

École doctorale n° 072 : Sciences Pour l'Ingénieur

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'Université de Lille

Spécialité doctorale “Mathématiques appliquées”

présentée et soutenue publiquement par

Pierre Mennuni

le 04 novembre 2019

Ondes progressives de l'équation de Gross–Pitaevskii non locale : analyse et simulations

Directeur de thèse : **Stephan De Bièvre**

Co-encadrants de thèse : **André de Laire, Guillaume Dujardin**

Composition du jury

Xavier Antoine	Rapporteur
Valeria Banica	Examinatrice
Claire Chainais	Examinatrice
David Chiron	Rapporteur
Stephan De Bièvre	Directeur de thèse
André de Laire	Examineur
Guillaume Dujardin	Examineur
Claire Scheid	Examinatrice

Université de Lille

Laboratoire Paul Painlevé

UMR CNRS 8524, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon directeur de thèse, Stephan De Bièvre, et mes encadrants, André de Laire et Guillaume Dujardin, pour m'avoir encadré et soutenu tout au long de ce travail de recherche. Je les remercie pour leur disponibilité, leur pédagogie et la patience dont ils ont fait preuve. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec eux.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance à Xavier Antoine et David Chiron qui ont accepté d'être rapporteurs de ma thèse. J'exprime également ma gratitude à Valeria Banica, Claire Chainais et Claire Scheid qui m'ont fait l'honneur d'être membres du jury.

L'Université de Lille et l'Inria m'ont fourni d'excellentes conditions de travail durant ces trois années. Je remercie en particulier tous les membres du Laboratoire Paul Painlevé.

Enfin, cette thèse n'aurait pas vu le jour sans le soutien inconditionnel de ma famille et de mes amis qui ont toujours été à mes côtés et qui m'ont toujours encouragé. Merci à eux.

Notations

- Pour $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, on note

$$x_{\perp} = (x_2, \dots, x_N) \quad \text{et} \quad x' = (x_1, \dots, x_{N-1}).$$

- \mathcal{F} ou $\hat{\cdot}$ (resp. \mathcal{F}^{-1} ou $\check{\cdot}$) désigne la transformée de Fourier d'une fonction ou d'une distribution (resp. la transformée de Fourier inverse). Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on utilise la convention

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx.$$

- Pour $p \in [1, +\infty]$, on note p' son exposant conjugué défini par la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

avec la convention $p' = +\infty$ si $p = 1$ et $p = 1$ si $p' = +\infty$.

- $\sqrt{\cdot}$ ou $(\cdot)^{1/2}$ désigne la détermination principale de la racine carrée sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ i.e. si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ alors

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \operatorname{signe}(b) \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

- Pour $z, w \in \mathbb{C}$, le crochet $\langle z, w \rangle$ désigne $\operatorname{Re}(z\bar{w})$.

Table des matières

1	Introduction générale	7
2	Équation de Schrödinger linéaire avec conditions non nulles à l'infini	15
2.1	Rappels sur l'équation de Schrödinger linéaire	17
2.2	Le cas des conditions $L^2(\mathbb{R})$	18
2.3	Le cas des conditions non nulles à l'infini	20
2.3.1	Étude théorique	20
2.3.2	Méthode de la phase stationnaire et comportement asymptotique	22
2.3.3	Réalisation d'un schéma numérique	29
2.4	Illustration du profil universel	31
3	Ondes progressives pour (GPN) en dimension 1	35
3.1	Introduction	36
3.1.1	Présentation du problème	36
3.1.2	Hypothèses sur \mathcal{W} et espace d'énergie $\mathcal{E}(\mathbb{R})$	36
3.1.3	Énoncés des résultats principaux	38
3.2	Estimations a priori	41
3.3	Compacité des suites minimisantes	47
3.4	Caractérisation des solutions de (OPNc) et preuve du théorème 3.1.1	58
3.5	Stabilité des ondes progressives	61
4	Étude de la courbe minimisante en dimension $N \geq 1$	65
4.1	Introduction	66
4.1.1	Présentation du problème	66
4.1.2	Hypothèses sur \mathcal{W}	67
4.1.3	Résultats principaux	71
4.2	Propriétés de la courbe E_{\min}	73
4.2.1	Résultats préliminaires	74
4.2.2	Continuité, croissance et sous-additivité de E_{\min}	79
4.2.3	Concavité de E_{\min}	81
4.2.4	Bornes en dimension 1 et 2	85
4.3	Preuve des théorèmes principaux	94
5	Méthodes numériques en dimension 1 et 2	95
5.1	Introduction	96
5.2	Méthode de gradient par projection en dimension 1	97
5.2.1	Utilisation de la transformée de Fourier rapide	98
5.2.2	Mise en oeuvre	100
5.2.3	Observations numériques	103
5.3	Méthode par pénalisation en dimension 2	107
5.3.1	Description de la méthode et lien avec E_{\min}	107

5.3.2	Discrétisation du plan en variables étirées	108
5.3.3	Calcul des gradients dans le cas local	110
5.3.4	Calcul du gradient de l'énergie potentielle dans le cas non local	113
5.3.5	Mise en oeuvre	115
5.3.6	Observations numériques	117
6	Annexe	125
A	Annexe du Chapitre 3	125
B	Annexe du Chapitre 5	127

Chapitre 1

Introduction générale

Introduite dans les années 60 par les physiciens Gross et Pitaevskii [61, 46], l'équation de Gross–Pitaevskii décrit le phénomène en physique quantique de condensation de Bose–Einstein d'un gaz atomique ultra-froid lorsque l'interaction entre les bosons est ponctuelle. En notant $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction d'onde du condensat, l'équation s'écrit

$$i\partial_t \Psi(t, x) = \Delta \Psi(t, x) + \Psi(t, x)(1 - |\Psi|^2)(t, x) \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N. \quad (\text{GP})$$

L'équation de Gross–Pitaevskii est une équation de type Schrödinger non linéaire et intervient aussi dans d'autres domaines de la physique tels que l'optique non linéaire et la superfluidité [51, 24]. D'autres modèles physiques ont été proposés dans [68, 6, 64] et présentent une non-localité au niveau du terme non linéaire. Afin de traiter une plus large variété d'interactions physiques, il est intéressant alors de considérer l'équation de Gross–Pitaevskii non locale,

$$i\partial_t \Psi(t, x) = \Delta \Psi(t, x) + \Psi(t, x) (\mathcal{W} * (1 - |\Psi|^2))(t, x) \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad (\text{GPN})$$

où \mathcal{W} est une distribution tempérée réelle. Lorsque \mathcal{W} est paire, (GPN) est une équation hamiltonienne et son énergie, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, est donnée par

$$E(\Psi(t)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Psi(t)|^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{W} * (1 - |\Psi(t)|^2)) (1 - |\Psi(t)|^2).$$

Nous nous intéresserons tout au long de la thèse à des solutions de (GPN) d'énergie finie. À la différence de nombreuses équations de Schrödinger non linéaires où l'on considère des conditions nulles à l'infini, l'équation de Gross–Pitaevskii présente des conditions non nulles à l'infini. En effet, si $E(\Psi)$ est finie, alors $|\Psi|$ doit tendre vers 1 lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$ en un certain sens. En particulier, dans le cas où $\mathcal{W} = \delta_0$ et $N = 1$, si Ψ est une fonction d'énergie finie, alors Ψ est 1/2-höldérienne sur \mathbb{R} . Ainsi, Ψ est uniformément continue sur \mathbb{R} et on obtient

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |\Psi(t, x)| = 1.$$

Une autre quantité importante et formellement conservée est le moment P , défini par

$$P(\Psi(t)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \langle i\partial_1 \Psi(t), \Psi(t) \rangle,$$

où $\langle i\partial_1 \Psi, \Psi \rangle = \text{Re}(i\partial_1 \Psi \bar{\Psi})$. Lorsque Ψ est d'énergie finie, cette quantité n'est pas toujours bien définie. Nous définirons aux chapitres 3 et 4 un autre moment, que l'on notera p , adapté aux fonctions d'énergie finie.

La problématique de cette thèse est l'existence de solutions particulières de (GPN), que l'on appelle ondes progressives. Une onde progressive, ou soliton, est une solution de (GPN) de la forme

$$\Psi(t, x) = v(x_1 - ct, x_\perp),$$

où $c \in \mathbb{R}$ est la vitesse de l'onde progressive. Elle correspond à la propagation d'un profil, dans la première direction, à la vitesse c . Ces ondes progressives jouent un rôle important dans la dynamique de (GPN). Nous nous intéresserons uniquement à des ondes progressives d'énergie finie. En injectant l'expression de Ψ dans (GPN), on obtient l'équation

$$ic\partial_1 v + \Delta v + v (\mathcal{W} * (1 - |v|^2)) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N, \quad (\text{OPNc})$$

que l'on note (OPc) lorsque $\mathcal{W} = \delta_0$,

$$ic\partial_1 v + \Delta v + v (1 - |v|^2) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N. \quad (\text{OPc})$$

Si v est une solution de l'équation de vitesse c , alors \bar{v} est solution de vitesse $-c$. Par conjugaison, on peut alors supposer sans perte de généralité que $c \geq 0$. De plus, si v est une fonction constante de module 1, alors v est solution de (OPNc). Par la suite, ces solutions seront appelées solutions triviales. Nous arrivons alors à la question suivante : Sous quelles conditions sur \mathcal{W} existe-t-il des ondes progressives non triviales d'énergie finie ?

Avant de présenter nos travaux, rappelons certains résultats établis dans le cas local, c'est-à-dire, lorsque $\mathcal{W} = \delta_0$. Dans les années 80, le programme de Jones–Roberts [50, 49], basé sur des simulations numériques et des calculs formels, présente des conjectures concernant l'existence de solutions non triviales de (OPc) et leurs propriétés en dimension 2 et 3. Les auteurs obtiennent la conjecture suivante : Pour tout $c \in]0, \sqrt{2}[$, il existe une onde progressive non triviale d'énergie finie de vitesse c , solution de (OPc). À l'inverse, si $c \geq \sqrt{2}$, il n'existe pas d'onde progressive non triviale d'énergie finie. De plus, ils arrivent aux diagrammes énergie-moment des ondes progressives représentés en figure 1.1. Ici, le moment est défini par

$$P(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \langle i\partial_1 v, v - 1 \rangle.$$

Chaque couple (P_v, E_v) du tracé représente une onde progressive v d'énergie E_v et de moment P_v . La vitesse, quant à elle, est donnée par la pente de la tangente, d'après la relation

$$c_v = \frac{\partial E}{\partial P}(P_v).$$

De plus, les auteurs conjecturent l'existence d'une vitesse critique c_* en dimension 2 et 3 : toute onde progressive de vitesse $c < c_*$ s'annule. Enfin, les auteurs concluent à la présence de vortex, c'est-à-dire des zéros de v autour desquels la phase de v présente un degré topologique non nul (voir [50, 49] pour plus de détails).

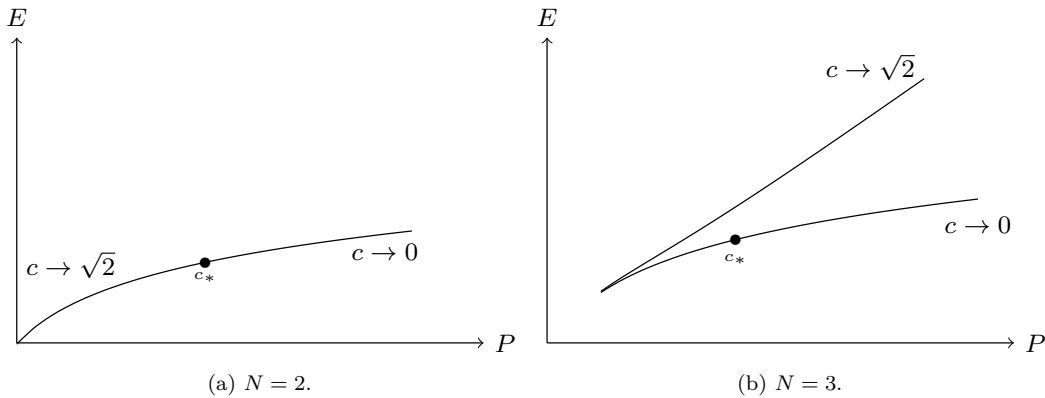


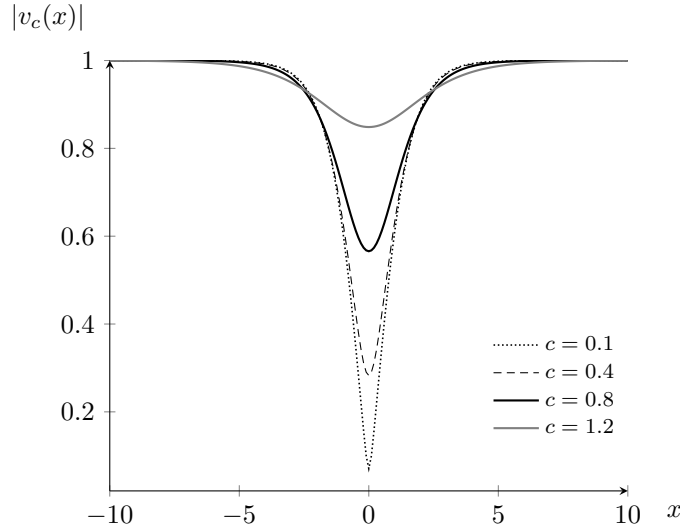
FIGURE 1.1 – Diagramme énergie-moment des ondes progressives non triviales en dimension 2 et 3.

Une partie de ces conjectures a été montrée mathématiquement. Concernant la dimension 1, (OPc) est intégrable. En posant $\eta = 1 - |v|^2$, il est possible de se ramener à une équation différentielle ordinaire et d'obtenir les solutions explicites de l'équation. Précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 1 ([67, 7]). *Soient $N = 1, c \geq 0$ et v une solution de (OPc) d'énergie finie.*

- (i) *Si $c \geq \sqrt{2}$, v est une constante de module un.*
- (ii) *Si $0 \leq c < \sqrt{2}$, à une multiplication par une constante de module un et une translation près, v est soit égale à 1, ou à*

$$v_c(x) = \sqrt{\frac{2-c^2}{2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{2-c^2}}{2}x\right) - i\frac{c}{\sqrt{2}}. \quad (1.1)$$


 FIGURE 1.2 – Module de v_c en (1.1) pour différentes vitesses c .

On trace en figure 1.2 le module de v_c pour plusieurs vitesses c .

Citons [17] qui traite de l'existence des ondes progressives en dimension 1 pour une famille f de non-linéarités locales

$$i\partial_t \Psi(t, x) = \Delta \Psi(t, x) + \Psi(t, x) f(|\Psi|^2)(t, x) \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad (1.2)$$

incluant le cas $f(\rho) = 1 - \rho$. En dimension $N \geq 2$, on a le théorème d'existence suivant.

Théorème 2 ([12, 59, 19, 8, 16, 53]). *Si $N \geq 2$, il existe un ensemble non vide $A \subset]0, \sqrt{2}[$, tel que pour tout $c \in A$, il existe une solution non triviale de (OPc) d'énergie finie. Par ailleurs, si $N \geq 3$, il existe une solution non triviale de (OPc) d'énergie finie pour tout $c \in]0, \sqrt{2}[$.*

Les résultats cités en référence dans le théorème 2 ont été obtenus par des différentes méthodes. Par exemple, l'existence des ondes progressives dans [8] est prouvée en étudiant la minimisation de l'énergie à moment fixé, et donc la vitesse apparaît comme un multiplicateur de Lagrange. Ce résultat établit ainsi l'existence d'une courbe de solutions paramétrée par le moment. Une autre approche a été utilisé dans [59] en dimension $N \geq 3$, où l'auteur minimise la quantité $E - cP$ (appelée *l'action* dans ce contexte), à vitesse fixée $c \in]0, \sqrt{2}[$, sous une contrainte de type Pohozaev, ce qui permet d'établir l'existence d'une solution non triviale de (OPc) pour tout $c \in]0, \sqrt{2}[$. Dans le cas $N = 2$, la question est encore ouverte de savoir s'il existe effectivement des ondes progressives d'énergie finie pour tout $c \in]0, \sqrt{2}[$. Nous renvoyons à [19] pour plus de détails sur ce problème ainsi que pour des résultats similaires pour d'autres types de non linéarités.

En plus de l'existence, d'autres propriétés ont été établies pour les ondes progressives. Par exemple, dans le cas $N = 2$, les solutions de petite vitesse présentent deux vortex de degré 1 et -1 de distance équivalente à $2/c$ lorsque $c \rightarrow 0$ [12]. Si $N = 3$, les solutions de vitesse petite présentent un anneau de vortex de diamètre équivalent à $2|\ln(c)|/c$ lorsque $c \rightarrow 0$ [16, 11].

Concernant la non existence des ondes progressives, on a le résultat suivant.

Théorème 3 ([12, 38, 40]). *Soit $N \geq 2$ et v une solution de (OPc). Si $c = 0$ ou $c > \sqrt{2}$, alors v est une solution triviale. De plus, si $N = 2$ et $c = \sqrt{2}$ alors v est triviale.*

Ces résultats sont en accord avec les conjectures de [50, 49]. La non existence des ondes supersoniques a été étendue dans le cas non local dans [29] : Sous certaines hypothèses sur \mathcal{W} , si $c > \sqrt{2}$ et v est une solution de (OPNc), alors v est triviale. Enfin, lorsque $N \geq 3$, on a le résultat suivant.

Théorème 4 ([27, 8]). *Soit $N \geq 3$. Il existe une constante $E_N > 0$ telle que toute solution v de (OPc) vérifiant $E(v) \leq E_N$ est triviale.*

Par ce théorème, il ne peut pas exister des ondes progressives non triviales d'énergie trop petite lorsque $N \geq 3$, ce qui est en accord avec la figure 1.1b.

Comme les développements formels de [50, 49] semblaient montrer, les ondes progressives en dimension $N \geq 2$ tendent vers une constante de module 1 lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$ et présentent une décroissance algébrique vers cette constante.

Théorème 5 ([37, 39, 12]). *Soient $N \geq 2$ et $0 < c < \sqrt{2}$. Si v est une solution de (OPc) d'énergie finie, alors v vérifie, à une multiplication par une constante de module un près,*

$$v(x) \underset{|x| \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1.$$

De plus, la fonction $x \rightarrow |x|^{N-1}(v(x) - 1)$ est bornée sur \mathbb{R}^N .

Le comportement asymptotique de ces ondes en dimension $N \geq 2$ est montré dans [41, 42]. En dimension 1, si v est une solution non triviale de (OPc), il n'est pas possible de supposer que $v(x) \rightarrow 1$ puisque les limites sont différentes en $\pm\infty$ d'après le théorème 1. De plus, $|v| - 1$ admet une décroissance exponentielle à l'infini, à la différence de la décroissance algébrique en dimension $N \geq 2$.

Une manière de montrer l'existence d'ondes progressives pour (GPN) est d'utiliser une approche variationnelle. En notant p le moment, que l'on définira ultérieurement, on considère le problème de minimisation sous contraintes, pour $\mathfrak{q} \geq 0$,

$$E_{\min}(\mathfrak{q}) = \inf\{E(v), p(v) = \mathfrak{q}\}. \quad (1.3)$$

Formellement, si u est solution du problème précédent, l'équation d'Euler–Lagrange associée n'est autre que (OPNc) et la vitesse c apparait comme multiplicateur de Lagrange,

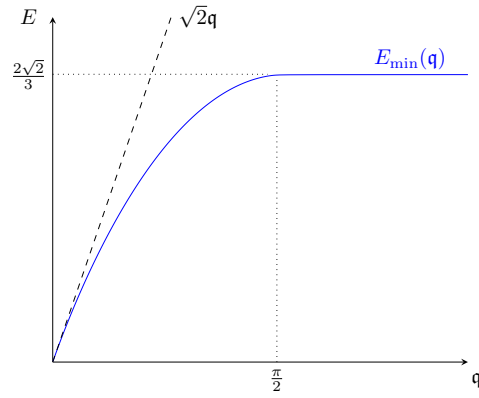
$$cdp[u] = dE[u]. \quad (1.4)$$

Cette méthode a déjà été utilisée dans le cas local $\mathcal{W} = \delta_0$ en dimension 1 dans [7], en dimension 2 et 3 dans [8] et en dimension $N \geq 2$ dans [19] pour l'existence d'ondes progressives de (1.2). Concernant l'existence des minimiseurs, on a les résultats suivants. Si $N = 1$ (respectivement $N = 2$), pour tout $\mathfrak{q} \in]0, \pi/2[$ (respectivement pour tout $\mathfrak{q} > 0$), il existe $u_{\mathfrak{q}}$ d'énergie finie telle que $E(u_{\mathfrak{q}}) = E_{\min}(\mathfrak{q})$. De plus, il est montré en dimension $N = 2$ dans [19] que la vitesse $c_{\mathfrak{q}}$ de $u_{\mathfrak{q}}$ tend vers $\sqrt{2}$ lorsque \mathfrak{q} tend vers 0 tandis que $c_{\mathfrak{q}}$ tend vers 0 lorsque \mathfrak{q} tend vers $+\infty$, ce qui complète le théorème 2. Si $N = 3$, il existe $\mathfrak{q}_0 > 0$ tel que pour tout $\mathfrak{q} > \mathfrak{q}_0$, il existe $u_{\mathfrak{q}}$ d'énergie finie telle que $E(u_{\mathfrak{q}}) = E_{\min}(\mathfrak{q})$. Enfin, en plus d'obtenir l'existence d'ondes progressives, la résolution du problème (1.3) nous permet d'obtenir la stabilité orbitale d'après la méthode de Cazenave–Lions [15].

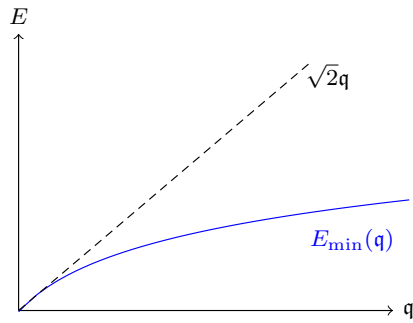
Les courbes minimisantes pour $\mathcal{W} = \delta_0$ et $N = 1, 2$ et 3 sont tracées en figure 1.3. Notons que $E_{\min}(\mathfrak{q})$ est bornée si $N = 1$, tandis que $E_{\min}(\mathfrak{q}) \rightarrow +\infty$ lorsque $\mathfrak{q} \rightarrow +\infty$, si $N = 2$ ou $N = 3$. Si $N = 3$, la résolution du problème (1.3) ne nous donne pas l'existence des ondes progressives situées sur la courbe rouge E_{sup} . La méthode utilisée dans [59] permet d'obtenir l'existence d'ondes progressives pour toute vitesse appartenant à $]0, \sqrt{2}[$ lorsque $N \geq 3$. Par contre, cette méthode ne nous donne pas la stabilité orbitale des ondes obtenues. Enfin, sur chacune des figures, on observe que la courbe E_{\min} est concave. Cette propriété est cruciale afin d'obtenir l'existence d'un minimiseur.

Généralement, la résolution du problème (1.3) est divisée en deux parties : la première partie est l'étude des propriétés de la courbe minimisante. On montre en particulier que la courbe E_{\min} est concave

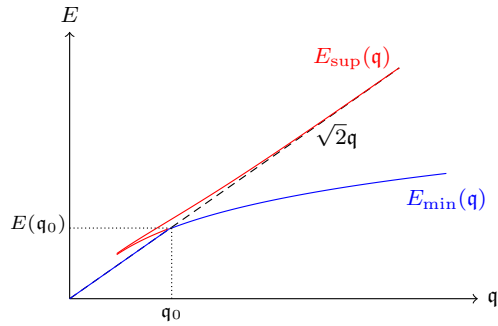
sur \mathbb{R}^+ . La seconde partie est l'étude des suites minimisantes. En considérant une suite minimisante u_n , on montre que cette suite converge, en un certain sens, vers un minimiseur u , en utilisant un raisonnement de type concentration-compacité (voir [55, 56] pour le principe général) et les propriétés de E_{\min} établies précédemment. Il n'est pas difficile ensuite de montrer que ce minimiseur u vérifie (1.4), et u est alors une onde progressive.



(a) $N = 1$.



(b) $N = 2$.



(c) $N = 3$.

FIGURE 1.3 – Courbe minimisante E_{\min} en dimension $N = 1, 2$ et 3 .

Cette thèse se compose de 4 chapitres. Avant d'aborder la question de l'existence des ondes progressives pour (OPNc), le premier chapitre est consacré aux conditions non nulles à l'infini. En particulier, dans le chapitre 2, nous étudierons les solutions de l'équation de Schrödinger linéaire en dimension 1,

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (\text{SL})$$

lorsque u_0 présente des conditions non nulles à l'infini. Après quelques rappels sur l'équation de Schrödinger lorsque la condition initiale appartient à $L^2(\mathbb{R})$ en section 2.2, on montrera au théorème 2.3.3 un comportement asymptotique universel non trivial de la solution : Si u_0 est une fonction impaire vérifiant

$$u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad u_0' \in S(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_0(x) = \pm 1,$$

alors, pour tout compact K de \mathbb{R} , il existe une constante $C(K) > 0$ telle que

$$\left\| \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi t}} x - u(t, x) \right\|_{L^\infty(K)} \leq \frac{C(K)}{t^{3/2}},$$

où u désigne la solution de (SL) associée à u_0 . Lorsque u_0 n'est pas impaire, on retrouvera ce comportement asymptotique universel en effectuant le changement d'échelle $x = \mu\sqrt{t}$, où $\mu > 0$, au corollaire 2.3.5. Numériquement, nous proposerons un schéma de type Crank–Nicolson adapté aux conditions non nulles à l'infini en section 2.3.3, qui conserve l'énergie discrète (voir théorème 2.3.6). Ce schéma permettra d'illustrer le comportement asymptotique universel de la solution.

Le chapitre 3 est consacré à l'existence d'ondes progressives d'énergie finie pour (GPN) en dimension 1. Nous utiliserons l'approche variationnelle détaillée précédemment en étudiant le problème (1.3). L'étude de la courbe minimisante sera effectuée dans le chapitre 4, nous nous focaliserons ici sur la compacité des suites minimisantes. On supposera dans ce chapitre que \mathcal{W} est une distribution tempérée paire avec $\widehat{\mathcal{W}} \in L^\infty(\mathbb{R})$, et $\widehat{\mathcal{W}} \geq 1$ p.p. sur \mathbb{R} . De plus, $\widehat{\mathcal{W}}$ est continue en l'origine et $\widehat{\mathcal{W}}(0) = 1$.

Sous certaines hypothèses sur $E_{\min}(\mathfrak{q})$, on montrera au théorème 3.1.1 le résultat d'existence suivant : Il existe une constante $\mathfrak{q}_* > 0$ tel que pour tout $\mathfrak{q} \in]0, \mathfrak{q}_*[$, il existe $u_{\mathfrak{q}}$ solution non triviale de (OPNc) telle que $E(u_{\mathfrak{q}}) = E_{\min}(\mathfrak{q})$. De plus, nous montrerons un résultat de stabilité orbitale au théorème 3.1.3. Notons que $\mathcal{W} = \delta_0$ vérifie les hypothèses précédentes et nos résultats généralisent ainsi les travaux effectués dans le cas local.

Dans le chapitre 4, nous ferons l'étude la courbe minimisante en dimension $N \geq 1$, en supposant principalement trois hypothèses sur \mathcal{W} , notées (H1), (H2) et (H3). Ces hypothèses sont détaillées en section 4.1.2 et plusieurs exemples de distributions les satisfaisant sont proposés dans cette section. Les hypothèses sur \mathcal{W} nous permettront d'établir différentes propriétés de la courbe minimisante en dimension $N \geq 1$ au théorème 4.1.4 et en dimension $N = 1$ au théorème 4.1.5. En particulier, nous établiront la concavité de E_{\min} dans la section 4.2.3 où nous utiliserons les travaux de M. Mariş et O. Lopes [57]. Ces résultats nous permettront d'établir un nouveau résultat d'existence en dimension 1 (voir théorème 4.1.7) : Soit \mathcal{W} une distribution vérifiant les hypothèses (H1) à (H3). Alors, il existe une constante $\mathfrak{q}_* > 0$ tel que pour tout $\mathfrak{q} \in]0, \mathfrak{q}_*[$, il existe $u_{\mathfrak{q}}$ solution non triviale de (OPNc) telle que $E(u_{\mathfrak{q}}) = E_{\min}(\mathfrak{q})$.

Les résultats du chapitre 3 et 4 ont fait l'objet d'un article [32] dans *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series A*.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous proposerons une méthode numérique en dimension 1 et 2, afin de résoudre numériquement le problème de minimisation sous contraintes (1.3), pour un potentiel \mathcal{W} donné. Dans le cas de la dimension 1, nous utiliserons une méthode de gradient avec projection. En dimension 2, nous utiliserons une méthode de pénalisation, permettant de se ramener à un problème de minimisation sans contraintes. Cette méthode a déjà été utilisée par C. Scheid et D. Chiron dans [21] afin de calculer des ondes progressives pour (1.2) en dimension 2. Quelle que soit la dimension, le terme non local dans l'énergie potentielle sera traité par la transformée de Fourier rapide. Les différentes simulations nous permettront d'illustrer les résultats des chapitres précédents et de discuter de la nécessité des hypothèses faites sur \mathcal{W} .

Chapitre 2

Équation de Schrödinger linéaire avec conditions non nulles à l'infini

Introduction

Avant d'entamer l'étude des ondes progressives, nous examinons dans ce chapitre les solutions de l'équation de Schrödinger linéaire avec des conditions non nulles à l'infini en dimension 1. Rappelons que l'équation de Schrödinger linéaire est une équation fondamentale en mécanique quantique, établie en 1925 en dimension 3 par le physicien autrichien Erwin Schrödinger [66]. Elle décrit l'évolution spatiale et temporelle de la fonction d'onde u associée à une particule libre, c'est-à-dire qui n'est soumise à aucune force externe. Dans notre cas, u est une fonction de deux variables t et x réelles, à valeurs complexes et vérifie l'équation suivante, dite équation de Schrödinger linéaire,

$$i\partial_t u(t, x) + \partial_x^2 u(t, x) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

La fonction d'onde u n'a pas de réel sens physique en elle-même. En 1926, Max Born donne l'interprétation suivante : le module au carré de u représente une densité de probabilité de trouver la particule, c'est-à-dire, la probabilité P_E que la particule se trouve dans l'ensemble $E \subset \mathbb{R}$ au temps t fixé est égale à

$$P_E = \int_E |u(t, x)|^2 dx.$$

L'espace fonctionnel généralement employé pour l'équation de Schrödinger est par conséquent l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et donc n'inclut pas les fonctions ayant une limite non nulle à l'infini. Nous renvoyons à [47, 48, 23] pour plus de détails sur l'équation de Schrödinger et la mécanique quantique en général. Notre but dans ce chapitre est d'analyser le comportement asymptotique en temps des solutions de l'équation de Schrödinger linéaire lorsque les conditions aux limites sont non nulles.

L'organisation de ce chapitre est la suivante. Les sections 2.1 et 2.2 sont consacrées à des rappels sur l'équation linéaire. Dans la section 2.2, nous rappellerons les théorèmes d'existence et d'unicité de la solution dans le cas de conditions initiales appartenant à $L^2(\mathbb{R})$ ainsi que les inégalités de dispersion et la formule de Fraunhofer, qui nous seront utiles dans la section suivante. Dans la section 2.3, on considère l'équation de Schrödinger linéaire avec une condition initiale non nulle à l'infini, c'est-à-dire avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} u_0(x) = A$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) = B$ où $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. Dans un premier temps, nous montrerons différentes propriétés de la solution dans le cas où la condition initiale présente des conditions non nulles à l'infini. Le théorème principal de ce chapitre est le théorème 2.3.3 décrivant le comportement asymptotique de la solution en temps longs. Ce résultat permettra de mettre en évidence un profil universel non trivial de la solution. La suite de la section 2.3 est consacrée à l'étude numérique de l'équation. Nous proposerons un schéma numérique, basé sur le schéma de Crank–Nicolson, permettant la conservation de l'énergie, ce que l'on montrera au théorème 2.3.6. Pour terminer, nous illustrerons numériquement le comportement asymptotique de la solution démontré précédemment.

2.1 Rappels sur l'équation de Schrödinger linéaire

On considère l'équation de Schrödinger linéaire

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (\text{SL})$$

On se place dans le cas général où la donnée initiale $u_0 \in S'(\mathbb{R})$. Raisonnons d'abord formellement afin d'obtenir une expression de u . Par transformée de Fourier, on obtient une équation différentielle du premier ordre dans $S'(\mathbb{R})$

$$\partial_t \widehat{u} + i\xi^2 \widehat{u} = 0. \quad (2.1)$$

Comme $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$, on obtient pour $t \in \mathbb{R}$

$$\widehat{u(t)}(\xi) = e^{-i\xi^2 t} \widehat{u_0}(\xi). \quad (2.2)$$

L'expression (2.2) est bien une distribution tempérée puisque $\widehat{u_0} \in S'(\mathbb{R})$ et l'application $\xi \mapsto e^{-i\xi^2 t} \in C^\infty(\mathbb{R})$ est bornée. Ainsi, par transformée de Fourier inverse, on obtient pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$u(t, x) = \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i\xi^2 t} \widehat{u_0}(\xi) \right) (x). \quad (2.3)$$

Cependant, ce calcul est uniquement formel et il nous faut donner un cadre mathématique précis. Donnons dans un premier temps la définition de solution. Rappelons que $u \in C(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}))$ si l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & S'(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & u(t) \end{array}$$

est continue i.e. pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$

$$t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t_0 \Rightarrow \langle u(t_n), \Phi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle u(t_0), \Phi \rangle \quad \text{pour tout } \Phi \in S(\mathbb{R}),$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité S', S .

Définition 2.1.1. On dit que $u \in C(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}))$ est solution de (SL) avec pour condition initiale $u_0 \in S'(\mathbb{R})$ au sens des distributions (ou solution faible) si pour tout $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}))$, on a

$$\int_0^t \langle u(s), \Delta \Phi(s) - i\partial_t \Phi(s) \rangle ds = \langle u_0, i\Phi(0) \rangle - \langle u(t), i\Phi(t) \rangle \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Cette définition de solution faible prend en compte la condition initiale. En effet, soit u une solution faible de (SL), associée à une condition initiale $u_0 \in S'(\mathbb{R})$ et $\Phi \in S(\mathbb{R})$ (indépendante de t). Alors $\partial_t \Phi = 0$ et d'après (2.4)

$$\int_0^t \langle u(s), \Delta \Phi \rangle ds = \langle u_0, i\Phi \rangle - \langle u(t), i\Phi \rangle .$$

Puisque $u \in C(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}))$, l'application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & \langle u(s), \Delta \Phi \rangle \end{array}$$

est continue. Ainsi $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t g(s) ds = 0$ et donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle u(t), \Phi \rangle = \langle u_0, \Phi \rangle .$$

En conclusion, $u(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} u_0$ dans $S'(\mathbb{R})$. Citons maintenant le théorème d'existence et d'unicité de la solution dans $S'(\mathbb{R})$.

Théorème 2.1.2 ([4]). *Pour tout $u_0 \in S'(\mathbb{R})$, l'équation (SL) admet une unique solution $u \in C(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}))$. De plus, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, la solution est donnée par :*

$$u(t, x) = \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i\xi^2 t} \widehat{u_0}(\xi) \right) (x) = K_t * u_0(x), \quad (2.5)$$

où $K_t(x) = \left(\frac{1}{4\pi i t} \right)^{1/2} e^{\frac{ix^2}{4t}}$.

Ce théorème nous permet ainsi d'utiliser un vaste choix de conditions initiales. Pour une donnée initiale u_0 , la solution associée est parfois notée $e^{it\Delta}u_0(x)$ où $e^{it\Delta}$ est appelé propagateur libre de Schrödinger. Cet opérateur est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ (voir proposition 2.2.3).

2.2 Le cas des conditions $L^2(\mathbb{R})$

Considérons l'équation linéaire avec une donnée initiale $u_0 \in S(\mathbb{R})$. Comme $S(\mathbb{R}) \hookrightarrow S'(\mathbb{R})$, le théorème 2.1.2 montre l'existence d'une unique solution $u \in C(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}))$. Lorsque $u_0 \in S(\mathbb{R})$, le théorème suivant montre que $u(t, \cdot)$ appartient aussi à $S(\mathbb{R})$ et que u est continue de \mathbb{R} dans $S(\mathbb{R})$.

Théorème 2.2.1 ([14]). *Posons $K_t(x) = \left(\frac{1}{4\pi i t} \right)^{1/2} e^{\frac{ix^2}{4t}}$ pour $t \neq 0$. Pour tout $u_0 \in S(\mathbb{R})$, il existe une unique solution $u \in C(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}))$. De plus, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, la solution est donnée par*

$$u(t, x) = \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-i\xi^2 t} \widehat{u_0}(\xi) \right) (x) = K_t * u_0(x) = \left(\frac{1}{4\pi i t} \right)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy. \quad (2.6)$$

Pour $u_0 \in H^m(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$, on a un résultat analogue concernant l'existence et l'unicité d'une unique solution $u \in C(\mathbb{R}, H^m(\mathbb{R}))$ (voir [62]). Introduisons maintenant la quantité d'énergie.

Définition 2.2.2. *Soit $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ et u la solution de (SL) associée. On appelle énergie de u , la quantité notée $E(u)$ définie par*

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u'(t, x)|^2 dx.$$

Cette quantité est conservée au cours du temps si $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$. Précisément, on a la propriété de conservation suivante.

Proposition 2.2.3 (Conservation de la norme H^m , [14]). *Soit $u_0 \in H^m(\mathbb{R})$ où $m \in \mathbb{N}$, alors*

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{H^m(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{H^m(\mathbb{R})}. \quad (2.7)$$

Remarque 2.2.4. *On dit alors que $(e^{it\Delta})_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe d'isométries sur $H^m(\mathbb{R})$. Pour d'autres propriétés concernant cet opérateur, on renvoie à [14].*

On donne ici le comportement de la solution $u(t, x)$ quand $u_0(x) \rightarrow 0$ lorsque $|x| \rightarrow +\infty$. Ces propriétés nous seront utiles dans la section 2.3 à titre de comparaison. Rappelons les inégalités de dispersion.

Proposition 2.2.5 (Inégalités de dispersion, [14]). *Soient $p \in [2, \infty]$, p' l'exposant conjugué de p et $t \neq 0$. Alors*

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{1}{4\pi|t|} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \|u_0\|_{L^{p'}(\mathbb{R})}, \quad \text{pour tout } u_0 \in L^{p'}(\mathbb{R}). \quad (2.8)$$

En prenant $p = +\infty$ dans (2.8), on voit que $u(t, x) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, uniformément en x . Comme $\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ est préservée, ceci implique l'étalement ou la dispersion de la solution au cours du temps. Cependant, cela ne nous donne pas une information précise sur la solution quand t est grand. Rappelons alors la formule de Fraunhofer qui permet d'avoir une expression explicite du comportement asymptotique de u en fonction de u_0 .

Proposition 2.2.6 (Formule de Fraunhofer [52, 63]). Soit $u_0 \in S(\mathbb{R})$. Alors la solution de (SL) associée à u_0 vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$u(t, x) = \mathcal{H}(u)(t, x) + G(t, x) \quad (2.9)$$

où

$$\mathcal{H}(u)(t, x) = \frac{e^{\frac{ix^2}{4t}}}{(4\pi it)^{1/2}} \widehat{u_0} \left(\frac{x}{2t} \right),$$

avec les estimations

$$\|G(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{1 + 8\sqrt{3}}{4\sqrt{6}\pi} \right) \frac{1}{t^{3/4}} \|xu_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad (2.10)$$

et

$$\|G(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{4t} \|xu_0\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (2.11)$$

Corollaire 2.2.7. Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ et u la solution de (SL) associée à la condition initiale u_0 . Alors, on a

$$\|u(t, \cdot) - \mathcal{H}(u)(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0. \quad (2.12)$$

À la différence de la formule (2.3) qui fait intervenir la transformée de Fourier inverse, la formule de Fraunhofer est plus explicite et nous permet de comprendre le comportement de la solution pour des temps longs.

Corollaire 2.2.8. Soit $u_0 \in S(\mathbb{R})$ et u la solution de (SL) associée. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ avec $v_1 < v_2$, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{a+v_1 t}^{a+v_2 t} |u(t, x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{v_1}{2}}^{\frac{v_2}{2}} |\widehat{u_0}(\xi)|^2 d\xi. \quad (2.13)$$

En mécanique classique, l'impulsion, notée p , vérifie la relation $p = mv$ où m est la masse et v la vitesse. On retrouve un analogue de cette relation en mécanique quantique : pour une fonction d'onde u associée à une particule libre de masse m , on a

$$\langle P \rangle_{u(t)} = m \frac{d}{dt} \langle X \rangle_{u(t)},$$

où $\langle P \rangle_{u(t)}$ (respectivement $\langle X \rangle_{u(t)}$) désigne l'impulsion moyenne de u (respectivement la position moyenne) définie par

$$\langle P \rangle_{u(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi |\widehat{u}(t, \xi)|^2 d\xi \quad \text{et} \quad \langle X \rangle_{u(t)} = \int_{\mathbb{R}} x |u(t, x)|^2 dx.$$

De plus, $\langle P \rangle_{u(t)}$ ne dépend pas du temps pour une particule libre. Ainsi, la position moyenne $\langle X \rangle_{u(t)}$ est une fonction linéaire du temps et la densité de probabilité de l'impulsion de la particule est alors donnée par $|\widehat{u_0}(\xi)|^2/2\pi$. Pour ces résultats, on renvoie à [23, 47]. Dans notre cas, avec l'équation de Schrödinger adimensionnée (SL), on a $m = 1/2$ et l'interprétation physique de (2.13) est la suivante : pour tout $a \in \mathbb{R}$, la probabilité asymptotique que la particule soit comprise entre $y = a + v_1 t$ et $y = a + v_2 t$ est égale à la probabilité que son impulsion soit comprise entre $v_1/2$ et $v_2/2$, c'est-à-dire, que sa vitesse soit comprise entre v_1 et v_2 . De plus, cette probabilité ne dépend pas de a .

Preuve du corollaire 2.2.8. On va montrer que

$$\int_{a+v_1 t}^{a+v_2 t} |\mathcal{H}(u)(t, x)|^2 dx - \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{v_1}{2}}^{\frac{v_2}{2}} |\widehat{u_0}(\xi)|^2 d\xi \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (2.14)$$

et

$$\int_{a+v_1 t}^{a+v_2 t} |\mathcal{H}(u)(t, x)|^2 dx - \int_{a+v_1 t}^{a+v_2 t} |u(t, x)|^2 dx \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0, \quad (2.15)$$

ce qui nous donnera (2.13) par l'inégalité triangulaire. Pour $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_{a+v_1 t}^{a+v_2 t} |\mathcal{H}(u)(t, x)|^2 dx &= \frac{1}{4\pi t} \int_{a+v_1 t}^{a+v_2 t} \left| \widehat{u}_0 \left(\frac{x}{2t} \right) \right|^2 dx \\ &\stackrel{y=x/2t}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{a+v_1 t}{2t}}^{\frac{a+v_2 t}{2t}} |\widehat{u}_0(y)|^2 dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[\frac{a}{2t} + \frac{v_1}{2}, \frac{a}{2t} + \frac{v_2}{2}]}(y) |\widehat{u}_0(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

En posant pour $t > 0$, $v(t, y) = \chi_{[\frac{a}{2t} + \frac{v_1}{2}, \frac{a}{2t} + \frac{v_2}{2}]}(y) |\widehat{u}_0(y)|^2$, on obtient pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t, y) = \chi_{[\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2}]}(y) |\widehat{u}_0(y)|^2.$$

Comme $|v(t, y)| \leq |\widehat{u}_0(y)|^2 \in L^1(\mathbb{R})$, le théorème de convergence dominée nous donne (2.14). Enfin, la convergence (2.15) est triviale d'après (2.12). En combinant (2.14) et (2.15), on obtient (2.13), ce qui conclut la preuve. \square

2.3 Le cas des conditions non nulles à l'infini

2.3.1 Étude théorique

On considère maintenant l'équation de Schrödinger linéaire avec une donnée initiale u_0 ayant une limite non nulle à l'infini. Rappelons que par le théorème 2.1.2, on a existence et unicité de la solution $u \in C(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}))$ pour une donnée initiale $u_0 \in S'(\mathbb{R})$.

Notons $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} u_0(x)$ et $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(x)$ avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. Si $A = B$, en posant $\tilde{u}_0 = u_0 - A$, on obtient $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |\tilde{u}_0(x)| = 0$. On peut alors utiliser les résultats de la partie précédente si $\tilde{u}_0 \in L^2(\mathbb{R})$. Si $A \neq B$, en posant $\tilde{u}_0 = \frac{u_0 - A}{B - A} + \frac{u_0 - B}{B - A}$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tilde{u}_0(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{u}_0(x) = +1$. Dans la suite, on supposera, sans perte de généralité, que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_0(x) = \pm 1$. À partir de maintenant et jusqu'à la fin de la section 2.3, on considère des solutions dont la condition initiale u_0 vérifie

$$u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad u'_0 \in S(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_0(x) = \pm 1. \quad (2.16)$$

La proposition qui suit nous montre que les limites à l'infini sont conservées. De plus, cette proposition montre que la différence de deux solutions de (SL), dont les conditions initiales vérifient (2.16), ont le même comportement asymptotique en un sens faible.

Proposition 2.3.1. *Soient u_0, v_0 vérifiant (2.16). Notons u (respectivement v) la solution de (SL) associée à u_0 (respectivement v_0). Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(t, x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(t, x) = 1. \quad (2.17)$$

De plus,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0. \quad (2.18)$$

Preuve. Montrons d'abord (2.17). Supposons dans un premier temps que u_0 est une fonction impaire. Comme u est solution de (SL) avec pour donnée initiale u_0 , la formule (2.5) nous donne que $u(t, \cdot)$ est impaire. En particulier, $u(t, 0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En dérivant (SL), u' est solution de l'équation avec pour donnée initiale $u'_0 \in S(\mathbb{R})$. Par le théorème 2.2.1 et la formule (2.6), on obtient que $u'(t, \cdot) \in S(\mathbb{R})$ et $u'(t, \cdot)$ est paire, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$u(t, x) = \int_0^x u'(t, y) dy \quad \text{et} \quad u(t, -x) = \int_0^{-x} u'(t, y) dy = -u(t, x). \quad (2.19)$$

Par somme, on obtient que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$u(t, x) - u(t, -x) = 2u(t, x). \quad (2.20)$$

Maintenant, en utilisant (2.19), le fait que $\widehat{u}'(t, \xi) = e^{-i\xi^2 t} \widehat{u'_0}(\xi)$ par (2.6) et le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (u(t, x) - u(t, -x)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x u'(t, y) dy + \int_{-x}^0 u'(t, y) dy \right) = \int_{\mathbb{R}} u'(t, x) dx = \widehat{u}'(t, 0) \\ &= \widehat{u'_0}(0) = \int_{\mathbb{R}} u'_0(x) dx = 2. \end{aligned}$$

Ainsi, par (2.20), $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(t, x)$ existe et est égale à 1. Au final,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(t, x) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} u(t, x) = 1, \quad (2.21)$$

c'est-à-dire qu'on obtient (2.17) pour u_0 impaire. Plaçons nous maintenant dans le cas général. La fonction u_0 peut être décomposée en une partie paire et une partie impaire : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$u_0(x) = u_{0+}(x) + u_{0-}(x),$$

où $u_{0+}(x) := \frac{1}{2}(u_0(x) + u_0(-x))$ et $u_{0-}(x) := \frac{1}{2}(u_0(x) - u_0(-x))$. Montrons maintenant que $u_{0+} \in S(\mathbb{R})$. Comme $u'_0 \in S(\mathbb{R})$ et par définition de u_{0+} , on obtient que $u'_{0+} \in S(\mathbb{R})$ et $u_{0+} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Ainsi, pour montrer que $u_{0+} \in S(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que u_{0+} est à décroissance rapide. Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} 2x^\alpha u_{0+}(x) &= x^\alpha (u_0(x) + u_0(-x)) \\ &= x^\alpha (u_0(x) - u_0(+\infty)) + x^\alpha (u_0(-x) - u_0(-\infty)) \\ &= x^\alpha \int_{+\infty}^{|x|} u'_0(y) dy + x^\alpha \int_{-\infty}^{-|x|} u'_0(y) dy. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2|x^\alpha u_{0+}(x)| &\leq \int_{|x|}^{+\infty} |x^\alpha u'_0(y)| dy + \int_{-\infty}^{-|x|} |x^\alpha u'_0(y)| dy \\ &\leq \int_{|x|}^{+\infty} |y^\alpha u'_0(y)| dy + \int_{-\infty}^{-|x|} |y^\alpha u'_0(y)| dy. \end{aligned}$$

Comme $u'_0 \in S(\mathbb{R})$, il existe $C_\alpha > 0$ telle que

$$|y^\alpha u'_0(y)| \leq \frac{C_\alpha}{1 + |y|^2}.$$

Finalement, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha u_{0+}(x)| < +\infty,$$

et donc $u_{0+} \in S(\mathbb{R})$. Par linéarité de l'équation, la solution u se décompose en

$$u(t, x) = u_+(t, x) + u_-(t, x),$$

où u_+ (respectivement u_-) est la solution de (SL) associée à la condition initiale u_{0+} (respectivement u_{0-}). On obtient alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_+(t, x) = 0 \quad (2.22)$$

puisque $u_+(t, \cdot) \in S(\mathbb{R})$ par le théorème 2.2.1. En appliquant (2.21) à u_- impaire et en utilisant (2.22), on obtient (2.17).

Passons à la preuve de (2.18). Montrons dans un premier temps que $u_0 - v_0 \in S(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$u_0(x) - v_0(x) = (u_0(x) \pm 1) - (v_0(x) \pm 1)$$

et en raisonnant comme dans la preuve de (2.17), on obtient que $u_0 - v_0$ est à décroissance rapide. Comme $u_0 - v_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $u'_0 - v'_0 \in S(\mathbb{R})$, on conclut que $u_0 - v_0 \in S(\mathbb{R})$. Par linéarité de l'équation et unicité de la solution, $u - v$ est solution de (SL) avec pour condition initiale $u_0 - v_0 \in S(\mathbb{R})$. Par les inégalités de dispersion (2.8) à la proposition 2.2.5, on obtient que

$$\|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{1}{4\pi|t|} \right)^{\frac{1}{2}} \|u_0 - v_0\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

ce qui nous donne (2.18). □

La proposition 2.3.1 ne décrit pas la comportement asymptotique d'une solution u pour u_0 donnée. L'objectif de la section suivante est d'utiliser la méthode de la phase stationnaire afin d'établir le comportement asymptotique de la solution.

2.3.2 Méthode de la phase stationnaire et comportement asymptotique

Le but de cette section est d'obtenir le comportement asymptotique de la solution de (SL) lorsque la condition initiale vérifie (2.16). Commençons par un calcul préliminaire. Soit u_0 vérifiant (2.16) et notons u la solution associée. Par dérivation de l'équation (SL), u' est solution de l'équation avec pour condition initiale u'_0 . Ainsi, par le théorème 2.2.1, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\widehat{u}'(t, \xi) = e^{-i\xi^2 t} \widehat{u'_0}(\xi). \quad (2.23)$$

Ainsi, par transformée de Fourier inverse et en utilisant la relation (2.23), on arrive à

$$u'(t, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi y} e^{-i\xi^2 t} \widehat{u'_0}(\xi) d\xi. \quad (2.24)$$

En intégrant (2.24) entre $y = 0$ et $y = x$ et en permutant les intégrales par le théorème de Fubini, on obtient

$$u(t, x) - u(t, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{i\xi x} - 1)}{i\xi} e^{-i\xi^2 t} \widehat{u'_0}(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x/2} \frac{\sin(\frac{\xi x}{2})}{\xi} e^{-i\xi^2 t} \widehat{u'_0}(\xi) d\xi.$$

Notons que l'intégrale précédente est bien définie puisque $\widehat{u'_0} \in S(\mathbb{R})$ et $\sin(\frac{\xi x}{2})/\xi \rightarrow x/2$ lorsque $\xi \rightarrow 0$. Posons

$$a(x, \xi) = \frac{1}{\pi} e^{i\frac{\xi x}{2}} \frac{\sin(\frac{\xi x}{2})}{\xi} \widehat{u'_0}(\xi). \quad (2.25)$$

L'idée est d'appliquer la méthode de la phase stationnaire à l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} a(x, \xi) e^{-it\xi^2} d\xi,$$

afin d'obtenir le comportement asymptotique de $u(t, x)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Pour une description de la méthode avec des hypothèses plus générales, on renvoie à [71]. Sous nos conditions, on a le résultat suivant.

Proposition 2.3.2. *Soient $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ et la fonction a définie en (2.25). Alors*

$$u(t, x) = u(t, 0) + \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{n=0}^N \frac{(-i)^n}{4^n n!} \frac{\partial_{\xi}^{2n} a(x, 0)}{t^n} + R_N(t, x), \quad (2.26)$$

où

$$|R_N(t, x)| \leq \frac{C_N}{t^{N+\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}} |\eta|^{2N+2} |\mathcal{F}^{-1}(a(x, \cdot))(\eta)| d\eta \quad \text{et} \quad C_N = \frac{\sqrt{\pi}}{4^{N+1}(N+1)!}. \quad (2.27)$$

Preuve. L'argument est standard, nous le reprenons ici brièvement pour le cas particulier qui nous concerne. Soit $x \in \mathbb{R}$. Afin de simplifier les notations, posons

$$F(t) := u(t, x) - u(t, 0),$$

puisque la variable x est fixée. De même, on peut considérer que a est une fonction de la variable ξ uniquement et on écrira $a(\xi)$ à la place de $a(x, \xi)$. Enfin, on pose $b(\xi) = a(\xi)$. On utilisera la notation $\check{b}(\eta)$ pour désigner $\mathcal{F}^{-1}(b(x, \cdot))(\eta)$.

L'idée est d'appliquer le théorème de Plancherel à $a(\xi)$ et $e^{-it\xi^2}$ afin d'obtenir (2.26). Cependant la formule de Plancherel

$$2\pi \int_{\mathbb{R}} \check{f}(\eta) \overline{\check{g}(\eta)} d\eta = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \overline{g(\xi)} d\xi,$$

est valable pour $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ et n'est pas applicable ici puisque $e^{-it\xi^2} \notin L^2(\mathbb{R})$. Ainsi pour $\varepsilon > 0$, on considère la fonction

$$F_{\varepsilon}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon\xi^2} e^{-it\xi^2} \overline{b(\xi)} d\xi$$

et on a, par convergence dominée,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_{\varepsilon}(t) = F(t). \quad (2.28)$$

Le théorème de Plancherel est applicable à $F_{\varepsilon}(t)$ puisque $e^{-\varepsilon\xi^2} e^{-it\xi^2} \in L^2(\mathbb{R})$ et on obtient

$$F_{\varepsilon}(t) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}(e^{-\varepsilon\xi^2 - it\xi^2})(\eta) \overline{\check{b}(\eta)} d\eta. \quad (2.29)$$

Il n'est pas difficile de montrer que

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-\varepsilon\xi^2 - it\xi^2})(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\varepsilon + it)}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4(\varepsilon + it)}\right),$$

ce qui nous donne avec (2.29) l'égalité

$$F_{\varepsilon}(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon + it}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4(\varepsilon + it)}\right) \overline{\check{b}(\eta)} d\eta, \quad (2.30)$$

On a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4(\varepsilon + it)}\right) \overline{\check{b}(\eta)} = \exp\left(i\frac{\eta^2}{4t}\right) \overline{\check{b}(\eta)}$$

et

$$\left| \exp\left(-\frac{\eta^2}{4(\varepsilon + it)}\right) \overline{\check{b}(\eta)} \right| = \left| \exp\left(-\frac{\varepsilon\eta^2}{4(\varepsilon^2 + t^2)}\right) \overline{\check{b}(\eta)} \right| \leq |\check{b}(\eta)|$$

où $\check{b} \in L^1(\mathbb{R})$ puisque $b \in S(\mathbb{R})$. Par le théorème de convergence dominée et le fait que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon + it} = e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{t}$, on arrive à

$$F(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{\eta^2}{4t}} \overline{\check{b}(\eta)} d\eta. \quad (2.31)$$

Effectuons maintenant le développement de Taylor avec reste intégral de la fonction $e^{i\frac{\eta^2}{4t}}$. On a pour $\eta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\frac{\eta^2}{4t}} = \sum_{n=0}^N \frac{(i\frac{\eta^2}{4t})^n}{n!} + A_N\left(i\frac{\eta^2}{4t}\right),$$

où

$$A_N\left(i\frac{\eta^2}{4t}\right) = \frac{(i\eta^2)^{N+1}}{(4t)^{N+1}N!} \int_0^1 (1-\sigma)^N e^{\sigma i\frac{\eta^2}{4t}} d\sigma \quad \text{et} \quad \left| A_N\left(i\frac{\eta^2}{4t}\right) \right| \leq \frac{1}{(N+1)!} \left| \frac{\eta^2}{4t} \right|^{N+1}. \quad (2.32)$$

Ainsi, on obtient

$$F(t) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=0}^N \frac{i^n}{4^n n!} \frac{1}{t^n} \int_{\mathbb{R}} \eta^{2n} \overline{\check{b}(\eta)} d\eta + R_N(t) \quad \text{avec} \quad R_N(t) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_{\mathbb{R}} A_N\left(i\frac{\eta^2}{4t}\right) \overline{\check{b}(\eta)} d\eta. \quad (2.33)$$

Finalement,

$$|R_N(t)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_{\mathbb{R}} \left| A_N\left(i\frac{\eta^2}{4t}\right) \right| |\check{b}(\eta)| d\eta \leq \frac{\sqrt{\pi}}{4^{N+1}(N+1)!} \frac{1}{t^{N+\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}} |\eta|^{2N+2} |\check{b}(\eta)| d\eta,$$

c'est-à-dire (2.27). Comme $b \in S(\mathbb{R})$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b^{(2n)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\check{b}^{(2n)}(\eta)} e^{-i\xi\eta} d\eta = \int_{\mathbb{R}} (-i\eta)^{2n} \check{b}(\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta.$$

En particulier,

$$\overline{\check{b}^{(2n)}(0)} = \int_{\mathbb{R}} (-i\eta)^{2n} \overline{\check{b}(\eta)} d\eta.$$

En utilisant cette égalité dans l'expression (2.33), on obtient (2.26). \square

Grâce à l'expression (2.26) à la proposition précédente, on peut maintenant obtenir le comportement asymptotique de $u(t, x)$. Commençons par traiter le cas où u_0 est impaire.

Théorème 2.3.3. *Soient u_0 impaire vérifiant (2.16) et u la solution de (SL) associée. Alors, pour tout $t > 0$ et uniformément en x dans tout compact,*

$$u(t, x) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi t}} x + \frac{\sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}}{4t^{3/2}} \left(\frac{x^3}{3\pi} - \frac{x}{2\pi} \widehat{u_0}''(0) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{5/2}}\right). \quad (2.34)$$

La convergence (2.34) signifie, que pour tout compact K de \mathbb{R} , il existe une constante $C(K) > 0$ telle que

$$\left\| u(t, x) - \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi t}} x - \frac{\sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}}{4t^{3/2}} \left(\frac{x^3}{3\pi} - \frac{x}{2\pi} \widehat{u_0}''(0) \right) \right\|_{L^\infty(K)} \leq \frac{C(K)}{t^{5/2}}.$$

Ce développement asymptotique de u fait apparaître un profil limite universel et non trivial lorsque u_0 est impaire. En effet, par (2.34), on obtient que

$$u(t, x) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi t}} x + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right),$$

uniformément en $x \in K$ où K est un intervalle borné. Le terme $\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi t}} x$ est indépendant de u_0 tandis que $\mathcal{O}(t^{-3/2})$ lui dépend de u_0 puisqu'il contient le terme $\widehat{u_0''}(0)$. Lorsque t est grand, le terme $\mathcal{O}(t^{-3/2})$ est négligeable par rapport à $e^{-i\frac{\pi}{4}} x / \sqrt{\pi t}$, c'est-à-dire que la dépendance en u_0 n'est plus visible en temps long.

Notons que (2.34) est l'analogie de la formule de Fraunhofer (2.9) pour des conditions non nulles à l'infini. Pour u_0 impaire et $u_0 \in S(\mathbb{R})$, la formule de Fraunhofer implique que, pour tout $x \in K$,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{e^{ix^2/4t}}{\sqrt{4\pi it}} \widehat{u_0}\left(\frac{x}{2t}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{3/4}}\right) \\ &= 0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{3/4}}\right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que le profil limite est trivial dans le cas des conditions nulles à l'infini.

Le théorème 2.3.3 ne nous donne le comportement asymptotique que pour u_0 impaire. Passons maintenant au cas général. Soit u_0 vérifiant (2.16) et décomposons u_0 en $u_0 = u_{0+} + u_{0-}$, où u_{0+} (respectivement u_{0-}) désigne la partie paire (respectivement la partie impaire) de u_0 . La preuve de la proposition 2.3.1 montre que la solution u se décompose en

$$u(t, x) = u_+(t, x) + u_-(t, x)$$

où u_+ (respectivement u_-) est la solution de (SL) associée à la condition initiale u_{0+} (respectivement u_{0-}) et $u_{\pm} \in S(\mathbb{R})$. Par la formule de Fraunhofer (2.9) appliquée à u_+ et le théorème 2.3.3 appliqué à u_- , on obtient le résultat suivant.

Corollaire 2.3.4. *Soient u_0 vérifiant (2.16) et u la solution de (SL) associée. Alors, pour tout $t > 0$ et uniformément en x dans tout compact,*

$$u(t, x) = \frac{e^{\frac{ix^2}{4t}}}{(4\pi it)^{1/2}} \widehat{u_{0+}}\left(\frac{x}{2t}\right) + \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi t}} x + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{3/4}}\right). \quad (2.35)$$

Le développement (2.35) ne fait plus apparaître un profil limite universel puisque le terme $e^{-i\frac{\pi}{4}} x / \sqrt{\pi t}$ n'est pas dominant et est du même ordre que $e^{\frac{ix^2}{4t}} / (4\pi it)^{1/2}$. Le résultat suivant propose une manière de retrouver le profil limite dans le cas général en utilisant un changement d'échelle en espace. La démonstration utilise les estimations de la preuve du Théorème 2.3.3.

Corollaire 2.3.5. *Soient u_0 vérifiant (2.16) et u la solution de (SL) associée. Alors, pour tout $\mu \neq 0$, on a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, \mu\sqrt{t}) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \mu + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{12\sqrt{\pi}} \mu^3 + \mathcal{O}(\mu^5). \quad (2.36)$$

Ce résultat est à comparer avec le corollaire 2.2.8. À la différence de (2.13) qui utilisait une échelle linéaire en $a + vt$, ici la convergence (2.36) s'observe à l'échelle plus petite $\mu\sqrt{t}$. De plus, la convergence (2.36) fait maintenant apparaître le profil limite universel dans le cas général. En effet, le terme avec u_{0+} qui apparaissait dans (2.35) n'est maintenant plus présent. De même, on observe que les coefficients devant μ et μ^3 sont indépendants de u_0 . Enfin, remarquons que cette convergence n'est pas une convergence locale en x comme en (2.34) ou (2.35) et nous donne une erreur constante en $\mathcal{O}(\mu^5)$.

Preuve du théorème 2.3.3. Afin d'obtenir (2.34), nous allons utiliser la proposition 2.3.2 et l'appliquer à u en calculant les coefficients associées à $1/t^{1/2}$ et $1/t^{3/2}$ dans le développement (2.26). Soit $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Comme u_0 est impaire, la solution $u(t, x)$ est impaire pour tout $t > 0$ et $u(t, 0) = 0$. Calculons le premier coefficient $\sqrt{\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}a(x, 0)$. Par définition de a en (2.25), on a

$$a(x, 0) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(\frac{\xi x}{2})}{\xi} \right]_{\xi=0} \widehat{u_0}(0) = \frac{x}{\pi}, \quad (2.37)$$

puisque $\frac{\sin(\frac{\xi x}{2})}{\xi} \underset{\xi \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$ et $\widehat{u_0}(0) = 2$ d'après la proposition 2.3.1. Ainsi, par la proposition 2.3.2, on obtient

$$u(t, x) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi t}} x + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right). \quad (2.38)$$

Calculons maintenant le second coefficient

$$\sqrt{\pi} \frac{-i}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\partial^2 a}{\partial^2 \xi}(x, 0).$$

On a

$$\frac{\partial a}{\partial \xi}(x, \xi) = \frac{ix}{2} a(x, \xi) + \left(\frac{1}{\pi} e^{i\frac{\xi x}{2}} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\sin(\frac{\xi x}{2})}{\xi} \right] \widehat{u_0}'(\xi) \right) + \left(\frac{1}{\pi} e^{i\frac{\xi x}{2}} \frac{\sin(\frac{\xi x}{2})}{\xi} \widehat{u_0}'(\xi) \right).$$

Comme u' est paire, \widehat{u}' est paire donc \widehat{u}' est impaire d'où $\widehat{u}'(0) = 0$. De même, $\frac{\sin(\frac{\xi x}{2})}{\xi}$ est paire donc $\frac{d}{d\xi} \left[\frac{\sin(\frac{\xi x}{2})}{\xi} \right]$ est impaire. Ainsi on obtient

$$\frac{\partial a}{\partial \xi}(x, 0) = \frac{ix}{2} a(x, 0) + 0 + 0 = \frac{i}{2\pi} x^2 \quad (2.39)$$

d'après (2.37). Passons au calcul de $\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2}(x, 0)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2}(x, \xi) &= \frac{ix}{2} \frac{\partial a}{\partial \xi}(x, \xi) + \left(\frac{ix}{2} \frac{1}{\pi} e^{i\frac{\xi x}{2}} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\sin(\frac{\xi x}{2})}{\xi} \right] \widehat{u_0}'(\xi) \right) \\ &+ \left(\frac{1}{\pi} e^{i\frac{\xi x}{2}} \frac{d^2}{d\xi^2} \left[\frac{\sin(\frac{\xi x}{2})}{\xi} \right] \widehat{u_0}'(\xi) \right) + \left(\frac{1}{\pi} e^{i\frac{\xi x}{2}} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\sin(\frac{\xi x}{2})}{\xi} \right] \widehat{u_0}'(\xi) \right) \\ &+ \left(\frac{ix}{2} \frac{1}{\pi} e^{i\frac{\xi x}{2}} \frac{\sin(\frac{\xi x}{2})}{\xi} \widehat{u_0}'(\xi) \right) + \left(\frac{1}{\pi} e^{i\frac{\xi x}{2}} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\sin(\frac{\xi x}{2})}{\xi} \right] \widehat{u_0}'(\xi) \right) + \left(\frac{1}{\pi} e^{i\frac{\xi x}{2}} \frac{\sin(\frac{\xi x}{2})}{\xi} \widehat{u_0}''(\xi) \right). \end{aligned}$$

En raisonnant comme précédemment, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2}(x, 0) &= \frac{ix}{2} \frac{\partial a}{\partial \xi}(x, 0) \\ &+ 0 + \frac{2}{\pi} \frac{d^2}{d\xi^2} \left[\frac{\sin(\frac{\xi x}{2})}{\xi} \right] (0) + 0 \\ &+ 0 + 0 + \frac{x}{2\pi} \widehat{u_0}''(0). \end{aligned}$$

On observe que

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[\frac{\sin(\frac{\xi x}{2})}{\xi} \right] (0) = \frac{-x^3}{24}. \quad (2.40)$$

Finalement, en utilisant (2.39) et (2.40), on arrive à

$$\frac{\partial^2 a}{\partial^2 \xi}(x, 0) = \frac{-x^3}{3\pi} + \frac{x}{2\pi} \widehat{u_0''}(0),$$

puis, par (2.26),

$$u(t, x) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi t}} x + \frac{\sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}}{4t^{3/2}} \left(\frac{x^3}{3\pi} - \frac{x}{2\pi} \widehat{u_0''}(0) \right) + R_1(t, x). \quad (2.41)$$

Majorons maintenant le reste R_1 , afin d'obtenir les convergences voulues. L'idée est d'extraire x^5 du reste en utilisant successivement plusieurs changements de variables. D'après (2.27), on a

$$|R_1(t, x)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{t}} \frac{1}{32t^2} \int_{\mathbb{R}} |\eta|^4 |\check{a}(x, -\eta)| d\eta. \quad (2.42)$$

Simplifions l'expression de $\check{a}(x, -\eta)$. On a

$$\begin{aligned} \check{a}(x, -\eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi/2} \frac{\sin(\xi x/2)}{\xi} \widehat{u_0'}(\xi) e^{-i\eta\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\xi x/2)}{\xi} \widehat{u_0'}(\xi) e^{ix\xi/2 - i\eta\xi} d\xi \\ &= A\left(x, \frac{x}{2} - \eta\right). \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant $\check{a}(x, -\eta)$ dans (2.42) et en effectuant un changement de variables, on obtient

$$\begin{aligned} |R_1(t, x)| &\leq \sqrt{\frac{\pi}{t}} \frac{1}{32t^2} \int_{\mathbb{R}} |\eta|^4 |A(x, x/2 - \eta)| d\eta \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{t}} \frac{1}{32t^2} \int_{\mathbb{R}} |x/2 - \eta|^4 |A(x, \eta)| d\eta. \end{aligned}$$

Maintenant, à nouveau par changement de variables,

$$A(x, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\xi x/2)}{\xi} \widehat{u_0'}(\xi) e^{i\eta\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\xi/2)}{\xi} \widehat{u_0'}\left(\frac{\xi}{x}\right) e^{i\eta\xi/x} d\xi = \alpha\left(x, \frac{\eta}{x}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |R_1(t, x)| &\leq \sqrt{\frac{\pi}{t}} \frac{1}{32t^2} \int_{\mathbb{R}} |x/2 - \eta|^4 |\alpha(x, \eta/x)| d\eta \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{t}} \frac{|x|}{32t^2} \int_{\mathbb{R}} |x/2 - x\eta|^4 |\alpha(x, \eta)| d\eta \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{32} \left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)^5 \int_{\mathbb{R}} |1/2 - \eta|^4 |\alpha(x, \eta)| d\eta. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Simplifions maintenant l'intégrale dans le membre de droite de (2.43). On a,

$$\alpha(x, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \widehat{u_0'}\left(\frac{\xi}{x}\right) e^{i\eta\xi} d\xi.$$

En utilisant le théorème de Plancherel, la relation $\mathcal{F}^{-1}(fg)(\eta) = (\check{f} * \check{g})(\eta)$ et le fait que

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}\right)(z) = \frac{1}{2} \chi_{[-1/2, 1/2]}(z) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{u_0'}\left(\frac{\cdot}{x}\right)\right)(z) = x u_0'(zx),$$

on obtient

$$|\alpha(x, \eta)| = \left| x \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1/2, 1/2]}(\eta - z) u'_0(zx) dz \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1/2, 1/2]}(\eta - z/x) u'_0(z) dz \right|.$$

Ainsi, par le théorème de Fubini-Tonelli et (2.43), on obtient

$$\begin{aligned} |R_1(t, x)| &\leq \frac{\sqrt{\pi}}{32} \left(\frac{|x|}{\sqrt{t}} \right)^5 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\eta - 1/2|^4 \chi_{[-1/2, 1/2]}(\eta - z/x) d\eta \right) |u'_0(z)| dz \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{32} \left(\frac{|x|}{\sqrt{t}} \right)^5 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{z/x-1}^{z/x} |\eta|^4 d\eta \right) |u'_0(z)| dz \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{32} \left(\frac{|x|}{\sqrt{t}} \right)^5 \frac{1}{5} \int_{\mathbb{R}} P\left(\frac{z}{x}\right) |u'_0(z)| dz, \end{aligned} \quad (2.44)$$

où $P(X) = X^5 - (X - 1)^5$ est de degré 4. D'après (2.44), on en déduit que pour K compact, il existe une constante $C(K, u_0)$ telle que, pour tout $x \in K$,

$$|R_1(t, x)| \leq \frac{C(K, u_0)}{t^{5/2}}.$$

En combinant cette inégalité avec (2.41), on obtient (2.34), ce qui conclut la preuve. \square

Preuve du corollaire 2.3.5. Fixons $\mu \in \mathbb{R}$ et posons $x = \mu\sqrt{t}$. Rappelons que la solution u se décompose en $u = u_- + u_+$ avec $u_+ \in S(\mathbb{R})$, où u_+ (respectivement u_-) est la solution de (SL) associée à la condition initiale u_{0+} (respectivement u_{0-}). Appliquons la formule de Fraunhofer à u_+ . L'inégalité (2.10) nous donne, pour $x = \mu\sqrt{t}$,

$$\left| u_+(t, \mu\sqrt{t}) - \frac{e^{i\frac{\mu^2}{4}}}{(4\pi it)^{1/2}} \widehat{u_{0+}}\left(\frac{\mu}{2\sqrt{t}}\right) \right| \leq \frac{C}{t^{3/4}},$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_+(t, \mu\sqrt{t}) = 0. \quad (2.45)$$

Maintenant, l'égalité (2.41) dans la preuve du théorème 2.3.3 nous donne

$$\left| u_-(t, \mu\sqrt{t}) - \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \mu - \frac{\sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}}{12\pi} \mu^3 + \frac{\mu e^{i\frac{\pi}{4}}}{8\sqrt{\pi} t^2} \widehat{u'_{0-}}(0) \right| \leq |R_1(t, \mu\sqrt{t})|. \quad (2.46)$$

L'inégalité (2.44) se réécrit

$$|R_1(t, \mu\sqrt{t})| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{160} |\mu|^5 \int_{\mathbb{R}} P\left(\left|\frac{z}{\mu\sqrt{t}}\right|\right) |u'_0(z)| dz.$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, le fait que $u'_0 \in S(\mathbb{R})$ et que $P(0) = 1$, on obtient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} P\left(\left|\frac{z}{\mu\sqrt{t}}\right|\right) |u'_0(z)| dz = \|u'_0\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

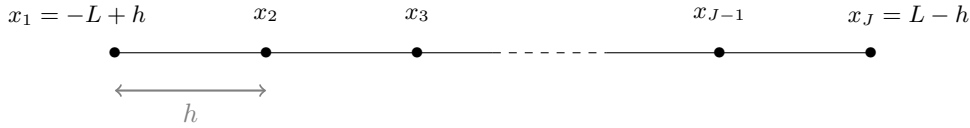
Ainsi, en passant à la limite dans (2.46), on obtient alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u_-(t, \mu\sqrt{t}) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \mu + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{12\sqrt{\pi}} \mu^3 + \mathcal{O}(\mu^5). \quad (2.47)$$

En sommant (2.45) et (2.47), on obtient le résultat voulu. \square

2.3.3 Réalisation d'un schéma numérique

Le but de cette partie est de présenter une méthode numérique calculant la solution u de (SL) pour une condition initiale vérifiant (2.16). Pour réaliser le programme, on procède par la méthode des différences finies. Commençons par la discrétisation spatiale. On se place sur un segment que l'on note $[-L, L]$. On note $h > 0$ le pas d'espace, $(x_j)_j$ l'ensemble des points équidistants du maillage, où $x_j = -L + jh$ avec $1 \leq j \leq 2L/h - 1$. On a donc $J := 2L/h - 1$ points en espace. Par convention, on pose $x_0 = -L$ et $x_{J+1} = L$, qui ne sont pas compris dans le maillage. On peut donc schématiser le maillage en espace de la manière suivante :



Pour la donnée initiale u_0 , et on lui impose des conditions de Dirichlet, c'est-à-dire que l'on fait l'approximation $u_0(-L) = -1$ et $u_0(L) = 1$. On pose enfin $A \in \mathcal{M}_J(\mathbb{R})$ la matrice suivante

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

appelée matrice du Laplacien Dirichlet.

Pour la discrétisation temporelle, on considère un intervalle de temps $[0, T]$ avec $T > 0$ et on note δt le pas de temps. On discrétise l'intervalle en $N + 1$ points où $N = T/\delta t$, ces points sont notés $(t_n)_n$ avec $t_n = n\delta t$ pour $0 \leq n \leq N$. En démarrant du vecteur $U^0 = (u_0(x_1), \dots, u_0(x_J))$, la méthode de différences finies nous fournit un ensemble fini de valeurs U_j^n , $1 \leq j \leq J$, $0 \leq n \leq N$, approchant la solution $u(t, x)$ aux points (x_j, t_n) .

Le schéma de résolution numérique est le schéma de Crank–Nicolson et la discrétisation de (SL) pour $1 \leq j \leq J$ et $0 \leq n \leq N$ est la suivante :

$$i \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\delta t} + \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{2h^2} + \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{2h^2} = 0, \quad (2.48)$$

avec les conditions au bord que l'on impose,

$$U_0^n = -1 \quad \text{et} \quad U_{J+1}^n = 1, \quad \text{pour tout } n \geq 0. \quad (2.49)$$

Posons $U^n = (U_1^n, \dots, U_J^n)$ le vecteur de taille J . Les équations (2.48) et (2.49) se résument alors à l'équation matricielle

$$U^{n+1} = \left(I - i \frac{\delta t}{2} A \right)^{-1} \left[\left(I + i \frac{\delta t}{2} A \right) U^n + S \right] \quad \text{avec} \quad S = \frac{i\delta t}{h^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Numériquement, l'énergie est calculée par la quantité suivante, pour $0 \leq n \leq N$,

$$E_{\text{num}}(n) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h} \right|^2.$$

Avec le schéma précédent, on a le théorème de conservation numérique suivant.

Théorème 2.3.6. *Pour tout $0 \leq n \leq N$, on a*

$$E_{\text{num}}(n) = E_{\text{num}}(0) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^J \left| \frac{U_{j+1}^0 - U_j^0}{h} \right|^2. \quad (2.50)$$

Preuve. Multiplions (2.48) par $2h^2(\overline{U_j^{n+1}} - \overline{U_j^n})$ et pour $n \geq 0$, sommons de $j = 1$ à $j = J$. On obtient alors

$$\sum_{j=1}^J \frac{2ih^2}{\delta t} |U_j^{n+1} - U_j^n|^2 + (\overline{U_j^{n+1}} - \overline{U_j^n}) (U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1} + U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) = 0. \quad (2.51)$$

En prenant la partie réelle de (2.51), l'expression se simplifie et on obtient

$$\text{Re} \left[\sum_{j=1}^J (\overline{U_j^{n+1}} - \overline{U_j^n}) (U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1} + U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \right] = 0.$$

Séparons l'expression en deux sommes de la manière suivante

$$\begin{aligned} & \text{Re} \left[\sum_{j=1}^J (\overline{U_j^{n+1}} - \overline{U_j^n}) (U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1} + U_{j+1}^n - U_j^n) \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^J (\overline{U_j^{n+1}} - \overline{U_j^n}) (U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1} + U_j^n - U_{j-1}^n) \right] = 0. \end{aligned}$$

En changeant l'indice de sommation de la seconde somme j en $j + 1$, cela nous donne

$$\begin{aligned} & \text{Re} \left[\sum_{j=1}^J (\overline{U_j^{n+1}} - \overline{U_j^n}) (U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1} + U_{j+1}^n - U_j^n) \right. \\ & \left. - \sum_{j=0}^{J-1} (\overline{U_{j+1}^{n+1}} - \overline{U_{j+1}^n}) (U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1} + U_{j+1}^n - U_j^n) \right] = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\text{Re} \left[\sum_{j=1}^{J-1} (\overline{U_j^{n+1}} - \overline{U_j^n} - (\overline{U_{j+1}^{n+1}} - \overline{U_{j+1}^n})) (U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1} + U_{j+1}^n - U_j^n) \right] + R = 0, \quad (2.52)$$

où

$$R = \text{Re} \left[(\overline{U_J^{n+1}} - \overline{U_J^n}) (U_{J+1}^{n+1} - U_J^{n+1} + U_{J+1}^n - U_J^n) \right] - \text{Re} \left[(\overline{U_1^{n+1}} - \overline{U_1^n}) (U_1^{n+1} - U_0^{n+1} + U_1^n - U_0^n) \right]. \quad (2.53)$$

On peut réécrire (2.52) de la manière suivante

$$-\operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^{J-1} \left((\overline{U_{j+1}^{n+1}} - \overline{U_j^{n+1}}) - (\overline{U_{j+1}^n} - \overline{U_j^n}) \right) \left((U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}) + (U_{j+1}^n - U_j^n) \right) \right] + R = 0,$$

et en développant dans la première somme, on obtient

$$-\operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^{J-1} |U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}|^2 - |U_{j+1}^n - U_j^n|^2 + 2i \operatorname{Im}((\overline{U_{j+1}^{n+1}} - \overline{U_j^{n+1}})(U_{j+1}^n - U_j^n)) \right] + R = 0,$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{J-1} (|U_{j+1}^n - U_j^n|^2 - |U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}|^2) + R = 0. \quad (2.54)$$

Simplifions maintenant (2.53), on a

$$\begin{aligned} R &= \operatorname{Re} \left[(\overline{U_J^{n+1}} - \overline{U_J^n}) (U_{J+1}^{n+1} - U_J^{n+1} + U_{J+1}^n - U_J^n) \right] \\ &\quad - \operatorname{Re} \left[(\overline{U_1^{n+1}} - \overline{U_1^n}) (U_1^{n+1} - U_0^{n+1} + U_1^n - U_0^n) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[(\overline{U_J^{n+1}} - 1 + 1 - \overline{U_J^n}) (1 - U_J^{n+1} + 1 - U_J^n) \right] \\ &\quad - \operatorname{Re} \left[(\overline{U_1^{n+1}} + 1 - 1 - \overline{U_1^n}) (U_1^{n+1} + 1 + U_1^n + 1) \right], \end{aligned}$$

puisque $U_0^n = -1$ et $U_{J+1}^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après (2.49). En développant l'expression de R , on obtient

$$\begin{aligned} R &= \operatorname{Re} \left[|U_J^n - 1|^2 - |U_J^{n+1} - 1|^2 + 2i \operatorname{Im}[(1 - \overline{U_J^n})(1 - U_J^{n+1})] \right] \\ &\quad - \operatorname{Re} \left[|U_1^{n+1} + 1|^2 - |U_1^n + 1|^2 + 2i \operatorname{Im}[(\overline{U_1^{n+1}} + 1)(U_1^n + 1)] \right] \\ &= |U_J^n - 1|^2 - |U_J^{n+1} - 1|^2 - |U_1^{n+1} + 1|^2 + |U_1^n + 1|^2. \end{aligned}$$

En remplaçant cette nouvelle expression de R dans (2.54), on obtient

$$\sum_{j=0}^J |U_{j+1}^n - U_j^n|^2 = \sum_{j=0}^J |U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}|^2,$$

ce qui nous donne par récurrence (2.50). \square

Calculons la solution numérique de (SL) associée à la condition initiale $u_0 = \tanh$. On choisit comme paramètres $h = 0.1, \delta t = 0.01, L = 200$. On trace en figure 2.1 la partie réelle de la solution numérique associée à u_0 au temps $T = 30$ et la quantité $|E_{\text{num}}(U^n) - E_{\text{num}}(U^0)|$ en fonction du temps t_n . On observe alors que E_{num} est conservée numériquement au cours du temps.

2.4 Illustration du profil universel

Testons maintenant numériquement le développement asymptotique du théorème 2.3.3 sur la solution numérique associée à la condition initiale $u_0(x) = \tanh(x) + e^{-(x/10)^2} \cos(2x)$. D'après (2.35) et (2.34), considérons l'approximation A_{u_0} , donnée par

$$A_{u_0}(t, x) = \frac{e^{\frac{ix^2}{4t}}}{(4\pi it)^{1/2}} \widehat{u_{0+}} \left(\frac{x}{2t} \right) + \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi t}} x + \frac{\sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}}{4t^{3/2}} \left(\frac{x^3}{3\pi} - \frac{x}{2\pi} \widehat{u_{0-}''}(0) \right),$$

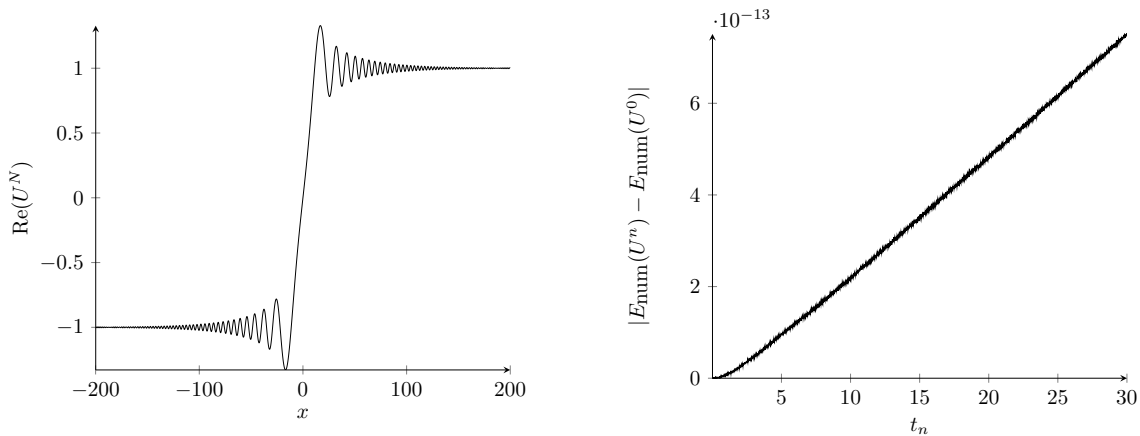


FIGURE 2.1 – Tracé de la partie réelle de la solution numérique associée à $u_0 = \tanh$ au temps $T = 30$ à gauche et tracé de $|E_{\text{num}}(U^n) - E_{\text{num}}(U^0)|$ à droite, avec $h = 0.1$, $\delta t = 0.01$ et $L = 200$.

où l'on rappelle que u_{0+} (respectivement u_{0-}) désigne la partie paire (respectivement la partie impaire) de u_0 . Il n'est pas difficile de montrer que

$$\widehat{u_{0+}}(\xi) = 5\sqrt{\pi} \left(e^{-25(\xi-2)^2} + e^{-25(\xi+2)^2} \right).$$

Cette partie paire $\widehat{u_{0+}}\left(\frac{x}{2t}\right)$ se déplace donc avec une vitesse $|v| = 4$. Ainsi, pour T assez grand, la partie paire réelle de A_{u_0} ne sera plus visible sur le segment $[-L, L]$ et laissera place à la partie impaire de A_{u_0} , ce qui nous permettra d'observer la convergence locale de u vers le profil limite. De plus, un calcul classique par le théorème des résidus nous donne

$$\widehat{u_{0-}}''(0) = \int_{\mathbb{R}} -y^2 \operatorname{sech}^2(y) dy = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Finalement,

$$A_{u_0}(t, x) = \frac{e^{\frac{ix^2}{4t}}}{(4\pi it)^{1/2}} 5\sqrt{\pi} \left(e^{-25(x/2t-2)^2} + e^{-25(x/2t+2)^2} \right) + \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi t}} x + \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4t^{3/2}} \left(\frac{x^3}{3\pi} + \frac{x\pi}{12} \right).$$

On choisit comme paramètres $h = 0.1$, $\delta t = 0.01$ sur le segment $[-30, 30]$. On trace en figure 2.2 sur le même graphe la partie réelle de la solution numérique associée à $u_0 = \tanh(x) + e^{-(x/10)^2} \cos(2x)$ et de la partie réelle de son approximation $A_{u_0}(t, x)$ pour différents temps.

Au cours du temps, on observe que la courbe de $\operatorname{Re}(A_{u_0})$ se rapproche de la courbe de la partie réelle de la solution numérique jusqu'à coïncider avec elle sur le segment entier. Entre le temps $T = 4$ et $T = 8$ on observe que la partie paire de la solution numérique sort du segment $[-30, 30]$ tout en tendant vers 0. Au temps $T = 50$, seules les parties impaires de u et de son approximation A_{u_0} sont présentes et coïncident sur le segment $[-10, 10]$. Enfin, au temps $T = 300$, les deux courbes sont presque identiques et commencent à faire apparaître la partie réelle du profil universel $\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi t}} x$.

Reprenons les mêmes données ainsi que les mêmes paramètres numériques et effectuons maintenant un second test numérique en utilisant un segment spatial dont la taille augmente au cours du temps. D'après (2.36), on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, \mu\sqrt{t}) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \mu + \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{12\sqrt{\pi}} \mu^3 + \mathcal{O}(\mu^5).$$

Si μ est trop petit, le terme en μ^3 devient négligeable devant le terme en μ^1 . Soit μ_m tel que

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mu_m \right| = \left| \frac{1}{12\sqrt{\pi}} \mu_m^3 \right|,$$

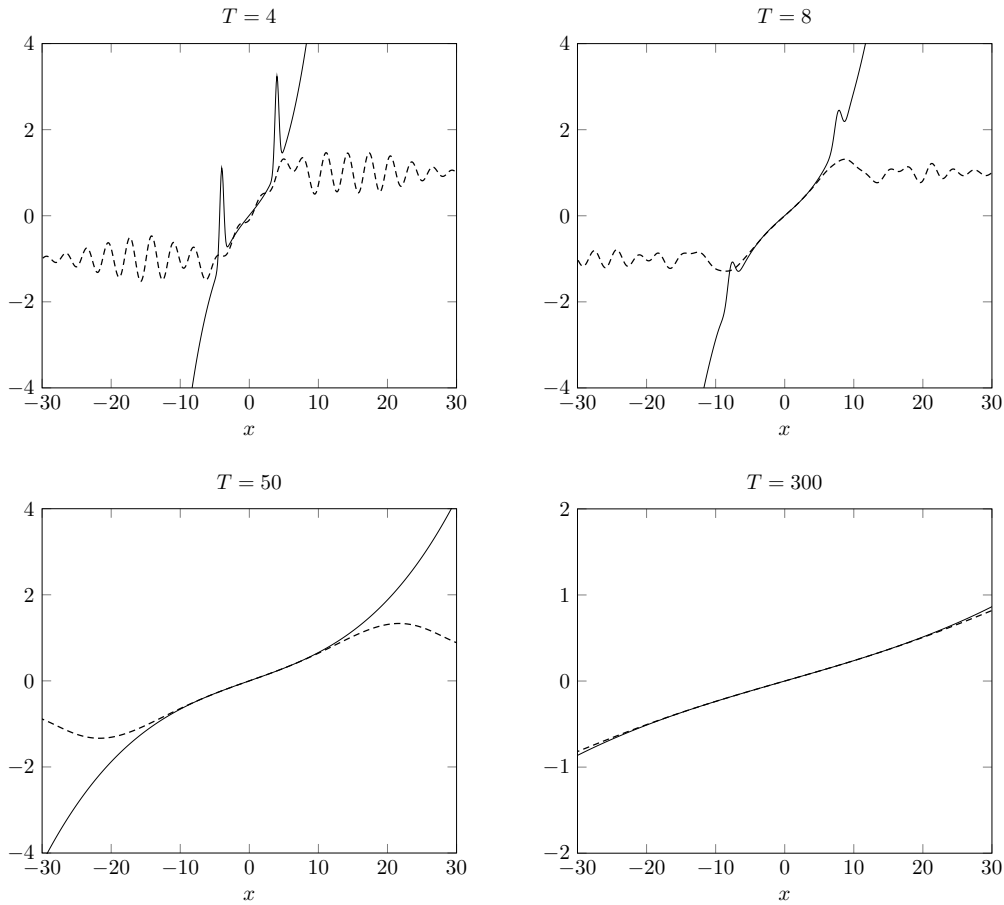


FIGURE 2.2 – Tracés de la partie réelle de la solution numérique associée à $u_0(x) = \tanh(x) + e^{-(x/10)^2} \cos(2x)$ en pointillés et de la partie réelle de A_{u_0} en trait plein aux temps $T = 4, 8, 50$ et 300 , avec $h = 0.1$, $\delta t = 0.01$ et $L = 30$.

ce qui nous donne $\mu_m = \sqrt{12}$.

En figure 2.3, on trace aux temps $T = 10$ et $T = 100$, la partie réelle de la solution associée à u_0 en bleu, la partie réelle de A_{u_0} en rouge et la partie réelle de $e^{-i\frac{\pi}{4}x/\sqrt{\pi t}}$ en noir, sur les segments $[-\mu_m\sqrt{T}/2, \mu_m\sqrt{T}/2]$ en première ligne et $[-\mu_m\sqrt{T}, \mu_m\sqrt{T}]$ en seconde ligne où $\mu_m = \sqrt{12}$.

On observe alors que la partie réelle de u est très proche de celle de A_{u_0} sur le segment en $\mu_m/2$, tandis qu'il y a une différence apparente avec la droite $\text{Re}(e^{-i\frac{\pi}{4}x/\sqrt{\pi t}})$ en noir. À l'inverse, l'erreur entre la partie réelle de u et de A_{u_0} est beaucoup plus importante sur le segment en μ_m . Cela est dû au terme en $\mathcal{O}(\mu^5)$ dans (2.36) : Sur le segment $[-\mu_m\sqrt{T}/2, \mu_m\sqrt{T}/2]$, le terme en μ^5 est négligeable. En revanche, sur le segment $[-\mu_m\sqrt{T}, \mu_m\sqrt{T}]$, le terme en μ^5 devient important, ce qui explique l'erreur entre u et A_{u_0} , que ce soit au temps $T = 10$ ou $T = 100$.

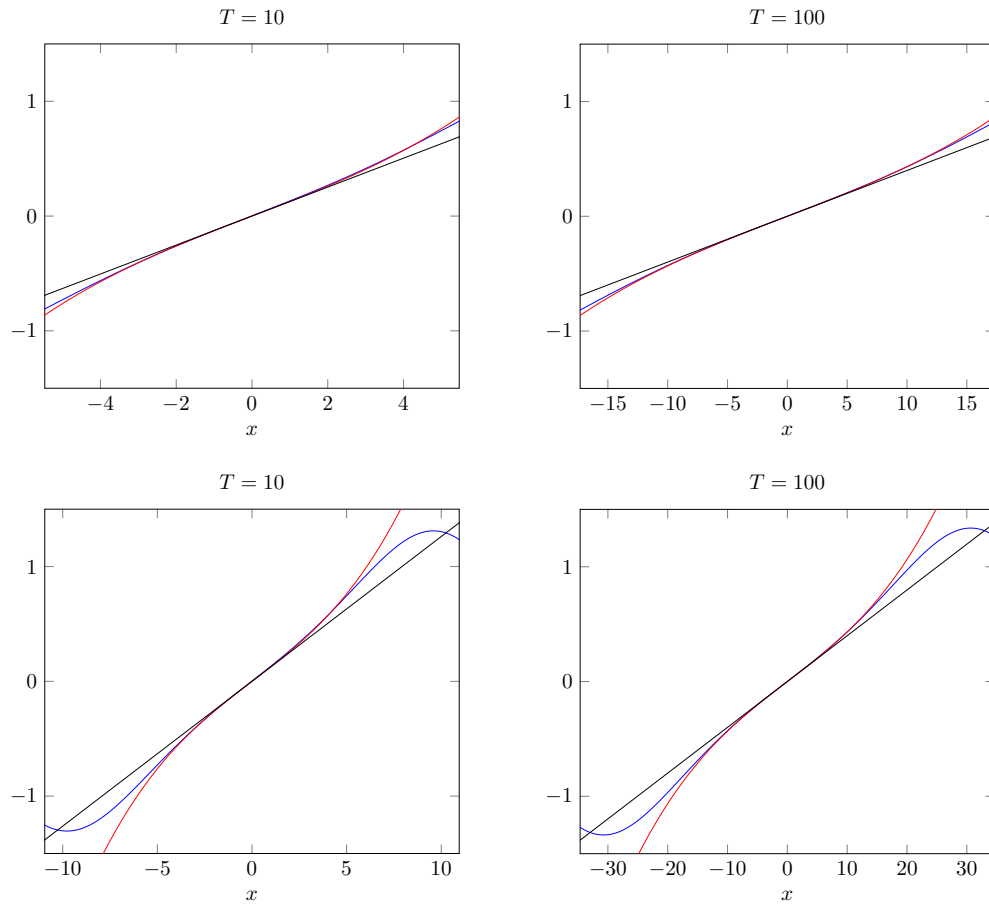


FIGURE 2.3 – Tracés de la partie réelle de la solution numérique associée à u_0 en bleu, de A_{u_0} en rouge et de $e^{-i\frac{\pi}{4}}x/\sqrt{\pi t}$ en noir aux temps $T = 10$ et $T = 100$ sur $[-\mu_m\sqrt{T}/2, \mu_m\sqrt{T}/2]$ et $[-\mu_m\sqrt{T}, \mu_m\sqrt{T}]$, avec $h = 0.1$, $\delta t = 0.01$.

Chapitre 3

Ondes progressives pour l'équation de Gross–Pitaevskii non locale en dimension 1

3.1 Introduction

3.1.1 Présentation du problème

Considérons l'équation de Gross–Pitaevskii non locale en dimension 1,

$$i\partial_t u = \partial_x^2 u + u(\mathcal{W} * (1 - |u|^2)), \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (\text{GPN})$$

où u est une fonction à valeurs complexes et \mathcal{W} est une distribution tempérée. Dans le cas où \mathcal{W} est une distribution paire, (GPN) est une équation hamiltonienne et son énergie est donnée par l'expression

$$E(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u'(t)|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * (1 - |u(t)|^2))(1 - |u(t)|^2) dx. \quad (3.1)$$

Rappelons aussi la notion de moment physique

$$P(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \langle iu', u \rangle dx, \quad (3.2)$$

qui comme l'énergie, est une quantité formellement conservée.

Une onde progressive de vitesse $c \in \mathbb{R}$ est une solution de (GPN) de la forme $u_c(t, x) = v(x - ct)$. Ainsi, v vérifie l'équation

$$icv' + v'' + v(\mathcal{W} * (1 - |v|^2)) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}, \quad (\text{OPNc})$$

et par conjugaison complexe, on peut se restreindre au cas $c \geq 0$. Notons que toute fonction complexe constante de module un est solution de (OPNc) et ces solutions seront appelées solutions triviales par la suite. Formellement, les ondes progressives sont des points critiques de l'énergie E lorsque le moment P est fixé, et (OPNc) représente l'équation d'Euler–Lagrange associée à ce problème variationnel et on a (formellement) la relation

$$dE(v)[h] = cdP(v)[h], \quad (3.3)$$

pour tout $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, où la vitesse c apparait comme multiplicateur de Lagrange. Nous verrons au lemme 3.4.2 que cette relation est vérifiée si et seulement si u est solution de (OPNc).

Le but de ce chapitre est de démontrer l'existence d'ondes progressives non triviales d'énergie finie pour (OPNc) et leur stabilité sous certaines conditions et hypothèses sur \mathcal{W} en dimension 1. Rappelons que dans le cas où la distribution \mathcal{W} est égale à la masse de Dirac δ_0 , l'équation (OPNc) est alors intégrable en dimension 1 et le théorème 1 du chapitre introductif nous donne la forme explicite des ondes progressives d'énergie finie en fonction de la vitesse c . Introduisons maintenant l'espace d'énergie et les conditions sur la distribution \mathcal{W} que nous utiliserons lors de ce chapitre.

3.1.2 Hypothèses sur \mathcal{W} et espace d'énergie $\mathcal{E}(\mathbb{R})$

Avant d'énoncer les hypothèses sur \mathcal{W} , montrons que l'on peut se ramener au cas où $\widehat{\mathcal{W}}(0) = 1$ lorsque $\widehat{\mathcal{W}}$ est non nulle en 0. En effet, soit u une solution de (GPN) et posons \tilde{u} la fonction définie par

$$\tilde{u}(t, x) := u \left(\frac{t}{\widehat{\mathcal{W}}(0)}, \frac{x}{\widehat{\mathcal{W}}(0)^{1/2}} \right).$$

Alors,

$$\partial_t u(t, x) = \widehat{\mathcal{W}}(0) \partial_t \tilde{u} \left(\widehat{\mathcal{W}}(0)t, \widehat{\mathcal{W}}(0)^{1/2}x \right) \quad \text{et} \quad \partial_x^2 u(t, x) = \widehat{\mathcal{W}}(0) \partial_x^2 \tilde{u} \left(\widehat{\mathcal{W}}(0)t, \widehat{\mathcal{W}}(0)^{1/2}x \right).$$

Exprimons maintenant le terme convolutif en fonction de \tilde{u} . Afin de simplifier les notations, on suppose que $\mathcal{W} \in S(\mathbb{R})$ (le cas où $\mathcal{W} \in S'(\mathbb{R})$ est similaire), ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{W} * (1 - |u|^2))(t, x) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}(x - y)(1 - |u|^2)(t, y) dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}(x - y)(1 - |\tilde{u}|^2)(\widehat{\mathcal{W}}(0)t, \widehat{\mathcal{W}}(0)^{1/2}y) dy \\
 &= \frac{1}{\widehat{\mathcal{W}}(0)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}\left(\frac{\widehat{\mathcal{W}}(0)^{1/2}x - z}{\widehat{\mathcal{W}}(0)^{1/2}}\right) (1 - |\tilde{u}|^2)(\widehat{\mathcal{W}}(0)t, z) dz \\
 &= \widehat{\mathcal{W}}(0) \left(\widetilde{\mathcal{W}} * (1 - |\tilde{u}|^2) \right) \left(\widehat{\mathcal{W}}(0)t, \widehat{\mathcal{W}}(0)^{1/2}x \right)
 \end{aligned}$$

avec

$$\widetilde{\mathcal{W}}(x) = \frac{1}{\widehat{\mathcal{W}}(0)^{3/2}} \mathcal{W}\left(\frac{x}{\widehat{\mathcal{W}}(0)^{1/2}}\right).$$

L'équation (GPN) devient

$$i\partial_t \tilde{u} = \Delta \tilde{u} + \tilde{u} \left(\widetilde{\mathcal{W}} * (1 - |\tilde{u}|^2) \right). \quad (3.4)$$

De plus,

$$\mathcal{F}[\widetilde{\mathcal{W}}](\xi) = \frac{1}{\widehat{\mathcal{W}}(0)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}\left(\frac{x}{\widehat{\mathcal{W}}(0)^{1/2}}\right) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\widehat{\mathcal{W}}(0)} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}(x) e^{-ix\xi} dx = \frac{\widehat{\mathcal{W}}(\xi)}{\widehat{\mathcal{W}}(0)}.$$

À partir de maintenant, on supposera donc que $\widehat{\mathcal{W}}(0) = 1$.

Pour une distribution tempérée $\mathcal{V} \in S'(\mathbb{R})$, il est possible de définir la convolution avec une fonction appartenant à $L^p(\mathbb{R})$, par l'intermédiaire de la transformée de Fourier, comme le prolongement continu sur $L^p(\mathbb{R})$ de l'opérateur

$$\mathcal{V} * f := \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\mathcal{V}}\widehat{f}), \quad f \in S(\mathbb{R}).$$

De cette manière, l'ensemble

$$\mathcal{M}_p(\mathbb{R}) = \{\mathcal{V} \in S'(\mathbb{R}) : \exists C > 0, \|\mathcal{V} * f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \forall f \in L^p(\mathbb{R})\}$$

est un espace de Banach muni de la norme opérateur notée par $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_p}$. On renvoie à [36] pour plus d'informations sur ces espaces et leur utilisation. On considère les hypothèses suivantes sur \mathcal{W} .

(A1) \mathcal{W} est une distribution tempérée paire avec $\widehat{\mathcal{W}} \in L^\infty(\mathbb{R})$, et $\widehat{\mathcal{W}} \geq 0$ p.p. sur \mathbb{R} . De plus, $\widehat{\mathcal{W}}$ est continue en l'origine et $\widehat{\mathcal{W}}(0) = 1$.

(A2) $\widehat{\mathcal{W}}(\xi) \geq 1$, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Par l'hypothèse (A1), on obtient que $\mathcal{W} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Introduisons maintenant l'espace d'énergie $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ défini par

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}) := \{v \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}) : 1 - |v|^2 \in L^2(\mathbb{R}), v' \in L^2(\mathbb{R})\}$$

et le sous-espace $\mathcal{NE}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{NE}(\mathbb{R}) := \{v \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) : \inf_{\mathbb{R}} |v| > 0\},$$

des fonctions dans l'espace d'énergie ne s'annulant pas. Pour $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, on notera désormais, $E_{\text{kin}}(u)$ la partie cinétique de l'énergie de u définie par

$$E_{\text{kin}}(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u'(x)|^2 dx$$

et $E_{\text{pot}}(u)$ la partie potentielle de u définie par

$$E_{\text{pot}}(u) := \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * (1 - |u|^2))(x)(1 - |u|^2)(x) dx.$$

Sous les hypothèses (A1) à (A2), toute fonction appartenant à l'espace d'énergie a une énergie positive et finie. En effet, si $v \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, par le théorème de Plancherel, on a

$$\begin{aligned} E(v) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |v'|^2 dx + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{W}} |1 - |v|^2|^2 \\ &\leq \|\widehat{\mathcal{W}}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |v'|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} (1 - |v|^2)^2 \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

et

$$E(v) \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |v'|^2 dx + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{W}} |1 - |v|^2|^2 \geq 0. \quad (3.6)$$

Notons que l'espace d'énergie $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ est défini ici indépendant de la distribution \mathcal{W} , de manière à pouvoir choisir une large variété d'interactions non locales. Enfin, toute fonction appartenant à l'espace d'énergie est $1/2$ -hölderienne et donc continue. En effet, pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, on a, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|u(x) - u(y)| = \left| \int_x^y u' \right| \leq \|u'\|_{L^2(\mathbb{R})} |x - y|^{\frac{1}{2}}. \quad (3.7)$$

Ainsi, u est uniformément continue et comme $(1 - |u|^2)^2 \in L^1(\mathbb{R})$, on obtient

$$\lim_{|x| \rightarrow \pm\infty} |u(x)| = 1. \quad (3.8)$$

Dans le cas local $\mathcal{W} = \delta_0$, P.E. Zhidkov a montré dans [70] que le problème de Cauchy pour (GP) est globalement bien posé dans $\mathcal{E}(\mathbb{R})$. Pour plus de résultats concernant le problème de Cauchy et l'espace d'énergie $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, on renvoie à [70, 35, 33].

3.1.3 Énoncés des résultats principaux

Comme expliqué dans le chapitre introductif, afin de démontrer l'existence d'ondes progressives non triviales d'énergie finie pour (GPN), nous allons utiliser une méthode de minimisation sous contraintes puisqu'en minimisant l'énergie et en fixant le moment, on obtient formellement la relation (3.3), relation équivalente à la formulation faible d'une solution de (OPNc).

Bien que formellement conservé, le moment physique P n'est pas toujours bien défini pour une fonction appartenant à l'espace d'énergie. On va donc utiliser le moment renormalisé (voir [51]), adapté aux fonctions non nulles à l'infini. Comme les fonctions appartenant à $\mathcal{NE}(\mathbb{R})$ ne s'annulent pas, on peut les écrire sous forme polaire. Soit $u = \rho e^{i\phi} \in \mathcal{NE}(\mathbb{R})$ où $\rho = |u|$ et ϕ sont des fonctions à valeurs réelles appartenant à $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ (voir [35]). On définit le moment renormalisé de u par

$$p(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (1 - \rho^2) \phi' = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \langle iu', u \rangle \left(1 - \frac{1}{|u|^2} \right). \quad (3.9)$$

Le moment renormalisé p est fini pour toute fonction appartenant à $\mathcal{NE}(\mathbb{R})$. En effet, par l'inégalité de Young et en notant $\delta = \inf_{x \in \mathbb{R}} |u(x)| > 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |(1 - \rho^2) \phi'| &\leq \int_{\mathbb{R}} (1 - \rho^2)^2 + \frac{1}{\delta^2} \int_{\mathbb{R}} \rho^2 (\phi')^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} (1 - \rho^2)^2 + \frac{2}{\delta^2} E_{\text{kin}}(u), \end{aligned}$$

et on verra au lemme 3.2.1 que $\|1 - |u|^2\|_{L^2(\mathbb{R})}$ peut être bornée en termes d'énergie. Notons que, si $\phi' \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$p(u) = P(u) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \phi'.$$

Détaillons maintenant l'approche qui sera utilisée afin d'obtenir l'existence des ondes progressives, lorsque \mathcal{W} vérifie les hypothèses (A1) et (A2). Pour $\mathfrak{q} \geq 0$, on considère la courbe minimisante

$$E_{\min}(\mathfrak{q}) := \inf\{E(v) : v \in \mathcal{NE}(\mathbb{R}), p(v) = \mathfrak{q}\}.$$

On montrera au lemme 3.2.4, que E_{\min} est bien définie. De plus, on verra au lemme 3.2.6 que E_{\min} est paire, ce qui justifie de réduire l'étude pour $\mathfrak{q} \in \mathbb{R}^+$. Enfin, le cas $\mathfrak{q} = 0$ est trivial puisque toute fonction constante de module 1 est seule solution du problème de minimisation associé. On considérera désormais $\mathfrak{q} > 0$. Introduisons la constante \mathfrak{q}_* définie par

$$\mathfrak{q}_* = \sup\{\mathfrak{q} > 0 \mid \forall v \in \mathcal{E}(\mathbb{R}), E(v) \leq E_{\min}(\mathfrak{q}) \Rightarrow \inf_{\mathbb{R}} |v| > 0\}. \quad (3.10)$$

Sous certaines hypothèses sur E_{\min} et lorsque que \mathcal{W} vérifie (A1) et (A2), on montrera que les minimiseurs sont atteints et que l'équation d'Euler–Lagrange correspond à (OPNc), où la vitesse c apparaît comme multiplicateur de Lagrange (voir section 3.4 pour plus de détails). Précisément, notre premier résultat donne l'existence d'une branche de solutions de (OPNc), paramétrées par le moment. Pour $\mathfrak{q} \geq 0$, notons $\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}$ l'ensemble défini par

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{q}} := \{v \in \mathcal{NE}(\mathbb{R}) : E(v) = E_{\min}(\mathfrak{q}) \text{ et } p(v) = \mathfrak{q}\}.$$

Théorème 3.1.1. *Supposons que \mathcal{W} vérifie les hypothèses (A1) et (A2). On suppose que la courbe E_{\min} est concave, strictement sous additive sur \mathbb{R}^+ et que $E_{\min}(\mathfrak{q}) < \sqrt{2}\mathfrak{q}$ pour tout $\mathfrak{q} \in \mathbb{R}^+$. Alors, $\mathfrak{q}_* > 0.027$ et $\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}$ est non vide pour tout $\mathfrak{q} \in]0, \mathfrak{q}_*]$. De plus, tout $u \in \mathcal{S}_{\mathfrak{q}}$ est solution de (OPNc), pour une vitesse $c = c_{\mathfrak{q}}$ satisfaisant*

$$E_{\min}^+(\mathfrak{q}) \leq c_{\mathfrak{q}} \leq E_{\min}^-(\mathfrak{q}).$$

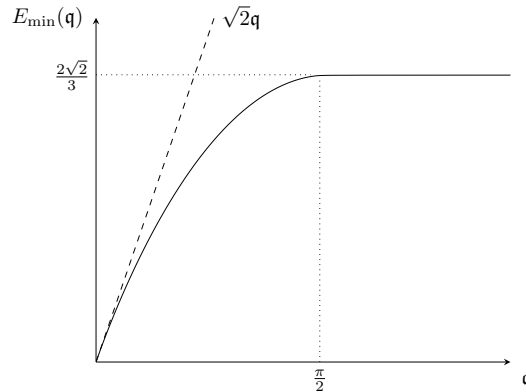


FIGURE 3.1 – Courbe E_{\min} dans le cas $\mathcal{W} = \delta_0$.

Dans le cas où $\mathcal{W} = \delta_0$, en utilisant l'expression des solitons donnée au théorème 1, il est possible de montrer que $\mathfrak{q}_* = \pi/2$. De plus, il est démontré dans [7] que pour tout $\mathfrak{q} \in]0, \pi/2[$, il existe $u_{\mathfrak{q}} \in \mathcal{NE}(\mathbb{R})$ avec $E_{\min}(\mathfrak{q}) = E(u_{\mathfrak{q}})$ et $u_{\mathfrak{q}}$ solution non triviale de (OPc). Le théorème 3.1.1 généralise ainsi l'étude variationnelle du cas local. Ce théorème est ici énoncé de manière conditionnelle avec les hypothèses faites sur E_{\min} . On verra dans le chapitre 4 que ces hypothèses sont vérifiées pour une certaine famille de distributions vérifiant (A1) à (A2).

À nouveau dans le cas où $\mathcal{W} = \delta_0$ et si $\mathfrak{q} = \frac{\pi}{2}$, la solution au problème de minimisation $E_{\min}(\mathfrak{q})$ est donnée par $v_0(x) = \tanh(x/\sqrt{2})$, que l'on appelle soliton noir ou kink. Le soliton noir est solution de (OPc) avec pour vitesse $c = 0$ et pour énergie $E(v_0) = 2\sqrt{2}/3$. À la différence des solutions données au théorème 1 lorsque $c \neq 0$, v_0 s'annule en 0. L'étude du soliton noir est difficile et ne peut être traité selon notre approche avec le moment renormalisé. On renvoie à [9, 43] pour une étude varionnelle du soliton noir et l'étude de sa stabilité dans le cas $\mathcal{W} = \delta_0$.

Enfin, si $\mathfrak{q} > \pi/2$ et toujours dans le cas local, le problème de minimisation $E_{\min}(\mathfrak{q})$ n'admet pas de solution puisque l'on peut construire des suites de fonctions v_n telles que $p(v_n) = \mathfrak{q}$ et $E(v_n) \rightarrow 2\sqrt{2}/3$, comme expliqué dans [7]. Comme E_{\min} est croissante et $E(v_0) = 2\sqrt{2}/3$, la courbe E_{\min} est donc constante pour $\mathfrak{q} \geq \frac{\pi}{2}$ lorsque $\mathcal{W} = \delta_0$ (voir figure 3.1). Ce chapitre ne traitera pas l'étude de $E_{\min}(\mathfrak{q})$ lorsque $\mathfrak{q} \geq \mathfrak{q}_*$ dans le cas non local. Cependant, nous verrons au chapitre 5, à l'aide de simulations numériques, que E_{\min} semble constante sur $[\mathfrak{q}_*, +\infty[$ et $\mathfrak{q}_* \simeq \pi/2$, sous certaines hypothèses sur \mathcal{W} .

Comme expliqué précédemment, afin de prouver l'existence des ondes progressives, nous allons utiliser le principe de concentration-compacité. Grâce à cela, nous pourrions utiliser la méthode de Cazenave–Lions [15] permettant de montrer la stabilité. Rappelons que le problème de Cauchy pour (GPN) a été étudié dans [28]. Précisément, en utilisant la distance

$$d_{\mathcal{E}}(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|_{L^2(\mathbb{R})+L^\infty(\mathbb{R})} + \|v'_1 - v'_2\|_{L^2(\mathbb{R})} + \||v_1| - |v_2|\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

l'espace d'énergie $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ est un espace métrique complet et pour tout $\Psi_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, il existe une unique solution globale $\Psi \in C(\mathbb{R}, \mathcal{E}(\mathbb{R}))$ de (GPN) avec pour condition initiale Ψ_0 , sous réserve que $\mathcal{W} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et que $\mathcal{W} \geq 0$ ou $\inf_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{W}} > 0$ (voir théorème 3.5.1). Cependant, ces conditions ne sont pas toujours vérifiées pour une distribution satisfaisant les hypothèses (A1) et (A2). En utilisant les estimations d'énergie de la section 3.2, nous obtenons la généralisation suivante de ce résultat de [28] en dimension 1.

Théorème 3.1.2. *Supposons que $\mathcal{W} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une distribution paire, avec $\widehat{\mathcal{W}} \geq 0$ p.p. sur \mathbb{R} et que $\widehat{\mathcal{W}}$ est de classe C^2 dans un voisinage de l'origine. Alors, pour tout $\Psi_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, il existe une unique fonction $\Psi \in C(\mathbb{R}, \mathcal{E}(\mathbb{R}))$, solution globale de (GPN) associée à la condition initiale Ψ_0 . De plus, l'énergie est conservée. Enfin, le moment est conservé sur l'intervalle de temps $[0, T^*[$, où*

$$T^* = \sup\{t > 0 : \inf_{x \in \mathbb{R}} |\Psi(x, \tau)| > 0, \text{ pour tout } \tau \in [0, t]\}$$

On peut aussi munir l'espace $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ de la pseudométrie

$$d(v_1, v_2) = \|v'_1 - v'_2\|_{L^2(\mathbb{R})} + \||v_1| - |v_2|\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

ou de la distance utilisée dans [7],

$$d_A(v_1, v_2) = \|v'_1 - v'_2\|_{L^2(\mathbb{R})} + \||v_1| - |v_2|\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|v_1 - v_2\|_{L^\infty([-A, A])},$$

pour $A > 0$. Notons que $d(v_1, v_2) = 0$, si et seulement si $|v_1| = |v_2|$ et $v_1 - v_2$ est constante. L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}$ est dit orbitalement stable dans $(\mathcal{E}(\mathbb{R}), d)$ si, pour tout $\Psi_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si

$$d(\Psi_0, \mathcal{S}_{\mathfrak{q}}) \leq \delta,$$

alors la solution $\Psi(t)$ de (GPN) associée à la condition initiale Ψ_0 vérifie

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} d(\Psi(t), \mathcal{S}_{\mathfrak{q}}) \leq \varepsilon.$$

De même, l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}$ est orbitalement stable dans $(\mathcal{E}(\mathbb{R}), d_A)$, si pour tout $\Psi_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $d_A(\Psi_0, \mathcal{S}_{\mathfrak{q}}) \leq \delta$, alors $\sup_{t \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}} d_A(\Psi(\cdot - y, t), \mathcal{S}_{\mathfrak{q}}) \leq \varepsilon$. Comme d_A n'est pas invariante par translations, il est nécessaire ici d'introduire une translation du flot.

Concernant le cas local, Z. Lin a démontré dans [54], la stabilité des ondes progressives pour (OPc) dans l'espace d'énergie en discutant du signe de $\frac{dP}{dc}$ et en utilisant le critère de Shatah–Strauss–Grillakis (voir [45]). Citons aussi les travaux de D. Chiron [18] et de Béthuel–Gravejat–Saut [7] prouvant la stabilité des ondes progressives de (1.2) et de (OPc) en utilisant différentes méthodes dont les résultats de [45]. Donnons maintenant notre résultat principal concernant la stabilité des ondes progressives.

Théorème 3.1.3. *Supposons que $\mathcal{W} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie (A1) et (A2). On suppose aussi que la courbe E_{\min} est concave, strictement sous additive sur \mathbb{R}^+ et que $E_{\min}(\mathbf{q}) < \sqrt{2}\mathbf{q}$, pour tout $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^+$. Alors, $\mathcal{S}_{\mathbf{q}}$ est orbitalement stable pour $(\mathcal{E}(\mathbb{R}), d)$ et pour $(\mathcal{E}(\mathbb{R}), d_A)$, pour tout $\mathbf{q} \in]0, \mathbf{q}_*[$. De plus, pour tout $\Psi_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si*

$$d(\Psi_0, \mathcal{S}_{\mathbf{q}}) \leq \delta, \quad \text{alors} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}} d_A(\Psi(\cdot - y, t), \mathcal{S}_{\mathbf{q}}) \leq \varepsilon, \quad (3.11)$$

où $\Psi(t)$ désigne la solution de (GPN) associée à la condition initiale Ψ_0 .

Notons que pour $u, v \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, on a $d(u, v) \leq d_A(u, v)$, et donc

$$d(u, \mathcal{S}_{\mathbf{q}}) = \inf_{y \in \mathbb{R}} d(u(\cdot - y, t), \mathcal{S}_{\mathbf{q}}) \leq \inf_{y \in \mathbb{R}} d_A(u(\cdot - y), \mathcal{S}_{\mathbf{q}}).$$

Ainsi, l'implication dans (3.11) montre la stabilité orbitale pour la distance d . Inversement, si $d_A(u, \mathcal{S}_{\mathbf{q}}) \leq \delta$, alors $d(u, \mathcal{S}_{\mathbf{q}}) \leq \delta$ et l'implication (3.11) nous donne ainsi la stabilité orbitale pour la distance d_A .

L'organisation de ce chapitre est la suivante. Dans un premier temps, en section 3.2, on montre des estimations d'énergie ainsi que certaines propriétés sur la courbe E_{\min} . Dans la section 3.3, on prouve la compacité des suites minimisantes associée au problème de minimisation. Dans la section 3.4, on établit les équations d'Euler–Lagrange associées à ce problème ainsi que la preuve du théorème 3.1.1. Enfin, la stabilité orbitale des solutions du théorème 3.1.2 et le théorème 3.1.3 sont montrés en section 3.5.

3.2 Estimations a priori

Le premier résultat de cette section nous donne une estimation L^∞ des fonctions dans l'espace d'énergie en fonction de leur énergie. Dans la suite, nous utiliserons à plusieurs reprises l'identité

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * f)g = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * g)f, \quad \text{pour tout } f, g \in L^2(\mathbb{R}), \quad (3.12)$$

qui est une conséquence de la parité de \mathcal{W} par l'hypothèse (A1).

Lemme 3.2.1. *Supposons que $\mathcal{W} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une distribution vérifiant*

$$\widehat{\mathcal{W}}(\xi) \geq (1 - \kappa\xi^2)^+, \quad \text{p.p. sur } \mathbb{R}, \quad (3.13)$$

pour un certain $\kappa \geq 0$. Soient $v \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ et $\eta := 1 - |v|^2$. Alors,

$$\|\eta\|_{L^\infty}^2 \leq 8\tilde{\kappa}E(v)(1 + 8\tilde{\kappa}E(v) + 2\sqrt{2\tilde{\kappa}E(v)}) \quad (3.14)$$

et

$$\|\eta\|_{L^2}^2 \leq 8\tilde{\kappa}E(v)(1 + 8\tilde{\kappa}E(v) + 2\sqrt{2\tilde{\kappa}E(v)}), \quad (3.15)$$

où $\tilde{\kappa} = \kappa + 1$.

Preuve. Soient $v \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, $\rho = |v|$ et $x \in \mathbb{R}$. Par le théorème de Plancherel, on a

$$\eta^2(x) = 2 \int_{-\infty}^x \eta\eta' \leq \int_{\mathbb{R}} (\eta^2 + \eta'^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)|\hat{\eta}|^2 d\xi. \quad (3.16)$$

Par (3.13), on a $1 \leq \widehat{\mathcal{W}}(\xi) + \kappa\xi^2$ p.p. sur \mathbb{R} . Ainsi, le dernier terme de (3.16) peut être borné de la manière suivante

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2) |\hat{\eta}|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\widehat{\mathcal{W}}(\xi) + \tilde{\kappa}\xi^2) |\hat{\eta}|^2 = 4E_{\text{pot}}(v) + \tilde{\kappa} \int_{\mathbb{R}} \eta'^2, \quad (3.17)$$

avec $\tilde{\kappa} = \kappa + 1$. Notons que $\eta' = -2\rho\rho'$, ce qui nous donne $\eta'^2 \leq 4\|v\|_{L^\infty}^2 \rho'^2$. De plus, si $|v| \neq 0$ sur un ouvert, alors v peut être écrit sous forme polaire $v = \rho e^{i\theta}$ et on a $|v'|^2 = \rho'^2 + \rho^2 \theta'^2$. À l'inverse, l'ensemble $\tilde{\Omega} := \{v = 0\}$ coïncide avec l'ensemble $\{\eta = 1\}$ et $v' = 0$ et $\eta' = 0$ p.p. sur $\tilde{\Omega}$. Ainsi, on en conclut que

$$\eta'^2 \leq 4\|v\|_{L^\infty}^2 |v'|^2 \quad \text{p.p. sur } \mathbb{R}. \quad (3.18)$$

En combinant (3.16), (3.17) et (3.18), on obtient

$$\eta^2(x) \leq 4E_{\text{pot}}(v) + 8\tilde{\kappa}\|v\|_{L^\infty}^2 E_{\text{kin}}(v) \leq \max(4, 8\tilde{\kappa}\|v\|_{L^\infty}^2) E(v). \quad (3.19)$$

Si $\|v\|_{L^\infty}^2 \leq 1$, alors l'inégalité (3.14) est démontrée, puisque $\max(4, 8\tilde{\kappa}) = 8\tilde{\kappa}$. Supposons maintenant que

$$\|v\|_{L^\infty}^2 > 1. \quad (3.20)$$

Comme $\eta(\pm\infty) = 0$ par (3.8), on en déduit qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$a := \min_{\mathbb{R}} \eta = \eta(x_0) = 1 - \|v\|_{L^\infty}^2.$$

Ainsi, en utilisant (3.19) pour $x = x_0$ et (3.20), on arrive à

$$a^2 \leq 8\tilde{\kappa}(1 - a)E(v).$$

En résolvant l'équation du second degré associée et en utilisant l'inégalité $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, on en conclut que

$$a \geq \frac{1}{2}(-8\tilde{\kappa}E(v) - \sqrt{64\tilde{\kappa}^2 E(v)^2 + 32\tilde{\kappa}E(v)}) \geq -8\tilde{\kappa}E(v) - 2\sqrt{2\tilde{\kappa}E(v)},$$

ce qui implique

$$\|v\|_{L^\infty}^2 \leq 1 + 8\tilde{\kappa}E(v) + 2\sqrt{2\tilde{\kappa}E(v)}. \quad (3.21)$$

Par (3.19), (3.20) et (3.21), on obtient (3.14).

Démontrons (3.15). En utilisant le théorème de Plancherel et en raisonnant comme précédemment, on arrive à

$$\int_{\mathbb{R}} \eta^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\widehat{\mathcal{W}}(\xi) + \kappa\xi^2) |\hat{\eta}|^2 \leq 4E_{\text{pot}}(v) + \kappa \int_{\mathbb{R}} \eta'^2 \leq 4E_{\text{pot}}(v) + 8\kappa\|v\|_{L^\infty}^2 E_{\text{kin}}(v).$$

Ainsi, en utilisant (3.21), l'inégalité (3.15) est établie. \square

Remarque 3.2.2. *Supposons que $\mathcal{W} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est paire et que $\widehat{\mathcal{W}}$ est de classe C^2 sur un intervalle $[-r, r]$, avec $r > 0$. Alors $(\widehat{\mathcal{W}})'(0) = 0$ et par la formule de Taylor, on en déduit que pour tout $\xi \in]-r, r[$, il existe $\tilde{\xi} \in]-r, r[$ tel que*

$$\widehat{\mathcal{W}}(\xi) = 1 + (\widehat{\mathcal{W}})''(\tilde{\xi}) \frac{\xi^2}{2} \geq 1 - \mu\xi^2,$$

où $\mu = \frac{1}{2} \max_{[-r, r]} |(\widehat{\mathcal{W}})''|$. Si $\sqrt{1/\mu} \leq r$, on pose $\kappa = \mu$. Si $\sqrt{1/\mu} > r$, on pose $\kappa = 1/r^2$. En supposant que $\widehat{\mathcal{W}} \geq 0$ p.p. sur \mathbb{R} , la condition (3.13) est alors satisfaite dans les deux cas.

Remarquons que si \mathcal{W} vérifie les hypothèses (A1) et (A2), alors la condition (3.13) est aussi satisfaite avec $\kappa = 1/2$.

Un point clé qui nous permettra d'obtenir la compacité des suites minimisantes dans la section 3.3 est le contrôle du moment par l'énergie. Plus généralement, ce type d'inégalités est cruciale lorsqu'il s'agit de prouver l'existence de solitons par des méthodes variationnelles (pour le cas local, voir [7, 19]). De plus, pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ et $u = \rho e^{i\theta} \in \mathcal{NE}(\mathbb{R})$, il faut pouvoir contrôler le moment localisé

$$p_\Omega(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega \eta \theta',$$

par une version localisée de l'énergie. Définissons l'énergie localisée par

$$E_\Omega(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |u'|^2 + \frac{1}{4} \int_\Omega (\mathcal{W} * \eta_\Omega) \eta_\Omega, \quad \text{avec } \eta_\Omega := \eta \mathbb{1}_\Omega.$$

Notons que si $\Omega = \mathbb{R}$, alors $E_\Omega(u) = E(u)$ et $p_\Omega(u) = p(u)$. Comme η_Ω peut être discontinue (et donc non faiblement dérivable) lorsque Ω est borné, introduisons une fonction régularisante : Pour Ω_0 un ouvert compactement inclus dans Ω , i.e. $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, on définit la fonction $\chi_{\Omega, \Omega_0} \in C^\infty(\mathbb{R})$ à valeurs dans $[0, 1]$ par

$$\chi_{\Omega, \Omega_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_0, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \Omega. \end{cases} \quad (3.22)$$

Dans le cas où $\Omega = \Omega_0 = \mathbb{R}$, on pose $\chi_{\Omega, \Omega_0} \equiv 1$. Un exemple de construction d'une telle fonction pour un cas particulier de Ω et Ω_0 est donné en annexe au lemme A.1.

Lemme 3.2.3. *Soient \mathcal{W} une distribution vérifiant les hypothèses (A1)–(A2), Ω et $\Omega_0 \subset \mathbb{R}$ des réunions finies d'intervalles ouverts vérifiant $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Soient $\chi_{\Omega, \Omega_0} \in C^\infty(\mathbb{R})$ définie comme en (3.22), $u \in \mathcal{NE}(\mathbb{R})$ et $\varepsilon \in]0, 1[$ tels que $|\eta| \leq \varepsilon$ sur Ω . Alors,*

$$\sqrt{2}|p_\Omega(u)| \leq \frac{E_\Omega(u)}{1-\varepsilon} + \Delta_{\Omega, \Omega_0}(u), \quad (3.23)$$

où le terme restant $\Delta_{\Omega, \Omega_0}(u)$ vérifie l'estimation

$$|\Delta_{\Omega, \Omega_0}(u)| \leq C(E(u), \varepsilon) \left(\|\eta\|_{L^2(\Omega \setminus \Omega_0)} + \|\eta\|_{L^2(\Omega \setminus \Omega_0)}^2 \right), \quad (3.24)$$

où $C(E(u))$ est une constante dépendant de $E(u)$ mais indépendante de Ω et de Ω_0 . En particulier, pour $\Omega = \Omega_0 = \mathbb{R}$, on a

$$|p(u)| \leq \frac{E(u)}{\sqrt{2}(1-\varepsilon)}. \quad (3.25)$$

Preuve. Notons $u = \rho e^{i\theta}$ sur Ω . En utilisant l'inégalité de Young et le fait que $1-\varepsilon \leq \rho^2 \leq 1+\varepsilon$ sur Ω par hypothèse, on obtient

$$\sqrt{2}|p_\Omega(u)| \leq \frac{1}{4} \int_\Omega \eta^2 + \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \int_\Omega \rho^2 \theta'^2 \quad (3.26)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_\Omega \eta^2 + \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \int_\Omega \rho^2 \theta'^2 &= \frac{1}{4} \int_\Omega \left(\eta_\Omega^2 - \frac{(\mathcal{W} * \eta_\Omega) \eta_\Omega}{1-\varepsilon} - \frac{\eta'^2}{2(1-\varepsilon)\rho^2} \right) + \frac{E_\Omega(u)}{1-\varepsilon} \\ &\leq \frac{1}{4} \int_\Omega \left(\eta_\Omega^2 - (\mathcal{W} * \eta_\Omega) \eta_\Omega \right) + \frac{E_\Omega(u)}{1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Soit

$$\Delta(u) = \Delta_{\Omega, \Omega_0}(u) := \frac{1}{4} \int_\Omega \left((\eta_\Omega^2 - \tilde{\eta}_\Omega^2) - ((\mathcal{W} * \eta_\Omega) \eta_\Omega - (\mathcal{W} * \tilde{\eta}_\Omega) \tilde{\eta}_\Omega) \right), \quad (3.27)$$

où $\tilde{\eta}_\Omega = \eta \chi_{\Omega, \Omega_0}$. En utilisant le théorème de Plancherel et (A2), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\eta_{\Omega}^2 - (\mathcal{W} * \eta_{\Omega}) \eta_{\Omega} \right) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\tilde{\eta}_{\Omega}^2 - (\mathcal{W} * \tilde{\eta}_{\Omega}) \tilde{\eta}_{\Omega} \right) + 4\Delta(u) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\tilde{\eta}_{\Omega}}|^2 \left(1 - \widehat{\mathcal{W}}(\xi) \right) + 4\Delta(u) \\ &\leq 4\Delta(u). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{4} \int_{\Omega} \eta^2 + \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \int_{\Omega} \rho^2 \theta'^2 \leq \frac{E_{\Omega}(u)}{1-\varepsilon} + \Delta(u),$$

ce qui, combiné à (3.26), nous donne (3.23).

Il reste à montrer l'estimation (3.24). Pour le premier terme du membre de droite de (3.27), on voit que

$$\int_{\Omega} |\eta_{\Omega}^2 - \tilde{\eta}_{\Omega}^2| = \int_{\Omega \setminus \Omega_0} \eta^2 |\mathbb{1}_{\Omega}^2 - \chi_{\Omega, \Omega_0}^2| \leq 2\|\eta\|_{L^2(\Omega \setminus \Omega_0)}^2. \quad (3.28)$$

Pour les autres termes, en utilisant l'identité (3.12), on obtient

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * \eta_{\Omega}) \eta_{\Omega} - (\mathcal{W} * \tilde{\eta}_{\Omega}) \tilde{\eta}_{\Omega} \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * (\eta_{\Omega} + \tilde{\eta}_{\Omega})) (\eta_{\Omega} - \tilde{\eta}_{\Omega}) \right| \leq 4\|\mathcal{W}\|_{\mathcal{M}_2} \|\eta\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\eta\|_{L^2(\Omega \setminus \Omega_0)}. \quad (3.29)$$

En combinant (3.28), (3.29) et en utilisant le lemme 3.2.1, on obtient (3.24). \square

Le prochain lemme concerne la courbe minimisante et montre que E_{\min} est bien définie sur \mathbb{R} et que E_{\min} se situe en dessous de la droite $y = \sqrt{2}x$ sur \mathbb{R}^+ .

Lemme 3.2.4. *Soit \mathcal{W} une distribution vérifiant l'hypothèse (A1). Pour tout $\mathfrak{q} \in \mathbb{R}$, il existe une suite de fonctions (ψ_n) appartenant à $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, avec $1 - |\psi_n| \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$, telle que*

$$p(\psi_n) = \mathfrak{q} \quad \text{et} \quad E(\psi_n) \rightarrow \sqrt{2}|\mathfrak{q}|, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (3.30)$$

En particulier, $E_{\min} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie et pour tout $\mathfrak{q} \geq 0$,

$$E_{\min}(\mathfrak{q}) \leq \sqrt{2}\mathfrak{q}. \quad (3.31)$$

Remarque 3.2.5. *En plus du résultat sur la courbe minimisante, ce lemme montre que l'on peut construire des fonctions d'énergie et de moment arbitrairement grand.*

Preuve. Le cas $\mathfrak{q} = 0$ est trivial puisqu'il suffit de prendre $v \equiv 1$ afin d'obtenir la conclusion voulue. Supposons que $\mathfrak{q} > 0$ et considérons une fonction $\chi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \chi'^2 = \mathfrak{q}/\sqrt{2}$. Posons

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\mathbb{R}} \chi'(y)^3 dy, \quad \alpha_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{1}{n^2} - \frac{a}{\mathfrak{q}n^3}.$$

Considérons la suite v_n définie par

$$v_n = \rho_n e^{i\theta_n}, \quad \text{où } \rho_n(x) = 1 - \alpha_n \chi'(\beta_n x) \text{ et } \theta_n(x) = \sqrt{2} \frac{\alpha_n}{\beta_n} \chi(\beta_n x).$$

On peut alors supposer que v_n ne s'annule pas puisque $|v_n| = |\rho_n| \geq 1 - |\alpha_n| \|\chi'\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})}$. Ainsi, le moment de v_n est bien défini et on a

$$\begin{aligned} p(v_n) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (1 - \rho_n^2) \theta'_n = \frac{\sqrt{2}}{2\beta_n} \int_{\mathbb{R}} (2\alpha_n \chi'(y) - \alpha_n^2 \chi'(y)^2) \alpha_n \chi'(y) dy \\ &= \frac{\alpha_n^2}{\beta_n} \mathfrak{q} - \frac{\alpha_n^3}{\beta_n} a = \mathfrak{q}. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $E(v_n) \rightarrow \sqrt{2}\mathfrak{q}$. Pour la partie cinétique, on a

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}}(v_n) &= \int_{\mathbb{R}} (1 - \alpha_n \chi'(\beta_n x)) \alpha_n \chi'(\beta_n x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\alpha_n \beta_n \chi''(\beta_n x))^2 dx \\ &= \frac{\alpha_n^2}{\beta_n} \int_{\mathbb{R}} (1 - \alpha_n \chi'(y)) \chi'(y)^2 dy + \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{2} \int_{\mathbb{R}} \chi''(y)^2 dy \\ &\rightarrow \int_{\mathbb{R}} \chi'(y)^2 dy = \frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

comme $\alpha_n, \beta_n \rightarrow 0$ et $\alpha_n^2/\beta_n \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Pour la partie potentielle, en utilisant le théorème de Plancherel, le théorème de convergence dominée et la continuité de $\widehat{\mathcal{W}}$ en 0, on arrive à

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(v_n) &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{W}}(\xi) |\mathcal{F}(1 - \rho_n^2)|^2(\xi) d\xi = \frac{\alpha_n^2}{8\beta_n \pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{W}}(\beta_n \xi) |\mathcal{F}(2\chi' - \alpha_n \chi'^2)|^2(\xi) d\xi \\ &\rightarrow \int_{\mathbb{R}} \chi'^2(y) dy = \frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient (3.30) pour $\mathfrak{q} \geq 0$. Dans le cas où $\mathfrak{q} < 0$, il suffit de procéder comme précédemment en prenant

$$\int_{\mathbb{R}} \chi'^2 = \frac{|\mathfrak{q}|}{\sqrt{2}} = -\frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad v_n = \rho_n e^{-i\theta_n},$$

ce qui conclut la preuve de (3.30). Par définition de E_{\min} , on a

$$E_{\min}(\mathfrak{q}) \leq E(v_n).$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtient (3.31). □

Lemme 3.2.6. *Soit \mathcal{W} vérifiant l'hypothèse (A1). Alors, la courbe E_{\min} est paire sur \mathbb{R} .*

Preuve. Soient $\mathfrak{q} \in \mathbb{R}$ et $u_n = \rho_n e^{i\phi_n} \in \mathcal{NE}(\mathbb{R})$ tels que $E(u_n) \rightarrow E_{\min}(\mathfrak{q})$ et $p(u_n) = \mathfrak{q}$. En posant $v_n = \rho_n e^{-i\phi_n}$, il est clair que $E(v_n) = E(u_n)$ et $p(v_n) = -p(u_n) = -\mathfrak{q}$. Ainsi,

$$E(v_n) \geq E_{\min}(-\mathfrak{q}),$$

et lorsque $n \rightarrow +\infty$, on conclut que $E_{\min}(\mathfrak{q}) \geq E_{\min}(-\mathfrak{q})$. En remplaçant \mathfrak{q} par $-\mathfrak{q}$, on en déduit que $E_{\min}(-\mathfrak{q}) = E_{\min}(\mathfrak{q})$, i.e. E_{\min} est paire sur \mathbb{R} . □

L'estimation L^∞ des fonctions dans l'espace d'énergie du lemme 3.2.1 et le lemme 3.2.4 sur E_{\min} nous permettent d'obtenir une minoration pour la constante \mathfrak{q}_* .

Corollaire 3.2.7. *Soit \mathcal{W} vérifiant les hypothèses (A1) et (A2). Alors, la constante \mathfrak{q}_* définie en (3.10) vérifie $\mathfrak{q}_* > 0.027$.*

Preuve. Soit $v \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, avec $E(v) \leq E_{\min}(\mathfrak{q})$. Alors, en combinant (3.14) et (3.31), avec $\tilde{\kappa} = 1$, on obtient

$$\|1 - |v|^2\|_{L^\infty}^2 \leq 12\sqrt{2}\mathfrak{q}(1 + 12\sqrt{2}\mathfrak{q} + 2(3\sqrt{2}\mathfrak{q})^{\frac{1}{2}}).$$

Le membre de droite est une fonction de \mathfrak{q} , croissante sur \mathbb{R}^+ , et la solution de l'équation $12\sqrt{2}z(1 + 12\sqrt{2}z + 2(3\sqrt{2}z)^{\frac{1}{2}}) = 1$ est égale à

$$z = \frac{\sqrt{2}}{288} \frac{((12\sqrt{3} + 4\sqrt{31})^{2/3} - 4)^2}{(12\sqrt{3} + 4\sqrt{31})^{2/3}} \approx 0.0274.$$

Ainsi, on obtient la conclusion voulue, par définition de \mathfrak{q}_* . \square

Lemme 3.2.8. *Soit \mathcal{W} vérifiant les hypothèses (A1) et (A2). Supposons que E_{\min} soit concave sur \mathbb{R}^+ . Alors, E_{\min} est strictement croissante sur $]0, \mathfrak{q}_*[$ où \mathfrak{q}_* est défini en (3.10). De plus, pour tout $v \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ vérifiant $E(v) < E_{\min}(\mathfrak{q}_*)$, on a $v \in \mathcal{NE}(\mathbb{R})$.*

Preuve. Comme E_{\min} est concave et positive sur \mathbb{R}^+ , E_{\min} est croissante sur $]0, \mathfrak{q}_*[$. Si l'on suppose que E_{\min} n'est pas strictement croissante sur $]0, \mathfrak{q}_*[$, alors E_{\min} est constante sur un intervalle $[a, b]$, avec $0 < a < b < \mathfrak{q}_*$. Comme E_{\min} est concave sur \mathbb{R}^+ , cela implique que E_{\min} est constante sur $[a, +\infty[$ et donc $E_{\min}(a) = E_{\min}(\mathfrak{q}_*)$, ce qui contredit la définition de \mathfrak{q}_* en (3.10). Maintenant, soit $v \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ avec $E(v) < E_{\min}(\mathfrak{q}_*)$. En utilisant le fait que $E_{\min}(0) = 0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous donne l'existence d'un réel $\tilde{\mathfrak{q}} \in]0, \mathfrak{q}_*[$ tel que $E(v) = E_{\min}(\tilde{\mathfrak{q}})$. Comme $\tilde{\mathfrak{q}} < \mathfrak{q}_*$, la définition de \mathfrak{q}_* implique que $|v|$ ne s'annule pas. \square

À partir de maintenant, on pose pour $\mathfrak{q} > 0$,

$$\Sigma_{\mathfrak{q}} = 1 - \frac{E_{\min}(\mathfrak{q})}{\sqrt{2}\mathfrak{q}}. \quad (3.32)$$

Ainsi, l'hypothèse du théorème $E_{\min}(\mathfrak{q}) < \sqrt{2}\mathfrak{q}$ est équivalente à $\Sigma_{\mathfrak{q}} > 0$. De même, pour $\mathfrak{q} > 0$ et $\delta > 0$, on note

$$X_{\mathfrak{q},\delta} = \{v \in \mathcal{NE}(\mathbb{R}) \mid |p(v)| - \mathfrak{q} \leq \delta \text{ et } |E(v) - E_{\min}(\mathfrak{q})| \leq \delta\}. \quad (3.33)$$

Lemme 3.2.9. *Soient \mathcal{W} vérifiant les hypothèses (A1) et (A2), $\mathfrak{q} > 0$ et supposons que $\Sigma_{\mathfrak{q}} > 0$. Alors il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $\delta \in [0, \delta_0]$ et pour tout $v \in X_{\mathfrak{q},\delta}$, il existe $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que*

$$|1 - |v(\bar{x})|^2| \geq \frac{\Sigma_{\mathfrak{q}}}{2}. \quad (3.34)$$

Preuve. Raisonnons par l'absurde en supposant le résultat faux. Ainsi, pour tout $\delta_0 > 0$, il existe $\delta \in [0, \delta_0]$ et $v \in X_{\mathfrak{q},\delta}$ tels que

$$\|1 - |v|^2\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \frac{\Sigma_{\mathfrak{q}}}{2}.$$

En particulier, pour $\delta_0 = \frac{1}{n}$, il existe $\delta_n \in [0, \frac{1}{n}]$ et $v_n \in X_{\mathfrak{q},\delta_n}$ tels que

$$\|1 - |v_n|^2\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \frac{\Sigma_{\mathfrak{q}}}{2}.$$

Par application du lemme 3.2.3 avec $\varepsilon = \frac{\Sigma_{\mathfrak{q}}}{2} < 1$, on obtient

$$|p(v_n)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}(1 - \frac{\Sigma_{\mathfrak{q}}}{2})} E(v_n), \quad (3.35)$$

et en faisant tendre n vers l'infini dans (3.35), on arrive à

$$\mathfrak{q} \leq \frac{1}{\sqrt{2}(1 - \frac{\Sigma_{\mathfrak{q}}}{2})} E_{\min}(\mathfrak{q}),$$

c'est-à-dire

$$\Sigma_{\mathfrak{q}} \leq \frac{\Sigma_{\mathfrak{q}}}{2},$$

ce qui nous donne la contradiction voulue. \square

Lemme 3.2.10. *Soient \mathcal{W} vérifiant l'hypothèse (A1), $E > 0$ et $0 < m_0 < 1$ donnés. Il existe un entier $l_0 = l_0(E, m_0)$ tel que, étant donnée une fonction $v \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ satisfaisant $E(v) \leq E$, on a l'alternative suivante :*

- (i) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|1 - |v(x)|^2| < m_0$.*
- (ii) *Il existe l points x_1, x_2, \dots, x_l avec $l \leq l_0$ tels que*

$$|1 - |v(x_j)|^2| \geq m_0, \quad \forall 1 \leq j \leq l \quad \text{et} \quad |1 - |v(x)|^2| \leq m_0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^l [x_j - 1, x_j + 1].$$

Preuve. Supposons que (i) n'ait pas lieu. Alors, l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{R} : |\eta(z)| \geq m_0\},$$

est non vide, où $\eta = 1 - |v|^2$. Posons $I_j = [j - 1/2, j + 1/2]$, pour $j \in \mathbb{Z}$. Nous allons montrer que $l := \text{Card}\{j \in \mathbb{Z}, I_j \cap \mathcal{C} \neq \emptyset\}$ peut être borné par une constante l_0 dépendant uniquement de E et de m_0 , ce qui nous donnera (ii).

En utilisant le fait que $\|v'\| = |v'|$, l'inégalité de Cauchy–Schwarz et (3.14), on en déduit l'existence d'une constante C , dépendant de E , telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$||v(x)|^2 - |v(y)|^2| = 2 \left| \int_x^y |v'| |v| \right| \leq 2 \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|v'\|_{L^2(\mathbb{R})} |x - y|^{\frac{1}{2}} \leq C |x - y|^{1/2}.$$

Posons $r = m_0^2 / (4C^2)$. Ainsi, pour tout $z \in \mathcal{C}$ et pour tout $y \in [z - r, z + r]$,

$$|\eta(y)| \geq m_0 - ||v(y)|^2 - |v(z)|^2| \geq \frac{m_0}{2}.$$

En prenant $r_0 = \min(r, 1/2)$ et en intégrant cette inégalité sur $[z - r_0, z + r_0]$, on obtient, pour tout $z \in \mathcal{C}$,

$$\int_{z-r_0}^{z+r_0} \eta^2(y) dy \geq \frac{m_0^2 r_0}{4}.$$

Comme $[z - r_0, z + r_0] \subset \tilde{I}_j := [j - 1, j + 1]$ si $z \in I_j \cap \mathcal{C}$, on en déduit que

$$\frac{\tilde{l} m_0^2 r_0}{4} \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}, \tilde{I}_j \cap \mathcal{C} \neq \emptyset} \int_{\tilde{I}_j} \eta^2 \leq 2 \|\eta\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

où $\tilde{l} := \text{Card}\{j \in \mathbb{Z} : \tilde{I}_j \cap \mathcal{C} \neq \emptyset\}$. La conclusion s'obtient alors en utilisant (3.15), avec $l_0 = 2\tilde{l}$, puisque $l \leq 2\tilde{l}$. \square

3.3 Compacité des suites minimisantes

Cette section est consacré à l'étude des suites minimisantes associées à la courbe E_{\min} . Le prochain résultat nous donne que l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}$ du théorème 3.1.1 est non vide et nous permettra d'établir la stabilité orbitale dans la section 3.5.

Théorème 3.3.1. *Soit \mathcal{W} une distribution vérifiant les hypothèses (A1) et (A2). De plus, on suppose que E_{\min} est concave sur \mathbb{R}^+ , strictement sous-additive sur \mathbb{R}^+ et que $\Sigma_{\mathfrak{q}} > 0$, où $\Sigma_{\mathfrak{q}}$ est défini en (3.32). Soient $\mathfrak{q} \in]0, \mathfrak{q}_*[$ et (u_n) une suite de $\mathcal{NE}(\mathbb{R})$ vérifiant*

$$p(u_n) \rightarrow \mathfrak{q} \quad \text{et} \quad E(u_n) \rightarrow E_{\min}(\mathfrak{q}), \tag{3.36}$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. Alors il existe $v \in \mathcal{NE}(\mathbb{R})$ et une suite de points (x_n) tels que, à une sous-suite près,

$$u_n(\cdot + x_n) \rightarrow v(\cdot), \quad \text{dans } L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}), \quad (3.37)$$

$$1 - |u_n(\cdot + x_n)|^2 \rightarrow 1 - |v(\cdot)|^2, \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}), \quad (3.38)$$

$$u'_n(\cdot + x_n) \rightarrow v'(\cdot), \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}), \quad (3.39)$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. De plus, il existe une constante $\nu > 0$ telle que

$$\inf_{\mathbb{R}} |u_n(\cdot + x_n)| \geq \nu, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (3.40)$$

En particulier $p(v) = \mathfrak{q}$, $E(v) = E_{\min}(\mathfrak{q})$ et $v \in \mathcal{S}_{\mathfrak{q}}$.

Avant de démontrer le théorème, montrons le lemme élémentaire suivant.

Lemme 3.3.2. *Soit $(u_n)_n$ une suite vérifiant les hypothèses du théorème 3.3.1. Alors, il existe une fonction $u \in \mathcal{NE}(\mathbb{R})$ telle que, à une sous-suite près,*

$$u_n \rightarrow u, \quad \text{dans } L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}), \quad (3.41)$$

$$u'_n \rightarrow u', \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}), \quad (3.42)$$

$$\eta_n := 1 - |u_n|^2 \rightarrow \eta := 1 - |u|^2, \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}). \quad (3.43)$$

De plus, $E(u) \leq E_{\min}(\mathfrak{q})$, et en notant $u = \rho e^{i\phi}$ et $u_n = \rho_n e^{i\phi_n}$, la suite (u_n) vérifie, à une sous-suite près et pour tout $A > 0$,

$$\int_{-A}^A |u'|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-A}^A |u'_n|^2, \quad (3.44)$$

$$\int_{-A}^A (\mathcal{W} * \eta) \eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-A}^A (\mathcal{W} * \eta_n) \eta_n, \quad (3.45)$$

$$\int_{-A}^A \eta \phi' = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \eta_n \phi'_n. \quad (3.46)$$

Preuve. Par (3.36), $E(u_n)$ est bornée. Ainsi, en utilisant le lemme 3.2.1, on en déduit que u'_n et $\eta_n := 1 - |u_n|^2$ sont bornées dans $L^2(\mathbb{R})$ et u_n est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Ainsi, par compacité faible dans les espaces de Hilbert et le théorème de Rellich–Kondrachov, il existe une fonction $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ telle que, à une sous suite près, les convergences (3.41)–(3.43) sont satisfaites, de même que (3.44), et

$$\|u'\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u'_n\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (3.47)$$

Comme la fonctionnelle $B(f) = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * f) f$ est continue et convexe dans $L^2(\mathbb{R})$, puisque $\widehat{\mathcal{W}} \geq 0$ p.p., B est faiblement semi-continue inférieurement, d'où

$$B(u) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} B(u_n). \quad (3.48)$$

En combinant cette inégalité avec (3.47), on en déduit que $E(u) \leq E_{\min}(\mathfrak{q})$. Enfin, par (3.43) et le fait que $\mathcal{W} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on obtient

$$\mathcal{W} * \eta_n \rightarrow \mathcal{W} * \eta \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}), \quad (3.49)$$

ce qui avec (3.41) nous donne (3.45).

Il reste à montrer (3.46). Par le lemme 3.2.8, E_{\min} est strictement croissante sur $]0, \mathfrak{q}_*[$. De plus, comme $E(u) \leq E_{\min}(\mathfrak{q}) < E_{\min}(\mathfrak{q}_*)$, à nouveau par le lemme 3.2.8, on a $u \in \mathcal{NE}(\mathbb{R})$. Notons alors u sous forme polaire $u = \rho e^{i\phi}$.

Posons $w_n = \frac{u_n}{|u_n|}$. Alors,

$$\phi'_n = -i\overline{w_n}w'_n \quad \text{et} \quad w'_n = \frac{u'_n|u_n| - u_n \frac{\langle u_n, u'_n \rangle}{|u_n|}}{|u_n|^2}.$$

Ainsi,

$$-i\overline{w_n}w'_n = \frac{-i}{|u_n|^2} (\overline{u_n}u'_n - |u_n|\langle u_n, u'_n \rangle).$$

En utilisant l'expression précédente et les convergences (3.41) et (3.42), on obtient que

$$\phi'_n \rightharpoonup \frac{-i}{|u|^2} (\overline{u}u' - |u|\langle u, u' \rangle) = \phi' \quad \text{dans} \quad L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}). \quad (3.50)$$

En combinant (3.50) et (3.41), on arrive à (3.46), ce qui termine la preuve du lemme. \square

Preuve du théorème 3.3.1. Afin de démontrer le théorème 3.1.1, on va utiliser un raisonnement de type concentration-compacité (voir [55, 56] pour le principe général) et on va procéder en plusieurs étapes. La première étape consiste à montrer qu'il n'y a pas évanescence i.e. qu'à translation près, la suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers une fonction constante de module un.

Étape 1. Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions vérifiant (3.36). Alors il existe un entier \tilde{l} , des suites de réels $(x_j^n)_n$ et $v_j \in \mathcal{NE}(\mathbb{R})$ non constante pour tout $1 \leq j \leq \tilde{l}$, tels que la suite translatée $u_{n,j}(\cdot) := u_n(\cdot + x_j^n)$ vérifie

$$u_{n,j} \rightarrow v_j, \quad \text{dans} \quad L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}), \quad (3.51)$$

$$u'_{n,j} \rightharpoonup v'_j, \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbb{R}), \quad (3.52)$$

$$\eta_{n,j} := 1 - |u_{n,j}|^2 \rightharpoonup \eta_j := 1 - |v_j|^2, \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbb{R}) \text{ et } L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}). \quad (3.53)$$

De plus, pour tout $1 \leq j \leq \tilde{l}$ et pour tout $A > 0$,

$$E_{\min}(\mathbf{q}_j) \leq E(v_j) \leq E_{\min}(\mathbf{q}), \quad (3.54)$$

$$\int_{-A}^A |v'_j|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{-A}^A |u'_{n,j}|^2 \right), \quad (3.55)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A (\mathcal{W} * \eta_{n,j}) \eta_{n,j} = \int_{-A}^A (\mathcal{W} * \eta_j) \eta_j, \quad (3.56)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \eta_{n,j} \phi'_{n,j} = \int_{-A}^A \eta_j \phi'_j, \quad (3.57)$$

où $\eta_{n,j} = 1 - |u_{n,j}|^2$ (respectivement $\eta_j = 1 - |v_j|^2$).

Preuve. Par hypothèse $\Sigma_{\mathbf{q}} > 0$. Ainsi par application du lemme 3.2.9 et du lemme 3.2.10 avec $m_0 = \Sigma_{\mathbf{q}}/2$, il existe un nombre fini de suites de réels $(x_1^n)_n, (x_2^n)_n, \dots, (x_{l_n}^n)_n$ avec $1 \leq l_n \leq l_{\mathbf{q}}$ et $l_{\mathbf{q}}$ ne dépendant que de \mathbf{q} , telles que

$$|1 - |u_n(x_j^n)|^2| \geq \frac{\Sigma_{\mathbf{q}}}{2}, \quad \forall 1 \leq j \leq l_n \quad (3.58)$$

et

$$|1 - |u_n(x)|^2| \leq \frac{\Sigma_{\mathbf{q}}}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{l_n} [x_j^n - 1, x_j^n + 1]. \quad (3.59)$$

La suite d'entiers $(l_n)_n$ étant bornée, on peut supposer que l_n ne dépend pas de n , quitte à extraire une sous-suite et poser $l = l_n$. À nouveau, quitte à extraire une sous-suite et à renommer les points $(x_j^n)_j$, il existe un entier \tilde{l} où $1 \leq \tilde{l} \leq l$ et $R > 0$ tels que

$$|x_k^n - x_j^n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \forall 1 \leq k \neq j \leq \tilde{l} \quad (3.60)$$

et

$$x_j^n \in \bigcup_{k=1}^{\tilde{l}} B(x_k^n, R), \forall \tilde{l} < j \leq l. \quad (3.61)$$

Ainsi, par l'inégalité (3.59), on en déduit que

$$|1 - |u_n(x)||^2 \leq \frac{\Sigma_{\mathfrak{q}}}{2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{\tilde{l}} B(x_j^n, R+1). \quad (3.62)$$

En appliquant le lemme 3.3.2 à la suite translatée $u_{n,j}(\cdot) = u_n(\cdot + x_j^n)$, on obtient directement les relations (3.51) à (3.57), quitte à extraire à nouveau. Il reste à montrer que v_j est non constante pour tout $1 \leq j \leq \tilde{l}$. Par l'inégalité (3.58), on obtient que pour tout $1 \leq j \leq \tilde{l}$,

$$|1 - |u_{n,j}(0)||^2 \geq \frac{\Sigma_{\mathfrak{q}}}{2}. \quad (3.63)$$

Par (3.51) et en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (3.63), on obtient

$$|1 - |v_j(0)||^2 \geq \frac{\Sigma_{\mathfrak{q}}}{2}. \quad (3.64)$$

Si v_j est une fonction constante alors v_j est de module un et l'inégalité (3.64) nous donne $\Sigma_{\mathfrak{q}} \leq 0$, ce qui est exclu. Ainsi, $v_j \in \mathcal{NE}(\mathbb{R})$ est non constante, ce qui conclut la preuve de l'étape. \square

Les trois étapes suivantes ont pour but de montrer qu'il n'y a pas dichotomie. L'étape qui suit nous donne des estimations sur l'énergie et le moment de v_j par rapport à $u_{n,j}$.

Étape 2. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $R_m > 0$ et $N_m \in \mathbb{N}$, tels que, si $n \geq N_m$, alors

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \int_{-R_m}^{R_m} |u'_{n,j}|^2 \geq \sum_{j=1}^{\tilde{l}} E_{\text{kin}}(v_j) - \frac{1}{m}, \quad (3.65)$$

$$\left| \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \int_{-R_m}^{R_m} (\mathcal{W} * \eta_{n,j}) \eta_{n,j} - \sum_{j=1}^{\tilde{l}} E_{\text{pot}}(v_j) \right| \leq \frac{1}{m}, \quad (3.66)$$

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \int_{-R_m}^{R_m} \eta_{n,j} \phi'_{n,j} - \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \mathfrak{q}_j \right| \leq \frac{1}{m}, \quad (3.67)$$

où $\mathfrak{q}_j := p(v_j)$.

Preuve. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Établissons la première relation (3.65). Comme $v'_j \in L^2(\mathbb{R})$, par le théorème de convergence dominée, il existe $R_m \geq 0$ avec

$$R_m \geq \max(R+1, m) \quad (3.68)$$

tel que pour tout $1 \leq j \leq \tilde{l}$, on ait

$$\frac{1}{2} \int_{-R_m}^{R_m} |v'_j|^2 \geq E_{\text{kin}}(v_j) - \frac{1}{2\tilde{l}m}. \quad (3.69)$$

D'après (3.60), pour n assez grand, on a $B(x_k^n, R_m) \cap B(x_j^n, R_m) = \emptyset$ pour tout $1 \leq k \neq j \leq \tilde{l}$. Ainsi, on suppose que les boules $B(x_j^n, R_m)$ sont disjointes, quitte à augmenter n . Par (3.55) et (3.69), il existe donc $N_m \geq 1$ tel que pour $n \geq N_m$ et pour tout $1 \leq k \neq j \leq \tilde{l}$, on a

$$\frac{1}{2} \int_{-R_m}^{R_m} |u'_{n,j}|^2 \geq E_{\text{kin}}(v_j) - \frac{1}{m\tilde{l}}. \quad (3.70)$$

En sommant l'inégalité (3.70) de $j = 1$ à $j = \tilde{l}$, on obtient (3.65). Démontrons la seconde relation (3.66). Par le théorème de convergence dominée et quitte à augmenter R_m , comme $(\mathcal{W} * \eta_j)\eta_j \in L^1(\mathbb{R})$, pour tout $1 \leq j \leq \tilde{l}$, on a

$$\left| \frac{1}{4} \int_{-R_m}^{R_m} (\mathcal{W} * \eta_j)\eta_j - E_{\text{pot}}(v_j) \right| \leq \frac{1}{2m\tilde{l}}. \quad (3.71)$$

Par (3.56), quitte à augmenter N_m , pour $n \geq N_m$, on a

$$\left| \frac{1}{4} \int_{-R_m}^{R_m} (\mathcal{W} * \eta_j)\eta_j - \frac{1}{4} \int_{-R_m}^{R_m} (\mathcal{W} * \eta_{n,j})\eta_{n,j} \right| \leq \frac{1}{2m\tilde{l}}. \quad (3.72)$$

En utilisant (3.71), (3.72) et l'inégalité triangulaire, pour $n \geq N_m$, on arrive à

$$\left| \frac{1}{4} \int_{-R_m}^{R_m} (\mathcal{W} * \eta_{n,j})\eta_{n,j} - E_{\text{pot}}(v_j) \right| \leq \frac{1}{m\tilde{l}}.$$

En sommant de $j = 1$ à $j = \tilde{l}$, on obtient (3.66). En appliquant le même argument à $\eta_{n,j}\phi'_{n,j}$ et $\eta_j\phi'_j$ à la place de $(\mathcal{W} * \eta_{n,j})\eta_{n,j}$ et $(\mathcal{W} * \eta_j)\eta_j$, on obtient la relation (3.67). \square

L'idée est maintenant de comparer le moment \mathbf{q}_j (respectivement $E_{\text{min}}(\mathbf{q}_j)$) avec \mathbf{q} (respectivement avec $E_{\text{min}}(\mathbf{q})$) en utilisant les relations établies à l'étape précédente.

Étape 3. *Il existe $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}$ et $\tilde{E} \geq 0$ tels que*

$$E_{\text{min}}(\mathbf{q}) \geq \sum_{j=1}^{\tilde{l}} E_{\text{min}}(\mathbf{q}_j) + \tilde{E} \quad \text{et} \quad (3.73)$$

$$\mathbf{q} = \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \mathbf{q}_j + \tilde{\mathbf{q}}. \quad (3.74)$$

Afin d'obtenir les relations souhaitées, on va utiliser (3.65), (3.66), (3.67) et faire tendre n vers l'infini, puis m vers l'infini. En effet, comme les suites $E_{\text{kin}}(u_n)$ et $E_{\text{pot}}(u_n)$ sont bornées d'après (3.36), quitte à extraire une sous suite, il existe $E_k, E_p \geq 0$ telles que

$$E_{\text{kin}}(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E_k \geq 0, \quad E_{\text{pot}}(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E_p \geq 0, \quad (3.75)$$

et donc $E_{\text{min}}(\mathbf{q}) = E_k + E_p$. Commençons par établir (3.74). On a

$$\begin{aligned} p(u_n) &= \frac{1}{2} \int_{\bigcup_{j=1}^{\tilde{l}} B(x_j^n, R_m)} (1 - \rho_n^2)\phi'_n + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{\tilde{l}} B(x_j^n, R_m)} (1 - \rho_n^2)\phi'_n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \int_{-R_m}^{R_m} (1 - \rho_{n,j}^2)\phi'_{n,j} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{\tilde{l}} B(x_j^n, R_m)} (1 - \rho_n^2)\phi'_n. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Par l'inégalité de Young, (3.14), (3.62) et (3.68), on obtient

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{\tilde{i}} B(x_j^n, R_m)} \eta_n \phi_n' \right| &\leq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{\tilde{i}} B(x_j^n, R_m)} \eta_n^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{\tilde{i}} B(x_j^n, R_m)} \phi_n'^2 \\
 &\leq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{\tilde{i}} B(x_j^n, R_m)} \eta_n^2 + \frac{1}{4(1 - \frac{\Sigma_{\mathbf{q}}}{2})} \int_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{\tilde{i}} B(x_j^n, R_m)} (\rho_n \phi_n')^2 \\
 &\leq C(E_{\min}(\mathbf{q})) + \frac{1}{4(1 - \frac{\Sigma_{\mathbf{q}}}{2})} E_{\text{kin}}(u_n) \\
 &\leq C(\mathbf{q}, E_{\min}(\mathbf{q})).
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{\tilde{i}} B(x_j^n, R_m)} \eta_n \phi_n'$ est bornée uniformément par rapport à n et m . Par le lemme A.2, quitte à extraire une sous-suite, il existe $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{\tilde{i}} B(x_j^n, R_m)} \eta_n \phi_n' \right) = \tilde{\mathbf{q}}. \quad (3.77)$$

Le découpage de $p(u_n)$ en (3.76) nous donne alors par double passage à la limite

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\tilde{i}} \int_{-R_m}^{R_m} \eta_{n,j} \phi_{n,j}' \right) = \mathbf{q} - \tilde{\mathbf{q}}.$$

Par l'égalité précédente et (3.67), on arrive à (3.74). Décomposons maintenant l'énergie de u_n entre $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{\tilde{i}} B(x_j^n, R_m)$ et $\bigcup_{j=1}^{\tilde{i}} B(x_j^n, R_m)$ comme précédemment. Pour la partie cinétique, on a

$$\begin{aligned}
 E_{\text{kin}}(u_n) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{\tilde{i}} B(x_j^n, R_m)} |u_n'|^2 + \frac{1}{2} \int_{\bigcup_{j=1}^{\tilde{i}} B(x_j^n, R_m)} |u_n'|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{\tilde{i}} B(x_j^n, R_m)} |u_n'|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\tilde{i}} \int_{-R_m}^{R_m} |u_{n,j}'|^2.
 \end{aligned} \quad (3.78)$$

Par le lemme A.2, à une sous-suite près, il existe $\tilde{E}_k \geq 0$ telle que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{\tilde{i}} B(x_j^n, R_m)} |u_n'|^2 \right) = \tilde{E}_k \quad \text{et} \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\tilde{i}} \int_{-R_m}^{R_m} |u_{n,j}'|^2 \right) = E_k - \tilde{E}_k,$$

d'après (3.75) et (3.78). En faisant tendre n vers l'infini puis m vers l'infini dans (3.65) et en utilisant la relation qui précède, on arrive à

$$E_k \geq \sum_{j=1}^{\tilde{i}} E_{\text{kin}}(v_j) + \tilde{E}_k. \quad (3.79)$$

Pour la partie potentielle, afin de simplifier les notations, posons

$$g_{n,m}(x) = (1 - |u_n|^2) \mathbb{1}_{\bigcup_{j=1}^{\tilde{i}} B(x_j^n, R_m)}(x) \quad \text{et} \quad f_{n,m}(x) = (1 - |u_n|^2) \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{\tilde{i}} B(x_k^n, R_m)}(x).$$

On a le découpage de $E_{\text{pot}}(u_n)$ suivant.

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(u_n) &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * \eta_n)(f_{n,m} + g_{n,m}) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * \eta_n) f_{n,m} + \frac{1}{4} \int_{\bigcup_{j=1}^{\tilde{i}} B(x_j^n, R_m)} (\mathcal{W} * \eta_n) \eta_n \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * g_{n,m}) f_{n,m} + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * f_{n,m}) f_{n,m} + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{\tilde{i}} \int_{-R_m}^{R_m} (\mathcal{W} * \eta_{n,j}) \eta_{n,j}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Par le théorème de Plancherel, l'inégalité de Cauchy–Schwarz et (3.15), on a

$$\left| \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * g_{n,m}) f_{n,m} \right| \leq \frac{\|\widehat{\mathcal{W}}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{4} \|g_{n,m}\|_{L^2(\mathbb{R})} \|f_{n,m}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(E_{\min}(\mathfrak{q})),$$

et le même argument montre que $\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * f_{n,m}) f_{n,m}$ peut être bornée en fonction de $E_{\min}(\mathfrak{q})$. En particulier, quitte à extraire une sous-suite, il existe $\tilde{E}_p \geq 0$ telle que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * f_{n,m}) f_{n,m} = \tilde{E}_p. \quad (3.81)$$

Admettons temporairement que, quitte à extraire une sous-suite,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * g_{n,m}) f_{n,m} = 0. \quad (3.82)$$

Par double passage à la limite dans le découpage (3.80) de $E_{\text{pot}}(u_n)$ et en utilisant (3.75), (3.81) et (3.82), on arrive à

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{\tilde{i}} \int_{-R_m}^{R_m} (\mathcal{W} * \eta_{n,j}) \eta_{n,j} \right) = E_p - \tilde{E}_p.$$

Ainsi, par double passage à la limite dans (3.71), on obtient alors

$$E_p = \sum_{j=1}^{\tilde{i}} E_{\text{pot}}(v_j) + \tilde{E}_p. \quad (3.83)$$

En posant

$$\tilde{E} := \tilde{E}_k + \tilde{E}_p = \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{\tilde{i}} B(x_j^n, R_m)} |u'_n|^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{\tilde{i}} B(x_j^n, R_m)} (\mathcal{W} * f_{n,m}) f_{n,m} \right) \geq 0 \quad (3.84)$$

et en additionnant les deux relations (3.79) et (3.83), on arrive à (3.73). Terminons la preuve de cette étape en démontrant (3.82). Par définition de $g_{n,m}$ et l'identité (3.12), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * g_{n,m})(x) f_{n,m}(x) dx &= \int_{\bigcup_{j=1}^{\tilde{i}} B(x_j^n, R_m)} (\mathcal{W} * f_{n,m})(x) \eta_n(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^{\tilde{i}} \int_{B(x_j^n, R_m)} (\mathcal{W} * f_{n,m})(x) \eta_n(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^{\tilde{i}} \int_{B(0, R_m)} (\mathcal{W} * f_{n,m})(x + x_j^n) \eta_{n,j}(x) dx. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant à nouveau (3.12) et le fait que la convolution commute avec la translation, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * g_{n,m})(x) f_{n,m}(x) dx = \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \int_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{\tilde{l}} B(x_k^n - x_j^n, R_m)} (\mathcal{W} * (\eta_{n,j} \mathbb{1}_{B(0, R_m)}))(x) \eta_{n,j}(x) dx.$$

Comme $B(0, R_m) = B(x_j^n - x_j^n, R_m) \subset \bigcup_{k=1}^{\tilde{l}} B(x_k^n - x_j^n, R_m)$, on arrive à

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * f_{n,m})(x) g_{n,m}(x) dx \right| &\leq \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \int_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{\tilde{l}} B(x_k^n - x_j^n, R_m)} |\mathcal{W} * (\eta_{n,j} \mathbb{1}_{B(0, R_m)})|(x) |\eta_{n,j}|(x) dx \\ &\leq \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \int_{\mathbb{R} \setminus B(0, R_m)} |\mathcal{W} * (\eta_{n,j} \mathbb{1}_{B(0, R_m)})|(x) |\eta_{n,j}|(x) dx. \end{aligned}$$

Afin de montrer (3.82), il suffit alors de montrer que, pour tout $1 \leq j \leq \tilde{l}$,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus B(0, R_m)} |\mathcal{W} * (\eta_{n,j} \mathbb{1}_{B(0, R_m)})|(x) |\eta_{n,j}|(x) = 0. \quad (3.85)$$

Par (3.51), il est clair que

$$\eta_{n,j} \mathbb{1}_{B(0, R_m)} \rightarrow \eta_j \mathbb{1}_{B(0, R_m)} \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}).$$

Comme $\mathcal{W} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par l'hypothèse (A1) et en utilisant la convergence précédente, on arrive à

$$\mathcal{W} * (\eta_{n,j} \mathbb{1}_{B(0, R_m)}) \rightarrow \mathcal{W} * (\eta_j \mathbb{1}_{B(0, R_m)}) \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R})$$

puis

$$|\mathcal{W} * (\eta_{n,j} \mathbb{1}_{B(0, R_m)})| \rightarrow |\mathcal{W} * (\eta_j \mathbb{1}_{B(0, R_m)})| \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R})$$

De plus, $|\eta_{n,j}|$ est borné dans $L^2(\mathbb{R})$ et quitte à extraire une sous-suite, $|\eta_{n,j}|$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$ et par (3.51),

$$|\eta_{n,j}| \rightharpoonup |\eta_j| \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}).$$

D'où, par convergence produit faible-fort

$$\int_{\mathbb{R} \setminus B(0, R_m)} |\mathcal{W} * (\eta_{n,j} \mathbb{1}_{B(0, R_m)})| |\eta_{n,j}| \rightarrow \int_{\mathbb{R} \setminus B(0, R_m)} |\mathcal{W} * (\eta_j \mathbb{1}_{B(0, R_m)})| |\eta_j|.$$

Maintenant, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on arrive à

$$\int_{\mathbb{R} \setminus B(0, R_m)} |\mathcal{W} * (\eta_j \mathbb{1}_{B(0, R_m)})| |\eta_j| \leq \|\mathcal{W}\|_2 \|\eta_j\|_{L^2(\mathbb{R})} \left(\int_{\mathbb{R} \setminus B(0, R_m)} |\eta_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Comme $\eta_j^2 \in L^1(\mathbb{R})$ et $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus B(0, R_m)} \eta_j^2 = 0$ par définition de R_m en (3.68), le théorème de convergence dominée nous donne

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus B(0, R_m)} |\eta_j|^2 = 0,$$

d'où (3.85) puis (3.82).

L'étape suivante nous donne le lien entre les quantités \tilde{q} et \tilde{E} définies en (3.77) et (3.84).

Étape 4. On a

$$\sqrt{2} \left(1 - \frac{\Sigma_{\mathbf{q}}}{2}\right) |\tilde{\mathbf{q}}| \leq \tilde{E}. \quad (3.86)$$

Notons, pour tout $1 \leq j \leq \tilde{l}$,

$$\chi_{j,n}(\cdot) = \chi(\cdot - x_j^n),$$

où χ est donnée par le lemme A.1 en annexe et vérifie

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq R_m, \\ 0 & \text{si } |x| \geq R_m + \frac{1}{m}. \end{cases}$$

De même, on note

$$\tilde{\chi}_{n,m} = 1 - \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \chi_{j,n}.$$

Pour établir (3.86), on va utiliser le lemme 3.2.3 avec $u = u_n$, $\Omega = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{\tilde{l}} B(x_j^n, R_m)$, $\varepsilon = \Sigma_{\mathbf{q}}/2$ et $\chi_{\Omega, \Omega_0} = \tilde{\chi}_{n,m}$. Ainsi

$$\Omega \setminus \Omega_0 = \bigcup_{j=1}^{\tilde{l}} [x_j^n - R_m - \frac{1}{m}, x_j^n - R_m] \cup [x_j^n + R_m, x_j^n + R_m + \frac{1}{m}].$$

Par définition de $\tilde{\mathbf{q}}$ et \tilde{E} en (3.77) et (3.84) et en faisant tendre n vers l'infini, puis m vers l'infini dans (3.23), on obtient

$$\sqrt{2} |\tilde{\mathbf{q}}| \leq \frac{\tilde{E}}{\left(1 - \frac{\Sigma_{\mathbf{q}}}{2}\right)} + \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_{n,m}$$

avec

$$|\Delta_{n,m}| \leq C(E_{\min}(\mathbf{q})) \left(\|\eta_n\|_{L^2(\Omega \setminus \Omega_0)} + \|\eta_n\|_{L^2(\Omega \setminus \Omega_0)}^2 \right). \quad (3.87)$$

Ainsi, afin de montrer (3.73), il suffit de montrer que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_{n,m} = 0. \quad (3.88)$$

Utilisons pour cela la borne (3.87). On a,

$$\|\eta_n\|_{L^2(\Omega \setminus \Omega_0)}^2 = 2 \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \left(\int_{-R_m - \frac{1}{m}}^{-R_m} \eta_{n,j}^2 + \int_{R_m}^{R_m + \frac{1}{m}} \eta_{n,j}^2 \right).$$

Par convergence uniforme sur tout compact de $\eta_{n,j}$ vers η_j d'après (3.51), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\eta_n\|_{L^2(\Omega \setminus \Omega_0)}^2 = 2 \sum_{j=1}^{\tilde{l}} \left(\int_{-R_m - \frac{1}{m}}^{-R_m} \eta_j^2 + \int_{R_m}^{R_m + \frac{1}{m}} \eta_j^2 \right),$$

et on conclut donc

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\eta_n\|_{L^2(\Omega \setminus \Omega_0)}^2 = 0,$$

par le théorème de convergence dominée. On a montré ainsi (3.86), ce qui conclut l'étape 4.

On va maintenant montrer que la dichotomie n'est pas possible dans notre cas, grâce aux hypothèses sur la courbe E_{\min} .

Étape 5. On a $\tilde{E} = \tilde{q} = 0$ et $\tilde{l} = 1$.

Supposons dans un premier temps que $\tilde{q} > 0$. Par définition de Σ_q en (3.32), on obtient

$$\frac{E_{\min}(\mathbf{q})}{q} = \sqrt{2}(1 - \Sigma_q) < \sqrt{2} \left(1 - \frac{\Sigma_q}{2}\right). \quad (3.89)$$

De plus, la concavité de E_{\min} nous donne, pour tout $0 < p < q$,

$$E_{\min}(p) \geq p \frac{E_{\min}(\mathbf{q})}{q} = p\sqrt{2}(1 - \Sigma_q). \quad (3.90)$$

Ainsi, en posant $\mathfrak{s} := q - \tilde{q} = \sum_{j=1}^{\tilde{l}} q_j$, l'hypothèse $\tilde{q} > 0$ implique que $\mathfrak{s} < q$. Si $\mathfrak{s} > 0$, en utilisant (3.86), (3.89) et (3.90), on arrive à

$$E_{\min}(\mathfrak{s}) \geq \mathfrak{s} \frac{E_{\min}(\mathbf{q})}{q} = E_{\min}(\mathbf{q}) - \tilde{q} \frac{E_{\min}(\mathbf{q})}{q} > E_{\min}(\mathbf{q}) - \sqrt{2}\tilde{q} \left(1 - \frac{\Sigma_q}{2}\right) \geq E_{\min}(\mathbf{q}) - \tilde{E}. \quad (3.91)$$

Si $\mathfrak{s} \leq 0$, la première inégalité de (3.91) est triviale puisque $q > 0$ et par positivité de E_{\min} . Par (3.86) et (3.89), on obtient à nouveau (3.91). Ainsi, en combinant (3.73) et (3.91), on obtient

$$E_{\min}(\mathfrak{s}) > \sum_{j=1}^{\tilde{l}} E_{\min}(\mathbf{q}_j). \quad (3.92)$$

La courbe E_{\min} est concave et positive sur \mathbb{R}^+ donc E_{\min} est croissante sur \mathbb{R}^+ . De plus, comme E_{\min} est paire par le lemme 3.2.6 et sous additive sur \mathbb{R}^+ par hypothèse, l'inégalité $\mathfrak{s} \leq \sum_{j=1}^{\tilde{l}} |q_j|$ nous amène à

$$E_{\min}(\mathfrak{s}) \leq E_{\min}\left(\sum_{j=1}^{\tilde{l}} |q_j|\right) \leq \sum_{j=1}^{\tilde{l}} E_{\min}(\mathbf{q}_j),$$

ce qui contredit (3.92). Ainsi $\tilde{q} \leq 0$ et (3.74) nous donne $q \leq \sum_{j=1}^{\tilde{l}} |q_j|$. Comme précédemment, cela implique que

$$E_{\min}(q) \leq E_{\min}\left(\sum_{j=1}^{\tilde{l}} |q_j|\right) \leq \sum_{j=1}^{\tilde{l}} E_{\min}(\mathbf{q}_j).$$

D'autre part, puisque $\tilde{E} \geq 0$, l'inégalité (3.73) implique que

$$E_{\min}(q) \geq \sum_{j=1}^{\tilde{l}} E_{\min}(\mathbf{q}_j),$$

d'où

$$E_{\min}(q) = \sum_{j=1}^{\tilde{l}} E_{\min}(\mathbf{q}_j). \quad (3.93)$$

D'après (3.73), (3.86) et (3.93) on obtient que $\tilde{E} = 0$ et $\tilde{q} = 0$. Finalement, s'il existe deux valeurs non nulles q_k et q_m , avec $1 \leq k \neq m \leq \tilde{l}$, la stricte sous additivité de E_{\min} implique que

$$E_{\min}(q) = E_{\min}\left(\sum_{j=1}^{\tilde{l}} |q_j|\right) < \sum_{j=1}^{\tilde{l}} E_{\min}(\mathbf{q}_j),$$

ce qui contredit (3.93). Donc, $\tilde{l} = 1$, ce qui termine la preuve de l'étape 5.

Posons $v = v_1$. La convergence (3.37) et l'estimation (3.40) sont une conséquence de (3.51) et (3.62) avec $\tilde{l} = 1$. Montrons maintenant les convergences (3.38) et (3.39) (avec $v = v_1$) afin de terminer la preuve du théorème. Comme $\tilde{l} = 1$ et $\tilde{q} = 0$, par l'étape 5, l'égalité (3.74) montre que $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1$. En utilisant (3.36) et (3.54), on obtient alors

$$p(u_{n,1}) \rightarrow \mathfrak{q} = p(v) \quad \text{et} \quad E(u_{n,1}) \rightarrow E_{\min}(\mathfrak{q}) = E(v). \quad (3.94)$$

Établissons (3.39). Comme $u'_{n,1} \rightharpoonup v'$ dans $L^2(\mathbb{R})$, il suffit de prouver que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u'_{n,1}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|v'\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (3.95)$$

Raisonnons par l'absurde. Quitte à extraire une sous-suite, toujours notée $u_{n,1}$, on suppose que

$$M := \lim_{n \rightarrow \infty} \|u'_{n,1}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 2E_{\text{kin}}(u_{n,1}), \quad \text{avec} \quad M > \|v'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 2E_{\text{kin}}(v).$$

Ainsi, en utilisant (3.94),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\text{pot}}(u_{n,1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (E(u_{n,1}) - E_{\text{kin}}(u_{n,1})) = E(v) - \frac{M}{2} < E(v) - E_{\text{kin}}(v) = E_{\text{pot}}(v),$$

ce qui contredit (3.48). De ce fait, $u'_{n,1} \rightarrow v'$ dans $L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire (3.39), et en particulier $E_{\text{kin}}(u_{n,1}) \rightarrow E_{\text{kin}}(v)$. La relation (3.94) implique alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * \eta_{n,1}) \eta_{n,1} = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * \eta) \eta. \quad (3.96)$$

où $\eta = 1 - |v|^2$. En utilisant le théorème de Plancherel et l'hypothèse (A2), on obtient

$$\begin{aligned} \|\eta_{n,1} - \eta\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{W}}(\xi) |\widehat{\eta_{n,1}} - \widehat{\eta}|^2 + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{\eta_{n,1}} - \widehat{\eta}|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W} * (\eta_{n,1} - \eta) (\eta_{n,1} - \eta) + \frac{1}{4} \|\eta'_{n,1} - \eta'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Comme $\mathcal{W} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par (3.53) et (3.96), on a

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * (\eta_{n,1} - \eta)) (\eta_{n,1} - \eta) \rightarrow 0. \quad (3.98)$$

Il reste à montrer que

$$\|\eta'_{n,1} - \eta'\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0. \quad (3.99)$$

En remarquant que $\eta' - \eta'_{n,1} = 2(\langle v, v' \rangle - \langle u_{n,1}, u'_{n,1} \rangle)$, on arrive à la majoration

$$\|\eta'_{n,1} - \eta'\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\|(v - u_{n,1})v'\|_{L^2(\mathbb{R})} + 2\|(v' - u'_{n,1})u_{n,1}\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (3.100)$$

D'après (3.14), on obtient

$$\|u_{n,1}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(E_{\min}(\mathfrak{q})). \quad (3.101)$$

Ainsi, par (3.39), on en déduit que

$$\|(v' - u'_{n,1})u_{n,1}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(E_{\min}(\mathfrak{q}))\|v' - u'_{n,1}\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0.$$

De plus, la majoration (3.101) et le fait que $v' \in L^2(\mathbb{R})$ nous permettent d'utiliser le théorème de convergence dominée afin de conclure que

$$\|(v - u_{n,1})v'\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0,$$

et on arrive à (3.99). En combinant (3.97), (3.98) et (3.99), on obtient (3.38), ce qui termine la preuve du théorème. \square

3.4 Caractérisation des solutions de (OPNc) et preuve du théorème 3.1.1

Dans cette section, nous établissons les équations d'Euler–Lagrange associées au problème de minimisation sous contraintes, ce qui nous permettra de compléter la preuve du théorème 3.1.1. Avant cela, montrons que les solutions de (OPNc) admettent une certaine régularité en utilisant la théorie de régularité elliptique. On reprend ici la preuve de [29] faite en dimension $N \geq 2$.

Proposition 3.4.1. *Soient $v \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ une solution de (OPNc) et \mathcal{W} une distribution vérifiant les hypothèses (A1) et (A2). Alors $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ et v est bornée. De plus, η et v' appartient à $W^{k,p}(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $2 \leq p \leq +\infty$.*

Preuve. Montrons dans un premier temps que $v \in C^\infty(\mathbb{R})$. Soit $R > 0$ arbitraire. On pose $I_R =]-R, R[$. Comme v est solution de (OPNc), on obtient

$$v'' = -iv' - v\mathcal{W} * (1 - |v|^2). \quad (3.102)$$

Comme $v \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$, on obtient que $v \in L^\infty(I_R)$, $v' \in L^2(I_R)$ et $(1 - |v|^2) \in L^2(I_R)$. Par (A2), $\mathcal{W} * (1 - |v|^2) \in L^2(I_R)$ puis $v(\mathcal{W} * (1 - |v|^2)) \in L^2(I_R)$. Par (3.102), on conclut que $v \in H^2(I_R)$. Dérivons maintenant (3.102). On obtient

$$v''' = -iv'' - v'(\mathcal{W} * (1 - |v|^2)) + 2v(\mathcal{W} * \langle v, v' \rangle). \quad (3.103)$$

Comme $v' \in H^1(I_R)$, $v' \in L^\infty(I_R)$. Ainsi $v'(\mathcal{W} * (1 - |v|^2)) \in L^2(I_R)$ et $v(\mathcal{W} * \langle v, v' \rangle) \in L^2(I_R)$. Par (3.103), on arrive à $v''' \in L^2(I_R)$ i.e. $v \in H^3(I_R)$. Par bootstrap, on obtient $v \in H^k(I_R)$ et R étant arbitraire, $v \in H_{\text{loc}}^k(\mathbb{R})$. Enfin, par le théorème de Morrey, $v \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Montrons maintenant que $v \in W^{k,\infty}(\mathbb{R})$. Le fait que $v \in L^\infty(\mathbb{R})$ est une conséquence directe de l'estimation d'énergie (3.14). Montrons alors que $v \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Pour cela, considérons $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque et notons J_α l'intervalle $]\alpha - 1, \alpha + 1[$. Décomposons v sur J_α comme $v = z_1 + z_2 + z_3$, où z_1, z_2 et z_3 sont les solutions des équations suivantes

$$\begin{cases} -z_1'' = 0, & \text{dans } J_\alpha, \\ z_1 = v, & \text{sur } \partial J_\alpha, \end{cases} \quad (3.104)$$

$$\begin{cases} -z_2'' = icv', & \text{dans } J_\alpha, \\ z_2 = 0, & \text{sur } \partial J_\alpha, \end{cases} \quad (3.105)$$

$$\begin{cases} -z_3'' = v(\mathcal{W} * \eta), & \text{dans } J_\alpha, \\ z_3 = 0, & \text{sur } \partial J_\alpha. \end{cases} \quad (3.106)$$

La fonction z_1 est une fonction affine, d'expression

$$z_1(x) = \frac{v(\alpha + 1) - v(\alpha - 1)}{2}x + \frac{(1 - \alpha)v(\alpha + 1) + (1 + \alpha)v(\alpha - 1)}{2}.$$

En dérivant, on obtient $|z_1'(x)| \leq \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. De même, la seconde équation admet pour solution explicite

$$z_2(x) = \int_{\alpha-1}^x \int_{\alpha-1}^y -icv'(\xi)d\xi dy + \frac{1}{2} \left(\int_{\alpha-1}^{\alpha+1} \int_{\alpha-1}^y -icv'(\xi)d\xi dy \right) (x - (\alpha - 1)).$$

Ainsi,

$$|z_2'(x)| \leq \frac{3|c|}{2} \int_{\alpha-1}^{\alpha+1} |v'| dy \leq \frac{3|c|\sqrt{2}}{2} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |v'|^2} \leq 3|c|\sqrt{E(v)}.$$

La fonction z_3 admet pour solution explicite

$$z_3(x) = \int_{\alpha-1}^x \int_{\alpha-1}^y -v(\mathcal{W} * \eta) d\xi dy + \frac{1}{2} \left(\int_{\alpha-1}^{\alpha+1} \int_{\alpha-1}^y -v(\mathcal{W} * \eta) d\xi dy \right) (x - (\alpha - 1)).$$

En dérivant z_3 et en utilisant (3.15), on obtient

$$|z_3'(x)| \leq 2\sqrt{2} \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\mathcal{W} * \eta\|_2 \leq C(E(v)) \|v\|_{L^\infty} \|\mathcal{W}\|_2.$$

Par somme, on obtient ainsi, pour tout $x \in J_\alpha$

$$|v'(x)| \leq |z_1'(x)| + |z_2'(x)| + |z_3'(x)| \leq \left(\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + 3|c|\sqrt{E(v)} + C(E(v)) \|v\|_{L^\infty} \|\mathcal{W}\|_2 \right).$$

La majoration ne dépend pas de α , d'où $v' \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $v \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. En utilisant les équations précédentes et un argument de type bootstrap, on obtient que $v \in W^{k,\infty}(\mathbb{R})$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Posons maintenant $w = v'$. D'après (3.103), w vérifie

$$icw' + w'' + w(\mathcal{W} * \eta) + v(\mathcal{W} * \eta') = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R},$$

ou encore, pour $\lambda > 0$,

$$-w'' - icw' + \lambda w = f, \quad \text{dans } \mathbb{R}, \quad (3.107)$$

avec $f = w(\mathcal{W} * \eta) + v(\mathcal{W} * \eta') + \lambda w$. Comme $v' = w \in L^\infty(\mathbb{R})$, on a $w(\mathcal{W} * \eta) \in L^2(\mathbb{R})$. De même, $\eta' = -2\langle v', v \rangle$ et $v' \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, donc $f \in L^2(\mathbb{R})$. En considérant $\lambda > 0$ assez grand, on peut donc appliquer les théorèmes de régularité elliptique pour conclure $v' = w \in H^2(\mathbb{R})$. On pourrait aussi obtenir $w \in H^2(\mathbb{R})$ en appliquant directement la transformée de Fourier à (3.107).

En utilisant à nouveau (3.107) et un argument de type bootstrap, on obtient que $v' \in H^k(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Enfin, par interpolation, on obtient que $v', \eta \in W^{k,p}(\mathbb{R})$, pour tout $p \geq 2$ et $k \in \mathbb{N}$. \square

Comme l'énergie et le moment ne sont pas définis sur un espace vectoriel, la notion de différentielle n'est pas triviale. Cependant, pour notre étude, il suffit d'utiliser les dérivées directionnelles. Précisément, pour $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, on définit

$$dE(u)[h] := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E(u+th) - E(u)}{t} \quad \text{et} \quad dp(u)[h] := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p(u+th) - p(u)}{t},$$

pour tout $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, où on suppose de plus que $u \in \mathcal{NE}(\mathbb{R})$ pour la définition de $dp(u)$. Ainsi, pour t assez petit, $p(u+th)$ est bien défini.

Proposition 3.4.2. *Supposons que \mathcal{W} vérifie (A1). Alors, pour tout $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on a*

$$dE(u)[h] = \int_{\mathbb{R}} \langle u', h' \rangle - \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W} * (1 - |u|^2) \langle u, h \rangle, \quad \text{si } u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}), \quad (3.108)$$

$$dp(u)[h] = \int_{\mathbb{R}} \langle ih', u \rangle \quad \text{si } u \in \mathcal{NE}(\mathbb{R}). \quad (3.109)$$

En particulier, pour $c \in \mathbb{R}$, $dp(u) = cdE(u)$ si et seulement si u est solution de (OPNc).

Preuve. Par le théorème de convergence dominée, en utilisant le fait que h soit à support compact et la définition (3.9) du moment renormalisé, on obtient

$$\begin{aligned} dp(u)[h] &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p(u+th) - p(u)}{t} = \left[\frac{d}{dt} p(u+th) \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \langle ih', u \rangle \left(1 - \frac{1}{|u|^2} \right) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \langle iu', h \rangle \left(1 - \frac{1}{|u|^2} \right) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \langle iu', u \rangle \left(\frac{2\langle u, h \rangle}{|u|^4} \right). \end{aligned}$$

Par intégration par parties, on obtient

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \langle ih', u \rangle \left(1 - \frac{1}{|u|^2}\right) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \langle iu', h \rangle \left(1 - \frac{1}{|u|^2}\right) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \langle ih, u \rangle \left(\frac{2\langle u', u \rangle}{|u|^4}\right).$$

Ainsi,

$$dp(u)[h] = \int_{\mathbb{R}} \langle iu', h \rangle \left(1 - \frac{1}{|u|^2}\right) - \int_{\mathbb{R}} \langle ih, u \rangle \left(\frac{\langle u', u \rangle}{|u|^4}\right) + \int_{\mathbb{R}} \langle iu', u \rangle \left(\frac{\langle u, h \rangle}{|u|^4}\right). \quad (3.110)$$

De plus, on a

$$\langle ih, u \rangle \langle u, u' \rangle = \frac{1}{4} (ih\bar{u} - i\bar{h}u)(u\bar{u}' + \bar{u}u') = \frac{1}{2} (-\langle iu', h \rangle |u|^2 + \langle iu'h, u^2 \rangle)$$

et

$$\langle iu', u \rangle \langle u, h \rangle = \frac{1}{4} (iu'u - i\bar{u}'u)(u\bar{h} + \bar{u}h) = \frac{1}{2} (\langle iu', h \rangle |u|^2 + \langle iu'h, u^2 \rangle).$$

Ainsi, en injectant les expressions de $\langle iu', u \rangle \langle u, h \rangle$ et de $\langle ih, u \rangle \langle u', u \rangle$ dans (3.110), on obtient (3.109). Démontrons maintenant (3.108). On a

$$E_{\text{kin}}(u + th) - E_{\text{kin}}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u' + th'|^2 - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u'|^2 = \int_{\mathbb{R}} t \langle u', h' \rangle + \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}} |h'|^2, \quad (3.111)$$

et pour la partie potentielle, en utilisant la relation (3.12),

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(u + th) - E_{\text{pot}}(u) &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * (1 - |u + th|^2)) (1 - |u + th|^2) - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * (1 - |u|^2)) (1 - |u|^2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} -t (\mathcal{W} * (1 - |u|^2)) \langle u, h \rangle - \frac{t^2}{2} (\mathcal{W} * (1 - |u|^2)) |h|^2 + t^2 (\mathcal{W} * \langle u, h \rangle) |h|^2 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} t^2 (\mathcal{W} * \langle u, h \rangle) \langle u, h \rangle + \frac{t^4}{4} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * |h|^2) |h|^2. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Ainsi, en sommant les relations (3.111) et (3.112) que l'on divise par t , on obtient par passage à la limite (3.108). \square

Théorème 3.4.3. *Supposons que la courbe E_{\min} soit concave sur \mathbb{R}^+ et soit $u \in \mathcal{S}_{\mathfrak{q}}$, avec $\mathfrak{q} > 0$. Alors, u est solution de (OPNc) avec pour vitesse $c = c_{\mathfrak{q}}$ satisfaisant*

$$E_{\min}^+(\mathfrak{q}) \leq c_{\mathfrak{q}} \leq E_{\min}^-(\mathfrak{q}). \quad (3.113)$$

Notons que, comme E_{\min} est concave, ses dérivées à droite et à gauche ont bien un sens.

Preuve. Comme $u \in \mathcal{S}_{\mathfrak{q}}$, on a $p(u) = \mathfrak{q}$ et $E(u) = E_{\min}(\mathfrak{q})$. De plus, u n'est pas une fonction constante puisque $\mathfrak{q} > 0$. Soit $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Par définition de E_{\min} on a, pour tout $t > 0$,

$$\frac{E(u + th) - E(u)}{t} \geq \frac{E_{\min}(p(u + th)) - E_{\min}(\mathfrak{q})}{t}.$$

Si $dp(u)[h] \geq 0$, alors $p(u + th) \geq p(u) = \mathfrak{q}$ pour t assez petit. Ainsi, lorsque $t \rightarrow 0^+$, on obtient

$$dE(u)[h] \geq E_{\min}^+(\mathfrak{q}) dp(u)[h].$$

De même, si $dp(u)[h] \leq 0$, on obtient

$$dE(u)[h] \geq E_{\min}^-(\mathfrak{q}) dp(u)[h].$$

En remplaçant h par $-h$, on arrive aux inégalités suivantes

$$E_{\min}^+(\mathfrak{q})dp(u)[h] \leq dE(u)[h] \leq E_{\min}^-(\mathfrak{q})dp(u)[h], \quad \text{si } dp(u)[h] \geq 0, \quad (3.114)$$

et

$$E_{\min}^-(\mathfrak{q})dp(u)[h] \leq dE(u)[h] \leq E_{\min}^+(\mathfrak{q})dp(u)[h], \quad \text{si } dp(u)[h] \leq 0. \quad (3.115)$$

Comme les fonctionnelles $dp(u), dE(u) : C_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ sont linéaires, il suffit de montrer que

$$\text{Ker}(dp(u)) \subset \text{Ker}(dE(u)). \quad (3.116)$$

afin d'établir les équations d'Euler-Lagrange. En effet, par le lemme 3.2 dans [13], la relation (3.116) implique qu'il existe $c_{\mathfrak{q}} \in \mathbb{R}$ telle que

$$dE(u) = c_{\mathfrak{q}}dp(u), \quad (3.117)$$

et par la proposition 3.4.2, u est alors solution de (OPNc) avec $c = c_{\mathfrak{q}}$.

Afin de montrer (3.116), considérons $\phi \in \text{Ker}(dp(u))$. Comme u n'est pas constante, il existe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $dp(u)[\psi] \neq 0$. En effet, si pour tout $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on a $dp(u)[\psi] = 0$, alors, en prenant $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ avec $\text{Re}(\psi) = 0$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \psi' \text{Im}(u) = 0,$$

ce qui implique que $\text{Im}(u)$ est constante (voir lemme 8.1 dans [13]). De même, en prenant $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ avec $\text{Im}(\psi) = 0$, on en déduit que u est constante ce qui est exclu par hypothèse. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$dp(u)[\psi + n\phi] = dp(u)[\psi].$$

D'après (3.114) et (3.115), on conclut que $dE(u)[\psi + n\phi] = dE(u)[\psi] + ndE(u)[\phi]$ est borné, d'où $dE(u)[\phi] = 0$, i.e. $\phi \in \text{Ker}(dE(u))$, ce qui nous donne (3.116).

Il reste à montrer (3.113). Soit $h_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $dp(u)[h_0] = 1$. Alors, (3.117) implique que $dE(u)[h_0] = c_{\mathfrak{q}}$. On obtient alors (3.113) avec (3.114) et $h = h_0$, ce qui termine la preuve. \square

Remarque 3.4.4. *Il est possible d'établir les équations d'Euler-Lagrange sans utiliser la concavité de la courbe E_{\min} et en utilisant un argument basé sur le théorème des fonctions implicites. Cependant, la preuve est dans ce cas beaucoup plus technique et plus longue que la preuve précédente.*

Preuve du théorème 3.1.1. En combinant les théorèmes 3.3.1 et 3.4.3 et le corollaire 3.2.7, on obtient que, pour tout $\mathfrak{q} \in]0, \mathfrak{q}_*]$, l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}$ est non vide et pour tout $u \in \mathcal{S}_{\mathfrak{q}}$, u est solution de (OPNc) ainsi que la borne sur la vitesse et la minoration sur \mathfrak{q}_* , ce qui conclut la preuve du théorème. \square

3.5 Stabilité des ondes progressives

Commençons par rappeler le résultat suivant concernant le problème de Cauchy pour (GPN).

Théorème 3.5.1 ([28]). *Soient $\phi_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, avec $\phi' \in H^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ et $\mathcal{W} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une distribution paire satisfaisant une des assertions suivantes.*

(i) $\mathcal{W} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{W} \geq 0$ au sens des distributions.

(ii) Il existe $\sigma > 0$ tel que $\widehat{\mathcal{W}} \geq \sigma$ p.p. sur \mathbb{R} .

Alors, pour tout $w_0 \in H^1(\mathbb{R})$, il existe une unique solution $\Psi \in C(\mathbb{R}, \phi_0 + H^1(\mathbb{R}))$ de (GPN) avec pour condition initiale $\Psi_0 = \phi_0 + w_0$. De plus, l'énergie est conservée, ainsi que le moment tant que $\inf_{x \in \mathbb{R}} |\Psi(x, t)| > 0$. Dans le cas de (ii), on a l'estimation de croissance

$$\|\Psi(t) - \phi_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C|t| + \|\Psi_0 - \phi_0\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (3.118)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, où C est une constante positive ne dépendant que de $E(\Psi_0)$, $\|\widehat{\mathcal{W}}\|_{L^\infty}$, ϕ_0 et σ .

Remarquons que l'auteur de [28] utilise une définition différente du moment, permettant à la fonction $\Psi(t)$ de s'annuler. Cependant, la preuve de conservation du moment dans [28] s'applique aussi au moment renormalisé p tant que $\Psi(t) \in \mathcal{N}\mathcal{E}(\mathbb{R})$. Notons que d'autres résultats concernant le problème de Cauchy ont été établis pour différentes topologies lorsque $\mathcal{W} = \delta_0$ (voir par exemple [70, 34, 33, 7, 30, 31] ainsi que les références incluses), et ces résultats peuvent probablement être adaptés à notre structure non locale.

Pour la preuve du théorème 3.5.1, l'auteur montre d'abord que le problème est localement bien posé pour $\mathcal{W} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Ensuite, les conditions (i) et (ii) permettent de montrer que le problème est globalement bien posé. Dans [28], il est également établi que la solution est globale en dimension strictement supérieure à 1, lorsque $\widehat{\mathcal{W}} \geq 0$ p.p. sur \mathbb{R} . Cependant, la preuve proposée par l'auteur ne s'applique pas en dimension 1. En utilisant le lemme 3.2.1, il est possible de montrer partiellement le résultat pour $N = 1$.

Théorème 3.5.2. *Soient ϕ_0 et \mathcal{W} comme au théorème 3.5.1 et supposons qu'il existe $\kappa \geq 0$ tel que*

$$\widehat{\mathcal{W}}(\xi) \geq (1 - \kappa\xi^2)^+, \quad \text{p.p. sur } \mathbb{R}. \quad (3.119)$$

Alors, on a la même conclusion qu'au théorème 3.5.1, incluant l'estimation de croissance (3.118), avec une constante C ne dépendant que de $E(\Psi_0)$, $\|\mathcal{W}\|_{L^\infty}$, ϕ_0 et κ .

Preuve. Au vu du théorème 1.10 de [28] concernant le caractère localement bien posé de (GPN), afin de montrer que la solution est globale, il suffit de montrer que la solution $\Psi(t) = \phi_0 + w(t)$ définie sur $]T_{\min}, T_{\max}[$, vérifie $T_{\max} = +\infty$ et $T_{\min} = -\infty$. En vertu de l'alternative d'explosion du théorème 1.10, il suffit de montrer que $\|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ reste bornée sur tout intervalle borné de la forme $]T_{\min}, T_{\max}[$. En effet, par (GPN), on obtient que (voir équation (63) dans [28])

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right| &\leq \|\phi_0''\|_{L^2(\mathbb{R})} \|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\phi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{W} * (1 - |u(t)|^2)| |w(t)| dx \\ &\leq \|\phi_0''\|_{L^2(\mathbb{R})} \|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\phi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\widehat{\mathcal{W}}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\eta(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

où $\eta(t) = 1 - |u(t)|^2$. Par le lemme 3.2.1 et la conservation de l'énergie sur $]T_{\min}, T_{\max}[$, on en déduit qu'il existe une constante $K > 0$, dépendant de κ et $E(\Psi_0)$, telle que

$$\|\eta(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq K, \quad \text{pour tout } t \in]T_{\min}, T_{\max}[.$$

Ainsi, pour tout $\delta > 0$

$$\frac{1}{2} \left| \frac{d}{dt} (\|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \delta) \right| \leq (\|w(t)\|_{L^2}^2 + \delta)^{\frac{1}{2}} \left(\|\phi_0''\|_{L^2(\mathbb{R})} + K \|\widehat{\mathcal{W}}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\phi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right).$$

En divisant par $(\|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \delta)^{\frac{1}{2}}$, en intégrant et en faisant tendre δ vers 0, on obtient l'estimation (3.118), pour tout $t \in]T_{\min}, T_{\max}[$. Comme mentionné précédemment, cette estimation implique que la solution est globale. \square

Comme expliqué dans la section 6 de [28], le théorème 3.5.2 nous permet de montrer que les solutions dans l'espace d'énergie sont globales. On a alors le théorème suivant.

Théorème 3.5.3. *Supposons que $\mathcal{W} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une distribution tempérée paire vérifiant (3.119). Alors pour tout $\Psi_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, il existe une unique fonction $\Psi \in C(\mathbb{R}, \mathcal{E}(\mathbb{R}))$, solution globale de (GPN) avec pour condition initiale Ψ_0 . De plus, l'énergie est conservée. Enfin, si $\inf_{x \in \mathbb{R}} |\Psi(x, t)| > 0$ alors le moment est conservé.*

Démontrons maintenant le théorème 3.1.2, qui s'obtient comme conséquence presque immédiate du théorème 3.5.3.

Preuve du théorème 3.1.2. Au vu de la remarque 3.2.2, on en déduit que si $\mathcal{W} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une distribution paire, avec $\widehat{\mathcal{W}} \geq 0$ p.p. sur \mathbb{R} et $\widehat{\mathcal{W}}$ est de classe C^2 dans un voisinage de l'origine, alors \mathcal{W} vérifie (3.119), pour une certaine constante $\kappa \geq 0$. On peut donc appliquer le théorème 3.5.3, ce qui nous donne la conclusion voulue. \square

Le reste de la section est consacré à la preuve de la stabilité orbitale de \mathcal{S}_q dans l'espace d'énergie. Afin de prouver le théorème 3.1.3, on va utiliser le lemme suivant.

Lemme 3.5.4. *Soient $v_n, v \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ telles que $d(v_n, v) \rightarrow 0$. Alors,*

$$\| |v_n| - |v| \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \| |v_n|^2 - |v|^2 \|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0. \quad (3.120)$$

En particulier, $E(v_n) \rightarrow E(v)$. De plus, si $v_n, v \in \mathcal{NE}(\mathbb{R})$, alors $p(v_n) \rightarrow p(v)$.

Preuve. Comme $d(v_n, v) \rightarrow 0$, il existe $M > 0$ tel que

$$\|v'_n\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|v'\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|v_n\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|v\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq M,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par l'inégalité de Gagliardo–Nirenberg et le fait que $|w|' \leq |w'|$ pour $w \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$, on obtient

$$\| |v_n| - |v| \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \| |v_n| - |v| \|_{L^2(\mathbb{R})} \| |v_n|' - |v'| \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2M \| |v_n| - |v| \|_{L^2(\mathbb{R})},$$

ce qui montre la première convergence de (3.120). De la même manière, on en déduit la seconde convergence en remarquant que

$$\| |v|^2 - |v_n|^2 \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq (\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|v_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}) \| |v| - |v_n| \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2M \| |v_n| - |v| \|_{L^2},$$

ce qui nous donne (3.120). En particulier, on a $v'_n \rightarrow v'$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et $\eta_n = 1 - |v_n|^2 \rightarrow \eta = 1 - |v|^2$ dans $L^2(\mathbb{R})$, d'où $E(v_n) \rightarrow E(v)$. Pour le moment, en écrivant que $v_n = |v_n|e^{i\theta_n}$, on a $p(v_n) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \eta_n \theta'_n$. Il suffit alors de montrer que $\theta'_n \rightarrow \theta'$ dans $L^2(\mathbb{R})$ pour conclure que $p(v_n) \rightarrow p(v)$, où $v = |v|e^{i\theta}$. Comme $|v_n| \rightarrow |v|$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et $v \in \mathcal{NE}(\mathbb{R})$, il existe $C > 0$ tel que

$$\inf_{\mathbb{R}} |v_n| \geq C, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}} |\theta'_n|^2 \leq \frac{1}{C^2} \int_{\mathbb{R}} \rho_n^2 \theta_n'^2 \leq \frac{2}{C^2} E(v_n).$$

Comme $E(v_n)$ est bornée, il existe une sous-suite de (θ'_n) notée (θ'_{n_k}) telle que $\theta'_{n_k} \rightarrow \theta'$ dans $L^2(\mathbb{R})$, lorsque $k \rightarrow \infty$. Finalement, on obtient $p(v_{n_k}) \rightarrow p(v)$. Comme la limite ne dépend pas de la sous-suite, on en déduit que $p(v_n) \rightarrow p(v)$. \square

Preuve du théorème 3.1.3. En raisonnant par l'absurde, on suppose qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$, (δ_n) , (t_n) et $(u_0^n) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R})$ tels que $\delta_n \rightarrow 0$,

$$d(u_0^n, \mathcal{S}_q) < \delta_n \quad (3.121)$$

et

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} d_A(u^n(\cdot - y, t_n), \mathcal{S}_q) \geq \varepsilon_0, \quad (3.122)$$

où u^n désigne la solution de (GPN) avec pour condition initiale u_0^n . En particulier, par (3.121), on en déduit qu'il existe, à une sous-suite près, $v_n \in \mathcal{S}_q$ telle que

$$d(u_0^n, v_n) < 2\delta_n. \quad (3.123)$$

Comme $E(v_n) = E_{\min}(\mathfrak{q})$ et $p(v_n) = \mathfrak{q}$, en appliquant le théorème 3.3.1 à (v_n) , on en déduit qu'il existe $v \in \mathcal{S}_q$ et une suite de points (a_n) tels que, à une sous-suite près, la fonction $\tilde{v}_n(x) = v_n(x + a_n)$ vérifie

$$\tilde{v}_n \rightarrow v, \quad \text{dans } L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}), \quad \text{et} \quad 1 - |\tilde{v}_n|^2 \rightarrow 1 - |v|^2, \quad \tilde{v}'_n \rightarrow v' \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}). \quad (3.124)$$

En utilisant l'estimation (3.40) du théorème 3.3.1, on en conclut que

$$\|\tilde{v}_n - v\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\nu + \inf_{\mathbb{R}} |v|} \|\tilde{v}_n|^2 - |v|^2\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0,$$

d'où

$$d(\tilde{v}_n, v) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad d_A(\tilde{v}_n, v) \rightarrow 0, \quad (3.125)$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. Maintenant, par l'inégalité triangulaire et (3.123), on a

$$d(u_0^n(\cdot + a_n), v) \leq d(u_0^n(\cdot + a_n), \tilde{v}_n) + d(\tilde{v}_n, v) < 2\delta_n + d(\tilde{v}_n, v).$$

En utilisant (3.125), on en déduit que $d(u_0^n(\cdot + a_n), v) \rightarrow 0$. En appliquant la conservation de l'énergie par le théorème 3.5.3 et le lemme 3.5.4, on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$E(u^n(t)) = E(u_0^n) = E(u_0^n(\cdot + a_n)) \rightarrow E(v) = E_{\min}(\mathfrak{q}). \quad (3.126)$$

Montrons que

$$\inf_{\mathbb{R}} |u^n(t)| > 0, \quad \text{pour tout } |t| \leq |t_n|. \quad (3.127)$$

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe s_n , avec $|s_n| \leq |t_n|$, tel que $\inf_{\mathbb{R}} |u^n(s_n)| = 0$. Par (3.126), on en conclut que $E(u^n(s_n)) \rightarrow E_{\min}(\mathfrak{q})$. Par le lemme 3.2.8, E_{\min} est strictement croissante sur $]0, \mathfrak{q}_*[$ et il existe ainsi $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $E(u^n(s_n)) < E_{\min}(\mathfrak{q}_*)$, pour tout $n \geq n_0$. Ceci est une contradiction puisque, par le lemme 3.2.8, on obtient que $u^n(s_n) \in \mathcal{NE}(\mathbb{R})$.

Au vu de (3.127), on raisonne comme pour l'énergie, en utilisant la conservation du moment au théorème 3.5.3 et le lemme 3.5.4, afin d'obtenir

$$p(u^n(t_n)) = p(u_0^n) = p(u_0^n(\cdot + a_n)) \rightarrow p(v) = \mathfrak{q}. \quad (3.128)$$

Par (3.126) et (3.128), on peut maintenant appliquer le théorème 3.3.1 à la suite $(u^n(t_n))$. Alors, en raisonnant comme précédemment, on en déduit qu'il existe $w \in S_{\mathfrak{q}}$ et une suite de points (b_n) tels que, à une sous-suite près,

$$d_A(u^n(\cdot + b_n, t_n), w(\cdot)) \rightarrow 0, \quad (3.129)$$

ce qui contredit (3.122) et ce qui termine la démonstration. \square

Chapitre 4

Étude de la courbe minimisante en dimension $N \geq 1$

4.1 Introduction

4.1.1 Présentation du problème

Considérons l'équation de Gross–Pitaevskii non locale en dimension $N \geq 1$,

$$i\partial_t \Psi(t) = \Delta \Psi + \Psi(t) (\mathcal{W} * (1 - |\Psi(t)|^2)) \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad (\text{GPN})$$

où $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{W} \in S'(\mathbb{R}^N)$ et dont l'énergie est donnée par l'expression

$$E(\Psi(t)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Psi(t)|^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{W} * (1 - |\Psi(t)|^2)) (1 - |\Psi(t)|^2).$$

Dans le cas particulier où $\mathcal{W} = \delta_0$, (GPN) est notée (GP). Les ondes progressives sont des solutions particulières de (GPN) de la forme

$$\Psi(t, x) = u(x_1 - ct, x_\perp)$$

où $x_\perp = (x_2, \dots, x_N)$ et $c \in \mathbb{R}$ désigne la vitesse de l'onde. À nouveau dans notre étude, comme au chapitre précédent, nous nous limiterons aux ondes progressives d'énergie finie. Si Ψ est une onde progressive, alors u vérifie l'équation

$$ic\partial_1 u + \Delta u + u (\mathcal{W} * (1 - |u|^2)) = 0 \quad (\text{OPNc})$$

et en conjuguant (OPNc), on peut se ramener au cas $c \geq 0$. Lorsque $\mathcal{W} = \delta_0$, cette équation sera notée (OPc). Il est clair que si u est une constante de module 1 alors u est solution de (OPNc) et ces solutions seront appelées solutions triviales par la suite. Se pose alors la question de l'existence d'ondes progressives non triviales d'énergie finie pour (GPN) en dimension $N \geq 1$.

Une manière d'obtenir l'existence d'ondes progressives non triviales est d'utiliser une approche variationnelle, comme nous l'avons fait au chapitre précédent (voir en particulier la section 3.3). Précisément, considérons le problème de minimisation sous contraintes,

$$E_{\min}(\mathfrak{q}) = \inf \{E(v) : p(v) = \mathfrak{q}\} \quad (4.1)$$

pour $\mathfrak{q} \geq 0$, où p est le moment et $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ est l'espace d'énergie défini par

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}^N) = \{v \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}) : 1 - |v|^2 \in L^2(\mathbb{R}), \nabla v \in L^2(\mathbb{R})\}. \quad (4.2)$$

Formellement, (OPNc) est alors l'équation d'Euler–Lagrange associée à ce problème de minimisation sous contraintes et la vitesse c est le multiplicateur de Lagrange. Ce résultat a été démontré au théorème 3.4.3 au chapitre précédent dans le cas de la dimension 1 et il n'est pas difficile de généraliser la preuve à toute dimension. L'existence des ondes progressives non triviales se fait alors en deux temps : L'étude des propriétés de la courbe minimisante E_{\min} puis la compacité des suites minimisantes par concentration-compacité. Dans le cas $\mathcal{W} = \delta_0$, ce raisonnement a été employé en dimension $N = 1$ dans [7], en dimension $N = 2$ et $N = 3$ dans [8] et dans [19] en dimension $N \geq 2$ pour différents types de localités, généralisant le cas local.

Dans l'énoncé du théorème 3.1.1, nous avons supposé que E_{\min} était concave sur \mathbb{R}^+ , strictement sous-additive sur \mathbb{R}^+ et $E_{\min}(\mathfrak{q}) < \sqrt{2}\mathfrak{q}$ pour tout $\mathfrak{q} \in \mathbb{R}^+$. Lors de la preuve de ce théorème, l'utilisation de ces hypothèses sur la courbe minimisante était fondamentale afin de conclure quant à la compacité des suites minimisantes et donc à l'existence d'ondes progressives non triviales pour (GPN).

Le but de ce chapitre est double : D'une part, nous allons étudier la courbe minimisante en dimension $N \geq 1$ dans le cas non local, sous certaines hypothèses sur \mathcal{W} , ce qui généralise le cas local. D'autre part, les propriétés que nous établirons permettront de compléter le résultat d'existence et de stabilité en dimension 1 du chapitre précédent, ce qui nous donnera un nouvel énoncé quant à l'existence de solutions non triviales pour (OPNc), ne dépendant plus des hypothèses sur la courbe minimisante. Avant de présenter nos résultats, énonçons les hypothèses que nous ferons sur \mathcal{W} .

4.1.2 Hypothèses sur \mathcal{W}

Afin de simplifier les notations, si $N \geq 1$ et pour $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ fixé, on note, pour $l \in \{1, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{w}_l &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto \widehat{\mathcal{W}}(\xi_1, \dots, \xi_{l-1}, \lambda, \xi_{l+1}, \dots, \xi_N). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Si $N = 1$, on pose $\mathfrak{w}_l(\cdot) = \widehat{\mathcal{W}}(\cdot)$.

(H1) \mathcal{W} est une distribution tempérée paire, réelle, $\widehat{\mathcal{W}} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\widehat{\mathcal{W}} \geq 0$ presque partout sur \mathbb{R}^N . De plus, $\widehat{\mathcal{W}}$ est continue à l'origine et $\widehat{\mathcal{W}}(0) = 1$.

(H2) $\widehat{\mathcal{W}}$ appartient à $C_b^3(\mathbb{R}^N)$, $\partial_1^2 \widehat{\mathcal{W}}(0) > -1$ et $\widehat{\mathcal{W}}(\xi) \geq 1$.

(H3) Il existe $l \in \{1, \dots, N\}$, avec $l \geq 2$ si $N \geq 2$, tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, \mathfrak{w}_l admet une extension méromorphe au demi-plan supérieur $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ et les seules singularités de \mathfrak{w}_l sur \mathbb{H} sont des pôles simples isolés et appartenant à l'axe imaginaire, c'est-à-dire de la forme $\{i\nu_j : j \in J\}$, avec $\nu_j > 0$ pour tout $j \in J$, $0 \leq |J| \leq \infty$. De plus, pour tout $j \in J$, $\text{Res}(\mathfrak{w}_l, i\nu_j)$ est imaginaire pur et

$$i\text{Res}(\mathfrak{w}_l, i\nu_j) \leq 0. \quad (4.4)$$

Enfin, il existe une suite de courbes de longueur finie $(\Gamma_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{H}$, paramétrées par $\gamma_k : [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{C}$, telle que $\Gamma_k \cup [-k, k]$ est une courbe fermée orientée positivement qui ne passe par aucun pôle. De plus,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\gamma_k(t)| = +\infty, \text{ pour tout } t \in [a_k, b_k], \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(\Gamma_k) \left(\sup_{t \in [a_k, b_k]} \frac{\mathfrak{w}_l(\gamma_k(t))}{|\gamma_k(t)|^4} \right) = 0. \quad (4.5)$$

(H4) Pour tout $\lambda \in]0, 1]$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\lambda^N \widehat{\mathcal{W}}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \leq \widehat{\mathcal{W}}(\xi). \quad (4.6)$$

Ici $\mathcal{L}(\Gamma_k)$ désigne la longueur de la courbe et $C_b^k(\mathbb{R}^N)$ désigne l'ensemble des fonctions bornées de classe C^k dont les k premières dérivées sont bornées. Rappelons que, avec notre convention, la transformée de Fourier de la masse de Dirac en 0 est $\hat{\delta}_0 = 1$ et les hypothèses (H1)–(H4) sont vérifiées. Pour la formulation de l'hypothèse (H3) en dimension $N = 1$, il faut remplacer \mathfrak{w}_l par $\widehat{\mathcal{W}}$ dans l'énoncé et les relations (4.4) et (4.5) par

$$i\text{Res}(\widehat{\mathcal{W}}, i\nu_j) \leq 0 \quad \text{pour tout } j \in J,$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\gamma_k(t)| = +\infty, \text{ pour tout } t \in [a_k, b_k], \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(\Gamma_k) \sup_{t \in [a_k, b_k]} \frac{\widehat{\mathcal{W}}(\gamma_k(t))}{|\gamma_k(t)|^4} = 0. \quad (4.7)$$

Faisons quelques remarques à propos de ces hypothèses. La première hypothèse (H1) garantit que la fonctionnelle d'énergie est bien définie et positive dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ comme dans le cas de la dimension $N = 1$ et on renvoie au chapitre précédent pour plus de détails (voir section 3.1.2). Notons que l'hypothèse (H2) en dimension 1 implique l'hypothèse (A2). L'hypothèse (A2) nous avait permis d'établir les estimations clés d'énergie aux lemmes 3.2.1 et 3.2.3 du chapitre précédent. Dans ce chapitre, l'hypothèse (H2) nous permettra d'obtenir une borne sur $E_{\min}(\mathfrak{q})$ lorsque $N = 1$ et $N = 2$. Précisément, les conditions sur les dérivées secondes,

$$(\widehat{\mathcal{W}})''(0) > -1 \quad \text{et} \quad \partial_1^2 \widehat{\mathcal{W}}(0, 0) > -1,$$

impliqueront que les ondes progressives de (GPN) peuvent être formellement décrites en termes des ondes progressives de l'équation de Korteweg–de Vries en dimension 1, et comme ondes progressives de l'équation de Kadomtsev–Petviashvili I en dimension 2 lorsque c est proche de $\sqrt{2}$ (voir section 4.2.4).

La plus technique et restrictive hypothèse (H3) sera uniquement utilisée pour montrer que la courbe E_{\min} est concave. En effet, soit $l \in \{2, \dots, N\}$. En utilisant un argument de réflexion de [57], nous serons amenés à montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (W * f)f \geq \int_{\mathbb{R}^N} (W * f_*)f_*, \quad (4.8)$$

pour toute fonction impaire $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ par rapport à x_l (respectivement pour toute fonction impaire $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ si $N = 1$), où si $N = 1$,

$$f_*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \geq 0, \\ -f(x), & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

et si $N \geq 2$,

$$f_*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x_l \geq 0, \\ -f(x), & \text{si } x_l < 0. \end{cases}$$

Par le théorème de Plancherel, (4.8) se reformule de la manière suivante.

(H3') Il existe $l \in \{2, \dots, N\}$, tel que \mathcal{W} vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\mathcal{W}}(\xi)(|\hat{f}(\xi)|^2 - |\hat{f}_*(\xi)|^2)d\xi \geq 0,$$

pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ impaire par rapport à x_l si $N \geq 2$ (respectivement pour toute fonction impaire $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ si $N = 1$),

et on montrera dans la section 4.2.3 que (H3) implique (H3'). Ainsi, on peut remplacer (H3) par la plus faible condition (H3'). Finalement, notons que si $\mathcal{W} = \delta_0$, la condition (H3') est vérifiée puisque $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|f_*\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$.

L'hypothèse (H4) sera utilisée uniquement pour montrer la croissance de la courbe E_{\min} et à partir de la dimension 2 (voir lemme 4.2.12). Cette hypothèse ne sera pas utile en dimension 1. Dans la section 4.2.3, nous montrons que si \mathcal{W} vérifie (H3), alors E_{\min} est concave sur \mathbb{R}^+ . Dans ce cas, E_{\min} est croissante sur \mathbb{R}^+ . Ainsi, si une distribution vérifie (H3), il n'est pas nécessaire d'utiliser (H4) afin d'obtenir la croissance de E_{\min} . Cependant, dans l'exemple de potentiel (iv) qui va suivre, \mathcal{W} ne vérifie pas l'hypothèse (H3) et il faut donc utiliser l'hypothèse (H4) afin de montrer que E_{\min} est croissante sur \mathbb{R}^+ .

Donnons maintenant des exemples de potentiels vérifiant (H1)–(H4). Commençons par le cas de la dimension $N = 1$.

(i) Pour $\beta > 2\alpha > 0$, considérons $\mathcal{W}_{\alpha,\beta} = \frac{\beta}{\beta-2\alpha}(\delta_0 - \alpha e^{-\beta|x|})$ dont la transformée de Fourier est égale à

$$\widehat{\mathcal{W}}_{\alpha,\beta}(\xi) = \frac{\beta}{\beta-2\alpha} \left(1 - \frac{2\alpha\beta}{\xi^2 + \beta^2} \right),$$

donc $\widehat{\mathcal{W}}_{\alpha,\beta}(0) = 1$ et il n'est pas difficile de voir que les hypothèses (H1) et (H2) sont satisfaites. En particulier, $\widehat{\mathcal{W}}_{\alpha,\beta}''(0) = 4\alpha/(b^2(b-2\alpha)) \geq 0$. Afin de vérifier (H3), il suffit de voir que l'unique singularité sur \mathbb{H} de la fonction méromorphe $\widehat{\mathcal{W}}_{\alpha,\beta}$ est le pôle simple $\nu = i\beta$ et

$$i\text{Res}(\widehat{\mathcal{W}}_{\alpha,\beta}, i\beta) = -\frac{\alpha\beta}{\beta-2\alpha} < 0.$$

Comme $\widehat{\mathcal{W}}_{\alpha,\beta}$ est bornée sur \mathbb{H} hors des pôles, la condition (H3) est remplie. Rappelons que par l'inégalité de Young, $L^1(\mathbb{R})$ est un sous espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Ainsi, $\mathcal{W}_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et le théorème 3.1.2 s'applique. Montrons que $\mathcal{W}_{\alpha,\beta}$ vérifie (H4) pour $\beta \geq 3\alpha/8$. En posant $\gamma = \beta^2 - 2\alpha\beta > 0$, l'inégalité (4.6) est équivalente à

$$\lambda \frac{\xi^2 + \lambda^2 \gamma}{\xi^2 + \lambda^2 \beta^2} \leq \frac{\xi^2 + \gamma}{\xi^2 + \beta^2},$$

ce qui se réécrit, en développant,

$$(1 - \lambda) (\xi^4 + \xi^2((1 + \lambda + \lambda^2)\gamma - \lambda\beta^2) + \lambda^2\gamma\beta^2) \geq 0. \quad (4.9)$$

Comme $\gamma(1 + \lambda + \lambda^2) > 0$ et $\lambda \in]0, 1[$, une condition suffisante pour que (4.9) soit vérifiée est que

$$\xi^4 - \lambda\beta^2\xi^2 + \lambda^2\gamma\beta^2 \geq 0.$$

En effectuant le changement de variable $X = \xi^2$, on obtient une inéquation du second degré dont le discriminant est égal à $\lambda^2\beta^4 - 4\lambda^2\gamma\beta^2 = \lambda^2\beta^3(8\alpha - 3\beta)$. Ainsi, si $\beta \geq 3\alpha/8$, (4.9) est vérifiée et donc (H4) est vérifiée pour $\mathcal{W}_{\alpha,\beta}$.

(ii) Pour $\alpha \in [0, 1[$, on considère le potentiel $\mathcal{W}_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}(\delta_0 - \alpha\mathcal{V})$, où

$$\mathcal{V}(x) = -\frac{3}{\pi} \ln(1 - e^{-\pi|x|}) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathcal{V}}(\xi) = \frac{3(\xi \coth(\xi) - 1)}{\xi^2}.$$

Il n'est pas difficile de voir que $\widehat{\mathcal{V}}$ est une fonction C^∞ , positive et paire sur \mathbb{R} , décroissante sur \mathbb{R}^+ , avec $\widehat{\mathcal{V}}(0) = 1$, $\widehat{\mathcal{V}}''(0) = -2/15$ et équivalente à l'infini à $3/\xi$. Ainsi les conditions (H1) et (H2) sont satisfaites. Comme fonction du plan complexe, $\widehat{\mathcal{V}}$ est une fonction méromorphe dont les seules singularités sur \mathbb{H} sont données par les pôles simples $\{i\pi\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ et donc

$$i\text{Res}(\widehat{\mathcal{W}}_\alpha, i\pi\ell) = i \frac{\alpha}{1-\alpha} \text{Res}(-\widehat{\mathcal{V}}, i\pi\ell) = -\frac{3\alpha}{\pi\ell(1-\alpha)}.$$

Pour vérifier (H3), définissons pour $k \geq 2$, les fonctions $\gamma_{1,k}(t) = (k + 1/2)\pi + it$, $t \in [0, (k + 1/2)\pi]$, $\gamma_{2,k}(t) = t + i(k + 1/2)\pi$, $t \in [(k + 1/2)\pi, -(k + 1/2)\pi]$, et $\gamma_{3,k}(t) = -(k + 1/2)\pi + it$, $t \in [(k + 1/2)\pi, 0]$, de sorte que la courbe correspondante Γ_k est donnée par les trois côtés d'un carré et Γ_k ne passe par aucun pôle. En utilisant le fait que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ (voir [1])

$$|\coth(x + iy)| = \left| \frac{\cosh(2x) + \cos(2y)}{\cosh(2x) - \cos(2y)} \right|^{1/2},$$

il est possible de montrer qu'il existe une constante $C > 0$, indépendante de k , telle que $|\widehat{\mathcal{V}}(\gamma_{j,k}(t))| \leq C$, pour tout $t \in [a_{j,k}, b_{j,k}]$, pour $j \in \{1, 2, 3\}$, où $[a_{j,k}, b_{j,k}]$ est le domaine de définition de $\gamma_{j,k}$. En conclusion, (H3) est satisfaite. Comme $\mathcal{V} \in L^1(\mathbb{R})$, on conclut que $\mathcal{W}_\alpha \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on peut appliquer le théorème 3.1.2 à cette distribution.

Montrons maintenant que \mathcal{W}_α vérifie (H4) pour tout $\alpha \in [0, 1[$. Posons, pour $\xi \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in [0, 1[$,

$$F(\lambda) = \lambda \left(1 - \alpha \widehat{\mathcal{V}} \left(\frac{\xi}{\lambda} \right) \right).$$

On va montrer que F est croissante sur $[0, 1]$. Dans ce cas, $F(\lambda) \leq F(1)$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$, c'est-à-dire que (H4) est vérifiée pour tout $\alpha \in [0, 1[$. En dérivant F , on obtient

$$F'(\lambda) = \frac{\lambda}{\xi^2} \left(9\alpha\lambda^2 - 6\alpha\xi \coth \left(\frac{\xi}{\lambda} \right) \lambda - 3\alpha\xi^2 \text{csch}^2 \left(\frac{\xi}{\lambda} \right) + \xi^2 \right).$$

Ainsi,

$$F'(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 3\alpha \left(2\lambda \frac{\coth(\frac{\xi}{\lambda})}{\xi} + \operatorname{csch}^2 \left(\frac{\xi}{\lambda} \right) - \frac{3\lambda^2}{\xi^2} \right). \quad (4.10)$$

Il n'est pas difficile de montrer par une étude de fonctions que

$$\operatorname{csch}^2(x) - \frac{1}{x^2} \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\coth(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{3},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Ainsi, en prenant $x = \xi/\lambda$, on obtient

$$3\alpha \left(2\lambda \frac{\coth(\frac{\xi}{\lambda})}{\xi} + \operatorname{csch}^2 \left(\frac{\xi}{\lambda} \right) - \frac{3\lambda^2}{\xi^2} \right) \leq 3\alpha \left(\frac{1}{3} + 0 \right) = \alpha.$$

La condition (4.10) est alors vérifiée pour tout $\alpha \in [0, 1[$ i.e. (H4) est vérifiée pour tout $\alpha \in [0, 1[$.

- (iii) Il est possible de construire d'autres exemples à partir des distributions proposées en (i) et (ii). Par exemple, en utilisant la fonction \mathcal{V} définie précédemment, pour tout $\sigma \in [0, \pi^2/2]$, on définit le potentiel

$$\widehat{\mathcal{W}}_\sigma(\xi) = \frac{2\pi^2}{\pi^2 + 2\sigma} \left(1 - \frac{\widehat{\mathcal{V}}(\xi)}{2} + \frac{\sigma}{\xi^2 + \pi^2} \right).$$

En remarquant que les pôles de $\widehat{\mathcal{W}}_\sigma$ sont les mêmes que la distribution présentée en (ii) et en utilisant les calculs de résidus effectués dans l'exemple précédent et le fait que $\sigma \leq \pi^2/2$, il n'est pas difficile de voir que \mathcal{W}_σ vérifie (H3). De plus, en utilisant la condition $\sigma \in [0, \pi^2/2]$, on peut voir que \mathcal{W}_σ vérifie les conditions (H1) et (H2). Enfin, si $\sigma > 0$, en utilisant (ii) avec $\alpha = 1/2$ et le fait que, pour $\lambda \in [0, 1[$,

$$\lambda \frac{1}{\frac{\xi^2}{\lambda^2} + \pi^2} \leq \frac{1}{\xi^2 + \pi^2},$$

la condition (H4) est vérifiée.

- (iv) Considérons pour $a > 0, b > 0$ et $c > 0$, la distribution

$$\widehat{\mathcal{W}}_{a,b,c}(\xi) = (1 + a\xi^2 + b\xi^4)e^{-c\xi^2},$$

venant du potentiel $\mathcal{W}_{a,b,c}(x) = (A + Bx^2 + bx^4)e^{-\frac{x^2}{4c}}$ où $A = 8ac^3 + 12bc^2 + 16c^4$ et $B = -4c(ac + b)$. Ce type de potentiel a été proposé en dimension 2 dans [64, 6] afin de décrire un fluide quantique comme l'Helium 4 et montrant un spectre d'excitation roton-maxon. L'hypothèse (H1) est clairement vérifiée. L'hypothèse (H2) ne l'est pas car $\widehat{\mathcal{W}}_{a,b,c}$ tend vers 0 en $\pm\infty$. De même, l'hypothèse (H3) n'est pas vérifiée. En effet, $\widehat{\mathcal{W}}_{a,b,c}$ admet une croissance exponentielle sur l'axe des imaginaires purs et la condition (4.7) n'a pas lieu. Montrons que $\widehat{\mathcal{W}}_{a,b,c}$ vérifie (H4) pour un certain choix des coefficients a, b et c . En posant à nouveau $F(\lambda) = \lambda \widehat{\mathcal{W}}_{a,b,c} \left(\frac{\xi}{\lambda} \right)$ et en dérivant, on obtient

$$F'(\lambda) = \frac{(\lambda^6 + (2c - a)x^2\lambda^4 + (2ac - 3b)x^4\lambda^2 + 2bcx^6)e^{-\frac{cx^2}{\lambda^2}}}{\lambda^6}.$$

En particulier, si $2c > a, 2ac > 3b$ et $bc > 0$ alors $F'(\lambda)$ est positive donc F est croissante et (H4) est vérifiée.

Passons maintenant aux exemples en dimension $N \geq 2$.

(v) Considérons la distribution $\widehat{\mathcal{W}}$ définie par le produit

$$\widehat{\mathcal{W}}(\xi) = \prod_{j=1}^N \widehat{\mathcal{W}}_j(\xi_j), \quad (4.11)$$

où $\widehat{\mathcal{W}}_j$ est une distribution d'une variable choisie parmi les exemples (i)-(iii) en dimension 1, en prenant en compte les restrictions sur les coefficients scalaires. Il est clair que $\widehat{\mathcal{W}}$ vérifie (H1). Pour ce qui concerne (H2), la fonction $\widehat{\mathcal{W}}$ est de classe \mathcal{C}_b^3 sur \mathbb{R}^N comme produit de fonctions ayant cette propriété en dimension 1. De plus pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, $\widehat{\mathcal{W}}(\xi)$ est un produit de nombres réels supérieurs ou égaux à 1 et est donc supérieur ou égal à un. Enfin, on a

$$\partial_1^2 \widehat{\mathcal{W}}(0_{\mathbb{R}^N}) = \partial_1^2 \widehat{\mathcal{W}}_1(0_{\mathbb{R}}) \prod_{j=2}^N \widehat{\mathcal{W}}_j(0_{\mathbb{R}}),$$

et ce dernier produit est un produit de 1 dans les exemples choisis. Puisque $\partial_1^2 \widehat{\mathcal{W}}_1(0_{\mathbb{R}}) > -1$, il vient que $\partial_1^2 \widehat{\mathcal{W}}(0_{\mathbb{R}^N}) = \partial_1^2 \widehat{\mathcal{W}}_1(0_{\mathbb{R}}) > -1$. Ceci assure que (H2) est vérifiée. Il en est de même pour l'hypothèse (H4) puisque \mathcal{W}_j vérifie (H4) d'après (i)-(iii). Enfin, en prenant au moins une distribution $\widehat{\mathcal{W}}_j$ vérifiant (H3) parmi les exemples (i) à (iii) lorsque $2 \leq j \leq N$, on obtient que $\widehat{\mathcal{W}}$ vérifie l'hypothèse (H3).

(vi) Pour $\beta > 2\alpha > 0$, considérons

$$\widehat{\mathcal{W}}_{\alpha,\beta}(\xi) = \frac{\beta}{\beta - 2\alpha} \left(1 - \frac{2\alpha\beta}{|\xi|^2 + \beta^2} \right),$$

où $|\xi|^2 = \sum_{j=1}^N \xi_j^2$, qui est une généralisation de l'exemple (i) en dimension N . En effectuant le même raisonnement qu'en dimension 1, la distribution $\widehat{\mathcal{W}}$ vérifie les hypothèses (H1) à (H4) pour le même choix de α et β en (i).

4.1.3 Résultats principaux

Au chapitre 3, nous avons défini le moment en dimension 1 pour les fonctions appartenant à $\mathcal{NE}(\mathbb{R})$, où

$$\mathcal{NE}(\mathbb{R}) = \{v \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) : \inf_{\mathbb{R}} |v| > 0\}.$$

En dimension $N \geq 2$ et lorsque $\mathcal{W} = \delta_0$, les ondes progressives s'annulent à partir d'une certaine vitesse $c_* > 0$ [8, 12] et il faut ainsi se placer dans l'espace d'énergie $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ tout entier lors de notre étude. Avant d'énoncer le résultat principal, définissons le moment que l'on va utiliser en dimension $N \geq 2$. On reprend ici la construction effectuée dans [59, 19] que l'on détaille à nouveau. D'autres définitions du moment sont possibles (voir [8]). Soit l'espace \mathcal{Y} défini par

$$\mathcal{Y} = \{\partial_1 \phi : \phi \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N)\}.$$

Il n'est pas difficile de voir que \mathcal{Y} muni de la norme $\|\partial_1 \phi\|_{\mathcal{Y}} = \|\nabla \phi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ est un espace de Banach. Les deux lemmes suivants permettent de définir le moment et on renvoie aux références indiquées pour leurs preuves.

Lemme 4.1.1 ([59, 19]). *Soit $N \geq 2$. Alors, pour tout $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, on a*

$$\langle i\partial_1 u, u \rangle \in L^1(\mathbb{R}^N) + \mathcal{Y}.$$

Lemme 4.1.2 ([59]). *Soit $N \geq 2$. Pour tout $v \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{Y}$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^N} v(x) dx = 0.$$

Considérons l'application \mathcal{G} définie par

$$\mathcal{G} : L^1(\mathbb{R}^N) + \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R} \\ v + w \mapsto \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} v(x) dx. \quad (4.12)$$

Cette application a bien un sens par le lemme 4.1.2. et le moment en dimension $N \geq 2$ sera donc défini comme suit.

Définition 4.1.3 ([59, 19]). *Soit $N \geq 2$. Pour $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, le moment de u (selon la direction x_1) est défini par*

$$p(u) = \mathcal{G}(\langle i\partial_1 u, u \rangle). \quad (4.13)$$

Si $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ admet un relèvement $u = \rho e^{i\theta}$, alors $\langle i\partial_1 u, u \rangle = -\partial_1 \theta \rho^2 = (1 - \rho^2)\partial_1 \theta + \partial_1 \theta \in L^1(\mathbb{R}^N) + \mathcal{Y}$ et

$$p(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \rho^2) \partial_1 \theta.$$

On retrouve ainsi une expression similaire au moment renormalisé en dimension 1. Pour terminer, on utilisera à plusieurs reprises lors des preuves, les changements d'échelle suivants. Pour tout $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, $\lambda > 0$ et $\gamma > 0$, si

$$u_{\lambda, \gamma}(x) = u\left(\frac{x_1}{\lambda}, \frac{x_\perp}{\gamma}\right) \quad \text{et} \quad u_{\alpha, \beta}(x) = u\left(\frac{x'}{\alpha}, \frac{x_N}{\beta}\right),$$

alors

$$p(u_{\lambda, \gamma}) = \gamma^{N-1} p(u) \quad \text{et} \quad p(u_{\alpha, \beta}) = \alpha^{N-2} \beta p(u). \quad (4.14)$$

Le premier théorème que nous allons démontrer dans ce chapitre est le suivant et généralise les propriétés de la courbe minimisante établies dans le cas local [8, 19].

Théorème 4.1.4. *Supposons que \mathcal{W} vérifie (H1) et (H2). Alors, pour tout $N \geq 1$,*

(i) E_{\min} est paire et lipschitzienne sur \mathbb{R} , avec

$$|E_{\min}(\mathbf{p}) - E_{\min}(\mathbf{q})| \leq \sqrt{2} |\mathbf{p} - \mathbf{q}|, \quad \text{pour tout } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}.$$

De plus, E_{\min} est sous-additive sur \mathbb{R}^+ .

(ii) Si \mathcal{W} vérifie (H4), alors E_{\min} est croissante sur \mathbb{R}^+ .

(iii) Si \mathcal{W} vérifie (H3) ou (H3'), alors E_{\min} est concave sur \mathbb{R}^+ .

Rappelons que lors du chapitre précédent, nous avons défini une constante \mathbf{q}_* par

$$\mathbf{q}_* = \sup\{\mathbf{q} > 0 \mid \forall v \in \mathcal{E}(\mathbb{R}), E(v) \leq E_{\min}(\mathbf{q}) \Rightarrow \inf_{\mathbb{R}} |v| > 0\} \quad (4.15)$$

et le corollaire 3.2.7 nous donnait que $\mathbf{q}_* > 0.027$ sous l'hypothèse où E_{\min} était concave sur \mathbb{R}^+ . Le résultat qui suit nous apporte de nouvelles propriétés pour la courbe minimisante E_{\min} en dimension 1.

Théorème 4.1.5. *Soient $N = 1$ et \mathcal{W} vérifiant les hypothèses (H1) et (H2). Alors,*

(i) Il existe des constantes $\mathbf{q}_1, A_1, A_2, A_3 > 0$ telles que

$$\sqrt{2}\mathbf{q} - A_1\mathbf{q}^{3/2} \leq E_{\min}(\mathbf{q}) \leq \sqrt{2}\mathbf{q} - A_2\mathbf{q}^{5/3} + A_3\mathbf{q}^2, \quad \text{pour tout } \mathbf{q} \in [0, \mathbf{q}_1].$$

(ii) Si E_{\min} est concave sur \mathbb{R}^+ , alors E_{\min} est strictement croissante sur $[0, \mathbf{q}_*]$.

(iii) Supposons que E_{\min} soit concave sur \mathbb{R}^+ . Alors $E_{\min}(\mathbf{q}) < \sqrt{2}\mathbf{q}$, pour tout $\mathbf{q} > 0$, E_{\min} est strictement sous-additive sur \mathbb{R}^+ et les dérivées à droite à gauche de E_{\min} , notées E_{\min}^+ et E_{\min}^- respectivement, vérifient

$$0 \leq E_{\min}^+(\mathbf{q}) \leq E_{\min}^-(\mathbf{q}) < \sqrt{2}. \quad (4.16)$$

De plus, $E_{\min}^+(\mathbf{q}) \rightarrow E_{\min}^+(0) = \sqrt{2}$ lorsque $\mathbf{q} \rightarrow 0^+$.

Nous démontrerons aussi, comme pour (i), la borne supérieure sur E_{\min} en dimension 2 suivante.

Proposition 4.1.6. *Soient $N = 2$ et \mathcal{W} vérifiant les hypothèses (H1)–(H2). Alors, il existe $\mathfrak{q}_1 > 0$ tel que*

$$E_{\min}(\mathfrak{q}) \leq \sqrt{2}\mathfrak{q} - K_1\mathfrak{q}^3 + K_2\mathfrak{q}^4, \quad \text{pour tout } \mathfrak{q} \in [0, \mathfrak{q}_1]. \quad (4.17)$$

Le théorème 4.1.5 combiné aux théorèmes d'existence et de stabilité du chapitre 3 nous donnera le théorème suivant. Rappelons certaines notations du chapitre précédent. L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}$ est défini par

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{q}} = \{v \in \mathcal{NE}(\mathbb{R}) : E_{\min}(\mathfrak{q}) = E(v) \text{ et } p(v) = \mathfrak{q}\}.$$

Enfin, pour la stabilité, nous avons utilisé, pour $v_1, v_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, la pseudométrie

$$d(v_1, v_2) = \|v'_1 - v'_2\|_{L^2(\mathbb{R})} + \||v_1| - |v_2|\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

et la distance

$$d_A(v_1, v_2) = \|v'_1 - v'_2\|_{L^2(\mathbb{R})} + \||v_1| - |v_2|\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|v_1 - v_2\|_{L^\infty([-A, A])}.$$

Théorème 4.1.7. *Soit $N = 1$. Supposons que \mathcal{W} vérifie les hypothèses (H1) à (H3). Alors pour tout $\mathfrak{q} \in]0, \mathfrak{q}_*]$, l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}$ est non vide. De plus, pour tout $u \in \mathcal{S}_{\mathfrak{q}}$, u est solution de (OPNc) pour une certaine vitesse $c_{\mathfrak{q}} \in]0, \sqrt{2}[$ satisfaisant*

$$E_{\min}^+(\mathfrak{q}) \leq c_{\mathfrak{q}} \leq E_{\min}^-(\mathfrak{q}). \quad (4.18)$$

De plus, $c_{\mathfrak{q}} \rightarrow \sqrt{2}$ lorsque $\mathfrak{q} \rightarrow 0^+$. Enfin, $\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}$ est orbitalement stable pour $(\mathcal{E}(\mathbb{R}), d)$ et pour $(\mathcal{E}(\mathbb{R}), d_A)$, pour tout $\mathfrak{q} \in]0, \mathfrak{q}_]$.*

L'existence des ondes progressives en dimension $N \geq 2$ ne sera pas montrée dans cette thèse. Cependant, comme expliqué dans l'introduction, l'étude de la courbe minimisante constitue la première étape pour montrer l'existence de solutions non triviales de (OPNc). Notons que les résultats de la section 3.4 sont facilement généralisables en dimension $N \geq 1$ dans le cas non local et on a le résultat suivant.

Théorème 4.1.8. *Soient $N \geq 1$ et \mathcal{W} une distribution vérifiant les hypothèses (H1)–(H2). Supposons que la courbe E_{\min} soit concave sur \mathbb{R}^+ . Si $\mathcal{S}_{\mathfrak{q}}$ est non vide pour un $\mathfrak{q} > 0$, alors tout $u \in \mathcal{S}_{\mathfrak{q}}$ est solution de (OPNc) avec pour vitesse $c = c_{\mathfrak{q}}$ satisfaisant*

$$E_{\min}^+(\mathfrak{q}) \leq c_{\mathfrak{q}} \leq E_{\min}^-(\mathfrak{q}). \quad (4.19)$$

Pour la démonstration de ce théorème dans le cas local en dimension $N \geq 2$ et le calcul de la différentielle du moment (4.13), on revoie à [19].

L'organisation de ce chapitre est la suivante. Dans un premier temps, en section 4.2.1, nous montrerons quelques résultats préliminaires, qui nous serviront par la suite. Dans la section 4.2.2, on montre la continuité, la croissance et la sous-additivité de la courbe en dimension N . La section 4.2.3 est consacrée à la concavité de E_{\min} . Enfin, dans la section 4.2.4, on démontre les bornes sur E_{\min} en dimension 1 et 2. Pour terminer, la section 4.3 est destinée à démontrer les théorèmes 4.1.4, 4.1.5 et 4.1.7.

4.2 Propriétés de la courbe E_{\min}

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de la section 4.2, on suppose que \mathcal{W} vérifie les hypothèses (H1) et (H2).

4.2.1 Résultats préliminaires

Pour l'étude de la courbe minimisante, il sera intéressant d'utiliser des fonctions d'énergie finie constantes hors d'une boule. Introduisons l'espace

$$\mathcal{E}_0(\mathbb{R}^N) = \{v \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N) : \exists R > 0 \text{ t.q. } v \text{ est constante sur } B(0, R)^c\}.$$

Notons que, en dimension 1, les fonctions appartenant à $\mathcal{E}_0(\mathbb{R})$ peuvent avoir des limites différentes en $\pm\infty$. Le prochain résultat montre que la courbe E_{\min} est bien définie et se situe en dessous de la droite $y = \sqrt{2}x$ sur \mathbb{R}^+ (respectivement en dessous de la droite $y = -\sqrt{2}x$ sur \mathbb{R}^-).

Lemme 4.2.1. *Pour tout $\mathbf{q} \in \mathbb{R}$, il existe une suite de fonctions $(\psi_n)_n$ appartenant à $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, avec $1 - |\psi_n| \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, telle que*

$$p(\psi_n) = \mathbf{q}, \quad \|1 - |\psi_n|\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \rightarrow 2\sqrt{2}|\mathbf{q}| \quad \text{et} \quad E(\psi_n) \rightarrow \sqrt{2}|\mathbf{q}|, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (4.20)$$

En particulier, E_{\min} est bien définie et pour tout $\mathbf{q} \in \mathbb{R}$,

$$E_{\min}(\mathbf{q}) \leq \sqrt{2}|\mathbf{q}|. \quad (4.21)$$

Preuve. Ce résultat a déjà été démontré en dimension 1 au chapitre précédent au lemme 3.2.4. On suppose donc que $N \geq 2$. Si $\mathbf{q} = 0$, il suffit de prendre $\psi_n \equiv 1$. Soient $\mathbf{q} > 0$, $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ et $(\gamma_n)_n$ telles que

$$\alpha_n \rightarrow +\infty, \quad \beta_n \rightarrow +\infty, \quad \gamma_n \rightarrow 0, \quad \frac{\alpha_n}{\beta_n} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{\gamma_n^2 \beta_n^{N-1}}{\alpha_n} \rightarrow 1, \quad (4.22)$$

quand $n \rightarrow +\infty$. Posons

$$\rho_n(x) = 1 + \frac{\gamma_n}{\sqrt{2}\alpha_n} \partial_1 \chi \left(\frac{x_1}{\alpha_n}, \frac{x_\perp}{\beta_n} \right), \quad \theta_n(x) = -\gamma_n \chi \left(\frac{x_1}{\alpha_n}, \frac{x_\perp}{\beta_n} \right) \quad \text{et} \quad \psi_n(x) = \rho_n(x) \exp(i\theta_n(x)).$$

Calculons le moment de ψ_n . En développant l'expression de ψ_n et par changement de variables, on obtient

$$\begin{aligned} p(\psi_n) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \rho_n^2(x)) \partial_1 \theta_n(x) dx = \frac{\alpha_n \beta_n^{N-1}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\sqrt{2}\gamma_n}{\alpha_n} \partial_1 \chi + \frac{\gamma_n^2}{2\alpha_n^2} \partial_1 \chi^2 \right) \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \partial_1 \chi \\ &= \frac{\gamma_n^2 \beta_n^{N-1}}{\sqrt{2}\alpha_n} \int_{\mathbb{R}^N} (\partial_1 \chi)^2 + \frac{\gamma_n^3 \beta_n^{N-1}}{4\alpha_n^2} \int_{\mathbb{R}^N} (\partial_1 \chi)^3, \end{aligned}$$

d'où

$$p(\psi_n) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}^N} (\partial_1 \chi)^2.$$

Fixons maintenant χ et les suites $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ et $(\gamma_n)_n$ telles que $p(\psi_n) = \mathbf{q}$. Soit χ telle que $\int_{\mathbb{R}^N} \partial_1 \chi^2 = \sqrt{2}\mathbf{q}$. En posant $B = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (\partial_1 \chi)^3$ et en prenant

$$\beta_n = n^{3/N-1}, \quad \gamma_n = \frac{1}{n^{\frac{6(N-1)-3}{4(N-1)}}} \quad \text{et} \quad \alpha_n = \frac{1}{2\mathbf{q}} \left(\gamma_n^2 \beta_n^{N-1} \mathbf{q} + \sqrt{\gamma_n^4 \beta_n^{2(N-1)} \mathbf{q}^2 + 4\mathbf{q}B\gamma_n^3 \beta_n^{N-1}} \right),$$

les relations (4.22) sont vérifiées et on a $p(\psi_n) = \mathbf{q}$. Calculons maintenant l'énergie de ψ_n . Pour la partie cinétique, on a

$$E_{\text{kin}}(\psi_n) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi_n|^2 = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_j \rho_n|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n \partial_j \theta_n|^2.$$

Ainsi, si $j = 1$, en utilisant le fait que $\gamma_n^2 \beta_n^{N-1} / \alpha_n \rightarrow 1$ et $\gamma_n / \alpha_n \rightarrow 0$, on obtient

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_1 \rho_n|^2 = \frac{\gamma_n^2 \beta_n^{N-1}}{4\alpha_n^3} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_1^2 \chi|^2 \rightarrow 0$$

et

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n \partial_1 \theta_n|^2 = \frac{\gamma_n^2 \beta_n^{N-1}}{2\alpha_n^2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + \frac{\gamma_n}{\sqrt{2}\alpha_n} \partial_1 \chi\right)^2 (\partial_1 \chi)^2 \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\partial_1 \chi)^2$$

De même, si $j \neq 1$, on obtient

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_j \rho_n|^2 = \frac{\gamma_n^2 \beta_n^{N-3}}{4\alpha_n} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_j \partial_1 \chi|^2 \rightarrow 0$$

et

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n \partial_j \theta_n|^2 = \frac{\gamma_n^2 \alpha_n \beta_n^{N-3}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + \frac{\gamma_n}{\sqrt{2}\alpha_n} \partial_1 \chi\right)^2 (\partial_j \chi)^2 \rightarrow 0,$$

comme $\gamma_n^2 \alpha_n \beta_n^{N-3} = \left(\frac{\gamma_n^2 \beta_n^{N-1}}{\alpha_n}\right) \frac{\alpha_n^2}{\beta_n^2} \rightarrow 0$. Finalement,

$$E_{\text{kin}}(\psi_n) \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\partial_1 \chi)^2 = \frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{2}}. \quad (4.23)$$

Pour la partie potentielle, par le théorème de Plancherel, on a

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(\psi_n) &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{W} * (1 - \rho_n^2)(x) (1 - \rho_n^2)(x) dx \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\mathcal{W}}(\xi) |\mathcal{F}(1 - \rho_n^2)|^2(\xi) d\xi \\ &= \frac{(\alpha_n \beta_n^{N-1})^2}{4(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\mathcal{W}}(\xi_1, \xi') \left| \mathcal{F} \left(\frac{\sqrt{2}\gamma_n}{\alpha_n} \partial_1 \chi + \frac{\gamma_n^2}{2\alpha_n^2} \partial_1 \chi^2 \right) \right|^2 (\alpha_n \xi_1, \beta_n \xi') d\xi \\ &= \frac{\beta_n^{N-1} \gamma_n^2}{4(2\pi)^N \alpha_n} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\mathcal{W}} \left(\frac{\xi_1}{\alpha_n}, \frac{\xi'}{\beta_n} \right) \left| \mathcal{F} \left(\sqrt{2} \partial_1 \chi + \frac{\gamma_n}{2\alpha_n} \partial_1 \chi^2 \right) \right|^2 (\xi_1, \xi') d\xi. \end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée, on arrive à

$$E_{\text{pot}}(\psi_n) \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\partial_1 \chi)^2 = \frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{2}}. \quad (4.24)$$

Le calcul précédent avec $\mathcal{W} = \delta_0$ nous donne aussi

$$\|1 - |\psi_n|^2\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \rightarrow 2\sqrt{2}\mathfrak{q}.$$

En combinant (4.23) et (4.24), on obtient

$$E(\psi_n) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} (\partial_1 \chi)^2 = \sqrt{2}\mathfrak{q},$$

ce qui nous donne le résultat voulu par définition de E_{\min} . Si $\mathfrak{q} < 0$, en prenant

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}^N} (\partial_1 \chi)^2 = |\mathfrak{q}| \quad \text{et} \quad \psi_n = \rho_n \exp(-i\theta_n),$$

les calculs précédents nous donnent à nouveau (4.20). □

Lemme 4.2.2. *Pour tout $N \geq 1$, la courbe E_{\min} est paire sur \mathbb{R} .*

Preuve. Le cas $N = 1$ a déjà été traité au chapitre précédent au lemme 3.2.6. Soit $\mathbf{q} \in \mathbb{R}$, $N \geq 2$ et on suppose dans un premier temps que N est pair. Par définition de E_{\min} , il existe $u_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ telle que $E(u_n) \rightarrow E_{\min}(\mathbf{q})$ et $p(u_n) = \mathbf{q}$. Posons

$$v_n(x) = u_n(-x)$$

D'après la relation (4.14) sur le moment, on obtient $p(v_n) = (-1)^{N-1}p(u_n) = -\mathbf{q}$. De même, par changement de variables, il est clair que $E_{\text{kin}}(v_n) = (-1)^N E_{\text{kin}}(u_n) = E_{\text{kin}}(u_n)$. Dans le cas de l'énergie potentielle, par le théorème de Plancherel et la parité de $\widehat{\mathcal{W}}$ par rapport à chacune de ses variables, on a

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(v_n) &= \frac{1}{4(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\mathcal{W}}(\xi) |\mathcal{F}(1 - |v_n|^2)|^2(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\mathcal{W}}(\xi) |\mathcal{F}(1 - |u_n|^2)|^2(-\xi) d\xi \\ &= \frac{(-1)^N}{4(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\mathcal{W}}(\xi) |\mathcal{F}(1 - |u_n|^2)|^2(\xi) d\xi \\ &= E_{\text{pot}}(u_n). \end{aligned}$$

Finalement, $E(v_n) \geq E_{\min}(-\mathbf{q})$ et par passage à la limite, on obtient $E_{\min}(\mathbf{q}) \geq E_{\min}(-\mathbf{q})$. L'inégalité dans l'autre sens s'obtient en remplaçant \mathbf{q} par $-\mathbf{q}$, d'où $E_{\min}(\mathbf{q}) = E_{\min}(-\mathbf{q})$, i.e. E_{\min} est paire si N est pair. Si N est impair, en posant cette fois

$$v_n(x', x_N) = u_n(-x', x_N),$$

un raisonnement similaire au cas précédent nous amène à la même conclusion. \square

Au vu du lemme 4.2.2, il suffit d'étudier E_{\min} sur \mathbb{R}^+ . Concernant la densité de $\mathcal{E}_0(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{NE}(\mathbb{R})$, on a le résultat suivant.

Lemme 4.2.3. *Soit $v = \rho e^{i\theta} \in \mathcal{NE}(\mathbb{R})$. Alors, il existe une suite de fonctions $v_n = \rho_n e^{i\theta_n} \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R})$, avec $\rho_n \rightarrow \rho$, $\theta'_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, telle que*

$$\|\rho_n - \rho\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|\theta'_n - \theta'\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (4.25)$$

En particulier,

$$E(v_n) \rightarrow E(v) \quad \text{et} \quad p(v_n) \rightarrow p(v), \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (4.26)$$

Preuve. Comme $v = \rho e^{i\theta} \in \mathcal{NE}(\mathbb{R})$, $|v(x)| \rightarrow 1$ lorsque $|x| \rightarrow +\infty$ et $v \in L^\infty(\mathbb{R})$. Posons

$$g(x) := \rho(x) - 1 = |v(x)| - 1 = \frac{|v(x)|^2 - 1}{|v(x)| + 1}.$$

Il est clair que $g \in L^2(\mathbb{R})$ puisque $|g(x)| \leq \rho^2 - 1$. De plus, $g' = \langle v', v \rangle / |v|$ donc $|g'| \leq |v'|$ et on conclut que $g \in H^1(\mathbb{R})$. Ainsi, il existe $g_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $g_n \rightarrow g$ dans $H^1(\mathbb{R})$. En posant $\rho_n = g_n + 1$, on en déduit que $\|\rho_n - \rho\|_{H^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Pour θ , par densité de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, il existe une suite $\phi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ convergeant vers θ' dans $L^2(\mathbb{R})$. En posant

$$\theta_n(x) = \int_{-\infty}^x \phi_n, \quad (4.27)$$

on obtient $\theta'_n - \theta' \rightarrow 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et $v_n := \rho_n e^{i\theta_n}$ appartient à $\mathcal{E}_0(\mathbb{R})$. Les convergences (4.26) sont une conséquence directe de (4.25) et de l'injection de Sobolev $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$. \square

Remarque 4.2.4. Si $v \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R})$, par le lemme précédent, on peut écrire $v = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho, \theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\rho - 1, \theta' \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Ainsi, la fonction θ est constante hors de $\text{supp}(\theta')$ et sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe $R > 0$ tel que $\theta(x) \equiv 0$ pour tout $x \leq -R$ ou $\theta(x) \equiv 0$ pour tout $x \geq R$ (mais on ne peut pas supposer que $\theta(x) \equiv 0$ pour $|x| \geq R$). Ainsi, sans perte de généralité, on peut supposer que $v(x) \equiv 1$ pour $x \leq -R$ ou $v(x) \equiv 1$ pour $x \geq R$, pour $R > 0$ assez grand.

Passons au cas où $N \geq 2$. Le corollaire 3.4 de [19] nous donne le lemme d'approximation suivant.

Lemme 4.2.5. Soit $N \geq 2$ et $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$. Alors il existe $u_n \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R}^N)$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ telle que

- (i) $u_n = u$ sur $B(0, 2^n)$, $u_n = e^{i\theta_0}$ sur $B(0, 2^{n+1})$,
- (ii) $\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0$,
- (iii) $\int_{\mathbb{R}^N} |(1 - |u_n|^2)^2 - (1 - |u|^2)^2| \rightarrow 0$,
- (iv) $p(u_n) \rightarrow p(u)$.

L'hypothèse (H1) et le lemme précédent nous donnent immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 4.2.6. Soit $N \geq 2$ et $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$. Alors il existe $u_n \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$E(u_n) \rightarrow E(u), \quad \|1 - |u_n|^2\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \rightarrow \|1 - |u|^2\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \quad \text{et} \quad p(u_n) \rightarrow p(u), \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

De plus, u_n est constante et égale à $e^{i\theta_0}$ sur $B(0, 2^{n+1})^c$, pour $\theta_0 \in \mathbb{R}$. En particulier, on peut supposer que $u_n \equiv 1$ sur $B(0, 2^{n+1})^c$.

Afin de traiter la non-localité dans l'énergie potentiel lors de la construction de suites de comparaisons, introduisons la fonctionnelle

$$B(f) := \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * f) f,$$

pour $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Il est clair que si $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, alors $B(1 - |u|^2) = 4E_p(u)$. Le lemme suivant sera utilisé à plusieurs reprises.

Lemme 4.2.7. Pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on a

$$B(f + g) = B(f) + B(g) + 2 \int_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{W} * f) g. \quad (4.28)$$

De plus, si $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et si il existe une suite (y_n) telle que $y_n \rightarrow +\infty$, alors

$$B(f + g_n) - B(f) - B(g_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad (4.29)$$

où $g_n(x) = g(x - y_n)$.

Preuve. L'identité (4.28) est une conséquence de la parité de \mathcal{W} par l'hypothèse (H1). Ainsi, en utilisant (4.28), on obtient

$$B(f + g_n) - B(f) - B(g_n) = 2 \int_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{W} * f) g_n.$$

Comme $g_n \rightarrow 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et $\mathcal{W} * f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on obtient (4.29). \square

Corollaire 4.2.8. Soit $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, avec $u = \rho e^{i\theta} \in \mathcal{N}\mathcal{E}(\mathbb{R})$ si $N = 1$. Alors il existe $u_n \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$p(u_n) = p(u) \quad \text{et} \quad E(u_n) \rightarrow E(u), \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (4.30)$$

Preuve. Par le lemme 4.2.3 et le corollaire 4.2.6, il existe $v_n \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$E(v_n) \rightarrow E(u) \quad \text{et} \quad p(v_n) \rightarrow p(u), \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (4.31)$$

Supposons dans un premier temps que $p(u) \neq 0$. Si $N = 1$, posons $\alpha_n = p(u)/p(v_n)$ et $u_n = \rho_n e^{i\alpha_n \theta_n}$. Alors

$$\begin{aligned} p(u_n) &= \frac{\alpha_n}{2} \int_{\mathbb{R}} (1 - \rho_n^2) \theta'_n = p(u), \\ E_{\text{kin}}(u_n) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\rho'_n|^2 + \frac{\alpha_n}{2} \int_{\mathbb{R}} |\rho_n \theta'_n|^2 \end{aligned}$$

et

$$E_{\text{pot}}(u_n) = E_{\text{pot}}(v_n).$$

Comme $\alpha_n \rightarrow 1$, les expressions précédentes nous donne que u_n vérifie (4.30). Si maintenant $N \geq 2$, soit $v_n \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R}^N)$ donnée par le corollaire 4.2.6. Posons $\alpha_n = p(v_n)/p(u)$ et $u_n(x) = v_n(x', \alpha_n x_N)$. Dans ce cas, d'après (4.14), le moment est égal à $p(u_n) = \alpha_n^{-1} p(v_n) = p(u)$. Pour l'énergie, on a

$$E_{\text{kin}}(u_n) = \frac{1}{2\alpha_n} \sum_{j=1}^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_j v_n|^2 + \frac{\alpha_n}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_N v_n|^2$$

et par le théorème de Plancherel

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(u_n) &= \frac{1}{4(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\mathcal{W}}(\xi) |\mathcal{F}(1 - |u_n|^2)|^2(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^N \alpha_n^2} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\mathcal{W}}(\xi) |\mathcal{F}(1 - |v_n|^2)|^2(\xi', \xi_N/\alpha_n) d\xi \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^N \alpha_n} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\mathcal{W}}(\xi', \alpha_n \xi_N) |\mathcal{F}(1 - |v_n|^2)|^2(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Il est clair que $E_{\text{kin}}(u_n) \rightarrow E_{\text{kin}}(u)$ et par l'hypothèse (H1) et le théorème de convergence dominée $E_{\text{pot}}(u_n) \rightarrow E_{\text{pot}}(u)$, ce qui nous donne au final (4.30).

Traitons maintenant le cas $p(u) = 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\delta_n := p(v_n) \neq 0$ pour n assez grand. Sinon, à une sous-suite près, on obtient la conclusion avec $u_n = v_n$. Par le lemme 4.2.1, il existe $w_n \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$p(w_n) = -\delta_n \quad \text{et} \quad E(w_n) \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (4.32)$$

Soient $R_n, r_n > 0$ tels que les fonctions

$$f_n := 1 - |v_n|^2 \quad \text{et} \quad g_n := 1 - |w_n|^2$$

soient à support dans $B(0, R_n)$ et $B(0, r_n)$, respectivement. Si $N = 1$, posons

$$u_n = \begin{cases} v_n, & \text{sur }]-\infty, R_n], \\ 1, & \text{sur } [R_n, -r_n + y_n], \\ w_n(\cdot - y_n), & \text{sur } [-r_n + y_n, +\infty[, \end{cases} \quad (4.33)$$

où y_n est une suite de points telle que $R_n < -r_n + y_n$. En tenant compte de la remarque 4.2.4, on peut supposer sans perte de généralité que u_n est continue et appartient à $\mathcal{E}_0(\mathbb{R}^N)$. Si $N \geq 2$, on pose

$$u_n = \begin{cases} v_n, & \text{sur } B(0, R_\delta), \\ w_n(\cdot - y_n e), & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.34)$$

où $e \in \mathbb{R}^N$ est un vecteur de norme 1 et y_n est une suite de points telle que $R_n < -r_n + y_n$ à nouveau et on peut supposer que u_n est continue et appartient à $\mathcal{E}_0(\mathbb{R}^N)$. Afin de simplifier les notations, posons $\tilde{w}_n = w_n(\cdot - y_n)$ et $\tilde{g}_n := 1 - |\tilde{w}_n|^2$. On obtient, par définition de u_n ,

$$p(u_n) = p(v_n) + p(w_n) = 0 \quad \text{et} \quad E_{\text{kin}}(u_n) = E_{\text{kin}}(v_n) + E_{\text{kin}}(w_n). \quad (4.35)$$

En particulier, en combinant (4.31) et (4.32), on en déduit que $E_{\text{kin}}(u_n) \rightarrow E_{\text{kin}}(u)$. Comme $1 - |u_n|^2 = f_n + \tilde{g}_n$, l'égalité (4.28) nous donne

$$E_{\text{pot}}(u_n) = \frac{1}{4}B(f_n) + \frac{1}{4}B(g_n) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * f_n) \tilde{g}_n = E_{\text{pot}}(v_n) + E_{\text{pot}}(w_n) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * f_n) \tilde{g}_n.$$

Ainsi,

$$|E_{\text{pot}}(u_n) - E_{\text{pot}}(v_n)| \leq E_{\text{pot}}(w_n) + \|\mathcal{W}\|_{\mathcal{M}_2} \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|g_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \quad (4.36)$$

Par (3.15) si $N = 1$ ou le corollaire 4.2.6 si $N \geq 2$, $\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ est bornée. De même, $\|g_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0$ et $E_{\text{pot}}(w_n) \rightarrow 0$ par (4.20), ce qui nous donne $E_{\text{pot}}(u_n) \rightarrow E_{\text{pot}}(u)$ et conclut la preuve. \square

Corollaire 4.2.9. *Pour tout $N \geq 1$, $\mathfrak{q} \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe $v \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R}^N)$ telle que*

$$p(v) = \mathfrak{q} \quad \text{et} \quad E(v) < E_{\min}(\mathfrak{q}) + \varepsilon.$$

Preuve. Soient $\mathfrak{q} \geq 0$ et $\varepsilon > 0$. Par définition de E_{\min} , il existe $v_m \in \mathcal{NE}(\mathbb{R})$ si $N = 1$ ou $v_m \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ si $N \geq 2$ telle que $p(v_m) = \mathfrak{q}$ et $E(v_m) \rightarrow E_{\min}(\mathfrak{q})$ lorsque $m \rightarrow \infty$. En particulier, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$E(v_{m_0}) < E_{\min}(\mathfrak{q}) + \varepsilon/2. \quad (4.37)$$

Par le corollaire 4.2.8, il existe $v \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R}^N)$ telle que $p(v) = p(v_{m_0}) = \mathfrak{q}$ et $|E(v_{m_0}) - E(v)| \leq \varepsilon/2$. En combinant cette inégalité avec (4.37), on arrive à la conclusion voulue. \square

4.2.2 Continuité, croissance et sous-additivité de E_{\min}

Proposition 4.2.10. *La courbe E_{\min} est continue sur \mathbb{R} et*

$$|E_{\min}(\mathfrak{p}) - E_{\min}(\mathfrak{q})| \leq \sqrt{2}|\mathfrak{p} - \mathfrak{q}|, \quad \text{pour tout } \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathbb{R}. \quad (4.38)$$

Preuve. Soient $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathbb{R}$. Sans perte de généralité, on suppose que $\mathfrak{q} \geq \mathfrak{p} \geq 0$. Il suffit alors de montrer que

$$E_{\min}(\mathfrak{q}) \leq E_{\min}(\mathfrak{p}) + \sqrt{2}(\mathfrak{q} - \mathfrak{p}). \quad (4.39)$$

Soit $\delta > 0$ et $N = 1$. Par le corollaire 4.2.9, il existe $v_\delta \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R}^N)$ telle que, pour $R_\delta > 0$, la fonction $1 - |v_\delta|^2$ est à support dans $[-R_\delta, R_\delta]$, $v_\delta = 1$ sur $[R_\delta, +\infty[$,

$$p(v_\delta) = \mathfrak{p} \quad \text{et} \quad E(v_\delta) \leq E_{\min}(\mathfrak{p}) + \delta/3. \quad (4.40)$$

De même, si $N \geq 2$, par le corollaire 4.2.9, il existe $v_\delta \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R}^N)$ tel que, pour un certain $R_\delta > 0$, la fonction $1 - |v_\delta|^2$ est à support dans $B(0, R_\delta)$, $v_\delta = 1$ sinon et (4.40) est vérifiée.

Posons $\mathfrak{s} = \mathfrak{q} - \mathfrak{p}$. Pour tout $N \geq 1$ et par le lemme 4.2.1, il existe $w_\delta \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R}^N)$ tel que, pour $r_\delta > 0$, $1 - |w_\delta|^2$ est à support dans $B(0, r_\delta)$ et

$$p(w_\delta) = \mathfrak{s} \quad \text{et} \quad E(w_\delta) \leq \sqrt{2}\mathfrak{s} + \delta/3. \quad (4.41)$$

Finalement, on pose pour $N = 1$,

$$u_\delta = \begin{cases} v_\delta, & \text{sur }]-\infty, R_\delta], \\ 1, & \text{sur } [R_\delta, -r_\delta + y_\delta], \\ w_\delta(\cdot - y_\delta), & \text{sur } [-r_\delta + y_\delta, +\infty[, \end{cases} \quad (4.42)$$

où y_δ est choisi assez grand de sorte que $1 - |v_\delta(\cdot)|^2$ et $1 - |w_\delta(\cdot - y_\delta)|^2$ soient à supports disjoints. Pour $N \geq 2$, on pose

$$u_\delta = \begin{cases} v_\delta, & \text{sur } B(0, R_\delta), \\ w_\delta(\cdot - y_\delta e), & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.43)$$

où $e \in \mathbb{R}^N$ est un vecteur de norme 1 et y_δ est choisi assez grand de sorte que $1 - |v_\delta(\cdot)|^2$ et $1 - |w_\delta(\cdot - y_\delta e)|^2$ soient à supports disjoints. Alors, pour tout $N \geq 1$,

$$p(u_\delta) = p(v_\delta) + p(w_\delta(\cdot - y_\delta)) = \mathbf{q} \quad \text{et} \quad E_{\text{kin}}(u_\delta) = E_{\text{kin}}(v_\delta) + E_{\text{kin}}(w_\delta). \quad (4.44)$$

De plus, en notant $f_\delta = 1 - |v_\delta|^2$ et $g_\delta = 1 - |w_\delta|^2$, on obtient

$$1 - |u_\delta|^2 = f_\delta + g_\delta(\cdot - y_\delta) \quad (\text{respectivement} \quad 1 - |u_\delta|^2 = f_\delta + g_\delta(\cdot - y_\delta e))$$

et par application du lemme 4.2.7, on arrive à

$$E_{\text{pot}}(u_\delta) \leq E_{\text{pot}}(v_\delta) + E_{\text{pot}}(w_\delta) + \delta/3, \quad (4.45)$$

quitte à augmenter y_δ si nécessaire. Ainsi, les inégalités (4.40), (4.41), (4.44) et (4.45) nous donnent

$$E_{\text{min}}(\mathbf{q}) \leq E(u_\delta) \leq E_{\text{min}}(\mathbf{p}) + \sqrt{2}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + \delta.$$

En faisant tendre δ vers 0 dans la relation précédente, on obtient (4.39). □

Lemme 4.2.11. *E_{min} est sous-additive sur \mathbb{R}^+ , c'est-à-dire*

$$E_{\text{min}}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \leq E_{\text{min}}(\mathbf{p}) + E_{\text{min}}(\mathbf{q}), \quad \text{pour tout } \mathbf{p}, \mathbf{q} \geq 0. \quad (4.46)$$

Preuve. Soit $\delta > 0$. Si $N = 1$, par le corollaire 4.2.9, il existe $v, w \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R}^N)$ telles que

$$p(v) = \mathbf{p}, \quad p(w) = \mathbf{q}, \quad E(v) \leq E_{\text{min}}(\mathbf{p}) + \frac{\delta}{3} \quad \text{et} \quad E(w) \leq E_{\text{min}}(\mathbf{q}) + \frac{\delta}{3}, \quad (4.47)$$

avec v constante sur $] - \infty, -R]$ et sur $[R, +\infty[$, et w constante sur $] - \infty, -r]$ et sur $[r, +\infty[$, pour $R, r > 0$. Si $N \geq 2$, par le corollaire 4.2.9, il existe $v, w \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R}^N)$, avec v et w constantes et égales à 1 sur $B(0, R)^c$ et $B(0, r)^c$, respectivement, pour $R, r > 0$ telles que la relation (4.47) soit vérifiée. Posons, pour $N = 1$, la fonction u définie par

$$u = \begin{cases} v, & \text{sur }] - \infty, R], \\ 1, & \text{sur } [R, -r + y], \\ w(\cdot - y), & \text{sur } [-r + y, +\infty[, \end{cases}$$

et pour $N \geq 2$

$$u = \begin{cases} v, & \text{sur } B(0, R), \\ w(\cdot - ye), & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $e \in \mathbb{R}^N$ un vecteur de norme 1 et y est pris assez grand de sorte que $1 - |v|^2$ et $1 - |w(\cdot - y)|^2$ soient à supports disjoints pour $N = 1$ (respectivement $1 - |v|^2$ et $1 - |w(\cdot - ye)|^2$ pour $N \geq 2$). Par le lemme 4.2.7, quitte à augmenter y , on a

$$E_{\text{pot}}(u) \leq E_{\text{pot}}(v) + E_{\text{pot}}(w) + \delta/3.$$

Comme $E_{\text{kin}}(u) = E_{\text{kin}}(v) + E_{\text{kin}}(w)$ et $p(u) = p(v) + p(w) = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, on conclut que

$$E_{\text{min}}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \leq E(u) \leq E(v) + E(w) + \frac{\delta}{3} \leq E_{\text{min}}(\mathbf{p}) + E_{\text{min}}(\mathbf{q}) + \delta.$$

En faisant tendre $\delta \rightarrow 0$, on obtient (4.46). □

Lemme 4.2.12. *Supposons que \mathcal{W} vérifie (H4) pour $N \geq 2$. Alors E_{\min} est croissante sur \mathbb{R}^+ .*

Preuve. Commençons par le cas $N = 1$. Soient $0 < \mathfrak{p} < \mathfrak{q}$ et $\lambda = \mathfrak{p}/\mathfrak{q} \in]0, 1[$. Comme dans les preuves précédentes, soient $\delta > 0$ et $v = \rho e^{i\theta} \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R})$ tels que $E(v) < E_{\min}(\mathfrak{q}) + \delta$ et $p(v) = \mathfrak{q}$ par le corollaire 4.2.9. La fonction $v_\lambda = \rho e^{i\lambda\theta}$ vérifie $p(v_\lambda) = \lambda\mathfrak{q}$ et $E(v_\lambda) \leq E(v)$ puisque

$$p(v_\lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}} (1 - \rho^2) \theta' \quad \text{et} \quad E(v_\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathbb{R}} (\rho \theta')^2 + \int_{\mathbb{R}} \rho'^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W} * (1 - \rho^2))(1 - \rho^2).$$

Ainsi,

$$E_{\min}(\lambda\mathfrak{q}) \leq E(v_\lambda) \leq E(v) < E_{\min}(\mathfrak{q}) + \delta$$

et la conclusion s'obtient en faisant tendre δ vers 0.

Passons au cas $N \geq 2$. Soient maintenant $0 < \mathfrak{p} < \mathfrak{q}$ et $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$p(u) = \mathfrak{q} \quad \text{et} \quad E(u) \leq E_{\min}(\mathfrak{q}) + \delta,$$

par le corollaire 4.2.9. Posons

$$\lambda = \left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}}\right)^{1/N-1} \quad \text{et} \quad u_\lambda(x) = u\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

D'après (4.14), on a $p(u_\lambda) = \lambda^{N-1}p(u) = \mathfrak{p}$ et pour l'énergie, on a

$$E(u_\lambda) = \lambda^{N-2}E_{\text{kin}}(u) + \frac{\lambda^N}{4(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\mathcal{W}}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) |\mathcal{F}(1 - |u|^2)|^2(\xi) d\xi$$

par changement de variable et la formule de Plancherel. Ainsi, en utilisant l'hypothèse (H4) et à nouveau le théorème de Plancherel, on obtient

$$E_{\min}(\mathfrak{p}) \leq E(u_\lambda) \leq \lambda^{N-2}E_{\text{kin}}(u) + E_{\text{pot}}(u) \leq E_{\min}(\mathfrak{q}) + \delta. \quad (4.48)$$

En faisant tendre δ vers 0, on obtient la conclusion voulue. \square

4.2.3 Concavité de E_{\min}

Afin de simplifier les notations, on considère dans cette section les hypothèses (H3) et (H3') par rapport à la dernière variable, c'est-à-dire, lorsque $l = N$. Les preuves de la proposition 4.2.13 et du lemme 4.2.14 sont basés sur un argument de réflexion et les travaux de Lopes et Mariş dans [57].

Proposition 4.2.13. *Supposons que l'hypothèse (H3') soit vérifiée. Alors, pour tout $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \geq 0$,*

$$\frac{E_{\min}(\mathfrak{p}) + E_{\min}(\mathfrak{q})}{2} \leq E_{\min}\left(\frac{\mathfrak{p} + \mathfrak{q}}{2}\right). \quad (4.49)$$

En particulier, E_{\min} est concave sur \mathbb{R}^+ .

Preuve. Soient $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} > 0$ et $\delta > 0$. Par le corollaire 4.2.9, il existe $u = \rho e^{i\theta} \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R})$ si $N = 1$ (respectivement $u \in \mathcal{E}_0(\mathbb{R}^N)$ si $N \geq 2$) telle que

$$p(u) = \frac{\mathfrak{p} + \mathfrak{q}}{2} \quad \text{et} \quad E(u) \leq E_{\min}\left(\frac{\mathfrak{p} + \mathfrak{q}}{2}\right) + \frac{\delta}{2}. \quad (4.50)$$

L'idée est de construire des fonctions u^+ et u^- à partir de u qui vérifient

$$p(u^+) = \mathfrak{p} \quad \text{et} \quad p(u^-) = \mathfrak{q} \quad (4.51)$$

ce qui nous permettra d'établir la relation (4.49). Commençons par le cas $N = 1$. Par le théorème de convergence dominée, l'application $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$G(a) = p_a(u) := \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} (1 - \rho^2) \theta'$$

est continue avec $\lim_{a \rightarrow +\infty} G(a) = 0$ et $\lim_{a \rightarrow -\infty} G(a) = p(u) = (\mathfrak{p} + \mathfrak{q})/2$. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que $G(a_0) = \mathfrak{p}/2$. La fonction translatée $\tilde{u}(x) := \tilde{\rho}(x) e^{i\tilde{\theta}(x)} = \rho(x + a_0) e^{i\theta(x+a_0)}$ vérifie alors

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} (1 - \tilde{\rho}^2) \tilde{\theta}' = \frac{\mathfrak{p}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (1 - \tilde{\rho}^2) \tilde{\theta}' = \frac{\mathfrak{q}}{2}. \quad (4.52)$$

Afin de simplifier les notations, on notera u, ρ et θ au lieu de $\tilde{u}, \tilde{\rho}$ et $\tilde{\theta}$. Introduisons les opérateurs de réflexions

$$(T^+ \rho)(x) = \begin{cases} \rho(x), & \text{si } x \geq 0, \\ \rho(-x), & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad (T^- \rho)(x) = \begin{cases} \rho(-x), & \text{si } x \geq 0, \\ \rho(x), & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

et

$$(S^+ \theta)(x) = \begin{cases} \theta(x) - \theta(0), & \text{si } x \geq 0, \\ \theta(0) - \theta(-x), & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad (S^- \theta)(x) = \begin{cases} \theta(0) - \theta(-x), & \text{si } x \geq 0, \\ \theta(x) - \theta(0), & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Comme ρ et θ sont continues, les fonctions $(T^\pm \rho)$ et $(S^\pm \theta)$ sont continues et appartiennent à $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$. Enfin, il n'est pas difficile de voir que

$$u^\pm = (T^\pm \rho) e^{iS^\pm \theta}$$

appartiennent à $\mathcal{E}_0(\mathbb{R})$. Si $N \geq 2$, par le lemme 4.1.1, il existe $v \in \mathcal{Y}$ et $w \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tel que $\langle i\partial_1 u, u \rangle = v + w$. Par définition du moment, on a

$$p(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} w = \frac{\mathfrak{p} + \mathfrak{q}}{2}.$$

Comme dans le cas précédent, le théorème de convergence dominée nous donne que l'application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(a) = \int_{\mathbb{R}^{N-1} \times \{x_N \geq a\}} w$$

est continue avec $\lim_{a \rightarrow +\infty} F(a) = 0$ et $\lim_{a \rightarrow -\infty} F(a) = (\mathfrak{p} + \mathfrak{q})/2$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que $F(a_0) = \mathfrak{p}/2$. Ainsi, en considérant la translation $\tilde{u}(x) = u(x', x_N + a_0)$, on obtient $\langle i\partial_1 \tilde{u}, \tilde{u} \rangle = \tilde{v} + \tilde{w}$ avec $\tilde{w}(x) = w(x', x_N + a_0)$. Ainsi

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{+\infty} \tilde{w} = \frac{\mathfrak{p}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-\infty}^0 \tilde{w} = \frac{\mathfrak{q}}{2}. \quad (4.53)$$

Afin de simplifier les notations, on notera u, v, w pour $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$. Posons,

$$u^+(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x_N \geq 0, \\ u(x', -x_N) & \text{si } x_N < 0, \end{cases} \quad u^-(x) = \begin{cases} u(x', -x_N) & \text{si } x_N \geq 0, \\ u(x) & \text{si } x_N < 0. \end{cases}$$

En utilisant (4.52) et (4.53) et l'expression de u^+ et u^- selon la dimension, on obtient

$$p(u^+) = \mathfrak{p} \quad \text{et} \quad p(u^-) = \mathfrak{q}, \quad (4.54)$$

d'où

$$E_{\min}(\mathfrak{p}) \leq E(u^+) \quad \text{et} \quad E_{\min}(\mathfrak{q}) \leq E(u^-). \quad (4.55)$$

Maintenant, on a

$$E(u^+) + E(u^-) = 2E_{\text{kin}}(u) + E_{\text{pot}}(u^+) + E_{\text{pot}}(u^-). \quad (4.56)$$

Si on suppose que

$$E_{\text{pot}}(u^+) + E_{\text{pot}}(u^-) \leq 2E_{\text{pot}}(u), \quad (4.57)$$

alors, en utilisant l'inégalité (4.56), on conclut que $E(u^+) + E(u^-) \leq 2E(u)$. En combinant cette inégalité avec (4.50) et (4.55), on a

$$E_{\min}(\mathbf{p}) + E_{\min}(\mathbf{q}) \leq 2E(u) \leq 2E_{\min}\left(\frac{\mathbf{p} + \mathbf{q}}{2}\right) + \delta,$$

ce qui nous donne (4.49) en faisant tendre δ vers 0. Comme E_{\min} est continue par la proposition 4.2.10, E_{\min} est concave sur \mathbb{R}^+ .

Il nous reste à montrer (4.57). Posons $\eta = 1 - |u|^2$, $\eta_1 = 1 - |u^+|^2$, $\eta_2 = 1 - |u^-|^2$. À partir de maintenant et jusqu'à la fin de la section, les preuves seront écrites dans le cas général de la dimension N . Afin de retrouver la preuve en dimension 1, il faudra considérer que la dernière variable est la variable principale, c'est-à-dire que pour une fonction f , $f(x', x_N)$ représente $f(x_N)$ si $N = 1$. Posons

$$g(x) = \frac{1}{2}(\eta(x) + \eta(x', -x_N)) \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1}{2}(\eta(x) - \eta(x', -x_N)).$$

Ainsi, g est paire par rapport à x_N , f est impaire par rapport à x_N et

$$\eta = f + g, \quad \eta_1 = g + f_* \quad \text{et} \quad \eta_2 = g - f_*,$$

où

$$f_*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x_N \geq 0, \\ -f(x), & \text{si } x_N < 0, \end{cases}$$

et f_* est paire par rapport à x_N . Par le théorème de Plancherel, on obtient

$$\begin{aligned} 4(2\pi)^N(2E_{\text{pot}}(u) - E_{\text{pot}}(u^+) - E_{\text{pot}}(u^-)) &= \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\mathcal{W}}(\xi)(2|\hat{\eta}|^2 - |\hat{\eta}_1|^2 - |\hat{\eta}_2|^2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\mathcal{W}}(\xi)(2|\hat{g} + \hat{f}|^2 - |\hat{g} + \hat{f}_*|^2 - |\hat{g} - \hat{f}_*|^2) \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\mathcal{W}}(\xi)(|\hat{f}|^2 - |\hat{f}_*|^2) + 4 \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\mathcal{W}}(\xi)\langle \hat{g}, \hat{f} \rangle \\ &= 2(2\pi)^N(B(f) - B(f_*)), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la parité de $\widehat{\mathcal{W}}$ pour obtenir $\int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{W}}(\xi)\langle \hat{g}, \hat{f} \rangle = 0$. Par (H3'), $B(f) - B(f_*) \geq 0$, ce qui nous donne (4.57) et ce qui conclut la preuve. \square

Le lemme suivant nous donne que l'hypothèse (H3) est plus forte que (H3').

Lemme 4.2.14. *Supposons que \mathcal{W} vérifie l'hypothèse (H3). Alors \mathcal{W} vérifie (H3').*

Preuve. Le but est de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\mathcal{W}}(\xi) \left(|\hat{f}(\xi)|^2 - |\hat{f}_*(\xi)|^2 \right) d\xi \geq 0. \quad (4.58)$$

Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, impaire par rapport à x_N . On note \mathcal{F}_{N-1} la transformée de Fourier partielle définie par

$$\mathcal{F}_{N-1}(f)(\xi', x_N) = \begin{cases} f(x_N) & \text{si } N = 1, \\ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-ix'\xi'} f(x', x_N) dx' & \text{si } N \geq 2. \end{cases}$$

En écrivant que $|\widehat{f}(\xi)|^2 = \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi)}$ et en utilisant le fait que f est impaire par rapport à x_N , le théorème de Fubini nous donne

$$|\widehat{f}(\xi)|^2 = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty \sin(x_N \xi_N) \sin(y_N \xi_N) \mathcal{F}_{N-1} f(\xi', x_N) \overline{\mathcal{F}_{N-1} f(\xi', y_N)} dx_N dy_N.$$

De même, comme $|\widehat{f}_*(\xi)|^2 = \widehat{f}_*(\xi)\overline{\widehat{f}_*(\xi)}$ et par parité de f_* par rapport à x_N , on conclut que

$$|\widehat{f}_*(\xi)|^2 = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty \cos(x_N \xi_N) \cos(y_N \xi_N) \mathcal{F}_{N-1} f(\xi', x_N) \overline{\mathcal{F}_{N-1} f(\xi', y_N)} dx_N dy_N.$$

Ainsi, en effectuant la différence, on arrive à

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\mathcal{W}}(\xi) \left(|\widehat{f}(\xi)|^2 - |\widehat{f}_*(\xi)|^2 \right) \\ &= -4 \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\mathcal{W}}(\xi', \xi_N) \int_0^\infty \int_0^\infty \cos((x_N + y_N)\xi_N) \mathcal{F}_{N-1} f(\xi', x_N) \overline{\mathcal{F}_{N-1} f(\xi', y_N)} dx_N dy_N. \end{aligned}$$

Soient $\xi' \in \mathbb{R}^{N-1}$ et $\varphi_{\xi'}(t) = \mathcal{F}_{N-1} f(\xi', t)$ (c'est-à-dire que $\varphi_{\xi'}(t) = f(t)$ si $N = 1$). Comme $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, on a $\varphi_{\xi'} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Posons

$$h_{\xi'}(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{i(x_N + y_N)z} \varphi_{\xi'}(x_N) \overline{\varphi_{\xi'}(y_N)} dx_N dy_N.$$

Comme $\widehat{\mathcal{W}}$ est paire et $\overline{h_{\xi'}(z)} = h_{\xi'}(-z)$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\mathcal{W}}(\xi) \left(|\widehat{f}(\xi)|^2 - |\widehat{f}_*(\xi)|^2 \right) &= -4 \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\mathcal{W}}(\xi', \xi_N) \operatorname{Re}(h_{\xi'}(\xi_N)) d\xi_N d\xi' \\ &= -4 \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\mathcal{W}}(\xi', \xi_N) h_{\xi'}(\xi_N) d\xi_N d\xi'. \end{aligned}$$

Afin d'obtenir (4.58), on va appliquer le théorème des résidus à $\widehat{\mathcal{W}}(\xi', \cdot) h_{\xi'}(\cdot)$. Pour simplifier les notations, on note désormais $h = h_{\xi'}$ et $\varphi = \varphi_{\xi'}$. Montrons maintenant qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $z \neq 0$ vérifiant $\operatorname{Im}(z) \geq 0$, on ait

$$|h(z)| \leq \frac{C}{|z|^4}. \quad (4.59)$$

Pour cela, notons Ψ_1 et Ψ_2 les fonctions définies par

$$\Psi_1(z) = \int_0^{+\infty} e^{izt} \varphi(t) dt \quad \text{et} \quad \Psi_2(z) = \int_0^{+\infty} e^{izt} \overline{\varphi(t)} dt.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. En utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégral, on obtient

$$\frac{d^k}{dt^k} \varphi(t) = \frac{d^k}{dt^k} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-ix'\xi'} f(x', t) dx' = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-ix'\xi'} \partial_N^k f(x', t) dx' = (\mathcal{F}_{N-1} \partial_N^k f)(\xi', t).$$

Ainsi, $\frac{d^k}{dt^k} \varphi$ est une fonction C_c^∞ et uniformément bornée par rapport à $(\xi', t) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$ comme $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. On peut ainsi intégrer par parties Ψ_1 et on obtient

$$\begin{aligned} \Psi_1(z) &= -\frac{\varphi(0)}{iz} - \frac{1}{iz} \int_0^\infty e^{itz} \varphi'(t) dt \\ &= -\frac{1}{iz} \int_0^\infty e^{itz} \varphi'(t) dt \end{aligned}$$

comme $\varphi(0) = 0$ puisque φ est impaire. En intégrant par parties à nouveau, on arrive à

$$\Psi_1(z) = -\frac{\varphi'(0)}{z^2} - \frac{1}{z^2} \int_0^\infty e^{itz} \varphi''(t) dt$$

d'où, pour tout $z \neq 0$ avec $\text{Im}(z) \geq 0$,

$$|\Psi_1(z)| \leq \frac{C}{|z|^2} \quad (4.60)$$

où $C = (|\varphi'(0)| + \|\varphi''\|_{L^1(\mathbb{R})})$. De la même manière, on obtient (4.60) pour Ψ_2 . Comme $h = \Psi_1 \Psi_2$, on arrive (4.59). Le théorème des résidus appliqué à $\widehat{\mathcal{W}}(\xi', \cdot) h(\cdot)$ nous donne

$$\int_{-k}^k \widehat{\mathcal{W}}(\xi', \xi_N) h(\xi_N) d\xi_N + \int_{a_k}^{b_k} \widehat{\mathcal{W}}(\xi', \gamma_k(t)) h(\gamma_k(t)) \gamma_k'(t) dt = 2\pi i \sum_{j \in J_k} h(i\nu_j) \text{Res} \left(\widehat{\mathcal{W}}(\xi', \cdot), i\nu_j \right) \leq 0, \quad (4.61)$$

où les courbes γ_k sont définies en (H3) et J_k désigne l'ensemble des pôles entourés par Γ_k . Par (4.59), on obtient l'inégalité

$$\left| \int_{a_k}^{b_k} \widehat{\mathcal{W}}(\xi', \gamma_k(t)) h(\gamma_k(t)) \gamma_k'(t) dt \right| \leq C \mathcal{L}(\Gamma_k) \left(\sup_{t \in [a_k, b_k]} \frac{|\widehat{\mathcal{W}}(\xi', \gamma_k(t))|}{|\gamma_k(t)|^4} \right).$$

La décroissance de $\widehat{\mathcal{W}}$ en (4.5) nous donne que l'intégrale précédente tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. Ainsi, par le théorème de convergence dominée et par passage à la limite, la relation (4.61) devient

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{W}}(\xi', \xi_N) h(\xi_N) d\xi_N = 2\pi i \sum_{j \in J_k} h(i\nu_j) \text{Res} \left(\widehat{\mathcal{W}}(\xi', \cdot), i\nu_j \right) \leq 0 \quad (4.62)$$

ce qui nous donne (4.58) pour $N = 1$. En intégrant (4.62) par rapport aux $N - 1$ premières variables, on obtient (4.58) pour $N \geq 2$, ce qui conclut la preuve. \square

4.2.4 Bornes en dimension 1 et 2

Les propositions qui vont suivre nous fournissent des bornes sur $E_{\min}(\mathfrak{q})$ lorsque \mathfrak{q} est proche de l'origine. Commençons par le cas où $N = 1$ avec une borne inférieure pour E_{\min} .

Proposition 4.2.15. *Soit $N = 1$. Il existe $\mathfrak{q}_0 > 0$ et $K_0 > 0$ telles que*

$$\sqrt{2}\mathfrak{q} - K_0 \mathfrak{q}^{3/2} \leq E_{\min}(\mathfrak{q}), \quad \text{pour tout } \mathfrak{q} \in [0, \mathfrak{q}_0[. \quad (4.63)$$

Preuve. Par le corollaire 4.2.9 et (4.21), pour $\delta \in]0, 1/2[$, il existe $v \in \mathcal{NE}(\mathbb{R})$ telle que $p(v) = \mathfrak{q}$ et $E(v) < E_{\min}(\mathfrak{q}) + \delta \leq \sqrt{2}\mathfrak{q} + \delta$. Alors, par l'estimation (3.14) du chapitre précédent, il existe $\mathfrak{q}_0 > 0$ et $K > 0$, telles que si $\mathfrak{q} \leq \mathfrak{q}_0$, alors $E(v) \leq 1$ et

$$|1 - |v|^2| \leq K(\sqrt{2}\mathfrak{q} + \delta). \quad (4.64)$$

Quitte à réduire \mathfrak{q}_0 et δ , on peut supposer que $K(\sqrt{2}\mathfrak{q}_0 + \delta) < 1$ et appliquer l'inégalité (3.23) du lemme 3.2.3 du chapitre précédent afin de conclure que $\sqrt{2}(1 - (K(\sqrt{2}\mathfrak{q} + \delta)^{1/2})p(v)) \leq E(v)$. L'inégalité (4.63) s'obtient lorsque $\delta \rightarrow 0$. \square

Le reste de la section est consacré à l'établissement d'une borne supérieure pour E_{\min} en dimension 1 et 2.

Proposition 4.2.16. *Soit $N = 1$. Il existe $\mathfrak{q}_1 > 0$ tel que*

$$E_{\min}(\mathfrak{q}) \leq \sqrt{2}\mathfrak{q} - K_1 \mathfrak{q}^{5/3} + K_2 \mathfrak{q}^2, \quad \text{pour tout } \mathfrak{q} \in [0, \mathfrak{q}_1], \quad (4.65)$$

où $K_1, K_2 > 0$ sont des constantes dépendant de $\|\widehat{\mathcal{W}}\|_{C^3}$ mais indépendantes de \mathfrak{q}_1 .

Une conséquence immédiate des propositions 4.2.15 et 4.2.16 est que E_{\min} est dérivable à droite en 0, avec $E_{\min}^+(0) = \sqrt{2}$. De plus, si E_{\min} est concave, il vient que E_{\min} est strictement sous-additive grâce au lemme suivant (voir [8, 19]).

Lemme 4.2.17. *Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave, avec $f(0) = 0$ et où $a := f^+(0)$ désigne sa dérivée à droite en l'origine. Alors, pour tout $\mathfrak{s} > 0$, on a l'alternative suivante :*

- (i) f est linéaire sur $[0, \mathfrak{s}]$, avec $f(\mathfrak{p}) = a\mathfrak{p}$, pour tout $\mathfrak{p} \in [0, \mathfrak{s}]$, ou
- (ii) f est strictement sous-additive sur $[0, \mathfrak{s}]$.

Corollaire 4.2.18. *Soit $N = 1$. Alors la dérivée à droite de E_{\min} en l'origine existe et $E_{\min}^+(0) = \sqrt{2}$. En particulier, si E_{\min} est concave sur \mathbb{R}^+ , alors E_{\min} est strictement sous-additive sur \mathbb{R}^+ .*

La preuve de la proposition 4.2.16 s'inspire du fait que les solitons de l'équation de Korteweg–de Vries (KdV) fournissent une approximation des solitons de l'équation de Gross–Pitaveskii lorsque $\mathcal{W} = \delta_0$ à la limite transsonique [69, 10, 20]. Notre but est d'étendre cette idée à l'équation non locale (GPN). Afin d'illustrer ce phénomène dans le cas des solitons, effectuons quelques calculs formels. On cherche une solution de (OPNc) avec $c \sim \sqrt{2}$. Ainsi, considérons la vitesse

$$c = \sqrt{2 - \varepsilon^2}$$

et l'ansatz

$$u_\varepsilon(x) = (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon(\varepsilon x)) e^{i\varepsilon\varphi_\varepsilon(\varepsilon x)}.$$

En posant

$$\widehat{\mathcal{W}}_\varepsilon(\xi) := \widehat{\mathcal{W}}(\varepsilon\xi), \quad (4.66)$$

i.e. $\mathcal{W}_\varepsilon(x) = \mathcal{W}(x/\varepsilon)/\varepsilon$ au sens des distributions, nous en déduisons que u_ε est solution de (OPNc) si le couple $(A_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ satisfait les équations

$$\varepsilon^2 A_\varepsilon'' - \varepsilon^2(1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon)\varphi_\varepsilon'^2 - c\varphi_\varepsilon'(1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon) - (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon)(\mathcal{W}_\varepsilon * (2A_\varepsilon + \varepsilon^2 A_\varepsilon^2)) = 0, \quad (4.67)$$

$$2\varepsilon^2 A_\varepsilon' \varphi_\varepsilon' + (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon)\varphi_\varepsilon'' + cA_\varepsilon' = 0. \quad (4.68)$$

Afin de traiter le terme non local, on utilise le lemme suivant.

Lemme 4.2.19. *Pour tout $f \in H^3(\mathbb{R})$, on a*

$$\mathcal{W}_\varepsilon * f = f - \frac{\varepsilon^2}{2} (\widehat{\mathcal{W}})''(0) f'' + \varepsilon^3 R_\varepsilon(f), \quad (4.69)$$

où

$$\|R_\varepsilon(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{6} \|\widehat{\mathcal{W}}''''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|f'''\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Preuve. Posons

$$R_\varepsilon(f) := \frac{1}{\varepsilon^3} (\mathcal{W}_\varepsilon * f - f + \frac{\varepsilon^2}{2} (\widehat{\mathcal{W}})''(0) f'').$$

Par le théorème de Plancherel, on a

$$2\pi \|R_\varepsilon(f)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|\widehat{R}_\varepsilon(f)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{\varepsilon^6} \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\mathcal{W}}(\varepsilon\xi) - 1 - \frac{\varepsilon^2 \xi^2}{2} (\widehat{\mathcal{W}})''(0) \right|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad (4.70)$$

Par la formule de Taylor et en utilisant le fait que $\widehat{\mathcal{W}}'(0) = 0$, on en déduit que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $z_{\varepsilon, \xi} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\widehat{\mathcal{W}}(\varepsilon\xi) = 1 + \frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}(\widehat{\mathcal{W}})''(0) + \frac{\varepsilon^3\xi^3}{6}(\widehat{\mathcal{W}})'''(z_{\varepsilon,\xi}).$$

En remplaçant cette égalité dans (4.70), on conclut que

$$\sqrt{2\pi}\|R_\varepsilon(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{6}\|\widehat{\mathcal{W}}'''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\mathcal{F}(f''')\|_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{\sqrt{2\pi}}{6}\|\widehat{\mathcal{W}}'''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|f'''\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

ce qui termine la preuve du lemme. \square

En appliquant le lemme 4.2.19, on déduit formellement de (4.67)–(4.68) que

$$-c\varphi'_\varepsilon - 2A_\varepsilon + \varepsilon^2(-c\varphi'_\varepsilon A_\varepsilon - 3A_\varepsilon^2 + (1 + \widehat{\mathcal{W}}''(0))A''_\varepsilon - \varphi_\varepsilon'^2) = o(\varepsilon^2), \quad (4.71)$$

$$\varphi''_\varepsilon + cA'_\varepsilon + \varepsilon^2(2\varphi'_\varepsilon A'_\varepsilon + A_\varepsilon\varphi''_\varepsilon) = 0. \quad (4.72)$$

Ainsi, pour la vitesse $c = \sqrt{2 - \varepsilon^2}$, l'équation (4.71) implique que

$$\varphi'_\varepsilon = -2A_\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (4.73)$$

Supposons que A_ε et φ_ε convergent vers des fonctions A et φ , respectivement, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. En dérivant (4.71) que l'on ajoute à $c \times (4.72)$ et en utilisant la relation (4.73), par passage à la limite, on arrive à

$$-A' - 12AA' + (1 + \widehat{\mathcal{W}}''(0))A''' = 0.$$

Ainsi, en imposant que $A, A', A'' \rightarrow 0$ lorsque $|x| \rightarrow \infty$, par intégration de l'équation précédente, on obtient

$$(1 + \widehat{\mathcal{W}}''(0))A'' - 6A^2 - A = 0. \quad (4.74)$$

Par l'hypothèse (H2), comme $(\widehat{\mathcal{W}})''(0) > -1$, il est possible de poser

$$\omega := (1 + (\widehat{\mathcal{W}})''(0))^{1/2},$$

et la solution de (4.74) (aux translations près) correspond à un soliton de KdV donné explicitement par

$$A(x) := -\frac{1}{4}\operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{2\omega}\right). \quad (4.75)$$

De plus, (4.73) nous donne par passage à la limite $\varphi' = -\sqrt{2}A$, ce qui nous amène à

$$\varphi(x) := \frac{\omega}{\sqrt{2}}\tanh\left(\frac{x}{2\omega}\right). \quad (4.76)$$

Ainsi, on s'attend à ce que $u_\varepsilon(x) \sim (1 + \varepsilon^2 A(\varepsilon x))e^{i\varepsilon\varphi(\varepsilon x)}$, ce qui motive le résultat suivant.

Lemme 4.2.20. *Soit $v_\varepsilon(x) = (1 + \varepsilon^2 A(\varepsilon x))e^{i\varepsilon\varphi(\varepsilon x)}$, où A et φ sont donnés par (4.75) et (4.76). Alors*

$$E(v_\varepsilon) = \frac{\omega}{3}\left(\varepsilon^3 - \frac{\varepsilon^5}{4}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^6) \quad \text{et} \quad p(v_\varepsilon) = \frac{\sqrt{2}\omega}{6}\left(\varepsilon^3 - \frac{\varepsilon^5}{10}\right), \quad (4.77)$$

où $\mathcal{O}(\varepsilon^6)/\varepsilon^6$ est une fonction bornée en terme de $\|\widehat{\mathcal{W}}\|_{W^{3,\infty}(\mathbb{R})}$ et uniformément pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$.

Preuve. Calculons d'abord le moment. En gardant en tête que $\varphi' = -\sqrt{2}A$, on a

$$\begin{aligned} p(v_\varepsilon) &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(2\varepsilon^2 A(\varepsilon x) + \varepsilon^4 A(\varepsilon x)^2)\varepsilon^2\varphi'(\varepsilon x)dx = \frac{\sqrt{2}\varepsilon^3}{2}\int_{\mathbb{R}}(2A(x)^2 + \varepsilon^2 A(x)^3)dx \\ &= \sqrt{2}\omega\varepsilon^3\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{8}\operatorname{sech}^4(x) - \frac{\varepsilon^2}{64}\operatorname{sech}^6(x)\right)dx, \end{aligned}$$

et en utilisant les identités $\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^4(x) dx = 4/3$ et $\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^6(x) dx = 16/15$, on obtient directement l'expression de $p(v_\varepsilon)$ en (4.77). Pour l'énergie cinétique, on procède la même manière. En effet, en utilisant que

$$A'(x) = \frac{1}{4\omega} \tanh\left(\frac{x}{2\omega}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{2\omega}\right) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^4 \tanh^2 = \frac{4}{15},$$

on obtient

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}}(v_\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\varepsilon^6 A'(\varepsilon x)^2 + \varepsilon^4 (1 + \varepsilon^2 A(\varepsilon x))^2 \varphi'(\varepsilon x)^2) dx \\ &= \varepsilon^3 \int_{\mathbb{R}} A(x)^2 dx + \frac{\varepsilon^5}{2} \int_{\mathbb{R}} A'(x)^2 + 4A(x)^3 dx \\ &= \frac{\varepsilon^3 \omega}{8} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}(x)^4 dx + \frac{\varepsilon^5}{16\omega} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^4(x) \tanh^2(x) dx - \frac{\varepsilon^5 \omega}{16} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^6(x) dx \\ &= \frac{\varepsilon^3 \omega}{6} + \varepsilon^5 \left(\frac{1}{60\omega} - \frac{\omega}{15} \right). \end{aligned}$$

Maintenant, pour la partie potentielle, en invoquant le lemme 4.2.19 et (4.74), cela nous donne

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(v_\varepsilon) &= \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_\varepsilon * (2\varepsilon^2 A + \varepsilon^4 A^2)(x) (2\varepsilon^2 A(x) + \varepsilon^4 A(x)^2) dx \\ &= \varepsilon^3 \int_{\mathbb{R}} A(x)^2 dx + \varepsilon^5 \int_{\mathbb{R}} \left(A(x)^3 - \frac{\widehat{\mathcal{W}}''(0)}{2} A(x) A''(x) \right) dx + \mathcal{O}(\varepsilon^6) \\ &= \varepsilon^3 \int_{\mathbb{R}} A(x)^2 dx + \varepsilon^5 \int_{\mathbb{R}} \left(A(x)^3 - \frac{\widehat{\mathcal{W}}''(0)}{2\omega^2} (A(x)^2 + 6A(x)^3) \right) dx + \mathcal{O}(\varepsilon^6) \\ &= \frac{\varepsilon^3 \omega}{6} - \frac{\varepsilon^5}{60} \left(\omega + \frac{1}{\omega} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^6), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la relation $\widehat{\mathcal{W}}''(0) = \omega^2 - 1$. En ajoutant les expressions de E_{kin} et E_{pot} , on arrive à (4.77). \square

Preuve de la proposition 4.2.16. Pour \mathfrak{q} assez petit, il est possible de paramétrer \mathfrak{q} comme une fonction de ε . Posons

$$\mathfrak{q}_\varepsilon = \frac{\sqrt{2}\omega}{6} \left(\varepsilon^3 - \frac{\varepsilon^5}{10} \right).$$

Ainsi, la fonction \mathfrak{q}_ε est strictement croissante pour $\varepsilon \in [0, 1]$. L'idée est d'exprimer ε en terme de \mathfrak{q}_ε de manière à obtenir $E(v_\varepsilon)$ en (4.77) comme une fonction de \mathfrak{q}_ε . L'inégalité (4.65) découlera du fait que $p(v_\varepsilon) = \mathfrak{q}_\varepsilon$ et que $E_{\min}(\mathfrak{q}_\varepsilon) \leq E(v_\varepsilon)$. Afin de simplifier les notations, on pose

$$\mathfrak{s}_\varepsilon := \frac{3\sqrt{2}}{\omega} \mathfrak{q}_\varepsilon = \varepsilon^3 - \frac{\varepsilon^5}{10}, \quad (4.78)$$

ce qui implique

$$\varepsilon^3/2 \leq \mathfrak{s}_\varepsilon \leq \varepsilon^3 \leq 1, \quad \text{pour tout } \varepsilon \in [0, 1]. \quad (4.79)$$

En appliquant la formule de Taylor et en notant que $\varepsilon^5/10 \leq \mathfrak{s}_\varepsilon$, on en déduit qu'il existe $\mathfrak{p}_\varepsilon \in [\mathfrak{s}_\varepsilon, 2\mathfrak{s}_\varepsilon]$ tel que

$$\varepsilon^5 = \left(\mathfrak{s}_\varepsilon + \frac{\varepsilon^5}{10} \right)^{5/3} = \mathfrak{s}_\varepsilon^{5/3} + \frac{5\varepsilon^5}{30} \mathfrak{p}_\varepsilon^{2/3}.$$

En utilisant à nouveau (4.79), il suit que

$$\varepsilon^5 = \mathfrak{s}_\varepsilon^{5/3} + \mathcal{O}(\mathfrak{s}_\varepsilon^{7/3}) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{\omega} \right)^{5/3} \mathfrak{q}_\varepsilon^{5/3} + \mathcal{O}(\mathfrak{q}_\varepsilon^{7/3}).$$

En combinant ce développement avec (4.77), (4.78) et (4.79), cela nous donne

$$E(v_\varepsilon) = \frac{\omega}{3} \left(\frac{3\sqrt{2}}{\omega} \mathfrak{q}_\varepsilon - \frac{3\varepsilon^5}{20} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^6) = \sqrt{2}\mathfrak{q}_\varepsilon - K_1\mathfrak{q}_\varepsilon^{5/3} + \mathcal{O}(\mathfrak{q}_\varepsilon^2),$$

où $K_1 = (3\sqrt{2}/\omega)^{5/3}\omega/20$. Comme $E_{\min}(\mathfrak{q}_\varepsilon) \leq E(v_\varepsilon)$, l'inégalité (4.65) est établie. \square

Montrons maintenant la borne en dimension 2 donnée par la proposition 4.1.6 qui est l'analogie de la proposition 4.2.16 en dimension 2. Comme pour la proposition 4.2.16, nous allons utiliser l'idée des ondes progressives de l'équation de Kadomtsev–Petviashvili I permettent d'obtenir une approximation des solitons de l'équation de Gross–Pitavskii lorsque $\mathcal{W} = \delta_0$ à la limite transsonique (voir [50, 49, 20]). À nouveau, soit $c_\varepsilon = \sqrt{2 - \varepsilon^2}$. On considère l'ansatz

$$u_\varepsilon(x, y) = (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y)) e^{i\varepsilon\varphi_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y)}$$

et on pose

$$\mathcal{W}_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{\varepsilon^3} \mathcal{W} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon^2} \right).$$

D'après l'expression de u_ε , on a

$$\partial_1 u_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^3 \partial_1 A_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y) e^{i\varepsilon\varphi_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y)} + i(1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y)) \varepsilon^2 \partial_1 \varphi_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y) e^{i\varepsilon\varphi_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y)},$$

$$\begin{aligned} \partial_1^2 u_\varepsilon(x, y) &= \varepsilon^4 \partial_1^2 A_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y) e^{i\varepsilon\varphi_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y)} - \varepsilon^4 (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y)) (\partial_1 \varphi_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y))^2 e^{i\varepsilon\varphi_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y)} \\ &\quad + 2i\varepsilon^5 \partial_1 A_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y) \partial_1 \varphi_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y) e^{i\varepsilon\varphi_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y)} \\ &\quad + i\varepsilon^3 (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y)) \partial_1^2 \varphi_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y) e^{i\varepsilon\varphi_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \partial_2^2 u_\varepsilon(x, y) &= \varepsilon^6 \partial_2^2 A_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y) e^{i\varepsilon\varphi_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y)} - \varepsilon^6 (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y)) (\partial_2 \varphi_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y))^2 e^{i\varepsilon\varphi_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y)} \\ &\quad + 2i\varepsilon^7 \partial_2 A_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y) \partial_2 \varphi_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y) e^{i\varepsilon\varphi_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y)} \\ &\quad + i\varepsilon^5 (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y)) \partial_2^2 \varphi_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y) e^{i\varepsilon\varphi_\varepsilon(\varepsilon x, \varepsilon^2 y)}. \end{aligned}$$

Ainsi, u_ε est solution de (OPNc) si et seulement si $(A_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$ vérifie

$$c_\varepsilon \partial_1 \varphi_\varepsilon + \varepsilon^2 (\partial_1 \varphi_\varepsilon)^2 + \varepsilon^4 (\partial_2 \varphi_\varepsilon)^2 - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial_1^2 A_\varepsilon + \varepsilon^2 \partial_2^2 A_\varepsilon}{1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon} \right) + \mathcal{W}_\varepsilon * (2A_\varepsilon + \varepsilon^2 A_\varepsilon^2) = 0, \quad (4.80)$$

$$c_\varepsilon \partial_1 A_\varepsilon + 2\varepsilon^2 \partial_1 A_\varepsilon \partial_1 \varphi_\varepsilon + 2\varepsilon^4 \partial_2 A_\varepsilon \partial_2 \varphi_\varepsilon + (1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon) (\partial_1^2 \varphi_\varepsilon + \varepsilon^2 \partial_2^2 \varphi_\varepsilon) = 0. \quad (4.81)$$

Afin de traiter le terme non local, on utilise le lemme suivant.

Lemme 4.2.21. *Pour tout $f \in H^3(\mathbb{R}^2)$, on a*

$$\mathcal{W}_\varepsilon * f = f - \frac{\varepsilon^2}{2} \partial_1^2 \widehat{\mathcal{W}}(0, 0) \partial_1^2 f + \varepsilon^3 R_\varepsilon(f) \quad (4.82)$$

avec

$$\|R_\varepsilon(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{5}{2}C(f)C(\widehat{\mathcal{W}}), \quad (4.83)$$

$$C(f) = \max \left(\|\partial_2^2 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \|\partial_1^3 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \|\partial_2^3 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \|\partial_1^2 \partial_2 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \|\partial_1 \partial_2^2 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right)$$

et

$$C(\widehat{\mathcal{W}}) = \max \left(\|\partial_2^2 \widehat{\mathcal{W}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}, \|\partial_1^3 \widehat{\mathcal{W}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}, \|\partial_2^3 \widehat{\mathcal{W}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}, \|\partial_1^2 \partial_2 \widehat{\mathcal{W}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}, \|\partial_1 \partial_2^2 \widehat{\mathcal{W}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \right).$$

Preuve. Posons

$$R_\varepsilon(f) := \frac{1}{\varepsilon^3} \left(\mathcal{W}_\varepsilon * f - f + \frac{\varepsilon^2}{2} \partial_1^2 \widehat{\mathcal{W}}(0,0) \partial_1^2 f \right).$$

Par le théorème de Plancherel, on a

$$4\pi^2 \|R_\varepsilon(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \frac{1}{\varepsilon^6} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \widehat{\mathcal{W}}(\varepsilon\xi_1, \varepsilon^2\xi_2) - 1 - \frac{\varepsilon^2\xi_1^2}{2} \partial_1^2 \widehat{\mathcal{W}}(0,0) \right|^2 |\widehat{f}(\xi_1, \xi_2)|^2 d\xi_1 d\xi_2. \quad (4.84)$$

Comme $\widehat{\mathcal{W}}$ est paire par rapport à ses deux variables, les dérivées partielles de $\widehat{\mathcal{W}}$ d'ordre impair sont nulles en $(0,0)$. Ainsi, par la formule de Taylor–Lagrange, pour tout $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ dépendant de ξ_1, ξ_2 et ε tels que

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{W}}(\varepsilon\xi_1, \varepsilon^2\xi_2) &= 1 + \frac{1}{2} \left(\varepsilon^2 \xi_1^2 \partial_1^2 \widehat{\mathcal{W}}(0,0) + \varepsilon^4 \xi_2^2 \partial_2^2 \widehat{\mathcal{W}}(0,0) \right) \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(\varepsilon^3 \xi_1^3 \partial_1^3 \widehat{\mathcal{W}}(z_1, z_2) + 3\varepsilon^4 \xi_1^2 \xi_2 \partial_1^2 \partial_2 \widehat{\mathcal{W}}(z_1, z_2) + 3\varepsilon^5 \xi_1 \xi_2^2 \partial_1 \partial_2^2 \widehat{\mathcal{W}}(z_1, z_2) + \varepsilon^6 \xi_2^3 \partial_2^3 \widehat{\mathcal{W}}(z_1, z_2) \right). \end{aligned}$$

En injectant cette expression dans (4.84) et en majorant, on arrive à (4.83), ce qui conclut la preuve. \square

En utilisant le lemme 4.2.21 et en reprenant les équations (4.80)–(4.81), on obtient formellement

$$c_\varepsilon \partial_1 \varphi_\varepsilon + 2A_\varepsilon + \varepsilon^2 \left((\partial_1 \varphi_\varepsilon)^2 - \left(\frac{\partial_1^2 A_\varepsilon}{1 + \varepsilon^2 A_\varepsilon} \right) + A_\varepsilon^2 - \partial_1^2 \widehat{\mathcal{W}}(0,0) \partial_1^2 A_\varepsilon \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^4), \quad (4.85)$$

$$c_\varepsilon \partial_1 A_\varepsilon + \partial_1^2 \varphi_\varepsilon + \varepsilon^2 (2\partial_1 A_\varepsilon \partial_1 \varphi_\varepsilon + \partial_2^2 \varphi_\varepsilon + A_\varepsilon \partial_1^2 \varphi_\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^4). \quad (4.86)$$

En particulier, comme $c_\varepsilon = \sqrt{2 - \varepsilon^2}$, l'équation (4.85) nous donne la relation

$$\partial_1 \varphi_\varepsilon = -\sqrt{2} A_\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (4.87)$$

Supposons que A_ε et φ_ε convergent vers des fonctions A et φ , respectivement, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. En dérivant l'équation (4.85) par rapport à la première variable que l'on soustrait à $c_\varepsilon \times$ (4.86) et en utilisant (4.87), lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on arrive à

$$\frac{1}{2} \partial_1 A - \frac{\omega^2}{2} \partial_1^3 A + \partial_1^{-1} \partial_2^2 A + 6A \partial_1 A = 0, \quad (4.88)$$

où $\omega = (1 + \partial_1^2 \widehat{\mathcal{W}}(0,0))^{1/2}$ et

$$\partial_1 \varphi = -\sqrt{2} A. \quad (4.89)$$

Ici, l'opérateur ∂_1^{-1} est défini par

$$\partial_1^{-1} f(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\widehat{f}(\xi, y)}{i\xi} \right) (x, y), \quad (4.90)$$

pour f vérifiant $\xi \rightarrow \widehat{f}(\xi, y)/\xi \in L^2(\mathbb{R})$ et à y fixé. D'après l'expression de u_ε et le calcul effectué, on obtient formellement, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$u_\varepsilon(x, y) \sim (1 + \varepsilon^2 A(\varepsilon x, \varepsilon^2 y)) e^{i\varepsilon\varphi(\varepsilon x, \varepsilon^2 y)}$$

où A est une solution de (4.88) et φ vérifie (4.89). En effectuant un changement d'échelle, on retrouve l'équation de Kadomtsev–Petviashvili I. En effet, posons

$$A(x, y) = \omega \mathbf{A}\left(\frac{x}{\omega}, \frac{y}{\omega}\right) \quad \text{et} \quad \varphi(x, y) = \omega^2 \Phi\left(\frac{x}{\omega}, \frac{y}{\omega}\right).$$

Les équations (4.88) et (4.89) deviennent

$$\frac{1}{2}\partial_1 \mathbf{A} + 6\omega \mathbf{A} \partial_1 \mathbf{A} - \frac{1}{2}\partial_1^3 \mathbf{A} + \partial_1^{-1} \partial_2^2 \mathbf{A} = 0 \quad (4.91)$$

et

$$\partial_1 \Phi = -\sqrt{2} \mathbf{A}. \quad (4.92)$$

De même, avec le changement de variables effectué, l'expression de u_ε devient, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$u_\varepsilon(x, y) \sim \left(1 + \omega \varepsilon^2 \mathbf{A}\left(\frac{\varepsilon x}{\omega}, \frac{\varepsilon^2 y}{\omega}\right)\right) e^{i\varepsilon \omega^2 \Phi\left(\frac{\varepsilon x}{\omega}, \frac{\varepsilon^2 y}{\omega}\right)}.$$

L'équation de Kadomtsev–Petviashvili I en dimension 2 est donnée par

$$\partial_t u - \alpha u \partial_x u + \frac{1}{2} \partial_x^3 u - \partial_x^{-1} \partial_y^2 u = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \quad (\text{KP-I})$$

où u est une fonction à valeurs réelles et $\alpha \in \mathbb{R}$. Si u est une solution de (KP-I) de la forme $u(t, x, y) = \mathbf{A}(x - \frac{t}{2}, y)$ (c'est-à-dire que u est une onde progressive de vitesse $\frac{1}{2}$), alors \mathbf{A} est solution de (4.91) avec $\alpha = 6\omega$. Pour plus de détails sur (KP-I), on renvoie à [65, 25, 26]. Rappelons que (KP-I) est une équation hamiltonienne et son énergie est donnée par

$$E_{KP}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_x u|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_x^{-1} \partial_y^2 u|^2 + \frac{\alpha}{3} \int_{\mathbb{R}^2} u^3 \quad (4.93)$$

et on note \mathcal{S} la fonctionnelle suivante,

$$\mathcal{S}(u) = E_{KP}(u) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u^2, \quad (4.94)$$

appelée l'action. L'existence d'ondes progressives non triviales pour (KP-I) est montré dans [25]. De plus, il est montré que si \mathbf{A} est une onde progressive non triviale de (KP-I), alors $\mathbf{A} \in H^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\partial_x^{-1} \partial_y \mathbf{A} \in H^\infty(\mathbb{R}^2)$ et \mathbf{A} minimise l'action \mathcal{S} (c'est-à-dire que \mathbf{A} est un ground state de (KP-I)). Enfin, \mathbf{A} vérifie les relations suivantes

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} \mathbf{A}^2 + 3\omega \mathbf{A}^3 + \frac{1}{2} (\partial_1 \mathbf{A})^2 + (\partial_1^{-1} \partial_2 \mathbf{A})^2 = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} \mathbf{A}^2 + 2\omega \mathbf{A}^3 - \frac{1}{2} (\partial_1 \mathbf{A})^2 + 3(\partial_1^{-1} \partial_2 \mathbf{A})^2 = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} \mathbf{A}^2 + 2\omega \mathbf{A}^3 + \frac{1}{2} (\partial_1 \mathbf{A})^2 - (\partial_1^{-1} \partial_2 \mathbf{A})^2 = 0. \end{cases} \quad (4.95)$$

Pour plus de détails sur ces résultats et leurs démonstrations, on renvoie aux références citées précédemment.

Lemme 4.2.22. Soit $u_\varepsilon(x, y) = \left(1 + \omega\varepsilon^2 \mathbf{A} \left(\frac{\varepsilon x}{\omega}, \frac{\varepsilon^2 y}{\omega}\right)\right) e^{i\varepsilon\omega^2 \Phi \left(\frac{\varepsilon x}{\omega}, \frac{\varepsilon^2 y}{\omega}\right)}$ où \mathbf{A} est une solution non triviale de l'équation (4.91) et Φ est telle que $\partial_1 \Phi = -\sqrt{2} \mathbf{A}$. Alors

$$E(u_\varepsilon) = 6\varepsilon\omega^4 \mathcal{S}(\mathbf{A}) - \frac{3\omega^4 \varepsilon^3}{2} \mathcal{S}(\mathbf{A}) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad (4.96)$$

et

$$p(u_\varepsilon) = 3\sqrt{2}\varepsilon\omega^4 \mathcal{S}(\mathbf{A}) - \frac{\varepsilon^3 \omega^4}{\sqrt{2}} \mathcal{S}(\mathbf{A}). \quad (4.97)$$

Preuve. D'après la définition de \mathcal{S} en (4.94) et les relations (4.95), on obtient

$$\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{A}^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_1 \mathbf{A})^2 = -\omega \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{A}^3 = 2 \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_1^{-1} \partial_2 \mathbf{A})^2.$$

Ces égalités nous permettront de simplifier les expressions lors des calculs.

Posons $\rho_\varepsilon(x, y) = \left(1 + \omega\varepsilon^2 \mathbf{A} \left(\frac{\varepsilon x}{\omega}, \frac{\varepsilon^2 y}{\omega}\right)\right)$ et $\theta_\varepsilon(x, y) = \varepsilon\omega^2 \Phi \left(\frac{\varepsilon x}{\omega}, \frac{\varepsilon^2 y}{\omega}\right)$. Calculons dans un premier temps l'énergie cinétique. On a

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 \rho_\varepsilon|^2(x, y) = \frac{\varepsilon^6}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 \mathbf{A}|^2 \left(\frac{\varepsilon x}{\omega}, \frac{\varepsilon^2 y}{\omega}\right) = \frac{\varepsilon^3 \omega^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 \mathbf{A}|^2 = \varepsilon^3 \omega^2 \mathcal{S}(\mathbf{A}),$$

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 \rho_\varepsilon|^2(x, y) = \frac{\varepsilon^5 \omega^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 \mathbf{A}|^2,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\rho_\varepsilon \partial_1 \theta_\varepsilon|^2 &= \frac{\omega^4 \varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \omega\varepsilon^2 \mathbf{A})^2 |\partial_1 \varphi|^2 = \omega^4 \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \omega\varepsilon^2 \mathbf{A})^2 \mathbf{A}^2 \\ &= \omega^4 \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{A}^2 + 2\omega^5 \varepsilon^3 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{A}^3 + \omega^6 \varepsilon^5 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{A}^4 \\ &= 3\varepsilon\omega^4 \mathcal{S}(\mathbf{A}) - 2\omega^4 \varepsilon^3 \mathcal{S}(\mathbf{A}) + \omega^6 \varepsilon^5 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{A}^4, \end{aligned}$$

et par (4.90) et (4.92), $\partial_2 \Phi = -\sqrt{2} \partial_1^{-1} \partial_2 \mathbf{A}$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\rho_\varepsilon \partial_2 \theta_\varepsilon|^2 &= \frac{\omega^4 \varepsilon^3}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \omega\varepsilon^2 \mathbf{A})^2 |\partial_2 \Phi|^2 = \omega^4 \varepsilon^3 \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \omega\varepsilon^2 \mathbf{A})^2 |\partial_1^{-1} \partial_2 \mathbf{A}|^2 \\ &= \omega^4 \varepsilon^3 \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1^{-1} \partial_2 \mathbf{A}|^2 + 2\omega^5 \varepsilon^5 \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1^{-1} \partial_2 \mathbf{A}|^2 \mathbf{A} + \omega^6 \varepsilon^7 \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1^{-1} \partial_2 \mathbf{A}|^2 \mathbf{A}^2 \\ &= \frac{1}{2} \omega^4 \varepsilon^3 \mathcal{S}(\mathbf{A}) + 2\omega^5 \varepsilon^5 \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1^{-1} \partial_2 \mathbf{A}|^2 \mathbf{A} + \omega^6 \varepsilon^7 \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1^{-1} \partial_2 \mathbf{A}|^2 \mathbf{A}^2. \end{aligned}$$

Au final, l'énergie cinétique de u_ε est égale à

$$E_{\text{kin}}(u_\varepsilon) = 3\varepsilon\omega^4 \mathcal{S}(\mathbf{A}) + \varepsilon^3 \left(\omega^2 \mathcal{S}(\mathbf{A}) - \frac{3}{2} \omega^4 \mathcal{S}(\mathbf{A}) \right). \quad (4.98)$$

Pour l'énergie potentielle, en utilisant le lemme 4.2.21, on arrive à

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(u_\varepsilon) &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W} * (1 - |\rho_\varepsilon|^2)(x, y) (1 - |\rho_\varepsilon|^2)(x, y) \\ &= \frac{1}{4\varepsilon^3} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_\varepsilon * \left(2\omega\varepsilon^2 \mathbf{A} \left(\frac{\cdot}{\omega}, \frac{\cdot}{\omega}\right) + \omega^2 \varepsilon^4 \mathbf{A}^2 \left(\frac{\cdot}{\omega}, \frac{\cdot}{\omega}\right) \right) (x, y) \left(2\omega\varepsilon^2 \mathbf{A} \left(\frac{x}{\omega}, \frac{y}{\omega}\right) + \omega^2 \varepsilon^4 \mathbf{A}^2 \left(\frac{x}{\omega}, \frac{y}{\omega}\right) \right). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.2.21 et en effectuant un changement de variables, on arrive à

$$\begin{aligned}
 E_{\text{pot}}(u_\varepsilon) &= \frac{\omega^2}{4\varepsilon^3} \int_{\mathbb{R}^2} (2\omega\varepsilon^2 \mathbf{A} + \omega^2\varepsilon^4 \mathbf{A}^2) (2\omega\varepsilon^2 \mathbf{A} + \omega^2\varepsilon^4 \mathbf{A}^2) \\
 &\quad - \frac{\omega^2(\omega^2 - 1)}{8\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} (2\omega\varepsilon^2 \mathbf{A} + \omega^2\varepsilon^4 \mathbf{A}^2) \left(\frac{2}{\omega} \varepsilon^2 \partial_1^2 \mathbf{A} + 2\varepsilon^4 (|\partial_1 \mathbf{A}|^2 + \mathbf{A} \partial_1^2 \mathbf{A}) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \\
 &= \varepsilon\omega^4 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{A}^2 + \varepsilon^3 \left(\omega^5 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{A}^3 - \frac{\omega^2(\omega^2 - 1)}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{A} \partial_1^2 \mathbf{A} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \\
 &= \varepsilon\omega^4 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{A}^2 + \varepsilon^3 \left(\omega^5 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{A}^3 + \frac{\omega^2(\omega^2 - 1)}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 \mathbf{A}|^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \\
 &= 3\varepsilon\omega^4 \mathcal{S}(\mathbf{A}) + \varepsilon^3 (-\omega^4 \mathcal{S}(\mathbf{A}) + \omega^2(\omega^2 - 1) \mathcal{S}(\mathbf{A})) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \\
 &= 3\varepsilon\omega^4 \mathcal{S}(\mathbf{A}) - \varepsilon^3 \omega^2 \mathcal{S}(\mathbf{A}) + \mathcal{O}(\varepsilon^4).
 \end{aligned}$$

En additionnant l'expression précédente avec (4.98), on obtient (4.96). Enfin, pour le moment, on a

$$\begin{aligned}
 p(u_\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \rho_\varepsilon^2)(x, y) \partial_1 \theta_\varepsilon(x, y) = \frac{\omega^3}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} -(2\omega\varepsilon^2 \mathbf{A} + \omega^2\varepsilon^4 \mathbf{A}^2)(x, y) \partial_1 \Phi(x, y) \\
 &= \frac{\omega^3}{\sqrt{2}\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} (2\omega\varepsilon^2 \mathbf{A} + \omega^2\varepsilon^4 \mathbf{A}^2)(x, y) \mathbf{A}(x, y) \\
 &= \sqrt{2}\varepsilon\omega^4 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{A}^2(x, y) + \frac{\varepsilon^3\omega^5}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{A}^3(x, y) = 3\sqrt{2}\varepsilon\omega^4 \mathcal{S}(\mathbf{A}) - \frac{\varepsilon^3\omega^4}{\sqrt{2}} \mathcal{S}(\mathbf{A}).
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire (4.97). □

Preuve de la proposition 4.1.6. Posons

$$\mathfrak{q}_\varepsilon = 3\sqrt{2}\varepsilon\omega^4 \mathcal{S}(\mathbf{A}) - \frac{\varepsilon^3\omega^4}{\sqrt{2}} \mathcal{S}(\mathbf{A}).$$

Comme à la preuve de la proposition 4.2.16, l'idée est d'exprimer ε en fonction de \mathfrak{q}_ε afin d'obtenir $E(u_\varepsilon)$ en fonction de \mathfrak{q}_ε . Afin de simplifier les notations, posons

$$\mathfrak{s}_\varepsilon = \frac{\mathfrak{q}_\varepsilon}{3\sqrt{2}\mathcal{S}(\mathbf{A})\omega^4} = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{6}, \tag{4.99}$$

d'où l'encadrement

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq \mathfrak{s}_\varepsilon \leq \varepsilon \leq 1, \text{ pour tout } \varepsilon \in [0, 1]. \tag{4.100}$$

Par la formule de Taylor–Lagrange et en notant que $\mathfrak{s}_\varepsilon \geq \frac{\varepsilon^3}{6}$, il existe $\mathfrak{r}_\varepsilon \in [\mathfrak{s}_\varepsilon, 2\mathfrak{s}_\varepsilon]$ tel que

$$\varepsilon^3 = \left(\mathfrak{s}_\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{6} \right)^3 = \mathfrak{s}_\varepsilon^3 + \frac{\varepsilon^3}{2} \mathfrak{r}_\varepsilon^2,$$

d'où

$$\varepsilon^3 = \mathfrak{s}_\varepsilon^3 + \mathcal{O}(\mathfrak{s}_\varepsilon^5) = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}\mathcal{S}(\mathbf{A})\omega^4} \right)^3 \mathfrak{q}_\varepsilon^3 + \mathcal{O}(\mathfrak{q}_\varepsilon^5).$$

En utilisant cette expression de ε^3 , (4.99) et (4.96), on arrive à

$$\begin{aligned}
 E(u_\varepsilon) &= 6\varepsilon\omega^4 \mathcal{S}(\mathbf{A}) - \frac{3\omega^4\varepsilon^3}{2} \mathcal{S}(\mathbf{A}) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \\
 &= \sqrt{2}\mathfrak{q}_\varepsilon - K_1 \mathfrak{q}_\varepsilon^3 + \mathcal{O}(\mathfrak{q}_\varepsilon^4),
 \end{aligned}$$

où $K_1 = (108\sqrt{2}\mathcal{S}(\mathbf{A})^2\omega^8)^{-1}$. L'inégalité (4.17) découle du fait que $E(u_\varepsilon) \geq E_{\min}(\mathfrak{q}_\varepsilon)$. □

4.3 Preuve des théorèmes principaux

Grâce aux résultats établis dans la section 4.2, on peut maintenant établir les trois théorèmes principaux de ce chapitre.

Preuve du théorème 4.1.4. L'affirmation (i) s'obtient directement en combinant le lemme 4.2.2, la proposition 4.2.10 et le lemme 4.2.11. La croissance en (ii) s'obtient par le lemme 4.2.12. La proposition 4.2.13 et le lemme 4.2.14 établissent (iii). \square

Preuve du théorème 4.1.5. Par les propositions 4.2.15 et 4.2.16, on obtient les bornes de (i). L'affirmation (ii) a déjà été montrée au lemme 3.2.8 du chapitre précédent. Établissons maintenant (iii). En raisonnant par contradiction, montrons que $E_{\min}(\mathfrak{q}) < \sqrt{2}\mathfrak{q}$, pour tout $\mathfrak{q} > 0$. En effet, d'après (4.21), supposons qu'il existe $\mathfrak{p} > 0$ tel que $E_{\min}(\mathfrak{p}) = \sqrt{2}\mathfrak{p}$. Comme E_{\min} est concave, la fonction $\mathfrak{q} \mapsto E_{\min}(\mathfrak{q})/\mathfrak{q}$ est décroissante, d'où

$$\sqrt{2} = \frac{E_{\min}(\mathfrak{p})}{\mathfrak{p}} \leq \frac{E_{\min}(\mathfrak{q})}{\mathfrak{q}} \leq \sqrt{2}, \quad \text{pour tout } \mathfrak{q} \in]0, \mathfrak{p}[.$$

Ainsi $E_{\min}(\mathfrak{q}) = \sqrt{2}\mathfrak{q}$, pour tout $\mathfrak{q} \in]0, \mathfrak{p}[$, ce qui contredit les bornes en (i). Enfin, par le corollaire 4.2.18, on a $E_{\min}^+(\mathfrak{q}) \rightarrow E_{\min}^+(0) = \sqrt{2}$, lorsque $\mathfrak{q} \rightarrow 0^+$. En utilisant que E_{\min} est croissante, (4.21) et le corollaire 4.2.18, on obtient le reste des affirmations de (iii). \square

Preuve du théorème 4.1.7. Par (iii) du théorème 4.1.4, E_{\min} est concave sur \mathbb{R}^+ et par (iii) du théorème 4.1.5, E_{\min} est strictement sous-additive sur $]0, \mathfrak{q}_* [$ et $E_{\min}(\mathfrak{q}) < \sqrt{2}\mathfrak{q}$ pour tout $\mathfrak{q} \in \mathbb{R}^+$ ce qui avait été supposé dans l'énoncé du théorème 3.1.1. On obtient alors la conclusion du théorème 3.1.1. La stabilité est donnée par le théorème 3.1.3 du chapitre précédent. En combinant, (4.18) et (iii) du théorème 4.1.5, on obtient les propriétés sur la vitesse $c_{\mathfrak{q}}$, excepté $c_{\mathfrak{q}} > 0$. En raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe $\mathfrak{p} \in]0, \mathfrak{q}_* [$ tel que $c_{\mathfrak{p}} = 0$. Ainsi, par (4.16) et (4.18), on obtient $E_{\min}^+(\mathfrak{p}) = 0$. Comme E_{\min} est concave, on a pour tout $\mathfrak{r} < \mathfrak{s}$

$$E_{\min}^-(\mathfrak{r}) \geq E_{\min}^+(\mathfrak{r}) \geq E_{\min}^-(\mathfrak{s}) \geq E_{\min}^+(\mathfrak{s}),$$

ce qui implique $E_{\min}^- = E_{\min}^+ = 0$ sur $[\mathfrak{p}, +\infty)$, i.e. E_{\min} est constante sur $[\mathfrak{p}, +\infty[$, ce qui contredit le fait que E_{\min} est strictement croissante sur $[\mathfrak{p}, \mathfrak{q}_*]$ et ce qui termine la preuve du théorème. \square

Chapitre 5

Méthodes numériques en dimension 1 et 2

5.1 Introduction

Considérons l'équation de Gross–Pitaevskii non locale

$$i\partial_t u = \Delta u + u (\mathcal{W} * (1 - |u|^2)) \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N. \quad (\text{GPN})$$

Le but de ce chapitre est de réaliser une méthode numérique, en dimension 1 et 2, permettant de calculer numériquement des ondes progressives d'énergie finie de (GPN), c'est-à-dire, des solutions de l'équation

$$ic\partial_1 v + \Delta v + v (\mathcal{W} * (1 - |v|^2)) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N, \quad (\text{OPNc})$$

où $c \in \mathbb{R}$ désigne la vitesse de l'onde progressive. Dans les deux chapitres précédents, nous avons vu qu'une manière d'obtenir l'existence d'ondes progressives d'énergie finie est d'utiliser une approche variationnelle et d'étudier le problème de minimisation sous contraintes

$$E_{\min}(\mathbf{q}) = \inf\{E(v) : p(v) = \mathbf{q}\},$$

pour $\mathbf{q} \geq 0$, où E désigne l'énergie de v définie par

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{W} * (1 - |v|^2)) (1 - |v|^2),$$

et p le moment défini en (3.9) si $N = 1$, et en (4.13) si $N = 2$. On renvoie aux théorèmes 4.1.4 et 4.1.7 du chapitre précédent pour l'existence des ondes progressives en dimension 1 et les propriétés de E_{\min} en dimension $N \geq 1$.

L'expression (4.13) du moment n'est pas adaptée pour les calculs numériques puisqu'elle n'est pas définie explicitement. Ainsi, on considère le moment Q défini par

$$Q(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \langle i(u-1), \partial_1 u \rangle. \quad (5.1)$$

Rappelons que lorsque $\mathcal{W} = \delta_0$, les ondes progressives d'énergie finie en dimension 2 tendent vers une constante de module un [37] et présentent une décroissance algébrique vers cette constante, et leurs gradients ont aussi une décroissance algébrique vers zéro [41, 42]. En utilisant ces résultats, on peut en déduire que, si u est solution de (OPc) alors $\langle i(u-1), \partial_1 u \rangle \in L^1(\mathbb{R}^2)$, quitte à multiplier u par une constante de module un. Comme u est d'énergie finie, $\partial_1 u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et le moment $Q(u)$ a bien un sens. Ce moment Q est égal au signe près au moment p défini en (4.13). En effet, en notant que $\langle i\partial_1 u, u \rangle = \langle i\partial_1 u, u-1 \rangle + \langle i\partial_1 u, 1 \rangle$ et par définition de \mathcal{G} en (4.12), on arrive à

$$p(u) = \mathcal{G}(\langle i\partial_1 u, u \rangle) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \langle i\partial_1 u, u-1 \rangle = -Q(u).$$

C. Scheid et D. Chiron proposent dans [21, 22] plusieurs méthodes numériques permettant de calculer des ondes progressives de l'équation

$$i\partial_t u = \Delta u + u f(|u|^2), \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2,$$

lorsque u présente des conditions non nulles à l'infini et pour différentes familles de non-linéarités locales, par exemple lorsque f est cubique-quintique ou lorsque $f(\rho) = 1 - \rho$. Notons que les méthodes numériques utilisées dans [22] permettent de calculer des ondes progressives qui ne sont pas solutions du problème de minimisation $E_{\min}(\mathbf{q})$. Dans notre cas, nous utiliserons en dimension 2 la méthode de pénalisation présentée dans [21], qui nous ramènera à un problème de minimisation sans contraintes. Dans un contexte un peu différent, lorsque les conditions sont nulles à l'infini, X. Antoine et R. Duboscq ont développé un programme, appelé GPElab, permettant de calculer les états fondamentaux et stationnaires de l'équation de Gross–Pitaevskii et de simuler des condensats de Bose–Einstein en rotation (voir par exemple [3]).

Les méthodes proposées dans ce chapitre sont basées sur une méthode de gradient. L'algorithme du gradient est un algorithme d'optimisation numérique permettant de calculer les minimiseurs d'une fonctionnelle. On renvoie à [2] pour une description générale de l'algorithme. Précisément, soit $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable, où E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Notons \langle, \rangle_E un produit scalaire sur E . Pour $X, H \in E$ et $t \rightarrow 0$, par la formule de Taylor, on a

$$F(X + tH) = F(X) + t \langle \nabla F(X), H \rangle_E + o(t).$$

En particulier, si $H = -\nabla F(X)$, c'est-à-dire la plus forte pente, on obtient

$$F(X + tH) = F(X) - t \|\nabla F(X)\|_E^2 + o(t). \quad (5.2)$$

En partant de $U^{(0)} \in E$, l'idée générale de l'algorithme du gradient est de calculer un minimiseur de F par la suite

$$U^{(n+1)} = U^{(n)} - \delta \nabla F(U^{(n)}),$$

puisque, d'après (5.2) et pour $\delta > 0$ assez petit, on a $F(U^{(n+1)}) < F(U^{(n)})$.

L'intérêt d'obtenir numériquement les minimiseurs de E_{\min} est double. D'une part, cela nous permettra de tracer les diagrammes énergie-moment pour une distribution \mathcal{W} donnée afin d'illustrer les résultats établis au chapitre 3 et 4. D'autre part, cela nous permettra de formuler des conjectures en prenant des distributions ne vérifiant pas toutes les hypothèses de la section 4.1.2.

L'organisation de ce chapitre est la suivante. La section 5.2 est consacrée à l'établissement d'une méthode de gradient avec projection en dimension 1. Dans la section 5.2.1, nous ferons quelques rappels sur la transformée de Fourier rapide, qui nous servira à traiter le terme non local de l'énergie potentielle. Après avoir calculé le gradient de l'énergie discrète en section 5.2.2, on tracera les courbes d'énergie ainsi que les solitons numériques pour plusieurs distributions \mathcal{W} données, en section 5.2.3. La section 5.3 est consacrée à la dimension 2 et la section 5.3.1 présente le lien entre la méthode par pénalisation et E_{\min} . La discrétisation du plan, que l'on fera en variables étirées, est détaillée dans la section 5.3.2. La section 5.3.3 est consacrée au calcul du gradient lorsque $\mathcal{W} = \delta_0$. Dans la section 5.3.4, nous présenterons un algorithme de type transformée de Fourier rapide non uniforme pour traiter le terme non local. Enfin, pour différents potentiels \mathcal{W} , les courbes d'énergie et les solitons seront tracés en section 5.3.6.

5.2 Méthode de gradient par projection en dimension 1

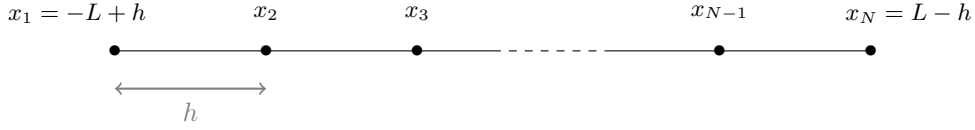
Pour un vecteur $A \in \mathbb{C}^N$ ou \mathbb{R}^N , on note $A[k]$ ou A_k , sa k -ième composante. De plus, pour deux vecteurs A, B de taille N , la notation $A * B$ désigne le vecteur produit de taille N défini par

$$A * B[k] = A[k]B[k].$$

Dans cette section, notre but est d'approcher numériquement les solutions du problème de minimisation sous contraintes

$$E_{\min}(\mathbf{q}) = \inf\{E(v) : p(v) = \mathbf{q}\},$$

pour $\mathbf{q} \geq 0$. Afin de résoudre ce problème, nous allons utiliser une méthode de gradient par projection. Introduisons la discrétisation spatiale que l'on utilisera tout au long de cette section. On se place sur un segment de type $[-L, L]$ avec $L > 0$. Le fait de se placer sur un segment de taille finie est justifié par le fait que, dans le cas $\mathcal{W} = \delta_0$, les solitons présentent une décroissance exponentielle en module vers 1. Le pas d'espace est noté $h > 0$ et $(x_j)_j$ l'ensemble des points équidistants du maillage. Précisément, on a $x_j = -L + jh$ avec $1 \leq j \leq N$ et $N = 2L/h - 1$. Dans l'ensemble du chapitre et des tests numériques, on choisira h et L de sorte que $N \in \mathbb{N}$ et $N \geq 2$. Par convention, on pose $x_0 = -L$ et $x_{N+1} = L$, qui ne sont pas compris dans le maillage. On peut donc schématiser le maillage en espace de la manière suivante :



Avant de détailler notre méthode, rappelons quelques définitions concernant la transformée de Fourier discrète, qui va nous permettre de traiter le terme non local dans l'énergie potentielle.

5.2.1 Utilisation de la transformée de Fourier rapide

On appelle transformée de Fourier discrète (notée TFD) l'application qui, à un vecteur $s = (s[n])_{1 \leq n \leq N} \in \mathbb{C}^N$ donné, associe le vecteur $S \in \mathbb{C}^N$ de composantes

$$S[k] = \sum_{n=1}^N s[n] e^{-\frac{2\pi i}{N} (n - \frac{N+1}{2})(k - \frac{N+1}{2})}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq N. \quad (5.3)$$

De même, on définit la transformée de Fourier discrète inverse (notée iTFD) par l'application qui, à un vecteur $R = (R[n])_{1 \leq n \leq N}$ donné, associe le vecteur r de composantes

$$r[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N R[n] e^{+\frac{2\pi i}{N} (n - \frac{N+1}{2})(k - \frac{N+1}{2})}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq N. \quad (5.4)$$

Notons que ces opérations sont inverses l'une de l'autre. Un calcul direct donne un coût de $\mathcal{O}(N^2)$ pour un vecteur de taille N , ce qui peut devenir très long à calculer numériquement si $N \gg 1$.

En 1965, John Tukey et James Cooley proposent l'algorithme de la transformée de Fourier rapide, notée *fft*, à l'usage des télécommunications et du traitement du signal (voir [60] pour le détail de l'algorithme et pour des applications), calculant la TFD d'un vecteur de taille N tout en réduisant le coût à $\mathcal{O}(N \log(N))$, ce qui devient beaucoup plus intéressant au niveau du temps de calcul. On utilisera dans l'ensemble du document la notation *fft* (resp. *ifft*) pour calculer la TFD (resp. la iTFD) d'un vecteur, via cet algorithme. L'objectif de la partie suivante est d'utiliser la *fft* afin d'approcher la transformée de Fourier continue.

L'approximation est basée sur le calcul suivant. Soit f une fonction à support compact, dont le support est inclus dans $[-L + h, L - h]$. Alors, la formule des rectangles à gauche nous donne, pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{-L+h}^L f(x) e^{-ix\xi} dx = \sum_{j=1}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) e^{-ix\xi} dx = h \sum_{j=1}^N f(x_j) e^{-ix_j \xi} + \mathcal{O}(h).$$

Notons que $\mathcal{O}(h)$ dépend de ξ . De plus, comme $N = 2L/h - 1$, on obtient que $x_j = h(j - \frac{N+1}{2})$. D'après (5.3) et les calculs qui précèdent, on définit *fts*, approximation de la transformée de Fourier d'une fonction f , par

$$\text{fts}(V_f) := h \text{fft}(V_f), \quad (5.5)$$

où

$$V_f = [f(x_1), \dots, f(x_N)]. \quad (5.6)$$

Ainsi, $\text{fts}(V_f)[k]$ est une approximation de $\widehat{f}(\xi_k)$ où ξ_k est défini par

$$\xi_k = \frac{2\pi}{hN} \left(k - \frac{N+1}{2} \right), \quad 1 \leq k \leq N. \quad (5.7)$$

De la même manière, par la formule des rectangles à gauche, la transformée de Fourier inverse sera approchée par

$$\text{ifts}(V_g) := \frac{1}{h} \text{ifft}(V_g), \quad (5.8)$$

où

$$V_g = [g(\xi_1), \dots, g(\xi_N)]. \quad (5.9)$$

L'étude de l'erreur pour la transformée de Fourier continue est effectuée en annexe à la proposition B.1. Comme expliqué dans l'introduction, le but de cette partie est de réaliser une convolution numérique par l'intermédiaire de la fft. Rappelons que pour deux vecteurs U et V de taille $N \geq 1$, la convolution numérique calcule la quantité

$$\text{conv}_{\text{num}}(U, V)[k] = \sum_{j=1}^k U[j]V[k+1-j].$$

Dans le cas où $U = U_f = [f(x_1), \dots, f(x_N)]$ et $V = V_g = [g(x_1), \dots, g(x_N)]$ avec f et g à support dans $[-L, L]$, la quantité

$$h\text{conv}_{\text{num}}(U_f, V_g)[k]$$

est une approximation par la formule des rectangles à gauche de

$$f * g(x_k) = \int_{[-L, L]} f(x)g(x - x_k)dx.$$

Soient f et g appartenant à $S(\mathbb{R})$. Exprimons la convolée de f et g en terme de leur transformée de Fourier. Comme

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

et $\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) \in S(\mathbb{R})$, par inversion de Fourier, on obtient

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)). \quad (5.10)$$

Ainsi, en utilisant les approximations (5.5) et (5.8), la convolution par fft est définie, pour deux vecteurs $U, V \in \mathbb{C}^N$, par

$$\text{conv}_{\text{fft}}(U, V) := \text{ifts}(\text{fts}(U) * \text{fts}(V)). \quad (5.11)$$

D'après (5.5), (5.8) et (5.11), conv_{fft} est une application bilinéaire. La convolution (5.11) présente deux avantages par rapport à la convolution numérique. D'une part, dans le cas où l'on connaît déjà la transformée de Fourier de f ou g , il suffit de remplacer la quantité $\text{fts}(U)$ ou $\text{fts}(V)$ par $(\widehat{f}(\xi_k))_k$ ou $(\widehat{g}(\xi_k))_k$. Le second avantage est la rapidité de conv_{fft} par rapport à la convolution numérique. Considérons deux vecteurs U et V de taille $N \geq 1$. Le calcul de $\text{conv}_{\text{num}}(U, V)[k]$ nécessite k additions et k multiplications. Ainsi, le coût total de $\text{conv}_{\text{num}}(U, V)$ est de $\sum_{k=1}^N 2k = \mathcal{O}(N^2)$. À l'inverse, le calcul de la convolution par fft nécessite un coût de :

- $\mathcal{O}(N \log(N))$ pour le calcul de $\text{fts}(U)$
- $\mathcal{O}(N \log(N))$ pour le calcul de $\text{fts}(V)$
- $\mathcal{O}(N)$ pour le calcul de $\text{fts}(U) * \text{fts}(V)$
- $\mathcal{O}(N \log(N))$ pour le calcul de $\text{ifts}(\text{fts}(U) * \text{fts}(V))$

Au final, on obtient un coût total de $\mathcal{O}(N \log(N))$. La différence entre conv_{fft} et conv_{num} en terme de temps de calcul est illustré en annexe.

La formule (5.11) va nous permettre de calculer numériquement le produit de convolution $\mathcal{W}*(1-|u|^2)$ dans l'énergie potentielle. Dans la plupart des cas, il sera plus intéressant de travailler avec $\widehat{\mathcal{W}}$ plutôt qu'avec \mathcal{W} . Ainsi, à partir de maintenant, on utilise l'abus de notation, pour $A \in \mathbb{C}^N$,

$$\text{conv}_{\text{fft}}(\mathcal{W}, A)[k] := \frac{1}{h} \sum_{j=1}^N \widehat{\mathcal{W}}(\xi_j) \text{fts}(A)[j] e^{\frac{2i\pi}{N}(k - \frac{N+1}{2})(j - \frac{N+1}{2})}. \quad (5.12)$$

Ici la transformée de Fourier de \mathcal{W} est connue et il n'est pas nécessaire de calculer son approximation par fts. Terminons cette sous-section par la propriété suivante.

Proposition 5.2.1. *Soient \mathcal{W} une distribution tempérée vérifiant les hypothèses (H1)-(H2) et A, B deux vecteurs appartenant à \mathbb{C}^N . Alors,*

$$\sum_{k=1}^N \text{conv}_{\text{fft}}(\mathcal{W}, A)[k] B[k] = \sum_{k=1}^N \text{conv}_{\text{fft}}(\mathcal{W}, B)[k] A[k]. \quad (5.13)$$

L'hypothèse (H2) est juste utilisée ici pour la continuité de $\widehat{\mathcal{W}}$. La formule (5.13) est l'analogue discret de la relation (3.12).

Preuve. Par le changement d'indice $m = (N+1)/2 - n$ et en développant $\text{conv}_{\text{fft}}(\mathcal{W}, A)$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \text{conv}_{\text{fft}}(\mathcal{W}, A)[k] B[k] &= \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N \widehat{\mathcal{W}}(\xi_n) \left(\sum_{j=1}^N A[j] e^{-\frac{2i\pi}{N}(j - \frac{N+1}{2})(n - \frac{N+1}{2})} \right) e^{\frac{2i\pi}{N}(n - \frac{N+1}{2})(k - \frac{N+1}{2})} B[k] \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{m=(N-1)/2}^{(1-N)/2} \widehat{\mathcal{W}}\left(\xi_{\frac{N+1}{2}-m}\right) \left(\sum_{j=1}^N A[j] e^{\frac{2i\pi}{N}(j - \frac{N+1}{2})m} \right) e^{-\frac{2i\pi}{N}m(k - \frac{N+1}{2})} B[k]. \end{aligned}$$

Comme \mathcal{W} vérifie (H1), $\widehat{\mathcal{W}}$ est paire, donc

$$\widehat{\mathcal{W}}\left(\xi_{\frac{N+1}{2}-m}\right) = \widehat{\mathcal{W}}\left(\xi_{\frac{N+1}{2}+m}\right).$$

Ainsi, en effectuant le changement d'indices $n = m + (N+1)/2$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \text{conv}_{\text{fft}}(\mathcal{W}, A)[k] B[k] &= \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N \widehat{\mathcal{W}}(\xi_n) \left(\sum_{j=1}^N A[j] e^{\frac{2i\pi}{N}(j - \frac{N+1}{2})(n - \frac{N+1}{2})} \right) e^{-\frac{2i\pi}{N}(n - \frac{N+1}{2})(k - \frac{N+1}{2})} B[k] \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^N \widehat{\mathcal{W}}(\xi_n) \left(\sum_{k=1}^N B[k] e^{-\frac{2i\pi}{N}(k - \frac{N+1}{2})(n - \frac{N+1}{2})} \right) e^{\frac{2i\pi}{N}(n - \frac{N+1}{2})(j - \frac{N+1}{2})} A[j] \\ &= \sum_{k=1}^N \text{conv}_{\text{fft}}(\mathcal{W}, B)[k] A[k], \end{aligned}$$

par permutation des sommes, ce qui nous donne la relation voulue. \square

5.2.2 Mise en oeuvre

Pour une onde progressive v solution de (OPc), par le théorème 1 de l'introduction générale, on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x),$$

et ces deux limites dépendent de la vitesse c . Ainsi, il n'est pas possible d'imposer au bord des conditions de Dirichlet pour notre problème puisque la vitesse n'est pas connue par avance. Par contre, les solitons

du théorème 1 présentent une décroissance exponentielle en module vers 1. Ainsi, pour x assez grand et si u est solution de (OPNc) lorsque $\mathcal{W} = \delta_0$, on a $u'(x) \simeq 0$. De ce fait, on considère des conditions de bord de type Neumann, c'est-à-dire que pour $U \in \mathbb{C}^N$, on pose

$$\begin{cases} U[0] = U[1], \\ U[N] = U[N+1]. \end{cases} \quad (5.14)$$

Soit \mathcal{W} une distribution tempérée vérifiant (H1)-(H2). L'énergie et le moment sont discrétisés par la formule des rectangles à gauche : Pour $U \in \mathbb{C}^N$ vérifiant (5.14), avec $U[k] \neq 0$ pour tout $1 \leq k \leq N$, on pose

$$E_{\text{kin}}^\delta(U) = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \left| \frac{U[k+1] - U[k]}{h} \right|^2, \quad E_{\text{pot}}^\delta(U) = \frac{h}{4} \sum_{k=1}^N \text{conv}_{\text{fft}}(\mathcal{W}, (1 - |U|^2))[k](1 - |U|^2)[k]$$

et

$$p^\delta(U) = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \text{Re} \left(i \frac{U[k+1] - U[k]}{h} \overline{U[k]} \right) \left(1 - \frac{1}{|U[k]|^2} \right).$$

Dans notre cas, \mathbb{C}^N est vu comme un \mathbb{R} espace vectoriel de dimension $2N$, muni du produit scalaire suivant : Pour $U, V \in \mathbb{C}^N$, on note

$$(U, V)_{\mathbb{C}^N} := h \sum_{k=1}^N \langle U[k], V[k] \rangle, \quad (5.15)$$

où $\langle a, b \rangle = \text{Re}(a\bar{b})$. Par une méthode de gradient avec projection, nous allons calculer numériquement un vecteur $U \in \mathbb{C}^N$ solution du problème

$$\min \{ E^\delta(U) : p^\delta(U) = \mathbf{q} \}.$$

Ce problème est l'équivalent discret du problème de minimisation sous contraintes $E_{\text{min}}(\mathbf{q})$. La propriété qui suit nous donne l'expression du gradient de E_{kin}^δ et E_{pot}^δ pour le produit scalaire (5.15).

Proposition 5.2.2. *Soit \mathcal{W} une distribution vérifiant les hypothèses (H1)-(H2). Pour tout $1 \leq k \leq N$,*

$$\nabla E_{\text{kin}}^\delta(U)[k] = \frac{1}{h^2} (2U[k] - U[k-1] - U[k+1]) \quad (5.16)$$

et

$$\nabla E_{\text{pot}}^\delta(U)[k] = -U[k] \text{conv}_{\text{fft}}(\mathcal{W}, 1 - |U|^2)[k]. \quad (5.17)$$

Preuve. Soit $H \in \mathbb{C}^N$ et $t \neq 0$. Démontrons dans un premier temps (5.16). On a,

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{kin}}^\delta(U + tH) - E_{\text{kin}}^\delta(U)}{t} &= \frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \langle U[k+1] - U[k], H[k+1] - H[k] \rangle + \mathcal{O}(t) \\ &= \frac{1}{h} \sum_{k=2}^{N+1} \langle U[k] - U[k-1], H[k] \rangle - \frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \langle U[k+1] - U[k], H[k] \rangle + \mathcal{O}(t). \end{aligned}$$

Par (5.14), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{kin}}^\delta(U + tH) - E_{\text{kin}}^\delta(U)}{t} &= \frac{1}{h} \sum_{k=2}^N \langle 2U[k] - U[k-1] - U[k+1], H[k] \rangle - \frac{1}{h} \langle U[2] - U[1], H[1] \rangle + \mathcal{O}(t) \\ &= \frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \langle 2U[k] - U[k-1] - U[k+1], H[k] \rangle + \mathcal{O}(t), \end{aligned}$$

ce qui nous donne (5.16) lorsque t tend vers 0.

Calculons maintenant le second gradient. Par linéarité de $A \mapsto \text{conv}_{\text{fft}}(\mathcal{W}, A)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{pot}}^\delta(U + tH) - E_{\text{pot}}^\delta(U)}{t} &= \frac{h}{4t} \sum_{k=1}^N ((1 - |U + tH|^2)[k] - (1 - |U|^2)[k]) \text{conv}_{\text{fft}}(\mathcal{W}, 1 - |U + tH|^2)[k] \\ &\quad + \frac{h}{4} \sum_{k=1}^N (1 - |U|^2)[k] \frac{1}{t} \text{conv}_{\text{fft}}(\mathcal{W}, (1 - |U + tH|^2) - (1 - |U|^2))[k]. \end{aligned}$$

Comme $(1 - |U + tH|^2)[k] - (1 - |U|^2)[k] = -2t\langle U[k], H[k] \rangle + \mathcal{O}(t^2)$, on obtient par passage à la limite,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E_{\text{pot}}^\delta(U + tH) - E_{\text{pot}}^\delta(U)}{t} &= \frac{h}{4} \sum_{k=1}^N (-2\langle U[k], H[k] \rangle \text{conv}_{\text{fft}}(\mathcal{W}, 1 - |U|^2)[k] - 2\text{conv}_{\text{fft}}(\mathcal{W}, \langle U, H \rangle)[k](1 - |U|^2)[k]). \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 5.2.1, on obtient (5.17). □

Décrivons maintenant la méthode de gradient avec projection. On fixe un vecteur $U^{(0)} \in \mathbb{C}^N$, $\mathfrak{q} > 0$, un pas de descente $d_1 > 0$, un pas de projection $d_2 > 0$, et deux tolérances, $\varepsilon_1 > 0$ la tolérance globale et $\varepsilon_2 > 0$, la tolérance de projection. Une itération est divisée en deux étapes. La première étape consiste à diminuer la fonctionnelle d'énergie $E^\delta = E_{\text{kin}}^\delta + E_{\text{pot}}^\delta$, grâce au calcul du gradient effectué à la proposition 5.2.2. La seconde étape est l'étape de projection. On notera par $L_{\mathfrak{q}}$ l'étape de projection, c'est-à-dire qu'à partir d'un vecteur $V \in \mathbb{C}^N$, on obtient un vecteur $L_{\mathfrak{q}}(V) = U$ avec $|p^\delta(U) - \mathfrak{q}| \leq \varepsilon_2$. Cette étape de projection est basée sur le calcul formel suivant. La proposition 3.4.2 au chapitre 3 nous donne que la différentielle du moment renormalisé est égale à

$$dp(u)[\varphi] = \int_{\mathbb{R}} \langle iu', \varphi \rangle, \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Soient $\mathfrak{q} > 0$ et u une solution de l'équation

$$\partial_t u = -i(\mathfrak{q} - p(u))\partial_x u. \quad (5.18)$$

Alors,

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{q} - p(u))^2 = -2(\mathfrak{q} - p(u))dp(u)[\partial_t u] = -2(\mathfrak{q} - p(u)) \int_{\mathbb{R}} \langle i\partial_x u, \partial_t u \rangle.$$

Comme u est solution de (5.18), on obtient

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{q} - p(u))^2 = -2(\mathfrak{q} - p(u))^2 \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u|^2 \leq 0,$$

et la fonction $t \mapsto (\mathfrak{q} - p(u(t)))^2$ est décroissante. En notant, pour un vecteur $V \in \mathbb{C}^N$, le vecteur $\partial_x V \in \mathbb{C}^N$ défini par

$$\partial_x V[k] := \begin{cases} \frac{V[k+1] - V[k]}{h} & \text{si } k \neq N, \\ 0 & \text{si } k = N, \end{cases}$$

l'algorithme de projection s'écrit alors,

Données : Pour $V \in \mathbb{C}^N$, $d_2 > 0$ et $\mathfrak{q} > 0$
 Poser $V^{(0)} = V$, $k = 0$ et $r(0) = 2\varepsilon_2$
tant que $r(k) > \varepsilon_2$ **faire**
 | -Calculer $V^{(k+1)} = V^{(k)} - id_2 (\mathfrak{q} - p^\delta(V^{(k)})) \partial_x V^{(k)}$
 | -Calculer le résidu $r^{(k+1)} = |\mathfrak{q} - p^\delta(V^{(k+1)})|$
 | -Itérer $k \leftarrow k + 1$
fin

Algorithme 1 : Méthode de projection.

Enfin, l'algorithme général de la méthode de gradient s'écrit de la manière suivante :

Données : Pour $U \in \mathbb{C}^N$, $d_1 > 0$ et $\mathfrak{q} > 0$
 Poser $U^{(0)} = U$, $k = 0$ et $r(0) = 2\varepsilon_1$
tant que $r(k) > \varepsilon_1$ **faire**
 | -Calculer $V^{(k)} = U^{(k)} - d_1 \nabla E^\delta(U^{(k)})$
 | -Poser $U^{(k+1)} = L_{\mathfrak{q}}(V^{(k)})$
 | -Calculer le résidu $r^{(k+1)} = \|U^{(k+1)} - U^{(k)}\|_\infty$
 | -Itérer $k \leftarrow k + 1$
fin

Algorithme 2 : Méthode de gradient à pas constant avec projection.

Dans l'ensemble des tests numériques présentés en section suivante, on fixe une tolérance globale de $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ et une tolérance de projection de $\varepsilon_2 = 10^{-6}$. Pour la taille du segment, on choisit L de l'ordre de 10^3 . Le pas d'espace h sera pris entre $h = 0.1$ et $h = 0.01$, les pas d_1, d_2 sont pris égaux à 10^{-3} ou 10^{-4} . Concernant le vecteur d'initialisation, il est intéressant de prendre $U^{(0)}$ proche d'une approximation d'un soliton de (GPN), afin de réduire le temps de calcul. En utilisant l'équation de Korteweg–de Vries en section 4.2.4, nous avons montré formellement que, lorsque $c = \sqrt{2 - \varepsilon^2}$,

$$u(x) \sim (1 + \varepsilon^2 A(\varepsilon x)) e^{i\varepsilon \varphi(\varepsilon x)}$$

où u est la solution de (OPNc) et

$$A(x) = -\frac{1}{4} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{2\omega}\right), \quad \varphi(x) = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \tanh\left(\frac{x}{2\omega}\right) \quad \text{et} \quad \omega = (1 + (\widehat{\mathcal{W}})''(0))^{1/2}.$$

Cela permet d'obtenir une approximation numérique des solitons de vitesse $c \sim \sqrt{2}$ (donc de moment $\mathfrak{q} \sim 0$), pour une distribution \mathcal{W} choisie.

Pour $\widehat{\mathcal{W}}$ (ou \mathcal{W}) fixé et $\mathfrak{q} > 0$ proche de 0, en démarrant d'un vecteur $U^{(0)}$, on calcule numériquement $U_{\mathfrak{q}} \in \mathbb{C}^N$ (i.e. $p^\delta(U_{\mathfrak{q}}) = \mathfrak{q}$) et son énergie $E^\delta(U_{\mathfrak{q}})$ par la méthode de gradient avec projection. Une fois le vecteur $U_{\mathfrak{q}}$ obtenu, on augmente la valeur de \mathfrak{q} de $\Delta\mathfrak{q} = 0.01$ et on calcule le vecteur $U_{\mathfrak{q}+\Delta\mathfrak{q}}$ (i.e. $p^\delta(U_{\mathfrak{q}+\Delta\mathfrak{q}}) = \mathfrak{q} + \Delta\mathfrak{q}$) en prenant cette fois comme initialisation $U^{(0)} = U_{\mathfrak{q}}$. On itère cette procédure jusqu'à obtenir assez de points pour tracer la courbe d'énergie $E^\delta(U_{\mathfrak{q}})$ en fonction de \mathfrak{q} , approximation de $E_{\min}(\mathfrak{q})$.

5.2.3 Observations numériques

Calculons numériquement les vecteurs $U_{\mathfrak{q}}$ par notre méthode de gradient avec projection pour les potentiels (i) et (ii) de la section 4.1.2. En figure 5.1, on trace la courbe d'énergie $E^\delta(U_{\mathfrak{q}})$ en fonction de \mathfrak{q} et les vecteurs $U_{\mathfrak{q}}$ en module correspondants à $\mathfrak{q} = 0.05$, $\mathfrak{q} = 0.55$, $\mathfrak{q} = 1.1$ et $\mathfrak{q} = 1.5$, pour les potentiels

$$\mathcal{W}_{\alpha,\beta} = \frac{\beta}{\beta - 2\alpha} (\delta_0 - \alpha e^{-\beta|x|}), \quad (5.19)$$

avec $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.15$, et

$$\mathcal{W}_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}(\delta_0 - \alpha\mathcal{V}), \quad \text{avec } \widehat{\mathcal{V}}(\xi) = \frac{3(\xi \coth(\xi) - 1)}{\xi^2}, \quad (5.20)$$

avec $\alpha = 0.8$. Dans les deux cas, on observe que la courbe d'énergie est concave et que la droite $\sqrt{2}\mathfrak{q}$ est tangente à la courbe, ce qui est en accord avec les propriétés sur la courbe minimisante démontrés aux théorèmes 4.1.4 et 4.1.5. Notons que la forme des graphes en figure 5.1-(d) et les solitons pour $\mathcal{W} = \delta_0$, tracés en figure 1.2, sont très similaires. À l'inverse, les graphes des vecteurs $U_{\mathfrak{q}}$ en figure 5.1-(b) sont assez différents et présentent des valeurs supérieures à 1 sur \mathbb{R}^+ . Remarquons enfin que la courbe d'énergie, pour chacun des deux potentiels, semble constante pour $\mathfrak{q} > 1.5$, comme dans le cas $\mathcal{W} = \delta_0$ pour la courbe E_{\min} (voir figure 3.1).

Étudions maintenant deux autres potentiels. Le premier est proposé dans [68] comme modèle pour l'interaction dans la condensation de Bose–Einstein

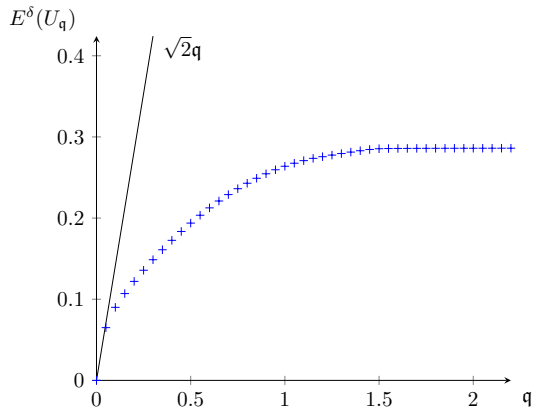
$$\mathcal{W}_\sigma = 2\delta_0 - \frac{1}{2}(\delta_\sigma + \delta_{-\sigma}). \quad (5.21)$$

Notons que $\widehat{\mathcal{W}}_\sigma(\xi) = 2 - \cos(\sigma\xi)$, et pour $\sigma > 0$, \mathcal{W}_σ vérifie (H1), (H2). De plus, $\widehat{\mathcal{W}}_\sigma$ est analytique sur \mathbb{C} , mais présente une croissance exponentielle sur \mathbb{H} . Ainsi, \mathcal{W}_σ ne vérifie pas (4.5) dans (H3). Cependant, les tracés en figure 5.2-(a) et (b) montrent que la courbe d'énergie est concave et qu'il semble exister des ondes progressives pour tout $\mathfrak{q} \in]0, \mathfrak{q}_*[$. Notons que les graphes des vecteurs $U_{\mathfrak{q}}$ présentent des oscillations, à la différence de ceux tracés en figure 5.1. Cela nous amène à penser que l'hypothèse (H3) est une condition suffisante mais non nécessaire pour assurer la concavité de la courbe minimisante et donc l'existence d'ondes progressives.

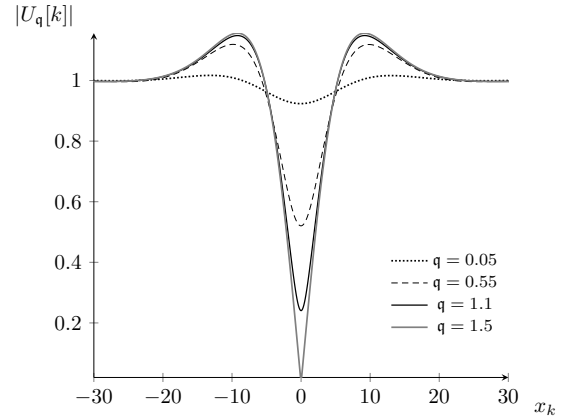
Finalement, considérons

$$\widehat{\mathcal{W}}_{a,b,c}(\xi) = (1 + a\xi^2 + b\xi^4)e^{-c\xi^2}, \quad (5.22)$$

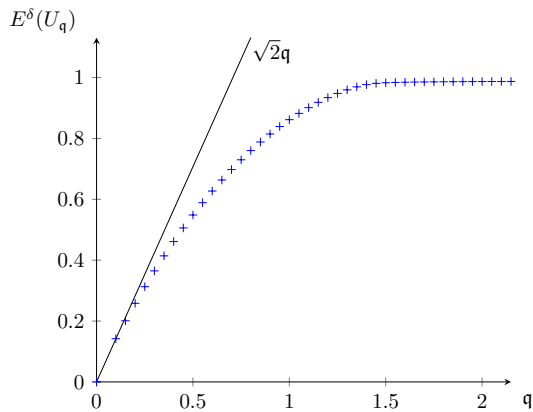
proposé dans [6, 64] afin de décrire un fluide quantique comme l'Hélium 4. Pour (5.22), on considère les paramètres $a = -36$, $b = 2687.38$, $c = 29.58$. Dans ce cas, la distribution vérifie (H1), mais ne vérifie pas (H2) ni (H3). Cependant, on observe en figure 5.2 que la courbe d'énergie est à nouveau concave et que la droite $\sqrt{2}\mathfrak{q}$ est tangente à la courbe. Enfin, on obtient encore la même valeur critique pour le moment, i.e. $\mathfrak{q}_* \simeq 1.55$.



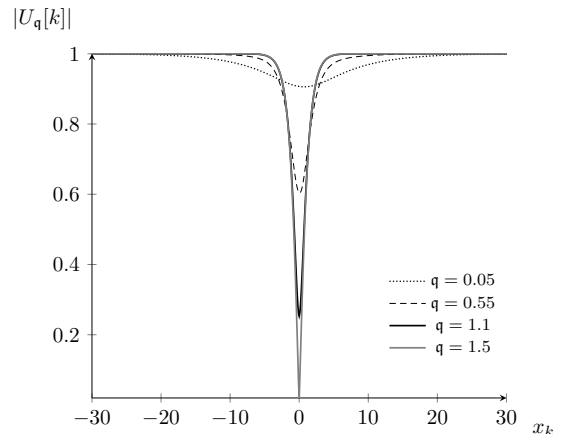
(a) Courbe d'énergie pour (5.19) et $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.15$.



(b) $|U_q|$ pour (5.19) et $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.15$.

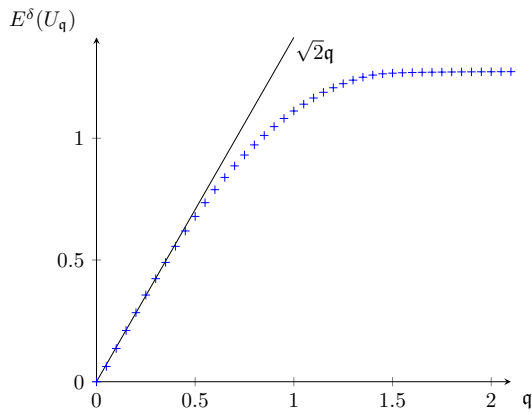


(c) Courbe d'énergie pour (5.20) et $\alpha = 0.8$.

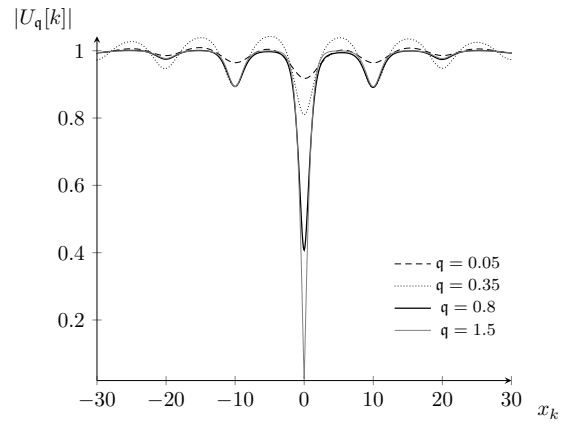


(d) $|U_q|$ pour (5.20) et $\alpha = 0.8$.

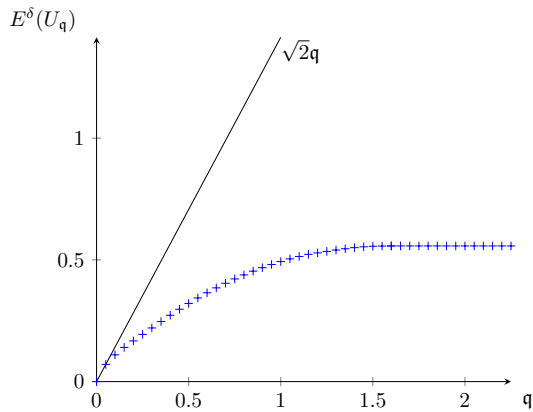
FIGURE 5.1 – Courbes d'énergie et vecteurs U_q en module pour les potentiels (5.19) et (5.20).



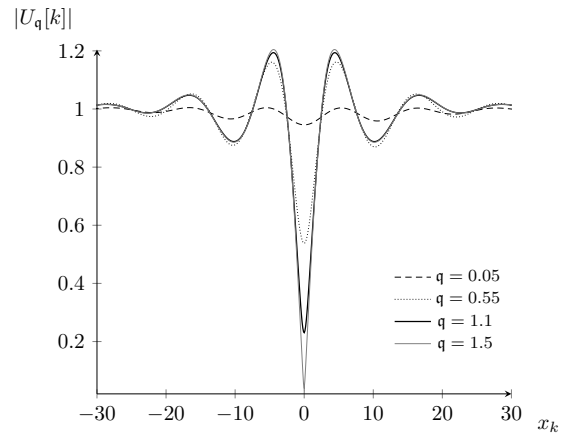
(a) Courbe d'énergie pour (5.21) et $a = 10$.



(b) $|U_q|$ pour (5.21) et $a = 10$.



(c) Courbe d'énergie pour (5.22) et $a = -36$, $b = 2687.38$, $c = 29.58$.



(d) $|U_q|$ pour (5.22) et $a = -36$, $b = 2687.38$, $c = 29.58$.

FIGURE 5.2 – Courbes d'énergie et vecteurs U_q en module pour les potentiels (5.21) et (5.22).

5.3 Méthode par pénalisation en dimension 2

5.3.1 Description de la méthode et lien avec E_{\min}

La pénalisation est une méthode permettant de transformer un problème de minimisation avec contraintes en un problème de minimisation sans contraintes. Nous renvoyons à [2] pour le principe général et à [21, 22] pour l'application au calcul numérique d'ondes progressives dans le cas d'une interaction locale.

Pour $\mu > 0, \alpha > 0$ et $v \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$, on définit la fonctionnelle \mathcal{L} par

$$\mathcal{L}(v, \mu) = E(v) + \frac{\alpha}{2}(\mu - Q(v))^2, \quad (5.23)$$

où

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{W} * (1 - |v|^2)) (1 - |v|^2) \quad \text{et} \quad Q(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \langle i(v - 1), \partial_1 v \rangle.$$

Pour $v \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$, on suppose implicitement que $v - 1 \in L^2(\mathbb{R})$, de sorte que son moment $Q(v)$ ait bien un sens. Considérons le problème de minimisation

$$\mathcal{L}_{\min}(\mu) = \inf\{\mathcal{L}(v, \mu) : v \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)\}. \quad (5.24)$$

La proposition qui suit établit le lien entre \mathcal{L}_{\min} et E_{\min} . Cette proposition est une version adaptée au cas non local de la proposition 3 dans [21]. Pour la preuve, nous aurons besoin de supposer la régularité de E_{\min} . Notons que si E_{\min} est dérivable sur \mathbb{R} , la relation (4.19) du théorème 4.1.8 devient

$$\frac{dE_{\min}}{dQ}(\mathbf{q}) = c_{\mathbf{q}}. \quad (5.25)$$

Proposition 5.3.1. *Soient \mathcal{W} une distribution vérifiant les hypothèses (H1)–(H2), μ, \mathbf{q}, α des constantes strictement positives et $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ telle que $Q(u) = \mathbf{q}$. Supposons que E_{\min} soit concave et dérivable sur \mathbb{R}^+ .*

- (i) *Si u est solution du problème $\mathcal{L}_{\min}(\mu)$, alors u est solution du problème $E_{\min}(\mathbf{q})$. De plus, u est solution de (OPNc) avec une vitesse $c = c_{\mathbf{q}}$ vérifiant (5.25).*
- (ii) *Supposons que E_{\min} admette une dérivée seconde en \mathbf{q} telle que*

$$\frac{d^2 E_{\min}}{dQ^2}(\mathbf{q}) > -\alpha. \quad (5.26)$$

Si u est solution du problème de minimisation $E_{\min}(\mathbf{q})$, alors u est solution de (OPNc) avec une vitesse $c = c_{\mathbf{q}}$ vérifiant (5.25) et u est un minimiseur local de $\mathcal{L}(\cdot, \mu)$ pour $\mu = \mathbf{q} + c_{\mathbf{q}}/\alpha$.

Le fait de minimiser \mathcal{L}_{\min} permet ainsi de retrouver les minimiseurs de E_{\min} et donc des ondes progressives de (OPNc). Cette méthode présente l'avantage de faire disparaître la contrainte sur le moment et donc d'éviter une étape supplémentaire de projection, comme pour notre méthode en dimension 1. À l'inverse, il n'est pas possible de choisir un \mathbf{q} particulier pour le calcul d'un minimiseur de \mathcal{L}_{\min} .

Preuve. Montrons (i). Soit $v \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ avec $Q(v) = Q(u) = \mathbf{q}$. Comme u est solution de $\mathcal{L}_{\min}(\mu)$, on a

$$\mathcal{L}(u, \mu) = E(u) + \frac{\alpha}{2}(\mu - Q(u))^2 \leq \mathcal{L}(v, \mu) = E(v) + \frac{\alpha}{2}(\mu - Q(v))^2$$

c'est-à-dire, $E(u) \leq E(v)$. Comme v est arbitraire et par définition de $E_{\min}(\mathbf{q})$, on obtient que u est solution du problème $E_{\min}(\mathbf{q})$. Le fait que u soit solution de (OPNc) découle directement du théorème 4.1.8.

Montrons maintenant (ii). À nouveau, par le théorème 4.1.8, u est solution de (OPNc) avec une vitesse c_q satisfait la relation (5.25). Comme $\mu = \mathfrak{q} + c_q/\alpha$ et $E(u) = E_{\min}(\mathfrak{q})$, on a, pour $v \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v, \mu) - \mathcal{L}(u, \mu) &= E(v) - E(u) + \frac{\alpha}{2}(2\mu - Q(v) - Q(u))(Q(u) - Q(v)) \\ &= E(v) - E(u) + \frac{\alpha}{2}(\mathfrak{q} - Q(v) + 2c_q/\alpha)(\mathfrak{q} - Q(v)) \\ &= E(v) - E(u) + \frac{\alpha}{2}(\mathfrak{q} - Q(v))^2 + c_q(\mathfrak{q} - Q(v)) \\ &\geq E_{\min}(Q(v)) - E_{\min}(\mathfrak{q}) + \frac{\alpha}{2}(\mathfrak{q} - Q(v))^2 + c_q(\mathfrak{q} - Q(v)). \end{aligned}$$

Choisissons v dans un voisinage de u , de sorte que $Q(v)$ soit proche de $Q(u) = \mathfrak{q}$ (voir corollaire 2.4 dans [19]). Ainsi, en utilisant la relation (5.25) et en appliquant la formule de Taylor à E_{\min} en \mathfrak{q} à l'ordre deux, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v, \mu) - \mathcal{L}(u, \mu) &\geq \frac{1}{2} \frac{d^2 E_{\min}}{dQ^2}(\mathfrak{q})(\mathfrak{q} - Q(v))^2 + \frac{\alpha}{2}(\mathfrak{q} - Q(v))^2 + o((\mathfrak{q} - Q(v))^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 E_{\min}}{dQ^2}(\mathfrak{q}) + \alpha \right) (\mathfrak{q} - Q(v))^2 + o((\mathfrak{q} - Q(v))^2). \end{aligned}$$

Pour $Q(v)$ proche de \mathfrak{q} et en choisissant α comme en (5.26), on obtient le résultat voulu. \square

5.3.2 Discrétisation du plan en variables étirées

Avant de détailler notre méthode, explicitons la discrétisation que nous allons utiliser. Afin de discrétiser le plan, on travaille en variables étirées. Soient $\mathcal{D} =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^2$, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ et considérons le changement de variables bijectif suivant,

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\tilde{x}, \tilde{y}) &\mapsto \left(\frac{\tan(\tilde{x})}{R_1}, \frac{\tan(\tilde{y})}{R_2} \right). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on choisit une discrétisation cartésienne uniforme de l'adhérence de \mathcal{D} avec pour pas d'espace $h = \pi/N$. On note $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ les matrices suivantes.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -\pi/2 & -\pi/2 & \cdots & -\pi/2 \\ -\pi/2 + h & -\pi/2 + h & \cdots & -\pi/2 + h \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi/2 & \pi/2 & \cdots & \pi/2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -\pi/2 & -\pi/2 + h & \cdots & 0 & \cdots & \pi/2 \\ -\pi/2 & -\pi/2 + h & \cdots & 0 & \cdots & \pi/2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\pi/2 & -\pi/2 + h & \cdots & 0 & \cdots & \pi/2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\pi/2 & -\pi/2 + h & \cdots & 0 & \cdots & \pi/2 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, le plan \mathbb{R}^2 est maillé par la grille non uniforme $(\tan(\mathbf{X}_{k,j})/R_1, \tan(\mathbf{Y}_{k,j})/R_2)_{k,j}$, pour $2 \leq k, j \leq N$. Les coefficients R_1 et R_2 permettent de dilater la grille et d'espacer ou de rapprocher les points centraux. En figure 5.3 est tracée la grille pour différents choix de R_1 et R_2 . Notons qu'avec notre discrétisation, on a, pour tout $1 \leq j \leq N+1$,

$$\frac{\tan(\mathbf{X}_{1,j})}{R_1} = -\infty, \quad \frac{\tan(\mathbf{X}_{N+1,j})}{R_1} = +\infty,$$

et pour tout $1 \leq k \leq N+1$,

$$\frac{\tan(\mathbf{Y}_{k,1})}{R_2} = -\infty, \quad \frac{\tan(\mathbf{Y}_{k,N+1})}{R_2} = +\infty,$$

ce que l'on ne retrouve pas avec une grille uniforme de type $[-L, L]^2$.

Rappelons que dans le cas de la dimension 2 et pour $\mathcal{W} = \delta_0$, on a le résultat suivant [8, 12] : Soient $c \in]0, \sqrt{2}[$ et u une onde progressive de (GP) d'énergie finie et de vitesse c . Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ de module un, tel que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = \lambda.$$

Quitte à multiplier par une constante de module un, on peut alors supposer que u tend vers 1 lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$. Pour $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$, on note $U \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{C})$, la matrice approchant $u(\tan(\mathbf{X})/R_1, \tan(\mathbf{Y})/R_2)$. D'après la remarque précédente, on impose à U des conditions aux bords de type Dirichlet, c'est-à-dire

$$U_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \notin [2, N], \\ \text{ou,} & \\ 1 & \text{si } j \notin [2, N]. \end{cases} \quad (5.28)$$

Rappelons aussi que les ondes progressives en dimension 2 dans le cas local présentent une décroissance algébrique vers 1 [41, 42], ce qui justifie le choix de notre discrétisation. À l'inverse, le fait d'utiliser une grille cartésienne de type $[-L, L]^2$, peut entraîner de erreurs d'approximation et des oscillations au bord.

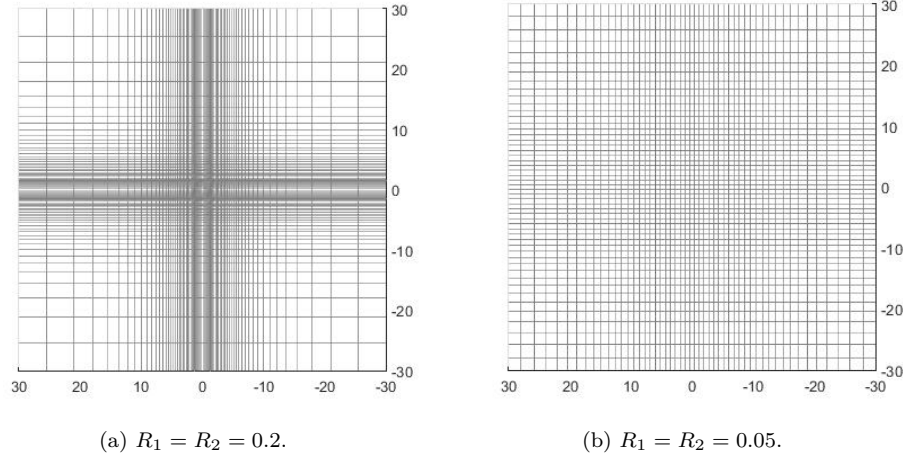


FIGURE 5.3 – Grille $(\tan(\mathbf{X})/R_1, \tan(\mathbf{Y})/R_2)$.

Afin de simplifier les notations, on notera désormais $\cos(\mathbf{X}_k)$ pour $\cos(\mathbf{X}_{k,j})$ (respectivement $\cos(\mathbf{Y}_j)$ pour $\cos(\mathbf{Y}_{k,j})$). Comme expliqué dans la section 5.3.1, nous allons utiliser une méthode de gradient afin d'approcher les minimiseurs de \mathcal{L} . Pour tenir compte au niveau discret du changement de variable (5.27), on considère le semi-produit scalaire sur $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{C})$ suivant :

$$(U, V)_{\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{C})} = h^2 \sum_{k,j=2}^N \frac{1}{R_1 R_2 \cos(\mathbf{X}_k)^2 \cos(\mathbf{Y}_j)^2} \operatorname{Re}(U_{k,j} \overline{V_{k,j}}). \quad (5.29)$$

Ce n'est pas un produit scalaire puisque $(U, U)_{\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{C})} = 0$ n'implique pas que $U = 0_{\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{C})}$. Ici, l'ensemble des inconnues discrètes correspond à l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{C})$ auquel on a enlevé les premières et dernières lignes et colonnes, c'est-à-dire un espace vectoriel réel de dimension $2(N-1)^2$.

Notons \mathcal{L}^δ une discrétisation de \mathcal{L} , que l'on définira en section suivante, et $\nabla \mathcal{L}^\delta$ le gradient de \mathcal{L}^δ pour le produit scalaire (5.29). Soit $V = H + iK$ avec $H, K \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ telles que

$$H_{k,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin [2, N], \\ \text{ou,} & \\ 0 & \text{si } j \notin [2, N], \end{cases} \quad \text{et} \quad K_{k,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin [2, N], \\ \text{ou,} & \\ 0 & \text{si } j \notin [2, N]. \end{cases} \quad (5.30)$$

Alors, en notant $\nabla_{\mathcal{R}} \mathcal{L}^\delta(U)$ (respectivement $\nabla_{\mathcal{I}} \mathcal{L}^\delta(U)$) la partie réelle de $\nabla \mathcal{L}^\delta(U)$ (respectivement la partie imaginaire de $\nabla \mathcal{L}^\delta(U)$), on obtient, lorsque $t \rightarrow 0$,

$$\mathcal{L}^\delta(U + tV) - \mathcal{L}^\delta(U) = h^2 \sum_{k,j=2}^N \frac{1}{R_1 R_2 \cos(\mathbf{X}_k)^2 \cos(\mathbf{Y}_j)^2} (\nabla_{\mathcal{R}} \mathcal{L}^\delta(U)_{k,j} H_{k,j} + \nabla_{\mathcal{I}} \mathcal{L}^\delta(U)_{k,j} K_{k,j}). \quad (5.31)$$

Cette égalité nous sera utile lors des calculs de gradient afin d'identifier facilement la partie réelle et imaginaire de $\nabla \mathcal{L}^\delta$. Enfin, on impose au gradient de \mathcal{L}^δ des valeurs nulles au bord et on ne calcule donc que les valeurs pour $(k, j) \in [2, N]^2$.

5.3.3 Calcul des gradients dans le cas local

Pour $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$, notons \tilde{u} la fonction définie par

$$\begin{aligned} \tilde{u} &: \mathcal{D} &\rightarrow & \mathbb{R} \\ (\tilde{x}, \tilde{y}) &\mapsto & u & \left(\frac{\tan(\tilde{x})}{R_1}, \frac{\tan(\tilde{y})}{R_2} \right). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Commençons par traiter le cas local, c'est-à-dire $\mathcal{W} = \delta_0$. L'énergie et le moment deviennent, par le changement de variables (5.32),

$$E(u) = \frac{R_1}{2R_2} \int_{\mathcal{D}^2} |\partial_1 \tilde{u}|^2 \frac{\cos^2(\tilde{x})}{\cos^2(\tilde{y})} + \frac{R_2}{2R_1} \int_{\mathcal{D}^2} |\partial_2 \tilde{u}|^2 \frac{\cos^2(\tilde{y})}{\cos^2(\tilde{x})} + \frac{1}{4R_1 R_2} \int_{\mathcal{D}^2} \frac{(1 - |\tilde{u}|^2)^2}{\cos^2(\tilde{x}) \cos^2(\tilde{y})}$$

et

$$Q(u) = \frac{1}{2R_2} \int_{\mathcal{D}^2} \langle i(\tilde{u} - 1), \partial_1 \tilde{u} \rangle \frac{1}{\cos^2(\tilde{y})}.$$

Pour $U \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{C})$, on discrétise l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et le moment par

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}}^\delta(U) &= \frac{1}{4} \sum_{k,j=2}^N \frac{R_1 \cos^2(\mathbf{X}_k)}{R_2 \cos^2(\mathbf{Y}_j)} \left(|U_{k+1,j} - U_{k,j}|^2 + |U_{k,j} - U_{k-1,j}|^2 \right) \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{k,j=2}^N \frac{R_2 \cos^2(\mathbf{Y}_j)}{R_1 \cos^2(\mathbf{X}_k)} \left(|U_{k,j+1} - U_{k,j}|^2 + |U_{k,j} - U_{k,j-1}|^2 \right), \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$E_{\text{pot}}^\delta(U) = \frac{h^2}{4R_1 R_2} \sum_{j=2}^N \sum_{k=2}^N \frac{(1 - |U_k|^2)^2}{(\cos(\mathbf{X}_k)^2 \cos(\mathbf{Y}_j)^2)} \quad (5.34)$$

et

$$Q^\delta(U) = \frac{h}{4R_2} \sum_{j=2}^N \sum_{k=2}^N \text{Re} \left(i(U_{k,j} - 1) \overline{(U_{k+1,j} - U_{k-1,j})} \right) \frac{1}{\cos(\mathbf{Y}_j)^2}. \quad (5.35)$$

Enfin, posons

$$\mathcal{L}^\delta(U, \mu) = E_{\text{kin}}^\delta(U) + E_{\text{pot}}^\delta(U) + \frac{\alpha}{2} (\mu - Q^\delta(U))^2.$$

Le but est de calculer numériquement, à μ fixé, un minimiseur $U \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{C})$ de $\mathcal{L}^\delta(\cdot, \mu)$ avec U vérifiant (5.28), par une méthode de gradient.

Concernant la discrétisation de l'énergie cinétique, nous avons choisi d'utiliser une dérivée à droite et à gauche pour discrétiser $\partial_1 \tilde{u}$ (respectivement $\partial_2 \tilde{u}$), cela nous permet d'éviter les problèmes de dissymétrie. De plus, le fait d'utiliser, pour l'énergie cinétique, une différence centrée pour la dérivée peut provoquer des oscillations sur le minimiseur calculé numériquement.

On notera $A \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ (respectivement $B \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$) la partie réelle (respectivement la partie imaginaire) de U . Les propositions qui suivent nous donnent l'expression du gradient de $E_{\text{kin}}^\delta, E_{\text{pot}}^\delta$ et Q^δ pour le produit scalaire (5.29).

Proposition 5.3.2. *Pour tout $(k, j) \in [2, N]^2$, on a*

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathcal{R}} E_{\text{kin}}^\delta)_{k,j} &= \frac{R_1^2}{2h^2} ((A_{k,j} - A_{k-1,j}) \cos^2(\mathbf{X}_{k-1}) \cos^2(\mathbf{X}_k) + (2A_{k,j} - A_{k+1,j} - A_{k-1,j}) \cos^4(\mathbf{X}_k) \\ &\quad - (A_{k+1,j} - A_{k,j}) \cos^2(\mathbf{X}_{k+1}) \cos^2(\mathbf{X}_k)) \\ &\quad + \frac{R_2^2}{2h^2} ((A_{k,j} - A_{k,j-1}) \cos^2(\mathbf{Y}_{j-1}) \cos^2(\mathbf{Y}_j) + (2A_{k,j} - A_{k,j+1} - A_{k,j-1}) \cos^4(\mathbf{Y}_j) \\ &\quad - (A_{k,j+1} - A_{k,j}) \cos^2(\mathbf{Y}_{j+1}) \cos^2(\mathbf{Y}_j)). \end{aligned} \quad (5.36)$$

et

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathcal{I}} E_{\text{kin}}^\delta)_{k,j} &= \frac{R_1^2}{2h^2} ((B_{k,j} - B_{k-1,j}) \cos^2(\mathbf{X}_{k-1}) \cos^2(\mathbf{X}_k) + (2B_{k,j} - B_{k+1,j} - B_{k-1,j}) \cos^4(\mathbf{X}_k) \\ &\quad - (B_{k+1,j} - B_{k,j}) \cos^2(\mathbf{X}_{k+1}) \cos^2(\mathbf{X}_k)) \\ &\quad + \frac{R_2^2}{2h^2} ((B_{k,j} - B_{k,j-1}) \cos^2(\mathbf{Y}_{j-1}) \cos^2(\mathbf{Y}_j) + (2B_{k,j} - B_{k,j+1} - B_{k,j-1}) \cos^4(\mathbf{Y}_j) \\ &\quad - (B_{k,j+1} - B_{k,j}) \cos^2(\mathbf{Y}_{j+1}) \cos^2(\mathbf{Y}_j)). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Preuve. Soient $H, K \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ et $V = H + iK$ avec H, K vérifiant (5.30). La décomposition de U en partie réelle et imaginaire nous donne $E_{\text{kin}}^\delta(U) = E_{\text{kin}}^\delta(A) + E_{\text{kin}}^\delta(B)$ et les calculs de $(\nabla_{\mathcal{R}} E_{\text{kin}}^\delta)$ et $(\nabla_{\mathcal{I}} E_{\text{kin}}^\delta)$ sont ainsi similaires. Il suffit alors de démontrer (5.36). De même, la formule (5.33) est symétrique par rapport à k et j , et il suffit de calculer le gradient de la première somme de (5.33) afin de déduire l'expression complète. Notons,

$$E_{\text{kin},X}^\delta(A) = \frac{1}{4} \sum_{k,j=2}^N \frac{R_1 \cos^2(\mathbf{X}_k)}{R_2 \cos^2(\mathbf{Y}_j)} \left(|A_{k+1,j} - A_{k,j}|^2 + |A_{k,j} - A_{k-1,j}|^2 \right). \quad (5.38)$$

D'après (5.33), on a

$$\begin{aligned} &\frac{E_{\text{kin},X}^\delta(A + tH) - E_{\text{kin},X}^\delta(A)}{t} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,j=2}^N \frac{R_1 \cos^2(\mathbf{X}_k)}{R_2 \cos^2(\mathbf{Y}_j)} \left(H_{k+1,j} (A_{k+1,j} - A_{k,j}) + H_{k,j} (2A_{k,j} - A_{k+1,j} - A_{k-1,j}) \right. \\ &\quad \left. - H_{k-1,j} (A_{k,j} - A_{k-1,j}) \right) + \mathcal{O}(t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=2}^N \frac{R_1}{R_2 \cos^2(\mathbf{Y}_j)} \left(\sum_{k=3}^N H_{k,j} (A_{k,j} - A_{k-1,j}) \cos^2(\mathbf{X}_{k-1}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=2}^N H_{k,j} (2A_{k,j} - A_{k+1,j} - A_{k-1,j}) \cos^2(\mathbf{X}_k) - \sum_{k=2}^{N-1} H_{k,j} (A_{k+1,j} - A_{k,j}) \cos^2(\mathbf{X}_{k+1}) \right) + \mathcal{O}(t), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $H_{N+1,j} = H_{1,j} = 0$. De même, comme $\cos^2(\mathbf{X}_{N+1}) = \cos^2(\mathbf{X}_1) = 0$, on peut regrouper les sommes précédentes, ce qui nous donne,

$$\begin{aligned} & \frac{E_{\text{kin},X}^\delta(A + tH) - E_{\text{kin},X}^\delta(A)}{t} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,j=2}^N \frac{1}{R_1 R_2 \cos^2(\mathbf{Y}_j) \cos^2(\mathbf{X}_k)} \left((A_{k,j} - A_{k-1,j}) R_1^2 \cos^2(\mathbf{X}_{k-1}) \cos^2(\mathbf{X}_k) \right. \\ & \quad \left. + (2A_{k,j} - A_{k+1,j} - A_{k-1,j}) R_1^2 \cos^4(\mathbf{X}_k) - (A_{k+1,j} - A_{k,j}) R_1^2 \cos^2(\mathbf{X}_{k+1}) \cos^2(\mathbf{X}_k) \right) H_{k,j} + \mathcal{O}(t), \end{aligned}$$

puis, par passage à la limite et en utilisant (5.31), on obtient

$$\begin{aligned} (\nabla E_{\text{kin},X}(A))_{k,j} &= \frac{R_1^2}{2h^2} ((A_{k,j} - A_{k-1,j}) \cos^2(\mathbf{X}_{k-1}) \cos^2(\mathbf{X}_k) \\ & \quad + (2A_{k,j} - A_{k+1,j} - A_{k-1,j}) \cos^4(\mathbf{X}_k) - (A_{k+1,j} - A_{k,j}) \cos^2(\mathbf{X}_{k+1}) \cos^2(\mathbf{X}_k)). \end{aligned}$$

Par symétrie par rapport à k et j , on en déduit (5.36), puis (5.37), ce qui termine la preuve. \square

Proposition 5.3.3. *Pour tout $(k, j) \in [2, N]^2$, on a*

$$(\nabla_{\mathcal{R}} E_{\text{pot}}^\delta)_{k,j} = -(1 - |U_{k,j}|^2) A_{k,j}, \quad (5.39)$$

et

$$(\nabla_{\mathcal{I}} E_{\text{pot}}^\delta)_{k,j} = -(1 - |U_{k,j}|^2) B_{k,j}. \quad (5.40)$$

Preuve. Soient $H, K \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ et $V = H + iK$ avec H, K vérifiant (5.30). Alors,

$$\begin{aligned} & \frac{E_{\text{pot}}^\delta(U + tV) - E_{\text{pot}}^\delta(U)}{t} \\ &= \frac{h^2}{4R_1 R_2} \sum_{k,j=2}^N \frac{1}{t(\cos(\mathbf{X}_k)^2 \cos(\mathbf{Y}_j)^2)} \left((1 - |A_{k,j} + tH_{k,j} + i(B_{k,j} + tK_{k,j})|^2)^2 - (1 - |A_{k,j} + iB_{k,j}|^2)^2 \right) \\ &= \frac{h^2}{4R_1 R_2} \sum_{k,j=2}^N \frac{1}{t(\cos(\mathbf{X}_k)^2 \cos(\mathbf{Y}_j)^2)} \left(1 - (A_{k,j}^2 + B_{k,j}^2) - 2t(A_{k,j}H_{k,j} + B_{k,j}K_{k,j}) \right)^2 \\ & \quad - (1 - (A_{k,j}^2 + B_{k,j}^2))^2 \\ &= \frac{h^2}{4R_1 R_2} \sum_{k,j=2}^N \frac{1}{(\cos(\mathbf{X}_k)^2 \cos(\mathbf{Y}_j)^2)} \left(-4(A_{k,j}H_{k,j} + B_{k,j}K_{k,j})(1 - (A_{k,j}^2 + B_{k,j}^2)) \right) + \mathcal{O}(t), \end{aligned}$$

ce qui nous donne (5.39) et (5.40), par passage à la limite et en utilisant (5.29). \square

Proposition 5.3.4. *Pour tout $(k, j) \in [2, N]^2$, on a*

$$(\nabla_{\mathcal{R}} Q^\delta)_{k,j} = \frac{R_1}{2h} (B_{k+1,j} - B_{k-1,j}) \cos^2(\mathbf{X}_k) \quad (5.41)$$

et

$$(\nabla_{\mathcal{I}} Q^\delta)_{k,j} = \frac{R_1}{2h} (A_{k-1,j} - A_{k+1,j}) \cos^2(\mathbf{X}_k). \quad (5.42)$$

Preuve. Soient $H, K \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ et $V = H + iK$ avec H, K vérifiant (5.30). Simplifions dans un premier temps, l'expression du moment en (5.35). En utilisant l'écriture de U en partie réelle et imaginaire, on arrive à

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(i(U_{k,j} - 1) \overline{(U_{k+1,j} - U_{k-1,j})} \right) &= \operatorname{Im} \left((1 - U_{k,j}) \overline{(U_{k+1,j} - U_{k-1,j})} \right) \\ &= B_{k-1,j}(1 - A_{k,j}) + B_{k,j}(A_{k-1,j} - A_{k+1,j}) + B_{k+1,j}(A_{k,j} - 1). \end{aligned}$$

La formule précédente nous donne,

$$\begin{aligned} &\frac{Q^\delta(U + tV) - Q^\delta(U)}{t} \\ &= \frac{h}{4R_2} \sum_{k,j=2}^N \frac{1}{\cos^2(\mathbf{Y}_j)} \left((B_{k+1,j} - B_{k-1,j})H_{k,j} \right. \\ &\quad \left. - (A_{k+1,j} - A_{k-1,j})K_{k,j} + B_{k,j}H_{k-1,j} - (A_{k,j} - 1)K_{k-1,j} - B_{k,j}H_{k+1,j} + (A_{k,j} - 1)K_{k+1,j} \right) + \mathcal{O}(t). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $A_{1,j} = A_{N+1,j} = 1$, $B_{1,j} = B_{N+1,j} = 0$, (5.30) et en utilisant un changement d'indice dans la somme, l'expression se simplifie en

$$\begin{aligned} &\frac{Q^\delta(U + tV) - Q^\delta(U)}{t} \\ &= \frac{h}{4R_2} \sum_{k,j=2}^N \frac{1}{\cos^2(\mathbf{Y}_j)} (2(B_{k+1,j} - B_{k-1,j})H_{k,j} + 2(A_{k-1,j} - A_{k+1,j})K_{k,j}) + \mathcal{O}(t), \end{aligned}$$

ce qui nous donne (5.41) et (5.42) par passage à la limite et en utilisant (5.31). \square

5.3.4 Calcul du gradient de l'énergie potentielle dans le cas non local

Traisons maintenant l'énergie potentielle dans le cas non local. On ne peut pas ici utiliser la FFT classique pour approcher la transformée de Fourier continue au vu du maillage non uniforme. Pour cela, nous allons utiliser la NUFFT (*Non-Uniform Fast Fourier Transform*), permettant de calculer des sommes du type

$$G_{l,m} = \sum_{k,j=1}^N F_{k,j} \exp(\pm i s_l x_{k,j}) \exp(\pm i t_m y_{k,j}),$$

pour $N \in \mathbb{N}$, $F \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, $x, y \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $s_l, t_m \in \mathbb{R}$, tout en conservant une rapidité similaire à la FFT en dimension 2. Pour plus de détails sur la NUFFT, on renvoie à [44]. Pour notre approximation de la transformée de Fourier, on conserve la grille en variables étirées en espace. Pour la grille en fréquence, on choisit cette fois une grille cartésienne $[-L, L]^2$ et on note $\lambda = 2L/N$ le pas, dans les deux directions. Enfin, on prend le même nombre de points en fréquence et en espace. Notons $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ les matrices de maillage en fréquence suivantes,

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} -L & -L & \cdots & -L \\ -L + \lambda & -L + \lambda & \cdots & -L + \lambda \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L & L & \cdots & L \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} -L & -L + \lambda & \cdots & 0 & \cdots & L \\ -L & -L + \lambda & \cdots & 0 & \cdots & L \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -L & -L + \lambda & \cdots & 0 & \cdots & L \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -L & -L + \lambda & \cdots & 0 & \cdots & L \end{bmatrix}.$$

Détaillons maintenant l'approximation que nous allons utiliser pour la transformée de Fourier et la transformée inverse. Pour $f \in S(\mathbb{R}^2)$ et par (5.32), on a

$$\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}_{l,m}, \boldsymbol{\zeta}_{l,m}) = \int_{\mathcal{D}} \frac{\tilde{f}(x, y)}{R_1 R_2 \cos(x)^2 \cos(y)^2} e^{-i\boldsymbol{\xi}_{l,m} \tan(x)/R_1} e^{-i\boldsymbol{\zeta}_{l,m} \tan(y)/R_2} dx dy.$$

Ainsi, pour $F, G \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{C})$, on définit les matrices $\mathcal{F}_\delta(F), \mathcal{F}_\delta^{-1}(G) \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{C})$ par

$$\mathcal{F}_\delta(F)_{l,m} = \begin{cases} h^2 \sum_{k,j=2}^N \frac{F_{k,j}}{R_1 R_2 \cos(\mathbf{X}_k)^2 \cos(\mathbf{Y}_j)^2} e^{-i\boldsymbol{\xi}_{l,m} \tan(\mathbf{X}_{k,j})/R_1} e^{-i\boldsymbol{\zeta}_{l,m} \tan(\mathbf{Y}_{k,j})/R_2} & \text{si } (k, j) \in [2, N], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.43)$$

$$\mathcal{F}_\delta^{-1}(G)_{k,j} = \begin{cases} \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_{l,m=2}^N G_{l,m} e^{i\boldsymbol{\xi}_{l,m} \tan(\mathbf{X}_{k,j})/R_1} e^{i\boldsymbol{\zeta}_{l,m} \tan(\mathbf{Y}_{k,j})/R_2} & \text{si } (k, j) \in [2, N], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.44)$$

approximations de la transformée de Fourier et de la transformée de Fourier inverse. Notons que \mathcal{F}_δ et \mathcal{F}_δ^{-1} sont linéaires. Comme pour (5.10) et (5.12) en dimension 1, on définit la convolution discrète par

$$\text{conv}_{\text{nft}}(U, V) = \mathcal{F}_\delta^{-1}(\mathcal{F}_\delta(U) * \mathcal{F}_\delta(V)), \quad (5.45)$$

et on note, pour $A \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{C})$,

$$\text{conv}_{\text{nft}}(\mathcal{W}, A) = \mathcal{F}_\delta^{-1}(\widehat{\mathcal{W}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}) * \mathcal{F}_\delta(A)), \quad (5.46)$$

où $(\widehat{\mathcal{W}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}))_{k,j} = (\widehat{\mathcal{W}}(\boldsymbol{\xi}_{k,j}, \boldsymbol{\zeta}_{k,j}))$ et où la notation $A * B$ désigne la matrice produit composante par composante i.e. $(A * B)_{k,j} = A_{k,j} B_{k,j}$. Enfin, comme pour la proposition 5.2.1, en utilisant la parité de $\widehat{\mathcal{W}}$, on a la proposition suivante pour conv_{nft} .

Proposition 5.3.5. *Soit \mathcal{W} vérifiant les hypothèses (H1)–(H2) et $A, B \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{C})$. Alors,*

$$\sum_{k,j=2}^N \frac{\text{conv}_{\text{nft}}(\mathcal{W}, A)_{k,j} B_{k,j}}{R_1 R_2 \cos(\mathbf{X}_k)^2 \cos(\mathbf{Y}_j)^2} = \sum_{k,j=2}^N \frac{\text{conv}_{\text{nft}}(\mathcal{W}, B)_{k,j} A_{k,j}}{R_1 R_2 \cos(\mathbf{X}_k)^2 \cos(\mathbf{Y}_j)^2}.$$

Passons maintenant à la discrétisation de l'énergie potentielle dans le cas non local et le calcul de son gradient. Notons, pour $U \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{C})$,

$$E_{\text{pot}}^\delta(U) = \frac{h^2}{4R_1 R_2} \sum_{j=2}^N \sum_{k=2}^N \frac{\text{conv}_{\text{nft}}(\mathcal{W}, 1 - |U|^2)_{k,j} (1 - |U_{k,j}|^2)}{(\cos(\mathbf{X}_k)^2 \cos(\mathbf{Y}_j)^2)}. \quad (5.47)$$

De même, comme dans le cas $\mathcal{W} = \delta_0$, on pose

$$\mathcal{L}^\delta(U, \mu) = E_{\text{kin}}^\delta(U) + E_{\text{pot}}^\delta(U) + \frac{\alpha}{2} (\mu - Q^\delta(U))^2, \quad (5.48)$$

et on calculera les minimiseurs de cette fonctionnelle en section 5.3.5.

Proposition 5.3.6. *Soit \mathcal{W} une distribution vérifiant les hypothèses (H1) et (H2). Alors, pour tout $(k, j) \in [2, N]^2$, on a*

$$(\nabla_{\mathcal{R}} E_{\text{pot}}^\delta)_{k,j} = -\text{conv}_{\text{nft}}(\mathcal{W}, 1 - |U|^2)_{k,j} A_{k,j} \quad (5.49)$$

et

$$(\nabla_{\mathcal{I}} E_{\text{pot}}^\delta)_{k,j} = -\text{conv}_{\text{nft}}(\mathcal{W}, 1 - |U|^2)_{k,j} B_{k,j}. \quad (5.50)$$

Preuve. Soient $H, K \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ et $V = H + iK$ avec H, K vérifiant (5.30). On a,

$$\begin{aligned} & \text{conv}_{\text{nft}}(\mathcal{W}, 1 - |U + tV|^2)_{k,j} (1 - |U_{k,j} + tV_{k,j}|^2) - \text{conv}_{\text{nft}}(\mathcal{W}, 1 - |U|^2)_{k,j} (1 - |U_{k,j}|^2) \\ &= (\text{conv}_{\text{nft}}(\mathcal{W}, 1 - |U + tV|^2)_{k,j} - \text{conv}_{\text{nft}}(\mathcal{W}, 1 - |U|^2)_{k,j}) (1 - |U_{k,j} + tV_{k,j}|^2) \\ &+ \text{conv}_{\text{nft}}(\mathcal{W}, 1 - |U|^2)_{k,j} ((1 - |U_{k,j} + tV_{k,j}|^2) - (1 - |U_{k,j}|^2)). \end{aligned}$$

En développant comme à la preuve de la proposition 5.3.3, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{E_{\text{pot}}^\delta(U + tV) - E_{\text{pot}}^\delta(U)}{t} \\ &= \frac{h^2}{4} \sum_{j=2}^N \sum_{k=2}^N \frac{-2}{R_1 R_2 \cos(\mathbf{X}_k)^2 \cos(\mathbf{Y}_j)^2} (\text{conv}_{\text{nft}}(\mathcal{W}, A \cdot * H + B \cdot * K)_{k,j} (1 - (A_{k,j}^2 + B_{k,j}^2))) \\ &+ \frac{h^2}{4} \sum_{j=2}^N \sum_{k=2}^N \frac{-2}{R_1 R_2 \cos(\mathbf{X}_k)^2 \cos(\mathbf{Y}_j)^2} (\text{conv}_{\text{nft}}(\mathcal{W}, 1 - (A^2 + B^2))_{k,j} (A_{k,j} H_{k,j} + B_{k,j} K_{k,j})) + \mathcal{O}(t). \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 5.3.5 et en passant à la limite, on obtient (5.49) et (5.50). \square

5.3.5 Mise en oeuvre

Afin de calculer numériquement les minimiseurs de \mathcal{L}^δ définie en (5.48), on utilise une méthode de gradient à pas adaptatif. Fixons $\mu > 0$, \mathcal{W} une distribution tempérée, $\alpha > 0$ assez grand au vu de la condition (5.26) et une tolérance $\varepsilon > 0$. En partant d'une matrice $U^{(0)} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{C})$ et d'un pas $\rho > 0$, on calcule

$$U^{(1)} = U^{(0)} - \rho \nabla \mathcal{L}^\delta(U^{(0)}, \mu),$$

où le gradient est calculé grâce aux propositions 5.3.2, 5.3.3, 5.3.4 et 5.3.6. Maintenant, si $\mathcal{L}^\delta(U^{(0)}, \mu) > \mathcal{L}^\delta(U^{(1)}, \mu)$, on calcule $U^{(2)}$ par

$$U^{(2)} = U^{(1)} - \rho \nabla \mathcal{L}^\delta(U^{(1)}, \mu).$$

Inversement, si $\mathcal{L}^\delta(U^{(1)}, \mu) > \mathcal{L}^\delta(U^{(0)}, \mu)$, la fonctionnelle \mathcal{L}^δ n'a pas été diminuée. On recommence alors le calcul de $U^{(1)}$ en divisant le pas par 2 i.e.

$$U^{(1)} = U^{(0)} - \frac{\rho}{2} \nabla \mathcal{L}^\delta(U^{(0)}, \mu),$$

puis on recommence l'opération, jusqu'à convergence. L'avantage de la méthode avec pas de temps adaptatif est de pouvoir démarrer d'un pas ρ assez grand et donc de diminuer le temps de calcul, tout en s'assurant de la convergence de l'algorithme. L'algorithme s'écrit alors :

Données : Pour $U \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{C})$, $\rho > 0$, $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ et $\mu > 0$
 Poser $U^{(0)} = U$, $k = 0$ et $r(0) = 2\varepsilon$
tant que $r(k) > \varepsilon$ *ou* $\rho > 10^{-16}$ **faire**
 - Calculer $U^{(k+1)} = U^{(k)} - \rho \nabla \mathcal{L}^\delta(U^{(k)}, \mu)$
si $\mathcal{L}^\delta(U^{(k)}, \mu) < \mathcal{L}^\delta(U^{(k+1)}, \mu)$ **alors**
 $U^{(k+1)} = U^{(k)}$
 $\rho = \rho/2$
sinon
 $U^{(k+1)} = U^{(k+1)}$
 $\rho = \rho$
fin
 - Calculer le résidu $r^{(k+1)} = \|\nabla \mathcal{L}^\delta(U^{(k+1)}, \mu)\|_2$
 - Itérer $k \leftarrow k + 1$
fin

Algorithme 3 : Méthode de gradient à pas de temps adaptatif.

Précisons maintenant le choix de l'initialisation $U^{(0)}$. L'idée est de choisir $U^{(0)}$ comme une approximation d'un soliton de (GPN), de manière à réduire le temps de calcul. On reprend ici la méthode utilisée dans [21, 22]. Lors du chapitre précédent en section 4.2.4 en utilisant l'équation de Kadomtsev–Petviashvili, nous avons montré formellement que, lorsque $c = \sqrt{2 - \varepsilon^2}$ et u_ε solution de (OPNc), on a

$$u_\varepsilon(x, y) \sim u_{\text{KP}, \varepsilon, \omega}(x, y) := \left(1 + \omega \varepsilon^2 \mathbf{A} \left(\frac{\varepsilon x}{\omega}, \frac{\varepsilon^2 y}{\omega}\right)\right) e^{i \varepsilon \omega^2 \Phi \left(\frac{\varepsilon x}{\omega}, \frac{\varepsilon^2 y}{\omega}\right)}, \quad (5.51)$$

où \mathbf{A} est solution de

$$\frac{1}{2} \partial_1 \mathbf{A} + 6\omega \mathbf{A} \partial_1 \mathbf{A} - \frac{1}{2} \partial_1^3 \mathbf{A} + \partial_1^{-1} \partial_2^2 \mathbf{A} = 0, \quad \partial_1 \Phi = -\sqrt{2} \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \omega = (1 + \partial_1^2 \widehat{\mathcal{W}}(0, 0))^{1/2}.$$

Une solution explicite de cette équation est le lump [58], d'expression

$$\mathbf{A}(x, y) = \frac{1}{12\omega} L \left(x, \frac{y}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{où} \quad L(x, y) = -24 \frac{3 - x^2 - y^2}{(3 + x^2 + y^2)} = -24 \partial_1 \left(\frac{x}{3 + x^2 + y^2}\right). \quad (5.52)$$

Grâce à la formule (5.52), on calcule alors $u_{\text{KP}, \varepsilon, \omega}$ qui nous donne une approximation d'un soliton de vitesse $c \simeq \sqrt{2}$ pour une distribution \mathcal{W} choisie. Notons que d'après (5.51) et (5.52), la décroissance de $u_{\text{KP}, \varepsilon, \omega}$ vers 1 est beaucoup plus lente en y que en x et il sera judicieux d'adapter l'échelle en y lors du tracé. Cette condition initiale est tracée à la figure 5.4-(a).

Un second choix pour l'approximation est d'utiliser un approximant de Padé, qui permet d'approcher les solitons de petite vitesse (et donc de moment grand). Rappelons que dans le cas $\mathcal{W} = \delta_0$, les solutions de (OPc) minimiseurs de E_{\min} présentent deux vortex de degrés 1 et -1 lorsque la vitesse c est petite. De plus, ces deux vortex sont situés à une distance équivalente à $2/c$ lorsque $c \rightarrow 0$ [12]. Considérons la fonction, écrite sous forme polaire,

$$V(r, \theta) = a(r) e^{i\theta},$$

où a est une fonction d'une variable à valeurs réelles vérifiant $a(0) = 0$ et $a(\pm\infty) = 1$. La fonction V présente un vortex de degré 1 en 0. Notons qu'en conjuguant cette fonction, on obtient un vortex de degré -1 . En injectant $V(r, \theta)$ dans (OPc) avec $c = 0$, on arrive à l'équation différentielle

$$a'' + \frac{a'}{r} - \frac{a}{r^2} + a(1 - a^2) = 0. \quad (5.53)$$

On utilise la méthode présentée dans [5] qui consiste à utiliser un approximant de Padé de la forme

$$a_{\text{Padé}}(r) = r \sqrt{\frac{\alpha_1 + \alpha_2 r^2}{1 + \beta_1 r + \beta_2 r^4}}$$

afin d'obtenir une approximation de la solution de (5.53). En injectant $a_{\text{Padé}}(r)$ dans (5.53) et en effectuant un développement de Taylor en $r = 0$, on obtient alors $\alpha_1 = 0.34375, \alpha_2 = \beta_2 = 0.02864583330, \beta_1 = 1/3$. On renvoie à [5, 21] pour le détails des calculs. Ainsi, la fonction

$$u_{\text{Padé}}(x, y) := a_{\text{Padé}}(x^2 + (y - 1/c)^2) \frac{x + i(y - 1/c)}{\sqrt{x^2 + (y - 1/c)^2}} a_{\text{Padé}}(x^2 + (y + 1/c)^2) \frac{x - i(y + 1/c)}{\sqrt{x^2 + (y + 1/c)^2}},$$

présente deux vortex de degrés 1 et -1 , situés à une distance de $2/c$. On trace en figure 5.4-(b) le module de $u_{\text{Padé}}$.

La procédure est la suivante : Fixons une distribution \mathcal{W} et choisissons une condition initiale $U^{(0)}$ parmi les deux précédentes. On calcule μ d'après la proposition 5.3.1,

$$\mu = Q^\delta(U^{(0)}) + \frac{c}{\alpha},$$

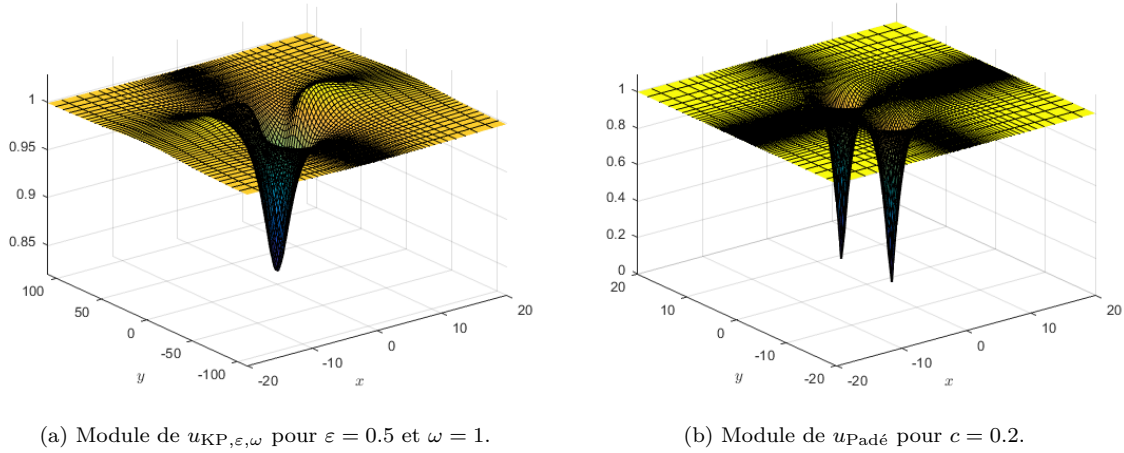


FIGURE 5.4 – Exemples de conditions initiales utilisées pour la méthode par pénalisation.

avec $c \sim \sqrt{2}$ ou $c \sim 0$ selon la condition initiale $U^{(0)}$ choisie et α assez grand d'après la condition (5.26). On calcule numériquement $U_\mu \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{C})$ par la méthode par pénalisation, son énergie $E^\delta(U_\mu)$ et son moment $Q^\delta(U_\mu)$. Une fois le vecteur U_μ obtenu, on augmente la valeur de μ de $\Delta\mu = 0.5$ et on calcule le vecteur $U_{\mu+\Delta\mu}$ en prenant cette fois comme initialisation $U^{(0)} = U_\mu$. On itère cette procédure jusqu'à obtenir assez de points pour tracer la courbe d'énergie. On considère une tolérance globale de $\varepsilon = 10^{-4}$. Afin d'alléger les notations pour les tests numériques qui vont suivre, on notera U_q , à la place de U_μ , avec $q = Q^\delta(U_\mu)$.

5.3.6 Observations numériques

Commençons par un premier test numérique avec $\mathcal{W} = \delta_0$. On considère les paramètres numériques suivants : $N = 81$, $R_1 = R_2 = 0.2$ (sauf pour $q \sim 0$ où l'on choisit $R_2 = 0.05$) et $\alpha = 10$. On trace en figure 5.5a, la courbe d'énergie $E^\delta(U_q)$ en fonction q en bleu. À titre de comparaison, on trace en rouge sur la même figure les valeurs d'énergie données par [50]. On observe que ces valeurs sont très proches des valeurs de $E^\delta(U_q)$, obtenues par la méthode par pénalisation. Enfin, on retrouve les propriétés de la courbe E_{\min} lorsque $\mathcal{W} = \delta_0$ (voir [8]) : la courbe $E^\delta(U_q)$ est croissante, concave et la droite $\sqrt{2}q$ est tangente à la courbe en 0. En figure 5.6, on trace le graphe de U_q en module pour différentes valeurs de q . Pour $q \simeq 0$, on observe que le graphe de $|U_q|$ tend lentement vers 1 dans la direction y . On observe ensuite la formation de vortex à partir de la figure (c). Enfin, entre la figure (e) et à la figure (f), les vortex se sont éloignés, comme attendu.

Pour les trois prochains tests numériques, on considère les paramètres numériques suivants : $N = 81$, $R_1 = R_2 = 0.2$, $L = 5$ (troncature en fréquence) et $\alpha = 10$. Calculons maintenant les solutions numériques pour la distribution \mathcal{W}_a , pour $a = 10$, où

$$\mathcal{W}_a(x, y) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-x^2/4a} \delta_0(y) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathcal{W}}_a(\xi_1, \xi_2) = e^{-a\xi_1^2}. \quad (5.54)$$

Ce potentiel vérifie les hypothèses (H1) et (H3) mais pas (H2). On trace en figure 5.5b la courbe d'énergie correspondante. La courbe semble concave, croissante et présente des valeurs inférieures à la courbe d'énergie pour $\mathcal{W} = \delta_0$. En figure 5.7, on trace le module de U_q pour différentes valeurs de q . Lorsque $q \simeq 0$, le graphe correspondant est beaucoup plus localisé que dans le cas $\mathcal{W} = \delta_0$ et tend rapidement vers 1 dans la direction y . Les branches des vortex ne présentent pas une séparation nette comme celles de la figure 5.6 et sont beaucoup plus larges.

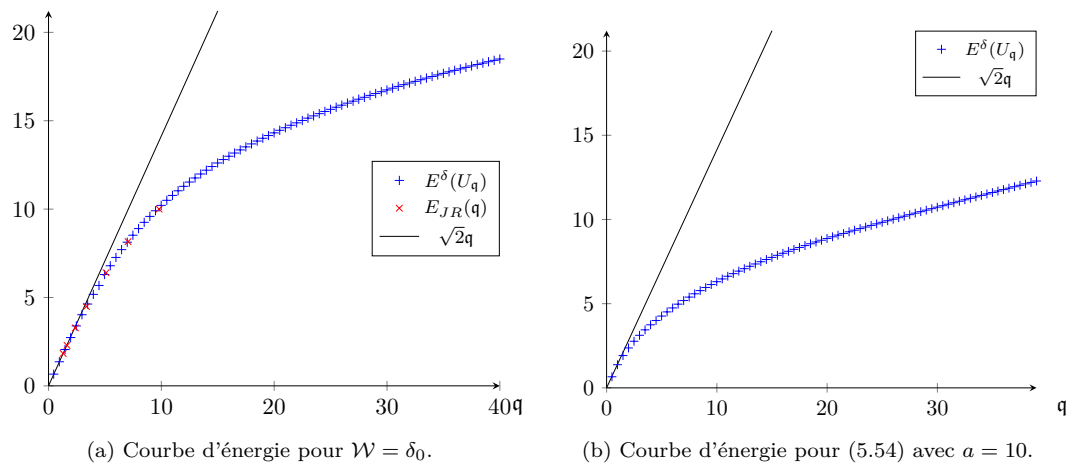
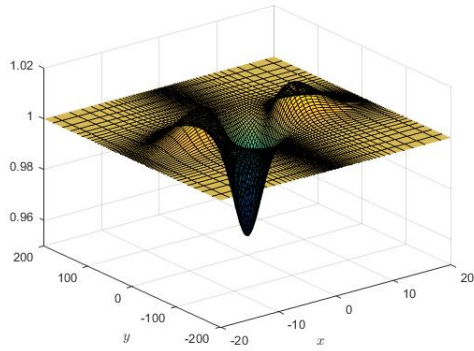
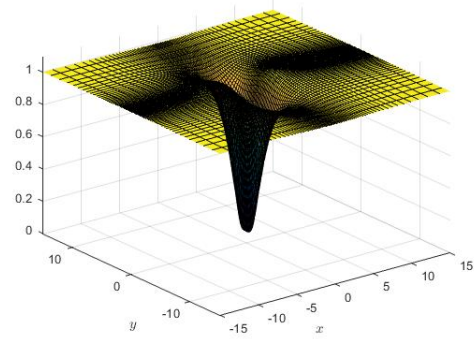


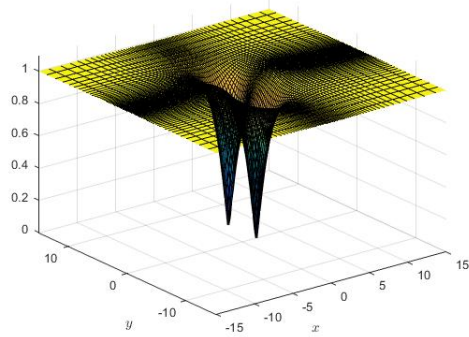
FIGURE 5.5 – Courbes d'énergie $E^\delta(U_q)$ pour les potentiels $\mathcal{W} = \delta_0$ et (5.54).



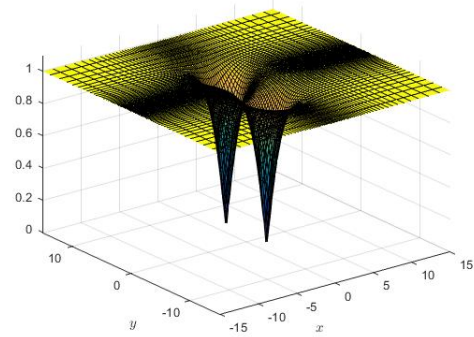
(a) $q = 0.46$.



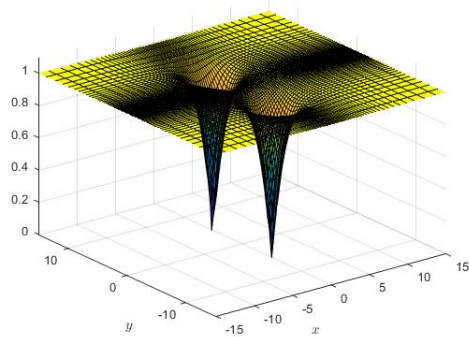
(b) $q = 6.48$.



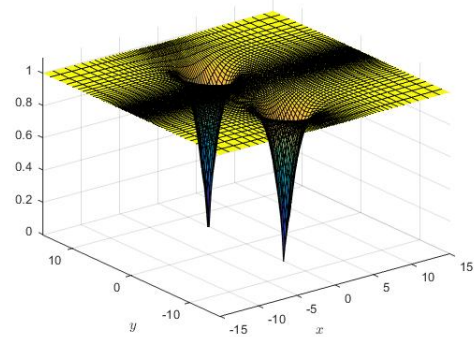
(c) $q = 12.98$.



(d) $q = 20$.

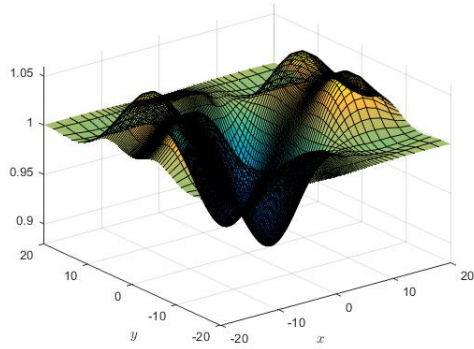


(e) $q = 30$.

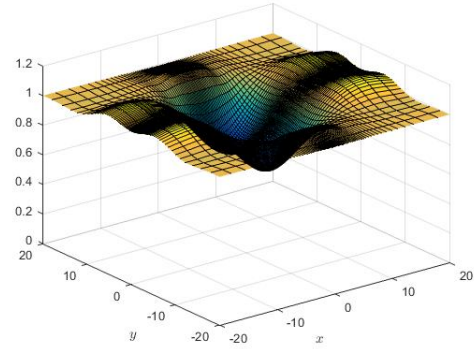


(f) $q = 39.95$.

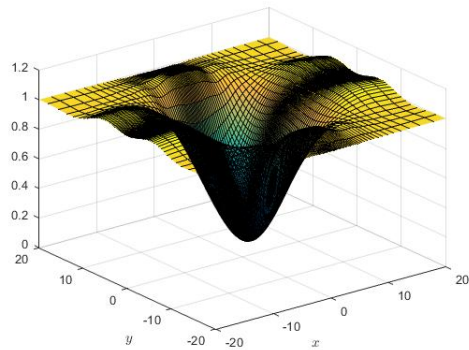
FIGURE 5.6 – Module de U_q pour $\mathcal{W} = \delta_0$.



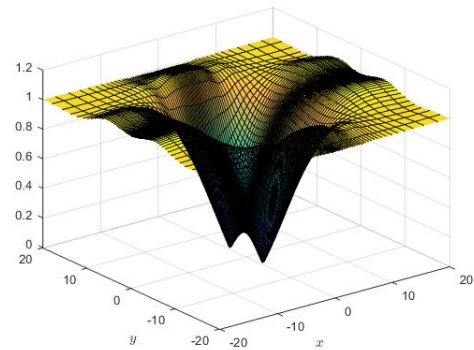
(a) $q = 0.48$.



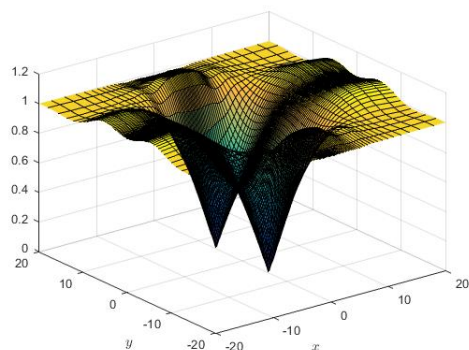
(b) $q = 4.98$.



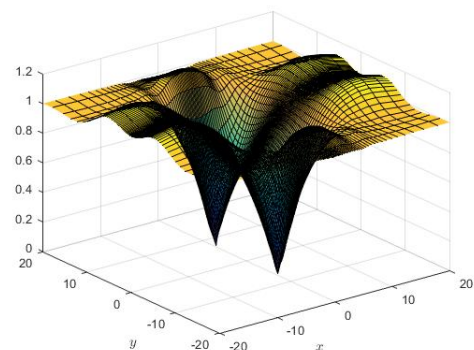
(c) $q = 14.99$.



(d) $q = 20$.



(e) $q = 30$.



(f) $q = 39.5$.

FIGURE 5.7 – Module de U_q pour (5.54) pour $a = 10$.

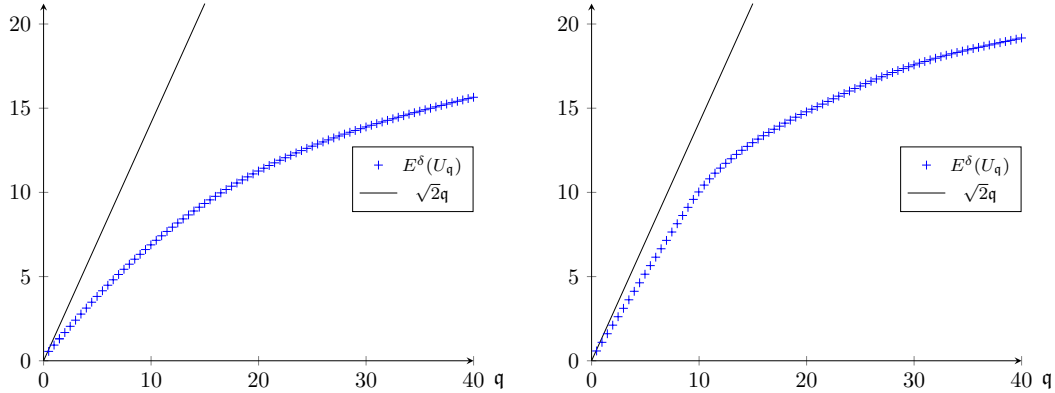
Considérons maintenant les deux potentiels suivants. Pour $a = b = 1.1$ et $c = 0.9$, on pose

$$\widehat{W}_{a,b,c}(\xi_1, \xi_2) = \widehat{W}_{a,b,c}(\xi_1)\widehat{W}_{a,b,c}(\xi_2) \quad \text{où} \quad \widehat{W}_{a,b,c}(\xi) = (1 + a\xi_1^2 + b\xi_2^4)e^{-c\xi^2}. \quad (5.55)$$

Ce type potentiel a déjà été proposé en dimension 1 en (5.22). Pour le second potentiel, soient $\sigma = 2, \gamma = 4$ et

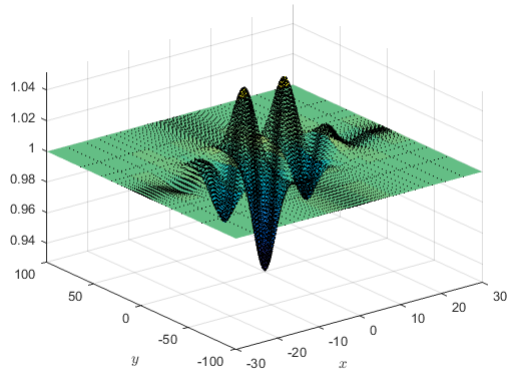
$$\widehat{W}_{\sigma,\gamma}(\xi_1, \xi_2) = (2 - \cos(\sigma\xi_1))(2 - \cos(\gamma\xi_2))e^{-(\xi_1^2 + \xi_2^2)}. \quad (5.56)$$

Ces deux distributions vérifient l'hypothèse (H1), mais ne vérifient pas (H2)-(H3). La courbe d'énergie pour chacune des distributions est tracée à la figure 5.8. Dans les deux cas, la courbe $E^\delta(U_q)$ semble croissante et concave. Comme à la section 5.2.3, on arrive à nouveau à la conjecture suivante : les hypothèses (H2) et (H3) sont des conditions suffisantes et non nécessaires pour montrer la concavité de E_{\min} sur \mathbb{R}^+ . En figure 5.9, on trace le module de U_q pour différentes valeurs de q pour la distribution (5.55). Notons que la forme des branches des vortex est beaucoup large que dans le cas local. À la figure 5.10, le module de U_q est tracé pour pour la distribution (5.56). On retrouve à nouveau des branches pour les vortex dont la forme est semblable à celles du cas local en figure 5.6. Par contre, chacune des 6 figures présentent des oscillations très importantes.

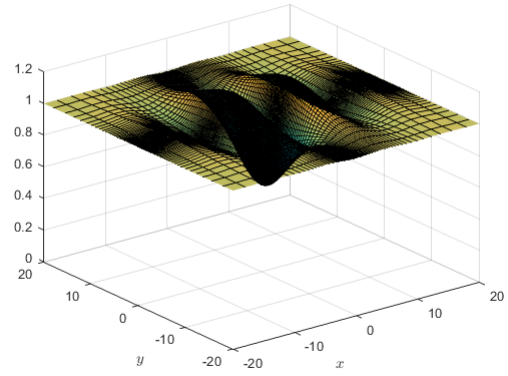


(a) Courbe d'énergie pour (5.55) avec $a = b = 1.1$ et (b) Courbe d'énergie pour (5.56) avec $\sigma = 2$ et $\gamma = 4$.
 $c = 0.9$.

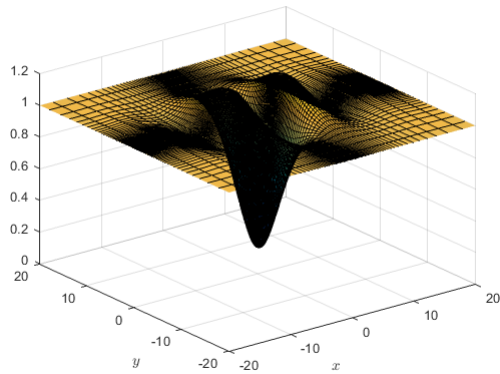
FIGURE 5.8 – Courbes d'énergie $E^\delta(U_q)$ pour les potentiels (5.55) et (5.56).



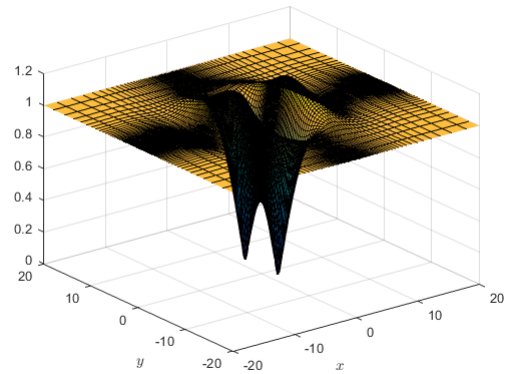
(a) $q = 0.47$.



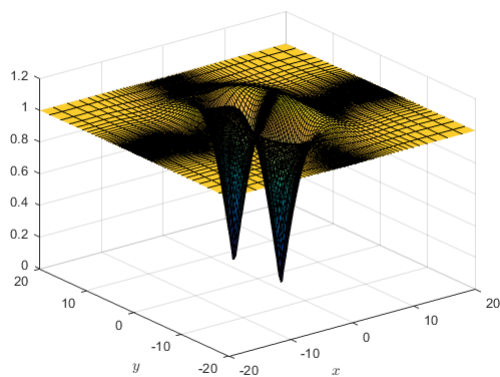
(b) $q = 4.97$.



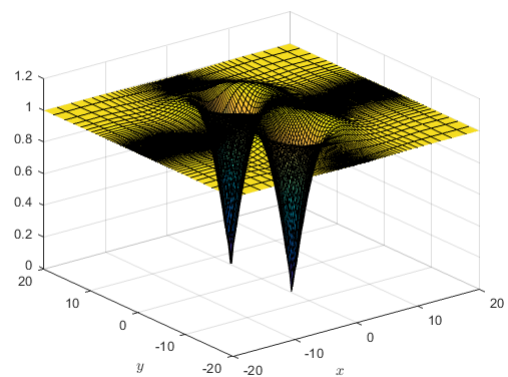
(c) $q = 9.98$.



(d) $q = 19.98$.

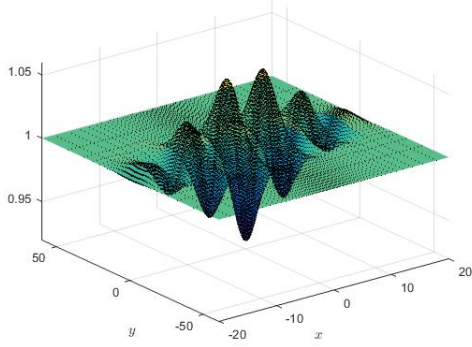


(e) $q = 29.99$.

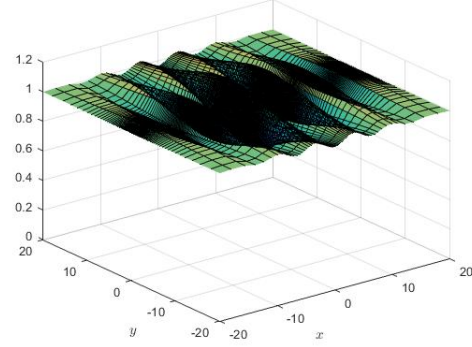


(f) $q = 40$.

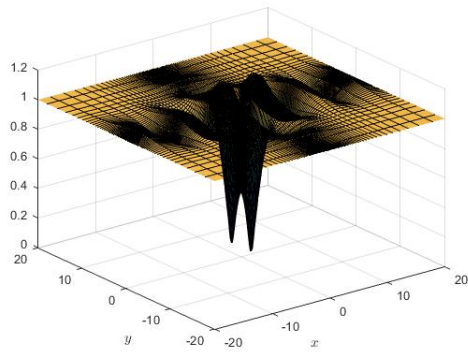
FIGURE 5.9 – Module de U_q pour le potentiel (5.55) avec $a = b = 1.1$ et $c = 0.9$.



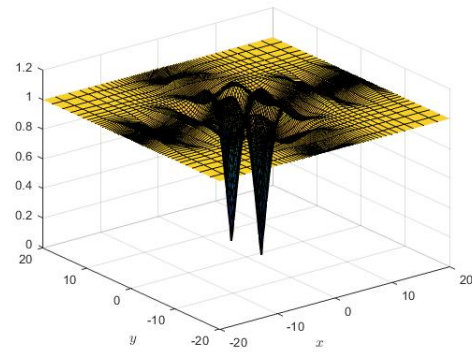
(a) $q = 0.46$.



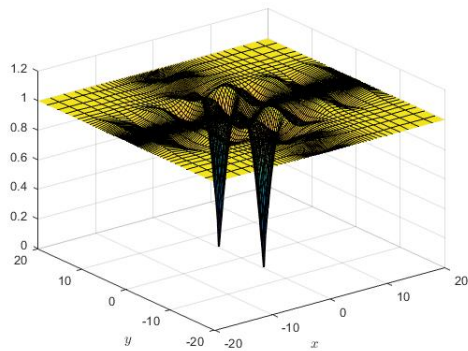
(b) $q = 6.47$.



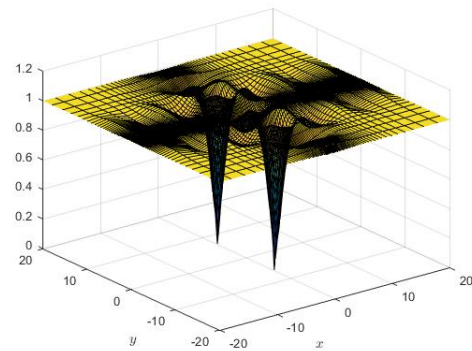
(c) $q = 12.98$.



(d) $q = 19.99$.



(e) $q = 30$.



(f) $q = 40$.

FIGURE 5.10 – Module de U_q pour le potentiel (5.56) avec $\sigma = 2, \gamma = 4$.

Chapitre 6

Annexe

A Annexe du Chapitre 3

Lemme A.1. Soient $R > 0$ et $\mu > 0$. Alors il existe $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ avec $0 \leq \chi(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ telle que

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq R \\ 0 & \text{si } |x| \geq R + \mu \end{cases}.$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\chi'(x)| \leq 4e^{-2}e^{\frac{2}{\mu}}. \quad (6.1)$$

Preuve du lemme A.1. Soit

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x}) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et posons

$$\chi(x) = \frac{f(R + \mu - |x|)}{f(R + \mu - |x|) + f(|x| - R)}.$$

Comme $\max(|x| - R, R + \mu - |x|) \geq \mu > 0$, le dénominateur de χ est toujours strictement positif et χ est bien définie. De plus, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ d'où $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Enfin, si $|x| \leq R$, alors $f(|x| - R) = 0$ d'où $\chi(x) = 1$. Si $|x| \geq R + \mu$, alors $f(R + \mu - |x|) = 0$ et $\chi(x) = 0$. Il reste à montrer la borne sur la dérivée. On a

$$|\chi'(x)| = \left| \frac{f'(R + \mu - |x|)f(|x| - R) + f'(|x| - R)f(R + \mu - |x|)}{(f(|x| - R) + f(R + \mu - |x|))^2} \right|.$$

Comme $|f'(x)| \leq \frac{\exp(-1/x)}{x^2} \leq 4e^{-2}$, on arrive à

$$|\chi'(x)| \leq \frac{8e^{-2}}{f(|x| - R) + f(R + \mu - |x|)}.$$

Enfin, $f(|x| - R) + f(R + \mu - |x|) \geq f(\frac{\mu}{2}) = 2e^{-\frac{2}{\mu}}$, ce qui nous donne (6.1). \square

Lemme A.2. Soit $(u_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ une double suite des nombres réels telle qu'il existe $C > 0$ tel que $|u_{n,m}| \leq C$, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$. Alors il existe une fonction strictement croissante $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que la limite suivante existe

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\sigma(n), \sigma(m)} \right).$$

Preuve. Posons $\tilde{\sigma}(0) = 0$. La suite $(u_{n,0})_n$ est bornée. Ainsi, il existe une extractrice φ_1 et $l_1 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi_1(n),0} = l_1.$$

Soit a_1 tel que

$$\varphi_1(a_1) = \min\{\varphi_1(j) \mid j \in \mathbb{N}, \varphi_1(j) > 0\}$$

et on pose

$$\tilde{\sigma}(1) = \varphi_1(a_1).$$

À nouveau, la suite $(u_{\varphi_1(n),\varphi_1(a_1)})_n$ est bornée. Ainsi, il existe une extractrice φ_2 et $l_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n),\varphi_1(a_1)} = l_2.$$

Soit a_2 tel que

$$\varphi_1 \circ \varphi_2(a_2) = \min\{\varphi_1 \circ \varphi_2(j) \mid j \in \mathbb{N}, j > a_1, \varphi_1 \circ \varphi_2(j) > \tilde{\sigma}(1)\}.$$

Ainsi $a_2 > a_1$ et l'on pose

$$\tilde{\sigma}(2) = \varphi_1 \circ \varphi_2(a_2).$$

En itérant ce raisonnement, on obtient une suite de nombre entiers $(a_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ strictement croissante, une suite d'extractrices $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ et une suite de nombres $(l_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ tels que la fonction $\tilde{\sigma}$ définie par

$$\tilde{\sigma}(m) = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_m(a_m)$$

est strictement croissante, et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_{m+1}(n),\tilde{\sigma}(m)} = l_{m+1}.$$

En remarquant que, à m fixé, $(u_{\tilde{\sigma}(n),\tilde{\sigma}(m)})_{n \geq m+1}$ est une sous-suite de $(u_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_{m+1}(n),\tilde{\sigma}(m)})_{n \geq m+1}$, on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\tilde{\sigma}(n),\tilde{\sigma}(m)} = l_{m+1}. \quad (6.2)$$

Comme la suite $(l_{m+1})_m$ est bornée, il existe une extractrice ψ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} l_{\psi(m)} = \ell. \quad (6.3)$$

En posant $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \psi$ et en combinant (6.2) et (6.3), on obtient le résultat voulu. \square

B Annexe du Chapitre 5

Proposition B.1. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, $h > 0$, $L > 0$, $1 \leq k \leq N$ et V_f et ξ_k définis en (5.6) et (5.7). Alors

$$\left| \widehat{f}(\xi_k) - \text{fts}(V_f)[k] \right| \leq \frac{h(2L-h)}{2} \sup_{x \in [-L, L]} |f'(x) - i\xi_k f(x)| + \left| \int_{\mathbb{R} \setminus [-L+h, L]} f(x) e^{-ix\xi_k} dx \right|. \quad (6.4)$$

Pour le premier terme majorant dans (6.4), en fixant ξ_k , on obtient que

$$\frac{h(2L-h)}{2} \sup_{x \in [-L, L]} |f'(x) - i\xi_k f(x)| = \mathcal{O}(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Le second terme majorant est nul si la fonction f est à support compact dans $[L-h, L+h]$. Dans le cas contraire, il faut minimiser ce terme, avec une fonction à décroissance rapide par exemple.

Preuve.

$$\begin{aligned} \left| \int_{-L+h}^L f(x) e^{-ix\xi_k} - h \sum_{j=1}^N f(x_j) e^{-ix_j \xi_k} \right| &= \left| \sum_{j=1}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) e^{-ix\xi_k} dx - \sum_{j=1}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x_j) e^{-ix_j \xi_k} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f(x) e^{-ix\xi_k} - f(x_j) e^{-ix_j \xi_k}| dx, \end{aligned}$$

et par l'inégalité des accroissements finis, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_{-L+h}^L f(x) e^{-ix\xi_k} - h \sum_{j=1}^N f(x_j) e^{-ix_j \xi_k} \right| &\leq \sup_{x \in [-L, L]} |f'(x) - i\xi_k f(x)| \sum_{j=1}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x - x_j) dx \\ &= N \frac{h^2}{2} \sup_{x \in [-L, L]} |f'(x) - i\xi_k f(x)|. \end{aligned}$$

En écrivant que

$$\widehat{f}(\xi_k) = \int_{-L+h}^L f(x) e^{-ix\xi_k} dx + \int_{\mathbb{R} \setminus [-L+h, L]} f(x) e^{-ix\xi_k} dx$$

et par définition de fts en (5.5), on arrive à (6.4). \square

Testons numériquement (6.4) avec $f \in S(\mathbb{R})$. Soit $f(x) = \exp(-x^2)$. On a $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} \exp(-\xi^2/4)$. On choisit comme paramètres numériques $h = 0.1$ et $L = 10$. Ainsi $(\xi_k)_k = [-31.25, 31.25]$. On observe en figure 6.1 que l'on obtient un tracé très proche de $\sqrt{\pi} \exp(-\xi_k^2/4)$ et l'erreur égale à l'erreur machine 10^{-16} .

Choisissons maintenant $f(x) = \exp(-|x|)$ et observons l'ordre d'erreur. Comme $f \notin S(\mathbb{R})$, il faut prendre L assez grand de sorte que

$$\left| \int_{\mathbb{R} \setminus [-L+h, L]} f(x) e^{-ix\xi_k} dx \right| \ll 1.$$

On a

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-L+h, L]} |f(x) e^{-ix\xi_k}| dx \leq \varepsilon \iff e^{-L+h} + e^{-L} \leq \varepsilon \quad (6.5)$$

$$\iff L \geq -\ln \left(\frac{\varepsilon}{1 + e^h} \right). \quad (6.6)$$

Pour $\varepsilon = 10^{-16}$ et h entre 0.1 et 0.001, on peut choisir $L = 40$. On trace en figure 6.2 la différence $|\text{fts}(V_f)[k] - \widehat{f}(\xi_k)|$ pour k fixé sur une échelle $\log - \log$, où $\widehat{f}(\xi) = 2/(1 + \xi^2)$. On observe alors que l'ordre de convergence est égal à 2.

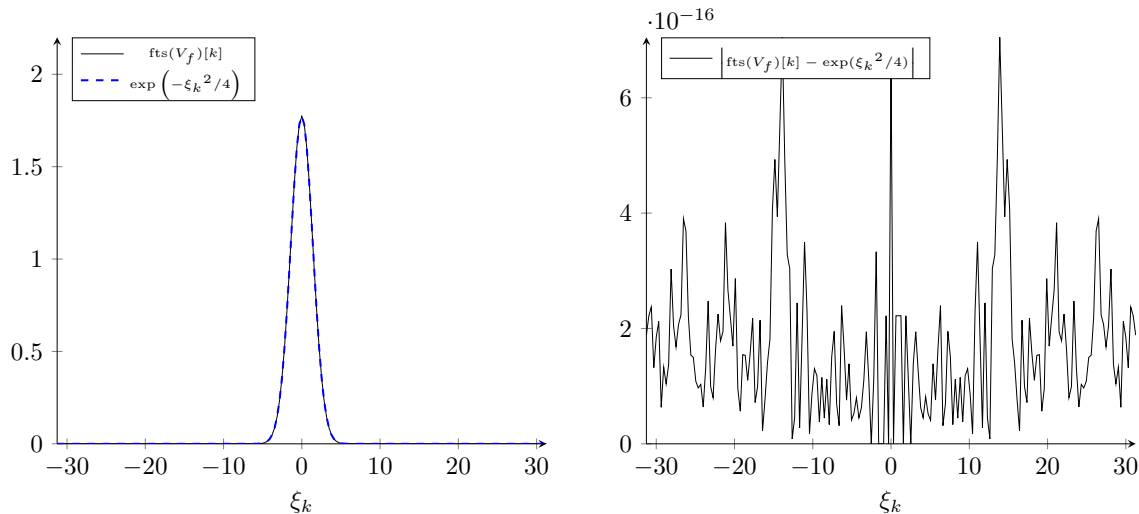


FIGURE 6.1 – Tracé de $\sqrt{\pi} \exp(-\xi^2/4)$ et de son approximation $\text{fts}(V_f)$ et tracé de l'erreur en valeur absolue

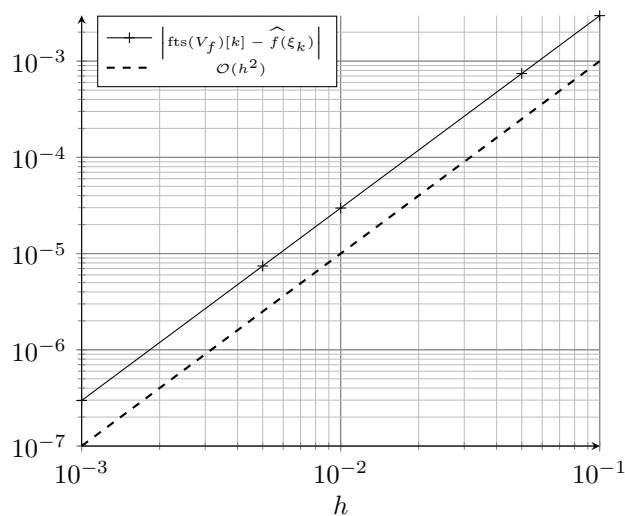


FIGURE 6.2 – Tracé de l'erreur $|\text{fts}(V_f)[k] - \widehat{f}(\xi_k)|$ sur une échelle $\log - \log$ en fonction de h .

En raisonnant comme pour la proposition B.1, on a la borne d'erreur suivante pour la transformée de Fourier inverse.

Proposition B.2. Soient $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, $h > 0$, $L > 0$, $1 \leq j \leq N$ et V_g défini en (5.9).

$$|\tilde{g}(x_j) - \text{ifts}(V_g)[j]| \leq \frac{N}{2} \left(\frac{2\pi}{hN} \right)^2 \sup_{x \in [\xi_1, \xi_{N+1}]} |g'(\xi) - ix_j g(\xi)| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [\xi_1, \xi_{N+1}]} g(\xi) e^{ix_j \xi} d\xi \right|. \quad (6.7)$$

Testons numériquement la formule (5.8) avec $g(\xi) = \sqrt{\pi} \exp(-\xi^2/4)$. On utilise à nouveau les mêmes paramètres numériques que précédemment. On obtient un tracé proche de la gaussienne $\exp(-x^2)$ et une erreur de l'ordre de 10^{-14} en figure 6.4.

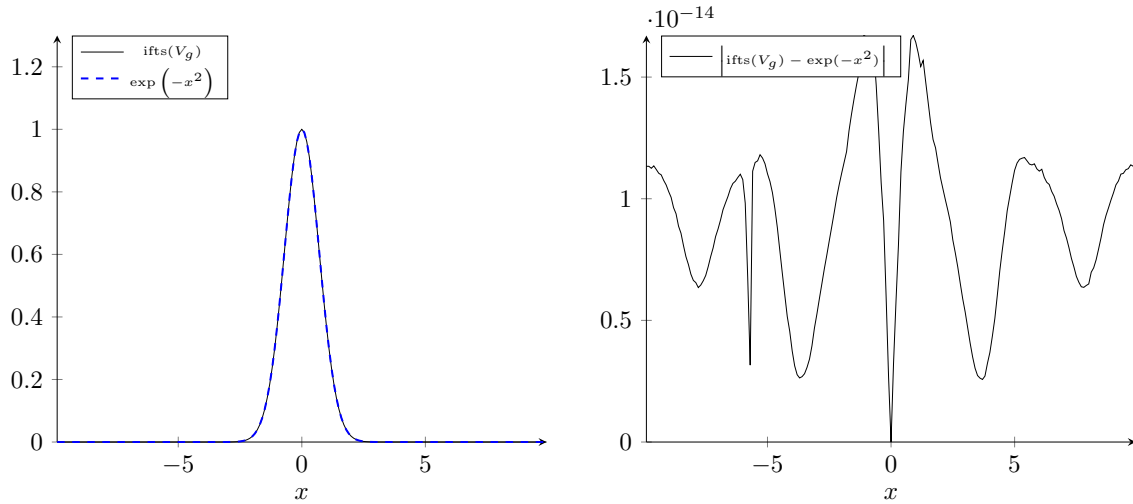


FIGURE 6.3 – Tracé de $\exp(-x^2)$ et de son approximation $\text{ifts}(V_g)$ et tracé de l'erreur en valeur absolue

Comparaison entre conv_{fft} et conv_{num}

Testons numériquement la convolution par fft définie en (5.11), avec $f(x) = g(x) = \exp(-x^2)$ avec $L = 50$ et $h = 0.1$. Notons, $V_f = [f(x_1), \dots, f(x_N)]$ et $V_g = [g(x_1), \dots, g(x_J)]$. On observe alors en figure 6.4 que le tracé de $f * g(x) = \sqrt{\pi/2} \exp(-x^2/2)$ est très proche de $\text{conv}_{\text{fft}}(V_f, V_g)$, ce qui est confirmé par l'erreur de l'ordre de 10^{-13} .

Toujours sur ce même exemple, on peut comparer le temps de calcul de la convolution par les deux méthodes en faisant varier h et L grâce à la fonction `cputime` de Matlab. On obtient le tableau suivant.

Param.	Tps (.s)	
	conv_{fft}	conv_{num}
$h = 0.1, L = 100$	0	0
$h = 0.01, L = 100$	0.01	0.04
$h = 0.001, L = 100$	0.86	4.46
$h = 0.001, L = 500$	1.39	24.13
$h = 0.0001, L = 100$	3.28	1009.8

On observe alors que la convolution numérique devient vite très coûteuse lorsque le nombre de composantes des deux vecteurs U et V augmentent, à l'inverse de la convolution par fft qui fournit un temps de calcul assez rapide.

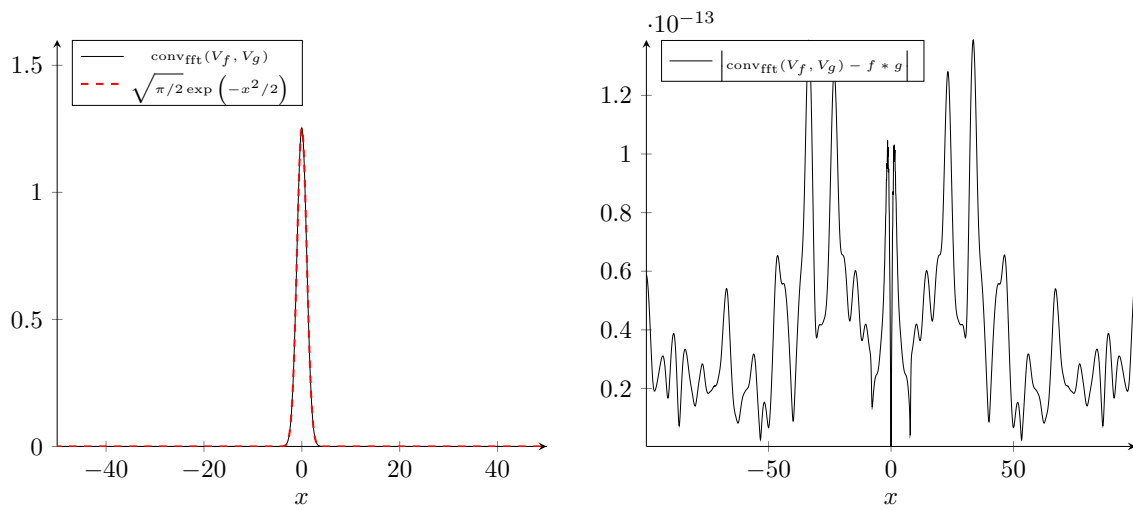


FIGURE 6.4 – Tracé de $f * g$ et de son approximation $\text{conv}_{\text{fft}}(f, g)$ et tracé de l'erreur en valeur absolue

Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55 of *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*. For sale by the Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964.
- [2] G. Allaire. *Numerical analysis and optimization*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, Oxford, 2007. An introduction to mathematical modelling and numerical simulation, Translated from the French by Alan Craig.
- [3] X. Antoine and R. Duboscq. Modeling and computation of Bose-Einstein condensates : stationary states, nucleation, dynamics, stochasticity. In *Nonlinear optical and atomic systems*, volume 2146 of *Lecture Notes in Math.*, pages 49–145. Springer, Cham, 2015.
- [4] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, and R. Danchin. *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations*, volume 343 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, 2011.
- [5] N. G. Berloff. Padé approximations of solitary wave solutions of the Gross-Pitaevskii equation. *J. Phys. A*, 37(5) :1617–1632, 2004.
- [6] N. G. Berloff and P. H. Roberts. Motions in a Bose condensate VI. Vortices in a nonlocal model. *J. Phys. A*, 32(30) :5611–5625, 1999.
- [7] F. Béthuel, P. Gravejat, and J.-C. Saut. Existence and properties of travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation. In *Stationary and time dependent Gross-Pitaevskii equations*, volume 473 of *Contemp. Math.*, pages 55–103. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [8] F. Béthuel, P. Gravejat, and J.-C. Saut. Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation. II. *Comm. Math. Phys.*, 285(2) :567–651, 2009.
- [9] F. Béthuel, P. Gravejat, J.-C. Saut, and D. Smets. Orbital stability of the black soliton for the Gross-Pitaevskii equation. *Indiana Univ. Math. J.*, 57(6) :2611–2642, 2008.
- [10] F. Béthuel, P. Gravejat, J.-C. Saut, and D. Smets. On the Korteweg-de Vries long-wave approximation of the Gross-Pitaevskii equation. I. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (14) :2700–2748, 2009.
- [11] F. Bethuel, G. Orlandi, and D. Smets. Vortex rings for the Gross-Pitaevskii equation. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 6(1) :17–94, 2004.
- [12] F. Bethuel and J.-C. Saut. Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation. I. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 70(2) :147–238, 1999.
- [13] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications.

- [14] T. Cazenave. *Semilinear Schrödinger equations*, volume 10 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York ; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [15] T. Cazenave and P.-L. Lions. Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations. *Comm. Math. Phys.*, 85(4) :549–561, 1982.
- [16] D. Chiron. Travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation in dimension larger than two. *Nonlinear Anal.*, 58(1-2) :175–204, 2004.
- [17] D. Chiron. Travelling waves for the nonlinear Schrödinger equation with general nonlinearity in dimension one. *Nonlinearity*, 25(3) :813–850, 2012.
- [18] D. Chiron. Stability and instability for subsonic traveling waves of the nonlinear Schrödinger equation in dimension one. *Anal. PDE*, 6(6) :1327–1420, 2013.
- [19] D. Chiron and M. Mariş. Traveling waves for nonlinear Schrödinger equations with nonzero conditions at infinity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 226(1) :143–242, 2017.
- [20] D. Chiron and F. Rousset. The KdV/KP-I limit of the nonlinear Schrödinger equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 42(1) :64–96, 2010.
- [21] D. Chiron and C. Scheid. Travelling waves for the nonlinear Schrödinger equation with general nonlinearity in dimension two. *J. Nonlinear Sci.*, 26(1) :171–231, 2016.
- [22] D. Chiron and C. Scheid. Multiple branches of travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation. *Nonlinearity*, 31(6) :2809–2853, 2018.
- [23] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Mécanique quantique*. Centre de Publications Universitaire, Téhéran, 1986. Trad. par Mohammed Farhad Rahimi et Mohsen Sar-Disheï du Tome I de Mécanique quantique, Hermann, 1973.
- [24] C. Coste. Nonlinear Schrödinger equation and superfluid hydrodynamics. *Eur. Phys. J. B Condens. Matter Phys.*, 1(2) :245–253, 1998.
- [25] A. de Bouard and J.-C. Saut. Solitary waves of generalized Kadomtsev-Petviashvili equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 14(2) :211–236, 1997.
- [26] A. de Bouard and J.-C. Saut. Symmetries and decay of the generalized Kadomtsev-Petviashvili solitary waves. *SIAM J. Math. Anal.*, 28(5) :1064–1085, 1997.
- [27] A. de Laire. Non-existence for travelling waves with small energy for the Gross-Pitaevskii equation in dimension $N \geq 3$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347(7-8) :375–380, 2009.
- [28] A. de Laire. Global well-posedness for a nonlocal Gross-Pitaevskii equation with non-zero condition at infinity. *Comm. Partial Differential Equations*, 35(11) :2021–2058, 2010.
- [29] A. de Laire. Nonexistence of traveling waves for a nonlocal Gross-Pitaevskii equation. *Indiana Univ. Math. J.*, 61(4) :1451–1484, 2012.
- [30] A. de Laire and P. Gravejat. Stability in the energy space for chains of solitons of the Landau-Lifshitz equation. *J. Differential Equations*, 258(1) :1–80, 2015.
- [31] A. de Laire and P. Gravejat. The sine-Gordon regime of the Landau-Lifshitz equation with a strong easy-plane anisotropy. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 35(7) :1885–1945, 2018.
- [32] A. de Laire and P. Mennuni. Traveling waves for some nonlocal 1D Gross-Pitaevskii equations with nonzero conditions at infinity. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 40(1) :635–682, 2020.

-
- [33] C. Gallo. The Cauchy problem for defocusing nonlinear Schrödinger equations with non-vanishing initial data at infinity. *Comm. Partial Differential Equations*, 33(4-6) :729–771, 2008.
- [34] P. Gérard. The Cauchy problem for the Gross-Pitaevskii equation. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 23(5) :765–779, 2006.
- [35] P. Gérard. The Gross-Pitaevskii equation in the energy space. In *Stationary and time dependent Gross-Pitaevskii equations*, volume 473 of *Contemp. Math.*, pages 129–148. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [36] L. Grafakos. *Modern Fourier analysis*, volume 250 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, third edition, 2014.
- [37] P. Gravejat. Limit at infinity for travelling waves in the Gross-Pitaevskii equation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336(2) :147–152, 2003.
- [38] P. Gravejat. A non-existence result for supersonic travelling waves in the Gross-Pitaevskii equation. *Comm. Math. Phys.*, 243(1) :93–103, 2003.
- [39] P. Gravejat. Decay for travelling waves in the Gross-Pitaevskii equation. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 21(5) :591–637, 2004.
- [40] P. Gravejat. Limit at infinity and nonexistence results for sonic travelling waves in the Gross-Pitaevskii equation. *Differential Integral Equations*, 17(11-12) :1213–1232, 2004.
- [41] P. Gravejat. Asymptotics for the travelling waves in the Gross-Pitaevskii equation. *Asymptot. Anal.*, 45(3-4) :227–299, 2005.
- [42] P. Gravejat. First order asymptotics for the travelling waves in the Gross-Pitaevskii equation. *Adv. Differential Equations*, 11(3) :259–280, 2006.
- [43] P. Gravejat and D. Smets. Asymptotic stability of the black soliton for the Gross-Pitaevskii equation. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 111(2) :305–353, 2015.
- [44] L. Greengard and J.-Y. Lee. Accelerating the nonuniform fast Fourier transform. *SIAM Rev.*, 46(3) :443–454, 2004.
- [45] M. Grillakis, J. Shatah, and W. Strauss. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I. *J. Funct. Anal.*, 74(1) :160–197, 1987.
- [46] E. P. Gross. Hydrodynamics of a superfluid condensate. *Journal of Mathematical Physics*, 4(2) :195–207, 1963.
- [47] B. C. Hall. *Quantum theory for mathematicians*, volume 267 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2013.
- [48] J. Hladik, M. Chrysos, P.-E. Hladik, and L. U. Ancarani. *Mécanique quantique*. Masson, 1997.
- [49] C. A. Jones, S. J. Putterman, and P. H. Roberts. Motions in a Bose condensate V. Stability of solitary wave solutions of non-linear Schrödinger equations in two and three dimensions. *J. Phys. A, Math. Gen.*, 19(15) :2991–3011, 1986.
- [50] C. A. Jones and P. H. Roberts. Motions in a Bose condensate IV. Axisymmetric solitary waves. *J. Phys. A, Math. Gen.*, 15(8) :2599–2619, 1982.
- [51] Y. S. Kivshar and B. Luther-Davies. Dark optical solitons : physics and applications. *Physics Reports*, 298(2) :81 – 197, 1998.

- [52] H. Koch, D. Tataru, and M. Visan. *Dispersive equations and nonlinear waves*, volume 45 of *Oberwolfach Seminars*. Birkhäuser/Springer, Basel, 2014. Generalized Korteweg-de Vries, nonlinear Schrödinger, wave and Schrödinger maps.
- [53] F. Lin and J. Wei. Traveling wave solutions of the Schrödinger map equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 63(12) :1585–1621, 2010.
- [54] Z. Lin. Stability and instability of traveling solitonic bubbles. *Adv. Differential Equations*, 7(8) :897–918, 2002.
- [55] P.-L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1(1) :145–201, 1985.
- [56] P.-L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. II. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1(2) :45–121, 1985.
- [57] O. Lopes and M. Mariş. Symmetry of minimizers for some nonlocal variational problems. *J. Funct. Anal.*, 254(2) :535–592, 2008.
- [58] S. Manakov, V. Zakharov, L. Bordag, A. Its, and V. Matveev. Two-dimensional solitons of the Kadomtsev-Petviashvili equation and their interaction. *Physics Letters A*, 63(3) :205–206, 1977.
- [59] M. Mariş. Traveling waves for nonlinear Schrödinger equations with nonzero conditions at infinity. *Ann. of Math. (2)*, 178(1) :107–182, 2013.
- [60] G. Peyré. *L’algèbre discrète de la transformée de Fourier : niveau M1*. Mathématiques à l’université : cours et exercices corrigés. Ellipses, 2004.
- [61] L. P. Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys. JETP*, 13(2) :451–454, 1961.
- [62] J. Rauch. *Partial differential equations*, volume 128 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [63] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975.
- [64] J. Reneuve, J. Salort, and L. Chevillard. Structure, dynamics, and reconnection of vortices in a nonlocal model of superfluids. *Phys. Rev. Fluids*, 3 :114602, 2018.
- [65] J.-C. Saut. Recent results on the generalized Kadomtsev-Petviashvili equations. *Acta Appl. Math.*, 39(1-3) :477–487, 1995. KdV ’95 (Amsterdam, 1995).
- [66] E. Schrödinger. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. *Phys. Rev.*, 28 :1049–1070, 1926.
- [67] T. Tsuzuki. Nonlinear waves in the Pitaevskii-Gross equation. *Journal of Low Temperature Physics*, 4(4) :441–457, 1971.
- [68] H. Veksler, S. Fishman, and W. Ketterle. Simple model for interactions and corrections to the Gross-Pitaevskii equation. *Phys. Rev. A*, 90 :023620, 2014.
- [69] V. Zakharov and E. Kuznetsov. Multi-scales expansion in the theory of systems integrable by the inverse scattering transform. *Phys. D*, 18(1-3) :455–463, 1986.
- [70] P. E. Zhidkov. *Korteweg-de Vries and nonlinear Schrödinger equations : qualitative theory*, volume 1756 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [71] M. Zworski. *Semiclassical analysis*, volume 138 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.