

# École Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur

Université de Lille – Laboratoire Paul Painlevé

## Thèse

Préparée pour l'obtention du grade de DOCTEUR  
DE L'UNIVERSITE DE LILLE

par

**Claire COLIN**

---

# Analyse et simulation numérique par méthode combinée Volumes Finis – Éléments Finis de modèles de type Faible Mach

---

Spécialité : Mathématiques

Soutenue publiquement le 10/05/2019 devant le jury composé de :

---

Examineur	<b>M. Roland BECKER</b>	Université de Pau
Codirectrice	<b>M<sup>me</sup> Caterina CALGARO</b>	Université de Lille
Examinatrice	<b>M<sup>me</sup> Claire CHAINAIS</b>	Université de Lille
Directeur	<b>M. Emmanuel CREUSÉ</b>	Univ. Polytechnique Hauts-de-France
Rapportrice	<b>M<sup>me</sup> Madalina PETCU</b>	Université de Poitiers
Rapporteur	<b>M. Mazen SAAD</b>	École Centrale de Nantes





Thèse effectuée au sein du **Laboratoire Paul Painlevé (UMR CNRS 8524)**

de l'Université de Lille  
Cité scientifique  
59655 Villeneuve d'Ascq cedex  
France

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Cadre général . . . . .	1
1.2	Dérivation du système bas Mach . . . . .	3
1.2.1	Les équations de Navier-Stokes compressibles . . . . .	4
1.2.2	Adimensionnement des équations . . . . .	5
1.2.3	Les équations de Navier-Stokes à faible nombre de Mach . . . . .	6
1.2.4	Cas particulier : le gaz parfait . . . . .	8
1.3	Organisation de la thèse . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>13</b>
2.1	Notations . . . . .	15
2.2	Espaces fonctionnels . . . . .	17
2.2.1	Espaces de fonctions à divergence nulle . . . . .	17
2.2.2	L'espace $H_N^k(\Omega)$ . . . . .	19
2.2.3	Normes équivalentes . . . . .	20
2.3	Quelques inégalités utiles . . . . .	21
2.4	Résultats d'analyse fonctionnelle . . . . .	24
2.5	Espaces de fonctions dépendant du temps . . . . .	25
2.6	Lemmes de Gronwall . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Une méthode combinée Volumes Finis - Éléments Finis pour un modèle bas Mach</b>	<b>29</b>
3.1	Introduction . . . . .	31
3.2	Méthodes numériques pour les équations de Navier-Stokes incompressibles . . . . .	32
3.2.1	Le splitting en temps . . . . .	33

3.2.2	Discrétisation spatiale . . . . .	33
3.3	La méthode combinée VF - EF pour un modèle bas Mach . . . . .	37
3.3.1	Le système . . . . .	38
3.3.2	Le splitting en temps . . . . .	39
3.3.3	Discrétisation spatiale . . . . .	41
3.4	Simulations numériques . . . . .	44
3.4.1	Cas tests analytiques . . . . .	44
3.4.2	Injection dans une cavité . . . . .	48
3.4.3	Convection naturelle . . . . .	53
3.5	Conclusion . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Un résultat d'existence de solution régulière pour un modèle de type bas Mach</b>	<b>59</b>
4.1	Introduction . . . . .	61
4.2	Présentation du modèle . . . . .	62
4.3	Résultat d'existence et de régularité . . . . .	66
4.3.1	Démarche . . . . .	66
4.3.2	Existence et régularité de la suite de solutions approchées . . . . .	68
4.3.3	Convergence de la suite de solutions approchées vers la solution forte . . . . .	78
4.4	Conclusion . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Méthodes de Volumes Finis pour l'équation de température d'un modèle faible Mach</b>	<b>101</b>
5.1	Introduction . . . . .	103
5.2	Étude de l'équation continue . . . . .	104
5.3	Un problème de convection-diffusion . . . . .	108
5.3.1	Maillage . . . . .	108
5.3.2	Schéma volumes finis . . . . .	110
5.3.3	Principe du maximum et existence d'une solution discrète . . . . .	112
5.4	Traitement du terme effet Joule . . . . .	116
5.4.1	Discrétisation du terme effet Joule . . . . .	117
5.4.2	Principe du maximum et existence d'une solution discrète . . . . .	118
5.4.3	Un schéma décentré . . . . .	123

---

5.4.4	Un schéma peu adapté . . . . .	124
5.5	Expérimentations numériques . . . . .	126
5.5.1	Cas test 1 : Vérification du principe du maximum . . . . .	127
5.5.2	Cas test analytique . . . . .	129
5.5.3	Bilan des tests . . . . .	130
5.6	Couplage avec l'équation en vitesse . . . . .	130
5.6.1	Le splitting en temps . . . . .	132
5.6.2	Discrétisation spatiale . . . . .	132
5.6.3	Simulations numériques . . . . .	137
5.7	Conclusion . . . . .	144
	<b>Perspectives</b>	<b>145</b>
	<b>A Le schéma C-FV-FE avec procédure de point fixe</b>	<b>147</b>
	<b>B Démonstrations du Lemme 4.6 et du Lemme 4.7 du Chapitre 4</b>	<b>149</b>
	B.1 Preuve du Lemme 4.6 . . . . .	149
	B.2 Preuve du Lemme 4.7 . . . . .	158
	<b>C Implémentation de la méthode de Newton pour la résolution de (5.29)</b>	<b>159</b>
	C.1 Procédure de pas de temps adaptatif . . . . .	159
	C.2 Assemblage de la jacobienne. . . . .	160
	<b>Bibliographie</b>	<b>172</b>



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Cadre général

Nous nous intéressons dans cette thèse à des écoulements qui sont caractérisés par un faible nombre de Mach, c'est-à-dire que la vitesse du fluide est petite devant la vitesse du son. De tels écoulements interviennent dans de nombreux phénomènes physiques tels que la combustion, des applications nucléaires ou en astrophysique, ou encore des problèmes d'injection.

Les mouvements des fluides sont modélisés par les équations de Navier-Stokes compressibles. Elles expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Dans ce modèle, le couplage des équations est complet : les variations de la densité tiennent compte des variations de température et de pression.

Lorsque les variations de température sont peu importantes, on peut se placer dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. Cette approximation des équations de Navier-Stokes consiste à considérer la densité constante, excepté dans le terme de gravité où elle dépend linéairement de la température. Dans le modèle de Boussinesq, l'équation de conservation de la masse se réduit à une contrainte d'incompressibilité. Il s'agit du premier niveau de couplage entre l'équation de conservation de la quantité de mouvement et l'équation de l'énergie, à travers le seul terme de gravité. Ce modèle est plus simple que le modèle compressible et il fait intervenir une variable de moins (la densité).

Cependant, les applications auxquelles nous nous intéressons sont caractérisées par d'importants gradients de température. De ce fait, l'approximation de Boussinesq ne peut être utilisée, même quand le nombre de Mach est petit. Une approche intermédiaire entre le compressible et l'incompressible est l'approximation à faible nombre de Mach. Dans ce modèle, du fait de la très grande célérité des ondes acoustiques, la pression thermodynamique est considérée constante. Ainsi, les variations

de la densité dues à la compressibilité sont négligées, mais celles causées par des phénomènes thermiques sont prises en compte.

L'approche faible Mach a été développée au début des années 1980. En 1982, S. Klainerman et A. Majda [58] ont montré la convergence de l'écoulement compressible vers l'incompressible lorsque le nombre de Mach tend vers 0 pour des écoulements isentropiques. Ces résultats ont été étendus aux écoulements non-isentropiques en 1986 par S. Schochet [80]. En 1985, A. Majda et J. Sethian [69] ont introduit un système d'équations simplifié pour des problèmes de combustion en régime bas Mach. Dans ce modèle, les ondes acoustiques sont négligées. En 1987, P. Embid [33] a montré le caractère bien posé de ce système et prouvé un résultat d'existence local.

Concernant les approches numériques pour simuler les écoulements en régime bas Mach, on distingue deux stratégies : la première, dite *density-based*, consiste à utiliser des solveurs compressibles ; la seconde, appelée *pressure-based*, consiste à généraliser les solveurs incompressibles pour les écoulements faible Mach. Dans ce dernier cas, le système d'équations considéré peut être le modèle compressible ou un modèle obtenu par analyse asymptotique, voir par exemple [29, 59, 69]. Nous donnons ici un premier aperçu de ces deux familles de méthodes. Une bibliographie plus complète sera donnée au début du Chapitre 3.

### Density-based solvers

La première classe de méthodes a été largement utilisée pour la simulation d'écoulements en régime transsonique ou supersonique. Dans ces solveurs compressibles, la pression est éliminée des inconnues par la loi d'état. Cependant, du fait de la disparité des échelles de temps acoustique et convective, les solveurs compressibles souffrent d'un manque de précision en régime bas Mach. De plus, pour ces méthodes généralement explicites, la condition CFL dépend de la vitesse du son et est par conséquent très contraignante. Ces méthodes ne peuvent donc pas être appliquées en régime bas Mach sans adaptation.

Parmi les différentes stratégies employées, on mentionnera la technique du pré-conditionnement, introduite par E. Turkel [84], et utilisée ensuite par exemple dans [19, 49]. Cette méthode consiste à prémultiplier la matrice de masse par une matrice appropriée afin que les valeurs propres du système aient le même ordre de grandeur. D'autres auteurs ont appliqué des techniques de splitting afin de séparer les termes raides des termes non-raides, voir par exemple [18, 75]. Concernant la discrétisation spatiale, des méthodes de volumes finis basées sur l'approximation de problèmes de Riemann sont généralement employées. Les inconnues (la densité, la quantité de mouvement et l'énergie interne) sont calculées sur une même grille.



### Pressure-based solvers

Cette classe de méthodes consiste en une adaptation des solveurs incompressibles pour les écoulements compressibles. La pression est ici une variable à part entière. Des techniques de type correction de pression sont souvent utilisées pour résoudre le problème couplé vitesse/pression. Dans ces méthodes, la vitesse et la pression doivent vérifier une condition de stabilité de type inf-sup : cela se traduit généralement par l'utilisation de grilles décalées dans le contexte des volumes finis et des différences finies, ou par le choix pertinent des espaces de discrétisation dans le contexte des éléments finis.

Ainsi en 1971, F. H. Harlow et A. A. Amsden [52] ont développé un algorithme itératif (la méthode ICE) comportant une étape de correction pour la pression, et permettant de traiter aussi bien les écoulements en régime subsonique qu'en régime supersonique. Depuis, de nombreux schémas ont été développés, voir par exemple [53] et les références contenues dans cet article. Certaines méthodes (par exemple [72, 76]), sont basées sur une généralisation de l'algorithme itératif SIMPLE, introduit par S.V. Patankar et D.B. Spalding [77] pour les fluides incompressibles à densité constante. Les discrétisations utilisées par C.-D. Munz et ses collaborateurs [72, 76] sont effectuées en différences finies. D'autres méthodes utilisent un schéma comportant une unique étape de prédiction et de correction de pression, voir par exemple [53]. Dans cet article, la méthode numérique utilisée par R. Herbin, W. Kheriji et J.-C. Latche est une méthode de volumes finis.

Parmi les méthodes non-itératives, la méthode de projection, introduite par A. J. Chorin [20] et R. Temam [81] est souvent utilisée, en particulier lorsqu'un modèle asymptotique est considéré. Elle consiste à découpler à chaque pas de temps l'équation de conservation de la quantité de mouvement de la contrainte d'incompressibilité du fluide. Elle a par exemple été utilisée par A. Beccantini et ses collaborateurs [4] dans le cadre des éléments finis, ou dans [27, 73] dans le cadre des différences finies.

Dans ce travail, nous nous situons dans la classe des méthodes *pressure-based*. Les équations considérées sont obtenues à partir d'un développement asymptotique des équations de Navier-Stokes compressibles en fonction du nombre de Mach.

## 1.2 Dérivation du système bas Mach

Dans cette section, nous allons dériver le modèle d'équations que l'on considérera par la suite. L'analyse asymptotique effectuée s'appuie sur [4, 29, 69].

### 1.2.1 Les équations de Navier-Stokes compressibles

Nous commençons par rappeler les équations de Navier-Stokes compressibles. Les variables physiques considérées sont la densité  $\rho$ , la vitesse  $\mathbf{u}$ , la pression  $P$ , l'énergie interne  $e$  et la température  $\theta$ . Le système de Navier-Stokes sous forme conservative s'écrit alors :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, & (1.1a) \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} & (1.1b) \\ \partial_t (\rho e) + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u}) = -P \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta) + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}, & (1.1c) \end{cases}$$

où le tenseur des contraintes visqueuses est défini par :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left( \nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbb{I} \right). \quad (1.2)$$

Ici,  $\mathbf{g} = -9,81 \mathbf{e}_z \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  est le vecteur gravité ( $\mathbf{e}_z$  est le vecteur unitaire vertical),  $\mu = \mu(\theta, P)$  et  $\kappa = \kappa(\theta, P)$  sont respectivement la viscosité et la conductivité thermique du fluide.

Nous allons maintenant donner une formulation non-conservative en température du système (1.1). Pour cela, on définit l'enthalpie du fluide

$$h = e + \frac{P}{\rho},$$

ainsi que le coefficient de compressibilité à pression constante

$$\alpha(\theta, P) = -\frac{1}{\rho(\theta, P)} \frac{\partial \rho}{\partial \theta}(\theta, P), \quad (1.3)$$

et la capacité calorifique à pression constante

$$C_P(\theta, P) = \frac{\partial h}{\partial \theta}(\theta, P). \quad (1.4)$$

On suppose également que les équations d'état  $\rho(\theta, P)$  et  $e(\theta, P)$  du fluide sont telles qu'il existe une fonction entropie  $s(\frac{1}{\rho}, e)$  strictement convexe et vérifiant :

$$-\theta ds = de + P d\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

On montre alors (voir [28] adapté dans le cas monophasique) que le système (1.1)

est équivalent au système (1.5) :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, & (1.5a) \\ \rho (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} & (1.5b) \\ \rho C_P (\partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta) = \alpha \theta (\partial_t P + \mathbf{u} \cdot \nabla P) + \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta) + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}. & (1.5c) \end{cases}$$

## 1.2.2 Adimensionnement des équations

Nous allons dans cette section procéder à un adimensionnement des équations. Cela permettra de mieux appréhender les différents ordres de grandeur intervenant dans le système (1.5). Pour cela, pour chaque variable générique  $a$ , on définit une valeur de référence  $a_{\text{ref}}$  caractéristique de l'écoulement. On suppose que l'on peut choisir un temps caractéristique  $t_{\text{ref}}$ , une longueur caractéristique  $L_{\text{ref}}$  et une vitesse caractéristique  $u_{\text{ref}}$  vérifiant :

$$t_{\text{ref}} = \frac{L_{\text{ref}}}{u_{\text{ref}}}. \quad (1.6)$$

On suppose également que les équations d'état du fluide sont telles que l'on peut définir  $C_{P_{\text{ref}}}$  tel que :

$$\theta_{\text{ref}} C_{P_{\text{ref}}} = \frac{P_{\text{ref}}}{\rho_{\text{ref}}} = e_{\text{ref}}. \quad (1.7)$$

Notons que (1.7) est vérifié si les équations d'état du fluide sont proches de celles d'un gaz parfait.

Nous définissons maintenant les nombres sans dimension caractéristiques de l'écoulement :

— le nombre de Mach :

$$\text{M} = \frac{u_{\text{ref}}}{\sqrt{\frac{P_{\text{ref}}}{\rho_{\text{ref}}}}},$$

— le nombre de Reynolds :

$$\text{Re} = \frac{u_{\text{ref}} L_{\text{ref}} \rho_{\text{ref}}}{\mu_{\text{ref}}},$$

— le nombre de Froude :

$$\text{Fr} = \frac{u_{\text{ref}}}{\sqrt{L_{\text{ref}} g}},$$

où  $g$  est la norme du champ de gravité  $\mathbf{g}$ ,

— le nombre de Prandtl :

$$\text{Pr} = \frac{\mu_{\text{ref}} C_{P_{\text{ref}}}}{\kappa_{\text{ref}}}. \quad (1.8)$$

À l'aide de ces nombres et des relations (1.6) et (1.7), on obtient le système *adimen-*

sionné suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, & (1.9a) \\ \rho (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\frac{1}{M^2} \nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{\text{Fr}^2} \rho \mathbf{e}_z & (1.9b) \\ \rho C_P (\partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta) = \alpha_{\text{ref}} \theta_{\text{ref}} \alpha \theta (\partial_t P + \mathbf{u} \cdot \nabla P) & (1.9c) \\ + \frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta) + \frac{M^2}{\text{Re}} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}. \end{cases}$$

Comme les variables adimensionnées sont d'ordre 1, ce système fait apparaître les ordres de grandeurs des différents termes.

### 1.2.3 Les équations de Navier-Stokes à faible nombre de Mach

On suppose que le nombre de Mach caractéristique de l'écoulement est petit :

$$M \ll 1. \quad (1.10)$$

On suppose également :

$$\frac{M}{\text{Fr}} \ll 1 \quad ; \quad \frac{M^2}{\text{Re}} \ll 1 \quad ; \quad \frac{M}{\text{Re Pr}} \ll 1. \quad (1.11)$$

On va alors procéder à un développement asymptotique des équations en fonction du nombre de Mach, voir par exemple [29, 69].

#### 1.2.3.1 Analyse asymptotique

On suppose que l'on peut développer les variables en fonction du nombre de Mach :

$$\begin{cases} \rho = \rho^0 + M \rho^1 + \mathcal{O}(M^2), & (1.12a) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + M \mathbf{u}^1 + \mathcal{O}(M^2), & (1.12b) \\ \theta = \theta^0 + M \theta^1 + \mathcal{O}(M^2), & (1.12c) \\ P = P^0 + M P^1 + M^2 P^2 + \mathcal{O}(M^3). & (1.12d) \end{cases}$$

On suppose également que les équations d'état sont des fonctions régulières de  $(\theta, P)$  de sorte que  $\rho^0 = \rho(\theta^0, P^0)$ . On note  $C_P^0 = C_P(\theta^0, P^0)$ ,  $\alpha^0 = \alpha(\theta^0, P^0)$  et  $\kappa^0 = \kappa(\theta^0, P^0)$ .

Commençons par injecter (1.12) dans l'équation de quantité de mouvement

(1.9b). En identifiant les termes d'ordre  $M^{-2}$  et  $M^{-1}$ , on obtient :

$$\frac{1}{M^2} \nabla P^0 = 0 \quad ; \quad \frac{1}{M} \nabla P^1 = 0. \quad (1.13)$$

Pour les termes d'ordre 0, on applique la projection de Hodge  $\mathbb{P}$  (voir Chapitre 2, Proposition 2.1) à (1.9b) et on obtient :

$$\mathcal{P} \left( \rho^0 (\partial_t \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}^0 \cdot \nabla \mathbf{u}^0) - \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^0 + \frac{1}{\text{Fr}^2} \rho^0 \mathbf{e}_z \right) = 0. \quad (1.14)$$

De (1.13) et (1.14), on en déduit :

$$P^0 = P^0(t),$$

et qu'il existe  $\pi$  tel que

$$\rho^0 (\partial_t \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}^0 \cdot \nabla \mathbf{u}^0) - \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^0 + \frac{1}{\text{Fr}^2} \rho^0 \mathbf{e}_z = -\nabla \pi.$$

Concernant l'équation de conservation de la masse et l'équation de température, on obtient de façon immédiate :

$$\partial_t \rho^0 + \nabla \cdot (\rho^0 \mathbf{u}^0) = 0,$$

et

$$\rho^0 C_P^0 (\partial_t \theta^0 + \mathbf{u}^0 \cdot \nabla \theta^0) = \alpha_{\text{ref}} \theta_{\text{ref}} \alpha^0 \theta^0 (\partial_t P^0 + \mathbf{u}^0 \cdot \nabla P^0) + \frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla \cdot (\kappa^0 \nabla \theta^0).$$

Pour résumer, en omettant l'indice 0, on cherche  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\theta$ ,  $P$  et  $\pi$  telles que :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, & (1.15a) \\ \rho (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla \pi + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{\text{Fr}^2} \rho \mathbf{e}_z, & (1.15b) \\ \rho C_P (\partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta) = \alpha_{\text{ref}} \theta_{\text{ref}} \alpha \theta \frac{dP}{dt} + \frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta), & (1.15c) \\ \rho = \rho(\theta, P). & (1.15d) \end{cases}$$

On a donc un système de 4 équations à 5 inconnues.

### 1.2.3.2 Équation pour la pression thermodynamique

Afin de fermer le système, nous allons dériver une cinquième équation. Pour cela, on remarque que (1.15a) est équivalente à

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = D_t \rho,$$

où l'on a utilisé la notation  $D_t = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ . Grâce à l'équation d'état (1.15d), on a :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \theta} D_t \theta + \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{dP}{dt} \right).$$

L'équation de température (1.15c) nous permet d'obtenir :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{1}{\rho C_P} \alpha_{\text{ref}} \theta_{\text{ref}} \alpha \theta + \frac{\partial \rho}{\partial P} \right) \frac{dP}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{1}{\rho C_P} \frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta),$$

ou encore en utilisant la définition de  $\alpha$  donnée par (1.3) :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\alpha_{\text{ref}} \theta_{\text{ref}} \alpha^2 \theta}{C_P} - \frac{\partial \rho}{\partial P} \right) \frac{dP}{dt} + \frac{\alpha}{\rho C_P \text{Re Pr}} \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta). \quad (1.16)$$

En intégrant (1.16) sur le domaine  $\Omega$ , on obtient l'équation de pression thermodynamique :

$$\frac{dP}{dt} \int_{\Omega} \left( \alpha_{\text{ref}} \theta_{\text{ref}} \alpha \theta - \frac{C_P}{\alpha} \frac{\partial \rho}{\partial P} \right) = \int_{\Omega} \left( \frac{\rho C_P}{\alpha} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) - \frac{1}{\text{Re Pr}} \int_{\partial \Omega} \kappa \nabla \theta \cdot \mathbf{n}, \quad (1.17)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal unitaire sortant.

*Remarque 1.1.* Dans un système fermé (système n'échangeant pas de matière avec son environnement), la masse totale reste constante et l'on peut également calculer  $P$  par résolution de :

$$\int_{\Omega} \rho(\theta, P) = \int_{\Omega} \rho_0, \quad (1.18)$$

où  $\rho_0$  est la densité initiale.

### 1.2.4 Cas particulier : le gaz parfait

Dans ce manuscrit, nous allons considérer le cas particulier d'un gaz calorifiquement parfait, c'est à dire un gaz pour lequel les équations d'état sont données, pour

les variables *dimensionnées*, par :

$$\begin{aligned} P &= R \rho \theta, \\ e &= \frac{R \theta}{\gamma - 1}, \end{aligned}$$

où  $R = 287 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  est la constante des gaz parfaits et  $\gamma = 1,4$  est le rapport des chaleurs spécifiques. On déduit alors de (1.3) et (1.4) que :

$$\begin{aligned} \alpha(\theta, P) &= \frac{1}{\theta}, \\ C_P(\theta, P) &= \frac{\gamma R}{\gamma - 1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous allons définir les grandeurs caractéristiques  $\alpha_{\text{ref}}$  et  $C_{P_{\text{ref}}}$  par :

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{ref}} &= \frac{1}{\theta_{\text{ref}}}, \\ C_{P_{\text{ref}}} &= \frac{\gamma R}{\gamma - 1}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

On aboutit alors au système *adimensionné* suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, & (1.20a) \\ \rho (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla \pi + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{\text{Fr}^2} \rho \mathbf{e}_z, & (1.20b) \\ \rho (\partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta) = \frac{dP}{dt} + \frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta), & (1.20c) \\ P = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho \theta, & (1.20d) \end{cases}$$

où  $\boldsymbol{\tau}$  est donné par (1.2). Ce modèle est complété par une équation sur la pression thermodynamique (1.17) ou (1.18) appliquée au cas gaz parfait. L'équation (1.17) s'écrit dans ce cas particulier :

$$-\frac{dP}{dt} \frac{1}{\gamma - 1} |\Omega| = \frac{\gamma P}{\gamma - 1} \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Re Pr}} \int_{\partial \Omega} \kappa \nabla \theta \cdot \mathbf{n},$$

ou encore

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\gamma P}{|\Omega|} \int_{\partial \Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \frac{\gamma - 1}{|\Omega| \text{Re Pr}} \int_{\partial \Omega} \kappa \nabla \theta \cdot \mathbf{n}. \quad (1.21)$$

Dans le cas d'un système fermé, l'équation (1.18) devient pour un gaz parfait :

$$P = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\int_{\Omega} \rho_0}{\int_{\Omega} \frac{1}{\theta}}. \quad (1.22)$$

Notons que la contrainte sur la divergence de  $\mathbf{u}$  s'écrit alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\gamma P} \frac{dP}{dt} + \frac{\gamma - 1}{\gamma \text{Re Pr } P} \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta). \quad (1.23)$$

*Remarque 1.2.* Le système *dimensionné* pour un gaz parfait est :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, & (1.24a) \\ \rho (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla \pi + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}, & (1.24b) \\ \rho C_P (\partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta) = \frac{dP}{dt} + \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta), & (1.24c) \\ P = R \rho \theta, & (1.24d) \end{cases}$$

que l'on complète avec l'équation de pression thermodynamique :

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\gamma P}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \frac{\gamma - 1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \kappa \nabla \theta \cdot \mathbf{n}, \quad (1.25)$$

ou pour le cas d'un système fermé :

$$P = R \frac{\int_{\Omega} \rho_0}{\int_{\Omega} \frac{1}{\theta}}.$$

### 1.3 Organisation de la thèse

Dans cette thèse, nous nous appliquons à étudier des modèles bas Mach. Deux aspects seront abordés. D'une part, l'analyse mathématique d'un modèle de type faible Mach est effectuée. D'autre part, nous nous attachons à développer des schémas numériques permettant de simuler des écoulements en régime faible Mach. L'une de nos exigences est que les schémas respectent les bornes physiques des variables approchées. En effet, le dépassement des bornes pourrait conduire à des résultats non physiques comme une densité négative. Cette propriété de préservation des bornes se traduit mathématiquement par la vérification d'un principe du maximum. Nous aurons donc à cœur d'étudier ces propriétés de principe du maximum d'un point de



vue théorique et numérique. La thèse comporte trois parties principales, complétées par le présent chapitre d'introduction, un chapitre contenant des rappels mathématiques et des annexes. Nous présentons maintenant le contenu des chapitres.

## Chapitre 2 : Préliminaires

Dans ce chapitre, nous commençons par définir quelques notations avant d'énoncer des résultats d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans la suite de la thèse.

## Chapitre 3 : Une méthode combinée Volumes Finis - Éléments Finis pour un modèle bas Mach

Dans ce chapitre, nous développons une méthode combinée Volumes Finis - Éléments Finis permettant de simuler des écoulements à faible Mach en dimension 2 dans le cadre d'un gaz parfait. Le système d'équations considéré est (1.20a)-(1.20b)-(1.23)-(1.20c) complété par l'équation de pression thermodynamique (1.21) ou (1.22). Un aspect original de ce travail est que la loi d'état (1.20d) du fluide est uniquement imposée de façon implicite. Une autre particularité de ce travail est le choix des méthodes numériques. En effet, en suivant l'idée initialement développée par C. Calgaro, E. Creusé et T. Goudon dans [12] pour les écoulements incompressibles, la densité est calculée par volumes finis alors que les autres variables sont déterminées par des éléments finis. Cela permet en particulier d'assurer la préservation des états constants, ainsi qu'un principe du maximum pour la densité dans le cas limite incompressible. La précision de notre schéma est ensuite évaluée sur un cas test analytique et des ordres de convergence sont exhibés. Enfin, nous comparons notre schéma à d'autres de la littérature sur un problème d'injection, ainsi qu'un cas test de cavité chauffée différemment à gauche et à droite.

## Chapitre 4 : Un résultat d'existence de solution régulière pour un modèle de type bas Mach

Dans le quatrième chapitre, nous effectuons l'étude théorique d'un modèle de type faible Mach en dimension 3. Des conditions aux limites spécifiques sont imposées afin de simplifier le modèle. De ce fait, la pression thermodynamique devient constante. Il est alors possible par un changement de variable de se ramener à un champ de vitesse à divergence nulle. De plus, la densité est éliminée des équations grâce à la loi d'état. On suppose également que la viscosité du fluide est une fonction spécifique de la température afin d'éliminer les termes de dérivée d'ordre 3. Nous montrons alors l'existence et l'unicité d'une solution forte pour ce modèle.

La démarche est basée sur une linéarisation des équations. Par un processus itératif, nous résolvons à chaque pas une équation de convection-diffusion linéaire pour la température, et un problème de type Stokes à viscosité variable pour la vitesse et la pression. Nous établissons ensuite des estimations *a priori* pour la suite

de solutions approchées, ainsi qu'un principe du maximum pour la température. Puis, nous montrons par un argument de suite de Cauchy que la suite de solutions approchées converge, et que sa limite est la solution forte du problème. L'intérêt de la méthode est qu'elle permet d'exhiber les vitesses de convergence de la suite de solutions approchées vers la solution forte.

### **Chapitre 5 : Méthodes de Volumes Finis pour l'équation de température d'un modèle faible Mach**

Dans ce chapitre, nous effectuons l'étude numérique en dimension 2 du modèle considéré dans le Chapitre 4. Nous nous intéressons particulièrement à la discrétisation de l'équation de température. En effet, l'étude théorique faite au Chapitre 4 a montré que la température satisfaisait le principe du maximum. Nous souhaitons donc obtenir l'analogie discret de cette propriété pour notre solution numérique. Dans cette optique, nous nous orientons vers les méthodes de volumes finis. La difficulté principale provient du terme " $|\nabla\theta|^2$ ", car il n'existe pas de définition naturelle d'un gradient par maille en volumes finis. Nous allons donc envisager plusieurs discrétisations, et étudier ces différents schémas en terme d'existence de solutions et de respect du principe du maximum. Des expérimentations numériques seront menées afin de mettre en évidence la précision du schéma et d'illustrer la propriété de respect des bornes. Enfin, l'équation de température sera couplée à l'équation de vitesse, et la méthode numérique sera mise en œuvre sur le problème de la cavité chauffée étudié dans le Chapitre 3. Nous détaillerons en particulier le couplage entre les différentes méthodes : volumes finis pour la température et éléments finis pour la vitesse et la pression.

# Chapitre 2

## Préliminaires

*Dans ce chapitre, nous rappelons un certain nombre d'outils mathématiques qui seront utilisés dans la suite de la thèse.*

**Sommaire**

---

<b>2.1</b>	<b>Notations</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>2.2</b>	<b>Espaces fonctionnels</b> . . . . .	<b>17</b>
2.2.1	Espaces de fonctions à divergence nulle . . . . .	17
2.2.2	L'espace $H_N^k(\Omega)$ . . . . .	19
2.2.3	Normes équivalentes . . . . .	20
<b>2.3</b>	<b>Quelques inégalités utiles</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>2.4</b>	<b>Résultats d'analyse fonctionnelle</b> . . . . .	<b>24</b>
<b>2.5</b>	<b>Espaces de fonctions dépendant du temps</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>2.6</b>	<b>Lemmes de Gronwall</b> . . . . .	<b>26</b>

---

Dans tout ce chapitre,  $\Omega$  désigne un ouvert borné Lipschitz de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  ou  $3$ , de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$ .

## 2.1 Notations

Dans cette section, nous donnons un certain nombre de notations qui seront adoptées dans cette thèse. Soit  $n \geq 1$  et  $m \geq 1$  des entiers naturels.

### Notations générales

- $\#E$  désigne le cardinal de l'ensemble  $E$ .
- $|E|$  désigne la mesure de Lebesgue de l'ensemble  $E \subset \mathbb{R}^n$ .

### Vecteurs et matrices

Soit  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , et  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  deux matrices à  $m$  lignes et  $n$  colonnes (on note  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ). La  $i$ -ième coordonnée de  $\mathbf{u}$  est notée  $\mathbf{u}_i$ , et le coefficient situé à la ligne  $i$  et à en colonne  $j$  de  $\mathbf{A}$  est noté  $\mathbf{A}_{ij}$  ou  $\mathbf{A}_{i,j}$ . On adoptera les notations suivantes :

— $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	$\in \mathbb{R}$	Produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$ : $\sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i$
— $ \mathbf{u} $	$\in \mathbb{R}$	Norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ : $ \mathbf{u}  = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2}$
— $\mathbf{A}^T$	$\in \mathbb{R}^{n \times m}$	Matrice transposée de $\mathbf{A}$ : $(\mathbf{A}^T)_{ij} = \mathbf{A}_{ji}$
— $\mathbf{A}\mathbf{u}$	$\in \mathbb{R}^m$	Produit matrice vecteur : $(\mathbf{A}\mathbf{u})_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{u}_j$
— $\mathbf{A} : \mathbf{B}$	$\in \mathbb{R}$	Double contraction : $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{B}_{ij}$
— $ \mathbf{A} $	$\in \mathbb{R}$	Norme de Frobenius : $ \mathbf{A}  = (\mathbf{A} : \mathbf{A})^{1/2}$
— $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$	$\in \mathbb{R}^{m \times n}$	Produit tensoriel : $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{ij} = \mathbf{u}_i \mathbf{v}_j$ .

### Opérateurs différentiels

- Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Son gradient est défini par :

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(\mathbf{x}) \right)^T,$$

et son laplacien par :

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\mathbf{x}).$$

- Soit  $\mathbf{u} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Sa divergence est donnée par :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial x_k}(\mathbf{x}),$$

son gradient par :

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq d},$$

et son laplacien par :

$$\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = (\Delta \mathbf{u}_1(\mathbf{x}), \dots, \Delta \mathbf{u}_d(\mathbf{x}))^T.$$

On note également :

$$\mathbb{D}\mathbf{u} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}}{2}.$$

— Soit  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ . Sa divergence est définie par :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left( \sum_{k=1}^d \frac{\partial \mathbf{A}_{1k}}{\partial x_k}, \dots, \sum_{k=1}^d \frac{\partial \mathbf{A}_{dk}}{\partial x_k} \right)^T.$$

Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ . L'opérateur d'advection d'une quantité scalaire (respectivement d'une quantité vectorielle) est défini par  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)f = \mathbf{v} \cdot \nabla f$  (respectivement par  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla \mathbf{u} \mathbf{v}$ ).

### Espaces $L^p$ et espaces de Sobolev

Soit  $1 \leq p < +\infty$ , on pose :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \int_{\Omega} |f|^p < +\infty \right\}.$$

$L^p(\Omega)$  est muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour  $p = +\infty$ , on définit :

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable ; } \exists C > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega\},$$

et

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} |f(x)|.$$

L'ensemble des fonctions  $L^2$  à moyenne nulle est noté :

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} f = 0 \right\}.$$

Soit  $m \geq 1$  un entier, on définit les espaces de Sobolev  $H^m(\Omega)$  par :

$$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega); \quad \forall \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m, D^\alpha f \in L^2(\Omega)\}.$$

Cet espace est muni de la norme :

$$\|f\|_{H^m} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'adhérence de l'ensemble des fonctions  $C^\infty(\Omega)$  à support compact dans  $H^1(\Omega)$  est notée  $H_0^1(\Omega)$  :

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)},$$

et son dual  $H^{-1}(\Omega)$ .

On introduit également les espaces suivants, pour les fonctions à valeur dans  $\mathbb{R}^d$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^2(\Omega) &= (L^2(\Omega))^d, \\ \mathbb{H}^m(\Omega) &= (H^m(\Omega))^d, \\ \mathbb{H}_0^1(\Omega) &= (H_0^1(\Omega))^d. \end{aligned}$$

Les propriétés des espaces définis dans cette section pourront être consultées par exemple dans [8].

## 2.2 Espaces fonctionnels

Dans cette section, nous présentons les espaces fonctionnels qui seront considérés dans la suite du travail.

### 2.2.1 Espaces de fonctions à divergence nulle

En premier lieu, nous introduisons les espaces fonctionnels qui sont très utiles lors de l'étude des équations de Navier-Stokes. On renvoie au livre de R. Temam [82] pour les détails. On considère l'espace des fonctions tests à divergence nulle :

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Omega\}.$$

Les fermetures de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  et  $\mathbb{H}^1(\Omega)$  sont respectivement notées  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{V}$  est sont caractérisées par :

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \{ \mathbf{v} \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \}, \\ \mathbf{V} &= \{ \mathbf{v} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega \}.\end{aligned}$$

L'injection de  $\mathbf{V}$  dans  $\mathbf{H}$  est continue et  $\mathbf{V}$  est dense dans  $\mathbf{H}$ . En identifiant  $\mathbf{H}$  avec son dual par le théorème de représentation de Riesz, on a la configuration suivante :

$$\mathbf{V} \subset \mathbf{H} \equiv \mathbf{H}' \subset \mathbf{V}', \quad (2.1)$$

chaque espace étant dense dans le suivant et les injections étant continues. On a donc

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L^2}, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{H}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

De plus, on a la décomposition orthogonale suivante :

**Proposition 2.1.** (*Décomposition de Helmholtz-Hodge*)

$$\mathbb{L}^2(\Omega) = \mathbf{H} \oplus \mathbf{G}, \quad \text{où } \mathbf{G} = \left\{ \nabla p : p \in H^1(\Omega); \int_{\Omega} p = 0 \right\}. \quad (2.2)$$

On note alors  $\mathbb{P}$  la projection (de Hodge) orthogonale de  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  sur  $\mathbf{H}$ .

Le théorème suivant sera également utile :

**Théorème 2.1.** (*Théorème de De Rham*)

Soit  $\mathbf{f} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe  $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$  tel que

$$\mathbf{f} = \nabla p.$$

ii) Pour tout  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ,

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Nous nous intéressons maintenant à l'opérateur de Stokes qui est bien décrit dans [83]. On considère la forme bilinéaire  $a$  définie par :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{L^2} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

$a$  étant continue et coercive sur  $\mathbf{V}$ , elle induit un isomorphisme  $\mathbb{A}$  de  $\mathbf{V}$  dans  $\mathbf{V}'$  défini par :

$$\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$



En définissant le domaine de  $\mathbb{A}$  dans  $\mathbf{H}$  par  $D(\mathbb{A}) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : \mathbb{A}\mathbf{v} \in \mathbf{H}\}$ ,  $\mathbb{A}$  peut être considéré comme un opérateur linéaire non borné de  $\mathbf{H}$ . De plus,  $\mathbb{A}$  est un isomorphisme auto-adjoint positif de  $D(\mathbb{A})$  dans  $\mathbf{H}$ . On a la proposition suivante :

**Proposition 2.2.** *L'opérateur de Stokes est caractérisé par :*

$$D(\mathbb{A}) = \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}, \quad \mathbb{A}\mathbf{v} = -\mathbb{P} \Delta \mathbf{v},$$

où  $\mathbb{P}$  est la projection de Hodge de  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  dans  $\mathbf{H}$ .

On énonce également un lemme qui a été démontré dans [67], dans lequel nous explicitons la dépendance de la constante en  $\varepsilon$  :

**Lemme 2.1.** *Soit  $\mathbf{v} \in D(\mathbb{A})$ . On considère la décomposition de Helmholtz de  $-\Delta \mathbf{v}$  :*

$$-\Delta \mathbf{v} = \mathbb{A}\mathbf{v} + \nabla q, \tag{2.3}$$

avec  $q \in H^1(\Omega)$  tel que  $\int_{\Omega} q = 0$ . Alors  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C$  dépendant uniquement du domaine  $\Omega$  telle que :

$$\|q\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 + C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2}^2. \tag{2.4}$$

Nous allons maintenant énoncer une propriété spectrale de l'opérateur  $\mathbb{A}$  :

**Proposition 2.3.** *Il existe une suite  $(\alpha_j) \subset \mathbb{R}^+$  telle que*

$$0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots, \quad \alpha_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \infty,$$

et une suite de vecteurs  $(\mathbf{w}_j) \subset \mathbf{V}$  orthogonaux deux à deux telle que

$$\mathbb{A}\mathbf{w}_j = \alpha_j \mathbf{w}_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

### 2.2.2 L'espace $H_N^k(\Omega)$

En ce qui concerne la température, on considère les espaces :

$$H_N^k(\Omega) = \left\{ \theta \in \mathbb{H}^k(\Omega) : \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \Gamma \right\},$$

$$H_{N,0}^k(\Omega) = \left\{ \theta \in \mathbb{H}^k(\Omega) : \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \Gamma; \int_{\Omega} \theta = 0 \right\},$$

pour  $k = 2$  ou  $3$ , où  $\mathbf{n}$  représente le vecteur normal unitaire sortant à  $\Omega$ .

Pour une fonction  $\theta \in H_N^k(\Omega)$ , on définit

$$\bar{\theta} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \theta \quad \text{et} \quad \tilde{\theta} = \theta - \bar{\theta} \in H_{N,0}^k. \quad (2.5)$$

### 2.2.3 Normes équivalentes

Nous utiliserons fréquemment dans la suite du travail des résultats d'équivalence de normes.

D'après l'inégalité de Poincaré, les normes  $\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2}$  et  $\|\mathbf{v}\|_{H^1}$  sont équivalentes sur  $\mathbf{V}$ . De plus, les normes  $\|\Delta \mathbf{v}\|_{L^2}$  et  $\|\mathbf{v}\|_{H^2}$  sont équivalentes dans  $\mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}$ , voir par exemple [60, Chap 1, section 1.5]. Les normes  $\|\mathbb{A} \mathbf{v}\|_{L^2}$  et  $\|\Delta \mathbf{v}\|_{L^2}$  sont équivalentes sur  $D(\mathbb{A})$  d'après les résultats de régularité, voir par exemple [82].

Par ailleurs, les normes  $\|\theta\|_{H^2}$  et  $\|\Delta \theta\|_{L^2}$  sont équivalentes dans  $H_{N,0}^2(\Omega)$ . Pour justifier ce résultat, on montre d'abord avec le théorème de Lax-Milgram et l'inégalité de Poincaré généralisée\* que :

$$\|\theta\|_{H^1} \leq C \|\Delta \theta\|_{L^2}. \quad (2.6)$$

D'après la théorie de la régularité elliptique avec conditions aux limites de Neumann (voir [42, th. 2.3.3.2]), on a :

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{H^2} &\leq C (\|\Delta \theta\|_{L^2} + \|\theta\|_{H^1}) \\ &\leq C \|\Delta \theta\|_{L^2}, \end{aligned}$$

la dernière inégalité étant obtenue grâce à (2.6). De façon standard, on montre également que les normes  $\|\theta\|_{H^3}$  et  $\|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}$  sont équivalentes dans  $H_{N,0}^3(\Omega)$ . On en déduit que les normes  $\|\Delta \theta\|_{L^2}$  et  $\|\nabla \theta\|_{H^1}$  sont équivalentes dans  $H_N^2(\Omega)$ , et que les normes  $\|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}$  et  $\|\nabla \theta\|_{H^2}$  sont équivalentes dans  $H_N^3(\Omega)$ .

Enfin, les normes  $\|p\|_{H^1}$  et  $\|\nabla p\|_{L^2}$  sont équivalentes dans  $H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$  d'après l'inégalité de Poincaré généralisée.

On résume ces résultats dans le tableau suivant :

---

\*Le théorème de Lax-Milgram ainsi que l'inégalité de Poincaré généralisée permettent de montrer que pour tout  $\mathbf{f} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ , il existe un unique  $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^1(\Omega)$  tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{H}^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} \mathbf{u} &= 0. \end{aligned}$$

De plus,  $\|\mathbf{u}\|_{H^1} \leq C \|\mathbf{f}\|_{L^2}$ .

Espace	Normes équivalentes
$\mathbf{V}$	$\ \nabla \mathbf{v}\ _{L^2} \sim \ \mathbf{v}\ _{H^1}$
$D(\mathbb{A})$	$\ \Delta \mathbf{v}\ _{L^2} \sim \ \mathbb{A} \mathbf{v}\ _{L^2} \sim \ \mathbf{v}\ _{H^2}$
$H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$	$\ \nabla p\ _{L^2} \sim \ p\ _{H^1}$
$H_{N,0}^2(\Omega)$	$\ \Delta \theta\ _{L^2} \sim \ \theta\ _{H^2}$
$H_N^2(\Omega)$	$\ \Delta \theta\ _{L^2} \sim \ \nabla \theta\ _{H^1}$
$H_{N,0}^3(\Omega)$	$\ \nabla \Delta \theta\ _{L^2} \sim \ \theta\ _{H^3}$
$H_N^3(\Omega)$	$\ \nabla \Delta \theta\ _{L^2} \sim \ \nabla \theta\ _{H^2}$

## 2.3 Quelques inégalités utiles

Nous énonçons dans cette partie des inégalités classiques qui seront fréquemment utilisées par la suite.

Nous commençons par rappeler l'inégalité de Young.

**Proposition 2.4.** (*Inégalité de Young*)

Soient  $a$  et  $b$  deux réels positifs et  $1 \leq p, q \leq \infty$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Alors on a :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Cette égalité peut s'écrire sous la forme particulière :

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q, \quad (2.7)$$

où  $\varepsilon > 0$  et  $C_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^{q/p} p^{q/p} q}$ .

L'inégalité de Young permet de montrer l'inégalité de Hölder (voir par exemple [8]) :

**Proposition 2.5.** (*Inégalité de Hölder*)

— Soient  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$  avec  $1 \leq p, q \leq \infty$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Alors  $fg \in L^1(\Omega)$  et on a :

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

— Plus généralement, soient  $1 \leq p, q \leq \infty$  et  $r$  défini par  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ . Si  $f \in L^p(\Omega)$

et  $g \in L^q(\Omega)$ , alors  $fg \in L^r(\Omega)$  et on a :

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

— L'inégalité de Hölder se généralise à  $n$  fonctions :

Soient  $1 \leq p_1, \dots, p_n \leq \infty$  et  $r$  défini par  $\frac{1}{r} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k}$ . Si  $f_k \in L^{p_k}(\Omega)$  pour  $k = 1, \dots, n$ , alors :

$$\|f_1 \cdots f_n\|_{L^r} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdots \|f_n\|_{L^{p_n}}.$$

De l'inégalité d'Hölder, on peut déduire la proposition suivante :

**Proposition 2.6.** (Inégalité d'interpolation)

Soient  $1 \leq p, q \leq \infty$  et  $r$  défini par  $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Si  $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ , alors  $f \in L^r(\Omega)$  et on a :

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^\alpha \|f\|_{L^q}^{1-\alpha}. \quad (2.8)$$

Nous utiliserons fréquemment les inégalités de Sobolev (voir [8]).

**Théorème 2.2.** (Inégalités de Sobolev)

— En dimension  $d = 2$ , si  $f \in H^1(\Omega)$ , alors  $f \in L^p(\Omega)$  pour  $1 \leq p \leq \infty$  et :

$$\|f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{H^1}.$$

— En dimension  $d = 3$ , si  $f \in H^1(\Omega)$ , alors  $f \in L^p(\Omega)$  pour  $1 \leq p \leq 6$  et :

$$\|f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{H^1}. \quad (2.9)$$

Nous énonçons maintenant l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, voir par exemple [74]. La notation  $\|D^j f\|_{L^p}$  désigne le maximum des normes  $L^p$  de toutes les dérivées d'ordre  $j$  de  $f$ .

**Théorème 2.3.** (Inégalité d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg)

On suppose qu'il existe des réels  $1 \leq p, q, r \leq \infty$ , un réel  $s > 0$ , un réel  $0 < \alpha < 1$  et deux entiers naturels  $m$  et  $j$  tels que  $\frac{1}{p} = \frac{j}{d} + \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{d}\right) \alpha + \frac{1-\alpha}{q}$  et  $\frac{j}{m} \leq \alpha$ . Si  $f \in L^q(\Omega) \cap L^s(\Omega)$  et si sa  $m$ -ième dérivée est dans  $L^r(\Omega)$ , alors sa  $j$ -ième dérivée est dans  $L^p(\Omega)$  et il existe  $C > 0$  telle que l'on ait :

$$\|D^j f\|_{L^p} \leq C (\|D^m f\|_{L^r}^\alpha \|f\|_{L^q}^{1-\alpha} + \|f\|_{L^s}). \quad (2.10)$$

On utilisera souvent l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg dans les cas particuliers du corollaire suivant.

**Corollaire 2.1.** *On a :*

$$\|f\|_{L^4} \leq C \|f\|_{L^2}^\alpha \|f\|_{H^1}^{1-\alpha} \quad \forall f \in H^1(\Omega), \quad (2.11)$$

$$\|f\|_{L^3} \leq C \|f\|_{L^2}^\beta \|f\|_{H^1}^{1-\beta} \quad \forall f \in H^1(\Omega), \quad (2.12)$$

$$\|\nabla f\|_{L^4} \leq C \|\Delta f\|_{L^2}^{1/2} \|f\|_{L^\infty}^{1/2} \quad \forall f \in H^2(\Omega), \quad (2.13)$$

avec

$$\alpha = \begin{cases} 1/2 & \text{si } d = 2, \\ 1/4 & \text{si } d = 3, \end{cases} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{cases} 2/3 & \text{si } d = 2, \\ 1/2 & \text{si } d = 3. \end{cases}$$

Nous aurons également besoin de l'inégalité d'Agmon, qui est un cas particulier de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, (on pourra par exemple consulter [1]).

**Corollaire 2.2.** *(Inégalité d'Agmon)*

*Soit  $f \in H^2(\Omega)$ , alors  $f \in L^\infty(\Omega)$  et il existe  $C > 0$  telle que l'on ait :*

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{H^1}^{1/2} \|f\|_{H^2}^{1/2}. \quad (2.14)$$

Enfin, nous utiliserons le résultat du corollaire suivant :

**Corollaire 2.3.** *Soient  $f \in H^1(\Omega)$  et  $g \in H^2(\Omega)$ , alors il existe  $C > 0$  telle que l'on ait :*

$$\|\nabla(fg)\|_{L^2} \leq C \|f\|_{H^1} \|g\|_{H^1}^{1/2} \|g\|_{H^2}^{1/2}. \quad (2.15)$$

*Démonstration.* En utilisant l'inégalité triangulaire puis l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned} \|\nabla(fg)\|_{L^2} &\leq \|g \nabla f\|_{L^2} + \|f \nabla g\|_{L^2} \\ &\leq \|g\|_{L^\infty} \|\nabla f\|_{L^2} + \|f\|_{L^6} \|\nabla g\|_{L^3}. \end{aligned}$$

Par (2.14), on a :

$$\|g\|_{L^\infty} \leq C \|g\|_{H^1}^{1/2} \|g\|_{H^2}^{1/2}.$$

De plus, par (2.9), on a

$$\|f\|_{L^6} \leq C \|f\|_{H^1},$$

et (2.12) permet d'obtenir

$$\|\nabla g\|_{L^3} \leq C \|\nabla g\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla g\|_{H^1}^{1/2} \leq C \|g\|_{H^1}^{1/2} \|g\|_{H^2}^{1/2}.$$

On obtient alors (2.15). □

## 2.4 Résultats d'analyse fonctionnelle

Nous donnons dans cette section quelques outils permettant de montrer des résultats d'existence, d'unicité et de régularité de solutions, qui sont fréquemment utilisés pour résoudre des équations aux dérivées partielles.

Commençons par définir le degré topologique de Brouwer, voir par exemple [2].

**Définition 2.1.** Pour tout ouvert borné  $U \subset \mathbb{R}^n$  et pour tout  $b \in \mathbb{R}^n$ , il existe une unique application appelée *degré topologique de Brouwer*

$$\delta(\cdot, U, b) : \{\phi \in \mathcal{C}(\overline{U}, \mathbb{R}^n), \quad b \notin \phi(\partial U)\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

telle que :

1. Si  $b \in U$ , alors  $\delta(\text{Id}, U, b) = 1$ ,
2. Si  $U_1$  et  $U_2$  sont deux ouverts disjoints de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $U = U_1 \cup U_2$ , et si  $b \notin \phi(\partial U_1) \cup \phi(\partial U_2)$ , alors

$$\delta(\phi, U, b) = \delta(\phi, U_1, b) + \delta(\phi, U_2, b),$$

3.  $\delta(\cdot, U, b)$  est continue,
4.  $\delta(\phi, U, b) = \delta(\phi - b, U, 0)$ .

Nous utiliserons deux propriétés importante du degré topologique dans la suite du travail.

**Proposition 2.7.** (*Invariance du degré topologique par homotopie*)

Soit  $\mathcal{H} \in \mathcal{C}([0, 1] \times \overline{U}, \mathbb{R}^n)$  et  $b \notin \mathcal{H}([0, 1], \partial U)$ . Alors  $\delta(\mathcal{H}(\mu, \cdot), U, b)$  est indépendant de  $\mu$ .

**Proposition 2.8.** Si  $\delta(\phi, U, b) \neq 0$ , alors il existe  $x_0 \in U$  tel que  $\phi(x_0) = b$ .

Le résultat suivant concerne la méthode de continuité et peut être consulté dans [39].

**Proposition 2.9.** *Méthode de continuité*

Soit  $\mathbf{X}$  un espace de Banach et  $\mathbf{Y}$  un espace vectoriel normé. Soient  $L_0$  et  $L_1$  des opérateurs bornés de  $\mathbf{X}$  dans  $\mathbf{Y}$ . Pour  $\alpha \in [0; 1]$ , on définit  $L_\alpha = (1 - \alpha)L_0 + \alpha L_1$ . On suppose qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}, \quad \forall \alpha \in [0; 1], \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} \leq C \|L_\alpha \mathbf{v}\|_{\mathbf{Y}}.$$

Alors  $L_1$  est surjective si et seulement si  $L_0$  est surjective.

## 2.5 Espaces de fonctions dépendant du temps

Nous étudions dans cette section les espaces de fonctions à valeurs dans un Banach, voir par exemple [82] ou [34].  $X$  désigne un espace de Banach muni de la norme  $\|\cdot\|_X$ , et  $T$  un réel strictement positif. On définit alors :

— Pour  $1 \leq p < +\infty$  l'espace

$$L^p(0, T; X)$$

des fonctions mesurables  $\mathbf{u} : [0; T] \longrightarrow X$  telles que :

$$\|\mathbf{u}\|_{L^p(0, T; X)} := \left( \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

— L'espace

$$L^\infty(0, T; X)$$

des fonctions mesurables  $\mathbf{u} : [0; T] \longrightarrow X$  telles que :

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, T; X)} := \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\|_X < +\infty,$$

— Ainsi que l'espace

$$\mathcal{C}(0, T; X)$$

des fonctions mesurables  $\mathbf{u} : [0; T] \longrightarrow X$  telles que :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{C}(0, T; X)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\|_X < +\infty.$$

Nous allons maintenant énoncer un résultat de continuité. Soient  $U$  et  $L$  des espaces de Hilbert tels que l'injection de  $U$  dans  $L$  soit continue, avec  $U$  dense dans  $L$ . En identifiant  $L$  avec son dual par le théorème de représentation de Riesz, on a la configuration suivante :

$$U \subset L \equiv L' \subset U', \quad (2.16)$$

chaque espace étant dense dans le suivant et les injections étant continues. Le théorème suivant est démontré dans le livre de R. Temam [82, Chap. 3, lemme 1.2].

**Théorème 2.4.** *Soit  $U$  et  $L$  deux espaces dans la configuration (2.16). On suppose que :*

$$f \in L^2(0, T; U) \quad \text{et} \quad \partial_t f \in L^2(0, T; U').$$

Alors

$$f \in \mathcal{C}(0, T; L).$$

Nous utiliserons également le théorème suivant, qu'on peut retrouver dans [64] :

**Théorème 2.5.** Soient  $U$  et  $L$  deux espaces de Hilbert dans la configuration (2.16). Soit  $a : ]0, T[ \times U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $a(t, \cdot, \cdot)$  est bilinéaire p.p.  $t \in ]0, T[$  qui vérifie :

- $t \rightarrow a(t, u, v)$  est mesurable  $\forall u, v \in U$ ,
- il existe  $M > 0$  tel que  $|a(t, u, v)| \leq M \|u\|_U \|v\|_U$  p.p.  $t \in [0, T]$ ,  $\forall u, v \in U$ ,
- il existe  $\alpha > 0$  et  $\gamma > 0$  tels que  $a(t, u, u) \geq \alpha \|u\|_U^2 - \gamma \|u\|_L^2$  p.p.  $t \in [0, T]$ ,  $\forall u \in U$ .

Soit  $f \in L^2(0, T; U')$  et  $u_0 \in U$ , on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \langle \partial_t u, v \rangle_{U', U} + a(t, u, v) = \langle f, v \rangle_{U', U} & \text{p.p. } t \in ]0, T[, \forall v \in U, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Alors (2.17) admet une unique solution  $u \in \mathcal{C}(0, T; L) \cap L^2(0, T; U)$  telle que  $\partial_t u \in L^2(0, T; U')$ .

## 2.6 Lemmes de Gronwall

Nous utiliserons le lemme de Gronwall sous sa forme classique.

**Lemme 2.2.** (Gronwall) Soient  $a, b, c$  et  $d$  des fonctions positives dans  $L^1(0, T)$  satisfaisant :

$$a'(t) + b(t) \leq c(t) a(t) + d(t) \quad \text{p.p. } t \in (0, T).$$

Alors pour tout  $t \in (0, T)$ , on a :

$$a(t) + \int_0^t b(s) ds \leq \left( a(0) + \int_0^t d(s) ds \right) \exp \left( \int_0^t c(s) ds \right).$$

Nous aurons également besoin d'une forme plus particulière du lemme de Gronwall.

**Lemme 2.3.** (Gronwall avec récurrence) Soient  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(c_n)$ ,  $(d_n)$  et  $(e_n)$  des suites de fonctions positives telles que :

- $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(e_n)$  sont dans  $L^1(0, T)$ ,
- $(c_n)$  et  $(d_n)$  sont respectivement bornées dans  $L^1(0, T)$  et  $L^2(0, T)$ ,
- $a_n(0) \leq A \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

On suppose que pour tout  $n \geq 1$  :

$$a'_n(t) + b_n(t) \leq c_n(t) a_n(t) + d_n(t) a_{n-1}(t) + e_n(t) \quad \text{p.p. } t \in (0, T).$$

Alors, il existe des constantes  $B > 0$  et  $D > 0$  ne dépendant pas de  $n$  (mais dépendant des bornes de  $\|c_n\|_{L^1(0, T)}$  et  $\|d_n\|_{L^2(0, T)}$ ) telles que pour tout  $t \in (0, T)$  et pour



tout  $n \geq 1$ , on a :

$$a_n(t) + \int_0^t b_n(s) ds \leq D \left( A e^{\frac{Bt}{2}} + \left[ \sum_{k=1}^n \|e_k\|_{L^1(0,T)}^2 \frac{(Bt)^{n-k}}{(n-k)!} \right]^{\frac{1}{2}} + \|a_0\|_{L^\infty(0,t)} \left[ \frac{(Bt)^n}{n!} \right]^{\frac{1}{2}} \right).$$

*Démonstration.* Nous adaptons la démonstration de [50, Lemma 2.2].

Dans cette démonstration,  $B$  et  $D$  désignent des constantes ne dépendant pas de  $n$ , mais pouvant dépendre de  $\|c_n\|_{L^1(0,T)}$  et  $\|d_n\|_{L^2(0,T)}$ . En appliquant le Lemme 2.2, puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient pour  $t \in (0, T)$  :

$$\begin{aligned} a_n(t) + \int_0^t b_n(s) ds &\leq \left( a_n(0) + \int_0^t (d_n(s) a_{n-1}(s) + e_n(s)) ds \right) \\ &\leq B \left( A + \int_0^t e_n(s) ds + \left( \int_0^t a_{n-1}^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

On pose  $\tilde{a}_n = a_n^2$  et  $E_n = \|e_n\|_{L^1(0,T)}$ . Alors par récurrence on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n(t) &\leq B \left( A^2 + E_n^2 + \int_0^t \tilde{a}_{n-1}(s) ds \right) \\ &\leq B A^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(Bt)^k}{k!} \\ &\quad + B \sum_{k=1}^n E_k^2 \frac{(Bt)^{n-k}}{(n-k)!} + B^n \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \tilde{a}_0(s) ds \\ &\leq B A^2 e^{Bt} + B \sum_{k=1}^n E_k^2 \frac{(Bt)^{n-k}}{(n-k)!} + \|a_0\|_{L^\infty(0,T)}^2 \frac{(Bt)^n}{n!}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

On en déduit que :

$$a_n(t) \leq D \left( A e^{\frac{Bt}{2}} + \left[ \sum_{k=1}^n E_k^2 \frac{(Bt)^{n-k}}{(n-k)!} \right]^{\frac{1}{2}} + \|a_0\|_{L^\infty(0,t)} \left[ \frac{(Bt)^n}{n!} \right]^{\frac{1}{2}} \right). \quad (2.20)$$

Pour estimer  $\int_0^t b_n(s) ds$ , on reprend (2.18) et on utilise (2.20) pour estimer  $a_{n-1}^2$  :

$$\begin{aligned}
\int_0^t b_n(s) ds &\leq B \left( A + E_n + \left[ \int_0^t \left( B A^2 e^{Bs} + B \sum_{k=1}^{n-1} E_k^2 \frac{(Bs)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \|a_0\|_{L^\infty(0,T)}^2 \frac{(Bs)^{n-1}}{(n-1)!} \right) ds \right]^{\frac{1}{2}} \right) \\
&\leq D \left[ A^2 + E_n^2 + A^2(e^{Bt} - 1) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{n-1} E_k^2 \frac{(Bs)^{n-k}}{(n-k)!} + \frac{\|a_0\|_{L^\infty(0,T)}^2 (Bs)^n}{B n!} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq D \left( A e^{\frac{Bt}{2}} + \left[ \sum_{k=1}^n E_k^2 \frac{(Bt)^{n-k}}{(n-k)!} \right]^{\frac{1}{2}} + \|a_0\|_{L^\infty(0,t)} \left[ \frac{(Bt)^n}{n!} \right]^{\frac{1}{2}} \right). \quad (2.21)
\end{aligned}$$

En sommant (2.20) et (2.21), on obtient le résultat souhaité.  $\square$

**Exemple 2.1.** En pratique, on aura  $\|e_n\|_{L^1(0,T)}^2 \leq D \left[ \frac{(Bt)^n}{n!} \right]^\alpha$ , avec  $\alpha \leq 1$ . Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \|e_k\|_{L^1(0,T)}^2 \frac{(Bt)^{n-k}}{(n-k)!} &\leq D \sum_{k=1}^n \left[ \frac{(Bt)^k}{k!} \right]^\alpha \frac{(Bt)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&\leq D \sum_{k=1}^n \frac{(Bt)^k}{(k!)^\alpha} \frac{(Bt)^{n-k}}{((n-k)!)^\alpha} \\
&\leq D \frac{(Bt)^n}{(n!)^\alpha} \sum_{k=1}^n \left( \frac{n!}{k!(n-k)!} \right)^\alpha \\
&\leq D \frac{(Bt)^n}{(n!)^\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&\leq D \frac{(2Bt)^n}{(n!)^\alpha}
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$a_n(t) + \int_0^t b_n(s) ds \leq D \left( A e^{\frac{Bt}{2}} + \left[ \frac{(Bt)^n}{(n!)^\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} + \|a_0\|_{L^\infty(0,t)} \left[ \frac{(Bt)^n}{n!} \right]^{\frac{1}{2}} \right).$$

## Chapitre 3

# Une méthode combinée Volumes Finis - Éléments Finis pour un modèle bas Mach

*Dans ce chapitre, nous développons une méthode combinée permettant de simuler des écoulements en régime faible Mach. L'équation de conservation de la masse est résolue par un schéma volumes finis alors que l'équation de conservation de la quantité de mouvement, associée à la contrainte de compressibilité du fluide est résolue par une méthode d'éléments finis, dans la lignée de travaux précédents dédiés à la simulation des équations de Navier-Stokes à densité variable.\**

---

\*Ce travail a été publié dans la revue *International Journal for Numerical Methods in Fluids* [10].

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>31</b>
<b>3.2</b>	<b>Méthodes numériques pour les équations de Navier-Stokes incompressibles</b>	<b>32</b>
3.2.1	Le splitting en temps	33
3.2.2	Discrétisation spatiale	33
<b>3.3</b>	<b>La méthode combinée VF - EF pour un modèle bas Mach</b>	<b>37</b>
3.3.1	Le système	38
3.3.2	Le splitting en temps	39
3.3.3	Discrétisation spatiale	41
<b>3.4</b>	<b>Simulations numériques</b>	<b>44</b>
3.4.1	Cas tests analytiques	44
3.4.2	Injection dans une cavité	48
3.4.3	Convection naturelle	53
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>58</b>

---

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous développons un schéma numérique permettant de simuler des écoulements en régime bas Mach. Nous rappelons qu'il existe deux familles de méthodes permettant de simuler de tels écoulements. Tout d'abord, les solveurs *density-based* permettent de simuler des écoulements en régimes supersonique et transsonique. Il est nécessaire de les adapter afin de les rendre robustes en régime faible Mach, voir par exemple [30, 49, 75, 78], en utilisant par exemple des techniques de préconditionnement [68, 84–87]. L'autre approche, appelée *pressure-based*, consiste à adapter les techniques utilisées pour les écoulements incompressibles. Le système d'équations considéré peut alors être le modèle compressible, voir par exemple [52–54], ou un modèle asymptotique [4, 29]. Dans ce dernier cas, une procédure de point fixe est souvent mise en place pour tenir compte du caractère non-linéaire des équations [3, 4, 40]. Une méthode de projection, initialement proposée dans [21, 22, 82] et développée ensuite dans [43–47] est fréquemment utilisée pour résoudre le couple vitesse/pression. Concernant la discrétisation spatiale, des éléments finis sont souvent utilisés [56, 70], éventuellement stabilisés pour les régimes où la convection est importante [3, 40, 41, 66, 79]. Certains auteurs utilisent également des différences finies [29, 62, 73].

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode combinée Volumes Finis - Éléments Finis qui a été initialement développée pour la simulation d'écoulements incompressibles à densité variable [12]. La méthode est basée sur un splitting en temps qui permet de résoudre l'équation de conservation de la masse par une méthode de volumes finis, et l'équation de conservation de la quantité de mouvement et la contrainte d'incompressibilité par une méthode d'éléments finis. Cela permet en particulier d'assurer la préservation des états constants et le principe du maximum discret pour la densité [9]. La méthode combinée a également été utilisée pour simuler des avalanches [13]. Nous proposons ici d'adapter cette méthode pour les écoulements bas Mach. L'originalité de l'approche réside dans le fait que la densité est calculée par résolution de l'équation de conservation de la masse par une méthode de volumes finis, alors que les autres variables sont approchées par éléments finis. Dans ce travail, l'équation d'état n'est pas imposée de façon explicite dans les équations. De plus, on retrouve les propriétés du schéma original dans le cas limite incompressible, à savoir la préservation des états constants et le principe du maximum discret pour la densité.

Ce chapitre s'organise de la façon suivante. Dans une première section, nous allons faire des rappels sur les méthodes numériques pouvant être utilisées dans la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles à densité variable. Puis, nous décrirons la méthode combinée Volumes Finis - Éléments Finis dans le cas faible Mach. Enfin, la dernière section sera dédiée aux expérimentations numériques.

Dans tout ce chapitre,  $T$  désigne un réel strictement positif,  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  et  $\Gamma$  son bord. La variable de temps est notée  $t \in [0; T]$  et la variable d'espace  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

## 3.2 Méthodes numériques pour les équations de Navier-Stokes incompressibles

Dans cette section, nous rappelons des techniques permettant de discrétiser les équations de Navier-Stokes incompressibles. Pour simplifier, la viscosité du fluide est supposée constante. En désignant  $\rho$  la densité,  $\mathbf{v}$  la vitesse et  $\pi$  la pression, le système sous forme non-conservative écrit en variables adimensionnées est donné par :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, & (3.1a) \\ \rho (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla \pi - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} = -\frac{1}{\text{Fr}^2} \rho \mathbf{e}_y & (3.1b) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & (3.1c) \end{cases}$$

où  $\text{Re}$  est le nombre de Reynolds,  $\text{Fr}$  le nombre de Froude et  $\mathbf{e}_y$  le vecteur unitaire vertical.

Les conditions initiales associées au système (3.1) sont données par

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \rho(0, \mathbf{x}) = \rho_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

et les conditions aux limites sont données par

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) &= \mathbf{u}_D(t, \mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \rho(t, \mathbf{x}) &= \rho_{in}(t, \mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{in}, \end{aligned}$$

où  $\Gamma_{in}$  désigne la partie du bord où  $\mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n} < 0$ ,  $\mathbf{n}$  étant le vecteur unitaire normal sortant à  $\Omega$ .

L'approche considérée est celle qui a été développée par C. Calgari, E. Creusé et T. Goudon [12]. Elle est basée sur un splitting en temps. D'une part, l'équation de conservation de la masse (3.1a) est résolue par volumes finis vertex-based MUSCL avec  $\tau$ -limiteur [9]. D'autre part, le reste du système est résolu par éléments finis, avec méthode de projection. Il est ainsi possible de tirer profit des propriétés intrinsèques à chacun des schémas, comme par exemple le respect du principe de positivité sur la densité. Nous allons effectuer des rappels sur chacune des méthodes numériques précédemment citées.

### 3.2.1 Le splitting en temps

Soit  $\Delta t$  le pas de temps et  $t^n = n \Delta t$ . Les variables approchées au temps  $t^n$  seront identifiées avec l'exposant  $n$ . Supposons que  $\rho^1$  et  $\mathbf{u}^1$  aient été calculés par un schéma d'Euler. Supposons également que pour  $n \geq 1$ ,  $\rho^{n-1}$  et  $\mathbf{u}^{n-1}$ , ainsi que  $\rho^n$  et  $\mathbf{u}^n$  sont connus. Montrons comment sont calculés  $\rho^{n+1}$ ,  $\mathbf{u}^{n+1}$  et  $\pi^{n+1}$ .

1. On commence par calculer  $\rho^{n+1}$  par résolution de l'équation de continuité par un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 :

$$\frac{\hat{\rho}^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho^n \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left( \nabla \cdot (\rho^n \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) + \nabla \cdot (\hat{\rho}^{n+1} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) \right) = 0, \quad (3.3)$$

avec

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(2\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) + \mathbf{u}^n}{2} = \frac{3\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{2} \quad (3.4)$$

et

$$\hat{\rho}^{n+1}(\mathbf{x}) = \rho^{n+1}(\mathbf{x}) = \rho_{in}^{n+1}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{in}. \quad (3.5)$$

2. On calcule alors la vitesse  $\mathbf{u}^{n+1}$  et la pression  $\pi^{n+1}$  par résolution de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et de la contrainte d'incompressibilité du fluide par un schéma BDF2 :

$$\rho^{n+1} \left( \frac{3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2 \Delta t} + (2\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} \right) + \nabla \pi^{n+1} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}^{n+1} &= -\frac{1}{\text{Fr}^2} \rho^{n+1} \mathbf{e}_y, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

avec

$$\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_D^{n+1}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma.$$

*Remarque 3.1.* La vitesse  $\mathbf{u}^{n+1}$  intervenant dans (3.2) et (3.3) est une extrapolation au temps  $(t^n + t^{n+1})/2$ . Elle est nécessaire pour obtenir l'ordre 2. Notons que dans [12], un splitting de Strang a été utilisé afin d'atteindre l'ordre 2.

### 3.2.2 Discrétisation spatiale

La discrétisation en espace est basée sur une triangulation du domaine  $\Omega$  définissant un maillage régulier  $\tau_h$  au sens de Ciarlet [23]. Chaque composante de la vitesse  $\mathbf{u}_h$  est discrétisée par des éléments finis de type  $\mathbb{P}_2$ -Lagrange, et la pression  $\pi_h$  par des éléments finis de type  $\mathbb{P}_1$ -Lagrange, de sorte que les approximations satisfont la

condition de stabilité de type inf-sup. La densité est quant à elle constante par morceaux sur les volumes de contrôle du maillage dual  $\tau_h^*$ , ce qui permet de considérer un schéma volumes finis vertex-based pour la résolution de l'équation de continuité. Notons que la densité peut également être interprétée comme un champ  $\mathbb{P}_1$ -Lagrange, puisqu'une valeur de la densité peut naturellement être associée à chaque nœud des triangles. Les degrés de liberté de chaque variable sont représentés sur la Figure 3.1. On renvoie à [12] pour plus de détails.

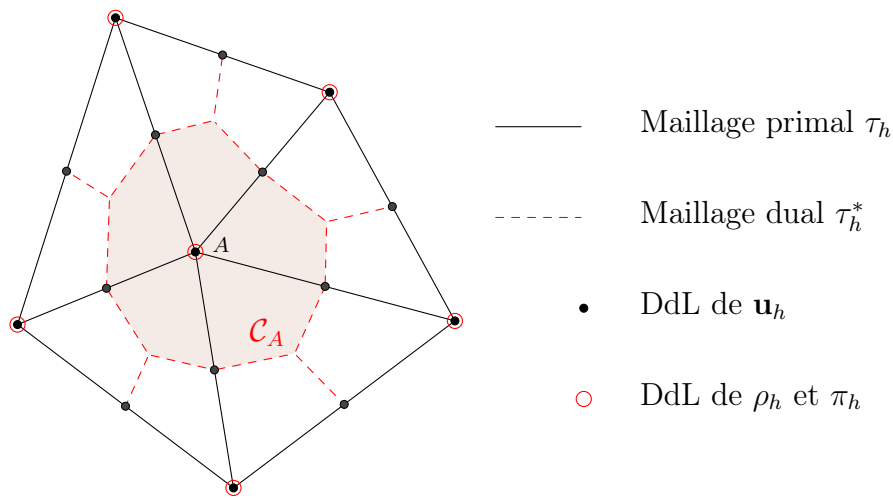


FIGURE 3.1: Le patch  $\Omega_A$ . Maillage et degrés de liberté (DdL) de chaque variable.

### 3.2.2.1 Méthode de projection pour l'équation en vitesse

Nous allons ici détailler la mise en place de la méthode de projection pour la résolution de l'équation de conservation de la masse couplée à la contrainte d'incompressibilité du fluide. Cette méthode, d'abord introduite dans [21, 22, 82], a été ensuite développée et améliorée dans [43–47]. Elle consiste à découpler le calcul de la vitesse de la contrainte d'incompressibilité. Ainsi, une vitesse intermédiaire non-solénoïdale est d'abord calculée par résolution de l'équation de quantité de mouvement. Cette vitesse est ensuite projetée sur l'espace des vecteurs à divergence nulle. Enfin, la décomposition de Hodge permet d'interpréter la différence entre les deux vitesses en terme de l'incrément de pression. La pression peut ainsi être mise à jour.

Nous supposons que l'algorithme est initialisé correctement, voir [46]. Détaillons maintenant comment calculer  $\mathbf{u}_h^{n+1}$  et  $\pi_h^{n+1}$ . Supposons que  $\rho_h^{n+1}$ ,  $\mathbf{u}_h^n$ ,  $\mathbf{u}_h^{n-1}$  et  $\pi_h^n$  sont connus, de même que l'incrément de pression  $\phi_h^n$  et  $\phi_h^{n-1}$ . On commence par calculer



la vitesse non-solénoïdale  $\mathbf{u}_h^{n+1}$  par :

$$\begin{cases} \rho_h^{n+1} \left( \frac{3\mathbf{u}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t} + (2\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} \right) \\ \quad + \nabla \left( \pi_h^n + \frac{4}{3}\phi_h^n - \frac{1}{3}\phi_h^{n-1} \right) - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}_h^{n+1} = -\frac{1}{\text{Fr}^2} \rho_h^{n+1} \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{u}_h^{n+1}|_\Gamma = \mathbf{u}_D^{n+1}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Ensuite, l'incrément de pression  $\phi_h^{n+1}$  est calculé par

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\bar{\rho}_h^{n+1}} \nabla \phi_h^{n+1} \right) = \frac{3}{2\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1} \\ \nabla \phi_h^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

où pour chaque triangle  $K \in \tau_h$ , nous définissons  $\bar{\rho}_h^{n+1}$  par :

$$\frac{1}{\bar{\rho}_h^{n+1}|_K} = \frac{1}{3} \sum_{A_i \in K} \frac{1}{\rho_h^{n+1}(A_i)}, \quad (3.10)$$

avec  $A_i$  les trois sommets du triangle  $K$ .

*Remarque 3.2.* Le choix de la définition de  $\bar{\rho}_h^{n+1}$  n'est pas unique. Nous aurions pu également considérer la définition :

$$\frac{1}{\bar{\rho}_h^{n+1}|_K} = \frac{3}{\sum_{A_i \in K} \rho_h^{n+1}(A_i)}.$$

Pour le cas d'un fluide incompressible, dans [46], les auteurs considèrent :

$$\bar{\rho}_h^{n+1}|_K = \chi = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \rho_0(\mathbf{x}).$$

Nous avons observé des résultats numériques similaires pour les trois définitions de  $\bar{\rho}_h^{n+1}|_K$  proposées.

Nous pouvons désormais mettre à jour la pression par

$$\pi_h^{n+1} = \pi_h^n + \phi_h^{n+1}.$$

Enfin, la vitesse à divergence nulle pourrait être définie par

$$\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1} = \mathbf{u}_h^{n+1} - \frac{2\Delta t}{3\bar{\rho}_h^{n+1}} \nabla \phi_h^{n+1}. \quad (3.11)$$

Cependant, d'un point de vue pratique, il n'est généralement pas nécessaire de la calculer, voir [43].

### 3.2.2.2 Méthode de volumes finis pour l'équation en densité

Supposons que  $\rho_h^n$ ,  $\rho_h^{n-1}$ ,  $\mathbf{u}_h^n$ ,  $\mathbf{u}_h^{n-1}$ ,  $\phi_h^n$  et  $\phi_h^{n-1}$  ont été évalués, alors  $\rho_h^{n+1}$  est calculé par résolution de :

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\rho}_h^{n+1} - \rho_h^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho_h^n \mathbf{u}_h^{*,n+\frac{1}{2}}) &= 0, \\ \frac{\rho_h^{n+1} - \rho_h^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left( \nabla \cdot (\rho_h^n \mathbf{u}_h^{*,n+\frac{1}{2}}) + \nabla \cdot (\hat{\rho}_h^{n+1} \mathbf{u}_h^{*,n+\frac{1}{2}}) \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

où

$$\mathbf{u}_h^{*,n+\frac{1}{2}}|_K = \frac{3\mathbf{u}_h^{*,n}|_K - \mathbf{u}_h^{*,n-1}|_K}{2} \quad (3.13)$$

avec :

$$\mathbf{u}_h^{*,n}|_K = \frac{1}{|K|} \int_K \tilde{\mathbf{u}}_h^n = \frac{1}{|K|} \int_K \left( \mathbf{u}_h^n - \frac{2\Delta t}{3\bar{\rho}_h^n} \nabla \phi_h^n \right). \quad (3.14)$$

La méthode avec un solveur de type Uzawa est détaillée dans [12] et sa généralisation afin d'assurer la stabilité  $L^\infty$  grâce aux  $\tau$ -limiteurs est donnée dans [9]. Nous insistons ici sur le fait que nous devons définir une vitesse  $\mathbf{u}_h^{*,n+\frac{1}{2}}|_K$  sur les interfaces des volumes de contrôle à partir du champ de vitesse  $\mathbb{P}_2$  obtenu par le schéma éléments finis. La définition (3.14) est une adaptation de la définition donnée dans [12] d'un champ de vitesse constant par maille  $K$  au cas de la méthode de projection. Vérifions que cela assure bien la préservation des états constants.

Pour cela, supposons que  $\rho_h^n = \rho_h^{n-1} = \rho_h^{n-2}$  sont constants en espace, et montrons que  $\rho_h^{n+1} = \rho_h^n$ . On considère la formulation faible de (3.9) au temps  $t^n$  donnée par :

$$- \int_{\Omega_A} \frac{1}{\bar{\rho}_h^n} \nabla \phi_h^n \cdot \nabla \psi_A = \frac{3}{2\Delta t} \int_{\Omega_A} \nabla \cdot \mathbf{u}_h^n \psi_A,$$

où  $\psi_A$  est la fonction de base  $\mathbb{P}_1$  associée au nœud  $A$  et  $\Omega_A$  son support (voir Figure 3.1). Grâce à la définition (3.11) de  $\tilde{\mathbf{u}}_h^n$ , on obtient

$$\int_{\Omega_A} \tilde{\mathbf{u}}_h^n \cdot \nabla \psi_A = 0.$$

C'est l'analogie de la relation (23) dans [12], qui permet d'obtenir :

$$\int_{\partial \mathcal{C}_A} \mathbf{u}_h^{*,n} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

avec  $\mathcal{C}_A$  le volume de contrôle associé au nœud  $A$ , et qui permet alors d'obtenir  $\rho_h^{n+1} = \rho_h^n$  lors de la résolution par volumes finis de (3.12).

### 3.3 La méthode combinée Volumes Finis - Éléments Finis pour un modèle bas Mach

Nous allons dans cette section adapter les méthodes décrites précédemment pour l'incompressible au cas des équations de Navier-Stokes à faible nombre de Mach. Rappelons que lorsque le nombre de Mach  $M$  est petit, l'une des conséquences de l'analyse asymptotique qui a été faite afin de dériver le modèle est que la pression se scinde en deux termes :

$$p(\mathbf{x}, t) = P(t) + \pi(\mathbf{x}, t),$$

où  $P$  est la pression thermodynamique, constante en espace, et  $\pi$  est la pression dynamique, de l'ordre de  $M^2$ . Les autres variables considérées sont la densité  $\rho$ , la vitesse  $\mathbf{u}$  et la température  $\theta$ .

Les équations de Navier-Stokes à faible nombre de Mach données sous forme adimensionnée, pour un gaz parfait, s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, & (3.15a) \\ \rho (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla \pi + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{\text{Fr}^2} \rho \mathbf{e}_y, & (3.15b) \\ \rho (\partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta) = \frac{dP}{dt} + \frac{1}{\text{Re Pr}} \Delta \theta, & (3.15c) \\ P = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho \theta, & (3.15d) \end{cases}$$

avec

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbb{I}. \quad (3.16)$$

Ici, la viscosité est supposée constante, de même que la conductivité thermique du fluide, de sorte que  $\mu = 1$  et  $\kappa = 1$ . Les nombres adimensionnés caractéristiques de l'écoulement sont le nombre de Reynolds  $\text{Re}$ , le nombre de Froude  $\text{Fr}$  et le nombre de Prandtl  $\text{Pr}$ .  $\mathbf{e}_y$  est le vecteur unitaire vertical.

Le système est complété d'une équation sur la pression thermodynamique. Elle est donnée par

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\gamma P}{|\Omega|} \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \frac{\gamma - 1}{|\Omega|} \int_{\Gamma} \nabla \theta \cdot \mathbf{n}, \quad (3.17)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal sortant. Dans le cas d'un système fermé, elle

peut également être donnée par :

$$P = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\int_{\Omega} \rho_0}{\int_{\Omega} \frac{1}{\theta}}. \quad (3.18)$$

### 3.3.1 Le système

Nous allons montrer que le système (3.15) est équivalent à :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, & (3.19a) \\ \rho (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla \pi + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{\text{Fr}^2} \rho \mathbf{e}_y, & (3.19b) \\ \rho (\partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta) = \frac{dP}{dt} + \frac{1}{\text{Re Pr}} \Delta \theta, & (3.19c) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\gamma P} \frac{dP}{dt} + \frac{\gamma - 1}{\gamma \text{Re Pr} P} \Delta \theta. & (3.19d) \end{cases}$$

Pour cela, nous devons en particulier vérifier que la loi d'état (3.15d) est imposée implicitement. Nous partons de l'équation de température (3.19c) :

$$D_t \theta = \frac{1}{\rho} \left( \frac{dP}{dt} + \frac{1}{\text{Re Pr}} \Delta \theta \right),$$

où l'on a utilisé la notation  $D_t = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ . On remplace maintenant  $\Delta \theta$  grâce à la contrainte (3.19d) :

$$D_t \theta = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{\rho} \left( \frac{dP}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} \right).$$

Finalement, on utilise l'équation de conservation de la masse (3.19a) pour substituer  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  :

$$D_t \theta = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} - \frac{P}{\rho^2} D_t \rho \right) = D_t \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} \right).$$

Ainsi, si la loi d'état (3.15d) est vérifiée à l'instant initial, elle sera satisfaite pour tout  $t > 0$ .

**Conditions initiales et conditions aux limites** Le système (3.19), complété par l'équation de pression thermodynamique (3.17) ou (3.18) est muni des conditions initiales suivantes :  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ ,

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \theta(0, \mathbf{x}) = \theta_0(\mathbf{x}), \quad P(0) = P_0, \quad \rho(0, \mathbf{x}) = \frac{\gamma P_0}{(\gamma - 1)\theta_0(\mathbf{x})}.$$

Les conditions aux limites pour la vitesse sont données par :

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_D(t, \mathbf{x}) \quad \forall t \in [0; T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma.$$

On décompose le bord de  $\Omega$  en une partie Dirichlet et une partie Neumann :  $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ , avec  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ . Les conditions aux limites pour la température sont données par :

$$\begin{cases} \theta(t, \mathbf{x}) = \theta_D(t, \mathbf{x}) & \forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D, \\ \nabla \theta(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = F_N(t, \mathbf{x}) & \forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N. \end{cases}$$

On définit  $\Gamma_{in}$  la partie de  $\Gamma$  telle que  $\mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n} < 0$ . Les conditions aux limites pour la densité sont alors :

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \rho_{in}(t, \mathbf{x}) \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{in}.$$

### 3.3.2 Le splitting en temps

La méthode combinée Volumes Finis - Éléments Finis (C-FV-FE) pour ce problème bas Mach est basée sur un splitting en temps, qui peut être considéré comme la généralisation du splitting défini au paragraphe 3.2.1. Étant donné  $\Delta t$  le pas de temps, on note  $t^n = n \Delta t$ . Les variables approchées au temps  $t^n$  seront identifiées avec l'exposant  $n$ . Supposons que  $\rho^1, \theta^1, \mathbf{u}^1$  et  $P^1$  aient été calculés par un schéma d'Euler. Supposons également que pour  $n \geq 1$ ,  $\rho^{n-1}, \theta^{n-1}, \mathbf{u}^{n-1}$  et  $P^{n-1}$ , ainsi que  $\rho^n, \theta^n, \mathbf{u}^n$  et  $P^n$  sont connus. Montrons comment sont calculés  $\rho^{n+1}, \theta^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, \pi^{n+1}$  et  $P^{n+1}$ .

Étape 1. Calcul de la pression thermodynamique et de sa dérivée temporelle.

Nous envisageons deux façons de procéder.

- a) Pour le cas d'un système fermé sans flux entrant ou sortant, la masse reste constante dans le domaine. Par conséquent, la pression  $P^{n+1}$  peut être calculée à partir de (3.18) :

$$P^{n+1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left( \int_{\Omega} \rho^0 \right) \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2\theta^n - \theta^{n-1}} \right)^{-1}. \quad (3.20)$$

La dérivée temporelle peut ensuite être calculée grâce à l'analogie discret de (3.17) :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{dP}{dt} \right)^{n+1} + \frac{\gamma}{|\Omega|} P^{n+1} \int_{\Gamma} \mathbf{u}_D^{n+1} \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{\gamma - 1}{|\Omega| \text{Re Pr}} \int_{\Gamma_D} \nabla (2\theta^n - \theta^{n-1}) \cdot \mathbf{n} + \frac{\gamma - 1}{|\Omega| \text{Re Pr}} \int_{\Gamma_N} F_N^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

b) Pour le cas d'un système fermé avec flux entrant ou sortant, on calcule la pression thermodynamique  $P^{n+1}$  par résolution de (3.17) :

$$\begin{aligned} & \frac{3P^{n+1} - 4P^n + P^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\gamma}{|\Omega|} P^{n+1} \int_{\Gamma} \mathbf{u}_D^{n+1} \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{\gamma - 1}{|\Omega| \text{Re Pr}} \int_{\Gamma_D} \nabla(2\theta^n - \theta^{n-1}) \cdot \mathbf{n} + \frac{\gamma - 1}{|\Omega| \text{Re Pr}} \int_{\Gamma_N} F_N^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Sa dérivée temporelle est alors obtenue par différences finies :

$$\left( \frac{dP}{dt} \right)^{n+1} = \frac{3P^{n+1} - 4P^n + P^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (3.23)$$

Étape 2. Calcul de la densité.

Comme pour le cas incompressible (voir paragraphe 3.2.1),  $\rho^{n+1}$  est calculé à partir d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{\rho}^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho^n \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) = 0, \\ & \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left( \nabla \cdot (\rho^n \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) + \nabla \cdot (\hat{\rho}^{n+1} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) \right) = 0, \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(2\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) + \mathbf{u}^n}{2} = \frac{3\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{2} \quad (3.24)$$

et

$$\hat{\rho}^{n+1}(\mathbf{x}) = \rho^{n+1}(\mathbf{x}) = \rho_{in}^{n+1}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{in}.$$

Étape 3. Calcul de la température.

$\theta^{n+1}$  est calculé par résolution de l'équation de température (3.19c) par un schéma BDF2 :

$$\begin{aligned} & \rho^{n+1} \left( \frac{3\theta^{n+1} - 4\theta^n + \theta^{n-1}}{2\Delta t} + (2\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \nabla \theta^{n+1} \right) \\ & - \frac{3P^{n+1} - 4P^n + P^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{1}{\text{Re Pr}} \Delta \theta^{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

avec

$$\begin{cases} \theta^{n+1}(\mathbf{x}) = \theta_D^{n+1}(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D, \\ \nabla \theta^{n+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = F_N^{n+1}(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N. \end{cases} \quad (3.26)$$

Étape 4. Calcul de la vitesse et de la pression dynamique.

$\mathbf{u}^{n+1}$  et  $\pi^{n+1}$  sont calculés par résolution de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (3.19b) associée à la contrainte (3.19d) par un schéma

BDF2 :

$$\begin{aligned} \rho^{n+1} \left( \frac{3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t} + (2\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1} \right) + \nabla \pi^{n+1} \\ - \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{n+1} = - \frac{1}{\text{Fr}^2} \rho^{n+1} \mathbf{e}_y, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = - \frac{1}{\gamma P^{n+1}} \left( \frac{dP}{dt} \right)^{n+1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma \text{Re Pr } P^{n+1}} \Delta (2\theta^n - \theta^{n-1}), \end{aligned}$$

avec

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{n+1} = \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}),$$

et

$$\mathbf{u}^{n+1}(x) = \mathbf{u}_D^{n+1}(x), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma.$$

*Remarque 3.3.* Au lieu de résoudre l'équation de température (3.25), nous aurions pu penser à utiliser l'équation d'état (3.15d) afin de calculer  $\theta^{n+1}$ . Cependant, cela conduirait à un manque de régularité de  $\theta^{n+1}$  qui est nécessaire dans la contrainte (3.19d) afin d'obtenir les valeurs de  $\mathbf{u}^{n+1}$  et  $\pi^{n+1}$ .

### 3.3.3 Discrétisation spatiale

La triangulation du domaine a été définie dans la section 3.2.2. Comme pour le cas incompressible, la vitesse  $\mathbf{u}_h$  est discrétisée par des éléments finis  $\mathbb{P}_2$ -Lagrange, la pression dynamique  $\pi_h$  par des éléments finis de type  $\mathbb{P}_1$ -Lagrange, et la densité  $\rho_h$  est par un schéma volumes finis vertex-based. La température  $\theta_h$  est discrétisée par des éléments finis de type  $\mathbb{P}_2$ -Lagrange, de sorte que les degrés de liberté de la température sont les mêmes que ceux de la vitesse.

#### 3.3.3.1 Calcul de la pression thermodynamique

Les approximations de la températures  $\theta_h^n$  et  $\theta_h^{n-1}$ , et de la densité  $\rho_h^n$  étant connues,  $P^{n+1}$  et  $\left( \frac{dP}{dt} \right)^{n+1}$  sont calculés :

a) Par résolution de l'analogie discret de (3.20) et (3.21), c'est-à-dire :

$$P^{n+1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left( \int_{\Omega} \rho_h^0 \right) \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2\theta_h^n - \theta_h^{n-1}} \right)^{-1}. \quad (3.27)$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{dP}{dt}\right)^{n+1} + \frac{\gamma}{|\Omega|} P^{n+1} \int_{\Gamma} \mathbf{u}_D^{n+1} \cdot \mathbf{n} &= \frac{\gamma-1}{|\Omega| \text{Re Pr}} \int_{\Gamma_D} \nabla(2\theta_h^n - \theta_h^{n-1}) \cdot \mathbf{n} \\ &+ \frac{\gamma-1}{|\Omega| \text{Re Pr}} \int_{\Gamma_N} F_N^{n+1}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

b) Ou par résolution de l'analogie discret de (3.22) et (3.23) :

$$\begin{aligned} \frac{3P^{n+1} - 4P^n + P^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\gamma}{|\Omega|} P^{n+1} \int_{\Gamma} \mathbf{u}_D^{n+1} \cdot \mathbf{n} &= \\ \frac{\gamma-1}{|\Omega| \text{Re Pr}} \int_{\Gamma_D} \nabla(2\theta_h^n - \theta_h^{n-1}) \cdot \mathbf{n} + \frac{\gamma-1}{|\Omega| \text{Re Pr}} \int_{\Gamma_N} F_N^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

et

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)^{n+1} = \frac{3P^{n+1} - 4P^n + P^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (3.30)$$

### 3.3.3.2 Calcul de la température

Les valeurs de  $\rho_h^{n+1}$ ,  $\theta_h^n$ ,  $\theta_h^{n-1}$ ,  $\mathbf{u}_h^n$ ,  $\mathbf{u}_h^{n-1}$ ,  $P^{n+1}$ ,  $P^n$  et  $P^{n-1}$  étant connues,  $\theta_h^{n+1}$  est calculé par la résolution de :

$$\begin{aligned} \rho_h^{n+1} \left( \frac{3\theta_h^{n+1} - 4\theta_h^n + \theta_h^{n-1}}{2\Delta t} + (2\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) \cdot \nabla \theta_h \right) \\ - \frac{3P^{n+1} - 4P^n + P^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{1}{\text{Re Pr}} \Delta \theta_h^{n+1} = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ce calcul est réalisé en considérant la formulation faible éléments finis, associée aux conditions aux limites (3.26).

### 3.3.3.3 Calcul de la vitesse et de la pression dynamique

Nous adaptons ici la méthode de projection détaillée au paragraphe 3.2.2.1 pour le modèle bas Mach. Supposons que  $\rho_h^{n+1}$ ,  $\pi_h^n$ ,  $P^{n+1}$ ,  $P^n$  et  $\theta_h^{n+1}$  sont connus, de même que le champ de vitesse  $\mathbf{u}_h^n$  et  $\mathbf{u}_h^{n-1}$  (qui ne vérifie pas la contrainte (3.19d)) et l'incrément de pression  $\phi_h^n$  et  $\phi_h^{n-1}$ . On commence par calculer la vitesse  $\mathbf{u}_h^{n+1}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_h^{n+1} \left( \frac{3\mathbf{u}_h^{n+1} - 4\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}}{2\Delta t} + (2\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} \right) \\ \quad + \nabla \left( \pi_h^n + \frac{4}{3}\phi_h^n - \frac{1}{3}\phi_h^{n-1} \right) - \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{n+1} = -\frac{1}{\text{Fr}^2} \rho_h^{n+1} \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{u}_h^{n+1}|_{\Gamma} = \mathbf{u}_D^{n+1}, \end{array} \right. \quad (3.32)$$



avec

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{n+1} = \Delta \mathbf{u}_h^{n+1} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot (2\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1})). \quad (3.33)$$

Notons que l'extrapolation dans (3.33) est due au fait que les composantes de vitesse sont calculées l'une après l'autre. Ensuite, l'incrément de pression  $\phi_h^{n+1}$  est calculé par

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\bar{\rho}_h^{n+1}} \nabla \phi_h^{n+1} \right) = \frac{3}{2\Delta t} \left( \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1} + \frac{1}{\gamma P^{n+1}} \left( \frac{dP}{dt} \right)^{n+1} \right. \\ \quad \left. - \frac{(\gamma - 1)}{\gamma \text{Re Pr } P^{n+1}} \Delta (2\theta_h^n - \theta_h^{n-1}) \right), \\ \nabla \phi_h^{n+1} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (3.34)$$

où  $\bar{\rho}_h^{n+1}$  est défini par (3.10). Enfin, la pression  $\pi_h^{n+1}$  est définie par :

$$\pi_h^{n+1} = \pi_h^n + \phi_h^{n+1}.$$

Notons que comme pour le cas incompressible, on pourrait définir la vitesse  $\tilde{\mathbf{u}}_h^{n+1}$  qui vérifie la contrainte (3.19d) par (3.11), mais cela n'est pas nécessaire.

### 3.3.3.4 Calcul de la densité

Supposons que  $\rho_h^n, \rho_h^{n-1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n-1}, \phi_h^n$  et  $\phi_h^{n-1}$  ont été évalués, alors  $\rho_h^{n+1}$  est calculé comme dans le cas incompressible par résolution de (3.12).

*Remarque 3.4.* Dans le cas incompressible, remarquons que la définition de  $\mathbf{u}_h^{*,n+\frac{1}{2}}$  (3.13) permet d'assurer la préservation des états constants. En effet, supposons que :

- (H1)  $P^n = P^{n-1}$  et  $\left( \frac{dP}{dt} \right)^n = 0$ ,
- (H2)  $\theta_h^n = \theta_h^{n-1} = \theta_h^{n-2}$  sont constants en espace,
- (H3)  $\rho_h^n = \rho_h^{n-1} = \rho_h^{n-2}$  sont constants en espace,
- (H4)  $\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_D^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0$ .

Nous voulons montrer que  $\theta_h^{n+1} = \theta_h^n$  et  $\rho_h^{n+1} = \rho_h^n$ . D'abord, l'équation de thermodynamique ainsi que les hypothèses (H2), (H3) and (H4) permettent de montrer que  $P^{n+1} = P^n$  et  $\left( \frac{dP}{dt} \right)^{n+1} = 0$ . Ensuite, la formulation faible de (3.34) au temps  $t^n$  s'écrit :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_A} \frac{1}{\bar{\rho}_h^n} \nabla \phi_h^n \cdot \nabla \psi_A &= \frac{3}{2\Delta t} \left( \int_{\Omega_A} \nabla \cdot \mathbf{u}_h^n \psi_A + \frac{1}{\gamma P^n} \left( \frac{dP}{dt} \right)^n \int_{\Omega_A} \psi_A \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma - 1}{\gamma \text{Re Pr } P^n} \int_{\Omega_A} \nabla (2\theta_h^{n-1} - \theta_h^{n-2}) \cdot \nabla \psi_A \right), \end{aligned}$$

avec  $\psi_A$  la fonction de base  $\mathbb{P}_1$  associée au nœud  $A$  et  $\Omega_A$  le support de  $\psi_A$ , voir la Figure 3.1. Les hypothèses (H1), (H2) et (H4) montrent que :

$$\int_{\Omega_A} \left( \mathbf{u}_h^n - \frac{2\Delta t}{3\bar{\rho}_h^n} \nabla \phi_h^n \right) \cdot \nabla \psi_A = 0,$$

et la définition (3.11) de  $\tilde{\mathbf{u}}_h^n$  donne :

$$\int_{\Omega_A} \tilde{\mathbf{u}}_h^n \cdot \nabla \psi_A = 0.$$

C'est ici l'analogie de la relation (23) de [12], qui permet d'obtenir

$$\int_{\partial \mathcal{C}_A} \mathbf{u}_h^{*,n} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

où  $\mathcal{C}_A$  est le volume de contrôle associé au nœud  $A$ . L'hypothèse (H3) permet alors de conclure que  $\rho_h^{n+1} = \rho_h^n$ . Enfin, l'équation (3.31), les hypothèses (H1) et (H2) associées aux résultats précédents donnent  $\theta_h^{n+1} = \theta_h^n$ .

*Remarque 3.5.* Notons que (3.31) et (3.32) sont des schémas implicites en temps, qui ne sont par conséquent pas contraints par une condition CFL. L'unique schéma explicite est celui permettant de calculer la densité (3.12), pour lequel le pas de temps doit respecter une condition CFL proportionnelle à  $h/\|\mathbf{u}\|_{L^\infty}$ , voir [9]. Dans la pratique, si  $\Delta t$  ne vérifie pas cette condition CFL, un pas de temps plus petit  $\Delta t_{FV}$  satisfaisant cette condition est défini et des sous-pas sont faits dans la partie volumes finis du schéma.

## 3.4 Simulations numériques

Nous allons dans cette partie tester notre schéma sur différents critères. Tout d'abord, nous illustrons par un premier test la propriété de préservation des états constants pour les écoulements incompressibles. Ensuite, la précision du schéma est évaluée sur un cas test analytique. Puis nous comparons notre schéma à d'autres existant dans la littérature sur un problème d'injection. Enfin, nous vérifions la capacité de notre schéma à converger vers un état stationnaire.

### 3.4.1 Cas tests analytiques

#### 3.4.1.1 Préservation des états constants

Nous voulons tout d'abord illustrer le fait que pour les écoulements incompressibles, si la densité et la température sont initialement homogènes, alors elles restent

constantes (voir la Remarque 3.4). Notons que cela a déjà été montré pour la densité dans le cas des équations de Navier-Stokes incompressibles à densité variable avec un solveur d'Uzawa (voir [12]). Pour cela, nous considérons la solution analytique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{\text{ex}}(x, y) = 4 \begin{pmatrix} -y(x-1)^2(x+1)^2(y-1)(y+1) \\ x(y-1)^2(y+1)^2(x-1)(x+1) \end{pmatrix}, \\ \rho_{\text{ex}} = 1, \\ T_{\text{ex}} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \\ P_{\text{ex}} = 1, \\ \pi_{\text{ex}} = -\frac{y}{\text{Fr}^2}, \end{array} \right. \quad (3.35)$$

dans le domaine  $\Omega = [-1, 1]^2$ . Un terme source est ajouté au terme de gravité dans le second membre de (3.19b). Des conditions aux limites de Dirichlet sont imposées pour la température (i.e.  $\Gamma = \Gamma_D$ ). Puisque  $\Gamma_{in} = \emptyset$ , il n'y a pas besoin de définir de valeur de  $\rho$  sur le bord. Les simulations sont menées sur maillage non structuré jusqu'au temps  $T = 1 = N\Delta t$ , avec  $\Delta t = h_{max}$ , où  $h_{max}$  est le pas d'espace maximal du maillage. Les nombres sans dimension sont définis par  $\text{Re} = 1$ ,  $\text{Pr} = \gamma$  et  $1/\text{Fr}^2 = 9.81$ . Nous donnons dans le Tableau 3.1 les valeurs de  $\max_{0 \leq n \leq N} \|\rho_h^n - \rho_{\text{ex}}\|_{L^\infty(\Omega)}$  et  $\max_{0 \leq n \leq N} \|\theta_h^n - \theta_{\text{ex}}\|_{L^\infty(\Omega)}$ .

$\max_{0 \leq n \leq N} \ \rho_h^n - \rho_{\text{ex}}\ _{L^\infty(\Omega)}$	$\max_{0 \leq n \leq N} \ \theta_h^n - \theta_{\text{ex}}\ _{L^\infty(\Omega)}$
2.91e-13	1.02e-13

TABLEAU 3.1: Erreurs en densité et en température.

On observe dans le Tableau 3.1 que la densité et la température restent constantes (à l'erreur machine près) durant toute la simulation, comme on le voit sur la Figure 3.2 pour un maillage caractérisé par  $h_{max} = 0,0625$ . On observe que les erreurs maximales en densité sont obtenues près du bord. Par conséquent, le schéma assure la préservation des états constants pour la densité et la température dans le cas où le champ de vitesse est à divergence nulle.

### 3.4.1.2 Solution analytique

Afin de valider la précision du schéma, nous allons faire des tests de convergence pour une solution régulière avec un champ de vitesse non-solénoïdal. La solution

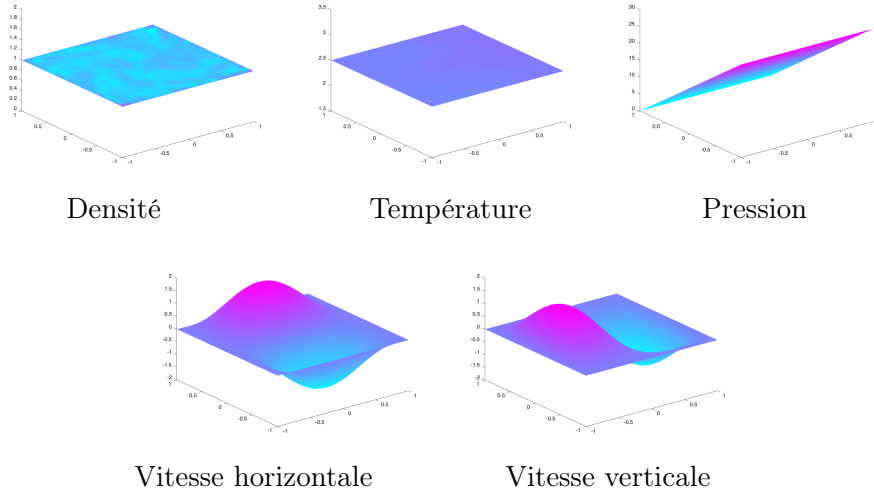


FIGURE 3.2: Densité, température, pression et les deux composantes des vitesses à  $T = 1$  pour le maillage  $h_{max} = 0,0625$ .

analytique est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{\text{ex}}(t, x, y) = -\frac{1}{\gamma(2 + \sin(2\pi t))} \left( \frac{2(\gamma - 1)(2 + \cos(2\pi t))}{(1 + x^2 + y^2)^2} + \pi \cos(2\pi t) \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ \rho_{\text{ex}}(t, x, y) = \frac{\gamma(2 + \sin(2\pi t))}{(\gamma - 1)(2 + \cos(2\pi t))} (1 + x^2 + y^2), \\ \theta_{\text{ex}}(t, x, y) = \frac{2 + \cos(2\pi t)}{1 + x^2 + y^2}, \\ P_{\text{ex}}(t) = 2 + \sin(2\pi t), \\ \pi_{\text{ex}}(t, x, y) = \sin(x) \sin(y) \sin(2\pi t), \end{array} \right.$$

dans le carré  $\Omega = [-1; 1]^2$ . Les nombres de Reynolds et de Prandtl sont égaux à 1, le terme de gravité n'est pas considéré et un terme source approprié est ajouté dans les seconds membres des équations (3.19a), (3.19b) et (3.19c). Des conditions aux limites de Neumann non-homogènes sont imposées pour la température (i.e.  $\Gamma = \Gamma_N$ ), de sorte que  $F_N = \nabla \theta_{\text{ex}} \cdot \mathbf{n}$  sur  $\Gamma$ ; et  $\rho_{in} = \rho_{\text{ex}}$  sur  $\Gamma_{in} = \Gamma$ .

Les simulations sont menées sur maillage non structuré, avec  $1/150 \leq h_{max} \leq 1/50$  jusqu'au temps  $T = 0,2$ , avec un pas de temps  $\Delta t = h_{max}$ . Afin d'évaluer les performances du splitting proposé dans la section 3.3.2, les résultats du schéma C-FV-FE sont comparés à ceux obtenus en utilisant une procédure de point fixe, voir l'Annexe A. Dans ce cas, les itérations de point fixe sont réalisées jusqu'à ce que la norme  $L^2$  de deux itérées successives soit plus petite que  $10^{-10}$  pour toutes les variables. D'un point de vue pratique, on observe que le point fixe converge en 6 ou 7 itérations. Finalement, ces résultats sont aussi comparés à ceux d'un des schémas proposé dans [4] (pressure-based solver, asymptotic approach 1), pour lequel des

$h_{max}$	Erreur $P$	RTaux	Erreur $\rho$	Taux	Erreur $\theta$	Taux	Erreur $\mathbf{u}$	Taux	Erreur $\pi$	Taux
2.00e-2	5.12e-3	-	2.84e-3	-	3.31e-3	-	8.49e-4	-	6.44e-2	-
1.56e-2	3.31e-3	1.76	1.76e-3	1.94	2.13e-3	1.79	4.72e-4	2.38	4.29e-2	1.65
1.11e-2	1.74e-3	1.89	9.04e-4	1.95	1.06e-3	2.05	2.10e-4	2.38	2.38e-2	1.73
7.81e-3	8.95e-4	1.89	4.54e-4	1.96	5.48e-4	1.87	1.03e-4	2.02	1.26e-2	1.80
6.67e-3	6.53e-4	1.99	3.32e-4	1.97	3.87e-4	2.19	7.48e-5	2.02	9.39e-3	1.85

TABLEAU 3.2: Schéma C-FV-FE. Erreurs en norme  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  et taux de convergence.

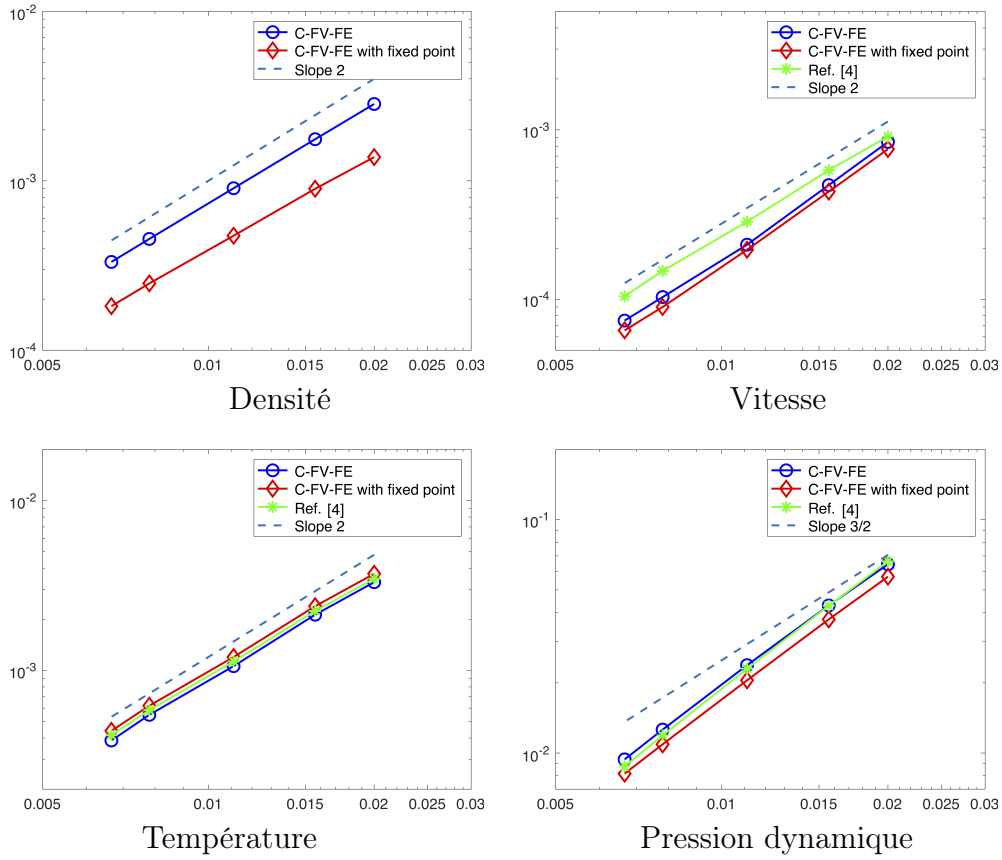
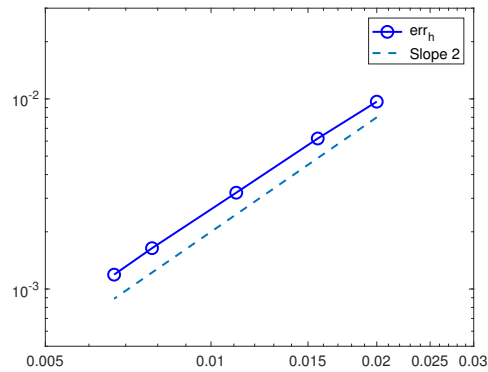
itérations de point fixe sont requises.

On observe, quelque soit le schéma considéré, que la pression thermodynamique  $P$  converge à l'ordre 2 en norme  $L^\infty(0, T)$ . On trace sur la Figure 3.3 la norme  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  des erreurs en densité  $\rho_h$ , température  $\theta_h$ , vitesse  $\mathbf{u}_h$  et pression dynamique  $\pi_h$  en fonction de  $h_{max}$ , en échelle log-log. Tout d'abord, on observe que tous les schémas ont une vitesse de convergence d'ordre 2 pour la densité, la température et la vitesse. Concernant la pression dynamique, un taux d'un peu plus de 1,5 est obtenu. Plus précisément, pour le schéma C-FV-FE, un taux compris entre 1,65 et 1,85 est observé, comme on peut le voir dans le Tableau 3.2. Ces résultats sont en accord avec le cas incompressible à densité constante, pour lequel il a été montré dans [48] que les erreurs en temps en norme  $L^2(\Omega)$  pour la vitesse et la pression sont respectivement d'ordre 2 et 3/2. En réalité, le taux de convergence observé numériquement est un peu meilleur que celui qui était théoriquement attendu. De plus, on peut voir que les résultats obtenus avec le schéma C-FV-FE avec ou sans la procédure de point fixe donnent les mêmes vitesses de convergence. En particulier, les erreurs sont quasiment identiques, excepté pour la densité où l'erreur est un peu plus petite avec le point fixe. En conclusion, les itérations de point fixe ne sont pas nécessaires pour le schéma C-FV-FE sur ce cas test analytique afin d'obtenir les taux de convergence optimaux. On souligne également que les itérations de point fixe sont en revanche indispensables pour le schéma proposé dans [4]. En effet, sans la procédure de point fixe, le schéma ne converge pas pour la pression dynamique, et les ordres de convergence sont plus petits que un pour la vitesse et la température.

Sur la Figure 3.4, on a tracé l'erreur en norme  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  sur l'équation d'état discrète, définie par :

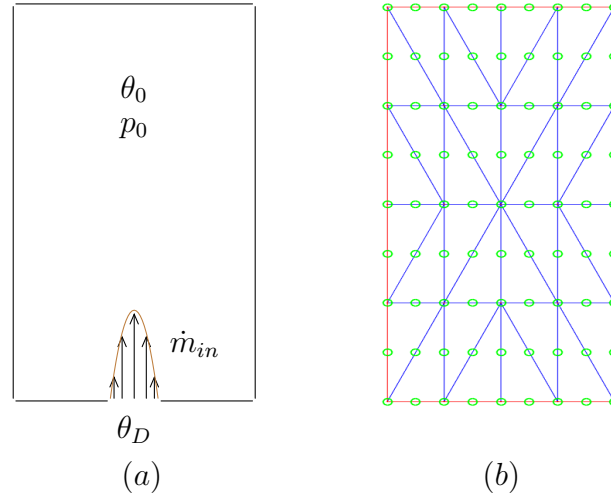
$$err_h = \max_{0 \leq n \leq N} \left\| \rho_h^n - \frac{\gamma P^n}{(\gamma - 1)\theta_h^n} \right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

obtenue avec le schéma C-FV-FE. Comme expliqué dans la section 3.3.1, la loi d'état est imposée de façon implicite. On remarque que  $err_h$  converge vers zéro à l'ordre 2, ce qui est le comportement attendu car  $P$ ,  $\rho_h$  et  $\theta_h$  convergent à l'ordre 2.

FIGURE 3.3: Erreurs en norme  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  en fonction de  $h_{max}$ .FIGURE 3.4: Erreur en norme  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  de la loi d'état discrète en fonction de  $h_{max}$  pour le schéma C-FV-FE.

### 3.4.2 Injection dans une cavité

Ce cas test a été initialement proposé dans [4], et également considéré dans [41] et [3]. Le domaine est un rectangle de largeur  $L = 3$  et de hauteur  $H = 7$  :  $\Omega = [-1, 5; 1, 5] \times [0; 7]$  (voir la Figure 3.5(a)), qui définit une cavité dans laquelle

FIGURE 3.5: (a) : La cavité  $\Omega$ . (b) : Le maillage  $4 \times 4$ .

un gaz calorifiquement parfait est initialement au repos. Les valeurs initiales pour la température et la pression thermodynamique sont données par :

$$\theta_0 = 300 \quad \text{et} \quad P_0 = 1,$$

de sorte que

$$\rho_0 = \frac{\gamma P_0}{(\gamma - 1)\theta_0}.$$

Les nombres de Reynolds, de Prandtl et de Froude du fluide sont respectivement égaux à  $Re = 40$ ,  $Pr = 0,71$ ,  $Fr = 0,042$ . Des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sont imposées pour la vitesse, et des conditions aux limites de Neumann homogènes sont spécifiées pour la température, sur tout le bord excepté au niveau d'une fente située sur le mur du bas défini par  $\Gamma_D = \Gamma_{in} = [-\frac{\ell}{2}; \frac{\ell}{2}] \times \{0\}$ , avec  $\ell = 0,2$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t, x, y)|_{\partial\Omega_N} &= \mathbf{0}, \\ \nabla T \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega_N} &= 0. \end{aligned}$$

Sur  $\Gamma_D$ , le fluide est injecté à une température

$$\theta_D = 600$$

selon un profil parabolique. La quantité de mouvement est imposée sur  $\Gamma_{in}$  pour  $t = 0$  jusque  $T = 6$  par :

$$(\rho \mathbf{u})_{in}(x, y) = \left( 0 ; \frac{6 \dot{m}_{in}}{\ell^2} \left( \frac{\ell^2}{4} - x^2 \right) \right)^T \text{ for } 0 \leq t \leq 6, \quad (3.36)$$

où  $\dot{m}_{in} = 1,0045 \cdot 10^{-2}$  est la quantité de mouvement moyenne. Du fait de ces conditions aux limites particulières, on adapte un peu l'Étape 1 du splitting décrit dans la section 3.3.2. On commence par calculer la pression thermodynamique par :

$$P^{n+1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} (|\Omega| \rho_0 + \dot{m}_{in} \ell t) \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2\theta_h^n - \theta_h^{n-1}} \right)^{-1}.$$

On met ensuite à jour la vitesse sur le bord :

$$\mathbf{u}_D = \left( 0, \frac{(\gamma - 1) \theta_D}{P^{n+1}} \frac{6 \dot{m}_{in}}{\ell^2} \left( \frac{\ell^2}{4} - x^2 \right) \right)^T,$$

et on calcule ensuite  $\left( \frac{dP}{dt} \right)^{n+1}$  par (3.29). Les étapes suivantes du splitting demeurent inchangées. Observons que dans [41] et [3], des conditions aux limites différentes sont considérées. Par conséquent, l'évolution temporelle de la température est relativement proche, mais pas tout à fait comparable aux résultats présentés dans [4]. Si l'on impose les conditions aux limites de [41] dans le schéma C-FV-FE, on obtient des distributions de température et du champ de vitesse analogues à ceux présentés dans [41].

Tout d'abord, nous voulons vérifier que l'on a bien atteint la convergence de grille. On utilise des maillages structurés comme celui représenté sur la Figure 3.5(b). On a tracé sur la Figure 3.6 les isovaleurs de température au temps final  $T = 6$ . Les résultats sont obtenus sur trois maillages correspondant respectivement aux grilles  $60 \times 60$ ,  $120 \times 120$  et  $180 \times 180$ , avec un pas de temps  $\Delta t = h_{max}$ . Même si le jet obtenu avec la grille  $60 \times 60$  semble être légèrement en retard, nous pouvons voir que les solutions obtenues sur les grilles  $120 \times 120$  et  $180 \times 180$  sont très proches l'une de l'autre. Nous représentons également sur la Figure 3.7 l'évolution des deux composantes de vitesse  $u_x$  et  $u_y$ , et celle de la température  $\theta$  le long des lignes verticales  $x = 0$ ,  $x = -L/4$ ; et le long des lignes verticales  $y = H/4$ ,  $y = H/2$  et  $y = 3H/4$  au temps  $T = 6$ , sur les grilles  $120 \times 120$  et  $180 \times 180$ . On observe que les distributions de température et du champ de vitesse sont pratiquement identiques sur les deux grilles, de sorte que l'on peut considérer que la convergence de grille est atteinte. Notons également que bien que l'allure des coupes représentées sur la Figure 3.7 soit comparable aux profils tracés sur les figures 8 et 9 dans [4], leurs amplitudes sont un peu plus importantes. Ces différences peuvent s'expliquer par la



capacité de notre schéma à préserver localement la masse du fluide.

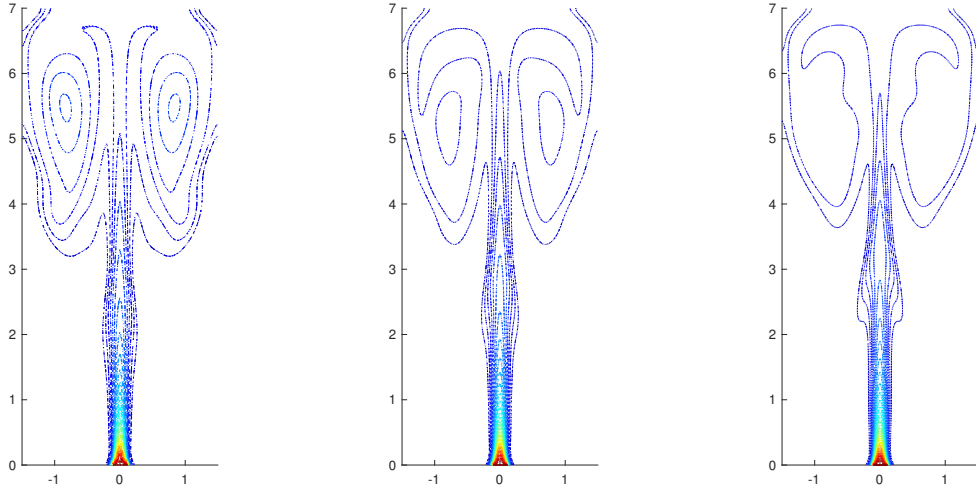


FIGURE 3.6: Schéma C-FV-FE, température à  $t = 6$ . De gauche à droite : Grilles  $60 \times 60$ ,  $120 \times 120$  et  $180 \times 180$ . 40 isovaleurs comprises entre 330 et 600, distribution uniforme.

Afin de confirmer les observations faites dans la section 3.4.1.2, on compare sur la Figure 3.8 les distributions de température obtenues avec le schéma C-FV-FE et avec l'un des schémas de [4] (pressure-based solver, asymptotic approach 1) au temps  $T = 6$  sur grille  $120 \times 120$ , sans et avec procédure de point fixe. Dans ce dernier cas, nous imposons que l'erreur relative entre deux itérées successives soit plus petite que  $10^{-10}$  pour toutes les variables, ce qui correspond à environ 15 itérations. On observe tout d'abord qu'avec le point fixe, la vitesse de propagation du jet est vraiment similaire pour les deux schémas (comparer (b) et (d)). Cependant, sans procédure de point fixe, la vitesse de propagation est pratiquement la même pour le schéma C-FV-FE (comparer (a) et (b)), alors que le phénomène est en retard pour l'autre schéma (comparer (c) et (d)), comme l'on pouvait le remarquer sur la figure 10 de [4].

Puisque la loi d'état est imposée de façon implicite dans le schéma C-FV-FE, nous vérifions dans la Figure 3.9(a) la convergence vers 0 de la loi d'état discrète en norme  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Dans chaque cas (avec ou sans itérations de point fixe), elle décroît vers 0, même si la convergence est plus rapide avec le point fixe.

Enfin, nous nous intéressons à l'évolution de la pression thermodynamique. Comme dans [4], en négligeant le terme de diffusion dans (3.17), on obtient :

$$\frac{dP}{dt} + \frac{\gamma P}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \simeq 0. \quad (3.37)$$

En utilisant la valeur de  $(\rho \mathbf{u})_{in}$  donnée dans (3.36) et la loi d'état (3.15d) afin

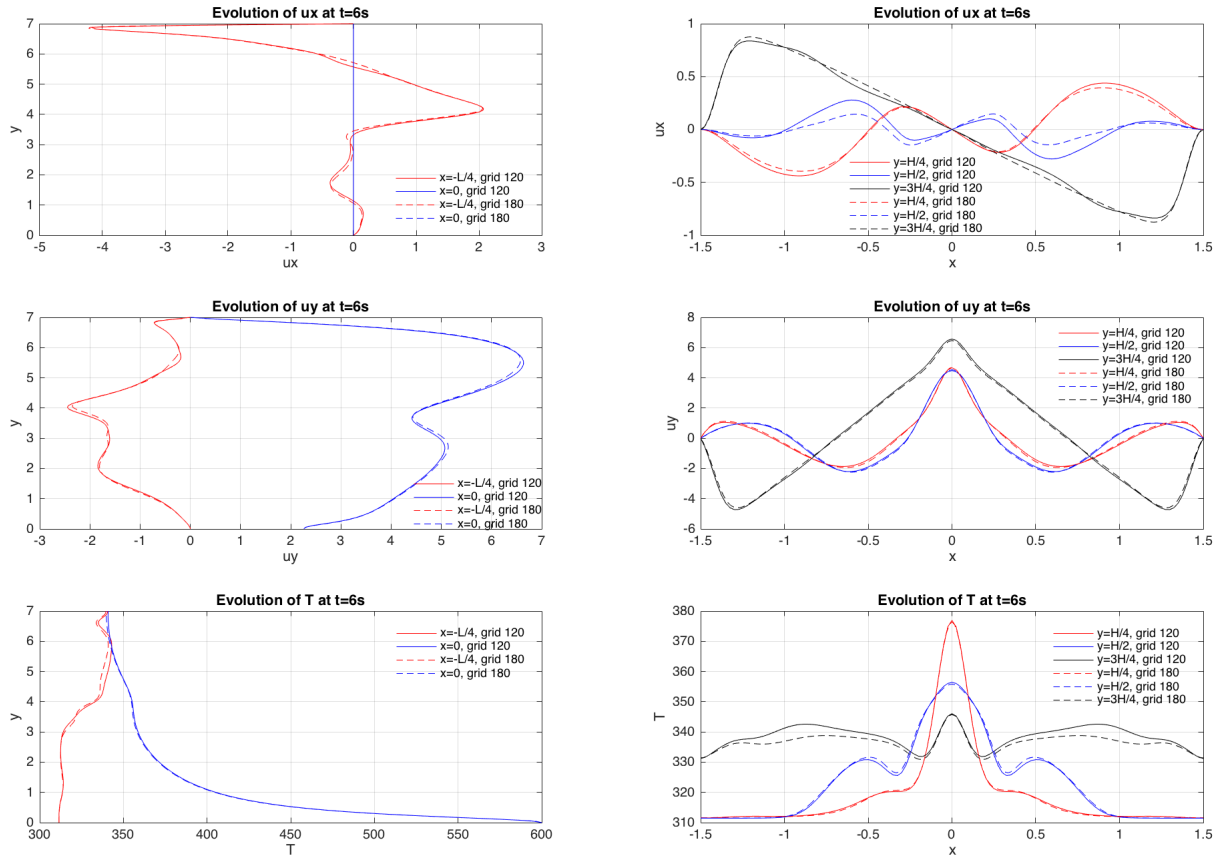


FIGURE 3.7: Évolution de  $u_x$ ,  $u_y$  et  $T$  le long des lignes  $x = 0$ ,  $x = -L/4$ ,  $y = H/4$ ,  $y = H/2$  et  $y = 3H/4$  à  $t = 6$ , pour les grilles  $120 \times 120$  et  $180 \times 180$ .

d'évaluer  $\rho_{in}$ , on peut résoudre explicitement (3.37) afin d'obtenir la pression thermodynamique :

$$P(t) \simeq P_0 + \frac{(\gamma - 1) \theta_D \ell \dot{m}_{in}}{|\Omega|} t. \quad (3.38)$$

La Figure 3.9(b) montre l'évolution de la pression thermodynamique approchée donnée par (3.38), celle calculée par le schéma C-FV-FE et également celle obtenue avec le schéma de [4] sur grille  $120 \times 120$ . Là encore, les résultats sont très proches.

*Remarque 3.6.* Afin de donner une justification de l'approximation utilisée dans la dérivation de (3.37), nous avons calculé les valeurs moyennes en temps de  $\frac{\gamma P}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  et  $\frac{\gamma - 1}{|\Omega| \text{Re Pr}} \int_{\partial\Omega} \nabla \theta \cdot \mathbf{n}$  avec le schéma C-FV-FE, et nous avons obtenues les valeurs respectives de  $2.26 \cdot 10^{-2}$  et  $4.62 \cdot 10^{-4}$ . Ainsi, comme le second terme est deux ordres de grandeur plus petit que le premier, il peut être négligé. Cela peut également expliquer le fait que la pression calculée avec (3.38) est un peu plus petite que celle obtenue avec le schéma C-FV-FE, puisque le second terme est positif.

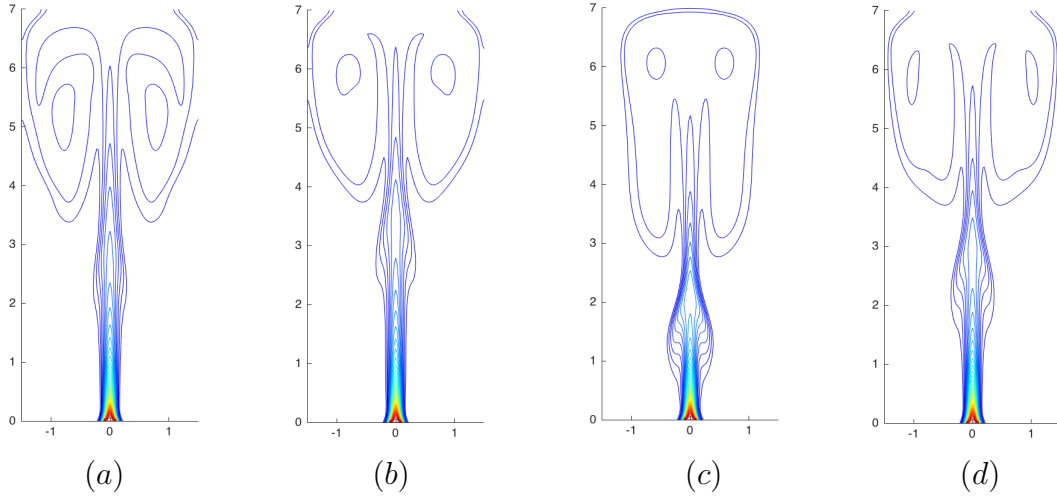


FIGURE 3.8: Température à  $t = 6$ . Comparaison entre le schéma C-FV-FE et le schéma de [4]. (a) : schéma C-FV-FE. (b) : schéma C-FV-FE avec itérations de point fixe. (c) : schéma de [4] sans itérations de point fixe. (d) : schéma de [4].

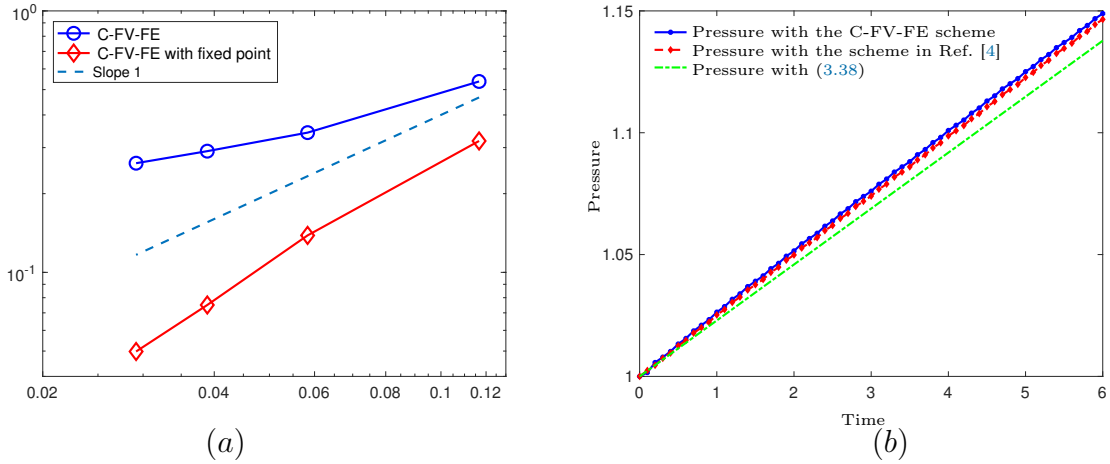


FIGURE 3.9: (a) : Erreur en norme  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  sur la loi d'état discrète en fonction de  $h_{max}$ . (b) : Évolution de la pression thermodynamique.

### 3.4.3 Convection naturelle

#### 3.4.3.1 Le cas test original

Nous voulons ici illustrer la capacité de notre schéma à converger vers un état stationnaire. Cet exemple a été proposé dans [61], et également considéré dans par exemple [3, 41, 56]. Afin de pouvoir nous comparer aux résultats de la littérature, nous considérons dans cette section le système dimensionné donné par (1.24). On

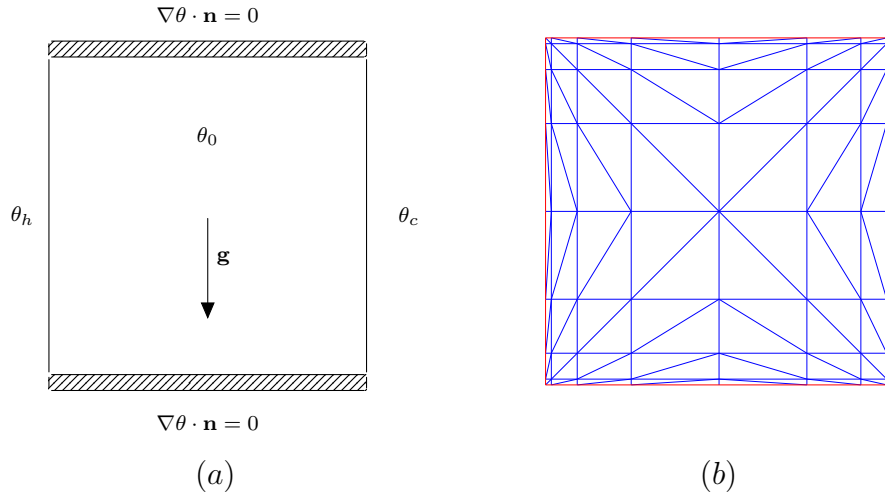


FIGURE 3.10: (a) : La cavité chauffée. (b) : Le maillage.

considère une cavité carrée  $\Omega = [0; 1]^2$  remplie d'un gaz calorifiquement parfait, voir la Figure 3.10(a). Le gaz est initialement au repos, à température et pression constantes :

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{0} \text{ m.s}^{-1}, \quad \theta_0 = 600 \text{ K} \quad \text{et} \quad P_0 = 101325 \text{ Pa.}$$

Sur toutes les parois, la condition de non glissement est imposée pour la vitesse :

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \forall t \in [0; T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma,$$

de sorte que  $\Gamma_{in} = \emptyset$ . Une température de  $\theta_h = \theta_0(1 + \varepsilon)$  (respectivement  $\theta_c = \theta_0(1 - \varepsilon)$ ) est imposée sur le mur de gauche (respectivement droite), avec  $\varepsilon = 0,6$ . Les parois horizontales sont isolées, de sorte que :

$$\nabla\theta(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall t \in [0; T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N = [0, 1] \times \{0, 1\}.$$

Comme dans [56], les nombres de Prandtl et de Rayleigh du fluide sont respectivement donnés par

$$\text{Pr} = 0,71 \quad \text{et} \quad \text{Ra} = \frac{2\varepsilon \text{Pr} g \rho_{\text{ref}}^2 L_{\text{ref}}^3}{\mu^2} = 10^6,$$

où  $L_{\text{ref}} = 1$  et  $\rho_{\text{ref}} = \frac{P_{\text{ref}}}{R\theta_{\text{ref}}} = \frac{101325}{287 \times 600} \simeq 5,88 \cdot 10^{-1}$ . Nous nous intéressons à la solution obtenue quand l'état stationnaire est atteint. En particulier, nous allons regarder le nombre de Nusselt, qui caractérise le transfert de chaleur du mur chaud

vers le mur froid et qui est défini par :

$$\text{Nu}(x, y) = \frac{L_{\text{ref}}}{\theta_h - \theta_c} \nabla \theta(x, y) \cdot \mathbf{n}, \quad \forall (x, y) \in \Gamma. \quad (3.39)$$

Un nombre de Nusselt moyen est calculé sur la paroi chaude (respectivement sur la paroi froide), et est noté  $\text{Nu}_h$  (respectivement  $\text{Nu}_c$ ). On définit également

$$\text{Nu}_{av} = \frac{\text{Nu}_c + \text{Nu}_h}{2}.$$

Une autre quantité d'intérêt est le rapport de la pression thermodynamique  $P$  sur la pression initiale  $P_0$ , que l'on comparera aux valeurs de références données dans [56].

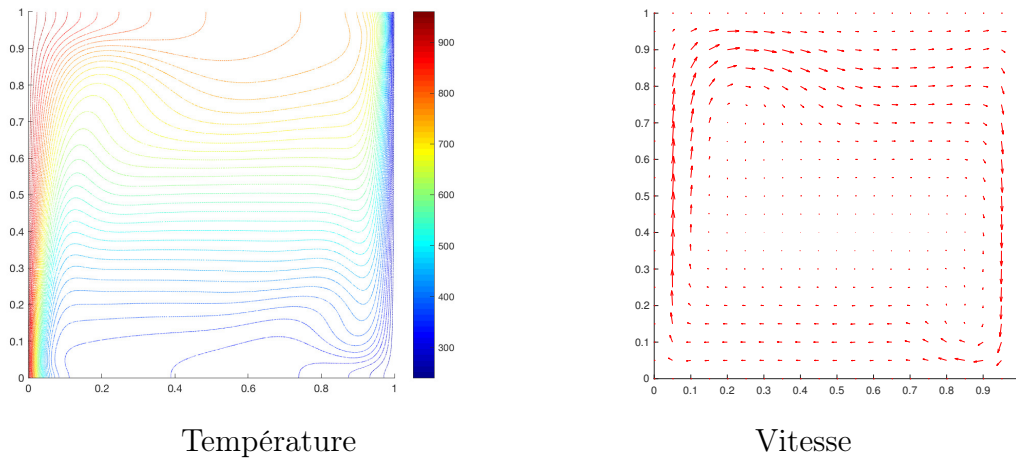
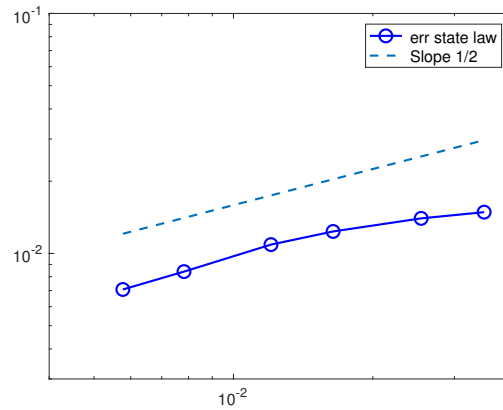
Pour ce cas test, nous utilisons un maillage raffiné près du bord selon une progression géométrique. Le maillage est caractérisé par le nombre de segments sur chaque côté, et le rapport entre le plus grand segment et le plus petit, que l'on prendra égal à 15, voir la Figure 3.10(b) pour le cas  $N = 8$ . Des itérations de point fixe sont réalisées. Plus précisément, sur un petit intervalle de temps  $[0, 10\Delta t]$ , on demande que l'erreur relative entre deux itérés successifs soit plus petite que  $10^{-4}$ , et ensuite l'on impose au maximum 2 itérations de point fixe. Les itérations en temps sont réalisées jusqu'à ce que l'on ait atteint l'état stationnaire numérique, que l'on caractérise par une erreur relative entre deux solutions successives plus petite que  $10^{-5}$ . On note que les itérations de point fixe sont ici nécessaires afin d'atteindre l'état stationnaire et d'éviter des oscillations sur le champ de vitesse.

L'étude de la convergence de grille est donnée dans le Tableau 3.3, et la température et le champ de vitesse sont représentés sur le maillage  $N = 256$  sur la Figure 3.11. On observe que les nombres de Nusselt  $\text{Nu}_c$  et  $\text{Nu}_h$  tendent vers leur valeur de référence quand le maillage est raffiné. De plus, l'erreur sur la valeur de  $\text{Nu}_{av}$  est divisée par 4 quand  $N$  est doublé, de même que celle sur  $P/P_0 - (P/P_0)_{\text{ref}}$ . On vérifie également sur la Figure 3.12 que l'erreur sur la loi d'état discrète en norme  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  décroît vers 0 à l'ordre 0,5 quand le maillage est raffiné.

### 3.4.3.2 Le cas sans la gravité

Finalement, nous nous intéressons à un cas similaire à celui développé dans la section 3.4.3.1, mais sans champ de gravité ( $\text{Ra} = 0$ ). Dans cette configuration très

	$Nu_c$	$Nu_h$	$Nu_{av}$	$P/P_0$	$P/P_0 - (P/P_0)_{ref}$
<b>Valeurs de réf. [56]</b>	<b>8.85978</b>	<b>-8.85978</b>	<b>0</b>	<b>0.85633</b>	<b>0</b>
$N = 64$	8.87358	-8.98999	-0.1164	0.84769	-0.00864
$N = 96$	8.83670	-8.93469	-0.0980	0.84819	-0.00814
$N = 128$	8.83551	-8.86779	-0.0323	0.85375	-0.00258
$N = 192$	8.84402	-8.85730	-0.0133	0.85512	-0.00121
$N = 256$	8.85452	-8.86184	-0.0073	0.85564	-0.00069

TABLEAU 3.3: Cavité chauffée,  $\varepsilon = 0.6$  et  $Ra = 10^6$ .FIGURE 3.11: Température et vitesse sur le maillage  $N = 256$ .FIGURE 3.12: Erreur sur la loi d'état discrète en fonction de  $h_{max}$ .

simple, la solution exacte est connue et donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{ex}(x, y) = 0, \\ \theta_{ex} = \theta_h + (\theta_h - \theta_c) x, \\ P_{ex} = P_0, \\ \rho_{ex} = \frac{P_0}{R \theta_{ex}} \\ \pi_{ex} = 0. \end{cases} \quad (3.40)$$

Nous voulons étudier le comportement du schéma si l'on perturbe un peu cet état stationnaire. Comme l'on pouvait s'y attendre, on observe que si les calculs sont initialisés en utilisant la solution exacte (3.40), le fluide reste au repos et la solution exacte est préservée. On démarre alors les calculs avec la condition initiale  $\rho_{\text{init}}^\eta$  et  $\theta_{\text{init}}^\eta$  au lieu de  $\rho_{\text{ex}}$  et  $\theta_{\text{ex}}$  qui sont respectivement donnés par

$$\rho_{\text{init}}^\eta = \rho_{\text{ex}} + \eta \sin(2k\pi x) \sin(2k\pi y) \quad \text{et} \quad \theta_{\text{init}}^\eta = \frac{P_0}{R \rho_{\text{init}}^\eta},$$

avec  $\eta = 0.01$  et  $k = 3$ . Les itérations en temps sont réalisées jusqu'à ce que le résidu relatif sur toutes les variables soit plus petit que  $10^{-10}$ , ce qui peut être considéré comme l'état stationnaire numérique  $\mathbf{u}_h^{(s)}, \theta_h^{(s)}, P^{(s)}, \rho_h^{(s)}$  and  $\pi_h^{(s)}$ . Si l'on compare la solution obtenue numériquement avec (3.40), on observe que les erreurs en norme  $L^2(\Omega)$  entre la solution numérique à l'état stationnaire et (3.40) pour la vitesse, la température et la pression dynamique sont inférieures à  $10^{-10}$ , quelque soit le maillage utilisé. Par conséquent, l'état (3.40) est atteint pour ces variables. En revanche, pour la densité et la pression thermodynamique, le maillage doit être raffiné afin d'assurer la convergence de  $\rho_h^{(s)}$  et  $P^{(s)}$  vers  $\rho_{\text{ex}}$  et  $P_{\text{ex}}$ . Cela s'explique par le fait que la méthode de volumes finis utilisée pour le calcul de la densité préserve la masse. Par conséquent, l'erreur de quadrature commise à l'instant initial afin d'évaluer la masse est maintenue au cours du temps. On représente sur la Figure 3.13 les erreurs relatives sur la densité, la pression thermodynamique et la loi d'état discrète. On observe que toutes ces quantités tendent vers 0, avec une convergence d'ordre 4 pour  $P^{(s)}$  et d'ordre 3/2 pour  $\rho^{(s)}$ .

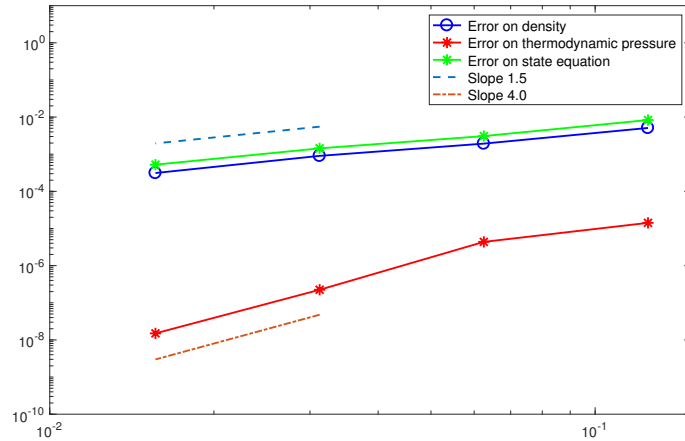


FIGURE 3.13:  $\frac{\|\rho_h^{(s)} - \rho_{\text{ex}}\|_{L^2(\Omega)}}{\|\rho_{\text{ex}}\|_{L^2(\Omega)}}$ ,  $\frac{|P^{(s)} - P_{\text{ex}}|}{|P_{\text{ex}}|}$  et  $\left\| \rho_h^{(s)} - \frac{P^{(s)}}{R T_h^{(s)}} \right\|_{L^2(\Omega)}$  en fonction de  $h_{\text{max}}$ .

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une méthode combinée Volumes Finis - Éléments Finis, basée sur un *splitting* en temps a été développée. Les ingrédients principaux en sont :

- La résolution de l'équation de continuité par une méthode de volumes finis au lieu de la déduire de la loi d'état ;
- Le calcul de la température, la vitesse et la pression dynamique par des éléments finis, en utilisant une méthode de projection ;
- La définition d'une vitesse qui satisfasse la contrainte de divergence dans la partie volumes finis.

Nous avons vérifié que le schéma C-FV-FE assure la préservation des états constants, ainsi que le principe du maximum discret pour la densité pour le cas limite d'un écoulement incompressible. Nous avons également obtenu des ordres de convergence optimaux sur un cas test analytique. Nous avons ensuite testé notre schéma sur un problème d'injection et l'avons comparé à d'autres schémas de la littérature. Nous avons obtenu des résultats très proches, et observé que la procédure de point fixe n'est pas indispensable, bien qu'elle accélère la convergence. Enfin, nous avons simulé un fluide soumis à un champ de gravité dans une cavité chauffée. Là aussi, nous avons obtenu des résultats qualitatifs, ainsi que des ordres de convergence très satisfaisants.



# Chapitre 4

## Un résultat d'existence de solution régulière pour un modèle de type bas Mach

*Dans ce chapitre, nous étudions d'un point de vue théorique un système d'équations modélisant des écoulements en régime bas Mach. Nous procédons de façon itérative et construisons une suite de solutions approchées dont la limite est la solution forte du modèle considéré. Les vitesses de convergence pour des normes fortes sont explicitées.\**

---

\*Ce travail a été publié dans la revue *Mathematical Methods in the Applied Sciences* [11].

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>61</b>
<b>4.2</b>	<b>Présentation du modèle</b>	<b>62</b>
<b>4.3</b>	<b>Résultat d'existence et de régularité</b>	<b>66</b>
4.3.1	Démarche	66
4.3.2	Existence et régularité de la suite de solutions approchées	68
4.3.3	Convergence de la suite de solutions approchées vers la solution forte	78
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>99</b>

---

## 4.1 Introduction

Dans le Chapitre 3, nous avons développé une méthode numérique Volumes Finis - Éléments Finis pour simuler les équations de Navier-Stokes à faible nombre de Mach.

Nous effectuons ici l'étude théorique d'un modèle plus simple, dans lequel les conditions aux limites pour la vitesse sont de type Dirichlet homogène et les conditions aux limites pour la température sont de type Neumann homogène. Pour ces conditions aux limites spécifiques, la pression thermodynamique a la particularité d'être constante. Nous pouvons alors par un changement de variables nous ramener à l'étude d'un système de trois équations, à savoir une équation d'évolution de la température, une équation de conservation de la quantité de mouvement et une contrainte d'incompressibilité; dont les inconnues sont la vitesse, la pression et la température. Nous verrons également qu'un choix particulier de viscosité permet d'éliminer les termes d'ordre 3. Nous nous attacherons dans ce chapitre à étudier d'un point de vue théorique ce modèle.

Dans la littérature, les modèles en vitesse/densité ont été largement étudiés, on pourra consulter par exemple le livre de P.-L. Lions [65]. Dans [7], D. Bresch, E. H. Essoufi et M. Sy ont montré un résultat d'existence globale de solution faible. Des résultats d'existence de solution forte avec contrainte sur la taille des données ou sur le temps d'existence ont également été prouvés pour des modèles de type Kazhikhov-Smagulov, on pourra consulter par exemple les travaux de H. Beirão da Veiga [5], ainsi que les travaux de F. Guillén-González et ses collaborateurs [50, 51].

Cependant, il nous a semblé opportun de conserver dans nos équations la température plutôt que la densité car c'est généralement la variable d'intérêt dans les applications en régime bas Mach. Concernant des modèles en vitesse et température, des travaux ont été menés sur des modèles de type Boussinesq. Par exemple, dans [67], S. A. Lorca et J. L. Boldrini ont montré un résultat d'existence locale de solution forte. Les modèles de type bas Mach ont en revanche été moins étudiés dans la littérature. Nous pouvons cependant citer les travaux de P. Embid [33], qui a montré un résultat d'existence local de solutions fortes pour des systèmes d'équations un peu plus généraux que celui considéré dans ce chapitre; et plus récemment les travaux de R. Danchin et X. Liao [26] qui ont montré un résultat d'existence locale et globale de solutions dans des espaces de Besov quand les variations de la température initiale sont faibles et la vitesse initiale est petite.

Notons que le modèle considéré est proche des systèmes appelés *ghost effect*, qui ont été considérés par exemple par C. D. Levermore et ses collaborateurs [63] ou plus récemment par F. Huang et W. Tan [57]. Dans ce système, un tenseur de contraintes thermiques est ajouté dans le second membre de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Un résultat d'existence local de solutions classiques pour le

problème de Cauchy a été proposé dans [63]. Dans [57], les auteurs montrent un résultat d'existence local de solution régulière, mais également un résultat d'existence global pour le cas bi-dimensionnel.

Dans ce chapitre, nous suivons la démarche de F. Guillén-González et ses collaborateurs [50, 51], qui consiste à définir de façon itérative une suite de solutions approchées, dont la limite est la solution forte du problème continu. L'intérêt de la méthode est qu'elle permet de mettre en évidence la vitesse de convergence de la suite de solutions approchées vers la solution du système initial. Les difficultés rencontrées pour adapter cette méthode proviennent essentiellement de la nature de l'équation d'évolution de la température. D'un côté, la moyenne de la température n'est pas constante, et par conséquent les itérées de température ne seront pas à moyenne fixée. D'autre part, l'équation de température est non-linéaire. Ainsi, l'existence de la suite de températures approchées ou le principe du maximum ne sont pas triviaux et ne sont montrés que sous hypothèse de petitesse des données. Enfin, le passage à la limite dans certains termes est plus délicat et implique une vitesse de convergence plus faible que celle obtenue par [50, 51] pour leur modèle avec densité. Les résultats principaux de ce chapitre sont les Théorèmes 4.2 et 4.3.

## 4.2 Présentation du modèle

Nous allons dans cette partie expliquer comment est dérivé à partir du système (1.24)-(1.25) le modèle qui sera étudié dans ce chapitre. Dans tout ce chapitre,  $\Omega$  désigne un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Gamma$  son bord,  $T$  est un réel positif et  $\mathcal{Q}_T = \Omega \times [0; T]$ . Nous rappelons le système des équations de Navier-Stokes à faible nombre de Mach dimensionné pour un gaz parfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \rho \partial_t \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \pi - \nabla \cdot \left( \mu \left( 2 \mathbb{D} \mathbf{u} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I} \right) \right) = \rho \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\gamma P} \frac{dP}{dt} + \frac{\gamma - 1}{\gamma P} \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta), \\ P = R \rho \theta, \\ \frac{dP}{dt} + \frac{\gamma P}{|\Omega|} \int_{\partial \Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{(\gamma - 1)}{|\Omega|} \int_{\partial \Omega} \kappa \nabla \theta \cdot \mathbf{n}, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où  $\rho$  est la densité,  $\mathbf{u}$  la vitesse,  $\theta$  la température,  $\pi$  la pression dynamique,  $P$  la pression thermodynamique,  $R$  est la constante des gaz parfaits,  $\gamma$  est le rapport des chaleurs spécifiques,  $\mu$  est la viscosité et  $\kappa$  est la conductivité thermique du fluide. Afin de simplifier un peu le modèle, nous spécifions les conditions aux limites

suivantes :

$$\begin{aligned}\nabla\theta \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{u} &= 0, & \text{sur } \Gamma.\end{aligned}$$

On remarque alors grâce à la dernière équation de (4.1) que la pression thermodynamique est constante :

$$P(t) = P_0 \quad \forall t \geq 0.$$

Enfin, on fait l'hypothèse que la viscosité  $\mu$  est une fonction dépendant de la température :  $\mu = \tilde{\mu}(\theta)$ . La conductivité thermique du fluide  $\kappa$  est choisie constante afin de simplifier les calculs. Notons que dans [57], les auteurs considèrent le cas où la conductivité thermique est une fonction dépendant de la température. Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, & (4.2a) \\ \rho \partial_t \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \pi - \nabla \cdot \left( \tilde{\mu}(\theta) \left( 2\mathbb{D}\mathbf{u} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I} \right) \right) = \rho \mathbf{f}, & (4.2b) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma P_0} \nabla \cdot (\kappa \nabla \theta), & (4.2c) \\ P_0 = R \rho \theta. & (4.2d) \end{cases}$$

Afin de se ramener à un système dont la vitesse est à divergence nulle, on pose

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \lambda \nabla \theta, \quad (4.3)$$

avec

$$\lambda = \frac{(\gamma - 1) \kappa}{\gamma P_0}. \quad (4.4)$$

La contrainte (4.2c) implique alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

On pose

$$\mu(\theta) = \frac{2R}{P_0} \tilde{\mu}(\theta) \quad (4.5)$$

et on suppose que  $\mu(\theta)$  prend la forme particulière suivante :

$$\mu(\theta) = -\lambda \ln \theta, \quad \text{pour } 0 < \theta < 1. \quad (4.6)$$

**Proposition 4.1.** *On suppose que  $\mathbf{v}$  est défini par (4.3) et que  $\mu(\theta)$  vérifie (4.5)-*

(4.6). Alors le système (4.2) est équivalent au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta + 2\lambda |\nabla \theta|^2 - \lambda \nabla \cdot (\theta \nabla \theta) = 0 \quad (4.7a) \\ \frac{1}{\theta} \partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{\theta} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla \cdot (\mu(\theta) \mathbb{D} \mathbf{v}) + \frac{\lambda}{\theta} (\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) \nabla \theta + \nabla p = \frac{\mathbf{f}}{\theta} \quad (4.7b) \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (4.7c) \\ \rho = \frac{P_0}{R\theta}, \quad (4.7d) \end{array} \right.$$

avec

$$p = \frac{R}{P_0} \pi + \lambda^2 \Delta \theta - \frac{2\lambda}{3} \mu(\theta) \Delta \theta. \quad (4.8)$$

*Démonstration.* On commence par éliminer  $\rho$  des équations en utilisant la loi d'état :  $\rho = \frac{P_0}{R\theta}$ . L'équation de conservation de la masse (4.2a) s'écrit alors :

$$\frac{P_0}{R} \partial_t \left( \frac{1}{\theta} \right) + \frac{P_0}{R} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\theta} \mathbf{u} \right) = 0,$$

ou de façon équivalente :

$$-\frac{1}{\theta^2} \partial_t \theta + \frac{1}{\theta} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{\theta^2} \nabla \theta \cdot \mathbf{u} = 0,$$

soit encore :

$$\partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta - \theta \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (4.9)$$

En procédant de la même façon, l'équation de la quantité de mouvement (4.2b) se réécrit :

$$\frac{1}{\theta} \partial_t \mathbf{u} + \frac{1}{\theta} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{R}{P_0} \nabla \pi - \frac{2R}{P_0} \nabla \cdot (\tilde{\mu}(\theta) \mathbb{D} \mathbf{u}) + \frac{2R}{3P_0} \nabla \cdot (\tilde{\mu}(\theta) \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbb{I}) = \frac{\mathbf{f}}{\theta}. \quad (4.10)$$

On va maintenant éliminer  $\mathbf{u}$  des équations grâce à (4.3). Il est immédiat que l'équation de conservation de la masse (4.9) donne (4.7a).

Procédons maintenant aux calculs des différents termes de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (4.10) :

i)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\theta} \partial_t \mathbf{u} &= \frac{1}{\theta} \partial_t \mathbf{v} + \frac{\lambda}{\theta} \partial_t (\nabla \theta) \\
&= \frac{1}{\theta} \partial_t \mathbf{v} + \frac{\lambda}{\theta} \nabla (\lambda \theta \Delta \theta - \mathbf{v} \cdot \nabla \theta - \lambda |\nabla \theta|^2) \quad \text{d'après (4.7a)} \\
&= \frac{1}{\theta} \partial_t \mathbf{v} + \frac{\lambda^2}{\theta} \Delta \theta \nabla \theta + \lambda^2 \nabla \Delta \theta - \frac{\lambda}{\theta} \nabla (\mathbf{v} \cdot \nabla \theta) - 2 \frac{\lambda^2}{\theta} (\nabla \theta \cdot \nabla) \nabla \theta \\
&= \frac{1}{\theta} \partial_t \mathbf{v} + \frac{\lambda^2}{\theta} \Delta \theta \nabla \theta + \lambda^2 \nabla \Delta \theta \\
&\quad - \frac{\lambda}{\theta} ((\mathbf{v} \cdot \nabla) \nabla \theta + \nabla^T \mathbf{v} \nabla \theta) - 2 \frac{\lambda^2}{\theta} (\nabla \theta \cdot \nabla) \nabla \theta.
\end{aligned}$$

ii)

$$\frac{1}{\theta} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{\theta} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\lambda}{\theta} (\nabla \theta \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\lambda}{\theta} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \nabla \theta + \frac{\lambda^2}{\theta} (\nabla \theta \cdot \nabla) \nabla \theta.$$

iii)

$$\begin{aligned}
-\frac{2R}{P_0} \nabla \cdot (\tilde{\mu}(\theta) \mathbb{D} \mathbf{u}) &= -\nabla \cdot (\mu(\theta) \mathbb{D} \mathbf{u}) \quad \text{d'après (4.5)} \\
&= -\nabla \cdot (\mu(\theta) \mathbb{D} \mathbf{v}) - \lambda \nabla \cdot (\mu(\theta) \nabla \nabla \theta) \\
&= -\nabla \cdot (\mu(\theta) \mathbb{D} \mathbf{v}) - \lambda \mu'(\theta) (\nabla \theta \cdot \nabla) \nabla \theta - \lambda \mu(\theta) \Delta \nabla \theta.
\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
\frac{2R}{3P_0} \nabla \cdot (\tilde{\mu}(\theta) \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbb{I}) &= \frac{1}{3} \nabla \cdot (\mu(\theta) \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbb{I}) \\
&= \frac{\lambda}{3} \nabla \cdot (\mu(\theta) \Delta \theta \mathbb{I}) \quad \text{car } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\
&= \frac{\lambda}{3} \mu'(\theta) \Delta \theta \nabla \theta + \frac{\lambda}{3} \mu(\theta) \nabla \Delta \theta.
\end{aligned}$$

L'équation de quantité de mouvement (4.10) se réécrit donc :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta} \partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{\theta} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla \cdot (\mu(\theta) \mathbb{D} \mathbf{v}) + \frac{\lambda}{\theta} (\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) \nabla \theta \\
&+ \lambda^2 \left( \frac{1}{\theta} \Delta \theta \nabla \theta - \frac{1}{\theta} (\nabla \theta \cdot \nabla) \nabla \theta \right) - \lambda \mu'(\theta) (\nabla \theta \cdot \nabla) \nabla \theta - \frac{2}{3} \lambda \mu(\theta) \Delta \nabla \theta \\
&+ \frac{\lambda}{3} \mu'(\theta) \Delta \theta \nabla \theta + \nabla \cdot \left( \frac{R}{P_0} \pi + \lambda^2 \Delta \theta \right) = \frac{\mathbf{f}}{\theta}.
\end{aligned}$$

Comme dans [7], on va choisir une expression particulière de la viscosité afin d'éliminer les termes en  $\lambda^2$ . On suppose ainsi que  $\mu(\theta)$  est définie par (4.6), ce qui donne

en particulier :

$$\begin{aligned}
& -\lambda\mu'(\theta)(\nabla\theta \cdot \nabla)\nabla\theta - \frac{2}{3}\lambda\mu(\theta)\Delta\nabla\theta + \frac{\lambda}{3}\mu'(\theta)\Delta\theta\nabla\theta \\
&= \frac{\lambda^2}{\theta}(\nabla\theta \cdot \nabla)\nabla\theta + \frac{2}{3}\lambda^2\ln\theta\Delta\nabla\theta - \frac{\lambda^2}{3\theta}\Delta\theta\nabla\theta \\
&= \frac{\lambda^2}{\theta}(\nabla\theta \cdot \nabla)\nabla\theta + \frac{2}{3}\lambda^2\nabla(\ln\theta\Delta\theta) - \frac{2}{3}\frac{\lambda^2}{\theta}\Delta\theta\nabla\theta - \frac{\lambda^2}{3\theta}\Delta\theta\nabla\theta \\
&= -\lambda^2\left(\frac{1}{\theta}\Delta\theta\nabla\theta - \frac{1}{\theta}(\nabla\theta \cdot \nabla)\nabla\theta\right) - \frac{2}{3}\nabla(\mu(\theta)\Delta\theta).
\end{aligned}$$

On peut alors en déduire (4.7b), ainsi que l'expression de la nouvelle pression  $p$  définie en (4.8). □

## 4.3 Résultat d'existence et de régularité

### 4.3.1 Démarche

Nous nous intéressons dans cette partie à montrer l'existence de solutions régulières au système d'équations (4.11)–(4.12) :

$$\begin{cases} \partial_t\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta + 2\lambda|\nabla\theta|^2 - \lambda\nabla \cdot (\theta\nabla\theta) = 0, \\ \theta(0, \cdot) = \theta_0, \quad \nabla\theta \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\theta}\partial_t\mathbf{v} + \frac{1}{\theta}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \nabla \cdot (\mu(\theta)\mathbb{D}\mathbf{v}) + \frac{\lambda}{\theta}(\nabla\mathbf{v} - \nabla^T\mathbf{v})\nabla\theta + \nabla p = \frac{\mathbf{f}}{\theta}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}(0, \cdot) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Nous allons donc chercher  $\theta$  et  $\mathbf{v}$  dans des espaces de fonctions assez régulières qui vérifient :

$$\begin{cases} \text{p.p. } t \in [0, T], \quad \forall \eta \in H^1(\Omega), \\ (\partial_t\theta, \eta)_{L^2} + (\mathbf{v} \cdot \nabla\theta, \eta)_{L^2} + 2\lambda(|\nabla\theta|^2, \eta)_{L^2} \\ + \lambda(\theta\nabla\theta, \nabla\eta)_{L^2} = 0, \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \quad \forall \eta \in H^1(\Omega), \\ \theta(0, \cdot) = \theta_0. \end{cases} \quad (4.13)$$



$$\begin{cases} \text{p.p. } t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}, \\ \left( \frac{1}{\theta} \partial_t \mathbf{v}, \mathbf{w} \right)_{L^2} + b \left( \frac{\mathbf{v}}{\theta}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \right) + (\mu(\theta) \mathbb{D} \mathbf{v}, \mathbb{D} \mathbf{w})_{L^2} + \lambda c \left( \mathbf{v}, \theta, \frac{\mathbf{w}}{\theta} \right) \\ = \left( \frac{\mathbf{f}}{\theta}, \mathbf{w} \right)_{L^2}, \\ \mathbf{v}(0, \cdot) = \mathbf{v}_0, \end{cases} \quad (4.14)$$

où :

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \quad (4.15)$$

$$c(\mathbf{v}, \theta, \frac{\mathbf{w}}{\theta}) = \int_{\Omega} \frac{1}{\theta} (\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) \nabla \theta \cdot \mathbf{w}. \quad (4.16)$$

Nous suivons la démarche de F. Guillén-González et ses collaborateurs, voir [50] pour des modèles de types Kazhikhov-Smagulov avec viscosité constante, puis [51] avec viscosité linéaire. La démarche consiste à définir de façon itérative une suite  $(\mathbf{v}^n, p^n, \theta^n)$  de solutions approchées de (4.11)–(4.12) de la façon suivante :

— Initialisation :

$$— \theta^0(t, \cdot) = \theta_0, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$— \mathbf{v}^0(t, \cdot) = \mathbf{v}_0, \quad \forall t \in [0, T].$$

— Puis étant donnés  $\mathbf{v}^{n-1}$  et  $\theta^{n-1}$ ,

—  $\theta^n$  est solution de :

$$\begin{cases} \partial_t \theta^n + \mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \theta^n + 2\lambda \nabla \theta^{n-1} \cdot \nabla \theta^n - \lambda \nabla \cdot (\theta^{n-1} \nabla \theta^n) = 0, \\ \theta^n(0, \cdot) = \theta_0, \quad \nabla \theta^n \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

— et ensuite étant donné  $\theta^n$ ,  $\mathbf{v}^n$  et  $p^n$  sont solutions de :

$$\begin{cases} \frac{1}{\theta^n} \partial_t \mathbf{v}^n + \frac{1}{\theta^n} (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^n - \nabla \cdot (\mu(\theta^n) \mathbb{D} \mathbf{v}^n) \\ + \frac{\lambda}{\theta^n} (\nabla \mathbf{v}^n - \nabla^T \mathbf{v}^n) \nabla \theta^n + \nabla p^n = \frac{1}{\theta^n} \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}^n = 0, \quad \mathbf{v}^n(0, \cdot) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}^n|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Nous montrerons des estimations a priori sur la suite de solutions approchées  $(\mathbf{v}^n, p^n, \theta^n)$  qui nous permettront de passer à la limite et de montrer l'existence de solutions régulières pour le problème (4.11)–(4.12).

### 4.3.2 Existence et régularité de la suite de solutions approchées

Cette section a pour objectif de montrer par récurrence l'existence de la suite de solutions approchées  $(\mathbf{v}^n, p^n, \theta^n)$ , ainsi que sa régularité.

Afin de pouvoir définir la suite  $(\mathbf{v}^n, p^n, \theta^n)$ , nous supposons que les données sont régulières et que  $\theta_0$  satisfait un principe du maximum :

$$\theta_0 \in H_N^2(\Omega), \quad \mathbf{v}_0 \in \mathbf{V}, \quad \mathbf{f} \in L^2(\mathcal{Q}_T), \quad (4.19)$$

$$0 < m \leq \theta_0 \leq M < 1. \quad (4.20)$$

De plus, on suppose qu'il existe des constantes  $K_1$  et  $K_2$  positives telles que :

$$\exp\left(\frac{C_1 T}{\lambda^5 m^3} (|\ln M|^{-2} K_1^2 + \lambda^4 K_2^2 + \lambda^6 M^4)\right) \lambda \|\Delta\theta_0\|_{L^2}^2 \leq K_2, \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} & \exp\left(C_2 T \frac{M^4 (\lambda^2 |\ln M|^4 m^4 + K_2^2)}{\lambda^7 m^{11} \min(|\ln M|^7, |\ln M|^{11})} (|\ln M|^{-2} K_1^2 + \lambda^4 K_2^2)\right) \\ & \times \left(\left\|\sqrt{\mu(\theta_0)} \mathbb{D}\mathbf{v}_0\right\|_{L^2}^2 + \frac{M}{m^2} \|\mathbf{f}\|_{L^2(\mathcal{Q}_T)}^2\right) \leq K_1, \end{aligned} \quad (4.22)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont les constantes dépendant uniquement du domaine définies respectivement aux lemmes 4.3 et 4.7.

*Remarque 4.1.* Les conditions de petitesse (4.21) et (4.22) sont satisfaites si les données  $\|\Delta\theta_0\|_{L^2}$ ,  $\left\|\sqrt{\mu(\theta_0)} \mathbb{D}\mathbf{v}_0\right\|_{L^2}$  et  $\|\mathbf{f}\|_{L^2(\mathcal{Q}_T)}$  sont assez petites; ou si le temps d'existence  $T$  est assez petit.

Le reste de la section sera dédié à la démonstration du résultat suivant :

**Théorème 4.1.** *On suppose que les données vérifient les hypothèses (4.19)–(4.22). Alors la suite de solutions approchées  $(\mathbf{v}^n, p^n, \theta^n)$  est définie de façon unique par (4.17) et (4.18) et on a pour tout  $n \geq 1$  :*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^n & \in \mathcal{C}(0, T; \mathbf{V}) \cap L^2(0, T; D(\mathbb{A})), \quad \partial_t \mathbf{v}^n \in L^2(0, T; \mathbf{H}); \\ p^n & \in L^2(0, T; H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)); \\ \theta^n & \in \mathcal{C}(0, T; H_N^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_N^3(\Omega)), \quad \partial_t \theta^n \in L^2(0, T; H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

De plus, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\theta^n$  vérifie le principe du maximum :

$$m \leq \theta^n \leq M, \quad (4.23)$$

et on a les estimations suivantes :

$$\lambda \|\Delta \theta^n\|_{\mathcal{C}(0,T;L^2)}^2 + \lambda^2 m \|\nabla \Delta \theta^n\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 + \frac{m}{8M^2} \|\partial_t \theta^n\|_{L^2(0,T;H^1)}^2 \leq K_2, \quad (4.24)$$

$$\left\| \sqrt{\mu(\theta^n)} \mathbb{D} \mathbf{v}^n \right\|_{\mathcal{C}(0,T;L^2)}^2 + \frac{1}{M} \|\partial_t \mathbf{v}^n\|_{L^2(0,T;\mathbf{H})}^2 + \frac{\lambda m^2}{8M} \|\mathbb{A} \mathbf{v}^n\|_{L^2(0,T;\mathbf{H})}^2 \leq K_1. \quad (4.25)$$

La démonstration se fait par récurrence sur  $n$ . L'initialisation est immédiate grâce aux hypothèses (4.19)–(4.22). Supposons maintenant qu'à l'itérée  $n-1$ , on ait :

$$\theta^{n-1} \in \mathcal{C}(0,T;H_N^2(\Omega)), \quad \mathbf{v}^{n-1} \in \mathcal{C}(0,T;\mathbf{V}), \quad (4.26)$$

$$m \leq \theta^{n-1}(t) \leq M \quad \text{p.p. } t \in [0,T], \quad (4.27)$$

$$\lambda \|\Delta \theta^{n-1}(t)\|_{L^2}^2 \leq K_2, \quad \text{p.p. } t \in [0,T], \quad (4.28)$$

$$\left\| \sqrt{\mu(\theta^{n-1})} \mathbb{D} \mathbf{v}^{n-1}(t) \right\|_{L^2}^2 \leq K_1 \quad \text{p.p. } t \in [0,T]. \quad (4.29)$$

Nous allons montrer ces propriétés à l'itérée  $n$ .

#### 4.3.2.1 Existence pour la température et principe du maximum

Dans cette section, nous nous intéressons à la résolution de l'équation de température (4.30). Deux principales difficultés apparaissent quand on choisit de considérer la température plutôt que la densité comme cela a été fait dans [50, 51]. La première vient de la non-linéarité de (4.11); la seconde provient du fait que la température n'est pas à moyenne constante, par conséquent l'inégalité de Poincaré généralisée ne peut être appliquée.

Nous remarquons en particulier dans le lemme suivant que pour montrer l'existence de la température, à cause de la non-linéarité de (4.11), nous devons utiliser l'hypothèse de récurrence sur la petitesse sur  $\theta^{n-1}$ .

**Lemme 4.1.** *Sous les hypothèses de récurrence (4.26)–(4.28), le problème (4.30) admet une unique solution  $\theta^n \in \mathcal{C}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$  telle que  $\partial_t \theta^n \in L^2(0,T;H^1(\Omega)')$ .*

$$\begin{cases} \langle \partial_t \theta^n, \eta \rangle_{H^1, H^1} + (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \theta^n, \eta)_{L^2} + 2\lambda (\nabla \theta^{n-1} \cdot \nabla \theta^n, \eta)_{L^2} \\ + \lambda (\theta^{n-1} \nabla \theta^n, \nabla \eta)_{L^2} = 0, \quad \text{p.p. } t \in [0,T], \quad \forall \eta \in H^1(\Omega), \\ \theta^n(0, \cdot) = \theta_0. \end{cases} \quad (4.30)$$

*Démonstration.* Nous allons appliquer le Théorème 2.5 avec  $U = H^1(\Omega)$ ,  $L = L^2(\Omega)$ ,  $f = 0$  et  $a$  est définie p.p.  $t \in [0,T]$ ,  $\forall \theta, \eta \in H^1(\Omega)$  par :

$$a(t, \theta, \eta) = \int_{\Omega} \eta \mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \theta + 2\lambda \int_{\Omega} \eta \nabla \theta^{n-1} \cdot \nabla \theta + \lambda \int_{\Omega} \theta^{n-1} \nabla \theta \cdot \nabla \eta.$$

Nous allons vérifier que  $a$  vérifie bien toutes les hypothèses du théorème. En particulier, on a :

$$a(\theta, \theta) = \int_{\Omega} \theta \mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \theta + 2\lambda \int_{\Omega} \theta \nabla \theta^{n-1} \cdot \nabla \theta + \lambda \int_{\Omega} \theta^{n-1} \nabla \theta \cdot \nabla \theta.$$

D'après (4.27),

$$\lambda \int_{\Omega} \theta^{n-1} |\nabla \theta|^2 \geq \lambda m \|\nabla \theta\|_{L^2}^2. \quad (4.31)$$

D'autre part, comme  $\mathbf{v}^{n-1} \in \mathbf{V}$ , on a :

$$\int_{\Omega} \theta \mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \theta = 0.$$

Par ailleurs, d'après les inégalités de Hölder, de Gagliardo-Nirenberg, de Sobolev et de Young, on a :

$$\begin{aligned} \left| 2\lambda \int_{\Omega} \theta \nabla \theta^{n-1} \cdot \nabla \theta \right| &\leq 2\lambda \|\theta\|_{L^3} \|\nabla \theta^{n-1}\|_{L^6} \|\nabla \theta\|_{L^2} \\ &\leq C \lambda \|\Delta \theta^{n-1}\|_{L^2} \|\theta\|_{H^1}^{3/2} \|\theta\|_{L^2}^{1/2} \\ &\leq \frac{\lambda m}{2} \|\theta\|_{H^1}^2 + \frac{C \lambda}{m^3} \|\Delta \theta^{n-1}\|_{L^2}^4 \|\theta\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (4.32)$$

En utilisant les inégalités (4.31) et (4.32), ainsi que l'hypothèse de récurrence (4.28), on obtient :

$$\begin{aligned} a(t, \theta, \theta) &\geq \lambda m \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda m}{2} \|\theta\|_{H^1}^2 - \frac{C \lambda}{m^3} \|\Delta \theta^{n-1}\|_{L^2}^4 \|\theta\|_{L^2}^2 \\ &\geq \frac{\lambda m}{2} \|\theta\|_{H^1}^2 - \left( \lambda m + \frac{C}{\lambda m^3} K_2^2 \right) \|\theta\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Les autres hypothèses du Théorème 2.5 sont immédiatement satisfaites, ce qui montre qu'il existe un unique  $\theta^n \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  tel que  $\partial_t \theta^n \in L^2(0, T; H^1(\Omega)')$  solution de (4.30). D'après le Théorème 2.4, on en déduit que  $\theta^n \in C(0, T; L^2(\Omega))$ .  $\square$

Vérifions maintenant que  $\theta^n$  vérifie le principe du maximum. Là encore, nous verrons que l'hypothèse de récurrence sur la petitesse de  $\theta^{n-1}$  est cruciale.

**Lemme 4.2.** *On suppose que  $\theta_0$  vérifie (4.20) et que les hypothèses (4.26)–(4.28) sont satisfaites. Alors :*

$$m \leq \theta^n(t) \leq M \quad p.p.t \in [0, T]. \quad (4.33)$$

*Démonstration.* L'équation de température vérifiée par  $m - \theta^n$  est :

$$\begin{aligned} & \langle \partial_t(m - \theta^n), \eta \rangle_{H^1, H^1} + \int_{\Omega} \eta \mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla(m - \theta^n) + 2\lambda \int_{\Omega} \eta \nabla \theta^{n-1} \cdot \nabla(m - \theta^n) \\ & + \lambda \int_{\Omega} \theta^{n-1} \nabla(m - \theta^n) \cdot \nabla \eta = 0, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

On définit  $\theta_-^n = \max(0, m - \theta^n)$  et on choisit  $\eta = \theta_-^n$ . On obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta_-^n\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} \theta_-^n \mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \theta_-^n + 2\lambda \int_{\Omega} \theta_-^n \nabla \theta^{n-1} \cdot \nabla \theta_-^n + \lambda \int_{\Omega} \theta^{n-1} |\nabla \theta_-^n|^2 = 0. \quad (4.34)$$

Comme  $\theta^{n-1}$  vérifie (4.27), on a :

$$\lambda \int_{\Omega} \theta^{n-1} |\nabla \theta_-^n|^2 \geq \lambda m \|\nabla \theta_-^n\|_{L^2}^2. \quad (4.35)$$

De plus, comme  $\mathbf{v}^{n-1} \in \mathbf{V}$ , on a :

$$\int_{\Omega} \theta_-^n \mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \theta_-^n = 0. \quad (4.36)$$

Enfin, les mêmes arguments que ceux utilisés pour obtenir (4.32) montrent que :

$$\begin{aligned} \left| 2\lambda \int_{\Omega} \theta_-^n \nabla \theta^{n-1} \cdot \nabla \theta_-^n \right| & \leq \frac{\lambda m}{2} \|\theta_-^n\|_{H^1}^2 + \frac{C \lambda}{m^3} \|\Delta \theta^{n-1}\|_{L^2}^4 \|\theta_-^n\|_{L^2}^2 \\ & \leq \frac{\lambda m}{2} \|\nabla \theta_-^n\|_{L^2}^2 + \left( \frac{C}{\lambda m^3} K_2^2 + \frac{\lambda m}{2} \right) \|\theta_-^n\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Finalement, (4.34) avec (4.35)-(4.37) donnent :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta_-^n\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda m}{2} \|\nabla \theta_-^n\|_{L^2}^2 \leq \left( \frac{C}{\lambda m^3} K_2^2 + \frac{\lambda m}{2} \right) \|\theta_-^n\|_{L^2}^2. \quad (4.38)$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on obtient :

$$\|\theta_-^n(t)\|_{L^2}^2 + \lambda m \int_0^t \|\nabla \theta_-^n\|_{L^2}^2 \leq \|\theta_-^n(0)\|_{L^2}^2 \exp \left( \left( \frac{C}{\lambda m^3} K_2^2 + \lambda m \right) T \right) \quad \text{p.p. } t \in [0, T].$$

Or,  $\theta_-^n(0) = \max(0, m - \theta_0) = 0$  car  $\theta_0$  vérifie (4.20). On en déduit que  $\theta_-^n(t) = 0$  p.p.  $t \in [0, T]$ , et ainsi que  $\theta^n(t) \geq m$  p.p.  $t \in [0, T]$ .

L'autre borne s'obtient de façon similaire.  $\square$

Nous voulons maintenant montrer que  $\theta^n$  admet plus de régularité. Pour cela,

on utilise la méthode de Faedo-Galerkin, qui consiste à :

- Rechercher des solutions approchées dans des espaces de dimension finie,
- Établir des estimations a priori,
- Passer à la limite.

Les premier et troisième points sont classiques et ne comportent pas de difficulté. Nous détaillerons donc uniquement dans la section suivante le second point.

*Remarque 4.2.* La méthode de Faedo-Galerkin sera développée plus en détail dans la section 4.3.2.3 pour établir les estimations sur la vitesse.

### 4.3.2.2 Estimations a priori pour la température

Nous allons maintenant établir des estimations a priori sur la température qui nous permettront d'obtenir plus de régularité.

**Lemme 4.3.** *On suppose que  $\theta^n \in L^\infty(0, T; H_N^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_N^3(\Omega))$ , et que  $\partial_t \theta^n \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ . Alors il existe une constante  $C_1 > 0$  dépendant uniquement du domaine telle que :*

$$\begin{aligned} & \lambda \frac{d}{dt} \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^2 + \lambda^2 m \|\nabla \Delta \theta^n\|_{L^2}^2 + \frac{m}{8M^2} \|\partial_t \theta^n\|_{H^1}^2 \\ & \leq \frac{C_1}{\lambda^3 m^3} \left( \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^4 + \lambda^4 \|\Delta \theta^{n-1}\|_{L^2}^4 + \lambda^4 M^4 \right) \lambda \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

*Démonstration.* Soit  $\delta > 0$ . On multiplie (4.17) par  $\frac{\delta}{m} \partial_t \theta^n$  ; on prend le gradient de (4.17) et on multiplie par  $\frac{\delta}{m} \nabla \partial_t \theta^n - \lambda \nabla \Delta \theta^n$  et on somme. Après intégrations par partie (les termes de bords s'annulent car  $\theta^n \in H_N^2(\Omega)$ ), on obtient :

$$\begin{aligned} & \lambda \int_{\Omega} \Delta \theta^n \partial_t \Delta \theta^n + \lambda^2 \int_{\Omega} \theta^{n-1} |\nabla \Delta \theta^n|^2 + \frac{\delta}{m} \int_{\Omega} |\partial_t \theta^n|^2 + \frac{\delta}{m} \int_{\Omega} |\nabla \partial_t \theta^n|^2 \\ = & \lambda \int_{\Omega} \nabla \Delta \theta^n \cdot \nabla (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \theta^n) + \lambda^2 \int_{\Omega} \nabla \Delta \theta^n \cdot \nabla (\nabla \theta^{n-1} \cdot \nabla \theta^n) \\ & - \lambda^2 \int_{\Omega} (\nabla \Delta \theta^n \cdot \nabla \theta^{n-1}) \Delta \theta^n + \frac{\delta}{m} \int_{\Omega} \partial_t \theta^n \mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \theta^n + \frac{\delta \lambda}{m} \int_{\Omega} \partial_t \theta^n \nabla \theta^{n-1} \cdot \nabla \theta^n \\ & - \frac{\delta \lambda}{m} \int_{\Omega} (\partial_t \theta^n \theta^{n-1}) \Delta \theta^n + \frac{\delta}{m} \int_{\Omega} \nabla \partial_t \theta^n \cdot \nabla (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \theta^n) \\ & + \frac{\delta \lambda}{m} \int_{\Omega} \nabla \partial_t \theta^n \cdot \nabla (\nabla \theta^{n-1} \cdot \nabla \theta^n) - \frac{\delta \lambda}{m} \int_{\Omega} (\nabla \partial_t \theta^n \cdot \nabla \theta^{n-1}) \Delta \theta^n \\ & - \frac{\delta \lambda}{m} \int_{\Omega} \theta^{n-1} \nabla \partial_t \theta^n \cdot \nabla \Delta \theta^n. \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . On utilise le principe du maximum (4.27) sur le deuxième terme, et on va utiliser les inégalités de Cauchy-Schwarz, de Hölder et de Young. On détaille

en particulier la majoration du dernier terme :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\delta \lambda}{m} \int_{\Omega} \theta^{n-1} \nabla \partial_t \theta^n \cdot \nabla \Delta \theta^n \right| &\leq \frac{\delta M \lambda}{m} \|\nabla \partial_t \theta^n\|_{L^2} \|\nabla \Delta \theta^n\|_{L^2} \\ &\leq \frac{\delta}{8m} \|\nabla \partial_t \theta^n\|_{L^2}^2 + \frac{2\delta \lambda^2 M^2}{m} \|\nabla \Delta \theta^n\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

et de façon plus générale, pour  $\nabla h \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ , on utilisera les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{m} \left| \int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla \partial_t \theta^n \right| &\leq \frac{\delta}{8m} \|\nabla \partial_t \theta^n\|_{L^2}^2 + \frac{2\delta}{m} \|\nabla h\|_{L^2}^2 \\ \lambda \left| \int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla \Delta \theta^n \right| &\leq \varepsilon \lambda^2 m \|\nabla \Delta \theta^n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon m} \|\nabla h\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^2 + \lambda^2 m \left(1 - 3\varepsilon - \frac{2\delta M^2}{m^2}\right) \|\nabla \Delta \theta^n\|_{L^2}^2 + \frac{\delta}{2m} \|\partial_t \theta^n\|_{H^1}^2 \\ &\leq \frac{C(\varepsilon^{-1} + \delta)}{m} \left( \|\nabla(\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \theta^n)\|_{L^2}^2 + \lambda^2 \|\nabla(\nabla \theta^{n-1} \cdot \nabla \theta^n)\|_{L^2}^2 + \lambda^2 \|\nabla \theta^{n-1}\|_{L^6}^2 \|\Delta \theta^n\|_{L^3}^2 \right) \\ &\quad + \frac{2\delta}{m} \|\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^4}^2 \|\nabla \theta^n\|_{L^4}^2 + \frac{2\delta \lambda^2}{m} \|\nabla \theta^{n-1}\|_{L^4}^2 \|\nabla \theta^n\|_{L^4}^2 + \frac{2\delta \lambda^2}{m} \|\theta^{n-1}\|_{L^\infty}^2 \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

On utilise maintenant le corollaire de l'inégalité d'Agmon (2.15) pour majorer  $\|\nabla(\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \theta^n)\|_{L^2}^2$  et  $\|\nabla(\nabla \theta^{n-1} \cdot \nabla \theta^n)\|_{L^2}^2$  ; l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (2.12) pour majorer  $\|\Delta \theta^n\|_{L^3}^2$  ; et les inégalités de Sobolev (2.9). De plus, on utilise la majoration grossière suivante :

$$\|\nabla \theta^n\|_{L^4}^2 \leq C \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^2 \leq C \|\Delta \theta^n\|_{L^2} \|\nabla \Delta \theta^n\|_{L^2}.$$

Cela permet d'obtenir, en utilisant les équivalences de normes :

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^2 + \lambda^2 m \left(1 - 3\varepsilon - \frac{2\delta M^2}{m^2}\right) \|\nabla \Delta \theta^n\|_{L^2}^2 + \frac{\delta}{2m} \|\partial_t \theta^n\|_{H^1}^2 \\ &\leq \frac{C(\varepsilon^{-1} + \delta)}{m} \left( \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^2 \|\Delta \theta^n\|_{L^2} \|\nabla \Delta \theta^n\|_{L^2} + \lambda^2 \|\Delta \theta^{n-1}\|_{L^2}^2 \|\Delta \theta^n\|_{L^2} \|\nabla \Delta \theta^n\|_{L^2} \right. \\ &\quad \left. + \lambda^2 M^2 \|\Delta \theta^n\|_{L^2} \|\nabla \Delta \theta^n\|_{L^2} \right). \end{aligned}$$

On applique à nouveau l'inégalité de Young pour avoir :

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta\theta^n\|_{L^2}^2 + \lambda^2 m \left(1 - 5\varepsilon - \frac{2\delta M^2}{m^2}\right) \|\nabla\Delta\theta^n\|_{L^2}^2 + \frac{\delta}{2m} \|\partial_t\theta^n\|_{H^1}^2 \\ & \leq \frac{C}{m^3 \lambda^2} (\varepsilon^{-1} + \delta)^2 \left( \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^4 \|\Delta\theta^n\|_{L^2}^2 + \lambda^4 \|\Delta\theta^{n-1}\|_{L^2}^4 \|\Delta\theta^n\|_{L^2}^2 \right. \\ & \quad \left. + \lambda^4 M^4 \|\Delta\theta^n\|_{L^2}^2 \right). \end{aligned}$$

On choisit  $\varepsilon = \frac{1}{20}$  et  $\delta = \frac{m^2}{8M^2} (< 1)$  et on obtient ainsi l'inégalité (4.39). □

*Remarque 4.3.* On remarque ici qu'obtenir simplement une estimation de  $\|\partial_t \nabla \theta^n\|_{L^2}$  ne nous permettrait pas de contrôler  $\|\partial_t \theta^n\|_{H^1}$  car la température n'est pas à moyenne nulle. Nous ne pouvons donc pas comme dans [50] nous contenter d'estimer  $\|\partial_t \nabla \theta^n\|_{L^2}$  mais l'on doit majorer  $\|\partial_t \theta^n\|_{H^1}$ .

Du Lemme 4.3, on peut déduire facilement le lemme suivant.

**Lemme 4.4.** *On suppose que les hypothèses (4.26)–(4.29) sont satisfaites. Alors  $\theta^n \in L^2(0, T; H_N^3(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_N^2(\Omega))$  et  $\partial_t \theta^n \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  et on a l'estimation (4.24).*

*Démonstration.* On applique le lemme de Gronwall à (4.39). Cela donne :

$$\begin{aligned} & \lambda \|\Delta\theta^n(t)\|_{L^2}^2 + \lambda^2 m \int_0^t \|\nabla\Delta\theta^n\|_{L^2}^2 + \frac{m}{8M^2} \int_0^t \|\partial_t\theta^n\|_{H^1}^2 \\ & \leq \exp \int_0^t \left( \frac{C_1}{\lambda^3 m^3} \left( \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^4 + \lambda^4 \|\Delta\theta^{n-1}\|_{L^2}^4 + \lambda^4 M^4 \right) \right) \lambda \|\Delta\theta^n(0)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Les hypothèses de récurrence (4.28) et (4.29) et le choix (4.6) pour la fonction  $\mu(\theta)$  permettent d'avoir p.p.  $t \in [0, T]$  :

$$\begin{aligned} \|\Delta\theta^{n-1}\|_{L^2}^4 & \leq \frac{K_2^2}{\lambda^2}, \\ \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^4 & \leq \frac{1}{\lambda^2 |\ln M|^2} \left\| \sqrt{\mu(\theta^{n-1})} \mathbb{D}\mathbf{v}^{n-1} \right\|_{L^2}^4 \leq \frac{K_1^2}{\lambda^2 |\ln M|^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'hypothèse de petitesse sur les données initiales (4.21), on obtient pour p.p.  $t \in [0, T]$  :

$$\begin{aligned} & \lambda \|\Delta\theta^n(t)\|_{L^2}^2 + \lambda^2 m \int_0^t \|\nabla\Delta\theta^n\|_{L^2}^2 + \frac{m}{8M^2} \int_0^t \|\partial_t\theta^n\|_{H^1}^2 \\ & \leq \exp \left( \frac{C_1 T}{\lambda^5 m^3} (|\ln M|^{-2} K_1^2 + \lambda^4 K_2^2 + \lambda^6 M^4) \right) \lambda \|\Delta\theta_0\|_{L^2}^2 \leq K_2, \end{aligned}$$



ce qui donne (4.24).  $\square$

Passons maintenant à l'étude de l'équation de vitesse.

### 4.3.2.3 Existence et estimations a priori pour la vitesse

Nous allons montrer un résultat d'existence, d'unicité et de régularité pour la vitesse. Du fait que la température est variable devant le terme de dérivée en temps, nous allons utiliser la méthode de continuité afin de se ramener à un problème à température constante devant le terme de dérivée en temps. Nous résoudrons ce problème par une méthode de Faedo-Galerkin, puis montrerons par la méthode de continuité l'existence d'une solution au problème avec température variable.

On considère la formulation variationnelle associée à (4.18) :

$$\begin{cases} \text{p.p. } t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}, \\ \left( \frac{1}{\theta^n} \partial_t \mathbf{v}^n, \mathbf{w} \right)_{L^2} + b \left( \frac{\mathbf{v}^{n-1}}{\theta^n}, \mathbf{v}^n, \mathbf{w} \right) + (\mu(\theta^n) \mathbb{D} \mathbf{v}^n, \mathbb{D} \mathbf{w})_{L^2} \\ + \lambda c \left( \mathbf{v}^n, \theta^n, \frac{\mathbf{w}}{\theta^n} \right) = \left( \frac{\mathbf{f}}{\theta^n}, \mathbf{w} \right)_{L^2}, \\ \mathbf{v}^n(0, \cdot) = \mathbf{v}_0, \end{cases} \quad (4.40)$$

où  $b$  et  $c$  ont été définis respectivement en (4.15) et (4.16). On montre alors le résultat suivant :

**Lemme 4.5.** *Sous les hypothèses de récurrence (4.26)–(4.29), l'équation (4.40) admet une unique solution  $\mathbf{v}^n$  telle que :*

$$\mathbf{v}^n \in L^2(0, T; D(\mathbb{A})) \cap \mathcal{C}(0, T; \mathbf{V}) \quad ; \quad \partial_t \mathbf{v}^n \in L^2(0, T; \mathbf{H}).$$

De plus, la suite  $(\mathbf{v}^n)$  est bornée et vérifie l'estimation (4.25).

*Démonstration.* Nous allons appliquer la méthode de continuité (voir Chapitre 2, Proposition 2.9) pour résoudre (4.40). Pour cela, nous définissons les espaces  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \{ \mathbf{v} \in L^2(0, T; D(\mathbb{A})); \partial_t \mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathbf{H}) \}, \\ \mathbf{Y} &= L^2(0, T; \mathbf{H}) \times \mathbf{V}, \end{aligned}$$

que l'on munit des normes suivantes :

$$\| \mathbf{v} \|_{\mathbf{X}}^2 = \left\| \sqrt{\mu(\theta^n)} \mathbb{D} \mathbf{v} \right\|_{C(0, T; L^2)}^2 + \frac{1}{M} \| \partial_t \mathbf{v} \|_{L^2(0, T; \mathbf{H})}^2 + \frac{\lambda^2 m^2 |\ln M|^2}{8M} \| \mathbb{A} \mathbf{v} \|_{L^2(0, T; \mathbf{H})}^2,$$

et

$$\| (\mathbf{f}, \mathbf{v}_0) \|_{\mathbf{Y}}^2 = \left\| \sqrt{\mu(\theta_0)} \mathbb{D} \mathbf{v}_0 \right\|_{L^2}^2 + \frac{M}{m^2} \| \mathbf{f} \|_{L^2(\mathcal{Q}_T)}^2.$$

On note que  $\mathbf{X} \hookrightarrow \mathcal{C}(0, T; \mathbf{V})$  d'après le Théorème 2.4.

On pose :

$$\widehat{\theta} = \frac{m + M}{2}, \quad (4.41)$$

et on définit pour  $\alpha \in [0, 1]$  les opérateurs  $L_\alpha : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  tels que :

$$\begin{aligned} L_\alpha \mathbf{v} = & \left( \mathbb{P} \left( \left( \frac{1 - \alpha}{\widehat{\theta}} + \frac{\alpha}{\theta^n} \right) \partial_t \mathbf{v} \right) + \mathbb{P} \left( \frac{1}{\theta^n} (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) - \mathbb{P}(\nabla \cdot (\mu(\theta^n) \nabla \mathbf{v})) \right. \\ & \left. + \mathbb{P} \left( \frac{\lambda}{\theta^n} (\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) \nabla \theta^n \right), \mathbf{v}(0, \cdot) \right), \end{aligned}$$

où  $\mathbb{P}$  est la projection de Hodge définie dans la Proposition 2.1 du Chapitre 2. Nous utiliserons les deux lemmes suivant, dont la démonstration sera faite en annexe.

**Lemme 4.6.** (Voir Annexe B.1)

$L_0$  est surjectif de  $\mathbf{X}$  dans  $\mathbf{Y}$ .

**Lemme 4.7.** (Voir Annexe B.2)

Il existe une constante  $C_2$  dépendant uniquement du domaine telle que pour tout  $\alpha \in [0, 1]$  et tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}^2 \leq & \exp \left( C_2 T \frac{M^4 (\lambda^2 |\ln M|^4 m^4 + K_2^2)}{\lambda^7 m^{11} \min(|\ln M|^7, |\ln M|^{11})} (|\ln M|^{-2} K_1^2 + \lambda^4 K_2^2) \right) \\ & \times \|L_\alpha \mathbf{v}\|_{\mathbf{Y}}^2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Des Lemmes 4.6 et 4.7, on en déduit que le problème (4.40) admet une solution  $\mathbf{v}^n \in \mathbf{X}$ . De plus, grâce à (4.42) et à l'hypothèse de petitesse des données (4.22), on obtient l'estimation (4.25). Montrons maintenant l'unicité de la solution  $\mathbf{v}^n$ . Pour cela, procédons de façon classique et supposons que (4.40) admet deux solutions  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ . On note  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ . Alors en prenant  $\mathbf{w} = \theta^n \mathbf{v}$  comme fonction-test, on a :

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{v}, \mathbf{v})_{L^2} + b(\mathbf{v}^{n-1}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) + (\mu(\theta^n) \theta^n \mathbb{D} \mathbf{v}, \mathbb{D} \mathbf{v})_{L^2} + (\mu(\theta^n) \mathbf{v} \otimes \nabla \theta^n, \mathbb{D} \mathbf{v})_{L^2} \\ + \lambda c(\mathbf{v}, \theta^n, \mathbf{v}) = 0. \end{aligned}$$

Par antisymétrie de la forme trilinéaire  $b(\mathbf{v}^{n-1} \in \mathbf{V})$  et avec le principe du maximum, puis avec les inégalités habituelles de Hölder, Gagliardo-Nirenberg et Young, on

obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|_{L^2}^2 + \lambda |\ln M| m \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 \\
& \leq - \int_{\Omega} \mu(\theta^n) \mathbf{v} \otimes \nabla \theta^n : \mathbb{D}\mathbf{v} - \lambda \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) \nabla \theta^n \cdot \mathbf{v} \\
& \leq \lambda |\ln m| \|\mathbf{v}\|_{L^3} \|\nabla \theta^n\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2} + 2\lambda \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2} \|\nabla \theta^n\|_{L^6} \|\mathbf{v}\|_{L^3} \\
& \leq C \lambda (1 + |\ln m|) \|\Delta \theta^n\|_{L^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^{3/2} \|\mathbf{v}\|_{L^2}^{1/2} \\
& \leq \frac{\lambda |\ln M| m}{2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 + \frac{C \lambda (1 + |\ln m|)^4}{m^3 |\ln M|^3} \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4 \|\mathbf{v}\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Grâce à (4.24), on peut majorer  $\|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4$  par  $\frac{K_2^2}{\lambda^2}$  et ainsi obtenir :

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|_{L^2}^2 + \lambda |\ln M| m \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 \leq \frac{C (1 + |\ln m|)^4}{\lambda m^3 |\ln M|^3} K_2^2 \|\mathbf{v}\|_{L^2}^2.$$

Enfin, le lemme de Gronwall permet d'obtenir pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$\|\mathbf{v}(t)\|_{L^2}^2 \leq \|\mathbf{v}(0)\|_{L^2}^2 \exp\left(\frac{C T (1 + |\ln m|)^4 K_2^2}{\lambda m^3 |\ln M|^3}\right) = 0,$$

ce qui achève la démonstration de l'unicité. □

Pour terminer la démonstration du Théorème 4.1, il nous reste à montrer l'existence et la régularité de la pression  $p^n$ . Pour cela, on définit

$$\mathbf{F}^n := \frac{\partial_t \mathbf{v}^n}{\theta^n} + \frac{1}{\theta^n} \mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{v}^n - \nabla \cdot (\mu(\theta^n) \mathbb{D}\mathbf{v}^n) + \lambda \frac{1}{\theta^n} (\nabla \mathbf{v}^n - \nabla^T \mathbf{v}^n) \nabla \theta^n - \frac{\mathbf{f}}{\theta^n}.$$

On a

$$\langle \mathbf{F}^n, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{V}', \mathbf{V}} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

Le théorème de De Rham permet de montrer qu'il existe  $p^n \in \mathcal{D}'(0, T; L_0^2(\Omega))$  tel que :

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}, p^n)_{L^2} = (\mathbf{F}^n, \mathbf{v})_{L^2}, \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \quad (4.43)$$

Comme  $(\mathbf{F}^n)$  est bornée dans  $L^2(0, T; \mathbf{H})$  par (4.25), on en déduit que  $(p^n)$  est bornée dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$ . L'unicité ( $p^n$  est à moyenne nulle) est évidente.

### 4.3.3 Convergence de la suite de solutions approchées vers la solution forte

Nous avons établi dans la section précédente les estimations a priori sur la suite  $(\mathbf{v}^n, p^n, \theta^n)$ . Nous allons maintenant montrer qu'elle converge vers l'unique solution forte  $(\mathbf{v}, p, \theta)$  du problème (4.11)–(4.12) et exhiber des vitesses de convergence. Dans les deux théorèmes suivants, on énonce les résultats principaux de ce chapitre.

**Théorème 4.2.** *On suppose que les données vérifient les hypothèses (4.19)–(4.22). Alors le système (4.11)–(4.12) admet une unique solution  $(\mathbf{v}, p, \theta)$  :*

$$\begin{aligned} \theta &\in L^2(0, T; H_N^3(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_N^2(\Omega)), & \partial_t \theta &\in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ \mathbf{v} &\in L^2(0, T; D(\mathbb{A})) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{V}), & \partial_t \mathbf{v} &\in L^2(0, T; \mathbf{H}), \\ p &\in L^2(0, T; L_0^2(\Omega)). \end{aligned}$$

$(\mathbf{v}, p, \theta)$  est obtenue comme limite de la suite  $(\mathbf{v}^n, p^n, \theta^n)$  et on a pour  $t \in [0, T]$  :

$$\begin{aligned} &\|(\theta^n - \theta)(t)\|_{H^1}^2 \\ &+ \int_0^t (\|(\theta^n - \theta)(s)\|_{H^2}^2 + \|(\partial_t \theta^n - \partial_t \theta)(s)\|_{L^2}^2) \, ds \leq D \left[ \frac{(Bt)^n}{n!} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\|(\mathbf{v}^n - \mathbf{v})(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|(\mathbf{v}^n - \mathbf{v})(s)\|_{H^1}^2 \, ds \leq D \left[ \frac{(Bt)^n}{n!} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.45)$$

où  $B$  et  $D$  sont des constantes ne dépendant pas de  $n$  (mais dépendant des données et de  $\lambda$ ).

**Théorème 4.3.** *Sous les hypothèses du Théorème 4.2, on a :*

$$\begin{aligned} &\|(\theta^n - \theta)(t)\|_{H^2}^2 \\ &+ \int_0^t (\|(\theta^n - \theta)(s)\|_{H^3}^2 + \|(\partial_t \theta^n - \partial_t \theta)(s)\|_{H^1}^2) \, ds \leq D \left[ \frac{(Bt)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} &\|(\mathbf{v}^n - \mathbf{v})(t)\|_{H^1}^2 \\ &+ \int_0^t (\|(\mathbf{v}^n - \mathbf{v})(s)\|_{H^2}^2 + \|(\partial_t \mathbf{v}^n - \partial_t \mathbf{v})(s)\|_{L^2}^2) \, ds \leq D \left[ \frac{(Bt)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\int_0^t \|(p^n - p)(s)\|_{L^2}^2 \, ds \leq D \left[ \frac{(Bt)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.48)$$

où  $B$  et  $D$  sont des constantes ne dépendant pas de  $n$  (mais dépendant des données et de  $\lambda$ ).

*Remarque 4.4.* Nous remarquons que le Théorème 4.3 nous donne des estimations dans des espaces ayant plus de régularité, sans hypothèse supplémentaire sur les données. On observe toutefois que la vitesse de convergence est plus faible pour les normes de ce dernier théorème que pour celles du Théorème 4.2. C'est une différence notable avec les résultats des théorèmes 1.1 et 1.2 de [50], qui s'explique par le caractère non-linéaire de l'équation de température. Nous verrons en effet dans la démonstration de la Proposition 4.3 que certains termes doivent être gérés de façon un peu plus spécifique.

### 4.3.3.1 La suite $(\mathbf{v}^n, p^n, \theta^n)$ est de Cauchy

On commence par introduire la notation suivante : pour une variable générique  $a$ , on définit  $a^{(n,s)} = a^{n+s} - a^n$ . À partir de (4.17) et (4.18), on écrit alors les équations vérifiées par  $\theta^{(n,s)}$  et par  $\mathbf{v}^{(n,s)}$  :

$$\begin{cases} \partial_t \theta^{(n,s)} + \mathbf{v}^{(n-1,s)} \cdot \nabla \theta^{n+s} + \mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \theta^{(n,s)} - \lambda \theta^{(n-1,s)} \Delta \theta^{n+s} \\ - \lambda \theta^{n-1} \Delta \theta^{(n,s)} + \lambda \nabla \theta^{(n-1,s)} \cdot \nabla \theta^{n+s} + \lambda \nabla \theta^{n-1} \cdot \nabla \theta^{(n,s)} = 0, \\ \theta^{(n,s)}(0, \cdot) = 0, \end{cases} \quad (4.49)$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial_t \mathbf{v}^{(n,s)}}{\theta^{(n,s)}} - \nabla \cdot (\mu(\theta^n) \mathbb{D} \mathbf{v}^{(n,s)}) + \nabla p^{(n,s)} = \\ \frac{\theta^{n+s}}{\theta^{(n,s)}} \partial_t \mathbf{v}^{n+s} + \nabla \cdot ((\mu(\theta^{n+s}) - \mu(\theta^n)) \mathbb{D} \mathbf{v}^{n+s}) \\ + \frac{\theta^{(n,s)}}{\theta^{n+s} \theta^n} (\mathbf{v}^{n+s-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n+s} - \frac{1}{\theta^n} (\mathbf{v}^{(n-1,s)} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n+s} - \frac{1}{\theta^n} (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{(n,s)} \\ + \lambda \frac{\theta^{(n,s)}}{\theta^{n+s} \theta^n} (\nabla \mathbf{v}^{n+s} - \nabla^T \mathbf{v}^{n+s}) \nabla \theta^{n+s} - \lambda \frac{1}{\theta^n} (\nabla \mathbf{v}^{(n,s)} - \nabla^T \mathbf{v}^{(n,s)}) \nabla \theta^{n+s} \\ - \lambda \frac{1}{\theta^n} (\nabla \mathbf{v}^n - \nabla^T \mathbf{v}^n) \nabla \theta^{(n,s)} - \frac{\theta^{(n,s)}}{\theta^{n+s} \theta^n} \mathbf{f}, \\ \mathbf{v}^{(n,s)}(0, \cdot) = 0. \end{cases} \quad (4.50)$$

Le reste de la section sera dédié à la preuve des deux propositions suivantes.

**Proposition 4.2.** *On suppose que  $\mathbf{f} \in L^2(\mathcal{Q}_T)$ ,  $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{V}$  et  $\theta_0 \in H_N^2(\Omega)$ . De plus, on suppose que  $\theta_0$  vérifie le principe du maximum (4.20) et que les données vérifient*

les conditions de petitesse (4.21) et (4.22). Alors :

$$\|\theta^{(n,s)}(t)\|_{H^1}^2 + \int_0^t \left( \|\theta^{(n,s)}(s)\|_{H^2}^2 + \|\partial_t \theta^{(n,s)}(s)\|_{L^2}^2 \right) ds \leq D \left[ \frac{(Bt)^n}{n!} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.51)$$

$$\|\mathbf{v}^{(n,s)}(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\mathbf{v}^{(n,s)}(s)\|_{H^1}^2 ds \leq D \left[ \frac{(Bt)^n}{n!} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.52)$$

où  $B$  et  $D$  sont des constantes ne dépendant pas de  $n$  (mais dépendant des données et de  $\lambda$ ).

**Proposition 4.3.** *Sous les hypothèses de la Proposition 4.2, on a :*

$$\|\theta^{(n,s)}(t)\|_{H^2}^2 + \int_0^t \left( \|\theta^{(n,s)}(s)\|_{H^3}^2 + \|\partial_t \theta^{(n,s)}(s)\|_{H^1}^2 \right) ds \leq D \left[ \frac{(Bt)^n}{\sqrt{n!}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.53)$$

$$\|\mathbf{v}^{(n,s)}(t)\|_{H^1}^2 + \int_0^t \left( \|\mathbf{v}^{(n,s)}(s)\|_{H^2}^2 + \|\partial_t \mathbf{v}^{(n,s)}(s)\|_{L^2}^2 \right) ds \leq D \left[ \frac{(Bt)^n}{\sqrt{n!}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.54)$$

$$\int_0^t \|p^{(n,s)}(s)\|_{L^2}^2 ds \leq D \left[ \frac{(Bt)^n}{\sqrt{n!}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.55)$$

où  $B$  et  $D$  sont des constantes ne dépendant pas de  $n$  (mais dépendant des données et de  $\lambda$ ).

L'originalité pour montrer cette dernière proposition est que l'on doit utiliser le résultat plus faible de la Proposition 4.2. En effet, en raison de la non-linéarité de l'équation de température, on ne peut pas comme pour les modèles en densité (voir [50, 51]) déduire directement ce résultat des estimations a priori du Théorème 4.1. On va ainsi utiliser le Lemme 2.3 (lemme de Gronwall) avec un terme de reste  $e_n$ . La perte de vitesse entre les deux propositions est due à l'estimation de ce terme.

*Démonstration.* (Proposition 4.2)

Nous allons d'abord dériver des estimations à partir de l'équation de température ; puis à partir de l'équation de vitesse. Enfin, nous les combinerons et le lemme de Gronwall nous permettra d'obtenir le résultat souhaité.

Commençons par obtenir les estimations en température. Soit  $\delta > 0$ . On multiplie

(4.49) par  $\eta = \frac{\delta}{m} \partial_t \theta^{(n,s)} + \lambda \theta^{(n,s)} - \lambda \Delta \theta^{(n,s)}$ . On obtient après intégration par partie :

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{m} \|\partial_t \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} \|\theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \lambda^2 \int_{\Omega} \theta^{n-1} |\Delta \theta^{(n,s)}|^2 \\ &= \lambda \int_{\Omega} \theta^{n-1} \Delta \theta^{(n,s)} \left( \frac{\delta}{m} \partial_t \theta^{(n,s)} + \lambda \theta^{(n,s)} \right) - \int_{\Omega} \mathbf{v}^{(n-1,s)} \cdot \nabla \theta^{n+s} \eta - \int_{\Omega} \mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \theta^{(n,s)} \eta \\ & \quad + \lambda \int_{\Omega} \theta^{(n-1,s)} \Delta \theta^{n+s} \eta - \lambda \int_{\Omega} \nabla \theta^{(n-1,s)} \cdot \nabla \theta^{n+s} \eta - \lambda \int_{\Omega} \nabla \theta^{n-1} \cdot \nabla \theta^{(n,s)} \eta. \end{aligned}$$

On va majorer chacun des termes du membre de droite. Soit  $\varepsilon > 0$ . On a en particulier grâce aux inégalités de Hölder et de Young :

$$\begin{aligned} \left| \lambda \int_{\Omega} \theta^{n-1} \Delta \theta^{(n,s)} \frac{\delta}{m} \partial_t \theta^{(n,s)} \right| &\leq \frac{\delta}{12m} \|\partial_t \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{3M^2 \delta \lambda^2}{m} \|\Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2, \\ \left| \lambda^2 \int_{\Omega} \theta^{n-1} \Delta \theta^{(n,s)} \theta^{(n,s)} \right| &\leq \varepsilon \lambda^2 m \|\Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + C \varepsilon^{-1} \frac{M^2 \lambda^2}{m} \|\theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

et de façon plus générale, pour  $h \in L^2(\Omega)$ , on va utiliser les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} h \eta \right| &\leq \|h\|_{L^2} \left( \frac{\delta}{m} \|\partial_t \theta^{(n,s)}\|_{L^2} + \lambda \|\theta^{(n,s)}\|_{L^2} + \lambda \|\Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2} \right) \\ &\leq \frac{\delta}{12m} \|\partial_t \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \varepsilon \lambda^2 m \|\Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \lambda^2 m \|\theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{C(\delta + \varepsilon^{-1})}{m} \|h\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{2m} \|\partial_t \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1}^2 + \lambda^2 m \left( 1 - 6\varepsilon - \frac{3\delta M^2}{m^2} \right) \|\Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \varepsilon^{-1} \frac{M^2 \lambda^2}{m} \|\theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \\ & \quad + \frac{C(\delta + \varepsilon^{-1})}{m} \left( \|\mathbf{v}^{(n-1,s)} \cdot \nabla \theta^{n+s}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \lambda^2 \|\theta^{(n-1,s)} \Delta \theta^{n+s}\|_{L^2}^2 \right. \\ & \quad \left. + \lambda^2 \|\nabla \theta^{(n-1,s)} \cdot \nabla \theta^{n+s}\|_{L^2}^2 + \lambda^2 \|\nabla \theta^{n-1} \cdot \nabla \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \right). \end{aligned}$$

Grâce aux inégalités de Hölder, de Gagliardo-Nirenberg, d'Agmon et de Sobolev, on

obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{2m} \|\partial_t \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1}^2 + \lambda^2 m \left(1 - 6\varepsilon - \frac{3\delta M^2}{m^2}\right) \|\Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \\
\leq & C \varepsilon^{-1} \frac{M^2 \lambda^2}{m} \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1}^2 \\
& + \frac{C(\delta + \varepsilon^{-1})}{m} \left( \|\Delta \theta^{n+s}\|_{L^2} \|\nabla \Delta \theta^{n+s}\|_{L^2} \|\mathbf{v}^{(n-1,s)}\|_{L^2}^2 + \|\mathbb{A} \mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^2 \|\nabla \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \right. \\
& \quad + \lambda^2 \|\Delta \theta^{n+s}\|_{L^2} \|\nabla \Delta \theta^{n+s}\|_{L^2} \|\nabla \theta^{(n-1,s)}\|_{L^2}^2 \\
& \quad \left. + \lambda^2 \|\Delta \theta^{n+s}\|_{L^2} \|\nabla \Delta \theta^{n+s}\|_{L^2} \|\nabla \theta^{(n-1,s)}\|_{L^2}^2 + \lambda^2 \|\nabla \Delta \theta^{n-1}\|_{L^2}^2 \|\nabla \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \right).
\end{aligned}$$

On choisit  $\delta = \frac{m^2}{12M^2} < 1$  et  $\varepsilon = \frac{1}{24}$  et on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{m}{24M^2} \|\partial_t \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1}^2 + \frac{\lambda^2 m}{2} \|\Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \\
\leq & \frac{C}{m} \left\{ \|\Delta \theta^{n+s}\|_{L^2} \|\nabla \Delta \theta^{n+s}\|_{L^2} \left( \|\mathbf{v}^{(n-1,s)}\|_{L^2}^2 + \lambda^2 \|\theta^{(n-1,s)}\|_{H^1}^2 \right) \right. \\
& \quad \left. \left( \|\mathbb{A} \mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^2 + \lambda^2 \|\nabla \Delta \theta^{n-1}\|_{L^2}^2 + \lambda^2 M^2 \right) \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1}^2 \right\}. \tag{4.56}
\end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant à l'équation de vitesse. On multiplie (4.50) par  $\mathbf{v}^{(n,s)}$  :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\mathbf{v}^{(n,s)}}{\sqrt{\theta^n}} \right\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} \mu(\theta^n) |\mathbb{D} \mathbf{v}^{(n,s)}|^2 \\
= & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial_t \theta^n}{\theta^{n^2}} |\mathbf{v}^{(n,s)}|^2 + \int_{\Omega} \frac{\theta^{(n,s)}}{\theta^{n+s} \theta^n} \partial_t \mathbf{v}^{n+s} \cdot \mathbf{v}^{(n,s)} - \int_{\Omega} (\mu(\theta^{n+s}) - \mu(\theta^n)) \mathbb{D} \mathbf{v}^{n+s} \cdot \mathbb{D} \mathbf{v}^{(n,s)} \\
& + \int_{\Omega} \frac{\theta^{(n,s)}}{\theta^{n+s} \theta^n} (\mathbf{v}^{n+s-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n+s} \cdot \mathbf{v}^{(n,s)} - \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\mathbf{v}^{(n-1,s)} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n+s} \cdot \mathbf{v}^{(n,s)} \\
& - \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{(n,s)} \cdot \mathbf{v}^{(n,s)} + \lambda \int_{\Omega} \frac{\theta^{(n,s)}}{\theta^{n+s} \theta^n} (\nabla \mathbf{v}^{n+s} - \nabla^T \mathbf{v}^{n+s}) \nabla \theta^{n+s} \cdot \mathbf{v}^{(n,s)} \\
& - \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\nabla \mathbf{v}^{(n,s)} - \nabla^T \mathbf{v}^{(n,s)}) \nabla \theta^{n+s} \cdot \mathbf{v}^{(n,s)} - \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\nabla \mathbf{v}^n - \nabla^T \mathbf{v}^n) \nabla \theta^{(n,s)} \cdot \mathbf{v}^{(n,s)} \\
& - \int_{\Omega} \frac{\theta^{(n,s)}}{\theta^{n+s} \theta^n} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^{(n,s)}.
\end{aligned}$$

On utilise le théorème des accroissements finis et l'expression particulière de  $\mu$ , voir (4.6), pour majorer le terme suivant :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} (\mu(\theta^{n+s}) - \mu(\theta^n)) \mathbb{D} \mathbf{v}^{n+s} \cdot \mathbb{D} \mathbf{v}^{(n,s)} \right| & \leq \sup |\mu'| \int_{\Omega} |\theta^{(n,s)} \mathbb{D} \mathbf{v}^{n+s} \cdot \mathbb{D} \mathbf{v}^{(n,s)}| \\
& \leq \frac{\lambda}{m} \int_{\Omega} |\theta^{(n,s)} \mathbb{D} \mathbf{v}^{n+s} \cdot \mathbb{D} \mathbf{v}^{(n,s)}|.
\end{aligned}$$



On utilise de façon standard les inégalités de Hölder, de Sobolev, de Gagliardo-Nirenberg et les équivalences de normes afin d'obtenir :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\mathbf{v}^{(n,s)}}{\sqrt{\theta^n}} \right\|_{L^2}^2 + \lambda |\ln M| \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \\
\leq & \frac{C}{m^2} \|\partial_t \theta^n\|_{H^1} \|\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2} + \frac{C}{m^2} \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1} \|\partial_t \mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2} \\
& + \frac{C\lambda}{m} \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2} + \frac{C}{m^2} \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s-1}\|_{L^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \|\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2} \\
& + \frac{C}{m} \|\mathbf{v}^{(n-1,s)}\|_{L^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^{1/2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^{1/2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2} + \frac{C}{m} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^{3/2} \|\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^{1/2} \\
& + \frac{C\lambda}{m^2} \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \|\Delta\theta^{n+s}\|_{L^2} \|\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2} + \frac{C\lambda}{m} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^{3/2} \|\Delta\theta^{n+s}\|_{L^2} \|\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^{1/2} \\
& + \frac{C\lambda}{m} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^n\|_{L^2} \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2} + \frac{C}{m^2} \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1} \|\mathbf{f}\|_{L^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

On va maintenant utiliser l'inégalité de Young afin de rendre petits les termes en  $\|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2$  et ainsi pouvoir les faire passer à gauche de l'inégalité :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\mathbf{v}^{(n,s)}}{\sqrt{\theta^n}} \right\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda |\ln M|}{2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \\
\leq & \frac{C}{\lambda |\ln M| m^4} \|\partial_t \theta^n\|_{H^1}^2 \|\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\lambda |\ln M| m^4} \|\partial_t \mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1}^2 \\
& + \frac{C\lambda}{|\ln M| m^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1}^2 \\
& + \frac{C}{\lambda m^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s-1}\|_{L^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \left( \|\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \lambda^2 \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1}^2 \right) \\
& + \frac{C}{\lambda |\ln M| m^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \|\mathbf{v}^{(n-1,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\lambda^3 |\ln M|^3 m^4} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^4 \|\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \\
& + \frac{C}{m^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \|\Delta\theta^{n+s}\|_{L^2} \left( \|\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \lambda^2 \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1}^2 \right) \\
& + \frac{C\lambda}{|\ln M|^3 m^4} \|\Delta\theta^{n+s}\|_{L^2}^4 \|\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{C\lambda}{|\ln M| m^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1}^2 \\
& + \frac{C}{\lambda |\ln M| m^4} \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2 \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1}^2.
\end{aligned}$$

Enfin, en réordonnant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\mathbf{v}^{(n,s)}}{\sqrt{\theta^n}} \right\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda |\ln M|}{2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \\
& \leq \frac{C}{m} \left\{ \frac{1}{\lambda |\ln M| m^3} \|\partial_t \theta^n\|_{H^1}^2 + \frac{1}{\lambda^3 |\ln M| m^3} \|\partial_t \mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 \right. \\
& \quad + \frac{1}{\lambda |\ln M| m} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\lambda m} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s-1}\|_{L^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \\
& \quad + \frac{1}{\lambda^3 |\ln M|^3 m^3} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^4 + \frac{1}{m} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \|\Delta\theta^{n+s}\|_{L^2} \\
& \quad + \frac{\lambda}{|\ln M|^3 m^3} \|\Delta\theta^{n+s}\|_{L^2}^4 + \frac{1}{\lambda |\ln M| m} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 \\
& \quad \left. + \frac{1}{\lambda^3 |\ln M| m^3} \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2 \right\} \left( \|\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \lambda^2 \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1}^2 \right) \\
& \quad + \frac{C}{\lambda |\ln M| m^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \|\mathbf{v}^{(n-1,s)}\|_{L^2}^2. \tag{4.57}
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant multiplier (4.56) par  $2\lambda$ , (4.57) par  $2M$  et sommer. On remarque que

$$\|\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \leq M \left\| \frac{\mathbf{v}^{(n,s)}}{\sqrt{\theta^n}} \right\|_{L^2}^2.$$

On pose alors :

$$\begin{aligned}
a_n &= \lambda^2 \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1}^2 + M \left\| \frac{\mathbf{v}^{(n,s)}}{\sqrt{\theta^n}} \right\|_{L^2}^2, \\
b_n &= \frac{\lambda m}{12 M^2} \|\partial_t \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \lambda^3 m \|\Delta\theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \lambda M |\ln M| \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2, \\
c_n &= \frac{C}{m} \left\{ \frac{1}{\lambda} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^2 + \lambda \|\nabla \Delta\theta^{n-1}\|_{L^2}^2 + \lambda M^2 + \frac{M}{\lambda |\ln M| m^3} \|\partial_t \theta^n\|_{H^1}^2 \right. \\
& \quad + \frac{M}{\lambda^3 |\ln M| m^3} \|\partial_t \mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 + \frac{M}{\lambda |\ln M| m} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 \\
& \quad + \frac{M}{\lambda m} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s-1}\|_{L^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} + \frac{M}{\lambda^3 |\ln M|^3 m^3} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^4 \\
& \quad + \frac{M}{m} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \|\Delta\theta^{n+s}\|_{L^2} + \frac{\lambda M}{|\ln M|^3 m^3} \|\Delta\theta^{n+s}\|_{L^2}^4 \\
& \quad \left. + \frac{M}{\lambda |\ln M| m} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \frac{M}{\lambda^3 |\ln M| m^3} \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2 \right\}, \\
d_n &= \frac{C}{m} \left\{ \lambda \|\Delta\theta^{n+s}\|_{L^2} \|\nabla \Delta\theta^{n+s}\|_{L^2} + \frac{M}{\lambda |\ln M| m} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \right\},
\end{aligned}$$

et on obtient :

$$a'_n(t) + b_n(t) \leq c_n(t) a_n(t) + d_n(t) a_{n-1}(t).$$

D'après le Théorème 4.1, on a  $c_n \in L^1(0, T)$  et  $d_n \in L^2(0, T)$ . On va donc pouvoir appliquer le Lemme 2.3 (de Gronwall). Comme  $a_n(0) = 0$ , alors il existe des constantes  $B > 0$  et  $\tilde{D} > 0$  telles que p.p.  $t \in [0, T]$  :

$$\begin{aligned} a_n(t) + \int_0^t b_n(t) &\leq \tilde{D} \|a_0\|_{L^\infty(0, T)} \left[ \frac{(Bt)^n}{n!} \right]^{1/2} \\ &\leq D \left[ \frac{(Bt)^n}{n!} \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

où  $D = \tilde{D} \|a_0\|_{L^\infty(0, T)}$ . On vient ainsi de démontrer le résultat de la Proposition 4.2.  $\square$

*Démonstration.* (Proposition 4.3)

Nous allons procéder comme dans la démonstration de la Proposition 4.2, mais en utilisant comme fonctions-tests des dérivées d'ordre plus élevé pour la température  $\theta^{(n,s)}$  et pour la vitesse  $\mathbf{v}^{(n,s)}$ , afin d'obtenir des estimations pour les dérivées d'ordre supérieur.

Soit  $\delta > 0$ . Commençons par prendre le gradient de (4.49) et multiplions par  $\eta = \frac{\delta}{m} \nabla \partial_t \theta^{(n,s)} - \lambda \nabla \Delta \theta^{(n,s)}$  :

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{m} \|\nabla \partial_t \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \lambda^2 \int_{\Omega} \theta^{n-1} |\nabla \Delta \theta^{(n,s)}|^2 \\ &= \frac{\delta \lambda}{m} \int_{\Omega} \theta^{n-1} \nabla \Delta \theta^{(n,s)} \cdot \nabla \partial_t \theta^{(n,s)} - \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{v}^{(n-1,s)} \cdot \nabla \theta^{n+s}) \cdot \eta - \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \theta^{(n,s)}) \cdot \eta \\ &\quad + \lambda \int_{\Omega} \nabla(\theta^{(n-1,s)} \Delta \theta^{n+s}) \cdot \eta + \lambda \int_{\Omega} \Delta \theta^{(n,s)} \nabla \theta^{n-1} \cdot \eta - \lambda \int_{\Omega} \nabla(\nabla \theta^{(n-1,s)} \cdot \nabla \theta^{n+s}) \cdot \eta \\ &\quad - \lambda \int_{\Omega} \nabla(\nabla \theta^{n-1} \cdot \nabla \theta^{(n,s)}) \cdot \eta. \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Nous utiliserons l'estimation suivante :

$$\left| \frac{\delta \lambda}{m} \int_{\Omega} \theta^{n-1} \nabla \Delta \theta^{(n,s)} \cdot \nabla \partial_t \theta^{(n,s)} \right| \leq \frac{\delta}{14m} \|\nabla \partial_t \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{7\delta \lambda^2 M^2}{2m} \|\nabla \Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2,$$

et pour  $\mathbf{h} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \mathbf{h} \cdot \eta \right| &\leq \|\mathbf{h}\|_{L^2} \left( \frac{\delta}{m} \|\nabla \partial_t \theta^{(n,s)}\|_{L^2} + \lambda \|\nabla \Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2} \right) \\ &\leq \frac{\delta}{14m} \|\partial_t \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \varepsilon \lambda^2 m \|\nabla \Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{C(\delta + \varepsilon^{-1})}{m} \|\mathbf{h}\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{2m} \|\nabla \partial_t \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \lambda^2 m \left(1 - 6\varepsilon - \frac{7\delta M^2}{2m^2}\right) \|\nabla \Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \\ & \leq \frac{C(\delta + \varepsilon^{-1})}{m} \left\{ \|\nabla(\mathbf{v}^{(n-1,s)} \cdot \nabla \theta^{n+s})\|_{L^2}^2 + \|\nabla(\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \theta^{(n,s)})\|_{L^2}^2 \right. \\ & \quad + \lambda^2 \|\nabla(\theta^{(n-1,s)} \Delta \theta^{n+s})\|_{L^2}^2 + \lambda^2 \|\Delta \theta^{(n,s)} \nabla \theta^{n-1}\|_{L^2}^2 \\ & \quad \left. + \lambda^2 \|\nabla(\nabla \theta^{(n-1,s)} \cdot \nabla \theta^{n+s})\|_{L^2}^2 + \lambda^2 \|\nabla(\nabla \theta^{n-1} \cdot \nabla \theta^{(n,s)})\|_{L^2}^2 \right\}. \end{aligned}$$

On développe le terme :

$$\|\nabla(\theta^{(n-1,s)} \Delta \theta^{n+s})\|_{L^2} \leq \|\Delta \theta^{n+s} \nabla \theta^{(n-1,s)}\|_{L^2} + \|\theta^{(n-1,s)} \nabla \Delta \theta^{n+s}\|_{L^2}. \quad (4.58)$$

Pour le reste, on va utiliser que pour  $g \in H^1(\Omega)$ ,  $h \in H^2(\Omega)$ ,

$$\|\nabla(g h)\|_{L^2} \leq C \|g\|_{H^1} \|h\|_{H^1}^{1/2} \|h\|_{H^2}^{1/2} \leq C \|g\|_{H^1} \|h\|_{H^2}.$$

Ainsi, avec les inégalités de Hölder, de Gagliardo-Nirenberg et d'Agmon, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{2m} \|\nabla \partial_t \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \lambda^2 m \left(1 - 6\varepsilon - \frac{7\delta M^2}{2m^2}\right) \|\nabla \Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \\ & \leq \frac{C(\delta + \varepsilon^{-1})}{m} \left\{ \|\Delta \theta^{n+s}\|_{L^2} \|\nabla \Delta \theta^{n+s}\|_{L^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n-1,s)}\|_{L^2}^2 + \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^2 \|\Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \right. \\ & \quad + \lambda^2 \|\Delta \theta^{n+s}\|_{L^2} \|\nabla \Delta \theta^{n+s}\|_{L^2} \|\Delta \theta^{(n-1,s)}\|_{L^2}^2 \\ & \quad + \lambda^2 \|\nabla \Delta \theta^{n+s}\|_{L^2}^2 \|\theta^{(n-1,s)}\|_{H^1} \|\theta^{(n-1,s)}\|_{H^2} + \lambda^2 \|\nabla \Delta \theta^{n-1}\|_{L^2}^2 \|\Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \\ & \quad + \lambda^2 \|\Delta \theta^{n+s}\|_{L^2} \|\nabla \Delta \theta^{n+s}\|_{L^2} \|\Delta \theta^{(n-1,s)}\|_{L^2}^2 \\ & \quad \left. + \lambda^2 \|\nabla \Delta \theta^{n-1}\|_{L^2}^2 \|\Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \right\}. \end{aligned}$$

On choisit  $\varepsilon = \frac{1}{24}$ ,  $\delta = \frac{m^2}{14M^2} < 1$  et on obtient en réordonnant les termes :

$$\begin{aligned} & \frac{m}{28M^2} \|\nabla \partial_t \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda^2 m}{2} \|\nabla \Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \\ & \leq \frac{C}{m} \left\{ \left( \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^2 + \lambda^2 \|\nabla \Delta \theta^{n-1}\|_{L^2}^2 \right) \|\Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \right. \\ & \quad + \|\Delta \theta^{n+s}\|_{L^2} \|\nabla \Delta \theta^{n+s}\|_{L^2} \left( \lambda^2 \|\Delta \theta^{(n-1,s)}\|_{L^2}^2 + \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n-1,s)}\|_{L^2}^2 \right) \\ & \quad \left. + \lambda^2 \|\nabla \Delta \theta^{n+s}\|_{L^2}^2 \|\theta^{(n-1,s)}\|_{H^1} \|\theta^{(n-1,s)}\|_{H^2} \right\}. \quad (4.59) \end{aligned}$$

Soit  $\delta > 0$ . Nous allons maintenant multiplier l'équation (4.50) par  $\mathbf{w} = \partial_t \mathbf{v}^{(n,s)} + \delta \mathbb{A}\mathbf{v}^{(n,s)}$ . Les mêmes calculs que ceux faits en Annexe B.1 montrent

que :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mu(\theta^n) \mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}) \cdot \partial_t \mathbf{v}^{(n,s)} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mu(\theta^n) |\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu'(\theta^n) \partial_t \theta^n |\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}|^2, \\ -\delta \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mu(\theta^n) \mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}) \cdot \mathbb{A}\mathbf{v}^{(n,s)} &= \delta \int_{\Omega} \mu(\theta^n) |\mathbb{A}\mathbf{v}^{(n,s)}|^2 - \delta \int_{\Omega} \mu'(\theta^n) q^{(n,s)} \nabla \theta^n \cdot \mathbb{A}\mathbf{v}^{(n,s)} \\ &\quad - \delta \int_{\Omega} \mu'(\theta^n) (\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)} \nabla \theta^n) \cdot \mathbb{A}\mathbf{v}^{(n,s)}, \end{aligned}$$

où pour  $n > 1$ ,  $q^n \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$  est tel que  $-\Delta \mathbf{v}^n = \mathbb{A}\mathbf{v}^n + \nabla q^n$ . On a alors :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \frac{|\partial_t \mathbf{v}^{(n,s)}|^2}{\theta^n} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mu(\theta^n) |\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}|^2 + \delta \int_{\Omega} \mu(\theta^n) |\mathbb{A}\mathbf{v}^{(n,s)}|^2 \\ = &-\delta \int_{\Omega} \frac{\partial_t \mathbf{v}^{(n,s)}}{\theta^n} \cdot \mathbb{A}\mathbf{v}^{(n,s)} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu'(\theta^n) \partial_t \theta^n |\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}|^2 + \delta \int_{\Omega} \mu'(\theta^n) q^{(n,s)} \nabla \theta^n \cdot \mathbb{A}\mathbf{v}^{(n,s)} \\ &+ \delta \int_{\Omega} \mu'(\theta^n) (\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)} \nabla \theta^n) \cdot \mathbb{A}\mathbf{v}^{(n,s)} + \int_{\Omega} \frac{\theta^{(n,s)}}{\theta^{n+s} \theta^n} \partial_t \mathbf{v}^{n+s} \cdot \mathbf{w} \\ &+ \int_{\Omega} \nabla \cdot ((\mu(\theta^{n+s}) - \mu(\theta^n)) \mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s}) \cdot \mathbf{w} + \int_{\Omega} \frac{\theta^{(n,s)}}{\theta^{n+s} \theta^n} (\mathbf{v}^{n+s-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n+s} \cdot \mathbf{w} \\ &- \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\mathbf{v}^{(n-1,s)} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n+s} \cdot \mathbf{w} - \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{(n,s)} \cdot \mathbf{w} \\ &+ \lambda \int_{\Omega} \frac{\theta^{(n,s)}}{\theta^{n+s} \theta^n} (\nabla \mathbf{v}^{n+s} - \nabla^T \mathbf{v}^{n+s}) \nabla \theta^{n+s} \cdot \mathbf{w} - \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\nabla \mathbf{v}^{(n,s)} - \nabla^T \mathbf{v}^{(n,s)}) \nabla \theta^{n+s} \cdot \mathbf{w} \\ &- \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\nabla \mathbf{v}^n - \nabla^T \mathbf{v}^n) \nabla \theta^{(n,s)} \cdot \mathbf{w} - \int_{\Omega} \frac{\theta^{(n,s)}}{\theta^{n+s} \theta^n} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant procéder à des majorations de chacun des termes du second membre. Soit  $\varepsilon > 0$ . On utilisera les estimations suivantes :

$$\left| \delta \int_{\Omega} \frac{\partial_t \mathbf{v}^{(n,s)}}{\theta^n} \cdot \mathbb{A}\mathbf{v}^{(n,s)} \right| \leq \frac{\|\partial_t \mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2}{20M} + \frac{5M\delta^2}{m^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2,$$

et pour  $\mathbf{h} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ ,

$$\left| \int_{\Omega} \mathbf{h} \cdot \mathbf{w} \right| \leq \frac{\|\partial_t \mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2}{20M} + \varepsilon \delta \lambda |\ln M| \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + C_{\varepsilon} \left( M + \frac{\delta}{\lambda |\ln M|} \right) \|\mathbf{h}\|_{L^2}^2.$$

Dans le cas particulier où  $\mathbf{h} = \nabla \cdot ((\mu(\theta^{n+s}) - \mu(\theta^n)) \mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s})$ , le théorème des ac-

croissements finis permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
& C_\varepsilon \left( M + \frac{\delta}{\lambda |\ln M|} \right) \left\| \nabla \cdot ((\mu(\theta^{n+s}) - \mu(\theta^n)) \mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s}) \right\|_{L^2}^2 \\
& \leq C_\varepsilon \left( M + \frac{\delta}{\lambda |\ln M|} \right) \left\| (\mu(\theta^{n+s}) - \mu(\theta^n)) \mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s} \right\|_{H^1}^2 \\
& \leq C_\varepsilon \left( M + \frac{\delta}{\lambda |\ln M|} \right) \frac{\lambda^2}{m^2} \left\| \theta^{(n,s)} \mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s} \right\|_{H^1}^2 \\
& \leq C_\varepsilon \left( M + \frac{\delta}{\lambda |\ln M|} \right) \frac{\lambda^2}{m^2} \left\| \mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s} \right\|_{L^2}^2 \left\| \theta^{(n,s)} \right\|_{H^2}^2.
\end{aligned}$$

Ensuite, pour  $\mathbf{h} = -\frac{1}{\theta^n}(\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla)\mathbf{v}^{(n,s)}$  et  $\mathbf{h} = -\frac{\lambda}{\theta^n}(\nabla\mathbf{v}^{(n,s)} - \nabla^T\mathbf{v}^{(n,s)})\nabla\theta^{n+s}$ , l'inégalité de Hölder (avec  $\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$ ) et l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg donnent :

$$\begin{aligned}
& C_\varepsilon \left( M + \frac{\delta}{\lambda |\ln M|} \right) \left\| \frac{1}{\theta^n}(\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla)\mathbf{v}^{(n,s)} \right\|_{L^2}^2 \\
& \leq \varepsilon \delta \lambda |\ln M| \left\| \mathbb{A}\mathbf{v}^{(n,s)} \right\|_{L^2}^2 + \frac{C_\varepsilon \left( M + \frac{\delta}{\lambda |\ln M|} \right)^2}{m^4 \delta \lambda |\ln M|} \left\| \mathbb{D}\mathbf{v}^{n-1} \right\|_{L^2}^4 \left\| \mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)} \right\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& C_\varepsilon \left( M + \frac{\delta}{\lambda |\ln M|} \right) \left\| \frac{\lambda}{\theta^n}(\nabla\mathbf{v}^{(n,s)} - \nabla^T\mathbf{v}^{(n,s)})\nabla\theta^{n+s} \right\|_{L^2}^2 \\
& \leq \varepsilon \delta \lambda |\ln M| \left\| \mathbb{A}\mathbf{v}^{(n,s)} \right\|_{L^2}^2 + \frac{C_\varepsilon \left( M + \frac{\delta}{\lambda |\ln M|} \right)^2 \lambda^3}{m^4 \delta |\ln M|} \left\| \Delta\theta^{n+s} \right\|_{L^2}^4 \left\| \mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)} \right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

De plus, l'estimation du terme suivant se fera de façon analogue à l'estimation de  $T_7$  en annexe B.1 :

$$\begin{aligned}
& \left| \delta \int_{\Omega} \mu'(\theta^n) q^{(n,s)} \nabla\theta^n \cdot \mathbb{A}\mathbf{v}^{(n,s)} \right| \\
& \leq 2\varepsilon \delta \lambda |\ln M| \left\| \mathbb{A}\mathbf{v}^{(n,s)} \right\|_{L^2}^2 + C_\varepsilon \frac{\delta \lambda \left\| \Delta\theta^n \right\|_{L^2}^4}{m^4 |\ln M|^3} \left( 1 + \frac{\left\| \Delta\theta^n \right\|_{L^2}^4}{|\ln M|^4 m^4} \right) \left\| \mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)} \right\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Grâce aux inégalités classiques, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{\|\partial_t \mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2}{2M} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mu(\theta^n) |\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}|^2 + \left(1 - 15\varepsilon - \frac{5\delta M}{\lambda |\ln M| m^2}\right) \delta \lambda |\ln M| \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \\
& \leq C_\varepsilon \left\{ \frac{\lambda}{\delta m^2 |\ln M|} \|\partial_t \theta^n\|_{H^1}^2 \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{\delta \lambda \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4}{m^4 |\ln M|^3} \left(1 + \frac{\|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4}{|\ln M|^4 m^4}\right) \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{\delta \lambda}{m^4 |\ln M|^3} \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4 \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \right\} \\
& + C_\varepsilon \left( M + \frac{\delta}{\lambda |\ln M|} \right) \left\{ \frac{1}{m^4} \|\partial_t \mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 \|\theta^{(n,s)}\|_{H^2}^2 + \frac{\lambda^2}{m^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 \|\theta^{(n,s)}\|_{H^2}^2 \right. \\
& \quad + \frac{1}{m^4} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s-1}\|_{L^2}^2 \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1}^2 \\
& \quad + \frac{1}{m^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n-1,s)}\|_{L^2}^2 \\
& \quad + \frac{M + \frac{\delta}{\lambda |\ln M|}}{m^4 \delta \lambda |\ln M|} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^4 \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \\
& \quad + \frac{\lambda^2}{m^4} \|\Delta \theta^{n+s}\|_{L^2}^2 \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1}^2 \\
& \quad + \frac{\left(M + \frac{\delta}{\lambda |\ln M|}\right) \lambda^3}{m^4 \delta |\ln M|} \|\Delta \theta^{n+s}\|_{L^2}^4 \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \\
& \quad \left. + \frac{\lambda^2}{m^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 \|\Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{m^4} \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2 \|\theta^{(n,s)}\|_{H^2}^2 \cdot \right\}
\end{aligned}$$

On choisit  $\varepsilon = \frac{1}{60}$  et  $\delta = \frac{\lambda |\ln M| m^2}{20M}$ . On remarque alors que comme  $\frac{m^2}{M} \leq M$ , alors

$M + \frac{\delta}{\lambda |\ln M|} \leq C M$ , de sorte que :

$$\begin{aligned}
& \frac{\|\partial_t \mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2}{2M} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mu(\theta^n) |\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}|^2 + \frac{\lambda^2 |\ln M|^2 m^2}{40M} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \\
\leq & C \left\{ \frac{M}{m^4 |\ln M|^2} \|\partial_t \theta^n\|_{H^1}^2 \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda^2 \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4}{m^2 M |\ln M|^2} \left( 1 + \frac{\|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4}{|\ln M|^4 m^4} \right) \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \right. \\
& + \frac{\lambda^2}{m^2 M |\ln M|^2} \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4 \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{M}{m^4} \|\partial_t \mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 \|\theta^{(n,s)}\|_{H^2}^2 \\
& + \frac{\lambda^2 M}{m^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 \|\theta^{(n,s)}\|_{H^2}^2 + \frac{M}{m^4} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s-1}\|_{L^2}^2 \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 \|\theta^{(n,s)}\|_{H^2}^2 \\
& + \frac{M}{m^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n-1,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{M^3}{m^6 \lambda^2 |\ln M|^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^4 \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \\
& + \frac{\lambda^2 M}{m^4} \|\Delta \theta^{n+s}\|_{L^2}^2 \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1}^2 + \frac{M^3 \lambda^2}{m^6 |\ln M|^2} \|\Delta \theta^{n+s}\|_{L^2}^4 \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \\
& \left. + \frac{\lambda^2 M}{m^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 \|\Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{M}{m^4} \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2 \|\theta^{(n,s)}\|_{H^2}^2 \right\}
\end{aligned}$$

En réordonnant les termes, et en utilisant l'équivalence des normes  $\|\theta\|_{H^2} \sim \|\theta\|_{H^1} + \|\Delta \theta\|_{L^2}$  sur  $H_N^2(\Omega)$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{\|\partial_t \mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2}{2M} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mu(\theta^n) |\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}|^2 + \frac{\lambda^2 |\ln M|^2 m^2}{40M} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \\
\leq & C \left\{ \frac{M}{m^4 |\ln M|^2} \|\partial_t \theta^n\|_{H^1}^2 + \frac{\lambda^2 \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4}{m^2 M |\ln M|^2} \left( 1 + \frac{\|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4}{|\ln M|^4 m^4} \right) \right. \\
& + \frac{M}{\lambda^2 m^4} \|\partial_t \mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 + \frac{M}{m^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 + \frac{M^3}{m^6 \lambda^2 |\ln M|^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^4 \\
& \left. + \frac{M^3 \lambda^2}{m^6 |\ln M|^2} \|\Delta \theta^{n+s}\|_{L^2}^4 + \frac{M}{m^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \frac{M}{\lambda^2 m^4} \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2 \right\} \\
& \quad \times \left( \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \lambda^2 \|\Delta \theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \right) \\
& + C \frac{M}{m^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n-1,s)}\|_{L^2}^2 \\
& + C \left\{ \frac{M}{m^4} \|\partial_t \mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda^2 M}{m^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 + \frac{M}{m^4} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s-1}\|_{L^2}^2 \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 \right. \\
& \left. + \frac{\lambda^2 M}{m^4} \|\Delta \theta^{n+s}\|_{L^2}^2 \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 + \frac{M}{m^4} \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2 \right\} \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1}^2. \tag{4.60}
\end{aligned}$$



On va multiplier (4.59) par  $2\lambda$  et (4.60) par  $\frac{2}{\lambda|\ln M|}$  et sommer. On remarque que

$$\|\mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\lambda|\ln M|} \left\| \sqrt{\mu(\theta^n)} \mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)} \right\|_{L^2}^2.$$

En posant :

$$\begin{aligned} a_n &= \lambda^2 \|\Delta\theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\lambda|\ln M|} \left\| \sqrt{\mu(\theta^n)} \mathbb{D}\mathbf{v}^{(n,s)} \right\|_{L^2}^2 \\ b_n &= \frac{\lambda m}{14M^2} \|\nabla\partial_t\theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \lambda^3 m \|\nabla\Delta\theta^{(n,s)}\|_{L^2}^2 + \frac{\|\partial_t\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2}{\lambda M|\ln M|} + \frac{\lambda|\ln M|m^2}{20M} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{(n,s)}\|_{L^2}^2 \\ c_n &= C \left\{ \frac{1}{\lambda m} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{m} \|\nabla\Delta\theta^{n-1}\|_{L^2}^2 + \frac{M}{\lambda m^4 |\ln M|^3} \|\partial_t\theta^n\|_{H^1}^2 \right. \\ &\quad + \frac{\lambda \|\Delta\theta^n\|_{L^2}^4}{m^2 M |\ln M|^3} \left( 1 + \frac{\|\Delta\theta^n\|_{L^2}^4}{|\ln M|^4 m^4} \right) + \frac{M}{\lambda^3 |\ln M| m^4} \|\partial_t\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \frac{M}{\lambda |\ln M| m^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 + \frac{M^3}{m^6 \lambda^3 |\ln M|^3} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^4 \\ &\quad \left. + \frac{M^3 \lambda}{m^6 |\ln M|^3} \|\Delta\theta^{n+s}\|_{L^2}^4 + \frac{M}{\lambda |\ln M| m^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \frac{M}{\lambda^3 |\ln M| m^4} \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2 \right\} \\ d_n &= C \left\{ \frac{\lambda}{m} \|\Delta\theta^{n+s}\|_{L^2} \|\nabla\Delta\theta^{n+s}\|_{L^2} + \frac{M}{\lambda |\ln M| m^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2} \right\} \\ e_n &= C \frac{\lambda^3}{m} \|\nabla\Delta\theta^{n+s}\|_{L^2}^2 \|\theta^{(n-1,s)}\|_{H^2} \|\theta^{(n-1,s)}\|_{H^1} \\ &\quad + C \left\{ \frac{M}{m^4 \lambda |\ln M|} \|\partial_t\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda M}{m^2 |\ln M|} \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 \right. \\ &\quad + \frac{M}{m^4 \lambda |\ln M|} \|\mathbb{D}\mathbf{v}^{n+s-1}\|_{L^2}^2 \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 \\ &\quad \left. + \frac{\lambda M}{m^4 |\ln M|} \|\Delta\theta^{n+s}\|_{L^2}^2 \|\mathbb{A}\mathbf{v}^{n+s}\|_{L^2}^2 + \frac{M}{\lambda |\ln M| m^4} \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2 \right\} \|\theta^{(n,s)}\|_{H^1}^2, g \end{aligned}$$

on a alors :

$$a'_n(t) + b_n(t) \leq c_n(t) a_n(t) + d_n(t) a_{n-1}(t) + e_n(t).$$

D'après le Théorème 4.1, la suite  $(c_n)$  est bornée dans  $L^1(0, T)$ , la suite  $(d_n)$  est bornée dans  $L^2(0, T)$  et la suite  $(e_n)$  est bornée dans  $L^1(0, T)$ . On remarque que  $a_n(0) = 0$  et qu'en raison de la Proposition 4.2, on a :

$$\|e_n\|_{L^1(0,T)}^2 \leq D \left[ \frac{(Bt)^n}{n!} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.61)$$

où  $B > 0$  et  $D > 0$  sont des constantes ne dépendant pas de  $n$ . On en déduit en appliquant le lemme de Gronwall que pour  $t \in (0, T)$  :

$$\begin{aligned} a_n(t) + \int_0^t b_n(s) \, ds &\leq D \left( \left[ \frac{(Bt)^n}{\sqrt{n!}} \right]^{\frac{1}{2}} + \|a_0\|_{L^\infty(0,t)} \left( \frac{(Bt)^n}{n!} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq D \left[ \frac{(Bt)^n}{\sqrt{n!}} \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. Notons qu'en raison de la non-linéarité de l'équation de température et plus particulièrement à l'estimation du terme de droite dans (4.58), on a seulement un exposant  $\frac{1}{2}$  dans (4.61). On obtient alors une vitesse de convergence plus faible dans (4.53)–(4.55) que dans (4.51)–(4.52).  $\square$

#### 4.3.3.2 Passage à la limite

À l'aide de la Proposition 4.2 et de la Proposition 4.3, on montre qu'il existe  $\mathbf{v} \in L^2(0, T; D(\mathbb{A})) \cap \mathcal{C}(0, T; \mathbf{V})$ ,  $p \in L^2(0, T; L_0^2(\Omega))$  et  $\theta \in L^2(0, T; H_N^3(\Omega)) \cap \mathcal{C}(0, T; H_N^2(\Omega))$  tels que  $\partial_t \theta \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  et  $\partial_t \mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathbf{H})$  et qui vérifient les estimations (4.44)–(4.45) et (4.46)–(4.47)–(4.48).

Nous allons dans cette partie montrer que  $(\mathbf{v}, p, \theta)$  est solution forte de (4.11)–(4.12).

Pour cela, considérons  $\phi = \eta \mathbf{w}$ , avec  $\eta \in \mathcal{C}^1(0, T)$  vérifiant  $\eta(T) = 0$  et  $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ . On multiplie alors (4.40) et (4.14) par  $\eta$  et on fait la différence. On obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_0^T \left( \frac{1}{\theta^n} \partial_t \mathbf{v}^n - \frac{1}{\theta} \partial_t \mathbf{v}, \phi \right)_{L^2} \, d\tau \\ &+ \int_0^T \left( \left( \frac{\mathbf{v}^{n-1}}{\theta^n} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}^n - \left( \frac{\mathbf{v}}{\theta} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}, \phi \right)_{L^2} \, d\tau \\ &+ \int_0^T (\mu(\theta^n) \mathbb{D} \mathbf{v}^n - \mu(\theta) \mathbb{D} \mathbf{v}, \mathbb{D} \phi)_{L^2} \, d\tau \\ &+ \lambda \int_0^T \left( \frac{1}{\theta^n} (\nabla \mathbf{v}^n - \nabla^T \mathbf{v}^n) \cdot \nabla \theta^n \, d\tau - \frac{1}{\theta} (\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) \cdot \nabla \theta, \phi \right)_{L^2} \, d\tau \\ &= \int_0^T \left( \left( \frac{1}{\theta^n} - \frac{1}{\theta} \right) \mathbf{f}, \phi \right)_{L^2} \, d\tau. \end{aligned} \right. \quad (4.62)$$

Nous allons passer à la limite dans chacun des termes en utilisant les estimations a priori du Théorème 4.1 et les résultats de convergence de la Proposition 4.3. On

obtient pour le premier terme :

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^T \left( \frac{1}{\theta^n} \partial_t \mathbf{v}^n - \frac{1}{\theta} \partial_t \mathbf{v}, \phi \right)_{L^2} d\tau \right| \\
& \leq \left| \int_0^T \left( \frac{1}{\theta^n} (\partial_t \mathbf{v}^n - \partial_t \mathbf{v}), \phi \right)_{L^2} d\tau \right| + \left| \int_0^T \left( \frac{\theta - \theta^n}{\theta^n \theta} \partial_t \mathbf{v}, \phi \right)_{L^2} d\tau \right| \\
& \leq \frac{1}{m} \int_0^T \|\partial_t \mathbf{v}^n - \partial_t \mathbf{v}\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} d\tau + \frac{1}{m^2} \int_0^T \|\partial_t \mathbf{v}\|_{L^2} \|\theta - \theta^n\|_{L^\infty} \|\phi\|_{L^2} d\tau \\
& \leq \frac{1}{m} \|\partial_t \mathbf{v}^n - \partial_t \mathbf{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{H})} \|\phi\|_{L^2(0,T;\mathbf{H})} \\
& \quad + \frac{1}{m^2} \|\partial_t \mathbf{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{H})} \|\theta - \theta^n\|_{L^\infty(0,T;H_N^2(\Omega))} \|\phi\|_{L^2(0,T;\mathbf{H})}.
\end{aligned}$$

Ainsi, avec la Proposition 4.3, on conclut que :

$$\left| \int_0^T \left( \frac{1}{\theta^n} \partial_t \mathbf{v}^n - \frac{1}{\theta} \partial_t \mathbf{v}, \phi \right)_{L^2} d\tau \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On montre de façon analogue que tous les termes de (4.62) tendent vers 0. On raisonne pour la température comme on l'a fait pour la vitesse. Enfin pour la pression, on passe à la limite dans (4.43) et on obtient :

$$(\nabla \cdot \mathbf{w}, p)_{L^2} = (\mathbf{F}, \mathbf{w})_{L^2}, \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad (4.63)$$

avec

$$\mathbf{F} := \frac{\partial_t \mathbf{v}}{\theta} + \frac{1}{\theta} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot (\mu(\theta) \mathbb{D} \mathbf{v}) + \frac{\lambda}{\theta} (\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) \nabla \theta - \frac{\mathbf{f}}{\theta}.$$

On en déduit que  $(\mathbf{v}, p, \theta)$  est solution forte de (4.11)–(4.12).

### 4.3.3.3 Unicité

Il ne nous reste maintenant plus qu'à démontrer l'unicité de  $(\mathbf{v}, p, \theta)$ .

On suppose que (4.11)–(4.12) admet deux solutions  $(\mathbf{v}_1, p_1, \theta_1)$  et  $(\mathbf{v}_2, p_2, \theta_2)$ . Notons  $\theta = \theta_1 - \theta_2$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$  et  $p = p_1 - p_2$ . Alors le système d'équations vérifié par  $(\mathbf{v}, p, \theta)$  s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \theta + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta_2 + \lambda \nabla (\theta_1 + \theta_2) \cdot \nabla \theta - \lambda \theta_1 \Delta \theta - \lambda \theta \Delta \theta_2 = 0, \\ \theta(0, \cdot) = 0, \quad \nabla \theta \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \quad (4.64)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\theta_1} \partial_t \mathbf{v} - \frac{\theta}{\theta_1 \theta_2} \partial_t \mathbf{v}_2 + \frac{1}{\theta_1} (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\theta_1} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_2 - \frac{\theta}{\theta_1 \theta_2} (\mathbf{v}_2 \cdot \nabla) \mathbf{v}_2 \\ - \nabla \cdot (\mu(\theta_1) \mathbb{D} \mathbf{v}) - \nabla \cdot ((\mu(\theta_1) - \mu(\theta_2)) \mathbb{D} \mathbf{v}_2) + \frac{\lambda}{\theta_1} (\nabla \mathbf{v}_1 - \nabla^T \mathbf{v}_1) \nabla \theta \\ + \frac{\lambda}{\theta_1} (\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) \nabla \theta_2 - \frac{\lambda \theta}{\theta_1 \theta_2} (\nabla \mathbf{v}_2 - \nabla^T \mathbf{v}_2) \nabla \theta_2 + \nabla p = -\frac{\theta}{\theta_1 \theta_2} \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}_0(0, \cdot) = 0, \quad \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (4.65)$$

Soit  $\delta > 0$  et  $\varepsilon > 0$ .

On commence par multiplier (4.64) par  $-\Delta\theta + \theta$ . Comme  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ , on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\nabla\theta\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2) - \int_{\Omega} \Delta\theta \mathbf{v}_1 \cdot \nabla\theta - \int_{\Omega} \Delta\theta \mathbf{v} \cdot \nabla\theta_2 \\ & - \lambda \int_{\Omega} \Delta\theta \nabla(\theta_1 + \theta_2) \cdot \nabla\theta + \lambda \int_{\Omega} \theta \nabla(\theta_1 + \theta_2) \cdot \nabla\theta + \lambda \int_{\Omega} \theta_1 |\Delta\theta|^2 + \lambda \int_{\Omega} \theta_1 |\nabla\theta|^2 \\ & + \lambda \int_{\Omega} \theta \nabla\theta_1 \cdot \nabla\theta + \lambda \int_{\Omega} \theta \Delta\theta_2 \Delta\theta - \lambda \int_{\Omega} \theta^2 \Delta\theta_2 = 0. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités classiques, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|_{H^1}^2 + \lambda m (\|\Delta\theta\|_{L^2}^2 + \|\nabla\theta\|_{L^2}^2) \\ & \leq C \left\{ \|\mathbb{D}\mathbf{v}_1\|_{L^2} \|\nabla\theta\|_{L^2}^{1/2} \|\Delta\theta\|_{L^2}^{3/2} + \|\Delta\theta_2\|_{L^2} \|\mathbf{v}\|_{L^2}^{1/2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^{1/2} \|\Delta\theta\|_{L^2} \right. \\ & \quad + \lambda (\|\Delta\theta_1\|_{L^2} + \|\Delta\theta_2\|_{L^2}) \|\nabla\theta\|_{L^2}^{1/2} \|\Delta\theta\|_{L^2}^{3/2} + \lambda (\|\Delta\theta_1\|_{L^2} + \|\Delta\theta_2\|_{L^2}) \|\theta\|_{H^1}^2 \\ & \quad + \lambda \|\Delta\theta_1\|_{L^2} \|\theta\|_{H^1}^2 + \lambda \|\theta\|_{H^1}^{1/2} \|\theta\|_{H^2}^{1/2} \|\Delta\theta_2\|_{L^2} \|\Delta\theta\|_{L^2} \\ & \quad \left. + \lambda \|\Delta\theta_2\|_{L^2} \|\theta\|_{H^1}^2 \right\} \end{aligned}$$

Avec l'inégalité de Young, et en utilisant que les normes  $\|\theta\|_{H^2}$  et  $\|\theta\|_{H^1} + \|\Delta\theta\|_{L^2}$

sont équivalentes sur  $H^2(\Omega)$ , on a :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta\|_{H^1}^2 + \lambda m \|\Delta\theta\|_{L^2}^2 \\
& \leq \delta \lambda m \|\Delta\theta\|_{L^2}^2 + \frac{C_\delta}{\lambda^3 m^3} \|\mathbb{D}\mathbf{v}_1\|_{L^2}^4 \|\nabla\theta\|_{L^2}^2 + \delta \lambda m \|\Delta\theta\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon M |\ln M|}{\lambda} \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 \\
& \quad + \frac{C_{\delta,\varepsilon}}{\lambda m^2 M |\ln M|} \|\Delta\theta_2\|_{L^2}^4 \|\mathbf{v}\|_{L^2}^2 + \delta \lambda m \|\Delta\theta\|_{L^2}^2 \\
& \quad + \frac{C_\delta \lambda}{m^3} (\|\Delta\theta_1\|_{L^2}^4 + \|\Delta\theta_2\|_{L^2}^4) \|\nabla\theta\|_{L^2}^2 + \lambda (\|\Delta\theta_1\|_{L^2} + \|\Delta\theta_2\|_{L^2}) \|\theta\|_{H^1}^2 \\
& \quad + \lambda \|\Delta\theta_1\|_{L^2} \|\theta\|_{H^1}^2 + \delta \lambda m (\|\Delta\theta\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{H^1}^2) \\
& \quad + \frac{C_\delta \lambda}{m^3} \|\Delta\theta_2\|_{L^2}^4 \|\theta\|_{H^1}^2 + \lambda \|\Delta\theta_2\|_{L^2} \|\theta\|_{H^1}^2,
\end{aligned}$$

et par conséquent en multipliant par  $2\lambda^2$  et en regroupant les termes :

$$\begin{aligned}
& \lambda^2 \frac{d}{dt} \|\theta\|_{H^1}^2 + 2\lambda^3 m(1-5\delta) \|\Delta\theta\|_{L^2}^2 - 2\varepsilon\lambda M |\ln M| \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 \\
& \leq C_{\delta,\varepsilon} \left\{ \frac{1}{\lambda^3 m^3} \|\mathbb{D}\mathbf{v}_1\|_{L^2}^4 + \frac{\lambda}{m^2 M |\ln M|} \|\Delta\theta_2\|_{L^2}^4 + \frac{\lambda}{m^3} (\|\Delta\theta_1\|_{L^2}^4 + \|\Delta\theta_2\|_{L^2}^4) \right. \\
& \quad \left. + \lambda (\|\Delta\theta_1\|_{L^2} + \|\Delta\theta_2\|_{L^2} + m) \right\} (\lambda^2 \|\theta\|_{H^1}^2 + \|\mathbf{v}\|_{L^2}^2) \tag{4.66}
\end{aligned}$$

Multiplions maintenant l'équation (4.65) par  $\mathbf{v}$  :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{\theta_1}} \right\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} \mu(\theta_1) |\mathbb{D}\mathbf{v}|^2 \\
& = - \int_{\Omega} \frac{\partial_t \theta_1}{\theta_1^2} |\mathbf{v}|^2 + \int_{\Omega} \frac{\theta}{\theta_1 \theta_2} \partial_t \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} \frac{1}{\theta_1} (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} \frac{1}{\theta_1} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v} \\
& \quad + \int_{\Omega} \frac{\theta}{\theta_1 \theta_2} (\mathbf{v}_2 \cdot \nabla) \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} (\mu(\theta_1) - \mu(\theta_2)) \mathbb{D}\mathbf{v}_2 \otimes \mathbb{D}\mathbf{v} - \int_{\Omega} \frac{\lambda}{\theta_1} (\nabla \mathbf{v}_1 - \nabla^T \mathbf{v}_1) \nabla \theta \cdot \mathbf{v} \\
& \quad - \int_{\Omega} \frac{\lambda}{\theta_1} (\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) \nabla \theta_2 \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \frac{\lambda \theta}{\theta_1 \theta_2} (\nabla \mathbf{v}_2 - \nabla^T \mathbf{v}_2) \nabla \theta_2 \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \frac{\theta}{\theta_1 \theta_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}.
\end{aligned}$$

En utilisant les inégalités classiques et le théorème des accroissements finis, on ob-

tient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{\theta_1}} \right\|_{L^2}^2 + \lambda |\ln M| \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 \\
\leq & C \left\{ \frac{1}{m^2} \|\partial_t \theta_1\|_{H^1} \|\mathbf{v}\|_{L^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2} + \frac{1}{m^2} \|\partial_t \mathbf{v}_2\|_{L^2} \|\theta\|_{H^2} \|\mathbf{v}\|_{L^2} \right. \\
& + \frac{1}{m} \|\mathbb{D}\mathbf{v}_1\|_{L^2} \|\mathbf{v}\|_{L^2}^{1/2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^{3/2} + \frac{1}{m} \|\mathbb{D}\mathbf{v}_2\|_{L^2} \|\mathbf{v}\|_{L^2}^{1/2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^{3/2} \\
& + \frac{1}{m^2} \|\theta\|_{H^1}^{1/2} \|\theta\|_{H^2}^{1/2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}_2\|_{L^2}^2 \|\mathbf{v}\|_{L^2}^{1/2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^{1/2} + \frac{\lambda}{m} \|\theta\|_{H^1}^{1/2} \|\theta\|_{H^2}^{1/2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}_2\|_{L^2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2} \\
& + \frac{\lambda}{m} \|\mathbb{D}\mathbf{v}_1\|_{L^2} \|\Delta\theta\|_{L^2} \|\mathbf{v}\|_{L^2}^{1/2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^{1/2} + \frac{\lambda}{m} \|\Delta\theta_2\|_{L^2} \|\mathbf{v}\|_{L^2}^{1/2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^{3/2} \\
& \left. + \frac{\lambda}{m^2} \|\theta\|_{H^1}^{1/2} \|\theta\|_{H^2}^{1/2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}_2\|_{L^2} \|\Delta\theta_2\|_{L^2} \|\mathbf{v}\|_{L^2}^{1/2} \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^{1/2} + \frac{1}{m^2} \|\mathbf{f}\|_{L^2} \|\theta\|_{H^1} \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2} \right\}.
\end{aligned}$$

On applique maintenant l'inégalité de Young et on utilise l'équivalence des normes

$\|\theta\|_{H^2}$  et  $\|\theta\|_{H^1} + \|\Delta\theta\|_{L^2}$  pour avoir :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{\theta_1}} \right\|_{L^2}^2 + \lambda |\ln M| \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 \\
& \leq \left( \varepsilon \lambda |\ln M| \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 + \frac{C_\varepsilon}{\lambda |\ln M| m^4} \|\partial_t \theta_1\|_{H^1}^2 \|\mathbf{v}\|_{L^2}^2 \right) \\
& \quad + \left( \frac{\delta \lambda^3 m}{M} (\|\theta\|_{H^1}^2 + \|\Delta\theta\|_{L^2}^2) + \frac{C_\delta M}{\lambda^3 m^5} \|\partial_t \mathbf{v}_2\|_{L^2}^2 \|\mathbf{v}\|_{L^2}^2 \right) \\
& \quad + \left( \varepsilon \lambda |\ln M| \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 + \frac{C_\varepsilon}{\lambda^3 |\ln M|^3 m^4} \|\mathbb{D}\mathbf{v}_1\|_{L^2}^4 \|\mathbf{v}\|_{L^2}^2 \right) \\
& \quad + \left( \varepsilon \lambda |\ln M| \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 \frac{C_\varepsilon}{\lambda^3 |\ln M|^3 m^4} \|\mathbb{D}\mathbf{v}_2\|_{L^2}^4 \|\mathbf{v}\|_{L^2}^2 \right) \\
& \quad + \left( \frac{\delta \lambda^3 m}{M} (\|\theta\|_{H^1}^2 + \|\Delta\theta\|_{L^2}^2) + \frac{C_\delta M}{\lambda m^5} \|\mathbb{D}\mathbf{v}_2\|_{L^2}^4 \|\theta\|_{H^1}^2 \right. \\
& \quad \quad \left. + \varepsilon \lambda |\ln M| \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 + \frac{C_\varepsilon}{\lambda^3 |\ln M| m^4} \|\mathbb{D}\mathbf{v}_2\|_{L^2}^4 \|\mathbf{v}\|_{L^2}^2 \right) \\
& \quad + \left( \varepsilon \lambda |\ln M| \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 + \frac{\delta \lambda^3 m}{M} (\|\theta\|_{H^1}^2 + \|\Delta\theta\|_{L^2}^2) + \frac{C_{\delta,\varepsilon} M}{\lambda |\ln M|^2 m^5} \|\mathbb{D}\mathbf{v}_2\|_{L^2}^4 \|\theta\|_{H^1}^2 \right) \\
& \quad + \left( \frac{\delta \lambda^3 m}{M} \|\Delta\theta\|_{L^2}^2 + \varepsilon \lambda |\ln M| \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 + \frac{C_{\delta,\varepsilon} M^2}{\lambda^3 |\ln M| m^6} \|\mathbb{D}\mathbf{v}_1\|_{L^2}^4 \|\mathbf{v}\|_{L^2}^2 \right) \\
& \quad + \left( \varepsilon \lambda |\ln M| \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 + \frac{C_\varepsilon \lambda}{|\ln M|^3 m^4} \|\Delta\theta_2\|_{L^2}^4 \|\mathbf{v}\|_{L^2}^2 \right) \\
& \quad + \left( \frac{\delta \lambda^3 m}{M} (\|\theta\|_{H^1}^2 + \|\Delta\theta\|_{L^2}^2) + \frac{C_\delta \lambda^3 M}{m^5} \|\Delta\theta_2\|_{L^2}^4 \|\theta\|_{H^1}^2 \right. \\
& \quad \quad \left. + \varepsilon \lambda |\ln M| \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 + \frac{C_\varepsilon}{\lambda^3 |\ln M| m^4} \|\mathbb{D}\mathbf{v}_2\|_{L^2}^4 \|\mathbf{v}\|_{L^2}^2 \right) \\
& \quad + \left( \varepsilon \lambda |\ln M| \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 + \frac{C_\varepsilon}{\lambda |\ln M| m^4} \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2 \|\theta\|_{H^1}^2 \right).
\end{aligned}$$

Nous allons multiplier l'équation précédente par  $2M$  et regrouper les termes. Pour cela, on remarque que

$$\frac{1}{m^4} \leq \frac{M}{m^5} \leq \frac{M^2}{m^6}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
& M \frac{d}{dt} \left\| \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{\theta_1}} \right\|_{L^2}^2 + 2 \lambda |\ln M| M (1 - 9 \varepsilon) \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 - 10 \delta \lambda m \|\Delta\theta\|_{L^2}^2 \\
& \leq \left\{ \frac{C_{\delta,\varepsilon} M^3}{\lambda^3 \min(1, |\ln M|^3) m^6} \left( \frac{\lambda^2 m^2}{M^2} \|\partial_t \theta_1\|_{H^1}^2 + \|\partial_t \mathbf{v}_2\|_{L^2}^2 + \|\mathbb{D}\mathbf{v}_1\|_{L^2}^4 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \|\mathbb{D}\mathbf{v}_2\|_{L^2}^4 + \|\Delta\theta_2\|_{L^2}^4 + \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2 \right) + C_{\delta,\varepsilon} \lambda m \right\} (\|\mathbf{v}\|_{L^2}^2 + \lambda^2 \|\theta\|_{H^1}^2). \quad (4.67)
\end{aligned}$$

En sommant (4.66) et (4.67) avec  $\delta = \varepsilon = \frac{1}{20}$ , en remarquant que

$$\|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 \leq M \left\| \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{\theta_1}} \right\|_{L^2}^2,$$

et en utilisant les majorations

$$\frac{1}{m^2 M} \leq \frac{1}{m^3} \leq \frac{M^3}{m^6}$$

dans le second membre de (4.66), on obtient que :

$$a'(t) + b(t) \leq a(t) c(t),$$

avec

$$\begin{aligned}
a(t) &= M \left\| \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{\theta_1}} \right\|_{L^2}^2 + \lambda^2 \|\theta\|_{H^1}^2, \\
b(t) &= \lambda^3 m \|\Delta\theta\|_{L^2}^2 + \lambda M |\ln M| \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2, \\
c(t) &= \left\{ \frac{C_{\delta,\varepsilon} M^3}{\lambda^3 \min(1, |\ln M|^3) m^6} \left( \frac{\lambda^2 m^2}{M^2} \|\partial_t \theta_1\|_{H^1}^2 + \|\partial_t \mathbf{v}_2\|_{L^2}^2 + \|\mathbb{D}\mathbf{v}_1\|_{L^2}^4 + \|\mathbb{D}\mathbf{v}_2\|_{L^2}^4 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \|\Delta\theta_1\|_{L^2}^4 + \|\Delta\theta_2\|_{L^2}^4 + \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2 \right) + C_{\delta,\varepsilon} \lambda (\|\Delta\theta_1\|_{L^2} + \|\Delta\theta_2\|_{L^2} + m) \right\}
\end{aligned}$$

Comme  $a(0) = 0$ , le lemme de Gronwall implique que  $a(t) = 0$  p.p.  $t \in [0, T]$ . On en déduit donc que  $\theta_1 = \theta_2$  et  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ .

Pour montrer l'unicité de la pression, on réécrit (4.63) pour  $p = p_1 - p_2$  :

$$(\nabla \cdot \mathbf{w}, p)_{L^2} = (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2, \mathbf{w})_{L^2}, \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$



avec

$$\mathbf{F}_i := \frac{\partial_t \mathbf{v}_i}{\theta_i} + \frac{1}{\theta_i} \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i - \nabla \cdot (\mu(\theta_i) \mathbb{D} \mathbf{v}_i) + \frac{\lambda}{\theta_i} (\nabla \mathbf{v}_i - \nabla^T \mathbf{v}_i) \nabla \theta_i - \frac{\mathbf{f}}{\theta_i}, \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Avec ce qui précède,  $F_1 = F_2$  donc  $\nabla p = 0$ . Comme  $p_1$  et  $p_2$  sont à moyenne nulle, on en déduit que  $p_1 = p_2$ .

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré un résultat d'existence de solution régulière pour un modèle de type faible Mach. Ici, la viscosité a été choisie dépendante de la température de façon à éliminer les termes d'ordre 3. Nous avons suivi la démarche utilisée dans [50], basée sur une linéarisation des équations. Les principales étapes consistaient à :

- Établir des estimations *a priori* sur la suite de solutions approchées, ainsi que le principe du maximum pour la température ;
- Montrer que la suite de solutions approchées est de Cauchy dans un espace approprié ;
- Passer à la limite.

Cela nous a permis de mettre en évidence les vitesses de convergence de la suite de solutions approchées vers la solution du problème continu.



# Chapitre 5

## Méthodes de Volumes Finis pour l'équation de température d'un modèle faible Mach

*Dans ce chapitre, nous faisons l'étude numérique du modèle considéré dans le Chapitre 4. Nous nous intéressons en particulier à la discrétisation de l'équation de température, qui est de type volumes finis. Plusieurs schémas numériques seront étudiés et comparés sur des critères de précision et de respect du principe du maximum.*

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>103</b>
<b>5.2</b>	<b>Étude de l'équation continue</b>	<b>104</b>
<b>5.3</b>	<b>Un problème de convection-diffusion</b>	<b>108</b>
5.3.1	Maillage	108
5.3.2	Schéma volumes finis	110
5.3.3	Principe du maximum et existence d'une solution discrète	112
<b>5.4</b>	<b>Traitement du terme effet Joule</b>	<b>116</b>
5.4.1	Discrétisation du terme effet Joule	117
5.4.2	Principe du maximum et existence d'une solution discrète	118
5.4.3	Un schéma décentré	123
5.4.4	Un schéma peu adapté	124
<b>5.5</b>	<b>Expérimentations numériques</b>	<b>126</b>
5.5.1	Cas test 1 : Vérification du principe du maximum	127
5.5.2	Cas test analytique	129
5.5.3	Bilan des tests	130
<b>5.6</b>	<b>Couplage avec l'équation en vitesse</b>	<b>130</b>
5.6.1	Le splitting en temps	132
5.6.2	Discrétisation spatiale	132
5.6.3	Simulations numériques	137
<b>5.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>144</b>

---

## 5.1 Introduction

Dans le Chapitre 4, nous avons étudié un problème de type bas Mach spécifique. Nous avons montré un résultat d'existence, d'unicité et de régularité de solutions, ainsi qu'un principe du maximum pour la température. Nous souhaitons maintenant proposer un schéma numérique permettant de simuler ces équations en dimension 2. Une condition requise est le respect du principe du maximum pour la température.

Nous nous intéressons dans un premier temps à l'équation de température seule, dans laquelle la vitesse solénoïdale est donnée. Nous commençons par montrer, en nous inspirant des travaux de F. Huang et W. Tan [57], qu'en dimension 2, si la donnée initiale est proche d'une constante, alors l'équation continue possède une unique solution qui est globale.

Ce résultat d'existence globale étant établi, nous nous occupons ensuite de la discrétisation de cette équation. Comme nous visons des propriétés de principe du maximum, nous nous orientons vers des méthodes de volumes finis. La difficulté principale provient du terme  $|\nabla\theta|^2$ , appelé terme d'effet Joule dans le contexte de la conductivité électrique, voir par exemple A. Bradji et R. Herbin [6] ou les travaux de C. Chainais et ses collaborateurs [16, 17]. En effet, la définition d'un gradient par maille n'est pas immédiate en volumes finis. Ainsi, on pourra consulter les travaux de R. Eymard et ses collaborateurs [37, 38] pour des propositions de gradients discrets sur maillage admissible. En outre, K. Domelevo et P. Omnes [31], puis C. Chainais [16], ont utilisé un gradient discret reconstruit suivant l'idée présentée dans l'article de Y. Coudière, J.-P. Vila et P. Villedieu [25]. Le principe de ces schémas, valables sur des maillages très généraux, consiste en la double résolution des équations, sur maillages primal et dual. De plus dans [32], J. Droniou et R. Eymard proposent un schéma dont les inconnues sont la fonction, son gradient et les flux. Par conséquent, la définition d'un gradient discret par maille est intrinsèque au schéma.

Une autre difficulté liée au terme d'effet Joule concerne le respect des bornes, et en particulier de la borne inférieure. En effet, si l'on considère des modèles "proches", comme l'équation des milieux poreux, voir par exemple les travaux de C. Cancès et C. Guichard [15], ou l'équation de convection-diffusion intervenant dans les modèles de type Khazhikhov-Smagulov, voir par exemple l'article de C. Calgaro, E. Creusé et T. Goudon [13], le principe du maximum s'obtient sans trop d'obstacle pour les schémas d'ordre 1. En revanche l'ajout du terme  $|\nabla\theta|^2$  dans l'équation de température, positif, complique l'obtention de la borne inférieure. Nous devons donc être particulièrement vigilants quant au choix de la discrétisation de ce terme. En ce sens, plusieurs schémas seront étudiés et comparés sur des critères de précision et de respect du principe du maximum.

Finalement, l'équation en température sera couplée à l'équation en vitesse, définissant ainsi une nouvelle méthode combinée Volumes Finis - Éléments Finis. Nous

détaillerons en particulier les communications entre les différentes méthodes numériques. Enfin, le schéma sera testé sur le cas test de la cavité chauffée étudié au Chapitre 3.

## 5.2 Étude de l'équation continue

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$ . Nous étudions dans cette section l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \theta + \nabla \cdot (\theta \mathbf{v}) + 2\lambda |\nabla \theta|^2 - \lambda \nabla \cdot (\theta \nabla \theta) = 0, & \forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ \nabla \theta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0, & \forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ \theta(0, \mathbf{x}) = \theta_0(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $\mathbf{v}$  est un champ de vitesse à divergence nulle. En adaptant la démonstration du Théorème 4.2 du Chapitre 4, on montre immédiatement le théorème suivant :

**Théorème 5.1.** *On suppose que :*

$$\begin{aligned} \theta_0 &\in H_N^2(\Omega), \\ \mathbf{v} &\in L^2(0, +\infty; D(\mathbb{A})), \\ \mathbf{f} &\in L^2(0, +\infty; \mathbb{L}^2(\Omega)), \end{aligned}$$

et que

$$0 < m \leq \theta_0(x) \leq M, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5.2)$$

Alors il existe  $T > 0$  tel que l'équation (5.1) admet une unique solution  $\theta \in L^2(0, T; H_N^3(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_N^2(\Omega))$  telle que  $\partial_t \theta \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ . De plus,  $\theta$  satisfait :

$$m \leq \theta(t, \mathbf{x}) \leq M, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5.3)$$

Nous allons maintenant suivre la démarche de F. Huang et W. Tan [57] afin d'étendre ce résultat local à un résultat d'existence global, sous réserve que la température initiale soit proche d'une constante. Il est à noter que ce résultat est valable uniquement en dimension 2 en raison de la non-linéarité de l'équation (5.1).

**Théorème 5.2.** *On suppose que les hypothèses du Théorème 5.1 sont satisfaites. Soit  $\bar{\theta}$  un réel strictement positif. Alors il existe  $\delta > 0$  assez petit tel que si :*

$$\|\theta_0 - \bar{\theta}\|_{L^\infty} \leq \delta, \quad (5.4)$$

alors, l'équation (5.1) admet une unique solution globale  $\theta \in L^2(0, +\infty; H_N^3(\Omega)) \cap L^\infty(0, +\infty; H_N^2(\Omega))$  telle que  $\partial_t \theta \in L^2(0, +\infty; H^1(\Omega))$  qui satisfait :

$$\|\theta_0 - \bar{\theta}\|_{L^\infty(0, +\infty; L^\infty(\Omega))} \leq \delta.$$

*Démonstration.* Dans toute cette démonstration,  $C$  désigne une constante dépendant uniquement du domaine. Comme nous avons montré dans le Théorème 5.1 un résultat d'existence local, il nous suffit d'établir les estimations a priori uniformes en  $t$  pour la solution. Soit  $T$  le temps d'existence local donné par le Théorème 5.1.

1. Commençons par montrer que

$$\|\theta - \bar{\theta}\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))} \leq \delta. \quad (5.5)$$

Pour cela, on pose

$$\theta^+ = \max(0, \theta - \bar{\theta} - \delta).$$

Remarquons que  $\theta^+ \geq 0$ , et que  $\theta^+ = 0$  si et seulement si  $\theta - \bar{\theta} \leq \delta$ . On multiplie (5.1) par  $\theta^+$ . Comme  $\mathbf{v} \in D(\mathbb{A}) = \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{V}$ , on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta^+\|_{L^2}^2 + 2\lambda \int_{\Omega} \theta^+ |\nabla \theta|^2 + \lambda \int_{\Omega} \theta |\nabla \theta^+|^2 = 0.$$

Le dernier terme du membre de gauche est positif en raison de (5.3), et le deuxième également. On en déduit donc par la condition initiale (5.2) que  $\theta^+ = 0$  et par conséquent  $\theta - \bar{\theta} \leq \delta$  pour tout  $t \in [0; T]$ . Pour l'autre borne, on multiplie (5.1) par  $\theta^- = \max(0, \delta - (\theta - \bar{\theta}))$ . On obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta^-\|_{L^2}^2 - 2\lambda \int_{\Omega} \theta^- |\nabla \theta|^2 + \lambda \int_{\Omega} \theta |\nabla \theta^-|^2 = 0.$$

Par l'inégalité de Hölder et de Gagliardo-Nirenberg, puis l'inégalité de Young, on a :

$$\begin{aligned} 2\lambda \int_{\Omega} \theta^- |\nabla \theta|^2 &\leq C \lambda \|\theta^-\|_{L^2}^{1/2} \|\theta^-\|_{H^1}^{3/2} \|\Delta \theta^-\|_{L^2} \\ &\leq \frac{\lambda m}{2} \|\theta^-\|_{H^1}^2 + \frac{C \lambda}{m^3} \|\Delta \theta^-\|_{L^2}^4 \|\theta^-\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

On obtient donc en utilisant (5.3) :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta^-\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda m}{2} \|\nabla \theta^-\|_{L^2}^2 \leq \left( \frac{\lambda m}{2} + \frac{C \lambda}{m^3} \|\Delta \theta^-\|_{L^2}^4 \right) \|\theta^-\|_{L^2}^2.$$

On applique le lemme de Gronwall, en remarquant que  $\|\Delta \theta^-\|_{L^2}^4$  est borné

dans  $L^\infty(0, T)$  d'après le Théorème 5.1. On obtient :

$$\|\theta^-(t)\|_{L^2}^2 \leq \exp\left(\left(\lambda m + \frac{C\lambda}{m^3} \|\Delta\theta^-\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^4\right) T\right) \|\theta^-(0)\|_{L^2}^2, \quad \forall t \in [0, T].$$

On en déduit que  $\theta^- = 0$  et par conséquent (5.5).

2. Établissons maintenant les estimations pour les normes faibles. On multiplie (5.1) par  $\theta - \bar{\theta} - \Delta\theta$ . Comme  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\theta - \bar{\theta}\|_{L^2}^2 + \|\nabla\theta\|_{L^2}^2 \right) + \lambda \int_{\Omega} \theta (|\nabla\theta|^2 + |\Delta\theta|^2) \\ &= - \int_{\Omega} (\nabla^T \mathbf{v} \nabla\theta) \cdot \nabla\theta - 2\lambda \int_{\Omega} (\theta - \bar{\theta}) |\nabla\theta|^2 + \lambda \int_{\Omega} |\nabla\theta|^2 \Delta\theta. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (2.13), et aux inégalités (5.3) et (5.5), on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\theta - \bar{\theta}\|_{L^2}^2 + \|\nabla\theta\|_{L^2}^2 \right) + \lambda m (\|\nabla\theta\|_{L^2}^2 + \|\Delta\theta\|_{L^2}^2) \\ & \leq C \|\theta - \bar{\theta}\|_{L^\infty} \left( \frac{1}{\lambda} \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 + \lambda \|\Delta\theta\|_{L^2}^2 \right) \\ & \leq C \delta \left( \frac{1}{\lambda} \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 + \lambda \|\Delta\theta\|_{L^2}^2 \right). \end{aligned}$$

En prenant  $\delta \leq \frac{\lambda m}{2C}$ , on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\theta - \bar{\theta}\|_{L^2}^2 + \|\nabla\theta\|_{L^2}^2 \right) + \frac{\lambda m}{2} (\|\nabla\theta\|_{L^2}^2 + \|\Delta\theta\|_{L^2}^2) \leq \frac{C\delta}{\lambda} \|\mathbb{D}\mathbf{v}\|_{L^2}^2.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on a alors :

$$\begin{aligned} & \|\theta(t) - \bar{\theta}\|_{H^1}^2 + \frac{\lambda m}{2} \int_0^t (\|\nabla\theta(s)\|_{L^2}^2 + \|\Delta\theta(s)\|_{L^2}^2) ds \\ & \leq \exp\left(\frac{C\delta}{\lambda} \|\mathbf{v}\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega))}^2\right) \|\theta_0 - \bar{\theta}\|_{H^1}^2, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

3. Montrons maintenant les estimations pour les normes plus régulières. Nous prenons le gradient de (5.1) et multiplions par  $-\nabla\Delta\theta$ . On obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta\theta\|_{L^2}^2 - \int_{\Omega} \nabla^T \mathbf{v} \nabla\theta \cdot \nabla\Delta\theta - 2\lambda \int_{\Omega} \nabla\nabla\theta \nabla\theta \cdot \nabla\Delta\theta \\ & + \lambda \int_{\Omega} \theta |\nabla\Delta\theta|^2 + \lambda \int_{\Omega} \Delta\theta \nabla\theta \cdot \nabla\Delta\theta = 0. \end{aligned}$$



Avec les inégalités classiques, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \nabla^T \mathbf{v} \nabla \theta \cdot \nabla \Delta \theta \right| &\leq \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^6} \|\nabla \theta\|_{L^3} \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2} \\ &\leq \frac{\lambda m}{6} \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\lambda m} \|\mathbb{A} \mathbf{v}\|_{L^2}^2 \|\Delta \theta\|_{L^2}^2, \\ \left| 2\lambda \int_{\Omega} \nabla \nabla \theta \nabla \theta \cdot \nabla \Delta \theta \right| &\leq 2\lambda \|\Delta \theta\|_{L^4} \|\nabla \theta\|_{L^4} \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2} \\ &\leq \lambda \|\Delta \theta\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla \theta\|_{L^2}^{1/2} \|\Delta \theta\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2} \\ &\leq \frac{\lambda m}{6} \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 + \frac{C \lambda}{m^3} \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 \|\Delta \theta\|_{L^2}^4, \end{aligned}$$

et de même :

$$\left| \lambda \int_{\Omega} \Delta \theta \nabla \theta \cdot \nabla \Delta \theta \right| \leq \frac{\lambda m}{6} \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 + \frac{C \lambda}{m^3} \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 \|\Delta \theta\|_{L^2}^4.$$

Par conséquent, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \|\Delta \theta\|_{L^2}^2 + \lambda m \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{\lambda m^3} (m^2 \|\mathbb{A} \mathbf{v}\|_{L^2}^2 + \lambda^2 \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 \|\Delta \theta\|_{L^2}^2) \|\Delta \theta\|_{L^2}^2.$$

Le lemme de Gronwall nous permet d'avoir  $\forall t \in [0, T]$  :

$$\begin{aligned} &\|\Delta \theta(t)\|_{L^2}^2 + \lambda m \int_0^t \|\nabla \Delta \theta(s)\|_{L^2}^2 ds \leq \\ &\exp \left( \frac{C}{\lambda m^3} \int_0^t m^2 \|\mathbb{A} \mathbf{v}(s)\|_{L^2}^2 + \lambda^2 \|\nabla \theta(s)\|_{L^2}^2 \|\Delta \theta(s)\|_{L^2}^2 ds \right) \|\Delta \theta_0\|_{L^2}^2. \quad (5.7) \end{aligned}$$

D'après (5.6) et (5.7), et le fait que  $\mathbf{v} \in L^2(0, +\infty; D(\mathbb{A}))$ , on obtient :

$$\|\theta - \bar{\theta}\|_{L^\infty(0, T; H^2(\Omega))} + \|\nabla \theta\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))} \leq C(\theta_0, \mathbf{v}). \quad (5.8)$$

D'après le théorème d'existence local (Théorème 5.1) et l'estimation uniforme (5.8), la solution forte locale peut être étendue à  $\mathbb{R}^+$ .

□

La suite du chapitre sera consacré à la discrétisation par volumes finis de l'équation (5.1).

### 5.3 Rappels pour un problème de convection-diffusion

Dans un premier temps, nous oublions le terme effet Joule  $|\nabla\theta|^2$  et nous effectuons des rappels sur la discrétisation par volumes finis de l'équation de convection-diffusion suivante :

$$\begin{cases} \partial_t\theta + \nabla \cdot (\theta \mathbf{v}) - \lambda \nabla \cdot (\theta \nabla \theta) = 0, & \forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ \nabla\theta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0, & \forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma^N, \\ \theta(t, \mathbf{x}) = \theta_D(t, \mathbf{x}), & \forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma^D, \\ \theta(0, \mathbf{x}) = \theta_0(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \quad (5.9)$$

où  $\Omega$  est un ouvert polygonal borné de  $\mathbb{R}^2$ . On suppose que son bord  $\Gamma = \partial\Omega$  est tel que  $\Gamma = \Gamma^N \cup \Gamma^D$ , avec  $\Gamma^N \cap \Gamma^D = \emptyset$ .  $\mathbf{v}$  est un champ de vitesse donné à divergence nulle.

Pour la discrétisation temporelle, nous utilisons un schéma d'Euler implicite. Pour cela, afin de simplifier l'écriture, on considère une subdivision régulière  $0 < t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$  de  $[0; T]$ , et on note  $\Delta t = \frac{T}{N}$  le pas de temps. Pour la discrétisation spatiale, nous allons utiliser une méthode de volumes finis. Commençons tout d'abord par définir un certain nombre de notations concernant le maillage.

#### 5.3.1 Maillage

Nous commençons par définir la notion de maillage. La principale référence concernant cette section est le livre de R. Eymard, T. Gallouët et R. Herbin [36].

**Définition 5.1.** (Maillage)

Un maillage  $\mathcal{M}$  de  $\Omega$  est donné par  $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, \mathcal{E}, \mathcal{P})$  où :

- $\mathcal{T}$  est une famille finie d'ouverts polygonaux convexes disjoints (*les volumes de contrôle*) telle que  $\overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}} \overline{K}$ ,
- $\mathcal{E}$  est une famille finie d'ouverts disjoints de  $\overline{\Omega}$  (*les arêtes*) telle que pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}$ , il existe un hyperplan  $E$  de  $\mathbb{R}^2$  et un volume de contrôle  $K \in \mathcal{T}$  tels que  $\overline{\sigma} = \partial K \cap E$ .
- $\mathcal{P}$  est une famille  $(\mathbf{x}_K)_{K \in \mathcal{T}}$  de points de  $\Omega$ , avec  $\mathbf{x}_K \in K$ .

La taille du maillage est définie par :

$$h = \sup_{K \in \mathcal{T}} \text{diam}(K). \quad (5.10)$$

Pour  $K \in \mathcal{T}$ ,  $m_K$  désigne l'aire de  $K$  et pour  $\sigma \in \mathcal{E}$ ,  $m_\sigma$  désigne la longueur de  $\sigma$ . L'ensemble des arêtes intérieures est noté  $\mathcal{E}^{\text{int}} = \{\sigma \in \mathcal{E}, \sigma \not\subset \Gamma\}$ . Pour  $\sigma \in \mathcal{E}^{\text{int}}$  telle

que  $\bar{\sigma} = \bar{K} \cap \bar{L}$ , on note  $\sigma = K|L$ . L'ensemble des arêtes extérieures est noté  $\mathcal{E}^{\text{ext}} = \{\sigma \in \mathcal{E}, \sigma \subset \Gamma\}$ . Parmi les arêtes extérieures, on distingue  $\mathcal{E}^N = \{\sigma \in \mathcal{E}, \sigma \subset \Gamma^N\}$  l'ensemble des arêtes de bord Neumann et  $\mathcal{E}^D = \{\sigma \in \mathcal{E}, \sigma \subset \Gamma^D\}$  l'ensemble des arêtes de bord Dirichlet.  $\mathcal{E}_K = \{\sigma \in \mathcal{E}, \sigma \subset \bar{K}\}$  désigne l'ensemble des arêtes de  $K$ . Par analogie, on définit respectivement  $\mathcal{E}_K^{\text{int}}$ ,  $\mathcal{E}_K^{\text{ext}}$ ,  $\mathcal{E}_K^N$ , et  $\mathcal{E}_K^D$  l'ensemble des arêtes intérieures, extérieures, de bord Neumann et de bord Dirichlet de  $K$ .

Nous allons maintenant définir la notion de maillage admissible.

**Définition 5.2.** (Maillage admissible)

Un maillage  $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, \mathcal{E}, \mathcal{P})$  est dit *admissible* si pour tout  $\sigma = K|L \in \mathcal{E}^{\text{int}}$ , la droite passant par  $\mathbf{x}_K$  et  $\mathbf{x}_L$  est orthogonale à  $\sigma$  en un point  $\mathbf{x}_\sigma$  appartenant à  $\sigma$ .

**Exemple 5.1.** On considère un maillage triangulaire du domaine  $\Omega = [0; 1]^2$ . Dans ce cas, une condition suffisante pour que le maillage soit admissible est que tous les angles des triangles soient strictement inférieurs à  $\frac{\pi}{2}$ . On peut alors choisir pour  $\mathbf{x}_K$  le centre du cercle circonscrit à  $K$ . Dans les expérimentations numériques de la section 5.5, nous considérerons pour  $k \geq 1$  une triangulation  $\mathcal{T}_k$  du domaine  $\Omega$ . Pour cela, on définit :

$$x_i = \frac{i}{2^k}, \quad i = 0, \dots, 2^k.$$

Chaque carré  $[x_i; x_{i+1}] \times [x_j; x_{j+1}]$  est triangularisé comme représenté sur le schéma de gauche de la Figure 5.1. Le maillage obtenu pour  $k = 1$  est représenté sur le

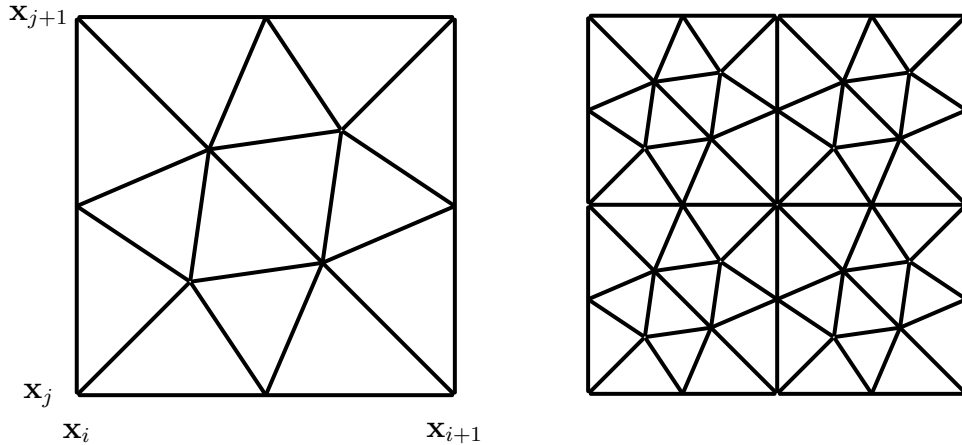


FIGURE 5.1: Le maillage  $\mathcal{T}_1$ . À gauche, triangulation du carré  $[x_i; x_{i+1}] \times [x_j; x_{j+1}]$ . À droite, triangulation du domaine  $\Omega$ .

schéma de droite de la Figure 5.1. La taille du maillage  $\mathcal{T}_k$  est donnée par

$$h = \frac{0,145}{2^{k-1}}.$$

Les caractéristiques géométriques (nombre de sommets, nombre de triangles et nombre d'arêtes) de ces maillages pour  $k = 2, \dots, 5$  seront données dans le Tableau 5.3.

Nous allons maintenant introduire quelques notations qui seront utilisées dans la suite du travail. Elles sont illustrées sur la Figure 5.2.

Pour  $\sigma \in \mathcal{E}_K^{\text{int}}$  telle que  $\sigma = K|L$ , on note  $d_\sigma$  ou  $d_{KL}$  la distance entre  $\mathbf{x}_K$  et  $\mathbf{x}_L$ , et  $d_{K,\sigma}$  la distance entre  $\mathbf{x}_K$  et  $\sigma$ . Pour  $\sigma \in \mathcal{E}_K^{\text{ext}}$ ,  $d_\sigma$  désigne la distance entre  $\mathbf{x}_K$  et  $\sigma$ .

Le coefficient de transmissibilité est donné par  $\tau_\sigma = \frac{m_\sigma}{d_\sigma}$ .

Pour  $K \in \mathcal{T}$ ,  $\sigma \in \mathcal{E}_K$ , on définit  $\mathbf{n}_{K,\sigma}$  le vecteur normal unitaire à  $\sigma$ , dirigé vers l'extérieur de  $K$ , ainsi que le demi-diamant  $D_{K,\sigma} = \{t \mathbf{x}_K + (1-t) \mathbf{y}, t \in (0; 1), \mathbf{y} \in \sigma\}$ . On note  $m_{D_{K,\sigma}}$  son aire.

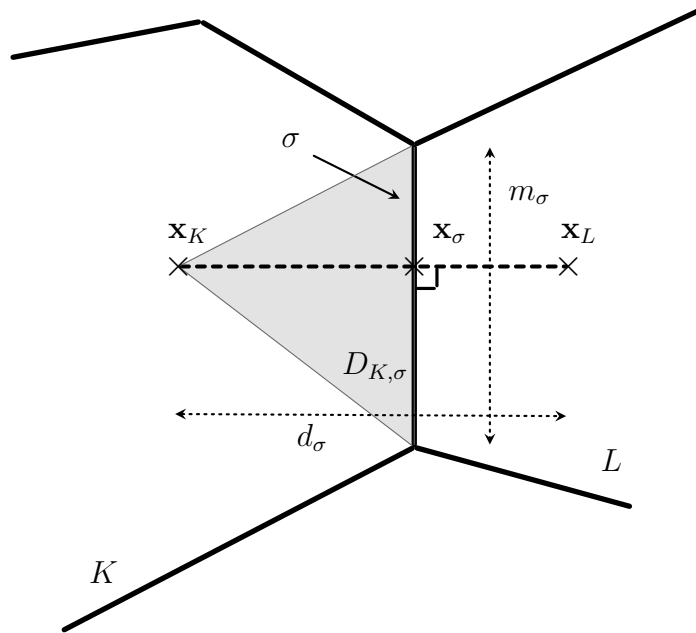


FIGURE 5.2: Maillage admissible

### 5.3.2 Schéma volumes finis

Nous allons dans cette section écrire le schéma numérique pour (5.9). Cette section s'appuie principalement sur [36]. Considérons  $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, \mathcal{E}, \mathcal{P})$  un maillage admissible au sens de la Définition 5.2. Pour  $0 \leq n \leq N$ , nous allons chercher

$\theta_{\mathcal{T}}^n = (\theta_K^n)_{K \in \mathcal{T}}$  une solution approchée de  $\theta(t^n, \cdot)$  dans l'espace

$$\mathcal{X}(\mathcal{T}) = \{\theta \in L^2(\Omega), \quad \forall K \in \mathcal{T}, \quad \theta|_K \in \mathbb{P}_0\}.$$

Pour la donnée initiale, on pose pour tout  $K \in \mathcal{T}$  :

$$\theta_K^0 = \theta_0(\mathbf{x}_K).$$

Pour  $n = 0, \dots, N-1$ , on définit la condition aux limites discrète pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}^D$  :

$$\theta_{D,\sigma}^{n+1} = \theta_D(t^{n+1}, \mathbf{x}_\sigma).$$

Enfin, nous allons intégrer l'équation (5.9) sur un volume de contrôle  $K$ . En appliquant la formule de Stokes, on a :

$$\begin{aligned} & \int_K \partial_t \theta(t^{n+1}, \cdot) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \theta(t^{n+1}, \cdot) \mathbf{v}(t^{n+1}, \cdot) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \\ & - \lambda \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \theta(t^{n+1}, \cdot) \nabla \theta(t^{n+1}, \cdot) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = 0. \end{aligned}$$

On propose alors le schéma numérique suivant :

$$m_K \frac{\theta_K^{n+1} - \theta_K^n}{\Delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma}^{n+1} \theta_{\sigma,+}^{n+1} + \lambda \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}^{n+1} = 0 \quad (5.11)$$

où

$$v_{K,\sigma}^{n+1} = \int_{\sigma} \mathbf{v}(t^{n+1}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \, d\gamma(\mathbf{x}). \quad (5.12)$$

$\theta_{\sigma,+}^{n+1}$  est défini pour  $\sigma \in \mathcal{E}_K$  par

$$\theta_{\sigma,+}^{n+1} = \begin{cases} \theta_K^{n+1} & \text{si } \mathbf{v}_{K,\sigma} \geq 0, \\ \theta_{K,\sigma}^{n+1} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.13)$$

avec

$$\theta_{K,\sigma}^{n+1} = \begin{cases} \theta_L^{n+1} & \text{pour } \sigma \in \mathcal{E}_K^{\text{int}} \text{ telle que } \sigma = K|L, \\ \theta_{D,\sigma}^{n+1} & \text{pour } \sigma \in \mathcal{E}_K^D, \\ \theta_K^{n+1} & \text{pour } \sigma \in \mathcal{E}_K^N. \end{cases}$$

$F_{K,\sigma}^{n+1}$  est une approximation du flux du terme diffusif donnée par :

$$F_{K,\sigma}^{n+1} = \tau_{\sigma} \theta_{\sigma}^{n+1} (\theta_K^{n+1} - \theta_{K,\sigma}^{n+1}), \quad (5.14)$$

où il reste à définir  $\theta_{\sigma}^{n+1}$ , une valeur de  $\theta^{n+1}$  en  $\mathbf{x}_{\sigma}$ . Remarquons qu'une définition

alternative du flux, basée sur l'égalité " $\theta \nabla \theta = \frac{1}{2} \nabla \theta^2$ " est :

$$F_{K,\sigma}^{n+1} = \frac{1}{2} \tau_\sigma \left( (\theta_K^{n+1})^2 - (\theta_{K,\sigma}^{n+1})^2 \right).$$

Cette définition du flux est un cas particulier de (5.14) avec le choix de  $\theta_\sigma^{n+1}$  suivant :

$$\theta_\sigma^{n+1} = \frac{\theta_K^{n+1} + \theta_{K,\sigma}^{n+1}}{2}. \quad (5.15)$$

Un autre choix de  $\theta_\sigma^{n+1}$  sera envisagé dans la suite de ce travail :

$$\theta_\sigma^{n+1} = \max(\theta_K^{n+1}, \theta_{K,\sigma}^{n+1}). \quad (5.16)$$

*Remarque 5.1.* De la définition (5.12), comme  $\mathbf{v}$  est à divergence nulle, on en déduit que :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma} = 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}. \quad (5.17)$$

*Remarque 5.2.* Nous aurions également pu considérer la définition de  $\theta_\sigma^{n+1}$  suivante :

$$\theta_\sigma^{n+1} = \begin{cases} \frac{d_{L,\sigma} \theta_K^{n+1} + d_{K,\sigma} \theta_L^{n+1}}{d_{KL}}, & \text{pour } \sigma = K|L, \\ \frac{\theta_K^{n+1} + \theta_{D,\sigma}^{n+1}}{2}, & \text{pour } \sigma \in \mathcal{E}_K^D. \end{cases} \quad (5.18)$$

Cependant, les schémas étudiés dans ce chapitre ont un comportement identique avec le choix de  $\theta_\sigma^{n+1}$  (5.15) ou (5.18), c'est pourquoi par souci de lisibilité on limitera l'étude au cas (5.15). Notons que les définitions (5.15) et (5.18) coïncident sur un maillage de Voronoï.

### 5.3.3 Principe du maximum et existence d'une solution discrète

Nous supposons que :

$$0 < m \leq \theta_K^0 \leq M, \quad \forall K \in \mathcal{T}, \quad (5.19)$$

et que :

$$m \leq \theta_{D,\sigma}^n \leq M, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}^D, \forall n = 1, \dots, N. \quad (5.20)$$

Nous considérons d'abord le schéma intermédiaire suivant :

$$m_K \frac{\theta_K^{n+1} - \theta_K^n}{\Delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma}^{n+1} \theta_{\sigma,+}^{n+1} + \lambda \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tilde{F}_{K,\sigma}^{n+1} = 0, \quad (5.21)$$

où

$$\tilde{F}_{K,\sigma}^{n+1} = \tau_\sigma \tilde{\theta}_\sigma^{n+1} (\theta_K^{n+1} - \theta_{K,\sigma}^{n+1}), \quad (5.22)$$

avec

$$\tilde{\theta}_\sigma^{n+1} = \max(0, \theta_\sigma^{n+1}).$$

Nous allons commencer par montrer qu'une solution du schéma numérique (5.21) (si elle existe) satisfait :

$$0 < m \leq \theta_K^n \leq M, \quad \forall K \in \mathcal{T}, \quad \forall n = 0, \dots, N. \quad (5.23)$$

Un argument important de la démonstration est basé sur le fait que  $\tilde{\theta}_\sigma^{n+1} \geq 0$ . Nous prouverons ensuite, par un argument de degré topologique, que le schéma (5.21) admet une solution. Comme elle satisfait (5.23), elle est également solution de (5.11).

### 5.3.3.1 Principe du maximum pour une solution de (5.21)

Dans la proposition suivante, nous montrons qu'une solution de (5.21) satisfait le principe du maximum. L'existence d'une solution sera montrée dans la section suivante.

**Proposition 5.1.** *On suppose que (5.19) est (5.20) sont satisfaites. Soit  $(\theta_\mathcal{T}^n)_n$  une solution du schéma (5.21). Alors  $(\theta_\mathcal{T}^n)_n$  satisfait (5.23).*

*Démonstration.* La démonstration suit celle de la proposition 3.6 de [15] et se fait par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$ , (5.23) est évidemment satisfaite car on a supposé (5.19). Supposons maintenant que la propriété (5.23) est satisfaite pour un  $n$  donné et montrons la pour  $n + 1$ . On raisonne par l'absurde et on suppose que

$$\theta_{K_M}^{n+1} = \max_{N \in \mathcal{T}} \theta_N^{n+1} > M.$$

On écrit (5.21) sur le volume de contrôle  $K_M$  :

$$m_{K_M} \frac{\theta_{K_M}^{n+1} - \theta_{K_M}^n}{\Delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_M}} v_{K_M,\sigma}^{n+1} \theta_{\sigma,+}^{n+1} + \lambda \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_M}} \tilde{F}_{K_M,\sigma}^{n+1} = 0. \quad (5.24)$$

On a

$$m_{K_M} \frac{\theta_{K_M}^{n+1} - \theta_{K_M}^n}{\Delta t} > 0$$

car on a supposé que  $\theta_{K_M}^{n+1} > M$  et  $\theta_{\mathcal{T}}^n$  satisfait (5.23). Montrons que les deux autres termes de (5.24) sont positifs pour obtenir une contradiction.

Tout d'abord, on a

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_M}} v_{K_M, \sigma}^{n+1} \theta_{\sigma,+}^{n+1} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_M}} v_{K_M, \sigma}^{n+1} (\theta_{\sigma,+}^{n+1} - \theta_{K_M}^{n+1})$$

d'après (5.17). Alors pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}_{K_M}^{\text{int}}$  telle que  $\sigma = K_M|L$ ,

$$v_{K_M, \sigma}^{n+1} (\theta_{\sigma,+}^{n+1} - \theta_{K_M}^{n+1}) = \begin{cases} v_{K_M, \sigma}^{n+1} (\theta_{K_M}^{n+1} - \theta_{K_M}^{n+1}) = 0 & \text{si } v_{K_M, \sigma}^{n+1} \geq 0, \\ v_{K_M, \sigma}^{n+1} (\theta_L^{n+1} - \theta_{K_M}^{n+1}) \geq 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même, on montre que  $v_{K_M, \sigma}^{n+1} (\theta_{\sigma,+}^{n+1} - \theta_{K_M}^{n+1}) \geq 0$  pour  $\sigma \in \mathcal{E}_K^{\text{ext}}$  grâce à l'hypothèse (5.20).

Maintenant, on observe que pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}_{K_M}$ ,  $\tilde{F}_{K_M, \sigma}^{n+1}$  est positif car  $\tilde{\theta}_{\sigma}^{n+1} \geq 0$ . On arrive donc à une contradiction, ce qui permet de conclure que  $\theta_K^{n+1} \leq M$  pour tout  $K \in \mathcal{T}$ .

L'autre borne s'obtient de façon similaire.

□

### 5.3.3.2 Existence d'une solution au schéma (5.21)

Grâce au résultat de la Proposition 5.1, nous sommes maintenant en mesure de prouver l'existence d'une solution au problème (5.21). La preuve s'appuie sur un argument de degré topologique, voir la section 2.4 du Chapitre 2.

**Proposition 5.2.** *On suppose que la donnée initiale et la condition aux limites satisfont (5.19) et (5.20). Alors le problème (5.21) admet au moins une solution.*

*Démonstration.* La preuve suit celle proposée dans [15]. Pour  $\mu \in [0, 1]$ , on définit  $(\theta_{K, \mu}^{n+1})_{K \in \mathcal{T}}$  comme étant une solution du schéma suivant : pour tout  $K \in \mathcal{T}$ ,

$$m_K \frac{\theta_{K, \mu}^{n+1} - \theta_K^n}{\Delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K, \sigma}^{n+1} \theta_{\sigma,+,\mu}^{n+1} + \mu \lambda \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tilde{F}_{K, \sigma, \mu}^{n+1} + (1 - \mu) \lambda \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \bar{F}_{K, \sigma, \mu}^{n+1} = 0, \quad (5.25)$$

où  $\theta_{\sigma,+,\mu}^{n+1}$ ,  $\tilde{F}_{K, \sigma, \mu}^{n+1}$  sont définis respectivement par (5.13) et (5.22) en remplaçant  $\theta_K^{n+1}$



et  $\theta_L^{n+1}$  par  $\theta_{K,\mu}^{n+1}$  et  $\theta_{L,\mu}^{n+1}$ , et  $\bar{F}_{K,\sigma,\mu}^{n+1}$  est défini par :

$$\bar{F}_{K,\sigma,\mu}^{n+1} = \tau_\sigma M (\theta_{K,\mu}^{n+1} - \theta_{K,\sigma,\mu}^{n+1}). \quad (5.26)$$

En suivant la même démarche que dans la démonstration de la Proposition 5.1, nous pouvons montrer que pour tout  $K \in \mathcal{T}$ ,

$$m \leq \theta_{K,\mu}^{n+1} \leq M. \quad (5.27)$$

On définit maintenant  $\mathcal{K} = [m - 1; M + 1]^{\#\mathcal{T}}$  compact de  $\mathbb{R}^{\#\mathcal{T}}$ , ainsi que la fonction  $\mathcal{H} : [0, 1] \times \mathbb{R}^{\#\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^{\#\mathcal{T}}$  par :  $\forall K \in \mathcal{T}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_K(\mu, (\theta_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}}) &= m_K \frac{\theta_{K,\mu}^{n+1} - \theta_K^n}{\Delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma}^{n+1} \theta_{\sigma,+,\mu}^{n+1} + \mu \lambda \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tilde{F}_{K,\sigma,\mu}^{n+1} \\ &\quad + (1 - \mu) \lambda \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \bar{F}_{K,\sigma,\mu}^{n+1}. \end{aligned}$$

Alors  $\mathcal{H} \in \mathcal{C}([0, 1] \times \mathcal{K}, \mathbb{R}^{\#\mathcal{T}})$  et en raison de (5.27),

$$\mathcal{H}_K(\mu, (\theta_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}}) = 0$$

n'admet pas de solution sur  $\partial\mathcal{K}$ . Par conséquent,  $\delta(\mathcal{H}(\mu, \cdot), \overset{\circ}{\mathcal{K}}, 0)$  est indépendant de  $\mu$  d'après la Proposition 2.7 du Chapitre 2. Comme (5.25) admet une solution pour  $\mu = 0$  (voir par exemple [36]), son degré topologique est non nul, voir la Proposition 2.8 du Chapitre 2. On en déduit que (5.25) admet une solution pour  $\mu = 1$ , par conséquent (5.21) a au moins une solution. □

### 5.3.3.3 Conclusion

Nous avons montré que le schéma (5.21) admet au moins une solution, et qu'elle satisfait (5.23). Par conséquent elle est positive, et est donc aussi solution de (5.11). Nous avons donc montré la proposition suivante :

**Proposition 5.3.** *On suppose que les hypothèses (5.19) et (5.20) sont satisfaites. Alors le schéma (5.11) admet au moins une solution  $(\theta_{\mathcal{T}}^n)$  qui vérifie (5.23).*

## 5.4 Traitement du terme effet Joule

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'équation de température complète :

$$\begin{cases} \partial_t \theta + \nabla \cdot (\theta \mathbf{v}) + 2\lambda |\nabla \theta|^2 - \lambda \nabla \cdot (\theta \nabla \theta) = 0, & \forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ \nabla \theta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0, & \forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma^N, \\ \theta(t, \mathbf{x}) = \theta_D(t, \mathbf{x}), & \forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma^D, \\ \theta(0, \mathbf{x}) = \theta_0(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \quad (5.28)$$

Par analogie à ce qui a été fait dans la section 5.3, nous allons approcher (5.28) par le schéma suivant

$$m_K \frac{\theta_K^{n+1} - \theta_K^n}{\Delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma}^{n+1} \theta_{\sigma,+}^{n+1} + 2\lambda m_K \mathcal{J}_K(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) + \lambda \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}^{n+1} = 0, \quad (5.29)$$

où  $v_{K,\sigma}^{n+1}$ ,  $\theta_{\sigma,+}^{n+1}$  et  $F_{K,\sigma}^{n+1}$  ont respectivement été définis en (5.12), (5.13) et (5.14); et où  $\mathcal{J}_K(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1})$  est une approximation de  $\frac{1}{m_K} \int_K |\nabla \theta(t^{n+1}, \cdot)|^2$ .

La discrétisation de  $\frac{1}{m_K} \int_K |\nabla \theta(t^{n+1}, \cdot)|^2$  n'est pas si immédiate car il n'y a pas de façon naturelle de définir un gradient discret par volume de contrôle. Dans [37], R. Eymard, T. Gallouët et R. Herbin définissent un gradient discret constant par volume de contrôle de la façon suivante :

$$(\nabla_{\mathcal{D}} \theta^{n+1})_K = \frac{1}{m_K} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_{\sigma} (\theta_K^{n+1} - \theta_{K,\sigma}^{n+1}) (\mathbf{x}_{\sigma} - \mathbf{x}_K). \quad (5.30)$$

Dans [32], J. Droniou et R. Eymard proposent pour une équation elliptique un schéma mixte volumes finis dont les inconnues sont la fonction, son gradient sur chaque volume de contrôle et les flux. La définition du gradient discret est donc intrinsèque au schéma. Dans [17], C. Chainais, Y.-J. Peng et I. Violet ont mis en œuvre les deux méthodes précédemment citées pour un système d'Euler-Poisson, modèle dans lequel un terme de type effet Joule apparaît. Un terme similaire apparaît également dans [16]. Dans cet article, C. Chainais intègre les équations sur un maillage primal et un maillage dual comme cela a été fait dans [55].

### 5.4.1 Discrétisation du terme effet Joule

Nous allons dans cette section expliquer comment nous allons discrétiser le terme effet Joule. Tout d'abord, remarquons que

$$\begin{aligned} |\nabla\theta|^2 &= \nabla \cdot (\theta \nabla\theta) - \theta \Delta\theta \\ &= \frac{1}{2} \Delta\theta^2 - \theta \Delta\theta. \end{aligned}$$

Pour le terme  $\theta \Delta\theta$ , nous considérons le laplacien discret suivant :

$$(\Delta_{\mathcal{D}}\theta^{n+1})_K = \frac{1}{m_K} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_{\sigma} (\theta_{K,\sigma}^{n+1} - \theta_K^{n+1}).$$

Pour le terme  $\frac{1}{2} \Delta\theta^2$ , nous pouvons utiliser la discrétisation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_K \Delta(\theta(t^{n+1}, \cdot)^2) &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \nabla(\theta(t^{n+1}, \cdot)^2) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \\ &\simeq \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_{\sigma} ((\theta_{K,\sigma}^{n+1})^2 - (\theta_K^{n+1})^2). \end{aligned}$$

On obtient alors l'approximation du terme effet Joule :

$$\mathcal{J}_K(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) = \frac{1}{2 m_K} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_{\sigma} (\theta_{K,\sigma}^{n+1} - \theta_K^{n+1})^2. \quad (5.31)$$

*Remarque 5.3.* Nous aurions également pu utiliser la discrétisation suivante pour  $\nabla \cdot (\theta \nabla\theta)$  :

$$\begin{aligned} \int_K \nabla \cdot (\theta(t^{n+1}, \cdot) \nabla\theta(t^{n+1}, \cdot)) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \theta(t^{n+1}, \cdot) \nabla\theta(t^{n+1}, \cdot) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \\ &\simeq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_{\sigma} \bar{\theta}_{\sigma}^{n+1} (\theta_{K,\sigma}^{n+1} - \theta_K^{n+1}), \end{aligned}$$

où  $\bar{\theta}_{\sigma}^{n+1}$  peut être défini par

$$\bar{\theta}_{\sigma}^{n+1} = \begin{cases} \frac{d_{L,\sigma} \theta_K^{n+1} + d_{K,\sigma} \theta_L^{n+1}}{d_{KL}} & \text{pour } \sigma = K|L, \\ \frac{\theta_K^{n+1} + \theta_{D,\sigma}^{n+1}}{2} & \text{pour } \sigma \in \mathcal{E}_K^D. \end{cases} \quad (5.32)$$

Cela donnerait pour le terme effet Joule :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{J}}_K(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) &= \frac{1}{m_K} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K^{\text{int}}, \sigma=K|L} \frac{d_{K,\sigma}}{d_{KL}} \tau_{\sigma} (\theta_L^{n+1} - \theta_K^{n+1})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2m_K} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K^D} \tau_{\sigma} (\theta_{D,\sigma}^{n+1} - \theta_K^{n+1})^2. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Cette discrétisation correspond à celle proposée par A. Bradji et R. Herbin dans [6]. Elle s'appuie sur la définition d'un gradient discret proposée par R. Eymard et T. Gallouët dans [35]. Nous avons observé numériquement des comportements identiques pour les discrétisations (5.31) ou (5.33). Cependant, les calculs effectués dans la démonstration de la Proposition 5.4 sont plus simples à mener avec le choix (5.31).

Un autre choix intéressant pour  $\bar{\theta}_{\sigma}^{n+1}$  est le suivant :

$$\bar{\theta}_{\sigma}^{n+1} = \min(\theta_K^{n+1}, \theta_{K,\sigma}^{n+1}), \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_K. \quad (5.34)$$

Cela nous donne le terme effet Joule défini en (5.42) qui sera étudié dans la section 5.4.3.

## 5.4.2 Principe du maximum et existence d'une solution discrète

Nous avons vu dans la partie 5.2 qu'une solution de (5.28) satisfaisait le principe du maximum. Nous voulons donc qu'une solution discrète de (5.29) vérifie le principe du maximum discret. Supposons que :

$$0 < m \leq \theta_K^0 \leq M, \quad \forall K \in \mathcal{T}, \quad (5.35)$$

et que :

$$m \leq \theta_{D,\sigma}^n \leq M, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}^D, \forall n = 1, \dots, N. \quad (5.36)$$

Nous voulons montrer que (5.29) admet une solution qui satisfait :

$$0 < m \leq \theta_K^n \leq M, \quad \forall K \in \mathcal{T}, \quad \forall n = 0, \dots, N. \quad (5.37)$$

Pour cela, nous procédons comme dans la section 5.3 et étudions au préalable le schéma intermédiaire suivant :

$$m_K \frac{\theta_K^{n+1} - \theta_K^n}{\Delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma}^{n+1} \theta_{\sigma,+}^{n+1} + 2\lambda m_K \mathcal{J}_K(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) + \lambda \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tilde{F}_{K,\sigma}^{n+1} = 0, \quad (5.38)$$

avec  $\tilde{F}_{K,\sigma}^{n+1}$  défini par (5.22). avec cette fois

$$\tilde{\theta}_\sigma^{n+1} = \max(0, \theta_\sigma^{n+1}, \theta_\sigma^{n+1} - 2(\min(\theta_K^{n+1}, \theta_{K,\sigma}^{n+1}) - m)), \quad \text{pour } \sigma \in \mathcal{E}_K. \quad (5.39)$$

Cette définition nous permet d'une part d'assurer que  $\tilde{\theta}_\sigma^{n+1} \geq 0$ . D'autre part, si une solution de (5.38) est telle que l'on ait  $\theta_K^{n+1} < m$  pour un certain  $K \in \mathcal{T}$ , alors le terme de diffusion est "gonflé" de façon à ce qu'il puisse compenser le terme effet Joule. Notons que si  $(\theta_{\mathcal{T}}^n)$  est solution de (5.38) et satisfait (5.37), alors elle est aussi solution de (5.29).

#### 5.4.2.1 Principe du maximum pour une solution de (5.38)

Vérifions qu'une solution de (5.38) satisfait le principe du maximum.

**Proposition 5.4.** *On suppose que (5.35) et (5.36) sont satisfaites. Soit  $(\theta_{\mathcal{T}}^n)_n$  une solution du schéma (5.38). Supposons que :*

a)  $\theta_\sigma^{n+1}$  est défini par (5.15) et que l'on ait l'hypothèse restrictive

$$M \leq 3m, \quad (5.40)$$

b) ou bien que  $\theta_\sigma^{n+1}$  est défini par (5.16) sans aucune hypothèse sur les bornes  $m$  et  $M$ .

Alors  $(\theta_{\mathcal{T}}^n)_n$  satisfait (5.37).

*Remarque 5.4.* Notons qu'avec le choix de  $\theta_\sigma^{n+1}$  (5.15), une condition suffisante pour obtenir le principe du maximum est que  $m$  et  $M$  satisfont (5.40). Cette contrainte implique que la donnée initiale doit être proche d'une constante. En revanche, le second choix possible (5.16) nous permet d'obtenir un principe du maximum sans restriction sur la donnée. C'est donc le choix qui sera privilégié par la suite.

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $n$ . Supposons que pour un  $n$  donné, (5.37) soit vérifié. Nous commençons par vérifier que l'ajout du terme effet Joule n'apporte pas de difficulté supplémentaire pour obtenir la borne  $\theta_K^{n+1} \leq M$ . Nous procédons comme dans la preuve de la Proposition 5.1 et supposons par l'absurde que

$$\theta_{K_M}^{n+1} = \max_{N \in \mathcal{T}} \theta_N^{n+1} > M.$$

On écrit (5.38) sur le volume de contrôle  $K_M$  :

$$m_{K_M} \frac{\theta_{K_M}^{n+1} - \theta_{K_M}^n}{\Delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_M}} v_{K_M,\sigma}^{n+1} \theta_{\sigma,+}^{n+1} + 2\lambda m_{K_M} \mathcal{J}_{K_M}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) + \lambda \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_M}} \tilde{F}_{K_M,\sigma}^{n+1} = 0.$$

On a déjà vu que

$$\begin{aligned}\theta_{K_M}^{n+1} - \theta_{K_M}^n &> 0, \\ \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_M}} v_{K_M, \sigma}^{n+1} \theta_{\sigma, +}^{n+1} &\geq 0, \\ \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_M}} \tilde{F}_{K_M, \sigma}^{n+1} &\geq 0.\end{aligned}$$

De plus, pour tout  $K \in \mathcal{T}$ ,  $\mathcal{J}_{K_M}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) \geq 0$  car c'est une somme de carrés. On obtient donc immédiatement la contradiction. On a ainsi montré que :

$$\theta_K^{n+1} \leq M, \quad \forall K \in \mathcal{T}.$$

L'autre borne est moins évidente. Supposons par l'absurde que

$$\theta_{K_m}^{n+1} = \min_{N \in \mathcal{T}} \theta_N^{n+1} < m.$$

On écrit (5.38) sur le volume de contrôle  $K_m$  :

$$m_{K_m} \frac{\theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m}^n}{\Delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_m}} v_{K_m, \sigma}^{n+1} \theta_{\sigma, +}^{n+1} + 2\lambda m_{K_m} \mathcal{J}_{K_m}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) + \lambda \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_m}} \tilde{F}_{K_m, \sigma}^{n+1} = 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m}^n &< 0, \\ \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_m}} v_{K_m, \sigma}^{n+1} \theta_{\sigma, +}^{n+1} &\leq 0, \\ \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_m}} \tilde{F}_{K_m, \sigma}^{n+1} &\leq 0.\end{aligned}$$

Cependant, le terme d'effet Joule est positif. Pour obtenir le principe du maximum, on doit donc espérer une compensation entre le terme effet Joule et le terme de diffusion. On a :

$$\begin{aligned}&2m_{K_m} \mathcal{J}_{K_m}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_m}} \tilde{F}_{K_m, \sigma}^{n+1} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_m}} \tau_{\sigma} (\theta_{K_m, \sigma}^{n+1} - \theta_{K_m}^{n+1})^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_m}} \tau_{\sigma} \tilde{\theta}_{\sigma}^{n+1} (\theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m, \sigma}^{n+1}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_m}} \tau_{\sigma} \left( \theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m, \sigma}^{n+1} + \tilde{\theta}_{\sigma}^{n+1} \right) (\theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m, \sigma}^{n+1}).\end{aligned}$$

Comme  $\theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m, \sigma}^{n+1} \leq 0$ , nous allons étudier la positivité de  $\theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m, \sigma}^{n+1} + \tilde{\theta}_{\sigma}^{n+1}$  en fonction du choix de  $\theta_{\sigma}^{n+1}$  (5.15) ou (5.16).

a)  $\theta_\sigma^{n+1}$  est défini par (5.15).

Dans ce cas, comme on a supposé par l'absurde que  $\theta_{K_m}^{n+1} < m$ , on a :

$$\begin{aligned} & \theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m, \sigma}^{n+1} + \tilde{\theta}_\sigma^{n+1} \\ & \geq \theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m, \sigma}^{n+1} + \frac{\theta_{K_m}^{n+1} + \theta_{K_m, \sigma}^{n+1}}{2} - 3(\theta_{K_m}^{n+1} - m) \\ & = \underbrace{\frac{3}{2}(m - \theta_{K_m}^{n+1})}_{\geq 0} - \underbrace{\frac{1}{2}\theta_{K_m, \sigma}^{n+1}}_{\geq -\frac{1}{2}M} + \frac{3}{2}m. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m, \sigma}^{n+1} + \tilde{\theta}_\sigma^{n+1} \geq 0$  car par hypothèse  $\frac{1}{2}M \leq \frac{3}{2}m$ .

b)  $\theta_\sigma^{n+1}$  est défini par (5.16).

On a alors :

$$\begin{aligned} & \theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m, \sigma}^{n+1} + \tilde{\theta}_\sigma^{n+1} \\ & \geq \theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m, \sigma}^{n+1} + \theta_{K_m, \sigma}^{n+1} - 3(\theta_{K_m}^{n+1} - m) \\ & = 3m - 2\theta_{K_m}^{n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

Cela permet de conclure que l'on arrive à une contradiction ; ainsi le principe du maximum est satisfait.  $\square$

*Remarque 5.5.* Le coefficient 2 dans la définition (5.39) est un réel positif qui doit être assez grand pour que le terme effet Joule puisse être compensé par le terme de diffusion. Ce choix n'est pas unique. Lorsque  $\theta_\sigma^{n+1}$  est donné par (5.15), il suffit de choisir un réel  $\geq \frac{3}{2}$  ; lorsqu'il est donné par (5.16), il suffit de le choisir  $\geq 1$ .

#### 5.4.2.2 Existence d'une solution à (5.38)

Maintenant que nous avons montré le principe du maximum, nous pouvons reprendre la preuve de la Proposition 5.2 et l'adapter afin de montrer l'existence d'une solution au schéma numérique (5.29).

**Proposition 5.5.** *On suppose que la donnée initiale et la condition aux limites satisfont (5.35) et (5.36) et que  $\theta_\sigma^{n+1}$  est donné par (5.16). Alors le problème (5.38) admet au moins une solution.*

*Démonstration.* Comme dans la démonstration de la Proposition 5.2, nous utilisons un argument de degré topologique. Pour  $\mu \in [0, 1]$ , on définit  $(\theta_{K, \mu}^{n+1})_{K \in \mathcal{T}}$  comme

étant une solution du schéma suivant : pour tout  $K \in \mathcal{T}$ ,

$$\begin{aligned}
 m_K \frac{\theta_{K,\mu}^{n+1} - \theta_K^n}{\Delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma}^{n+1} \theta_{\sigma,+,\mu}^{n+1} + 2\mu \lambda m_{K_M} \mathcal{J}_{K_M}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) + \mu \lambda \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tilde{F}_{K,\sigma,\mu}^{n+1} \\
 + 2(1-\mu)\lambda m_{K_M} \bar{\mathcal{J}}_{K_M}(\theta_{\mathcal{T},\mu}^{n+1}) + (1-\mu)\lambda \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \bar{F}_{K,\sigma,\mu}^{n+1} = 0,
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

où  $\theta_{\sigma,+,\mu}^{n+1}$ ,  $\tilde{F}_{K,\sigma,\mu}^{n+1}$  sont définis respectivement par (5.13) et (5.26) en remplaçant  $\theta_K^{n+1}$  et  $\theta_L^{n+1}$  par  $\theta_{K,\mu}^{n+1}$  et  $\theta_{L,\mu}^{n+1}$ ;  $\bar{F}_{K,\sigma,\mu}^{n+1}$  est défini par (5.26) et  $\bar{\mathcal{J}}_{K_M}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1})$  est défini par :

$$\bar{\mathcal{J}}_{K_M}(\theta_{\mathcal{T},\mu}^{n+1}) = \frac{1}{2m_K} (M - m) \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_{\sigma} (\theta_{K,\sigma,\mu}^{n+1} - \theta_{K,\mu}^{n+1}).$$

Alors (5.41) est équivalente à

$$\begin{aligned}
 m_K \frac{\theta_{K,\mu}^{n+1} - \theta_K^n}{\Delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma}^{n+1} \theta_{\sigma,+,\mu}^{n+1} + 2\mu \lambda m_{K_M} \mathcal{J}_{K_M}(\theta_{\mathcal{T},\mu}^{n+1}) + \mu \lambda \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tilde{F}_{K,\sigma,\mu}^{n+1} \\
 + (1-\mu)\lambda m \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_{\sigma} (\theta_{K,\mu}^{n+1} - \theta_{K,\sigma,\mu}^{n+1}) = 0,
 \end{aligned}$$

et satisfait par conséquent pour tout  $K \in \mathcal{T}$ ,

$$m \leq \theta_{K,\mu}^{n+1} \leq M.$$

On conclut alors comme dans la démonstration de la Proposition 5.2.  $\square$

### 5.4.2.3 Conclusion

Nous avons montré que le schéma (5.38) admet au moins une solution, et que cette solution satisfait le principe du maximum. Par conséquent, c'est également une solution de (5.29). Grâce à la Propositions 5.4 et à la Proposition 5.5, nous avons prouvé le théorème suivant.

**Théorème 5.3.** *On suppose que la donnée initiale et la condition aux limites satisfont (5.35) et (5.36). Alors :*

- a) *Sous la condition  $M \leq 3m$ , le schéma (5.29), avec  $\theta_{\sigma}^{n+1}$  défini par (5.15), admet au moins une solution  $(\theta_{\mathcal{T}}^n)$  qui satisfait (5.37).*
- b) *Le schéma (5.29), avec  $\theta_{\sigma}^{n+1}$  défini par (5.16), admet au moins une solution  $(\theta_{\mathcal{T}}^n)$  qui satisfait (5.37) (sans restriction sur  $m$  et  $M$ ).*



### 5.4.3 Un schéma décentré

Dans cette section, nous allons proposer un schéma qui satisfait le principe du maximum quelque soit le choix de  $\theta_\sigma^{n+1}$  et sans restriction sur la donnée initiale. Ce schéma est basé sur les observations suivantes :

- La borne supérieure ( $\theta_K^{n+1} \leq M$ ) est très facile à obtenir du moment que  $\mathcal{J}_K(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) \geq 0$ ,
- L'autre borne sera obtenue automatiquement si pour  $\sigma \in \mathcal{E}$ , on a  $\mathcal{J}_K(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) = 0$  pour  $\theta_K^{n+1} \leq \theta_{K,\sigma}^{n+1}$ .

On définit ainsi, exploitant l'idée de C. Cancès [14],

$$\mathcal{J}_K(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) = \frac{1}{m_K} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_\sigma ((\theta_K^{n+1} - \theta_{K,\sigma}^{n+1})^+)^2, \quad (5.42)$$

où l'on a utilisé la notation  $a^+ = \max(0, a)$ . Afin de comprendre d'où provient cette formule, on considère l'algorithme d'assemblage du terme d'effet Joule dans le cas particulier où  $\Gamma_D = \emptyset$ , pour la discrétisation centrée (5.31) et la discrétisation décentrée (5.42), voir l'Algorithme 1. On remarque que pour chaque arête intérieure  $\sigma = K|L$ , la quantité  $\tau_\sigma (\theta_K^{n+1} - \theta_L^{n+1})^2$  est répartie entre les mailles  $K$  et  $L$ . Dans le cas de la discrétisation centrée, cette quantité est équi-répartie entre les mailles  $K$  et  $L$ . Dans le cas de la discrétisation décentrée, cette quantité est mise en intégralité dans la maille qui a la température la plus importante. Notons qu'une autre interprétation de ce terme est donnée dans la Remarque 5.3.

---

**Algorithme 1** Assemblage du terme effet Joule dans le cas particulier où  $\Gamma_D = \emptyset$ .

I. DISCRÉTISATION CENTRÉE (5.31)      II. DISCRÉTISATION DÉCENTRÉE (5.42)

**pour**  $\sigma \in \mathcal{E}^{\text{int}}$ ,  $\sigma = K|L$  **faire**

$$J_K(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1})_+ = \frac{\tau_\sigma}{2} (\theta_K^{n+1} - \theta_L^{n+1})^2$$

$$J_L(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1})_+ = \frac{\tau_\sigma}{2} (\theta_K^{n+1} - \theta_L^{n+1})^2$$

**fin du pour**

**pour**  $\sigma \in \mathcal{E}^{\text{int}}$ ,  $\sigma = K|L$  **faire**

**si**  $\theta_K^{n+1} \geq \theta_L^{n+1}$  **alors**

$$J_K(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1})_+ = \tau_\sigma (\theta_K^{n+1} - \theta_L^{n+1})^2$$

**sinon**

$$J_L(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1})_+ = \tau_\sigma (\theta_K^{n+1} - \theta_L^{n+1})^2$$

**fin du si**

**fin du pour**

---

**Proposition 5.6.** *On suppose que la donnée initiale et la condition aux limites satisfont (5.35) et (5.36). Alors le schéma (5.29) avec la discrétisation du terme effet Joule (5.42) et la définition de  $\theta_\sigma^{n+1}$  (5.16) admet au moins une solution  $(\theta_{\mathcal{T}}^n)$  qui vérifie (5.37).*

*Démonstration.* On vérifie immédiatement qu'une solution de (5.29) satisfait (5.37) au vu de la définition de  $\mathcal{J}_K(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1})$  donnée en (5.42). L'existence se montre par un argument de degré topologique comme dans la démonstration de la Proposition 5.2.  $\square$

#### 5.4.4 Un schéma peu adapté

Une autre possibilité de schéma numérique pourrait enfin être obtenue en utilisant la définition du gradient discret (5.30). Cela donne pour le terme effet Joule :

$$\mathcal{J}_K(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) = \left( \frac{1}{m_K} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_{\sigma} (\theta_K^{n+1} - \theta_{K,\sigma}^{n+1}) (\mathbf{x}_{\sigma} - \mathbf{x}_K) \right)^2. \quad (5.43)$$

En notant

$$\xi = \max_{\sigma \in \mathcal{E}^{\text{int}}, \sigma=K|L} \frac{d_{K,\sigma}}{d_{KL}},$$

on a la proposition suivante :

**Proposition 5.7.** *On suppose que (5.35) et (5.36) sont satisfaites. Soit  $(\theta_{\mathcal{T}}^n)_n$  une solution du schéma (5.29) avec la discrétisation du terme effet Joule (5.43). Alors :*

a) *Si l'on suppose la restriction*

$$M \leq \frac{8\xi + 1}{8\xi - 1} m, \quad (5.44)$$

*et que  $\theta_{\sigma}^{n+1}$  est défini par (5.15), alors le schéma admet au moins une solution qui satisfait (5.37).*

b) *Si l'on suppose la restriction*

$$M \leq \frac{4\xi}{4\xi - 1} m, \quad (5.45)$$

*et que  $\theta_{\sigma}^{n+1}$  est défini par (5.16), alors le schéma admet au moins une solution qui satisfait (5.37).*

*Remarque 5.6.* On note que dans le meilleur des cas, c'est à dire pour le choix de  $\theta_{\sigma}^{n+1}$  (5.16) et lorsque  $\xi = \frac{1}{2}$  (par exemple lorsque le maillage est de Voronoï), la contrainte liant  $m$  et  $M$  est  $M \leq 2m$ , ce qui est très contraignant. C'est pourquoi ce choix de schéma s'avère être peu judicieux pour la résolution de (5.28).

*Démonstration.* La preuve est similaire à la démonstration du Théorème 5.3, nous ne détaillerons ici que les points spécifiques à la discrétisation du terme effet Joule

(5.43). On commence par définir le schéma intermédiaire dans lequel on remplace  $\theta_\sigma^{n+1}$  par  $\tilde{\theta}_\sigma^{n+1}$  qui est défini par :

$$\tilde{\theta}_\sigma^{n+1} = \max(0, \theta_\sigma^{n+1}, \theta_\sigma^{n+1} - 5 \min(\theta_K^{n+1}, \theta_{K,\sigma}^{n+1})),$$

de telle sorte que  $\tilde{\theta}_\sigma^{n+1}$  coïncide avec  $\theta_\sigma^{n+1}$  lorsque  $m \leq \theta_K^{n+1} \leq M$ .

On raisonne par récurrence sur  $n$ . Supposons que pour un  $n$  donné, (5.37) soit vérifié. L'obtention de la borne supérieure ( $\theta_K^{n+1} \leq M$ ) est immédiate, intéressons nous à l'autre borne. On suppose par l'absurde que

$$\theta_{K_m}^{n+1} = \min_{N \in \mathcal{T}} \theta_N^{n+1} < m.$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} & 2 m_{K_m} \mathcal{J}_{K_m}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_m}} \tilde{F}_{K_m, \sigma}^{n+1} \\ &= \frac{2}{m_{K_m}} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_m}} \tau_\sigma (\theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m, \sigma}^{n+1}) (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_{K_m}) \right)^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_m}} \tau_\sigma \tilde{\theta}_\sigma^{n+1} (\theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m, \sigma}^{n+1}) \\ &= \frac{1}{m_{K_m}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_m}} \tau_\sigma (\theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m, \sigma}^{n+1}) A_{K_m, \sigma}, \end{aligned}$$

avec

$$A_{K_m, \sigma} = 2 \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}_{K_m}} \left( \tau_{\sigma'} (\theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m, \sigma'}^{n+1}) (\mathbf{x}_{\sigma'} - \mathbf{x}_{K_m}) \cdot (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_{K_m}) \right) + m_{K_m} \tilde{\theta}_\sigma^{n+1}.$$

Comme  $\theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m, \sigma}^{n+1} \leq 0$ , il suffit de montrer que  $A_{K_m, \sigma} \geq 0$ . On remarque que :

$$\tau_{\sigma'} (\mathbf{x}_{\sigma'} - \mathbf{x}_{K_m}) = \frac{m_{\sigma'}}{d_{\sigma'}} d_{K_m, \sigma'} \mathbf{n}_{K_m, \sigma'} = 2 \frac{m_{D_{K_m, \sigma'}}}{d_{\sigma'}} \mathbf{n}_{K_m, \sigma'},$$

et que

$$m_{K_m} = \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}_{K_m}} m_{D_{K_m, \sigma'}}.$$

On a alors :

$$A_{K_m, \sigma} = \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}_{K_m}^{\text{int}}} m_{D_{K_m, \sigma'}} \left( \frac{4}{d_{\sigma'}} \mathbf{n}_{K_m, \sigma'} \cdot (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_{K_m}) (\theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m, \sigma'}^{n+1}) + \tilde{\theta}_\sigma^{n+1} \right).$$

Notons que  $\theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m, \sigma'}^{n+1} \leq 0$ , et que pour  $\sigma' \neq \sigma$ ,  $\mathbf{n}_{K_m, \sigma'} \cdot (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_{K_m}) \leq 0$ . Une

condition suffisante pour que  $A_{K_m, \sigma}$  soit positif est que  $a_{K_m, \sigma} \geq 0$ , où :

$$a_{K_m, \sigma} := \frac{4}{d_\sigma} \mathbf{n}_{K_m, \sigma} \cdot (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_{K_m}) (\theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m, \sigma}^{n+1}) + \tilde{\theta}_\sigma^{n+1}.$$

Discutons du signe de  $a_{K_m, \sigma}$  en fonction du choix de  $\theta_\sigma^{n+1}$ . Nous allons uniquement montrer le cas où  $\theta_\sigma^{n+1}$  est donné par (5.15), le cas (5.16) est similaire. Comme on a supposé par l'absurde  $\theta_{K_m}^{n+1} < m$ , on a :

$$\begin{aligned} a_{K_m, \sigma} &\geq 4 \frac{d_{K_m, \sigma}}{d_\sigma} (\theta_{K_m}^{n+1} - \theta_{K_m, \sigma}^{n+1}) + \frac{\theta_{K_m}^{n+1} + \theta_{K_m, \sigma}^{n+1}}{2} - 5(\theta_{K_m}^{n+1} - m) \\ &= \left( 4 \frac{d_{K_m, \sigma}}{d_\sigma} - \frac{9}{2} \right) (m - \theta_{K_m}^{n+1}) - \left( 4 \frac{d_{K_m, \sigma}}{d_\sigma} - \frac{1}{2} \right) \theta_{K_m, \sigma}^{n+1} + \left( \frac{1}{2} + 4 \frac{d_{K_m, \sigma}}{d_\sigma} \right) m \end{aligned}$$

Par analogie à la démonstration de la Proposition 5.4, on en déduit qu'une condition nécessaire pour avoir (5.37) est

$$M \leq \frac{4\xi + \frac{1}{2}}{4\xi - \frac{1}{2}}.$$

On termine la preuve avec un argument de degré topologique. □

## 5.5 Expérimentations numériques

Dans la section précédente, nous avons étudié le schéma numérique (5.29) pour lequel différentes discrétisations ont été envisagées pour le terme de diffusion (choix de  $\theta_\sigma^{n+1}$  (5.15) ou (5.16)) et pour le terme effet Joule (discrétisation (5.31), (5.42) ou (5.43)). Nous allons ici les mettre en œuvre et les comparer selon deux principaux critères : vérification du principe du maximum et ordre de convergence.

Il sera commode de donner un nom à chacun de ces schémas, qui sont donnés dans le Tableau 5.1. Notons que le schéma  $(\mathcal{SD}_{\max} \mathcal{J}_{\text{up}})$  ne sera pas considéré. En effet, il a été montré précédemment que les schémas  $(\mathcal{SD}_{\max} \mathcal{J}_{\text{cen}})$  et  $(\mathcal{SD}_{\text{moy}} \mathcal{J}_{\text{up}})$  vérifient tous les deux le principe du maximum. Il est donc inutile de décentrer à la fois le terme de diffusion et le terme effet Joule. Cela ne ferait qu'ajouter de la diffusion numérique au schéma.

Les simulations seront menées sur les maillages  $\mathcal{T}_k$  définis dans l'Exemple 5.1. À chaque pas de temps, un système non-linéaire est résolu grâce à la méthode de Newton. Les détails concernant son implémentation sont donnés dans l'Annexe C. Mentionnons qu'une procédure de pas de temps adaptatif est mise en place de façon

		Terme de Diffusion	
		$\theta_\sigma^{n+1} =$	
		$\frac{\theta_K^{n+1} + \theta_{K,\sigma}^{n+1}}{2}$	$\max(\theta_K^{n+1}, \theta_{K,\sigma}^{n+1})$
Terme	$\frac{1}{2m_K} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_\sigma (\theta_K^{n+1} - \theta_{K,\sigma}^{n+1})^2$	$(\mathcal{SD}_{\text{moy}} \mathcal{J}_{\text{cen}})$	$(\mathcal{SD}_{\text{max}} \mathcal{J}_{\text{cen}})$
effet Joule	$\frac{1}{m_K} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_\sigma \left( (\theta_K^{n+1} - \theta_{K,\sigma}^{n+1})^+ \right)^2$	$(\mathcal{SD}_{\text{moy}} \mathcal{J}_{\text{up}})$	$\times$
$\mathcal{J}_K(\theta_T^{n+1}) =$	$\left( \frac{1}{m_K} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \tau_\sigma (\theta_K^{n+1} - \theta_{K,\sigma}^{n+1}) (\mathbf{x}_\sigma - \mathbf{x}_K) \right)^2$	$(\mathcal{SD}_{\text{moy}} \mathcal{J}_{\text{EGH}})$	$(\mathcal{SD}_{\text{max}} \mathcal{J}_{\text{EGH}})$

TABLEAU 5.1: Récapitulatif des schémas considérés.

à assurer la convergence de la méthode. Notons également que de ce fait, le pas de temps calculé est assez petit de sorte que l'erreur observée correspond à l'erreur spatiale.

### 5.5.1 Cas test 1 : Vérification du principe du maximum

Nous avons montré précédemment que les schémas  $(\mathcal{SD}_{\text{max}} \mathcal{J}_{\text{cen}})$  et  $(\mathcal{SD}_{\text{moy}} \mathcal{J}_{\text{up}})$  satisfont le principe du maximum sans restriction sur  $m$  et  $M$ . Pour les autres schémas, nous l'avons montré uniquement sous la condition que  $M$  ne soit pas trop grand devant  $m$ . Nous allons illustrer par cette première expérimentation que si  $M$  est trop grand par rapport à  $m$ , ces schémas ne respectent effectivement pas le principe du maximum.

Pour cela, on définit sur  $\Omega = [0; 1]^2$  la température initiale :

$$\theta_0(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

La vitesse est nulle :

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Sur le bord, on impose des conditions aux limites de Dirichlet, voir la Figure 5.3.

On note  $\Gamma_H = \{1\} \times (0, 3; 0, 7)$  et on définit :

$$\theta_D(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma \setminus \Gamma_H \\ M & \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma_H. \end{cases}$$

Nous lançons les simulations pour différentes valeurs de  $M$  sur le maillage  $\mathcal{T}_2$  (défini

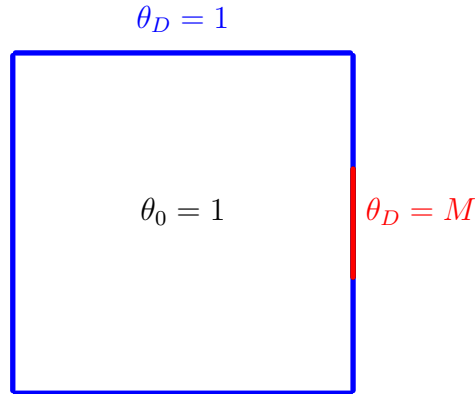


FIGURE 5.3: Conditions initiales et conditions aux limites du cas test 1.

dans l'Exemple 5.1 du paragraphe 5.3.1) et reportons les résultats obtenus dans le Tableau 5.2. On retrouve numériquement les résultats qui ont été montrés dans

$M =$	Schéma	$(\mathcal{SD}_{\text{moy}}\mathcal{J}_{\text{EGH}})$	$(\mathcal{SD}_{\text{max}}\mathcal{J}_{\text{EGH}})$	$(\mathcal{SD}_{\text{moy}}\mathcal{J}_{\text{cen}})$	$(\mathcal{SD}_{\text{max}}\mathcal{J}_{\text{cen}})$	$(\mathcal{SD}_{\text{moy}}\mathcal{J}_{\text{up}})$
2		✓	✓	✓	✓	✓
3		✗	✓	✓	✓	✓
4		✗	✓	✗	✓	✓
10		✗	✗	✗	✓	✓
100		✗	✗	✗	✓	✓

TABLEAU 5.2: Vérification du principe du maximum en fonction de  $M$ . ✓ : le principe du maximum est satisfait, ✗ : il ne l'est pas.

la section précédente : les schémas  $(\mathcal{SD}_{\text{max}}\mathcal{J}_{\text{cen}})$  et  $(\mathcal{SD}_{\text{moy}}\mathcal{J}_{\text{up}})$  nous permettent d'obtenir un principe du maximum quelque soit la valeur de  $M$ , en revanche les schémas  $(\mathcal{SD}_{\text{moy}}\mathcal{J}_{\text{EGH}})$ ,  $(\mathcal{SD}_{\text{max}}\mathcal{J}_{\text{EGH}})$  et  $(\mathcal{SD}_{\text{moy}}\mathcal{J}_{\text{cen}})$  ne donneront pas une solution qui satisfait le principe du maximum si  $M$  est grand. Notons que pour un fort ratio  $\frac{M}{m} = 100$ , le pas de temps qui assure la convergence de la méthode de Newton est très petit (de l'ordre de  $10^{-10}$ ), ce qui rend les schémas quasiment inutilisables. Cependant, l'objectif de ce cas test académique était de valider le fait que seuls les

schémas  $(\mathcal{SD}_{\max} \mathcal{J}_{\text{cen}})$  et  $(\mathcal{SD}_{\text{moy}} \mathcal{J}_{\text{up}})$  satisfont le principe du maximum quelque soit  $m$  et  $M$ .

### 5.5.2 Cas test analytique

Nous allons maintenant vérifier les ordres de convergence sur un cas test analytique. On considère le domaine  $\Omega = [0; 1]^2$ . Les simulations seront effectuées jusqu'au temps  $T = 0, 1$ . La solution exacte est définie pour  $(t, x, y) \in \Omega \times [0; T]$  par :

$$\theta_{\text{ex}}(t, x, y) = \frac{1+t}{5 \lambda \pi^2 (1+T)^2} (1, 5 + \cos \pi x) (1, 5 + \cos \pi y),$$

avec  $\lambda = 2$ . Pour la vitesse, deux cas seront considérés :

- a)  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,
- b)  $\mathbf{v}$  est défini par

$$\mathbf{v}(x, y) = \frac{1}{\lambda \pi^2} \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\pi y)}{1, 5 + \cos(\pi y)} \\ \frac{\sin(\pi x)}{1, 5 + \cos(\pi x)} \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

On impose des conditions aux limites de Dirichlet. On note

$$m = \min_{(x,y) \in \Omega} \theta_{\text{ex}}(0, x, y) = \frac{0, 5^2}{5 \pi^2 \lambda (1+T)^2} \simeq 2, 09 \cdot 10^{-3},$$

et

$$M = \max_{(x,y) \in \Omega} \theta_{\text{ex}}(0, x, y) = \frac{2, 5^2}{5 \pi^2 \lambda (1+T)^2} \simeq 5, 23 \cdot 10^{-2},$$

Une second membre  $f$  est ajouté à (5.28) de façon à ce que  $\theta_{\text{ex}}$  en soit solution. On observe que  $f$  est identique pour le choix de vitesse a) ou b) car pour chaque cas,  $\mathbf{v}$  est orthogonal au gradient de température. Notons que la constante  $1/(5 \lambda \pi^2 (1+T)^2)$  intervenant dans la définition de  $\theta_{\text{ex}}$  a été choisie de sorte que  $f \geq 0$ . Cela nous garantit que :

$$\theta_{\text{ex}}(t, x, y) \geq m, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

On ajoute également un second membre  $(f_K^{n+1})_{K \in \mathcal{T}}$  dans (5.29) défini par :

$$f_K^{n+1} = m_K f(t^{n+1}, x_K, y_K) \geq 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}.$$

Pour cette solution régulière, on observe numériquement pour tous les schémas que

$$\theta_K^n \geq m, \quad \forall K \in \mathcal{T}, \quad \forall n = 0, \dots, N.$$

Les simulations sont réalisées sur les maillages  $\mathcal{T}_k$  définis dans l'Exemple 5.1 du

paragraphe 5.3.1, pour  $k = 2, \dots, 6$ . On a tracé sur la Figure 5.4 l'erreur en température en norme  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  en fonction de la taille du maillage  $h$ , en échelle log-log, pour chaque schéma. Nous remarquons que sans le terme de convection (cas a)), les schémas  $(\mathcal{SD}_{\text{moy}}\mathcal{J}_{\text{EGH}})$  et  $(\mathcal{SD}_{\text{moy}}\mathcal{J}_{\text{cen}})$  convergent à l'ordre 2, et les autres sont seulement à l'ordre 1. Ainsi, le décentrement que l'on a fait dans le terme de diffusion (schéma  $(\mathcal{SD}_{\text{max}}\mathcal{J}_{\text{cen}})$ ) ou dans le terme effet Joule  $(\mathcal{SD}_{\text{moy}}\mathcal{J}_{\text{up}})$  afin d'obtenir le principe du maximum dégrade l'ordre de convergence. On note également que si l'on ajoute le terme de convection (cas b)), l'ordre de convergence des schémas  $(\mathcal{SD}_{\text{moy}}\mathcal{J}_{\text{EGH}})$  et  $(\mathcal{SD}_{\text{moy}}\mathcal{J}_{\text{cen}})$  est dégradé à l'ordre 3/2, ce à quoi l'on pouvait s'attendre car la discrétisation faite pour ce terme est seulement d'ordre 1.

### 5.5.3 Bilan des tests

Nous avons vu que parmi les différents schémas proposés, seuls deux satisfont le principe du maximum sans restriction sur les données : les schémas  $(\mathcal{SD}_{\text{max}}\mathcal{J}_{\text{cen}})$  et  $(\mathcal{SD}_{\text{moy}}\mathcal{J}_{\text{up}})$ . On observe sur le cas test analytique que bien que les deux schémas convergent au même ordre, l'erreur obtenue avec ce dernier schéma est un peu plus importante. C'est pourquoi dans la suite nous choisissons d'utiliser la discrétisation  $(\mathcal{SD}_{\text{max}}\mathcal{J}_{\text{cen}})$ . Cependant, le schéma  $(\mathcal{SD}_{\text{moy}}\mathcal{J}_{\text{up}})$  permet d'obtenir un principe du maximum même avec une diffusion plus faible, ou sans diffusion du tout. Ce schéma pourrait donc être utilisé avantageusement sur d'autres modèles.

## 5.6 Couplage avec l'équation en vitesse

Maintenant que nous avons validé dans la section 5.5 notre méthode numérique pour l'équation de température, nous allons l'intégrer dans un code permettant de simuler le système couplé température/vitesse (4.11)–(4.12) étudié au Chapitre 4. On considère le système dont les inconnues sont la température  $\theta$ , la vitesse solénoïdale  $\mathbf{v}$  et la pression modifiée  $p$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \theta + \nabla \cdot (\theta \mathbf{v}) + 2\lambda |\nabla \theta|^2 - \lambda \nabla \cdot (\theta \nabla \theta) = 0, \quad (5.47a) \\ \frac{1}{\theta} (\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) - \nabla \cdot (\mu(\theta) \mathbb{D} \mathbf{v}) + \frac{\lambda}{\theta} (\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) \nabla \theta + \nabla p = \frac{1}{\theta} \mathbf{g}, \quad (5.47b) \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (5.47c) \end{array} \right.$$

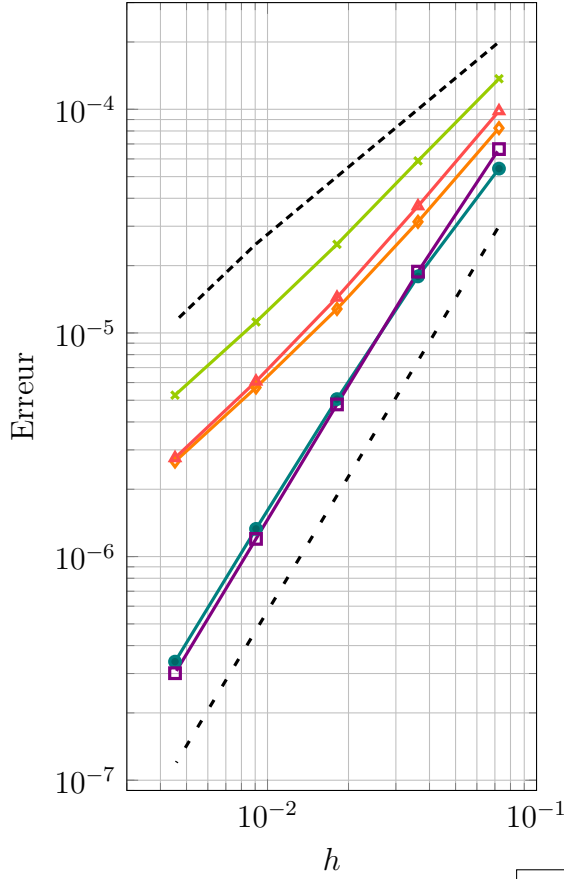
où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est défini par (4.4) ;  $\mu$  est défini par  $\mu(\theta) = -\lambda \ln \theta$  et  $\mathbf{g}$  est le vecteur gravité. Les conditions initiales et les conditions aux limites sont respectivement données par

$$\begin{cases} \theta(0, \mathbf{x}) = \theta_0(x), & \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{v}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(x), & \forall \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases}$$

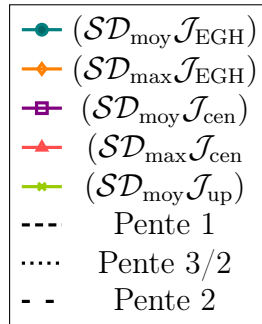
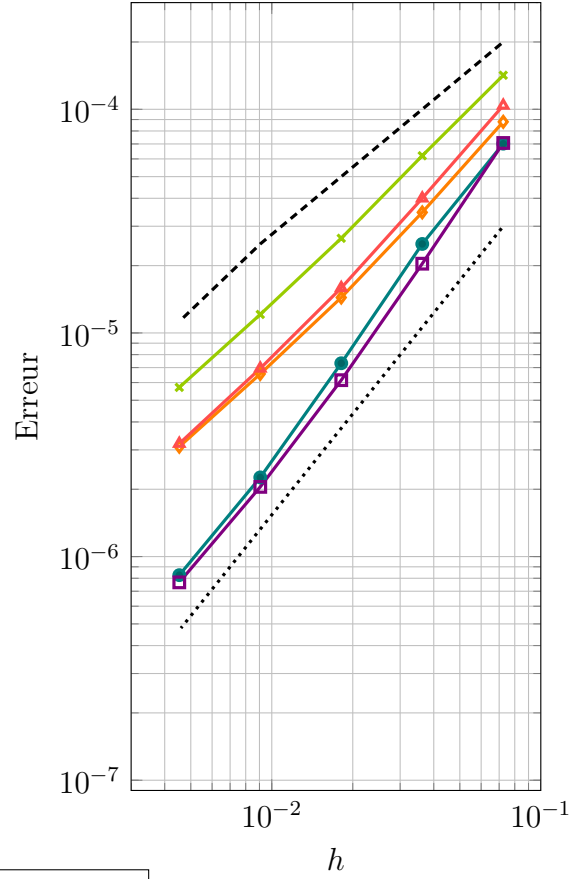


a)  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 

Erreur en température

b)  $\mathbf{v}$  donné par (5.46)

Erreur en température

FIGURE 5.4: Erreurs en norme  $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$  en fonction de  $h$ .

et

$$\begin{cases} \nabla \theta(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0, & \forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N, \\ \theta(t, \mathbf{x}) = \theta_D(\mathbf{x}), & \forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D, \\ \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_D(t, \mathbf{x}), & \forall t \in [0, T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \end{cases}$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal unitaire sortant.

### 5.6.1 Le splitting en temps

On note  $\Delta t$  le pas de temps, et on définit  $t^n = n \Delta t$  pour  $n \geq 0$ . On utilise le schéma d'ordre 1 en temps suivant :

1. La nouvelle température  $\theta^{n+1}$  est calculée par la méthode de volumes finis décrite dans la section 5.4 (schéma  $(\mathcal{SD}_{\max} \mathcal{J}_{\text{cen}})$ ) :

$$\begin{cases} \frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\theta^{n+1} \mathbf{v}^n) + 2\lambda |\nabla \theta^{n+1}|^2 - \lambda \nabla \cdot (\theta^{n+1} \nabla \theta^{n+1}) = 0, \\ \nabla \theta^{n+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N, \\ \theta^{n+1}(\mathbf{x}) = \theta_D(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D. \end{cases} \quad (5.48)$$

2.  $\mathbf{v}^{n+1}$  et  $p^{n+1}$  sont calculés par des éléments finis  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$ , suivant la méthode détaillée dans [12] et dans le Chapitre 3 :

$$\begin{cases} \frac{1}{\theta^{n+1}} \left( \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n+1} \right) - \nabla \cdot (\mu(\theta^{n+1}) \mathbb{D} \mathbf{v}^{n+1}) \\ \quad + \frac{\lambda}{\theta^{n+1}} (\nabla \mathbf{v}^{n+1} - \nabla^T \mathbf{v}^{n+1}) \nabla \theta^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \frac{1}{\theta^{n+1}} \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0, \\ \mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_D(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma. \end{cases} \quad (5.49)$$

### 5.6.2 Discrétisation spatiale

La discrétisation spatiale s'appuie sur la triangulation  $\mathcal{T}_k$  du domaine  $\Omega$  définie dans l'Exemple 5.1. Les inconnues pour la température sont au centre des mailles alors que celles pour la vitesse et la pression sont sur les sommets des triangles comme le montre la Figure 5.5.

La méthode numérique pour la discrétisation de la température a été détaillée dans la section 5.4 et celle concernant la discrétisation de la vitesse et de la pression a été détaillée dans [12] et dans le Chapitre 3. Ici, comme dans le chapitre 2, la méthode de projection est utilisée. Le seul point que nous détaillerons ici est la passerelle entre les deux méthodes.

#### 5.6.2.1 Définition d'une température par nœud

Tout d'abord, nous voulons à partir d'une température par mailles obtenue par résolution de (5.48), déduire une température par nœud qui sera utilisée dans (5.49). Pour cela, on définit simplement la température au nœud  $A$  comme étant la moyenne des températures sur les mailles voisines, voir la Figure 5.6.

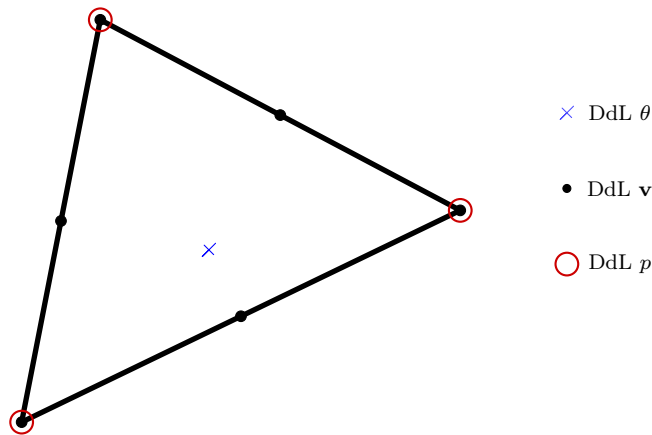
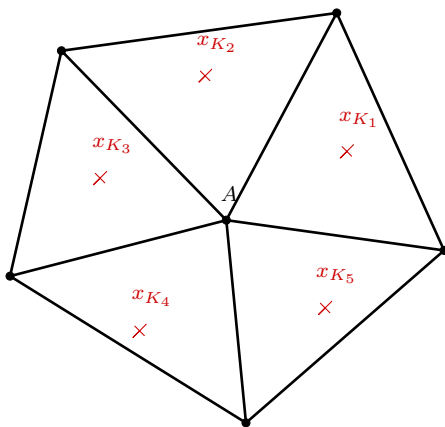


FIGURE 5.5: Degrés de liberté (DdL) de chaque variable.



$$\theta_A = \frac{\sum_{i=1}^5 m_{K_i} \theta_{K_i}}{\sum_{i=1}^5 m_{K_i}}$$

FIGURE 5.6: Définition de la température au nœud  $A$ .

### 5.6.2.2 Définition d'une vitesse par arête

Ensuite, à partir du champ de vitesse  $\mathbb{P}_2$  provenant de la résolution de (5.49), nous devons définir une vitesse par arête vérifiant la contrainte de divergence nulle au sens volumes finis (5.17). Ici, nous ne pouvons pas reprendre l'idée de [12], et adaptée dans le Chapitre 3 pour la méthode de projection, qui consiste à définir une vitesse  $\mathbf{u}^*$  constante par triangle. En effet, les inconnues pour la température sont situées au centre des mailles, et non aux sommets. Nous allons donc chercher une vitesse qui vérifie (5.17) et qui soit proche de la vitesse élément fini dans un sens qu'on précisera.

On commence par introduire quelques notations. Tout d'abord pour  $\sigma \in \mathcal{E}^{\text{int}}$ ,

on définit arbitrairement  $K_\sigma^+$  et  $K_\sigma^-$  les deux triangles tels que  $\sigma = K_\sigma^+ | K_\sigma^-$ . Pour  $\sigma \in \mathcal{E}^{\text{ext}}$ , on note  $K_\sigma^+$  le triangle tel que  $\sigma \subset \partial K_\sigma^+$ . Soit  $\mathbf{n}_\sigma$  le vecteur unitaire normal à  $\sigma$  sortant de  $K_\sigma^+$ , voir la Figure 5.7.

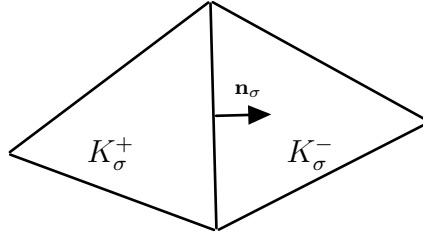


FIGURE 5.7: Triangles voisins de  $\sigma$  et vecteur normal.

On définit également pour  $K \in \mathcal{T}$  et  $\sigma \in \mathcal{E}_K$  :

$$\varepsilon_{K,\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{si } K = K_\sigma^+, \\ -1 & \text{si } K = K_\sigma^-. \end{cases}$$

On note  $(\mathbf{v}_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}}$  la valeur de la vitesse au centre des arêtes obtenue à partir du champ de vitesse  $\mathbb{P}_2$  solution de (5.49). Alors on a :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m_\sigma \mathbf{v}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma = \alpha_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}, \quad (5.50)$$

avec  $(\alpha_K)_{K \in \mathcal{T}}$  une suite de réels en général différents de 0. En notant  $(f_\sigma) \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{E}}$  le flux global (pondéré) défini par :

$$f_\sigma = m_\sigma \mathbf{v}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E},$$

l'équation (5.50) se réécrit :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \varepsilon_{K,\sigma} f_\sigma = \alpha_K, \quad \forall K \in \mathcal{T}. \quad (5.51)$$

On va donc approcher  $(f_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}}$  par  $(\tilde{f}_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}}$  tel que :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \varepsilon_{K,\sigma} \tilde{f}_\sigma = 0.$$

Plus précisément, on va résoudre le problème d'optimisation global suivant :

$$(\tilde{f}_\sigma) = \operatorname{argmin}_{(\tilde{h}_\sigma) \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{E}}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{\text{int}}} w_\sigma (f_\sigma - \tilde{h}_\sigma)^2 \quad ; \quad \forall K \in \mathcal{T}, \quad \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \varepsilon_{K,\sigma} \tilde{h}_\sigma = 0 \right\}, \quad (5.52)$$

où  $(w_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}}$  est une suite de poids strictements positifs, qui pourront être définis par exemple par  $w_\sigma = 1$  ou  $w_\sigma = \frac{m_\sigma}{d_\sigma}$ ,  $\forall \sigma \in \mathcal{E}$ . Numériquement, nous avons observé des comportements similaires pour les deux possibilités. La solution du problème (5.52) est donnée par la proposition suivante, établie en collobaration avec B. Merlet [71].

**Proposition 5.8.** Soit  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{T} \times \#\mathcal{T}}$  la  $M$ -matrice définie pour  $K, L \in \mathcal{T}$  par :

$$\mathbf{M}_{KL} = \begin{cases} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \frac{1}{w_\sigma} & \text{si } K = L, \\ -\frac{1}{w_\sigma} & \text{si } \bar{K} \cap \bar{L} = \sigma, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et  $A = (\alpha_K)_{K \in \mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{T}}$ . Soit  $\Lambda = (\lambda_K)_{K \in \mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{T}}$  la solution du système linéaire

$$\mathbf{M} \Lambda = A. \quad (5.53)$$

Alors la solution de (5.52) est définie pour  $\sigma \in \mathcal{E}$  par :

$$\tilde{f}_\sigma = f_\sigma - \frac{1}{w_\sigma} (\lambda_{K_\sigma^+} - \lambda_{K_\sigma^-}), \quad (5.54)$$

où pour  $\sigma \in \mathcal{E}^{\text{ext}}$  telle que  $\sigma \subset \partial K$ , on a défini  $\lambda_{K_\sigma^-} = 0$ .

*Démonstration.* Avec le changement de variable

$$g_\sigma = \tilde{f}_\sigma - f_\sigma, \quad (5.55)$$

le problème (5.52) se réécrit :

$$(g_\sigma) = \operatorname{argmin}_{(h_\sigma) \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{E}}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} w_\sigma h_\sigma^2 \quad ; \quad \forall K \in \mathcal{T}, \quad \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \varepsilon_{K,\sigma} h_\sigma + \alpha_K = 0 \right\}, \quad (5.56)$$

On définit le lagrangien associé au problème (5.56) pour  $(h_\sigma) \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{E}}$ ,  $(\mu_K) \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{T}}$  :

$$\mathcal{L}((h_\sigma), (\mu_K)) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} w_\sigma h_\sigma^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}} \mu_K \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \varepsilon_{K,\sigma} h_\sigma + \alpha_K \right).$$

Nous allons montrer l'existence d'un point-selle de  $\mathcal{L}$ . Son premier argument sera

par conséquent solution du problème (5.56), tandis que le second correspond au multiplicateur de Lagrange associé aux contraintes, voir par exemple [24]. Rappelons que si  $((g_\sigma), (\lambda_K))$  est un point-selle de  $\mathcal{L}$ , alors :

$$\sup_{(\mu_K)} \inf_{(h_\sigma)} \mathcal{L}((h_\sigma), (\mu_K)) = \mathcal{L}((g_\sigma), (\lambda_K)) = \inf_{(h_\sigma)} \sup_{(\mu_K)} \mathcal{L}((h_\sigma), (\mu_K)).$$

On commence par calculer  $\mathcal{H}((\mu_K)) = \inf_{(h_\sigma)} \mathcal{L}((h_\sigma), (\mu_K))$ . Pour cela, on calcule  $(g_\sigma)$  (qui dépend de  $(\mu_K)$ ) qui vérifie pour  $\sigma \in \mathcal{E}$  :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_\sigma}((g_\sigma), (\mu_K)) = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$w_\sigma g_\sigma + \mu_{K_\sigma^+} - \mu_{K_\sigma^-} = 0,$$

soit

$$g_\sigma = -\frac{1}{w_\sigma} (\mu_{K_\sigma^+} - \mu_{K_\sigma^-}). \quad (5.57)$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}((\mu_K)) &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{1}{w_\sigma} (\mu_{K_\sigma^+} - \mu_{K_\sigma^-})^2 \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}} \mu_K \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} -\frac{\varepsilon_{K,\sigma}}{w_\sigma} (\mu_{K_\sigma^+} - \mu_{K_\sigma^-}) + \alpha_K \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{1}{w_\sigma} (\mu_{K_\sigma^+} - \mu_{K_\sigma^-})^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}} \mu_K \alpha_K \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{1}{w_\sigma} (\mu_K - \mu_{K,\sigma})^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}} \mu_K \alpha_K, \end{aligned}$$

où

$$\mu_{K,\sigma} = \begin{cases} \mu_L & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_K^{\text{int}}, \quad \sigma = K|L, \\ 0 & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_K^{\text{ext}}. \end{cases} \quad (5.58)$$

Calculons maintenant  $(\lambda_K) = \operatorname{argmax}_{(\mu_K)} \mathcal{H}((\mu_K))$ . Pour cela, on résout pour  $K \in \mathcal{T}$

$$\frac{\partial(-\mathcal{H})}{\partial \mu_K}((\lambda_K)) = 0,$$

ce qui est équivalent, en appliquant la notation (5.58) à  $\lambda_{K,\sigma}$ , à

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \frac{1}{w_\sigma} (\lambda_K - \lambda_{K,\sigma}) - \alpha_K = 0.$$

Ainsi,  $(\lambda_K)$  est obtenue par résolution du système linéaire (5.53). On en déduit donc l'expression de  $(g_\sigma)$  grâce à (5.57) et de  $(\tilde{f}_\sigma)$  avec (5.55).

□

## 5.6.3 Simulations numériques

### 5.6.3.1 La cavité chauffée

Nous allons tester notre schéma numérique pour le problème couplé en température/vitesse sur le cas test de la cavité chauffée défini au Chapitre 3, section 3.4.3.1. Cette fois-ci, on choisit un nombre de Rayleigh  $Ra = 10^5$  est une valeur de  $\varepsilon = 0,01$ , pour lesquels la pression thermodynamique peut être considérée comme quasiment constante, voir par exemple [56].

Le domaine  $\Omega = [0; 1]$  est représenté sur la Figure 3.5(a). La température est mise à l'échelle afin d'être comprise entre 0 et 1. Ainsi, on définit les données initiales par :

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \theta_0 = 0,5.$$

Les parois horizontales sont isolées, de sorte que

$$\nabla\theta(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \forall t \in [0; T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N = [0, 1] \times \{0, 1\}.$$

Sur les parois verticales, on impose des conditions aux limites de type Dirichlet, ie  $\Gamma_D = \{0, 1\} \times [0, 1]$ . Une température de  $\theta_h = \theta_0(1 + \varepsilon)$  (respectivement  $\theta_c = \theta_0(1 - \varepsilon)$ ) est imposée sur le mur de gauche (respectivement droite), avec  $\varepsilon = 0,01$ . Sur toutes les parois, la condition de non glissement se traduit pour la vitesse solénoïdale par :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) &= \mathbf{0}, \quad \forall t \in [0; T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N, \\ \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) &= \lambda \nabla\theta(t, \mathbf{x}), \quad \forall t \in [0; T], \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D. \end{aligned}$$

Afin de nous placer dans la même configuration que [56], nous allons calculer pour quelle valeur de  $\lambda$  le nombre de Rayleigh de référence vaut  $10^5$ . Pour cela, rappelons que la densité du fluide est donnée à l'aide de la loi d'état. On peut donc définir une densité de référence par :

$$\rho_{\text{ref}} = \frac{P_0}{R\theta_{\text{ref}}}, \quad (5.59)$$

où  $P_0$  est la pression thermodynamique du fluide (constante) et  $R$  est la constante des gaz parfaits. On réexprime également  $\lambda$ , qui a été défini par (4.4). En utilisant la valeur de la capacité thermique du fluide à pression constante dans le cas d'un

gaz parfait (1.19) et la définition du nombre de Prandtl (1.8), on a :

$$\lambda = \frac{R \kappa}{C_P P_0} = \frac{R \mu_{\text{ref}}}{P_0 \text{Pr}}. \quad (5.60)$$

De plus, on rappelle que la viscosité du fluide est donnée par (4.5) et (4.6) :

$$\tilde{\mu}(\theta) = -\frac{P_0}{2R} \lambda \ln \theta.$$

On peut donc définir une viscosité de référence par :

$$\mu_{\text{ref}} = \frac{P_0}{2R} \lambda |\ln \theta_{\text{ref}}|. \quad (5.61)$$

Nous pouvons maintenant exprimer le nombre de Rayleigh du fluide en fonction de  $\lambda$ . En effet, par définition, on a :

$$\text{Ra} = \frac{2 \varepsilon \text{Pr} \rho_{\text{ref}}^2 |\mathbf{g}| L_{\text{ref}}^3}{\mu_{\text{ref}}^2}.$$

Avec (5.59) et (5.60), on obtient :

$$\text{Ra} = \frac{2 \varepsilon P_0 |\mathbf{g}| L_{\text{ref}}^3}{\lambda \mu_{\text{ref}} R \theta_{\text{ref}}^2}$$

En utilisant (5.61), on a :

$$\text{Ra} = \frac{4 \varepsilon |\mathbf{g}| L_{\text{ref}}^3}{\lambda^2 |\ln \theta_{\text{ref}}| \theta_{\text{ref}}^2}.$$

En prenant comme température de référence  $\theta_{\text{ref}} = 0,5$  et comme longueur de référence  $L_{\text{ref}} = 1$ , on obtient pour  $\lambda$  :

$$\lambda = \sqrt{\frac{4 \varepsilon |\mathbf{g}| L_{\text{ref}}^3}{\text{Ra} |\ln \theta_{\text{ref}}| \theta_{\text{ref}}^2}} \simeq 4,76 \cdot 10^{-2}.$$

Nous utilisons les maillages  $\mathcal{T}_k$ ,  $k = 2, \dots, 5$ , définis dans l'Exemple 5.1. Les itérations en temps sont faites jusqu'à ce que l'état stationnaire numérique soit atteint, c'est-à-dire que le résidu pour la vitesse solénoïdale et la température soit inférieur à  $10^{-10}$ . Nous représentons sur la Figure 5.8 la vitesse (champ de vitesse et lignes de courant) et la température à l'état stationnaire sur le maillage  $\mathcal{T}_4$ . L'allure des solutions obtenues est proche de celle donnée dans les figures 4 et 5 de [56].

### 5.6.3.2 Comparaisons avec le schéma C-FV-FE



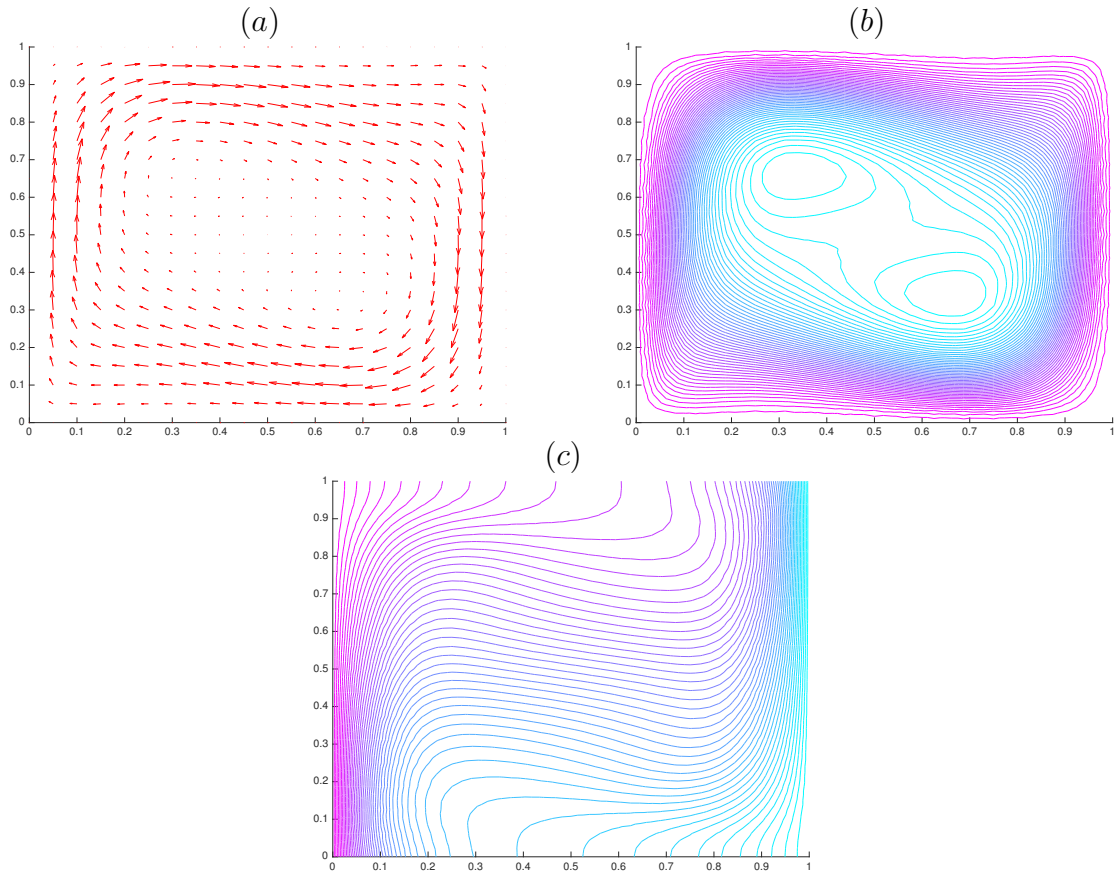


FIGURE 5.8: Solution stationnaire obtenue sur le maillage  $\mathcal{T}_4$ . (a) Champ de vitesse, (b) Lignes de courant, (c) Lignes de niveau de température.

Il n'est pas aisé de comparer le schéma numérique développé au Chapitre 3 avec celui étudié ici : d'une part parce que le système d'équations considéré est différent, mais également parce que le schéma développé dans ce chapitre est seulement d'ordre 1, et peut être considéré comme un travail préparatoire à l'élaboration d'un schéma plus performant.

Afin de se mettre dans les mêmes conditions pour les tests numériques, les simulations pour le schéma C-FV-FE sont réalisées sur le maillage structuré cartésien défini par la Figure 5.9. Les caractéristiques géométriques des maillages  $\mathcal{T}_k$ ,  $k = 2, \dots, 5$  et des grilles  $12 \times 12, \dots, 96 \times 96$  sont respectivement données dans le Tableau 5.3 et le Tableau 5.4. On observe que le nombre de triangles et le nombre de sommets des grilles  $\mathcal{T}_2$  et des grilles  $12 \times 12$  (respectivement  $\mathcal{T}_3$  et  $24 \times 24, \dots$ ) sont du même ordre. On indique également dans ces tableaux les pas de temps qui sont utilisés. On note que pour le schéma C-FV-FE, le pas de temps est fixe, alors que pour le schéma étudié dans ce chapitre, il peut être réduit afin d'assurer la convergence de la méthode de Newton, voir l'Annexe C (la précision demandée ici dans le critère d'arrêt est de

$10^{-5}$ , en moyenne moins de 2/3 itérations sont nécessaires pour l'obtenir quelque soit la grille considérée). On donne dans le tableau le pas de temps minimal, calculé au début de la simulation. On observe que le pas de temps augmente lorsque l'on approche de l'état stationnaire, jusqu'à atteindre le pas de temps maximal fixé (dans tous les cas, le pas de temps maximal est obtenu au bout de moins d'une seconde de temps de simulation). Notons que nous avons observé des résultats numériques similaires avec une précision demandée de  $10^{-11}$  dans la méthode de Newton, mais dans ce dernier cas, le pas de temps est environ 8 fois plus petit, ce qui rend les calculs extrêmement coûteux.

Maillage	Nombre de triangles	Nombre de sommets	Nombre d'arêtes	$\Delta t_{\min}$	$\Delta t_{\max}$
$\mathcal{T}_2$	224	129	352	$3,33 \cdot 10^{-2}$	$6,67 \cdot 10^{-2}$
$\mathcal{T}_3$	896	481	1376	$1,67 \cdot 10^{-2}$	$3,33 \cdot 10^{-2}$
$\mathcal{T}_4$	3584	1857	5440	$8,33 \cdot 10^{-3}$	$1,67 \cdot 10^{-2}$
$\mathcal{T}_5$	14336	7297	21632	$2,08 \cdot 10^{-3}$	$8,33 \cdot 10^{-3}$

TABLEAU 5.3: Caractéristiques géométriques des maillages  $\mathcal{T}_k$ ,  $k = 2, \dots, 5$  et pas de temps.

Grille	Nombre de triangles	Nombre de sommets (nœuds $\mathbb{P}_1$ )	Nombre de nœuds $\mathbb{P}_2$	$\Delta t$
$12 \times 12$	288	169	625	$6,67 \cdot 10^{-2}$
$24 \times 24$	1152	625	1857	$3,33 \cdot 10^{-2}$
$48 \times 48$	4608	2401	7297	$1,67 \cdot 10^{-2}$
$96 \times 96$	18432	9409	28929	$8,33 \cdot 10^{-3}$

TABLEAU 5.4: Caractéristiques géométriques des maillages structurés  $12 \times 12, \dots, 96 \times 96$  et pas de temps.

Tout d'abord, nous nous intéressons à la convergence vers l'état stationnaire. On représente respectivement sur la Figure 5.10 et sur la Figure 5.11 l'évolution des erreurs relatives entre deux solutions successives pour la vitesse et la température en fonction du temps pour chacun des schémas. On observe que pour le schéma du Chapitre 5, les erreurs relatives sont de l'ordre de l'erreur machine en moins de 400 secondes, alors que pour le schéma C-FV-FE, la convergence vers 0 des erreurs relatives est plus lente. Notons qu'il n'est cependant pas nécessaire d'aller jusque l'erreur machine et que l'état stationnaire peut être considéré comme atteint lorsque les erreurs relatives en vitesse et en température sont inférieures à  $10^{-7}$ , ce qui est obtenu à environ  $t = 60/70$  s.

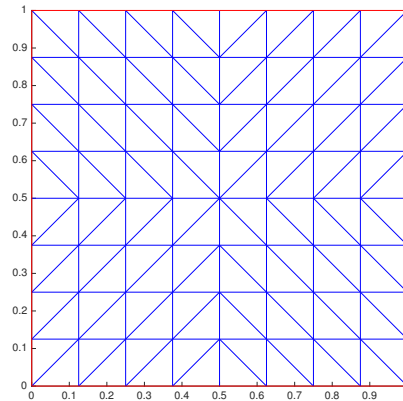
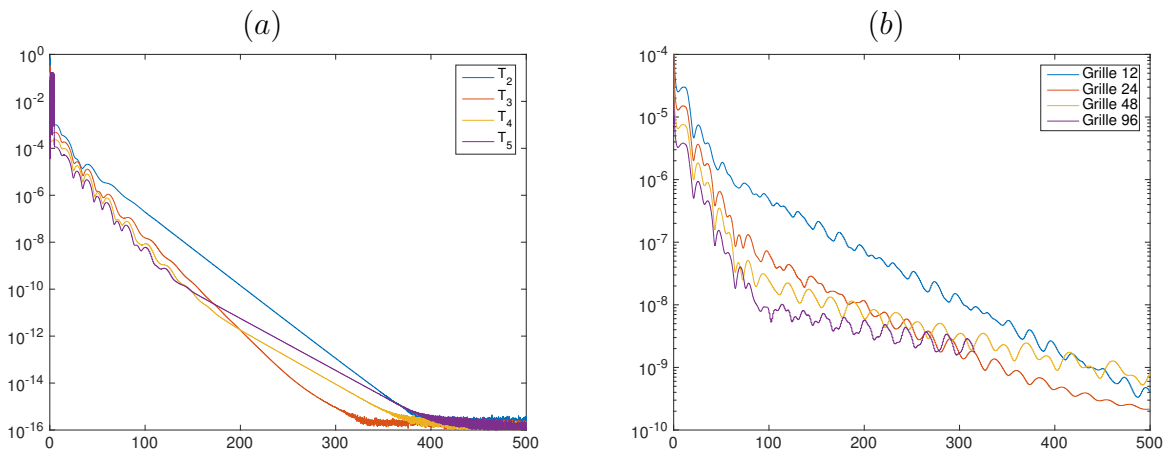
FIGURE 5.9: Maillage  $8 \times 8$ .

FIGURE 5.10: Évolution des erreurs relatives en vitesse en fonction du temps. (a) Schéma du Chapitre 5, (b) schéma du Chapitre 3.

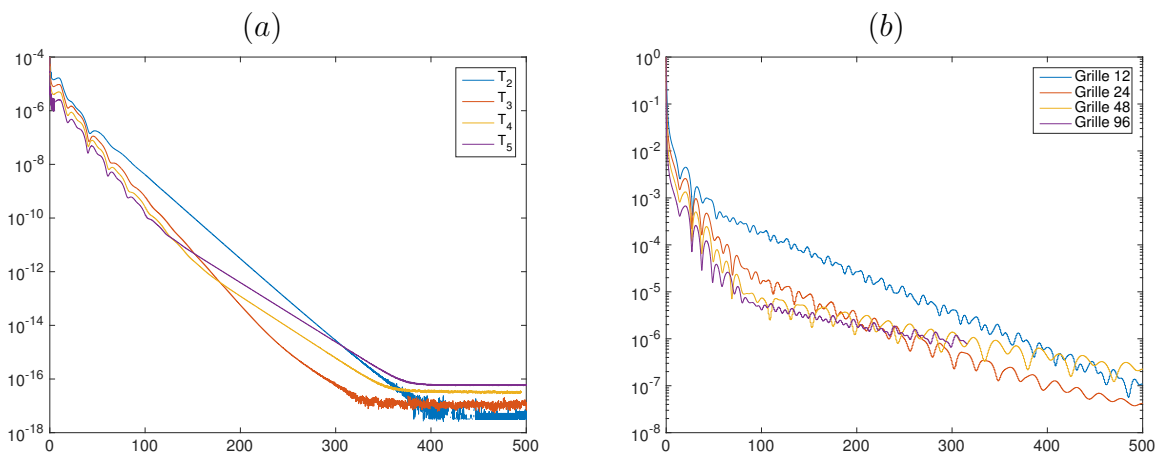


FIGURE 5.11: Évolution des erreurs relatives en température en fonction du temps. (a) Schéma du Chapitre 5, (b) schéma du Chapitre 3.

Maillage	$Nu_h$	$Nu_c$
$\mathcal{T}_2$	3.40155	-3.38351
$\mathcal{T}_3$	3.97775	-3.95189
$\mathcal{T}_4$	4.23937	-4.20249
$\mathcal{T}_5$	4.30744	-4.26181

TABLEAU 5.5: Schéma du Chapitre 5.

Grille	$Nu_h$	$Nu_c$
$12 \times 12$	4.96870	-4.98953
$24 \times 24$	4.64687	-4.65236
$48 \times 48$	4.54396	-4.54526
$96 \times 96$	4.52922	-4.52948
<b>Valeurs de réf. [56]</b>	<b>4,5216498</b>	<b>-4,521649</b>

TABLEAU 5.6: Schéma du Chapitre 3.

Dans le Chapitre 3, nous nous étions intéressés aux nombres de Nusselt, définis par (3.39). Nous donnons dans les Tableaux 5.5 et 5.6 leur valeur moyenne sur la paroi gauche et la paroi droite en fonction du maillage pour chacun des schémas. On observe que pour le schéma C-FV-FE, les nombres  $Nu_h$  et  $Nu_c$  convergent vers leur valeur de référence donnée dans [56]. Pour le schéma du Chapitre 5, aucune valeur de référence n'est connue, mais l'on peut toutefois observer que  $Nu_h$  et  $Nu_c$  tendent vers une valeur du même ordre que les Nusselt obtenus avec le schéma C-FV-FE. Comme l'on pouvait s'y attendre, la convergence est plus lente car le schéma est seulement d'ordre 1.

*Remarque 5.7.* Afin de calculer les nombres de Nusselt, nous devons définir un gradient de température sur le bord du domaine. Cela n'est pas immédiat pour le schéma volumes finis du Chapitre 5. Nous reconstruisons donc une température de type  $\mathbb{P}_1$  (voir la section 5.6.2.1), pour laquelle nous pouvons définir naturellement le gradient.

Nous souhaitons maintenant confronter ces schémas en terme de temps de calcul. La comparaison n'est pas aisée car les schémas sont très différents : le nombre de variables à calculer est différent, une procédure de point fixe et des sous-pas dans la partie volumes finis sont mis en place pour le schéma C-FV-FE, tandis que pour le schéma étudié dans ce chapitre, une méthode de Newton est employée pour résoudre l'équation en température, ce qui peut avoir pour conséquence de devoir prendre un pas de temps petit. De plus, l'un des schémas étant à l'ordre 1 et l'autre à l'ordre 2, cela n'a pas beaucoup de sens de comparer le temps CPU nécessaire pour obtenir une erreur donnée. Il s'agit donc plutôt de placer les schémas dans un cas de figure

comparable, afin de donner un ordre de grandeur des temps de calculs pour chacun, et surtout de voir quelle partie du code occupe le plus de temps. Pour cela, les simulations sont menées sur 80 itérations (sans point fixe et sans sous-pas pour les volumes finis pour le schéma C-FV-FE), sur la grille  $\mathcal{T}_4$  et sur le maillage  $48 \times 48$  qui sont comparables au vu des Tableaux 5.3 et 5.4. Le nombre d'itérations maximal dans la méthode de Newton est fixé à 15, mais dans la pratique moins de 2 ou 3 itérations sont réalisées à chaque pas de temps. Le temps de calcul global, ainsi que le temps passé à résoudre l'équation en vitesse est représenté pour chaque schéma sur la Figure 5.12. Tout d'abord, nous observons que les temps de calculs sont très comparables pour les deux schémas. On note également que pour le schéma étudié dans le Chapitre 5, la résolution de l'équation en vitesse occupe pratiquement la totalité du temps de calcul. Par conséquent, devoir assembler à chaque itération de la boucle de Newton une matrice jacobienne et résoudre le système linéaire associé à la méthode n'est pas pénalisant, de même que la résolution d'un problème global d'optimisation (notons que sa matrice associée est constante et n'est donc assemblée qu'une seule fois en début de simulation). En effet, les matrices à assembler dans la partie éléments finis sont de taille plus importante que celles à assembler dans la partie volumes finis. On observe également que pour le schéma C-FV-FE, la résolution de l'équation de vitesse est un peu plus rapide car il y a moins de matrices à assembler à chaque itération. Cependant, on doit résoudre en plus une équation de température par éléments finis (il n'y a pas de matrice supplémentaire à assembler à chaque itération car les matrices utilisées sont les mêmes que celles intervenant dans l'équation en vitesse), ainsi qu'une équation en densité par volumes finis (qui est peu coûteuse tant que l'on ne fait pas de sous-pas), ce qui conduit à des temps de calculs globaux équivalents pour les deux schémas.

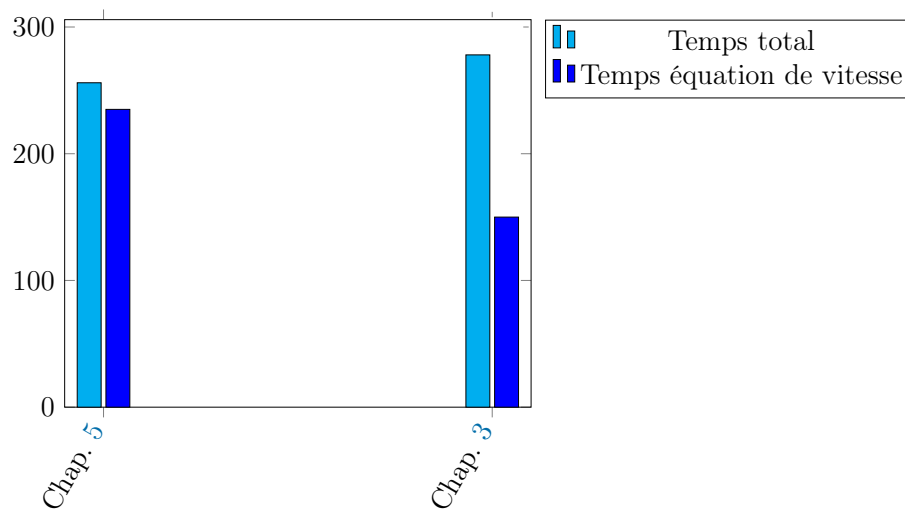


FIGURE 5.12: Temps d'exécution pour le schéma du Chapitre 5 et le schéma du Chapitre 3.

## 5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons comparé différents schémas volumes finis permettant de discrétiser l'équation de température du modèle de type faible Mach étudié au Chapitre 4. Parmi ces différents schémas, deux vérifient la propriété du principe du maximum : les schémas  $(\mathcal{SD}_{\max}\mathcal{J}_{\text{cen}})$  et  $(\mathcal{SD}_{\text{moy}}\mathcal{J}_{\text{up}})$ . Dans les deux cas, le principe du maximum est obtenu grâce au décentrement de l'un des termes : le terme de diffusion pour  $(\mathcal{SD}_{\max}\mathcal{J}_{\text{cen}})$  ou le terme effet Joule pour  $(\mathcal{SD}_{\text{moy}}\mathcal{J}_{\text{up}})$ . Ces schémas sont tous les deux d'ordre 1, mais on a observé que l'erreur obtenue avec le premier est un peu moins élevée. Nous avons ensuite intégré la discrétisation de l'équation de température par  $(\mathcal{SD}_{\max}\mathcal{J}_{\text{cen}})$  dans un schéma permettant de simuler les équations (5.47), et nous l'avons mis en œuvre sur le problème de la cavité chauffée. Nous avons comparé les résultats avec ceux obtenus avec le schéma C-FV-FE étudié au Chapitre 3. Nous nous sommes dans un premier temps intéressés à la convergence vers l'état stationnaire, et avons observé un bon comportement des erreurs relatives, qui décroissent vers 0 plus rapidement que pour le schéma C-FV-FE. Nous nous sommes également intéressés aux nombres de Nusselt moyens sur la paroi gauche et sur la paroi droite et avons observé qu'à l'état stationnaire, ils sont de même ordre pour les deux schémas, et qu'ils convergent dans les deux cas. La convergence est cependant plus rapide pour le schéma C-FV-FE qui est d'ordre 2. Enfin, nous avons observé que les temps de calculs des deux schémas sont équivalents.

# Perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié théoriquement et numériquement des modèles de type bas Mach. Dans le Chapitre 3, nous avons développé une méthode combinée Volumes Finis - Éléments Finis permettant de simuler les équations de Navier-Stokes à faible nombre de Mach. Dans les Chapitres 4 et 5, nous avons considéré un modèle simplifié, dans le sens où la pression thermodynamique est considérée constante, et où la viscosité a été choisie de façon à éliminer les termes d'ordre 3 des équations. Nous avons dans le Chapitre 4 montré l'existence et l'unicité d'une solution régulière à ce modèle. Dans le Chapitre 5, nous avons proposé un schéma numérique permettant de discrétiser ces équations, en nous focalisant plus particulièrement sur l'équation de température. Dans chaque chapitre, nous avons rédigé une conclusion. Nous donnons maintenant quelques perspectives.

## **Chapitre 3 : Une méthode combinée Volumes Finis - Éléments Finis pour un modèle bas Mach**

Dans ce chapitre, nous avons développé une méthode numérique permettant de simuler des écoulements en régime faible Mach pour un gaz parfait. Il serait intéressant de considérer d'autres lois d'état, comme par exemple la loi des gaz raidis. La loi d'état étant implicite dans notre modèle, cela se traduirait par des modifications dans les équations de température, de pression thermodynamique et dans la contrainte de compressibilité. En effet, certaines grandeurs physiques constantes dans le cas d'un gaz parfait sont dépendantes de la température ou de la pression pour des lois d'état plus générales. De plus, nous avons considéré des écoulements monophasiques. La simulation d'écoulements diphasiques constituerait un prolongement naturel à ce travail.

## **Chapitre 4 : Un résultat d'existence de solution régulière pour un modèle de type bas Mach**

Dans ce chapitre, nous avons montré l'existence et l'unicité d'une solution régulière pour le modèle simplifié. Ce travail pourrait être généralisé au cas d'une viscosité générale comme cela a été fait dans l'article de F. Huang et W. Tan [57]. Une autre question restant ouverte est le cas où la pression thermodynamique n'est pas

constante. Dans ces circonstances, on ne peut pas se ramener à un champ de vitesse à divergence nulle comme cela a été fait dans ce travail.

### Chapitre 5 : Méthodes de Volumes Finis pour l'équation de température d'un modèle faible Mach

Dans ce dernier chapitre, nous avons comparé plusieurs schémas associés à l'équation de température du modèle étudié dans le Chapitre 4. Notre objectif était d'obtenir des schémas préservant le principe du maximum. Nous les avons testé sur différents cas test et sommes arrivés à la conclusion que le schéma ( $SD_{\max}\mathcal{J}_{\text{up}}$ ) correspond le mieux aux critères fixés. Puis, nous avons couplé l'équation de température à l'équation de vitesse et avons mis en œuvre le schéma sur le cas test de la cavité chauffée. Nous avons obtenu des résultats similaires à ceux présentés dans la littérature.

Dans ce travail, nous avons montré l'existence de la solution numérique, ainsi que le principe du maximum. Il serait intéressant d'effectuer également la preuve de la convergence du schéma numérique.

D'autre part, ce travail est un travail préparatoire et un certain nombre de points peuvent être améliorés afin de rendre le code plus performant. En effet, le schéma proposé est d'ordre 1. Il serait avantageux à l'avenir de développer des schémas d'ordre supérieur. De plus, la transmission d'une vitesse à divergence nulle  $\mathbf{v}^*$  au sens volumes finis à partir du champ de vitesse éléments finis se fait par résolution d'un problème d'optimisation global. D'autres techniques auraient pu être envisagées. Par exemple, on aurait pu penser à définir les inconnues de température aux sommets des triangles et ainsi définir  $\mathbf{v}^*$  constant par triangle comme dans [12]. Une autre possibilité est d'utiliser une approximation  $H(\text{div})$  pour la vitesse et la pression. Elle peut être obtenue à l'aide des éléments finis de Raviart-Thomas.



# Annexe A

## Le schéma C-FV-FE avec procédure de point fixe

Dans cette section, nous détaillons l'algorithme de point fixe utilisé dans le Chapitre 3. Les itérées de la boucle de point fixe sont notées avec l'exposant  $l$ .  $\rho^{n+1,l}$ ,  $P^{n+1,l}$ ,  $\theta^{n+1,l}$ ,  $\mathbf{u}^{n+1,l}$  et  $\pi^{n+1,l}$  étant connus, montrons comment calculer  $\rho^{n+1,l+1}$ ,  $P^{n+1,l+1}$ ,  $\theta^{n+1,l+1}$ ,  $\mathbf{u}^{n+1,l+1}$  et  $\pi^{n+1,l+1}$ . Notons que pour une variable générique  $a$ , on pose  $a^{n+1,0} = a^n$ .

1. Pour la pression thermodynamique, là aussi nous envisageons deux façons de procéder :

a) Pour le cas d'un système fermé sans flux entrant ou sortant, nous pouvons calculer  $P^{n+1,l+1}$  par (3.18), et sa dérivée temporelle par résolution de (3.17) :

$$P^{n+1,l+1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left( \int_{\Omega} \rho^0 \right) \left( \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^{n+1,l}} \right)^{-1}.$$

et

$$\begin{aligned} & \left( \frac{dP}{dt} \right)^{n+1,l+1} + \frac{\gamma}{|\Omega|} P^{n+1,l+1} \int_{\Gamma} \mathbf{u}_D^{n+1} \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{\gamma - 1}{|\Omega| \text{Re Pr}} \int_{\Gamma_D} \nabla \theta^{n+1,l} \cdot \mathbf{n} + \frac{\gamma - 1}{|\Omega| \text{Re Pr}} \int_{\Gamma_N} F_N^{n+1}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

b) Pour le cas d'un système fermé avec flux entrant ou sortant, on calcule la pression thermodynamique  $P^{n+1,l+1}$  par résolution de (3.17) :

$$\begin{aligned} & \frac{3P^{n+1,l+1} - 4P^n + P^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\gamma}{|\Omega|} P^{n+1,l+1} \int_{\Gamma} \mathbf{u}_D^{n+1} \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{\gamma - 1}{|\Omega| \text{Re Pr}} \int_{\Gamma_D} \nabla \theta^{n+1,l+1} \cdot \mathbf{n} + \frac{\gamma - 1}{|\Omega| \text{Re Pr}} \int_{\Gamma_N} F_N^{n+1}. \end{aligned}$$

Sa dérivée temporelle est alors obtenue par différences finies :

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)^{n+1,l+1} = \frac{3P^{n+1,l+1} - 4P^n + P^{n-1}}{2\Delta t}.$$

2. La nouvelle densité  $\rho^{n+1,l+1}$  est calculée par

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\rho}^{n+1,l+1} - \rho^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (\rho^n \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2},l}) &= 0, \\ \frac{\rho^{n+1,l+1} - \rho^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left( \nabla \cdot (\rho^n \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2},l}) + \nabla \cdot (\hat{\rho}^{n+1,l+1} \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2},l}) \right) &= 0, \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2},l} = \frac{\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n+1,l}}{2}.$$

3. La nouvelle température  $\theta^{n+1,l+1}$  est calculée par résolution de :

$$\begin{aligned} \rho^{n+1,l+1} \left( \frac{3\theta^{n+1,l+1} - 4\theta^n + \theta^{n-1}}{2\Delta t} + \mathbf{u}^{n+1,l} \cdot \nabla \theta^{n+1,l+1} \right) \\ - \frac{3P^{n+1,l+1} - 4P^n + P^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{1}{\text{Re Pr}} \Delta \theta^{n+1,l+1} = 0, \end{aligned}$$

4. Enfin, la vitesse  $\mathbf{u}^{n+1,l+1}$  et la pression  $\pi^{n+1,l+1}$  sont calculées par résolution de :

$$\begin{aligned} \rho^{n+1,l+1} \left( \frac{3\mathbf{u}^{n+1,l+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t} + \mathbf{u}^{n+1,l} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+1,l+1} \right) + \nabla \pi^{n+1,l+1} \\ - \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{n+1,l+1} = -\frac{1}{\text{Fr}^2} \rho^{n+1,l+1} \mathbf{e}_y, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1,l+1} = -\frac{1}{\gamma P^{n+1,l+1}} \left( \frac{dP}{dt} \right)^{n+1,l+1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma \text{Re Pr } P^{n+1,l+1}} \Delta \theta^{n+1,l}, \end{aligned}$$

avec

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{n+1,l+1} = \Delta \mathbf{u}^{n+1,l+1} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1,l}).$$

# Annexe B

## Démonstrations du Lemme 4.6 et du Lemme 4.7 du Chapitre 4

### B.1 Preuve du Lemme 4.6

Soit  $\theta^n \in \mathcal{C}(0, T; H_N^2(\Omega))$  et  $\mathbf{v}^{n-1} \in \mathcal{C}(0, T; \mathbf{V})$  donnés. On rappelle que  $\hat{\theta} = \frac{m+M}{2}$ . Nous allons montrer que pour tous  $\mathbf{f} \in L^2(Q_T)$  et  $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{V}$ , il existe  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$  tel que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{\theta}} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \int_{\Omega} \mu(\theta^n) \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} \\ + \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) \nabla \theta^n \cdot \mathbf{w} = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{f}}{\theta^n} \cdot \mathbf{w} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{v}(0, \cdot) = \mathbf{v}_0. \quad (\text{B.2})$$

Nous suivons la démarche de la preuve de [82, Chap.1, Theorem 3.1]. Nous allons utiliser la méthode de Faedo-Galerkin, c'est-à-dire que nous allons résoudre un problème approché dans un sous-espace de dimension finie engendré par des vecteurs propres de l'opérateur de Stokes. Nous allons ensuite obtenir des estimations a priori sur la solution du problème approché, ce qui nous permettra par passage à la limite de montrer l'existence d'une solution au problème global.

#### Solution du problème approché

Soit  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_i, \dots$  une suite de vecteurs propres de  $\mathbb{A}$  associés aux valeurs propres  $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots$  qui engendre  $\mathbf{V}$ , voir la Proposition 2.3. Soit  $\mathbf{V}_N$  le sous-espace de  $\mathbf{V}$  engendré par  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N$ . Alors, on remarque que  $\mathbb{A} \mathbf{v}_N \in \mathbf{V}$ . On définit  $\mathbb{P}_N$  la projection de  $L^2(\Omega)$  sur  $\mathbf{V}_N$ .

Pour chaque  $N \in \mathbb{N}^*$ , on définit une solution approchée  $\mathbf{v}_N$  de (B.1)-(B.2) de la

façon suivante :

$$\mathbf{v}_N = \sum_{i=1}^N g_{i,N}(t) \mathbf{w}_i,$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\bar{\theta}} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{v}_N \cdot \mathbf{w}_i + \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} \mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{v}_N \cdot \mathbf{w}_i + \int_{\Omega} \mu(\theta^n) \nabla \mathbf{v}_N \cdot \nabla \mathbf{w}_i \\ & + \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\nabla \mathbf{v}_N - \nabla^T \mathbf{v}_N) \nabla \theta^n \cdot \mathbf{w}_i = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{f}}{\theta^n} \cdot \mathbf{w}_i \quad \forall i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{v}_N(0, \cdot) = \mathbb{P}_N(\mathbf{v}_0). \quad (\text{B.4})$$

L'équation (B.3) se réécrit :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \frac{1}{\bar{\theta}} \int_{\Omega} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_i g'_{j,N}(t) + \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} \mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_i g_{j,N}(t) \\ & + \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \mu(\theta^n) \nabla \mathbf{w}_j \cdot \nabla \mathbf{w}_i g_{j,N}(t) + \sum_{j=1}^N \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\nabla \mathbf{w}_j - \nabla^T \mathbf{w}_j) \nabla \theta^n \cdot \mathbf{w}_i g_{j,N}(t) \\ & = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{f}}{\theta^n}(t) \cdot \mathbf{w}_i \quad \forall i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

ou encore sous la forme du système différentiel linéaire :

$$AG'(t) + B(\theta^n, \mathbf{v}^{n-1})G(t) = F(t), \quad (\text{B.5})$$

où pour tout  $1 \leq i, j \leq N$  :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{1}{\bar{\theta}} \int_{\Omega} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_i, \\ B_{ij}(\theta^n, \mathbf{v}^{n-1}) &= \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} \mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_i + \int_{\Omega} \mu(\theta^n) \nabla \mathbf{w}_j \cdot \nabla \mathbf{w}_i \\ & \quad + \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\nabla \mathbf{w}_j - \nabla^T \mathbf{w}_j) \nabla \theta^n \cdot \mathbf{w}_i \\ F_i(t) &= \int_{\Omega} \frac{\mathbf{f}}{\theta^n}(t) \cdot \mathbf{w}_i \\ G_i(t) &= g_{i,N}(t). \end{aligned}$$

La condition initiale (B.4) est équivalente à :

$$G_i(0) = \mathbb{P}_N(\mathbf{v}_0) \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (\text{B.6})$$

On sait que la matrice  $A$  est inversible car les  $\mathbf{w}_i$  sont orthogonaux pour le produit scalaire dans  $\mathbb{L}^2(\Omega)$ . De plus,  $B$  est bornée car  $\theta^n$  vérifie le principe du maximum

et  $\|\Delta\theta^n\|_{L^2}$  et  $\|\nabla\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}$  sont bornés par (4.24) et (4.29). Le système différentiel linéaire (B.5)-(B.6) admet donc une unique solution  $\mathbf{G}$  définie sur l'intervalle  $[0, T]$ . De plus, comme la fonction  $t \rightarrow F(t)$  est dans  $L^2(0, T)$ , alors  $t \rightarrow G(t)$  l'est également et on a :

$$\mathbf{v}_N \in L^2(0, T; \mathbf{V}), \quad \partial_t \mathbf{v}_N \in L^2(0, T; \mathbf{V}), \quad \forall N \in \mathbb{N}^*.$$

Nous allons maintenant établir les estimations a priori qui nous permettront de passer à la limite.

### Estimations a priori

Soit  $\delta > 0$ . On multiplie (B.3) par  $g'_{i,N}(t) + \delta \alpha_i g_{i,N}(t)$  et on somme sur  $i = 1, \dots, N$ . Après une intégration par partie sur le terme de diffusion, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\theta} \|\partial_t \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + \delta \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{v}_N \cdot \mathbb{A} \mathbf{v}_N + \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}_N \cdot \partial_t \mathbf{v}_N \\ & + \delta \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}_N \cdot \mathbb{A} \mathbf{v}_N + \int_{\Omega} \mu(\theta^n) \nabla \mathbf{v}_N \cdot \nabla \partial_t \mathbf{v}_N - \delta \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mu(\theta^n) \nabla \mathbf{v}_N) \cdot \mathbb{A} \mathbf{v}_N \\ & + \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\nabla \mathbf{v}_N - \nabla^T \mathbf{v}_N) \nabla \theta^n \cdot \partial_t \mathbf{v}_N + \delta \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\nabla \mathbf{v}_N - \nabla^T \mathbf{v}_N) \nabla \theta^n \cdot \mathbb{A} \mathbf{v}_N \\ = & \int_{\Omega} \frac{\mathbf{f}}{\theta^n} \cdot \partial_t \mathbf{v}_N + \delta \int_{\Omega} \frac{\mathbf{f}}{\theta^n} \cdot \mathbb{A} \mathbf{v}_N. \end{aligned}$$

On remarque que avec (4.30) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mu(\theta^n) \nabla \mathbf{v}_N \cdot \nabla \partial_t \mathbf{v}_N &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mu(\theta^n) |\nabla \mathbf{v}_N|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu'(\theta^n) \partial_t \theta^n |\nabla \mathbf{v}_N|^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mu(\theta^n) |\nabla \mathbf{v}_N|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu'(\theta^n) \mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \theta^n |\nabla \mathbf{v}_N|^2 \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \mu'(\theta^n) \nabla \theta^{n-1} \cdot \nabla \theta^n |\nabla \mathbf{v}_N|^2 \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \mu'(\theta^n) \theta^{n-1} \Delta \theta^n |\nabla \mathbf{v}_N|^2 \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la décomposition de Helmholtz (2.3), on a :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mu(\theta^n) \nabla \mathbf{v}_N) \cdot \mathbb{A} \mathbf{v}_N &= - \int_{\Omega} \mu(\theta^n) \Delta \mathbf{v}_N \cdot \mathbb{A} \mathbf{v}_N - \int_{\Omega} \mu'(\theta^n) (\nabla \theta^n \cdot \nabla) \mathbf{v}_N \cdot \mathbb{A} \mathbf{v}_N \\ &= \int_{\Omega} \mu(\theta^n) \mathbb{A} \mathbf{v}_N \cdot \mathbb{A} \mathbf{v}_N + \int_{\Omega} \mu(\theta^n) \nabla q_N \cdot \mathbb{A} \mathbf{v}_N \\ &\quad - \int_{\Omega} \mu'(\theta^n) (\nabla \theta^n \cdot \nabla) \mathbf{v}_N \cdot \mathbb{A} \mathbf{v}_N, \end{aligned}$$

et par intégration par parties, du fait que  $\mathbb{A}\mathbf{v}_N \in \mathbf{V}$ , on a :

$$\int_{\Omega} \mu(\theta^n) \nabla q_N \cdot \mathbb{A}\mathbf{v}_N = - \int_{\Omega} \mu'(\theta^n) q_N \nabla \theta^n \cdot \mathbb{A}\mathbf{v}_N.$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mu(\theta^n) |\nabla \mathbf{v}_N|^2 + \frac{1}{\widehat{\theta}} \|\partial_t \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + \delta \int_{\Omega} \mu(\theta^n) |\mathbb{A}\mathbf{v}_N|^2 \\ = & \underbrace{-\frac{\delta}{\widehat{\theta}} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{v}_N \cdot \mathbb{A}\mathbf{v}_N}_{T_1} - \underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}_N \cdot \partial_t \mathbf{v}_N}_{T_2} - \underbrace{\delta \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}_N \cdot \mathbb{A}\mathbf{v}_N}_{T_3} \\ & - \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu'(\theta^n) \mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \theta^n |\nabla \mathbf{v}_N|^2}_{T_4} - \underbrace{\frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \mu'(\theta^n) \nabla \theta^{n-1} \cdot \nabla \theta^n |\nabla \mathbf{v}_N|^2}_{T_5} \\ & + \underbrace{\frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \mu'(\theta^n) \theta^{n-1} \Delta \theta^n |\nabla \mathbf{v}_N|^2}_{T_6} + \underbrace{\delta \int_{\Omega} \mu'(\theta^n) q_N \nabla \theta^n \cdot \mathbb{A}\mathbf{v}_N}_{T_7} \\ & + \underbrace{\delta \int_{\Omega} \mu'(\theta^n) (\nabla \theta^n \cdot \nabla) \mathbf{v}_N \cdot \mathbb{A}\mathbf{v}_N}_{T_8} - \underbrace{\lambda \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\nabla \mathbf{v}_N - \nabla^T \mathbf{v}_N) \nabla \theta^n \cdot \partial_t \mathbf{v}_N}_{T_9} \\ & - \underbrace{\delta \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\nabla \mathbf{v}_N - \nabla^T \mathbf{v}_N) \nabla \theta^n \cdot \mathbb{A}\mathbf{v}_N}_{T_{10}} + \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\mathbf{f}}{\theta^n} \cdot \partial_t \mathbf{v}_N}_{T_{11}} + \underbrace{\delta \int_{\Omega} \frac{\mathbf{f}}{\theta^n} \cdot \mathbb{A}\mathbf{v}_N}_{T_{12}}. \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Grâce aux inégalités habituelles (Hölder, Gagliardo-Nirenberg, Sobolev, Young, ...), on va majorer de façon standard chacun des termes  $T_i$ ,  $i \neq 7$ . On utilisera également que

$$\begin{aligned} \lambda |\ln M| &\leq \mu(\theta^n) \leq \lambda |\ln m|, \\ \frac{\lambda}{M} &\leq |\mu'(\theta^n)| \leq \frac{\lambda}{m}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_1 &\leq \frac{\delta}{\widehat{\theta}} \|\partial_t \mathbf{v}_N\|_{L^2} \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2} \leq \frac{1}{8\widehat{\theta}} \|\partial_t \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + \frac{2\delta^2}{\widehat{\theta}} \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2, \\
T_2 &\leq \frac{1}{m} \|\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^3} \|\partial_t \mathbf{v}_N\|_{L^2} \\
&\leq \frac{C}{m} \|\nabla \mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2}^{1/2} \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2}^{1/2} \|\partial_t \mathbf{v}_N\|_{L^2} \\
&\leq \frac{1}{8\widehat{\theta}} \|\partial_t \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + \varepsilon \delta \lambda |\ln M| \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + \frac{C_\varepsilon \widehat{\theta}^2}{\delta m^4 \lambda |\ln M|} \|\nabla \mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^4 \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2, \\
T_3 &\leq \frac{\delta}{m} \|\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^3} \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2} \leq \frac{C\delta}{m} \|\nabla \mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2}^{1/2} \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2}^{3/2} \\
&\leq \varepsilon \delta \lambda |\ln M| \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + \frac{C_\varepsilon \delta}{\lambda^3 |\ln M|^3 m^4} \|\nabla \mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^4 \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2, \\
T_4 &\leq \frac{\lambda}{2m} \|\mathbf{v}^{n-1}\|_{L^6} \|\nabla \theta^n\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2} \\
&\leq \frac{C\lambda}{m} \|\nabla \mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2} \|\Delta \theta^n\|_{L^2} \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2} \\
&\leq \varepsilon \delta \lambda |\ln M| \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + \frac{C_\varepsilon}{\delta \lambda |\ln M| m^2} \left( \|\nabla \mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^4 + \lambda^4 \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4 \right) \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2, \\
T_5 &\leq \frac{\lambda^2}{2m} \|\nabla \theta^{n-1}\|_{L^6} \|\nabla \theta^n\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2} \\
&\leq \frac{C\lambda^2}{m} \|\Delta \theta^{n-1}\|_{L^2} \|\Delta \theta^n\|_{L^2} \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2} \\
&\leq \varepsilon \delta \lambda |\ln M| \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + \frac{C_\varepsilon \lambda^3}{\delta m^2 |\ln M|} \left( \|\Delta \theta^{n-1}\|_{L^2}^4 + \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4 \right) \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2, \\
T_6 &\leq \frac{\lambda^2 M}{2m} \|\Delta \theta^n\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^4}^2 \leq \frac{C\lambda^2 M}{m} \|\Delta \theta^n\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2}^{1/2} \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2}^{3/2} \\
&\leq \varepsilon \delta \lambda |\ln M| \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + \frac{C_\varepsilon \lambda^5 M^4}{\delta^3 m^4 |\ln M|^3} \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4 \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2, \\
T_8 &\leq \delta \frac{\lambda}{m} \|\nabla \theta^n\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^3} \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2} \leq \delta \frac{C\lambda}{m} \|\Delta \theta^n\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2}^{1/2} \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2}^{3/2} \\
&\leq \varepsilon \delta \lambda |\ln M| \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + \frac{C_\varepsilon \delta \lambda}{|\ln M|^3 m^4} \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4 \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2, \\
T_9 &\leq 2 \frac{\lambda}{m} \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^3} \|\nabla \theta^n\|_{L^6} \|\partial_t \mathbf{v}_N\|_{L^2} \leq \frac{C\lambda}{m} \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2}^{1/2} \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2}^{1/2} \|\Delta \theta^n\|_{L^2} \|\partial_t \mathbf{v}_N\|_{L^2} \\
&\leq \frac{1}{8\widehat{\theta}} \|\partial_t \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + \varepsilon \delta \lambda |\ln M| \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + \frac{C_\varepsilon \lambda^3 \widehat{\theta}^2}{\delta |\ln M| m^4} \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4 \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2, \\
T_{10} &\leq 2\delta \frac{\lambda}{m} \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^3} \|\nabla \theta^n\|_{L^6} \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2} \leq \delta \frac{C\lambda}{m} \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2}^{1/2} \|\Delta \theta^n\|_{L^2} \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2}^{3/2} \\
&\leq \varepsilon \delta \lambda |\ln M| \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + \frac{C_\varepsilon \delta \lambda}{|\ln M|^3 m^4} \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4 \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2, \\
T_{11} &\leq \frac{1}{m} \|\mathbf{f}\|_{L^2} \|\partial_t \mathbf{v}_N\|_{L^2} \leq \frac{1}{8\widehat{\theta}} \|\partial_t \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + \frac{2\widehat{\theta}}{m^2} \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2, \\
T_{12} &\leq \frac{\delta}{m} \|\mathbf{f}\|_{L^2} \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2} \leq \varepsilon \delta \lambda |\ln M| \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + \frac{\delta}{4\lambda |\ln M| m^2} \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

La majoration du terme  $T_7$  est plus spécifique et est détaillée ici. On remarque d'abord que  $\|\nabla q_N\|_{L^2}^2 \leq C \|\mathbb{A}\mathbf{v}_N\|_{L^2}^2$ . On va également appliquer le résultat du lemme 2.1 :

$$\begin{aligned}
T_7 &\leq \delta \frac{\lambda}{m} \|q_N\|_{L^3} \|\nabla \theta^n\|_{L^6} \|\mathbb{A}\mathbf{v}_N\|_{L^2} \\
&\leq \delta \frac{C\lambda}{m} \|q_N\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla q_N\|_{L^2}^{1/2} \|\Delta \theta^n\|_{L^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}_N\|_{L^2} \\
&\leq \delta \frac{C\lambda}{m} \|q_N\|_{L^2}^{1/2} \|\Delta \theta^n\|_{L^2} \|\mathbb{A}\mathbf{v}_N\|_{L^2}^{3/2} \\
&\leq \delta \varepsilon \lambda |\ln M| \|\mathbb{A}\mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + \delta \frac{C_\varepsilon \lambda}{m^4 |\ln M|^3} \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4 \|q_N\|_{L^2}^2 \\
&\leq \delta \varepsilon \lambda |\ln M| \|\mathbb{A}\mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{C_\varepsilon \delta \lambda \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4}{m^4 |\ln M|^3} \left( \frac{\varepsilon |\ln M|^4 m^4}{\|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4} \|\mathbb{A}\mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + C \left( 1 + \frac{\|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4}{\varepsilon |\ln M|^4 m^4} \right) \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 \right) \\
&\leq 2\varepsilon \delta \lambda |\ln M| \|\mathbb{A}\mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + \frac{C_\varepsilon \delta \lambda \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4}{m^4 |\ln M|^3} \left( 1 + \frac{\|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4}{|\ln M|^4 m^4} \right) \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Finalement, grâce à toutes ces estimations, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mu(\theta^n) |\nabla \mathbf{v}_N|^2 + \frac{1}{2\hat{\theta}} \|\partial_t \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \delta \lambda |\ln M| \left( 1 - 11\varepsilon - \frac{2\delta}{\hat{\theta} \lambda |\ln M|} \right) \|\mathbb{A}\mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 \\
&\leq C_\varepsilon \left\{ \left( \frac{\hat{\theta}^2}{\delta m^4 \lambda |\ln M|} + \frac{\delta}{\lambda^3 |\ln M|^3 m^4} + \frac{1}{\lambda \delta |\ln M| m^2} \right) \|\nabla \mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^4 \right. \\
&\quad + \left( \frac{\lambda^3}{\delta m^2 |\ln M|} + \frac{\lambda^5 M^4}{\delta^3 m^4 |\ln M|^3} \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + \frac{\delta \lambda}{|\ln M|^3 m^4} \left( 1 + \frac{\|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4}{|\ln M|^4 m^4} \right) + \frac{\lambda^3 \hat{\theta}^2}{\delta |\ln M| m^4} \right) \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda^3}{\delta m^2 |\ln M|} \|\Delta \theta^{n-1}\|_{L^2}^4 \right\} \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \left( \frac{2\hat{\theta}}{m^2} + \frac{\delta}{4\lambda |\ln M| m^2} \right) \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$



On choisit  $\varepsilon = \frac{1}{44}$  et  $\delta = \frac{\lambda |\ln M| \widehat{\theta}}{8}$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mu(\theta^n) |\nabla \mathbf{v}_N|^2 + \frac{1}{2M} \|\partial_t \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda^2 m |\ln M|^2}{16} \|\Delta \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 \\
& \leq C \left\{ \left( \frac{\widehat{\theta}}{\lambda^2 |\ln M|^2 m^4} + \frac{\widehat{\theta}}{\lambda^2 |\ln M|^2 m^4} + \frac{1}{\lambda^2 |\ln M|^2 m^2 \widehat{\theta}} \right) \|\nabla \mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^4 \right. \\
& \quad + \left( \frac{\lambda^2}{|\ln M|^2 m^2 \widehat{\theta}} + \frac{\lambda^2 M^4}{|\ln M|^6 m^4 \widehat{\theta}^3} \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\lambda^2 \widehat{\theta}}{|\ln M|^2 m^4} \left( 1 + \frac{\|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4}{|\ln M|^4 m^4} \right) + \frac{\lambda^2 \widehat{\theta}}{|\ln M|^2 m^4} \right) \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4 \right. \\
& \quad \left. + \frac{\lambda^2}{|\ln M|^2 m^2 \widehat{\theta}} \|\Delta \theta^{n-1}\|_{L^2}^4 \right\} \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 \\
& \quad + \left( \frac{2\widehat{\theta}}{m^2} + \frac{\widehat{\theta}}{32m^2} \right) \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

On rappelle que  $m \leq \widehat{\theta} \leq M$ , on a donc en particulier que

$$\frac{1}{m^2 \widehat{\theta}} \leq \frac{\widehat{\theta}}{m^4} \leq \frac{M^4}{m^4 \widehat{\theta}^3} \leq \frac{M^4}{m^7}.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mu(\theta^n) |\nabla \mathbf{v}_N|^2 + \frac{1}{2M} \|\partial_t \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda^2 m |\ln M|^2}{16} \|\Delta \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 \\
& \leq \frac{C M^4}{\lambda^2 m^7 \min(|\ln M|^2; |\ln M|^6)} \left( 1 + \frac{\|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4}{|\ln M|^4 m^4} \right) \\
& \quad \times \left( \|\nabla \mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^4 + \lambda^4 \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^4 + \lambda^4 \|\Delta \theta^{n-1}\|_{L^2}^4 \right) \|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 \\
& \quad + \frac{C M}{m^2} \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

On utilise maintenant les hypothèses de récurrence (4.28) et (4.29) et (4.24), ainsi que la forme particulière de  $\mu$  donnée par (4.6), qui permettent d'avoir :

$$\begin{aligned}
\|\nabla \mathbf{v}^{n-1}\|_{L^2}^2 & \leq \frac{K_1}{\lambda |\ln M|}, \\
\|\Delta \theta^{n-1}\|_{L^2}^2 & \leq \frac{K_2}{\lambda}, \quad ; \quad \|\Delta \theta^n\|_{L^2}^2 \leq \frac{K_2}{\lambda}, \\
\|\nabla \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 & \leq \frac{1}{\lambda |\ln M|} \int_{\Omega} \mu(\theta^n) |\nabla \mathbf{v}_N|^2
\end{aligned}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mu(\theta^n) |\nabla \mathbf{v}_N|^2 + \frac{1}{2M} \|\partial_t \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda^2 m |\ln M|^2}{16} \|\mathbb{A} \mathbf{v}_N\|_{L^2}^2 \\
& \leq \frac{CM^4 (\lambda^2 |\ln M|^4 m^4 + K_2^2)}{\lambda^7 m^{11} \min(|\ln M|^7, |\ln M|^{11})} (|\ln M|^{-2} K_1^2 + \lambda^4 K_2^2) \int_{\Omega} \mu(\theta^n) |\nabla \mathbf{v}_N|^2 \\
& \quad + \frac{CM}{m^2} \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

On en déduit grâce au lemme de Gronwall que :

$$(\mathbf{v}_N) \text{ est bornée dans } L^2(0, T; D(\mathbb{A})), \tag{B.8}$$

$$(\mathbf{v}_N) \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T; \mathbf{V}), \tag{B.9}$$

$$(\partial_t \mathbf{v}_N) \text{ est bornée dans } L^2(0, T; \mathbf{H}). \tag{B.10}$$

### Passage à la limite

Grâce à (B.8), on montre qu'il existe une sous-suite de  $(\mathbf{v}_N)$ , que l'on appelle encore  $(\mathbf{v}_N)$  qui converge faiblement dans  $L^2(0, T, D(\mathbb{A}))$  vers  $\mathbf{v} \in L^2(0, T, D(\mathbb{A}))$ . On a en particulier pour tout  $\phi \in L^2(0, T; \mathbf{H})$  :

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{v}_N - \mathbf{v}) \phi \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \tag{B.11}$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v}_N - \nabla \mathbf{v}) \phi \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \tag{B.12}$$

De plus, avec (B.10), il existe une sous-suite de  $(\partial_t \mathbf{v}_N)$  qui converge faiblement vers  $\mathbf{h}$  dans  $L^2(0, T, \mathbf{H})$ , et on a pour tout  $\phi \in L^2(0, T; \mathbf{H})$  :

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t \mathbf{v}_N - \mathbf{h}) \phi \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0. \tag{B.13}$$

On montre facilement que  $\mathbf{h} = \partial_t \mathbf{v}$ . En effet, en choisissant  $\phi = \eta \mathbf{w}$ , avec  $\eta \in \mathcal{C}_c^1(0, T)$  et  $\mathbf{w} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ , on a :

$$\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{v}_N \eta \mathbf{w} = - \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{v}_N \partial_t \eta \mathbf{w}.$$

En passant à la limite de chaque côté grâce à (B.13) à gauche et (B.11) à droite, on obtient  $\mathbf{h} = \partial_t \mathbf{v}$ .

Enfin, avec (B.9), il existe une sous-suite, encore notée  $(\mathbf{v}_N)$ , qui converge faiblement–

★ vers  $\mathbf{u}$  dans  $L^\infty(0, T; \mathbf{V})$ . On a en particulier pour tout  $\phi \in L^1(0, T; \mathbf{H})$  :

$$\int_0^T \int_\Omega (\mathbf{v}_N - \mathbf{u}) \phi \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0. \quad (\text{B.14})$$

Les équations (B.11) et (B.14) et le fait que  $L^2(0, T; \mathbf{H}) \subset L^1(0, T; \mathbf{H})$  montrent que pour tout  $\phi \in L^1(0, T; \mathbf{H})$  :

$$\int_0^T \int_\Omega (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \phi \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0,$$

et par conséquent,  $\mathbf{v} = \mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{V}) \cap L^\infty(0, T, \mathbf{H})$ .

On considère  $\eta \in \mathcal{C}^1(0, T)$  telle que  $\eta(T) = 0$ . En multipliant (B.3) par  $\eta$  et en intégrant sur  $]0, T[$ , après intégration par partie sur le terme de dérivée en temps on obtient :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\bar{\theta}} \int_0^T \int_\Omega \partial_t \eta \mathbf{v}_N \cdot \mathbf{w} + \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\theta^n} \eta (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}_N \cdot \mathbf{w} + \int_0^T \int_\Omega \mu(\theta^n) \eta \nabla \mathbf{v}_N \cdot \nabla \mathbf{w} \\ & + \lambda \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\theta^n} \eta (\nabla \mathbf{v}_N - \nabla^T \mathbf{v}_N) \nabla \theta^n \cdot \mathbf{w} \\ & = \int_0^T \int_\Omega \eta \frac{\mathbf{f}}{\theta^n} \cdot \mathbf{w} + \frac{1}{\bar{\theta}} \int_\Omega \eta(0) \mathbb{P}_N(\mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{w}, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}^N. \end{aligned}$$

On va passer à la limite dans chacun des termes. On pose  $\phi = \eta \mathbf{w}$ .

— Comme  $\partial_t \phi \in L^2(0, T, \mathbf{H})$ , avec (B.11) on a :

$$\frac{1}{\bar{\theta}} \int_0^T \int_\Omega (\mathbf{v}_N - \mathbf{v}) \cdot \partial_t \phi \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

—  $\frac{1}{\theta^n}$  est borné dans  $L^\infty$ ,  $\mathbf{v}^{n-1}$  et  $\mathbf{w}$  le sont dans  $\mathbf{V}$ , on a donc  $\frac{1}{\theta^n} \mathbf{v}^{n-1} \cdot \phi \in L^2(0, T; \mathbf{H})$  et avec (B.12) on a :

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\theta^n} \mathbf{v}^{n-1} \cdot (\nabla \mathbf{v}_N - \nabla \mathbf{v}) \cdot \phi \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Des arguments similaires permettent de passer à la limite dans les autres termes et on obtient :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\bar{\theta}} \int_0^T \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \partial_t \phi + \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\theta^n} \mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \phi + \int_0^T \int_\Omega \mu(\theta^n) \nabla \mathbf{v}_N \cdot \nabla \phi \\ & + \lambda \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\theta^n} (\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) \cdot \nabla \theta^n \cdot \phi = \int_0^T \int_\Omega \frac{\mathbf{f}}{\theta^n} \cdot \phi + \frac{1}{\bar{\theta}} \int_\Omega \mathbf{v}_0 \cdot \phi(0). \quad (\text{B.15}) \end{aligned}$$

L'égalité (B.15) est vraie  $\forall \phi = \eta \mathbf{w}$ , avec  $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$  car les  $\mathbf{w}_j$  sont denses dans  $\mathbf{V}$ . En particulier, on a montré que (B.1) est vraie.

Il reste donc à montrer que  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ . Pour cela, on multiplie (B.1) par  $\eta$  :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\widehat{\theta}} \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \partial_t \phi + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \phi + \int_0^T \int_{\Omega} \mu(\theta^n) \nabla \mathbf{v}_N \cdot \nabla \phi \\ & + \lambda \int_0^T \int_{\Omega} \frac{1}{\theta^n} (\nabla \mathbf{v} - \nabla^T \mathbf{v}) \cdot \nabla \theta^n \cdot \phi = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\mathbf{f}}{\theta^n} \cdot \phi + \frac{1}{\widehat{\theta}} \int_{\Omega} \mathbf{v}(0) \cdot \phi(0). \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

En comparant (B.15) et (B.16), on en déduit que :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}(0)) \cdot \phi(0) = 0.$$

En choisissant  $\eta$  ne s'annulant pas en 0, on a bien montré que  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ , ce qui achève la démonstration de la surjectivité de  $L_0$ .

## B.2 Preuve du Lemme 4.7

Pour montrer le Lemme 4.7, on fait les mêmes calculs que ceux faits dans l'Annexe B.1 et on obtient l'analogue de (B.7) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mu(\theta^n) |\nabla \mathbf{v}^n|^2 + \frac{1}{2M} \|\partial_t \mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 + \frac{m^2 \lambda^2 |\ln M|^2}{16M} \|\Delta \mathbf{v}^n\|_{L^2}^2 \\ & \leq C \frac{M^4 (\lambda^2 |\ln M|^4 m^4 + K_2^2)}{\lambda^7 m^{11} \min(|\ln M|^7, |\ln M|^{11})} (|\ln M|^{-2} K_1^2 + \lambda^4 K_2^2) \int_{\Omega} \mu(\theta^n) |\nabla \mathbf{v}^n|^2 \\ & \quad + \frac{CM}{m^2} \|\mathbf{f}\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

On applique le lemme de Gronwall à (B.17) afin d'obtenir (4.42).

# Annexe C

## Implémentation de la méthode de Newton pour la résolution de (5.29)

Soit  $n = 0, \dots, N - 1$ . Afin de calculer  $\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}$  solution de (5.29), nous sommes amenés à résoudre le système non-linéaire suivant :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) = ((\mathcal{F}_K^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}))_{K \in \mathcal{T}}) = \mathbf{0}, \quad (\text{C.1})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_K^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) &= \frac{\theta_K^{n+1} - \theta_K^n}{\Delta t} + \frac{1}{m_K} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{K,\sigma}^{n+1} \theta_{\sigma,+}^{n+1} + 2\lambda \mathcal{J}_K(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) + \frac{\lambda}{m_K} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}^{n+1} \\ &= \mathcal{F}_{\mathcal{T},\text{masse}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) + \mathcal{F}_{\mathcal{T},\text{conv}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) + \mathcal{F}_{\mathcal{T},\text{Joule}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) + \mathcal{F}_{\mathcal{T},\text{diff}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}). \end{aligned}$$

Nous allons résoudre (C.1) par une méthode de Newton. Les itérations de Newton sont indexées par  $\ell$ . On pose  $\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,0} = \theta_{\mathcal{T}}^n$ , et pour  $\ell \geq 0$ ,  $\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell+1}$  est défini par :

$$\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell+1} = \theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell} - [J\mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell})]^{-1} \mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell}),$$

où  $J\mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell})$  désigne la jacobienne de  $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{n+1}$  en  $\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell}$ . On a :

$$\begin{aligned} J\mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell}) &= J\mathcal{F}_{\mathcal{T},\text{masse}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell}) + J\mathcal{F}_{\mathcal{T},\text{conv}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell}) + J\mathcal{F}_{\mathcal{T},\text{Joule}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell}) \\ &\quad + J\mathcal{F}_{\mathcal{T},\text{diff}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell}) \end{aligned}$$

### C.1 Procédure de pas de temps adaptatif

Le critère d'arrêt de la méthode porte sur la norme  $L^\infty(\Omega)$  de  $\mathcal{F}_K^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1})$ . Si la précision requise *prec* n'a pas été atteinte en un nombre maximal d'itérations *nitermax* défini par l'utilisateur, le pas de temps  $\Delta t$  est divisé par 2, jusqu'à ce que

l'on ait convergé ou que l'on ait atteint le pas de temps minimal  $\Delta t_{\min}$  fixé, voir l'Algorithme 2. On vérifie toutes les 10 itérations en temps si le pas de temps  $\Delta t$  peut être multiplié par 2 afin de réduire les temps de calculs.

---

**Algorithme 2** MÉTHODE DE NEWTON AVEC PAS DE TEMPS ADAPTATIF
 

---

**Entrée(s)**  $prec$ ;  $nitermax$ ;  $\Delta t$ ;  $\Delta t_{\min}$ ;  $\theta_{\mathcal{T}}^n$

$err = prec + 1$

**tant que** ( $err > prec$ ) et ( $\Delta t \geq \Delta t_{\min}$ ) **faire**

$\ell = 0$

$\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,0} = \theta_{\mathcal{T}}^n$

**tant que** ( $err > prec$ ) et ( $\ell \leq nitermax$ ) **faire**

$\ell = \ell + 1$

$\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell+1} = \theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell} - [J\mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell})]^{-1}\mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell})$

$err = \left\| \mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell}) \right\|_{L^\infty}$

**fin du tant que**

**si**  $err > prec$  **alors**

$\Delta t = \Delta t/2$

**fin du si**

**fin du tant que**

---

## C.2 Assemblage de la jacobienne.

Nous allons maintenant calculer la contribution des différents termes à la jacobienne, dans le cas où  $\theta_{\sigma}^{n+1}$  est défini par (5.15) et où le terme effet Joule est discrétisé par (5.31) (schéma  $(\mathcal{SD}_{\max}\mathcal{J}_{\text{cen}})$ ). Nous utiliserons la notation  $a+ = b$  pour désigner l'affectation après l'addition qui signifie  $a = a + b$ , où le symbole "=" désigne l'opérateur d'affectation.

a) *Terme de dérivée en temps*

Le coefficient  $KM$  de la jacobienne est :

$$J\mathcal{F}_{KM,\text{masse}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell}) = \frac{\delta_{KM}}{\Delta t},$$

où  $\delta_{KM}$  est le symbole de Kronecker.

b) *Terme de convection*

Le coefficient  $K$  du terme de convection est donné par :

$$\mathcal{F}_{K,\text{conv}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) = \frac{1}{m_K} ([CONV^{n+1}\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}]_K + RHSC_K^{n+1}),$$

où  $CONV^{n+1} \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{T} \times \#\mathcal{T}}$  et  $RHSC^{n+1} \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{T}}$  sont définis par l'Algorithme

3.

**Algorithme 3** ASSEMBLAGE DE  $CONV^{n+1}$  ET DE  $RHSC^{m+1}$ 


---

**pour**  $\sigma \in \mathcal{E}^{\text{int}}$  **faire**  
 Identifier les triangles  $K$  et  $L$  tels que  $\sigma = K|L$   
**si**  $v_{K,\sigma}^{n+1} \geq 0$  **alors**  
 $CONV_{KK}^{n+1} + = v_{K,\sigma}^{n+1}$   
 $CONV_{LK}^{n+1} + = -v_{K,\sigma}^{n+1}$   
**sinon**  
 $CONV_{KL}^{n+1} + = v_{K,\sigma}^{n+1}$   
 $CONV_{LL}^{n+1} + = -v_{K,\sigma}^{n+1}$   
**fin du si**  
**fin du pour**  
**pour**  $\sigma \in \mathcal{E}^D$  **faire**  
 Identifier le triangle  $K$  tel que  $\sigma \subset K$   
**si**  $v_{K,\sigma}^{n+1} \geq 0$  **alors**  
 $CONV_{KK}^{n+1} + = v_{K,\sigma}^{n+1}$   
**sinon**  
 $RHSC_K^{n+1} + = v_{K,\sigma}^{n+1} \theta_{D,\sigma}^{n+1}$   
**fin du si**  
**fin du pour**  
**pour**  $\sigma \in \mathcal{E}^N$  **faire**  
 Identifier le triangle  $K$  tel que  $\sigma \subset K$   
 $CONV_{KK}^{n+1} + = v_{K,\sigma}^{n+1}$   
**fin du pour**

---

Le coefficient  $KM$  de la jacobienne est alors donné par :

$$J\mathcal{F}_{KM,\text{conv}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell}) = CONV_{KM}^{n+1}$$

c) *Terme effet Joule*

Le coefficient  $K$  du terme effet Joule peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{K,\text{Joule}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) &= \frac{2\lambda}{m_K} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K^{\text{int}}, \sigma=K|L} \frac{\tau_\sigma}{2} ((\theta_K^{n+1})^2 + (\theta_L^{n+1})^2 - 2\theta_K^{n+1}\theta_L^{n+1}) \\ &\quad + \frac{2\lambda}{m_K} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K^D} \frac{\tau_\sigma}{2} ((\theta_K^{n+1})^2 + (\theta_{D,\sigma}^{n+1})^2 - 2\theta_K^{n+1}\theta_{D,\sigma}^{n+1}) \\ &= \frac{2\lambda}{m_K} [J_1 Z_{\mathcal{T}}^{n+1}]_K + \frac{4\lambda}{m_K} \theta_K^{n+1} [J_2 \theta_{\mathcal{T}}^{n+1}]_K \\ &\quad + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K^D} \left( \frac{\lambda}{m_K} \tau_\sigma (\theta_{D,\sigma}^{n+1})^2 - \frac{2\lambda}{m_K} \tau_\sigma \theta_K^{n+1} \theta_{D,\sigma}^{n+1} \right), \end{aligned}$$

où  $Z_{\mathcal{T}}^{n+1} \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{T}}$  est défini par :

$$Z_K^{n+1} = [\theta_K^{n+1}]^2, \quad (\text{C.2})$$

et les matrices  $J_1 \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{T} \times \#\mathcal{T}}$  et  $J_2 \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{T} \times \#\mathcal{T}}$  sont définies par l'Algorithme 4.

---

#### Algorithme 4 ASSEMBLAGE DE $J_1$ ET DE $J_2$

---

**pour**  $\sigma \in \mathcal{E}^{\text{int}}$  **faire**

Identifier les triangles  $K$  et  $L$  tels que  $\sigma = K|L$

$$[J_1]_{KK+} = \frac{\tau_\sigma}{2} \quad [J_1]_{LL+} = \frac{\tau_\sigma}{2}$$

$$[J_1]_{KL+} = \frac{\tau_\sigma}{2} \quad [J_1]_{LK+} = \frac{\tau_\sigma}{2}$$

$$[J_2]_{KL+} = -\frac{\tau_\sigma}{2} \quad [J_2]_{LK+} = -\frac{\tau_\sigma}{2}$$

**fin du pour**

**pour**  $\sigma \in \mathcal{E}^D$  **faire**

Identifier le triangle  $K$  tel que  $\sigma \subset K$

$$[J_1]_{KK+} = \frac{\tau_\sigma}{2}$$

**fin du pour**

---

Le coefficient  $KM$  de la jacobienne est alors donné par :

$$\begin{aligned} J\mathcal{F}_{KM,\text{Joule}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell}) &= \frac{4\lambda}{m_K} [J_1]_{KM} \theta_M^{n+1} + \frac{4\lambda}{m_K} \delta_{KM} [J_2 \theta_{\mathcal{T}}^{n+1}]_K + \frac{4\lambda}{m_K} \theta_K^{n+1} [J_2]_{KM} \\ &\quad - \frac{2\lambda}{m_K} \tau_\sigma \delta_{KM} \theta_{D,\sigma}^{n+1}. \end{aligned}$$



d) *Terme de diffusion*

En utilisant la notation  $\alpha_{K,\sigma}^{n+1}$  définie par :

$$\alpha_{K,\sigma}^{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta_K^{n+1} < \theta_{K,\sigma}^{n+1}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on peut réécrire  $\theta_\sigma^{n+1}$  de la façon suivante :

$$\theta_\sigma^{n+1} = \max(\theta_K^{n+1}, \theta_{K,\sigma}^{n+1}) = (1 - \alpha_{K,\sigma}^{n+1})\theta_K^{n+1} + \alpha_{K,\sigma}^{n+1}\theta_{K,\sigma}^{n+1},$$

ou encore dans le cas où  $\sigma \in \mathcal{E}^{\text{int}}$  telle que  $\sigma = K|L$  :

$$\theta_\sigma^{n+1} = \alpha_{L,\sigma}^{n+1}\theta_K^{n+1} + \alpha_{K,\sigma}^{n+1}\theta_L^{n+1}.$$

On obtient alors le coefficient  $K$  du terme de diffusion :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{K,\text{diff}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1}) &= \frac{\lambda}{m_K} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K^{\text{int}}, \sigma=K|L} \tau_\sigma (\alpha_{L,\sigma}^{n+1}(\theta_K^{n+1})^2 - \alpha_{K,\sigma}^{n+1}(\theta_L^{n+1})^2 + (\alpha_{K,\sigma}^{n+1} - \alpha_{L,\sigma}^{n+1})\theta_K^{n+1}\theta_L^{n+1}) \\ &\quad + \frac{\lambda}{m_K} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K^D} \tau_\sigma ((1 - \alpha_{K,\sigma}^{n+1})(\theta_K^{n+1})^2 - \alpha_{K,\sigma}^{n+1}(\theta_{D,\sigma}^{n+1})^2 + (2\alpha_{K,\sigma}^{n+1} - 1)\theta_K^{n+1}\theta_{D,\sigma}^{n+1}) \\ &= \frac{\lambda}{m_K} [D_1^{n+1} Z_{\mathcal{T}}^{n+1}]_K + \frac{\lambda}{m_K} \theta_K^{n+1} [D_2^{n+1} \theta_{\mathcal{T}}^{n+1}]_K \\ &\quad + \frac{\lambda}{m_K} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K^D} ((2\alpha_{K,\sigma}^{n+1} - 1)\tau_\sigma \theta_K^{n+1} \theta_{D,\sigma}^{n+1} - \alpha_{K,\sigma} \tau_\sigma (\theta_{D,\sigma}^{n+1})^2), \end{aligned}$$

où  $Z_{\mathcal{T}}^{n+1}$  est défini par (C.2) et  $D_1^{n+1} \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{T} \times \#\mathcal{T}}$  et  $D_2^{n+1} \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{T} \times \#\mathcal{T}}$  sont définis dans l'Algorithme 5.

---

**Algorithme 5** ASSEMBLAGE DE  $D_1^{n+1}$  ET DE  $D_2^{n+1}$ 


---

**pour**  $\sigma \in \mathcal{E}^{\text{int}}$  **faire**

Identifier les triangles  $K$  et  $L$  tels que  $\sigma = K|L$

$$[D_1^{n+1}]_{KK+} = \tau_\sigma \alpha_{L,\sigma}^{n+1} \quad [D_1^{n+1}]_{LL+} = \tau_\sigma \alpha_{K,\sigma}^{n+1}$$

$$[D_1^{n+1}]_{KL+} = -\tau_\sigma \alpha_{K,\sigma}^{n+1} \quad [D_1^{n+1}]_{LK+} = -\tau_\sigma \alpha_{L,\sigma}^{n+1}$$

$$[D_2^{n+1}]_{KL+} = \tau_\sigma (\alpha_{K,\sigma}^{n+1} - \alpha_{L,\sigma}^{n+1}) \quad [D_2^{n+1}]_{LK+} = -\tau_\sigma (\alpha_{K,\sigma}^{n+1} - \alpha_{L,\sigma}^{n+1})$$

**fin du pour**

**pour**  $\sigma \in \mathcal{E}^D$  **faire**

Identifier le triangle  $K$  tel que  $\sigma \subset K$

$$[D_1^{n+1}]_{KK+} = \tau_\sigma (1 - \alpha_{K,\sigma}^{n+1})$$

**fin du pour**

---

Le coefficient  $KM$  de la jacobienne est donc donné par :

$$\begin{aligned}
 J\mathcal{F}_{KM,\text{diff}}^{n+1}(\theta_{\mathcal{T}}^{n+1,\ell}) &= \frac{2\lambda}{m_K} [D_1^{n+1}]_{KM} \theta_M^{n+1} + \frac{\lambda}{m_K} \delta_{KM} [D_2^{n+1} \theta_{\mathcal{T}}^{n+1}]_K + \frac{\lambda}{m_K} \theta_K^{n+1} [D_2]_{KM} \\
 &\quad + \frac{\lambda}{m_K} (2\alpha_{K,\sigma}^{n+1} - 1) \tau_{\sigma} \delta_{KM} \theta_{D,\sigma}^{n+1}.
 \end{aligned}$$

# Bibliographie

- [1] S. Agmon. *Lectures on elliptic boundary value problems*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2010. Prepared for publication by B. Frank Jones, Jr. with the assistance of George W. Batten, Jr., Revised edition of the 1965 original.
- [2] H. Amann. *Ordinary differential equations*, volume 13 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1990. An introduction to nonlinear analysis, Translated from the German by Gerhard Metzen.
- [3] M. Avila, J. Principe, and R. Codina. A finite element dynamical nonlinear subscale approximation for the low Mach number flow equations. *J. Comput. Phys.*, 230(22) :7988–8009, 2011.
- [4] A. Beccantini, E. Studer, S. Gounand, J.-P. Magnaud, T. Kloczko, C. Corre, and S. Kudriakov. Numerical simulations of a transient injection flow at low Mach number regime. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 76(5) :662–696, 2008.
- [5] H. Beirão da Veiga. Diffusion on viscous fluids. Existence and asymptotic properties of solutions. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 10(2) :341–355, 1983.
- [6] A. Bradji and R. Herbin. Discretization of coupled heat and electrical diffusion problems by finite-element and finite-volume methods. *IMA J. Numer. Anal.*, 28(3) :469–495, 2008.
- [7] D. Bresch, E. H. Essoufi, and M. Sy. Effect of density dependent viscosities on multiphasic incompressible fluid models. *J. Math. Fluid Mech.*, 9(3) :377–397, 2007.
- [8] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [9] C. Calgaro, E. Chane-Kane, E. Creusé, and T. Goudon.  $L^\infty$ -stability of vertex-based MUSCL finite volume schemes on unstructured grids : simulation of in-

- compressible flows with high density ratios. *J. Comput. Phys.*, 229(17) :6027–6046, 2010.
- [10] C. Calgaro, C. Colin, and E. Creusé. A combined finite volumes - finite elements method for a low-Mach model. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 2019. <https://doi.org/10.1002/fld.4706>.
- [11] C. Calgaro, C. Colin, E. Creusé, and E. Zahrouni. Approximation by an iterative method of a low-Mach model with temperature dependant viscosity. *Math. Methods Appl. Sci.*, 42 :250–271, 2019.
- [12] C. Calgaro, E. Creusé, and T. Goudon. An hybrid finite volume-finite element method for variable density incompressible flows. *J. Comput. Phys.*, 227(9) :4671–4696, 2008.
- [13] C. Calgaro, E. Creusé, and T. Goudon. Modeling and simulation of mixture flows : application to powder-snow avalanches. *Comput. & Fluids*, 107 :100–122, 2015.
- [14] C. Cancès. Communication privée.
- [15] C. Cancès and C. Guichard. Convergence of a nonlinear entropy diminishing control volume finite element scheme for solving anisotropic degenerate parabolic equations. *Math. Comp.*, 85(298) :549–580, 2016.
- [16] C. Chainais-Hillairet. Discrete duality finite volume schemes for two-dimensional drift-diffusion and energy-transport models. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 59(3) :239–257, 2009.
- [17] C. Chainais-Hillairet, Y.-J. Peng, and I. Violet. Numerical solutions of Euler-Poisson systems for potential flows. *Appl. Numer. Math.*, 59(2) :301–315, 2009.
- [18] C. Chalons, M. Girardin, and S. Kokh. Large time step and asymptotic preserving numerical schemes for the gas dynamics equations with source terms. *SIAM J. Sci. Comput.*, 35(6) :A2874–A2902, 2013.
- [19] Y.-H. Choi and C. L. Merkle. The application of preconditioning in viscous flows. *J. Comput. Phys.*, 105(2) :207–223, 1993.
- [20] A. J. Chorin. The numerical solution of the Navier-Stokes equations for an incompressible fluid. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 :928–931, 1967.
- [21] A. J. Chorin. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Math. Comp.*, 22 :745–762, 1968.

- 
- [22] A. J. Chorin. On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations. *Math. Comp.*, 23 :341–353, 1969.
- [23] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1978. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4.
- [24] P. G. Ciarlet. *Introduction to numerical linear algebra and optimisation*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1989. With the assistance of Bernadette Miara and Jean-Marie Thomas, Translated from the French by A. Buttigieg.
- [25] Y. Coudière, J.-P. Vila, and P. Villedieu. Convergence rate of a finite volume scheme for a two-dimensional convection-diffusion problem. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33(3) :493–516, 1999.
- [26] R. Danchin and X. Liao. On the well-posedness of the full low Mach number limit system in general critical Besov spaces. *Commun. Contemp. Math.*, 14(3) :1250022, 47, 2012.
- [27] V. Daru, P. Le Quéré, M.-C. Duluc, and O. Le Maître. A numerical method for the simulation of low Mach number liquid-gas flows. *J. Comput. Phys.*, 229(23) :8844–8867, 2010.
- [28] S. Dellacherie. Dérivation du système diphasique bas mach. simulation numérique en géométrie monodimensionnelle. Rapport CEA externe CEA-R-6046, 2004.
- [29] S. Dellacherie. On a diphasic low Mach number system. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 39(3) :487–514, 2005.
- [30] S. Dellacherie, J. Jung, P. Omnes, and P.-A. Raviart. Construction of modified Godunov-type schemes accurate at any Mach number for the compressible Euler system. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 26(13) :2525–2615, 2016.
- [31] K. Domelevo and P. Omnes. A finite volume method for the Laplace equation on almost arbitrary two-dimensional grids. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 39(6) :1203–1249, 2005.
- [32] J. Droniou and R. Eymard. A mixed finite volume scheme for anisotropic diffusion problems on any grid. *Numer. Math.*, 105(1) :35–71, 2006.
- [33] P. Embid. Well-posedness of the nonlinear equations for zero Mach number combustion. *Comm. Partial Differential Equations*, 12(11) :1227–1283, 1987.

- 
- [34] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.
- [35] R. Eymard and T. Gallouët.  $H$ -convergence and numerical schemes for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(2) :539–562, 2003.
- [36] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. Finite volume methods. In *Handbook of numerical analysis, Vol. VII*, Handb. Numer. Anal., VII, pages 713–1020. North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [37] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. A cell-centered finite-volume approximation for anisotropic diffusion operators on unstructured meshes in any space dimension. *IMA J. Numer. Anal.*, 26(2) :326–353, 2006.
- [38] R. Eymard and T. Gallouët.  $H$ -convergence and numerical schemes for elliptic equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, (3) :539–562, 2000.
- [39] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [40] V. Gravemeier and W. A. Wall. An algebraic variational multiscale-multigrid method for large-eddy simulation of turbulent variable-density flow at low Mach number. *J. Comput. Phys.*, 229(17) :6047–6070, 2010.
- [41] V. Gravemeier and W. A. Wall. Residual-based variational multiscale methods for laminar, transitional and turbulent variable-density flow at low Mach number. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 65(10) :1260–1278, 2011.
- [42] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, volume 69 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2011. Reprint of the 1985 original [ MR0775683], With a foreword by Susanne C. Brenner.
- [43] J. L. Guermond, P. Mineev, and J. Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195(44-47) :6011–6045, 2006.
- [44] J.-L. Guermond and L. Quartapelle. Calculation of incompressible viscous flows by an unconditionally stable projection FEM. *J. Comput. Phys.*, 132(1) :12–33, 1997.
- [45] J.-L. Guermond and L. Quartapelle. On stability and convergence of projection methods based on pressure Poisson equation. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 26(9) :1039–1053, 1998.

- [46] J.-L. Guermond and A. Salgado. A splitting method for incompressible flows with variable density based on a pressure Poisson equation. *J. Comput. Phys.*, 228(8) :2834–2846, 2009.
- [47] J.-L. Guermond and A. J. Salgado. Error analysis of a fractional time-stepping technique for incompressible flows with variable density. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(3) :917–944, 2011.
- [48] J. L. Guermond and J. Shen. On the error estimates for the rotational pressure-correction projection methods. *Math. Comp.*, 73(248) :1719–1737 (electronic), 2004.
- [49] H. Guillard and C. Viozat. On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit. *Comput. & Fluids*, 28(1) :63–86, 1999.
- [50] F. Guillén-González, P. Damázio, and M. A. Rojas-Medar. Approximation by an iterative method for regular solutions for incompressible fluids with mass diffusion. *J. Math. Anal. Appl.*, 326(1) :468–487, 2007.
- [51] F. Guillén-González and M. Sy. Iterative method for mass diffusion model with density dependent viscosity. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 10(4) :823–841, 2008.
- [52] F. H. Harlow and A. A. Amsden. A numerical fluid dynamics calculation method for all flow speeds. *Journal Comput. Physics*, 8 :197–213, 1971.
- [53] R. Herbin, W. Kheriji, and J.-C. Latche. Staggered schemes for all speed flows. In *Congrès National de Mathématiques Appliquées et Industrielles*, volume 35 of *ESAIM Proc.*, pages 122–150. EDP Sci., Les Ulis, 2011.
- [54] R. Herbin, J.-C. Latché, and K. Saleh. Low Mach number limit of a pressure correction MAC scheme for compressible barotropic flows. In *Finite volumes for complex applications VIII—methods and theoretical aspects*, volume 199 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 255–263. Springer, Cham, 2017.
- [55] F. Hermeline. A finite volume method for the approximation of diffusion operators on distorted meshes. *J. Comput. Phys.*, 160(2) :481–499, 2000.
- [56] V. Heuveline. On higher-order mixed FEM for low Mach number flows : application to a natural convection benchmark problem. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 41(12) :1339–1356, 2003.
- [57] F. Huang and W. Tan. On the strong solution of the ghost effect system. *SIAM J. Math. Anal.*, 49(5) :3496–3526, 2017.

- [58] S. Klainerman and A. Majda. Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids. *Comm. Pure Appl. Math.*, 34(4) :481–524, 1981.
- [59] R. Klein. Semi-implicit extension of a Godunov-type scheme based on low Mach number asymptotics. I. One-dimensional flow. *J. Comput. Phys.*, 121(2) :213–237, 1995.
- [60] O. A. Ladyzhenskaya. *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. Second English edition, revised and enlarged. Translated from the Russian by Richard A. Silverman and John Chu. Mathematics and its Applications, Vol. 2. Gordon and Breach, Science Publishers, New York-London-Paris, 1969.
- [61] P. Le Quéré, C. Weisman, H. Paillère, J. Vierendeels, E. Dick, R. Becker, M. Braack, and J. Locke. Modelling of natural convection flows with large temperature differences : a benchmark problem for low Mach number solvers. I. Reference solutions. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 39(3) :609–616, 2005.
- [62] B. Lessani and M. V. Papalexandris. Time-accurate calculation of variable density flows with strong temperature gradients and combustion. *J. Comput. Phys.*, 212(1) :218–246, 2006.
- [63] C. Levermore, W. Sun, and K. Trivisa. Local well-posedness of a ghost system effect. *Indiana Univ. Math. J.*, 60 :517–576, 2011.
- [64] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1*. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17. Dunod, Paris, 1968.
- [65] P.-L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 2*, volume 10 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998. Compressible models, Oxford Science Publications.
- [66] W. Liu and G. Makhviladze. An implicit finite element solution of thermal flows at low Mach number. *J. Comput. Phys.*, 227(5) :2743–2757, 2008.
- [67] S. A. Lorca and J. L. Boldrini. The initial value problem for a generalized Boussinesq model. *Nonlinear Anal.*, 36(4, Ser. A : Theory Methods) :457–480, 1999.
- [68] H. Luo, B. J.D., and R. Lohner. Extension of harten-lax-van leer scheme for flows at all speeds. *AIAA Journal*, 43(6) :1160–1166, 2005.



- [69] A. Majda and J. Sethian. The derivation and numerical solution of the equations for zero Mach number combustion. *Combustion Science and Technology*, 42 :185–205, 1985.
- [70] M. J. Martinez and D. K. Gartling. A finite element method for low-speed compressible flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193(21-22) :1959–1979, 2004.
- [71] B. Merlet. Communication privée.
- [72] C.-D. Munz, S. Roller, R. Klein, and K. J. Geratz. The extension of incompressible flow solvers to the weakly compressible regime. *Comput. & Fluids*, 32(2) :173–196, 2003.
- [73] F. Nicoud. Conservative high-order finite-difference schemes for low-Mach number flows. *J. Comput. Phys.*, 158(1) :71–97, 2000.
- [74] L. Nirenberg. On elliptic partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 13 :115–162, 1959.
- [75] S. Noelle, G. Bispen, K. R. Arun, M. Lukáčová-Medvid'ová, and C.-D. Munz. A weakly asymptotic preserving low Mach number scheme for the Euler equations of gas dynamics. *SIAM J. Sci. Comput.*, 36(6) :B989–B1024, 2014.
- [76] J. H. Park and C.-D. Munz. Multiple pressure variables methods for fluid flow at all Mach numbers. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 49(8) :905–931, 2005.
- [77] S. Patankar and D. Spalding. A calculation procedure for heat, mass, and momentum transfer in three-dimensional parabolic flow. *Int. J. Heat Mass Transfer*, (15) :1787–806, 1972.
- [78] Y. Penel, S. Dellacherie, and B. Després. Coupling strategies for compressible-low Mach number flows. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 25(6) :1045–1089, 2015.
- [79] J. Principe and R. Codina. A stabilized finite element approximation of low speed thermally coupled flows. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 18 :835–867, 2007.
- [80] S. Schochet. The compressible Euler equations in a bounded domain : existence of solutions and the incompressible limit. *Comm. Math. Phys.*, 104(1) :49–75, 1986.
- [81] R. Témam. Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires. II. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 33 :377–385, 1969.

- [82] R. Temam. *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 2.
- [83] R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.
- [84] E. Turkel. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *Journal of Computational Physics*, 72 :277–298, 1987.
- [85] A. Tyliczszak and H. Deconinck. Application of time preconditioning and high-order compact discretization method for low Mach number flows. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 72(6) :650–670, 2013.
- [86] D. Vigneron, J.-M. Vaassen, and J.-A. Essers. An implicit finite volume method for the solution of 3D low Mach number viscous flows using a local preconditioning technique. *J. Comput. Appl. Math.*, 215(2) :610–617, 2008.
- [87] K. N. Volkov and A. G. Karpenko. Preconditioning of gas dynamics equations in compressible gas flow computations at low Mach numbers. *Comput. Math. Math. Phys.*, 55(6) :1051–1067, 2015.



# Analyse et simulation numérique par méthode combinée Volumes Finis – Éléments Finis de modèles de type Faible Mach

**Résumé :** Dans cette thèse, nous étudions des écoulements caractérisés par un faible nombre de Mach. Dans une première partie, nous développons un schéma numérique permettant la résolution des équations de Navier-Stokes à faible nombre de Mach. L'équation de continuité est résolue par une méthode de volumes finis, tandis que l'équation de conservation de la quantité de mouvement et l'équation d'évolution de la température sont résolues par éléments finis. Le schéma ainsi développé assure la préservation des états constants. Dans une seconde partie, nous faisons l'analyse d'un modèle de type faible Mach spécifique, dans lequel la pression thermodynamique est considérée constante, et la viscosité est une fonction particulière de la température. Nous montrons l'existence, l'unicité et la régularité des solutions, ainsi qu'un résultat de principe du maximum pour la température. Enfin dans une troisième partie, nous développons un schéma numérique permettant de simuler les équations de ce modèle. L'accent est mis sur la discrétisation de l'équation de température, qui est de type volumes finis. Plusieurs schémas sont étudiés et comparés sur des critères de précision et de respect du principe du maximum. L'équation de conservation de la quantité de mouvement est discrétisée par éléments finis, définissant un nouveau schéma combiné.

**Mots-clés :** Modèle bas Mach, Volumes Finis, Éléments Finis, Principe du maximum, Existence de solution.

---

**Abstract :** In this thesis, we study some flows characterized by a low Mach number. In a first part, we develop a numerical scheme allowing the resolution of the Navier-Stokes equations in the low Mach number approximation. The continuity equation is solved by a finite volume method, while the momentum and temperature equations are solved by finite elements. The scheme ensures the preservation of constant states. In a second part, we analyze a specific low Mach type model, in which the thermodynamic pressure is considered constant, and the viscosity is a particular function of the temperature. We show the existence, the uniqueness and the regularity of the solutions, as well as a maximum principle result for the temperature. Finally, in a third part, we develop a numerical scheme to simulate the equations of this model. Emphasis is placed on the discretization of the temperature equation, which is of finite volume type. Several schemes are studied and compared on criteria of precision and respect of the maximum principle. The momentum equation is discretized by finite elements, defining a new combined scheme.

**Keywords :** Low Mach model, Finite Volumes, Finite Elements, Maximum principle, Existence result.

