



École Doctorale N° 72
Sciences Pour l'Ingénieur Université Lille Nord-de-France

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de
DOCTEUR *spécialité* : MATHÉMATIQUES

**Identités intégrales et estimations explicites
associées pour les fonctions sommatoires liées à la
fonction de Möbius et autres fonctions
arithmétiques**

Florian DAVAL

Directeur : Jean-François BURNOL

Co-encadrant : Bruno MARTIN

*Soutenue publiquement le 25 octobre 2019 à Villeneuve d'Ascq
devant le jury composé de :*

M. Emmanuel FRICAIN Professeur des universités Université de Lille (Laboratoire Paul Painlevé)	Président
M. Michel BALAZARD Chargé de recherche CNRS (HDR) Institut de Mathématiques de Marseille	Rapporteur
M. Olivier ROBERT Maître de conférences (HDR) Université Jean Monnet Saint-Étienne (Institut Camille Jordan)	Rapporteur
M. Bruno MARTIN Professeur des universités Université du Littoral Côte d'Opale (LMPA Joseph Liouville)	Examineur
M ^{me} Anne DE ROTON Maîtresse de conférences (HDR) Université de Lorraine (Institut Élie Cartan)	Examinatrice
M. Jean-François BURNOL Professeur des universités Université de Lille	Directeur
M ^{me} Martine QUEFFÉLEC Maîtresse de conférences (émérite, HDR) Université de Lille	Invitée

Département de Mathématiques
Laboratoire Paul Painlevé (UMR CNRS 8524)
Université de Lille, Cité scientifique, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex

Résumé/Abstract

IDENTITÉS INTÉGRALES ET ESTIMATIONS EXPLICITES ASSOCIÉES POUR LES FONCTIONS SOMMATOIRES LIÉES À LA FONCTION DE MÖBIUS ET AUTRES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

Cette thèse développe, tant du point de vue théorique que de celui des explorations numériques, la théorie dite explicite des nombres premiers, principalement sous l'angle de la variable réelle. Elle s'inscrit dans un cadre initié par Michel BALAZARD qui met en avant des identités intégrales reliant la fonction sommatoire M des coefficients de MÖBIUS avec sa variante logarithmique m . Nous présentons un mécanisme systématique de fabrication de telles identités, avec comme paramètre une fonction g intégrable sur $[0, 1]$. Nous étudions particulièrement le cas des g polynomiales (il englobe toutes les identités précédemment publiées par BALAZARD), en cherchant à optimiser certaines normes sup pour l'utilisation des identités intégrales associées. Nous détaillons la stratégie des explorations numériques, dont l'objectif in fine est l'étude de constantes C_k^* implicitement définies par BALAZARD. Puis nous revenons à l'obtention de valeurs exactes pour $\sup\{|m(x) - M(x)/x|(\log x)^j : x \geq T\}$ pour $j = 0, 1, 2$ et certains T . Par la suite, nous obtenons une minoration en moyenne effective de $|M|$ qui est apparentée à un résultat antérieur de PINTZ, mais notre approche est essentiellement différente car elle n'utilise presque pas d'analyse complexe. Et nous donnons le résultat analogue pour la fonction sommatoire de la fonction de LIOUVILLE. Par ailleurs nous nous intéressons aux meilleures estimations connues non-effectives pour $M(x)$ et montrons comment les transformer en des estimations de $xm(x) - M(x)$ du même type. Les techniques et résultats obtenus pour m et M sont partiellement étendus à d'autres fonctions arithmétiques.

Auteur : Florian DAVAL.

Mots clés : Théorie explicite des nombres premiers, asymptotique de fonctions arithmétiques.

MathSciNet : 11N37.

INTEGRAL IDENTITIES AND EXPLICIT ESTIMATIONS ASSOCIATED WITH SUMMATORY FUNCTIONS RELATED TO THE MÖBIUS AND OTHER ARITHMETICAL FUNCTIONS

This thesis develops both theoretical and numerical aspects of the explicit theory of prime numbers, mainly from the real analysis viewpoint. Its general framework was initiated by Michel BALAZARD who obtained integral identities relating the summatory function M of the MÖBIUS coefficients with its logarithmic variant m . We present a systematic mechanism towards such identities, with an integrable function g on $[0, 1]$ as parameter. We focus particularly on polynomial g 's (as they provide all identities previously published by BALAZARD), and aim at optimizing the sup norm of the related integrands in the aforementioned integral identities. We detail the strategy of numerical explorations, whose ultimate objective is the study of some constants C_k^* tacitly defined by BALAZARD. Then we turn to obtaining exact values for $\sup\{|m(x) - M(x)/x|(\log x)^j : x \geq T\}$ for $j = 0, 1, 2$ and some T 's. Next, we obtain an effective lower bound of an average of $|M|$, related to a result of PINTZ, but with a fundamentally distinct approach using almost no complex analysis. And we then give the analogous result for the summatory function of the LIOUVILLE coefficients. Also, we consider the best known non-effective estimates for $M(x)$ and show how to transform them into estimates of $xm(x) - M(x)$ of the same type. The techniques and obtained results dealing with m and M are partially extended to other arithmetical functions.

Author: Florian DAVAL.

Keywords: Explicit theory of prime numbers, asymptotics of arithmetical functions.

MathSciNet: 11N37

Adresse postale du lieu de préparation de la thèse :

Département de Mathématiques

Laboratoire Paul Painlevé (UMR CNRS 8524)

Université de Lille

Cité scientifique M2

F-59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX

*Le plus grand philosophe du monde sur une planche plus large
qu'il ne faut, s'il y a au-dessous un précipice, quoique sa raison
le convainque de sa sûreté, son imagination prévaudra. Plusieurs
n'en sauraient soutenir la pensée sans pâlir et suer.*

– Blaise Pascal, *Pensées*.

*In this chapter we confine ourselves to theorems which can be
proved without the use of the theory of functions of a complex
variable. The main results are superseded by those of later
chapters, but the elementary arguments are of great interest on
account of their simplicity and directness.*

– Albert Edward Ingham, *The distribution of prime numbers*.

Je tiens tout d'abord à remercier Olivier Ramaré pour avoir préparé le sujet de cette thèse et pour m'avoir accueilli à Lille. Je le remercie également pour son écoute et son aide régulière durant les deux premières années de la thèse, j'ai encore les papiers qu'il a griffonnés lors de nos entrevues. Je le remercie pour les démarches qu'il a faites pour que je passe quelques mois à Marseille où il venait de déménager au début de la troisième année de ma thèse. Je n'oublie pas non plus qu'il a permis que je poursuive la thèse avec un autre directeur à Lille.

Je tiens à remercier Bruno Martin qui est très présent depuis le début de cette thèse. Il est venu depuis Calais tous les quinze jours environ pour discuter de l'avancement de mes travaux (face au tableau et craie en main). Sa patience et sa volonté de désosser tous les arguments ont fait progresser les idées et l'assemblage de celles-ci de manière fondamentale. Même pendant son année à Montréal il a pris du temps pour que l'on discute et a toujours été un soutien précieux. Sa douceur et son calme sont contagieux. Toute la réalisation du manuscrit lui doit beaucoup, je ne sais pas comment le remercier mais je sais que c'est ici que je peux le faire, encore merci.

Je remercie Jean-François Burnol pour avoir repris la direction de cette thèse. Il a réussi à rentrer dans ce sujet qui n'est pas directement dans ses thèmes de recherche habituels. Avec ses conseils sûrs et des suggestions décisives, le manuscrit s'est bien enrichi. Il a eu la patience de relire mes formulations bancales, il m'a aidé à raccourcir en ne gardant que les parties saillantes du texte (et contrôler ma fâcheuse tendance à renvoyer toute l'information en fin de phrase). Je tiens également à le remercier pour toutes les démarches administratives qu'il a menées.

Je remercie Michel Balazard pour avoir été un des deux rapporteurs de cette thèse. Son expertise sur le sujet et sa lecture attentive ont permis d'améliorer plusieurs passages. Je le

remercie également pour avoir initié ce qui m'a occupé durant plusieurs années, c'est-à-dire les inégalités intégrales liant les fonctions M et m . Je n'oublie pas notre première rencontre à Calais (d'ailleurs je suis arrivé en retard car j'avais pris par erreur un train pour Valenciennes), où il a pris du temps pour écouter le début de mes travaux. Tout ceci s'est passé dans le bureau de Bruno Martin que je dois encore remercier. D'autres discussions, cette fois à Marseille, ont été bien utiles. En résumé il suffira de lire le manuscrit pour voir que Michel Balazard et une partie de ses travaux ont été fondamentaux pour ma thèse.

Je remercie Olivier Robert d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse. Je le remercie également pour m'avoir guidé dans les rues de Lille lors d'exposés qui se déroulaient au laboratoire Painlevé au moment où je venais d'arriver dans cette ville. Si bien que le paradoxe suivant a eu lieu : bien que j'étais un membre local, c'est lui qui connaissait le mieux les lieux. Je me souviens lui avoir demandé naïvement : « Et toi qui est ton directeur de thèse ? », en fait c'était lui le directeur de thèse.

Je remercie Martine Queffélec pour avoir accepté de faire partie du jury. Je la remercie également pour ses exposés au groupe de travail qui se nommait Théorie analytique des nombres et analyse harmonique. Sa bonne humeur est un très bon allié pour le quotidien au laboratoire Painlevé.

Je remercie Emmanuel Fricain pour avoir accepté de présider le jury. Je le remercie également pour avoir été présent dans des démarches liées à cette thèse. Il s'est tenu disponible à plusieurs étapes clés et ce de manière discrète. Je suppose que si on lui pose la question, il dira qu'il n'a rien fait de spécial. Je le remercie également pour la co-organisation des très intéressantes Leçons d'analyse.

Je remercie également Anne de Roton. Puisque des remerciements sont un peu un exercice de mémoire, il me semble l'avoir croisée deux fois : à l'IHP lors d'une rencontre Daboussi qui contenait un exposé de Michel Balazard sur le critère de Baez-Duarte, puis une autre fois au CIRM pour des conférences sur le thème des nombres premiers et des suites automatiques. Ne la connaissant pas, il me semble encore plus important de la remercier d'avoir accepté de faire partie du jury de ma thèse.

Je remercie le laboratoire Painlevé pour les conférences organisées et notamment le CEMPI qui permet de les financer en partie. Je tiens à remercier Pierre Dèbes pour son aide et son écoute. Je remercie également l'Institut de Mathématiques de Luminy de m'avoir accueilli durant quelques mois. Je remercie tous les orateurs et les participants que j'ai rencontrés au groupe de travail TANyA de Lille et au groupe de travail TAPAS de Marseille. Je salue aussi les orateurs et les participants du séminaire des doctorants et post-doctorants de Lille.

Pour en revenir aux sources, je mentionne avec un grand respect le Laboratoire de Mathématiques de Besançon et ses membres. J'ai bien peur que la position des livres dans les deux bibliothèques ne soit plus exactement la même que dans ma tête.

Pour finir je remercie mes amis et ma famille pour leur soutien.

Sommaire

Notations principales	ix
Résumé détaillé	xi
1 Identités intégrales	1
2 Les constantes C_k	23
3 Norme L^1 de $Ug(t)t^{-1}$ sur $[1, \infty[$	53
4 Conversions de M vers m_1 et m	61
5 La fonction Λ de von Mangoldt	83
6 Moyennes logarithmiques de Riesz	91
7 Conversions d'estimations non effectives	105
8 Minoration en moyenne des fonctions de Mertens et de Liouville	111
9 Conversions de m vers M , analogue d'un résultat de Odlyzko et de Riele pour m	121
Bibliographie	125
Table des matières	129

Notations principales

- La notation $\sum_{n \leq x}$ est à lire comme $\sum_{1 \leq n \leq x}$.
- Fonction de Möbius : $\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{si } n = p_1 p_2 \dots p_r \text{ est sans facteur carré,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- Pour $x > 0$:
 - $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$
 - $m(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n}$
 - $m_1(x) = m(x) - \frac{M(x)}{x}$
 - $\chi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- $\{x\}$ est la partie fractionnaire $x - \lfloor x \rfloor$. Pour $x > 0$, cela s'écrit aussi $x - \sum_{n \leq x} 1$.
- Soit $R \geq 0$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$.
 - $f(x) = O(R(x))$ et $f(x) \ll O(R(x))$ seront synonymes et signifieront qu'il existe une constante c telle que $|f(x)| \leq cR(x)$ pour x assez grand.
 - $f(x) = o(R(x))$ signifie que la limite de $f(x)/R(x)$ quand $x \rightarrow \infty$ vaut 0.
 - $\Omega(R(x))$ signifie que $o(R(x))$ est faux. Autrement dit $|f(x_n)| > cR(x_n)$ pour une suite (x_n) tendant vers $+\infty$ et une constante $c > 0$.
 - $f(x) = \Omega_+(R(x))$ dit qu'il existe une suite (x_n) tendant vers $+\infty$ et $c > 0$ tels que $f(x_n) > cR(x_n)$.
 - $f(x) = \Omega_-(R(x))$ dit qu'il existe une suite (x_n) tendant vers $+\infty$ et $c > 0$ tels que $f(x_n) < -cR(x_n)$.
- Pour $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ intégrable nous employons la notation $I_g = \int_0^1 g(y) dy$. Sauf mention du contraire « intégrable » signifie intégrable au sens de Lebesgue.
- Étant donné une fonction $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbf{C}$, nous posons $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [1, \infty[} |f(t)|$ qui peut éventuellement valoir $+\infty$. Précisons que \sup désigne bien ici la borne supérieure et non la borne supérieure essentielle.

Résumé détaillé

La répartition des valeurs de la fonction de Möbius $\mu(n)$ est intimement liée à celle des nombres premiers. Il est classiquement connu que le théorème des nombres premiers, énoncé sous la forme

$$\psi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{p^k \leq x} \log p \sim x \quad (x \rightarrow +\infty), \quad (1)$$

est équivalent à la relation

$$M(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n \leq x} \mu(n) = o(x) \quad (x \rightarrow +\infty), \quad (2)$$

et aussi à

$$m(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} = o(1) \quad (x \rightarrow +\infty). \quad (3)$$

Le comportement asymptotique de la fonction sommatoire M (de Mertens) est aussi lié aux zéros de la fonction zêta. Rappelons que la meilleure majoration (non effective) de $|M|$ connue pour l'heure résulte d'une méthode standard d'analyse complexe et de la région sans zéros de Korobov-Vinogradov qui n'a pas été améliorée depuis 1958 : il existe $c_1 > 0$ tel que pour tout $x \geq 3$

$$M(x) = O\left(x \exp\left(-c_1(\log x)^{3/5}(\log \log x)^{-1/5}\right)\right). \quad (4)$$

Par ailleurs, l'hypothèse de Riemann équivaut à :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad M(x) = O_\varepsilon\left(x^{1/2+\varepsilon}\right),$$

et, pour $\theta > \frac{1}{2}$, la validité de $O_\varepsilon(x^{\theta+\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$ montrerait que les zéros ont des parties réelles $\leq \theta$. On sait que

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{|M(x)|}{\sqrt{x}} > 0,$$

et on conjecture généralement que cette limite supérieure vaut $+\infty$.

Un aspect important de la théorie analytique des nombres consiste à étudier par les moyens de l'analyse réelle les liens entre fonctions sommatoires de fonctions arithmétiques de référence. À cet égard, on peut dire que la démonstration au début du 20^e siècle des équivalences (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3), notamment dans l'étude menée par Landau, constitue un point de départ historique. Rappelons que si l'implication $m(x) = o(1) \Rightarrow M(x) = o(x)$ découle d'une simple intégration par parties, l'implication réciproque est en revanche bien plus délicate. Elle fut établie en 1910 par Axer au moyen d'un résultat plus général désormais connu sous le nom de lemme d'Axer.

De nouvelles difficultés apparaissent lorsqu'il s'agit de convertir des estimations explicites d'une fonction sommatoire vers une autre, et la version effective du lemme d'Axer ne donne pas de résultats satisfaisants en la matière (cf. §3.2 de [Balazard, 2012a]).

Dans cette perspective, Balazard a récemment établi le théorème suivant, qui fait intervenir la fonction intermédiaire

$$m_1(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x} \right) = m(x) - \frac{M(x)}{x}. \quad (5)$$

Théorème ([Balazard, 2012a]). *Pour tout $k \geq 1$, il existe $C_k, D_k > 0$ tels que*

$$|m_1(x)| \leq \frac{C_k}{x^k} \int_1^x |M(y)| y^{k-2} dy + \frac{D_k}{x}. \quad (6)$$

Balazard fournit des valeurs explicites de (C_k, D_k) pour $k = 1$ et $k = 2$: on a pour tout $x \geq 1$,

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{x} \int_1^x |M(y)| y^{-1} dy + \frac{2}{x} \quad (7)$$

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{x^2} \int_1^x |M(y)| dy + \frac{8/3}{x}. \quad (8)$$

Il fait observer [Balazard, 2012a, §3.2] que l'inégalité (7) fournit une nouvelle preuve de l'implication $M(x) = o(x) \Rightarrow m(x) = o(1)$ et qu'elle n'induit pas les mêmes inconvénients que le lemme d'Axer lors du traitement d'inégalités effectives. Bordellès [Bordellès, 2015] et Ramaré [Ramaré, 2015] exploitent ainsi (8) pour améliorer plusieurs encadrements explicites de m en partant de ceux connus pour M .

Les inégalités de Balazard constituent un nouvel outil dans la théorie dite explicite des nombres premiers, discipline particulièrement mise en lumière par les travaux récents de Ramaré, Tao et Helfgott sur le problème de la représentation des nombres entiers en somme de nombres premiers, avec comme point d'orgue une résolution complète par Helfgott du problème de Goldbach ternaire. Helfgott utilise par exemple, dans une de ses prépublications sur le sujet [Helfgott, 2012, équation (2.8)], une majoration explicite du produit $|m(x)| \log x$ fournie par Ramaré sur laquelle nous reviendrons dans ce texte.

Le travail réalisé dans cette thèse s'inscrit directement dans la continuité des articles de Balazard et vise d'une part à développer un cadre général permettant de produire des inégalités du type (6), et d'autre part à exploiter de telles inégalités pour améliorer certains encadrements explicites de fonctions sommatoires de référence, m en particulier.

Notre premier résultat attache à toute fonction intégrable g une identité reliant les fonctions m_1 et M .

Théorème A (Théorème 1, page 4). *Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable. On note $I_g = \int_0^1 g(y) dy$.*

$$\forall x \geq 1 : \quad I_g \cdot m_1(x) = \int_1^x \frac{M(x/t)}{x/t} U g(t) \frac{dt}{t} + \frac{V g(x)}{x}, \quad (9)$$

où les opérateurs U et V sont définis par

$$U g(x) = I_g - \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} g\left(\frac{n}{x}\right) \quad \text{et} \quad V g(x) = \int_{1/x}^1 \frac{g(y)}{y} dy.$$

L'étude des propriétés de l'opérateur U ,¹ et de ses restrictions à des espaces de fonctions régulières, nous permet non seulement de retrouver les identités de Balazard ainsi qu'une autre, d'El Marraki,

$$m_1(x) = \frac{1}{x} \int_1^x \left\{ \frac{x}{t} \right\} M(t) \frac{dt}{t} + \frac{\log x}{x},$$

mais aussi d'en produire de nouvelles. En outre, l'identité (9) permet d'apporter des éléments de réponse à certaines questions d'ordre théorique posées par Balazard et qui ont en grande partie motivé notre travail.

Pour commencer se pose le problème de déterminer des couples de valeurs admissibles $(C_k; D_k)$ pour les premières valeurs de k . On souhaite obtenir des valeurs de C_k aussi basses que possibles puisque c'est la constante qui joue un rôle prépondérant dans la conversion d'inégalités de M vers m . Balazard, en complément des valeurs de C_k et D_k déjà mentionnées pour $k = 1$ et $k = 2$, conjecture des valeurs admissibles de C_k pour $k \in \{3, \dots, 7\}$. Nous obtenons comme nouvelles valeurs admissibles :

$$(C_1; D_1) = (0,5; 2,58), \quad (C_3; D_3) = (1,05; 2,17), \quad (C_4; D_4) = (1,44; 2,44). \quad (10)$$

Définissons pour chaque k la constante optimale C_k^* comme étant la borne inférieure des C_k pour lesquelles (6) a lieu pour un certain D_k .

Balazard pose la question de savoir si $C_3^* \leq 1$. Nous établissons un résultat conditionnel qui fait intervenir la fonction $M^+(x) = \max(M(x), 0)$:

Théorème B (Corollaire 7, page 42). *Si*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x M^+(u) u \, du}{\int_1^x |M(u)| u \, du} = \frac{1}{2}, \quad (11)$$

alors

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,75 + o(1)}{x^3} \int_1^x |M(u)| u \, du + \frac{3}{x} \quad (x \geq 1).$$

L'hypothèse (11) énonce qu'en moyenne la fonction M est aussi souvent positive que négative et il serait intéressant de déterminer si elle peut être obtenue comme conséquence de conjectures classiques sur les zéros de la fonction ζ . Signalons que nous obtenons aussi un résultat analogue au théorème B qui stipule que conditionnellement à une estimation en moyenne sur M^+ et M voisine de (11), on a $C_2^* < 1$ (cf. Corollaire 6, page 41).

Balazard indique que l'asymptotique $C_k^* = o(k)$ fournirait une nouvelle preuve élémentaire du théorème des nombres premiers. Comme nous le verrons, la formule (9) nous conduit à considérer un majorant de C_k^* , donné par

$$c_k^* = \inf_{\substack{g \in \mathcal{C}^k([0,1]) \\ I_g=1}} \sup_{t \geq 1} |t^k U g(t)|.$$

C'est la formule sommatoire d'Euler-MacLaurin qui amène ici à la considération de fonctions g k -fois continûment dérivables. En effet (cf. définition 2 et proposition 1 page 8) nous caractériserons grâce à elle les $g \in \mathcal{C}^k([0, 1])$ pour lesquelles $\sup_{t \geq 1} |t^k U g(t)| < \infty$. Nous ne parvenons pas à trancher si $C_k^* = o(k)$ ou non mais montrons que la variante plus forte $c_k^* = o(k)$ est fautive.

1. Voir la définition donnée plus loin page 4.

Théorème C (Proposition 12, page 27). *On a pour tout $k \geq 1$: $\frac{\mathfrak{c}_k^*}{k - 0,5} \geq 0,07$.*

Balazard précise également que la méthode développée dans son article fournit l'estimation $C_k^* = O(6^{(k-1)^2})$. Nous améliorons ce résultat en obtenant une majoration pour \mathfrak{c}_k^* (et donc pour C_k^*).

Théorème D (Proposition 24, page 44). *On a $\mathfrak{c}_k^* = O\left(\left(\frac{2k}{\pi e}\right)^{k+1}\right)$.*

Décrivons à présent plusieurs applications du théorème A. D'abord, les inégalités intégrales qui en découlent permettent de donner une forme explicite de l'implication $M(x) = o(x) \Rightarrow m(x) = o(1)$: on a pour tout $x \geq 1$,

$$|m(x)|x \leq 1,4 \max_{t \leq x} |M(t)| + 2,7. \quad (12)$$

Un tel résultat permet de convertir toute nouvelle majoration explicite de $|M|$ en une majoration explicite de $|m|$.

Mais une analyse plus fine à partir de l'identité (9) permet d'obtenir des conversions plus efficaces. Nous améliorons ainsi les majorations connues de $|m(x)|(\log x)^j$ pour $j = 0, 1, 2$. Elles sont déduites des meilleures majorations disponibles pour M , à savoir

$$\text{(Cohen-Dress-El Marraki, 1996)} \quad : \quad |M(x)| \leq \frac{x}{4345} \quad (x \geq 2\,160\,535),$$

$$\text{(Ramaré, 2013)} \quad : \quad |M(x)| \leq \frac{0,013x}{\log x} \quad (x \geq 97\,067),$$

$$\text{(El Marraki, 1995)} \quad : \quad |M(x)| \leq \frac{362,7x}{(\log x)^2} \quad (x \geq 2).$$

Rappelons au lecteur avant de poursuivre que ces inégalités sont particulièrement délicates à obtenir. Contrairement à ce qui se passe pour la fonction ψ , il est difficile de fournir des versions totalement explicites de la relation $M(x) = o(x)$ et ce problème a déjà une longue histoire dont nous décrirons quelques aspects, en particulier l'emploi de fonctions de Heaviside approchées dont nous tirerons largement profit.

À partir des inégalités ci-dessus El Marraki, Ramaré et Bordellès ont obtenu :

$$\text{(El Marraki, 1996)} \quad : \quad |m(x)| \leq \frac{2}{4345} \quad (x \geq 603\,218),$$

$$\text{(Ramaré, 2015)} \quad : \quad |m(x)| \leq \frac{0,0144}{\log x} \quad (x \geq 96\,955),$$

$$\text{(Bordellès, 2015)} \quad : \quad |m(x)| \leq \frac{546}{(\log x)^2} \quad (x \geq 2).$$

Nous raffinons la méthode développée par Ramaré dans [Ramaré, 2015] et utilisons des inégalités intégrales liant m_1 et M du type (6) pour obtenir des majorations très précises de $|m_1(x)|(\log x)^j$ pour $j = 0, 1, 2$. Cela nous permet d'améliorer les inégalités qui précèdent.

Théorème E (Proposition 34 (page 66), proposition 37 (page 72), corollaire 12 (page 79)). *On a :*

$$|m(x)| \leq \frac{1}{4342} \quad (x \geq 2\,160\,605),$$

$$|m(x)| \leq \frac{0,013014}{\log x} \quad (x \geq 97\,063),$$

$$|m(x)| \leq \frac{363,1}{(\log x)^2} \quad (x \geq 2).$$

Signalons une application de nos résultats. Dans le cadre de l'étude numérique de constantes apparaissant dans une famille de théorèmes taubériens étudiée par Jukes, Kotnik [Kotnik, 2007] considère la constante

$$\beta = \int_1^\infty |m_1(x)| \frac{dx}{x^2},$$

dont il ne peut garantir aucun chiffre du développement décimal. Nos résultats sur m_1 permettent de déterminer les 4 premiers.

Théorème F (Proposition 43, page 80). *On a $1 < \beta < 1,00015$.*

On peut également établir des estimations qui lient $|M|$ et $|m|$ relativement à d'autres ordres de grandeur. Par exemple nous montrons que pour tout $x \geq 1$, on a

$$\frac{|M(x)|}{\sqrt{x}} \leq 1,3 \sup_{t \leq x} |m(t)| \sqrt{t} + \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad (13)$$

et une version sur un intervalle allant à l'infini avec x :

$$\frac{|M(x)|}{\sqrt{x}} \leq 1,3 \sup_{\sqrt{x} \leq t \leq x} |m(t)| \sqrt{t} + \frac{3,05}{\sqrt{x}}. \quad (14)$$

En voici une application directe. En 1985, Odlyzko et te Riele ont contredit la majoration $|M(x)| \leq \sqrt{x}$ conjecturée par Mertens :

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{|M(x)|}{\sqrt{x}} > 1,06.$$

Ce résultat a été amélioré par Hurst (avec notamment un long travail informatique) :

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{|M(x)|}{\sqrt{x}} > 1,837. \quad (15)$$

Sans avoir ni à adapter la méthode de Odlyzko et te Riele en remplaçant $\mu(n)$ par $\mu(n)/n$, ni à mener de nouveaux calculs informatiques, nous pouvons déduire directement de (15) et de (14) un résultat du même ordre pour m .

Théorème G (Corollaire 21, page 124).

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} |m(x)| \sqrt{x} > 1,41.$$

Présentons une dernière application du théorème A, non effective cette fois. Nous montrons que la conversion de l'estimation (4) pour M conduit à une estimation analogue pour m_1 avec d'ailleurs une meilleure constante dans l'exponentielle.

Théorème H (Proposition 58, page 106). *Soit $\mathbf{c} > 0$. Si*

$$\frac{M(x)}{x} \ll \exp\left(-\mathbf{c} \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log \log x)^{1/5}}\right)$$

alors

$$m_1(x) \ll_{\mathbf{c}} \exp\left(-1,06\mathbf{c} \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log \log x)^{1/5}}\right).$$

Jusqu'ici nous avons largement centré notre propos sur les fonctions m et M et le théorème A. Nous montrerons que l'on peut généraliser l'identité de convolution dont (9) est issu, et aborder ainsi les liens entre d'autres fonctions sommatoires de référence.

Nous étudions par exemple les liens entre les fonctions M et ψ . Il s'avère que faire des conversions, sans utiliser l'analyse complexe et les zéros de la fonction zêta, du terme d'erreur pour $M(x)$ vers un terme d'erreur pour $\psi(x) - x$ est assez délicat (le chemin inverse est a priori encore plus difficile). Par exemple, Bombieri (cf. [Baez-Duarte, 2000], appendice p. 29) donne la démonstration de l'implication

$$M(x) \ll R(x) \implies \psi(x) - x \ll \sqrt{xR(x) \log\left(\frac{x}{R(x)}\right)}.$$

On déduit ainsi du théorème des nombres premiers sous la forme $M(x) \ll x/(\log x)^k$ l'estimation $\psi(x) - x \ll x/(\log x)^{k/2} \sqrt{\log \log x}$: c'est bien un $o(x)$ mais la qualité du terme d'erreur a diminué. De même l'hypothèse de Riemann sous la forme $M(x) \ll x^{1/2+\varepsilon}$ entraîne avec ce résultat $\psi(x) - x \ll x^{3/4+\varepsilon/2} \sqrt{\log x}$ avec là encore une perte de qualité. Nous prouvons le résultat suivant dans lequel il n'y a pas de perte dans l'ordre de grandeur. Cependant il porte sur une intégrale avec ψ et non pas sur ψ directement :

Théorème I (Proposition 48, page 87). *S'il existe Θ avec $1/2 \leq \Theta \leq 1$ et $A_\Theta > 0$ tels que*

$$\forall x \geq 1, |M(x)| \leq A_\Theta x^\Theta,$$

alors on a

$$\forall x \geq 1, \left| \int_1^x (\psi(u) - u) \frac{du}{u} \right| \leq 2,06A_\Theta x^\Theta + 0,5 \log^2 x + 7.$$

Balazard s'intéresse également à la moyenne de Riesz logarithmique de la fonction de Möbius, soit

$$\mathcal{R}_1(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \log(x/n),$$

qui vérifie $\mathcal{R}_1(x) - 1 = o(1)$ d'après le théorème des nombres premiers. Nous établissons pour \mathcal{R}_1 un analogue du théorème de Balazard (équation (6)), problème qui était posé dans [Balazard, 2012a].

Théorème J (Corollaire 18, page 100). *Pour tout entier $k \geq 1$, il existe des constantes C_k et D_k telles que*

$$|\mathcal{R}_1(x) - 1| \leq \frac{C_k}{x^k} \int_1^x |M(y)| y^{k-2} dy + \frac{D_k}{x} \quad (x \geq 1).$$

L'inégalité pour $k = 1$ était déjà obtenue par Balazard avec $(C_1; D_1) = (1; 1)$. Plus généralement, nous étudions comme le suggère Balazard les moyennes logarithmiques de Riesz d'ordre k données par

$$\mathcal{R}_k(x) = \frac{1}{k!} \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \log^k \left(\frac{x}{n} \right).$$

Nous avons également étudié le comportement en moyenne de $|M|$. Pour ρ un zéro simple de la fonction zêta avec $\Re \rho = 1/2$ on connaît le résultat d'oscillations suivant :

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{M(x)}{\sqrt{x}} > \frac{1}{|\rho \zeta'(\rho)|} \quad \text{et} \quad \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{M(x)}{\sqrt{x}} < -\frac{1}{|\rho \zeta'(\rho)|}.$$

Ainsi, en particulier, la fonction $M(x)$ change de signe une infinité de fois, et par conséquent prend chacune des valeurs 0, +1, -1 une infinité de fois, ce qui interdit toute minoration asymptotique de $|M(x)|$ par une fonction tendant vers l'infini.

Une telle minoration reste possible en moyenne : Pintz, dans un article [Pintz, 1982] s'inscrivant dans la lignée des travaux de Knapowski sur les phénomènes d'oscillations en théorie analytique des nombres, pose le problème d'obtenir des minorations explicites de $\frac{1}{x} \int_1^x |M(t)| dt$. Par une méthode d'analyse complexe, il obtient l'inégalité

$$\frac{1}{x} \int_{\frac{0,01x}{\log x}}^x |M(t)| dt \geq 0,000058\sqrt{x} \quad (x \geq 2), \quad (16)$$

qui semble être aujourd'hui encore la meilleure connue. Nous obtenons (sans emploi d'intégrales de contours) le résultat suivant pour la fonction M .

Théorème K (Théorème 4, page 119). *On a*

$$\int_1^x |M(t)| \frac{dt}{t} \geq 0,004\sqrt{x} \quad (x \geq 2).$$

La démonstration de ce théorème est plus simple que celle donnée par Pintz pour (16). Elle repose sur l'emploi du zéro ρ non trivial de plus petite hauteur et sur une identité intégrale élémentaire. Une identité voisine nous permet d'obtenir des minorations en moyenne de

$$L(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n \leq x} \lambda(n)$$

où λ est la fonction de Liouville (la fonction complètement multiplicative telle que $\lambda(p) = -1$), et ce uniquement avec des méthodes d'analyse réelle.

Théorème L (Théorème 2 (page 112), Théorème 3 (page 114)). *On a*

$$\int_1^x |L(t)| \frac{dt}{t} \geq \frac{\sqrt{x}}{2} \quad (x \geq 13) \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} \int_1^x |L(t)| dt \geq \frac{\sqrt{x}}{5} \quad (x \geq 13).$$

Chapitre 1

Identités intégrales

Une fonction de la variable réelle sera dite « intégrable » si elle est intégrable au sens de Lebesgue sur l'intervalle considéré.

1.1 Introduction : fonction de Möbius, identité de Meissel, formule d'inversion pour des fonctions

La fonction de Möbius μ vérifie la propriété fondamentale suivante :

$$\sum_{n|N} \mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } N = 1 \\ 0 & \text{si } N > 1. \end{cases} \quad (1.1)$$

On peut l'établir (à partir de la définition par la factorisation en nombres premiers) en combinant la propriété de multiplicativité, celle de support sur les entiers sans facteur carré, et les valeurs aux premiers : $\sum_{n|N} \mu(n) = \prod_{p|N} (1 + \mu(p))$. Les relations (1.1) caractérisent à elles seules μ comme fonction sur les entiers strictement positifs.

La fonction sommatoire (de Mertens) $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$ est liée à d'importantes conjectures en théorie analytique des nombres, rappelons simplement que l'hypothèse de Riemann est équivalente aux estimations $M(x) = O_\varepsilon(x^{\frac{1}{2} + \varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$. Ceci encourage à étudier par tous les moyens disponibles et pas seulement ceux fournis par les méthodes de la variable complexe ce type de fonctions sommatoires arithmétiques.

Les coefficients de Möbius, via la propriété fondamentale (1.1), permettent de retrouver $f(x)$ (pour une fonction $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbf{C}$) à partir de $f(x) + f(x/2) + f(x/3) + \dots$ (la somme étant limitée à des dénominateurs au plus égaux à x). En effet :

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \sum_{m \leq x/n} f\left(\frac{x}{nm}\right) = \sum_{n \leq x} \mu(n) \sum_{\substack{\ell \leq x \\ \ell \equiv 0[n]}} f\left(\frac{x}{\ell}\right) = \sum_{\ell \leq x} f\left(\frac{x}{\ell}\right) \sum_{n|\ell} \mu(n) = f(x), \quad (1.2)$$

soit encore, en posant $S_1 f(u) = \sum_{k \leq u} f(u/k)$:

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) (S_1 f)\left(\frac{x}{n}\right) = f(x). \quad (1.3)$$

Notre premier résultat (théorème 1 page 4) en donne une version intégrale.

Pour $f = 1$, la formule (1.3) devient l'identité de Meissel :

$$x \geq 1 \implies \sum_{n \leq x} \mu(n) [x/n] = 1. \quad (1.4)$$

Elle est le cas $s = 0$ de l'identité finie suivante, valable pour tout nombre complexe s :

$$x \geq 1 \implies \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n^s} \left(\sum_{m \leq x/n} \frac{1}{m^s} \right) = 1. \quad (1.5)$$

Cette identité finie est en fait le cas particulier $f(x) = x^s$ de (1.2). Rappelons l'égalité de séries absolument convergentes

$$\Re s > 1 \implies \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s} \times \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^s} = 1. \quad (1.6)$$

Les identités finies (1.5) (pour $\Re s > 1$) en donnent une formulation équivalente. Ainsi la formule d'inversion (1.3) apparaît comme un transfert de la relation analytique fondamentale (1.6) entre séries de Dirichlet absolument convergentes vers le domaine de l'analyse de fonctions d'une variable réelle.

On peut illustrer de manière élémentaire l'existence de liens entre l'identité de Meissel et les nombres premiers par l'argument qui suit. Supposons qu'il n'y ait qu'un nombre fini de nombres premiers et notons P leur produit. Les entiers sans facteur carré ont alors une structure simple : ils forment l'ensemble des diviseurs de P . Par conséquent

$$\sum_{n \leq P} \mu(n) \left[\frac{P}{n} \right] = \sum_{n|P} \mu(n) \left[\frac{P}{n} \right] = \sum_{n|P} \frac{\mu(n)}{n} P = \prod_{p|P} \left(1 - \frac{1}{p} \right) P = \prod_{p|P} (p-1).$$

Or, l'identité de Meissel (1.4) pour $x = P$ montre que le terme de gauche vaut 1, contradiction.

Dans le même ordre d'idée citons le résultat suivant de Pollack [Pollack, 2011], soit f une fonction arithmétique différente de la fonction nulle, les supports des fonctions arithmétiques $\sum_{d|n} f(d)$ et $\sum_{d|n} \mu(d) f(n/d)$ ne peuvent pas être tous les deux finis.

1.2 Identités intégrales de Balazard et El Marraki

Les articles [Balazard, 2012a] et [Balazard, 2012b] donnent des identités qui lient les fonctions $m_1(x)$ et $M(x)$.

On y trouve par exemple :

$$m_1(x) = \frac{1}{x} \int_1^x M(x/t) \eta(t) dt + \frac{2(1-1/x)}{x} \quad (x \geq 1) \quad (1.7)$$

avec $\eta(t) = \frac{(2\{t\} - 1)t + \{t\} - \{t\}^2}{t^2}.$

La fonction η est continue sauf aux entiers où de plus elle change de signe et pour tout $t \geq 1$, $|\eta(t)| \leq 1/t$. C'est également la fonction dérivée à droite de

$$a(t) = \frac{\{t\}^2 - \{t\}}{t}. \quad (1.8)$$

Expliquons comment Balazard obtient l'identité (1.7). D'après la formule d'inversion de Möbius (équation (1.3) page 1) appliquée avec $f(x) = 2 - 2/x$, et d'après (1.8), on a

$$S_1 f(u) = \sum_{k \leq u} f\left(\frac{u}{k}\right) = u - 1 - \frac{\{u\}^2 - \{u\}}{u} = u - 1 - a(u) = u - 1 - \int_1^u \eta(t) dt.$$

Ainsi en sommant sur les entiers n entre 1 et x contre $\mu(n)$ on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \mu(n) S_1 f\left(\frac{x}{n}\right) &= \sum_{n \leq x} \mu(n) \left(\frac{x}{n} - 1 - \int_1^{x/n} \eta(t) dt \right) \\ 2 - \frac{2}{x} &= \sum_{n \leq x} \mu(n) \left(\frac{x}{n} - 1 \right) - \sum_{n \leq x} \mu(n) \int_1^{x/n} \eta(t) dt. \end{aligned}$$

En intervertissant la dernière somme et l'intégrale, on obtient

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \left(\frac{x}{n} - 1 \right) = \int_1^x M(x/t) \eta(t) dt + 2 - \frac{2}{x},$$

et donc (1.7) puisque $xm_1(x) = xm(x) - M(x)$.

Balazard démontre également l'identité

$$m_1(x) = \frac{1}{x} \int_1^x M(x/t) \varepsilon_1'(t) dt + \frac{4(1 - 1/x)^2(2 + 1/x)}{3x} \quad (x \geq 1), \quad (1.9)$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t) &= \int_1^t \eta(x)^2 dx \\ &= \frac{1}{t} - \frac{1}{3t} + \frac{4}{3} \frac{\{t\}^3 - \frac{3}{2}\{t\}^2 + \frac{1}{2}\{t\}}{t^2} - \frac{1}{3} \frac{\{t\}^4 - 2\{t\}^3 + \{t\}^2}{t^3}, \end{aligned}$$

de sorte que $\varepsilon_1' = \eta^2$, fonction qui contrairement à η est partout continue.

Ramaré [Ramaré, 2015] utilise cette identité (1.9) et $m(x) = m_1(x) + M(x)/x$ pour convertir des estimations explicites de $|M|$ en une estimation explicite pour $|m|$. Quelques années auparavant, dans [Ramaré, 2013b], Ramaré utilisait une autre identité, due à El Marraki :

$$m_1(x) = \frac{1}{x} \int_1^x \left\{ \frac{x}{t} \right\} M(t) \frac{dt}{t} + \frac{\log x}{x} \quad (x \geq 1).$$

El Marraki [El Marraki, 1996] s'en était ¹ déjà servi pour convertir ses estimations sur $|M|$ en des estimations sur $|m|$.

Pour effectuer des conversions, les identités de Balazard sont plus efficaces, Bordellès les emploie dans [Bordellès, 2015]. Pour rapprocher les formules, en faisant un changement de variable, écrivons

$$m_1(x) = \frac{1}{x} \int_1^x M(x/t) \frac{\{t\}}{t} dt + \frac{\log x}{x} \quad (x \geq 1), \quad (1.10)$$

1. Précisons néanmoins que nous n'avons pas pu consulter personnellement le manuscrit [El Marraki, 1996], difficilement accessible.

formule que l'on trouve également dans [Baez-Duarte, 2000, Lemma 3.2, p. 11]. Ce n'est pas une des formules concernant $m_1(x)$ de [Balazard, 2012b] car elles y sont toutes de la forme suivante :

$$m_1(x) = \frac{1}{x} \int_1^x M(x/t)F'(t) dt + \frac{P(1/x)}{x} ,$$

avec P un polynôme et F une fonction dérivable à droite.

1.3 Une identité intégrale générale pour m_1

Dans cette partie, nous prouvons un résultat général qui englobe les identités obtenues pour m_1 par Balazard et El Marraki. Dans ce cadre, les fonctions ε'_1 et $t \mapsto \{t\}/t$ apparaîtront comme des différences entre une intégrale et une discrétisation de celle-ci.

Définition 1. *Nous employons, pour $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ intégrable, la notation I_g pour désigner $\int_0^1 g(y) dy$.*

Les formules suivantes définissent des opérateurs linéaires U et V ayant comme domaine l'espace vectoriel des fonctions intégrables sur $[0, 1]$ et comme espace d'arrivée celui des fonctions sur $[0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} t \geq 1 : U_g(t) &= I_g - \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} g\left(\frac{n}{t}\right) \\ 0 \leq t < 1 : U_g(t) &= I_g \\ x \geq 1 : V_g(x) &= \int_{1/x}^1 \frac{g(y)}{y} dy \\ 0 \leq x < 1 : V_g(x) &= 0 . \end{aligned}$$

Dans la formule pour $U_g(t)$, $t \geq 1$, la somme ne porte que sur les entiers strictement positifs.

Au sujet des intervalles de définition on utilisera souvent plutôt les intervalles $]0, 1]$, $]0, +\infty[$, car les valeurs en zéro n'ont aucune importance.

L'intégrale ci-dessous avec le terme U_g est mise sous forme de convolution multiplicative, afin d'exhiber une structure que nous généraliserons encore dans la Proposition 6, page 17.

Théorème 1. *Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable. Pour tout $x > 0$ on a l'égalité :*

$$I_g \cdot m_1(x) = \int_1^x \frac{M(x/t)}{x/t} U_g(t) \frac{dt}{t} + \frac{V_g(x)}{x} . \quad (1.11)$$

De plus si $g \in \mathcal{C}^K[0, 1]$ avec $K \geq 1$ un entier, alors pour tout $t > 0$ on a l'expression :

$$\begin{aligned} U_g(t) &= \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{k-1}}{k!t^k} \left(B_k(\{t\})g^{(k-1)}(1) - B_k(0)g^{(k-1)}(0) \right) \\ &\quad + \frac{(-1)^K}{K!t^K} \int_0^1 g^{(K)}(y) B_K(\{yt\}) dy , \end{aligned} \quad (1.12)$$

où B_k désigne le polynôme de Bernoulli de degré k .

Ce théorème permet de retrouver l'identité d'El Marraki (1.10) en prenant $g(y) = 1$, la première identité de Balazard (1.7) avec $g(y) = 2y$ et la deuxième identité (1.9) avec $g(y) = 4y(1 - y^2)$. Nous donnons les détails ultérieurement page 21. Plus généralement, dans ce cadre les différentes identités obtenues dans [Balazard, 2012b] correspondent toutes à des fonctions g polynomiales sans terme constant.

Pour démontrer le Théorème 1, commençons par énoncer un lemme reposant sur la formule d'inversion de Möbius. Il évite l'apparition de fonctions dérivées telles que ε'_1 dans [Balazard, 2012b] et donne plus de souplesse dans la fabrication d'identités.

Lemme 1. *Soit $\delta : [1, \infty[\rightarrow \mathbf{C}$ une fonction localement intégrable.*

$$x \geq 1 \implies \int_1^x M(x/t)\delta(t) \frac{dt}{t} = \int_1^x \sum_{n \leq u} \mu(n)\delta\left(\frac{u}{n}\right) \frac{du}{u}. \quad (1.13)$$

Et par conséquent :

$$x \geq 1 \implies \int_1^x M(x/t) \sum_{k \leq t} \delta\left(\frac{t}{k}\right) \frac{dt}{t} = \int_1^x \delta(u) \frac{du}{u}. \quad (1.14)$$

Démonstration. En échangeant les sommes et les intégrales dans ce qui suit, puis en effectuant le changement de variable $u = tn$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_1^x M(x/t)\delta(t) \frac{dt}{t} &= \sum_{n \leq x} \mu(n) \int_1^{x/n} \delta(t) \frac{dt}{t} \\ &= \sum_{n \leq x} \mu(n) \int_n^x \delta(u/n) \frac{du}{u} = \int_1^x \sum_{n \leq u} \mu(n)\delta(u/n) \frac{du}{u}, \end{aligned}$$

ce qui est la première égalité annoncée en (1.13).

Pour la seconde formule, considérons la fonction $\delta_1(t) = \sum_{k \leq t} \delta(t/k)$. Elle est localement intégrable sur $[1, x]$, on peut utiliser la formule (1.13), qui a été précédemment démontrée, pour la fonction δ_1 . On a

$$\int_1^x M(x/t)\delta_1(t) \frac{dt}{t} = \int_1^x \sum_{n \leq u} \mu(n)\delta_1(u/n) \frac{du}{u}.$$

Pour finir, on remarque que la somme intégrée peut se calculer par inversion de Möbius,

$$\sum_{n \leq u} \mu(n)\delta_1(u/n) = \sum_{n \leq u} \mu(n) \sum_{k \leq u/n} \delta(u/(nk)) = \delta(u),$$

ce qui achève la démonstration. \square

La formule d'inversion de Möbius fait donc apparaître des sommes $\sum_{n \leq t} g(n/t)$. Pour avoir une expression maniable de sommes de ce type, nous utilisons une version de la formule d'Euler-Maclaurin qui n'impose pas aux bornes de la somme d'être des nombres entiers. On définit les polynômes de Bernoulli par la série génératrice :

$$\frac{ze^{zX}}{e^z - 1} = \sum_{j \geq 0} B_j(X) \frac{z^j}{j!}.$$

Les fonctions $x^{-j+1}[B_j(x) - B_j(\{x\})]$ et leurs dérivées sont utilisées dans [Balazard, 2012b].

Lemme 2. Soit $k \geq 1$, $a \leq b$ des nombres réels, f de classe \mathcal{C}^k sur $[a, b]$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{a < m \leq b} f(m) &= \int_a^b f(u) du \\ &+ \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j}{j!} \left(B_j(\{b\}) f^{(j-1)}(b) - B_j(\{a\}) f^{(j-1)}(a) \right) + \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_a^b f^{(k)}(u) B_k(\{u\}) du . \end{aligned}$$

Démonstration. C'est la formule du théorème 9.2.2 p. 22 du livre [Cohen, 2007]. \square

Nous allons maintenant montrer le Théorème 1.

Preuve du théorème 1. D'une part on a pour tout $x \geq 1$:

$$\int_1^x M(x/t) dt = \sum_{n \leq x} \mu(n) \int_1^{x/n} dt = \sum_{n \leq x} \mu(n) \frac{x}{n} - M(x) = xm(x) - M(x) = xm_1(x) . \quad (1.15)$$

D'autre part la formule (1.13) du lemme 1 utilisée avec $\delta(t) = g(1/t)$ ($t \geq 1$) donne :

$$\int_1^x M(x/t) \frac{1}{t} \sum_{k \leq t} g(k/t) dt = \int_1^x \frac{g(1/u)}{u} du . \quad (1.16)$$

En écrivant $I_g = Ug(t) + \frac{1}{t} \sum_{k \leq t} g(k/t)$, puis en intégrant contre $M(x/t)$ à l'aide des équations (1.15) et (1.16), on obtient :

$$\int_1^x M(x/t) \times I_g dt = \int_1^x M(x/t) Ug(t) dt + \int_1^x \frac{g(1/u)}{u} du ,$$

qui, au facteur $1/x$ près, est la formule (1.11) annoncée.

Soit $t > 0$, soit $K \geq 1$ un entier et $g \in \mathcal{C}^K[0, 1]$. La formule (1.12) provient de la formule d'Euler-Maclaurin : on applique le lemme 2 avec $[a, b] = [0, t]$ et $f(u) = g(u/A)$ avec $A \in]0, t]$ fixé, on effectue le changement de variable $y = u/A$ dans les deux intégrales pour obtenir :

$$\begin{aligned} &\frac{A}{t} \int_0^{t/A} g(y) dy - \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} g\left(\frac{n}{A}\right) \\ &= \sum_{j=1}^K \frac{(-1)^{j+1}}{j! A^{j-1} t} \left(B_j(\{t\}) g^{(j-1)}(1) - B_j(0) g^{(j-1)}(0) \right) + \frac{(-1)^K}{k! A^{K-1} t} \int_0^{t/A} g^{(K)}(y) B_K(\{yA\}) dy , \end{aligned}$$

qui correspond avec le choix $A = t$ à la formule (1.12) de l'énoncé. \square

Voyons quelques conséquences du théorème 1.

Premièrement, considérons g un polynôme de degré d_g , la formule (1.12) donne l'expression suivante, pour $t \geq 1$:

$$Ug(t) = \sum_{j=1}^{d_g+1} \frac{(-1)^{j+1}}{j! t^j} \left(B_j(\{t\}) g^{(j-1)}(1) - B_j(0) g^{(j-1)}(0) \right) ,$$

où B_j est le polynôme de Bernoulli de degré j , la formule est plus simple car il n'y a pas de reste dans la formule d'Euler-Maclaurin (à cet ordre). En particulier, pour $k \geq 1$ et $g(y)$ un polynôme divisible par $(y - y^2)^{k-1}$, on a pour $t \geq 1$:

$$|Ug(t)| \leq A_k t^{-k}. \quad (1.17)$$

L'identité du théorème 1 est

$$I_g m_1(x) = \int_1^x \frac{M(x/t)}{x/t} Ug(t) \frac{dt}{t} + \frac{Vg(x)}{x} \quad (x \geq 1),$$

et la majoration (1.17) donne alors l'inégalité (voir page ix pour la notation $\|Vg\|_\infty$) :

$$|I_g m_1(x)| \leq \frac{A_k}{x^k} \int_1^x \frac{|M(u)|}{u} u^k \frac{du}{u} + \frac{\|Vg\|_\infty}{x} \quad (x \geq 1). \quad (1.18)$$

Pour une fonction g donnée la plus petite constante permettant de produire cette inégalité trivialement à partir de l'identité du théorème 1 est $A_k = \sup_{t \geq 1} |t^k Ug(t)|$. Nous étudierons ces A_k dans la section 2.2 page 28. Avec des fonctions telles que $I_g \neq 0$, on retrouve la proposition 8 de [Balazard, 2012b, p. 10] : pour tout nombre entier $k \geq 1$, il existe des constantes C_k et D_k telles que

$$|m_1(x)| \leq \frac{C_k}{x^k} \int_1^x |M(t)| t^{k-2} dt + \frac{D_k}{x} \quad (x \geq 1).$$

On peut aussi déduire du théorème 1 une majoration de $|m_1(x)|$ faisant intervenir la norme L^1 de $\chi^{-\theta} Ug$ et des suprema de $\chi^{-\theta} M$:

Corollaire 1. *Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable. Soit θ un nombre réel². Pour tout $x \geq 1$ on a :*

$$|I_g| \frac{|m_1(x)x|}{x^\theta} \leq \int_1^\infty |Ug(t)| t^{-\theta} dt \times \sup_{1 \leq u \leq x} \frac{|M(u)|}{u^\theta} + x^{-\theta} \int_{1/x}^1 |g(y)| \frac{dy}{y}. \quad (1.19)$$

Par exemple, l'inégalité (1.19) avec $\theta = 1$ nous permettra de convertir des estimations pour M en estimations pour m_1 (puis m) soit à partir de la forme $M(x) = o(x)$ du théorème des nombres premiers, soit à partir d'estimations explicites en $M(x) = O(x)$ (voir section 4.3 p. 66). D'autres choix de θ sont appropriés pour la comparaison à d'autres ordres de grandeur pour m_1 , m , et M , par exemple $\theta = 1/2$ pour ce qui concerne l'hypothèse de Mertens généralisée $M(x) = O(\sqrt{x})$.

Dans le chapitre 3 nous montrerons (mais en utilisant le théorème des nombres premiers) que l'on peut rendre $\|\chi^{-1} Ug\|_1$ arbitrairement petit (pour g intégrable vérifiant $I_g = 1$).

Remarque 1. Ramaré [Ramaré, 2018, p. 304] conjecture la majoration

$$m(x) \ll \max_{x/A \leq u \leq Ax} \frac{|M(u)|}{u} + x^{-1/4}$$

2. Si $\theta \geq 0$, $\sup_{1 \leq u \leq x} \frac{|M(u)|}{u^\theta}$ est un max.

avec A une constante. Dans cette direction, il obtient [Ramaré, 2019, corollary p. 346] l'existence de $c_1 > 0$ telle que

$$m(x) \ll \max_{x \leq u \leq 3x} \frac{|M(u)|}{u} + \exp\left(\frac{-c_1 \log x}{\log \log x}\right). \quad (1.20)$$

Ramaré souligne que sa démonstration de (1.20) n'utilise pas de formules explicites portant sur les zéros de la fonction zêta, et il précise que la version explicite de ce résultat ne fournit pas des constantes utilisables en pratique. Nos travaux ne nous ont pas permis d'améliorer (1.20).

En vue d'applications, nous développons dans la suite de ce chapitre un certain nombre d'éléments théoriques en lien avec le théorème 1 et l'opérateur U .

1.4 Définition des espaces \mathcal{G}_k

L'un de nos objectifs est de proposer des exemples de fonctions g qui donnent une valeur numérique pour $\|\chi^k U g\|_\infty$ aussi petite que possible (voir les notations page ix). Dans [Balazard, 2008] Balazard donne des fonctions explicitement pour $k = 1$ et $k = 2$ et dans ces deux cas (avec nos notations) $\|\chi^k U g\|_\infty = 1$. Il fournit de plus un tableau de valeurs pour $k \geq 3$ conjecturées à partir d'explorations numériques (voir l'introduction de notre chapitre 2).

L'expression (1.12) combinée au lemme 4 nous suggère les définitions suivantes :

Définition 2. Pour tout nombre entier $k \geq 2$, on pose

$$\mathcal{G}_k = \left\{ g \in \mathcal{C}^k[0, 1], \begin{array}{l} g(0) = 0 \text{ et } g^{(2i-1)}(0) = 0, 1 \leq i \leq \lfloor (k-1)/2 \rfloor \\ g^{(\ell)}(1) = 0, 0 \leq \ell \leq k-2 \end{array} \right\} \quad (1.21)$$

et \mathcal{G}_1 désignera l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

Nous renvoyons aux notations page ix pour la norme infinie.

Proposition 1. Soit $k \geq 1$ un nombre entier.

$$g \in \mathcal{C}^k([0, 1], \mathbf{C}) \implies \left(g \in \mathcal{G}_k \iff \|\chi^k U g\|_\infty < \infty \right).$$

De plus

$$g \in \mathcal{G}_k \implies \|\chi^k U g\|_\infty \leq \frac{8\|g^{(k-1)}\|_\infty + 4\|g^{(k)}\|_1}{(2\pi)^k}. \quad (1.22)$$

Remarque 2. Pour une fonction g qui est de plus analytique sur un intervalle $]a, b[$ qui contient $[0, 1]$, par les inégalités portant sur les dérivées (voir [Krantz et Parks, 2002] p. 15) on obtient $\|\chi^k U g\|_\infty \leq CA^k k!$ avec $C > 0$ et $A > 0$ deux constantes qui dépendent de g .

Tout d'abord, deux lemmes bien connus concernant les nombres et polynômes de Bernoulli.

Lemme 3. Pour $k \geq 2$ un entier, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \frac{B_k(\{x\})}{k!} = - \sum_{m \neq 0} \frac{e^{2i\pi m x}}{(2i\pi m)^k}. \quad (1.23)$$

Pour $k \geq 1$, on a la majoration :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \frac{(2\pi)^k}{k!} |B_k(\{x\})| \leq 4. \quad (1.24)$$

Démonstration. Pour $k \geq 2$, on trouve une preuve du développement en série de Fourier p. 17 du livre [Cohen, 2007]. La majoration en découle en utilisant l'inégalité triangulaire et $2\zeta(k) \leq 4$. Pour $k = 1$ on a $B_1(\{x\}) = \{x\} - 1/2$ et donc $|B_1(\{x\})| \leq 1/2$, ce qui montre la majoration dans ce cas puisque $4/(2\pi) = 0,63\dots$ \square

Remarque 3. Pour $k \geq 2$ on peut bien sûr remplacer le 4 par le meilleur majorant $2\zeta(k)$ mais cette formulation moins optimale nous suffit par la suite, car c'est la dépendance en k qui nous intéresse.

Rappelons ici la série génératrice des nombres de Bernoulli : $\frac{z}{e^z-1} = \sum_{j \geq 0} B_j(0) \frac{z^j}{j!}$.

Lemme 4. Soit $k \geq 2$ un entier.

1. On a $B_k(0) = 0$ si et seulement si k est impair.
2. On a $\zeta(-k) = 0$ si et seulement si k est pair.

Démonstration. La formule d'Euler-Maclaurin appliquée à la fonction $x \mapsto x^{-s}$ donne en particulier que pour tout entier $k \geq 0$ on a $\zeta(-k) = (-1)^k \frac{B_{k+1}(0)}{k+1}$, on trouvera une démonstration dans le livre [Cohen, 2007]. De plus, le développement en série de Fourier du lemme 3 donne $|B_{2k}(0)| = 2 \frac{\zeta(2k)(2k)!}{(2\pi)^{2k}}$ et donc puisque $\zeta(2k) > 1$, les nombres B_{2k} sont non nuls. Pour finir, dans la série génératrice suivante

$$\sum_{n \neq 1} \frac{B_n(0)}{n!} z^n = \frac{z}{e^z-1} + z/2 = \frac{z e^{z/2} + e^{-z/2}}{2 e^{z/2} - e^{-z/2}},$$

le membre de droite est une fonction paire donc les nombres B_n pour n impair différent de 1 sont nuls. \square

Un tableau des onze premiers $B_k(0)$ et $\zeta(-k)$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$B_k(0)$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$
$\zeta(-k)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{120}$	0	$-\frac{1}{252}$	0	$\frac{1}{240}$	0	$-\frac{1}{132}$	0

Démonstration de la proposition 1. Pour $g \in \mathcal{C}^k[0,1]$, rappelons une égalité du théorème 1 :

$$t^k \mathcal{U}g(t) = \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j!} (B_j(\{t\})g^{(j-1)}(1) - B_j(0)g^{(j-1)}(0))t^{k-j} + R(t), \quad (1.25)$$

$$\text{avec } R(t) = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 g^{(k)}(y) B_k(\{yt\}) dy.$$

Le reste $t \mapsto R(t)$ étant borné sur $[1, \infty[$, $t \mapsto t^k U g(t)$ est borné sur $[1, \infty[$ si et seulement si c'est le cas de la somme faisant intervenir les polynômes de Bernoulli périodisés.

Supposons $k = 1$: alors on obtient que $t U g(t)$ est borné sur $[1, +\infty[$. C'est essentiellement l'énoncé familier des cours élémentaires d'intégrations qui dit que l'erreur dans la méthode des rectangles est en $O(1/N)$ lorsque la fonction est de classe \mathcal{C}^1 .

Supposons $k \geq 2$. On divise la somme par t^{k-1} et le résultat doit tendre vers zéro pour $t \rightarrow \infty$. C'est sûrement le cas pour tous les termes sauf peut-être le premier qui donne une contribution 1-périodique ne pouvant tendre vers zéro que si elle est identiquement nulle. Ceci impose que $B_1(t)g(1) - B_1(0)g(0)$ est nul pour $0 \leq t < 1$ et par conséquent $g(1) = 0$ et aussi $B_1(0)g(0) = 0$. On poursuit alors de même avec les termes suivants, obtenant au final :

$$1 \leq j \leq k-1 \implies g^{(j-1)}(1) = 0 \quad \text{et} \quad B_j(0)g^{(j-1)}(0) = 0.$$

Or les $B_j(0)$ pour $j \geq 2$ sont non nuls si et seulement si j est pair. Ainsi pour g de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 2$, $\sup_{t \geq 1} |t^k U g(t)|$ est fini si et seulement si $g^{(j-1)}(1) = 0$ pour tout $1 \leq j \leq k-1$ et $g^{(j-1)}(0) = 0$ pour $j = 1$ et pour les entiers $1 \leq j \leq k-1$ pairs. En écrivant les j pairs $j = 2i$, nous avons $j-1 = 2i-1$ et l'inégalité $j \leq k-1$ équivaut à $i = j/2 \leq (k-1)/2$, ce qui donne les conditions avec lesquelles nous avons défini \mathcal{G}_k en (1.21).

Prouvons à présent la majoration (1.22) : pour $g \in \mathcal{G}_k$, ce qui précède entraîne la formule

$$(-1)^k k! t^k U g(t) = - \left(B_k(\{t\}) g^{(k-1)}(1) - B_k(0) g^{(k-1)}(0) \right) + \int_0^1 g^{(k)}(y) B_k(\{yt\}) dy. \quad (1.26)$$

Traitons d'abord la valeur absolue de l'intégrale à l'aide de l'inégalité triangulaire et des résultats sur les polynômes de Bernoulli B_k donnés dans le lemme 3, on arrive à :

$$\int_0^1 |g^{(k)}(y)| \frac{|B_k(\{yt\})|}{k!} dy \leq \frac{4 \|g^{(k)}\|_1}{(2\pi)^k}.$$

Pour finir, on se sert de la même estimation pour le polynôme B_k , on obtient :

$$\left| \frac{B_k(\{t\})}{k!} g^{(k-1)}(1) - \frac{B_k(0)}{k!} g^{(k-1)}(0) \right| \leq \frac{8 \|g^{(k-1)}\|_\infty}{(2\pi)^k},$$

et en additionnant les deux majorations obtenues on arrive au résultat (1.22). \square

1.5 Opérateur U et transformées de Mellin

Nous aurons à plusieurs reprises besoin de la transformée de Mellin de Ug . Rappelons que la transformée de Mellin d'une fonction $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbf{C}$ est habituellement définie par

$$Mf(s) = \int_0^\infty f(t) t^{s-1} dt.$$

Mais en ce qui concerne Ug c'est l'intégrale $\int_0^\infty Ug(t) t^{-s} dt$ qui est naturelle ici. Nous allons l'exprimer avec $Mg(s) = \int_0^1 g(t) t^{s-1} dt$ et $\zeta(s)$, pour s dans des demi-plans qui dépendront d'hypothèses imposées à g .

Nous travaillons tout d'abord pour $\Re s > 1$. On considère plutôt pour commencer (mais on reviendra sur ce point dans la remarque 6) $\int_1^\infty Ug(t) t^{-s} dt$ car Ug est la constante I_g sur $]0, 1[$ et l'intégrale contre t^{-s} ne pourrait converger (si $I_g \neq 0$) que pour $\Re s < 1$.

Proposition 2. Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable. On a l'identité d'intégrales absolument convergentes

$$\Re s > 1 \implies \int_1^\infty U g(t) t^{-s} dt = \frac{\int_0^1 g(y) dy}{s-1} - \zeta(s) \int_0^1 g(y) y^{s-1} dy. \quad (1.27)$$

Démonstration. On étend g en posant $g(y) = 0$ pour $y > 1$. Soit $a > 1$. Définissons $k(y) = y^{-a}$ pour $y \geq 1$ et $k(y) = 0$ pour $y < 1$. Les calculs qui suivent sont justifiés par le théorème de la convergence monotone :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g(y)| y^{a-1} dy &= \zeta(a)^{-1} \int_0^\infty |g(y)| \sum_{n \geq 1} \frac{1}{y} k\left(\frac{n}{y}\right) dy \\ &= \zeta(a)^{-1} \sum_{n \geq 1} \int_0^\infty |g(y)| \frac{1}{y} k\left(\frac{n}{y}\right) dy \\ &= \zeta(a)^{-1} \sum_{n \geq 1} \int_0^\infty \left|g\left(\frac{n}{t}\right)\right| \frac{1}{t} k(t) dt \\ &= \zeta(a)^{-1} \int_0^\infty \sum_{n \geq 1} \frac{1}{t} \left|g\left(\frac{n}{t}\right)\right| k(t) dt \\ &= \zeta(a)^{-1} \int_0^\infty \sum_{n \geq 1} \frac{1}{t} \left|g\left(\frac{n}{t}\right)\right| t^{-a} dt. \end{aligned}$$

Or la première intégrale est finie, donc également la dernière. Par conséquent $\sum_{1 \leq n \leq \frac{1}{t}} \left|g\left(\frac{n}{t}\right)\right| t^{-s}$ (et donc aussi $\sum_{1 \leq n \leq \frac{1}{t}} \frac{1}{t} g\left(\frac{n}{t}\right) t^{-s}$) est une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$ (nulle sur $]0, 1[$). Nous pouvons donc affirmer

$$\int_1^\infty \sum_{n \geq 1} \frac{1}{t} g\left(\frac{n}{t}\right) t^{-s} dt = \int_0^\infty \sum_{1 \leq n} \frac{1}{t} g\left(\frac{n}{t}\right) t^{-s} dt = \zeta(s) \int_0^1 g(y) y^{s-1} dy \quad (1.28)$$

puisque le théorème de convergence dominée autorise alors de permuter série et intégrale (puis d'effectuer les changements de variables appropriés). D'où aussi l'équation (1.27) puisque $\int_1^\infty t^{-s} dt = 1/(s-1)$. \square

En dire plus passe par la possibilité de contrôler le comportement de $Ug(t)$ pour $t \rightarrow +\infty$, au moins en moyenne. Une remarque s'impose dont nous ferons usage ultérieurement.

Lemme 5. Pour $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable au sens de Riemann $\lim_{t \rightarrow \infty} Ug(t) = 0$.

Démonstration. Pour $t \geq 1$ et $N = [t]$ sa partie entière, l'expression $\frac{1}{t} \sum_{n=1}^N g\left(\frac{n}{t}\right) + (1 - \frac{N}{t})g(1)$ est une somme de Riemann (générale) pour une subdivision de pas maximal t^{-1} . Elle converge donc pour $t \rightarrow +\infty$ vers l'intégrale I_g de g . Le dernier terme étant majoré par $\|g\|_\infty/t$, il tend vers zéro. Ceci donne le résultat voulu. \square

L'information fournie par ce lemme ne nous permet pas d'étendre le domaine de convergence de $\int_1^\infty Ug(t) t^{-s} dt$ vers la gauche de la droite $\Re s = 1$. Mais la proposition suivante y réussit pour une classe de fonctions g incluant les fonctions intégrables au sens de Riemann.

Proposition 3. Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction mesurable bornée. Pour $\Re s > 0$,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T U g(t) t^{-s} dt$$

existe et définit une fonction holomorphe dans ce demi-plan ouvert. La convergence est uniforme dans tout domaine $\Re s > \varepsilon > 0$, $|\Im s| < A \cdot \Re s$. Pour $\Re s > 0$, $s \neq 1$,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T U g(t) t^{-s} dt = \frac{\int_0^1 g(y) dy}{s-1} - \zeta(s) \int_0^1 g(y) y^{s-1} dy, \quad (1.29)$$

et en $s = 1$:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T U g(t) t^{-1} dt = -\gamma \int_0^1 g(y) dy - \int_0^1 g(y) \log y dy, \quad (1.30)$$

avec γ la constante d'Euler.

La preuve de la Proposition 3 repose sur deux lemmes.

Lemme 6. Pour $T \geq 1$, $\left| \int_0^1 \frac{1}{y} \{Ty\} dy - 1 - \frac{1}{2} \log T \right| \leq \frac{1}{8}$.

Démonstration. On calcule

$$\int_0^1 \frac{1}{y} \{Ty\} dy - 1 - \frac{1}{2} \log T = \int_{1/T}^1 \frac{1}{y} \{Ty\} dy - \frac{1}{2} \int_{1/T}^1 \frac{1}{y} dy = \int_{1/T}^1 \left(\{Ty\} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{y} dy. \quad (1.31)$$

Par la seconde formule de la moyenne ceci est majoré en valeur absolue par

$$T \sup_{1/T \leq x \leq 1} \left| \int_{1/T}^x \left(\{Ty\} - \frac{1}{2} \right) dy \right|. \quad (1.32)$$

Or la fonction affine par morceaux $y \mapsto \{Ty\} - \frac{1}{2}$ est $\frac{1}{T}$ -périodique et d'intégrale nulle sur chaque période, donc

$$\sup_{T^{-1} \leq \beta < \infty} \left| \int_{T^{-1}}^{\beta} \left(\{Ty\} - \frac{1}{2} \right) dy \right| = \sup_{0 \leq \alpha < T^{-1}} \left| \int_0^{\alpha} \left(Ty - \frac{1}{2} \right) dy \right| \quad (1.33)$$

et ce supremum est l'aire d'un triangle de base $1/(2T)$ et de hauteur $1/2$, soit $1/(8T)$. \square

Remarque 4. Le comportement asymptotique de $\int_0^1 \frac{1}{y} \{Ty\} dy$ pourrait être précisé (il est lié à la formule de Stirling; voir à son sujet le lemme 24, page 84), mais cette formulation nous suffit ici.

Lemme 7. Soit g bornée (et Lebesgue mesurable) sur $[0, 1]$.

$$T \geq 1 \implies \left| \int_1^T U g(t) dt \right| \leq \left(\frac{1}{2} \log T + \frac{17}{8} \right) \|g\|_{\infty}. \quad (1.34)$$

Démonstration. Avec $N = \lfloor T \rfloor$:

$$\int_1^T \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} g\left(\frac{n}{t}\right) dt = \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k \leq t < k+1} \frac{1}{t} \sum_{n \leq k} g\left(\frac{n}{t}\right) dt + \int_{N \leq t < T} \frac{1}{t} \sum_{n \leq N} g\left(\frac{n}{t}\right) dt \quad (1.35)$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{1 \leq n \leq k} \int_{n/(k+1) < y \leq n/k} g(y) \frac{1}{y} dy + \sum_{1 \leq n \leq N} \int_{n/T < y \leq n/N} g(y) \frac{1}{y} dy \quad (1.36)$$

$$= \sum_{1 \leq k \leq N} \int_0^1 \left(\sum_{ky \leq n < \min(k+1, T)y} 1 \right) g(y) \frac{1}{y} dy \quad (1.37)$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{y \leq n < Ty} 1 \right) g(y) \frac{1}{y} dy = \int_0^1 (Ty - \{Ty\}) g(y) \frac{1}{y} dy \quad (1.38)$$

où l'intégrande a été modifié dans la dernière étape en un nombre fini de points ce qui ne change pas la valeur de l'intégrale. Ceci donne

$$\int_1^T \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} g\left(\frac{n}{t}\right) dt = T \int_0^1 g(y) dy - \int_0^1 \frac{1}{y} \{Ty\} g(y) dy \quad (1.39)$$

et par conséquent

$$\int_1^T U g(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{y} \{Ty\} g(y) dy - \int_0^1 g(y) dy. \quad (1.40)$$

Jusqu'à présent nous avons seulement utilisé l'intégrabilité de g sur $[0, 1]$. Si l'on suppose g bornée, on conclut alors par le lemme 6. \square

Preuve de la Proposition 3. Posons $G(x) = \int_1^x U g(t) dt$. On sait que $G(x) = O(\log x)$ par le lemme 7. Par intégration par parties (il n'est pas nécessaire de supposer la continuité de g pour cela) :

$$\int_1^T U g(t) t^{-s} dt = G(T) T^{-s} + \int_1^T G(t) \frac{s}{t^{s+1}} dt. \quad (1.41)$$

L'intégrale du terme de droite est absolument convergente sur $[1, \infty[$ dès que $\Re s > 0$, et $G(T) T^{-s}$ tend vers zéro, donc le terme de gauche admet la limite suivante pour $T \rightarrow \infty$:

$$\int_1^\infty U g(t) t^{-s} dt = \int_1^\infty G(t) \frac{s}{t^{s+1}} dt. \quad (1.42)$$

Supposons $\Re s = a > \varepsilon > 0$ et $|\Im s| < A \cdot \Re s$. Compte tenu pour $T \geq 1$ de

$$\int_T^\infty \frac{\log t}{t^{a+1}} dt = -\frac{d}{da} \int_T^\infty \frac{dt}{t^{a+1}} = -\frac{d}{da} \frac{1}{aT^a} = \frac{a^{-2}}{T^a} + \frac{a^{-1} \log T}{T^a} \leq (a^{-2} + a^{-1}) \frac{\log eT}{T^a}$$

on obtient

$$\left| \int_T^\infty G(t) \frac{s}{t^{s+1}} dt \right| = O(|s|(a^{-2} + a^{-1}) \log(eT) T^{-a}) = O((A+1)(\varepsilon^{-1} + 1) \log(eT) T^{-\varepsilon}).$$

Ainsi

$$\left| \int_T^\infty U g(t) t^{-s} dt \right| = O(\log(eT) T^{-\varepsilon} + (A+1)(\varepsilon^{-1} + 1) \log(eT) T^{-\varepsilon}) \quad (1.43)$$

prouvant que la convergence pour $T \rightarrow \infty$ est uniforme dans tout domaine $\Re s > \varepsilon$, $|\Im s| < A \cdot \Re s$. La limite est donc une fonction holomorphe de s , $\Re s > 0$, et l'identité (1.29) précédemment montrée pour $\Re s > 1$ est aussi valable pour $\Re s > 0$, $s \neq 1$. De plus l'intégrale généralisée $\int_1^\infty U g(t) t^{-1} dt$ est calculable comme la limite en $s = 1$ de l'expression à droite de (1.29). Ce qui donne, compte tenu de $\zeta(s) = 1/(s-1) + \gamma + O(|s-1|)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-1} \int_0^1 g(y) dy - \zeta(s) \int_0^1 g(y) y^{s-1} dy &= - \int_0^1 g(y) \frac{y^{s-1} - 1}{s-1} dy - \gamma \int_0^1 g(y) dy + O(|s-1|) \\ &\xrightarrow{s \rightarrow 1} - \int_0^1 g(y) \log y dy - \gamma \int_0^1 g(y) dy. \end{aligned}$$

D'où l'égalité (1.30). □

Revenons aux calculs faits pour le lemme 7. L'égalité (1.40) peut s'écrire plus élégamment en tenant compte que Ug est pour $0 < t < 1$ la fonction constante I_g .

$$\int_0^T Ug(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{y} \{Ty\} g(y) dy = \int_0^T \frac{\{t\}}{t} g\left(\frac{t}{T}\right) dt. \quad (1.44)$$

Nous n'avons utilisé que l'intégrabilité de g sur $[0, 1]$ pour établir cette égalité. Il s'agit en fait du cas particulier (avec f ici la fonction constante 1, de sorte que $Uf(t) = \{t\}/t$) d'une identité intégrale plus générale que nous établirons dans la Proposition 7.

Il est naturel de s'intéresser aux g vérifiant $\int_0^1 |g(y)| y^{-1} dy < \infty$, au vu de (1.44) :

Proposition 4. *Pour g telle que $\int_0^1 |g(y)| y^{-1} dy < \infty$:*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T Ug(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 g(y) y^{-1} dy = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} Vg(x).$$

Démonstration. Pour $a < b$ deux nombres réels quelconques, $\int_a^b \{Ty\} dy = \frac{b-a}{2} + O(T^{-1})$. Par conséquent $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^1 \{Ty\} k(y) dy$ existe et vaut $\frac{1}{2} \int_0^1 k(y) dy$ pour toute fonction k en escalier. Or les fonctions en escalier sont denses au sens de la norme L^1 , donc l'existence et la valeur de la limite sont valables pour toute fonction k intégrable. C'est l'argument usuel de la preuve du Lemme de Riemann-Lebesgue, avec la fonction partie fractionnaire remplaçant les fonctions sinus ou cosinus.

Or, nous avons établi précédemment $\int_0^T Ug(t) dt = \int_0^1 \{Ty\} \frac{g(y)}{y} dy$ et l'hypothèse est que $g(y)/y$ est intégrable. □

Corollaire 2. *Pour $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ telle que $\int_0^1 |g(y)| y^{-1} dy < \infty$, les affirmations de la Proposition 3 sont valables.*

De plus les intégrales généralisées $\int_1^\infty Ug(t) t^{-a} dt$ convergent uniformément par rapport à la variable réelle $a \geq 0$ et par conséquent définissent une fonction continue de a aussi en $a = 0^+$.

Démonstration. En effet, la preuve de la proposition 3 repose sur l'estimation $\int_1^x Ug(t) dt = O(\log x)$ or ici on a même mieux puisque $\int_1^\infty Ug(t) dt$ converge. La deuxième partie de l'énoncé découle du critère d'Abel pour les intégrales (semi)-convergentes. □

Remarque 5. En prenant la limite $s = a \rightarrow 0^+$ dans (1.29) on obtient

$$\frac{1}{2} \int_0^1 g(y)y^{-1} dy - \int_0^1 g(y) dy = - \int_0^1 g(y) dy - \zeta(0) \int_0^1 g(y)y^{-1} dy$$

ce qui confirme la valeur connue $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

Remarque 6. Pour $0 < t < 1$, $Ug(t) = \int_0^1 g(y) dy$. Ainsi pour $0 < \Re s < 1$ l'égalité (1.29) peut s'écrire sous la forme :

$$\int_0^\infty Ug(t)t^{-s} dt = -\zeta(s) \int_0^1 g(y)y^{s-1} dy . \quad (1.45)$$

Cette formule valable dans la bande critique est appelée formule de Müntz. Elle est classiquement établie (en particulier dans l'ouvrage de référence [Titchmarsh *et al.*, 1986, II.11]) sous des hypothèses sur g plus fortes : en particulier on y demande à g d'être dérivable sur $[0, +\infty[$ (ce qui imposerait ici $g(1) = g'(1) = 0$). Notre version avec g bornée est donc beaucoup plus économe en hypothèses, à la différence près qu'elle ne considère que des g supportées sur $[0, 1]$.

L'énoncé dans [Titchmarsh *et al.*, 1986, II.11] s'applique à des fonctions g supportées sur tout $[0, \infty[$, et notre méthode nécessiterait quelques ajustements dans les preuves et hypothèses (en particulier, en toute généralité, on aurait alors à considérer des séries $\sum_n t^{-1}g(n/t)$ peut-être seulement presque partout absolument convergentes, alors que pour g supportée sur $[0, 1]$ ce sont des sommes localement finies). Nous ne rentrons pas dans ces considérations, puisque notre contexte utilise uniquement des g supportées sur $[0, 1]$.

Les classes de fonctions sur $[0, 1]$ les plus simples permettant de prouver la convergence de $\int_1^\infty Ug(t)t^{-s} dt$ pour des s avec $\Re s < 0$ sont celles définies par les espaces \mathcal{G}_k pour $k \geq 2$.

Proposition 5. Soit $k \geq 1$ et $g \in \mathcal{G}_k$.

- L'intégrale $\int_1^\infty Ug(t)t^{-s} dt$ est absolument convergente pour $\Re s > -(k-1)$, et l'égalité (1.29) peut donc être vue comme permettant le prolongement analytique à ce demi-plan de l'expression de droite à partir de $\Re s > 0$.
- Le terme de droite de l'égalité (1.29) admet un prolongement analytique méromorphe au demi-plan $\Re s > -k$, ayant au plus un pôle simple en $s = -(k-1)$.

Démonstration. En ce qui concerne le terme de gauche de l'égalité (1.29), on sait par la proposition 1 que $|Ug(t)| \leq At^{-k}$ pour un certain $A < \infty$ si $g \in \mathcal{G}_k$. Par conséquent le terme de gauche de (1.29) est une intégrale absolument convergente pour $\Re s > -(k-1)$ et définit une fonction holomorphe dans ce demi-plan ouvert.

La fonction g de classe \mathcal{C}^k vérifie $g(y) = g(0) + \sum_{1 \leq j < k} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} y^j + O(y^k)$. Rappelons que le terme $g(0)$ est nul pour $k \geq 2$ par définition de l'espace \mathcal{G}_k . Ainsi

$$G(s) = \int_0^1 g(y)y^{s-1} dy = \frac{g(0)}{s} + \sum_{1 \leq j < k} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} \frac{1}{s+j} + R(s) , \quad (1.46)$$

avec $R(s)$ donné par une intégrale absolument convergente et holomorphe pour $\Re s > -k$. Les pôles de $G(s)$ contenus dans $\Re s > -k$ sont donc, vu les conditions sur les dérivées de g en 0 (voir définition 2 page 8), parmi les entiers négatifs ou nuls pairs et aussi possiblement en $s = -(k-1)$ même si $k-1$ est impair (si $g^{(k-1)}(0) \neq 0$, $k \geq 2$).

Pour $k \geq 2$, $s \mapsto \zeta(s) \int_0^1 g(y)y^{s-1} dy$ est ainsi méromorphe sur $\Re s > -k$ avec au plus deux pôles : en $s = 1$ et en $s = -(k-1)$. On a tenu compte des zéros triviaux de la fonction zêta et du fait qu'on n'a pas de pôle en $s = 0$ à cause du fait que $g(0) = 0$.

Et pour $k = 1$, $s \mapsto \zeta(s) \int_0^1 g(y)y^{s-1} dy$ est méromorphe sur $\Re s > -1$ avec au plus un pôle en $s = 1$ et un pôle en $s = 0$.

Dans tous les cas l'expression à droite de l'égalité (1.29) admet un prolongement analytique méromorphe au demi-plan $\Re s > -k$ avec au plus un pôle simple en $s = -(k-1)$. Car les pôles simples (éventuels) en $s = 1$ se compensent mutuellement. \square

1.6 Une formule générale de convolution multiplicative

Jusqu'à présent nous avons centré notre étude sur les liens entre les fonctions sommatoires m_1 , m et M . En vue d'étudier les liens entre d'autres fonctions sommatoires importantes de la théorie des nombres – liées par exemple aux fonctions de Liouville, von Mangoldt, ... – nous établissons dans cette section une généralisation du théorème 1.

Certaines considérations et notations qui suivent sont en partie inspirées par le chapitre IV de l'ouvrage [Balazard, 2016] de Balazard.

Étant donné une fonction arithmétique $a : \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{C}$ et une fonction $\varphi : [0, \infty[$ qui vaut 0 sur $[0, 1[$, on définit

$$S_a \varphi : [0, \infty[\rightarrow \mathbf{C}$$

par

$$S_a \varphi(x) = \sum_{n \geq 1} a(n) \varphi(x/n).$$

Pour chaque x , la série de la définition converge trivialement car elle se réduit à une somme finie $\sum_{1 \leq n \leq x} a(n) \varphi(x/n)$ (pour $0 \leq x < 1$, cette somme vide est nulle).

On utilisera la notation suivante pour deux fonctions arithmétiques :

$$a \star b(n) = \sum_{d|n} a(d)b(n/d) = \sum_{d|n} a(n/d)b(d) = b \star a(n).$$

Le lemme qui suit correspond à l'égalité (3) de [Balazard, 2016, p. 35]. Nous en donnons la démonstration pour la commodité du lecteur.

Lemme 8. *Soit a, b deux fonctions arithmétiques, on a l'égalité entre opérateurs :*

$$S_a \circ S_b = S_{a \star b}.$$

Démonstration. Soit $\varphi : [0, \infty[$ une fonction qui vaut 0 sur $[0, 1[$ et $x > 0$. Commençons par évaluer le membre de gauche

$$\begin{aligned} [S_a \circ S_b] \varphi(x) &= \sum_{n \geq 1} a(n) S_b \varphi(x/n) = \sum_{n \geq 1, m \geq 1} a(n) b(m) \varphi(x/(nm)) \\ &\quad (\text{en posant } nm = k) = \sum_{n \geq 1, k \geq 1, n|k} a(n) b(k/n) \varphi(x/k) = \sum_{k \geq 1} (a \star b)(k) \varphi(x/k) \end{aligned}$$

et c'est bien $[S_{a \star b}] \varphi(x)$. \square

Lemme 9. *Soit :*

- a une fonction arithmétique,
- (p, q) un couple d'exposants conjugués : $1 \leq p, q \leq +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
- $\eta, \varphi : [0, \infty[\rightarrow \mathbf{C}$ deux fonctions mesurables, nulles sur $[0, 1[$,
- $x \geq 1$.

On suppose $\eta|_{[1, x]} \in L^p([1, x], dx)$ et $\varphi|_{[1, x]} \in L^q([1, x], dx)$. Alors :

$$\int_1^x [S_a \eta] \left(\frac{x}{t} \right) \varphi(t) \frac{dt}{t} = \int_1^x \eta \left(\frac{x}{t} \right) [S_a \varphi](t) \frac{dt}{t}. \quad (1.47)$$

Démonstration. Sur le segment $[1, x]$ considéré les fonctions $S_a \eta$ et $S_a \varphi$ sont des sommes finies de fonctions dans des L^p , respectivement L^q . Par exemple $t \mapsto [S_a \eta](t)$ est dans $L^p([1, x])$ et par conséquent aussi $t \mapsto [S_a \eta](x/t)/t$ (ce sont les mêmes espaces pour dt ou dt/t puisque t est éloigné de zéro et de l'infini). Par l'inégalité de Hölder le produit d'une fonction de L^p et d'une de L^q est dans L^1 de l'intervalle considéré. L'énoncé et sa démonstration ne manipulent par conséquent que des intégrales absolument convergentes.

La formule à prouver est certainement vraie si $a(n) = 0$ pour $n \leq x$, puisque dans ce cas $S_a \eta$ est la fonction identiquement nulle sur $[1, x]$ et de même pour $S_a \varphi$.

Par linéarité (finie) il suffit donc de l'établir pour $a = \delta_N$ pour chaque $N \leq x$. On a posé $\delta_N(n) = 1$ pour $n = N$ et zéro sinon. Il s'agit donc de montrer

$$\int_1^x \eta \left(\frac{x}{Nt} \right) \varphi(t) \frac{dt}{t} = \int_1^x \eta \left(\frac{x}{t} \right) \varphi \left(\frac{t}{N} \right) \frac{dt}{t}.$$

Les fonctions η et φ étant identiquement nulles sur $[0, 1[$, ceci s'écrit aussi comme une identité pour des intégrales sur $[0, +\infty[$ (avec des intégrandes identiquement nuls pour $t < 1$ et pour $t > x$) :

$$\int_0^\infty \eta \left(\frac{x}{Nt} \right) \varphi(t) \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \eta \left(\frac{x}{t} \right) \varphi \left(\frac{t}{N} \right) \frac{dt}{t}.$$

Et cette égalité découle immédiatement du changement de variable $u = Nt$. □

Proposition 6. *Soit :*

- a et b deux fonctions arithmétiques,
- (p, q) un couple d'exposants conjugués : $1 \leq p, q \leq +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
- $\eta, \varphi : [0, \infty[\rightarrow \mathbf{C}$ deux fonctions mesurables, nulles sur $[0, 1[$,
- $x \geq 1$.

On suppose $\eta|_{[1, x]} \in L^p([1, x], dx)$ et $\varphi|_{[1, x]} \in L^q([1, x], dx)$. Alors :

$$\int_1^x [S_a \eta] \left(\frac{x}{t} \right) [S_b \varphi](t) \frac{dt}{t} = \int_1^x [S_{a \star b} \eta] \left(\frac{x}{t} \right) \varphi(t) \frac{dt}{t}. \quad (1.48)$$

Démonstration. Sur l'intervalle $[1, x]$ les fonctions $S_a \eta$ et $S_a \varphi$ et $S_{a \star b} \eta$ sont des sommes finies de fonctions dans des L^p ou L^q . L'énoncé ne concerne donc que des intégrales absolument convergentes, par Hölder.

C'est une conséquence du Lemme 9 et du Lemme 8 puisque $S_b \circ S_a = S_{b \star a} = S_{a \star b}$. □

Pour en donner une écriture plus synthétique, notons $*$ la convolution multiplicative de deux fonctions $f, g : [0, \infty[\rightarrow \mathbf{C}$ c'est-à-dire

$$[f * g](x) = \int_0^\infty f\left(\frac{x}{t}\right)g(t)\frac{dt}{t}.$$

La formule devient alors

$$S_a\eta * S_b\varphi = (S_{a*b}\eta) * \varphi.$$

Exemple 1. En prenant $a = \mu$ la fonction de Möbius, $\eta = 1$ la fonction constante qui vaut 1, et $b(n) = 1$ la fonction arithmétique qui est l'inverse de convolution de μ , on retrouve le lemme 1 et la formule

$$\int_1^x \frac{M(x/t)}{x/t} \frac{1}{t} \sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \frac{dt}{t} = \frac{1}{x} \int_1^x \varphi(t) \frac{dt}{t},$$

qui permet comme on l'a vu d'obtenir certaines identités dues à Balazard [Balazard, 2012b].

Exemple 2. En prenant $a = \mu$, $\eta(t) = t$, et $b(n) = 1$ on obtient

$$\int_1^x m(x/t) \frac{1}{t} \sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \frac{dt}{t} = \int_1^x \varphi(t) \frac{dt}{t^2}. \quad (1.49)$$

Ce qui permettra d'obtenir des identités pour faire des conversions vers m_1 en partant de m , voir la formule (4.9) page 69.

Exemple 3. En prenant $a = 1 \star \mu$ et $b = 1$ on obtient

$$\int_1^x \eta\left(\frac{x}{t}\right) \sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \frac{dt}{t} = \int_1^x \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \sum_{k \leq t} \eta\left(\frac{t}{k}\right) \frac{dt}{t}, \quad (1.50)$$

cette formule montre une symétrie dans le rôle de η et de φ . On s'en servira notamment pour simplifier des identités autour de la fonction de von Mangoldt.

Nous allons invoquer dès maintenant ce dernier exemple pour établir la proposition suivante. Un cas particulier en a déjà été prouvé directement à l'occasion de la preuve de la proposition 3.

Proposition 7. Soit (p, q) un couple d'exposants conjugués, soit $f \in L^p([0, 1], dt)$ et $g \in L^q([0, 1], dt)$. Il vaut pour tout $T > 0$:

$$\int_0^T f\left(\frac{t}{T}\right) U g(t) dt = \int_0^T U f(t) g\left(\frac{t}{T}\right) dt, \quad (1.51)$$

avec des intégrandes dans $L^1([0, T], dt)$.

Démonstration. Comme $L^p([0, 1], dt) \subset L^1([0, 1], dt)$ (car $p \geq 1$!), $I_f = \int_0^1 f(t) dt$ existe et l'on peut définir $Uf(x)$ pour $x > 0$ comme à l'habitude : $Uf(x) = I_f - \frac{1}{x} \sum_{1 \leq n \leq x} f(n/x)$. La fonction Uf est constante sur $[0, 1[$ (on la prolonge par continuité en $x = 0$). Sa restriction à n'importe quel intervalle $[1, T]$, $T < \infty$ est dans L^p , comme l'on vérifie de suite en restreignant

aux intervalles $[1, 2]$, $[2, 3]$, etc. Les intégrales dans l'identité à prouver sont donc par Hölder avec des intégrandes dans $L^1(0, T)$.

Nous utilisons (1.50) avec $\eta(t) = f(1/t)$ pour $t \geq 1$ et 0 pour $0 \leq t < 1$, et de même $\varphi(t) = g(1/t)$ pour $t \geq 1$ et 0 pour $0 \leq t < 1$. Remarquons que la restriction de η à tout intervalle $[1, T]$ est dans L^p et semblablement pour φ dans L^q . Donc (1.50), qui découle de la proposition 6, s'applique. Il vient :

$$\int_1^T f\left(\frac{t}{T}\right) \sum_{k \leq t} g\left(\frac{k}{t}\right) \frac{dt}{t} = \int_1^T g\left(\frac{t}{T}\right) \sum_{k \leq t} f\left(\frac{k}{t}\right) \frac{dt}{t} \quad (1.52)$$

$$\int_1^T f\left(\frac{t}{T}\right) (\mathbf{I}_g - \mathbf{U}g(t)) dt = \int_1^T g\left(\frac{t}{T}\right) (\mathbf{I}_f - \mathbf{U}f(t)) dt \quad (1.53)$$

$$\mathbf{I}_g \int_1^T f\left(\frac{t}{T}\right) dt - \int_1^T f\left(\frac{t}{T}\right) \mathbf{U}g(t) dt = \mathbf{I}_f \int_1^T g\left(\frac{t}{T}\right) dt - \int_1^T g\left(\frac{t}{T}\right) \mathbf{U}f(t) dt. \quad (1.54)$$

En soustrayant le produit $T \cdot \mathbf{I}_f \cdot \mathbf{I}_g$:

$$-\mathbf{I}_g \int_0^1 f\left(\frac{t}{T}\right) dt - \int_1^T f\left(\frac{t}{T}\right) \mathbf{U}g(t) dt = -\mathbf{I}_f \int_0^1 g\left(\frac{t}{T}\right) dt - \int_1^T g\left(\frac{t}{T}\right) \mathbf{U}f(t) dt. \quad (1.55)$$

Et finalement, compte tenu de $\mathbf{U}f \equiv \mathbf{I}_f$ et $\mathbf{U}g \equiv \mathbf{I}_g$ sur $[0, 1[$:

$$\int_0^T f\left(\frac{t}{T}\right) \mathbf{U}g(t) dt = \int_0^T g\left(\frac{t}{T}\right) \mathbf{U}f(t) dt. \quad (1.56)$$

La formule est valable aussi pour $0 < T < 1$ car elle se réduit à $\int_0^T f\left(\frac{t}{T}\right) dt \cdot \mathbf{I}_g = \int_0^T g\left(\frac{t}{T}\right) dt \cdot \mathbf{I}_f$, qui dit simplement $T\mathbf{I}_f\mathbf{I}_g = T\mathbf{I}_g\mathbf{I}_f$. \square

1.7 Deux fonctions particulières

Rappelons la définition de la fonction ε_1 introduite dans [Balazard, 2012b] :

$$\varepsilon_1(x) = \int_1^x \eta(t)^2 dt \quad \text{avec } \eta(t) = \frac{(2\{t\} - 1)t + \{t\} - \{t\}^2}{t^2}. \quad (1.57)$$

La fonction ε_1' apparaîtra fréquemment dans les démonstrations à venir. Elle est directement liée dans notre cadre aux fonctions

$$g_1(y) = 2y \quad \text{et} \quad g_2(y) = 4y(1 - y^2).$$

Nous recensons et démontrons ici toutes les propriétés de ces fonctions dont nous aurons l'usage.

Proposition 8.

1. On a $g_1 \in \mathcal{G}_1$, $g_2 \in \mathcal{G}_2$, $\mathbf{I}_{g_1} = \mathbf{I}_{g_2} = 1$ et pour tout $t \geq 1$,

$$\mathbf{U}g_1(t) = \frac{t(2\{t\} - 1) + \{t\} - \{t\}^2}{t^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{U}g_2(t) = [\mathbf{U}g_1(t)]^2 = \varepsilon_1'(t),$$

et

$$-1 \leq t\mathbf{U}g_1(t) \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq t^2\mathbf{U}g_2(t) \leq 1. \quad (1.58)$$

2. Pour tout $x \geq 1$, on a

$$Vg_1(x) = 2 - \frac{2}{x} \quad \text{et} \quad Vg_2(x) = \frac{8}{3} - \frac{4}{x} \left(1 - \frac{1}{3x^2}\right). \quad (1.59)$$

3. Pour tout $s \in \mathbf{C}$ tel que $\Re s > -1$, $s \neq 1$, on a

$$\int_1^\infty \varepsilon_1'(t) t^{-s} dt = \frac{1}{s-1} - \frac{8\zeta(s)}{(s+1)(s+3)}. \quad (1.60)$$

De plus

$$\int_1^\infty \varepsilon_1'(t) t^{-1} dt = \frac{3}{4} - \gamma. \quad (1.61)$$

Démonstration. 1. L'appartenance de g_1 et g_2 respectivement à \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 sont de simples vérifications. On sait par ailleurs que pour tout entier N on a $\sum_{n=1}^N n = (N^2 + N)/2$, donc

$$\sum_{n \leq t} g_1(n/t) = 2/t \sum_{n \leq t} n = 2/t \frac{[t]^2 + [t]}{2} = \frac{[t]^2 + [t]}{t}.$$

Écrivons $[t] = t - \{t\}$ ainsi

$$\sum_{n \leq t} g_1(n/t) = \frac{(t - \{t\})^2 + t - \{t\}}{t} = \frac{t^2 - 2\{t\}t + \{t\}^2 + t - \{t\}}{t}.$$

On a $\int_0^1 g_1(y) dy = \int_0^1 2y dy = [y^2]_0^1 = 1$ et donc

$$Ug_1(t) = 1 - \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} g_1(n/t) = \frac{2\{t\}t - \{t\}^2 + t + \{t\}}{t^2} = \frac{t(2\{t\} - 1) + \{t\} + \{t\}^2}{t^2},$$

c'est la première égalité annoncée.

La proposition 2 de [Balazard, 2012b, p. 7] donne

$$-t \leq t(2\{t\} - 1) + \{t\} - \{t\}^2 \leq t$$

et puisque c'est le numérateur de l'expression de $Ug_1(t)$ que l'on vient de démontrer, on a

$$-\frac{t}{t^2} \leq Ug_1(t) \leq \frac{t}{t^2}$$

et le résultat de l'énoncé.

Notons que pour tout entier N on a $\sum_{n=1}^N n^3 = [\sum_{n=1}^N n]^2$. On a $g_2(y) = 4y - 4y^3$ donc

$$\sum_{n \leq t} g_2(n/t) = 4/t \sum_{n \leq t} n - 4/t^3 \sum_{n \leq t} n^3 = 4/t \sum_{n \leq t} n - 4/t^3 \left[\sum_{n \leq t} n\right]^2.$$

On a $\int_0^1 g_2(y) dy = \int_0^1 4y - 4y^3 dy = [2y^2 - y^4]_0^1 = 2 - 1 = 1$ donc

$$Ug_2(t) = 1 - \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} g_2(n/t) = 1 - 4/t^2 \sum_{n \leq t} n + 4/t^4 \left[\sum_{n \leq t} n\right]^2. \quad (1.62)$$

Mais

$$[Ug_1(t)]^2 = [1 - 2/t^2 \sum_{n \leq t} n]^2 = 1 - 4/t^2 \sum_{n \leq t} n + 4/t^4 [\sum_{n \leq t} n]^2 \quad (1.63)$$

donc en égalant les deux membres de gauche des égalités (1.62) et (1.63) on obtient bien $[Ug_1(t)]^2 = Ug_2(t)$.

2. Pour tout $x \geq 1$ on a $Vg(x) = \int_{1/x}^1 \frac{g(y)}{y} dy$, un calcul de primitives de monômes donne les deux résultats pour g_1 et g_2 .
3. D'après la proposition 3 page 12 pour $g \in \mathcal{G}_k$ on a

$$\int_1^\infty Ug(t)t^{-s} dt = \frac{1}{s-1} \int_0^1 g(y) dy - \zeta(s) \int_0^1 g(y)y^{s-1} dy \quad (\Re s > -k+1, s \neq 1).$$

Un calcul de primitive, valide pour $\Re s > -1$, donne

$$\int_0^1 g_2(y)y^{s-1} dy = 4 \frac{1}{s+1} - 4 \frac{1}{s+3} = 4 \frac{(s+3) - (s+1)}{(s+1)(s+3)} = \frac{8}{(s+1)(s+3)}$$

et donc

$$\int_1^\infty \varepsilon'_1(t)t^{-s} dt = \frac{1}{s-1} - \frac{8\zeta(s)}{(s+1)(s+3)}.$$

Par la proposition 5 page 15 pour $g \in \mathcal{G}_k$ avec $k \geq 1$ on a

$$\int_1^\infty Ug(t)t^{-1} dt = -\gamma \int_0^1 g(y) dy - \int_0^1 g(y) \log y dy,$$

en particulier pour $g_2(y) = 4y - 4y^3$, puisque

$$\int_0^1 g(y) \log y dy = [-y^4 \log y + 2y^2 \log y + y^4/4 - y^2]_0^1 = -\frac{3}{4},$$

on obtient bien

$$\int_1^\infty \varepsilon'_1(t)t^{-1} dt = \frac{3}{4} - \gamma.$$

□

Montrons à présent comment retrouver les inégalités de Balazard données en début de chapitre. Le théorème 1 page 4 donne pour $i = 1$ et $i = 2$ l'égalité

$$I_{g_i} m_1(x) = \int_1^x \frac{M(x/t)}{x/t} Ug_i(t) \frac{dt}{t} + \frac{Vg_i(x)}{x} \quad (x \geq 1).$$

Par la proposition 8 on a $I_{g_1} = 1$, $|Ug_1(t)| \leq 1/t$ et $|Vg_1(x)| \leq 2$

$$|m_1(x)| \leq \int_1^x \frac{|M(x/t)|}{x/t} \frac{1}{t} \frac{dt}{t} + \frac{2}{x} \quad (x \geq 1)$$

et le changement de variable $u = x/t$ fournit

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{x} \int_1^x \frac{|M(u)|}{u} du + \frac{2}{x} \quad (x \geq 1),$$

on retrouve la proposition 3 p. 7 de [Balazard, 2012b].

Par la proposition 8 ci-dessus on a $I_{g_2} = 1$, $|Ug_2(t)| \leq 1/t^2$ et $|Vg_2(x)| \leq 8/3$, donc

$$|m_1(x)| \leq \int_1^x \frac{|M(x/t)|}{x/t} \frac{1}{t^2} \frac{dt}{t} + \frac{8/3}{x} \quad (x \geq 1)$$

et le changement de variable $u = x/t$ fournit

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{x^2} \int_1^x |M(u)| du + \frac{8/3}{x} \quad (x \geq 1), \quad (1.64)$$

on retrouve la proposition 7 p. 9 de [Balazard, 2012b].

Corollaire 3. *Pour tout $x \geq 1$ on a*

$$|m_1(x)|x \leq \frac{1}{3} \max_{t \leq x} |M(t)| + \frac{8}{3} \quad \text{et} \quad |m(x)|x \leq \frac{4}{3} \max_{t \leq x} |M(t)| + \frac{8}{3}.$$

Démonstration. Rappelons l'identité de Balazard (1.9) page 3, pour tout $x \geq 1$ on a

$$m_1(x)x = \int_1^x M(x/t)\varepsilon_1'(t) dt + \frac{8}{3} - \frac{4}{x} \left(1 - \frac{1}{3x^2}\right).$$

La première majoration annoncée en découle par inégalité triangulaire, le fait que $\varepsilon_1' \geq 0$ et $\int_1^\infty \varepsilon_1'(t) dt = 1/3$ (égalité (1.60) appliquée avec $s = 0$). La deuxième majoration provient de l'inégalité $|m(x)| \leq |M(x)|/x + |m_1(x)|$. \square

Chapitre 2

Les constantes C_k

Dans [Balazard, 2012b], Balazard obtient pour tout $k \geq 1$ l'existence de constantes C_k et D_k telles que

$$|m_1(x)| \leq \frac{C_k}{x^k} \int_1^x |M(u)| u^{k-2} du + \frac{D_k}{x} \quad (x \geq 1). \quad (2.1)$$

Étant donné $k \geq 1$, on dira dans la suite que C_k est une constante (ou valeur) admissible s'il existe $D_k > 0$ tel que (2.1). Nous introduisons

$$C_k^* = \inf C_k$$

la borne inférieure des constantes admissibles. Pour les premières valeurs de k , Balazard donne les constantes admissibles suivantes :

k	1	2	3	4	5	6	7
C_k	1	1	1,1 ?	1,5 ?	2,6 ?	6,3 ?	13,8 ?

Les points d'interrogations signalent que les valeurs correspondantes sont suggérées par des expérimentations informatiques et non rigoureusement établies.

La détermination de constantes admissibles $C_k > 0$ aussi petites que possibles constitue de fait un problème théorique intéressant, et c'est l'un des objectifs de ce chapitre (cf. § 2.2). Remarquons d'emblée que le théorème 1 entraîne directement que pour toute fonction $g \in \mathcal{G}_k$ telle que $I_g = 1$,

$$|m_1(x)| \leq \frac{\|\chi^k U g\|_\infty}{x^k} \int_1^x |M(u)| u^{k-2} du + \frac{\|V g\|_\infty}{x} \quad (x \geq 1),$$

et donc $\|\chi^k U g\|_\infty$ est une constante admissible dès que $\int_0^1 |g(y)|/y dy < \infty$.

Cette dernière condition, si $k \geq 2$, est automatiquement vérifiée pour $g \in \mathcal{G}_k$ et nous savons par ailleurs par la Proposition 1 que $\|\chi^k U g\|_\infty < \infty$ pour $g \in \mathcal{C}^k[0, 1]$ seulement pour $g \in \mathcal{G}_k$.

Définition 3. Pour tout $k \geq 1$, on pose :

$$\mathbf{c}_k^* = \inf_{\substack{g \in \mathcal{C}^k([0,1]) \\ I_g=1}} \|\chi^k U g\|_\infty.$$

L'infimum peut être pris sur les seules $g \in \mathcal{G}_k$, par la proposition 1.

Pour $k \geq 2$ on a :

$$C_k^* \leq \mathfrak{c}_k^* .$$

La suite $(\mathfrak{c}_k^*)_{k \geq 1}$ est croissante, car $\mathcal{G}_{k+1} \subset \mathcal{G}_k$ et $\|\chi^{k+1} U g\|_\infty \geq \|\chi^k U g\|_\infty$. La suite $(C_k^*)_{k \geq 1}$ est également croissante.

Les valeurs admissibles de C_k établies ou conjecturées par Balazard pour les petites valeurs de k peuvent laisser penser que $C_k^* \geq 1$. Nous montrons à cet égard (cf. §2.2.1) que $\mathfrak{c}_1^* < 1$ et donc $C_1^* < 1$. Et si pour tout $k \geq 2$, on a $\mathfrak{c}_k^* \geq 1$, nous obtenons des résultats conditionnels qui plaident en faveur de $C_2^* < 1$ et $C_3^* < 1$.

Lorsque $k \rightarrow \infty$, la détermination de l'ordre de grandeur de C_k^* semble délicate. Balazard indique que la preuve d'existence des constantes C_k qu'il a faite fournit également que $C_k = O(6^{(k-1)^2})$. Nous améliorons ce résultat en montrant que

$$\mathfrak{c}_k^* = O\left(\left(\frac{2k}{\pi e}\right)^{k+1}\right) .$$

Balazard remarque dans [Balazard, 2012a] que l'existence d'une suite de constantes admissibles (C_k) telle que $C_k = o(k)$, ainsi que la majoration triviale $|M(u)| \leq u$, entraînent la relation $m_1(x) = o(x)$. Or cette dernière relation implique (cf. section 4.7) le théorème des nombres premiers, pour lequel on obtiendrait ainsi une nouvelle preuve élémentaire. Dans la section 2.1 nous discutons la véracité des assertions $C_k^* = o(k)$ et $\mathfrak{c}_k^* = o(k)$.

2.1 Minorations des \mathfrak{c}_k^*

2.1.1 Minoration uniforme

Nous montrons pour commencer qu'il y a une obstruction au voisinage de $t = 1$ à ce que $|Ug(t)| \leq t^{-3}$ et $I_g = 1$.

Lemme 10. *Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ intégrable. Pour $1 \leq t < 2$, on a :*

$$Ug(t) = I_g - \frac{g(1/t)}{t} , \tag{2.2}$$

de plus si g est dérivable en 1 on a

$$[Ug]'(1) = g(1) + g'(1) . \tag{2.3}$$

Démonstration. Pour $1 \leq t < 2$, par définition $Ug(t) = I_g - \frac{1}{t} \sum_{1 \leq n \leq t} g(n/t)$, donc la somme ne porte que sur $n = 1$, ce qui donne la formule (2.2). La formule (2.3) s'obtient en dérivant l'égalité (2.2). \square

Proposition 9. *Soit $\ell \in]0, \infty[$, si $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ est dérivable avec $g(0) = g(1) = 0$, $g'(0) = g'(1) = 0$ et $I_g \neq 0$ alors il existe $r > 0$ tel que pour tout $t \in [1, 1+r]$, on a la minoration :*

$$t^\ell Ug(t) \geq I_g(1 + \ell(t-1)/2) . \tag{2.4}$$

Démonstration. Calculons la dérivée de $t \mapsto t^\ell Ug(t)$ en $t = 1$. Par la formule (2.3) on a $[Ug]'(1) = g(1) + g'(1)$. Donc on obtient :

$$[t^\ell Ug]'(1) = \ell I_g + 0 = \ell I_g ,$$

et au voisinage de 1, puisque $Ug(1) = I_g$, on a

$$t^\ell Ug(t) = I_g(1 + \ell(t-1) + o(t-1)^2) .$$

Ce qui donne l'existence d'un voisinage $[1, 1+r]$ sur lequel la minoration (2.4) est vraie. \square

Remarque 7. On rappelle la définition de l'espace \mathcal{G}_3 donnée par la définition 2 appliquée avec $k = 3$, on a noté $\mathcal{G}_3 = \{g \in \mathcal{C}^3[0, 1], g(0) = g'(0) = 0 \text{ et } g(1) = g'(1) = 0\}$ et l'implication (1.22) pour $k = 3$ nous dit que pour une fonction g de classe \mathcal{C}^3 , si $\|\chi^3 Ug\|_\infty < \infty$ alors $g \in \mathcal{G}_3$. En particulier pour toutes fonctions polynomiales g , et ce sont les fonctions ciblées dans [Balazard, 2012b], on a $\sup_{t \geq 1} |t^3 Ug(t)| > 1$.

Comme le montre la définition 2 des espaces \mathcal{G}_k page 8, les propriétés de g en 0 et 1 ont des conséquences sur Ug , Vg , nous en donnons quelques autres dans la proposition suivante.

Proposition 10. Soit g une fonction intégrable sur $[0, 1]$ vérifiant $I_g = \int_0^1 g(y) dy = 1$.

1. Si $g(1) = 0$ alors $\|\chi^k Ug\|_\infty \geq 1$ pour tout $k \geq 1$. En particulier, pour tout $k \geq 2$, $\mathfrak{c}_k^* \geq 1$.
2. Si g est une fonction continue avec $g(1) \neq 0$ alors $\|\chi Ug\|_\infty \geq 1/3$, en particulier $\mathfrak{c}_1^* \geq 1/3$.
3. Si g est une fonction dérivable en 0 on a $Vg(x) = g(0) \log x + v(x)$ avec v une fonction bornée.

Démonstration. 1. Si $g(1) = 0$ alors la fonction Ug vaut I_g en 1, en effet

$$Ug(1) = I_g - \frac{1}{1} \sum_{n \leq 1} g(n/1) = I_g - g(1) .$$

Donc si $I_g = 1$ on a nécessairement $\|\chi^k Ug\|_\infty \geq 1$.

2. Si $g(1) \neq 0$ la fonction Ug définie sur $]0, \infty[$ est discontinue à chaque point entier. Plus précisément pour chaque entier $n \geq 1$ on a

$$Ug(n) - \lim_{t \rightarrow n^-} Ug(t) = -\frac{g(1)}{n} , \quad (2.5)$$

en effet pour tout $t \in]n-1, n[$

$$Ug(n) - Ug(t) = \sum_{j \leq t} g(j/t)/t - \sum_{j \leq n} g(j/n)/n = \sum_{j \leq n-1} (g(j/t)/t - g(j/n)/n) - g(1)/n ,$$

et par la continuité de la fonction g les $(n-1)$ termes dans la somme tendent vers 0 quand t tend vers n par valeurs inférieures. Soit $0 < \varepsilon < 1$. En utilisant $\max(|x|, |y|) \geq 0,5(|x| + |y|) \geq 0,5|x-y|$, on montre :

$$\sup_{t \in [n-1, n]} |tUg(t)| \geq \max(|nUg(n)|, |(n-\varepsilon)Ug(n-\varepsilon)|) \geq 0,5|nUg(n) - (n-\varepsilon)Ug(n-\varepsilon)| .$$

Par (2.5) le membre le plus à droite de l'inégalité ci-dessus tend vers $0,5|g(1)|$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$, ainsi $\|\chi Ug\|_\infty \geq 0,5|g(1)|$. Par ailleurs on a $\|\chi Ug\|_\infty \geq |1 - g(1)|$ (valeur atteinte pour $t = 1$). Donc en posant $g(1) = a$ on trouve

$$\|\chi Ug\|_\infty \geq \min_{a \in \mathbf{R}} (\max(0,5|a|; |1-a|)) = \frac{1}{3} .$$

3. On a $g(y) = g(0) + yh(y)$ avec h une fonction continue sur $[0, 1]$ (qui vérifie $h(0) = g'(0)$)

$$Vg(x) = \int_{1/x}^1 g(y)/y \, dy = g(0) \log x + \int_{1/x}^1 h(y) \, dy$$

et $|\int_{1/x}^1 h(y) \, dy| \leq \int_0^1 |h(y)| \, dy$, $|h(y)|$ étant continue elle est intégrable. \square

2.1.2 Minorations de C_k^* et \mathfrak{c}_k^* lorsque $k \rightarrow +\infty$

Balazard dans [Balazard, 2012a, p. 36] indique que si l'on prouve que

$$C_k^* = o(k) \quad (k \rightarrow \infty) \tag{2.6}$$

alors l'estimation triviale $|M(x)| \leq x$ se convertit en $m_1(x) = o(1)$, relation qui entraîne le théorème des nombres premiers (voir section 4.7). En effet la relation (2.1) entraîne que pour tout $k \geq 1$,

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} |m_1(x)| \leq \frac{C_k^*}{k}.$$

On peut remarquer que la relation (2.6) va à l'encontre de l'hypothèse généralisée de Mertens

$$M(x) = O(\sqrt{x}). \tag{2.7}$$

En effet la majoration (2.1) entraîne

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} |m_1(x)\sqrt{x}| \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{|M(x)|}{\sqrt{x}} \times \frac{C_k^*}{k - 0,5}, \tag{2.8}$$

et donc les relations (2.6) et (2.7) entraînent

$$m_1(x) = o(1/\sqrt{x}),$$

relation qui est fautive : il est établi dans [Anderson et Stark, 1981] p. 85 que

$$M(x) + x \sum_{n>x} \frac{\mu(n)}{n} = -xm_1(x) = \Omega_{\pm}(\sqrt{x})$$

avec au moins des oscillations d'environ $\pm \frac{\sqrt{x}}{200}$. Cela résulte du fait que la fonction $1/\zeta$ a des pôles de partie réelle $1/2$.

La relation $\mathfrak{c}_k^* = o(k)$ entraînerait immédiatement $C_k^* = o(k)$. Mais cette relation est fautive : c'est l'objet des deux propositions qui suivent.

Proposition 11. Soit $k \geq 1$ un entier et $g \in \mathcal{G}_k$ telle que $\int_0^1 g(y) \, dy = 1$, pour $\Re s > -(k-1)$ et $s \neq 1$ on a :

$$\frac{\|\chi^k U g\|_{\infty}}{k-1+\Re s} \geq |H(s)| \tag{2.9}$$

où $s \mapsto H(s)$ est le prolongement analytique de la fonction

$$s \mapsto \frac{1}{s-1} - \zeta(s) \int_0^1 g(y)y^{s-1} \, dy$$

au domaine $\Re s > -(k-1)$.

Démonstration. D'après la proposition 3 page 12 pour $g \in \mathcal{G}_k$ on a

$$\int_1^\infty \mathrm{U}g(t)t^{-s} dt = H(s) \quad (\Re s > -k + 1, s \neq 1).$$

Pour tout $t \geq 1$ on a $|\mathrm{U}g(t)| \leq \|\chi^k \mathrm{U}g\|_\infty t^{-k}$, en utilisant également l'inégalité triangulaire, on arrive à :

$$|H(s)| = \left| \int_1^\infty \mathrm{U}g(t)t^{-s} dt \right| \leq \int_1^\infty |\mathrm{U}g(t)|t^{-\Re s} dt \leq \frac{\|\chi^k \mathrm{U}g\|_\infty}{k - 1 + \Re s}. \quad \square$$

Proposition 12. Soit $k \geq 1$ un entier, on a la minoration :

$$\frac{\mathfrak{c}_k^*}{k - 0,5} \geq 0,07. \quad (2.10)$$

Démonstration. Soit g une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. Pour ρ un zéro non trivial de la fonction zêta de partie réelle $1/2$, $s = \rho$ ne peut être un pôle de $s \mapsto \int_0^1 g(y)y^{s-1} dy$ puisque par intégration, cette fonction est holomorphe où l'intégrale qui la définit est absolument convergente, ce qui est le cas sur $\Re s > 0$. Ainsi, en utilisant l'inégalité (2.9) on a :

$$\frac{\|\chi^k \mathrm{U}g\|_\infty}{k - 0,5} \geq \frac{1}{|\rho - 1|}, \quad (2.11)$$

on conclut en prenant le zéro de partie imaginaire positive la plus petite, soit $\rho = 1/2 + i14,13\dots$, pour une valeur approchée au millième on pourra consulter l'article historique de Gram [Gram, 1903] ou des références plus récentes ([Titchmarsh *et al.*, 1986] p. 389). \square

On peut aussi utiliser un zéro trivial de la fonction zêta quand la fonction g est assez régulière, dans ce cas le minorant de $\|\chi^k \mathrm{U}g\|_\infty$ est plus grand (à partir de $k = 4$).

Proposition 13. Soit $k \geq 4$ un entier et $g \in \mathcal{G}_k$ telle que $\int_0^1 g(y) dy = 1$ et $g(y)/y^3$ soit intégrable sur $[0, 1]$, on a :

$$\frac{\|\chi^k \mathrm{U}g\|_\infty}{k - 3} \geq \frac{1}{3}.$$

Démonstration. La condition $g(y)/y^3$ intégrable sur $[0, 1]$ assure que $s = -2$ n'est pas un pôle de $s \mapsto \int_0^1 g(y)y^{s-1} dy$ et donc $\zeta(s) \int_0^1 g(y)y^{s-1} dy$ s'annule pour $s = -2$. On conclut en utilisant la proposition 11 avec $s = -2$. \square

Remarque 8. L'inégalité (2.11) donne dans l'autre direction

$$|\rho - 1| \geq \frac{k - 0,5}{\|\chi^k \mathrm{U}g\|_\infty}.$$

Donc en utilisant $k = 3$ et la fonction qui fournit $\|\chi^3 \mathrm{U}g\|_\infty \leq 1,05$ dans la proposition 18 qui se trouve dans la suite de ce document (p. 35), on trouve qu'il n'y a pas de zéros ρ de la fonction zêta de Riemann dans le disque de centre $s = 1$ et de rayon $2,38$.

2.2 Majorations de C_k^* pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Pour majorer C_k^* pour des petites valeurs de k , il suffit de choisir des fonctions g judicieuses pour lesquelles $\sup_{t \geq 1} |t^k U g(t)|$ est aussi petit que possible, c'est l'objet de cette section. Il est naturel, au vu de ce qui précède, de commencer par tester des fonctions polynomiales $g \in \mathcal{G}_k$ (qui donneront donc une majoration de c_k^*). Une fois la fonction g choisie, nous pourrons utiliser le résultat suivant pour établir la majoration souhaitée.

Proposition 14. *Soit $k \geq 1$ un nombre entier et $g \in \mathcal{G}_k$ de classe \mathcal{C}^{k+1} sur $[0, 1]$, pour tout $t \geq 1$ on a :*

$$t^k U g(t) = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} (B_k(\{t\})g^{(k-1)}(1) - B_k(0)g^{(k-1)}(0)) + \frac{r(t)}{t}$$

avec $|r(t)| \leq \frac{1}{(k+1)!} \left(\|B_{k+1}\|_\infty |g^{(k)}(1)| + |B_{k+1}(0)g^{(k)}(0)| + \|B_{k+1}\|_\infty \|g^{(k+1)}\|_1 \right), \quad (2.12)$

où on a noté $\|B_{k+1}\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |B_{k+1}(t)|$.

Démonstration. Par la formule du développement limité de Ug contenu dans la formule (1.12) page 4 appliquée pour $K = k + 1$, on a

$$r(t) = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \left(B_{k+1}(\{t\})g^{(k)}(1) - B_{k+1}(0)g^{(k)}(0) \right) + \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \int_0^1 g^{(k+1)}(y) B_{k+1}(\{yt\}) dy,$$

ce qui donne l'inégalité annoncée. \square

Expliquons la démarche que nous allons appliquer dans la suite.

-Première partie : majoration pour les grandes valeurs-

- *Étape A :* On conjecture un majorant de $|t^k U g(t)|$ noté M à l'aide d'un graphique ou de quelques valeurs choisies.
- *Étape B :* On calcule un majorant de $|r(t)|$ noté R suivant l'inégalité (2.12) ci-dessus.
- *Étape C :* On majore le terme principal

$$\frac{1}{k!} |B_k(\{t\})g^{(k-1)}(1) - B_k(0)g^{(k-1)}(0)|$$

pour tout $t \geq 1$ ou sur certains intervalles par un nombre $P < M$.

Conclusion : On aura bien

$$|t^k U g(t)| \leq P + R(M - P)/R = M \quad (t \geq R/(M - P)).$$

-Deuxième partie : majoration pour les petites valeurs-

Pour l'intervalle fini $[1, R/(M - P)]$ il faut vérifier $|t^k U g(t)| \leq M$. On ramènera toutes nos inégalités à $Q(x) < 0$ ou $Q(x) > 0$ sur un intervalle $[n - 1, n]$ où Q est un polynôme, on prouvera ces inégalités polynomiales en calculant, à l'aide de l'ordinateur, les racines réelles de Q à 0,1 ou 0,01 près pour montrer qu'elles sont en dehors de $[n - 1, n]$, on conclura en vérifiant le signe en $n - 1$ ou en n (exemples ci-dessous pour $k = 1$ et $k = 3$).

Ou on pourra également utiliser le théorème des accroissements finis et procéder à un balayage des valeurs (exemple ci-dessous pour $k = 4$).

Pour calculer une approximation de toutes les racines réelles d'un polynôme P , et dans nos exemples les polynômes seront toujours à coefficients rationnels de degrés plus petits que 8, on utilisera la commande $realroots(P(x), E)$ du logiciel Maxima. Le logiciel retourne une approximation en nombres rationnels de toutes les racines réelles de P avec une erreur commise inférieure à E . L'aide indique sur cette commande : *realroots constructs a Sturm sequence to bracket each root, and then applies bisection to refine the approximations. All coefficients are converted to rational equivalents before searching for roots, and computations are carried out by exact rational arithmetic. Even if some coefficients are floating-point numbers, the results are rational.* Le fait d'avoir des polynômes simplifie les problèmes de séparations des racines puisque l'on peut les compter dans un intervalle donné par le théorème (et l'algorithme) de Sturm. Le fait d'avoir des coefficients rationnels permet de faire des calculs exacts avec le logiciel de calcul formel.

2.2.1 Le cas $k = 1$: étude de $\|\chi Ug\|_\infty$

Considérons la famille $g_a(y) = \frac{6}{2-3a}y(y-a)$ avec $a \neq \frac{2}{3}$ qui est telle que $\int_0^1 g_a(y) dy = 1$. En expérimentant on voit que pour cette famille les extrema de $tUg_a(t)$ sont souvent atteints en $t = 1$ ou $t = 2^-$. On a $1Ug_a(1) = 2Ug_a(2^-) = (12a - 13)/(2 - 3a)$ et pour $a = 13/12$ la valeur commune est 0,6. Prouvons maintenant qu'effectivement $\|\chi Ug_{13/12}\|_\infty = 0,6$.

Nous aurons besoin de ces renseignements sur le polynôme de Bernoulli $B_2(t) = t^2 - t + 1/6$: $\|B_2\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |B_2(t)| = 1/6$ et $B_2(0) = 1/6$. La démonstration est directe car c'est un polynôme de degré deux.

On a $g_{13/12}(y) = (26y - 24y^2)/5$, on notera $g(y)$ ce polynôme. Suivons la méthode exposée ci-dessus.

Première partie : majoration à partir d'un certain rang.

- *Étape A (majorant global) :* On conjecture que $M = 0,6$ convient.
- *Étape B (reste) :* On a $g^{(1)}(y) = (-48y + 26)/5$ et on obtient

$$\|B_2\|_\infty |g^{(1)}(1)| + |B_2(0)g^{(1)}(0)| = 1,6 .$$

On a $g^{(2)}(y) = -48/5$ et donc $\|B_2\|_\infty \|g^{(2)}\|_1 = 1,6$. Ainsi l'inégalité (2.12) sur le reste nous donne

$$|r(t)| \leq (1,6 + 1,6)/2! = 1,6$$

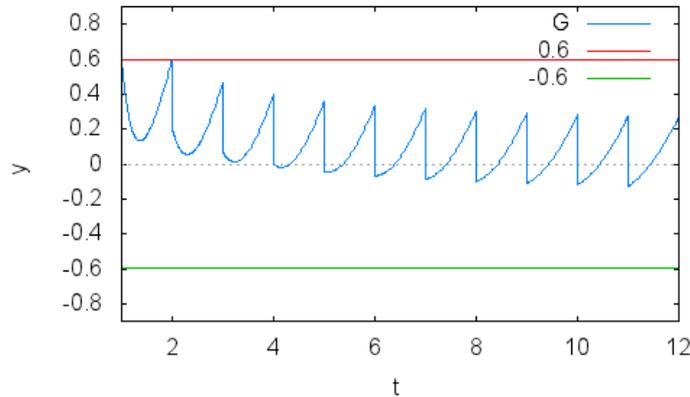
et donc $R = 1,6$ convient.

- *Étape C (terme principal) :* Le terme principal de $tUg(t)$ est $\frac{2}{5}(\{t\} - 1/2)$, puisque $|(\{t\} - 1/2)| \leq 1/2$ on arrive à $|\frac{2}{5}(\{t\} - 1/2)| \leq 1/5$ donc $P = 0,2$ convient.

Bilan de la première partie : $tUg(t) = \frac{2}{5}(\{t\} - 1/2) + \frac{r(t)}{t}$ avec $|r(t)| \leq 1,6$ ainsi pour $t \geq 4$ on a $|tUg(t)| \leq 0,2 + 0,4 = 0,6$. Nous avons prouvé que

$$|tUg(t)| \leq 0,6 \quad (t \geq 4). \tag{2.13}$$

Regardons la représentation graphique de $t \mapsto tUg(t)$ (les segments verticaux à chaque abscisse entière à partir de 2 sont des discontinuités).



Deuxième partie : vérification de la majoration avant le rang de la première partie.

Pour $t \in [1, 2[$ on a $t^3 U g(t) = t^3 - t^2 g(1/t)$, ce qui donne

$$t^3 U g(t) = (5t^3 - 26t + 24)/5 ,$$

polynôme de degré trois dont la dérivée s'annule pour $t_* = \sqrt{26/15}$ et en passant de valeurs négatives à positives. On a $5t_*^3 - 26t_* + 24 = 1,17\dots$ donc $t U g(t) > 0$ sur $[1, 2[$.

Pour $t \in [1, 2[$ on a la factorisation

$$t U g(t) - 0,6 = \frac{(t-2)(t-1)(5t+12)}{5t^2}$$

et donc $t U g(t) \leq 0,6$ sur ce même intervalle.

Pour $n = 3, 4, 5$ on traite l'intervalle $t \in [n-1, n[$. On calcule d'abord la fraction rationnelle

$$1 - \frac{g(1/t) + g(2/t) + \dots + g((n-1)/t)}{t} = G_n(t)$$

qui coïncide avec $U g(t)$ sur $t \in [n-1, n[$ et l'on souhaite prouver que $-0,6 < t G_n(t) < 0,6$. On remarque que $t^3 G_n(t)$ est un polynôme de degré 3 que l'on note $Q_n(t)$, on souhaite prouver que $-0,6t^2 < Q_n(t) < 0,6t^2$, pour cela on calcule à l'aide du logiciel Maxima une valeur approchée à 0,1 près des racines réelles des deux polynômes de degré trois $Q_n(t) - 0,6t^2$ et $Q_n(t) + 0,6t^2$, ce qui est suffisamment précis pour s'assurer que ces racines sont en dehors de l'intervalle $[n-1, n[$. On sait donc que les polynômes $Q_n(t) - 0,6t^2$ et $Q_n(t) + 0,6t^2$ sont de signes constants sur $[n-1, n[$, il suffit de vérifier au bord de l'intervalle en testant

$$-0,6 < (n-1)G_n(n-1) < 0,6 \quad \text{et} \quad -0,6 < nG_n(n) < 0,6 .$$

Nous donnons le tableau des racines approchées, tronquées à un chiffre après la virgule. On constate que chacune des racines est respectivement en dehors de l'intervalle $[n-1, n[$.

n	3	4	5
$Q_n(t) - 0,6t^2$	-4,3 1,7 3,1	-6,1 2,5 4,2	-8,0 3,3 5,2
$Q_n(t) + 0,6t^2$	-4,8	-6,7	-8,5

Bilan de la deuxième partie : nous avons prouvé que

$$|t U g(t)| \leq 0,6 \quad (1 \leq t < 5) . \tag{2.14}$$

Proposition 15. *Pour tout $x \geq 1$, on a :*

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,6}{x} \int_1^x |M(y)| \frac{dy}{y} + \frac{2,8}{x}.$$

Démonstration. On utilise l'inégalité (1.18) avec $g(y) = (26y - 24y^2)/5$ et $k = 1$. On a $I_g = 1$, les inégalités (2.13) et (2.14) prouvent que $\|\chi U g\|_\infty \leq 0,6$. On calcule $Vg(x) = \int_{1/x}^1 g(y)/y dy$, c'est une fonction croissante et positive de limite $14/5$, donc $\|Vg\|_\infty = 14/5 = 2,8$. \square

L'exemple fourni par [Balazard, 2012a] provient de l'équation (7) de cet article et donne

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{x} \int_1^x |M(y)| \frac{dy}{y} + \frac{2}{x}.$$

Pour obtenir ce cas il utilise la fonction $\eta(t) = [(2\{t\} - 1)t + \{t\} - \{t\}^2]/t^2$ ce qui correspond dans le cadre de notre théorème 1 à prendre la fonction $g(y) = 2y$ d'intégrale 1. Balazard montre que $\|\chi U g\|_\infty = 1$ en étudiant directement la fonction η (dans notre cadre $\eta = U g$) qui a la particularité de vérifier $\sup_{t \geq 1} |t\eta(t)| = 1 = \lim_{t \rightarrow \infty} |t\eta(t)|$, il procède donc d'une autre manière que la méthode suivie ici (voir [Balazard, 2012b, p. 7]).

Dans la proposition 10 nous avons montré que $\|\chi U g\|_\infty \geq 1/3$ pour une fonction g continue avec une intégrale égale à 1. Nous montrons ici que nous pouvons atteindre $1/2$.

La fonction dont l'intégrale vaut 1 définie par

$$v(y) = \begin{cases} \frac{7}{2}y & \text{si } y \in [0, 1/2], \\ -\frac{5}{2}y + 3 & \text{si } y \in [1/2, 1], \end{cases}$$

est telle que $\|\chi U v\|_\infty = 0,5$.

Prouvons l'égalité $\|\chi U v\|_\infty = 0,5$. Posons $a_1 = 7/2$, $b_1 = 0$ pour que $v(t) = a_1 t + b_1$ sur $[0, 1/2]$ et $a_2 = -5/2$, $b_2 = 3$ pour que $v(t) = a_2 t + b_2$ sur $[1/2, 1]$. En découpant les indices de la somme selon le morceau où est définie la fonction v , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq t} v\left(\frac{n}{t}\right) &= \sum_{n \leq \frac{t}{2}} v\left(\frac{n}{t}\right) + \sum_{\frac{t}{2} < n \leq t} v\left(\frac{n}{t}\right) = \sum_{n \leq \frac{t}{2}} \left(a_1 \frac{n}{t} + b_1\right) + \sum_{\frac{t}{2} < n \leq t} \left(a_2 \frac{n}{t} + b_2\right) \\ &= \sum_{n \leq \frac{t}{2}} \left((a_1 - a_2) \frac{n}{t} + (b_1 - b_2)\right) + \sum_{n \leq t} \left(a_2 \frac{n}{t} + b_2\right). \end{aligned}$$

Posons $P(t) = t^2 - t$ car ce polynôme apparaît dans le calcul suivant

$$\sum_{n \leq t} 2\left(1 - \frac{n}{t}\right) = \frac{P(t) - P(\{t\})}{t}.$$

Ce qui nous conduit à

$$\sum_{n \leq \frac{t}{2}} \left((a_1 - a_2) \frac{n}{t} + (b_1 - b_2)\right) = -3 \sum_{n \leq \frac{t}{2}} \left(1 - \frac{n}{\frac{t}{2}}\right) = -\frac{3}{t} \left(P\left(\frac{t}{2}\right) - P\left(\left\{\frac{t}{2}\right\}\right)\right)$$

et à

$$\sum_{n \leq t} \left(a_2 \frac{n}{t} + b_2\right) = \sum_{n \leq t} \left(-\frac{5}{2} \frac{n}{t} + 3\right) = \frac{5}{4} \sum_{n \leq t} 2\left(1 - \frac{n}{t}\right) + \frac{1}{2}[t] = \frac{5}{4t} (P(t) - P(\{t\})) + \frac{1}{2}[t].$$

Donc on a

$$\begin{aligned} Uv(t) &= 1 + \frac{3}{t^2} \left(P\left(\frac{t}{2}\right) - P\left(\left\{\frac{t}{2}\right\}\right) \right) - \frac{5}{4t^2} (P(t) - P(\{t\})) - \frac{1}{2t} \lfloor t \rfloor \\ &= \frac{\{t\} - \frac{1}{2}}{2t} + \frac{\frac{5}{4}P(\{t\}) - 3P(\{\frac{t}{2}\})}{t^2} \end{aligned}$$

et ainsi $tUv(t) = \frac{\{t\} - \frac{1}{2}}{2} + \frac{\frac{5}{4}P(\{t\}) - 3P(\{\frac{t}{2}\})}{t}$.

Mais $P(y) = y^2 - y$ donc $|P(\{y\})| \leq 1/4$ et on peut écrire

$$tUv(t) = \frac{\{t\} - \frac{1}{2}}{2} + \frac{r(t)}{t} \text{ avec } \frac{|\{t\} - \frac{1}{2}|}{2} \leq \frac{1}{4} \text{ et } |r(t)| \leq \frac{17}{16}$$

donc pour $t \geq 17/4 = 4,25$ on a $|tUv(t)| \leq 0,5$.

Pour $t \in [1, 5[$ on travaille sur $[n-1, n[$ pour $n = 2, 3, 4$ et 5 . Sur $[1, 2[$ on a $tUv(t) = (2t^2 - 6t + 5)/(2t)$ et on constate que le polynôme de degré deux $2t^2 - 6t + 5$ est positif sur $[1, 2[$ et que l'on a la forme factorisée $tUv(t) - 0,5 = ((t-1)(2t-5))/(2t)$ ce qui prouve que $tUv(t) - 0,5 \leq 0$. On procède de même pour les 3 derniers intervalles.

Proposition 16. *Pour tout $x \geq 1$, on a :*

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,5}{x} \int_1^x |M(u)| \frac{du}{u} + \frac{2,58}{x} .$$

Démonstration. On utilise l'inégalité (1.18) avec $g(y) = 7y/2$ sur $[0, 1/2]$ et $-5y/2 + 3$ sur $[1/2, 1]$, et $k = 1$. On a $I_g = 1$ et on vient de prouver que $\|\chi U g\|_\infty = 0,5$. Pour $x \geq 2$ on a $Vg(x) = \int_{1/x}^1 g(y)/y dy = 3 \log 2 + 1/2 - 7/(2x)$, sur $[1, +\infty[$ c'est une fonction croissante et positive de limite $3 \log 2 + 1/2$, donc $\|Vg\|_\infty = 3 \log 2 + 1/2 \leq 2,58$. \square

Remarque 9. En faisant un découpage de l'intervalle $[0, 1]$ non régulier il semble que l'on puisse descendre en dessous de $0,5$. La fonction suivante

$$g(y) = \frac{3414000}{1914151} \left(1 - \left| \frac{1707y}{1000} - 1 \right| \right)$$

est d'intégrale $I_g = 1$, est telle que $0 < 1 - g(1) < 0,478$ et $0 < 2 - g(1/2) < 0,478$, et semble vérifier $\|\chi U g\|_\infty < 0,478$.

2.2.2 Le cas $k = 2$: étude de $\|\chi^2 U g\|_\infty$

Proposition 17. *On a $\mathfrak{c}_2^* = \inf_{\substack{g \in \mathcal{C}^2([0,1]) \\ I_g=1}} \sup_{t \geq 1} |t^2 U g(t)| = 1$.*

Démonstration. Par la proposition 1 on a

$$\inf_{\substack{g \in \mathcal{C}^2([0,1]) \\ I_g=1}} \sup_{t \geq 1} |t^2 U g(t)| = \inf_{\substack{g \in \mathcal{G}_2 \\ I_g=1}} \sup_{t \geq 1} |t^2 U g(t)| .$$

Par la définition 2 de \mathcal{G}_2 , pour $g \in \mathcal{G}_2$ on a $g(1) = 0$ donc par le point 1 de la proposition 10 on a $\|\chi^2 U g\|_\infty \geq 1$. Donc on a $\mathfrak{c}_2^* \leq 1$.

La fonction ε_1' de Balazard qui correspond à $g(y) = 4y(1-y^2)$ (voir proposition 8) vérifie $\|\chi^2 U g\|_\infty = 1$. Donc on a $\mathfrak{c}_2^* \geq 1$. \square

Dans la section précédente c'est en prenant une fonction qui n'est pas dérivable mais seulement continue, donc en sortant de l'espace \mathcal{G}_1 , que nous avons obtenu la constante 0,5. Regardons ce qu'il se passe si on considère une fonction continue g qui n'appartient pas à \mathcal{G}_2 . Si $g(1) \neq 0$, par la proposition 10 point 2 on a $\|\chi U g\|_\infty \geq 1/3$ et donc $\|\chi^2 U g\|_\infty = \infty$. On doit donc supposer que $g(1) = 0$ mais alors par la proposition 10 point 1 on a $\|\chi^2 U g\|_\infty \geq 1$.

2.2.3 Le cas $k = 3$: étude de $\|\chi^3 U g\|_\infty$

Commençons par une description de l'espace \mathcal{G}_3 . On a

$$\mathcal{G}_3 = \{g \in \mathcal{C}^3[0, 1], g(0) = g'(0) = 0 \text{ et } g(1) = g'(1) = 0\},$$

pour un polynôme cela équivaut au fait que $X^2(1-X)^2$ divise $g(X)$.

Nous aurons besoin de renseignements sur le polynôme de Bernoulli B_4 , on a $B_4(t) = t^4 - 2t^3 + t^2 - 1/30$, $B_4(0) = -1/30$ et $\|B_4\|_\infty = 1/30$. En effet, la série de Fourier du lemme 3 montre que le maximum de $|B_4(t)|$ est atteint en $t = 0$.

On examine dans cette partie la fonction polynomiale

$$g(y) = \frac{21000}{1397} [y(1-y)(y+9/10)]^2.$$

Elle appartient à \mathcal{G}_3 et vérifie $\int_0^1 g(y) dy = 1$.

Première partie : majoration à partir d'un certain rang.

- *Étape A (majorant global) :* On conjecture que $M = 1,05$ convient (voir le graphique ci-dessous).
- *Étape B (reste) :* On a

$$g^{(3)}(y) = \frac{2520}{1397} (1000y^3 - 100y^2 - 358y + 9) \text{ et } g^{(4)}(y) = \frac{5040}{1397} (1500y^2 - 100y - 179).$$

Donc $\|B_4\| (|g^{(3)}(1)| + |B_4(0)g^{(3)}(0)|) = 33,67\dots$ La fonction $g^{(4)}$ est un polynôme de degré deux dont une seule des deux racines appartient à $[0, 1]$, elle vaut $y_* = (\sqrt{2710} + 5)/150$ donc on peut faire le calcul exact de

$$\int_0^1 |g^{(4)}(y)| dy = - \int_0^{y_*} g^{(4)}(y) dy + \int_{y_*}^1 g^{(4)}(y) dy$$

et $\|g^{(4)}\|_1 = 1322,62\dots \leq 1323$. Ainsi l'inégalité (2.12) sur le reste nous donne

$$|r(t)| \leq \frac{1}{4!} (33,68 + 1/30 \times 1323)$$

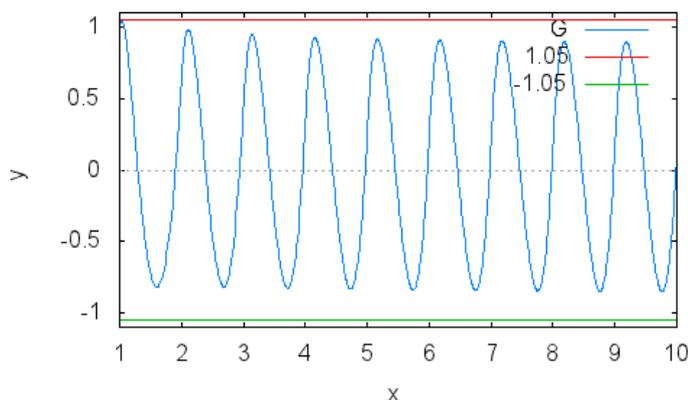
et $R = 3,3$ convient.

- *Étape C (terme principal) :* Le terme principal de $t^3 U g(t)$ est $\frac{25270}{1397} B_3(\{t\})$. Or il est connu que $\max_{t \geq 1} |B_3(\{t\})| = \sqrt{3}/36$ ([Montgomery et Vaughan, 2006, p. 504]) donc $P = 0,870\dots \leq 0,88$ et $R/(M - P) < 19,5$.

Bilan de la première partie : $t^3 U g(t) = \frac{25270}{1397} B_3(\{t\}) + \frac{r(t)}{t}$ avec $|r(t)| \leq 3,3$, ainsi pour $t \geq 20$ on a $|t^3 U g(t)| \leq 1,05$. Nous avons prouvé que

$$|t^3 U g(t)| \leq 1,05 \quad (t \geq 20). \quad (2.15)$$

Nous donnons la représentation graphique de $t \mapsto t^3 U g(t)$.



Deuxième partie : vérification de la majoration avant le rang de la première partie.

Pour $t \in [1, 2[$ on a $t^3Ug(t) = t^3 - t^2g(1/t)$, ce qui donne

$$t^3Ug(t) = \frac{1397t^7 - 17010t^4 - 3780t^3 + 37590t^2 + 4200t - 21000}{1397t^4},$$

on calcule les racines réelles de $t^7Ug(t) - 1,05t^4$, on en trouve une seule qui vaut 2,05... donc $t^7Ug(t) - 1,05t^4$ ne change pas de signe sur $[1, 2[$, on vérifie que pour $t = 1$ le polynôme est négatif donc $t^7Ug(t) \leq 1,05t^4$ et $t^3Ug(t) \leq 1,05$. De même on calcule les racines réelles de $t^7Ug(t) + 1,05t^4$, on en trouve une seule qui vaut 0,86... donc il n'y a pas de changement de signe sur cet intervalle et on vérifie que pour $t = 1$ le polynôme est positif, ce qui prouve que $t^3Ug(t) \geq -1,05$.

Pour $n = 2, \dots, 20$ on traite l'intervalle $t \in [n-1, n[$ en procédant de la même manière. On calcule d'abord la fraction rationnelle

$$1 - \frac{g(1/t) + g(2/t) + \dots + g((n-1)/t)}{t} = G_n(t)$$

qui coïncide avec $Ug(t)$ sur $t \in [n-1, n[$ et l'on souhaite prouver que $-1,05 < t^3G_n(t) < 1,05$. On remarque que $t^7G_n(t)$ est un polynôme de degré 7 que l'on note $Q_n(t)$, on souhaite prouver que $-1,05t^4 < Q_n(t) < 1,05t^4$, pour cela on calcule à l'aide du logiciel Maxima une valeur approchée à 0,01 près des racines réelles des deux polynômes de degré sept $Q_n(t) - 1,05t^4$ et $Q_n(t) + 1,05t^4$, ce qui est suffisamment précis pour s'assurer que ces racines sont en dehors de l'intervalle $[n-1, n[$. On sait donc que les polynômes $Q_n(t) - 1,05t^5$ et $Q_n(t) + 1,05t^5$ sont de signes constants sur $[n-1, n[$, il suffit de vérifier au bord de l'intervalle en testant

$$-1,05 < (n-1)^3G_n(n-1) < 1,05 \text{ et } -1,05 < n^3G_n(n) < 1,05.$$

Nous donnons le tableau avec les racines approchées tronquées à deux chiffres après la virgule. On constate que chaque racine est en dehors de l'intervalle $[n-1, n[$ associé à n .

n	2	3	4	5	6	7	8	9
$Q_n(t) - 1,05t^4$	2,05	3,06	4,07	5,07	6,07	7,08	8,08	9,08
$Q_n(t) + 1,05t^4$	0,86	1,88	2,88	3,89	4,89	5,89	6,90	7,90

Pour les valeurs suivantes de n :

n	$n \in \{10, \dots, 20\}$
$Q_n(t) - 1,05t^4$	$n + 0,08$
$Q_n(t) + 1,05t^4$	$n - 1 - 0,10$

Bilan de la deuxième partie : nous avons prouvé que

$$|t^3 U g(t)| \leq 1,05 \quad (1 \leq t < 20). \quad (2.16)$$

Proposition 18. Pour tout $x \geq 1$, on a :

$$|m_1(x)| \leq \frac{1,05}{x^3} \int_1^x |M(u)|u \, du + \frac{2,17}{x}.$$

Démonstration. On utilise l'inégalité (1.18) avec $g(y) = 21000/1397[y(1-y)(y+9/10)]^2$ et $k = 4$. On a $I_g = 1$, les inégalités (2.15) et (2.16) prouvent que $\|\chi^3 U g\|_\infty \leq 1,05$. On calcule $Vg(x) = \int_{1/x}^1 g(y)/y \, dy$, c'est une fonction croissante et positive de limite $6055/2794 = 2,16\dots$ donc $\|Vg\|_\infty \leq 2,17$. \square

Corollaire 4. Pour tout $x \geq 1$, on a $|m_1(x)| \leq \frac{1,05}{x^2} \sup_{u \leq x} |M(u)|u + \frac{2,17}{x}$.

On peut améliorer le résultat en ne passant pas par l'inégalité intégrale de la proposition 18.

Proposition 19. Pour tout $x \geq 1$, on a $|m_1(x)| \leq \frac{0,7}{x^2} \sup_{u \leq x} |M(u)|u + \frac{2,17}{x}$.

Démonstration. Montrons d'abord que $\|\chi U g\|_1 \leq 0,7$.

Nous avons prouvé que la fonction $g(y) = 21000/1397[y(1-y)(y+9/10)]^2$ vérifie $|t^3 U g(t)| \leq 1,05$. On a donc

$$\int_5^\infty |t U g(t)| \, dt \leq \frac{1,05}{5} = 0,21.$$

Par ailleurs pour $n = 2, 3, 4$ et 5

$$t^7 \left(1 - \frac{g(1/t) + g(2/t) + \dots + g((n-1)/t)}{t} \right) = Q_n(t)$$

est un polynôme de degré 7 à coefficients rationnels qui coïncide avec $t^7 U g(t)$ sur $t \in [n-1, n[$. L'algorithme de Sturm utilisé avec le logiciel Maxima prouve que Q_n admet deux racines sur l'intervalle $[n-1, n]$, on les note $r_{n,1}$ et $r_{n,2}$ dans l'ordre croissant. On montre alors que

$$\int_{n-1}^n |t U g(t)| \, dt = \int_{n-1}^{r_{n,1}} \frac{Q_n(t)}{t^6} \, dt - \int_{r_{n,1}}^{r_{n,2}} \frac{Q_n(t)}{t^6} \, dt + \int_{r_{n,2}}^n \frac{Q_n(t)}{t^6} \, dt.$$

L'algorithme de Sturm nous fournit ensuite des approximations rationnelles à 10^{-4} près, le remplacement des racines par les valeurs approchées sur chaque intervalle $[n-1, n]$ commet une erreur moindre que $3 \times 10^{-4} \times \sup_{t \in [1,5]} |t U g(t)|$. On a démontré que $\sup_{t \in [1,5]} |t^3 U g(t)| \leq 1,05$. Notons avec des primes les racines approchées à 10^{-4} , on effectue le calcul exact des intégrales

par primitives, nous résumons les calculs dans le tableau suivant, les intervalles correspondent aux valeurs absolues des intégrales sur ces intervalles.

n	2	3	4	5
$r'_{n,1}$	42371/32768	78203/32768	112087/32768	145451/32768
$r'_{n,2}$	62275/32768	96359/32768	129681/32768	162757/32768
$[n-1, r'_{n,1}]$	0,1613...	0,0562...	0,0270...	0,0157...
$[r'_{n,1}, r'_{n,2}]$	0,1315...	0,0419...	0,0212...	0,0129...
$[r'_{n,2}, n]$	0,0077...	0,0014...	0,0004...	0,0001...

Avec les valeurs des intégrales tronquées à 10^{-4} on obtient un total de 0,4773 et donc $\|\chi U g\|_1 \leq 0,4773 + 0,0012(1 + 1,05) + 0,21 \leq 0,7$.

Le corollaire 1 page 7 avec $\theta = -1$ permet de conclure. \square

2.2.4 Le cas $k = 4$, étude de $\|\chi^4 U g\|_\infty$

Commençons par décrire l'espace \mathcal{G}_4 . On a

$$\mathcal{G}_4 = \{g \in \mathcal{C}^3[0, 1], g(0) = g'(0) = 0 \text{ et } g(1) = g'(1) = g^{(2)}(1) = 0\},$$

pour un polynôme cela équivaut au fait que $X^2(1-X)^3$ divise $g(X)$.

On étudie la fonction polynomiale suivante

$$g(y) = \frac{336}{5}y^2(1-y)^3(y+1/2)^2,$$

elle appartient à \mathcal{G}_4 et vérifie $I_g = \int_0^1 g(y) dy = 1$.

Nous aurons besoin de renseignements sur le polynôme de Bernoulli B_5 , on a $B_5(t) = t^5 - 5/2t^4 + 5/3t^3 - t/6$, on a $B_5(0) = 0$ et $\|B_5\|_\infty \leq 0,025$. Pour la borne on consultera la dernière page de [Lehmer, 1940].

Première partie : majoration à partir d'un certain rang.

- *Étape A (majorant global) :* On conjecture que $M = 1,44$ convient.
- *Étape B (reste) :* On a

$$g^{(4)}(y) = -2016(28y^3 - 24y^2 + y + 1) \text{ et } g^{(5)}(y) = -2016(84y^2 - 48y + 1).$$

On en déduit que $g^{(4)}(1) = -12096$ et on obtient $\|B_5\|_\infty |g^{(4)}(1)| \leq 302,4$ et donc $\|B_5\|_\infty \|g^{(5)}\|_1 \leq 460$.

Ainsi l'inégalité (2.12) sur le reste nous donne

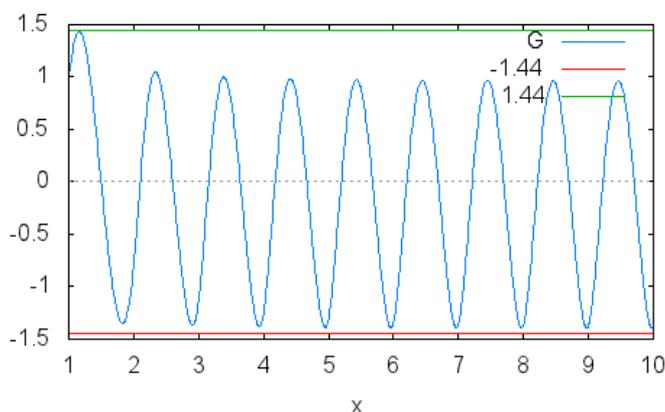
$$|r(t)| \leq \frac{1}{5!}(302,4 + 460)$$

et la borne $R = 6,4$ convient.

- *Étape C (terme principal) :* Le terme principal de $t^4 U g(t)$ est $\frac{189}{5}B_4(\{t\}) - 7/50$. Par le lemme 3 sur la série de Fourier de $B_4(\{t\})$ on a $\max_{t \geq 1} |B_4(\{t\})| = B_4(0) = 1/30$ donc $P \leq \frac{189}{5} \times \frac{1}{30} + 7/50 = 1,4$ et $R/(M - P) < 160$.

Bilan de la première partie : $t^4 U g(t) = \frac{189}{5}B_4(\{t\}) - 7/50 + \frac{r(t)}{t}$ avec $|r(t)| \leq 6,4$ ainsi pour $t \geq 160$ on a $|t^4 U g(t)| \leq 1,44$.

Nous donnons la représentation graphique de $t \mapsto t^4 U g(t)$.



Deuxième partie : vérification de la majoration avant le rang de la première partie.

Pour $t \in [1, 2[$ on a $t^4 U g(t) = t^4 - t^3 g(1/t)$, ce qui donne

$$t^4 U g(t) = \frac{5t^8 - 84t^5 - 84t^4 + 420t^3 + 84t^2 - 672t + 336}{5t^4},$$

on calcule les racines réelles de $t^8 U g(t) - 1,44t^4$, il y en a deux 0,84... et 2,19..., elles n'appartiennent pas à l'intervalle $[1, 2[$ donc le polynôme est de signe constant sur cet intervalle. On vérifie qu'il est négatif pour $t = 1$ et donc que $t^8 U g(t) - 1,44t^4 \leq 0$ sur $[1, 2[$ ce qui revient à $t^4 U g(t) \leq 1,44$. De même on calcule les racines réelles de $t^8 U g(t) + 1,44t^4$, il n'y en a pas donc, après vérification de l'inégalité pour $t = 1$, on obtient que $t^4 U g(t) \geq -1,44$ pour $t \in [1, 2[$.

Pour le reste de l'intervalle nous allons utiliser une autre méthode avec le théorème des accroissements finis.

Nous posons $T(x) = |x^4 U g(x)|$. Considérons la liste des valeurs de $T(x)$ pour x allant de 2 jusqu'à 160 avec un pas de $h = 1/25 \times 4/100$, cette valeur du pas étant choisie pour que les accroissements soient moindre que $4/100$. C'est une liste de nombres positifs contenue dans \mathbf{Q} , nous trouvons son maximum à l'aide du logiciel Maxima et de la commande suivante.

```
lmax(makelist (T(2+1/25*4/100*n), n, 0, 98750 , 1))
```

On obtient, en moins de 30 minutes, la réponse exacte $\frac{2373456812045177377708472311111}{1695353191121412489166259765625}$ et qui vaut 1,39997...

Pour utiliser le théorème des accroissements finis, nous avons besoin d'estimer la dérivée de la fonction $t^k U g(t)$ pour $g \in \mathcal{G}_k$. Dans ce but dérivons l'égalité (1.26) de la page 10, on arrive à la formule

$$k!(-1)^k D_t^1 [t^k U g(t)] = -k B_{k-1}(\{t\}) g^{(k-1)}(1) + \int_0^1 k y g^{(k)}(y) B_{k-1}(\{yt\}) dy$$

et donc à l'inégalité sur la dérivée

$$|D_t^1 [t^k U g(t)]| \leq \frac{\|B_{k-1}\|_\infty}{(k-1)!} (|g^{(k-1)}(1)| + \int_0^1 |y g^{(k)}(y)| dy). \quad (2.17)$$

Revenons à notre fonction $g(y) = \frac{336}{5} y^2 (1-y)^3 (y+1/2)^2$ et $k = 4$.

La fonction $yg^{(4)}(y)$ est un polynôme de degré 4 dont deux racines sont dans $]0, 1[$, notons les y_1 et y_2 , on a par le logiciel Maxima $y_1 = 0,2822\dots$ et $y_2 = 0,4748\dots$. Nous allons découper l'intégrale $\int_0^1 |yg^{(4)}(y)| dy$ en cinq parties.

D'abord sur $[0; 0,2822]$, $[0,2823; 0,7448]$ et sur $[0,7449; 1]$, $y \mapsto yg^{(4)}(y)$ est de signe constant donc on utilisera le calcul exact par primitive de polynômes, on obtient pour la somme de ces trois intégrales une fraction dont l'écriture décimale commence par 1547,17. On a donc

$$\int_I |yg^{(4)}(y)| dy \leq 1547,2 \quad \text{où } I = [0; 0,2822] \cup [0,2823; 0,7448] \cup [0,7449; 1]. \quad (2.18)$$

Sur $[0,2822; 0,2823]$ la fonction $y \mapsto yg^{(4)}(y)$ est croissante donc $|yg^{(4)}(y)|$ est majorée par le maximum des deux valeurs au bord de l'intervalle c'est-à-dire, en tronquant à 4 chiffres après la virgule, 0,0991... et 0,2340... donc

$$\int_{0,2822}^{0,2823} |yg^{(4)}(y)| dy \leq 2,4 \times 10^{-5}.$$

De la même manière, sur $[0,4748; 0,4749]$ la fonction $y \mapsto yg^{(4)}(y)$ est décroissante donc $|yg^{(4)}(y)|$ est majorée par le maximum des deux valeurs au bord de l'intervalle c'est-à-dire, en tronquant à 4 chiffres après la virgule, 0,2242... et 1,5552... donc

$$\int_{0,4748}^{0,4749} |yg^{(4)}(y)| dy \leq 1,56 \times 10^{-4}.$$

$$\int_J |yg^{(4)}(y)| dy \leq 2 \times 10^{-4} \quad \text{où } J = [0,2822; 0,2823] \cup [0,4748; 0,4749]. \quad (2.19)$$

Nous pouvons donc conclure de (2.18), (2.19) et $I \cup J = [0, 1]$, avec un peu de marge, que $\int_0^1 |yg^{(4)}(y)| dy \leq 1548$. D'autre part $|g^{(3)}(1)| = 4536/5$ et donc par l'inégalité (2.17), en sachant $\|B_3\|_\infty = \sqrt{3}/36$, on obtient $|G'(t)| \leq 20$.

Bilan de la deuxième partie : Le balayage avec un pas $h = 1/25 \times 4/100$ nous a donné un maximum inférieur à 1,39999, puisque la dérivée est inférieure à 20 le théorème des accroissements finis nous prouve que sur l'intervalle $[2, 411]$ le maximum de $|t^4 U g(t)|$ est inférieur à $1,39999 + h \times 20 = 1,4319\dots < 1,44$.

Proposition 20. *Pour tout $x \geq 1$, on a :*

$$|m_1(x)| \leq \frac{1,44}{x^4} \int_1^x |M(u)|u^2 du + \frac{2,44}{x}.$$

Démonstration. On utilise l'inégalité (1.18) avec $g(y) = \frac{336}{5}y^2(1-y)^3(y+1/2)^2$ et $k = 4$, on vient de prouver que $\|\chi^4 U g\|_\infty \leq 1,44$. On calcule $Vg(x) = \int_{1/x}^1 g(y)/y dy$, c'est une fonction croissante et positive de limite $\int_0^1 g(y)/y dy = 61/25 = 2,44$ donc $\|Vg\|_\infty = 2,44$. \square

Corollaire 5. *Pour tout $x \geq 1$, on a $|m_1(x)| \leq \frac{1,44}{x^3} \sup_{u \leq x} |M(u)|u^2 + \frac{2,44}{x}$.*

Remarque 10. En expérimentant à l'aide d'un ordinateur, il semble que $\|\chi^2 U g\|_1 \leq 0,9$ et donc le corollaire 5 doit pouvoir s'améliorer en

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,9}{x^3} \sup_{u \leq x} |M(u)|u^2 + \frac{2,44}{x}.$$

Remarque 11. La première approche qui consiste à regarder les bornes d'une fonction par sa représentation graphique est proche de la méthode de balayage mais il faudrait contrôler les accroissements et s'assurer du pas utilisé pour afficher la courbe.

2.2.5 Le cas $k = 5$: étude de $\|\chi^5 U g\|_\infty$

Un polynôme g appartient à \mathcal{G}_5 si et seulement si g est de la forme $g(y) = (1 - y)^4 y^2 P(y)$ avec $g^{(3)}(0) = 0$, par la formule de Leibniz cette dernière condition équivaut à $g'(0) = 4g(0)$. Pour un polynôme de degré 6 d'intégrale 1 il n'y a qu'une seule possibilité $g(y) = 42(1 - y)^4 y^2 (1 + 4y)$, une représentation graphique laisse conjecturer que $\|\chi^5 U g\|_\infty \simeq 3,4$.

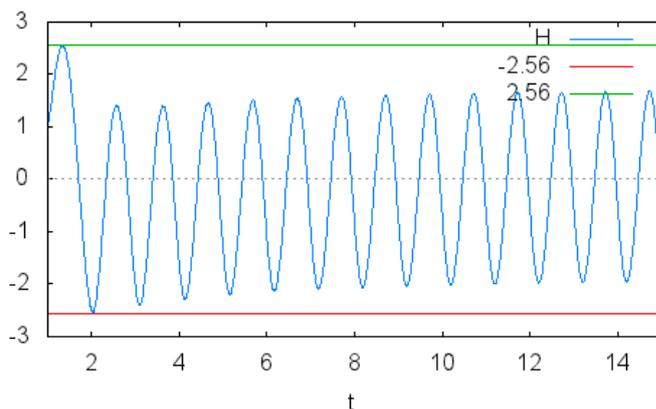
Pour un polynôme de degré 7, on a

$$g(y) = (1 - y)^4 y^2 (ay^2 + 4\lambda y + \lambda)$$

avec a et λ deux paramètres, son intégrale est $I_g = (15\lambda + a)/630$. On fixe $a = 630 - 15\lambda$ et ainsi $I_g = 1$. On pose

$$h_\lambda(y) = (1 - y)^4 y^2 (630y^2 + \lambda(-15y^2 + 4y + 1)) \quad \text{et} \quad H(t, \lambda) = t^5 U h_\lambda(t).$$

On voudrait connaître le maximum de $|H(t, \lambda)|$ pour $t \in [1, 2]$, on l'estime en calculant l'intégrale $\int_1^2 H(t, \lambda)^2 dt$, c'est un polynôme de degré deux en λ dont le minimum est atteint pour $\lambda = 28,22\dots$ et on recherche le minimum autour de cette valeur. Pour cette valeur $\|\chi^5 U h_\lambda\|_\infty \simeq 2,64$. On pourrait continuer avec $\int_1^2 H(t, \lambda)^4 dt$ mais de toute manière cela ne donne pas le comportement global. En expérimentant, le choix $\lambda = 26$ paraît bon, il donne la fonction $h(y) = y^2(y - 1)^4(240y^2 + 104y + 26)$ à la normalisation pour avoir une intégrale valant 1 près. Il semble que $\|\chi^5 U g\|_\infty \leq 2,56$. Nous donnons la représentation graphique de $t \mapsto t^5 U h(t)$ ci-dessous mais ne faisons pas de démonstrations.



Remarque 12. L'appartenance d'un polynôme à l'espace \mathcal{G}_k se traduit par un système d'équations linéaires pour les coefficients, en augmentant le degré des polynômes solutions on augmente le nombre des paramètres dans les solutions du système. Pour $k = 5$ les polynômes de plus petits degrés appartenant à \mathcal{G}_5 sont de degré 6, ils forment une famille à 1 paramètre et il n'y en a donc qu'un dont l'intégrale vaut 1. En passant au degré 7 on obtient une famille à deux paramètres, réduite à une famille à un paramètre en fixant l'intégrale à 1. En augmentant le nombre de paramètres on diminue notre constante $\|\chi^5 U g\|_\infty$ puisque les

familles dans lesquelles on cherche ce minimum sont de plus en plus larges. Néanmoins il faut trouver une procédure pour sélectionner des plages de paramètres et nous y sommes arrivés efficacement pour deux paramètres réduits à un paramètre en fixant l'intégrale à 1. Voir le paragraphe 2.5.2 p. 46 pour des résultats sur les polynômes de plus petits degrés appartenant à \mathcal{G}_k .

En continuant avec des polynômes de degré 8, nous avons trouvé la fonction $g(y) = \frac{315}{8816}y^2(y-1)^4(1000y^3 + 6227y^2 + 2908y + 727)$ qui semble vérifier $\|\chi^5 U g\|_\infty \leq 2,52$.

2.3 Majorations conditionnelles plus fortes pour $k = 2$ et $k = 3$

Rappelons la question de [Balazard, 2012a] : Balazard demande (Question 1. p. 39) s'il existe une constante D telle que

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{x^3} \int_1^x |M(u)|u \, du + \frac{D}{x} \quad (x \geq 1).$$

On peut aussi considérer le problème suivant : existe-t-il une constante D et une constante $a < 1$ telles que

$$|m_1(x)| \leq \frac{a}{x^2} \int_1^x |M(u)| \, du + \frac{D}{x} \quad (x \geq 1) \quad ?$$

Précisons qu'en suivant les méthodes précédentes $\|\chi^2 U g\|_\infty \geq 1$ pour toutes les fonctions g de classe $\mathcal{C}^2[0, 1]$ et que ce minimum est atteint par exemple pour la fonction $g(y) = 4y(1 - y^2)$ qui est telle que $Ug = \varepsilon'_1$ (voir proposition 8 p. 19).

On rappelle les notions de parties positives et parties négatives d'une fonction à valeurs réelles, on note $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) = -\min(f(x), 0)$, ce sont deux fonctions positives qui vérifient $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

Proposition 21. *Pour tout $x \geq 1$ on a :*

$$\frac{0,2}{x^2} \int_1^x M^+(u) \, du - \frac{1}{x^2} \int_1^x M^-(u) \, du \leq m_1(x) \leq \frac{1}{x^2} \int_1^x M^+(u) \, du - \frac{0,2}{x} \int_1^x M^-(u) \, du + \frac{3}{x}.$$

Démonstration. En considérant la fonction $g(y) = 6y(1 - y)$ on obtient $I_g = 1$ et par le Lemme 16 de l'annexe 2.6 on a $0,2 \leq t^2 U g(t) \leq 1$ et on montre par un calcul de primitives de monômes que $Vg(t)$ est positive croissante de limite 3.

Décomposons la fonction M en partie positive et partie négative $M = M^+ - M^-$ avec $M^+ \geq 0$ et $M^- \geq 0$, on obtient alors $M(x/t)Ug(t) = M^+(x/t)Ug(t) - M^-(x/t)Ug(t)$ et

$$\begin{aligned} M^+(x/t) \frac{0,2}{t^2} - M^-(x/t) \frac{1}{t^2} &\leq M^+(x/t)Ug(t) - M^-(x/t)Ug(t) \\ M^+(x/t) \frac{1}{t^2} - M^-(x/t) \frac{0,2}{t^2} &\geq M^+(x/t)Ug(t) - M^-(x/t)Ug(t). \end{aligned}$$

On aboutit aux inégalités de l'énoncé par intégration et en effectuant le changement de variable $y = x/t$. \square

Si intuitivement on suppose que la fonction M prend en moyenne autant de valeurs positives que négatives on pourra descendre en dessous de 1 devant l'intégrale $\int_1^x |M(u)| \, du$ dans la question de Balazard modifiée et cela suggère une réponse affirmative à la question.

Corollaire 6. Supposons que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x M^+(u) du}{\int_1^x |M(u)| du} = \theta$ avec $\theta \in]0, 1[$ alors il existe $a_\theta < 1$ tel que :

$$|m_1(x)| \leq \frac{a_\theta + o(1)}{x^2} \int_1^x |M(u)| du + \frac{3}{x} \quad (x \geq 1).$$

En particulier si $\theta = 0,5$ on a

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,4 + o(1)}{x^2} \int_1^x |M(u)| du + \frac{3}{x} \quad (x \geq 1).$$

Démonstration. On a $|M| = M^+ + M^-$ et l'on peut par hypothèse remplacer $\int_1^x M^+(u) du$ par $(\theta + o(1)) \int_1^x |M(u)| du$ et $\int_1^x M^-(u) du$ par $(1 - \theta + o(1)) \int_1^x |M(u)| du$. On conclut car les deux quantités $0,2\theta - (1 - \theta)$ et $\theta - 0,2(1 - \theta)$ sont dans $] -1, 1[$. \square

[Lehmer et Selberg, 1960] prouvent, en utilisant le résultat de Landau, que $xm_1(x) - K$ change de signe infiniment souvent, ce qui montre que si θ existe alors il appartient à $[\frac{0,2}{1,2}; \frac{1}{1,2}]$, intervalle qui est inclus dans $[0,16; 0,84]$. Et ainsi si θ existe alors $a_\theta \leq 0,84$.

Dans [Hurst, 2018, p. 9] Hurst étudie numériquement la fréquence des valeurs pour lesquelles $M(n)$ est positive pour $n \in [1, x]$. Il indique que sous certaines conjectures les travaux de Ng [Ng, 2004] impliquent qu'il n'y a pas de biais, c'est-à-dire que cette fréquence tend vers $1/2$. Plus précisément, Hurst indique que

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ M(n) > 0}} 1 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

On peut ainsi envisager conditionnellement que $\theta = 0,5$.

En sachant que l'on peut obtenir, sous certaines conditions, des constantes plus petites, revenons à la question de départ de Balazard.

Proposition 22. Pour tout $x \geq 1$ on a :

$$|m_1(x)| \leq \frac{1,5}{x^3} \max \left(\int_1^x M^+(u)u du, \int_1^x M^-(u)u du \right) + \frac{3}{x} \quad (x \geq 1).$$

Démonstration. En considérant la fonction $g(y) = 60y^2(1 - y)^3$ on obtient $I_g = 1$ et par le Lemme 17 de l'annexe 2.6 on a $0 \leq t^3 U g(t) \leq 1,5$. De plus la fonction $Vg(t)$ est positive croissante de limite 3. On a $-M^- \leq M \leq M^+$ et donc

$$-M^-(x/t) \frac{1}{t^3} \leq M(x/t) U g(t) \leq M^+(x/t) \frac{1}{t^3}.$$

On obtient par intégration et en effectuant le changement de variable $y = x/t$ que

$$-\frac{1,5}{x^3} \int_1^x M^-(u)u du \leq m_1(x) - \frac{Vg(x)}{x} \leq \frac{1,5}{x^3} \int_1^x M^+(u)u du.$$

\square

Le corollaire suivant répond conditionnellement à la question initiale de Balazard.

Corollaire 7. *Supposons que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x M^+(u)u \, du}{\int_1^x |M(u)|u \, du} = \theta$ avec $\theta \in]1/3, 2/3[$ alors il existe $a_\theta < 1$ tel que :*

$$|m_1(x)| \leq \frac{a_\theta + o(1)}{x^3} \int_1^x |M(u)|u \, du + \frac{3}{x} \quad (x \geq 1).$$

En particulier si $\theta = 0,5$ on a

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,75 + o(1)}{x^3} \int_1^x |M(u)|u \, du + \frac{3}{x} \quad (x \geq 1).$$

L'idée de considérer M^+ et M^- avec la fonction positive ε'_1 pour gagner un peu sur l'intégrale apparaît dans [Ramaré, 2015].

On peut donc envisager que $C_2^* < 1$ et $C_3^* < 1$, bien que $\mathbf{c}_2 = 1$ et $\mathbf{c}_3 \geq 1$.

2.4 Un résultat inconditionnel

Nous avons vu dans la sous-section 2.1.1 que l'obstruction pour majorer $t^3 \text{Ug}(t)$ par 1 vient du voisinage de $t = 1$. Le résultat suivant montre que ce problème disparaît en quelque sorte si au lieu de $|m_1(X)|$, on évalue $\sup_{x \geq X} |m_1(x)|$ pour $X \geq 1$.

Proposition 23. *Pour tout $X \geq 1$, on a*

$$\sup_{x \geq X} |m_1(x)| \leq \sup_{x \geq X} \left[\frac{0,9}{x^3} \int_1^x |M(u)|u \, du \right] + \frac{5}{2X}.$$

Démonstration. Soit $g(y) = 30y^2(1-y)^2$. On a $I_g = 1$, et par le lemme 15 de l'annexe 2.6 p. 49 on a

$$|\text{Ug}(t)|t^3 \leq 0,9 \quad (t \geq 1,2). \quad (2.20)$$

Pour $t \in [1, 2[$, $1 - \text{Ug}(t) = g(1/t)/t$ et donc $|1 - \text{Ug}(t)|t^3 = 30(1 - 1/t)^2$, fonction croissante qui vaut $5/6 = 0,833\dots$ pour $t = 6/5$. Ainsi

$$|1 - \text{Ug}(t)|t^3 \leq 0,9 \quad (1 \leq t \leq 1,2). \quad (2.21)$$

Puisque que l'on a les représentations

$$xm_1(x) = \int_1^x M(x/t) \, dt \quad \text{et} \quad xm_1(x) = \int_1^x M(x/t)\text{Ug}(t) \, dt + \text{Vg}(x),$$

on a l'égalité

$$\int_{1,2}^x M(x/t) \, dt - \text{Vg}(x) = \int_1^{1,2} M(x/t)(\text{Ug}(t) - 1) \, dt + \int_{1,2}^x M(x/t)\text{Ug}(t) \, dt \quad (x \geq 1,2).$$

Notons que le changement de variable $u = x/t$ et l'égalité $m_1(v) = \int_1^v M(u)u^{-2} \, du$ donnent

$$\int_{1,2}^x M(x/t) \, dt = x \int_1^{x/1,2} M(u)u^{-2} \, du = xm_1\left(\frac{x}{1,2}\right).$$

Remarquons également que puisque la fonction $g(y) = 30y^2(1-y)^2$ est positive, la fonction $Vg(x) = \int_{1/x}^1 g(y)/y dy$ est croissante de limite $\int_0^1 g(y)/y dy = 5/2$. Nous pouvons ainsi déduire des majorations (2.20) et (2.21) que

$$\begin{aligned} |m_1\left(\frac{x}{1,2}\right)| &\leq \frac{0,9}{x} \int_1^{1,2} |M(x/t)|t^{-3} dt + \frac{0,9}{x} \int_{1,2}^x |M(x/t)|t^{-3} dt + \frac{5}{2x} \\ &\leq \frac{0,9}{x^3} \int_1^x |M(u)|u du + \frac{5}{2x} \quad (x \geq 1,2). \end{aligned}$$

Donc, en passant au supremum, on obtient

$$\sup_{x \geq X} |m_1(x/1,2)| \leq \sup_{x \geq X} \left[\frac{0,9}{x^3} \int_1^x |M(u)|u du \right] + \frac{5}{2X} \quad (X \geq 1,2).$$

Mais $\sup_{x \geq X} |m_1(x/1,2)| = \sup_{x \geq X/1,2} |m_1(x)|$ et la fonction $X \mapsto \sup_{x \geq X} |m_1(x)|$ est décroissante donc $\sup_{x \geq X} |m_1(x)| \leq \sup_{x \geq X} |m_1(x/1,2)|$. On conclut à la validité de l'inégalité annoncée pour tout $X \geq 1,2$. Prouvons l'inégalité pour $X < 1,2$, on a $|m(t)| \leq 1$ pour tout $t \geq 1$ et $xm_1(x) = \int_1^x m(t) dt$ donc pour $X \in [1, 2]$ on a $\sup_{x \geq X} |m_1(x)| \leq 1$ et $5/(2x) \geq 1,25 > 1$. \square

Remarque 13. Les majorations effectives connues de $|M|$ sont du type

$$\sup_{x \geq X} |M(x)| \log^j(x)/x \leq A \quad (X \geq B)$$

avec $j \in [0, 236/75]$ et $A, B > 0$ des nombres réels explicites. Pour convertir de telles estimations en estimations pour $|m_1|$, la proposition 23 s'avère tout aussi efficace qu'une inégalité du type

$$|m_1(x)| \leq \frac{C}{x^3} \int_1^x |M(u)|u du + \frac{D}{x}.$$

Par exemple, le résultat de MacLeod [MacLeod, 1968] peut s'écrire

$$\sup_{x \geq X} \frac{|M(x)|}{x} \leq \frac{1}{80} \quad (X \geq 1119).$$

L'estimation de la proposition 23 donne

$$\sup_{x \geq X} |m_1(x)| \leq \sup_{x \geq X} \left(\frac{0,3}{80} - b/x^3 \right) + a/X \quad (X \geq 1119),$$

où $a = 2,5$ et $b = 0,9(1119^3/240 - \int_1^{1119} |M(u)|u du) > 0$. En comparaison, si l'on disposait de l'inégalité

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,9}{x^3} \int_1^x |M(u)|u du + \frac{5}{2x},$$

on obtiendrait le même type de résultat pour $|m_1|$, à savoir

$$\sup_{x \geq X} |m_1(x)| \leq \sup_{x \geq X} \left(\frac{0,3}{80} - b/x^3 + a/x \right) \quad (X \geq 1119)$$

et la qualité de la conversion serait identique, au moins à partir d'un certain rang.

2.5 Majorations de \mathfrak{c}_k^* lorsque $k \rightarrow +\infty$

Nous avons étudié des exemples de fonctions appartenant aux espaces \mathcal{G}_k pour $k = 1, 2, 3, 4$ et 5. Dans cette partie nous étudions deux familles infinies de polynômes, regardons dans chaque cas comment se comporte $\|\chi^k U g\|_\infty$ pour k à l'infini pour en déduire une majoration de \mathfrak{c}_k^* et donc de C_k^* .

2.5.1 Première famille infinie

Pour tout $k \geq 1$, la fonction $g_k(y) = (y - y^2)^k$ appartient à \mathcal{G}_{k+1} . Rappelons que considérer la suite (g_k) permet de donner une autre démonstration du théorème de Balazard rappelé dans le résumé des résultats (cf. (1.18) p. 7). Nous estimons dans cette partie les constantes C_k liées à la famille.

Proposition 24. *Soit $k \geq 1$ un entier et $g_k(y) = (y - y^2)^k$, on a :*

$$\frac{1}{I_{g_k}} \sup_{t \geq 1} |t^k U g_k(t)| \leq \frac{2\zeta(k)(2k)!}{(2\pi)^k k!} (2k+1)^{1/2} \leq 8k \left(\frac{2}{\pi e}\right)^k.$$

En particulier, on a

$$\mathfrak{c}_k^* = O\left(\left(\frac{2k}{\pi e}\right)^{k+1}\right).$$

De plus si k est un entier pair, on a :

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{I_{g_{k-1}}} |t^k U g_{k-1}(t)| = \frac{2\zeta(k)(2k)!}{(2\pi)^k k!} \geq \left(\frac{2}{\pi e}\right)^k.$$

Lemme 11. *Soit $k \geq 1$ un entier, on pose $g_k(y) = (y - y^2)^k$, on a :*

$$\int_0^1 \frac{|g_k^{(k)}(y)|}{k!} dy \leq \frac{1}{(2k+1)^{1/2}}. \quad (2.22)$$

Démonstration. Nous utilisons la famille $(P_k)_{k \geq 0}$ des polynômes de Legendre définis, par exemple, par la formule de Rodrigues :

$$P_k(y) = \frac{1}{2^k k!} D_y^k [(y^2 - 1)^k].$$

Soient $\phi : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par $\phi(y) = 2y - 1$, $h(y) = (y^2 - 1)^k$ et $H(y) = D_y^k [h(y)]$. Par linéarité de la dérivation on a $D_y^k [h(\phi(y))] = 2^k H(\phi(y))$. Par un calcul direct on obtient $h(\phi(y)) = (-4)^k (y - y^2)^k$ et donc $D_y^k [(-4)^k (y - y^2)^k] = 2^k H(2y - 1) = 2^k 2^k k! P_k(2y - 1)$. Et ainsi :

$$\frac{g_k^{(k)}(y)}{k!} = (-1)^k P_k(2y - 1). \quad (2.23)$$

On rappelle les formules d'orthogonalités des polynômes de Legendre :

$$\int_{-1}^1 P_k(u) P_n(u) du = \frac{2}{2n+1} \delta_{kn}.$$

Après le changement de variable $y = 2u - 1$ on obtient

$$\int_0^1 (|g_k^{(k)}(y)|/k!)^2 dy = \frac{1}{2k+1},$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'aboutir à (2.22). \square

Démonstration de la proposition 24. Rappelons que la fonction $g_k(y) = (y - y^2)^k$ appartient à \mathcal{G}_{k+1} . D'après l'égalité (1.12) du théorème 1 appliquée avec $g = g_k$ et l'annulation au bord des dérivées j -ièmes pour $0 \leq j \leq k - 1$, nous avons

$$\frac{t^k \mathbb{U}g_k(t)}{\mathbb{I}_{g_k}} = \frac{(-1)^k}{\mathbb{I}_{g_k}} \int_0^1 \frac{g_k^{(k)}(u)}{k!} B_k(\{ut\}) du, \quad (2.24)$$

et donc par l'inégalité triangulaire et la majoration (1.24) on a

$$\frac{t^k \mathbb{U}g_k(t)}{\mathbb{I}_{g_k}} \leq \frac{2\zeta(k)k!}{(2\pi)^k \mathbb{I}_{g_k}} \int_0^1 \frac{|g_k^{(k)}(u)|}{k!} du. \quad (2.25)$$

On peut calculer explicitement l'intégrale $\mathbb{I}_{g_k} = \int_0^1 x^k (1-x)^k dx$, on reconnaît la fonction bêta d'Euler, $B(k+1, k+1)$, et donc la valeur $\mathbb{I}_{g_k} = (k!)^2 / (2k+1)!$. En utilisant (2.25) et (2.22) on obtient la première inégalité annoncée.

La formule (1.12) appliquée avec $K = 2k+1$ et $g = g_{k-1}$ donne

$$\frac{\mathbb{U}g_{k-1}(t)}{\mathbb{I}_{g_{k-1}}} = \frac{1}{\mathbb{I}_{g_{k-1}}} \sum_{j=k}^{2k+1} \frac{(-1)^{j+1}}{j! t^j} \left(B_j(\{t\}) g_{k-1}^{(j-1)}(1) - B_j(0) g_{k-1}^{(j-1)}(0) \right).$$

Pour k pair, $B_k(0) \neq 0$ et par le binôme de Newton

$$g_{k-1}(x) = -(x-1)^{k-1} (x-1+1)^{k-1} = - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (x-1)^{i+k-1}$$

ce qui montre que $g_{k-1}^{(k-1)}(1) = -(k-1)!$, puis par translation on a $g_{k-1}^{(k-1)}(0) = -g_{k-1}^{(k-1)}(1)$. Donc quand $t \rightarrow \infty$, on a

$$\frac{t^k \mathbb{U}g_{k-1}(t)}{\mathbb{I}_{g_{k-1}}} = \frac{B_k(\{t\}) + B_k(0)}{\mathbb{I}_{g_{k-1}} k} + o(1), \quad (2.26)$$

et la limite supérieure de la valeur absolue du numérateur de la fraction dans l'égalité (2.26) est atteinte pour t entier et vaut $2|B_k(0)|$ car, pour k un entier pair, le maximum de $|B_k(y)|$ pour $y \in [0, 1]$ est atteint pour $y = 0$.

On exprime les nombres de Bernoulli pairs à l'aide de la fonction zêta de Riemann, on a $|B_k(0)| = 2\zeta(k)k!(2\pi)^{-k}$. On arrive à :

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{I}_{g_{k-1}}} |t^k \mathbb{U}g_{k-1}(t)| = \frac{2|B_k(0)|(2k-1)!}{k((k-1)!)^2} = \frac{|B_k(0)|(2k)!}{(k!)^2} = \frac{2\zeta(k)(2k)!}{(2\pi)^k k!}.$$

En utilisant une majoration du type pour tout $n \geq 1$ entier $Cn^n e^{-n} \sqrt{n} \leq n! \leq Dn^n e^{-n} \sqrt{n}$, que l'on peut obtenir facilement avec $D/C \leq 2$, on arrive à :

$$\frac{2\zeta(k)(2k)!}{(2\pi)^k k!} (2k+1)^{1/2} \leq 8 \times (4k/(2\pi e))^k k$$

et pour m pair

$$\frac{2\zeta(k)(2k)!}{(2\pi)^k k!} \geq \sqrt{2} \times (4k/(2\pi e))^k . \quad \square$$

2.5.2 Deuxième famille infinie

Nous étudions ici les polynômes de degré minimal qui appartiennent à un ensemble \mathcal{G}_k fixé, bien que cela ne permette pas *in fine* d'améliorer la majoration de \mathfrak{c}_k^* fournie par la proposition 24.

Remarquons que dans les exemples concrets pour $k = 2, 3, 4$ et 5 , quand nous avons cherché les polynômes appartenant aux espaces \mathcal{G}_k en résolvant un système linéaire, on commence par trouver précisément ces polynômes. Par exemple pour $k = 5$ le polynôme $g(y) = 42(1 - y)^4 y^2 (1 + 4y)$ est le polynôme de plus petit degré dans \mathcal{G}_5 dont l'intégrale vaut 1, c'est la première étape de notre exploration d'exemples dans \mathcal{G}_5 du paragraphe 2.2.5 page 39.

Proposition 25. *Soit $k \geq 3$ impair, on note P_k le polynôme de degré minimal appartenant à \mathcal{G}_k et dont l'intégrale sur $[0, 1]$ vaut 1 et $n_k = (k - 1)/2$. Pour $t \rightarrow \infty$, on a :*

$$(-1)^{k-1} t^k \text{UP}_k(t) = \frac{(k + n_k + 1)!}{2^{n_k} n_k!} \frac{B_k(\{t\})}{k!} + O_k(1/t) . \quad (2.27)$$

On a l'équivalent

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |t^k \text{UP}_k(t)| \underset[k \text{ impair}]{k \rightarrow +\infty} \sim 36 \sqrt{3} (\sqrt{27/8})^{k-1} (k-1)^{k-3} \exp(-(k-1)) . \quad (2.28)$$

L'équivalent de la proposition 25 montre donc que (pour k impair) on ne peut pas avoir mieux que

$$\|\chi^k \text{UP}_k\|_\infty = O\left((a(k-1))^{(k-3)}\right) \text{ avec } a = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{8e}} = 0,67\dots$$

La démonstration de la proposition 25 repose sur plusieurs lemmes.

Lemme 12. *Soit $k \geq 1$ un nombre entier, si $P(X)$ est un polynôme vérifiant $P^{(\ell)}(1) = 0$ pour $0 \leq \ell \leq k - 2$ et $P^{(k-1)}(1) \neq 0$ alors on a l'équivalent :*

$$\int_0^1 P(t) t^{y-1} dt \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^{k-1} P^{(k-1)}(1) y^{-k} . \quad (2.29)$$

Démonstration. La condition $P^{(k-1)}(1) \neq 0$ équivaut au fait que $P(X)$ soit de la forme $P(X) = (1 - X)^{k-1} Q(X)$ avec $Q(1) \neq 0$. Nous utilisons dans ce qui suit les fonctions bêta et gamma d'Euler. Rappelons les identités suivantes, pour $\Re s > 0$ nous avons :

$$\int_0^1 (1-t)^{k-1} t^{s-1} dt = B(k, s) = \frac{\Gamma(k)\Gamma(s)}{\Gamma(s+k)} = \frac{(k-1)!}{s(s+1)\dots(s+k-1)} .$$

Écrivons $Q(X) = \sum_{m=0}^M q_m X^m$, on a $P(X) = \sum_{m=0}^M q_m (1-X)^{k-1} X^m$ et par linéarité

$$\int_0^1 P(t)t^{s-1} dt = \sum_{m=0}^M q_m \frac{(k-1)!}{\prod_{j=0}^{k-1} (s+m+j)}, \quad (2.30)$$

de plus $\sum_{m=0}^M q_m = Q(1) \neq 0$, ce qui fournit l'équivalent recherché puisqu'un calcul de dérivée donne $P^{(k-1)}(1) = (-1)^{k-1} (k-1)! Q(1)$. \square

Lemme 13. Soit $\ell, i, j \geq 0$ des entiers, on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned} D^\ell [X^i (X-1)^j] \Big|_{X=1} &= \ell! \binom{i}{\ell-j}, \\ (-1)^{\ell+i+j} D^\ell [X^i (X-1)^j] \Big|_{X=0} &= \ell! \binom{j}{\ell-i}. \end{aligned}$$

Démonstration. La formule du binôme de Newton pour $X^i = (X-1+1)^i$ et un décalage dans les indices de sommation nous donnent :

$$X^i (X-1)^j = \sum_{u=0}^i \binom{i}{u} (X-1)^{u+j} = \sum_{\ell=0}^{i+j} \binom{i}{\ell-j} (X-1)^\ell$$

et donc par la formule de Taylor autour du point $X=1$, on a $D^\ell [X^i (X-1)^j] \Big|_{X=1} / \ell! = \binom{i}{\ell-j}$. On obtient la seconde formule en composant la fonction $X \mapsto X^i (X-1)^j$ et la fonction $X \mapsto 1-X$. \square

Lemme 14. Les formes linéaires D_1^j avec $j \geq 0$ et D_0^i avec $i \geq 0$ définies sur $\mathbf{R}[X]$ par

$$D_1^j(P) = P^{(j)}(1) \quad \text{et} \quad D_0^i(P) = P^{(i)}(0)$$

sont linéairement indépendantes.

Démonstration. Supposons que pour tout polynôme P on ait l'égalité

$$\sum_{i=0}^I a_i P^{(i)}(0) + \sum_{j=0}^J b_j P^{(j)}(1) = 0.$$

En particulier pour la famille de polynômes $X^I (1-X)^r$ pour $0 \leq r \leq J$ on a, à l'aide du lemme 13, la formule

$$\sum_{j=0}^J b_j j! \binom{I}{j-r} = \sum_{j=r}^J b_j j! \binom{I}{j-r} = 0,$$

le système associé est échelonné, donc tous les b_j sont nuls. En considérant de la même manière la famille de polynômes $X^r (1-X)^J$ pour $0 \leq r \leq I$ on obtient que tous les a_i sont nuls. \square

On obtient dans la proposition suivante la transformée de Mellin des polynômes de degré minimal. Dans toutes ces questions, on ne considère que les valeurs des polynômes sur l'intervalle $[0, 1]$.

Proposition 26. Soit $k \geq 2$ un entier, on pose $n_k = \lfloor (k-1)/2 \rfloor$. Les polynômes non nuls de degré minimal qui appartiennent à \mathcal{G}_k sont de degré $k + n_k$. Si de plus on fixe $\int_0^1 P_k(t) dt = 1$, on a un seul polynôme $P_k \in \mathcal{G}_k$ de degré $k + n_k$, il vérifie :

$$\int_0^1 P_k(t)t^{s-1} dt = \frac{(k + n_k + 1)!}{2^{n_k} n_k!} \prod_{r=1}^{n_k} \frac{1}{(s + 2r)} \prod_{j=2n_k+1}^{k+n_k} \frac{1}{(s + j)} \quad (\Re s > 0). \quad (2.31)$$

Démonstration. Par la définition des espaces \mathcal{G}_k donnée en (1.21), un polynôme P est dans \mathcal{G}_k si et seulement si $P^{(\ell)}(1) = 0$ pour $0 \leq \ell \leq k-2$, si $P(1) = 0$ et si $P^{(2i+1)}(0) = 0$ pour $0 \leq i \leq n_k - 1$. Ce qui donne $k-1+1+n_k$ équations linéaires à vérifier pour les coefficients de P . Le lemme 14 montre que les formes linéaires associées à ce système linéaire sont indépendantes, le degré du plus petit polynôme non nul appartenant à \mathcal{G}_k est égal au rang du système, c'est donc $k + n_k$. Pour un tel polynôme les dérivées j -ièmes en 0 pour j entre 2 et $n_k + k$ sont nulles si et seulement si $j = 0$ ou $j = 2i + 1$ avec $0 \leq i \leq n_k - 1$, car si une autre dérivée en 0 est nulle, on peut ajouter une équation indépendante au système ce qui contredit la minimalité. On fixe P un tel polynôme, on note d_P son degré. Le développement de Taylor de P en 0, $P(X) = \sum_{i=0}^{d_P} \frac{P^{(i)}(0)}{i!} X^i$, nous donne

$$\int_0^1 P(t)t^{s-1} dt = \sum_{i=0}^{d_P} \frac{P^{(i)}(0)}{i!} \frac{1}{s+i} \quad (\Re s > 0).$$

Les pôles de $\int_0^1 P(t)t^{s-1} dt$ sont les $-j$ avec $P^{(j)}(0) \neq 0$, c'est-à-dire pour $j = 0$ ou $j = 2i + 1$ avec $0 \leq i \leq n_k - 1$. De plus, la fonction $\int_0^1 P(t)t^{s-1} dt$ est une fraction rationnelle et le lemme 12, que l'on peut appliquer car $P^{(k-1)}(1) \neq 0$ (voir la phrase qui précède la formule de Taylor ci-dessus), montre que son degré est k , ainsi :

$$\int_0^1 P(t)t^{s-1} dt = C \prod_{r=1}^{n_k} \frac{1}{(s + 2r)} \prod_{j=2n_k+1}^{k+n_k} \frac{1}{(s + j)}, \quad (2.32)$$

avec C une constante. Si l'on impose de plus que $\int_0^1 P(t) dt = 1$, on obtient, en faisant $s = 1$, que $C = (k + n_k + 1)! / (2^{n_k} n_k!)$. \square

Démonstration de la proposition 25. Puisque $k \geq 3$ est impair $B_k(0) = 0$ et le degré de P_k est, par la proposition 26, de degré $n_k = \lfloor (k-1)/2 \rfloor = (k-1)/2$. Par la formule (1.12) qui donne un développement limité de UP_k et le fait que $B_k(0) = 0$, on a

$$(-1)^{k-1} t^k [UP_k](t) = P^{(k-1)}(0) \frac{B_k(\{t\})}{k!} + O_k(1/t). \quad (2.33)$$

Par la formule de la proposition 26, pour $y > 0$, on a

$$\int_0^1 P_k(t)t^{y-1} dt = \frac{(k + n_k + 1)!}{2^{n_k} n_k!} \prod_{r=1}^{n_k} \frac{1}{(y + 2r)} \prod_{j=2n_k+1}^{k+n_k} \frac{1}{(y + j)} \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(k + n_k + 1)!}{2^{n_k} n_k!}.$$

Ainsi par le lemme 12, on a $P^{(k-1)}(0) = \frac{(k + n_k + 1)!}{2^{n_k} n_k!}$ et par la formule (2.33) on obtient le résultat de l'énoncé. \square

2.6 Annexe : encadrements pour certaines fonctions Ug

Nous obtenons des estimations explicites de transformées $Ug(t)$ pour chacune des trois fonctions polynomiales $g(y) = 30y^2(1-y)^2$, $g(y) = 6y(1-y)$ et $g(y) = 60y^2(1-y)^3$. Les encadrements obtenus pour les deux dernières (Lemme 16 et Lemme 17) ont été utilisés précédemment, respectivement pour la preuve de la Proposition 21 et pour celle de la Proposition 22.

Lemme 15. *Pour $g(y) = 30y^2(1-y)^2$ on a :*

$$-0,9 \leq t^3 Ug(t) \leq 0,9 \quad (t \geq 1,2).$$

Démonstration. Un calcul de primitives donne $\int_0^1 g(y) dy = 1$. De plus $g(0) = g(1) = g'(0) = g'(1) = 0$ donc $g \in \mathcal{G}_3$. Utilisons la formule du développement de $Ug(t)$ suivant les puissances inverses de t du théorème 1 page 4 :

$$\begin{aligned} t^3 Ug(t) &= \frac{1}{6} B_3(\{t\}) g''(1) + \frac{r(t)}{t} \\ \text{avec } r(t) &= -\frac{1}{24} \left(B_4(\{t\}) g^{(3)}(1) - B_4(0) g^{(3)}(0) \right) + \frac{1}{24} \int_0^1 g^{(4)}(y) B_4(\{yt\}) dy \\ \text{d'où } |r(t)| &\leq \frac{1}{24} \left(\|B_4\|_\infty |g^{(3)}(1)| + |B_4(0) g^{(3)}(0)| + \|B_4\|_\infty \|g^{(4)}\|_1 \right), \end{aligned}$$

on a $|r(t)| \leq \frac{1}{24} \left(\frac{1}{30} \times 360 + \frac{1}{30} \times 360 + \frac{1}{30} \times 720 \right) = 2$ et ainsi

$$t^3 Ug(t) = 10B_3(\{t\}) + \frac{r(t)}{t} \quad \text{avec } |r(t)| \leq 2.$$

Mais $\max_{u \in [0,1]} |B_3(u)| = \sqrt{3}/36$ (voir [Lehmer, 1940]) donc pour $t > 5$ on a $|t^3 Ug(t)| \leq 0,9$.

Il reste à vérifier les inégalités pour $t \in [1, 5[$. Pour $t \in [1, 2[$ on a $Ug(t) = 1 - g(1/t)/t$, ce qui donne

$$t^5 Ug(t) = t^5 - 30t^2 + 60t - 30.$$

Par l'algorithme de Sturm $t^5 Ug(t) - 0,9t^2$ admet trois racines réelles dont une seule dans $[1, 2]$ qui vaut 1,19... et $1,2^3 Ug(1,2) = 0,8...$ donc $t^5 Ug(t) \leq 0,9t^2$ sur $[1,2; 2]$.

Par l'algorithme de Sturm $t^5 Ug(t) + 0,9t^2$ admet une seule racine réelle qui appartient à $[0, 1]$. L'inégalité $t^3 Ug(t) \leq -0,9$ est vraie pour $t = 1$ donc sur $[1, 2]$.

Pour $n = 3, 4, 5$ on traite l'intervalle $t \in [n-1, n[$. On calcule d'abord la fraction rationnelle

$$t - g(1/t) - g(2/t) - \dots - g((n-1)/t) = G_n(t)$$

qui coïncide avec $tUg(t)$ sur $t \in [n-1, n[$ et l'on souhaite prouver que $-0,9 < G_n(t) < 0,9$. On remarque que $t^5 G_n(t)$ est un polynôme de degré 5 que l'on note $Q_n(t)$, on souhaite prouver que $-0,9t^2 < Q_n(t) < 0,9t^2$, pour cela on calcule à l'aide du logiciel Maxima une valeur approchée à 0,1 près des racines réelles des deux polynômes de degré cinq $Q_n(t) - 0,9t^2$ et $Q_n(t) + 0,9t^2$, ce qui est suffisamment précis pour s'assurer que ces racines sont en dehors de l'intervalle $[n-1, n[$. On sait donc que les polynômes $Q_n(t) - 0,9t^2$ et $Q_n(t) + 0,9t^2$ sont de signes constants sur $[n-1, n[$, il suffit de vérifier au bord de l'intervalle en testant $-0,9 < G_n(n-1) < 0,9$ et $-0,9 < G_n(n) < 0,9$.

Nous donnons le tableau avec les racines approchées, elles sont tronquées à un chiffre après la virgule. On constate que chacune des racines est respectivement en dehors de l'intervalle $[n-1, n]$.

n	3	4	5
$Q_n(t) - 0,9t^2$	0,9 1,0 3,0	3,0	4,1
$Q_n(t) + 0,9t^2$	0,8	1,8	2,8

Ceci complète la preuve de $-0,9 \leq t^3 U g(t) \leq 0,9$ pour $1,2 \leq t \leq 5$. \square

Lemme 16. Pour $g(y) = 6y(1-y)$ on a :

$$0,2 \leq t^2 U g(t) \leq 1 \quad (t \geq 1).$$

Démonstration. Un calcul de primitives donne $\int_0^1 g(y) dy = 1$. De plus $g(0) = g(1) = 0$ donc $g \in \mathcal{G}_2$. Utilisons la formule du développement de $U g(t)$ suivant les puissances inverses de t du théorème 1 page 4 :

$$t^2 U g(t) = -\frac{1}{2}(B_2(\{t\})g'(1) - B_2(0)g'(0)) + \frac{1}{6t}B_3(\{t\})g''$$

c'est-à-dire

$$t^2 U g(t) = 3B_2(\{t\}) + \frac{1}{2} - \frac{2}{t}B_3(\{t\}).$$

Mais $\max_{u \in [0,1]} |B_3(u)| = \sqrt{3}/36$ (voir [Lehmer, 1940]) donc

$$t^2 U g(t) = 3(\{t^2\} - \{t\}) + 1 + \frac{r(t)}{t} \text{ avec } |r(t)| \leq 0,097.$$

Le minimum de $t \mapsto 3(\{t^2\} - \{t\}) + 1$ vaut $3 \times (-\frac{1}{4}) + 1 = \frac{1}{4}$. Ce qui assure que $t^2 U g(t) \geq 0,2$ pour $t \geq 2$. On a également :

$$t^3 U g(t) = t^3 - t^2 g(1/t) = t^3 - 6t + 6 \quad (t \in [1, 2])$$

et l'algorithme de Sturm nous indique que les deux polynômes de degré trois $t \mapsto t^3 - 6t + 6$ et $t \mapsto t^3 - 6t + 6 \pm (1/5)t$ possèdent une seule racine réelle qui est négative dans les deux cas. Ce qui termine la preuve de la minoration.

Montrons que pour $t \in [1, 2]$ on a

$$t^2 U g(t) \leq 1.$$

On a la factorisation $t \mapsto t^3 - 6t + 6 - t = (t-1)(t-2)(t-3)$ et l'algorithme de Sturm nous indique que $t \mapsto t^3 - 6t + 6 + t$ possède une seule racine réelle qui est négative. En testant la validité aux bornes on a bien montré que $t^3 U g(t) \leq t$. Donc l'inégalité

$$3(\{t^2\} - \{t\}) + 1 \leq 1 + \frac{2}{t}B_3(\{t\})$$

est vraie pour $t \in [1, 2]$. Par périodicité du membre de gauche et la présence du facteur $1/t$ à droite cela reste vrai pour tout $t \in [n, n+1]$ avec n un nombre entier. Ce qui termine la preuve de la majoration. \square

Lemme 17. Pour $g(y) = 60y^2(1-y)^3$ on a :

$$0 \leq t^3 Ug(t) \leq 1,5 \quad (t \geq 1).$$

Démonstration. Un calcul de primitives donne $\int_0^1 g(y) dy = 1$. De plus $g(0) = g(1) = g'(0) = g'(1) = g''(0) = g''(1) = 0$ donc $g \in \mathcal{G}_4$. Montrons que

$$0,65 \leq t^4 Ug(t) \leq 3 \quad (t \geq 1)$$

et le lemme sera prouvé pour $t \geq 2$.

Utilisons les principes de la partie 2.2 qui débute à la page 28 avec $k = 4$.

Nous aurons besoin de renseignements sur $B_5(t) = t^5 - 5/2t^4 + 5/3t^3 - t/6$: $B_5(0) = 0$ et $\|B_5\|_\infty \leq 0,025$. Pour la borne on consultera la dernière page de [Lehmer, 1940].

Première partie : majoration à partir d'un certain rang.

— *Étape A (majorant global) :* On conjecture que $M = 3$ convient.

— *Étape B (reste) :* On a les fonctions dérivées suivantes

$$g^{(4)}(y) = 4320 - 7200y \text{ et } g^{(5)}(y) = -7200.$$

Ainsi $g^{(4)}(1) = -2880$ et donc $\|B_5\|_\infty |g^{(4)}(1)| \leq 72$.

On obtient également que $\|B_5\|_\infty \|g^{(5)}\|_1 \leq 180$. Par l'inégalité (2.12) sur le reste, on a

$$|r(t)| \leq \frac{1}{5!}(72 + 80)$$

et $R = 1,3$ convient.

— *Étape C (terme principal) :* Le terme principal de $t^4 Ug(t)$ est $15B_4(\{t\}) + 3/2$. Par le lemme 3 sur la série de Fourier de $B_4(\{t\})$ on a $\max_{t \geq 1} |B_4(\{t\})| = B_4(0) = 1/30$ donc $P \leq 15 \times \frac{1}{30} + 3/2 = 2$ et $R/(M - P) < 2$.

On a donc prouvé que $t^4 Ug(t) \leq 3$ pour tout $t \geq 2$. On a

$$t^4 Ug(t) = 15B_4(\{t\}) + 3/2 + \frac{r(t)}{t} \text{ avec } |r(t)| \leq 1,3.$$

On a $15B_4(\{t\}) + 3/2 \geq 1$ sur $[1, 2]$ et par périodicité c'est vrai pour tout $t \geq 1$ et donc $t^4 Ug(t) \geq 0,65$ pour tout $t \geq 2$.

Pour $t \in [1, 2]$ on a

$$t^6 Ug(t) = t^6 - t^5 g(1/t) = t^6 - 60t^3 + 180t^2 - 180t + 60.$$

L'algorithme de Sturm montre que ce polynôme de degré 6 n'a pas de racine réelle. Puisque $Ug(1) = 1$ on a $Ug(t) > 0$ pour $t \in [1, 2]$.

L'algorithme de Sturm montre que

$$t^3 Ug(t) + 1,5t^3 = t^6 - 60t^3 + 180t^2 - 180t + 60 + 1,5t^3$$

n'a pas de racine réelle et que $t^3 Ug(t) - 1,5t^3 = t^6 - 60t^3 + 180t^2 - 180t + 60 - 1,5t^3$ admet deux racines réelles qui valent 0,7... et 2,3... donc ces deux polynômes ne s'annulent pas. Puisque $Ug(1) = 1$ on a $t^3 Ug(t) \leq 1,5$ pour $t \in [1, 2]$. Ce qui termine la démonstration. \square

Chapitre 3

Norme L^1 de $Ug(t)t^{-1}$ sur $[1, \infty[$

Dans le chapitre précédent, nous avons cherché à rendre petit $k^{-1}\|\chi^k Ug\|_\infty$. Ces quantités majorent $\int_1^\infty |Ug(t)|t^{-1} dt$:

$$\int_1^\infty |Ug(t)|t^{-1} dt \leq \int_1^\infty \|\chi^k Ug\|_\infty t^{-k-1} dt = \frac{1}{k} \|\chi^k Ug\|_\infty .$$

Et $\int_1^\infty |Ug(t)|t^{-1} dt$ apparaît naturellement dans les majorations de $m_1(x)$ provenant du Théorème 1 (corollaire 1 page 7 pour $\theta = 1$).

La proposition suivante présente donc un intérêt intrinsèque :

Proposition 27. *Il existe une suite (g_K) de fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[0, 1]$, vérifiant $\forall K \int_0^1 g_K(y) dy = 1$ et $\lim_{K \rightarrow \infty} \int_1^\infty |Ug_K(t)|t^{-1} dt = 0$.*

Remarque 14. Plusieurs estimations établies dans la preuve seront employées à nouveau dans le chapitre 7, mais la Proposition 27 elle-même n'est pas utilisée ultérieurement.

Posons pour $y \in]0, 1]$

$$\mathcal{Z}(y) = m(1/y)/y .$$

D'après le théorème des nombres premiers, on a

$$\int_\varepsilon^1 \mathcal{Z}(y) dy = \mathcal{R}_1(1/\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1 ,$$

avec

$$\mathcal{R}_1(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \log(x/n) = \int_1^x m(t)/t dt . \quad (3.1)$$

Donc $\int_0^1 \mathcal{Z}(y) dy = 1$ au sens d'une intégrale de Riemann généralisée. Par ailleurs, on a $\forall x \int_1^x m(y) dy = xm_1(x)$ et $1/t \sum_{n \leq t} \mathcal{Z}(n/t) = 1$ pour $t \geq 1$. Par conséquent

$$\forall t \in [1, \infty[\quad U\mathcal{Z}(t) = 0 .$$

Mais la fonction \mathcal{Z} n'est pas bornée et donc en tout cas pas intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$. Il est naturel pour la Proposition 27 de construire des fonctions g_K en modifiant \mathcal{Z} au voisinage de $y = 0$.

Remarque 15. Un théorème général de INGHAM ([Ingham, 1949]) porte sur la comparaison pour une fonction g sur $]0, 1]$ entre sommes de Riemann lorsque le pas tend vers zéro et comportement des intégrales de g sur $]\varepsilon, 1]$ lorsque ε tend vers zéro. Et par un cas particulier de ce théorème, sachant que $1/t \sum_{n \leq t} \mathcal{Z}(n/t) = 1$ pour les $t \geq 1$, on peut affirmer a priori que $\int_{\varepsilon}^1 \mathcal{Z}(y) dy$ va tendre vers 1 pour $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Mais nous avons déjà vu ceci, comme conséquence du théorème des nombres premiers, et nous savons donc que \mathcal{Z} admet une intégrale de Riemann généralisée.

Le théorème de INGHAM ne fournit pas une façon d'obtenir cette assertion d'intégrabilité (généralisée) qui soit indépendante de la théorie des nombres premiers, puisque, comme il l'explique dans l'introduction de son article, sa preuve sous certaines conditions sur g (que nous ne précisons pas ici) utilise que $m(x)/x$ a une intégrale absolument convergente sur $[1, +\infty[$. Et sous d'autres conditions (que nous ne précisons pas plus) on utilise plutôt que la série de terme général $m(n)/n$ est absolument convergente ; finalement d'autres conditions encore sur g semblent nécessiter d'employer plutôt le T.N.P sous la forme $m(x) = o(1)$.

Nous renvoyons le lecteur intéressé à [Ingham, 1949] pour une discussion plus approfondie.

3.1 Étude des versions tronquées de \mathcal{Z}

Soit $K \geq 2$ un entier, $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable au sens de Riemann telle que $I_{\theta} = 1$. On définit la fonction $\mathcal{Z}_{\theta, K}$ sur $[0, 1]$ par :

$$\mathcal{Z}_{\theta, K}(y) = \begin{cases} K(1 - \mathcal{R}_1(K))\theta(Ky) & y \in [0, \frac{1}{K}] \\ \frac{m(1/y)}{y} & y \in]\frac{1}{K}, 1] \end{cases} \quad (3.2)$$

Proposition 28. Pour $K \geq 2$, $\int_0^1 \mathcal{Z}_{\theta, K}(y) dy = 1$ et $U\mathcal{Z}_{\theta, K}$ est identiquement nulle sur $[1, K[$.

Démonstration. Traitons d'abord l'intégrale. On calcule $\int_{1/K}^1 \mathcal{Z}_{\theta, K}(y) dy = \int_{1/K}^1 m(1/y)/y dy = \int_1^K m(u)/u du$, valeur que l'on a notée $\mathcal{R}_1(K)$. Par ailleurs $\int_0^{1/K} K\theta(Ky) dy = \int_0^1 \theta(v) dv = I_{\theta}$ et ainsi :

$$\int_0^1 \mathcal{Z}_{\theta, K}(y) dy = \mathcal{R}_1(K) + (1 - \mathcal{R}_1(K))I_{\theta} = 1.$$

Soit maintenant $t \in [1, K[$, calculons $\frac{1}{t} \sum_{n \leq t} \mathcal{Z}_{\theta, K}(n/t)$ qui, pour ces valeurs de t , ne dépend pas de la fonction θ car $n/t \geq 1/t > 1/K$. Nous obtenons :

$$\frac{1}{t} \sum_{n \leq t} \mathcal{Z}_{\theta, K}(n/t) = \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} m(t/n) \frac{t}{n} = \sum_{n \leq t} \frac{1}{n} \sum_{k \leq t/n} \frac{\mu(k)}{k} = 1,$$

par la formule d'inversion de Möbius. Ainsi $U\mathcal{Z}_{\theta, K}(t) = 1 - 1 = 0$ pour $t \in [1, K[$. \square

Nous aurons besoin d'un lemme sur la série harmonique $H(t) = \sum_{n \leq t} 1/n$. Nous posons

$$R(t) \stackrel{\text{déf}}{=} H(t) - \log(t) - \gamma$$

où γ est la constante d'Euler.

Lemme 18. Soit $k \geq 1$ un nombre entier et $t \geq 1$ un nombre réel, on a :

$$R(t) = - \sum_{j=1}^k \frac{B_j(\{t\})}{jt^j} + \int_t^\infty \frac{B_k(\{y\})}{y^{k+1}} dy . \quad (3.3)$$

Démonstration. On utilise la formule d'Euler-Maclaurin du lemme 2 avec $[a, b] = [1, t]$ et $f(t) = 1/t$, on a $f^{(\ell)}(t) = (-1)^\ell \ell! / t^{\ell+1}$, puis :

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq t} \frac{1}{n} &= 1 + \log t - \sum_{j=1}^k \frac{B_j(\{t\})}{jt^j} + \sum_{j=1}^k \frac{B_j(0)}{j} - \int_1^t \frac{B_k(\{y\})}{y^{k+1}} dy \\ &= \log t + 1 + \sum_{j=1}^k \frac{B_j(0)}{j} - \int_1^\infty \frac{B_k(\{y\})}{y^{k+1}} dy - \sum_{j=1}^k \frac{B_j(\{t\})}{jt^j} + \int_t^\infty \frac{B_k(\{y\})}{y^{k+1}} dy . \end{aligned}$$

Dans cette dernière ligne, la constante $1 + \sum_{j=1}^k \frac{B_j(0)}{j} - \int_1^\infty \frac{B_k(\{y\})}{y^{k+1}} dy$ est nécessairement la constante d'Euler γ . \square

Dans la proposition qui suit on considère comme indiqué dans la définition 1 p. 4 que $U\theta$ est la constante $I_\theta = 1$ sur $[0, 1[$.

Proposition 29. Soit $K \geq 2$ et $J \geq 1$ des nombres entiers. Pour tout $t \geq 1$, on a le développement suivant les puissances inverses de t :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\mathcal{Z}_{\theta, K}(t) &= \sum_{j=1}^J \frac{1}{jt^j} \sum_{k \leq K} \frac{\mu(k)}{k} (k^j B_j(\{t/k\}) - K^j B_j(\{t/K\})) \\ &\quad + \frac{1}{t^J} \int_1^K m(u) u^J B_J(\{t/u\}) \frac{du}{u} + (1 - \mathcal{R}_1(K)) U\theta(t/K) . \end{aligned} \quad (3.4)$$

On a également :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\mathcal{Z}_{\theta, K}(t) &= (1 - \mathcal{R}_1(K)) U\theta(t/K) + \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{K-1} \mu(k) \{t/k\} \\ &\quad - \frac{m(K-1)K}{t} \left(\{t/K\} - 1/2 + \int_1^\infty (1/2 - \{vt/K\}) v^{-2} dv \right) \\ &\quad - \frac{1}{t} \int_1^\infty \sum_{k=1}^{K-1} \mu(k) \{vt/k\} v^{-2} dv . \end{aligned} \quad (3.5)$$

De plus, pour tout $t \geq K$, on a :

$$\mathcal{V}\mathcal{Z}_{\theta, K}(t) = \sum_{k=1}^{K-1} m(k) + K(1 - \mathcal{R}_1(K)) \int_{K/t}^1 \theta(u) \frac{du}{u} \quad (3.6)$$

$$\mathcal{V}\mathcal{Z}_{\theta, K}(t) = Km_1(K) + K(1 - \mathcal{R}_1(K)) \int_{K/t}^1 \theta(u) \frac{du}{u} . \quad (3.7)$$

Et pour $1 \leq x \leq K$, on a $\mathcal{V}\mathcal{Z}_{\theta, K}(x) = xm_1(x)$.

Démonstration. Pour $t > 0$, posons $R(t) = \sum_{n \leq t} 1/n - \log t - \gamma$ et $H(t) = \sum_{n \leq t} 1/n$. La fonction $\mathcal{Z}_{\theta, K}$ est définie en (3.2) par morceaux, découpons la somme $\frac{1}{t} \sum_{n \leq t} \mathcal{Z}_{\theta, K}(n/t)$ selon la position de n/t dans $[0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} \mathcal{Z}_{\theta, K}(n/t) &= \frac{1}{t} \sum_{t/K < n \leq t} \frac{t}{n} m(t/n) + \frac{1}{t} \sum_{n \leq \frac{t}{K}} K(1 - \mathcal{R}_1(K))\theta(Kn/t) \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{\mu(k)}{k} \sum_{t/K < n \leq t/k} \frac{1}{n} + \frac{1}{t} \sum_{n \leq \frac{t}{K}} (1 - \mathcal{R}_1(K))\theta(n/\frac{t}{K}) \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{\mu(k)}{k} (H(t/k) - H(t/K)) + \frac{1}{t} \sum_{n \leq \frac{t}{K}} (1 - \mathcal{R}_1(K))\theta(n/\frac{t}{K}). \end{aligned}$$

Écrivons $1 = \mathcal{R}_1(K) + (1 - \mathcal{R}_1(K))$ pour faire apparaître les intégrales de $\mathcal{Z}_{\theta, K}$ sur $]1/K, 1]$ et sur $[0, 1/K]$. On a aussi $\mathcal{R}_1(K) = \sum_{k=1}^K (\mu(k)/k) \log(K/k)$, on arrive à la formule

$$\begin{aligned} U\mathcal{Z}_{\theta, K}(t) &= (1 - \mathcal{R}_1(K))U\theta(t/K) + \sum_{k=1}^K \frac{\mu(k)}{k} (-H(t/k) + H(t/K) - \log(K/k)) \\ &= (1 - \mathcal{R}_1(K))U\theta(t/K) + \sum_{k=1}^K \frac{\mu(k)}{k} (-R(t/k) + R(t/K)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$= (1 - \mathcal{R}_1(K))U\theta(t/K) - \sum_{k=1}^{K-1} \frac{\mu(k)}{k} R(t/k) + m(K-1)R(t/K). \quad (3.9)$$

Commençons par étudier la somme figurant dans le membre de droite de (3.8). Par le développement de la série harmonique $H(y) = \sum_{n \leq y} 1/n$ donné dans le lemme 18, on obtient pour $R(t/k) = H(t/k) - \log(t/k) - \gamma$ la formule

$$R(t/k) = - \sum_{j=1}^J \frac{B_j(\{t/k\})k^j}{jt^j} + \int_{t/k}^{\infty} \frac{B_J(\{y\})}{y^{k+1}} dy.$$

La somme dans (3.8) devient alors :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^K \frac{\mu(k)}{k} (-R(t/k) + R(t/K)) \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{\mu(k)}{k} \sum_{j=1}^J \frac{1}{jt^j} (B_j(\{t/k\})k^j - B_j(\{t/K\})K^j) + \sum_{k=1}^K \frac{\mu(k)}{k} \int_{t/K}^{t/k} \frac{B_J(\{y\})}{t^{J+1}} dy. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $u = t/y$, on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \frac{\mu(k)}{k} \int_{t/K}^{t/k} \frac{B_J(\{y\})}{y^{J+1}} dy &= \sum_{k=1}^K \frac{\mu(k)}{k} \int_k^K \frac{B_J(\{y\})u^{J+1}}{t^{J+1}} \frac{t}{u^2} du \\ &= \frac{1}{t^J} \int_1^K m(u)u^J B_J(\{t/u\}) \frac{du}{u}, \end{aligned}$$

et l'on obtient ainsi la formule (3.4) pour $\mathcal{Z}_{\theta,K}(t)$.

Pour établir (3.5), commençons par remarquer que le lemme 18 pour $k = 1$ ainsi que le changement de variable $y = kv/t$ donnent :

$$R(t/k) = -k \frac{\{t/k\} - 1/2}{t} + \frac{k}{t} \int_1^\infty \frac{\{tv/k\} - 1/2}{v^2} dv . \quad (3.10)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^{K-1} \frac{\mu(k)}{k} R(t/k) + m(K-1)R(t/K) \\ &= \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{K-1} \mu(k) \{t/k\} - \frac{M(K-1)}{2t} \\ & - \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{K-1} \mu(k) \int_1^\infty \frac{\{tv/k\}}{v^2} dv + \frac{1}{2t} \sum_{k=1}^{K-1} \mu(k) \int_1^\infty \frac{1}{v^2} dv \\ & - m(K-1) \left(\left\{ \frac{t}{K} \right\} - \frac{1}{2} \right) \frac{K}{t} + \frac{m(K-1)K}{t} \int_1^\infty \frac{\{vt/K\} - 1/2}{v^2} dv . \end{aligned}$$

En insérant, après simplification de deux termes opposés, cette identité dans (3.9), nous obtenons (3.5).

Établissons à présent les formules relatives à $\mathbb{V}\mathcal{Z}_{\theta,K}$. Par définition, nous avons

$$x\mathbb{V}\mathcal{Z}_{\theta,K}(x) = \int_1^x \mathcal{Z}_{\theta,K}(1/y)/y dy .$$

Pour $y \geq K$, on a $\mathcal{Z}_{\theta,K}(1/y) = K(1 - \mathcal{R}_1(K))\theta(K/y)$ et sur un intervalle $[k, k+1[$, on a l'égalité $\mathcal{Z}_{\theta,K}(1/y)/y = m(k)$, ce qui montre après intégration, que

$$\mathbb{V}\mathcal{Z}_{\theta,K}(x) = \sum_{k=1}^{K-1} m(k) + K(1 - \mathcal{R}_1(K)) \int_K^x \theta(K/y) \frac{dy}{y} .$$

On effectue ensuite le changement de variable $u = K/y$ et l'on obtient l'équation (3.6) annoncée.

Pour $1 \leq t \leq x \leq K$ par la proposition 28 on sait que $\mathbb{U}\mathcal{Z}_{\theta,K}(t) = 0$ et donc

$$xm_1(x) = \int_1^x M(x/t) \times 0 dt + \mathbb{V}\mathcal{Z}_{\theta,K}(x) ,$$

ce qui prouve la dernière égalité annoncée. \square

Remarque 16. Pour $x \geq 1$, on a la forme intégrale $xm_1(x) = \int_1^x m(t) dt$. D'autre part, la proposition 29 qui vient d'être prouvée, nous donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\mathcal{Z}_{\theta,K}(x) &= \sum_{k=1}^{K-1} m(k) + K(1 - \mathcal{R}_1(K)) \int_{K/x}^1 \theta(u) \frac{du}{u} \\ &= \int_1^K m(t) dt + K(1 - \mathcal{R}_1(K)) \int_{K/x}^1 \theta(u) \frac{du}{u} . \end{aligned}$$

Donc nous avons pour $x \geq K$,

$$\int_K^x m(u) du = K(1 - \mathcal{R}_1(K)) \int_{K/x}^1 \theta(u) \frac{du}{u} + \int_K^x M(x/t) U\mathcal{Z}_{\theta,K}(t) dt .$$

En particulier prendre $K = x$ dans

$$xm_1(x) = \int_K^x M(x/t) U\mathcal{Z}_{\theta,K}(t) dt + V\mathcal{Z}_{\theta,K}(x)$$

revient à utiliser la formule sommatoire d'Abel.

3.2 Contrôle des normes L^1 pour K variable

Le lemme suivant et sa démonstration nous ont été communiqués par Michel Balazard et nous l'en remercions. Il permet de séparer K et t dans une majoration de $|\sum_{k \leq K} \mu(k) \{t/k\}|$.

Lemme 19. Soit $K \geq 1$ un nombre entier et $t \geq 1$ un nombre réel, on a

$$\left| \sum_{k \leq K} \mu(k) \{t/k\} \right| \leq \min(K, \sqrt{8t} \max_{\ell \leq K} |M(\ell)|^{1/2}) .$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le résultat de l'exercice 49 p. 64 de [Balazard, 2016] pour $f = \mu$, $T = K$ et $x = t$. Une solution de cet exercice est rédigée en page 120 de l'ouvrage. \square

Proposition 30. Soit $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable telle que $I_\theta = 1$. Pour $K \geq 2$ et $0 \leq r < 1/2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{K^r} \int_1^\infty |U\mathcal{Z}_{\theta,K}(t)| \frac{dt}{t^{1-r}} &\leq \|\chi^{-1+r} U\theta\|_1 |1 - \mathcal{R}_1(K)| \\ &+ \frac{1}{1-r} |m(K-1)| \\ &+ \frac{3\sqrt{8}}{1/2-r} \left(\frac{1}{K} \max_{\ell \leq K-1} |M(\ell)| \right)^{1/2} . \end{aligned}$$

Preuve de la Proposition 27. Il suffit de choisir $\theta \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ quelconque telle que $I_\theta = 1$ (le choix le plus simple étant de prendre pour θ la fonction constante 1) : en effet, pour une telle fonction θ on sait que $\|\chi^{-1} U\theta\|_1 < \infty$.

Donc de la Proposition 30 appliquée avec $r = 0$ on obtient la conclusion souhaitée $\lim_{K \rightarrow \infty} \|\chi^{-1} U\mathcal{Z}_{\theta,K}\|_1 = 0$ en invoquant les trois estimations $\mathcal{R}_1(x) = 1 + o(1)$, $m(x) = o(1)$, $M(x) = o(x)$. \square

Preuve de la Proposition 30. D'après la proposition 28, on a

$$\int_1^\infty |U\mathcal{Z}_{\theta,K}(t)| \frac{dt}{t^{1-r}} = \int_K^\infty |U\mathcal{Z}_{\theta,K}(t)| \frac{dt}{t^{1-r}} .$$

Rappelons l'égalité (3.5), pour tout $t \geq 1$ on a :

$$U\mathcal{Z}_{\theta,K}(t) = (1 - \mathcal{R}_1(K)) U\theta(t/K) + \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{K-1} \mu(k) \{t/k\}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{m(K-1)K}{t} \left(\{t/K\} - 1/2 \int_1^\infty (1/2 - \{vt/K\}) v^{-2} dv \right) \\
& - \frac{1}{t} \int_1^\infty \sum_{k=1}^{K-1} \mu(k) \{vt/k\} v^{-2} dv .
\end{aligned}$$

Posons $M_K^* = \sqrt{8} \max_{\ell \leq K-1} |M(\ell)|^{1/2}$ de sorte que, d'après le lemme 19 p. 58, on ait l'inégalité $\left| \sum_{k=1}^{K-1} \mu(k) \{t/k\} \right| \leq M_K^* \sqrt{t}$. Comme $|\{t/K\} - 1/2| \leq 1/2$ et $\left| \int_1^\infty \frac{1/2 - \{vt/K\}}{v^2} dv \right| \leq 1/2$, nous obtenons la majoration

$$\begin{aligned}
\int_K^\infty |\mathcal{U}\mathcal{Z}_{\theta,K}(t)| \frac{dt}{t^{1-r}} & \leq |1 - \mathcal{R}_1(K)| \int_K^\infty |\mathcal{U}\theta(t/K)| \frac{dt}{t^{1-r}} + M_K^* \int_K^\infty t^{-3/2+r} dt \\
& + K|m(K-1)| \int_K^\infty t^{-2+r} dt + \int_K^\infty \left(\int_1^\infty M_K^* \sqrt{tv} v^{-2} dv \right) t^{-2+r} dt.
\end{aligned}$$

En notant que $\int_K^\infty t^{-3/2+r} dt = K^{-1/2+r}/(1/2-r)$ et $\int_K^\infty t^{-2+r} dt = K^{-1+r}/(1-r)$, nous parvenons finalement à

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{K^r} \int_K^\infty |\mathcal{U}\mathcal{Z}_{\theta,K}(t)| \frac{dt}{t^{1-r}} \\
& \leq \|\chi^{-1+r}\mathcal{U}\theta\|_1 |1 - \mathcal{R}_1(K)| + \frac{1}{1/2-r} \frac{M_K^*}{\sqrt{K}} + \frac{1}{1-r} |m(K-1)| + \frac{2}{1/2-r} \frac{M_K^*}{\sqrt{K}}. \quad \square
\end{aligned}$$

Chapitre 4

Conversions de M vers m_1 et m

On dispose de bonnes estimations explicites de la fonction M du type

$$\frac{|M(x)|}{x} \leq \frac{A_j}{(\log x)^j} \quad (x \geq T) \quad (4.1)$$

pour $j = 0, 1, 2$ et différents rangs T dans chaque cas j . En utilisant ces estimations sur M on souhaite obtenir des estimations explicites de la fonction m du même type

$$|m(x)| \leq \frac{A'_j}{(\log x)^j} \quad (x \geq T')$$

avec A'_j et T' « proches » de A_j et de T .

Nous commencerons ce chapitre par donner un état des lieux sur les majorations du type (4.1) et exploiterons ensuite les éléments développés dans le chapitre 1 pour améliorer les estimations connues de m en considérant la fonction auxiliaire $m_1(x) = m(x) - M(x)/x$.

4.1 Un état des lieux des majorations effectives disponibles de M et des méthodes utilisées

4.1.1 Majorations effectives du type $|M(x)| \leq \varepsilon x$

En majorant $|\mu(n)|$ par 1 on obtient $|M(x)| \leq x$ pour tout $x \geq 1$, ce qu'on appelle souvent la majoration triviale. On a également $|M(x)| \leq Q(x)$ où Q est la fonction qui donne le nombre d'entiers sans facteur carré inférieurs ou égaux à x . On a $Q(x) \sim \zeta(2)^{-1}x$ et il n'y a aucune compensation entre les $\mu(n)$ dans ces deux majorations. Dans un premier temps on peut essayer de gagner par rapport à la majoration triviale sans pour autant atteindre le théorème des nombres premiers $M(x) = o(x)$.

Les résultats effectifs du type

$$|M(x)| \leq \varepsilon x \quad (x \geq T)$$

produits par MacLeod dans [MacLeod, 1968], Costa Pereira dans [Costa Pereira, 1989], Dress, El Marraki dans [Dress et El Marraki, 1993] et les trois co-auteurs Cohen, Dress, El Marraki dans [Cohen *et al.*, 2007] n'utilisent pas d'analyse complexe. Dans chaque cas est introduit une fonction F avec

$$\int_1^\infty |1 - F(t)|t^{-2} dt \leq \zeta(2)\varepsilon .$$

Dans tous les articles cités ci-dessus, la fonction F est une combinaison linéaire de dilatées de la fonction partie fractionnaire, $F(t) = \sum_k c_k \{t/k\}$, et obtenir des fonctions F de ce type qui rendent arbitrairement petite la quantité

$$\int_1^\infty |1 - F(t)| t^{-2} dt$$

équivaut au théorème des nombres premiers (voir [Balazard et de Roton, 2010]). Et la même condition pour cette fois les intégrales $\int_1^\infty |1 - F(t)|^2 t^{-2} dt$ équivaut à l'hypothèse de Riemann (c'est la version de Baez-Duarte du critère de Beurling-Nyman).

Donnons un premier exemple : dans [Costa Pereira, 1989] Costa Pereira définit la fonction

$$F(x) = \sum_{k=1}^{8020} \mu(k) [x/k] - [x/j] + [x/r] \stackrel{\dagger}{=} - \sum_{k=1}^{8020} \mu(k) \{x/k\} + \{x/j\} - \{x/r\}$$

avec $j = 34502$ et r vérifiant $1/r = 1/j - m(8020)$ afin d'avoir l'égalité \dagger ci-dessus. On a les deux majorations

$$\int_1^\infty |1 - F(t)| \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{630} \quad \text{et} \quad \|1 - F\|_\infty \leq 1182. \quad (4.2)$$

Par inversion de Möbius, on obtient

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{|M(x)|}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Q(x)}{x} \int_1^\infty |1 - F(t)| \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{1036,3}$$

et l'estimation de la norme infinie dans (4.2) est utile pour aboutir à la version effective

$$|M(x)| \leq \frac{x}{1036} \quad (x \geq 10^8),$$

majoration ramenée à $x \geq 120\,727$ par d'autres considérations.

La meilleure fonction de ce type disponible est introduite dans [Cohen *et al.*, 2007], nous notons ci-dessous les propriétés de cette fonction qui nous seront utiles.

Proposition 31 (Cohen, Dress, El Marraki). *Il existe une fonction F définie pour $t \geq 1$ qui s'écrit $F(t) = \sum_r c_r [t/r]$ avec un nombre fini de nombres réels c_r avec $r \geq 1$ et telle que :*

1. $\max_r c_r \leq 5 \times 10^{13}$
2. $|1 - F(t)| \leq 22\,527,5$
3. $\sum_r \frac{c_r}{r} = 0$
4. $|\sum_r c_r| \leq 6$
5. $\int_1^\infty |1 - F(t)| t^{-2} dt \leq \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{4345}$.

Démonstration. Tous ces points se trouvent dans [Cohen *et al.*, 2007].

1. En bas de la page 58 on trouve que $\max_r c_r = 47\,666\,734\,237\,381,39$.
2. Voir le tableau page 59 en sachant que les auteurs notent $G = |1 - F|$. Cette majoration provient de la méthode de Costa Pereira de [Costa Pereira, 1989].

3. C'est le point (iv) de la page 58, il entraîne que la fonction F est périodique.
4. La troisième ligne de la page 59 indique que $|1 + \frac{1}{2} \sum_r c_r| = 2$.
5. La méthode ne peut pas dépasser $I(F) = \frac{6}{\pi^2} \int |1 - F(u)|u^{-2} du$ (voir remarque page 109 de l'article de Dress et El Marraki [Dress et El Marraki, 1993]).

□

Remarque 17. Pour le point 5 de la preuve ci-dessus, il est à noter que les auteurs indiquent après le tableau page 61 que $I(F) \approx 1/4930$ mais puisque ce n'est pas utilisé dans l'article on ne peut pas affirmer que l'erreur dans ce calcul est contrôlée. Les coefficients de la fonction ne sont pas tous donnés dans l'article donc il ne nous est pas possible de refaire le calcul de cette intégrale.

4.1.2 Majorations effectives du type $|M(x)| \leq cx/(\log x)^\alpha$

D'après Dress (cf. §2 de [Dress, 1977] dernière phrase) dans les résultats effectifs

$$|M(x)| \leq \frac{c_\alpha x}{(\log x)^\alpha} \quad (x \geq T)$$

la constante c_α dépend (en puissance $2/3$ environ) du ε des majorations effectives $|M(x)| \leq \varepsilon x$.

Voyons maintenant comment obtenir des estimations explicites du théorème des nombres premiers $M(x) = o(x)$. La fonction analytique $\zeta'(s)/\zeta(s)$ est plus maniable que $1/\zeta(s)$, par exemple on sait mieux la majorer, ce qui permet après un long travail d'obtenir pour ψ des résultats explicites. Schoenfeld est le premier à obtenir des estimations explicites de $|M(x)|/x$ tendant vers 0 ([Schoenfeld, 1969]). Pour se faire, il va partir d'estimations explicites concernant ψ et d'identités liant $N(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) \log n$, $\psi(x) - x$ et $M(x)$. On sait bien évaluer $\psi(x) - x$ à l'aide de nos connaissances sur la fonction $\zeta'(s)/\zeta(s)$ (voir la thèse de Dusart [Dusart, 1998] et son article plus récent [Dusart, 2016] qui poursuivent les méthodes initiées par Rosser et Schoenfeld) mais il ne semble pas exister de moyen direct pour passer de $\psi(x) - x$ à $M(x)/x$, d'où l'apparition de $N(x)$. L'identité, au niveau des séries génératrices, $(1/\zeta)' = (1/\zeta) \cdot (-\zeta'/\zeta)$, donne en sommant les coefficients jusqu'à x l'égalité $-N(x) = \sum_{n_j \leq x} \mu(j) \Lambda(n)$. Ainsi, le principe de l'hyperbole de Dirichlet, conduit à

$$\begin{aligned} -N(x) - 1 &= \sum_{nj \leq x} \mu(j) (\Lambda(n) - 1) \\ &= \sum_{n \leq y} (\Lambda(n) - 1) M(x/n) + \sum_{n \leq x/y} \mu(n) (\psi(x/n) - \lfloor x/n \rfloor) - (\psi(y) - \lfloor y \rfloor) M(x/y). \end{aligned}$$

Les résultats explicites utilisés par Schoenfeld sont les suivants :

1. $|M(u)|/u \leq 1/80$ pour tout $u \geq 1119$,
2. $\sum_{n \leq y} |\Lambda(n) - 1|/n \leq 2 \log y - \log \log y$ pour tout $y \geq 1$,
3. $|\sum_{n \leq u} \mu^2(n)/n - 6/\pi^2 \log u| \leq 2$ pour tout $u \geq 1$,
4. $|\psi(x) - \lfloor x \rfloor| \leq 652x/\log^2 x$ pour tout $x > 1$.

On obtient ainsi

$$|N(x)| \leq 1 + (2 \log y - \log \log y) \frac{x}{80} + \frac{652x}{\log^2 x} \left(\frac{6}{\pi^2} \log \frac{x}{y} + 2 \right) + \frac{652x}{80 \log^2 y}.$$

Cette dernière inégalité va fournir une estimation explicite de $|N|$. En prenant $\log y = (\frac{312960}{\pi^2} \log x)^{1/3}$ pour optimiser l'inégalité, l'auteur arrive en fin de compte à :

$$\frac{|N(x)|}{x \log x} \leq \frac{1,19}{(\log x)^{2/3}} \quad (x \geq \exp(900)). \quad (4.3)$$

Ensuite on utilise l'estimation sur la fonction N pour en obtenir une pour M à l'aide de l'identité

$$M(x) = M(T) - \frac{N(T)}{\log T} + \frac{N(x)}{\log x} + \int_T^x \frac{N(t)}{\log^2 t} \frac{dt}{t}.$$

Ce qui donne :

$$\frac{|M(x)|}{x} \leq \frac{1,2}{(\log x)^{2/3}} \quad (x \geq \exp(900)), \quad (4.4)$$

pour vérifier l'inégalité sur l'intervalle $[1119, \exp(900)]$, Schoenfeld utilise le résultat de MacLeod (numéro 1 ci-dessus).

Les estimations explicites de Schoenfeld sur M proviennent donc de conversions d'estimations explicites concernant ψ , issues elles-mêmes de travail sur les zéros de la fonction zêta et de plusieurs estimations effectives. C'est aussi le cas de [Ramaré, 2013b] qui fournit les meilleures estimations explicites pour M à ce jour (Ramaré y utilise de manière cruciale son estimation sur $\sum_{n \leq x} \Lambda(n)/n$) :

$$\frac{|M(x)|}{x} \leq \frac{0,013}{\log x} - \frac{0,118}{\log^2 x} \quad (x \geq 1078118).$$

Dans les travaux de Schoenfeld comme dans ceux de Ramaré, l'estimation plus forte $\psi(x) - x = O(x^{1/2+\varepsilon})$ ne fournirait pas, si l'on suivait la même démarche, $M(x) = O(x^{1/2+\varepsilon})$.

Nous obtenons dans cette thèse (proposition 48 p. 87) des conversions d'estimations qui conservent les ordres asymptotiques. Par exemple de versions effectives de $M(x) \ll_{\Theta} x^{\Theta}$ on déduit $\int_1^x (\psi(t) - t)^{\frac{1}{t}} dt \ll_{\Theta} x^{\Theta}$ pour tout Θ vérifiant $\frac{1}{2} \leq \Theta \leq 1$. Certes de tels résultats découlent également de techniques classiques de théorie analytique des nombres (formules de type Perron entre autres), mais ces dernières ne donnent pas, semble-t-il et à ce jour, de constantes suffisamment petites pour être utilisables en pratique. Nous renvoyons à l'introduction de [Ramaré, 2015] pour plus de commentaires et également à [Trudgian, 2015] qui donne une idée de la qualité des constantes fournies par ces méthodes analytiques.

Nous déterminerons la constante $\sup_{x \in [1, \infty[} |m_1(x)| \log^2 x$. Dans [El Marraki, 1995] El Marraki obtient des estimations du type

$$|M(x)| \leq \frac{c_{\alpha} x}{(\log x)^{\alpha}} \quad (x \geq T)$$

jusqu'à $\alpha = 236/75 \simeq 3,1$ mais pour $\alpha \geq 4/3$ la valeur donnée pour c_{α} n'est pas optimale.

4.2 Petites valeurs, modèle pour M , m et m_1

Dans la suite, nous adoptons la terminologie, utilisée par Ramaré (voir [Ramaré, 2002]), de « modèle » pour une fonction sommatoire S : cela correspond à une inégalité –jugée précise– du type $|S(x)| \leq Ax^{\alpha}(\log x)^{\beta}$ avec $A, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ fixés pour des valeurs de x comprises entre b

et B , deux bornes explicites. De telles inégalités permettent en particulier d'abaisser le seuil de validité de certaines majorations explicites pour la fonction $|S|$.

On va notamment obtenir un modèle pour $|m_1(x)|$ comparativement à \sqrt{x} avec $x \leq 10^{16}$, il va servir plusieurs fois et évitera de refaire de nombreux calculs sur la fonction de Möbius. Un modèle pour $|m(x)|$ avec $x \leq 10^{16}$ en découle simplement puisque $m(x) = m_1(x) + M(x)/x$. On part du modèle obtenu par Hurst rapporté dans la proposition suivante.

Proposition 32 (Hurst). *On a l'estimation suivante :*

$$|M(x)| \leq 0,571\sqrt{x} \quad (33 \leq x \leq 10^{16}).$$

Corollaire 8. *Pour tout x vérifiant $33 \leq x \leq 10^{16}$ on a*

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,13}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} + \frac{59}{x^2} \quad \text{et} \quad |m(x)| \leq \frac{0,7}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} + \frac{59}{x^2}.$$

Démonstration. Rappelons l'identité de Balazard (1.9) page 3, pour tout $x \geq 1$ on a

$$m_1(x) = \int_1^x \frac{M(x/t)}{x/t} \varepsilon_1'(t) \frac{dt}{t} + \frac{8}{3x} - \frac{4}{x^2} \left(1 - \frac{1}{3x^2}\right).$$

Par la proposition 8 on a $0 \leq \varepsilon_1'(t) \leq 1/t^2$. En découpant l'intégrale suivant b , on obtient la conversion suivante :

$$\begin{aligned} & \text{si } |M(x)| \leq a\sqrt{x} \quad (b \leq x \leq B) \\ \text{alors } |m_1(x)| & \leq \int_1^\infty \varepsilon_1'(t) t^{1/2} \frac{dt}{t} \times \frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{\int_1^b |M(u)| du}{x^2} + \frac{8}{3x} \quad (b \leq x \leq B). \end{aligned} \quad (4.5)$$

La formule (1.60) de la page 20 appliquée avec $s = 1/2$ fournit

$$\int_1^\infty \varepsilon_1'(t) t^{1/2} \frac{dt}{t} = -2 - \zeta(1/2) \frac{32}{21} = 0,2253\dots$$

ce qui permet de conclure puisqu'un calcul informatique simple (ne concernant que des nombres entiers) nous montre que $\int_1^{33} |M(u)| du = \sum_{n=1}^{32} |M(n)| = 59$. \square

Remarque 18. Pour prouver la minoration de la proposition 12 rappelée ci-après

$$\frac{c_k}{k - 0,5} \geq 0,07$$

on a montré, pour les fonctions g de classe \mathcal{C}^1 d'intégrales I_g égales à 1, la minoration

$$\int_1^\infty |Ug(t)| t^{1/2} \frac{dt}{t} \geq 0,07.$$

Pour la fonction $g(y) = 4y(1-y^2)$ qui donne $Ug = \varepsilon_1'$ on obtient un coefficient $-2 - \zeta(1/2) \frac{32}{21} = 0,2253\dots$ qui a fourni la conversion ci-dessus. On ne peut donc pas espérer une grande amélioration dans le corollaire 8 avec la méthode de l'équation (4.5).

Dans [Helfgott, 2012, eq. 2.11, p. 7] Helfgott utilise le modèle

$$x|m(x)| \leq \sqrt{2x} \quad (x \leq 10^{12}).$$

Le modèle pour $|m|$ obtenu dans le corollaire 8 ci-dessus est plus précis dès que $x \geq 40$. Helfgott donne ensuite le résultat suivant : le nombre $T_m = 7\,727\,068\,587$ est le plus grand rang T tel que la majoration

$$x|m(x)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x} \text{ pour tout } x \in [3; T]$$

soit vraie. Rappelons que la conjecture de von Sternek ressemble à la conjecture de Mertens mais avec $1/2$ au lieu de 1 devant la racine, plus précisément

$$|M(x)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x} \quad (x \geq 201).$$

Jurkat a prouvé que cette conjecture est fautive en 1961 puis un contre-exemple explicite fut trouvé en 1963 par Neubauer.

Le résultat d'Helfgott est à mettre en regard avec le résultat de Cohen et Dress suivant qui donne le plus petit contre-exemple à la conjecture de von Sternek. Le nombre $T_M = 7\,725\,038\,628$ est le plus grand rang T tel que la majoration suivante soit vraie :

$$|M(x)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x} \text{ pour tout } x \in [201; T].$$

La proximité des constantes T_m et T_M laisse également penser que les fonctions m et M sont proches.

4.3 Estimation du type $|m(x)| \leq \varepsilon$ pour $x \geq T$

Nous allons convertir l'estimation particulière rappelée dans la proposition suivante tout en donnant une partie du matériel pour travailler ce type d'estimations en général. Rappelons que cette estimation particulière, obtenue par Cohen, Dress et El Marraki, est la meilleure de ce type connue à l'heure actuelle et que le rang T est optimal par rapport à cet ε .

Proposition 33 (Cohen Dress El Marraki). *On a :*

$$\frac{|M(x)|}{x} \leq \frac{1}{4345} \quad (x \geq 2\,160\,535). \quad (4.6)$$

Démonstration. Le résultat se trouve dans le théorème 5bis de [Cohen *et al.*, 2007, p. 62]. \square

Dans cette section, nous obtenons à partir du résultat de Cohen, Dress et El Marraki le résultat suivant.

Proposition 34. *On a :*

$$|m(x)| \leq \frac{1}{4342} \quad (x \geq 2\,160\,605).$$

Auparavant le meilleur résultat de ce type était

$$|m(x)| \leq \frac{2}{4345} \quad (x \geq 603\,218).$$

qui figure dans le manuscrit [El Marraki, 1996] d'El Marraki et rapporté dans l'état des lieux de Ramaré [Ramaré, 2002, théorème 9, p. 9].

Résumons les étapes de la démonstration en oubliant les rangs et en ne considérant que les termes principaux, les signes = et \leq sont donc utilisés ici de manière abusive mais éclairante.

1. On dispose d'une majoration de $|M|$ à partir d'un certain rang : $\frac{|M(x)|}{x} \leq \varepsilon$
2. On passe de $\frac{|M(x)|}{x}$ à $|m_1(x)|$: $|m_1(x)| \leq a\varepsilon$
3. On passe de $|m(x)| \leq \frac{|M(x)|}{x} + |m_1(x)|$ à $|m_1(x)|$: $|m_1(x)| \leq b(\varepsilon + a\varepsilon)$
4. Conclusion : $|m(x)| \leq \frac{|M(x)|}{x} + |m_1(x)|$: $|m(x)| \leq \varepsilon + b(\varepsilon + a\varepsilon)$

Les conversions dans les étapes 2 et 3 se font par des identités qui comportent des inversions de Möbius, on a

$$a = \int_1^\infty \left| 1 - \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} g\left(\frac{n}{t}\right) \right| \frac{dt}{t} = \|Ug\chi^{-1}\|_1$$

$$b = \int_1^\infty \left| 1 - \sum_{n \leq t} f\left(\frac{n}{t}\right) \right| \frac{dt}{t^2} = \int_1^\infty |1 - F(t)| \frac{dt}{t^2}$$

où $g(y) = 4y(1-y)^2$ (cf. proposition 8) et f une fonction constante par morceaux. La fonction F (et donc la fonction f) provient de la démonstration de l'inégalité de l'étape 1 par Cohen, Dress et El Marraki, on a $b = \zeta(2)\varepsilon$. La majoration de l'étape 1 est donc produite d'une manière spéciale qui est réinvestie dans l'étape 3. Indiquons que jusqu'à ce jour c'est de cette manière spéciale, c'est-à-dire par une combinaison linéaire bien choisie des fonctions $x \mapsto \{x/n\}$, qu'ont été produites toutes les estimations effectives et efficaces du type $|M(x)| \leq \varepsilon x$.

Numériquement on a :

$$\varepsilon = 0,00023015 \quad \text{et} \quad a = 0,17 \quad \text{et} \quad b = 0,00038 \quad \text{donc} \quad \varepsilon + b(\varepsilon + a\varepsilon) = 0,00023026.$$

Les rangs seront contrôlés en grande partie par le modèle du corollaire 8 qui donne

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,13}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} + \frac{59}{x^2} \quad (33 \leq x \leq 10^{16}).$$

4.3.1 Une première conversion

Le but de cette première partie est de montrer le lemme suivant.

Lemme 20. *On a la majoration suivante :*

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{25\,146} \quad (x \geq 1,1 \times 10^7).$$

Nous allons dans un premier temps nous occuper uniquement des valeurs $x \geq 10^{16}$. Supposons

$$\frac{|M(x)|}{x} \leq \varepsilon \quad (x \geq T).$$

Rappelons que les opérateurs U et V sont définis page 4 et la fonction χ dans les notations ix. D'après le théorème 1, pour tout $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ intégrable avec $\int_0^1 g(y) dy = 1$ on a :

$$m_1(x) = \int_{x/T}^x \frac{M(x/t)}{x/t} U g(t) \frac{dt}{t} + \int_1^T \frac{M(u)}{u} U g(x/u) \frac{du}{u} + \frac{Vg(x)}{x}.$$

Et pour tout $k \geq 0$ on obtient

$$|m_1(x)| \leq \|Ug \chi^{-1}\|_1 \times \varepsilon + R(x) \quad (x \geq T) \quad (4.7)$$

avec

$$R(x) = \frac{\|\chi^k Ug\|_\infty}{x^k} \int_1^T \left| \frac{M(u)}{u} \right| u^k \frac{du}{u} + \frac{\|Vg\|_\infty}{x}.$$

Il s'agit donc de trouver des fonctions g telles que $\|Ug \chi^{-1}\|_1$ soit le petit plus possible et que le reste R soit maniable. Dans un premier temps, nous allons utiliser la fonction $g(y) = 4y(1 - y^2)$ et $k = 2$, par la proposition 8 on a

$$\|\chi^2 Ug\|_\infty = 1, \quad \|Vg\|_\infty = \frac{8}{3} \quad \text{et} \quad \|Ug \chi^{-1}\|_1 = \frac{3}{4} - \gamma.$$

Ainsi, par l'inégalité triangulaire et la majoration triviale $|M(t)| \leq t$,

$$|R(x)| \leq \frac{1}{x^2} \int_1^T |M(u)| du + \frac{8/3}{x} \leq \frac{(T/x)^2}{2} + \frac{3}{x}.$$

Pour notre cas le rang T de l'inégalité (4.6) est $T = 2160535$ et donc

$$|R(x)| \leq 4 \times 10^{-16} \quad (x \geq 10^{16}).$$

En revenant à l'égalité (4.7) on obtient

$$|m_1(x)| \leq (3/4 - \gamma) \times \frac{1}{4345} + 4 \times 10^{-16} \leq \frac{1}{25146} \quad (x \geq 10^{16}). \quad (4.8)$$

Pour les petites valeurs de x utilisons le corollaire 8, on a

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,13}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} + \frac{59}{x^2} \quad (33 \leq x \leq 10^{16})$$

et puisque la fonction $f : x \mapsto \frac{0,13}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} + \frac{59}{x^2}$ est décroissante on a

$$|m_1(x)| \leq f(1,1 \times 10^7) < \frac{1}{25146} \quad (1,1 \times 10^7 \leq x \leq 10^{16}).$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 20 puisque l'inégalité est prouvée sur $[10^{16}, \infty[$ dans (4.8) et que l'inégalité est prouvée sur $[1,1 \times 10^7; 10^{16}]$.

4.3.2 La conversion de m vers m_1

En utilisant la fonction F de la proposition 31 et le lemme 20 que nous rappelons ici,

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{25\,146} \quad (x \geq 1,1 \times 10^7),$$

nous allons obtenir le résultat suivant.

Proposition 35. *On a la majoration :*

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{8\,850\,000} \quad (x \geq 1,35 \times 10^{12}).$$

Le lemme suivant est à mettre en parallèle avec le résultat sur M du théorème 1 page 4.

Lemme 21. *Soit $h : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable vérifiant $\int_0^1 h(y) dy = 0$, on a :*

$$m_1(x) = \int_1^x m(x/t) \left[1 - \sum_{n \leq t} h\left(\frac{n}{t}\right) \right] \frac{dt}{t^2} - \int_0^{1/x} h(y) dy \quad (x \geq 1). \quad (4.9)$$

Démonstration. Notons tout d'abord que

$$\int_1^x m(x/t) \frac{dt}{t^2} dy = \frac{1}{x} \int_1^x m(u) du = m(x) - \frac{M(x)}{x} = m_1(x). \quad (4.10)$$

Par l'égalité (1.49) page 18 utilisée avec $\varphi(t) = h(1/t)$, pour tout $x \geq 1$, on a :

$$\int_1^x m(x/t) \sum_{n \leq t} h\left(\frac{n}{t}\right) \frac{dt}{t^2} = \int_1^x \frac{h(1/u)}{u^2} du = \int_0^1 h(y) dy - \int_0^{1/x} h(y) dy.$$

En utilisant l'expression de m_1 donnée en (4.10), on obtient la formule (4.9) puisque par hypothèse $\int_0^1 h(y) dy = 0$. \square

Le corollaire suivant spécialise le lemme 21 pour les fonctions du type $F(t) = \sum_k c_k \{t/k\}$, ce qui est notamment le cas de la fonction F de Cohen Dress El Marraki dont des propriétés sont données dans la proposition 31.

Corollaire 9. *Soit (c_r) une suite finie de nombres réels vérifiant $\sum_r \frac{c_r}{r} = 0$. On pose $h(y) = \sum_r c_r 1_{[0,1]}(ry)$. On a*

$$\sum_{n \leq t} h\left(\frac{n}{t}\right) = \sum_r c_r [t/r] = - \sum_r c_r \{t/r\} \quad (t \geq 1)$$

$$\text{et} \quad m_1(x) = \int_1^x m(x/t) \left(1 - \sum_{n \leq t} h\left(\frac{n}{t}\right) \right) \frac{dt}{t^2} + \frac{\sum_r c_r}{x} \quad (x \geq \max r).$$

Démonstration. On a $\sum_{n \leq t} 1_{[0,1]}(rn/t) = \sum_{rn \leq t} 1 = \lfloor t/r \rfloor$ et on obtient la première formule par linéarité. La fonction $\frac{1}{t} \sum_r c_r \lfloor t/r \rfloor$ tend d'une part vers $\sum_r \frac{c_r}{r}$ qui vaut 0 par hypothèse et d'autre part vers $\int_0^1 h(y) dy$, on peut donc appliquer le lemme 21.

Pour une seule fonction indicatrice $h(y) = 1_{[0,1]}(ry)$, pour $x \geq r$ on a $h(y) = 1$ si $y \in [0, 1/x]$ et donc

$$\int_0^1 h(y) dy - \int_0^{1/x} h(y) dy = \frac{1}{r} - \frac{1}{x} \quad (x \geq r).$$

Par linéarité, on obtient la deuxième formule à condition que $x \geq \max r$. \square

Démonstration de la proposition 35. Pour la fonction F décrite dans la proposition 31 p. 62, par le corollaire 9, on a l'égalité

$$m_1(x) = \int_1^x m(x/t)(1 - F(t)) \frac{dt}{t^2} + \frac{\sum_r c_r}{x} \quad (x \geq 5 \times 10^{13}).$$

En découpant l'intervalle d'intégration, on arrive à la majoration

$$\begin{aligned} |m_1(x)| &\leq \int_1^{x/T} |m(x/t)| |1 - F(t)| \frac{dt}{t^2} \\ &\quad + \frac{\|1 - F\|_\infty \int_1^T |m(u)| du + |\sum_r c_r|}{x} \quad (x \geq \max(5 \times 10^{13}; T)). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Posons $T = 1,1 \times 10^7$ et considérons $x \geq 5 \times 10^{13}$. Le résultat du lemme 20 couplé avec le résultat (4.6) donne

$$|m(x/t)| \leq \frac{|M(x/t)|}{x/t} + |m_1(x/t)| \leq \frac{1}{4345} + \frac{1}{25146} \quad (t \leq x/T),$$

et puisque par le point 5 de la proposition 31 on a $\int_1^\infty |1 - F(t)| t^{-2} dt \leq \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{4345}$ on obtient

$$\int_1^{x/T} |m(x/t)| |1 - F(t)| \frac{dt}{t^2} \leq \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{4345} \left(\frac{1}{4345} + \frac{1}{25146} \right). \quad (4.12)$$

Le corollaire 8 de la page 65 nous donne

$$|m(u)| \leq \frac{0,7}{\sqrt{u}} + \frac{3}{u} + \frac{59}{u^2} \quad (33 \leq u \leq T),$$

puisque par les points 2 et 4 de la proposition 31 on a $\|1 - F\|_\infty \leq 22527,5$ et $|\sum_r c_r| \leq 6$, on obtient que pour tout $x \geq T$

$$\frac{\|1 - F\|_\infty \int_1^T |m(u)| du + |\sum_r c_r|}{x} \leq \frac{22527,5 \times \left(32 + \int_{33}^T \left(\frac{0,7}{\sqrt{u}} + \frac{3}{u} + \frac{59}{u^2} \right) du \right) + 6}{x}. \quad (4.13)$$

En regroupant les deux inégalités (4.12) et (4.13) dans la ligne (4.11) on obtient l'estimation

$$|m_1(x)| \leq \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{4345} \left(\frac{1}{4345} + \frac{1}{25146} \right) + \frac{22527,5 \times \left(32 + \int_{33}^T \left(\frac{0,7}{\sqrt{u}} + \frac{3}{u} + \frac{59}{u^2} \right) du \right) + 6}{x},$$

et un calcul simple nous fournit alors

$$|m_1(x)| \leq 1,0218556 \times 10^{-7} + \frac{1,07 \times 10^8}{x}$$

et par décroissance $|m_1(x)| \leq 1/8\,850\,000$ pour $x \geq 10^{16}$.

Pour les petites valeurs de x utilisons le corollaire 8 de la page 65, on a

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,13}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} + \frac{59}{x^2} \quad (33 \leq x \leq 10^{16}),$$

et puisque la fonction $f : x \mapsto \frac{0,13}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} + \frac{59}{x^2}$ est décroissante et que $f(A) \leq 1/8\,850\,000$ pour $A = 1,35 \times 10^{12}$ on conclut que l'inégalité de la proposition est vraie pour tout $x \geq A$. \square

Remarque 19. D'après le résumé qui suit la proposition 34 page 66, pour des estimations du type $|M(x)| \leq \varepsilon x$ obtenues par la méthode de von Sternek adaptée des techniques de Tchebichef, on a

$$\frac{|M(x)|}{x} \leq \varepsilon \implies |m_1(x)| \leq \zeta(2)\varepsilon^2 + 1,2\varepsilon^3.$$

Ici les rangs ne sont pas précisés et c'est la dépendance entre les rangs respectifs de ces deux inégalités qui est très importante car l'implication :

$$\frac{|M(x)|}{x} \leq \varepsilon \quad (x \geq T_\varepsilon) \implies |m_1(x)| \leq 2\varepsilon^2 \quad (x \geq T_\varepsilon)$$

est en contradiction avec $\Theta = \sup_{\zeta(s)=0} \Re s < 1$. En effet imaginons par exemple que cette implication soit vraie et que $|M(y)| \leq Ay^{4/5}$ pour tout $y \geq 1$, cela donnerait

$$\frac{|M(x)|}{x} \leq Ax^{-1/5} \quad (x \geq 1) \implies |m_1(x)| \leq 2A^2x^{-2/5} \quad (x \geq 1)$$

car pour $j = 1$ (utilisé pour M) et $j = 2$ (utilisé pour m_1) on a l'équivalence

$$g(y) \leq By^{-j/5} \quad (y \geq 1) \iff \forall 0 < \varepsilon \leq B, g(x) \leq \varepsilon \quad (x \geq (B/\varepsilon)^{5/j}).$$

Et par

$$\frac{1}{s(s-1)} \frac{1}{\zeta(s)} = \int_1^\infty m_1(x)x^{-s} dx$$

on montrerait que la fonction zêta ne s'annule pas pour $\Re s > 3/5$ ce qui produirait une estimation $|M(x)| \leq A_r x^{3/5+r}$ pour tout $r > 0$. En itérant on diminuerait jusqu'à des régions sans zéros contenant la droite $\Re s = 1/2$, ce que l'on sait impossible.

Notons que dans le sens opposé, nous avons (section 4.7) l'implication effective

$$|m_1(x)| \leq a \quad (x \geq T) \implies \frac{|M(x)|}{x} \leq 3\sqrt{a} + 2a + \frac{1}{x} \quad (x \geq T).$$

Prouvons l'estimation pour m annoncée au départ de cette section.

Démonstration de la proposition 34 p. 66. Puisque $m(x) = M(x)/x + m_1(x)$ on déduit de la proposition 35 page 69 que

$$|m(x)| \leq \frac{1}{4345} + \frac{1}{8\,850\,000} \quad (x \geq 1,35 \times 10^{12}),$$

par le corollaire 8 de la page 65, on a

$$|m(x)| \leq f(x) \quad (33 \leq x \leq 10^{16}),$$

avec f la fonction $x \mapsto \frac{0,7}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} + \frac{59}{x^2}$ qui est décroissante. Et puisque $f(9,5 \times 10^6) \leq 1/4342$ on conclut que l'inégalité est vraie pour tout $x \geq 9,5 \times 10^6$. Pour finir une vérification directe sur le logiciel sagemath permet de ramener la validité de $|m(x)| \leq 1/4342$ au rang 2 160 605. \square

4.4 Estimation du type $|m(x)| \leq a/\log x$ pour $x \geq T$

Commençons par utiliser une estimation explicite de $M(x) = o(x)$ de Ramaré. C'est ce type d'inégalités que l'on souhaite convertir dans cette partie et c'est la meilleure estimation de ce type obtenue à l'heure actuelle.

Proposition 36 (Ramaré). *On a :*

$$\frac{|M(x)|}{x} \leq \frac{0,013}{\log x} \quad (x \geq 97\,067). \quad (4.14)$$

Démonstration. Ce résultat est contenu dans le lemme 16.1 de [Ramaré, 2015, p. 1384]. \square

Remarquons que l'estimation $\frac{|M(x)|}{x} \leq \frac{1}{4345}$ est plus précise que (4.14) jusqu'à des x de l'ordre de 10^{24} . Dans cette section, nous allons obtenir la majoration suivante.

Proposition 37. *On a :*

$$|m(x)| \leq \frac{0,013014}{\log x} \quad (x \geq 97\,063).$$

Par le théorème 1 on a

$$|m_1(x)| \leq \int_1^x \frac{|M(x/t)|}{x/t} |\text{Ug}(t)| \frac{dt}{t} + \frac{\|\text{Vg}\|_\infty}{x}.$$

En gardant à l'esprit l'estimation (4.14) de Ramaré, supposons que $|M(x)|/x \leq a/\log x$ pour $x \geq T$ et un certain $a > 0$. On a donc :

$$\int_1^{x/T} \frac{|M(x/t)|}{x/t} |\text{Ug}(t)| \frac{dt}{t} \leq a \int_1^{x/T} \frac{1}{\log(x/t)} |\text{Ug}(t)| \frac{dt}{t}. \quad (4.15)$$

On peut à ce niveau utiliser la norme infinie de Ug et dans ce cas, après le changement de variable $u = x/t$, il reste $\|\text{Ug}\|_\infty \int_T^x 1/\log(u) du/u$ ce qui pourra se traiter à l'aide du logarithme intégral ou des majorations de celui-ci.

Bordellès dans [Bordellès, 2015] fait la conversion en passant par

$$\frac{\|\chi^k U g\|_\infty}{x^k} \int_T^x \left| \frac{M(u)}{u} \right| u^k \frac{du}{u} \leq a \frac{\|\chi^k U g\|_\infty}{x^k} \int_T^x \frac{1}{\log u} u^k \frac{du}{u},$$

et Bordellès utilise un lemme pour majorer la dernière intégrale (lemma 7 page 5 qui est utilisé en haut de la page 8). Bordellès utilise l'inégalité de Balazard (équation (1.64) page 22 de notre thèse) ce qui correspond à $k = 2$, il obtient

$$\frac{1}{x^2} \int_T^x \frac{u}{\log u} du \leq \frac{C_T}{\log x} \quad \text{où} \quad C_T = 0,5 \left(1 + \frac{0,43}{\sqrt{\log T}} \right)^2 \quad (x \geq T). \quad (4.16)$$

Le changement de variable $t = u^k$ ramène l'estimation à du logarithme intégral car

$$\int_T^x \frac{1}{\log u} u^k \frac{du}{u} = \int_{T^k}^{x^k} \frac{1}{\log t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^k}{\log(x^k)},$$

ce qui montre que dans cette approche c'est $\|\chi^k U g\|_\infty k^{-1}$ qui importe dans les conversions. Remarquons que l'inégalité (4.16) de Bordellès est efficace puisque pour T suffisamment grand la constante C_T sera proche de 0,5, ce qui est la constante dans l'équivalent à l'infini. On pourrait essayer de choisir k de manière optimale et utiliser des inégalités intégrales de Balazard. Mais nous obtiendrons de meilleurs résultats en gardant $|Ug|$ sous l'intégrale dans le membre de gauche de (4.15) avec une méthode que nous allons décrire dans la sous-section suivante.

4.4.1 Méthode pour convertir des estimations en $1/\log^k$

Indiquons que cette propriété sera utilisée pour $\theta = |Ug|$.

Lemme 22. Soit $\theta : [1, \infty[\rightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction positive, $T > 1$ un nombre réel, $k > 0$ un nombre réel. Pour tout $x \geq T$, on a :

$$\frac{1}{\log^k x} \int_1^{x/T} \theta(u) u^{-1} du \leq \int_1^{x/T} \frac{1}{\log^k(x/t)} \theta(t) \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{\log^k x} \int_1^{x/T} \theta(u) u^{-1 + \frac{k}{\log T}} du.$$

Démonstration. Commençons par remarquer que pour $r \geq k/\log T$ la fonction $G(x) = x^r / \log^k x$ est croissante sur l'intervalle $[T, +\infty[$. En effet on a la factorisation

$$G'(x) = \frac{x^{r-1}}{(\log x)^2} (r \log x - k),$$

c'est une fonction positive quand $r \geq k/\log T$. Posons $r = k/\log T$, on a

$$\int_1^{x/T} \frac{1}{\log^k(x/t)} \frac{\theta(t)}{t} dt = \frac{1}{x^r} \int_1^{x/T} \frac{(x/t)^r}{\log^k(x/t)} \frac{\theta(t)}{t^{1-r}} dt \leq \frac{1}{x^r} \frac{(x/1)^r}{\log^k(x/1)} \int_1^{x/T} \frac{\theta(t)}{t^{1-r}} dt.$$

Ce qui donne bien la majoration par $\frac{1}{\log^k(x)} \int_1^{x/T} \theta(t) t^{-1 + \frac{k}{\log T}} dt$.

La minoration de l'énoncé s'obtient directement en utilisant la croissance de la fonction $t \mapsto 1/\log^k(x/t)$ pour $t \in [1, x[$ et la positivité de θ . \square

4.4.2 Première diminution

Dans cette partie nous allons montrer le résultat suivant.

Proposition 38. *On a*

$$|m(x)| \leq \frac{0,0153}{\log x} \quad (x \geq 6 \times 10^5).$$

Corollaire 10. *Pour tout $x > T \geq 10^{13}$ on a*

$$\int_1^{x/T} \frac{1}{\log(x/t)} \varepsilon'_1(t) \frac{dt}{t} \leq \frac{0,1763}{\log x}.$$

Démonstration. Par la proposition 8 page 19, pour $\Re s > -1$ on a

$$\int_1^\infty \varepsilon'_1(t) t^{-s} dt = \frac{1}{s-1} - \zeta(s) \frac{8}{(s+1)(s+3)},$$

et ainsi

$$\int_1^\infty \varepsilon'_1(t) t^{-1+\frac{1}{\log(10^{13})}} dt = 0,1762\dots$$

On peut appliquer le lemme 22 avec $\theta = \varepsilon'_1$, $k = 1$ et $T = 10^{13}$ pour conclure. \square

Remarque 20. Rappelons que $0 \leq \varepsilon'_1(t) \leq 1/t^2$ et

$$\int_1^{x/T} \frac{1}{\log(x/t)} \varepsilon'_1(t) \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{\log x} \int_1^{x/T} \varepsilon'_1(t) \frac{dt}{t},$$

un calcul direct fournit $\int_1^{20} \varepsilon'_1(t)/t dt = 0,1723\dots$ On en conclut l'encadrement

$$\frac{0,172}{\log x} \leq \int_1^{x/T} \frac{1}{\log(x/t)} \varepsilon'_1(t) \frac{dt}{t} \leq \frac{0,177}{\log x} \quad (x \geq 20T).$$

En partant de l'inégalité de Ramaré $|M(x)|/x \leq 0,013/\log x$ valide pour $x \geq T = 97067$ (rappelée dans la proposition 36), en considérant dans un premier temps des $x \geq 10^{16}$ pour rendre négligeables les termes restes, on obtient l'estimation qui suit.

Corollaire 11. *On a la majoration suivante :*

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,0023}{\log x} \quad (x \geq 6 \times 10^5).$$

Démonstration. Soit $T = 10^{13}$. Par l'identité de Balazard (équation (1.7) page 2) et le corollaire 10 on obtient

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{x^2} \int_1^T |M(t)| dt + \frac{8/3}{x} + \frac{0,1763 \times 0,013}{\log x} \quad (x \geq T).$$

Par [Hurst, 2018] on a $|M(t)| \leq \sqrt{t}$ pour $t \leq 10^{16}$ et donc

$$\frac{1}{x^2} \int_1^T |M(t)| dt + \frac{8/3}{x} \leq \frac{2T^{3/2}}{3x^2} + \frac{3}{x} \leq \frac{a}{\log x} \quad (x \geq 10^{16})$$

avec $a = (0,7T^{3/2}/10^{32} + 3/10^{16}) \log(10^{16})$. On a $0,1763 \times 0,013 + a \leq 0,0023$ et on a prouvé

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,0023}{\log x} \quad (x \geq 10^{16}).$$

Pour les petites valeurs de x utilisons le corollaire 8, on a

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,13}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} + \frac{59}{x^2} \quad (33 \leq x \leq 10^{16})$$

et puisque la fonction $f : x \mapsto (\frac{0,13}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} + \frac{59}{x^2}) \log x$ est décroissante sur $[3, \infty[$ on a

$$|m_1(x)| \leq f(6 \times 10^5) < \frac{0,0023}{\log x} \quad (6 \times 10^5 \leq x \leq 10^{16}). \quad \square$$

4.4.3 Deuxième diminution

Passons à la deuxième partie, nous allons y montrer le résultat suivant.

Proposition 39. *On a la majoration suivante :*

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,0000137}{\log x} \quad (x \geq 5,6 \times 10^{10}).$$

Pour utiliser la fonction F de la proposition 31 comme dans la section précédente nous avons besoin d'évaluer $\int_1^\infty |1 - F(t)|t^{-2+\varepsilon} dt$ pour ε le plus petit possible. [Cohen *et al.*, 2007] ne donne pas tous les coefficients de la fonction F , le lemme suivant permet de s'en passer, on perd sans doute dans la constante obtenue mais en contrepartie il n'y a presque pas de calculs à faire.

Lemme 23. *Soit G une fonction bornée et $0 \leq \varepsilon < 1$, on note $I = \int_1^\infty |G(t)|t^{-2} dt$ alors*

$$\int_1^\infty |G(t)|t^{-2+\varepsilon} dt \leq 2 \left(\frac{\|G\|_\infty}{(1-\varepsilon)I} \right)^\varepsilon \times \int_1^\infty |G(t)|t^{-2} dt. \quad (4.17)$$

Démonstration. Découpons l'intervalle d'intégration de l'intégrale suivante, qui est convergente par comparaison, $\int_1^\infty |G(t)|t^{-2+\varepsilon} dt$ en deux parties. Soit $B \geq 1$, on a :

$$\int_B^\infty |G(t)|t^{-2+\varepsilon} dt \leq \frac{\|G\|_\infty}{1-\varepsilon} \frac{1}{B^{1-\varepsilon}}, \quad (4.18)$$

$$\int_1^B |G(t)|t^{-2+\varepsilon} dt \leq IB^\varepsilon. \quad (4.19)$$

On cherche B pour rendre égaux les deux membres de droite des inégalités (4.18) et (4.19), c'est-à-dire $\frac{\|G\|_\infty}{1-\varepsilon} \frac{1}{B^{1-\varepsilon}} = IB^\varepsilon$ et donc $B = \frac{\|G\|_\infty}{I(1-\varepsilon)}$. Pour ce B les deux membres de droite des inégalités (4.18) et (4.19) sont égaux et valent IB^ε donc la somme est plus petite que $2B^\varepsilon \times I$. \square

Remarquons que la quantité $2 \left(\frac{\|G\|_\infty}{(1-\varepsilon)I} \right)^\varepsilon \times \int_1^\infty |G(t)|t^{-2} dt = 2 \left(\frac{\|G\|_\infty}{(1-\varepsilon)} \right)^\varepsilon I^{1-\varepsilon}$ croît quand I croît ou ε décroît. On peut donc utiliser dans la formule (4.17) une majoration de I ou une minoration de ε . De plus le cas $\varepsilon = 0$ donne la majoration $I \leq 2I$ ce qui montre les limites de ce lemme.

Démonstration de la proposition 39 (page 75). En utilisant le lemme 23 ci-dessus avec $G = |1 - F|$ pour la fonction F décrite dans la proposition 31 page 62, issue de l'article de Cohen, Dress et El Marraki, et $\varepsilon = 1/\log(T)$ on obtient

$$\text{pour } T = 10^{47}, \quad \int_1^\infty |1 - F(t)|t^{-2+\frac{1}{\log(T)}} dt \leq \frac{1}{1119}. \quad (4.20)$$

Par la majoration (4.11) de la page 70 avec l'inégalité $|m(u)| \leq 1$, on a

$$|m_1(x)| \leq \int_1^{x/T} |m(x/t)||1 - F(t)|\frac{dt}{t^2} + \frac{\|1 - F\|_\infty T + 6}{x} \quad (x \geq T).$$

Puis utilisons $|m(x)| \leq 0,0153/\log x$, résultat de la proposition 38 de la page 74, couplé avec le lemme 22 page 73 utilisé avec $k = 1$, $\theta(t) = |1 - F(t)|t^{-1}$ et l'équation (4.20) :

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{1119} \frac{0,0153}{\log x} + \frac{3 \times 10^{51}}{x}.$$

Puisque la fonction $x \mapsto (\log x)/x$ est décroissante à partir de $x = \exp(1)$, on obtient que $|m_1(x)| \log x \leq f(x)$ pour $x \geq T$ avec f une fonction décroissante, en calculant $f(10^{62})$ on arrive à

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,0000137}{\log x} \quad (x \geq 10^{62}).$$

Maintenant pour diminuer le rang 10^{62} nous allons prouver que :

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{11\,470\,000} \quad (x \geq 10^{22}). \quad (\text{raccord})$$

Prenons $T = 1,35 \times 10^{12} \leq 10^{16}$, on a montré dans la proposition 35 que $|m_1(x)| \leq 1/8\,850\,000$ pour tout $x \geq T$. En reprenant le principe de la démonstration de cette proposition page 69, la majoration (4.12) devient

$$\int_1^{x/T} |m(x/t)||1 - F(t)|\frac{dt}{t^2} \leq \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{4345} \left(\frac{1}{4345} + \frac{1}{8\,850\,000} \right).$$

On arrive ensuite à

$$|m_1(x)| \leq \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{4345} \left(\frac{1}{4345} + \frac{1}{8\,850\,000} \right) + \frac{22527,5 \times \left(32 + \int_{33}^T \left(\frac{0,7}{\sqrt{u}} + \frac{3}{u} + \frac{59}{u^2} \right) du \right) + 6}{x},$$

la fonction majorante est décroissante et inférieure à $1/11\,470\,000$ pour $x \geq 10^{22}$, ce qui termine la preuve.

Par la majoration (raccord) ci-dessus et un calcul d'exponentielle on a

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{11\,470\,000} \quad (x \geq 10^{22}) \quad \text{et} \quad \frac{1}{11\,470\,000} \leq \frac{0,0000137}{\log x} \quad (3 \leq x \leq 10^{68})$$

le rang de validité est ainsi ramené à 10^{22} . De la même manière, par la proposition 35 on a

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{8\,850\,000} \quad (x \geq 1,35 \times 10^{12}) \quad \text{et} \quad \frac{1}{8\,850\,000} \leq \frac{0,0000137}{\log x} \quad (3 \leq x \leq 10^{52})$$

donc le rang de validité est descendu à 10^{16} . Pour des plus petites valeurs de x utilisons le corollaire 8, on a

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,13}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} + \frac{59}{x^2} \quad (33 \leq x \leq 10^{16})$$

et puisque la fonction $g : x \mapsto (\frac{0,13}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} + \frac{59}{x^2}) \log x$ est décroissante sur $[3, \infty[$ on a

$$|m_1(x)| \leq g(5,6 \times 10^{10}) < \frac{0,0000137}{\log x} \quad (x \geq 5,6 \times 10^{10}). \quad \square$$

Démonstration de la proposition 37 (page 72). On a prouvé dans la proposition 39 que

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,0000137}{\log x} \quad (5,6 \times 10^{10}).$$

Puisque $|m(x)| \leq |M(x)|/x + |m_1(x)|$, le résultat de la proposition 36 sur $|M(x)|/x$ donne

$$|m(x)| \leq \frac{0,013}{\log x} + \frac{0,0000137}{\log x} \leq \frac{0,013014}{\log x} \quad (5,6 \times 10^{10}).$$

Utilisons le corollaire 8 page 65, on a

$$|m(x)| \leq \frac{0,7}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} + \frac{59}{x^2} \quad (33 \leq x \leq 10^{16})$$

et puisque la fonction $g : x \mapsto (\frac{0,7}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} + \frac{59}{x^2}) \log x$ est décroissante sur $[3, \infty[$ on a

$$|m(x)| \leq g(505\,000) < \frac{0,013014}{\log x} \quad (x \geq 505\,000).$$

Par vérification directe avec le logiciel sagemath on montre que l'inégalité est vraie sur $[97\,063, 505\,000]$. \square

4.5 Estimation du type $|m(x)| \leq a/\log^2 x$ pour $x \geq T$

Comme dans les sections précédentes commençons par donner le meilleur résultat de ce type connu à l'heure actuelle sur M , il n'est pas optimal : par un calcul sur ordinateur pour les petites valeurs il semble que $\sup_{w \in [1, \infty[} \log^2 w |M(w)|/w = \log^2 31 \times 4/31 \approx 1,52$.

Proposition 40 (El Marraki). *On a :*

$$\frac{|M(x)|}{x} \leq \frac{362,7}{\log^2 x} \quad (x > 1).$$

Démonstration. Ce résultat est contenu dans [El Marraki, 1995] (corollaire en bas de la page 421). \square

Pour la fonction m_1 nous obtenons le résultat suivant, il est optimal à l'arrondi près (on a $\sup_{w \in [1, \infty[} \log^2 w |m_1(w)| = \log^2 7 \times 29/105 = 1,0458\dots$).

Proposition 41. *On a :*

$$|m_1(x)| \leq \frac{1,046}{\log^2 x} \quad (x > 1).$$

Passons à la conversion de l'estimation d'El Marraki en $1/\log^2$.

Proposition 42. *On a :*

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,37}{\log^2 x} \quad (x \geq 119).$$

Démonstration. Par l'identité de Balazard (équation (1.7) p. 2) on obtient

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{x^2} \int_1^T |M(t)| dt + \frac{8/3}{x} + \int_1^{x/T} \frac{|M(x/t)|}{x/t} \varepsilon'_1(t) \frac{dt}{t},$$

on prend $T = 10^{16}$. Par [Hurst, 2018] on a $|M(t)| \leq \sqrt{t}$ pour $t \leq 10^{16}$ et en utilisant le lemme 22 on obtient

$$|m_1(x)| \log^2(x) \leq \int_1^T \sqrt{t} dt \frac{\log^2(x)}{x^2} + \frac{8 \log^2(x)}{3x} + 362,7 \int_1^\infty \varepsilon'_1(t) t^{-1+2/\log(T)} dt. \quad (4.21)$$

Par la proposition 8 on obtient $\int_1^\infty \varepsilon'_1(t) t^{-1+2/\log(T)} dt = 0,177111\dots$ et par la décroissance de la fonction du membre de droite de (4.21) on arrive à

$$|m_1(x) \log^2(x)| \leq 64,24 \quad (x \geq 10^{16}).$$

Et puisque $m(x) = m_1(x) + M(x)/x$ pour tout $x \geq 1$, on obtient

$$|m(x)| \leq \frac{426,94}{\log^2 x} \quad (x \geq 10^{16}). \quad (4.22)$$

Posons désormais $T = 10^{130}$. En utilisant le lemme 23 page 75 avec $\varepsilon = 2/\log(T)$ et la fonction $G = |1 - F|$ pour la fonction F de Cohen, Dress et El Marraki décrite dans la proposition 31 page 62, on trouve que

$$\int_1^\infty |1 - F(t)| t^{-2 + \frac{2}{\log(10^{130})}} dt \leq \frac{1}{1171}. \quad (4.23)$$

Utilisons la majoration (4.11) de la page 70 avec l'inégalité $|m(u)| \leq 1$ et $\|1 - F\| \leq 23000$, on a

$$|m_1(x)| \leq \int_1^{x/T} |m(x/t)| |1 - F(t)| \frac{dt}{t^2} + \frac{23000T + 6}{x}.$$

Puis utilisons l'inégalité (4.22) sur $|m|$, couplée avec le lemme 22 page 73 utilisé avec $k = 2$, $\theta(t) = |1 - F(t)| t^{-1}$ et l'inégalité (4.23) qui concerne $|1 - F(t)|$, on arrive à :

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{1171} \frac{426,94}{\log^2 x} + \frac{3 \times 10^{134}}{x} \quad (x \geq T).$$

En multipliant l'inégalité par $\log^2 x$ et en utilisant la décroissance de $x \mapsto \frac{\log^2 x}{x}$ sur l'intervalle considéré, on aboutit à

$$|m_1(x) \log^2(x)| \leq 0,37 \quad (x \geq 10^{150}).$$

On abaisse le domaine de validité au-dessous de 10^{16} car par la proposition 39 et un calcul d'exponentielle

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,0000137}{\log x} \quad (x \geq 5,6 \times 10^{10}) \quad \text{et} \quad \frac{0,0000137}{\log x} \leq \frac{0,37}{\log^2 x} \quad (3 \leq x \leq 10^{11729}).$$

Ensuite on peut descendre le rang de l'inégalité à $x \geq 55\,000$ par le corollaire 8

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,13}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} + \frac{59}{x^2} \quad (33 \leq x \leq 10^{16}).$$

On peut finalement abaisser le rang à $x \geq 119$ par des calculs informatiques directs entre $x = 119$ et $x = 55\,000$. \square

Démonstration de la proposition 41 page 78. Une étude directe montre que

$$0 \leq m_1(x) \log^2 x \leq 1,046 \quad (1 \leq x \leq 119),$$

plus précisément le maximum est atteint pour $x = 7$ et vaut $\frac{29}{105} \log^2 7$. En raccordant à la proposition 42

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,37}{\log^2 x} \quad (x \geq 119)$$

on conclut à l'inégalité annoncée pour tout $x > 1$. \square

Bordellès, en partant de l'estimation de la proposition 40 due à El Marraki et de l'identité de Balazard (1.7) de la page 2 avec ε'_1 , obtient dans [Bordellès, 2015] l'estimation $|m(x)| \leq 546/\log^2 x$ pour tout $x > 1$, résultat que nous améliorons.

Corollaire 12. *On a*

$$|m(x)| \log^2 x \leq 363,07 \quad (x \geq 1).$$

Démonstration. Par [El Marraki, 1995] p. 421 on a :

$$\frac{|M(x)|}{x} \leq \frac{362,7}{\log^2 x} \quad (x > 1). \tag{4.24}$$

Par la proposition 42 on a :

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,37}{\log^2 x} \quad (x \geq 119). \tag{4.25}$$

Puisque $m(x) = M(x)/x + m_1(x)$, on déduit de (4.24) et (4.25) que

$$|m(x)| \leq \frac{|M(x)|}{x} + |m_1(x)| \leq \frac{363,07}{\log^2 x} \quad (x \geq 119).$$

On vérifie la majoration annoncée entre 1 et 119 en calculant directement sur m . \square

4.6 Bilan des estimations de m_1 et application à un calcul d'intégrale liée à la fonction de Möbius

Résumons les estimations obtenues pour $m_1(x) = m(x) - M(x)/x$ en précisant de quelles estimations sur $M(x)$ elles proviennent. Nous ne précisons pas ici le rang de validité des estimations autour de M . Il y a quatre estimations, la dernière colonne du tableau indique dans quel intervalle l'estimation considérée est la plus petite parmi les quatre, les bornes de ces intervalles sont arrondies. Les rangs de validité sont sans doute améliorables par des calculs directs de m_1 mais nous ne savons pas faire ce type de calculs informatiques pour $x \geq 10^{10}$.

estimation M	estimation m_1	valide sur	meilleur des 4 sur
$\frac{ M(x) }{x} \leq \frac{0,571}{\sqrt{x}}$	$ m_1(x) \leq \frac{0,14}{\sqrt{x}}$	$[196, 10^{16}]$	$[196; 1,53 \times 10^{12}]$
$\frac{ M(x) }{x} \leq \frac{1}{4345}$	$ m_1(x) \leq \frac{1}{8\,850\,000}$	$[1,35 \times 10^{12}; +\infty[$	$[1,53 \times 10^{12}; 4,52 \times 10^{52}]$
$\frac{ M(x) }{x} \leq \frac{0,013}{\log x}$	$ m_1(x) \leq \frac{0,0000137}{\log x}$	$[5,6 \times 10^{10}; +\infty[$	$[4,52 \times 10^{52}; 1,3 \times 10^{11729}]$
$\frac{ M(x) }{x} \leq \frac{362,7}{\log^2 x}$	$ m_1(x) \leq \frac{0,37}{\log^2 x}$	$[119, +\infty[$	$[1,3 \times 10^{11729}; +\infty[$

Il faut noter l'importance de l'estimation de Cohen, Dress et El Marraki $|M(x)|/x \leq 1/4345$ et plus généralement de [Cohen *et al.*, 2007]. Elle intervient dans la qualité des estimations pour M en $1/\log$ (Ramaré [Ramaré, 2015]) et $1/\log^2$ (El Marraki [El Marraki, 1995]) puis une deuxième fois pour m_1 par la qualité des conversions de m à m_1 par la fonction F (décrite dans la proposition 31) qui a produit l'estimation de ces trois auteurs.

Étant donné les majorations effectives dont on dispose, évaluer les nombres

$$\alpha = \int_1^\infty \left| \frac{M(x)}{x} \right| \frac{dx}{x} \quad \text{et} \quad \beta = \int_1^\infty |m_1(x)| \frac{dx}{x},$$

est un problème difficile. Dress dans [Dress, 1999], qui est un travail sur la discrédence des suites de Farey, explique ce fait pour la constante α liée à M . Il donne par une heuristique la valeur approchée 1,01427 et indique que certifier, ne serait-ce que le chiffre des unités est bien un 1, est déjà titanesque et inaccessible au moment où il écrit c'est-à-dire en 1999. Kotnik en 2006 évalue ces nombres et d'autres intégrales autour de la fonction de Möbius dans [Kotnik, 2007], il utilise des estimations explicites et des moyens informatiques relativement puissants. Mais Kotnik n'obtient aucun chiffre de la représentation décimale du nombre β . Avec les majorations que nous avons obtenues et résumées dans le tableau ci-dessus on peut estimer l'intégrale β avec une bonne précision et certifier une partie des décimales de β obtenues par Kotnik.

Proposition 43. *On a l'égalité suivante*

$$\int_1^\infty |m_1(x)| \frac{dx}{x} = 1,000\dots$$

Démonstration. En découpant l'intervalle d'intégration en

$$[2 \times 10^{12}; 4,5 \times 10^{52} [\cup [4,5 \times 10^{52}; \exp(27000) [\cup [\exp(27000); +\infty [$$

et en utilisant le tableau de la section 4.6 page 80 on obtient la majoration :

$$\begin{aligned} \int_{2 \times 10^{12}}^{\infty} |m_1(x)| \frac{dx}{x} &\leq \frac{\log\left(\frac{4,5 \times 10^{52}}{2 \times 10^{12}}\right)}{8\,850\,000} + 0,0000137 \left(\log \frac{\log(\exp(27000))}{\log(4,5 \times 10^{52})} \right) + \frac{0,37}{\log(\exp(27000))} \\ &\leq 1,09 \times 10^{-5} + 7,41 \times 10^{-5} + 1,38 \times 10^{-5} \\ &= 9,88 \times 10^{-5} . \end{aligned}$$

La table 1 page 475 de [Kotnik, 2007] donne

$$\int_1^N |m_1(x)| \frac{dx}{x} = 1,00004\dots \text{ pour } N = 3,1 \times 10^{12}$$

ce qui permet de conclure que l'intégrale de l'énoncé est inférieure à 1,00015. \square

Remarque 21. On vient de montrer que

$$\int_1^{\infty} |m_1(x)| \frac{dx}{x} = 1,000\dots$$

et on a

$$\int_1^{\infty} m_1(x) \frac{dx}{x} = 1 .$$

Ce qui prouve que la contribution de la partie négative m_1^- est petite. Ajoutons à ce sujet que le premier changement de signe de m_1 se situe entre 18349 et 18350.

4.7 Annexe : une propriété de m_1 équivalente au théorème des nombres premiers

Que $m_1(x) = o(1)$ entraîne le théorème des nombres premiers sous la forme $M(x) = o(x)$ est mentionné au paragraphe 3.1, page 36, de [Balazard, 2012a]. Voici les détails de cette implication, nous remercions Michel Balazard qui nous les a communiqués.

Proposition 44. *Supposons*

$$|m_1(x)| \leq \varepsilon \text{ pour tout } x \geq T_\varepsilon .$$

Alors

$$\frac{|M(x)|}{x} \leq 3\sqrt{\varepsilon} + 2\varepsilon + \frac{1}{x} \text{ pour tout } x \geq T_\varepsilon .$$

Démonstration. Soit $\eta = \pm 1$.

La fonction $t \mapsto \eta M(t) + [t] = \sum_{n \leq t} (\eta \mu(n) + 1)$ est croissante (ce n'est pas le cas de $t \mapsto M(t) + t$). Soit $h > 0$ un paramètre que l'on fixera plus tard, on a

$$\int_x^{x+h} (\eta M(x) + [x]) \frac{dt}{t^2} \leq \int_x^{x+h} (\eta M(t) + [t]) \frac{dt}{t^2} \leq \int_x^{x+h} (\eta M(t) + t) \frac{dt}{t^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) + \eta(m_1(x+h) - m_1(x)) \\
&\leq \frac{h}{x} + 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

puisque $x \geq T_\varepsilon$ et $x+h \geq T_\varepsilon$. Or

$$\int_x^{x+h} (\eta M(x) + \lfloor x \rfloor) \frac{dt}{t^2} = (\eta M(x) + \lfloor x \rfloor) \frac{h}{x(x+h)}$$

et donc

$$\eta M(x) + \lfloor x \rfloor \leq \left(\frac{h}{x} + 2\varepsilon\right) \frac{x(x+h)}{h} = x+h + \frac{2\varepsilon x(x+h)}{h}.$$

Choisissons maintenant $h = x\sqrt{\varepsilon}$, on obtient

$$\eta M(x) \leq \{x\} + x\sqrt{\varepsilon} + 2x\sqrt{\varepsilon}(1 + \sqrt{\varepsilon}) \leq 1 + x(2\varepsilon + 3\sqrt{\varepsilon}),$$

et donc

$$\pm \frac{M(x)}{x} \leq \frac{1}{x} + 2\varepsilon + 3\sqrt{\varepsilon}.$$

Ce qui conclut la démonstration. □

Chapitre 5

La fonction Λ de von Mangoldt

5.1 La fonction sommatoire logarithmique

Nous allons proposer des inégalités permettant d'effectuer des conversions de majorations explicites pour les fonctions $\sum_{n \leq x} (\Lambda(n) - 1)$ et $\sum_{n \leq x} (\Lambda(n) - 1)/n$, tout comme nous l'avons fait jusqu'alors pour $M(x)$ et $m(x)$ (ou bien $m_1(x)$). La convolution $1 \star 1 = \tau$ apparaîtra en chemin, sa fonction sommatoire conduit au célèbre problème des diviseurs de Dirichlet. [Berkane *et al.*, 2012] de Berkane, Bordellès et Ramaré fournit une étude explicite de ce problème, ce qui nous sera très utile.

La proposition suivante concerne la différence entre la fonction sommatoire et la fonction sommatoire logarithmique de $\Lambda - 1$ et peut être comparée à la formule du théorème 1 page 4 qui traite de la fonction arithmétique μ .

Proposition 45. Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable dont on note $I_g = \int_0^1 g(y) dy$ l'intégrale. Pour tout $x \geq 1$ on a :

$$I_g \left(\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n) - 1}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} (\Lambda(n) - 1) \right) = \int_1^x \frac{(\psi(x/t) - \lfloor x/t \rfloor)}{x/t} U g(t) \frac{dt}{t} \\ + \frac{1}{x} \int_1^x \sum_{n \leq x/t} (\log n - \tau(n)) g(1/t) \frac{dt}{t^2} .$$

Démonstration. Par la proposition 6 page 17 appliquée avec $a(n) = \Lambda - 1$, $\eta(t) = 1$, $b(n) = 1$, $\varphi(t) = g(1/t)$, et puisque d'une part $\Lambda \star 1 = \log$, d'autre part $1 \star 1 = \tau$, on obtient :

$$\int_1^x (\psi(x/t) - \lfloor x/t \rfloor) \sum_{k \leq t} g\left(\frac{k}{t}\right) \frac{dt}{t} = \int_1^x \sum_{n \leq x/t} (\log n - \tau(n)) g(1/t) \frac{dt}{t} .$$

En écrivant la fonction constante I_g comme suit $I_g = U g(t) + \frac{1}{t} \sum_{k \leq t} g\left(\frac{k}{t}\right)$, on trouve

$$I_g \int_1^x (\psi(x/t) - \lfloor x/t \rfloor) dt \\ = \int_1^x (\psi(x/t) - \lfloor x/t \rfloor) U g(t) dt + \int_1^x \sum_{n \leq x/t} (\log n - \tau(n)) g(1/t) \frac{dt}{t} .$$

Une interversion de somme et d'intégrale (que l'on redonne de manière générale dans le lemme 25 page 85) donne l'égalité

$$\int_1^x \frac{(\psi(x/t) - \lfloor x/t \rfloor)}{x/t} \frac{dt}{t} = \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n) - 1}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} (\Lambda(n) - 1),$$

ce qui prouve l'égalité annoncée. \square

On a $\sum_{n \leq x} \Lambda(n)/n = \log x - \gamma + O(1/\log x)$ (voir [Ramaré, 2013a]) et donc $\sum_{n \leq x} (\Lambda(n) - 1)/n = -2\gamma + O(1/\log x)$. Nous verrons que cette constante -2γ va apparaître en cours de démonstration. Commençons par estimer la fonction sommatoire $\sum_{n \leq u} (\log n - \tau(n))$ en regardant les contributions des fonctions arithmétiques \log et τ séparément.

Lemme 24. *Pour tout $u > 0$, on a*

$$\sum_{n \leq u} \log n = u \log u - u + (1/2 - \{u\}) \log u + \frac{1}{2} \log 2\pi + r(u) \text{ avec } |r(u)| \leq \frac{1}{8u}.$$

Démonstration. Voir [Balazard, 2016] page 17 pour la démonstration basée sur la formule d'Euler-Maclaurin. \square

Proposition 46 (Berkane-Bordellès-Ramaré). *Pour tout $u \geq 1$, on a l'estimation suivante :*

$$\sum_{n \leq u} \tau(n) = u \log u + (2\gamma - 1)u + \Delta(u) \text{ avec } |\Delta(u)| \leq 0,961\sqrt{u}.$$

Démonstration. Voir [Berkane et al., 2012, theorem 1.1, p. 1025]. \square

Corollaire 13. *Pour tout $u \geq 1$, on a l'estimation suivante :*

$$\sum_{n \leq u} (\log n - \tau(n)) = -2\gamma u + R(u) \text{ avec } |R(u)| \leq 2\sqrt{u}.$$

Ce qui nous permet d'obtenir le corollaire suivant, en vue d'effectuer par la suite des conversions autour de la fonction arithmétique Λ . Il fait intervenir la fonction ε'_1 introduite par Balazard.

Corollaire 14. *On a*

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n) - 1}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} (\Lambda(n) - 1) + 2\gamma \right| \leq \int_1^x \left| \frac{\psi(x/t) - \lfloor x/t \rfloor}{x/t} \right| \varepsilon'_1(t) \frac{dt}{t} + \frac{4,25}{\sqrt{x}} \quad (x \geq 1). \quad (5.1)$$

Démonstration. La fonction $g(y) = 4y(1 - y^2)$ est une fonction positive sur $[0, 1]$, on a $\int_0^1 g(y) dy = 1$ et $Ug = \varepsilon'_1$. Par la proposition 45 p. 83 appliquée avec g et le corollaire 13 ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} \int_1^x \sum_{n \leq x/t} (\log n - \tau(n)) 4 \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \frac{dt}{t} = \frac{1}{x} \int_1^x (2\gamma x/t + R(x/t)) 4 \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \frac{dt}{t} \\ & = -2\gamma \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) + \frac{1}{x} \int_1^x R(x/t) 4 \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

On sait que $|R(u)| \leq 2\sqrt{u}$ pour tout $u \geq 1$, et puisque $g(y) = 4y(1 - y^2)$ est une fonction positive et qu'un calcul élémentaire donne $\int_1^\infty g(1/t)/\sqrt{t} dt/t = 32/21$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \int_1^x \sum_{n \leq x/t} (\log n - \tau(n)) 4 \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \frac{dt}{t} &= \frac{1}{x} \int_1^x (-2\gamma x/t + R(x/t)) 4 \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \frac{dt}{t} \\ &= -2\gamma \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) + \frac{2}{\sqrt{x}} O^*(32/21). \end{aligned}$$

En passant le nombre -2γ du côté des fonctions sommatoires de Λ et en utilisant l'inégalité triangulaire, on aboutit à

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n) - 1}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} (\Lambda(n) - 1) + 2\gamma \right| \leq \int_1^x \left| \frac{\psi(x/t) - \lfloor x/t \rfloor}{x/t} \right| \varepsilon_1'(t) \frac{dt}{t} + \frac{q(x)}{\sqrt{x}}$$

avec $q(x) = 2\sqrt{x}\gamma(2/x^2 - 1/x^4) + 2 \times 32/21$ pour $x \geq 1$. Le calcul de la dérivée de q montre que cette fonction positive atteint son maximum en $\sqrt{7/6}$ et vaut $4,22\dots$, ce qui termine la preuve de l'inégalité attendue. \square

Il est possible de diminuer la valeur de l'exposant de x dans le second membre de (5.1) en utilisant des estimations explicites des résultats de Voronoï pour le problème de Dirichlet : par exemple, [Berkane *et al.*, 2012] fournit la majoration $|\Delta(x)| \leq 0,764x^{1/3} \log x$ pour tout $x \geq 9995$. Cela peut être intéressant pour des études ayant trait à l'hypothèse de Riemann mais pour les conversions autour du théorème des nombres premiers que nous avons en vue, $4,25/\sqrt{x}$ conviendra.

Pour utiliser la fonction F de [Cohen *et al.*, 2007] (décrite dans la proposition 31) qui nous a permis de faire des bonnes conversions, il faut passer par la fonction sommatoire logarithmique.

On peut trouver les deux expressions intégrales du lemme suivant dans [Balazard, 2012b] en bas de la page 6. Les deux autres s'obtiennent par changement de variable. Nous nous sommes servis de ces écritures pour m_1 avec la fonction arithmétique $a(n) = \mu(n)$.

Lemme 25. *Soit a une suite arithmétique, on a :*

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{a(n)}{n} - \sum_{n \leq x} a(n) &= \int_1^x \sum_{n \leq t} a(n) \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x} \int_1^x \sum_{n \leq t} \frac{a(n)}{n} dt \\ \text{et } \sum_{n \leq x} \frac{a(n)}{n} - \sum_{n \leq x} a(n) &= \frac{1}{x} \int_1^x \sum_{n \leq x/t} a(n) dt = \int_1^x \sum_{n \leq x/t} \frac{a(n)}{n} \frac{dt}{t^2} \quad (x > 0). \end{aligned}$$

Dans l'égalité de la proposition suivante les quatre parties du membre de droite tendent vers 0 quand x tend vers l'infini.

Proposition 47. *Soit $h : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable vérifiant $\int_0^1 h(y) dy = 0$, pour tout $x \geq 1$, on a :*

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n) - 1}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} (\Lambda(n) - 1) + 2\gamma$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^x \left(\sum_{n \leq x/t} \frac{\Lambda(n) - 1}{n} + 2\gamma \right) \left[1 - \sum_{k \leq t} h\left(\frac{k}{t}\right) \right] \frac{dt}{t^2} \\
&+ \int_1^x \left(\sum_{n \leq x/t} \frac{\log n - \tau(n) + 2\gamma}{n} - \gamma^2 - 3\gamma_1 \right) h(1/t) \frac{dt}{t^2} + (\gamma^2 + 3\gamma_1) \int_{1/x}^1 h(y) dy + \frac{2\gamma}{x}.
\end{aligned}$$

Démonstration. Par la proposition 6 page 17 appliquée avec $a(n) = \Lambda - 1$, $\eta(t) = t$, $b(n) = 1$, $\varphi(t) = h(1/t)$, et puisque d'une part $\Lambda \star 1 = \log$, d'autre part $1 \star 1 = \tau$, on obtient :

$$\int_1^x \sum_{n \leq x/t} \frac{\Lambda(n) - 1}{n} \sum_{k \leq t} h\left(\frac{k}{t}\right) \frac{dt}{t^2} = \int_1^x \sum_{n \leq x/t} \frac{\log n - \tau(n)}{n} h(1/t) \frac{dt}{t^2}.$$

Par le lemme 25 ci-dessus appliqué avec $a(n) = \Lambda(n) - 1$ on obtient

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n) - 1}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} (\Lambda(n) - 1) = \int_1^x \left(\sum_{n \leq x/t} \frac{\Lambda(n) - 1}{n} \right) \frac{dt}{t^2}.$$

Faisons maintenant apparaître les termes 2γ et utilisons le fait que $\int_1^x 2\gamma \frac{dt}{t^2} = 2\gamma(1 - 1/x)$

$$\begin{aligned}
&\int_1^x \left(\sum_{n \leq x/t} \frac{\Lambda(n) - 1}{n} \right) \frac{dt}{t^2} + 2\gamma = \\
&\int_1^x \left(\sum_{n \leq x/t} \frac{\Lambda(n) - 1}{n} + 2\gamma \right) \left[1 - \sum_{k \leq t} h\left(\frac{k}{t}\right) \right] \frac{dt}{t^2} + 2\gamma \int_1^x \sum_{k \leq t} h\left(\frac{k}{t}\right) \frac{dt}{t^2} + \frac{2\gamma}{x} \\
&+ \int_1^x \left(\sum_{n \leq x/t} \frac{\log n - \tau(n)}{n} + 2\gamma \log(x/t) \right) h(1/t) \frac{dt}{t^2} - 2\gamma \int_1^x \log(x/t) h(1/t) \frac{dt}{t^2}.
\end{aligned}$$

Il reste à prouver que

$$\int_1^x \sum_{k \leq t} h\left(\frac{k}{t}\right) \frac{dt}{t^2} - \int_1^x \log(x/t) h(1/t) \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x} \int_1^x h(t/x) \left(\sum_{n \leq t} \frac{1}{n} - \log t \right) dt.$$

En appliquant l'égalité 1.50 page 18 avec les fonctions $\eta(u) = u$ et $\varphi(u) = h(1/u)$ on obtient

$$\int_1^x \frac{x}{t} \sum_{k \leq t} h\left(\frac{k}{t}\right) \frac{dt}{t} = \int_1^x h\left(\frac{t}{x}\right) \sum_{k \leq t} \frac{t}{k} \frac{dt}{t},$$

et ainsi

$$\int_1^x \sum_{k \leq t} h\left(\frac{k}{t}\right) \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x} \int_1^x h\left(\frac{t}{x}\right) \sum_{k \leq t} \frac{1}{k} dt.$$

On termine la démonstration en effectuant le changement de variable $u = x/t$ dans l'intégrale $\int_1^x \log(x/t) h(1/t) t^{-2} dt$ puis en renommant la variable u en t . \square

Il reste à étudier et contrôler $\sum_{n \leq u} (\log n - \tau(n))/n$.

Lemme 26. Pour tout $u \geq 1$, on a

$$\sum_{n \leq u} \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2} \log^2 u + \gamma_1 + r(u) \text{ avec } |r(u)| \leq \frac{1 + \log u}{u}.$$

Démonstration. Voir [Balazard, 2008, p. 18] pour la démonstration basée sur la formule d'Euler-Maclaurin. \square

Lemme 27 (Berkane-Bordellès-Ramaré). *Pour tout $u \geq 0$, on a*

$$\sum_{n \leq u} \frac{\tau(n)}{n} = \frac{1}{2} \log^2 u + 2\gamma \log u + \gamma^2 - 2\gamma_1 + \delta(u) \text{ avec } |\delta(u)| \leq \frac{1,16}{u^{1/3}}.$$

Démonstration. Voir [Berkane et al., 2012, cor. 2.2, p. 1028]. Attention à la constante car il y a une faute de frappe dans cet article. \square

Corollaire 15. *On a l'estimation suivante :*

$$\sum_{n \leq u} \frac{\log n - \tau(n) + 2\gamma}{n} = \gamma^2 + 3\gamma_1 + R(u) \text{ avec } |R(u)| \leq \frac{3,2}{u^{1/3}} \quad (u \geq 1).$$

On peut donc utiliser la proposition 45 page 83 et la proposition 47 page 85 pour convertir des estimations explicites de $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ en des estimations de même nature pour $\tilde{\psi}(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)/n$. On peut obtenir la même qualité de conversions que ce que nous avons réalisé pour aller de $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$ vers $m(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)/n$.

5.2 Conversion de la fonction de Mertens vers celle de Tchebichef

Faire des conversions, sans utiliser l'analyse complexe et les zéros de la fonction zêta, du terme d'erreur $M(x)$ vers un terme d'erreur pour $\psi(x) - x$ n'est pas simple et le chemin inverse semble encore plus compliqué. Dans [Baez-Duarte, 2000] Baez-Duarte donne une démonstration du résultat suivant (il indique que c'est Bombieri qui lui a communiqué la preuve, voir l'appendice page 29)

$$M(x) \ll R(x) \text{ entraîne } \psi(x) - x \ll \sqrt{xR(x) \log \left(\frac{x}{R(x)} \right)}.$$

Pour le théorème des nombres premiers sous la forme $M(x) \ll x/(\log x)^k$ on obtient $\psi(x) - x \ll x/(\log x)^{k/2} \sqrt{\log \log x}$, ce qui est bien un $o(x)$ mais la qualité du terme d'erreur a diminué.

Pour l'hypothèse de Riemann sous la forme $M(x) \ll x^{1/2+\varepsilon}$ on obtient $\psi(x) - x \ll x^{3/4+\varepsilon/2} \sqrt{\log x}$ et l'ordre de grandeur a augmenté.

Nous allons prouver le résultat suivant dans lequel il n'y a pas de perte dans l'ordre de grandeur mais qui concerne une intégrale portant sur ψ au lieu de ψ directement.

Proposition 48. *On suppose qu'il existe Θ avec $1/2 \leq \Theta \leq 1$ et $A_\Theta > 0$ tels que :*

$$\forall x \geq 1, |M(x)| \leq A_\Theta x^\Theta.$$

Alors on a

$$\forall x \geq 1, \left| \int_1^x (\psi(u) - u) \frac{du}{u} \right| \leq 2,06 A_\Theta x^\Theta + 0,5 \log^2 x + 7.$$

Rappelons la notation $\mathcal{R}_1(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \log(x/n) = \int_1^x m(t) \frac{dt}{t}$.

Proposition 49. *Pour tout $x \geq 1$, on a*

$$\int_1^x (\psi(u) - u) \frac{du}{u} = x(\mathcal{R}_1(x) - 1 - m_1(x)) - \int_1^x M(x/t) \log t \frac{\{t\}}{t} dt + 1 - \frac{\log^2 x}{2}.$$

Démonstration. Rappelons qu'en vertu de l'identité $\log = \Lambda \star 1$, on a

$$T(x) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{n \leq x} \psi(x/n) = \sum_{n \leq x} \log n \quad (x \geq 1).$$

L'identité (1.14) appliqu\u00e9e d'abord avec $\delta = \psi$ puis avec $\delta = \log$ donne les identit\u00e9s

$$\int_1^x M(x/t) \frac{T(t)}{t} dt = \int_1^x M(x/t) \sum_{n \leq t} \psi(t/n) \frac{1}{t} dt = \int_1^x \psi(u) \frac{du}{u} \quad (5.2)$$

$$\text{et} \quad \int_1^x M(x/t) \sum_{n \leq t} \log(t/n) \frac{1}{t} dt = \int_1^x \log u \frac{du}{u}. \quad (5.3)$$

On a $\sum_{n \leq x} \log(x/n) = [x] \log x - T(x) = x \log x - \{x\} \log x - T(x)$ donc

$$T(x) = x \log x - \{x\} \log x - \sum_{n \leq x} \log(x/n), \quad (5.4)$$

formule que l'on insert dans l'\u00e9quation (5.2) en tenant compte de l'\u00e9galit\u00e9 (5.3). Nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_1^x \psi(u) \frac{du}{u} \\ &= \int_1^x M(x/t) \log t dt - \int_1^x M(x/t) \log t \frac{\{t\}}{t} dt - \int_1^x \log u \frac{du}{u} \\ &= \int_1^x M(x/t) (\log t + 1) dt - xm_1(x) - \int_1^x M(x/t) \log t \frac{\{t\}}{t} dt - \frac{\log^2 x}{2}, \end{aligned}$$

puisque $xm_1(x) = \int_1^x M(x/t) dt$. On conclut en remarquant que

$$\begin{aligned} \int_1^x M(x/t) (\log t + 1) dt &= \sum_{n \leq x} \mu(n) \int_1^{x/n} (\log t + 1) dt \\ &= \sum_{n \leq x} \mu(n) x/n \log(x/n) \quad (\text{car } (t \log t)' = 1 + \log t) \\ &= x\mathcal{R}_1(x). \end{aligned}$$

□

D\u00e9monstration de la proposition 48. Montrons d'abord que si $|M(x)| \leq A_\Theta x^\Theta$ pour tout $x \geq 1$ alors

$$|m_1(x)| \leq A_\Theta C_1 x^{\Theta-1} + \frac{8}{3x} \quad (x \geq 1) \quad \text{avec} \quad C_1 = \int_1^\infty \varepsilon_1'(t) t^{-\Theta} dt. \quad (5.5)$$

D'après l'identité (1.9) de Balazard, on a

$$m_1(x) = \frac{1}{x} \int_1^x M(x/t) \varepsilon_1'(t) dt + \frac{4(1-1/x)^2(2+1/x)}{3x} \quad (x \geq 1), \quad (5.6)$$

et on en déduit immédiatement le résultat voulu.

Montrons maintenant que si $|M(x)| \leq A_\Theta x^\Theta$ pour tout $x \geq 1$ alors

$$\forall x \geq 1, x|m_1(x) - \mathcal{R}_1(x) + 1| \leq \left(\int_1^\infty \varepsilon_1'(t) t^{-\Theta} dt \right)^2 A_\Theta x^\Theta + 6. \quad (5.7)$$

Pour $g(y) = 4y(1-y^2)$ par la formule (1.49) page 18 appliquée avec $\varphi(t) = g(1/t)$ on a

$$\mathcal{R}_1(x) = \int_1^x m(x/t) \frac{dt}{t} = \int_1^x m(x/t) \varepsilon_1'(t) \frac{dt}{t} + \int_{1/x}^1 g(y) dy. \quad (5.8)$$

En soustrayant (5.8) à (5.6) on obtient

$$m_1(x) - \mathcal{R}_1(x) + 1 = - \int_1^x m_1(x/t) \varepsilon_1'(t) \frac{dt}{t} + \frac{4(1-1/x)^2(2+1/x)}{3x} + \int_0^{1/x} g(y) dy,$$

puis en utilisant (5.5), on obtient

$$|m_1(x) - \mathcal{R}_1(x) + 1| \leq A_\Theta x^{\Theta-1} \left(\int_1^\infty \varepsilon_1'(t) t^{-\Theta} dt \right)^2 + \frac{8}{3x} \int_1^\infty \varepsilon_1'(t) dt + \frac{8}{3x} + \frac{2}{x^2},$$

et on conclut en utilisant le fait que $\int_1^\infty \varepsilon_1'(t) dt = 1/3$ et donc que pour $x \geq 1$,

$$\frac{8}{3} \int_1^\infty \varepsilon_1'(t) dt + \frac{8}{3} + \frac{2}{x} \leq 6.$$

En appliquant la proposition 49, puis l'hypothèse $|M(x)| \leq A_\Theta x^\Theta$ et l'inégalité (5.7), on obtient

$$\left| \int_1^x (\psi(u) - u) \frac{du}{u} \right| \leq A_\Theta (C_2 + C_3) + 6 + \left| 1 - \frac{\log^2 x}{2} \right|$$

avec

$$C_2 = \left(\int_1^\infty \varepsilon_1'(t) t^{-\Theta} dt \right)^2 = (C_1)^2 \quad \text{et} \quad C_3 = \int_1^\infty \ln(t) \{t\} \frac{dt}{t^{1+\Theta}}.$$

Pour $\Re s > 0$, en dérivant la fonction $s \mapsto \int_1^\infty \{t\} t^{-s-1} dt$ on obtient

$$\int_1^\infty \log t \frac{\{t\}}{t^{1+s}} dt = \int_1^\infty U g(t) \log(t) t^{-s} dt = \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{\zeta(s)}{s^2} + \frac{\zeta'(s)}{s},$$

et par la proposition 8 page 19

$$\int_1^\infty \varepsilon_1'(t) t^{-s} dt = \frac{1}{s-1} - \zeta(s) \frac{8}{(s+1)(s+3)}.$$

Donc, puisque par hypothèse $\Theta \geq 1/2$, on obtient

$$C_2 \leq \int_1^\infty \log t \frac{\{t\}}{t^{3/2}} dt = 1,9961... \quad \text{et} \quad C_3 \leq \left(\int_1^\infty \varepsilon_1'(t) t^{-1/2} dt \right)^2 = 0,0507...$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\left| \int_1^x (\psi(u) - u) \frac{du}{u} \right| &\leq |x(\mathcal{R}_1(x) - 1) - xm_1(x)| + \int_1^x |M(x/t)| \log t \frac{\{t\}}{t} dt + \left| 1 - \frac{\log^2 x}{2} \right| \\
&\leq (0,051 + 2)A_\Theta x^\Theta + 6 + \left| 1 - \frac{\log^2 x}{2} \right| \\
&\leq 2,06A_\Theta x^\Theta + 7 + \frac{\log^2 x}{2}. \quad \square
\end{aligned}$$

Remarque 22. Dans [Balazard, 2012b] Balazard prouve que pour tout $k \geq 0$ on a :

$$\frac{1}{x} \int_1^x m(u) du \ll_k \int_1^x \frac{|M(x/t)|}{x/t} t^{-k} \frac{dt}{t} + \frac{1}{x},$$

et l'égalité de la proposition 49 donne

$$\frac{1}{x} \int_1^x \frac{\psi(u) - u}{u} du \ll \int_1^x \frac{|M(x/t)|}{x/t} t^{-1} \log t \frac{dt}{t} + \frac{\log^2 x}{x}.$$

Remarquons également que l'on obtient l'implication suivante

$$M(x) \ll \log x \implies \int_1^x (\psi(u) - u) \frac{du}{u} \ll \log^2 x.$$

On ne sait pas démontrer actuellement que M n'est pas bornée sans utiliser l'existence de zéros de la fonction zêta (voir [Diamond, 1982] p. 584 qui date de 1982 mais ce problème semble encore ouvert).

Chapitre 6

Moyennes logarithmiques de Riesz

Les inégalités intégrales de Balazard étudiées au chapitre 1 permettent de contrôler la fonction

$$m_1(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \left(1 - \frac{n}{x}\right) = \frac{1}{x} \int_1^x m(t) dt$$

à partir d'intégrales portant sur la fonction M . Dans [Balazard, 2012b], Balazard entreprend le même type d'étude pour la fonction

$$\mathcal{R}_1(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \log\left(\frac{x}{n}\right) = \int_1^x m(t) \frac{dt}{t}.$$

Balazard établit la majoration

$$|\mathcal{R}_1(x) - 1| \leq \frac{1}{x} \int_1^x |M(t)| \frac{dt}{t} + \frac{1}{x} \quad (x \geq 1). \quad (6.1)$$

Remarquons que cette majoration (6.1) montre d'une part que la fonction \mathcal{R}_1 est bornée puisque $|M(t)| \leq t$, et d'autre part que le théorème des nombre premiers sous la forme $M(t) = o(t)$ entraîne $\mathcal{R}_1(x) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Ramaré poursuit dans [Ramaré, 2015] et, à partir d'estimations explicites sur M , il obtient

$$|\mathcal{R}_1(x) - 1| \leq \frac{1}{389 \log x} \quad (x \geq 3156).$$

Ramaré précise dans [Ramaré, 2018] p. 306 qu'obtenir la majoration ci-dessus en utilisant

$$\mathcal{R}_1(x) = m(x) \log x - \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \log n$$

demanderait au moins une majoration du type $|m(x)| \leq 1/(389 \log^2 x)$ et comme nous l'avons vu dans la partie 4.5 page 77, la meilleure estimation dont nous disposons est $|m(x)| \leq 362/\log^2 x$.

Balazard [Balazard, 2012b, p. 16] invite à étudier les moyennes logarithmiques de Riesz d'ordre k de la fonction arithmétique $\mu(n)/n$, c'est-à-dire la suite de fonctions suivante :

$$\mathcal{R}_k(x) = \frac{1}{k!} \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \log^k\left(\frac{x}{n}\right).$$

Il suggère notamment :

- 1) d'établir un analogue pour $\mathcal{R}_1(x) - 1$ du résultat (2.1) p. 23 concernant m_1 ;
- 2) de généraliser (6.1) aux fonctions \mathcal{R}_k pour tout $k \geq 1$.

Les résultats de cette partie permettent d'atteindre complètement l'objectif 1 et de traiter les cas $k = 2$ et $k = 3$ de l'objectif 2.

Commençons par quelques généralités. D'abord on a (cf. [Balazard, 2016, p. 40])

$$\mathcal{R}_{k+1}(x) = \int_1^x \mathcal{R}_k(t) \frac{dt}{t}. \quad (6.2)$$

Par récurrence on obtient une première estimation :

$$|m(x)| = |\mathcal{R}_0(x)| \leq 1 \quad (x \geq 1) \quad \text{entraîne} \quad |\mathcal{R}_k(x)| \leq \frac{1}{k!} \log^k x \quad (x \geq 1).$$

Seules les fonctions \mathcal{R}_0 et \mathcal{R}_1 sont bornées, nous verrons qu'il y a effectivement un terme principal de l'ordre de $\log^{k-1} x$ dans l'expression asymptotique de \mathcal{R}_k . L'identité (6.2) permet aussi de montrer par récurrence que la fonction \mathcal{R}_k est de classe \mathcal{C}^{k-1} .

Dans ce qui suit, nous explorons deux familles d'identités pour les fonctions \mathcal{R}_k . Premièrement, on construit une relation entre \mathcal{R}_k et \mathcal{R}_{k-1} , puis par récurrence on obtient des majorations concernant \mathcal{R}_k en fonction de $|m|$ et de l'opérateur U . Voici ce que nous obtenons pour $k = 1, 2, 3$.

Proposition 50. *Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable dont on note $I_g = \int_0^1 g(y) dy$ l'intégrale. Pour tout $x \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned} I_g(\mathcal{R}_1(x) - 1) &= \int_1^x \mathcal{R}_0(x/t) U g(t) \frac{dt}{t} + r_1(x), \\ I_g(\mathcal{R}_2(x) - \log x + \gamma) &= \int_1^x (\mathcal{R}_1(x/t) - 1) U g(t) \frac{dt}{t} + r_2(x), \\ I_g(\mathcal{R}_3(x) - \frac{1}{2} \log^2 x + \gamma \log x - \gamma^2 - \gamma_1) &= \int_1^x (\mathcal{R}_2(x/t) - \log(x/t) + \gamma) U g(t) \frac{dt}{t} + r_3(x), \end{aligned}$$

avec les majorations

$$\begin{aligned} |r_1(x)| &\leq \left| \int_0^{1/x} g(y) dy \right|, \\ |r_2(x)| &\leq 0,58 \left| \int_0^{1/x} g(y) dy \right| + \frac{1}{x} \int_{1/x}^1 |g(y)| \frac{dy}{y}, \\ |r_3(x)| &\leq 0,27 \left| \int_0^{1/x} g(y) dy \right| + \frac{0,71}{x} \int_{1/x}^1 |g(y)| \frac{dy}{y}. \end{aligned}$$

Deuxièmement, on obtient directement une identité entre \mathcal{R}_k et M . D'autres opérateurs que U font alors leur apparition, nous étudions les cas $k = 2$ et $k = 3$.

Proposition 51. *Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable au sens de Riemann. On pose*

$$W_1 f(t) = - \sum_{n \leq t} \frac{1}{n} + \log t + 1 - \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} f\left(\frac{n}{t}\right)$$

$$\text{et } W_2 f(t) = \frac{1}{2} \log^2 t + \log t - \sum_{n \leq t} \frac{1}{n} \log \left(\frac{t}{n} \right) - (1 - \gamma) \sum_{n \leq t} \frac{1}{n} - \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} f \left(\frac{n}{t} \right).$$

Pour tout $x \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1(x) - 1 &= \int_1^x \frac{M(x/t)}{x/t} W_1 f(t) \frac{dt}{t} + \frac{1}{x} \int_{1/x}^1 f(y) \frac{dy}{y} - \frac{1}{x} \\ \text{et } \mathcal{R}_2(x) - \log x + \gamma &= \int_1^x \frac{M(x/t)}{x/t} W_2 f(t) \frac{dt}{t} + \frac{1}{x} \int_{1/x}^1 f(y) \frac{dy}{y} - \frac{\gamma}{x}. \end{aligned}$$

Si de plus $\int_0^1 f(y) dy = 1 - \gamma$ alors $\lim_{t \rightarrow \infty} W_1 f(t) = 0$. Et si $\int_0^1 f(y) dy = -\gamma + \gamma^2 + \gamma_1$ alors $\lim_{t \rightarrow \infty} W_2 f(t) = 0$.

6.1 Identités pour les moyennes logarithmiques de Riesz par récurrence

La formule (1.48) p. 17 utilisée avec $a = \mu$, $\eta(t) = t \log^k t / k!$ et $b = 1$ fournit l'identité

$$\int_1^x \mathcal{R}_k(x/t) \frac{1}{t} \sum_{k \leq t} \varphi \left(\frac{t}{k} \right) \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{\log^k(x/t)}{k!} \frac{1}{t} \varphi(t) \frac{dt}{t} \quad (6.3)$$

qui est la base des résultats de cette section.

6.1.1 La fonction \mathcal{R}_1 à partir de la fonction \mathcal{R}_0

Rappelons que la fonction $\mathcal{R}_0 = m$.

Proposition 52. Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable et soit $x \geq 1$, on a :

$$I_g \times (\mathcal{R}_1(x) - 1) = \int_1^x \mathcal{R}_0(x/t) U g(t) \frac{dt}{t} - \int_0^{1/x} g(y) dy. \quad (6.4)$$

Démonstration. Dans la définition de \mathcal{R}_1 on exprime le log avec une intégrale et l'on obtient :

$$\mathcal{R}_1(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \log(x/n) = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \int_1^{x/n} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{m(x/t)}{t} dt = \int_1^x \frac{\mathcal{R}_0(x/t)}{t} dt.$$

Par la formule (1.49) page 18, nous avons :

$$\int_1^x m(x/t) \frac{1}{t^2} \sum_{n \leq t} g(n/t) dt = \frac{1}{x} \int_1^x g(1/u) / u^2 du.$$

Pour finir, en faisant le changement de variable $y = 1/u$, on arrive à $\int_1^x g(1/u) / u^2 du = \int_{1/x}^1 g(y) dy = I_g - \int_0^{1/x} g(y) dy$. \square

Remarque 23. Ainsi l'estimation $|\mathcal{R}_0(x)| = |m(x)| \leq 1$ se convertit en $|\mathcal{R}_1(x) - 1| \leq \|\chi^{-1} U g\|_1 + o(1)$. Par exemple pour $g(y) = 4y(1 - y^2)$ on obtient

$$|\mathcal{R}_1(x) - 1| \leq (3/4 - \gamma) + 1,1/x ,$$

ce qui montre en particulier que $|\mathcal{R}_1(x) - 1| \leq 0,18$ pour tout $x \geq 155$ (et on peut faire le raccord à l'ordinateur pour voir que c'est vrai pour tout $x \geq 3$).

L'équation (6.4) prouve que le théorème des nombres premiers sous la forme $\mathcal{R}_0(x) = m(x) = o(1)$ entraîne que $\mathcal{R}_1(x) = 1 + o(1)$.

6.1.2 La fonction \mathcal{R}_2 à partir de la fonction \mathcal{R}_1

Dans [Shapiro, 1950] Shapiro montre que l'identité de Selberg, c'est-à-dire

$$\sum_{p \leq x} \log^2 p + \sum_{pq \leq x} \log p \log q = 2x \log x + O(x) ,$$

est équivalente à l'identité $\mathcal{R}_2(x) = \log x + O(1)$. Shapiro n'utilise pas le théorème des nombres premiers pour prouver cette équivalence. Cette formule conduit à la première démonstration élémentaire du théorème des nombres premiers par Selberg, voir l'article de Selberg¹ [Selberg, 1949]), on y trouve également la relation $\sum_{p \leq x} \log^2 p + \sum_{pq \leq x} \log p \log q = 2x \mathcal{R}_2(x) + O(x)$ (c'est l'équation 2.6 p. 303).

Pour avoir en tête les conséquences de la proposition suivante, notons que $\mathcal{R}_1(x) - 1 = o(1)$ découle du théorème des nombres premiers et $\mathcal{R}_1(x) - 1 = O(1)$ se déduit de $|m(x)| \leq 1$ combiné avec la formule de la sous-section pour $k = 1$ qui nous a fourni $|\mathcal{R}_1(x) - 1| \leq (3/4 - \gamma) + 1,1/x$ pour tout $x \geq 1$.

Proposition 53. Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable dont on note $I_g = \int_0^1 g(y) dy$ l'intégrale. On a l'égalité, pour tout $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} & I_g(\mathcal{R}_2(x) - \log x + \gamma) \\ &= \int_1^x (\mathcal{R}_1(x/t) - 1) U g(t) \frac{dt}{t} - \int_1^x \left[\sum_{j \leq x/t} 1/j - \log(x/t) - \gamma \right] \frac{g(1/t)}{t} \frac{dt}{t} + \gamma \int_0^{1/x} g(y) dy . \end{aligned}$$

Démonstration. Par l'identité (6.3) de la page 93 utilisée avec $k = 1$ et $\varphi(t) = g(1/t)$ on a

$$\int_1^x \mathcal{R}_1(x/t) \frac{1}{t} \sum_{j \leq t} g\left(\frac{j}{t}\right) \frac{dt}{t} = \int_1^x \log(x/t) \frac{g(1/t)}{t} \frac{dt}{t} . \quad (6.5)$$

Utilisons l'égalité (1.50) de la page 18 avec $\varphi(u) = u$ et $\eta(u) = g(1/u)$

$$\int_1^x \frac{x}{t} \sum_{j \leq t} g\left(\frac{j}{t}\right) \frac{dt}{t} = \int_1^x \sum_{j \leq x/t} \frac{x/t}{j} g(1/t) \frac{dt}{t}$$

et donc

$$\int_1^x \frac{1}{t} \sum_{j \leq t} g\left(\frac{j}{t}\right) \frac{dt}{t} = \int_1^x \sum_{j \leq x/t} \frac{1}{j} \frac{g(1/t)}{t} \frac{dt}{t} . \quad (6.6)$$

1. Selon les dates de publications et l'introduction de Shapiro, il semble que Shapiro n'ait pas lu l'article de Selberg au moment où il publie le sien.

En soustrayant l'équation (6.5) et l'équation (6.6) ci-dessus on obtient :

$$\int_1^x (\mathcal{R}_1(x/t) - 1) \frac{1}{t} \sum_{j \leq t} g\left(\frac{j}{t}\right) \frac{dt}{t} = \int_1^x \left[\log(x/t) - \sum_{j \leq x/t} \frac{1}{j} \right] \frac{g(1/t)}{t} \frac{dt}{t}.$$

Par l'équation (6.2) appliquée avec $k = 1$ et le changement de variable $u = x/t$, on a

$$\mathcal{R}_2(x) = \int_1^x \mathcal{R}_1(u) \frac{du}{u} = \int_1^x \mathcal{R}_1(x/t) \frac{dt}{t}.$$

En écrivant la fonction constante I_g comme suit $I_g = U g(t) + \frac{1}{t} \sum_{j \leq t} g\left(\frac{j}{t}\right)$, puis en intégrant on obtient

$$\begin{aligned} & I_g(\mathcal{R}_2(x) - \log x) \\ &= \int_1^x (\mathcal{R}_1(x/t) - 1) I_g \frac{dt}{t} = \int_1^x (\mathcal{R}_1(x/t) - 1) U g(t) \frac{dt}{t} + \int_1^x \left[\log(x/t) - \sum_{j \leq x/t} \frac{1}{j} \right] \frac{g(1/t)}{t} \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Faisons apparaître la constante d'Euler dans le développement de la série harmonique

$$\begin{aligned} & I_g(\mathcal{R}_2(x) - \log x) \\ &= \int_1^x (\mathcal{R}_1(x/t) - 1) U g(t) \frac{dt}{t} - \int_1^x \left[\sum_{j \leq x/t} \frac{1}{j} - \log(x/t) - \gamma \right] \frac{g(1/t)}{t} \frac{dt}{t} - \gamma \int_1^x \frac{g(1/t)}{t} \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Pour finir, le changement de variable $y = 1/t$ donne

$$-\gamma \int_1^x \frac{g(1/t)}{t} \frac{dt}{t} = -\gamma \int_{1/x}^1 g(y) dy = -\gamma I_g + \gamma \int_0^{1/x} g(y) dy$$

et on obtient la formule annoncée. \square

Corollaire 16. Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable dont on note $I_g = \int_0^1 g(y) dy$ l'intégrale. On a l'égalité, pour tout $x \geq 1$:

$$I_g(\mathcal{R}_2(x) - \log x + \gamma) = \int_1^x (\mathcal{R}_1(x/t) - 1) U g(t) \frac{dt}{t} + \gamma \int_0^{1/x} g(y) dy + \frac{r(x)}{x} \int_{1/x}^1 |g(y)| \frac{dy}{y}$$

avec $|r(x)| \leq 1$.

Démonstration. Pour tout $t \geq 1$, on a $\sum_{j \leq t} 1/j - \log t - \gamma = \varepsilon(t)$ avec $|\varepsilon(t)| \leq 1/t$. Voir le livre de Balazard [Balazard, 2016, page 16 équations 9 et 12]. \square

Remarque 24. Ainsi pour g telle que $\int_0^1 |g(y)| y^{-1} dy < \infty$ on obtient la suite de conversions suivante

$$|m(x)| \leq 1 \Rightarrow |\mathcal{R}_1(x) - 1| \leq \|U g \chi^{-1}\|_1 + O(1/x) \Rightarrow |\mathcal{R}_2(x) - \log x + \gamma| \leq \|U g \chi^{-1}\|_1^2 + O(1/x).$$

Par exemple pour $g(y) = 4y(1 - y^2)$ on obtient

$$|\mathcal{R}_2(x) - \log x + \gamma| \leq (3/4 - \gamma)^2 + \frac{10}{3x} \quad (x \geq 1).$$

6.1.3 La fonction \mathcal{R}_3 à partir de la fonction \mathcal{R}_2

Il faut remarquer que dans la proposition suivante le membre à droite de l'égalité tend vers 0 quand x tend vers l'infini car le corollaire 16 montre que $\mathcal{R}_2(x/t) - \log(x/t) + \gamma = o(1)$. Ainsi le membre de gauche tend également vers 0 et donc $\mathcal{R}_3(x) = \frac{1}{2} \log^2 x - \gamma \log x + \gamma^2 + \gamma_1 + o(1)$.

Proposition 54. Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable dont on note $I_g = \int_0^1 g(y) dy$ l'intégrale. On a l'égalité, pour tout $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} & I_g(\mathcal{R}_3(x) - \frac{1}{2} \log^2 x + \gamma \log x - \gamma^2 - \gamma_1) \\ &= \int_1^x [\mathcal{R}_2(x/t) - \log(x/t) + \gamma] U g(t) \frac{dt}{t} + (\gamma^2 + \gamma_1) \int_0^{1/x} g(y) dy + \frac{r(x)}{x} \int_{1/x}^1 |g(y)| \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

avec $|r(x)| \leq 0,71$.

Nous passerons par plusieurs résultats intermédiaires pour prouver la proposition ci-dessus. Nous essayerons de suivre au plus près la démarche pour $k = 1$ afin d'envisager le k général.

Lemme 28. Soit $\varphi : [1, \infty[\rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable, pour tout $x \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} & \int_1^x [\mathcal{R}_2(x/t) - \log(x/t) + \gamma] \frac{1}{t} \sum_{j \leq t} \varphi\left(\frac{t}{j}\right) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{x} \int_1^x \left[\frac{1}{2} t \log^2(t) - \sum_{j \leq t} \frac{t}{j} \log\left(\frac{t}{j}\right) + \gamma \sum_{j \leq t} \frac{t}{j} \right] \varphi(x/t) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Démonstration. Utilisons l'égalité (1.50) de la page 18 avec $\eta(u) = u$

$$\int_1^x \frac{1}{t} \sum_{j \leq t} \varphi\left(\frac{t}{j}\right) \frac{dt}{t} = \frac{1}{x} \int_1^x \varphi(x/t) \sum_{j \leq t} \frac{t}{j} \frac{dt}{t} \quad (6.7)$$

puis le même lemme avec avec $\eta(u) = u \log u$

$$\int_1^x \frac{1}{t} \sum_{j \leq t} \varphi\left(\frac{t}{j}\right) \log(x/t) \frac{dt}{t} = \frac{1}{x} \int_1^x \sum_{j \leq t} \frac{t}{j} \log\left(\frac{t}{j}\right) \varphi(x/t) \frac{dt}{t}. \quad (6.8)$$

Puis par l'identité (6.3) de la page 93 utilisée avec $k = 2$ on a

$$\int_1^x \mathcal{R}_2(x/t) \frac{1}{t} \sum_{j \leq t} \varphi\left(\frac{t}{j}\right) \frac{dt}{t} = \frac{1}{x} \int_1^x \frac{1}{2} \log^2(t) t \varphi(x/t) \frac{dt}{t}. \quad (6.9)$$

En faisant la combinaison (6.9) - (6.8) + γ (6.7) on obtient la formule annoncée. \square

Étudions le terme $[\frac{1}{2} \log^2(t)t - \sum_{j \leq t} \frac{t}{j} \log(\frac{t}{j}) + \gamma \sum_{j \leq t} \frac{t}{j}]$ qui apparaît dans le membre de droite de la formule du lemme 28 ci-dessus.

Lemme 29. Soit $t \geq 1$ on a

$$\sum_{n \leq t} \frac{t}{n} \log \left(\frac{t}{n} \right) = \frac{1}{2} t \log^2 t + \gamma t \log t - \gamma_1 t + t\alpha(t)$$

avec

$$\alpha(t) = \int_t^\infty \frac{\{u\} - 1/2}{u^2} (1 + \log(t/u)) du \quad \text{et on a} \quad |\alpha(t)| \leq \frac{1}{7t^2}.$$

Démonstration. Voir [Balazard, 2016, équations 10 et 11 page 38] pour l'égalité et l'exercice 34 page 41 (corrigé page 113) dans le même livre. \square

Corollaire 17. Pour tout $t \geq 1$ on a :

$$\frac{\log^2 t}{2} - \sum_{j \leq t} \frac{1}{j} \log \left(\frac{t}{j} \right) + \gamma \sum_{j \leq t} \frac{1}{j} = \gamma_1 + \gamma^2 + o(1)$$

et plus précisément

$$\frac{\log^2 t}{2} - \sum_{j \leq t} \frac{1}{j} \log \left(\frac{t}{j} \right) + \gamma \sum_{j \leq t} \frac{1}{j} = \gamma_1 + \gamma^2 + r(t) \text{ avec } |r(t)| \leq \frac{\gamma}{t} + \frac{1}{7t^2}.$$

Démonstration de la proposition 54. Par l'équation (6.2) appliquée avec $k = 2$ et le changement de variable $u = x/t$, on a

$$\mathcal{R}_3(x) = \int_1^x \mathcal{R}_2(u) \frac{du}{u} = \int_1^x \mathcal{R}_2(x/t) \frac{dt}{t}.$$

La dérivée de $u \mapsto \log^2 u$ est $u \mapsto 2 \frac{1}{u} \log u$ donc

$$\frac{1}{2} \log^2 x = \int_1^x \log u \frac{du}{u} = \int_1^x \log(x/t) \frac{dt}{t}.$$

On a donc

$$\mathbb{I}_g(\mathcal{R}_3(x) - \frac{1}{2} \log^2 x + \gamma \log x) = \int_1^x [\mathcal{R}_2(x/t) - \log(x/t) + \gamma] \mathbb{I}_g \frac{dt}{t}. \quad (6.10)$$

Rappelons la formule du lemme 28 appliqué avec $\varphi(y) = g(1/y)$

$$\begin{aligned} & \int_1^x [\mathcal{R}_2(x/t) - \log(x/t) + \gamma] \frac{1}{t} \sum_{j \leq t} g \left(\frac{j}{t} \right) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{x} \int_1^x \left[\frac{1}{2} t \log^2(t) - \sum_{j \leq t} \frac{t}{j} \log \left(\frac{t}{j} \right) + \gamma \sum_{j \leq t} \frac{t}{j} \right] g(t/x) \frac{dt}{t}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

En écrivant la fonction constante \mathbb{I}_g comme suit $\mathbb{I}_g = \mathbb{U}g(t) + \frac{1}{t} \sum_{j \leq t} g \left(\frac{j}{t} \right)$, puis en intégrant et en utilisant les égalités (6.10) et (6.11) on obtient

$$\mathbb{I}_g(\mathcal{R}_3(x) - \frac{1}{2} \log^2 x + \gamma \log x) = \int_1^x [\mathcal{R}_2(x/t) - \log(x/t) + \gamma] \mathbb{U}g(t) \frac{dt}{t}$$

$$+ \frac{1}{x} \int_1^x \left[\frac{1}{2} \log^2(t) - \sum_{j \leq t} \frac{1}{j} \log\left(\frac{1}{j}\right) + \gamma \sum_{j \leq t} \frac{1}{j} \right] g(t/x) dt ,$$

le changement de variable $y = 1/t$ donne

$$\frac{1}{x} \int_1^x -(\gamma^2 + \gamma_1) g(t/x) dt = -(\gamma^2 + \gamma_1) \int_{1/x}^1 g(y) dy = -(\gamma^2 + \gamma_1) I_g + (\gamma^2 + \gamma_1) \int_0^{1/x} g(y) dy$$

et donc

$$\begin{aligned} I_g(\mathcal{R}_3(x) - \frac{1}{2} \log^2 x + \gamma \log x - \gamma^2 - \gamma_1) &= \int_1^x [\mathcal{R}_2(x/t) - \log(x/t) + \gamma] U g(t) \frac{dt}{t} \\ + \frac{1}{x} \int_1^x \left[\frac{1}{2} \log^2(t) - \sum_{j \leq t} \frac{1}{j} \log\left(\frac{1}{j}\right) + \gamma \sum_{j \leq t} \frac{1}{j} - (\gamma^2 + \gamma_1) \right] g(t/x) dt &+ (\gamma^2 + \gamma_1) \int_0^{1/x} g(y) dy . \end{aligned}$$

Par le lemme 29 on a

$$\frac{\log^2 t}{2} - \sum_{j \leq t} \frac{1}{j} \log\left(\frac{t}{j}\right) + \gamma \sum_{j \leq t} \frac{1}{j} = \gamma_1 + \gamma^2 + r(t) \text{ avec } |r(t)| \leq \frac{\gamma}{t} + \frac{1}{7t^2} \leq \frac{\gamma + 1/7}{t} ,$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x} \int_1^x \left[\frac{1}{2} \log^2(t) - \sum_{j \leq t} \frac{1}{j} \log\left(\frac{1}{j}\right) + \gamma \sum_{j \leq t} \frac{1}{j} - (\gamma^2 + \gamma_1) \right] g(t/x) dt \right| \\ \leq (\gamma + 1/7) \frac{1}{x} \int_1^x x/t |g(t/x)| dt = (\gamma + 1/7) \int_{1/x}^1 |g(y)| \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

où dans la dernière égalité on a effectué le changement de variable $y = t/x$. \square

Remarque 25. Ainsi pour g telle que $\int_0^1 |g(y)| y^{-1} dy < \infty$ on obtient la suite de conversions suivante

$$\begin{aligned} |m(x)| \leq 1 &\Rightarrow |\mathcal{R}_1(x) - 1| \leq \|Ug \chi^{-1}\|_1 + O(1/x) \\ &\Rightarrow |\mathcal{R}_2(x) - \log x + \gamma| \leq \|Ug \chi^{-1}\|_1^2 + O(1/x) \\ &\Rightarrow |\mathcal{R}_3(x) - \frac{1}{2} \log^2 x + \gamma \log x - \gamma^2 - \gamma_1| \leq \|Ug \chi^{-1}\|_1^3 + O(1/x) . \end{aligned}$$

Par exemple pour $g(y) = 4y(1 - y^2)$ on obtient

$$|\mathcal{R}_3(x) - \frac{1}{2} \log^2 x + \gamma \log x - \gamma^2 - \gamma_1| \leq (3/4 - \gamma)^3 + \frac{3}{x} \quad (x \geq 1) .$$

6.2 Identités pour les moyennes logarithmiques de Riesz passant par la fonction M

On peut aussi exprimer les moyennes de Riesz en passant par la fonction M plutôt que la fonction m comme l'a fait Balazard pour $k = 1$ dans [Balazard, 2012b]. Généralisons la fabrication de cette identité.

6.2.1 \mathcal{R}_1 à partir de M

Proposition 55. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable. On pose

$$W_1 f(t) = - \sum_{n \leq t} \frac{1}{n} + \log t + 1 - \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} f\left(\frac{n}{t}\right).$$

Pour tout $x \geq 1$ on a :

$$\mathcal{R}_1(x) - 1 = \int_1^x \frac{M(x/t)}{x/t} W_1 f(t) \frac{dt}{t} + \frac{1}{x} \int_1^x \frac{f(1/y)}{y} dy - \frac{1}{x}.$$

Si $\int_0^1 f(y) dy = 1 - \gamma$ alors $\lim_{t \rightarrow \infty} W_1 f(t) = 0$. Si de plus $f \in \mathcal{C}^K[0, 1]$ avec $K \geq 1$ un entier alors on a le développement suivant

$$\begin{aligned} W_1 f(t) &= \sum_{k=1}^K \frac{1}{k! t^k} \left(f^{(k-1)}(1) \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} + 1 \right) B_k(\{t\}) + \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^k}{k! t^k} f^{(k-1)}(0) B_k(0) \\ &\quad + \frac{(-1)^K}{K! t^K} \int_0^1 f^{(K)}(y) B_K(\{yt\}) dy - \int_t^\infty \frac{B_K(\{u\})}{u^{K+1}} du \quad (t \geq 1) \end{aligned}$$

où B_k désigne le polynôme de Bernoulli unitaire de degré k .

Démonstration. D'une part, puisque $\int_1^y (\log t + 1) dt = y \log y$, une interversion de somme et d'intégrale donne

$$\frac{1}{x} \int_1^x M(x/t) (\log t + 1) dt = \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \mu(n) \frac{x}{n} \log(x/n) = \mathcal{R}_1(x). \tag{6.12}$$

D'autre part, le lemme 1 de la page 5 appliqué avec $\delta(t) = t + f(1/t)$ donne

$$\frac{1}{x} \int_1^x M(x/t) \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} (t/n + f(n/t)) dt = \frac{1}{x} \int_1^x (1 + f(1/y)/y) dy = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \int_1^x f(1/y)/y dy. \tag{6.13}$$

Par les équations (6.12) et (6.13) on obtient

$$\int_1^x \frac{M(x/t)}{x/t} W_1 f(t) \frac{dt}{t} + \frac{1}{x} = \mathcal{R}_1(x) + 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \int_1^x f(1/y)/y dy$$

ce qui donne l'identité annoncée en soustrayant 1 dans chaque membre.

On peut écrire

$$W_1 f(t) = - \sum_{n \leq t} 1/n + \log t + \gamma + \left((1 - \gamma) - \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} f(n/t) \right) \tag{6.14}$$

et si $\int_0^1 f(y) dy = 1 - \gamma$, par le lemme 5 sur les sommes de Riemann et le développement asymptotique de la série harmonique on a $\lim_{t \rightarrow \infty} W_1 f(t) = 0$.

Rappelons la formule (3.3), pour $R(t) = H(t) - \log(t) - \gamma$:

$$R(t) = - \sum_{k=1}^K \frac{B_k(\{t\})}{k! t^k} + \int_t^\infty \frac{B_K(\{y\})}{y^{K+1}} dy.$$

La formule (6.14) s'écrit $W_1 f = -R + Uf$ et par la formule (1.12) du théorème 1 page 4 appliquée avec $g = f$ on a

$$Uf(t) = \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{k-1}}{k!t^k} \left(B_k(\{t\}) f^{(k-1)}(1) - B_k(0) f^{(k-1)}(0) \right) + \frac{(-1)^K}{K!t^K} \int_0^1 f^{(K)}(y) B_K(\{yt\}) dy . \quad \square$$

Remarque 26. Rappelons l'identité de [Balazard, 2012b, p. 15] :

$$\int_1^x m(t) \frac{dt}{t} - 1 = \frac{1-2\gamma}{x} + \frac{2\gamma-2}{x^2} + \frac{1}{x} \int_1^x M(x/t) \varepsilon'_3(t) dt$$

où la fonction ε'_3 vérifie $|\varepsilon'_3(t)| \leq 1/t$ pour tout t différent d'un nombre entier. Dans notre cadre, la fonction ε'_3 provient de $f(y) = (1-\gamma)2y$. Plus précisément on a $W_1 f = \varepsilon'_3$ et l'inégalité $|tW_1 f(t)| \leq 1$ pour tout $t \geq 1$ qui n'est pas un nombre entier donne

$$|\mathcal{R}_1(x) - 1| \leq \frac{1}{x} \int_1^x |M(t)| \frac{dt}{t} + \frac{1}{x} .$$

Le choix $f(y) = \frac{30}{5-6\gamma} ((6\gamma-3)y + 4 - 6\gamma)(y-1)^2 y^2$ dans la proposition précédente donne $\|\chi^1 W_1 f\|_\infty = 2 \log 2 - 15/8(1-\gamma) \leq 0,6$ et on peut donc baisser le coefficient 1 devant l'intégrale de l'estimation de Balazard.

On obtient l'analogie du résultat de Balazard rappelé en (2.1) p. 23.

Corollaire 18. *Pour tout entier $\ell \geq 1$ il existe des constantes C_ℓ et D_ℓ telles que*

$$|\mathcal{R}_1(x) - 1| \leq \frac{C_\ell}{x^\ell} \int_1^x |M(y)| y^{\ell-2} dy + \frac{D_\ell}{x} \quad (x \geq 1) .$$

Démonstration. Soit f un polynôme de degré d_f avec $\int_0^1 f(y) dy = 1-\gamma$ alors pour tout entier $K > d_f$, par la proposition 55 on a le développement

$$W_1 f(t) = \sum_{k=1}^K \frac{1}{k!t^k} \left(f^{(k-1)}(1) \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} + 1 \right) B_k(\{t\}) + \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^k}{k!t^k} f^{(k-1)}(0) B_k(0) + O(t^{-K}) .$$

Supposons $K > \ell$, si les conditions

$$\begin{cases} f^{(k-1)}(0) = 0 & k \in \{1, \dots, \ell\} \\ f^{(k-1)}(1) = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} & k \in \{1, \dots, \ell\} \\ \int_0^1 f(y) dy = 1 - \gamma \end{cases}$$

sont vérifiées alors $W_1 f(t) = O(t^{-\ell})$. Posons $f(t) = \sum_{j=0}^{d_f} \frac{a_j}{j!} t^j$, en dérivant on montre que $f^{(k)}(t) = \sum_{j=k}^{d_f} \frac{a_j}{(j-k)!} t^{j-k}$ et $f^{(k)}(1) = \sum_{j=k}^{d_f} \frac{a_j}{(j-k)!}$. Les conditions ci-dessus équivalent au système linéaire suivant, dont les inconnues sont les a_j

$$\begin{cases} a_k = 0 & k \in \{0, \dots, \ell-1\} \\ \sum_{j=k}^{d_f} \frac{a_j}{(j-k)!} = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} & k \in \{0, \dots, \ell-1\} \\ \sum_{j=0}^{d_f} \frac{a_j}{(j+1)!} = 1 - \gamma . \end{cases}$$

Ce système linéaire a $d_f + 1$ inconnues et $2\ell + 1$ équations. Donc il y a des solutions pourvu que le degré du polynôme dépasse le nombre d'équations, soit $d_f \geq 2\ell$.

Par l'égalité sur $\mathcal{R}_1(x) - 1$ du lemme 55 et l'inégalité triangulaire on a

$$|\mathcal{R}_1(x) - 1| \leq \int_1^x \frac{|M(x/t)|}{x/t} |W_1 f(t)| \frac{dt}{t} + \frac{1}{x} \int_1^x \frac{|f(1/y)|}{y} dy - \frac{1}{x}.$$

Puisque $\ell \geq 1$ on a, par la première ligne du système linéaire, $f(0) = 0$ donc $f(y) = yg(y)$ avec g un polynôme et

$$\int_1^x \frac{|f(1/y)|}{y} dy = \int_1^x \frac{|g(1/y)|}{y^2} dy \leq \max_{u \in [0,1]} |g(u)| \int_1^x \frac{1}{y^2} dy = O(1)$$

et puisque $|W_1 f(t)| \leq C_\ell t^{-\ell}$

$$|\mathcal{R}_1(x) - 1| \leq C_\ell \int_1^x \frac{|M(x/t)|}{x/t} t^{-\ell} \frac{dt}{t} + O(1/x)$$

en faisant le changement de variable $y = x/t$ on arrive à

$$|\mathcal{R}_1(x) - 1| \leq C_\ell \int_1^x \frac{|M(y)|}{y} y^\ell x^{-\ell} \frac{dy}{y} + O(1/x)$$

ce qui est le résultat annoncé. □

6.2.2 \mathcal{R}_2 à partir de M

Regardons également le cas $k = 2$ pour exprimer $\mathcal{R}_2(x)$ en fonction de M .

Proposition 56. *Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable. On pose*

$$W_2 f(t) = \frac{1}{2} \log^2 t + \log t - \sum_{n \leq t} \frac{1}{n} \log \left(\frac{t}{n} \right) - (1 - \gamma) \sum_{n \leq t} \frac{1}{n} - \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} f \left(\frac{n}{t} \right).$$

Pour tout $x \geq 1$ on a

$$\mathcal{R}_2(x) - \log x + \gamma = \int_1^x \frac{M(x/t)}{x/t} W_2 f(t) \frac{dt}{t} - \frac{\gamma}{x} + \frac{1}{x} \int_1^x f(1/y) \frac{dy}{y}.$$

Si de plus $\int_0^1 f(y) dy = -\gamma + \gamma^2 + \gamma_1$ alors $\lim_{t \rightarrow \infty} W_2 f(t) = 0$.

Démonstration. Puisque $\int_1^y (\log^2 t + 2 \log t) dt = y \log^2 y$, une interversion de somme et d'intégrale donne

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \log^2 \left(\frac{x}{n} \right) = \int_1^x M(x/t) (\log^2 t + 2 \log t) dt$$

$$\mathcal{R}_2(x) = \int_1^x M(x/t) \left(\frac{1}{2} \log^2 t + \log t \right) dt.$$

Par ailleurs le lemme 1 de la page 5 appliqué avec $\delta(t) = t \log t + (1 - \gamma)t$ donne

$$\int_1^x M(x/t) \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} (t/n \log(t/n) + (1 - \gamma)t/n) dt = \int_1^x (y \log y + (1 - \gamma)y) \frac{dy}{y} = x \log x - \gamma x + \gamma$$

et le même lemme appliqué avec $\delta(t) = f(1/t)$ fournit

$$\int_1^x M(x/t) \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} f(n/t) dt = \int_1^x f(1/y) \frac{dy}{y}.$$

Par le lemme 29 de la page 97, on a

$$\sum_{n \leq t} \frac{t}{n} \log \left(\frac{t}{n} \right) = \frac{1}{2} t \log^2 t + \gamma t \log t - \gamma_1 t + t\alpha(t) \quad \text{avec} \quad |\alpha(t)| \leq \frac{1}{7t^2}.$$

Par [Balazard, 2016, page 16 équations 9 et 12] on a

$$\sum_{n \leq t} \frac{1}{n} = \log t + \gamma + \varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad |\varepsilon(t)| \leq \frac{1}{t}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} \left(\frac{t}{n} \log \left(\frac{t}{n} \right) + (1 - \gamma) \frac{t}{n} \right) &= \frac{1}{2} \log^2 t + \gamma \log t - \gamma_1 + \alpha(t) + (1 - \gamma)(\log t + \gamma + \varepsilon(t)) \\ &= \frac{1}{2} \log^2 t + \log t - \gamma_1 + \gamma - \gamma^2 + \alpha(t) + (1 - \gamma)\varepsilon(t) \end{aligned}$$

et par combinaison linéaire on arrive à

$$W_2 f(t) = \gamma_1 - \gamma + \gamma^2 - \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} f \left(\frac{n}{t} \right) - \alpha(t) - (1 - \gamma)\varepsilon(t).$$

Si $\int_0^1 f(y) dy = -\gamma + \gamma^2 + \gamma_1$, par le lemme 5 sur les sommes de Riemann on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_2 f(t) = 0.$$

□

6.3 Une version lissée de m_1

On va voir qu'une version lissée de m_1 , plus précisément l'intégrale suivante $\int_1^x m_1(t) \frac{dt}{t}$, permet d'exprimer \mathcal{R}_1 en fonction de m_1 . Nous utiliserons ces identités pour obtenir une estimation de $|\mathcal{R}_1 - 1|$ en fonction de $\max_{n \leq x} |M(n)|$.

Les bonnes majorations obtenues pour $|m_1|$ pourraient ainsi passer à $|\mathcal{R}_1 - 1|$ avec peu de perte.

Proposition 57. *Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable et soit $x \geq 1$, on a :*

$$I_g \times (-m_1(x) + \mathcal{R}_1(x) - 1) = \int_1^x m_1(x/t) U g(t) \frac{dt}{t} - \frac{1}{x} \int_{1/x}^1 g(y)/y dy - \int_0^{1/x} g(y) dy.$$

Démonstration. On soustrait la formule encadrée dans le théorème 1 et la formule de la proposition 52, on obtient la formule souhaitée. Il est aussi possible d'utiliser la proposition 6 page 17 en prenant les données $a(n) = \mu(n)$, $\eta(t) = t(1 - 1/t)$, $b(n) = 1$ et $\varphi(t) = g(1/t)$. □

Pour contrôler $\|\chi U \mathcal{Z}_{\theta, K}\|_\infty$ (voir définition (3.2) p. 54) en fonction de $|M|$ nous avons besoin d'estimation de $|\mathcal{R}_1(K) - 1|$ en fonction du $\max_{k \leq K} |M(k)|$ et l'estimation (6.1) de Balazard rappelée plus haut ne suffit pas. Rappelons que nous avons besoin de contrôler $\|\chi U g\|_\infty$ dans les conversions de $|M(x)|/x \leq f(x)$ pour $x \geq T$ à l'aide de l'inégalité

$$|\mathbf{I}_g m_1(x)| \leq \frac{\|\chi U g\|_\infty}{x} \int_1^T \frac{|M(u)|}{u} du + \int_{x/T}^x f(x/t) |Ug(t)| \frac{dt}{t} + \frac{\|Vg\|_\infty}{x} \quad (x \geq T).$$

Corollaire 19. *On a les estimations :*

$$|\mathcal{R}_1(x) - 1| \leq 0,4 \left[\frac{1}{x} \max_{n \leq x} |M(n)| \right] + \frac{8}{x} \quad (x \geq 1),$$

$$|\mathcal{R}_1(x) - 1| \leq \frac{1}{7\,500\,000} \quad (x \geq 10^{14}).$$

Démonstration. Le corollaire 3 page 22 fournit

$$|m_1(u)| \leq \frac{1}{3} \left[\frac{1}{u} \max_{n \leq u} |M(n)| \right] + \frac{8/3}{u} \quad (u \geq 1).$$

La fonction $g(y) = 4y(1 - y^2)$ est positive et $\mathbf{I}_g = 1$, appliquons alors la proposition 57 qui précède :

$$-m_1(x) + \mathcal{R}_1(x) - 1 = \int_1^x m_1(x/t) \varepsilon_1'(t) \frac{dt}{t} - \frac{1}{x} \int_{1/x}^1 g(y)/y dy - \int_0^{1/x} g(y) dy.$$

Un calcul de primitive donne

$$0 \leq \frac{1}{x} \int_{1/x}^1 g(y)/y dy + \int_0^{1/x} g(y) dy = \frac{8x^3 - 6x^2 + 1}{3x^4} \leq \frac{8/3}{x},$$

de sorte que

$$|-m_1(x) + \mathcal{R}_1(x) - 1| \leq \int_1^x |m_1(x/t)| \varepsilon_1'(t) \frac{dt}{t} + \frac{8/3}{x}. \quad (6.15)$$

Ainsi

$$|\mathcal{R}_1(x) - 1| \leq \frac{1}{3} \left[\frac{1}{x} \max_{n \leq x} |M(n)| \right] \left(1 + \int_1^\infty \varepsilon_1'(t) \frac{dt}{t} \right) + \frac{1}{x} \int_1^\infty \varepsilon_1'(t) \frac{8/3 dt}{x/t} + \frac{16/3}{x}.$$

Puisque par la proposition 8 on a $\int_1^\infty \varepsilon_1'(t) t^{-1} dt = 3/4 - \gamma$, on aboutit à

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_1(x) - 1| &\leq \frac{(7/4 - \gamma)}{3} \left[\frac{1}{x} \max_{n \leq x} |M(n)| \right] + \frac{16/3}{x} + \frac{8/3}{x^2} \\ &\leq 0,4 \left[\frac{1}{x} \max_{n \leq x} |M(n)| \right] + \frac{8}{x}. \end{aligned}$$

Passons à la deuxième majoration. Par l'équation (6.15) et la majoration de la proposition 35 on a

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{8\,850\,000} \quad (x \geq T)$$

où $T = 1,35 \times 10^{12}$. Par la proposition 8, $0 \leq t^2 \varepsilon_1'(t) \leq 1$, et l'on obtient donc

$$|\mathcal{R}_1(x) - 1| \leq \frac{1}{8\,850\,000}(1 + 3/4 - \gamma) + \frac{1}{x^2} \int_1^T |M(t)| dt + \frac{8/3}{x} \quad (x \geq T).$$

Par [Hurst, 2018] $|M(t)| \leq \sqrt{t}$ pour $t \leq 10^{16}$ et donc

$$|\mathcal{R}_1(x) - 1| \leq \frac{1}{8\,850\,000}(1 + 3/4 - \gamma) + r(x) \quad (x \geq T)$$

où $r(x) = \frac{2T^{3/2}}{3x^2} + \frac{8/3}{x}$ est une fonction décroissante. On conclut puisque

$$\frac{1}{8\,850\,000}(1 + 3/4 - \gamma) + r(10^{14}) \leq \frac{1}{7\,500\,000}.$$

□

Chapitre 7

Conversions d'estimations non effectives

L'estimation non effective de la fonction $|M|$ la plus forte dont on dispose est

$$M(x) \ll x \exp\left(-\mathbf{c} \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log \log x)^{1/5}}\right) \quad (7.1)$$

avec $\mathbf{c} > 0$. Elle est issue de la méthode de Korobov-Vinogradov sur des sommes d'exponentielles pour déterminer une région sans zéros de la fonction zêta de Riemann. Comment convertir cette majoration pour $|M|$ en une majoration pour $|m_1|$? Si l'on part de la formule

$$m_1(x) = \int_1^x \frac{M(t)}{t^2} dt \quad (x \geq 1)$$

et de l'inégalité triangulaire, on n'obtient même pas une majoration qui tend vers 0. Mais puisque $m_1(x) = o(1)$, on peut aussi écrire

$$m_1(x) = - \int_x^\infty \frac{M(t)}{t^2} dt \quad (x \geq 1), \quad (7.2)$$

ce qui donne un meilleur résultat comme nous allons le voir, mais la majoration asymptotique obtenue pour $|m_1|$ reste moins bonne que le membre de droite de (7.1) divisé par x . En effet même en supposant l'estimation un peu plus forte $M(x) \ll x \exp(-\mathbf{c}(\log x)^{3/5})$, on peut seulement déduire de (7.2) que

$$m_1(x) \ll \int_x^\infty \exp(-\mathbf{c}(\log t)^{3/5}) \frac{dt}{t} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{5}{3\mathbf{c}} (\log x)^{2/5} \exp(-\mathbf{c}(\log x)^{3/5}).$$

Ces deux premières approches reposent uniquement sur la formule sommatoire d'Abel et donc ne dépendent pas spécifiquement de propriétés liées à la fonction de Möbius. Il est plus efficace de suivre les idées de [Ramaré, 2015], c'est-à-dire d'utiliser l'inégalité de Balazard

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{x^2} \int_1^x |M(u)| du + \frac{8/3}{x} \quad (x \geq 1). \quad (7.3)$$

Comme $x \mapsto x \exp\left(-\mathbf{c} \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log \log x)^{1/5}}\right)$ est croissante à partir d'un certain rang, on déduit de (7.1) et (7.3) que

$$m_1(x) \ll \exp\left(-\mathbf{c} \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log \log x)^{1/5}}\right).$$

En utilisant les fonctions \mathcal{Z} tronquées introduites dans le chapitre 3 nous arrivons à l'estimation suivante qui est meilleure.

Proposition 58. *Soit $\mathbf{c} > 0$. L'estimation*

$$\frac{M(x)}{x} \ll \exp\left(-\mathbf{c} \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log \log x)^{1/5}}\right)$$

entraîne la suivante

$$m_1(x) \ll_{\mathbf{c}} \exp\left(-1,06\mathbf{c} \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log \log x)^{1/5}}\right).$$

Pour démontrer ce résultat, nous utiliserons les fonctions $\mathcal{Z}_{\theta,K}$ définies en (3.2) qui approchent la fonction $\mathcal{Z}(y) = m(1/y)/y$ qui annule l'opérateur U . On choisit la fonction $\theta(y) = g_2(y) = 4y(1 - y^2)$ qui est telle que $U\theta = \varepsilon'_1$ (cf. proposition 8 p. 19).

Lemme 30. *Soit $\theta(y) = 4y(1 - y^2)$ et $K \geq 10$ un nombre entier, on a :*

$$\|\mathbf{V}\mathcal{Z}_{\theta,K}\|_{\infty} \leq K.$$

Démonstration. Rappelons la formule (3.7) p. 55 : pour tout $x \geq K$, on a

$$\mathbf{V}\mathcal{Z}_{\theta,K}(x) = Km_1(K) + K(1 - \mathcal{R}_1(K)) \int_{K/x}^1 \theta(u) \frac{du}{u}.$$

Par l'exercice 61 page 83 de [Balazard, 2016] et son corrigé p. 130-131, on a $|m_1(x)| \leq 0,5$ pour tout $x \geq 1$. De plus on a $0 \leq \int_{K/x}^1 \theta(u) \frac{du}{u} \leq \int_0^1 \theta(u) \frac{du}{u} = 8/3$. Enfin on a $|\mathcal{R}_1(x) - 1| \leq 0,01$ pour tout $x \geq 10$ (voir [Ramaré, 2013a] corollary 1.6 p.1361). \square

Lemme 31. *Soit $\theta(y) = 4y(1 - y^2)$ et $K \geq 10$ un nombre entier, on a :*

$$\|\chi U\mathcal{Z}_{\theta,K}\|_{\infty} \leq 3K.$$

Démonstration. Puisque $U\theta = \varepsilon'_1$, la formule (3.5) p. 55 donne :

$$\begin{aligned} U\mathcal{Z}_{\theta,K}(t) &= (1 - \mathcal{R}_1(K))\varepsilon'_1(t/K) + \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{K-1} \mu(k)\{t/k\} \\ &\quad - \frac{m(K-1)K}{t} \left(\{t/K\} - 1/2 + \int_1^{\infty} \frac{(1/2 - \{vt/K\})}{v^2} dv \right) - \frac{1}{t} \int_1^{\infty} \sum_{k=1}^{K-1} \mu(k)\{vt/k\}v^{-2} dv. \end{aligned}$$

La proposition 8 fournit la majoration $|\varepsilon'_1(t/K)| \leq K/t$. En employant également les majorations $|m(K)| \leq 0,1$ et $|\mathcal{R}_1(K) - 1| \leq 0,01$ (voir [Ramaré, 2013a] p. 1361) nous parvenons à

$$|tU\mathcal{Z}_{\theta,K}(t)| \leq 0,01K + K - 1 + 0,1K + K - 1 \leq 3K. \quad \square$$

Corollaire 20. Soient $\theta(y) = 4y(1 - y^2)$, $K \geq 10$ un nombre entier et $0 \leq r < 1/2$. On a :

$$\frac{1}{K^r} \int_K^\infty |\mathcal{U}\mathcal{Z}_{\theta,K}(t)| \frac{dt}{t^{1-r}} \leq \frac{11}{1/2-r} \left[\frac{1}{K} \max_{k \leq K} |M(k)| \right]^{1/2}.$$

Démonstration. Par la proposition 30 de la page 58, nous avons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{K^r} \int_K^\infty |\mathcal{U}\mathcal{Z}_{\theta,K}(t)| \frac{dt}{t^{1-r}} \\ & \leq \|\mathcal{U}\theta \chi^{-1+r}\|_1 |1 - \mathcal{R}_1(K)| + \frac{1}{1-r} |m(K)| + \frac{1}{(1-r)K} + \frac{3\sqrt{8}}{1/2-r} \left[\frac{1}{K} \max_{\ell \leq K} |M(\ell)| \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Par le corollaire 3 page 22 appliqué avec $x = K$ on a

$$|m_1(K)| \leq \frac{1}{3} \left[\frac{1}{K} \max_{u \leq K} |M(u)| \right] + \frac{8/3}{K} \quad (K \geq 1).$$

Par la proposition 8 on a $0 \leq \mathcal{U}\theta(t) = \varepsilon'_1(t) \leq t^{-2}$ et donc $\|\mathcal{U}\theta \chi^{-1+r}\|_1 \leq 1/(2-r)$. Utilisons le corollaire 19 de la page 103 avec $x = K$ pour estimer $|1 - \mathcal{R}_1(K)|$. On obtient

$$\begin{aligned} & \int_K^\infty |\mathcal{U}\mathcal{Z}_{\theta,K}(t)| \frac{dt}{t^{1-r}} \leq \frac{1}{2-r} \left(0,4 \left[\frac{1}{K} \max_{n \leq K} |M(n)| \right] + \frac{8}{K} \right) \\ & + \frac{1}{1-r} \left[\frac{4/3}{K} \max_{u \leq K} |M(u)| \right] + \frac{8/3}{(1-r)K} + \frac{3\sqrt{8}}{1/2-r} \left[\frac{1}{K} \max_{\ell \leq K} |M(\ell)| \right]^{1/2} \\ & = \left(\frac{0,4}{2-r} + \frac{4/3}{1-r} + \frac{3\sqrt{8}}{1/2-r} \right) \frac{1}{K} + \left(\frac{0,4}{2-r} + \frac{4/3}{1-r} + \frac{3\sqrt{8}}{1/2-r} \right) \left[\frac{1}{K} \max_{k \leq K} |M(k)| \right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Pour majorer les termes en facteur de $1/K$, on observe la factorisation

$$(1/2-r) \left(\frac{8}{2-r} + \frac{8/3}{(1-r)} \right) = \frac{32}{3} \frac{(5/4-r)(1/2-r)}{2-r} \frac{1}{1-r}$$

qui est le produit de deux fonctions positives décroissantes sur $r \in [0, 1/2]$, donc

$$\frac{1}{2-r} \frac{8}{K} + \frac{8/3}{(1-r)K} \leq \frac{3,4}{1/2-r} \frac{1}{K}. \tag{7.5}$$

De plus, pour $K \geq 10$, on a $\max_{k \leq K} |M(k)| \geq 2$ et donc

$$\frac{\sqrt{20}}{K} \leq \left(\frac{2}{K} \right)^{1/2} \leq \left[\frac{1}{K} \max_{k \leq K} |M(k)| \right]^{1/2}. \tag{7.6}$$

D'autre part, on a aussi l'égalité

$$(1/2-r) \left(\frac{0,4}{2-r} + \frac{4/3}{1-r} + \frac{3\sqrt{8}}{1/2-r} \right) = \frac{P(r)}{(2-r)(1-r)}$$

où $P(r)$ est un polynôme de degré deux dont les racines valent $0,93... < 1$ et $1,94... < 2$, on obtient donc également le produit de deux fonctions positives décroissantes sur $r \in [0, 1/2]$ et donc

$$\frac{0,4}{2-r} + \frac{4/3}{1-r} + \frac{3\sqrt{8}}{1/2-r} \leq \frac{9,3}{1/2-r}. \quad (7.7)$$

En reprenant la majoration (7.4) et en utilisant les majorations (7.5), (7.6) et (7.7), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{K^r} \int_K^\infty |\mathcal{U}\mathcal{Z}_{\theta,K}(t)| \frac{dt}{t^{1-r}} &\leq \frac{1}{1/2-r} \left(\frac{3,4}{K} + 9,3 \left(\frac{1}{K} \max_{k \leq K} |M(k)| \right)^{1/2} \right) \\ &\leq \frac{1}{1/2-r} \left(\frac{\sqrt{20}}{K} + 9,3 \left(\frac{1}{K} \max_{k \leq K} |M(k)| \right)^{1/2} \right) \\ &\leq \frac{10,3}{1/2-r} \left(\frac{1}{K} \max_{k \leq K} |M(k)| \right)^{1/2}. \quad \square \end{aligned}$$

Démonstration de la proposition 58. Posons $f(x) = x^r \exp(-\mathbf{c}(\log x)^{3/5}/(\log \log x)^{1/5})$ avec $r = 0,4$. La fonction f est croissante à partir d'un certain seuil noté $T_{\mathbf{c}}$. Par le théorème 1 de la page 4 appliqué avec la fonction $g = \mathcal{Z}_{\theta,K}$ on a l'égalité :

$$m_1(x) = \int_K^{x/T_{\mathbf{c}}} \frac{M(x/t)}{x/t} \mathcal{U}\mathcal{Z}_{\theta,K}(t) \frac{dt}{t} + \int_{x/T_{\mathbf{c}}}^x \frac{M(x/t)}{x/t} \mathcal{U}\mathcal{Z}_{\theta,K}(t) \frac{dt}{t} + \frac{\mathcal{V}\mathcal{Z}_{\theta,K}(x)}{x} \quad (x \geq 1).$$

Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que

$$\frac{|M(x)|}{x} \leq A \exp \left(-\mathbf{c} \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log \log x)^{1/5}} \right) \quad (x \geq 3).$$

Puisque $t \mapsto f(x/t)$ est décroissante pour $t \in [K, x/T_{\mathbf{c}}]$ on obtient la dernière inégalité parmi les deux qui suivent

$$\begin{aligned} \int_K^{x/T_{\mathbf{c}}} \frac{|M(x/t)|}{x/t} |\mathcal{U}\mathcal{Z}_{\theta,K}(t)| \frac{dt}{t} &\leq \frac{A}{x^r} \int_K^{x/T_{\mathbf{c}}} f(x/t) |\mathcal{U}\mathcal{Z}_{\theta,K}(t)| \frac{dt}{t^{1-r}} \\ &\leq \frac{A f(x/K)}{x^r} \int_K^{x/T_{\mathbf{c}}} |\mathcal{U}\mathcal{Z}_{\theta,K}(t)| \frac{dt}{t^{1-r}}. \end{aligned}$$

Donc on a

$$\int_1^{x/T_{\mathbf{c}}} \frac{|M(x/t)|}{x/t} |\mathcal{U}\mathcal{Z}_{\theta,K}(t)| \frac{dt}{t} \leq \frac{A}{K^r} \exp \left(-\mathbf{c} \frac{(\log x/K)^{3/5}}{(\log \log x/K)^{1/5}} \right) \int_K^\infty |\mathcal{U}\mathcal{Z}_{\theta,K}(t)| \frac{dt}{t^{1-r}}.$$

Par le corollaire 20 p. 107 (que l'on peut utiliser puisque $r < 0,5$) on a

$$\frac{1}{K^r} \int_K^\infty |\mathcal{U}\mathcal{Z}_{\theta,K}(t)| \frac{dt}{t^{1-r}} \leq \frac{11}{1/2-r} \left[\frac{1}{K} \max_{k \leq K} |M(k)| \right]^{1/2}$$

et donc

$$\int_1^{x/T_{\mathbf{c}}} \frac{|M(x/t)|}{x/t} |\mathcal{U}\mathcal{Z}_{\theta,K}(t)| \frac{dt}{t}$$

$$\begin{aligned} &\leq 110A \exp\left(-\mathbf{c} \frac{(\log x/K)^{3/5}}{(\log \log x/K)^{1/5}}\right) \left[\frac{1}{K} \max_{k \leq K} |M(k)|\right]^{1/2} \\ &\leq 110A \exp\left(-\mathbf{c} \frac{(\log x/K)^{3/5}}{(\log \log x)^{1/5}}\right) \left[\frac{1}{K} \max_{k \leq K} |M(k)|\right]^{1/2}. \end{aligned}$$

La fonction $B(x) = x \exp(-\mathbf{c}(\log x)^{3/5}/(\log \log x)^{1/5})$ est croissante à partir d'un certain rang et tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Il en résulte que pour $K \geq K_0 = K_0(\mathbf{c})$, $\max_{k \leq K} B(k) = B(K)$. Posons $K = x^\alpha$ avec $\alpha \in]0, 1[$ un paramètre à fixer ultérieurement de manière à ce que $K \geq K_0$. On a

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{K} \max_{k \leq K} |M(k)|\right]^{1/2} &\leq A^{1/2} \left[\frac{B(K)}{K}\right]^{1/2} \leq A^{1/2} \exp\left(-0,5\mathbf{c} \frac{(\log K)^{3/5}}{(\log \log x)^{1/5}}\right) \\ &\leq A^{1/2} \exp\left(-0,5\alpha^{3/5}\mathbf{c} \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log \log x)^{1/5}}\right) \end{aligned}$$

et on arrive à

$$\int_1^{x/T_{\mathbf{c}}} \frac{|M(x/t)|}{x/t} |\mathcal{U}\mathcal{Z}_{\theta,K}(t)| \frac{dt}{t} \leq 110A^{3/2} \exp\left(-s(\alpha)\mathbf{c} \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log \log x)^{1/5}}\right)$$

avec $s(\alpha) = (1 - \alpha)^{3/5} + 0,5\alpha^{3/5}$. On a $s(\alpha) > 1,06$ pour $\alpha \in [0,15; 0,2]$ ce qui laisse le loisir de prendre pour K un nombre entier qui vérifie $K \geq K_0(\mathbf{c})$ si x est suffisamment grand.

Par ailleurs

$$\int_{x/T_{\mathbf{c}}}^x \frac{|M(x/t)|}{x/t} |\mathcal{U}\mathcal{Z}_{\theta,K}(t)| \frac{dt}{t} \leq \frac{\|\chi \mathcal{U}\mathcal{Z}_{\theta,K}\|_\infty}{x} \int_1^{T_{\mathbf{c}}} |M(u)| \frac{du}{u} \leq 3KT_{\mathbf{c}}/x \leq 3T_{\mathbf{c}}/x^{0,8}$$

où l'on a utilisé le lemme 31 p. 106 et la majoration triviale $|M(u)| \leq u$. De plus le lemme 30 p. 106 fournit $\|\mathcal{V}\mathcal{Z}_{\theta,K}\|_\infty \leq K \leq x^{0,2}$. Finalement nous obtenons bien la majoration escomptée. \square

Remarquons que pour $M(x) = O(x \exp(-\mathbf{c}(\log x)^{4/5}))$ la fonction s de la preuve précédente devient $s(\alpha) = (1 - \alpha)^{4/5} + 0,5\alpha^{4/5}$ qui a un maximum d'environ 1,006.

Et pour les estimations à la de La Vallée Poussin $M(x) = O(x \exp(-\mathbf{c}(\log x)^{1/2}))$ la fonction s devient $s(\alpha) = (1 - \alpha)^{1/2} + 0,5\alpha^{1/2}$ qui a un maximum d'environ 1,11.

Chapitre 8

Minoration en moyenne des fonctions de Mertens et de Liouville

Commençons par quelques considérations générales. La fonction de Liouville vaut, pour un entier N décomposé en produit de nombres premiers distincts $N = \prod_p p^{v_p(N)}$, la valeur -1 ou 1 selon la formule suivante

$$\lambda(N) = (-1)^{\sum_p v_p(N)} .$$

Elle présente des ressemblances avec la fonction de Möbius, notamment ces deux fonctions coïncident sur les entiers sans facteur carré. Mais la fonction de Liouville est pour sa part totalement multiplicative. En suivant la même preuve que l'inversion Möbius (équation (1.1) p. 1) qui concerne μ on arrive à :

$$\sum_{d|N} \lambda(d) = \prod_{p|N} (1 + \lambda(p) + \dots + \lambda(p^{v_p(N)})) = \prod_{p|N} \begin{cases} 1 & \text{si } v_p = 0[2] \\ 0 & \text{si } v_p = 1[2] \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } N \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

Notons $L(x) = \sum_{n \leq x} \lambda(n)$ la fonction sommatoire de la fonction de Liouville.

Plusieurs des termes d'erreurs autour des nombres premiers semblent être de l'ordre de \sqrt{x} : de manière numérique pour les valeurs de x atteintes informatiquement et de manière théorique par l'hypothèse de Riemann. Par exemple, on a $|M(x)| \leq \sqrt{x}$ pour $x \leq 10^{16}$ (voir [Hurst, 2018]) et le premier contre-exemple à la conjecture de Mertens semble encore bien plus loin (voir [Kotnik et van de Lune, 2004]). Le « plus petit » zéro $\rho = 1/2 + 14,13\dots i$ contribue en un terme oscillant dont le module est d'environ $0,07\sqrt{x}$ (voir [Anderson et Stark, 1981]) mais il peut y avoir des compensations avec les autres zéros complexes. On ne sait pas réfuter l'hypothèse de Mertens généralisée $M(x) = O(\sqrt{x})$ mais il est généralement supposé que cette conjecture est fautive.

La conjecture dite de Pólya stipule que $L(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 2$. Pour $L(x)$ il y a un pôle réel dans la transformée de Mellin

$$\int_1^\infty L(x)x^{-s} \frac{dx}{x} = \frac{\zeta(s)}{s\zeta(2s)} \quad (\Re s > 1)$$

qui donne une contribution $1/\zeta(1/2)\sqrt{x}$ et $1/\zeta(1/2) \simeq -0,68$. L'influence des zéros complexes se passe à nouveau pour des grandes valeurs de x , ce qui fait que la fonction $L(x)$ pour $x \geq 2$

est négative jusqu'à de très grandes valeurs de x . La première apparition d'une valeur positive fut obtenue par Lehman en 1960, puis Tanaka montra que la plus petite valeur pour laquelle $L(x) > 0$ est $x = 906\,105\,257$. On peut penser que c'est le résidu en $s = 1/2$ qui fait la différence entre les fonctions de Möbius et de Liouville dans ces résultats. Nous allons faire apparaître ce que nous supposons être une trace de ce résidu par les méthodes de convolutions intégrales étudiées précédemment.

Voyons l'idée de la démonstration des minoration que nous obtenons. Par la proposition 6 page 17 appliquée avec $a = \lambda$ et $b = 1$ on a pour $\varphi : [1, \infty[\rightarrow \mathbf{C}$ localement intégrable,

$$\int_1^x L(x/t) \sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \frac{dt}{t} = \int_1^x \lfloor \sqrt{x/t} \rfloor \varphi(t) \frac{dt}{t}.$$

Il en découle que sous les hypothèses

$$A \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t \geq 1} \left| \sum_{k \leq t} \varphi(t/k)/t \right| < \infty \quad \text{et} \quad A' \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{x \geq 1} \frac{1}{\sqrt{x}} \left| \int_1^x \lfloor \sqrt{x/t} \rfloor \varphi(t) \frac{dt}{t} \right| < \infty,$$

on a

$$\begin{aligned} \int_1^x |L(t)| \frac{dt}{t} &= \int_1^x |L(x/t)| \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{A} \int_1^x |L(x/t)| \left| \sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \right| \frac{dt}{t} \\ &\geq \frac{1}{A} \left| \int_1^x \lfloor \sqrt{x/t} \rfloor \varphi(t) \frac{dt}{t} \right| \\ &\geq \frac{\sqrt{x}}{AA'}. \end{aligned}$$

Or pour des fonctions φ suffisamment régulières, on sait que pour $t \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{t} \sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \rightarrow \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2} dt$$

(voir la proposition 1.2 p. 56 de [Balazard, 2016]). En prenant des fonctions φ d'intégrale $\int_1^\infty \varphi(t)/t^2 dt$ nulle on peut ainsi espérer obtenir une bonne minoration de $\int_1^x |L(t)|/t dt$.

Nous mettons cette idée en place dans la section suivante en montrant l'inégalité

$$\int_1^x |L(t)| \frac{dt}{t} \geq \frac{\sqrt{x}}{2} \quad (x \geq 13).$$

Notons que l'hypothèse de Riemann implique $\int_1^x |L(t)| \frac{dt}{t} = O(x^{1/2+\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$.

8.1 Première minoration d'une intégrale liée à la fonction de Liouville

Le but de cette partie est de prouver le théorème suivant.

Théorème 2. *On a la minoration*

$$\int_1^x |L(t)| \frac{dt}{t} \geq \frac{\sqrt{x}}{2} \quad (x \geq 13).$$

Soit $\varphi : [1, \infty[$ la fonction $\varphi(t) = 1/t - 1/2$. On utilisera cette notation dans toute la sous-section.

Lemme 32. *Pour tout $t \geq 1$, on a :*

$$\sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) = \frac{\{t\}^2 - \{t\} - t\{t\}}{2t} + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq \sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Démonstration. On a l'égalité

$$\sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) = \frac{1}{t} \sum_{k \leq t} k - \frac{1}{2} \sum_{k \leq t} 1 = \frac{\lfloor t \rfloor^2 + \lfloor t \rfloor}{2t} - \frac{\lfloor t \rfloor}{2}.$$

En écrivant $\lfloor t \rfloor = t - \{t\}$ on arrive à l'égalité annoncée.

On a $\lfloor t \rfloor^2 + \lfloor t \rfloor = \lfloor t \rfloor(\lfloor t \rfloor + 1) \geq \lfloor t \rfloor t$ et donc $\frac{\lfloor t \rfloor^2 + \lfloor t \rfloor}{2t} \geq \frac{\lfloor t \rfloor}{2}$, ce qui montre la minoration par 0.

Puisque la fonction $x \mapsto \{x\}$ est périodique de période 1, le fait que $\{t\}^2 - \{t\} \leq 0$ pour $t \in [0, 1]$ s'étend sur \mathbf{R} , et donc pour $t \geq 1$ on a $\{t\}^2 - \{t\} - t\{t\} \leq 0$, ce qui prouve la majoration annoncée en ajoutant $1/2$. \square

Lemme 33. *On a*

$$\left| \int_1^x \sqrt{x/t} \varphi(t) \frac{dt}{t} \right| \geq 0,32\sqrt{x} \quad (x \geq 6000).$$

Démonstration. Un calcul de primitive fournit

$$\int_1^x \sqrt{x/t} \varphi(t) \frac{dt}{t} = - \left(\frac{\sqrt{x}}{3} - 1 + \frac{2}{3x} \right).$$

Il reste à vérifier que pour $x \geq 6000$ on a

$$\frac{\sqrt{x}}{3} - 1 + \frac{2}{3x} \geq 0,32\sqrt{x}$$

mais pour $x \geq \frac{1}{(1/3 - 0,32)^2}$ on a $\frac{\sqrt{x}}{3} - 0,32\sqrt{x} \geq 1 \geq 1 - \frac{2}{3x}$ et $\frac{1}{(1/3 - 0,32)^2} = 5625,00\dots$ \square

Lemme 34. *On a*

$$\left| \int_1^x \lfloor \sqrt{x/t} \rfloor \varphi(t) \frac{dt}{t} \right| \geq \frac{\sqrt{x}}{4} \quad (x \geq 6000).$$

Démonstration. D'une part,

$$\left| \int_1^x \{ \sqrt{x/t} \} \varphi(t) \frac{dt}{t} \right| \leq \int_1^x |\varphi(t)| \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{1}{2} \frac{dt}{t} = \frac{\log x}{2},$$

d'autre part

$$\int_1^x \lfloor \sqrt{x/t} \rfloor \varphi(t) \frac{dt}{t} = \int_1^x \sqrt{x/t} \varphi(t) \frac{dt}{t} - \int_1^x \{ \sqrt{x/t} \} \varphi(t) \frac{dt}{t}.$$

En utilisant également le lemme 33, on obtient

$$\left| \int_1^x \lfloor \sqrt{x/t} \rfloor \varphi(t) \frac{dt}{t} \right| \geq \left| \int_1^x \sqrt{x/t} \varphi(t) \frac{dt}{t} \right| - \left| \int_1^x \{ \sqrt{x/t} \} \varphi(t) \frac{dt}{t} \right| \geq 0,32\sqrt{x} - 0,5 \log x .$$

On doit encore montrer, par une étude simple de fonction, que pour $x \geq 6000$ on a $0,32\sqrt{x} - 0,5 \log x \geq 0,25\sqrt{x}$, ce qui équivaut à $\frac{\sqrt{x}}{\log x} \geq \frac{0,5}{0,32-0,25}$ pour $x \geq 6000$. On a $\frac{0,5}{0,32-0,25} = 7,14\dots$. La fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\log x}$ est croissante sur $[\exp(2), \infty[$ (car $f'(x) = \frac{\log x - 2}{2\sqrt{x} \log^2 x}$) et $f(6000) = 8,90\dots > 7,14$, ce qui termine la démonstration. \square

Démonstration du théorème 2. Par la proposition 6 de la page 17, nous avons

$$\int_1^x L(x/t) \sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \frac{dt}{t} = \int_1^x \lfloor \sqrt{x/t} \rfloor \varphi(t) \frac{dt}{t} .$$

Pour tout $x \geq 6000$, l'inégalité triangulaire, le lemme 32 pour l'inégalité tout à gauche et le lemme 34 pour l'inégalité tout à droite donnent

$$\begin{aligned} \int_1^x |L(x/t)| \frac{1}{2} \frac{dt}{t} &\geq \int_1^x |L(x/t)| \left| \sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \right| \frac{dt}{t} \\ &\geq \left| \int_1^x L(x/t) \sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \frac{dt}{t} \right| = \left| \int_1^x \lfloor \sqrt{x/t} \rfloor \varphi(t) \frac{dt}{t} \right| \geq \frac{\sqrt{x}}{4} . \end{aligned}$$

On vérifie directement la minoration sur l'intervalle $[13; 6000]$. \square

8.2 Deuxième minoration intégrale

Dans cette partie nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 3. *On a*

$$\frac{1}{x} \int_1^x |L(t)| dt \geq \frac{\sqrt{x}}{5} \quad (x \geq 13) .$$

On utilisera $\varphi(t) = P(1/t)$ avec $P(y) = y(1-y)(1/2-y)$ et le même principe que précédemment.

Lemme 35. *Pour tout $t \geq 1$, on a :*

$$t \sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) = \frac{\{t\}^2 - \{t\}}{4} - \frac{B_3(\{t\})}{2t} + \frac{B_4(\{t\}) - B_4(0)}{4t^2} \quad \text{et} \quad \left| t \sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \right| \leq 0,0674 .$$

Démonstration. On a $\int_0^1 P(y) dy = 0$ donc $t \sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) = -tUP(t)$. Par la formule (1.12) p. 4 qui est une application de la formule d'Euler-Maclaurin on a

$$tUP(t) = -\frac{\{t\}^2 - \{t\}}{4} + \frac{B_3(\{t\})}{2t} - \frac{B_4(\{t\}) - B_4(0)}{4t^2} .$$

On sait que

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\frac{\{t\}^2 - \{t\}}{4} && \leq \frac{1}{16} = 0,0625 \\ -\frac{\sqrt{3}}{36} &\leq B_3(\{t\}) && \leq \frac{\sqrt{3}}{36} \\ -\frac{1}{15} &\leq -(B_4(\{t\}) - B_4(0)) \leq 0 \\ -\frac{1}{2 \times 5} \frac{\sqrt{3}}{36} - \frac{1}{4 \times 5^2} \frac{1}{15} &\leq tUP(t) \leq 0,0625 + \frac{1}{2 \times 5} \frac{\sqrt{3}}{36} \quad (t \geq 5) \end{aligned}$$

donc pour $t \geq 5$, on a $-0,006 \leq tUP(t) \leq 0,0674$.

On vérifie que pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, sur $[n, n+1]$ la fonction $t \mapsto t^3UP(t)$ coïncide avec un polynôme Q_n de degré 2 et il est simple de vérifier que les polynômes $Q_n(t) \pm 0,0674t^2$ sont de signes constants \pm sur $[n, n+1]$. \square

Lemme 36. *Nous avons*

$$\left| \int_1^x \sqrt{x/t} \varphi(t) \frac{dt}{t} \right| \geq 0,019\sqrt{x} \quad (x \geq 6000).$$

Démonstration. Un calcul de primitive fournit

$$\int_1^x \sqrt{x/t} \varphi(t) \frac{dt}{t} = \frac{2}{105} \sqrt{x} - \frac{35x^2 - 63x + 30}{105x^3}. \quad \square$$

Lemme 37. *Nous avons*

$$\left| \int_1^x \lfloor \sqrt{x/t} \rfloor \varphi(t) \frac{dt}{t} \right| \geq 0,0135\sqrt{x} \quad (x \geq 7000).$$

Démonstration. D'une part

$$\left| \int_1^x \left\{ \sqrt{x/t} \right\} \varphi(t) \frac{dt}{t} \right| \leq \int_1^x |\varphi(t)| \frac{dt}{t} \leq \int_1^x 0,05 \frac{dt}{t} = 0,05 \log x,$$

d'autre part

$$\int_1^x \lfloor \sqrt{x/t} \rfloor \varphi(t) \frac{dt}{t} = \int_1^x \sqrt{x/t} \varphi(t) \frac{dt}{t} - \int_1^x \left\{ \sqrt{x/t} \right\} \varphi(t) \frac{dt}{t},$$

en utilisant également le lemme 36, on obtient

$$\left| \int_1^x \lfloor \sqrt{x/t} \rfloor \varphi(t) \frac{dt}{t} \right| \geq \left| \int_1^x \sqrt{x/t} \varphi(t) \frac{dt}{t} \right| - \left| \int_1^x \left\{ \sqrt{x/t} \right\} \varphi(t) \frac{dt}{t} \right| \geq 0,019\sqrt{x} - 0,05 \log x$$

et pour $x \geq 7000$ on doit montrer que $0,019\sqrt{x} - 0,05 \log x \geq 0,0135\sqrt{x}$. \square

Démonstration du théorème 3. Par la proposition 6 de la page 17, nous avons

$$\int_1^x L(x/t) \sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \frac{dt}{t} = \int_1^x \lfloor \sqrt{x/t} \rfloor \varphi(t) \frac{dt}{t}.$$

Pour tout $x \geq 7000$, l'inégalité triangulaire, le lemme 36 pour l'inégalité tout à gauche et le lemme 37 pour l'inégalité tout à droite donnent

$$\begin{aligned} 0,0674 \int_1^x |L(x/t)| dt &\geq \int_1^x |L(x/t)| \left| \sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \right| \frac{dt}{t} \\ &\geq \left| \int_1^x L(x/t) \sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \frac{dt}{t} \right| = \left| \int_1^x \lfloor \sqrt{x/t} \rfloor \varphi(t) \frac{dt}{t} \right| \geq 0,0135\sqrt{x}. \end{aligned}$$

On vérifie directement la minoration sur l'intervalle $[13; 7000]$ □

Remarque 27. On pourrait continuer ainsi et obtenir des minorations du type

$$\frac{1}{x^k} \int_1^x |L(t)| t^{k-1} dt \geq a_k \sqrt{x}$$

comme nous avons obtenu des majorations de $x|m_1(x)|$ par des intégrales

$$\frac{1}{x^k} \int_1^x |M(t)| t^{k-1} dt.$$

8.3 Möbius et zéro complexe de la fonction zêta

Nous allons prouver que

$$\int_1^x |M(t)| \frac{dt}{t} \geq 0,004\sqrt{x} \quad (x \geq 2).$$

Le traitement analytique du terme d'erreur $\Delta(x) = \psi(x) - x$ est actuellement plus efficace que celui de $M(x)$, on sait par exemple que $\Delta(x) = O(x^{1/2})$ est faux, que

$$\frac{1}{x} \int_1^x |\Delta(t)| dt \geq 0,0025\sqrt{x} \quad (x \geq 1),$$

et que sous l'hypothèse de Riemann à partir d'un certain rang (voir [Pintz, 1984]) :

$$\frac{1}{x} \int_1^x |\Delta(t)| dt \leq \sqrt{x}.$$

Du côté de la fonction $M(x)$, Kátai [Kátai, 1968] démontra en 1968 :

$$\int_1^x |M(t)| \frac{dt}{t} \geq Cx^{0,18}$$

avec C une constante et l'inégalité a lieu à partir d'un rang explicitable mais non spécifié dans l'article de Kátai. Pintz [Pintz, 1982] en 1982 atteint la puissance 1/2 avec le résultat :

$$\frac{1}{x} \int_{\frac{0,01x}{\log x}}^x |M(t)| dt \geq 0,000058\sqrt{x} \quad (x \geq 2).$$

L'article de Pintz [Pintz, 1982] contient une présentation d'autres résultats de Kátai et des précisions sur le sujet.

Le résultat de Pintz provient de la minoration

$$\frac{1}{x} \int_{\frac{0,01x}{\log x}}^x |M(t)| dt \geq \frac{1}{6} \frac{|x^\rho|}{|\rho|^3} \quad (x \geq \exp(|\Im \rho| + 4))$$

pour ρ un zéro de la fonction zêta avec $\Re s \geq 1/2$ et au niveau de nos résultats, dont nous n'écrivons ici que le terme principal pour faire le parallèle, nous montrons que

$$\int_1^x |M(t)| \frac{dt}{t} \geq \frac{|x^\rho|}{|\rho|^2} + O(\log x).$$

Dans le même ordre d'idée, citons également le résultat suivant de [Konyagin et Popov, 1995] de Konyagin et Popov, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\int_1^x |M(t)|^2 \frac{dt}{t^2} \geq c \log x \quad (x \geq 1).$$

Notre résultat pour la fonction de Mertens M utilise un zéro de la fonction zêta mais sans intégrale dans le plan complexe. Expliquons la méthode et les différences avec la fonction de Liouville.

Soit $\varphi : [1, \infty[\rightarrow \mathbf{C}$ une fonction localement intégrable, nous avons vu que

$$\int_1^x M(x/t) \sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \frac{dt}{t} = \int_1^x \varphi(t) \frac{dt}{t}. \quad (8.1)$$

L'inversion de Möbius présente dans cette équation semble compenser les valeurs des $\mu(n)$ au point que la fonction M paraît comme constante dans le sens où supposer M bornée ne conduit pas (heuristiquement du moins) à une contradiction. Par l'égalité (8.1) on obtient

$$\max_{u \leq x} |M(u)| \geq \frac{\left| \int_1^x \varphi(t) \frac{dt}{t} \right|}{\sup_{t \geq 1} t \left| \sum_{n \leq t} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) \right|},$$

par exemple pour la fonction $\varphi(t) = P(1/t)$ avec $P(y) = y(1-y)(1/2-y)$ de la partie sur Liouville, le lemme 35 donne

$$\max_{u \leq x} |M(u)| \geq \frac{\left| \int_1^x \varphi(t) \frac{dt}{t} \right|}{0,0674} \text{ et } \frac{\left| \int_1^\infty \varphi(t) \frac{dt}{t} \right|}{0,0674} = \frac{1/12}{0,0674} = 1,23\dots$$

Plus généralement, on a

$$\frac{1}{x^k} \int_1^x |M(t)| t^{k-1} dt \geq \frac{\left| \int_1^x \varphi(t) \frac{dt}{t} \right|}{\sup_{t \geq 1} t^k \left| \sum_{n \leq t} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) \right|},$$

par exemple pour la fonction $\varphi(t) = 1/t - 1/2$ de la partie sur Liouville, le lemme 32 fournit

$$\frac{1}{x} \int_1^x |M(t)| \frac{dt}{t} \geq \frac{|\log(x)/2 + 1/x - 1|}{1/2},$$

ce qui ne permet pas de montrer que la fonction M n'est pas bornée.

Pour φ suffisamment régulière avec $\int_1^\infty \varphi(u)u^{-2} du = 0$, l'égalité (1.28) p. 11 donne

$$\int_1^\infty \frac{1}{t} \sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) dt = \zeta(0) \int_1^\infty \varphi(t) \frac{dt}{t}.$$

Par l'inégalité triangulaire on obtient alors $\sup_{t \geq 1} t \left| \sum_{k \leq t} \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \right| \geq 0,5 \left| \int_1^\infty \varphi(t) \frac{dt}{t} \right|$ et

$$\max_{t \leq x} |M(t)| \geq \frac{\left| \int_1^x \varphi(t) \frac{dt}{t} \right|}{0,5 \left| \int_1^\infty \varphi(t) \frac{dt}{t} \right|}$$

ce qui pour x grand donne une minoration proche de 2. Pour la fonction sommatoire de Liouville L l'identité contenait déjà un facteur \sqrt{x} . Mais l'utilisation d'un zéro non trivial de la fonction zêta va permettre de dépasser 2 dans une minoration de M en moyenne.

Dans cette section, on pose

$$\varphi_s(y) = y^s - \frac{1}{1-s} \text{ avec } 0 < \Re s < 1.$$

De plus, nous notons ρ_1 le zéro de la fonction zêta de partie imaginaire positive la plus petite (voir [Gram, 1903] et [Titchmarsh *et al.*, 1986] p. 389) :

$$\rho_1 = 1/2 + i14,13\dots$$

Lemme 38. Pour $x \geq 4500$ et $0 < \Re s < 1$ on a :

$$\int_1^x \varphi_s(t) \frac{dt}{t} = \frac{x^s}{s} - \frac{1}{s} + \frac{\log x}{1-s} \quad \text{et} \quad \left| \int_1^x \varphi_s(t) \frac{dt}{t} \right| \geq \frac{x^{\Re s}}{|s|} - \frac{1}{|s|} - \frac{\log x}{|1-s|}.$$

En particulier, on a

$$\left| \int_1^x \varphi_{\rho_1}(t) \frac{dt}{t} \right| \geq 0,06\sqrt{x}.$$

Démonstration. Le calcul de primitive est direct et la minoration provient de la seconde inégalité triangulaire. Pour $s = \rho_1$ on obtient

$$\frac{x^{\Re s}}{|s|} - \frac{1}{|s|} - \frac{\log x}{|1-s|} \geq 0,07\sqrt{x} - 0,071 - 0,071 \log x \geq 0,06\sqrt{x} \quad (x \geq 4500). \quad \square$$

Lemme 39. Soit $t \geq 1$ et $0 < \Re s < 1$ on a

$$\sum_{k \leq t} \varphi_s\left(\frac{t}{k}\right) = \zeta(s)t^s + (1/2 - \{t\}) + t^s s \int_t^\infty (\{u\} - 1/2)u^{-s-1} du + \frac{\{t\}}{1-s}.$$

Démonstration. On trouvera dans [Balazard, 2008] de Balazard p. 34 la formule suivante

$$F(t) = \sum_{k \leq t} \frac{1}{k^s} = \frac{t^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + (1/2 - \{t\})t^{-s} + s \int_t^\infty (\{u\} - 1/2)u^{-s-1} du, \quad (8.2)$$

elle provient de la formule d'Euler-Maclaurin. On a

$$\sum_{k \leq t} \varphi_s\left(\frac{t}{k}\right) = \sum_{k \leq t} \frac{t^s}{k^s} - \frac{1}{1-s} = t^s F(t) - \frac{t}{1-s} + \frac{\{t\}}{1-s}$$

ce qui permet de conclure en remplaçant F par son expression (8.2). □

Lemme 40. Pour tout $t \geq 1$ et $0 < \Re s < 1$, nous avons

$$\left| \sum_{k \leq t} \varphi_q \left(\frac{t}{k} \right) \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{|s|}{\Re s} + 1 \right) + \frac{1}{|1-s|} \quad (8.3)$$

et en particulier

$$\left| \sum_{k \leq t} \varphi_{\rho_1} \left(\frac{t}{k} \right) \right| \leq 14,5. \quad (8.4)$$

Démonstration. On utilise le lemme 39 et les majorations $|1/2 - \{t\}| \leq 1/2$ et

$$\left| t^\rho \rho \int_t^\infty (\{u\} - 1/2) u^{-\rho-1} du \right| \leq \frac{t^{\Re(\rho)} |\rho|}{2} \int_t^\infty u^{-\Re(\rho)-1} du = \frac{t^{\Re(\rho)} |\rho|}{2} \frac{1}{\Re(\rho) t^{\Re(\rho)}} = \frac{|\rho|}{2} \frac{1}{\Re(\rho)}$$

et le fait que $\zeta(\rho) = 0$. □

Théorème 4. Pour tout $x \geq 1$, nous avons la minoration suivante

$$\int_1^x |M(t)| \frac{dt}{t} \geq 0,004\sqrt{x} \quad (x \geq 2).$$

Démonstration. Par l'équation (1.14) de la page 5, nous avons

$$\int_1^x M(x/t) \sum_{k \leq t} \varphi_{\rho_1} \left(\frac{t}{k} \right) \frac{dt}{t} = \int_1^x \varphi_{\rho_1}(t) \frac{dt}{t}.$$

On a alors pour tout $x \geq 4500$

$$\begin{aligned} \int_1^x |M(x/t)| 14,5 \frac{dt}{t} &\geq \int_1^x |M(x/t)| \left| \sum_{k \leq t} \varphi_{\rho_1} \left(\frac{t}{k} \right) \right| \frac{dt}{t} \quad (\text{d'après le lemme 40}) \\ &\geq \left| \int_1^x M(x/t) \sum_{k \leq t} \varphi_{\rho_1} \left(\frac{t}{k} \right) \frac{dt}{t} \right| = \left| \int_1^x \varphi_{\rho_1}(t) \frac{dt}{t} \right| \\ &\geq 0,06\sqrt{x} \quad (\text{d'après le lemme 38}). \end{aligned}$$

On peut ramener le résultat à tout $x \geq 2$ par vérification directe entre 2 et 4500. □

Remarque 28. Une étude informatique directe pour $t \leq 30$ semble montrer que la majoration $|\sum_{k \leq t} \varphi_{\rho_1} \left(\frac{t}{k} \right)| \leq 14,5$ pourrait être remplacée par $|\sum_{k \leq t} \varphi_{\rho_1} \left(\frac{t}{k} \right)| \leq 1,5$ ce qui conduirait à la minoration

$$\int_1^x |M(t)| \frac{dt}{t} \geq 0,04\sqrt{x}.$$

Chapitre 9

Conversions de m vers M , analogue d'un résultat de Odlyzko et de Riele pour m

9.1 Majoration universelle de M par $\sup_{t \in [1, x]} t|m(t)|$

En utilisant la fonction ε'_1 de Balazard (dont nous avons rappelé les propriétés dans la proposition 8 p. 19) nous avons montré dans le corollaire 3 que

$$|m_1(x)| \leq \frac{1}{3} \left[\frac{1}{x} \max_{t \leq x} |M(t)| \right] + \frac{8/3}{x} \quad (x \geq 1)$$

avec rappelons-le $m_1(x) = m(x) - M(x)/x$. Cela permet d'obtenir des estimations de $|m|$ à partir d'estimations de $|M|$. Nous allons montrer que réciproquement, on peut obtenir des estimations de $|M|$ à partir d'estimations de $|m|$.

Proposition 59. *On a l'inégalité :*

$$|m_1(x)| \leq 0,44 \left[\frac{1}{x} \sup_{t \leq x} t|m(t)| \right] + \frac{2}{x} \quad (x \geq 1).$$

En particulier, on a

$$|M(x)| \leq 1,44 \sup_{t \leq x} t|m(t)| + 2 \quad (x \geq 1).$$

Remarque 29. La formule sommatoire d'Abel

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} n = m(x)x - \int_1^x m(t) dt$$

suivie de l'inégalité triangulaire n'aboutirait qu'à la majoration

$$x|m_1(x)| \leq \log x \sup_{t \leq x} t|m(t)|.$$

La démonstration de la proposition 59 va reposer sur l'emploi de la fonction

$$h(y) = \frac{2}{3}(1 - y^2)(8y - 3).$$

Dans la suite de cette section, nous employons la notation

$$H(t) = \sum_{n \leq t} h(n/t) \quad (t > 0).$$

Lemme 41. *On a :*

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1 - H(t) \leq \frac{2,1}{t} \quad (t \geq 1) \\ \int_1^\infty |1 - H(t)| \frac{dt}{t} &= 2\zeta'(0) + \frac{41}{18} = 0,4399\dots \\ \int_1^\infty |1 - H(t)| \sqrt{t} \frac{dt}{t^2} &= \frac{368}{315} \zeta\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 0,2939\dots \end{aligned}$$

Démonstration. Tout d'abord le calcul de la primitive du polynôme h donne $\int_0^1 h(y) dy = 0$. De plus $h \in \mathcal{G}_1$ et $-H(t) = tUh(t)$. Utilisons la formule du développement de $Uh(t)$ suivant les puissances inverses de t du théorème 1 page 4 :

$$Uh(t) = \frac{1}{t} - \frac{\frac{20}{6}(\{t\}^2 - \{t\}) + 1}{t^2} + \frac{R(t)}{6t^3}$$

avec

$$|R(t)| \leq \max_{u \in [0,1]} |B_3(u)| |h'''| = \frac{\sqrt{3}}{36} \times 32 \leq 1,56.$$

On obtient ainsi

$$(1 - H(t))t = \frac{20}{6}(\{t\}^2 - \{t\}) + 1 + \frac{r(t)}{t} \tag{9.1}$$

avec $|r(t)| \leq 0,26$. Le minimum de $t \mapsto \frac{20}{6}(\{t\}^2 - \{t\}) + 1$ vaut $\frac{20}{6} \times (-\frac{1}{4}) + 1 = \frac{1}{6}$, ce qui assure la positivité de $(1 - H(t))t$ pour $t \geq 1,56$. On a également pour $t \in [1, 2[$

$$3t^3(1 - H(t)) = 3t^3(1 - h(1/t)) = 9t^3 - 16t^2 - 6t + 16$$

et la méthode de Cardan nous indique que ce polynôme de degré 3 n'a qu'une seule racine réelle qui de plus est négative. On a ainsi montré la positivité. L'équation (9.1) montre également que $|(1 - H(t))t| \leq \frac{20}{6} \times \frac{1}{4} + 1 + 0,26 \leq 2,1$. On a montré la première propriété.

Pour $\Re s > 1$, par l'égalité (1.28) p. 11 on a

$$\int_1^\infty (1 - H(t))t^{-s} \frac{dt}{t} = \frac{1}{s} - \zeta(s) \int_0^1 h(y)y^{s-1} dy \tag{9.2}$$

et donc

$$\int_1^\infty (1 - H(t))t^{-s} \frac{dt}{t} = \frac{1}{s} \left[1 - \zeta(s) \frac{4(s-1)(5s+9)}{3(s+1)(s+2)(s+3)} \right]. \tag{9.3}$$

D'après l'équation (9.1), le membre de gauche de (9.2) est holomorphe pour $\Re s > -1, s \neq 1$. Et par prolongement analytique l'identité (9.2) reste vraie pour les mêmes valeurs de s . En

passant à la limite pour $s \rightarrow 0$ dans (9.3), on reconnaît un nombre dérivé. En effet posons $f(s) = \zeta(s) \frac{4(s-1)(5s+9)}{3(s+1)(s+2)(s+3)}$ on a $f(0) = 1$ et

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(0+s) - f(0)}{s} = f'(0) = \zeta'(0) \times (-2) + \zeta(0) \times \frac{41}{9} = - \left(2\zeta'(0) + \frac{41}{18} \right).$$

Ainsi la limite pour $s \rightarrow 0$ de (9.3) donne :

$$\int_1^\infty |1 - H(t)| \frac{dt}{t} = \int_1^\infty 1 - H(t) \frac{dt}{t} = 2\zeta'(0) + \frac{41}{18}.$$

On a ainsi montré la deuxième propriété.

En utilisant l'égalité (9.3) avec $s = 1/2$ on obtient la troisième propriété. \square

Démonstration de la proposition 59. Par le lemme 21 de la page 69 on a

$$m_1(x) = \int_1^x m(x/t) \left(1 - \sum_{n \leq t} h\left(\frac{n}{t}\right) \right) \frac{dt}{t^2} - \int_0^{1/x} h(y) dy \quad (x \geq 1)$$

et donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x} \int_1^x x/tm(x/t)(1 - H(t)) \frac{dt}{t} \right| &\leq \frac{1}{x} \max_{k \leq x} |km(k)| \int_1^x |1 - H(t)| \frac{dt}{t} \\ &\leq \frac{1}{x} \max_{k \leq x} |km(k)| \int_1^\infty |1 - H(t)| \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

et par le lemme 41 ci-dessus on a

$$\int_1^\infty |1 - H(t)| \frac{dt}{t} = 2\zeta'(0) + \frac{41}{18} = 0,4399\dots$$

Il reste à remarquer que la fraction rationnelle $x \mapsto -x \int_0^{1/x} h(y) dy$ est positive, croissante et tend vers 2. \square

9.2 Minoration de $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}|m(x)|$

Proposition 60. On a :

$$|m_1(x)|\sqrt{x} \leq b \sup_{t \leq x} |m(t)|\sqrt{t} + \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \text{avec} \quad b = 2 + \frac{368}{315}\zeta(1/2) = 0,2939\dots \quad (9.4)$$

En particulier,

$$\frac{|M(x)|}{\sqrt{x}} \leq (1+b) \sup_{t \leq x} |m(t)|\sqrt{t} + \frac{2}{\sqrt{x}}. \quad (9.5)$$

Pour tout ε vérifiant $0 < \varepsilon < 3/4$, on a :

$$\frac{|M(x)|}{\sqrt{x}} \leq (1+b) \sup_{x^{\frac{3}{4}-\varepsilon} \leq t \leq x} |m(t)|\sqrt{t} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1,05}{x^{2\varepsilon}}. \quad (9.6)$$

Remarque 30. L'insertion d'une majoration du type $|m(t)| \leq \frac{A}{\sqrt{t}}$ avec $A > 0$ dans l'identité $m_1(x) = \frac{1}{x} \int_1^x m(t) dt$ fournit

$$|m_1(x)| \leq \frac{2A}{\sqrt{x}},$$

tandis que l'estimation (9.4) fournit

$$|m_1(x)| \leq \frac{0,3A}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}.$$

Démonstration. Par le lemme 21 de la page 69 on a

$$\sqrt{x}m_1(x) = \int_1^x m(x/t)\sqrt{x/t} \left(1 - \sum_{n \leq t} h\left(\frac{n}{t}\right)\right) \sqrt{t} \frac{dt}{t^2} - \sqrt{x} \int_0^{1/x} h(y) dy \quad (x \geq 1)$$

appliqué avec la fonction $h(y) = \frac{2}{3}(1 - y^2)(8y - 3)$ du lemme 41. La fraction rationnelle $x \mapsto -x \int_0^{1/x} h(y) dy$ est positive, croissante et tend vers 2. Par le lemme 41 on a :

$$\int_1^\infty |1 - H(t)| \sqrt{t} \frac{dt}{t^2} = \frac{368}{315} \zeta\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 0,2939\dots,$$

et le résultat (9.5) s'en déduit.

Soit $a \in [0, 1]$ un paramètre que l'on fixera plus bas. En utilisant l'inégalité de Meissel $|m(u)| \leq 1$ pour tout $u \geq 1$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_1^x |m(x/t)| \sqrt{x/t} |1 - H(t)| \sqrt{t} \frac{dt}{t^2} \\ & \leq \sup_{x^a \leq t \leq x} |m(t)| \sqrt{t} \int_1^\infty |1 - H(t)| \sqrt{t} \frac{dt}{t^2} + \sqrt{x} \int_{x^{1-a}}^x |1 - H(t)| \frac{dt}{t^2}. \end{aligned}$$

Par le lemme 41 on a $0 \leq 1 - H(t) \leq 2,1/t$ d'où

$$\sqrt{x} \int_{x^{1-a}}^x |1 - H(t)| \frac{dt}{t^2} \leq 2,1\sqrt{x} \int_{x^{1-a}}^\infty \frac{dt}{t^3} = \frac{1,05}{x^{1,5-2a}}.$$

Ce qui permet de conclure en prenant $a = 3/4 - \varepsilon$. □

Dans [Odlyzko et de Riele, 1984] Odlyzko et de Riele ont prouvé que $\overline{\lim} |M(x)|/\sqrt{x} > 1$ réfutant ainsi l'hypothèse de Mertens. Leur travail a été poursuivi par Hurst qui a donné une plus grande valeur que 1 qui permet, combinée à la proposition 60, d'établir que l'on a également $\overline{\lim} |m(x)|\sqrt{x} > 1$.

Corollaire 21. Pour $x \rightarrow \infty$, on a

$$\overline{\lim} |m(x)|\sqrt{x} \geq 1,4201.$$

Démonstration. Par [Hurst, 2018, theorem 6.1, p. 11] on a

$$\underline{\lim} M(x)/\sqrt{x} < -1,837625.$$

Le résultat se déduit alors de (9.6) puisque $1,837625/(1 + b) > 1,4201$. □

Bibliographie

- [Anderson et Stark, 1981] ANDERSON, R. J. et STARK, H. M. (1981). Oscillation theorems. *In Analytic number theory (Philadelphia, Pa., 1980)*, volume 899 de *Lecture Notes in Math.*, pages 79–106. Springer, Berlin-New York.
- [Baez-Duarte, 2000] BAEZ-DUARTE, L. (2000). Arithmetical aspects of Beurling’s real variable reformulation of the Riemann hypothesis. *arXiv preprint math/0011254*.
- [Balazard, 2008] BALAZARD, M. (2008). Sur la fonction sommatoire de la fonction de von Mangoldt généralisée. *Archiv der Mathematik*, 90(1):31–38.
- [Balazard, 2012a] BALAZARD, M. (2012a). Elementary remarks on the Möbius function. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 276(Teoriya Chisel, Algebra i Analiz):39–45.
- [Balazard, 2012b] BALAZARD, M. (2012b). Remarques élémentaires sur la fonction de Möbius. Version détaillée et en français d’un article paru aux Travaux de l’Institut Steklov 276 (2012), disponible à l’adresse <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00732694/file/mobius.pdf>.
- [Balazard, 2016] BALAZARD, M. (2016). *Le théorème des nombres premiers*. Calvage et Mounet. Collection Nano.
- [Balazard et de Roton, 2010] BALAZARD, M. et de ROTON, A. (2010). Sur un critère de Baez-Duarte pour l’hypothèse de Riemann. *International Journal of Number Theory*, 6(04):883–903.
- [Berkane et al., 2012] BERKANE, D., BORDELLÈS, O. et RAMARÉ, O. (2012). Explicit upper bounds for the remainder term in the divisor problem. *Mathematics of Computation*, 81(278):1025–1051.
- [Bordellès, 2015] BORDELLÈS, O. (2015). Some explicit estimates for the Möbius function. *Journal of Integer Sequences*, 18(2):3.
- [Cohen, 2007] COHEN, H. (2007). *Number theory. Vol. II. Analytic and modern tools*, volume 240 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York.
- [Cohen et al., 2007] COHEN, H., DRESS, F. et EL MARRAKI, M. (2007). Explicit estimates for summatory functions linked to the Möbius μ -function. *Funct. Approx. Comment. Math.*, 37(part 1):51–63.
- [Costa Pereira, 1989] COSTA PEREIRA, N. (1989). Elementary estimates for the Chebyshev function $\psi(x)$ and for the Möbius function $M(x)$. *Acta Arith.*, 52(4):307–337.
- [Diamond, 1982] DIAMOND, H. G. (1982). Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 7(3):553–589.
- [Dress, 1977] DRESS, F. (1977). Majorations de la fonction sommatoire de la fonction de Möbius. *Bull. Soc. Math. Fr., mémoire*, pages 47–52.

- [Dress, 1999] DRESS, F. (1999). Discrépance des suites de Farey. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 11(2):345–367.
- [Dress et El Marraki, 1993] DRESS, F. et EL MARRAKI, M. (1993). Fonction sommatoire de la fonction de Möbius. II. Majorations asymptotiques élémentaires. *Experiment. Math.*, 2(2):99–112.
- [Dusart, 1998] DUSART, P. (1998). Autour de la fonction qui compte le nombre de nombres premiers. *These, Université de Limoges*, 4.
- [Dusart, 2016] DUSART, P. (2016). Estimates of ψ , θ for large values of x without the Riemann hypothesis. *Mathematics of Computation*, 85(298):875–888.
- [El Marraki, 1995] EL MARRAKI, M. (1995). Fonction sommatoire de la fonction de Möbius. III. Majorations asymptotiques effectives fortes. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 7(2):407–433.
- [El Marraki, 1996] EL MARRAKI, M. (1996). Majorations de la fonction sommatoire de la fonction $\frac{\mu(n)}{n}$. *Université Bordeaux 1*.
- [Gram, 1903] GRAM, J. P. (1903). Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. *Acta Math.*, 27(1):289–304.
- [Helfgott, 2012] HELFGOTT, H. A. (2012). Minor arcs for Goldbach’s problem. *arXiv preprint arXiv:1205.5252*.
- [Hurst, 2018] HURST, G. (2018). Computations of the Mertens function and improved bounds on the Mertens conjecture. *Mathematics of Computation*, 87(310):1013–1028.
- [Ingham, 1949] INGHAM, A. E. (1949). Improper integrals as limits of sums. *J. London Math. Soc.*, 24:44–50.
- [Kátai, 1968] KÁTAI, I. (1968). On oscillation of the number of primes in an arithmetical progression. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 29:271–282.
- [Konyagin et Popov, 1995] KONYAGIN, S. V. et POPOV, A. Y. (1995). Rate of divergence of some integrals. *Mathematical Notes*, 58(2):841–849.
- [Kotnik, 2007] KOTNIK, T. (2007). Evaluation of some integrals of sums involving the Möbius function. *International Journal of Computer Mathematics*, 84(4):469–475.
- [Kotnik et van de Lune, 2004] KOTNIK, T. et van de LUNE, J. (2004). On the order of the Mertens function. *Experimental Mathematics*, 13(4):473–481.
- [Krantz et Parks, 2002] KRANTZ, S. G. et PARKS, H. R. (2002). *A primer of real analytic functions*. Springer Science & Business Media.
- [Lehmer et Selberg, 1960] LEHMER, D. et SELBERG, S. (1960). A sum involving the function of Möbius. *Acta Arithmetica*, 6(1):111–114.
- [Lehmer, 1940] LEHMER, D. H. (1940). On the maxima and minima of Bernoulli polynomials. *Amer. Math. Monthly*, 47:533–538.
- [MacLeod, 1968] MACLEOD, R. A. (1967/1968). A new estimate for the sum $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$. *Acta Arith.*, 13:49–59.
- [Montgomery et Vaughan, 2006] MONTGOMERY, H. L. et VAUGHAN, R. C. (2006). *Multiplicative number theory I : Classical theory*, volume 97. Cambridge University Press.
- [Ng, 2004] NG, N. (2004). The distribution of the summatory function of the Möbius function. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 89(2):361–389.

- [Odlyzko et te Riele, 1984] ODLYZKO, A. M. et te RIELE, H. J. (1984). *Disproof of the Mertens conjecture*. Centrum voor Wiskunde en Informatica.
- [Pintz, 1982] PINTZ, J. (1982). Oscillatory properties of $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$, I. *Acta Arithmetica*, 42:49–55.
- [Pintz, 1984] PINTZ, J. (1984). On the remainder term of the prime number formula and the zeros of Riemann’s zeta-function. In *Number Theory Noordwijkerhout 1983*, pages 186–197. Springer.
- [Pollack, 2011] POLLACK, P. (2011). The Möbius transform and the infinitude of primes. *Elemente der Mathematik*, 66(3):118–120.
- [Ramaré, 2002] RAMARÉ, O. (2002). État des lieux. *Preprint. Disponible à l’adresse <http://iml.univ-mrs.fr/~ramare/Maths/ExplicitJNTB.pdf>*.
- [Ramaré, 2013a] RAMARÉ, O. (2013a). Explicit estimates for the summatory function of $\Lambda(n)/n$ from the one of $\Lambda(n)$. *Acta Arith*, 159(2):113–122.
- [Ramaré, 2013b] RAMARÉ, O. (2013b). From explicit estimates for primes to explicit estimates for the Moebius function. *Acta Arith.*, 157(4):365–379.
- [Ramaré, 2015] RAMARÉ, O. (2015). Explicit estimates on several summatory functions involving the Moebius function. *Math. Comp.*, 84(293):1359–1387.
- [Ramaré, 2019] RAMARÉ, O. (2019). Quantitative steps in the Axer–Landau equivalence theorem. *Acta Arithmetica*, pages 1–11.
- [Ramaré, 2018] RAMARÉ, O. (2018). On the missing log factor. In *Lecture Notes in Mathematics*, volume 2213, pages 293–315. Springer Verlag.
- [Schoenfeld, 1969] SCHOENFELD, L. (1968/1969). An improved estimate for the summatory function of the Möbius function. *Acta Arith.*, 15:221–233.
- [Selberg, 1949] SELBERG, A. (1949). An elementary proof of the prime-number theorem. *Annals of Mathematics*, pages 305–313.
- [Shapiro, 1950] SHAPIRO, H. N. (1950). On a theorem of Selberg and generalizations. *Annals of Mathematics*, pages 485–497.
- [Titchmarsh et al., 1986] TITCHMARSH, E. C., HEATH-BROWN, D. et al. (1986). *The theory of the Riemann zeta-function*. Oxford University Press.
- [Trudgian, 2015] TRUDGIAN, T. (2015). Explicit bounds on the logarithmic derivative and the reciprocal of the Riemann zeta-function. *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici*, 52(2):253–261.

Table des matières

Notations principales	ix
Résumé détaillé	xi
1 Identités intégrales	1
1.1 Introduction : fonction de Möbius, identité de Meissel, formule d'inversion pour des fonctions	1
1.2 Identités intégrales de Balazard et El Marraki	2
1.3 Une identité intégrale générale pour m_1	4
1.4 Définition des espaces \mathcal{G}_k	8
1.5 Opérateur U et transformées de Mellin	10
1.6 Une formule générale de convolution multiplicative	16
1.7 Deux fonctions particulières	19
2 Les constantes C_k	23
2.1 Minorations des \mathfrak{c}_k^*	24
2.2 Majorations de C_k^* pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$	28
2.3 Majorations conditionnelles plus fortes pour $k = 2$ et $k = 3$	40
2.4 Un résultat inconditionnel	42
2.5 Majorations de \mathfrak{c}_k^* lorsque $k \rightarrow +\infty$	44
2.6 Annexe : encadrements pour certaines fonctions Ug	49
3 Norme L^1 de $Ug(t)t^{-1}$ sur $[1, \infty[$	53
3.1 Étude des versions tronquées de \mathcal{Z}	54
3.2 Contrôle des normes L^1 pour K variable	58
4 Conversions de M vers m_1 et m	61
4.1 Un état des lieux des majorations effectives disponibles de M et des méthodes utilisées	61
4.2 Petites valeurs, modèle pour M , m et m_1	64
4.3 Estimation du type $ m(x) \leq \varepsilon$ pour $x \geq T$	66
4.4 Estimation du type $ m(x) \leq a/\log x$ pour $x \geq T$	72
4.5 Estimation du type $ m(x) \leq a/\log^2 x$ pour $x \geq T$	77
4.6 Bilan des estimations de m_1	80
4.7 Annexe : une propriété de m_1 équivalente au théorème des nombres premiers	81

5	La fonction Λ de von Mangoldt	83
5.1	La fonction sommatoire logarithmique	83
5.2	Conversion de la fonction de Mertens vers celle de Tchebichef	87
6	Moyennes logarithmiques de Riesz	91
6.1	Identités pour les moyennes logarithmiques de Riesz par récurrence	93
6.2	Identités pour les moyennes logarithmiques de Riesz passant par la fonction M	98
6.3	Une version lissée de m_1	102
7	Conversions d'estimations non effectives	105
8	Minoration en moyenne des fonctions de Mertens et de Liouville	111
8.1	Première minoration d'une intégrale liée à la fonction de Liouville	112
8.2	Deuxième minoration intégrale	114
8.3	Möbius et zéro complexe de la fonction zêta	116
9	Conversions de m vers M, analogue d'un résultat de Odlyzko et de Riele pour m	121
9.1	Majoration universelle de M par $\sup_{t \in [1, x]} t m(t) $	121
9.2	Minoration de $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} m(x) $	123
	Bibliographie	125
	Table des matières	129

Identités intégrales et estimations explicites associées pour les fonctions sommatoires liées à la fonction de Möbius et autres fonctions arithmétiques

Florian DAVAL

Cette thèse développe, tant du point de vue théorique que de celui des explorations numériques, la théorie dite explicite des nombres premiers, principalement sous l'angle de la variable réelle. Elle s'inscrit dans un cadre initié par Michel BALAZARD qui met en avant des identités intégrales reliant la fonction sommatoire M des coefficients de MÖBIUS avec sa variante logarithmique m . Nous présentons un mécanisme systématique de fabrication de telles identités, avec comme paramètre une fonction g intégrable sur $[0, 1]$. Nous étudions particulièrement le cas des g polynomiales (il englobe toutes les identités précédemment publiées par BALAZARD), en cherchant à optimiser certaines normes sup pour l'utilisation des identités intégrales associées. Nous détaillons la stratégie des explorations numériques, dont l'objectif in fine est l'étude de constantes C_k^* implicitement définies par BALAZARD. Puis nous revenons à l'obtention de valeurs exactes pour $\sup\{|m(x) - M(x)/x|(\log x)^j : x \geq T\}$ pour $j = 0, 1, 2$ et certains T . Par la suite, nous obtenons une minoration en moyenne effective de $|M|$ qui est apparentée à un résultat antérieur de PINTZ, mais notre approche est essentiellement différente car elle n'utilise presque pas d'analyse complexe. Et nous donnons le résultat analogue pour la fonction sommatoire de la fonction de LIOUVILLE. Par ailleurs nous nous intéressons aux meilleures estimations connues non-effectives pour $M(x)$ et montrons comment les transformer en des estimations de $xm(x) - M(x)$ du même type. Les techniques et résultats obtenus pour m et M sont partiellement étendus à d'autres fonctions arithmétiques.

Mots clés : théorie explicite des nombres premiers, asymptotique de fonctions arithmétiques.
MathSciNet : 11N37.

This thesis develops both theoretical and numerical aspects of the explicit theory of prime numbers, mainly from the real analysis viewpoint. Its general framework was initiated by Michel BALAZARD who obtained integral identities relating the summatory function M of the MÖBIUS coefficients with its logarithmic variant m . We present a systematic mechanism towards such identities, with an integrable function g on $[0, 1]$ as parameter. We focus particularly on polynomial g 's (as they provide all identities previously published by BALAZARD), and aim at optimizing the sup norm of the related integrands in the aforementioned integral identities. We detail the strategy of numerical explorations, whose ultimate objective is the study of some constants C_k^* tacitly defined by BALAZARD. Then we turn to obtaining exact values for $\sup\{|m(x) - M(x)/x|(\log x)^j : x \geq T\}$ for $j = 0, 1, 2$ and some T 's. Next, we obtain an effective lower bound of an average of $|M|$, related to a result of PINTZ, but with a fundamentally distinct approach using almost no complex analysis. And we then give the analogous result for the summatory function of the LIOUVILLE coefficients. Also, we consider the best known non-effective estimates for $M(x)$ and show how to transform them into estimates of $xm(x) - M(x)$ of the same type. The techniques and obtained results dealing with m and M are partially extended to other arithmetical functions.

Keywords: Explicit theory of prime numbers, asymptotics of arithmetical functions.
MathSciNet: 11N37

Thèse soutenue publiquement le 25 octobre 2019 pour obtenir le grade de Docteur (spécialité : Mathématiques) de l'Université de Lille devant le jury composé de :

M. Emmanuel	FRICAIN	Université de Lille	Président
M. Michel	BALAZARD	Institut de Mathématiques de Marseille	Rapporteur
M. Olivier	ROBERT	Université Jean Monnet Saint-Étienne	Rapporteur
M. Bruno	MARTIN	Université du Littoral Côte d'Opale	Examinateur
M ^{me} Anne	DE ROTON	Université de Lorraine	Examinateur
M. Jean-François	BURNOL	Université de Lille	Directeur
M ^{me} Martine	QUEFFÉLEC	Université de Lille	Invitée

L'encadrement de cette thèse a été assuré conjointement par Jean-François BURNOL et Bruno MARTIN.