurs du courant égales à 1000, 2000 et 3000 At.

Méthodes	Quasi-Newton		ISP-Quasi-Newton		Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU	
Corde	14(2)	1m25s	10	0m47s	1.88
Shamanski	9(1)	1m11s	7	0m45s	1.57
Broyden	10(1)	1m08s	7	0m39s	1.55

(a) 1000 At

Méthodes	Quasi-Newton		ISP-Quasi-Newton		Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU	
Corde	21(5)	3m54s	15	2m27s	1.59
Shamanski	14(2)	2m59s	9	1m33s	1.92
Broyden	18(4)	3m03s	10	1m54s	1.58

(b) 3000 At

TABLE 3.6 – Résultat de convergence pour Quasi-Newton globalisé

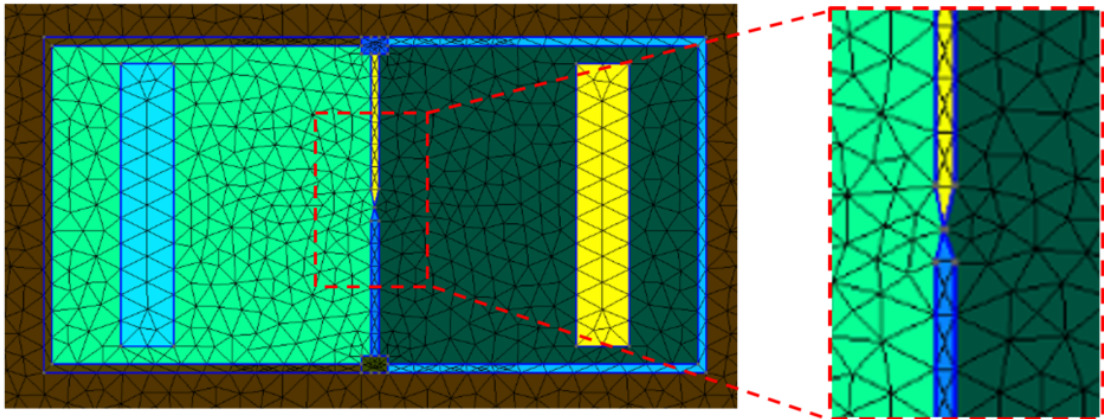


FIGURE 3.7 – Maillage de problème T.E.A.M Workshop 13 modifié.

Les résultats de convergence sont détaillés dans le tableau (3.7). On remarque que la convergence des deux algorithmes devient de plus en plus difficile en la comparant avec celle du tableau (3.3). Prenant le cas de 2000 At pour le maillage modifié, la méthode de Newton-classique demande 18 itérations non linéaires avec 7 réductions de pas au lieu de 16 itérations et une réduction pour le premier maillage comparant à l’algorithme d’ISP Newton qui gardera sa robustesse et son efficacité sans aucun appel à l’algorithme de la recherche linéaire. De plus, un speedup de 1.70 est obtenu avec notre algorithme.

Courant (At)	Newton-classique		ISP-Newton		Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU	
1000	10	1m59s	8	1m12s	1.65
2000	18(7)	4m34s	13	2m41s	1.70
3000	19(6)	5m39s	14	3m17s	1.72

TABLE 3.7 – Résultats de convergence pour T.E.A.M Workshop 13 modifié

3.2 ISP-Newton en 3D

La modélisation de dispositifs électromagnétiques prenant en compte le comportement non linéaire des matériaux ferromagnétiques en 3D constitue aujourd’hui un défi pour le calcul du champ magnétique en terme de robustesse et de temps de calcul.

Les simulations lancés pour les machines modélisées au LAMEL durent parfois de quelques jours à quelques semaines à cause du grand nombre d’inconnues et de la forte non-linéarité. Donc, diminuer ces temps et gagner en robustesse reste une idée attrayante.

Pour ce faire, l’algorithme d’ISP-Newton est appliqué aux problèmes magnéostatiques non linéaires en 3D pour les deux formulations : la formulation en potentiel vecteur magnétique et la formulation en potentiel scalaire magnétique, pour les problèmes couplés circuits et pour les problèmes magnétodynamiques.

3.2.1 Magnéostatique 3D : en potentiel vecteur \mathbf{A}

3.2.1.1 Applications

Dans cette section, l’algorithme d’ISP comme défini dans la section 3.1.1 est analysé à l’aide de différents exemples numériques. Typiquement, un problème de référence connu dans le cas magnéostatique non linéaire, nommé T.E.A.M Workshop Problem 13 et un autre exemple qui sera sa version modifiée.

Une comparaison entre l’algorithme proposé appliqué aux différents schémas de Newton, nommés respectivement, Newton-Inexact et Quasi-Newton est considérée sous différentes configurations. L’implémentation est effectuée dans `code_Carmel`.

T.E.A.M. Workshop 13

Ce problème défini dans le T.E.A.M (Testing Electromagnetic Analysis Methods) fait partie de la série de cas test internationaux, qui a été proposé afin de valider les logiciels de modélisations vis à vis des résultats expérimentaux.

Comme décrit dans la figure (3.8), le modèle se compose de deux noyaux ferromagnétiques en forme "U" disposées symétriquement sur les deux côtés d’une troisième plaque centrale qui est entouré par une bobine de courant continu, ce qui fait quatre entrefers. Comme les plaques ont des propriétés ferromagnétiques non linéaires, le point mesuré de la courbe $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ est considéré dans [Nakata et al., 1995]. Il est nécessaire d’ajouter une relation constitutive qui permet de connecter la densité du



FIGURE 3.8 – Structure de T.E.A.M. Workshop Problem 13.

flux magnétique \mathbf{B} et l'intensité du champ magnétique

$$\mathbf{H} = \nu(\|\mathbf{B}\|)\mathbf{B}.$$

La loi de Marrocco définie dans (1.2.3.1) est utilisé ici dans un premier temps pour modéliser le caractère non linéaire du matériel.

Des résultats de calculs similaires obtenus avec la loi de Fröhlich sont détaillés dans l'annexe D.1.1.

Trois différents maillages sont adoptés, comme décrit dans la figure (3.9). On trouvera dans le tableau (3.8) les informations nécessaires pour les différents maillages.

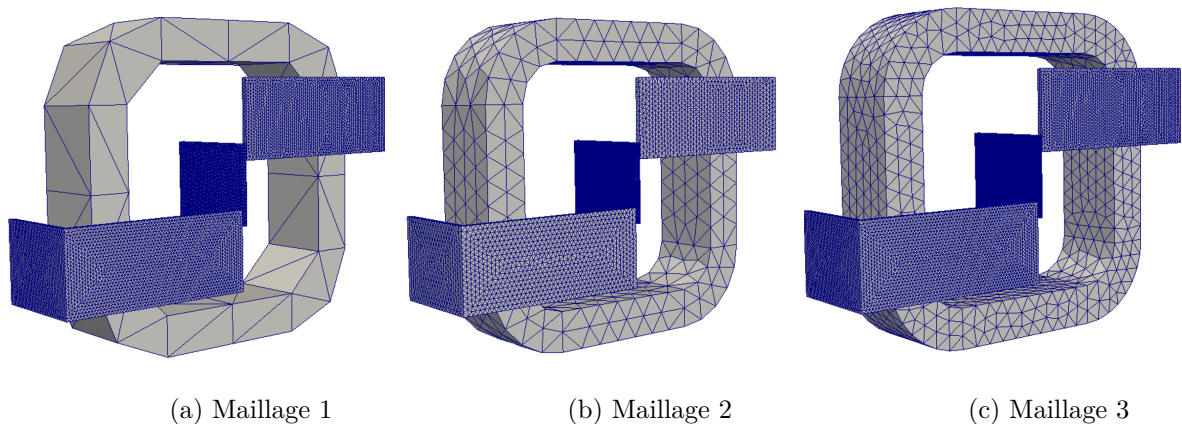


FIGURE 3.9 – Différents maillages utilisés pour T.E.A.M. Workshop Problem 13.

Afin d'assurer la saturation des plaques, nous avons réglé le courant de 1000 à 5000 At, avec huit valeurs différentes, soit 1000, 1300, 1500, 1700, 2000, 2500, 3000 et 5000 At.

Maillages	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3
Nombre d'éléments	309 819	527 917	1 484 968
Nombre de nœuds	52 976	89 205	249 396

TABLE 3.8 – Informations sur les maillages utilisés.

Newton-classique vs ISP-Newton

Dans un premier temps, la méthode de Newton-classique sans aucune technique de globalisation est considérée. Cela signifie que pour le cas de la recherche linéaire avec rebroussement, nous définissons le $\alpha = 1$ pour chaque itération, ce qui peut assurer une vitesse de convergence quadratique. Pour le maillage 2, pour chaque valeur du courant, le nombre d'itérations non linéaires, le temps de calcul pour les deux méthodes (Newton-classique et ISP-Newton) sont donnés dans le tableau (3.9). Les deux algorithmes convergent vers une solution de même énergie. Dans la dernière colonne, le taux d'accélération (speedup) entre le temps de calcul de la méthode proposée et la méthode classique est donné. On constate qu'aucune convergence n'a

Courant (At)	Newton-classique		ISP-Newton		Énergie (J)	Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU		
1000	6	1m59s	6	1m46s	9.475E-2	1.12
1300	8	2m54s	8	2m13s	0.155	1.30
1500	19	5m34s	19	4m35s	0.195	1.21
1700	Diverge	–	Diverge	–	–	–
2000	–	–	–	–	–	–
2500	–	–	–	–	–	–
3000	–	–	–	–	–	–
5000	–	–	–	–	–	–

TABLE 3.9 – Résultats de convergence pour le maillage 2 sans la recherche linéaire.

été atteinte pour les courants supérieurs à 1700 At. Ceci est normal puisque de fortes saturations sont rencontrées dans les angles de plaques. Il faut mentionner ici, bien que nous ayons le même nombre d'itérations non linéaire, une réduction intéressante du temps de calcul est obtenue avec la méthode ISP-Newton, puisque le coût deux systèmes qui sont résolus dans les deux premières itérations sont inférieurs aux coût de deux itérations non linéaires de Newton. En outre, pour le maillage 1 et le maillage 3 sans utiliser la méthode de la recherche linéaire, l'algorithme de

Newton ne converge pas.

En deuxième temps, afin d'améliorer la robustesse du solveur non linéaire, l'algorithme de la recherche linéaire est mis en œuvre. Les résultats de convergence pour le maillage 1 sont présentés dans le tableau (3.10).

Courant (At)	Newton-classique		ISP-Newton		Énergie (J)	Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU		
1000	8(2)	1m57s	8(2)	1m37s	9.080E-2	1.20
1300	8(1)	1m27s	8(1)	1m23s	0.150	1.04
1500	14(7)	3m47s	14(6)	3m21s	0.188	1.12
1700	14(4)	3m22s	10(3)	2m15s	0.226	1.49
2000	17(9)	4m12s	12(8)	2m40s	0.292	1.57
2500	23(16)	5m36s	11(5)	2m26s	0.375	2.30
3000	15(9)	3m39s	14(5)	3m20s	0.482	1.09
5000	18(12)	4m48s	16(11)	4m10s	1.090	1.15

TABLE 3.10 – Résultats de convergence avec recherche linéaire pour le maillage 1.

On peut observer qu'avec l'algorithme de la recherche linéaire, la convergence est assurée. De plus, en utilisant l'ISP, une réduction des itérations non linéaires, ainsi que le nombre total de corrections pendant l'algorithme de la recherche linéaire (le nombre indiqué entre les parenthèses) est obtenue. Donc, le coût de calcul est réduit pour tous les cas avec une accélération variant de 1,04 à 2,30.

Un calcul similaire a été fait pour le maillage 2 et le maillage 3 comme indiqué dans les tableaux (3.11a) et (3.11b) pour les deux valeurs du courant 1000 et 3000 At.

Les résultats numériques montrent qu'avec le point initial proposé, une réduction du temps de calcul peut être obtenue pour les deux cas. En effet, pour le maillage 3 et pour le cas de 3000 At, le speed up est de 1.73.

Les convergences de différents algorithmes pour les deux maillages 2 et 3 sont donnés respectivement dans les figures (3.10a-3.10b) pour le cas 3000 At.

On peut observer que, avec notre méthode proposée ISP-Newton, la convergence quadratique est obtenue plus rapidement que la méthode classique pour les deux valeurs du courant comme pour les cas étudiés en 2D.

Les résultats de convergence de différents algorithmes pour les trois maillages et pour le cas de 1700 At sont présentés dans le tableau (3.12). De plus, les résultats de calcul pour différentes étapes de l'algorithme de Newton décrit précédemment dans (3.1) sont donnés pour chaque étapes (T1, T2, T3) dans (3.13).

Maillages	Newton-classique		ISP-Newton		Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU	
Maillage 2	6	1m59s	6	1m46s	1.12
Maillage 3	8(2)	12m51s	8(2)	11m01s	1.16

(a) 1000 At

Maillages	Newton-classique		ISP-Newton		Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU	
Maillage 2	13(3)	4m38s	12(3)	4m02s	1.15
Maillage 3	15(8)	25m34s	11(5)	14m42s	1.73

(b) 3000 At

TABLE 3.11 – Résultat de convergence pour différents algorithmes.

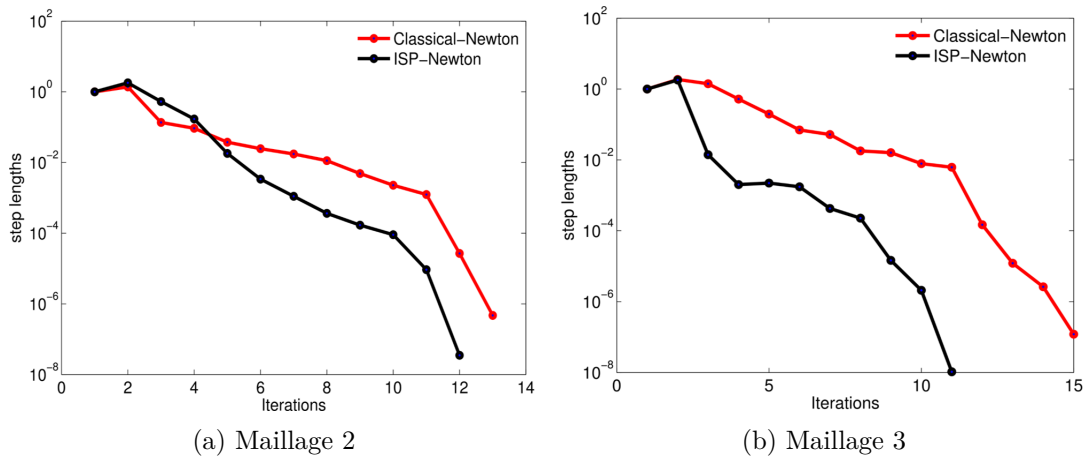


FIGURE 3.10 – Comportement de convergence pour différents algorithmes pour 3000 At.

Maillages	Newton-classique		ISP-Newton		Speedup
	Itérations $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Itérations $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU	
Maillage 1	14 (4)	3m22s	10 (3)	2m15s	1.49
Maillage 2	14 (7)	5m04s	12 (6)	3m21s	1.51
Maillage 3	15 (6)	22m47s	11 (3)	14m02s	1.62

TABLE 3.12 – Résultats de convergence pour les différents maillages pour 1700 At.

Temps CPU	Solveurs non linéaires	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3
T1(mise à jour)	Newton-classique	72.62	93.42	506.18
	ISP-Newton	54.21	56.01	252.18
T2(résolution)	Newton-classique	98.03	158.55	721.37
	ISP-Newton	70.33	88.27	467.58
T3 (réduction)	Newton-classique	20.91	37.17	38.40
	ISP-Newton	10.46	31.86	19.20

TABLE 3.13 – Résultats de convergence pour les différents maillages pour 1700 At.

Avec T1 est le temps CPU utilisé pour mettre à jour le système non linéaire, T2 le temps CPU utilisé pour résoudre le système et T3 le temps CPU utilisé pour la méthode de la recherche linéaire.

On constate que quand la taille de problème augmente, le coût de solveurs non linéaires augmente aussi. En effet, l'évaluation de la matrice Jacobienne et la résolution de système linéaire impliquant cette matrice (présentées dans les deux étapes T1 et T2) demandent plus de temps quand la taille de problème augmente.

On peut constater que le coût de calcul de la méthode de la recherche linéaire présentée par T3 est négligeable par rapport aux autres étapes. Comme prévu théoriquement, l'algorithme de la recherche linéaire ne garantit ni la réduction des itérations de Newton ni le temps de calcul. Cela améliore seulement la robustesse du solveur.

Newton-Inexacte vs ISP-Newton-Inexacte

L'algorithme proposé a été testé avec le schéma de Newton-Inexact. Les résultats de convergence pour le maillage 2 sont présentés dans le tableau (3.14).

Courant (At)	Newton-Inexacte			ISP-Newton-Inexacte			Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	CG	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	CG	Temps CPU	
1000	13	1800	2m21s	10	990	1m44s	1.35
1700	14(5)	2717	4m59s	13(2)	1812	4m16s	1.16
3000	22(10)	2201	5m48s	17(4)	1467	4m26s	1.30

TABLE 3.14 – Résultats de convergence de Newton-Inexact pour le maillage 2.

On peut voir que, l'ISP-Newton-Inexacte peut réduire le temps de calcul pour chaque valeur du courant. Dans le cas de 3000 At, le nombre d'itérations de Newton a été

réduit de 22 à 17 en introduisant 4 corrections durant l’algorithme de la recherche linéaire au lieu de 10.

Le nombre d’itérations de CG en fonction du courant est présenté dans la figure (3.11).

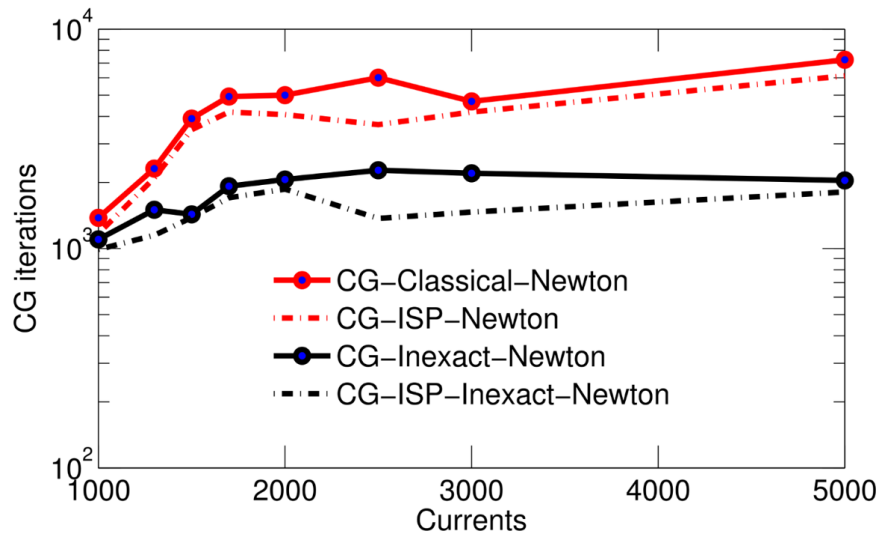


FIGURE 3.11 – Convergence de différents algorithmes pour le maillage 2.

On peut voir que lorsque la solution précédente de l’itération Newton est utilisée comme une estimation initiale pour l’algorithme CG, le nombre d’itérations CG a été réduit par rapport au nombre d’itérations de l’algorithme classique. En outre, on peut observer qu’avec le point de départ amélioré dans les deux algorithmes l’ISP-Newton et l’ISP-Newton-Inexacte, la réduction des itérations CG est observée pour toutes les valeurs du courant.

Quasi-Newton vs ISP-Quasi-Newton

Restons avec le maillage 2, l’algorithme proposé a été testée avec le Quasi-Newton pour 1000 At et 3000 At comme indiqué dans la figure (3.12).

Des résultats similaires avec l’ISP-Newton et l’ISP-Newton-Inexact en terme de réduction des itérations de Newton sont obtenus pour les algorithmes du type Quasi-Newton. Nous obtenons une réduction du coût de calcul pour chaque valeur du courant.

Enfin, les distributions du champ magnétique pour différentes valeurs du courant sont présentées dans la figure (3.13).

Le point de saturation est toujours concentré dans le coin des plaques ferromagnétiques. Quand le courant de l’excitation de la bobine augmente, une saturation plus forte est observée et donc le problème sera plus difficile à résoudre.

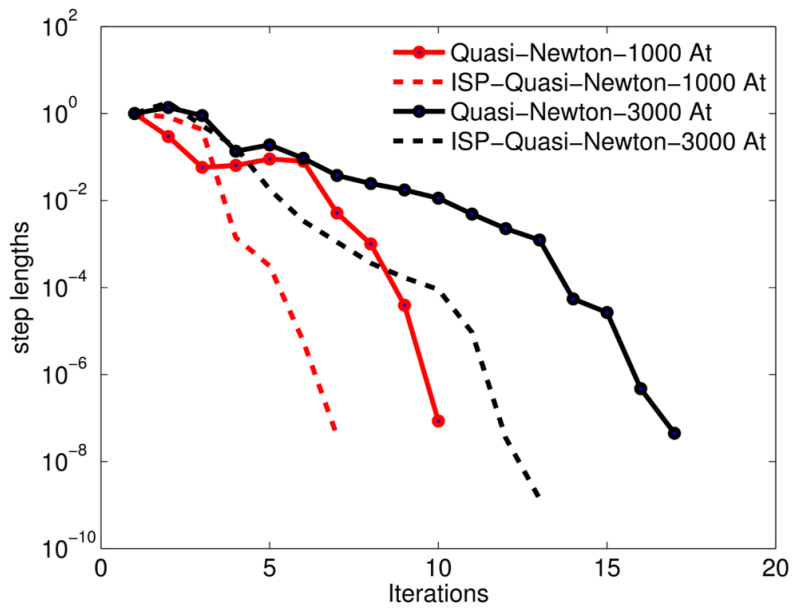


FIGURE 3.12 – Convergence de différents algorithmes.

T.E.A.M Workshop 13 modifié

Il s'agit de modifier le T.E.A.M. Workshop Problem 13 en agissant sur la taille de la plaque centrale du maillage 2 soit en la diminuant pour atteindre 30 mm au lieu de 50 mm soit en l'augmentant jusqu'à 70 mm comme détaillé dans la figure (3.14).

Les deux algorithmes de Newton-classique et de l'ISP-Newton sont appliqués pour les trois problèmes et pour un courant égale à 3000 At. Les résultats de convergence pour les différentes plaques sont résumés dans le tableau 3.15.

Plaques	Newton-classique		ISP-Newton		Speedup
	Itérations $\mathbf{A} = 0$	Temps CPU	Itérations $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU	
P30	15(3)	5m33s	13(1)	4m44s	1.17
P50	13(3)	4m38s	12(3)	4m02s	1.15
P70	12(2)	3m59s	10(1)	3m06s	1.32

TABLE 3.15 – Résultats de convergence pour les différents tailles de plaques.

Les résultats numériques montrent que la convergence de deux algorithmes devient de plus en plus compliqués quand la taille des plaques diminue au l'effet de pointes accentuées. Cependant, l'ISP-Newton a réussi à réduire le nombre d'itérations non linéaires ainsi que le coût de calcul pour les différents tailles de problème par rapport à l'algorithme de Newton-classique.

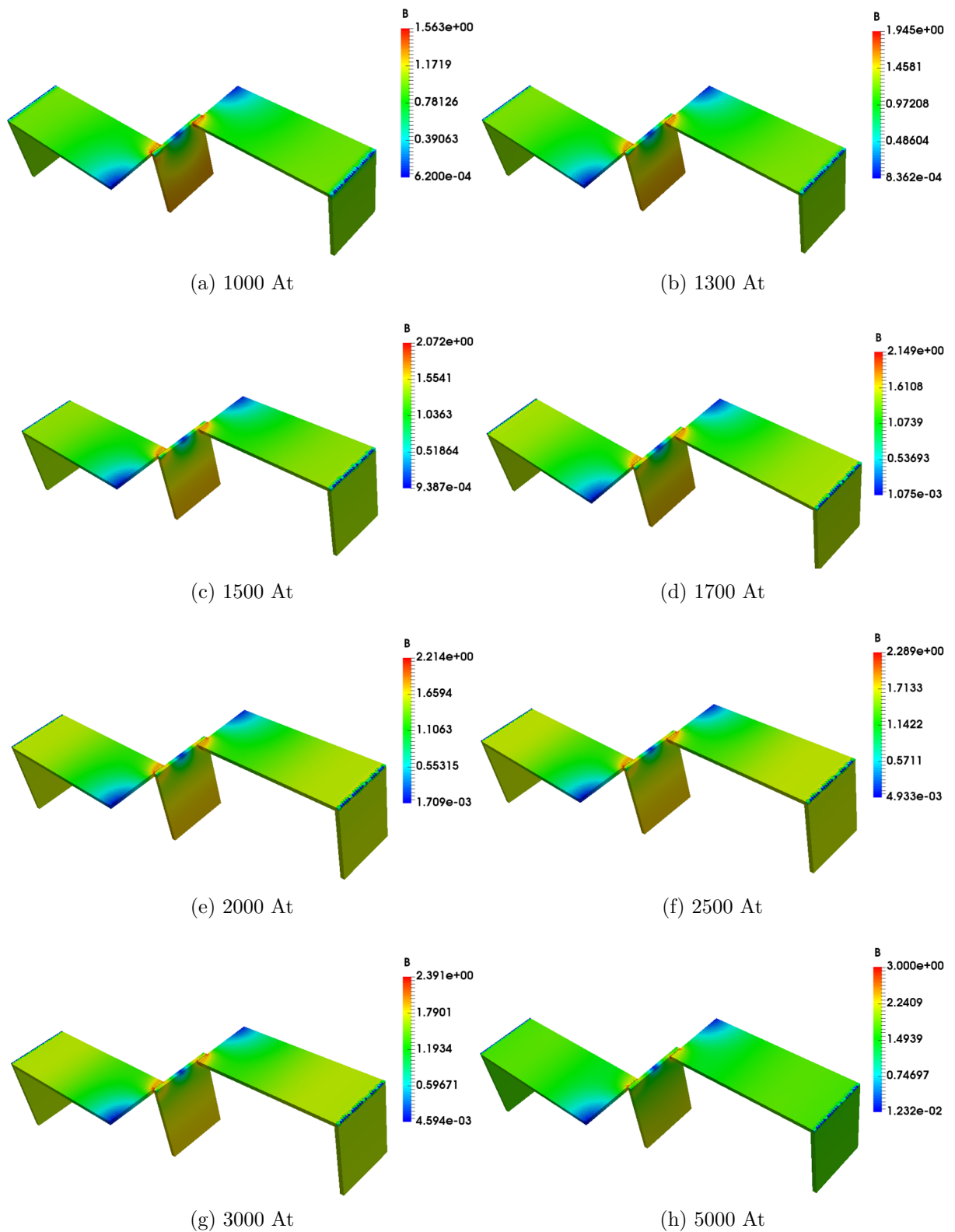


FIGURE 3.13 – Distribution d'induction magnétique pour différentes valeurs du courant.

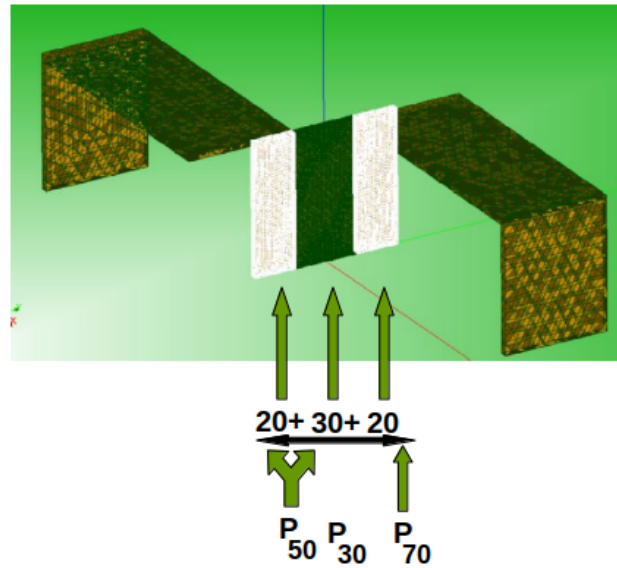


FIGURE 3.14 – T.E.A.M Workshop 13 modifié.

3.2.2 Magnétostatique 3D : en potentiel scalaire

L'algorithme d'ISP-Newton adapté au potentiel scalaire magnétique est décomposé en deux étapes :

Premièrement, le problème linéaire est résolu avec une perméabilité constante choisie comme μ_0 dans le domaine du calcul tel que :

1. Nous résolvons un problème linéaire L_S avec une perméabilité μ_0 constante (comme la perméabilité de l'air) dans le domaine, c'est-à-dire trouver Ω_S tel que :

$$\operatorname{div}(\mu_0 \mathbf{grad} \Omega_S) = \operatorname{div}(\mu_0 \mathbf{H}_s). \quad (3.7)$$

2. À partir de cette solution Ω_S , la perméabilité μ_1 est mise à jour par $\mu_1 = \mu(\mathbf{H}_s - \mathbf{grad} \Omega_S)$, puis nous cherchons la solution initiale Ω_N en résolvant le problème linéaire L_N suivant :

$$\operatorname{div}(\mu_1 \mathbf{grad} \Omega_N) = \operatorname{div}(\mu_1 \mathbf{H}_s). \quad (3.8)$$

Par la suite, nous utilisons la méthode de Newton-classique en commençant par cette estimation Ω_N .

Comme, il s'agit de construire et de résoudre deux systèmes linéaires (3.7) (3.8), l'algorithme est facilement implémenté et le coût de calcul est relativement faible (au pire des cas, moins de deux itérations de Newton).

3.2.2.1 Applications

Le comportement numérique des différents algorithmes a été étudié à l'aide de deux exemples numériques : le problème T.E.A.M. Workshop 13 et sa version modifiée. L'algorithme proposé ainsi que les différents schémas utilisés, nommés, respectivement, la méthode de Newton-classique, la méthode de Newton-Inexacte et la méthode de Quasi-Newton ont été implémentés dans le code `_Carmel`.

T.E.A.M. Workshop 13

La loi de comportement non linéaire utilisée, est définie selon le modèle de Marrocco comme indiqué dans (1.2.3.1).

Les résultats de calculs pour le modèle de Fröhlich sont détaillés dans l'annexe D.2.1. Différents maillages ont été utilisés de 5000 à 3 000 000 éléments tel que détaillé dans le tableau (3.16), et les courants sont réglés de 500 à 5000 At afin d'assurer la saturation dans les tôles d'acier.

Maillages	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3	Maillage 4
Nombre d'éléments	5 248	527 917	1 484 968	2 717 683
Nombre de nœuds	717	89 205	249 396	450 763

TABLE 3.16 – Informations sur les maillages utilisés.

Newton-classique vs ISP-Newton

Dans la première partie, la méthode de Newton sans utiliser l'algorithme de la recherche linéaire est considérée. Le nombre d'itérations non linéaires et le temps de calcul pour Newton-classique et ISP-Newton sont donnés pour le maillage 2 dans le tableau (3.17).

On remarque que sans aucune technique de globalisation, la méthode de Newton ne converge pas même pour la valeur du courant la plus petite, alors que l'ISP-Newton réussit à converger pour des valeurs du courants allant de 500 At à 2000 At. Cependant, à partir de 2500 At, le problème non linéaire devient très difficile à résoudre vu la forte saturation qui apparaît dans les coins de plaques et il est nécessaire d'améliorer la robustesse du solveur. Il convient de mentionner ici que des calculs similaires ont été effectués pour le maillage 1, le maillage 3 et le maillage 4 et les mêmes résultats ont été obtenus.

Dans la deuxième partie, l'algorithme de la recherche linéaire avec un facteur de relaxation est présenté, comme indiqué dans [Fujiwara et al., 1993], afin d'assurer

Courant (At)	Newton-classique		ISP-Newton	
	Itérations $\Omega_0 = 0$	Temps CPU	Itérations $\Omega_0 = \Omega_N$	Temps CPU
500	Diverge	-	8	1m49s
1000	-	-	9	2m18s
1500	-	-	9	2m22s
2000	-	-	11	2m49s
2500	-	-	Diverge	-
3000	-	-	-	-
5000	-	-	-	-

TABLE 3.17 – Résultats de convergence sans la recherche linéaire pour le maillage 2.

la convergence des deux algorithmes.

Tout d’abord, un calcul avec le maillage le plus grossier (le maillage 1 de 5 000 éléments) est considéré à partir de $\Omega_0 = 0$ et $\Omega_0 = \Omega_N$ pour $(\alpha_k)_i = 1/2^i$, $i = 1, 2, 3$. Le nombre d’itérations non linéaires et le nombre total de réductions dans l’algorithme de la recherche linéaire (le nombre entre parenthèses), ainsi que le coût de calcul sont présentés pour 1000 At et 3000 At. L’accélération entre le temps de calcul de la méthode de Newton-classique et l’ISP-Newton proposé est indiquée dans la dernière colonne.

Le résultat montre que, pour différentes valeurs du facteur de relaxation, le nombre d’itérations non linéaires ainsi que le nombre de réductions dans l’algorithme de la recherche linéaire ont été réduits avec l’ISP-Newton. Ainsi, une accélération de 1,34 à 2,51 peut être observée dans tous les cas.

Deuxièmement, un calcul avec le maillage le plus raffiné (maillage 4) est considéré comme détaillé dans le tableau (3.19) pour différents points de départ, à savoir, $\Omega_0 = 0$, $\Omega_0 = \Omega_N$ et le facteur de relaxation est pris comme $\alpha = 0.5$ pendant le processus de la recherche linéaire. D’après les résultats obtenus, on peut observer que le point de départ amélioré Ω_N montre une réduction intéressante du nombre d’itérations de Newton et du temps de calcul entre différents cas.

Dans le cas de 3000 At, le nombre d’itérations de Newton a été réduit de 67 à 8 et un seul appel à la procédure de la recherche linéaire a été effectué, comparé à 56 réductions avec le Newton-classique. Dans ce cas, la convergence avec l’ISP-Newton est 11 fois plus vite que le Newton-classique. Ceci peut s’expliquer par la technique de calcul du champ source utilisé dans le code_Carmel [Le Menach, 1999]. En effet,

	Newton		ISP-Newton		
Recherche linéaire $\alpha=1/2^i$	Itérations $\Omega_0 = 0$	Temps CPU	Itérations $\Omega_0 = \Omega_N$	Temps CPU	Speedup
$i=1$	19 (25)	1m13s	10	0m29s	2.51
$i=2$	16 (13)	0m51s	10	0m29s	1.75
$i=3$	14 (5)	0m39s	10	0m29s	1.34

(a) 1000 At

	Newton		ISP-Newton		
Recherche linéaire $\alpha=1/2^i$	Itérations $\Omega_0 = 0$	Temps CPU	Itérations $\Omega_0 = \Omega_N$	Temps CPU	Speedup
$i=1$	19 (26)	1m13s	9 (1)	0m31s	2.35
$i=2$	14 (6)	0m41s	8 (2)	0m29s	1.41
$i=3$	23 (17)	1m49s	13 (3)	0m53s	2.05

(b) 3000 At

TABLE 3.18 – Résultats de convergence de différents algorithmes pour le maillage 1.

	Newton-classique		ISP-Newton		
Courant (At)	Itérations $\Omega_0 = 0$	Temps CPU	Itérations $\Omega_0 = \Omega_N$	Temps CPU	Speedup
500	59 (45)	107m34s	8	11m49s	9.10
1000	67 (58)	146m13s	8 (2)	15m11s	9.63
1500	69 (68)	174m28s	8 (2)	15m04s	11.62
2000	62 (59)	159m13s	8 (2)	14m59s	10.62
2500	65 (53)	162m21s	8 (1)	15m05s	10.81
3000	69 (56)	164m49s	8 (1)	15m08s	10.97
5000	98 (92)	215m21s	8 (2)	15m46s	13.65

TABLE 3.19 – Résultats de convergence pour le maillage 4.

cette technique choisit un champ source mathématiquement correct mais très loin de la réalité physique. Or l’ISP nous permet d’obtenir avec l’algorithme de Newton un champ source proche de la réalité physique.

Newton-Inexacte vs ISP-Newton-Inexacte

Toujours avec le maillage 4, le point de départ amélioré a été testé sur le schéma de Newton-Inexacte pour traiter la non-linéarité. Les résultats des calculs pour diffé-

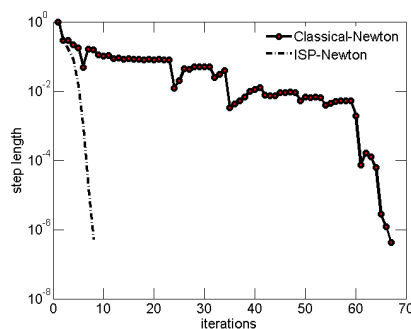
rentes valeurs du courant sont résumés dans le tableau (3.20).

Courants (At)	Newton-Inexacte		ISP-Newton-Inexacte		Speedup
	Itérations $\Omega_0 = 0$	Temps CPU	Itérations $\Omega_0 = \Omega_N$	Temps CPU	
500	63 (44)	103m03s	8	10m59s	9.37
1000	52 (39)	112m19s	8(1)	11m36s	9.68
1500	68 (59)	161m12s	8 (1)	12m45s	12.64
2000	65 (55)	121m17s	8 (1)	12m58s	9.35
2500	68 (56)	157m11s	9 (1)	13m22s	11.75
3000	70 (61)	159m05s	9 (1)	13m55s	11.42
5000	81 (59)	173m51s	9 (1)	14m12s	12.24

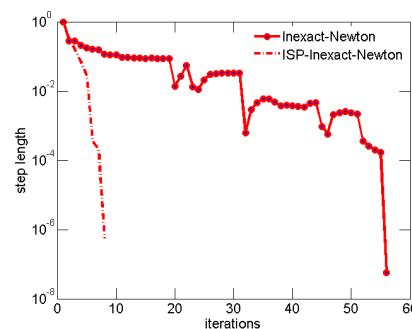
TABLE 3.20 – Résultats de convergence avec la recherche linéaire pour le maillage 4.

Une réduction significative du nombre d’itérations non linéaires ainsi que du temps de calcul est obtenu avec l’ISP-Newton. En effet, pour le cas de 3000 At le coût de calcul a été réduit de 159m05s à 13m55s et la vitesse de convergence est 11 fois plus vite.

Le comportement de convergence de différents algorithmes, à savoir Newton-classique, ISP-Newton, Newton-Inexacte et ISP-Newton-Inexacte dans figure (3.15) a été présenté pour 3000 At.



(a) Newton-classique vs ISP-Newton



(b) Newton-Inexacte vs ISP-Newton-Inexacte

FIGURE 3.15 – Résultats de convergence de différents algorithmes.

Avec la solution initiale proposée pour l’ISP-Newton ou l’ISP-Newton-Inexacte, l’algorithme converge de manière quadratique et beaucoup plus rapide que celui de Newton-classique.

Quasi-Newton vs ISP-Quasi-Newton

La stratégie proposée a été testée avec la méthode Quasi-Newton et des résultats similaires à ISP-Newton et ISP-Newton-Inexacte en terme de réduction du nombre d'itérations de Newton et du nombre d'appels à l'algorithme de la recherche linéaire ont été obtenus. On peut constater que 70% du coût de calcul est économisé dans la plupart des cas et que la vitesse d'accélération varie de 9.58 à 13.52 comme indiqué dans le tableau (3.21).

Courant (At)	Quasi-Newton		ISP-quasi-Newton		Speedup
	Itérations $\Omega_0 = 0$	Temps CPU	Itérations $\Omega_0 = \Omega_N$	Temps CPU	
500	53 (49)	104m47s	8	10m56s	9.58
1000	65 (57)	139m18s	8(1)	11m57s	11.65
1500	66 (59)	147m11s	8 (1)	12m17s	11.98
2000	63 (52)	141m05s	8 (1)	13m21s	10.56
2500	68 (60)	154m13s	8 (1)	13m45s	11.21
3000	65 (63)	155m33s	8 (1)	14m09s	11.09
5000	96 (89)	199m58s	8 (2)	14m47s	13.52

TABLE 3.21 – Résultat de convergence avec la recherche linéaire pour le maillage 4.

T.E.A.M. Workshop 13 modifié

Le même exemple étudié dans la figure (3.14) a été testé pour la formulation en potentiel scalaire Ω . Les deux algorithmes possédant différents points de départ nommés respectivement $\Omega = 0$ et $\Omega = \Omega_N$ sont appliqués pour les trois problèmes et pour un courant égal à 2500 At. Les résultats de convergence pour les différentes plaques sont résumés dans (3.16).

On remarque que la méthode d'ISP-Newton gardera toujours sa robustesse et son efficacité avec une vitesse quadratique quelle que soit la taille de la plaque utilisée comparant à la méthode-classique qui a mis un grand nombre d'itérations non linéaires et de réductions de pas pour assurer la convergence. En effet, la plaque qui a la taille la plus petite P_{30} est plus difficile à converger par rapport aux deux autres plaques P_{50} et P_{70} . Elle a mis 46 itérations et 27 réductions du pas.

Les distributions de champs magnétiques pour les différentes tailles de plaques sont résumées dans la figure (3.17). On peut observer que la taille des plaques centrales est inversement proportionnelle aux valeurs de l'induction magnétiques \mathbf{B} . En effet,

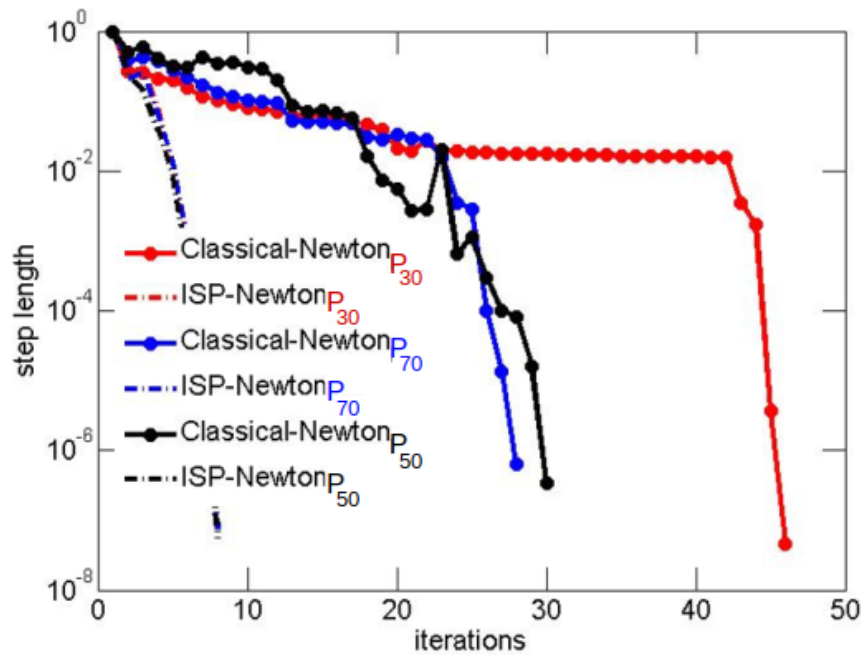


FIGURE 3.16 – T.E.A.M Workshop 13 modifié.

pour la taille de plaque la plus petite, la plus forte saturation est observée au niveau de ses coins (3.17a-3.17b) où la convergence est plus difficile à atteindre.

3.2.3 Le couplage circuit en présence de régions ferromagnétiques

Dans le cas de couplage circuit, les deux systèmes linéaires définis dans l'algorithme de ISP-Newton (3.2) nommé L_S et L_N définis respectivement dans (3.4) et (3.5) doivent être résolus à chaque itération de Newton en commençant par un certain point comme indiqué dans l'algorithme 3.3. Dans tous les cas, le coût des systèmes linéaires est toujours inférieur à deux itérations de Newton.

3.2.3.1 Application pour le couplage circuit en potentiel vecteur magnétique

Transformateur triphasé

Un transformateur triphasé couplé à des équations de circuits en magnétostatique est adopté. Ce dispositif électrotechnique est composé de trois bobines reliées à un circuit électrique primaire, trois bobines reliées à un circuit électrique secondaire et d'un noyau magnétique constitué des matériaux ferromagnétiques non linéaires. La structure de transformateur est donné dans (3.18).

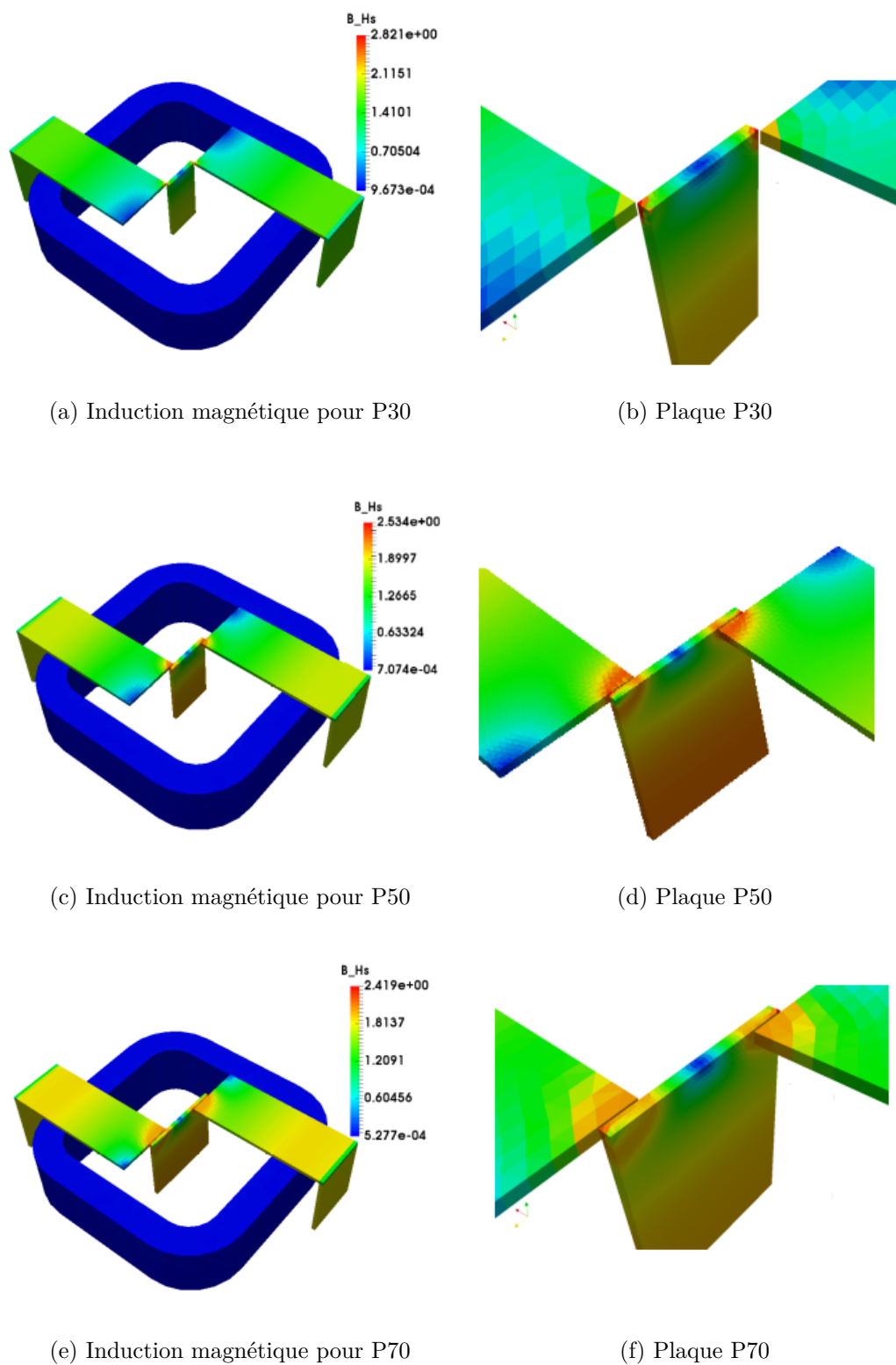


FIGURE 3.17 – Distribution de l'induction magnétique pour différentes tailles de plaques.

Algorithme 3.3 : ISP-Newton avec couplage circuit appliqué à la formulation en potentiel vecteur \mathbf{A} .

```

1 début
2    $k = 1$ , appliquer 3.2 pour obtenir  $\mathbf{X}^1$ 
3   pour  $k = 2 \dots$  le nombre de pas de temps faire
4      $\mathbf{A}^0 = \mathbf{X}^{k-1}$ 
5      $i = 1$ ,  $\mathbf{T0}_{N1}$  : prendre  $\mathbf{A}_S = \mathbf{A}^0$ , résoudre  $L_N$  pour obtenir  $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}_N$ 
6      $i = 2$ ,  $\mathbf{T0}_{N2}$  : set  $\mathbf{A}_S = \mathbf{A}^1$ , résoudre  $L_N$  pour obtenir  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}_N$ 
7     pour  $i = 3 \dots$  jusqu'à convergence faire
8       T1 : mise à jour de  $\mathbf{R}(\mathbf{A}^{i-1})$ , mise à jour de  $\mathbb{M}_{\text{Jacob}}(\mathbf{A}^{i-1})$ 
9       T2 : résoudre  $\mathbb{M}_{\text{Jacob}}(\mathbf{A}^{i-1}) \mathbf{d}^i = -\mathbf{R}(\mathbf{A}^{i-1})$ 
10      T3 : réduire le pas si c'est nécessaire :  $\mathbf{A}^i = \mathbf{A}^{i-1} + \lambda^i \mathbf{d}^i$ 
11     fin
12      $\mathbf{X}^k = \mathbf{A}^i$ 
13   fin
14 fin

```

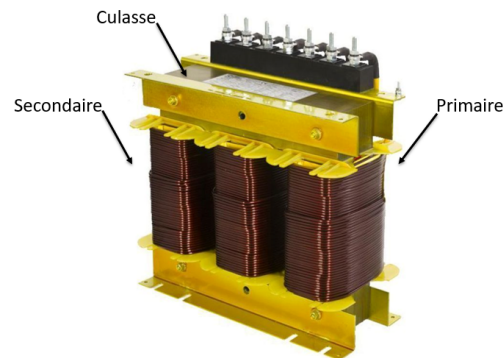


FIGURE 3.18 – Structure de transformateur triphasé.

L'étude des différents schémas de Newton est effectuée sur le transformateur à vide. Cette étude à vide, permet en effet de saturer fortement les matériaux magnétiques et aboutir à des comportements fortement non linéaires. L'évaluation de l'algorithme proposé sur cet exemple, permet de valider sa robustesse et son efficacité.

Vu la symétrie, seul le quart de la structure est modélisé. Le maillage décrit dans la figure (3.19a-3.19b) contient 29855 éléments et 6406 nœuds et le comportement ferromagnétique non linéaire est défini à travers le modèle de Marrocco.

La fréquence a été prise comme $f_0 = 50$ Hz. Le problème est résolu avec code_Carmel sur 1 périodes et nous considérons une discrétisation de temps uniforme sur 40.

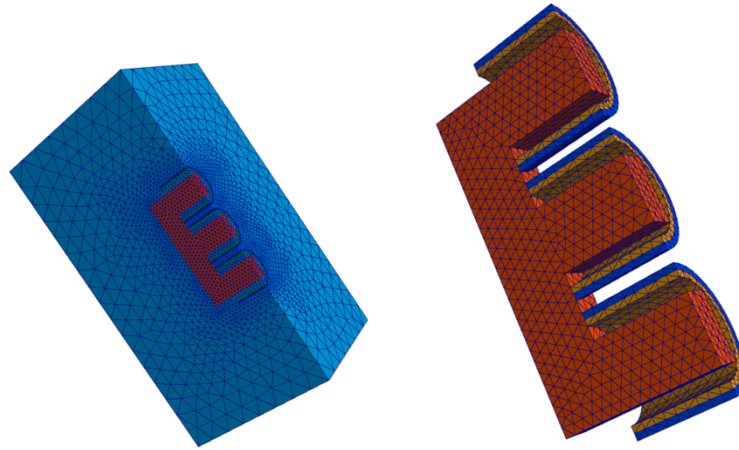


FIGURE 3.19 – Maillage de transformateur triphasé.

Les pics de courant dus à la saturation élevée du noyau magnétique sont obtenus comme le montre la figure (3.20).

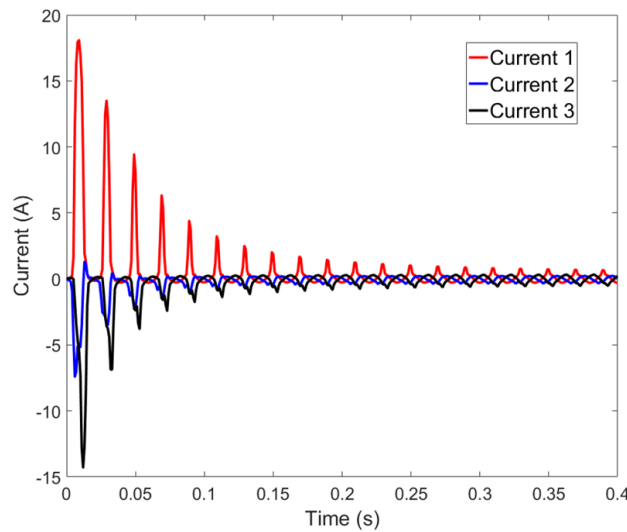


FIGURE 3.20 – Évolution des courants à vide dans les trois enroulements du primaire.

Ce problème a été évalué avec différents algorithmes, la méthode Newton, la méthode ISP-Newton et la méthode de point fixe à partir de différents points comme détaillé dans le tableau (3.23).

Le nombre d'itérations non linéaires ainsi que le nombre de corrections durant l'algorithme de la recherche linéaire (le nombre indiqué entre parenthèses) sont donnés pour différents schémas : \mathbf{A}_{prev} , la solution précédente de Newton-classique, la première étape de notre algorithme ISP nommé \mathbf{A}_S , le point de départ proposé \mathbf{A}_N , le point de départ \mathbf{A}_{N2} qu'on peut trouver après deux linéarisations, \mathbf{A}_{N3} en ajoutant

	Newton-classique	ISP-Newton				Point fixe
Pas	\mathbf{A}_{prev}	\mathbf{A}_S	\mathbf{A}_N	\mathbf{A}_{N2}	\mathbf{A}_{N3}	$\mathbf{A}_{N\infty}$
1	4	6	2	3	3	17
2	7	11	2	3	3	21
3	9	13(1)	2	3	3	23
4	13(1)	15(2)	6	9	9	27
5	15(7)	18(9)	9(2)	11(2)	11(2)	33
6	12(4)	16(5)	8(4)	9(2)	9(3)	34
7	12(6)	15(5)	7(2)	9(1)	9(1)	36
8	12(5)	14(7)	8(1)	9(1)	9(1)	34
9	12(4)	14(5)	7(1)	8(1)	9(1)	30
10	14(4)	16(2)	8(2)	9(1)	9(1)	33
Nombre d'itérations	110(31)	138(36)	59(11)	73(8)	74(9)	292
Temps CPU	7m26s	9m11s	4m53s	5m47s	5m54s	13m21s

TABLE 3.22 – Résultats de convergence pour les différents algorithmes pour 10 pas de temps (demi periode).

trois linéarisations et avec $\mathbf{A}_{N\infty}$ après avoir fait une infinité de linéarisations. Le nombre total des itérations non linéaires, les corrections durant l'algorithme de la recherche linéaire et le coût de calcul sont donnés dans les deux dernières lignes pour 10 pas de temps.

Comme théoriquement prévu, le point fixe a le coût le plus élevé en terme d'itérations et de temps de calcul. Cependant, avec notre méthode ISP-Newton, il apparaît que des économies de calcul assez importantes en terme d'itérations non linéaires, ainsi qu'en corrections durant la procédure de la recherche linéaire sont réalisées pour l'ensemble de la simulation. En outre, une accélération de la vitesse de convergence de 1.18 à 2.73 est obtenue avec l'ISP par rapport aux autres points de départ.

Enfin, les distributions du champ magnétique pour la première simulation sont données dans la figure (3.21). La plus forte saturation se situe au milieu.

Maquette du turbo-alternateur 26 kW

Un deuxième cas industriel, un turbo alternateur de 26 kW avec amortisseurs a été étudié afin de tester l'algorithme proposé. En raison de sa symétrie, seulement un quart de la structure est modélisé comme décrit dans la figure (3.22). Le stator et le rotor sont en tôle de fer et les amortisseurs en cuivre. Un courant constant (10 A)

	Point-Fixe	Newton-classique	ISP-Newton
Pas	A_{PF}	$A_{préc}$	A_N
1	17	4	3
2	21	7	3
3	23	9	3
4	27	13(1)	6
5	33	15(7)	9(2)
6	34	12(4)	8(4)
7	36	12(6)	7(2)
8	34	12(5)	8(1)
9	30	12(4)	7(1)
10	33	14(4)	8(2)
Nombre d'itérations total	292	110(31)	62(11)
Temps CPU total	13m21s	7m26s	4m54s

TABLE 3.23 – Résultats de convergence pour les différents algorithmes pour 10 pas de temps (demi periode).

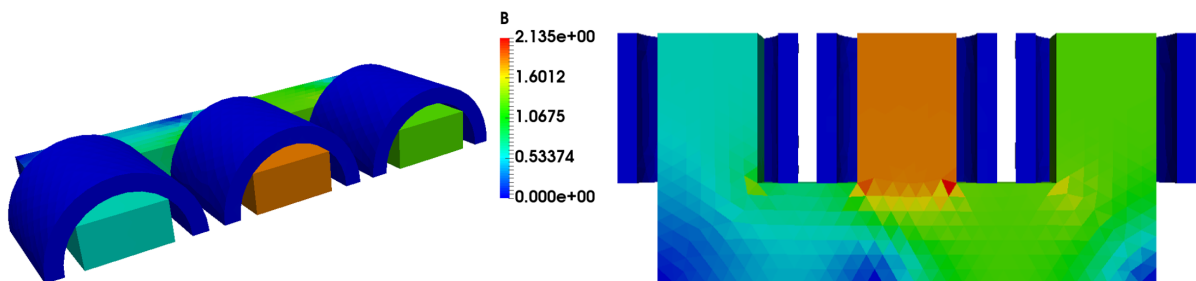


FIGURE 3.21 – Distribution de l'induction magnétique à vide.

est appliqué dans les bobines du rotor, et 0 A dans les autres enroulements des inducteurs. Comme indiqué dans le tableau (3.24), le nombre total d'itérations non linéaires, le nombre total de corrections durant l'algorithme de la recherche linéaire (indiqué entre parenthèses), le coût de calcul et le taux d'accélération pour les deux algorithmes, nommé respectivement, la méthode de Newton-classique et la méthode ISP-Newton sont indiquées. Une réduction significative du temps de calcul peut être obtenue pour l'ensemble de la simulation. Ainsi, un taux d'accélération jusqu'à 1.93 est obtenu au 7^{ème} pas de temps.

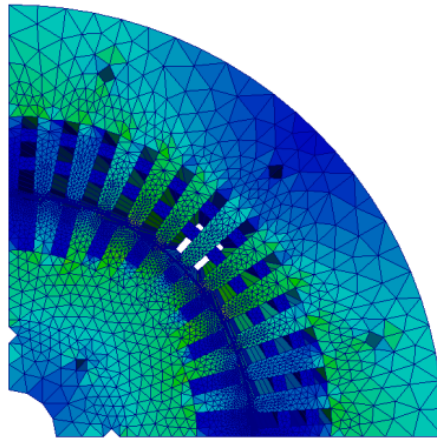


FIGURE 3.22 – Structure de turbo-alternateur 26 kW.

	Classical Newton		ISP-Newton		
Pas	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{prev}}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU	Speed-up
1	6	1m10s	4	0m58s	1.20
2	9	1m49s	7	1m03s	1.80
3	13	1m49s	12	1m22s	1.32
4	12 (3)	1m41s	12(1)	1m36s	1.05
5	13 (3)	1m51s	11(2)	1m29s	1.24
6	14 (2)	1m58s	10(2)	1m12s	1.63
7	14 (4)	1m54s	11(1)	0m59s	1.93
8	15 (2)	2m10s	12(1)	1m20s	1.62
9	14 (2)	1m49s	13(1)	1m37s	1.12
10	13 (2)	1m49s	11(1)	1m11s	1.53

TABLE 3.24 – Résultats de convergence pour différents algorithmes.

3.2.3.2 Application pour couplage circuit en potentiel scalaire magnétique

Turbo-alternateur 1400 MW (2D extrudée)

Le bobinage du stator est réparti dans 84 encoches. Les trois phases de la machine, caractérisée par un bobinage imbriqué à pas raccourci (2 barres par encoche) couplées en étoile, se composent de quatre voies en parallèle réparties dans 7 encoches. Le bobinage rotorique, concentrique, est distribué dans 48 encoches et possède 41 spires par pôles (7 spires dans les grandes encoches et 6 spires dans les petites encoches) sont également présents au rotor comme décrit dans la figure (3.23). Ce

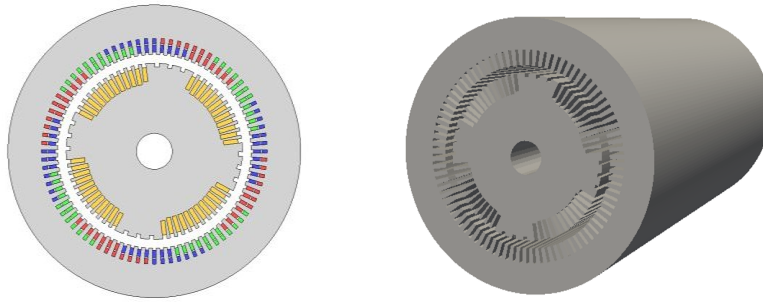


FIGURE 3.23 – Structure de turbo alternateur 1400 MW.

problème a été testé avec 4 différentes valeurs du courant allant de 500 At à 5000 At. Comme décrit précédemment, le nombre d’itérations non linéaires, le temps total d’appels pour la recherche linéaire indiqué entre parenthèses, le temps de calcul ainsi que l’accélération entre les deux algorithmes, pour la méthode de Newton-classique et la méthode ISP-Newton sont présentés dans le tableau (3.25).

Courant (A)	Newton-classique		ISP-Newton		Speedup
	Itérations $\Omega_0 = 0$	Temps CPU	Itérations $\Omega_0 = \Omega_N$	Temps CPU	
500	34 (27)	0m51s	21 (13)	0m29s	1.75
1000	38 (20)	0m55s	22 (16)	0m34s	1.61
1800	30 (24)	0m41s	16 (9)	0m19s	2.15
5000	29 (18)	0m48s	13 (6)	0m17s	2.82

TABLE 3.25 – Résultats de convergence avec la recherche linéaire.

Les résultats numériques montrent que commençant par le point amélioré $\Omega = \Omega_N$, une réduction intéressante en terme d’itérations non linéaires ainsi que le coût de calculs est observée. Cela amène à une accélération de vitesse de convergence allant jusqu’à 2.82. La distribution de l’intensité du champ magnétique pour les différentes valeurs du courant : 1000, 1800, 5000 At est donnée dans la figure (3.24).

3.2.4 La magnétodynamique

La résolution des systèmes non linéaires dans le domaine temporel a toujours joué un rôle important dans la simulation numérique de nombreux dispositifs électromagnétiques. Pour résoudre ces problèmes, les algorithmes proposés sont testés pour la formulation de la magnétodynamique $(\mathbf{A} - \varphi)$ comme décrit dans (1.6.2) et l’algorithme ISP-Newton avec couplage circuit appliqué à la formulation en potentiel

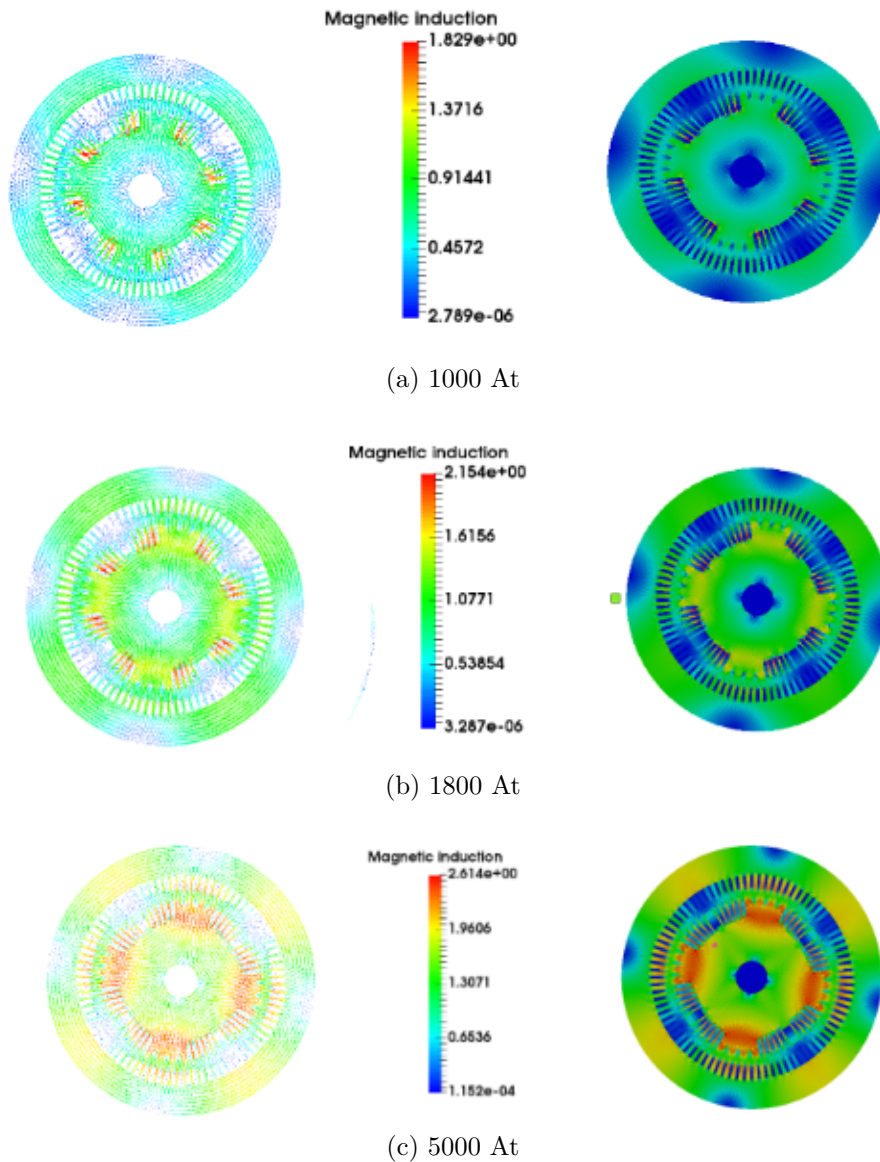


FIGURE 3.24 – Distribution d'induction magnétique.

vecteur \mathbf{A} (3.3) sera adopté ici.

3.2.4.1 Application

Le modèle décrit dans (3.25), consiste en une plaque conductrice non linéaire soumise à un champ magnétique. La source est l'inducteur bobiné qui est composé de 700 spires a un rayon intérieur de 87 mm et un rayon extérieur de 116 mm. L'inducteur est relié à un circuit électrique composé d'une résistance et d'une source de tension. Vu la symétrie, seulement 1/8 de la géométrie sera étudié. Ce maillage est composé de 27 168 éléments.

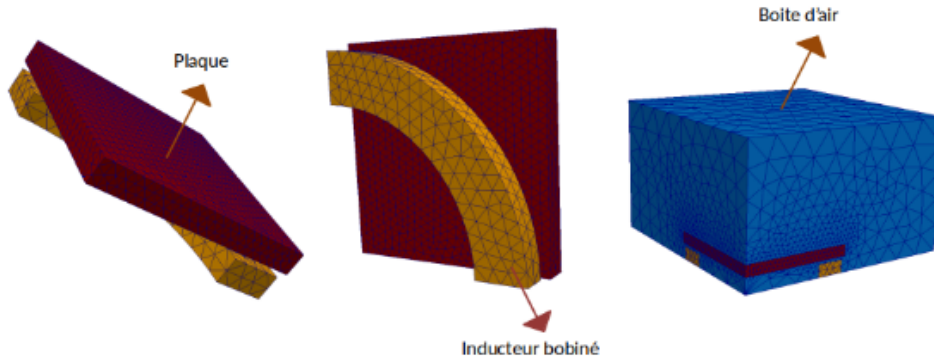


FIGURE 3.25 – Structure de la plaque.

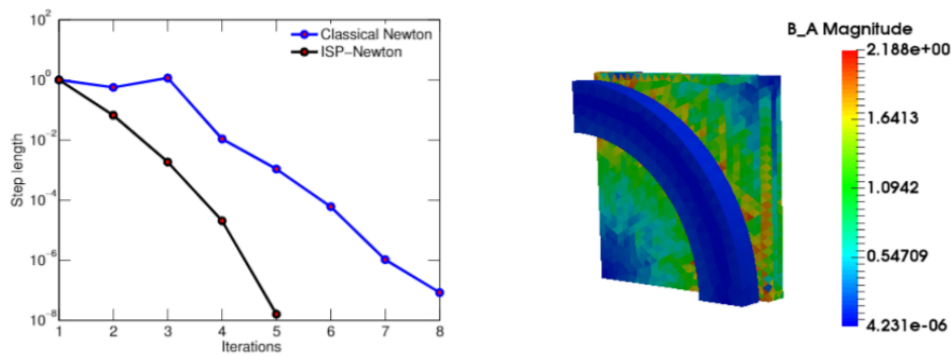
Pour tester les performances de l’algorithme proposé, les valeurs du courant varient de 15 A à 90 A et l’algorithme de la recherche linéaire est implémenté pour atteindre un niveau acceptable de robustesse comme décrit dans le tableau (3.26). Pour chaque valeur du courant, le nombre total d’itérations non linéaires à la fin de la simulation ainsi que le nombre total de réductions indiqué entre parenthèses, le temps de calcul et le speedup sont donnés pour les différents algorithmes.

Courant	Newton-classique	Temps	ISP-Newton	Temps	speedup
(At)	$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{prev}}$	CPU	$\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	CPU	
15	226	2m57s	168	1m34s	1.88
30	479(57)	4m27s	197	1m43s	2.59
60	477(74)	5m28s	197	1m55s	2.85
90	531(96)	6m18s	248	2m53s	2.18

TABLE 3.26 – Résultats de convergence de différents algorithmes.

On peut constater que, démarrant à partir de $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$, notre ISP-Newton proposé n’a pas besoin d’utiliser la méthode de la recherche linéaire pour converger contrairement à l’algorithme de Newton-classique. Le coût de calcul de la recherche linéaire (le nombre entre parenthèses) peut donc être évité. De plus, le nombre d’itérations non linéaires ainsi que le coût de calcul ont été réduits. Une accélération de 1.88 à 2.85 est observé sur cet exemple.

La convergence des deux algorithmes en fonction des itérations de Newton est donné dans la figure (3.26a). On peut constater que, avec notre solution initiale proposée, l’algorithme converge de manière quadratique et beaucoup plus rapidement. La figure (3.26b) montre la distribution de la densité de flux magnétique \mathbf{B} . La saturation



(a) Courbe de convergence pour les différents algorithmes (b) Distribution de l'induction magnétique

FIGURE 3.26 – Résultats de calculs pour le $6^{\text{ème}}$ pas et pour le cas de 90 At.

la plus forte est localisée au centre de la plaque comme prévu théoriquement.

3.3 Conclusion

Dans un premier temps, l'ISP-Newton a été implémenté dans une maquette éléments finis 2D développée durant cette thèse. Il a été comparé avec la méthode de Newton-classique puis adapté pour plusieurs variantes de Newton (Newton-Inexacte, Quasi-Newton, *etc.*) pour résoudre des problèmes magnétostatiques avec différents comportements non linéaires.

Plusieurs applications sous différentes configurations ont été modélisées pour tester les performances de l'algorithme proposé. On peut citer le cas d'étude inspiré de problème T.E.A.M Workshop 13. La non-linéarité est prise en compte à travers deux lois de comportement isotropes (Marrocco et Fröhlich). Les résultats de convergence de Newton-classique et l'ISP-Newton montrent que dès que la forte saturation apparaît, la méthode de Newton-classique diverge pour des valeurs du courant élevées contrairement à l'ISP Newton qui converge pour tous les cas avec une réduction intéressante en terme d'itérations non linéaires et en terme de temps CPU. Pour atteindre un niveau acceptable de robustesse, une méthode de la recherche linéaire a été implémentée. Un calcul similaire a été effectué pour la méthode de Newton globalisée. Les résultats numériques montrent que la méthode de Newton-classique est devenue plus robuste et converge pour différentes valeurs du courant mais avec de nombreuses réductions de pas durant le processus de la recherche linéaire. Suite à ce coût supplémentaire, la réduction en nombre d'itérations non linéaires et en temps de calcul devient plus intéressante avec notre ISP-Newton qui converge sans

avoir besoin de technique de globalisation.

Ensuite, l'amélioration de la solution initiale (ISP) est appliquée pour toutes les variantes de Newton : les méthodes de Newton-Inexactes avec différentes stratégies de termes forçants et les méthodes de Quasi-Newton (Corde, Shamanski et Broyden). Il a été observé que l'ISP-Newton-Inexact ou l'ISP-Quasi-Newton permet d'améliorer la robustesse et l'efficacité de la méthode en assurant une convergence quadratique sans utiliser aucune technique de globalisation contrairement aux méthodes classiques existantes (Newton-Inexacte et Quasi-Newton) pour lesquelles la convergence est assurée qu'avec plusieurs réductions de pas et donc un surcoût. Pour tester encore les performances, une version modifiée du problème T.E.A.M Workshop 13 a été modélisée afin de rendre le problème plus difficile à résoudre et des résultats similaires sont observés avec l'ISP-Newton.

En deuxième temps, ISP-Newton a été implémenté en 3D dans le code `_Carmel` et validé à travers des exemples académiques et industriels pour des problèmes en magnétostatique et en magnétodynamique de grandes tailles. Le cas d'étude T.E.A.M Workshop Problem 13 qui fait partie de la série de cas test international, a été modélisé en 3D pour différentes finesses de maillages allant jusqu'à 3 millions d'éléments pour deux des deux formulations de la magnétostatique (\mathbf{A} et Ω) et la non linéarité est prise en compte à travers les deux lois de Marrocco et Fröhlich.

Un premier calcul a été fait, sans utiliser aucune technique de globalisation. Les calculs lancés montrent qu'aucune convergence n'a été atteinte pour le Newton-classique et l'ISP-Newton pour des valeurs du courant élevées à cause de la complexité des calculs de fortes saturations rencontrées.

La méthode de la recherche linéaire a été implémentée pour atteindre un niveau acceptable de robustesse pour les différentes méthodes. Une comparaison entre les variantes de Newton-classique et les variantes d'ISP-Newton a montré une amélioration de la robustesse de la méthode et une réduction en terme d'itérations non linéaires et de réduction de pas. Un speedup intéressant est obtenu pour les deux formulations et pour chaque valeur du courant. Par exemple, pour la formulation en potentiel scalaire la convergence peut être 13 fois plus rapide avec l'ISP-Newton que le Newton-classique.

De plus, l'algorithme proposé a été développé pour résoudre des problèmes couplés à des équations du circuit et pour des problèmes magnétodynamiques afin de prendre en compte le comportement transitoire des machines. Un transformateur triphasé, deux turboalternateurs et un exemple académique ont été modélisés pour tester la performance de l'ISP pour les différentes formulations. Des résultats similaires montrent une amélioration de la robustesse et une accélération de vitesse de

convergence intéressante en utilisant l'ISP.

Conclusion générale

Les travaux de cette thèse avaient pour objectif, le développement des solveurs non linéaires basés sur l'algorithme de Newton pour résoudre les problèmes d'électromagnétisme en basse fréquence.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté le modèle éléments finis formé par les équations de Maxwell et associé aux lois de comportement électrique et magnétique pour décrire les phénomènes électromagnétiques en basse fréquence. Dans notre cas la non linéarité provient uniquement du comportement des matériaux ferromagnétiques. Plusieurs types de modèles sont présents, les modèles isotropes, anisotropes et hystérétiques. Pour résoudre ces problèmes, les formulations de la magnétostatique et de la magnétodynamique en introduisant des potentiels scalaires et vecteurs (magnétiques et électriques) sont utilisées.

Le deuxième chapitre concerne, les différentes méthodes employées pour résoudre le système matriciel discrétisé. En premier temps, une brève présentation sur les méthodes directes et itératives est faite. Ensuite, nous présentons les méthodes de résolution non linéaires telles que la méthode du point fixe et la méthode de Newton. Cette dernière n'a qu'une convergence locale et pour atteindre un niveau acceptable de robustesse, les méthodes de globalisation sont introduites. Enfin, afin de réduire le coût des itérations de la méthode de Newton, les méthodes de Newton-Inexactes et Quasi-Newton sont présentées.

Le troisième chapitre a introduit l'algorithme développé nommé Improved Starting Point (ISP-) Newton. Ce dernier est basé sur l'amélioration du point de départ de la méthode de Newton qui consiste à faire une première résolution sans considérer les parties ferromagnétiques suivi d'une itération de type point fixe. La solution de

cette seconde résolution devient alors le vecteur initial de la méthode de Newton. Les résultats numériques obtenus en 2D, ont montré que cette méthode rend l'algorithme de Newton robuste. Il ne nécessite alors pas le recours à une technique de globalisation pour garantir la convergence. De plus le nombre d'itérations est dans les cas observés plus faible. Ces deux raisons font que l'ISP diminue sensiblement les temps de calcul.

En 3D, l'algorithme ISP-Newton a été développé pour les différentes formulations en potentiels scalaires et vecteurs toutefois la robustesse est moindre. En effet, l'ISP fait appel aux techniques de globalisation pour converger. Toutefois, il reste plus efficace pour les cas observés de la magnétostatique, couplé circuit ou non, de la magnétodynamique et pour tous les différents schémas de Newton (ISP-Newton-Inexact, ISP-Quasi-Newton). Les temps de calcul sont par conséquent tous réduits et très fortement pour la formulation en potentiel scalaire.

Finalement, les travaux effectués durant cette thèse permettent maintenant de résoudre à l'aide de `code_Carmel` des cas industriels en 3D qui étaient difficiles à traiter auparavant et engendraient des temps de calculs difficilement acceptables. De plus, les techniques de globalisations implémentées dans le `code_Carmel` pour assurer la convergence des solveurs existants permettent de prendre comme tolérance des solveurs non linéaires, des valeurs plus basses. Et donc, la qualité de la solution se trouve fortement améliorée et cela est très sensible pour les problèmes magnétodynamiques. Par ailleurs, pour la formulation en potentiel scalaire magnétique, nous utilisons que la méthode de point fixe qui était robuste mais très lente car sa vitesse de convergence est linéaire.

Perspectives

Plusieurs perspectives sont soulevées pour ces travaux de thèse.

À court terme, on peut tester les algorithmes développés avec d'autres lois de comportements non linéaires isotropes comme les splines (cela permettrait de coller au mieux à des mesures faites dans nos laboratoires sur les matériaux réels) et valider les travaux entrepris pour les modèles décrivant des lois de comportements non linéaires anisotropes. Cela est indispensable pour mieux modéliser les transformateurs et les grands turbo alternateurs constitués de tôles à grains orientés. Dans ces conditions, l'estimation des pertes sera plus précise et la localisation des points chauds plus fiables avec un couplage thermique.

La validation sur des cas magnétodynamiques devra être poussée. On envisage dans ce cas que le solveur non linéaire contrôle le pas temps pour résoudre d'équation

différentielle. Cette approche peut évidemment, aussi s'appliquer aux formulations couplées circuit régies par le couplage d'une équation différentielle ordinaire aux équations de Maxwell. Un soin particulier devra être pris pour la formulation en potentiel scalaire magnétique dont tous les termes sont non linéaires.

On pourra aussi envisager de traiter simultanément deux lois de comportement non linéaires électriques et magnétiques. Les lois de comportement électriques, notamment pour les supra conducteurs, les ZnO utilisé dans les parasurtenseurs, peuvent subir une très forte variation et reste un défi pour la robustesse de solveurs.

Finalement la prise en compte du phénomène d'hystérésis dans la méthode des éléments finis en 3D reste encore difficile à effectuer. Pourtant certaines applications nécessitent cette modélisation comme le moteur à hystérésis et en moindre mesure le transformateur à vide. Toutefois la principale difficulté réside dans l'élaboration du modèle fiable pour toutes les fréquences.

En 2D, pour les cas de la magnétostatique, comme le laisse à penser les travaux de [Luo and Teng, 2016], les tests numériques ont montré que l'ISP semble intrinsèquement robuste. Aucun appel aux techniques de réduction de pas n'a été observé. Mathématiquement, il serait intéressant d'établir une preuve de cette robustesse.

Enfin, du point de vue calcul intensif, la parallélisation des solveurs non linéaires demeure encore un défi. Cela est principalement dû au caractère intrinsèquement itératifs des algorithmes utilisés. Nous sommes donc en quelque sorte obligés de découper le problème global en sous-problèmes couplés résolus en parallèle.

A

Algorithmes de résolution linéaires

A.1 LU

Algorithme A.1 : Algorithme LU.

```
1 début
  Entrées : Matrice  $A = (a_{ij})$  régulière de dimension  $N$ 
2  pour  $k = 1, \dots, N$  faire
3    pour  $i = k + 1, \dots, N$  faire
4       $a_{ik} \leftarrow \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ 
5      pour  $j = k + 1, \dots, N$  faire
6         $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$ 
7      fin
8    fin
9  fin
10 retourner  $LU = A$ 
11 fin
```

A.2 Gradient conjugué

Algorithme A.2 : Algorithme de gradient conjugué.

```
1 début
  Entrées :  $x_0 \in \mathbb{R}^N, \varepsilon > 0$ 
2    $R_0 \leftarrow b - Ax_0$ 
3    $p_0 \leftarrow R_0$ 
4   tant que  $\|R_{n+1}\| \geq \varepsilon$  faire
5     pour  $n = 0 \dots$  faire
6        $\gamma_n \leftarrow \frac{R_n^T R_n}{p_n^T A p_n}$ 
7        $x_{n+1} \leftarrow x_n + \gamma_n p_n$ 
8        $R_{n+1} = R_n - \gamma_n A p_n$ 
9        $\beta_n \leftarrow \frac{R_{n+1}^T R_{n+1}}{R_n^T R_n}$ 
10       $p_{n+1} \leftarrow R_{n+1} + \beta_n p_n$ 
11    fin
12  fin
13 fin
```

A.3 GMRES

Algorithme A.3 : Algorithme de GMRES.

```

1  début
   |   Entrées :  $x_0 \in \mathbb{R}^N$ ,  $m$ , le nombre maximum d'itérations
2  |    $R_0 \leftarrow b - Ax_0$ 
3  |    $\gamma \leftarrow \|R_0\|_2$ 
4  |    $v_1 = \frac{R_0}{\gamma}$ 
5  |    $\bar{G} \leftarrow \mathbb{R}^{(m+1) \times m}$ ,  $g_{ij} = 0 \forall (i, j) \in [1, m+1] \times [1, m]$ 
6  |   pour  $i = 1, 2, \dots, m$  faire
7  |   |    $w_i \leftarrow Av_i$ 
8  |   |   pour  $j = 1, 2, \dots, i$  faire
9  |   |   |    $g_{ij} \leftarrow (w_j, v_i)$ 
10 |   |   |    $w_j \leftarrow w_j - g_{ij}v_i$ 
11 |   |   fin
12 |   |    $g_{j+1,j} = \|w_j\|_2$ 
13 |   |   si  $g_{j+1,j} = 0$  alors
14 |   |   |    $m \leftarrow j$ , aller à 18
15 |   |   fin
16 |   |    $v_{j+1} = \frac{w_j}{g_{j+1,j}}$ 
17 |   fin
18 |    $y \leftarrow \operatorname{argmin}_y \|\gamma e_1 - \bar{G}_m y\|_2$ 
19 |    $x_m \leftarrow x_0 + V_m y_m$ 
20 fin

```

A.4 BiCGSTAB

Algorithme A.4 : Algorithme de BiCGSTAB.

```
1 début
   | Entrées :  $x_0 \in \mathbb{R}^N, \varepsilon > 0$ 
2   |  $R_0 \leftarrow b - Ax_0$ 
3   |  $R_0^* \leftarrow R_0$ 
4   |  $p_0 \leftarrow R_0$ 
5   | tant que  $\|R_{n+1}\| \geq \varepsilon$  faire
6   |   | pour  $n = 0 \dots$  faire
7   |   |   |  $\gamma_n \leftarrow \frac{(R_n, R_0^*)}{(Ap_n, R_0^*)}$ 
8   |   |   |  $d_n \leftarrow R_n - \gamma_n Ap_n$ 
9   |   |   |  $w_n \leftarrow \frac{(Ad_n, d_n)}{(Ad_n, Ad_n)}$ 
10  |   |   |  $x_{n+1} \leftarrow x_n + \gamma_n p_n + w_n d_n$ 
11  |   |   |  $R_{n+1} \leftarrow d_n - w_n Ad_n$ 
12  |   |   |  $\beta_n = \frac{(R_{n+1}, R_0^*)}{(R_n, R_0^*)} \times \frac{\gamma_n}{w_n}$ 
13  |   |   |  $p_{n+1} \leftarrow R_{n+1} + \beta_n (p_n - w_n Ap_n)$ 
14  |   | fin
15  | fin
16 fin
```

A.5 Méthode de Jacobi

Algorithme A.5 : Méthode de Jacobi.

```

1 début
  Entrées :  $x_0 \in \mathbb{R}^N, \varepsilon > 0$ 
2 tant que  $\|x_{n+1} - x_n\| \geq \varepsilon$  faire
3   pour  $i = 1, \dots, n$  faire
4      $y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^n A_{ij}x_j}{A_{ii}}$ 
5   fin
6   pour  $i = 1, \dots, n$  faire
7      $x_i = y_i$ 
8   fin
9 fin
10 fin

```

A.6 Gauss-Seidel

Algorithme A.6 : Les itérations de Gauss-Seidel.

```

1 début
  Entrées :  $x_0 \in \mathbb{R}^N, \varepsilon > 0$ 
2 tant que  $\|x_{n+1} - x_n\| \geq \varepsilon$  faire
3   pour  $i = 1, \dots, n$  faire
4      $x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^n A_{ij}x_j}{A_{ii}}$ 
5   fin
6 fin
7 fin

```

A.7 Relaxation

Algorithme A.7 : Les itérations de relaxation.

```
1 début
  Entrées :  $x_0 \in \mathbb{R}^N, \varepsilon > 0$ 
2 tant que  $\|x_{n+1} - x_n\| \geq \varepsilon$  faire
3   pour  $i = 1, \dots, n$  faire
4     
$$x_i = \omega \left( \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^n A_{ij}x_j}{A_{ii}} \right) + (1 - \omega)x_i$$

5   fin
6 fin
7 fin
```

B

Développement mathématique du calcul de la jacobienne

B.1 En potentiel scalaire magnétique

Pour le cas de la magnétostatique non linéaire, la méthode des éléments finis conduit aux N équations suivantes $E_i, i = 1 \dots n$:

$$E_i : \int_D (\mathbf{B}(\Omega) \mathbf{grad} \mathbf{w}_i) = 0. \quad (\text{B.1})$$

La matrice jacobienne du système associée à ces équations a pour coefficients :

$$J_{i,j}(\Omega) = \int_D \left(\frac{\partial \mathbf{B}(\Omega)}{\partial \Omega_j} \mathbf{grad} \mathbf{w}_i \right) dx dy. \quad (\text{B.2})$$

or, d'après les relations suivantes :

$$\mathbf{B}(\Omega) = \mu(\mathbf{H})\mathbf{H}. \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s - \mathbf{grad} \Omega. \quad (\text{B.4})$$

on a :

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\Omega)}{\partial \Omega_j} = \frac{\partial \mathbf{B}(\Omega)}{\partial \mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \Omega_j} \quad (\text{B.5})$$

$$= \frac{\partial \mathbf{B}(\Omega)}{\partial \mathbf{H}} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{w}_j. \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\Omega)}{\partial \mathbf{H}} = \frac{\partial \mu(\mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}} \cdot \mathbf{H} + \mu(\mathbf{H}) \quad (\text{B.7})$$

D'où :

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\Omega)}{\partial \Omega_j} = \left(\frac{\partial \mu(\mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}} \cdot \mathbf{H} + \mu(\mathbf{H}) \right) \cdot \mathbf{grad} \mathbf{w}_j. \quad (\text{B.8})$$

Le calcul de la matrice tangente est déterminé à partir de de la matrice de rigidité du calcul d'avant $\mu(\mathbf{H})$ et la correction $\frac{\partial \mu(\mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}} \cdot \mathbf{H}$. Le calcul de ces différentielles revient à calculer la correction qui dépend du choix de modèle utilisé.

Cas isotrope : $\mu_{\text{scal}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Dans ce cas, on a une loi scalaire qui relie la norme de l'induction magnétique $\|\mathbf{B}\|$ et la norme de champ magnétique $\|\mathbf{H}\|$, donc les équations (B.3) et (B.8) se réécrivent telles que :

$$\mathbf{B}(\Omega) = \mu_{\text{scal}}(\|\mathbf{H}\|) \mathbf{H}. \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\Omega)}{\partial \Omega_j} = \left(\frac{\partial \mu_{\text{scal}}(\|\mathbf{H}\|)}{\partial \mathbf{H}} \cdot \mathbf{H} + \mu_{\text{scal}}(\|\mathbf{H}\|) \right) \cdot \mathbf{grad} \mathbf{w}_j. \quad (\text{B.10})$$

Il faut donc calculer :

$$\frac{\partial \mu_{\text{scal}}(\|\mathbf{H}\|)}{\partial \mathbf{H}} = \frac{\partial \mu_{\text{scal}}(\|\mathbf{H}\|)}{\partial \|\mathbf{H}\|} \frac{\partial \|\mathbf{H}\|}{\partial \mathbf{H}} \quad (\text{B.11})$$

$$= \mu'_{\text{scal}} \frac{\mathbf{H} \mathbf{H}^T}{\|\mathbf{H}\|^2} \quad (\text{B.12})$$

Finalement, on définit la matrice de perméabilité non linéaire $\bar{\mu}_{\text{scal}}$ par :

$$\bar{\mu}_{\text{scal}} = \mu_{\text{scal}}(\|\mathbf{H}\|) I_3 + \frac{1}{\|\mathbf{H}\|} \mu'_{\text{scal}} \mathbf{H} \mathbf{H}^T. \quad (\text{B.13})$$

La Jacobienne vaut :

$$J_{i,j}(\Omega) = \int_{\Omega} \mu_{\text{scal}}^- \mathbf{grad} \mathbf{w}_j \mathbf{grad} \mathbf{w}_i dx dy. \quad (\text{B.14})$$

B.2 En potentiel vecteur magnétique

Pour la formulation en potentiel vecteur magnétique il s'agit de résoudre :

$$E_i : \int_{\Omega} (\mathbf{H}(\mathbf{A}) \mathbf{rot} \mathbf{w}_i^1) = Ni. \quad (\text{B.15})$$

Le second membre ne dépend pas de l'inconnue, donc le calcul de la dérivée de cette équation par rapport à l'inconnue nécessite uniquement un calcul sur la partie gauche. La jacobienne associée aux E_i équations a pour coefficients :

$$J_{i,j}(\mathbf{A}) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}_j} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_i^1 \right) dx dy. \quad (\text{B.16})$$

Or, d'après les relations suivantes :

$$\mathbf{H}(\mathbf{A}) = \nu(\mathbf{B})\mathbf{B}. \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}. \quad (\text{B.18})$$

D'où :

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}_j} = \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{B}} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{A}_j} \quad (\text{B.19})$$

$$= \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{B}} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_j. \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\partial \nu(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} \cdot \mathbf{B} + \nu(\mathbf{B}) \quad (\text{B.21})$$

D'où :

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}_j} = \left(\frac{\partial \nu(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B} + \nu(\mathbf{B}) \right) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_j. \quad (\text{B.22})$$

Le calcul de la matrice tangente est déterminé à partir de de la matrice de rigidité du calcul d'avant $\nu(\mathbf{B})$ et la correction $\frac{\partial \nu(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B}$. Le calcul de ces différentielles revient à calculer la correction qui dépend du choix de modèle utilisé.

Cas isotrope : $\nu_{\text{scal}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Dans ce cas, on a une loi scalaire qui relie la norme de l'induction magnétique $\|\mathbf{B}\|$ et la norme de champ magnétique $\|\mathbf{H}\|$, donc les équations (B.17) et (B.22) se réécrivent telles que :

$$\mathbf{H}(\mathbf{A}) = \nu_{\text{scal}}(\|\mathbf{B}\|)\mathbf{B}. \quad (\text{B.23})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}. \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}_j} = \left(\frac{\partial \nu_{\text{scal}}(\|\mathbf{B}\|)}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B} + \nu_{\text{scal}}(\|\mathbf{B}\|) \right) \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_j. \quad (\text{B.25})$$

Il faut donc calculer :

$$\frac{\partial \nu_{\text{scal}}(\|\mathbf{B}\|)}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\partial \nu_{\text{scal}}(\|\mathbf{B}\|)}{\partial \|\mathbf{B}\|} \frac{\partial \|\mathbf{B}\|}{\partial \mathbf{B}} \quad (\text{B.26})$$

$$= \nu'_{\text{scal}} \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}^T}{\|\mathbf{B}\|^2} \quad (\text{B.27})$$

Finalement, on définit la matrice de perméabilité non linéaire $\bar{\mu}_{\text{scal}}$ par :

$$\bar{\nu}_{\text{scal}} = \nu_{\text{scal}}(\|\mathbf{B}\|)I_3 + \frac{1}{\|\mathbf{B}\|} \nu'_{\text{scal}} \mathbf{B}\mathbf{B}^T. \quad (\text{B.28})$$

La Jacobienne vaut :

$$J_{i,j}(\mathbf{A}) = \int_{\Omega} (\nu_{\text{scal}}^- \mathbf{rot} \mathbf{w}_j \mathbf{rot} \mathbf{w}_i) dx dy. \quad (\text{B.29})$$

Cas anisotrope

Le modèle doit être construit pour décrire au mieux le processus physique et se rapprocher du contenu d'expériences et doit être au même temps facile à implémenter dans le code élément finis. Un tel modèle ne dispose pas d'un matériel sophistiqué et ne repose que sur des valeurs expérimentales accessibles pour tout utilisateur.

En supposant que \mathbf{B}_z ne dépend ni de \mathbf{H}_x ni de \mathbf{H}_y on peut écrire :

$$\mathbf{B}_x = \mathbf{B}_x(\mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y)$$

$$\mathbf{B}_y = \mathbf{B}_y(\mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y)$$

Le calcul de tenseur des perméabilités peut se faire dans un repère quelconque à travers une matrice de rotation \mathbf{P} du repère lié au matériau noté (Oxy) au nouveau repère nommé $(Ox'y')$ tel que :

$$\left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}} \right]_{Oxy} = [\mathbf{P}]^T \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}} \right]_{Ox'y'} [\mathbf{P}]. \quad (\text{B.30})$$

La matrice de perméabilité prend la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial \mathbf{H}_x} & \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial \mathbf{H}_y} \\ \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial \mathbf{H}_x} & \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial \mathbf{H}_y} \end{pmatrix} \quad (\text{B.31})$$

Prenant l'exemple d'un modèle basé sur l'énergie, comme détaillé dans [Pera, 1994]. Ce modèle permet de décrire la courbe $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ en l'absence de phénomène d'hystérésis. En respectant les hypothèses énoncées, les produits $\mathbf{H}.d\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}.d\mathbf{H}$ désignent l'accroissement de la densité volumique de l'énergie sont des différentielles exactes. On peut définir :

$$dw = \mathbf{H} d\mathbf{B} \text{ et } dw' = \mathbf{B} d\mathbf{H} \quad (\text{B.32})$$

avec w et w' désignent respectivement les densités volumiques d'énergie magnétique et de coénergie magnétique. Ces deux fonctions ne sont définies que si l'induction magnétique \mathbf{B} et le champ magnétique \mathbf{H} sont reliés par les relations suivantes et en considérant par exemple la coénergie :

$$\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial \mathbf{H}_y} = \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial \mathbf{H}_x} \quad (\text{B.33})$$

et on a le rotationnel de \mathbf{B} (respectivement de \mathbf{H}) dans l'espace du champ magnétique $\mathbf{H}(\mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y)$ (respectivement dans l'espace $(\mathbf{B}_x, \mathbf{B}_y)$) est nul et on introduit :

$$\mathbf{rot}_{\mathbf{H}} \mathbf{B} = 0 \text{ et } \mathbf{rot}_{\mathbf{B}} \mathbf{H} = 0 \quad (\text{B.34})$$

ce qui implique que $[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}}]^T = [\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{H}}]$.

Afin d'éviter les erreurs venant de ces dérivations, un autre repère (i, j) lié au champ magnétique \mathbf{H} est introduit. L'induction magnétique \mathbf{B} est exprimée telle que :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_i \mathbf{i} + \mathbf{B}_j \mathbf{j}$$

La coénergie s'écrit alors :

$$w'(\mathbf{H}) = w'(H, \theta) = \int_0^H \mathbf{B}_i d\mathbf{H} \quad (\text{B.35})$$

ce qui permet de trouver :

$$\mathbf{B}_i = \frac{\partial w'(H, \theta)}{\partial \mathbf{H}} \quad (\text{B.36})$$

$$\mathbf{B}_j = \frac{1}{\mathbf{H}} \frac{\partial w'(H, \theta)}{\partial \theta} \quad (\text{B.37})$$

$$(\text{B.38})$$

D'après la figure (B.1), la valeur de \mathbf{B}_i permet d'exprimer \mathbf{B}_j tel que :

$$\mathbf{B}_j(\mathbf{H}, \theta) = \mathbf{B}_i(\mathbf{H}, \theta) \cdot \tan(\beta - \theta) \quad (\text{B.39})$$

La construction des termes de l'induction magnétique \mathbf{B} en fonction de \mathbf{H} peuvent s'écrire en utilisant les coordonnées polaires dans le repère (Oxy) tel que :

$$\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial \mathbf{H}_x} = \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial \mathbf{H}} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial \mathbf{B}_j}{\partial \mathbf{H}} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\mathbf{H}} \left(\frac{\partial \mathbf{B}_j}{\partial \theta} + \mathbf{B}_i \right) \quad (\text{B.40})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial \mathbf{H}_y} = \sin^2 \theta \frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial \mathbf{H}} + (2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \mathbf{B}_j}{\partial \mathbf{H}} + \cos^2 \theta \left(\frac{\partial \mathbf{B}_j}{\partial \theta} + \mathbf{B}_i \right)) \quad (\text{B.41})$$

Donc D'après (B.33) on peut écrire :

$$\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial \mathbf{H}_y} = \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial \mathbf{H}_x} = \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial \mathbf{H}} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial \mathbf{B}_j}{\partial \mathbf{H}} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\mathbf{H}} \left(\frac{\partial \mathbf{B}_i}{\partial \theta} + \mathbf{B}_i \right) \quad (\text{B.42})$$

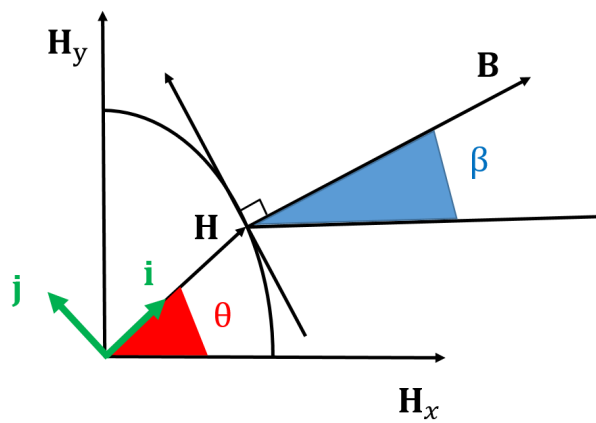


FIGURE B.1 – Définition des repères et direction de \mathbf{B} .

C

Résultats de calculs pour la loi de Fröhlich en 2D

Les mêmes exemples numériques utilisés pour les différents schémas de Newton (Newton-classique, Newton-Inexacte et Quasi Newton) sont validés avec la loi de comportement de Fröhlich décrit dans [1.2.3.1](#) pour le cas 2D.

C.1 Formulation en potentiel vecteur magnétique

C.1.1 Exemple 1 : Transformateur

C.1.1.1 Newton-classique vs ISP-Newton

Courant (At)	Newton-classique		ISP-Newton		Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU	
500	4	0m43s	4	0m19s	2.26
1000	5	0m46s	4	0m27s	1.70
1500	7	1m12s	5	0m41s	1.75
2000	10	1m51s	7	1m11s	1.56
2500	11	1m55s	7	1m13s	1.57
3000	11	2m03s	8	1m15s	1.60

TABLE C.1 – Exemple 1 : Newton classique vs ISP-Newton.

C.1.2 Exemple 2 : T.E.A.M Workshop 13

C.1.2.1 Newton-classique vs ISP-Newton

C.1.2.2 Newton-Inexacte vs ISP-Newton-Inexacte

C.1.2.3 Quasi-Newton vs ISP-Quasi-Newton

	Newton-classique		ISP-Newton			
Courant (At)	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU	Énergie (J)	Speedup
500	4	0m58s	4	0m44s	5.17E-2	1.31
1000	6	1m09s	4	0m46s	0.095	1.32
1300	7	1m13s	5	1m02s	0.166	1.21
1500	9	1m29s	6	1m11s	0.197	1.25
1700	11	1m57s	9	1m36s	0.215	1.21
2000	15	2m51s	11	1m59s	0.268	1.43
2500	Diverge	–	14	2m19s	0.330	–
3000	–	–	16	3m15s	0.503	–
5000	–	–	16	3m21s	1.223	–

TABLE C.2 – Exemple 2 : Newton-classique vs ISP-Newton.

	Newton-classique		ISP-Newton			
Courant (At)	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU	Énergie (J)	Speedup
500	4	0m58s	4	0m44s	5.17E-2	1.31
1000	6	1m09s	4	0m46s	0.095	1.32
1300	7	1m13s	5	1m02s	0.166	1.21
1500	9	1m29s	6	1m11s	0.197	1.25
1700	11	1m57s	9	1m36s	0.215	1.21
2000	15	2m51s	11	1m59s	0.268	1.43
2500	18(4)	3m57s	15	2m31s	0.330	1.56
3000	19(6)	4m32s	15	2m33s	0.503	1.77
5000	19(3)	4m29s	16	3m17s	1.223	1.36

TABLE C.3 – Exemple 2 : Newton-classique globalisé vs ISP-Newton globalisé.

Courant (At)	Newton-Inexacte			ISP-Newton-Inexacte			Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	CG	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	CG	Temps CPU	
500	8	1098	0m49s	6	638	0m31s	1.58
1000	9	1181	0m58s	6	688	0m39s	1.48
1300	11	1317	1m01s	8	790	0m44s	1.36
1500	13	1545	1m10s	10	987	0m59s	1.18
1700	14	1678	1m22s	11	1011	1m05s	1.35
2000	16(2)	2330	2m58s	12	1320	1m13s	2.43
2500	19(2)	2810	3m19s	15	1501	2m12s	1.50
3000	18(4)	2910	3m54s	16	1628	2m20s	1.67
5000	19(1)	2988	3m59s	16	1669	2m59s	1.33

TABLE C.4 – Exemple 2 : Newton-Inexacte globalisé vs ISP-Newton-Inexacte globalisé.

Méthodes	Quasi-Newton		ISP-Quasi-Newton		Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU	
Corde	12(1)	1m01s	8	0m31s	1.93
Shamanski	6	0m47s	5	0m21s	2.23
Broyden	7(1)	0m52s	5	0m29s	1.79

(a) 1000 At

Méthodes	Quasi-Newton		ISP-Quasi-Newton		Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU	
Corde	26(5)	4m12s	16	2m38s	1.59
Shamanski	15(3)	3m05s	10	1m49s	1.65
Broyden	18(2)	3m59s	11	1m54s	2.09

(b) 3000 At

TABLE C.5 – Exemple 2 : Quasi-Newton globalisé vs ISP-Quasi-Newton globalisé.

C.1.3 Exemple 3 : T.E.A.M Workshop 13 modifié

C.1.3.1 Newton-classique vs ISP-Newton

Courant (At)	Newton-classique		ISP-Newton		Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU	
1000	9	1m53s	6	1m01s	1.88
2000	19(4)	4m38s	14	2m49s	1.64
3000	20(2)	5m43s	15	3m22s	1.69

TABLE C.6 – Exemple 3 : Newton-classique globalisé vs ISP-Newton globalisé.

D

Résultats de calculs pour la loi de Fröhlich en 3D

Les mêmes exemples numériques utilisés pour les différents schémas de Newton (Newton-classique, Newton-Inexacte et Quasi Newton) sont validés avec la loi de comportement de Fröhlich décrit dans [1.2.3.1](#) pour le cas 3D.

D.1 Formulation en potentiel vecteur magnétique

D.1.1 Exemple 1 : T.E.A.M. Workshop 13

D.1.1.1 Newton-classique vs ISP-Newton

Courants (At)	Newton-classique		ISP-Newton		Énergie (J)	Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU		
1000	5	1m57s	5	1m39s	9.468E-2	1.18
1300	7	2m34s	7	2m13s	0.147	1.15
1500	16	4m48s	16	4m18s	0.186	1.11
1700	Diverge	–	Diverge	–	–	–
2000	–	–	–	–	–	–
2500	–	–	–	–	–	–
3000	–	–	–	–	–	–
5000	–	–	–	–	–	–

TABLE D.1 – Exemple 1 : Newton vs ISP-Newton.

Courants (At)	Newton-classique		ISP-Newton		Énergie (J)	Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU		
1000	6(2)	1m48 s	6(2)	1m30s	9.071E-2	1.20
1300	7(1)	1m22s	6(1)	1m15s	9.141	1.09
1500	13(4)	3m32s	13(2)	3m15s	0.181	1.08
1700	15(3)	3m29s	10(4)	2m17s	0.232	1.52
2000	18(7)	4m15s	13(7)	2m44s	0.302	1.55
2500	25(15)	5m51s	12(3)	2m30s	0.393	2.34
3000	17(6)	3m44s	15(3)	3m29s	0.491	1.07
5000	20(9)	4m54s	17(9)	4m17s	1.099	1.14

TABLE D.2 – Exemple 1 : Newton-classique globalisé vs ISP-Newton globalisé pour le maillage 1.

Méthodes	Newton-classique		ISP-Newton		Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU	
Mesh 2	5	1m57s	5	1m39s	1.18
Mesh 3	7(1)	12m48s	6(1)	10m50s	1.18

(a) 1000 At

Méthodes	Newton-classique		ISP-Newton		Speedup
	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU	
Mesh 2	14(4)	4m59s	13(1)	4m12s	1.18
Mesh 3	16(7)	26m39s	12(4)	15m11s	1.75

(b) 3000 At

TABLE D.3 – Exemple 1 : Newton-classique globalisé vs ISP-Newton globalisé pour le maillage 2 et 3.

Maillages	Newton classique		ISP-Newton		Speedup
	Itérations $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Itérations $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU	
Maillage 1	15(3)	3m29s	10(4)	2m17s	1.52
Maillage 2	15 (8)	5m14s	13 (7)	3m47s	1.38
Maillage 3	15 (8)	23m50s	12 (4)	14m13s	1.67

TABLE D.4 – Exemple 1 : Newton-classique globalisé vs ISP-Newton globalisé pour différents maillages pour 1700 At.

Temps CPU	Solveurs non linéaires	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3
T1	Newton-classique	73.61	93.52	507.19
	ISP-Newton	55.81	56.21	253.11
T2	Newton-classique	99.83	160.55	723.12
	ISP-Newton	71.11	89.10	468.28
T3	Newton-classique	21.51	40.19	42.25
	ISP-Newton	11.34	34.45	21.11

TABLE D.5 – Exemple 1 : Newton-classique vs ISP-Newton globalisé pour différents maillages pour 1700 At.

D.1.1.2 Newton-Inexacte vs ISP-Newton-Inexacte

	Newton-Inexacte			ISP-Newton-Inexacte			
Courants (At)	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	CG	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	CG	Temps CPU	Speedup
1000	10	1630	1m29s	8	790	1m03s	1.47
1700	13(2)	2117	3m59s	10(2)	912	3m13s	1.23
3000	16(9)	2320	4m38s	14(5)	1382	3m42s	1.25

TABLE D.6 – Exemple 1 : Newton-Inexacte globalisé vs ISP-Newton-Inexacte globalisé.

D.1.1.3 Quasi-Newton vs ISP-Quasi-Newton

	Quasi-Newton		ISP-Quasi-Newton		
Courants (At)	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{0}$	Temps CPU	Point de départ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_N$	Temps CPU	Speedup
1000	6	1m12s	5	0m59s	1.22
2000	11(2)	3m29s	9(1)	2m59s	1.16
3000	15(2)	4m18s	12(3)	3m45s	1.14

TABLE D.7 – Exemple 1 : Quasi-Newton globalisé vs ISP-Quasi-Newton globalisé.

D.2 Formulation en potentiel scalaire magnétique

D.2.1 Exemple 1 : T.E.A.M. Workshop 13

D.2.1.1 Newton-classique vs ISP-Newton

D.2.1.2 Newton-Inexacte vs ISP-Newton-Inexact

Courants (At)	Newton-classique		ISP-Newton	
	Itérations $\Omega_0 = 0$	Temps CPU	Itérations $\Omega_0 = \Omega_N$	Temps CPU
500	diverges	-	5	1m56s
1000	-	-	8	2m11s
1500	-	-	8	1m43s
2000	-	-	10	2m10s
2500	-	-	diverges	-
3000	-	-	-	-
5000	-	-	-	-

TABLE D.8 – Exemple 1 : Newton-classique vs ISP-Newton pour le maillage 2.

Recherche linéaire $\alpha=1/2^i$	Newton-classique		ISP-Newton		Speedup
	Itérations $\Omega_0 = 0$	Temps CPU	Itérations $\Omega_0 = \Omega_N$	Temps CPU	
$i=1$	17 (24)	1m02s	8	0m25s	2.40
$i=2$	15 (14)	0m49s	8	0m25s	1.96
$i=3$	15 (9)	0m41s	8	0m25s	1.64

(a) 1000 At

Recherche linéaire $\alpha=1/2^i$	Newton-classique		ISP-Newton		Speedup
	Itérations $\Omega_0 = 0$	Temps CPU	Itérations $\Omega_0 = \Omega_N$	Temps CPU	
$i=1$	18 (24)	1m05s	7 (1)	0m27s	2.24
$i=2$	13 (7)	0m39s	9 (2)	0m28s	1.39
$i=3$	20 (14)	1m32s	12 (5)	0m49s	1.87

(b) 3000 At

TABLE D.9 – Exemple 1 : Newton-classique globalisé vs ISP-Newton globalisé pour le maillage 1.

Courants (At)	Newton-classique		ISP-Newton		Speedup
	Itérations $\Omega_0 = 0$	Temps CPU	Itérations $\Omega_0 = \Omega_N$	Temps CPU	
500	50 (47)	104m30s	7	11m13s	9.31
1000	64 (60)	144m52s	8	14m16s	10.15
1500	68 (65)	172m58s	8 (1)	14m50s	11.66
2000	66 (62)	160m43s	8 (1)	14m55s	10.77
2500	71 (68)	169m45s	8 (1)	14m56s	11.37
3000	69 (61)	165m50s	8 (1)	15m04s	11.05
5000	100 (97)	218m12s	8 (3)	15m56s	13.69

TABLE D.10 – Exemple 1 : Newton-classique globalisé vs ISP-Newton globalisé pour le maillage 4.

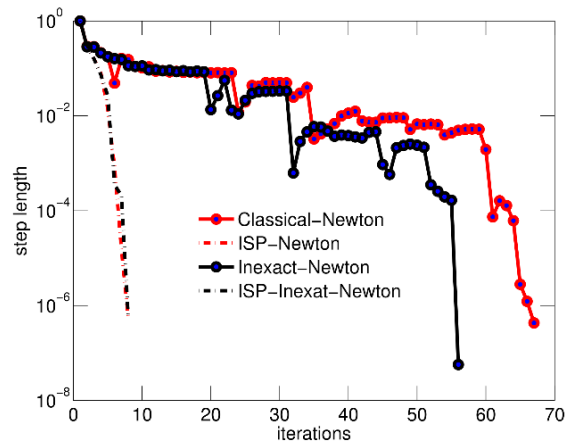


FIGURE D.1 – Exemple 1 : Newton-Inexacte vs ISP-Newton Inexacte pour 3000 At.

Courants (At)	Newton-Inexacte		ISP-Newton-Inexacte		Speedup
	Itérations $\Omega_0 = 0$	Temps CPU	Itérations $\Omega_0 = \Omega_N$	Temps CPU	
500	56 (53)	101m13s	8	11m41s	8.66
1000	46 (43)	100m11s	9	13m26s	7.45
1500	66 (61)	150m32s	9 (1)	13m52s	10.85
2000	56 (53)	131m12s	8 (1)	13m15s	9.90
2500	71 (68)	165m27s	9 (1)	14m16s	11.59
3000	58 (63)	127m21s	10 (1)	15m01s	8.48
5000	63 (60)	133m59s	10 (3)	15m40s	8.55

TABLE D.11 – Exemple 1 : Newton-Inexacte globalisé vs ISP-Newton globalisé pour le maillage 4.

D.2.1.3 Quasi-Newton vs ISP-Quasi-Newton

Courants (At)	Quasi-Newton		ISP-quasi-Newton		Speedup
	Itérations $\Omega_0 = 0$	Temps CPU	Itérations $\Omega_0 = \Omega_N$	Temps CPU	
500	50 (47)	103m37s	8	12m11s	8.50
1000	64 (60)	142m48s	8	14m10s	10.08
1500	68 (65)	170m56s	8 (1)	14m49s	11.53
2000	66 (62)	160m30s	8 (1)	14m50s	10.82
2500	71 (68)	168m49s	8 (1)	14m53s	11.34
3000	63 (61)	141m41s	8 (1)	14m59s	9.45
5000	100 (97)	217m40s	8 (3)	15m49s	13.76

TABLE D.12 – Exemple 1 : Quasi-Newton globalisé vs ISP-Quasi-Newton globalisé pour le maillage 4.

Bibliographie

- Allaire, G. (2005). *Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. (Cité à la page 52)
- Amestoy, P. R., Duff, I. S., and L'Excellent, J. Y. (2000). Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 184(2) :501–520. (Cité à la page 48)
- Armijo, L. (1966). Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives. *Pacific Journal of Mathematics*, 16(1) :1–3. (Cité à la page 67)
- Benabou, A. (2002). *Contribution à la caractérisation et à la modélisation de matériaux magnétiques en vue d'une implantation dans un code de calcul de champ*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille. (Cité à la page 21)
- Bertotti, G. (1998). *Hysteresis in Magnetism : For Physicists, Materials Scientists, and Engineers*. ACADEMIC Press. (Cité aux pages 21, 23)
- Bossavit, A. (1998). Whitney forms : a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism. *Physical Science, Measurement and Instrumentation, Management and Education - Reviews, IEE Proceedings A*, 135(8) :493–500. (Cité à la page 42)
- Bozorth, R. M. (1993). *Ferromagnetism*. IEEE Press. (Cité à la page 24)
- Brown, P. N. and Saad, Y. (1990). Hybrid Krylov Methods for Nonlinear Systems of Equations. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 11(3) :450–481. (Cité aux pages 82, 102)

- Brown, P. N. and Saad, Y. (1994). Convergence Theory of Nonlinear Newton-Krylov Algorithms. *SIAM Journal on Optimization*, 4(2) :297–330. (Cité à la page 16)
- Broyden, C. G. (1970). The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms 1. General Considerations. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 6(1) :76–90. (Cité à la page 85)
- Broyden, C. G., Dennis, J. E., and Moré, J. J. (1973). On the Local and Superlinear Convergence of Quasi-Newton Methods. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 12(3) :223–245. (Cité aux pages 16, 16, 88)
- Cai, X. C., Gropp, W. D., Keyes, D. E., and Tidriri, M. D. (1994). *Newton-Krylov-Schwarz methods in CFD*. In Proceedings of the International Workshop on the Navier-Stokes Equations. (Cité aux pages 82, 102)
- Cardoso, J. R. and Benites, P. A. (1995). Finite Element Method with BiCG solver applied to moving linear induction motors. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31(3). (Cité à la page 51)
- Chaitin-Chatelin, F. and Frayssé, V. (1996). *Lectures on Finite Precision Computations*. Society for Industrial and Applied Mathematics. (Cité à la page 56)
- Chiampi, M., Negro, A., and Tartaglia, M. (1980). A finite element method to compute three-dimensional magnetic field distribution in transformer cores. *IEEE Transactions on Magnetics*, 16(6) :1413–1419. (Cité à la page 94)
- Chiampi, M., Repetto, M., and Chiarabaglio, D. (1994). An improved technique for nonlinear magnetic problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 30(6) :4332–4334. (Cité à la page 94)
- Ciarlet, P. (2013). *Notes de cours sur les équations de Maxwell*. ENSTA ParisTech. (Cité à la page 20)
- Conn, A. R., Gould, N. I. M., and Toint, P. L. (2000). *Trust Region Methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics. (Cité aux pages 16, 64)
- Culioli, J. C. (1994). *Introduction à l'optimisation*. (Cité à la page 54)
- Davidon, W. (1991). Variable Metric Method for Minimization. *SIAM Journal on Optimization*, 1(1) :1–17. (Cité à la page 85)
- Dedulle, J. (1990). *Contribution à la modélisation bidimensionnelle et tridimensionnelle des phénomènes d'anisotropie dans les transformateurs triphasés*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble. (Cité à la page 26, 26)

- Dembo, R. S., Eisenstat, S. C., and Steihaug, T. (1982). Inexact Newton methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19(2) :400–408. (Cité aux pages 16, 80)
- Dembo, R. S. and Steihaug, T. (1983). Truncated-Newton algorithms for large-scale unconstrained optimization. *Math. Programming*, 26(2) :190–212. (Cité aux pages 58, 82, 102)
- Dennis, J. E. and Moré, J. J. (1977). Quasi-Newton Methods, Motivation and Theory. *SIAM Review*, 19(1) :46–89. (Cité aux pages 16, 85)
- Dennis, J. E. and Schnabel, R. B. (1996). *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics. (Cité aux pages 15, 16, 70)
- Dennis, J. E. and Walker, H. F. (1981). Convergence Theorems for Least-Change Secant Update Methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 18(6) :949–987. (Cité à la page 88)
- der Vorst, H. V. and Vuik, C. (1993). The superlinear convergence behaviour of GMRES. *Computational and Applied Mathematics*, 48(1) :327–341. (Cité à la page 51)
- Di Napoli, A. and Paggi, R. (1983). A model of anisotropic grain-oriented steel. *IEEE Transactions on Magnetics*, 19(4) :1557–1561. (Cité à la page 26, 26)
- Dular, P. (1994). *Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans les systèmes tridimensionnels non linéaires*. PhD thesis, Université de Liège - Faculté des Sciences Appliquées. (Cité à la page 33)
- Durand, E. (1953). *Électrostatique Et Magnétostatique*. Masson et Cie. (Cité à la page 20)
- Eisenstat, S. and Walker, H. (1994). Globally Convergent Inexact Newton Methods. *SIAM Journal on Optimization*, 4(2) :393–422. (Cité à la page 64)
- Eisenstat, S. and Walker, H. (1996). Choosing the Forcing Terms in an Inexact Newton method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 17(1) :16–32. (Cité aux pages 16, 64, 82, 82)
- Engquist, B. and Zhao, H. K. (1998). Absorbing boundary conditions for domain decomposition. *Applied Numerical Mathematics*, 27(4) :341–365. Special Issue on Absorbing Boundary Conditions. (Cité à la page 52)

- Ern, A. and Guermond, J. L. (2004). *Theory and Practice of Finite Elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer New York. (Cité à la page 42)
- Falgout, R. D., Jones, J. E., and Yang, U. M. (2006). *The Design and Implementation of hypre, a Library of Parallel High Performance Preconditioners*, volume 51. (Cité aux pages 15, 52)
- Fletcher, R. (1970). A new approach to variable metric algorithms. *The Computer Journal*, 13(3) :317–322. (Cité à la page 85)
- Fletcher, R. and Powell, M. J. D. (1963). A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization. *The Computer Journal*, 6(2) :163–168. (Cité à la page 85)
- Fratila, M. (2012). *Contribution à la prise en compte des pertes fer dans la modélisation des machines électriques par éléments finis*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille. (Cité à la page 31)
- Fujiwara, K., Nakata, T., Okamoto, N., and Muramatsu, K. (1993). Method for determining relaxation factor for modified Newton-Raphson method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(2) :1962–1965. (Cité à la page 116)
- Gilli, M. (2006). *Méthodes numériques*. Département d'économétrie. Université de Genève. (Cité à la page 53)
- Girault, V. and Raviart, P.-A. (1986). *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations : Theory and Algorithms*. Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag. (Cité à la page 33)
- Goldfarb, D. (1970). A Family of Variable-Metric Methods Derived by Variational Means. *Mathematics of Computation*, 24(109) :23–26. (Cité à la page 85)
- Golub, G. H. and VAN Loan, C. F. (1996). *Matrix computations*. JHU Press. (Cité à la page 51)
- Gouri, G. and Gilbert, G. (1984). *Une présentation de la Méthode des éléments finis*. Université de compiegne. (Cité à la page 14)
- Gradinaru, V. and Hiptmair, R. (1999). Whitney elements on pyramids. *ETNA. Electronic Transactions on Numerical Analysis [electronic only]*, 8 :154–168. (Cité à la page 43)

- Griffiths, D. J. ((1981) 2013). *Introduction to electrodynamics; 4th ed.* Pearson, Boston, MA. (Cité à la page 20)
- Hestenes, M. R. and Stiefel, E. (1952). Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 49(6) :409–436. (Cité aux pages 50, 83)
- Higham, N. J. (2002). *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms.* Society for Industrial and Applied Mathematics, second edition. (Cité à la page 56)
- Huttenloher, D., Lorenzen, H., and Nuscheler, R. (1984). Investigation of the importance of the anisotropy of cold-rolled electrical steel sheet. *IEEE Transactions on Magnetics*, 20(5) :1968–1970. (Cité à la page 25)
- Jiles, D. and Atherton, D. (1986). Theory of ferromagnetic hysteresis. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 61(1) :48–60. (Cité à la page 29)
- Jiles, D. C., Thoenke, J. B., and Devine, M. K. (1992). Numerical determination of hysteresis parameters for the modeling of magnetic properties using the theory of ferromagnetic hysteresis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(1) :27–35. (Cité à la page 29)
- Kelley, C. (1995). *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations.* Society for Industrial and Applied Mathematics. (Cité aux pages 14, 16, 52, 52, 64, 87, 88)
- Kelley, C. T. (2003). *Solving nonlinear equations with Newton's method.* Fundamentals of Algorithms. SIAM. (Cité aux pages 15, 59, 88)
- Kettunen, L., Forsman, K., and Bossavit, A. (1999). Gauging in Whitney spaces. *IEEE Transactions on Magnetics*, 35(3) :1466–1469. (Cité à la page 36)
- Kuczmann, M. (2010). Using the Newton-Raphson Method in the Polarization Technique to Solve Nonlinear Static Magnetic Field Problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(3) :875–879. (Cité à la page 59)
- Le Bellac, M. and Lévy-Leblond, J. M. (1973). Galilean electromagnetism. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 14(2) :217–234. (Cité à la page 38)
- Le Menach, Y. (1999). *Contribution à la modélisation numérique tridimensionnelle des systèmes électrotechniques : prise en compte des inducteurs.* PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille. (Cité aux pages 35, 39, 117)

- Lee, C. H., Reitich, F., Jolly, M. R., Banks, H. T., and Ito, K. (2001). Piecewise linear model for field-responsive fluids. *IEEE Transactions on Magnetics*, 37(1) :558–560. (Cité à la page 22)
- Leite, J. V., Benabou, A., Sadowski, N., and da Luz, M. V. F. (2009). Finite element three-phase transformer modeling taking into account a vector hysteresis model. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(3) :1716–1719. (Cité à la page 28)
- Li, X. S. and Demmel, J. W. (2003). SuperLU_DIST : A scalable distributed - memory sparse direct solver for unsymmetric linear systems. *ACM Trans. Math. Softw.*, 29 :110–140. (Cité à la page 48)
- Luo, Z. and Teng, F. (2016). An effective finite element Newton method for 2D p-Laplace equation with particular initial iterative function. *Journal of Inequalities and Applications*, 2016(1) :281. (Cité aux pages 93, 136)
- Marrocco, A. (1977). Analyse numérique de problèmes d’électrotechnique. *Annales des Sciences Mathématiques du Québec*, 1. (Cité à la page 22)
- Messal, O., Sixdenier, F., Morel, L., and Burais, N. (2012). Temperature dependent extension of the jiles-atherton model : Study of the variation of microstructural hysteresis parameters. *IEEE Transactions on Magnetics*, 48(10) :2567–2572. (Cité à la page 28)
- Meurant, G. (1999). *Computer Solution of Large Linear Systems*, volume 28 of *Studies in Mathematics and Its Applications*. North Holland. (Cité à la page 81)
- Miellou, J. C. and Spiteri, P. (1985). *Un critère de convergence pour des méthodes générales de point fixe*. (Cité aux pages 15, 54)
- Monk, P. (2003). *Finite element methods for Maxwell’s equations*. Oxford University Press. (Cité à la page 14)
- Nakata, T., Ishihara, Y., Yamada, K., and Sasano, A. (1975). Non linear analysis of rotating flux in the T-joint of a three-phase limbed transformer core. *Proc. of the Soft Magnetic Materials 2 Conference*, pages 57–62. (Cité à la page 24)
- Nakata, T., Takahashi, N., and Fujiwara, K. (1995). Summary of results for TEAM Workshop problem 13 (3-D nonlinear magnetostatic model). 14(2) :91–101. (Cité aux pages 62, 106)
- Nocedal, J. (1980). Updating Quasi-Newton Matrices with Limited Storage. *Mathematics of Computation*, 35(151) :773–782. (Cité à la page 89)

- Nocedal, J. and Yuan, Y. (1998). *Combining Trust Region and Line Search Techniques*, pages 153–175. Springer US, Boston, MA. (Cité à la page 79)
- Notay, Y. (2008). An aggregation-based algebraic multigrid method. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 37. (Cité aux pages 15, 52)
- Padilha, J. B., Kuo-Peng, P., Sadowski, N., and Batistela, N. J. (2017). Vector hysteresis model associated to fem in a hysteresis motor modeling. *IEEE Transactions on Magnetics*, 53(6) :1–4. (Cité à la page 28)
- Pera, T. (1994). *Lois d’aimantation anisotropes et non linéaires : modélisation et validation expérimentale*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble. (Cité aux pages 24, 146)
- Piriou, F. and Razek, A. (1993). Finite element analysis in electromagnetic systems—accounting for electric circuits. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(2) :1669–1675. (Cité à la page 38)
- Preisach, F. Z. (1935). Über die magnetische Nachwirkung. *s.l. : Zeitschrift für Physik*, 94 :277–302. (Cité à la page 29)
- Pu, D. and Zhang, J. (2000). Globally Convergent Inexact Generalized Newton Method for First-Order Differentiable Optimization Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 106(3) :551–568. (Cité à la page 64)
- Rayleigh, L. (1887). Notes on electricity and magnetism.—iii. on the behaviour of iron and steel under the operation of feeble magnetic forces. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 23(142) :225–245. (Cité à la page 28)
- Ren, Z. and Ida, N. (2000). High-order differential form-based elements for the computation of electromagnetic field. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(4) :1472–1478. (Cité à la page 43)
- Saad, Y. (2003). *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, second edition. (Cité aux pages 50, 81)
- Saad, Y. and Schultz, M. (1986). GMRES : A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7(3) :856–869. (Cité à la page 83)

- Saad, Y. and Van der Vorst, H. A. (2000). Iterative solution of linear systems in the 20th century. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 123(1) :1–33. (Cité à la page 51)
- Schenk, O. and Gärtner, K. (2004). Solving Unsymmetric Sparse Systems of Linear Equations with PARDISO. *Future Gener. Comput. Syst.*, 20(3) :475–487. (Cité à la page 48)
- Shanno, D. F. (1970). Conditioning of Quasi-Newton methods for function minimization. *Mathematics of computation*, 24(111) :647–656. (Cité à la page 85)
- Shi, Z. J. and Zhang, X. S. (2005). From line search method to trust region method. *Lecture Notes in Operations Research*, 5. (Cité aux pages 16, 79)
- Sorensen, D. C. (1982). Newton’s Method with a Model Trust Region Modification. *SIAM Journal on Analysis*, 19(2) :409–426. (Cité aux pages 16, 64)
- Southwell, R. V. (1946). Relaxation Methods in Theoretical Physics : A Continuation of the Treatise, Relaxation Methods in Engineering Science. *The Journal of the Royal Aeronautical Society*, 51. (Cité à la page 53)
- Sun, W. and Yuan, Y. X. (2006). *Optimization theory and methods*. Springer Optimization and Its Applications. Springer. (Cité à la page 81)
- Swift, G., Tziouvaras, D. A., McLaren, P., Alexander, G., Dawson, D., Esztergalyos, J., Fromen, C., Glinkowski, M., Hasenwinkle, I., Kezunovic, M., Kojovic, L., Kotheimer, B., Kuffel, R., Nordstrom, J., and Zocholl, S. (2001). Discussion of Mathematical models for current, voltage, and coupling capacitor voltage transformers and closure. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 16(4) :827–828. (Cité à la page 22)
- Tonti, E. (2002). Finite formulation of electromagnetic field. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(2) :333–336. (Cité à la page 42)
- Van der Vorst, H. A. (1992). Bi-CGSTAB : A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 13(2) :631–644. (Cité à la page 83)
- Williamson, S. and Begg, M. (1985). Analysis of cage induction motors - A combined fields and circuits approach. *IEEE Transactions on Magnetics*, 21(6) :2396–2399. (Cité à la page 38)

- Wright, S. J. and Nocedal, J. (2006). *Numerical Optimization*. Springer, New York, NY, USA, second edition. (Cité à la page 64)
- Ypma, T. J. (1995). Historical Development of the Newton-Raphson Method. *SIAM Review*, 37(4) :531–551. (Cité à la page 58)
- Ziani, M. and Guyomarc’h, F. (2008). An autoadaptive limited memory Broyden’s method to solve systems of nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 205(1) :202 – 211. Special Issue on Life System Modeling and Bio-Inspired Computing for LSMS 2007. (Cité à la page 89)
- Zoutendijk, G. (1970). Nonlinear programming, computational methods. In Integer and Nonlinear programming. *Pacific J. Math.*, pages 37–86. (Cité à la page 71)

Résumé

La simulation numérique d'un dispositif électrotechnique tel qu'une machine électrique passe par la maîtrise des phénomènes électromagnétiques souvent complexes, régis par les équations de Maxwell. Ces équations sont des EDP dont la majorité des solutions ne peut pas être formulée sous la forme d'une solution analytique. La méthode des éléments finis (FEM) est la technique la plus utilisée dans le domaine de modélisation grâce à sa grande précision et à sa robustesse pour résoudre des systèmes aux géométries complexes. La discrétisation de ces problèmes conduit à un grand système d'équations non linéaires qui doivent être résolus par un processus itératif. Il en existe deux principalement : la méthode du point fixe qui est robuste, mais peut être très lente car sa vitesse de convergence est linéaire et la méthode de Newton qui est largement préférée pour résoudre les problèmes de champs non linéaires grâce à sa vitesse de convergence quadratique. Cependant, cette convergence reste locale dans le sens que l'estimation initiale doit être choisie suffisamment proche de la solution. Ainsi, plusieurs techniques de globalisation sont introduites pour atteindre un niveau acceptable de robustesse. De plus, une itération de Newton peut s'avérer très coûteuse. En effet, elle demande à chaque itération l'évaluation de la matrice jacobienne et la résolution du problème linéarisé impliquant cette dernière matrice. Pour diminuer ces coûts de résolution, plusieurs variantes de cette méthode sont introduites comme les méthodes de Newton-Inexactes et les méthodes de Quasi-Newton. Un solveur non linéaire nommé Improved Starting Point (ISP-) Newton a été développé durant cette thèse pour le cas 2D et 3D. Ce solveur est une version plus robuste et accélérée des solveurs existants et mieux adapté pour résoudre les problèmes électromagnétiques non linéaires.

Abstract

The numerical simulation of an electrotechnical device such as an electric machine involves mastering the often complex electromagnetic phenomena governed by Maxwell's equations. These equations are EDP, the majority of which cannot be formulated as an analytical solution. The finite element method (FEM) is a widely used numerical technique in the modeling field thanks to its high precision and robustness for solving systems with complex geometries. The discretization of these problems leads to a large system of nonlinear equations that must be solved by an iterative process. There are two main ones : the fixed point method, which is robust but can be very slow due to its linear convergence rate and the Newton method which has been widely preferred for nonlinear field problems thanks to its quadratic convergence speed. However, this convergence remains local, it means that the initial estimation must be rather close to the solution. Thus, several globalization techniques are introduced to achieve an acceptable level of robustness. In addition, Newton's method can be very expensive. In fact, at each iteration, the evaluation of the Jacobian matrix and the resolution of the linearized problem involving this last matrix are required. To reduce these resolution costs, several variants of this method are introduced as the Inexact-Newton methods and Quasi-Newton methods. A non-linear solver called Improved Starting Point (ISP-) Newton was developed during this thesis for the 2D and 3D case. This solver is a more robust and accelerated version of existing solvers and better suited to solve non-linear electromagnetic problems.