

## UNIVERSITÉ DE LILLE

École doctorale **Sciences Pour l'Ingénieur** Université Lille Nord-de-France 072

Unité de recherche **Unité de mécanique de Lille**

Thèse présentée par **Yoann REQUILÉ**

Soutenue le **7 octobre 2019**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université de Lille

Discipline **Mécanique**

Spécialité **Mécanique des Fluides**

Titre de la thèse

# Effets de la dissipation visqueuse sur la convection des écoulements de Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette de fluides Newtoniens ou viscoélastiques

**Thèse dirigée par** Mohamed Najib OUARZAZI directeur  
Silvia HIRATA co-encadrant

### Composition du jury

<i>Rapporteurs</i>	Daniel HENRY	directeur de recherche au LMFA - UMR CNRS 5509
	Chérif NOUAR	directeur de recherche à l'Université de Lorraine
<i>Examineurs</i>	John SOUNDAR JEROME	MCF à l'Université Claude Bernard Lyon 1
	Silvia HIRATA	MCF à l'Université de Lille
	Hassane NAJI	professeur à l'Université d'Artois
<i>Directeurs de thèse</i>	Mohamed Najib OUARZAZI	professeur à l'Université de Lille
	Silvia HIRATA	MCF à l'Université de Lille



**UNIVERSITÉ DE LILLE**

École doctorale **Sciences Pour l'Ingénieur** Université Lille Nord-de-France 072

Unité de recherche **Unité de mécanique de Lille**

Thèse présentée par **Yoann REQUILÉ**

Soutenue le **7 octobre 2019**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'Université de Lille

Discipline **Mécanique**

Spécialité **Mécanique des Fluides**

Titre de la thèse

**Effets de la dissipation visqueuse sur  
la convection des écoulements de  
Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette  
de fluides Newtoniens ou  
viscoélastiques**

**Thèse dirigée par** Mohamed Najib OUARZAZI directeur  
Silvia HIRATA co-encadrant

**Composition du jury**

<i>Rapporteurs</i>	Daniel HENRY	directeur de recherche au LMFA - UMR CNRS 5509
	Chérif NOUAR	directeur de recherche à l'Université de Lorraine
<i>Examineurs</i>	John SOUNDAR JEROME	MCF à l'Université Claude Bernard Lyon 1
	Silvia HIRATA	MCF à l'Université de Lille
	Hassane NAJI	professeur à l'Université d'Artois
<i>Directeurs de thèse</i>	Mohamed Najib OUARZAZI	professeur à l'Université de Lille
	Silvia HIRATA	MCF à l'Université de Lille



## UNIVERSITÉ DE LILLE

Doctoral School **Sciences Pour l'Ingénieur** Université Lille Nord-de-France 072

University Department **Unité de mécanique de Lille**

Thesis defended by **Yoann REQUILÉ**

Defended on **7<sup>th</sup> October, 2019**

In order to become Doctor from Université de Lille

Academic Field **Mechanics**

Speciality **Fluid Mechanics**

Thesis Title

# Viscous dissipation effects on Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette mixed convection of Newtonian or viscoelastic fluids

**Thesis supervised by** Mohamed Najib OUARZAZI Supervisor  
Silvia HIRATA Co-Monitor

### Committee members

<i>Referees</i>	Daniel HENRY	Senior Researcher at LMFA - UMR CNRS 5509
	Chérif NOUAR	Senior Researcher at Université de Lorraine
<i>Examiners</i>	John SOUNDAR JEROME	Associate Professor at Université Claude Bernard Lyon 1
	Silvia HIRATA	Associate Professor at Université de Lille
	Hassane NAJI	Professor at Université d'Artois
<i>Supervisors</i>	Mohamed Najib OUARZAZI	Professor at Université de Lille
	Silvia HIRATA	Associate Professor at Université de Lille



**Mots clés:** instabilité, convection mixte, fluides viscoélastiques, dissipation visqueuse, stabilité linéaire, stabilité faiblement non linéaire

**Keywords:** instability, mixed convection, viscoelastic fluids, viscous dissipation, linear stability, weakly non linear stability



Cette thèse a été préparée au

**Unité de mécanique de Lille**

Avenue Paul Langevin

Bâtiment M6

Cité Scientifique

59650 - Villeneuve d'Ascq

Site <http://uml.univ-lille.fr>





**EFFETS DE LA DISSIPATION VISQUEUSE SUR LA CONVECTION DES ÉCOULEMENTS DE RAYLEIGH-BÉNARD-POISEUILLE/COUETTE DE FLUIDES NEWTONIENS OU VISCOÉLASTIQUES****Résumé**

L'objet de cette thèse est d'étudier l'effet de la dissipation visqueuse sur les instabilités d'écoulements parallèles pour des fluides Newtoniens ou viscoélastiques. L'intensité de la dissipation visqueuse est mesurée par le nombre de Gebhart  $Ge$ . Dans les configurations de Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette (RBP/C), en plus du gradient de température imposé par les conditions aux bords, un gradient vertical de température est généré par la dissipation visqueuse. Le problème de stabilité linéaire de l'état de base est résolu numériquement par la méthode de Galerkin et la méthode de tir. Parmi toutes les possibles structures convectives, on montre que les rouleaux longitudinaux 3D sont les plus amplifiés. Le nombre de Rayleigh et le nombre d'onde au seuil de l'instabilité ont été déterminés en fonction du paramètre  $\Lambda = Pe^2 Ge$  et du nombre de Prandtl  $Pr$ , où  $Pe$  est le nombre de Péclet. On montre qu'il existe une valeur particulière de  $\Lambda$  au delà de laquelle la déstabilisation induite par la dissipation visqueuse est si forte qu'une instabilité d'origine thermique peut se développer avant l'instabilité hydrodynamique de Tollmien-Schlichting. Ce scénario est d'autant plus plausible que  $Pr$  est très élevé. Une analyse énergétique est proposée afin de mieux discerner les effets de la dissipation visqueuse. L'analyse faiblement non linéaire de stabilité est effectuée pour la configuration de RBP/C dans le cas limite d'un nombre de Prandtl infini. Les effets non linéaires favorisant une bifurcation supercritique, l'influence de la dissipation visqueuse sur l'intensité de la convection et sur le transfert de chaleur a été analysée.

Dans le cas des écoulements plans de Poiseuille/Couette confinés entre une paroi inférieure adiabatique et une paroi supérieure isotherme, la seule source d'instabilité est la dissipation visqueuse. Nous avons étendu le travail existant dans la littérature et qui se limite aux analyses linéaires de stabilité au domaine faiblement non linéaire. Une équation d'amplitude de type équation de Landau a été rigoureusement obtenue. Les résultats montrent que les termes non linéaires associés à la dissipation visqueuse contribuent à l'émergence d'une bifurcation sous-critique et favorisent le transfert de chaleur à la paroi supérieure, et ce d'autant plus que le nombre de Prandtl est faible.

Enfin l'étude de stabilité linéaire des écoulements de convection mixte de RBP a été étendue aux fluides viscoélastiques obéissant aux lois de comportements du modèle d'Oldroyd-B. Les effets combinés de l'élasticité du fluide, du rapport des viscosités du solvant à la viscosité totale et de la dissipation visqueuse ont été analysés. Comparés aux fluides Newtoniens, des résultats nouveaux sont reportés et qui montrent notamment que le caractère viscoélastique du fluide précipite la déstabilisation du système. Les effets coopérants de la dissipation visqueuse et de l'élasticité du fluide peuvent induire une instabilité pour des nombres de Reynolds bien plus bas que ceux qui sont nécessaires au déclenchement de l'instabilité d'origine inertielle.

**Mots clés :** instabilité, convection mixte, fluides viscoélastiques, dissipation visqueuse, stabilité linéaire, stabilité faiblement non linéaire

---

---

**VISCOUS DISSIPATION EFFECTS ON RAYLEIGH-BÉNARD-POISEUILLE/COUETTE MIXED CONVECTION OF NEWTONIAN OR VISCOELASTIC FLUIDS****Abstract**

The purpose of this thesis is to study the effect of viscous dissipation on the stability of parallel flows for Newtonian or viscoelastic fluids. The intensity of the viscous dissipation is measured the Gebhart number  $Ge$ . For Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette (RBP/C) flows, in addition to the temperature gradient imposed by the boundary conditions, a vertical temperature gradient is generated by the viscous dissipation. The linear stability of the basic state is solved numerically by the Galerkin method and the shooting method. It is shown that the 3D longitudinal rolls are the most amplified mode of convection. The Rayleigh number and the wave number at the threshold of instability were determined as a function of the parameter  $\Lambda = Pe^2 Ge$  and Prandtl number  $Pr$ , where  $Pe$  is the Péclet number. It is shown that there is a particular value of  $\Lambda$  beyond which the destabilization induced by the viscous dissipation is so strong that thermal instability may develop before the hydrodynamics instability of Tollmien-Schlichting. This scenario is more plausible for very high  $Pr$ . An energy analysis is proposed to better discern the viscous dissipation effects. Weakly nonlinear stability analysis is carried out for the configuration of RBP/C flows in the limiting case of an infinite Prandtl number. Nonlinear effects favoring a supercritical bifurcation, the influence of viscous dissipation on the convection intensity and heat transfer has been analyzed.

In the case of plane Poiseuille/Couette flows confined between an adiabatic lower wall and an isothermal upper wall, the only source of instability is viscous dissipation. We have extended the existing work in the literature, which is limited to linear stability analysis, to the weakly nonlinear regime. An amplitude equation of the Landau type has been rigorously obtained. The results show that the nonlinear terms associated to viscous dissipation contribute to the emergence of a subcritical bifurcation and promote heat transfer to the upper wall for low values of Prandtl number.

Finally, the study of linear stability of RBP mixed convection flows has been extended to the Oldroyd-B viscoelastic fluids. The combined effects of the fluid elasticity, the ratio of solvent viscosity to the total viscosity and the viscous dissipation have been analysed. Compared to Newtonian fluids, new reported results indicate in particular that the viscoelasticity of the fluid makes the system more unstable. The cooperative effects of viscous dissipation and fluid elasticity can induce instability for Reynolds numbers much lower than those required for triggering instability of inertial origin.

**Keywords:** instability, mixed convection, viscoelastic fluids, viscous dissipation, linear stability, weakly non linear stability

---

# Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Monsieur Mohamed Najib Ouarzazi, mon directeur de thèse et ma co-encadrante Madame Silvia da Costa Hirata dont le soutien et l'encadrement avisé m'ont permis d'aller au bout de cette thèse. Leur expertise et leur implication m'ont été d'une aide inestimable.

Je remercie vivement les membres du jury, Messieurs Hassane Naji et John Soundar Jerome pour avoir accepté la charge d'examineur et enfin les rapporteurs Messieurs Daniel Henry et Chérif Nouar pour avoir pris le temps d'examiner ma thèse en tant que rapporteurs. Leur examen attentif m'a permis d'améliorer la rédaction de mon manuscrit et d'élargir mes perspectives.

Je remercie toute l'équipe de l'Unité de Mécanique de Lille, Gilmar Monpean qui m'a donné le goût de la mécanique des fluides ainsi que Enrico Calzavarini et Stefano Berti pour leur soutien et précieux conseils. Je remercie également les membres du département de Mécanique Fondamentale au sein duquel j'ai pu développer mes compétences pédagogiques.

Je remercie mes collègues doctorants et ex-doctorants, en particuliers ceux de l'Unité de Mécanique de Lille (anciennement Laboratoire de Mécanique de Lille) : Nassim, Abdoulaye ainsi que Pooya du Laboratoire des Technologies Innovantes d'Amiens, avec qui j'ai pu développer des échanges fructueux au cours de ma thèse qui m'ont enrichi tant sur le plan professionnel que personnel.

Je remercie également mes collègues doctorants que j'ai côtoyé au sein des associations de doctorants Lilloises : Zakaria, Antoine, Carmelo, Guillaume, Cindy et bien d'autres, avec qui j'ai passé des moments enrichissants qui m'ont permis d'élargir mes perspectives sur toutes les aspects de la recherche.

Je remercie enfin ma famille sans qui rien n'aurait été possible, mon père Yves, ma mère Nicole et mon frère Christopher. Leur affection et leur soutien indéfectible ont été l'aide la plus précieuse pour mener à bien ce travail.



# Nomenclature

$Ra$  : Nombre de Rayleigh

$Pr$  : Nombre de Prandtl

$Re$  : Nombre de Reynolds, défini à partir de la vitesse maximale dans les chapitres 2, 3, 5 et à partir de la vitesse moyenne dans le chapitre 4

$Pe$  : Nombre de Péclet

$Ge$  : Nombre de Gebhart

$Nu$  : Nombre de Nusselt

$\Lambda = Pe^2 Ge$  : Paramètre de contrôle principal de la dissipation visqueuse

$k$  : Nombre d'onde

$\omega$  : Fréquence d'oscillation

$\lambda_1$  : Temps de relaxation

$\lambda_2$  : Temps de retardation

$\Gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  : Rapport des temps de relaxation et de retardation, rapport des viscosités

$\mathbf{u}$  : Vecteur vitesse adimensionné

$\mathbf{v} = (u, v, w)$  : Perturbation du vecteur vitesse adimensionné

$T$  : Température adimensionnée

$\theta$  : perturbation de la température adimensionnée

$P$  : Pression dynamique adimensionnée

$p$  : Perturbation de la pression dynamique adimensionnée

$\tau$  : Tenseur des contraintes

$\gamma$  : Tenseur des taux de déformation

$\rho$  : Masse volumique

$\mu$  : Viscosité dynamique

$\lambda_T$  : Conductivité thermique

$C_v$  : Chaleur massique à volume constant

$\kappa = \frac{\lambda_T}{\rho_0 C_v}$  : Coefficient de diffusivité thermique

- 
- $\beta$  : Coefficient de dilatation volumique  
 $\mathbf{g}$  : Vecteur accélération de la pesanteur  
 $\Phi$  : Dissipation visqueuse  
 $\tau$  : Échelle caractéristique de temps  
 $\mu$  : Paramètre de bifurcation  
 $\lambda$  : Coefficient de Landau  
 $J_{cond}$  : Flux de chaleur transmis par conduction  
 $J_{conv}$  : Flux de chaleur transmis par convection  
 $c$  : désigne les conditions critiques  
\* : désigne une grandeur dimensionnée

# Table des matières

Résumé	xi
Remerciements	xiii
Nomenclature	xv
Table des matières	xvii
Liste des tableaux	xxi
Table des figures	xxiii
<b>1 Présentation de la convection des écoulements de RBP/C</b>	<b>1</b>
1.1 Convection de Rayleigh-Bénard des fluides Newtoniens	1
1.2 Convection de Rayleigh-Bénard de fluides viscoélastiques	2
1.2.1 Qu'est ce qu'un fluide viscoélastique	2
1.2.2 Convection de fluides viscoélastiques	5
1.3 Convection des écoulements de Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette	5
1.3.1 Fluides Newtoniens	5
1.3.2 Fluides viscoélastiques	8
1.3.3 Objectifs de la thèse	8
1.4 Formulation mathématique	9
1.4.1 Modélisation du problème	9
1.4.2 Équation de continuité	10
1.4.3 Équation de conservation de la quantité de mouvement	10
1.4.4 Équation de conservation l'énergie	12
1.4.5 Conditions aux limites	14
1.5 Équations de conservation adimensionnées	15
1.6 Solution de base de Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette	17
Température de base et stratification du champ de température	19
<b>2 Stabilité linéaire des écoulements de RBP/C de fluides Newtoniens</b>	<b>23</b>
2.1 Équations aux perturbations linéarisées et développement en modes normaux	23
2.1.1 Équations aux perturbations linéarisées	23
2.1.2 Développement en modes normaux	24
2.1.3 Rouleaux longitudinaux et cas limite d'un nombre de Prandtl infini	25
2.2 Méthodes numériques et validation	26
2.2.1 Méthode de Galerkin	26

2.2.2	Méthode de tir . . . . .	27
2.2.3	Validation des méthodes numériques . . . . .	28
2.3	Présentation des résultats de stabilité linéaire . . . . .	30
2.3.1	Sélection du mode le plus instable en présence de dissipation visqueuse . . . . .	30
2.3.2	Effets de la dissipation visqueuse et du nombre de Prandtl pour le mode le plus instable . . . . .	31
2.3.3	Lignes de courant et isothermes . . . . .	37
2.3.4	Analyse énergétique . . . . .	39
2.3.5	Instabilités d'origine thermique et hydrodynamique : Comparaison . . . . .	43
2.4	Conclusion . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Stabilité faiblement non linéaire des écoulements de RBP/C d'un fluide newtonien</b>	<b>49</b>
3.1	Formulation mathématique du problème non linéaire . . . . .	50
3.2	Méthodologie du problème non linéaire . . . . .	52
3.2.1	Équations pour les rouleaux longitudinaux d'amplitude finie . . . . .	52
3.2.2	Équation d'amplitude . . . . .	53
3.3	Résultats de l'analyse de stabilité faiblement non linéaire . . . . .	57
3.3.1	Influence des termes non linéaires en $Ge$ . . . . .	57
3.3.2	Coefficients non linéaires et amplitude pour $Ge = 0$ dans les termes non linéaires . . . . .	58
3.3.3	Transfert de chaleur . . . . .	59
3.3.4	Flux total et nombre de Nusselt . . . . .	62
3.3.5	Lignes de courant et isothermes . . . . .	65
3.4	Conclusion . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Stabilité faiblement non linéaire des écoulements parallèles d'un fluide newtonien</b>	<b>71</b>
4.1	Formulation mathématique du problème non linéaire . . . . .	72
4.2	Méthodologie du problème non linéaire . . . . .	74
4.2.1	Équations pour les rouleaux longitudinaux d'amplitude finie . . . . .	74
4.2.2	Équation d'amplitude . . . . .	76
4.3	Résultats de l'analyse de stabilité faiblement non linéaire . . . . .	82
4.3.1	Bifurcation supercritique/sous-critique . . . . .	82
4.3.2	Amplitudes stationnaires dans le cadre de validité de l'analyse faiblement non linéaire . . . . .	84
4.3.3	Transfert de chaleur . . . . .	86
4.3.4	Lignes de courant et isothermes . . . . .	89
4.4	Conclusion . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Stabilité linéaire des écoulements de RBP/C de fluides viscoélastiques</b>	<b>95</b>
5.1	Équations aux perturbations linéarisées et développement en modes normaux . . . . .	95
5.1.1	Développement en modes normaux . . . . .	96
5.1.2	Rouleaux longitudinaux . . . . .	99
5.2	Résultats de l'analyse de stabilité linéaire . . . . .	101
5.2.1	Résultats en l'absence de dissipation visqueuse . . . . .	101
5.2.2	Sélection du mode le plus instable en présence de dissipation visqueuse . . . . .	104
5.2.3	Effets combinés de la dissipation visqueuse et des paramètres viscoélastiques pour le mode le plus instable . . . . .	105
5.2.4	Instabilités d'origine thermique et hydrodynamique : comparaison . . . . .	109
5.2.5	Lignes de courant et isothermes . . . . .	110

Table des matières	xix
5.2.6 Analyse énergétique . . . . .	110
5.3 Conclusion . . . . .	114
<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>117</b>
<b>A Expression des coefficients de contrainte viscoélastique</b>	<b>121</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>125</b>
<b>Table des matières</b>	<b>131</b>



# Liste des tableaux

2.1	Nombre de Rayleigh critique $Ra_c$ et nombre d'onde critique $k_c$ obtenus dans le présent travail comparés aux $Ra_c^S$ et $k_c^S$ calculés dans [5]. . . . .	30
2.2	Nombre de Rayleigh critique $Ra_c$ en fonction de $Re$ pour $Ge = 0, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$ pour les rouleaux transversaux avec $Pr = 450$ . . . . .	31
2.3	Nombre de Rayleigh critique $Ra_c$ au seuil d'apparition des rouleaux longitudinaux pour la configuration de RBP, en fonction du paramètre $\Lambda$ pour un nombre de Prandtl qui tend vers l'infini, calculé par la méthode de Galerkin (MG) et la méthode de tir (MT) . . . . .	35
2.4	Nombre de Rayleigh critique $Ra_c$ au seuil d'apparition des rouleaux longitudinaux pour la configuration de RBP, en fonction du paramètre $\Lambda$ pour $Pr \rightarrow +\infty$ et $Pr = 10, 50, 100, 450, 1000, 10000$ , pour la méthode de Galerkin à l'ordre 14 . . . .	37
2.5	Nombre de Rayleigh critique $Ra_c$ au seuil d'apparition des rouleaux longitudinaux pour la configuration de RBC en fonction du paramètre $\Lambda$ pour $Pr \rightarrow +\infty$ et pour $Pr = 10, 50, 100, 450, 1000, 10000$ , pour la méthode de Galerkin à l'ordre 14 . . . .	37
2.6	Tableau des résultats de l'analyse énergétique basée sur l'équation de la chaleur, pour une configuration de RBP avec $Pr = 450$ et $Ge = 10^{-4}$ . . . . .	41
2.7	Tableau des résultats de l'analyse énergétique basée sur l'équation de la chaleur, pour une configuration de RBC avec $Pr = 450$ et $Ge = 10^{-4}$ . . . . .	41
2.8	Estimation des paramètres $Ge$ et $\Lambda$ associés aux expériences [44], [38], [18], [59], [24] et [42]. . . . .	46
3.1	Tableau des coefficients $\mu, \lambda, \tau, \frac{\mu}{\lambda}$ en fonction du paramètre $\Lambda$ pour un écoulement de RBP avec $Pr \rightarrow \infty$ . . . . .	59
3.2	Tableau des coefficients $\mu, \lambda, \tau, \frac{\mu}{\lambda}$ en fonction du paramètre $\Lambda$ pour un écoulement de RBC avec $Pr \rightarrow \infty$ . . . . .	59
4.1	Paramètres critiques $\Lambda_c$ et $k_c$ au seuil d'apparition des rouleaux longitudinaux pour différents $Pr$ pour l'écoulement de Poiseuille plan (EPP) et l'écoulement de Couette plan (ECP), comparaison avec les résultats de Barletta, Celli et Nield [3] et Barletta, Nield [49]. . . . .	79
4.2	Coefficient $\lambda$ de l'équation de Landau cubique pour différents $Pr$ dans les écoulements de Poiseuille plan (EPP) et les écoulements de Couette plan (ECP). . . . .	83
5.1	Tableau des résultats de l'analyse énergétique basée sur l'équation de la chaleur dans le cas faiblement viscoélastique ( $\lambda_1 = 0.025, \Gamma = 0.15$ ), pour une configuration de RBP avec $Pr = 450$ et $Ge = 10^{-4}$ . . . . .	114

---

5.2	Tableau des résultats de l'analyse énergétique basée sur l'équation de la chaleur dans le cas fortement viscoélastique ( $\lambda_1 = 0.3$ , $\Gamma = 0.15$ ), pour une configuration de RBP avec $Pr = 450$ et $Ge = 10^{-4}$ . . . . .	114
-----	---	-----

# Table des figures

1.1	Effet de la viscoélasticité sur les écoulements (a) (photographie extraite du site du groupe Gareth McKinley's Non-Newtonian Fluid Dynamics Research Group, ©2009)(b) et (c) Boger et Walter (1993) [9] . . . . .	3
1.2	Modèle analogique de Maxwell associant en série un amortisseur visqueux de viscosité $\mu$ et une élasticité de module $G$ . . . . .	4
1.3	Configuration de Rayleigh-Bénard avec écoulement parallèle : écoulement de Poiseuille et écoulement de Couette . . . . .	6
1.4	Vu d'ensemble des structures convectives susceptibles de se développer dans une configuration de Rayleigh-Bénard avec écoulement parallèle : rouleaux longitudinaux (Rl) et rouleaux transversaux (Rt) . . . . .	7
1.5	Configuration d'écoulement parallèle (Poiseuille et Couette) avec paroi isotherme en haut et paroi adiabatique en bas. . . . .	16
1.6	text . . . . .	20
1.7	text . . . . .	20
1.8	text . . . . .	21
2.1	Nombre de Rayleigh critique $Ra_c$ pour les rouleaux transversaux dans une configuration de RBP avec $Pr = 450$ , obtenu par la méthode de Galerkin à l'ordre 14 (cercles) comparé avec les résultats numériques de Carrière et Monkewitz [12] (ligne continue). La ligne horizontale représente le seuil des rouleaux longitudinaux $Ra_c = 1707.762$ . . . . .	29
2.2	Courbes neutres de stabilité pour différentes valeurs de $Pe$ dans le cas des rouleaux transversaux, avec $Pr = 450$ et $Ge = 10^{-4}$ dans des configurations de RBP et RBC. . . . .	32
2.3	Courbes neutres de stabilité pour différentes valeurs de $\Lambda$ dans le cas des rouleaux longitudinaux, avec $Pr = 450$ dans des configurations de RBP et RBC. . . . .	32
2.4	Évolution du nombre de Rayleigh critique $Ra_c$ pour les rouleaux transversaux, longitudinaux et obliques en fonction du nombre de Péclet $Pe$ pour $Pr = 450$ et $Ge = 10^{-4}$ , pour des configuration de Poiseuille et Couette. . . . .	32
2.5	Influence du paramètre $\Lambda = Pe^2 Ge$ sur le nombre de Rayleigh critique $Ra_c$ , pour les rouleaux longitudinaux dans des configurations de RBP et RBC. . . . .	33
2.6	Influence du paramètre $\Lambda = Pe^2 Ge$ sur le nombre d'onde critique $k_c$ pour les rouleaux longitudinaux dans des configurations de RBP et RBC. . . . .	33
2.7	Comparaison des valeurs du nombre de Rayleigh Critique $Ra_c$ pour la méthode de Galerkin (trait continu) et la méthode de tir (points) avec $Pr$ qui tend vers l'infini. . . . .	34
2.8	Effet du nombre de Prandtl $Pr$ sur le nombre de Rayleigh critique $Ra_c$ en fonction du paramètre $\Lambda$ dans le cas des rouleaux longitudinaux pour une configuration de RBP. . . . .	36

2.9	Effet du nombre de Prandtl $Pr$ sur le nombre de Rayleigh critique $Ra_c$ en fonction du paramètre $\Lambda$ dans le cas des rouleaux longitudinaux pour une configuration de RBC. . . . .	36
2.10	Isolignes de courant et isothermes pour $\Lambda = 0$ . . . . .	38
2.11	Isolignes de courant et isothermes pour $\Lambda = 8100$ dans la configuration de RBP . . . . .	38
2.12	Isolignes de courant et isothermes pour $\Lambda = 27242$ soit $Ra_c = 0$ dans la configuration de RBP . . . . .	38
2.13	Isolignes de courant et isothermes pour $\Lambda = 9332$ soit $Ra_c = 0$ dans la configuration de RBC . . . . .	39
2.14	Énergies d'origine thermique $E_{th}$ (ligne bleu continue) et due à la dissipation visqueuse $E_{vd}$ (ligne rouge pointillée) en fonction du paramètre $\Lambda$ pour une configuration de RBP avec $Pr = 450$ . . . . .	42
2.15	Énergies d'origine thermique $E_{th}$ (ligne bleu continue) et due à la dissipation visqueuse $E_{vd}$ (ligne rouge pointillée) en fonction du paramètre $\Lambda$ pour une configuration de RBC avec $Pr = 450$ . . . . .	42
2.16	Comparaison des seuils de l'instabilité hydrodynamique due à la dissipation visqueuse avec l'instabilité hydrodynamique classique de Tollmien-Schlichting, pour $Ge = 10^{-6}$ et $Pr = 10, 100, 450, 1000$ (écoulement de Poiseuille). . . . .	44
2.17	Seuils de l'instabilité hydrodynamique due à la dissipation visqueuse, pour $Ge = 10^{-6}$ et $Pr = 10, 100, 450, 1000$ (écoulement de Couette). . . . .	44
3.1	Fonction de courant $\psi_1$ et température $\Theta_1$ en fonction de $z$ pour $\Lambda = 0$ (1), $\Lambda = 10000$ (2), $\Lambda = 20000$ (3). . . . .	56
3.2	Variations verticales de la première correction non linéaire sur le mode linéaire au seuil critique pour un écoulement de Poiseuille avec $\Lambda = 0$ (1), $\Lambda = 10000$ (2), $\Lambda = 20000$ (3). . . . .	56
3.3	$\frac{\mu}{\lambda}$ en fonction de $Ge$ pour $\Lambda = 0, 5000, 10000, 15000, 20000$ pour des écoulement de RBP et RBC avec $Pr \rightarrow \infty$ . . . . .	58
3.4	Rapport $\frac{\mu}{\lambda}$ en fonction de $\Lambda$ pour des écoulement de RBP et RBC avec $Pr \rightarrow \infty$ . . . . .	60
3.5	Amplitude stationnaire $ A_s $ en fonction de $\frac{Ra-Ra_c}{Ra_c}$ pour $\Lambda = 0, 5000, 10000, 20000$ avec $Pr \rightarrow \infty$ . . . . .	60
3.6	Flux conductif $J_{cond}$ pour $z$ entre 0 et 1 en $Ra = Ra_c$ pour $\Lambda = 0, 10000, 20000$ (a); Flux convectif moyen $\langle J_{conv} \rangle$ pour $z$ entre 0 et 1, $Ra = 1.1Ra_c$ pour $\Lambda = 0, 10000, 20000$ (b) et pour un écoulement de Poiseuille. . . . .	61
3.7	Flux conductif $J_{cond}$ en fonction de $Ra$ pour $\Lambda = 0, 5000, 10000, 150000, 20000$ (Poiseuille) et $\Lambda = 0, 4000, 7000$ (Couette). . . . .	63
3.8	Flux convectif $J_{conv}$ en fonction de $(Ra-Rac)/Rac$ pour $\Lambda = 0, 5000, 10000, 150000, 20000$ (Poiseuille) et $\Lambda = 0, 4000, 7000$ (Couette), calculé à partir de l'expression 3.47. La pente des courbes est ici $S$ . . . . .	63
3.9	Pente $S$ du flux convectif moyen $\langle J_{conv} \rangle$ en fonction de $\Lambda$ pour des écoulements de RBP et RBC. . . . .	63
3.10	Nombre de Nusselt $Nu$ en $z = 1$ en fonction de $\frac{Ra-Ra_c}{Ra}$ pour $\Lambda = 0, 1000, 5000, 10000, 20000$ (Poiseuille) et $\Lambda = 0, 4000, 7000$ (Couette). . . . .	65
3.11	Nombre de Nusselt $Nu$ en $z = 1$ en fonction de $\Lambda$ pour $\frac{Ra-Ra_c}{Ra} = 1$ . . . . .	65
3.12	Partie linéaire des lignes de courant et isothermes pour $\Lambda = 0$ . . . . .	66
3.13	Partie non linéaire des lignes de courant et isothermes pour $\Lambda = 0$ . . . . .	66
3.14	Total des parties linéaire et non linéaire des lignes de courant et isothermes pour $\Lambda = 0$ . . . . .	67
3.15	Partie linéaire des lignes de courant et isothermes pour $\Lambda = 20000$ . . . . .	67

3.16	Partie non linéaire des lignes de courant et isothermes pour $\Lambda = 20000$ . . . . .	68
3.17	Total des parties linéaire et non linéaire des lignes de courant et isothermes pour $\Lambda = 20000$ . . . . .	68
4.1	Configuration d'écoulement parallèle (Poiseuille et Couette) avec paroi isotherme en haut et paroi adiabatique en bas. . . . .	71
4.2	Dérivée de la température de base en fonction de $z$ pour l'écoulement de Poiseuille plan et l'écoulement de Couette plan. . . . .	73
4.3	Fonctions propres au seuil critique dans l'écoulement de Poiseuille pour différentes valeurs du nombre de Prandtl $Pr$ : (1) $Pr = 10^5$ , (2) $Pr = 1$ et (3) $Pr = 0.27$ . . . . .	78
4.4	Fonctions propres $\Psi_1$ (a), $\Theta_1$ (b), $\tilde{U}_1$ (c) au seuil critique dans l'écoulement de Couette pour différentes valeurs du nombre de Prandtl $Pr$ : (1) $Pr = 10^5$ , (2) $Pr = 2$ et (3) $Pr = 0.77$ . . . . .	78
4.5	Variations verticales de la première correction non linéaire sur le mode linéaire au seuil critique pour un écoulement de Poiseuille plan avec différentes valeurs du nombre de Prandtl : (1) $Pr = 10^5$ ; (2) $Pr = 1$ et (3) $Pr = 0.27$ . . . . .	81
4.6	Variations verticales de la correction non linéaire au gradient de température de base, au seuil critique pour un écoulement de Poiseuille (a) et une écoulement de Couette (b) avec $Ge = 10^{-4}$ et différentes valeurs du nombre de Prandtl : (1) $Pr = 10^5$ ; (2) $Pr = 1$ et (3) $Pr = 0.27$ , et (4) $Pr = 2$ , (5) $Pr = 0.8$ et (6) $Pr = 0.5$ . . . . .	81
4.7	Valeur critique $Ge^*$ du nombre de Gebhart au dessus duquel la bifurcation devient sous-critique en fonction du nombre de Prandtl pour l'écoulement de Poiseuille plan (1) et l'écoulement de Couette plan (2). . . . .	85
4.8	Dépendance du coefficient $\lambda_{Adv}$ en fonction du nombre Prandtl, pour l'écoulement de Poiseuille plan (1) et l'écoulement de Couette plan (2). . . . .	85
4.9	Dépendance du coefficient $\lambda_{vd}$ en fonction du nombre Prandtl avec $Ge = 10^{-4}$ , pour l'écoulement de Poiseuille plan (1) et l'écoulement de Couette plan (2). . . . .	85
4.10	Amplitude stationnaire comme fonction de la distance au seuil critique : (a) configuration de Poiseuille (1) $Pr = 10^5$ ; (2) $Pr = 1$ ; (3) $Pr = 0.5$ ; (4) $Pr = 0.27$ ; (5) $Pr = 0.2$ ; (6) $Pr = 0.1$ et (b) configuration de Couette (1) $Pr = 10^5$ , (2) $Pr = 2$ , (3) $Pr = 0.77$ ; (4) $Pr = 0.6$ ; (5) $Pr = 0.5$ . $Ge$ est fixé à $10^{-4}$ . . . . .	87
4.11	Distribution verticale du flux convectif moyen en $\Lambda = 1.1\Lambda_c$ pour des nombres de Prandtl moyens et grands : (a) écoulement de Poiseuille plan (1) $Pr = 10^5$ ; (2) $Pr = 5$ , (3) $Pr = 2$ et (b) écoulement de Couette plan (4) $Pr = 10^5$ , (5) $Pr = 20$ , (6) $Pr = 10$ , avec $Ge = 10^{-4}$ . . . . .	88
4.12	Distribution verticale du flux convectif moyen en $\Lambda = 1.1\Lambda_c$ pour de petits nombres de Prandtl : (a) écoulement de Poiseuille plan (1) $Pr = 0.5$ , (2) $Pr = 0.31$ , (3) $Pr = 0.27$ et (b) écoulement de Couette plan (4) $Pr = 1.5$ , (5) $Pr = 1.1$ , (6) $Pr = 0.9$ , avec $Ge = 10^{-4}$ . . . . .	88
4.13	Nombre de Nusselt dans le régime de petits nombres de Prandtl : (a) configuration de Poiseuille (1) $Pr = 0.5$ , (2) $Pr = 0.31$ , (3) $Pr = 0.27$ et (b) configuration de Couette (4) $Pr = 1.5$ , (5) $Pr = 1.1$ , (6) $Pr = 0.9$ . . . . .	90
4.14	Nombre de Nusselt dans le régime de nombres de Prandtl modérés et grands : (a) configuration de Poiseuille (1) $Pr = 10^5$ ; (2) $Pr = 5$ et (3) $Pr = 2$ et (b) configuration de Couette (4) $Pr = 10^5$ , (5) $Pr = 20$ , (6) $Pr = 10$ . . . . .	90
4.15	Partie linéaires, non linéaire et total des lignes de courant pour $Pr = 10^5$ et $Pr = 0.27$ , avec $\Lambda = 0.001\Lambda_c$ et $Ge = 10^{-4}$ . . . . .	92
4.16	Partie linéaires, non linéaire et total des isothermes pour $Pr = 10^5$ et $Pr = 0.27$ , avec $\Lambda = 0.001\Lambda_c$ et $Ge = 10^{-4}$ . . . . .	93

5.1	Courbes neutres de stabilité marginale dans la configuration classique de Rayleigh-Bénard ( $Re = 0$ ) et pour $Pr = 10$ , montrant le seuil critique d'instabilité stationnaire ainsi que deux exemples de seuils critiques d'instabilités oscillatoires. Les résultats ont été obtenus avec la méthode de Galerkin basée sur le premier terme. Figure tirée de la thèse de N.Delenda [16]. . . . .	102
5.2	L'étude de Hirata et al (2015) [26] a mis en évidence deux régimes d'instabilité pour le problème de RBP d'un fluide de modèle rhéologique Oldroyd-B. On voit ici les domaines faiblement viscoélastique (stationnaire) et fortement viscoélastique (instationnaire) en fonction des paramètres viscoélastiques $\Lambda_1$ et $\Gamma$ . . . . .	103
5.3	Influence du nombre de Reynolds $Re$ sur le nombre de Rayleigh critique pour des rouleaux longitudinaux et des rouleaux transversaux pour un cas faiblement viscoélastique ( $\lambda_1 = 0.025$ ) et un cas fortement viscoélastiques ( $\lambda_1 = 0.1$ ), avec $\Gamma = 0.15$ , $Pr = 450$ et $Ge = 10^{-4}$ dans une configuration de RBP. . . . .	105
5.4	Influence du paramètre $\Lambda$ sur la courbe neutre de stabilité des rouleaux longitudinaux pour un cas faiblement viscoélastique avec $\Gamma = 0.15$ et $\lambda_1 = 0.025$ (a) et pour un cas fortement viscoélastique avec $\Gamma = 0.15$ et $\lambda_1 = 0.3$ (b) dans une configuration de RBP. . . . .	106
5.5	Influence du paramètre $\gamma$ sur le nombre de Rayleigh critique $Ra_c$ et le nombre d'onde critique $k_c$ dans le cas faiblement viscoélastique avec $\lambda_1 = 0.025$ . Le cas Newtonien est en pointillés pour comparaison. . . . .	107
5.6	Influence du paramètre $\Gamma$ sur le nombre de Rayleigh critique $Ra_c$ , le nombre d'onde critique $k_c$ et la pulsation critique $\omega_c$ dans le cas fortement viscoélastique avec $\Gamma = 0.15$ . . . . .	108
5.7	Influence du paramètre $\Lambda$ sur le nombre de Rayleigh critique $Ra_c$ dans le cas fortement viscoélastique oscillatoire et le cas fortement viscoélastique stationnaire, avec $Pr = 450$ , $Ge = 10^{-4}$ et $\Gamma = 0.15$ . . . . .	109
5.8	Nombre de Reynolds critique pour un fluide viscoélastique modèle Oldroyd-B en écoulement de Poiseuille en conduite d'extension infinie. Ici $\beta$ correspond à $\Gamma$ et $E/\epsilon$ correspond à $\lambda_1$ . Figures tirées de Sadanandan et Sureshkumar[69] et Sureshkumar et Beris [76] respectivement. . . . .	111
5.9	Influence du paramètre $\gamma = \lambda_1(1 - \Gamma)$ sur le nombre de Reynolds critique $Re_c$ tel que $Ra_c = 0$ dans le cas faiblement viscoélastique pour $Pr = 450$ et $Ge = 10^{-4}$ . . .	111
5.10	Isolignes de courant et isothermes dans un cas fortement viscoélastique ( $\lambda_1 = 0.1$ et $\Gamma = 0.15$ ) pour $\Lambda = 0$ . . . . .	111
5.11	Isolignes de courant et isothermes dans un cas fortement viscoélastique ( $\lambda_1 = 0.1$ et $\Gamma = 0.15$ ) pour $\Lambda = 5000$ . . . . .	112
5.12	Isolignes de courant et isothermes dans un cas fortement viscoélastique ( $\lambda_1 = 0.1$ et $\Gamma = 0.15$ ) pour $\Lambda = 8000$ . . . . .	112
5.13	Énergie thermique $E_{th}$ (courbe bleue continue) et énergie de dissipation visqueuse $E_v d$ (courbe rouge pointillée) pour un fluide en régime faiblement viscoélastique ( $\lambda_1 = 0.025$ , $\Gamma = 0.15$ ) et un fluide en régime fortement viscoélastique ( $\lambda_1 = 0.3$ , $\Gamma = 0.15$ ). . . . .	115

# Présentation de la convection des écoulements de Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette

## 1.1 Convection de Rayleigh-Bénard des fluides Newtoniens

La question des instabilités susceptibles de se développer dans un fluide est un des grands sujets d'études de la mécanique des fluides lors du siècle dernier. En particulier le problème de Rayleigh-Bénard, aussi appelé problème de la convection naturelle est du fait de sa simplicité un des problèmes fondamentaux de l'analyse de stabilité des fluides.

Le problème de la convection de Rayleigh-Bénard est présent aussi bien dans la nature, dans les mouvements atmosphériques et océaniques, mais aussi géophysiques (convection du manteau terrestre) et astrophysiques (à l'intérieur des étoiles), que dans de nombreuses applications industrielles. Les premières études de ce problème sont dues aux expériences de Bénard (1901) [6] et à l'étude théorique de Rayleigh (1916) [66] qui ont donné leurs noms au problème. Historiquement ce problème a été motivé par l'étude des mouvements atmosphériques. Depuis ces travaux fondateurs de nombreuses études ont été faites, on se référera notamment à l'ouvrage de Chandrasekhar (1961) [13] qui compile les principaux résultats concernant la théorie linéaire du problème de Rayleigh-Bénard avec prise en compte de nombreux effets physiques (rotation, présence d'un champ magnétique).

La configuration du problème est la suivante : un fluide est contenu entre deux plaques horizontales, la plaque inférieure étant soumise à une température  $T_0$  et la plaque supérieure à une température  $T_1$  de sorte que  $T_0 > T_1$  : le milieu fluide est alors chauffé par le bas. Lorsque l'état du système est stable, la chaleur se transmet à travers le fluide par conduction. Sous l'effet de la chaleur apportée, les molécules à proximité de la paroi inférieure chaude voient leur température augmenter et donc leur densité diminuer et, sous l'effet des forces d'Archimède, tentent de rejoindre les couches supérieures du fluide où se trouvent les molécules froides, donc plus lourdes. La stabilité du système est donc le résultat de la compétition entre un effet déstabilisant (le gradient de température) et des effets stabilisants (la diffusion thermique et le freinage visqueux). Si le gradient de température est suffisamment élevé, le mouvement des molécules plus légères des couches inférieures vers les couches supérieures du fluide peut se

faire : c'est la convection. La chaleur se transmet alors par le mouvement du fluide sous forme de structures tourbillonnaires organisées en cellules convectives auto-entretenues dans le temps.

C'est donc le gradient de température qui est le moteur de la déstabilisation de l'état de base de conduction, en raison du couplage thermo-mécanique entre la température et la masse volumique du fluide. L'intensité du gradient de température est pilotée par le nombre de Rayleigh  $Ra$  dont la valeur critique  $Ra_c = 1707.76$  détermine le seuil de la convection.

## 1.2 Convection de Rayleigh-Bénard de fluides viscoélastiques

Le problème de la convection naturelle tel qu'il a été étudié par Bénard et Rayleigh portait sur un fluide Newtonien de viscosité constante régie par une loi de comportement linéaire. Or de nombreux fluides naturels ou industriels ont une composition physique complexe et obéissent à des lois de comportement rhéologiques non linéaires et parfois instationnaires. Les fluides viscoélastiques font partie de ces fluides dits non Newtoniens.

### 1.2.1 Qu'est ce qu'un fluide viscoélastique

Un fluide viscoélastique se caractérise par un comportement à la fois visqueux et élastique. Ce genre de fluide garde en mémoire les contraintes de cisaillement auxquelles il a été soumis au cours du temps. Un fluide viscoélastique possède un temps caractéristique appelé temps de relaxation. Pour un temps plus petit que le temps de relaxation c'est le comportement élastique qui prédomine tandis que pour des temps plus longs c'est le comportement visqueux qui est prépondérant. Cela se traduit par plusieurs propriétés physiques remarquables :

- Des effets élastiques : une démonstration des effets élastiques dans les liquides est l'expérience du siphon ouvert (voir la figure 1.1 qui illustre cette expérience réalisée avec une solution aqueuse de 0,75 % de Polyox WSR 301). Sous l'effet d'une contrainte le liquide s'écoule d'un béccher et cet écoulement se poursuit bien que la contrainte a été supprimée. Cette manifestation est due aux propriétés élongationnelles exceptionnelles des fluides viscoélastiques.
- Un phénomène de relaxation des contraintes et un effet de mémoire : pour des conditions données, l'état de contrainte dépend de la manière dont on a mis le fluide en écoulement.
- Une différence non nulle des contraintes normales en cisaillement simple (termes diagonaux du tenseur des contraintes) produit l'effet Weissenberg : un fluide viscoélastique remonte le long d'un arbre cylindrique en rotation au lieu d'être entraîné vers l'extérieur par la force centrifuge, comme le serait un fluide Newtonien.

Parmi les exemples pratiques de fluides visco-élastiques, on peut citer notamment la pâte de silicone les solutions diluées de polymères (composées d'un solvant Newtonien et d'un polymère dilué visco-élastique), le shampoing et certaines émulsions (utilisées dans les industries agro-alimentaires, cosmétiques et pharmaceutiques).

Plusieurs modèles on été mis au point afin de représenter le plus fidèlement possible ce comportement viscoélastique. Des modèles assimilant le comportement viscoélastique à celui d'un système ressort-amortisseur, le ressort représentant la contribution élastique et l'amortisseur la contribution visqueuse. On peut citer le modèle de Maxwell et ses variantes. Rappelons la loi de comportement pour un fluide Newtonien :

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (1.1)$$

Dans cette loi  $\mu$  est la viscosité du fluide (supposée constante pour un fluide Newtonien),  $\tau$  est

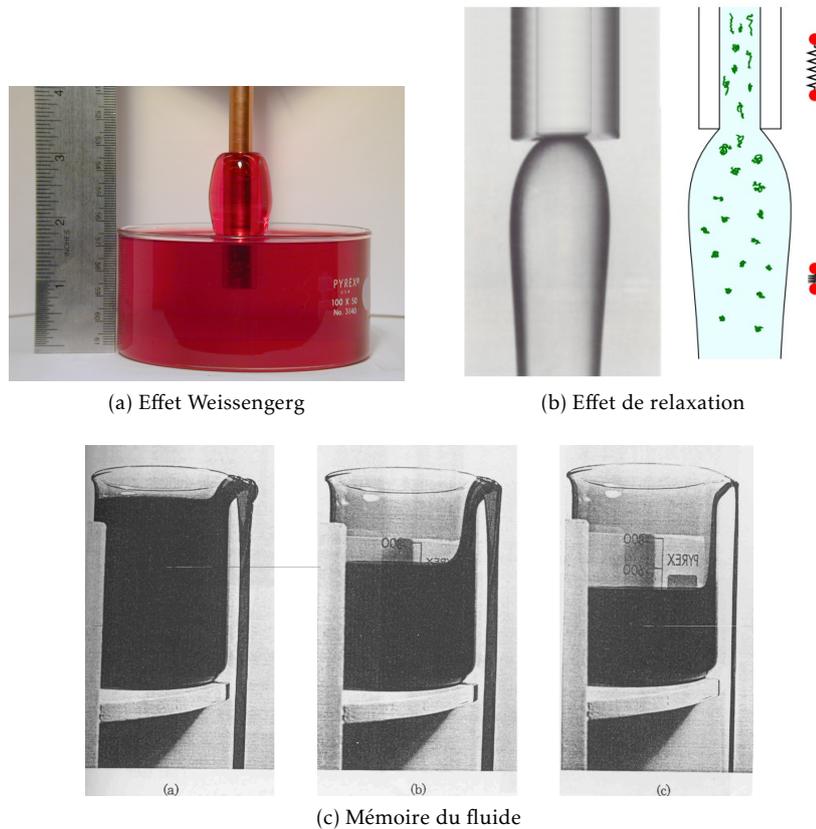


FIGURE 1.1 – Effet de la viscoélasticité sur les écoulements (a) (photographie extraite du site du groupe Gareth McKinley's Non-Newtonian Fluid Dynamics Research Group, ©2009)(b) et (c) Boger et Walter (1993) [9]

le tenseur des contraintes et  $\gamma$  est le tenseur des taux de déformations. Dans le cas du modèle de Maxwell simple le fluide visco-élastique est représenté comme étant la combinaison d'un amortisseur visqueux de viscosité  $\mu$  et d'un ressort élastique de module  $G$  comme schématisé sur la figure 1.2. La loi de comportement s'écrit alors :

$$\tau + \lambda_1 \frac{\partial \tau}{\partial t} = \mu \gamma \quad (1.2)$$

où  $\lambda_1 = \frac{\mu}{G}$  est le temps de réponse caractéristique du fluide.

L'intérêt principal du modèle de Maxwell est la prise en compte simple des effets temporels du comportement, mais il reste limité aux petites déformations. Il est facile de vérifier que sous un taux de cisaillement constant, la viscosité apparente est constante et qu'il n'y a pas d'effets de contraintes normales. Une autre limitation du modèle de Maxwell est qu'il ne présente qu'un seul temps de relaxation, ce qui ne permet pas toujours une bonne correspondance avec les mesures expérimentales. Afin d'obtenir une modélisation plus fidèle du comportement visco-élastique, il faut se tourner vers des modèles non linéaires. Par exemple le modèle de Maxwell convecté supérieur, proposé pour la première fois par James Gardner Oldroyd en 1950 [55] :

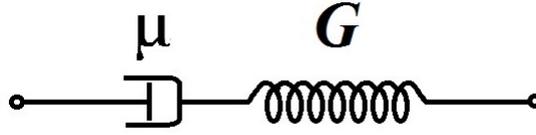


FIGURE 1.2 – Modèle analogique de Maxwell associant en série un amortisseur visqueux de viscosité  $\mu$  et une élasticité de module  $G$ .

$$\tau + \lambda_1 \frac{\delta \tau}{\delta t} = \mu \gamma \quad (1.3)$$

Dans cette équation  $\frac{\delta}{\delta t}$  est la dérivée d'Oldroyd par rapport au temps, qui garantit le respect du principe d'objectivité (ou d'invariance) par rapport au repère considéré des tenseurs  $\tau$  et  $\gamma$  :

$$\frac{\delta \tau}{\delta t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau - (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \tau - \tau \cdot (\nabla \mathbf{u})$$

Un de ces modèles qu'on utilisera ici est le modèle d'Oldroyd-B qui est un des plus utilisés dans la littérature et rend bien compte du comportement des solutions de polymères diluées utilisées expérimentalement. Ce modèle se présente comme étant une extension du modèle de Maxwell convecté supérieur et est équivalent à un fluide rempli de suspensions présentant des propriétés d'amortisseurs et de ressorts élastiques (modèle des haltères élastiques). Il a été proposé par James Gardner Oldroyd en 1950 [55].

Pour le modèle d'Oldroyd-B la loi de comportement décrivant l'évolution des contraintes  $\tau_{ij}$  s'écrit :

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta t} = \mu \left( \gamma_{ij} + \lambda_2 \frac{\delta \gamma_{ij}}{\delta t} \right) \quad (1.4)$$

Dans cette équation :

- $\tau$  est le tenseur des contraintes
- $\gamma$  est le tenseur des taux de déformation
- $\lambda_1$  est le temps de relaxation du fluide viscoélastique
- $\lambda_2$  est le temps de retardation
- $\mu_0$  la viscosité statique
- $\frac{\delta}{\delta t}$  est la dérivée d'Oldroyd par rapport au temps, qui garantit le respect du principe d'objectivité des tenseurs  $\tau$  et  $\gamma$

Les cas limites sont le modèle Newtonien pour  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  et le modèle de Maxwell convecté supérieur pour  $\lambda_2 = 0$ . On notera que le temps de relaxation  $\lambda_1$  est souvent utilisé comme mesure de l'élasticité du fluide [34], [37].

On peut définir  $\Gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  comme le rapport des temps de retardation et de relaxation. Un fluide décrit par le modèle d'Oldroyd-B pouvant être considéré comme étant composé d'un solvant Newtonien de viscosité  $\mu_s$  et d'une solution de polymères de viscosité  $\mu_p$ . Ce paramètre  $\Gamma$  peut être exprimé comme le rapport de la viscosité du solvant à la viscosité totale  $\mu$  :  $\Gamma = \frac{\mu_s}{\mu}$  [8]. De plus en considérant la viscosité totale du fluide comme étant la somme de la viscosité du solvant

et de la viscosité du soluté :  $\mu = \mu_s + \mu_p$  on peut alors écrire [60] :

$$\tau = \tau_s + \tau_p \quad (1.5)$$

où :

$$\tau_s = \mu_s \gamma \quad \text{et} \quad \tau_p + \lambda_1 \frac{\delta \tau_p}{\delta t} = \mu_p \gamma \quad (1.6)$$

En combinant les équations 1.5 et 1.6 on retrouve bien l'équation constitutive mentionnée précédemment du modèle d'Oldroyd-B 1.4.

### 1.2.2 Convection de fluides viscoélastiques

Si la question de la convection mixte des fluides Newtonien a été largement étudiée, en dépit de leur grand intérêt pratique on ne peut en dire autant pour les fluides viscoélastiques. Ceci est probablement dû au fait qu'il existe un couplage souvent non négligeable entre le problème thermo-hydrodynamique et l'équation constitutive rhéologique du fluide. En ce qui concerne la convection d'un fluide visco-élastique on pourra citer Green (1968) [25], Vest et Aparci (1969) [82], Eltayeb (1977) [17], Rosenblat (1986) [68], Martinez-Mardones et Perez-Garcia (1990) [40], Larson (1992) [36], Martinez-Mardones et al (1996) [41], Park et Lee (1996) [61], Kolodner (1998) [34], et Li et Khayat (2005) [37]. Ces deux derniers travaux ont notamment mis en évidence l'existence d'un comportement oscillatoire au seuil de la convection pour certaines valeurs des coefficients viscoélastiques  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , à la différence des fluides Newtoniens. Deux régimes instables ont ainsi été définis : le régime faiblement viscoélastique où l'instabilité est stationnaire et le régime fortement viscoélastique où l'instabilité oscillatoire existe et précède la naissance d'une instabilité stationnaire. Ce comportement avait été observé expérimentalement par Kolodner (1998) [34] en utilisant un fluide viscoélastique contenant des suspensions d'ADN<sup>1</sup>. Ces solutions d'ADN peuvent être très élastiques tout en conservant une viscosité sensiblement constante. Elles sont, par conséquent, bien représentées par le modèle constitutif d'Oldroyd-B [8].

## 1.3 Convection des écoulements de Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette

On s'intéressera ici à une configuration dite d'écoulement parallèle. On distinguera deux configurations de ce genre d'écoulement : lorsque l'écoulement est provoqué par un gradient de pression entre l'amont et l'aval du système l'écoulement est dit de Rayleigh-Bénard-Poiseuille (RBP), tandis que lorsque l'écoulement est induit par le déplacement des parois qui entraîne le fluide, l'écoulement est dit de Rayleigh-Bénard-Couette (RBC). Ces configurations sont présentées sur la figure 1.3.

### 1.3.1 Fluides Newtoniens

Historiquement l'étude des écoulements de RBP et RBC a été motivée par l'étude des phénomènes atmosphériques et océaniques. Les applications industrielles de ces écoulements concernent notamment l'étude des dépôts de vapeurs chimiques et le refroidissement des

1. L'acide désoxyribonucléique, une macromolécule biologique présente dans toutes les cellules ainsi que chez de nombreux virus et qui contient toute l'information génétique permettant le développement et le fonctionnement des êtres vivants

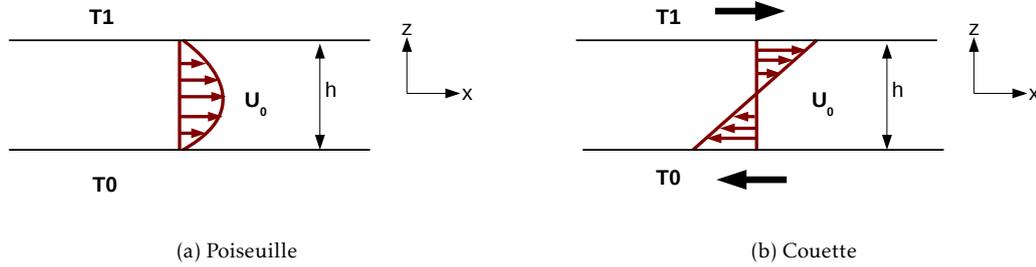


FIGURE 1.3 – Configuration de Rayleigh-Bénard avec écoulement parallèle : écoulement de Poiseuille et écoulement de Couette

composants électroniques. La revue bibliographique réalisée par Nicolas [48] constitue une excellente référence pour le problème de RBP dans le cas d'un fluide Newtonien.

Les premières expériences sur le problème de Rayleigh-Bénard avec écoulement est attribuée à Paul Idrac (1920)[31], [30]. A cette époque les études sont de nature expérimentale, motivé par l'étude des structures atmosphériques. Parmi les autres travaux cité dans cette revue bibliographique on retiendra particulièrement les expériences de Bénard et Avsec en 1938 [7]. Ces expériences ont mis en évidence l'apparition de différentes structures convectives sous forme de rouleaux transversaux à faible vitesse puis de rouleaux longitudinaux lorsque la vitesse de l'écoulement augmente. Le nombre de Rayleigh à partir duquel se produit la convection est proche de la valeur déterminée analytiquement.

En 1968 est publié l'article pionnier de Gage et Reid [19] qui étudie théoriquement le problème de RBP pour un fluide Newtonien entre deux plaques d'extension infinie suivant les directions horizontales. Cette étude a considéré aussi bien les rouleaux longitudinaux et les rouleaux transversaux que les rouleaux obliques. Le seuil d'apparition des rouleaux longitudinaux s'avère indépendant du nombre de Reynolds qui mesure l'intensité de l'écoulement principal. En revanche le nombre de Rayleigh critique associé à l'émergence des rouleaux transversaux et obliques est une fonction croissante du nombre de Reynolds. Ainsi l'étude de Gage et Reid [19] conclut au fait que l'écoulement principal induit une sélection linéaire des structures convectives sous forme de rouleaux longitudinaux dont le seuil est identique au problème de Rayleigh-Bénard  $Ra_c = 1707.762$ . L'étude de Gage et Reid, réalisée avec un nombre de Prandtl égal à  $Pr = 1$ , a été étendue avec les mêmes résultats pour tous les nombres de Prandtl par Platten (1971) [64].

En revanche dans le cas d'une conduite de dimension finie, l'étude réalisée par Tveitred (1974) [79] montre que des rouleaux transversaux se développent en premier lieu pour de faibles nombres de Reynolds. Ce comportement a été observé expérimentalement par Philips et Walker [63], Graham [23]. Pour des valeurs de Reynolds assez élevées, ces structures convectives sont remplacées par des rouleaux longitudinaux (Luijckx et al (1981) [38]).

La première étude de stabilité linéaire complète pour le problème de RBC est due à Gallagher et Mercer en 1965 [20]. Les résultats indiquent un comportement qualitativement similaire à celui de Rayleigh-Bénard-Poiseuille.

Pour des écoulements plans de Poiseuille dans des conditions isothermes, une instabilité hydrodynamique dite de Tollmien-Schlichting [57] peut se manifester dès lors que le nombre de Reynolds dépasse la valeur critique  $Re_c^{TS} = 5772$ . Quant à l'écoulement de Couette plan isotherme, il est bien connu qu'il est linéairement stable [67].

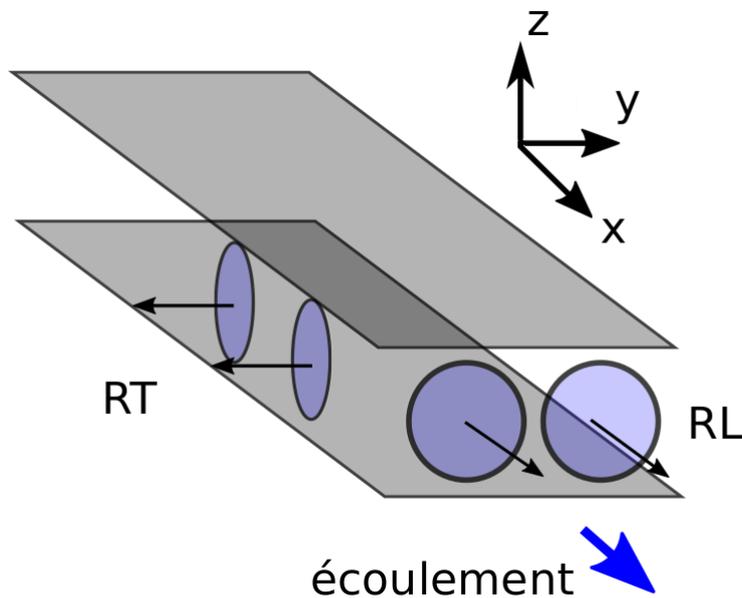


FIGURE 1.4 – Vu d'ensemble des structures convectives susceptibles de se développer dans une configuration de Rayleigh-Bénard avec écoulement parallèle : rouleaux longitudinaux (RL) et rouleaux transversaux (RT)

Les études récentes s'intéressent principalement à la nature convective ou absolue des instabilités. En effet le seuil critique obtenu par l'analyse linéaire classique s'intéresse uniquement à la croissance temporelle de perturbations infinitésimales. Ce genre d'approche ne permet pas de conclure sur la stabilité dans le cas d'un système ouvert. L'évolution de la perturbation amplifiée au cours du temps nécessite une théorie plus approfondie prenant en compte l'évolution spatiale de la perturbation. Lorsque les fronts avant et arrière délimitant le paquet d'ondes représentant la perturbation, se propagent dans la même direction, l'instabilité est dite convective. Dans ce cas la perturbation est amplifiée dans le sens de l'écoulement et fini par disparaître du canal. En revanche lorsque les fronts avant et arrière se propagent dans des directions opposées, l'instabilité s'amplifie localement, croît et envahit tout le domaine d'observation : l'instabilité est alors dite absolue. Développée dans un premier temps dans le cadre de la physique des plasmas [80], [11], cette théorie a été introduite en mécanique des fluides par Huerre et Monkewitz en 1985 [28], [29]. Dans le cadre du problème de RBP la question des instabilités convectives et absolues a été étudiée par Müller et al [45], [46] et notamment Carrière et Monkewitz [12].

Un autre centre d'intérêt des travaux sur la convection de Rayleigh-Bénard avec ou sans écoulement est l'évaluation du transfert thermique mesuré par le nombre de Nusselt  $Nu$ . On citera Schlüter et al (1965) [70] et Platten et Legros (1984) [65] pour le cas de la convection naturelle. Dans le cas du problème de RBP on notera les travaux théoriques et expérimentaux de Mori et Uchida (1966) [44], de Ostrach et Kamotani (1975) [58] et numériques de Ouazzani et al (1989) [59]. Les résultats indiquent que  $Nu$  ne dépend pas de  $Re$  si la convection est structurée

en rouleaux longitudinaux, alors qu'il dépend de Reynolds dans le cas des rouleaux transversaux [46].

### 1.3.2 Fluides viscoélastiques

Il existe peu de travaux traitant de la convection de fluides non Newtoniens en écoulement parallèle. Néanmoins cette problématique a récemment fait l'objet d'un certain nombre d'études, tant expérimentales [53], [62] que théoriques [14]. Les travaux récents portant sur le problème de Rayleigh-Bénard ont montré que l'élasticité du fluide peut induire un mode d'instabilité oscillatoire au lieu du comportement stationnaire observé dans le cas observé pour les fluides Newtoniens. En l'absence de gradient de température, la stabilité hydrodynamique d'un écoulement de fluide visco-élastique de modèle constitutif Oldroyd-B ou FENE-P a été récemment étudiée par Zhang et al (2013) [84].

Ces travaux ont été étendus au problème de RBP par Hirata et al (2015) [26]. Ces auteurs présentent une étude très complète de la stabilité linéaire en utilisant un modèle Oldroyd-B. Il a été montré que l'instabilité convective se manifeste sous forme de rouleaux longitudinaux, indépendamment du nombre de Reynolds  $Re$ . Pour le cas faiblement viscoélastique  $Ra_c = 1707.76$  avec  $k_c = 3.116$  (comme pour le cas Newtonien); dans le cas fortement viscoélastique le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  est inférieur à 1707.76 et dépend des paramètres visco-élastiques, de même pour le nombre d'onde critique. Le caractère oscillatoire de ce mode d'instabilité se traduit par une pulsation non nulle  $\omega_c$  (elle est nulle pour les cas stationnaires et faiblement viscoélastiques). Quand aux rouleaux transversaux, ils sont stabilisés comme dans le cas Newtonien par l'écoulement tant dans le cas faiblement viscoélastique que fortement viscoélastique.

### 1.3.3 Objectifs de la thèse

Les travaux précédemment cités portant sur les problèmes de convection avec ou sans écoulement ne prennent pas en compte le phénomène de la dissipation visqueuse. Ce phénomène se produit au sein d'un fluide sous l'effet des forces de frottement inter-moléculaires, produisant ainsi une chaleur interne au sein du fluide. Les effets de la dissipation visqueuse ont été souvent considérés comme négligeables. Néanmoins des études récentes ont montré qu'ils pouvaient induire une instabilité thermo-convective du simple fait de la production de chaleur au sein du fluide. Les premiers travaux portant sur l'effet déstabilisant de la dissipation visqueuse sont ceux menées par Joseph (1965) [32], Sukanek, Goldstein, et Laurence (1973) [75], et plus récemment par Subrahmaniam, Johns, et Narayanan (2002) [74]. Dans ces trois études le couplage thermique provient de la dépendance de la viscosité à la température et non des variations de densité du fluide sous l'effet de la chaleur, le mécanisme physique à l'origine de l'instabilité est donc différent de celui de l'instabilité thermo-convective de Rayleigh-Bénard.

Dans le cas du problème de Rayleigh-Bénard classique, la dissipation visqueuse n'a pas d'effet sur la stabilité linéaire. En effet, les effets qu'elle produit sont de nature non linéaire. En revanche son influence devient très importante lorsqu'il s'agit d'écoulements de convection mixte. L'étude bibliographique réalisée par Barletta [2] présente les principaux résultats sur les instabilités thermiques induites par la dissipation visqueuse en milieux fluides ou poreux. En particulier, l'effet de la dissipation visqueuse sur la stabilité du problème de la convection mixte en milieu poreux a été étudié notamment par Barletta, Celli et Rees [4] et Nield, Barletta et Celli [50]. Ces études ont été étendues au milieu fluide. Ainsi, l'effet de la dissipation visqueuse sur la stabilité des écoulements plans de Couette et de Poiseuille a été étudiée respectivement par Barletta et Nield [49] et par Barletta, Celli et Nield [3]. Dans les deux cas l'étude porte sur un fluide

Newtonien confiné entre deux parois, la paroi inférieure étant adiabatique et la paroi supérieure isotherme. Ces travaux mettent en évidence le rôle déstabilisant de la dissipation visqueuse sur ces écoulements parallèles. En particulier, pour des nombres de Prandtl suffisamment élevés, cette déstabilisation se produit à un nombre de Reynolds inférieur à celui de l'instabilité hydrodynamique classique de Tollmien-Schlichting. Toutes ces études ont porté sur un fluide Newtonien. Dans le cas d'un fluide visco-élastique, la seule étude concernant l'effet de la dissipation visqueuse est celle de Alves et al [1] qui se place dans le cas d'un milieu poreux. A notre connaissance il n'existe aucune étude sur l'effet de la dissipation visqueuse sur l'écoulement de convection mixte d'un fluide visco-élastique en milieu fluide.

L'objectif de cette thèse est d'étudier l'effet de la dissipation visqueuse sur la stabilité linéaire et faiblement non linéaire dans différentes configurations.

Le premier chapitre de cette thèse se présente comme une introduction générale au problème de convection avec ou sans écoulement, pour un fluide Newtonien ou visco-élastique. Il présente une revue bibliographique succincte des principaux travaux tant expérimentaux que théoriques sur le sujet. Le contexte historique et la motivation des travaux sont notamment présentés.

Le second chapitre porte sur l'analyse de stabilité linéaire du problème de Rayleigh-Bénard avec écoulement (de Poiseuille ou de Couette) pour un fluide Newtonien. Dans un premier temps la formulation mathématique est proposée avec une attention toute particulière dédiée au terme modélisant la dissipation visqueuse. Sont ensuite présentées les méthodes de résolution numériques et leur validation. Ensuite les résultats issus de l'analyse de stabilité linéaire sont présentés et discutés.

Dans le troisième chapitre, une analyse de stabilité faiblement non linéaire est proposée. Elle détermine l'amplitude du mode le plus amplifié à savoir les rouleaux longitudinaux. L'influence de la dissipation visqueuse sur les structures convectives et le transfert de chaleur moyen a été analysée dans le régime faiblement non linéaire.

Le quatrième chapitre applique la méthodologie de l'analyse non linéaire présentée au troisième chapitre au problème de l'écoulement de Poiseuille ou Couette avec une paroi inférieure adiabatique. Le but du chapitre est donc de prolonger par l'analyse faiblement non linéaire les résultats de stabilité linéaire obtenus par Barletta, Celli et Nield [49], [3].

Le cinquième et dernier chapitre est consacré aux effets combinés de la dissipation visqueuse et de l'élasticité sur les caractéristiques linéaires de l'instabilité. Le fluide est supposé visco-élastique obéissant aux lois de comportement de type Oldroyd-B en écoulement de RBP. Les deux régimes faiblement visco-élastiques et fortement visco-élastique sont considérés.

Enfin une conclusion générale récapitule les résultats obtenus au long de cette thèse et énonce certaines perspectives. Une annexe vient détailler le calcul des coefficients de contrainte viscoélastique.

## 1.4 Formulation mathématique

### 1.4.1 Modélisation du problème

On considère un fluide Newtonien ou viscoélastique contenu entre deux plaques horizontales d'extension infinie suivant les directions horizontales  $x$  et  $y$ , séparées par une hauteur  $h$  suivant la direction verticale  $z$ , le niveau  $z = 0$  étant fixé au milieu des plaques de sorte à ce que la plaque inférieure soit en  $z = -\frac{h}{2}$  et la plaque supérieure en  $z = \frac{h}{2}$ . Le fluide se déplace entre les plaques selon la direction  $x$  avec une vitesse  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  de norme maximale  $U_0$ , de sorte qu'en  $z = -\frac{h}{2}$  on

ait  $u = 0$  (Poiseuille) ou  $u = -U_0$  (Couette) et en  $z = \frac{h}{2}$  on ait  $u = 0$  (Poiseuille) ou  $u = U_0$  (Couette). Les conditions aux limites sont de telles sortes que les parois soient imperméables et isothermes, avec condition de non-glissement aux parois. Un gradient de température est appliqué entre les parois de sorte que la paroi inférieure soit à une température  $T_0$  et la paroi supérieure à une température  $T_1$ , avec a priori  $T_0 > T_1$ . Le signe \* désigne une grandeur dimensionnée.

### 1.4.2 Équation de continuité

La masse totale de matière contenue dans un volume quelconque  $V$  est donnée par l'intégrale de la masse volumique  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  sur un volume élémentaire  $dV = dx dy dz$  :

$$\int_V \rho dV \quad (1.7)$$

La dérivée particulaire de cette masse totale est nulle :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (1.8)$$

Le volume  $V$  est fixe dans l'espace et ne dépend donc pas du temps  $t$ , en appliquant les règle de dérivation particulaire d'une intégrale on obtient :

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) dV = 0 \quad (1.9)$$

Cette relation étant valable sur tout volume  $V$  on a nécessairement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.10)$$

C'est l'équation de continuité, ou équation de conservation de masse, écrite de manière générale pour un fluide de masse volumique  $\rho$  s'écoulant à une vitesse  $u$ .

En première approximation on peut écrire la masse volumique comme fonction linéaire de la température sous la forme :

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0)) \quad (1.11)$$

dans laquelle  $\beta$  est le coefficient de dilatation volumique. Or dans les liquides et les gaz ce coefficient est très petit :  $10^{-4} < \beta < 10^{-3}$  On peut donc se placer dans le cas de l'approximation de Boussinesq-Oberbeck [10][54] qui stipule que la masse volumique du fluide reste constante, sauf dans le terme de gravité dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement où elle est à l'origine du phénomène de convection. L'équation de continuité s'écrit alors :

$$u_{i,i}^* = 0 \quad (1.12)$$

### 1.4.3 Équation de conservation de la quantité de mouvement

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un domaine matériel de volume  $V$  se déplaçant à une vitesse  $\mathbf{u}$  stipule que la dérivée particulaire du tenseur de quantité de mouvement est égale au tenseur des forces extérieures appliquées au domaine. On ne s'intéressera pas ici

au moment résultant mais seulement à la résultante. Le fluide est de masse volumique  $\rho$ . La résultante s'écrit :

$$\iiint_V \rho \mathbf{u} dV \quad (1.13)$$

Les forces extérieures s'exerçant sur le domaine matériel peuvent se distinguer en deux catégories : les forces de volume s'exerçant à distance sur tout le domaine matériel, que l'on notera  $\mathbf{F}$  et les forces de surface transmises par contact du fluide extérieur au domaine à travers la surface  $S$ , notées  $\mathbf{T}$ . Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors par application de la formule de Reynolds :

$$\iiint_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV = \iiint_V \mathbf{F} dV + \iint_S \mathbf{T} dS \quad (1.14)$$

Soit un point  $P$  de la surface  $S$  et  $\mathbf{n}$  un vecteur normal unitaire à  $S$  au point  $P$ , le vecteur contrainte  $\mathbf{T}(P, \mathbf{n})$  peut s'écrire :

$$T_i(P, n_j) = \sigma_{ij} N_j(P) \quad (1.15)$$

Le tenseur  $\sigma$  est appelé tenseur des contraintes. La relation 1.14 se réécrit donc sous forme indicielle :

$$\iiint_V \rho \frac{du_i}{dt} dV = \iiint_V F_i dV + \iint_S \sigma_{ij} n_j dS \quad (1.16)$$

En utilisant le théorème de la divergence pour transformer l'intégrale surfacique en intégrale volumique on obtient :

$$\iiint_V \rho \frac{du_i}{dt} dV = \iiint_V F_i dV + \iiint_V \sigma_{ij,j} dV \quad (1.17)$$

Cette formule étant valable sur tout volume  $V$ , on trouve finalement pour une particule fluide l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{F} + \nabla \cdot \sigma \quad (1.18)$$

Dans notre problème la seule force extérieure est la pesanteur d'où  $\mathbf{F} = \rho \mathbf{g}$  avec  $\mathbf{g} = g \mathbf{e}_z$  le vecteur accélération de la pesanteur. Le tenseur des contraintes  $\sigma$  s'écrit :

$$\sigma_{ij} = -p \cdot \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (1.19)$$

$p$  est la pression statique, lorsque le fluide est au repos  $\sigma_{ij} = -p \cdot \delta_{ij}$ . Le tenseur  $\tau$  est appelé le déviateur des contraintes, il représente les contraintes visqueuses spécifiquement dues au mouvement du fluide. Par la suite le tenseur  $\tau$  sera simplement appelé tenseur des contraintes dans la mesure où il n'y a pas de confusion possible avec le tenseur  $\sigma$ .

$$\rho_0 \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial t} + u_j^* u_{i,j}^* \right) = -p, i - \rho g \mathbf{e}_z + \tau_{ij,j} \quad (1.20)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement dans laquelle on considère l'approximation de Boussinesq-Oberbeck s'écrit, en considérant la pression hydrostatique  $P^* = p^* + \rho_0 g z$  :

$$\rho_0 \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial t} + u_j^* u_{i,j}^* \right) = -P_{,i}^* + \rho_0 \beta (T^* - T_0) g \mathbf{e}_z + \tau_{ij,j}^* \quad (1.21)$$

Soit  $\gamma$  le tenseur des taux de cisaillement et  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide considéré, que l'on supposera ici constante. Dans le cas d'un fluide Newtonien la loi de comportement s'écrit :

$$\tau_{ij} = \mu \gamma_{ij} \quad (1.22)$$

avec  $\gamma_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$ . L'équation 1.20 s'écrit alors :

$$\rho_0 \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial t} + u_j^* u_{i,j}^* \right) = -p_{,i}^* + \rho g \mathbf{e}_z + \mu (u_{i,j}^* + u_{j,i}^*)_{,j} \quad (1.23)$$

Pour un fluide visco-élastique on utilise la loi de comportement d'Oldroyd-B :

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta t} = \mu \left( \gamma_{ij} + \lambda_2 \frac{\delta \gamma_{ij}}{\delta t} \right) \quad (1.24)$$

dans laquelle  $\frac{\delta}{\delta t}$  est la dérivée d'Oldroyd par rapport au temps :

$$\frac{\delta \tau}{\delta t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tau - (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \tau - \tau \cdot (\nabla \mathbf{u}) \quad (1.25)$$

#### 1.4.4 Équation de conservation l'énergie

On note  $W$  le travail,  $Q$  la chaleur,  $P = \dot{W}$  la puissance et  $\dot{Q}$  le taux de chaleur reçue. D'après le premier principe de la thermodynamique :

$$\frac{d}{dt} E_{totale} = P + \dot{Q} \quad (1.26)$$

L'énergie totale  $E_{totale}$  s'exprime comme la somme de l'énergie interne  $E$  et de l'énergie cinétique :

$$E_{totale} = E + \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} dV = \int_{\mathcal{D}} \rho \left( e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) dV \quad (1.27)$$

où  $e$  désigne l'énergie interne par unité de masse. Le taux de chaleur  $\dot{Q}$  s'exprime à partir d'un flux de densité surfacique  $q = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$  : c'est la chaleur reçue par conduction avec  $\mathbf{q}$  le vecteur flux de chaleur.

$$\dot{Q} = \int_{\partial \mathcal{D}} q dS = - \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.28)$$

La loi de Fourier exprime la relation entre le vecteur flux de chaleur et le gradient de température :

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -\lambda_T \nabla T \cdot \mathbf{n} \quad (1.29)$$

$\mathcal{P}$  est la puissance des efforts extérieurs à  $\mathcal{D}$  :

$$\mathcal{P} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{f} \cdot \vec{u} dV + \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} dS \quad (1.30)$$

avec  $\mathbf{T}$  la contrainte s'appliquant sur la surface et  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \sigma_{ij} n_j u_i$  où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes. On a aussi :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \left( e + \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} \right) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} \rho \left( e + \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} \right) dV + \int_{\partial\mathcal{D}} \rho \left( e + \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} \right) u_j n_j dS \quad (1.31)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} \rho \left( e + \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} \right) dV &= \underbrace{\int_{\partial\mathcal{D}} \sigma_{ij} n_j u_i dS}_1 + \underbrace{\int_{\mathcal{D}} f_i u_i dV}_2 \\ &+ \underbrace{\int_{\partial\mathcal{D}} \lambda_T T_{,j} n_j dS}_3 - \underbrace{\int_{\partial\mathcal{D}} \rho \left( e + \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} \right) u_j n_j dS}_4 \end{aligned} \quad (1.32)$$

1 : puissance des contraintes sur  $\partial\mathcal{D}$

2 : puissance des efforts extérieurs

3 : flux d'énergie thermique de conduction traversant  $\partial\mathcal{D}$

4 : flux d'énergie traversant  $\partial\mathcal{D}$

On utilise maintenant le théorème de Green :  $\int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\mathcal{D}} \text{div} \mathbf{A} dV$

Le terme (3) devient :

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \lambda_T T_{,j} n_j dS = \lambda_T \int_{\mathcal{D}} \nabla^2 T dV \quad (1.33)$$

en supposant que  $\lambda_T$  est une constante par rapport à l'espace.

Le terme (4) s'écrit

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \rho \left( e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) u_j n_j dS = \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{D}} \rho \|\mathbf{u}\|^2 u_j n_j dS + \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j e) dV \quad (1.34)$$

Le terme (1) s'écrit :

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \sigma_{ij} n_j u_i dS = \int_{\mathcal{D}} (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV \quad (1.35)$$

On utilise l'équation de conservation de quantité de mouvement :  $\rho \frac{du_i}{dt} = f_i + \sigma_{ij,j}$  que l'on multiplie par  $u_i$  et que l'on intègre sur  $\mathcal{D}$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{u_i^2}{2} dV = \int_{\mathcal{D}} f_i u_i dV + \int_{\mathcal{D}} u_i \sigma_{ij,j} dV \quad (1.36)$$

or  $u_i \sigma_{ij,j} = (u_i \sigma_{ij})_{,j} - \sigma_{ij} u_{i,j}$  d'où :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{u_i^2}{2} dV}_1 + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}} \rho \frac{u_i^2}{2} u_j n_j dS}_2 = \underbrace{\int_{\mathcal{D}} f_i u_i dV}_3 + \underbrace{\int_{\mathcal{D}} (u_i \sigma_{ij})_{,j} dV}_4 - \underbrace{\int_{\mathcal{D}} \sigma_{ij} u_{i,j} dV}_5 \quad (1.37)$$

1 : variation de l'énergie cinétique au cours du temps

2 : flux de l'énergie cinétique

3 : puissance des efforts extérieurs

4 : puissance des contraintes sur  $\partial \mathcal{D}$

On s'intéresse maintenant au terme 5.

$\sigma_{ij} u_{i,j} = (-p \delta_{ij} + \tau_{ij}) u_{i,j} = \tau_{ij} u_{i,j}$  pour un fluide incompressible (car  $\delta_{ii} = 1$  et  $div \mathbf{u} = 0$ ) avec  $\tau_{ij}$  le tenseur des contraintes de cisaillement.

**La grandeur  $\sigma_{ij} u_{i,j} = \Phi$  est appelée dissipation visqueuse.**

En utilisant 1.35, 1.33 et 1.34 on a 1.32 qui devient une équation locale, en retranchant 1.37 avec  $e = C_v T$  :

$$\rho_0 C_v \left( \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u_j^* T_{,j}^* \right) = \lambda_T T_{,ii}^* + \tau_{ij}^* u_{i,j}^* \quad (1.38)$$

$C_v$  est la chaleur spécifique à volume constant,  $\lambda_T$  la conductivité thermique du fluide. On supposera que ces grandeurs demeurent constantes dans notre problème. Dans l'équation 1.38 apparaît le terme de dissipation visqueuse :

$$\Phi^* = \tau_{ij}^* u_{i,j}^* \quad (1.39)$$

Ce terme représente la dissipation d'énergie dans le fluide induite par le frottement visqueux entre les particules fluides, qui se traduit physiquement par une production de chaleur interne au fluide. Ce terme est nul lorsque le fluide est au repos ( $\mathbf{u} = 0$ ).

Pour un fluide Newtonien la loi de comportement 1.22 permet, en posant  $D_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*)$  d'exprimer le terme de dissipation visqueuse sous la forme :

$$\Phi^* = 2\mu D_{ij} D_{ij} \quad (1.40)$$

Pour un fluide Newtonien l'équation de conservation de l'énergie 1.38 s'écrit donc :

$$\rho_0 C_v \left( \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u_j^* T_{,j}^* \right) = \lambda_T T_{,ii}^* + 2\mu D_{ij} D_{ij} \quad (1.41)$$

### 1.4.5 Conditions aux limites

On sera amené à considérer deux types de conditions aux limites pour la température. La première configuration est celle de parois inférieure et supérieure isothermes, l'autre configuration présente une paroi inférieure adiabatique et une paroi supérieure isotherme.

### Parois isothermes

Les parois sont considérées imperméables (le fluide ne peut pas traverser la paroi) et le fluide s'y écoule sans glissement. Ces conditions se traduisent respectivement par une vitesse relative normale et tangentielle nulle aux parois. Les conditions d'imperméabilité et de non-glissement du fluide aux parois imposent donc :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^* = 0 & \text{en } z^* = \pm \frac{h}{2} & \text{pour la configuration de Poiseuille} \\ \mathbf{u}^* = U_0 \mathbf{e}_x & \text{en } z^* = \frac{h}{2} & \text{et } \mathbf{u}^* = -U_0 \mathbf{x} & \text{en } z^* = -\frac{h}{2} & \text{pour la configuration de Couette} \end{cases} \quad (1.42)$$

De plus la condition de non-glissement qui nous donne  $u^* = v^* = 0$  en tout point de la paroi nous permet de déduire que les dérivées de  $u^*$  suivant  $x$  et de  $v^*$  suivant  $z$  sont nécessairement nulles. En combinant ce résultat avec l'équation de continuité 1.12 :

$$\frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad \text{en } z^* = \pm \frac{h}{2} \quad (1.43)$$

Les parois sont considérées isothermes et on y impose une température différente entre le haut et le bas de sorte à créer un gradient de température à l'origine de la convection en l'absence d'écoulement. C'est la configuration montrée sur la figure 1.3. La condition de température imposée aux parois isothermes impose donc :

$$T^* = T_1 \quad \text{en } z^* = \frac{h}{2} \quad \text{et } T^* = T_0 \quad \text{en } z^* = -\frac{h}{2} \quad (1.44)$$

### Paroi supérieure isotherme et paroi inférieure adiabatique

On considère le cas d'une paroi supérieure isotherme avec une paroi inférieure adiabatique. Dans ce cas il n'y a pas de gradient de température imposé de l'extérieur. Il s'agit de la configuration étudiée par Barletta et Nield [49] pour un écoulement de Couette plan et par Barletta, Celli et Nield [3] pour un écoulement de Poiseuille plan. Cette configuration est montrée sur la figure 1.5. On notera que dans ce cas la paroi inférieure est prise en  $z^* = 0$  et la paroi supérieure en  $z^* = h$ .

Les conditions d'imperméabilité et de non-glissement du fluide aux parois imposent donc :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^* = 0 & \text{en } z^* = 0; h & \text{pour la configuration de Poiseuille} \\ \mathbf{u}^* = U_0 \mathbf{e}_x & \text{en } z^* = h & \text{et } \mathbf{u}^* = 0 & \text{en } z^* = 0 & \text{pour la configuration de Couette} \end{cases} \quad (1.45)$$

Les conditions aux limites pour la température s'écrivent alors :

$$T^* = T_1 \quad \text{en } z^* = h \quad \text{et } \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = 0 \quad \text{en } z^* = 0 \quad (1.46)$$

## 1.5 Équations de conservation adimensionnées

Toutes les grandeurs physiques du problème peuvent s'exprimer avec quatre grandeurs fondamentales : la longueur [m], la masse [kg], la température [K] et le temps [s]. Les phénomènes

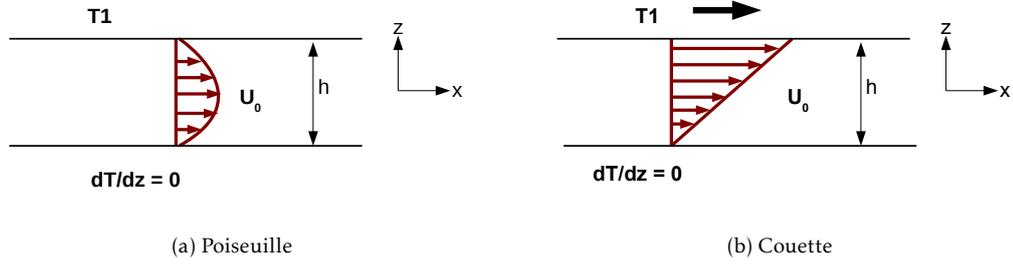


FIGURE 1.5 – Configuration d'écoulement parallèle (Poiseuille et Couette) avec paroi isotherme en haut et paroi adiabatique en bas.

physiques étant indépendant de l'unité dans laquelle on les exprime, ils dépendent de nombres sans dimension. Pour cela on adimensionne toutes les grandeurs par des échelles de référence permettant d'obtenir les grandeurs adimensionnées :

- **Longueur**  $z = \frac{z^*}{h}$
- **Temps**  $t = \frac{\kappa}{h^2} t^*$
- **Vitesse**  $u_b = \frac{h}{\kappa} u_b^*$
- **Pression**  $P = \frac{h^2}{\rho_0 \kappa^2} P^*$
- **Température**  $T = \frac{(T^* - T_1) \beta g h^3}{\nu \kappa}$
- **Tenseur des contraintes viscoélastiques**  $\tau = \frac{h^2}{\rho_0 \kappa^2} \tau^*$

où  $\kappa = \frac{\lambda_T}{\rho_0 C}$  est le coefficient de diffusivité thermique.

Ces grandeurs adimensionnées sont les mêmes que celles du problème de Rayleigh-Bénard classique, à l'exception de la température adimensionnée  $T = \frac{(T^* - T_1) \beta g h^3}{\nu \kappa}$  au lieu de  $T = \frac{(T^* - T_1)}{T_0 - T_1}$  habituellement. Cette nouvelle échelle de température est choisie de sorte à ne pas avoir de nombre de Rayleigh  $Ra$  au dénominateur dans les équations, celui-ci pouvant être amené à être nul.

Les équations 1.12, 1.20, 1.38 s'écrivent sous forme adimensionnée :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.47)$$

$$\left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} \right) = -Pr P_{,i} + Pr \tau_{ij,j} + Pr T \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \quad (1.48)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_j T_{,j} \right) = T_{,ii} + Ge \tau_{ij} u_{i,j} \quad (1.49)$$

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta t} = \gamma_{ij} + \lambda_2 \frac{\delta \gamma_{ij}}{\delta t} \quad (1.50)$$

Les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} T = Ra \text{ en } z = -\frac{1}{2} \text{ et } T = 0 \text{ en } z = \frac{1}{2} \\ \mathbf{u} = 0 \text{ en } z = \pm\frac{1}{2} \text{ Poiseuille} \\ \mathbf{u} = Pe \mathbf{e}_x \text{ en } z = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbf{u} = -Pe \mathbf{e}_x \text{ en } z = -\frac{1}{2} \text{ Couette} \end{cases} \quad (1.51)$$

Dans le cas d'un fluide Newtonien les équations s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.52)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -Pr \nabla P + Pr T \mathbf{e}_z + Pr \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.53)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T + 2 Ge D_{ij} D_{ij} \quad (1.54)$$

Dans ces équations apparaissent les nombres sans dimension suivants :

- **Le nombre de Rayleigh**, qui représente le rapport entre les temps caractéristiques des effets stabilisants et des effets déstabilisants. Les effets stabilisants sont dus à la viscosité de temps caractéristique  $t_1 = \frac{h^2}{\nu}$  et à la diffusion thermique de temps caractéristique  $t_2 = \frac{h^2}{\kappa}$ . Quant aux effets déstabilisants ils proviennent de la poussée d'Archimède due aux variations de densité liées au gradient de température, de temps caractéristique  $t_3 = \left( \frac{h}{\beta g (T_0 - T_1)} \right)^{1/2}$ .

On a donc  $Ra = \frac{t_1 t_2}{t_3^2}$  soit finalement :

$$Ra = \frac{\beta g h^3 (T_0 - T_1)}{\nu \kappa}$$

- **Le nombre de Péclet** qui est le produit entre le **nombre de Reynolds** qui est le rapport des forces d'inertie et des forces visqueuses :  $Re = \frac{U_0 h}{\nu}$ , et le **nombre de Prandtl** défini par le rapport entre les temps caractéristiques de diffusion thermique et visqueuse :  $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ . On a donc pour le nombre de Péclet :

$$Pe = Re Pr = \frac{U_0 h}{\kappa}$$

- **Le nombre de Gebhart** qui représente l'intensité de la dissipation visqueuse. On remarquera qu'il est proportionnel à la hauteur  $h$  qui sépare les parois du système.

$$Ge = \frac{\beta g h}{C_v}$$

## 1.6 Solution de base de Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette

Afin de mener à bien l'étude de stabilité, il faut au préalable déterminer une solution de base des équations 1.12, 1.20, 1.38, 1.50. Cette solution de base correspond à l'état de repos stationnaire (qui ne dépend pas du temps) du fluide.

On considère une solution de base  $\mathbf{u}_b$ ,  $\theta_b$  et  $\tau_b$  stationnaire, qui ne dépende que de la composante verticale  $z$  et dont la vitesse soit dirigée suivant le sens imposé de l'écoulement soit  $\mathbf{e}_x$  ce qui signifie :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = v = w = 0$$

La vitesse s'écrira donc sous la forme  $\mathbf{u}_b^* = (u_b, v_b, w_b) = (u_b, 0, 0)$  de seule composante  $u_b$  non nulle. C'est la solution qui correspond au régime de conduction thermique avec écoulement parallèle (de Poiseuille ou de Couette suivant la configuration considérée). Les profils de vitesse et de température de base sont les mêmes que le fluide soit Newtonien ou viscoélastique.

Nous verrons que pour les deux types d'écoulement considérés, cette solution peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{u}_b(z) = u_b(z)\mathbf{e}_x = U_0 f(z)\mathbf{e}_x \quad \text{et} \quad T_b(z) = B(z) + C g(z) \quad (1.55)$$

Cette notation permet d'établir un unique système d'équations valable tant pour la configuration de Poiseuille que pour la configuration de Couette : seules les expressions des fonctions  $f(z)$  et  $g(z)$  changeront entre les deux configurations. Avec cette notation la solution de base s'écrit :

$$u_b^*(z^*) = U_0 f\left(\frac{z^*}{h}\right) \quad (1.56)$$

$$\gamma_b^{*11} = \gamma_b^{*12*} = \gamma_b^{*22} = \gamma_b^{*23} = \gamma_b^{*33} = 0 \quad (1.57)$$

$$\gamma_b^{*13} = \frac{du_b^*}{dz^*} = U_0 f'\left(\frac{z^*}{h}\right) \quad (1.58)$$

$$\tau_b^{*12} = \tau_b^{*22} = \tau_b^{*23} = \tau_b^{*33} = 0 \quad (1.59)$$

$$\tau_b^{*13} = \mu \frac{du_b^*}{dz^*} = \mu U_0 f'\left(\frac{z^*}{h}\right) \quad (1.60)$$

$$\tau_b^{*11} = 2\mu \left(\frac{du_b^*}{dz^*}\right)^2 (\lambda_1 - \lambda_2) = 128\mu U_0^2 (f'(z^*))^2 \lambda_1 (1 - \Gamma) \quad (1.61)$$

$$T_b^*(z^*) = T_0 + (T_0 - T_1) \left(\frac{1}{2} - \frac{z^*}{h}\right) + \mu \frac{U_0^2}{\lambda_T} g\left(\frac{z^*}{h}\right) \quad (1.62)$$

On a finalement pour la pression dans le cas de Poiseuille

$$P_b^*(x, z) = -\mu \frac{8U_0}{h^2} x + \rho_0 \beta g z^* \left[ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z^*}{h}\right) + \frac{U_0}{3\lambda_T} \left(1 - \frac{16}{5} \left(\frac{z^*}{h}\right)^4\right) \right] \quad (1.63)$$

Et dans le cas de Couette

$$P_b^*(z) = \rho_0 \beta g z^* \left[ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z^*}{h}\right) + \frac{U_0}{2\lambda_T} \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z^*}{h}\right)^2\right) \right] \quad (1.64)$$

L'expressions 1.62 montre que la température de base est la résultat de deux contributions. La partie linéaire  $(T_0 - T_1) \left(\frac{1}{2} - \frac{z^*}{h}\right)$  est due à la différence de température imposée sur les bords, alors que la partie parabolique en  $z^*$ , à savoir  $\frac{\mu U_0^2}{\lambda_T} g\left(\frac{z^*}{h}\right)$  est la conséquence de la prise en compte de la dissipation visqueuse. Il est clair qu'en absence de l'écoulement de base (i.e.  $U_0 = 0$ ), cette contribution s'annule. Pour les contraintes de base, on notera que la contrainte normale  $\tau_b^{*11}$  est non nulle pour un fluide visco-élastique, en revanche elle s'annule dans le cas Newtonien ( $\lambda_1 = \lambda_2$ ).

L'état de base adimensionné s'exprime comme suit :

$$u_b(z) = Pe f(z) \quad (1.65)$$

$$T_b(z) = \left(\frac{1}{2} - z\right)Ra + Pe^2 Ge g(z) \quad (1.66)$$

$$P_b(x, z) = \frac{1}{2}Ra z(1-z) - 8Pe x + \frac{1}{3}z \left(1 - \frac{16}{5}z^4\right) Pe^2 Ge \quad \text{Poiseuille} \quad (1.67)$$

$$P_b(z) = \frac{1}{2}Ra z(1-z) + \frac{1}{2}z \left(1 - \frac{4}{3}z^2\right) Pe^2 Ge \quad \text{Couette} \quad (1.68)$$

$$\tau_b^{11} = \lambda_1(1-\Gamma)(Pe f'(z))^2 \quad (1.69)$$

$$\tau_b^{13} = \tau_b^{31} = Pe f'(z) \quad (1.70)$$

où pour la configuration de Poiseuille

$$f(z) = (1 - 4z^2) \quad , \quad g(z) = \frac{1}{3}(1 - 16z^4)$$

et pour la configuration de Couette

$$f(z) = 2z \quad , \quad g(z) = \frac{1}{2}(1 - 4z^2)$$

Il sera par la suite utile d'introduire le paramètre  $\Lambda = Pe^2 Ge$  qui apparaît notamment dans l'expression de la température de base. Ce paramètre est nul en l'absence de dissipation visqueuse ( $Ge = 0$ ) ou en l'absence d'écoulement ( $\Lambda = 0$ ) et servira de paramètre de contrôle principal de l'intensité de la dissipation visqueuse.

$\Gamma = \frac{\lambda_1}{\lambda_1}$  est défini comme le rapport des temps de retardation et de relaxation. Un fluide décrit par le modèle d'Oldroyd-B pouvant être considéré comme étant composé d'un solvant Newtonien de viscosité  $\mu_s$  et d'un soluté polymère de viscosité  $\mu_p$ , ce paramètre  $\Gamma$  peut être exprimé comme le rapport de la viscosité du solvant sur la viscosité totale  $\mu$  :  $\Gamma = \frac{\mu_s}{\mu}$  [8]. En pratique  $\lambda_1$  peut s'interpréter comme l'élasticité des polymères et  $\Gamma$  comme la concentration en polymère.

## Température de base et stratification du champ de température

Comme on l'a vu, Le profil de la température de base  $T_b(z)$  présente deux contributions : l'une linéaire due au gradient de température imposé, l'autre quadratique due à la présence de dissipation visqueuse. Les figures 1.6 et 1.7 montrent respectivement le profil de température de base et sa dérivée pour différentes valeurs du rapport  $\Lambda/Ra$  : plus ce rapport est grand, plus l'intensité de la dissipation est grande comparé à celui du gradient de température imposé. On voit l'évolution d'un profil de température linéaire en l'absence de dissipation visqueuse ( $\Lambda/Ra = 0$ ) associé à un gradient de température constant et négatif, vers un profil de température non linéaire avec un gradient qui change de signe entre les parois pour  $Ra_\Lambda$  non nul.

L'étude du profil de température de base  $T_b(z)$  montre qu'il présente un extremum (valeur maximale) en une certaine valeur de  $z$  que l'on notera  $z_s$ , qui correspond pour le cas de RBP à  $\frac{dT_b}{dz} = -Ra - \frac{64}{3}\Lambda z^3 = 0$ . Physiquement cela se traduit par le fait que la convection se déclenche à partir du moment où la température atteint une valeur suffisamment élevée, ensuite les mouvements convectifs dans le fluide transmettent la chaleur dans le fluide. Le gradient de

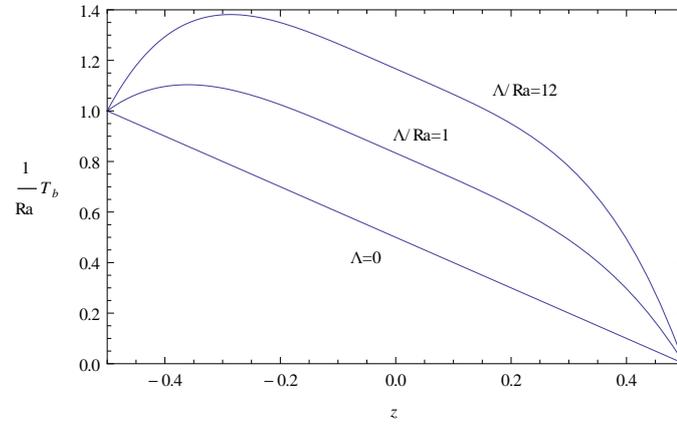


FIGURE 1.6 – text

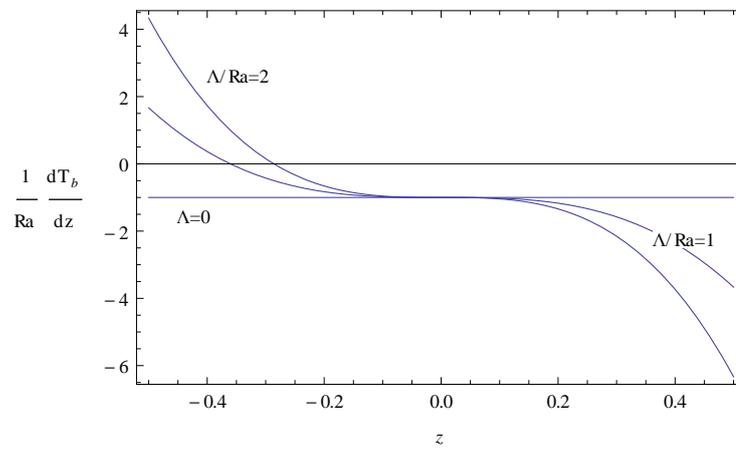


FIGURE 1.7 – text

température étant susceptible de changer de signe pour la valeur  $z_s$ , la convection se déclenche dans la partie de la cavité où règne un gradient de température négatif et donc déstabilisant soit à partir de la hauteur  $z_s$ . En l'absence de dissipation visqueuse ( $\Lambda = 0$ ) le profil de température de base ne présente pas d'extremum, les cellules convectives occupent alors tout l'espace entre les parois.

Pour que cette stratification ait lieu il faut que l'extremum apparaisse sur l'intervalle  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  qui correspond aux limites des parois inférieures et supérieures. Deux cas se présentent alors :  $Ra \geq 0$  et  $Ra \leq 0$ .

$$Ra \geq 0 \Rightarrow z_s \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \Rightarrow -\frac{1}{8} \leq z_s^3 \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{8} \leq -\frac{3Ra}{64\Lambda} \leq 0 \Rightarrow Ra \leq \frac{8}{3}\Lambda$$

$$Ra \leq 0 \Rightarrow z_s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq z_s^3 \leq \frac{1}{8} \Rightarrow -\frac{1}{8} \leq -\frac{3Ra}{64\Lambda} \leq 0 \Rightarrow Ra \geq -\frac{8}{3}\Lambda$$

Dans les deux cas il existe des valeurs de  $Ra$  qui présente une stratification : il faut que  $Ra$  se situe sur l'intervalle  $[-\frac{8}{3}\Lambda, \frac{8}{3}\Lambda]$ . La limite entre les strates stable et instable est donnée par la valeur  $z_s$  de l'extremum. La figure 1.8 montre dans le plan  $(\Lambda, Ra)$  les différentes zones de stratification dans le cas de RBP.

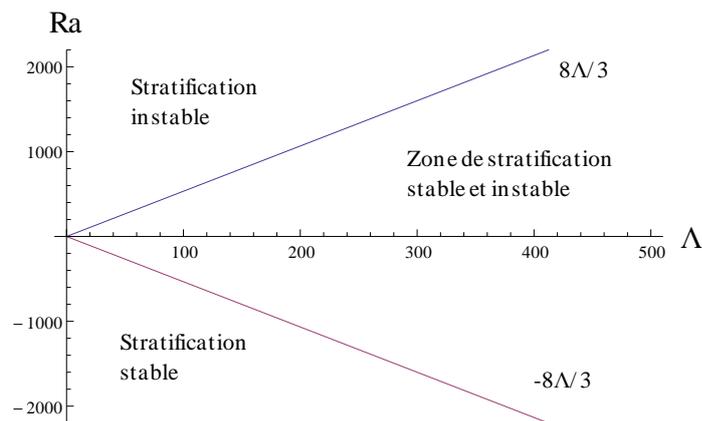


FIGURE 1.8 – text



# Stabilité linéaire des écoulements de Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette de fluides Newtoniens

## 2.1 Équations aux perturbations linéarisées et développement en modes normaux

### 2.1.1 Équations aux perturbations linéarisées

L'analyse linéaire consiste à étudier la stabilité de l'état de base en présence d'une perturbation infinitésimale dont on étudiera l'évolution au cours du temps. On dira alors que l'état de base est linéairement stable ou instable. Pour cela on décompose les variables du problème sous la forme de l'état de base auquel on superpose une perturbation infinitésimale d'ordre  $\epsilon \ll 1$  :

$$\begin{cases} T = T_b + \epsilon \theta(x, y, z, t) \\ \mathbf{u} = u_b(z)\mathbf{e}_x + \epsilon \mathbf{U}(x, y, z, t) \\ P = P_b(x, z) + \epsilon p(x, y, z, t) \end{cases} \quad (2.1)$$

On remplace  $\mathbf{u}$ ,  $T$ ,  $P$  dans les équations adimensionnées 1.52, 1.53, 1.54 puis on linéarise ces équations en ne retenant que les termes d'ordre  $\epsilon$ . En notant  $(u, v, w)$  les trois composantes de la perturbation du champ de vitesse  $\mathbf{U}$ , les équations linéarisées s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + Pe f(z) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + w Pe f'(z) \mathbf{e}_x \right) = -\nabla p + \theta \mathbf{e}_z + \nabla^2 \mathbf{U} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + Pe f(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} - Ra w + Pe^2 Ge g'(z) w = \nabla^2 \theta + 2 Ge Pe f'(z) \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.4)$$

Il est pratique d'introduire la composante verticale de la vorticité  $\eta$  définie par :

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.5)$$

En prenant le double rotationnel de l'équation 2.3 et en utilisant l'équation de continuité 2.2, on obtient un système de trois équations couplées avec pour variables la composante verticale de la perturbation de la vitesse  $w$ , la perturbation de la température  $\theta$  et perturbation de la composante verticale de vorticité  $\eta$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w + Pe \left( f(z) \nabla^2 - f''(z) \right) \frac{\partial w}{\partial x} - Pr \nabla_H^2 \theta - Pr \nabla^4 w = 0 \quad (2.6)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + Pe f(z) \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla_H^2 \theta - (Ra - Ge Pe^2 g'(z)) \nabla_H^2 w \quad (2.7)$$

$$\nabla^2 \nabla_H^2 \theta + 2 Ge Pe f'(z) \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nabla_H^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w \right) = 0$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + Pe f(z) \frac{\partial}{\partial x} - Pr \nabla^2 \right) \eta + Pe f'(z) \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (2.8)$$

avec le laplacien horizontal  $\nabla_H^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Les conditions aux limites associées sont :

$$\theta = w = \frac{\partial w}{\partial z} = \eta = 0 \quad \text{en} \quad z = \pm \frac{1}{2} \quad (2.9)$$

### 2.1.2 Développement en modes normaux

Le système étant d'extension infinie suivant les directions horizontales  $x$  et  $y$  avec des conditions aux limites qui ne dépendent que de  $z$ , on peut donc chercher une solution en modes de Fourier suivant ces directions. On développe les variables  $w$ ,  $\theta$  et  $\eta$  comme suit :

$$\begin{cases} w = w_n(z) e^{ik_x x + ik_y y} e^{(\sigma - i\omega)t} \\ \theta = \theta_n(z) e^{ik_x x + ik_y y} e^{(\sigma - i\omega)t} \\ \eta = \eta_n(z) e^{ik_x x + ik_y y} e^{(\sigma - i\omega)t} \end{cases} \quad (2.10)$$

où  $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y$  est le vecteur d'onde,  $\sigma$  le taux de croissance temporel de la perturbation,  $\omega$  la fréquence d'oscillation,  $k_x$  et  $k_y$  sont les composantes du vecteur d'onde suivant les axes  $Ox$  et  $Oy$  respectivement. Le signe du taux de croissance temporel  $\sigma$  détermine le comportement temporel des perturbations :

- Si  $\sigma < 0$  alors  $e^{\sigma t}$  est une fonction décroissante. Les perturbations s'atténuent dans le temps et l'état de base est retrouvé à des temps asymptotiquement grands : l'état de base est stable dans cas.
- Si  $\sigma = 0$  alors les perturbations ne sont ni amplifiées ni atténuées : le système est en état de stabilité marginale.
- Si  $\sigma > 0$  alors  $e^{\sigma t}$  est une fonction croissante, les perturbations sont amplifiées et l'état de base du système est dit instable.

Si la fréquence  $\omega$  est nulle l'instabilité est alors stationnaire, autrement elle traduit un caractère oscillatoire de l'instabilité. Par la suite, on cherchera à déterminer les conditions de la naissance de l'instabilité en focalisant l'étude au cas de la stabilité marginale soit  $\sigma = 0$ . Les équations développées en modes normaux s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} -i\omega(D^2 - k^2)w_n + ik_x Pe (f(z)(D^2 - k^2) - f''(z))w_n \\ + Pr k^2 \theta_n - Pr(D^2 - k^2)^2 w_n = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} -i\omega \theta_n + ik_x Pe f(z) \theta_n - Ra w_n + Ge Pe^2 g'(z) w_n - (D^2 - k^2) \theta_n \\ - 2 Ge Pe \frac{f'(z)}{k^2} (-ik_y D \eta_n + ik_x (D^2 + k^2) w_n) = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\left(-i\omega + ik_x Pe f(z) - Pr(D^2 - k^2)\right) \eta_n + ik_y Pe f'(z) w_n = 0 \quad (2.13)$$

avec  $D = \frac{d}{dz}$  et  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ . Les conditions aux limites s'écrivent pour les perturbations :

$$\theta_n = w_n = Dw_n = \eta_n = 0 \text{ at } z = \pm \frac{1}{2} \quad (2.14)$$

On peut noter d'après le dernier terme de l'équation (2.12) que pour une dissipation visqueuse non nulle ( $Ge \neq 0$ ), la composante verticale de la vorticité  $\eta$  introduit un couplage entre les trois équations ci-dessus.  $\eta$  est gouverné par l'équation de Squire (2.13) et représente l'effet de l'advection verticale par  $w$  de la vorticité de l'écoulement de base. On peut donc s'attendre à ce que la composante verticale de la vorticité affecte les caractéristiques de l'instabilité quand la dissipation visqueuse est prise en compte.

Les équations 2.11-2.13 associées aux conditions aux limites 2.14 constituent un problème aux valeurs propres généralisé avec quatre paramètres sans dimension :  $Ra$ ,  $Pe$ ,  $Pr$  et  $Ge$ . Ce problème aux valeurs propres doit être résolu pour des configurations de RBP et RBC en considérant des perturbations sous forme de rouleaux longitudinaux (RL), rouleaux transversaux (RT), et rouleaux obliques (RO) définis respectivement par  $(k_x = 0, k_y = k)$ ,  $(k_x = k, k_y = 0)$  et  $(k_x \neq 0, k_y \neq 0)$ .

On notera que ce problème aux valeurs propres se simplifie grandement pour des perturbations sous forme de rouleaux transversaux ( $k_y = 0$ ), pour l'instabilité de Rayleigh-Bénard ( $Pe = 0$ ) et pour les configurations de RBP et RBC dans le cas de la dissipation visqueuse négligeable ( $Ge = 0$ ). Dans ces trois cas, le terme mettant en jeu la dérivée de  $\eta$  disparaît de l'équation de l'énergie (2.12). Par conséquent l'analyse de stabilité linéaire peut être menée sans se référer à l'équation de Squire 2.13. Pour les rouleaux transversaux, comme  $k_y = 0$  la seule solution de l'équation de la vorticité 2.13 respectant les conditions aux limites en  $z = \pm \frac{1}{2}$  est  $\eta_n(z) = 0$ . Par conséquent, la composante selon  $y$  de la vitesse disparaît ce qui indique que les rouleaux transversaux sont bidimensionnels.

### 2.1.3 Rouleaux longitudinaux et cas limite d'un nombre de Prandtl infini

Pour les rouleaux longitudinaux définis par  $k_x = 0$  et  $k_y = k$ , l'équation 2.13 indique que la composante verticale de la vorticité  $\eta_n(z)$  dépend linéairement de  $Pe/Pr = Re$  avec  $Re$  le nombre de Reynolds. La formulation des équations 2.11-2.13 peut ainsi être optimisée en introduisant une nouvelle variable  $\tilde{\eta}_n(z)$  définie par  $\eta_n(z) = Re \tilde{\eta}_n(z)$ . Dans le cas des rouleaux longitudinaux

où  $\eta_n(z) = ik u_n(z)$ , cela signifie que l'échelle caractéristique de la vitesse suivant l'axe  $x$  devrait être  $U_0 \kappa/\nu$  et non  $\kappa/h$ .

En supposant que le principe d'échange de stabilité est valide, i.e.  $\omega = 0$  (une telle hypothèse a été vérifiée pour tous les calculs mettant en jeu les rouleaux longitudinaux dans ce chapitre), le système d'équations 2.11-2.13 peut alors s'écrire :

$$k^2 \theta_n - (D^2 - k^2)^2 w_n = 0 \quad (2.15)$$

$$-Ra w_n + \Lambda g'(z) w_n - (D^2 - k^2) \theta_n + 2i \frac{\Lambda f'(z)}{kPr} D \tilde{\eta}_n(z) = 0 \quad (2.16)$$

$$-(D^2 - k^2) \tilde{\eta}_n(z) + ik f'(z) w_n = 0 \quad (2.17)$$

On peut noter que dans l'équation de l'énergie 2.16, les nombres de Gebhart et Péclet apparaissent conjointement, ce qui permet de définir un nouveau paramètre  $\Lambda = GePe^2$ . Comme mentionné dans [49], [3] l'utilisation de  $\Lambda$  au lieu de  $Ge$  est aussi un choix pratique pour les configurations d'écoulements de Couette et Poiseuille. Il est utile de noter que dans le cas limite de  $Pr$  qui tend vers l'infini, le problème aux valeurs propres pour les RL se réduit aux deux équations suivantes :

$$k^2 \theta_n - (D^2 - k^2)^2 w_n = 0 \quad (2.18)$$

$$-Ra w_n + \Lambda g'(z) w_n - (D^2 - k^2) \theta_n = 0 \quad (2.19)$$

avec les conditions aux limites :

$$\theta_n = w_n = Dw_n = 0 \text{ en } z = \pm \frac{1}{2} \quad (2.20)$$

## 2.2 Méthodes numériques et validation

### 2.2.1 Méthode de Galerkin

Afin de déterminer numériquement la solution du problème aux valeurs propres on développera les variables sous la forme de fonctions polynomiales d'ordre  $N$  choisi de sorte à ce que la solution obtenue converge. Ces fonctions devront vérifier les conditions aux limites du problème.

On appliquera ici la méthode de Galerkin, basée sur le principe des résidus pondérés ; qui consiste à chercher les fonctions inconnues de telle sorte que leur résidu (défini comme l'équation dans laquelle on a remplacé les fonctions inconnues par leur approximation) pondéré par une certaine fonction (appelée fonction de pondération) soit d'intégrale nulle sur le domaine du problème.

On utilise une approximation polynomiale :

$$\begin{cases} w_n(z) = \sum_{i=0}^{N-1} A_i(z) \bar{w}_i \\ \theta_n(z) = \sum_{i=0}^{N-1} B_i(z) \bar{\theta}_i \\ \eta_n(z) = \sum_{i=0}^{N-1} F_i(z) \bar{\eta}_i \end{cases}$$

où les  $A_i(z)$ ,  $B_i(z)$  et  $F_i(z)$  sont des familles de polynômes que l'on choisira en fonction du problème à résoudre. Afin de vérifier les conditions aux limites 2.14, ces polynômes seront ici choisis de la forme :

$$\begin{cases} A_i(z) = (1 - 4z^2)^2 z^i \\ B_i(z) = (1 - 4z^2) z^i \\ F_i(z) = (1 - 4z^2) z^i \end{cases}$$

Les équations correspondantes sont alors multipliées par la fonction de pondération correspondante et intégrées sur le domaine en  $z$ . Cela nous donne un problème matriciel qui peut être résolu numériquement.

### 2.2.2 Méthode de tir

Le temps de calcul et les éventuels problèmes de convergence de la méthode de Galerkin nous incitent à utiliser une méthode de calcul numérique alternative, susceptible de nous donner des résultats plus précis en des temps de calcul raisonnables.

La méthode numérique choisie est la **méthode de tir**, elle consiste à transformer le problème aux limites en un problème aux valeurs initiales. Pour cela les conditions aux limites de notre problème aux valeurs propres sont transformées en conditions initiales. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\theta_n = 0 \text{ en } z = \pm \frac{1}{2} \quad w_n = \frac{\partial w_n}{\partial z} = \bar{\eta}_n = 0 \text{ en } z = \pm \frac{1}{2}$$

Que l'on réécrit sous forme de conditions initiales en  $z = -1/2$ , les conditions aux limites en  $z = 1/2$  restant inchangées :

$$w_n = Dw_n = 0, \quad D^2 w_n = \mathfrak{C}_1, \quad D^3 w_n = \mathfrak{C}_2 \quad \text{en } z = -1/2, \quad (2.21)$$

$$\theta_n = 0 \quad \text{et} \quad D\theta_n = \mathfrak{C}_3 \quad \text{en } z = -1/2, \quad (2.22)$$

$$\bar{\eta}_n = 0 \quad \text{et} \quad D\bar{\eta}_n = \mathfrak{C}_4 \quad \text{en } z = -1/2, \quad (2.23)$$

Les constantes  $\mathfrak{C}_1$ ,  $\mathfrak{C}_2$ ,  $\mathfrak{C}_3$ ,  $\mathfrak{C}_4$  doivent être choisies de sorte à ce que  $\bar{\eta}_n$ ,  $w_n$  et  $\theta_n$  déterminés numériquement vérifient les conditions aux limites en  $z = 1/2$ . Le problème étant aux valeurs propres, une des constantes doit rester indéterminée. On choisira de fixer  $\mathfrak{C}_4 = 1$  ce qui équivaut à prendre  $\mathfrak{C}_4$  comme échelle de référence pour les constantes  $\mathfrak{C}_1$ ,  $\mathfrak{C}_2$  et  $\mathfrak{C}_3$  qui sont a priori complexes et que l'on écrira donc sous la forme :

$$\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_1R + i \cdot \mathfrak{C}_1I \quad \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_2R + i \cdot \mathfrak{C}_2I \quad \mathfrak{C}_3 = \mathfrak{C}_3R + i \cdot \mathfrak{C}_3I \quad (2.24)$$

Trois paramètres réels inconnus, appelés ici  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$ , peuvent désormais être déterminés en relation avec les constantes  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$  par la résolution de ce système modifié, car  $\mathcal{C}_4$  est en général un nombre complexe. Cependant, le choix des paramètres à déterminer  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  dépend du problème à résoudre.

Pour procéder à la résolution numérique, on fixe les valeurs des paramètres du problème  $Ra$ ,  $k$ ,  $\omega$ ,  $Pr$ ,  $Re$ ,  $Ge$  et on cherche une solution approchée satisfaisant les conditions initiales à l'aide de la fonction **NDSolve** du logiciel **Mathematica** (Wolfram 2003). Cette première étape nous donne une fonction  $f$  qui contient les valeurs calculées des coefficients  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{C}1R, \mathcal{C}1I, \mathcal{C}2R, \mathcal{C}2I, \mathcal{C}3R, \mathcal{C}3I$ . On utilise ensuite la fonction **FindRoot** pour trouver  $f \approx 0$  selon le degré de précision voulu. On notera qu'afin d'être efficacement mise en œuvre, la méthode de tir nécessite une estimation initiale des paramètres critiques recherchés. Une telle estimation sera en premier lieu fournie par la méthode de Galerkin, puis les valeurs suivantes à partir de celle que l'on vient d'obtenir tant que l'on conserve un pas raisonnable pour le paramètre que l'on fait varier.

Avant de présenter les résultats de la méthode de tir, les deux *procédures numériques* utilisées sont brièvement décrites. La première utilise la fonction intégrée **NDSolve** du logiciel **Mathematica** afin de résoudre les équations différentielles ordinaires en partant de  $z = -(1/2)$  jusqu'en  $z = +(1/2)$  et en utilisant les conditions initiales 2.20, tout en donnant au départ les estimations nécessaires pour  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{P}_3$ ,  $\text{Re}[\mathcal{C}_1]$ ,  $\text{Im}[\mathcal{C}_1]$ ,  $\text{Re}[\mathcal{C}_2]$ ,  $\text{Im}[\mathcal{C}_2]$ ,  $\text{Re}[\mathcal{C}_3]$  et  $\text{Im}[\mathcal{C}_3]$  ainsi que les valeurs fixes pour les paramètres restants. Cette procédure commute *automatiquement* entre les schémas numériques d'Adams, les schémas numériques BDF (Backwards-Differencing-Formula) et les méthodes de Runge-Kutta selon la raideur locale du problème différentiel à résoudre. En outre, des schémas explicites ou implicites sont utilisés en fonction de la taille locale du pas d'incrément, et qui est ajustée *automatiquement* en fonction des erreurs absolues et relatives prescrites au début. Ces dernières sont imposées *a priori* en fixant le nombre de chiffres (après la virgule) à utiliser dans les calculs. Dans la présente étude, ce nombre a été fixé à 16, 18 et 20 afin d'assurer la convergence de la solution obtenue. Une telle procédure a été programmée grâce à une fonction nommée  $F_1$ , et qui produit un vecteur réel dont les huit éléments sont les valeurs correspondant aux paramètres  $\text{Re}[w_n]$ ,  $\text{Im}[w_n]$ ,  $\text{Re}[Dw_n]$ ,  $\text{Im}[Dw_n]$ ,  $\text{Re}[\theta_n]$ ,  $\text{Im}[\theta_n]$ ,  $\text{Re}[\eta_n]$  et  $\text{Im}[\eta_n]$  évalués en  $z = +(1/2)$ . À présent, la seconde procédure numérique peut désormais être appliquée. Elle utilise la fonction intégrée **FindRoot** de **Mathematica** pour rechercher des estimations qui satisfassent  $F_1 \approx 0$  selon les erreurs absolues et relatives prescrites tout au début. C'est la méthode de *Brent* qui est utilisée pour cette fonction, nécessitant deux estimations initiales pour chaque évaluation. La recherche des modes instables est intrinsèquement liée à la recherche d'estimations initiales adéquates.

**Nous verrons que ces deux méthodes numériques, la méthode de Galerkin et la méthode de tir donnent les mêmes résultats.**

### 2.2.3 Validation des méthodes numériques

Afin de s'assurer de la validité des méthodes utilisées, on les applique à des cas dont on connaît une solution numérique dans la littérature.

Dans un premier temps on compare nos résultats au cas de la configuration de RBP étudiée par Carrière et Monkewitz [12] en l'absence de dissipation visqueuse ( $Ge = 0$ ). La figure 2.1 montre la comparaison entre les résultats de ce présent travail pour le nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre de Reynolds au seuil des rouleaux transversaux, obtenus par la méthode de Galerkin à l'ordre 14 (cercles), avec les résultats calculés dans [12] à l'aide de la

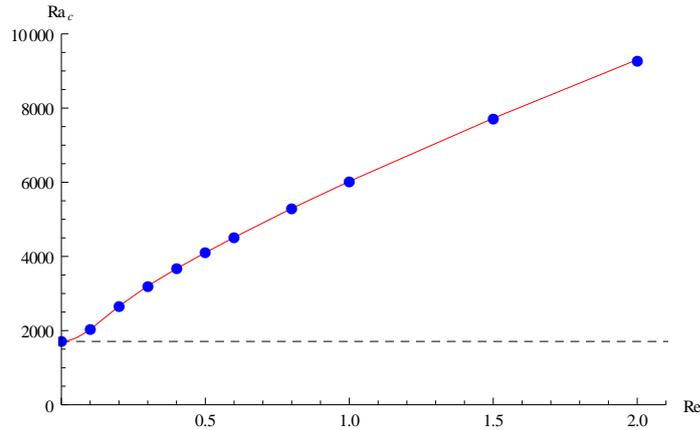


FIGURE 2.1 – Nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  pour les rouleaux transversaux dans une configuration de RBP avec  $Pr = 450$ , obtenu par la méthode de Galerkin à l'ordre 14 (cercles) comparé avec les résultats numériques de Carrière et Monkewitz [12] (ligne continue). La ligne horizontale représente le seuil des rouleaux longitudinaux  $Ra_c = 1707.762$ .

méthode de collocation de Chebyshev (ligne continue). Les deux résultats sont obtenus pour  $Pr = 450$ . On observe une très bonne concordance entre les valeurs obtenues par la méthode de Galerkin et les résultats numériques de [12]. On notera que le nombre de Rayleigh critique croît avec le nombre de Reynolds pour les RT, tandis que le nombre de Rayleigh critique pour les RL (ligne horizontale sur la figure 2.1 est indépendant du nombre de Reynolds et coïncide avec la valeur bien connue  $Ra_c = 1707.762$ . Ce diagramme de stabilité montre clairement que l'écoulement est linéairement stable dans la région où  $Ra < Ra_c = 1707.762$ . Dans les sections suivantes, nous verrons que les effets de la dissipation visqueuse changent drastiquement ce comportement.

On note que dans le cas particulier des écoulement de RBC, le gradient thermique de base  $(-Ra + \Lambda g'(z))$  est similaire à celui obtenu dans le problème de Rayleigh-Bénard avec une source de chaleur interne uniforme. L'impact d'une source de chaleur interne uniforme sur la stabilité linéaire a été étendu aux écoulements de RBP par Barletta et Nield [5]. Dans le cas particulier des RL, le problème aux valeurs propres résolu dans [5] est mathématiquement identique à celui des équations 2.18-2.20 pour les écoulements de RBC dans le cas limite de  $Pr$  infini, tant que l'on identifie le  $\Lambda$  du présent problème à  $\frac{Ra_I}{4}$  dans le problème de RBP avec une source de chaleur interne uniforme, dans lequel  $Ra_I$  est le nombre de Rayleigh interne défini dans [5] comme :

$$Ra_I = \frac{\beta g h^5 Q}{\nu \kappa \lambda}$$

où  $Q$  est le taux de chaleur uniforme généré par unité de volume. La condition  $\Lambda = \frac{Ra_I}{4}$  signifie que pour les rouleaux longitudinaux, l'effet de la dissipation visqueuse pour la configuration de RBC dans le cas limite de  $Pr$  infini, est équivalente à une génération uniforme de chaleur au sein du fluide  $Q = \frac{4\mu U_0^2}{h^2}$ . Avec cette analogie, on compare nos résultats numériques dans le cas particulier des écoulements de RBC mettant en jeu des RL avec  $Pr$  infini, aux résultats numériques rapportés dans [5].

Le tableau 2.1 montre les valeurs critiques du nombre de Rayleigh et du nombre d'onde pour

les RL. Nos résultats ont été obtenus par la méthode de tir à l'ordre 14 tandis qu'une méthode Runge-Kutta de sixième ordre a été utilisée dans [5]. L'étude du tableau 2.1 révèle une excellente concordance des valeurs du nombre de Rayleigh critique et du nombre d'onde critique au seuil d'apparition des RL.

$\Lambda$	$Ra_c^S$	$Ra_c$	$k_c^S$	$k_c$
0	1707.762	1707.7617	3.116324	3.116329
250	1706.649	1706.6485	3.117215	3.117220
500	1703.307	1703.3068	3.119980	3.119893
1250	1679.837	1679.8371	3.138597	3.138588
2500	1594.929	1594.9289	3.205024	3.205035
5000	1240.843	1240.8432	3.454440	3.454446
7500	620.455	620.4550	3.778187	3.778187
9250	30.303	30.3029	3.989800	3.989799
9331.2925	0	0.0005	3.998925	3.998923
10000	-258.382	-258.3825	4.071409	4.071410

TABLEAU 2.1 – Nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  et nombre d'onde critique  $k_c$  obtenus dans le présent travail comparés aux  $Ra_c^S$  et  $k_c^S$  calculés dans [5].

## 2.3 Présentation des résultats de stabilité linéaire

### 2.3.1 Sélection du mode le plus instable en présence de dissipation visqueuse

Comme mentionné précédemment, des structures convectives sous forme de rouleaux longitudinaux (RL), transversaux (RT) et obliques (RO) sont susceptibles d'apparaître lorsque le système devient instable. En l'absence de dissipation visqueuse, les rouleaux longitudinaux sont la structure la plus instable, et leur seuil est indépendant de  $Pe$ . En revanche les rouleaux transversaux sont stabilisés par l'écoulement principal. Les caractéristiques des rouleaux obliques peuvent facilement se déduire en utilisant la transformation de Squire :

$$k_x Pe_{3D} = k Pe, \quad (2.25)$$

$Pe$  et  $Pe_{3D}$  étant les nombres de Péclet associés respectivement aux rouleaux longitudinaux et rouleaux obliques. Cette transformation réduit le problème général tridimensionnel à un équivalent bidimensionnel de RT de nombre d'onde  $k$ , défini précédemment comme  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ . Puisque pour les RT  $Ra_c$  croît avec l'augmentation de  $Pe$ , les courbes de  $Ra_c$  pour les RO se situent en dessous de celle associée aux RT pour toutes les valeurs du nombre de Péclet.

Pour commencer, il convient de déterminer quelle type de structure domine en présence de dissipation visqueuse.

Dans un premier temps il est intéressant de visualiser dans les cas limites des RT et des RL, les courbes neutres de stabilité présentant le nombre de Rayleigh  $Ra$  en fonction du nombre

d'onde  $k$  au seuil de la convection ( $\sigma = 0$ ). Le minimum de cette courbe donne la valeur critique  $Ra_c$  du nombre de Rayleigh et son nombre d'onde critique associé  $k_c$ .

La figure 2.2 présente les courbes neutres de stabilité pour différentes valeurs du nombre de Péclet  $Pe$  dans le cas des RT, pour les configurations de RBP et RBC avec  $Pr = 450$  et  $Ge = 10^{-4}$ . En l'absence de dissipation visqueuse le nombre de Péclet  $Pe$  a une influence fortement stabilisante. En présence de dissipation visqueuse on observe toujours un effet stabilisant de  $Pe$  : la dissipation visqueuse a un effet négligeable dans le cas des RT.

La figure 2.3 présente les courbes neutres de stabilité pour différentes valeurs du nombre du paramètre  $\Lambda$  dans le cas des rouleaux longitudinaux, pour les configurations de RBP et RBC avec  $Pr = 450$ .  $\Lambda$  est dans ce cas le seul paramètre pilotant l'intensité de la dissipation visqueuse. Il apparaît que plus on augmente  $\Lambda$ , plus le minimum des courbes neutres de stabilité diminue ce qui traduit le caractère déstabilisant de la dissipation visqueuse.

On étudie maintenant plus en détail l'effet de l'écoulement en présence de dissipation visqueuse pour l'ensemble des structures convectives : les rouleaux transversaux, rouleaux longitudinaux et rouleaux obliques. La transformation de Squire 2.25 cesse d'être valide en présence de dissipation visqueuse ( $Ge \neq 0$ ). Dans ce cas, pour résoudre la système 2.11-2.13 associé aux conditions aux limites 2.14, on introduit l'angle d'inclinaison du vecteur d'onde  $\phi$  par rapport à l'écoulement principal, de sorte que  $\phi = \arctan(k_y/k_x)$ . Les RL, RT et RO correspondent respectivement à  $\phi = \pi/2$ ,  $\phi = 0$  et  $0 < \phi < \pi/2$ .

La figure 2.4 montre pour les écoulements de RBP et RBC, l'évolution du nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  en fonction du nombre de Péclet  $Pe$  pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison  $\phi$ , avec  $Pr = 450$  et  $Ge = 10^{-4}$ . On remarque l'influence stabilisatrice de l'écoulement principal pour les RT et les RO, leurs seuils augmentant avec  $Pe$ . De plus, lorsque l'angle d'inclinaison augmente,  $Ra_c$  diminue pour les RO. Pour les valeurs de  $Pe$  utilisées sur la figure 2.4, un très faible effet déstabilisant est observé pour les RL quand  $Pe$  croît. Cette figure indique que les RT ( $\phi = 0$ ) et les RL ( $\phi = \pi/2$ ) correspondent à deux cas limites, tandis que les structures obliques ( $0 < \phi < \pi/2$ ) apparaissent entre les deux. Par conséquent, avec la paire de paramètres fixés ( $Ge = 10^{-4}$ ,  $Pr = 450$ ), les RL sont indépendamment de  $Pe$  le mode d'instabilité préférentiel au seuil de la convection. Ce mode de sélection linéaire est aussi observé pour d'autres valeurs de  $Ge$  et  $Pr$ , comme montré dans le tableau 2.3.1 pour les RT. Pour cette raison, dans les sections suivantes on s'intéressera uniquement aux propriétés linéaires des RL au seuil de la convection.

$Ge$	0	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$
$Re = 0$	1707.76	1707.76	1707.76	1707.76
$Re = 1$	6024.30	6024.17	6023.02	6012.09
$Re = 2$	9307.19	9307.03	9305.61	9294.49

TABLEAU 2.2 – Nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  en fonction de  $Re$  pour  $Ge = 0, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$  pour les rouleaux transversaux avec  $Pr = 450$ .

### 2.3.2 Effets de la dissipation visqueuse et du nombre de Prandtl pour le mode le plus instable

Dans cette section on explore plus en détail l'effet de la dissipation visqueuse pour les rouleaux longitudinaux. Dans un premier temps on se place dans le cas limite d'un nombre de

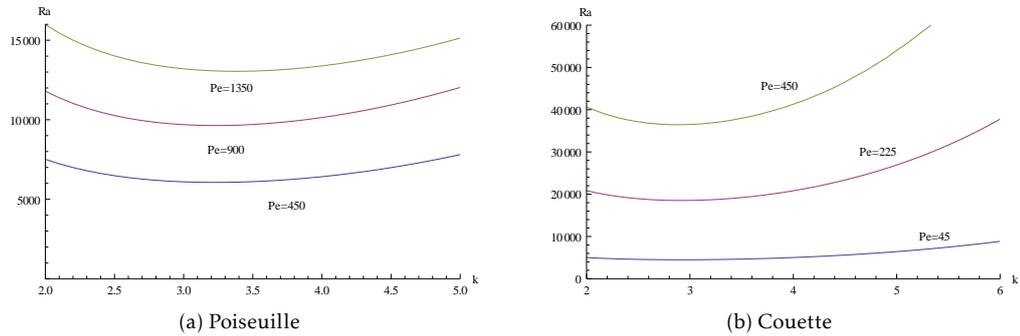


FIGURE 2.2 – Courbes neutres de stabilité pour différentes valeurs de  $Pe$  dans le cas des rouleaux transversaux, avec  $Pr = 450$  et  $Ge = 10^{-4}$  dans des configurations de RBP et RBC.

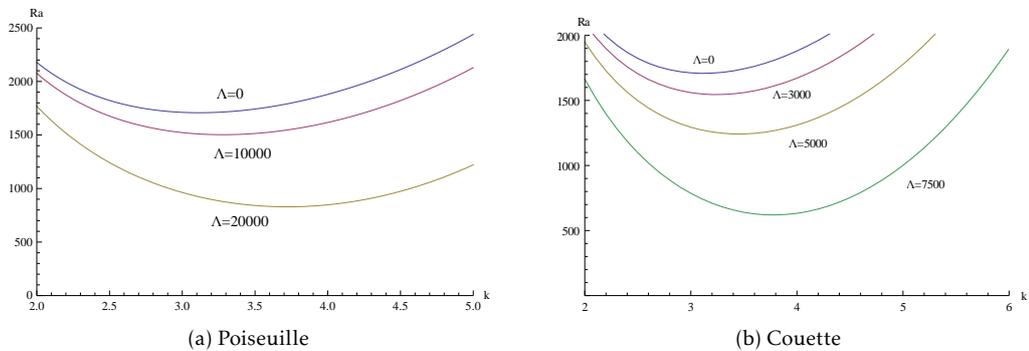


FIGURE 2.3 – Courbes neutres de stabilité pour différentes valeurs de  $\Lambda$  dans le cas des rouleaux longitudinaux, avec  $Pr = 450$  dans des configurations de RBP et RBC.

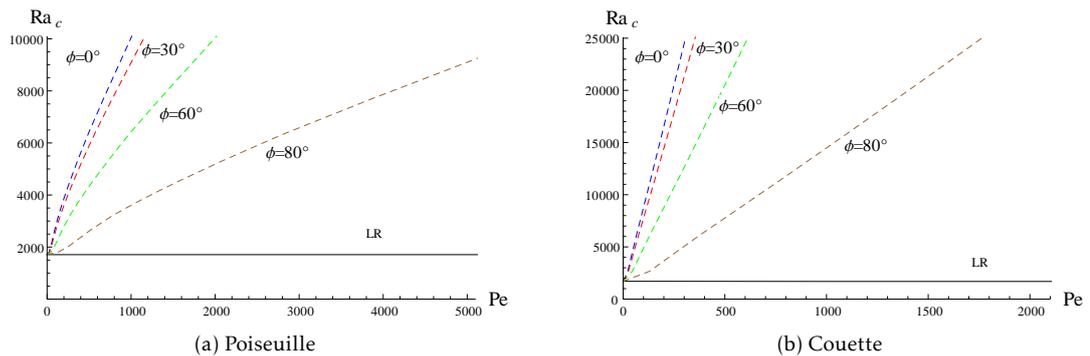


FIGURE 2.4 – Évolution du nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  pour les rouleaux transversaux, longitudinaux et obliques en fonction du nombre de Péclet  $Pe$  pour  $Pr = 450$  et  $Ge = 10^{-4}$ , pour des configuration de Poiseuille et Couette.

Prandtl infini, la composante verticale de la vorticité n'a alors pas d'influence sur le problème de stabilité 2.18-2.20 et le nombre de Rayleigh dépend uniquement du paramètre  $\Lambda$ . Le problème aux valeurs propres est résolu numériquement par la méthode de tir.

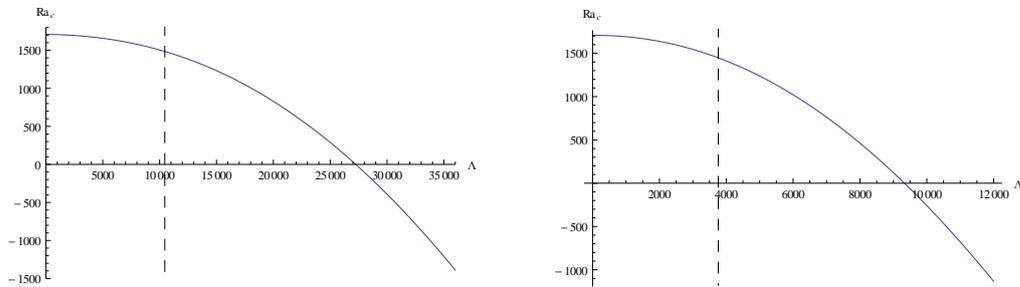


FIGURE 2.5 – Influence du paramètre  $\Lambda = Pe^2 Ge$  sur le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$ , pour les rouleaux longitudinaux dans des configurations de RBP et RBC.

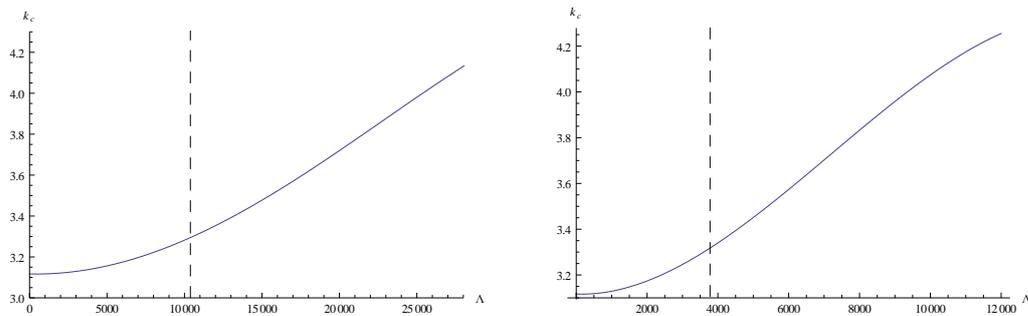


FIGURE 2.6 – Influence du paramètre  $\Lambda = Pe^2 Ge$  sur le nombre d'onde critique  $k_c$  pour les rouleaux longitudinaux dans des configurations de RBP et RBC.

La figure 2.5 met en évidence l'influence déstabilisante du paramètre  $\Lambda$  et donc de la dissipation visqueuse sur le système : le nombre de Rayleigh critique à partir duquel la convection se déclenche décroît lorsque  $\Lambda$  augmente. On peut remarquer la présence de deux régions distinctes séparées par une ligne verticale discontinue, qui met en évidence l'existence de deux comportements distincts de  $Ra_c$  et  $k_c$ . Du côté gauche de la ligne verticale située à une valeur particulière de  $\Lambda$ , que l'on notera  $\Lambda^T$  ( $\Lambda^T$  sera évalué dans une prochaine section par le biais d'une analyse énergétique),  $Ra_c$  et  $k_c$  sont très proches de la valeur bien connue  $Ra_c = 1707.76$  et  $k_c = 3.116$  correspondant à la convection classique de Rayleigh-Bénard. En revanche, du côté droit de la ligne verticale, i.e. quand  $\Lambda$  dépasse  $\Lambda^T$ ,  $Ra_c$  se met à décroître fortement quand  $\Lambda$  augmente et  $k_c$  est croissant en fonction de  $\Lambda$ . Ce dernier résultat concernant  $k_c$  implique que les cellules convectives deviennent plus petites pour de grandes valeurs de  $\Lambda$ .

L'effet déstabilisant de la dissipation visqueuse peut être si fort que les courbes de  $Ra_c$  croisent l'axe des  $\Lambda$ , pour les valeurs  $\Lambda^0 = 27242$  pour RBP et  $\Lambda^0 = 9332$  pour RBC. Pour ces valeurs particulières  $\Lambda^0$ , aucun gradient externe de température ( $Ra_c = 0$ ) n'est nécessaire pour induire une déstabilisation du système. Dans ce cas, la dissipation visqueuse est le seul mécanisme responsable de l'instabilité. Pour  $\Lambda > \Lambda^0$ , le nombre de Rayleigh critique devient négatif. Cela

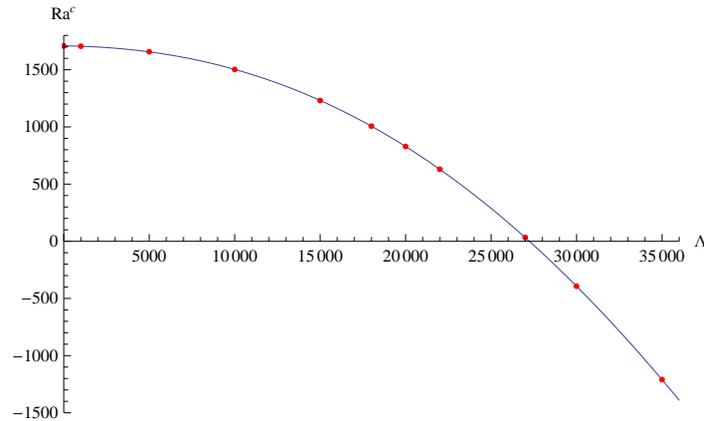


FIGURE 2.7 – Comparaison des valeurs du nombre de Rayleigh Critique  $Ra_c$  pour la méthode de Galerkin (trait continu) et la méthode de tir (points) avec  $Pr$  qui tend vers l'infini.

indique que même en présence d'un gradient de température externe stabilisant imposé, une instabilité peut se manifester en raison des effets déstabilisants de la dissipation visqueuse.

On peut mentionner à des fins de comparaison que Barletta et ses collaborateurs ont étudié les instabilités induites par les effets thermiques causés par la dissipation visqueuse dans les écoulements horizontaux de Couette [49] et Poiseuille [3], en prenant une paroi inférieure adiabatique et une paroi supérieure isotherme. Avec de telles conditions aux limites, ils ont trouvé la valeur critique de  $\Lambda$  pour un  $Pr$  infini soit  $\Lambda_c = 2772.27$  pour les écoulements de Couette et  $\Lambda_c = 221.2619$  pour les écoulements de Poiseuille. Puisque qu'aucun gradient externe n'est imposé dans ces études, ces valeurs critiques doivent être comparées aux valeurs numériques obtenues dans cette thèse pour le cas particulier des parois horizontales maintenues à une même température constante, soit  $\Lambda^0 = 9332$  pour RBC et  $\Lambda^0 = 27242$  pour RBP. Étant donné que  $\Lambda_c < \Lambda^0$  pour les deux configurations étudiées, on en conclue que les conditions aux limites utilisées dans [49] et [3] sont plus efficaces pour promouvoir une instabilité due à la dissipation visqueuse que celles associées aux écoulements de RBC et RBP.

### Comparaison entre la méthode de Galerkin et la méthode de tir

La résolution numérique avec la méthode de Galerkin pose des problèmes de convergence pour des ordres  $N$  élevés, et ce d'autant plus que le nombre de Péclet est élevé. Nous mettons donc en œuvre une autre méthode numérique : la méthode de tir, qui est plus rapide et précise que la méthode de Galerkin. La figure 2.7 et le tableau 2.3 montrent que l'on obtient des résultats très similaires sur l'ensemble des valeurs de  $\Lambda$ . La méthode de tir est validée et pourra être utilisée en remplacement de la méthode de Galerkin pour des valeurs des paramètres qui poseraient des problèmes de convergence avec la méthode de Galerkin. La méthode de Galerkin pourra toujours être utilisée afin d'obtenir une estimation des valeurs critiques  $(Ra_c, k_c)$ , nécessaire à la mise en œuvre de la méthode de tir.

### Effet du nombre de Prandtl

Pour des valeurs finies de  $Pr$ , la composante verticale de la vorticité agit de concert avec la température et la composante verticale de la vitesse. Le problème de stabilité est alors gouverné par les trois équations couplées 2.15-2.17 et le nombre de Rayleigh dépend de  $\Lambda$  et  $Pr$ . Les figures

2.8 et 2.9 montrent l'influence du nombre de Prandtl sur la valeur de  $Ra_c$  pour les configurations de RBP et RBC, respectivement. Les courbes montrent un effet déstabilisant de la dissipation visqueuse et sont pratiquement confondues pour  $Pr \geq 10^2$ , ce qui montre bien la robustesse de l'approximation  $Pr \rightarrow \infty$ . Cependant pour  $Pr = 10$ , les figures 2.8 et 2.9 indiquent que, en conséquence de la contribution de la vorticité verticale, le nombre de Rayleigh critique décroît plus rapidement que pour des grandes valeurs de  $Pr$ .

$\Lambda$	$Ra_c$ MG	$Ra_c$ MT	$k_c$ MG	$k_c$ MT
0	1707.76	1707.76	3.11613	3.11613
1000	1705.77	1705.77	3.11793	3.11796
3000	1689.77	1689.75	3.1309	3.13101
5000	1657.51	1657.50	3.15716	3.15718
7500	1593.67	1593.67	3.20832	3.20833
10000	1502.47	1502.47	3.27972	3.27966
12000	1408.71	1408.70	3.35047	3.55048
15000	1231.13	1231.12	3.47660	3.47657
18000	1006.55	1006.55	3.62027	3.62037
20000	829.510	829.500	3.72214	3.72199
22000	630.049	630.041	3.82535	3.82542
24000	407.976	407.969	3.92875	3.92869
26000	163.716	163.711	4.03037	4.03038
27000	32.5353	33.5275	4.08046	4.08032
28000	-102.780	-102.786	4.12944	4.12919
30000	-393.024	-393.030	4.22584	4.22568
33000	-867.844	-867.846	4.36392	4.36388
35000	-1209.03	-1209.04	4.45171	4.45154

TABLEAU 2.3 – Nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  au seuil d'apparition des rouleaux longitudinaux pour la configuration de RBP, en fonction du paramètre  $\Lambda$  pour un nombre de Prandtl qui tend vers l'infini, calculé par la méthode de Galerkin (MG) et la méthode de tir (MT)

Comme pour le cas de  $Pr$  infini, on peut distinguer deux régimes d'instabilité suivant l'intensité de la dissipation visqueuse et la valeur du nombre de Prandtl : un régime d'instabilité de type Rayleigh-Bénard pour  $\Lambda < \Lambda^T(Pr)$  et un régime d'instabilité due à la dissipation visqueuse pour  $\Lambda > \Lambda^T(Pr)$ .

Les tableaux 2.4 ( coulement de RBP) et 2.5 ( coulement de RBC) montrent plus en détail cette très bonne concordance entre les valeurs de  $Ra_c$  obtenues avec l'approximation d'un nombre de Prandtl infini et celles obtenues pour un nombre de Prandtl fini, pourvu que  $Pr$  soit assez grand (au moins de l'ordre de  $10^2$ ).

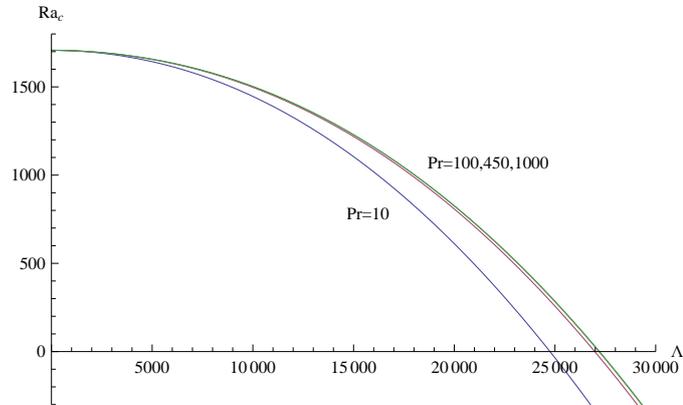


FIGURE 2.8 – Effet du nombre de Prandtl  $Pr$  sur le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  en fonction du paramètre  $\Lambda$  dans le cas des rouleaux longitudinaux pour une configuration de RBP.

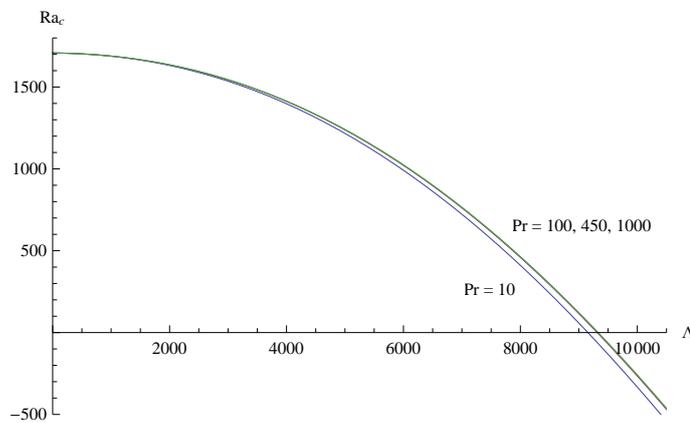


FIGURE 2.9 – Effet du nombre de Prandtl  $Pr$  sur le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  en fonction du paramètre  $\Lambda$  dans le cas des rouleaux longitudinaux pour une configuration de RBC.

$\Lambda$	$Pr \rightarrow +\infty$	$Pr = 10$	$Pr = 50$	$Pr = 100$	$Pr = 450$	$Pr = 1000$	$Pr = 10000$
0	1707.76	1707.76	1707.76	1707.76	1707.76	1707.76	1707.76
5000	1657.55	1643.30	1654.87	1656.15	1657.24	1657.45	1657.50
10000	1502.56	1445.76	1491.61	1497.12	1501.30	1502.00	1502.40
15000	1230.87	1104.99	1206.87	1219.08	1228.48	1229.98	1231.06
20000	829.140	611.98	787.527	808.567	824.869	827.416	829.287
24000	409.037	106.136	349.517	378.857	401.580	405.08	407.52
27000	33.4889	-336.902	-39.1462	-3.12375	24.7695	28.9721	32.2343

TABLEAU 2.4 – Nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  au seuil d'apparition des rouleaux longitudinaux pour la configuration de RBP, en fonction du paramètre  $\Lambda$  pour  $Pr \rightarrow +\infty$  et  $Pr = 10, 50, 100, 450, 1000, 10000$ , pour la méthode de Galerkin à l'ordre 14

$\Lambda$	$Pr \rightarrow +\infty$	$Pr = 10$	$Pr = 50$	$Pr = 100$	$Pr = 450$	$Pr = 1000$	$Pr = 10000$
0	1707.76	1707.76	1707.76	1707.76	1707.76	1707.76	1707.76
1000	1689.92	1688.90	1689.71	1689.81	1689.89	1689.91	1689.92
3000	1544.37	1535.38	1542.49	1543.43	1544.16	1544.28	1544.35
5000	1240.85	1217.00	1235.88	1238.35	1240.29	1240.60	1240.83
7000	766.114	723.047	757.135	761.605	765.107	765.665	766.074
9000	121.946	58.0516	108.646	115.268	120.461	121.274	121.890
10000	-258.376	-332.758	-273.855	-266.154	-260.112	-259.160	-258.456
12000	-1120.66	-1215.68	-1140.41	-1130.57	-1122.87	-1121.65	-1120.75

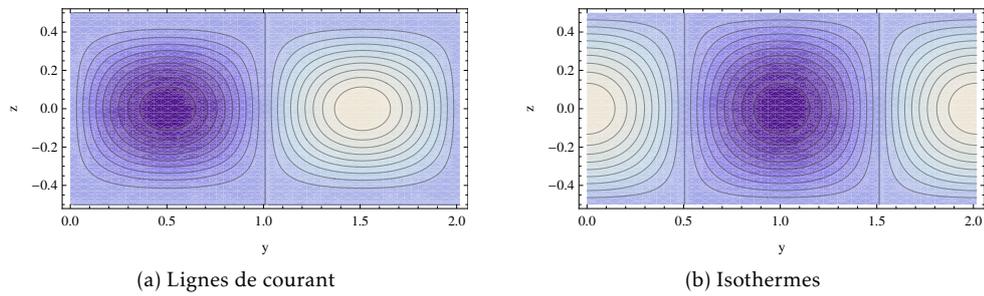
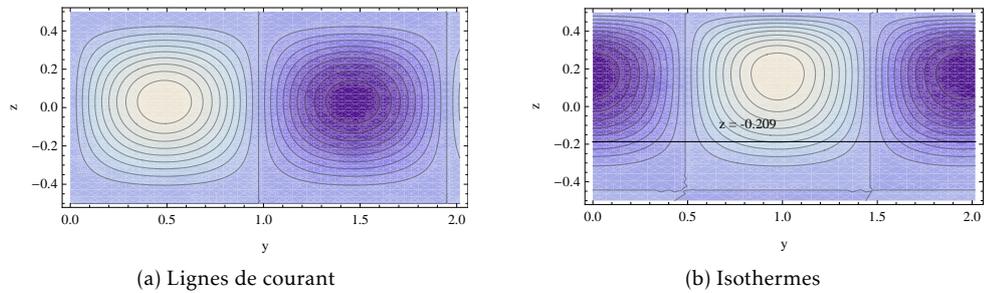
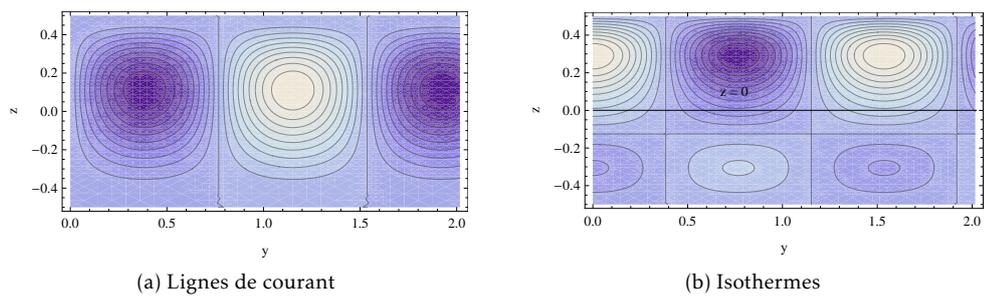
TABLEAU 2.5 – Nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  au seuil d'apparition des rouleaux longitudinaux pour la configuration de RBC en fonction du paramètre  $\Lambda$  pour  $Pr \rightarrow +\infty$  et pour  $Pr = 10, 50, 100, 450, 1000, 10000$ , pour la méthode de Galerkin à l'ordre 14

### 2.3.3 Lignes de courant et isothermes

Afin de mieux comprendre les mécanismes physiques de la déstabilisation, on trace les isolignes de courant (qui correspondent aux lignes où la fonction de courant  $\psi$  est constante) et les isothermes (lignes telles que  $\theta = \text{constante}$ ). Cela nous permet d'obtenir des informations plus précises sur les structures convectives qui se forment.

On tracera les différents champs suivant l'axe des structures convectives et la hauteur  $z$ , ici pour les rouleaux longitudinaux ce sera donc en fonction de  $y$  et de  $z$ . On se place dans l'approximation d'un nombre de Prandtl infini. Dans ce cas la fonction de courant  $\psi$  est définie par :

$$w = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.26)$$

FIGURE 2.10 – Isolignes de courant et isothermes pour  $\Lambda = 0$ FIGURE 2.11 – Isolignes de courant et isothermes pour  $\Lambda = 8100$  dans la configuration de RBPFIGURE 2.12 – Isolignes de courant et isothermes pour  $\Lambda = 27242$  soit  $Ra_c = 0$  dans la configuration de RBP

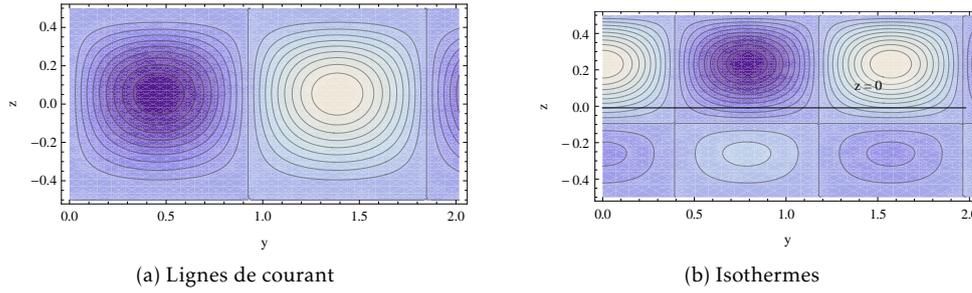


FIGURE 2.13 – Isolignes de courant et isothermes pour  $\Lambda = 9332$  soit  $Ra_c = 0$  dans la configuration de RBC

Ce qui donne pour la fonction de courant :

$$\psi = - \int w dy \quad (2.27)$$

Les structures spatiales au seuil de la convection sous forme de rouleaux longitudinaux sont montrées sur la figure 2.10 en l'absence d'écoulement (et donc de dissipation visqueuse :  $\Lambda = 0$ ), sur les figures 2.11 ( $\Lambda = 8100$ ), 2.12 ( $\Lambda^0 = 27242$  soit  $Ra_c = 0$ ) pour l'écoulement de RBP et la figure 2.13 ( $\Lambda^0 = 9332$  soit  $Ra_c = 0$ ) pour l'écoulement de RBC. On remarque que la convection se développe dans l'ensemble du milieu fluide en l'absence de dissipation visqueuse ( $\Lambda = 0$ ), tandis que le centre des cellules convectives se déplace vers le haut pour  $\Lambda = 8100$  et  $\Lambda = \Lambda^0 = 27242$  pour RBP et  $\Lambda^0 = 9332$  pour RBC. Ce comportement est attendu, étant donné le profil de température de base 1.62. Sur les isothermes des figures 2.11 et 2.12, la ligne horizontale représente la limite théorique séparant les stratifications thermique stable et instable de l'état de base. Le faible écoulement constaté dans la stratification inférieure stable est dû à la convection pénétrative, un phénomène bien connu dans la littérature (voir notamment [1]). Ces figures, tracées sur une période correspondant au nombre d'onde critique  $k_c = 3.116$  tel que  $\Lambda = 0$ , montrent aussi que les rouleaux longitudinaux émergents ont un diamètre plus petit quand l'intensité de la dissipation visqueuse est élevée, ce qui est cohérent avec l'évolution du nombre d'onde constaté sur la figure 2.6.

### 2.3.4 Analyse énergétique

Nous avons analysé l'effet de la dissipation visqueuse sur la stabilité de la configuration d'écoulements parallèles avec gradient de température imposé. Le caractère stable ou instable du problème est le résultat de la compétition entre plusieurs sources énergétiques stabilisantes et déstabilisantes. Afin de déterminer la contribution de chacune de ces sources énergétiques, nous entreprenons une analyse énergétique du problème (voir [77], [27]). L'analyse énergétique est faite dans le cas des rouleaux longitudinaux pour  $Pr = 450$ .

L'équation de la chaleur 2.4 étant le siège des principales sources physiques de stabilisation/déstabilisation, c'est à partir de cette équation que nous mènerons l'analyse énergétique. Afin de faire apparaître les termes d'énergie, on multiplie l'équation par le complexe conjugué  $\theta_n^*$  de la température  $\theta_n$  :

$$\sigma |\theta_n|^2 = \left( Ra - Pe^2 Ge g'(z) \right) w_n \times \theta_n^* + 2 Ge Pe f'(z) Du_n \times \theta_n^* + [D^2 - k_y^2] \theta_n \times \theta_n^*$$

On prend alors la partie réelle de l'équation, puis on l'intègre par rapport à  $z$  entre  $-\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2}$ . On obtient alors la relation donnant la variation de l'énergie thermique fluctuante  $e_\theta$  :

$$\sigma e_\theta = e_{th} + e_{vd}^{th} + e_{vd}^{hyd} + e_{td}$$

Dans laquelle, l'indice  $r$  désignant la partie réelle :

$$\begin{aligned} e_\theta &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (|\theta_n(z)|^2)_r dz & e_{th} &= Ra_c \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (w_n \theta_n^*)_r dz \\ e_{vd}^{th} &= -GePe^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g'(z) (w_n \theta_n^*)_r dz & e_{vd}^{hyd} &= -2GePe \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f'(z) (\theta_n^* Du_n)_r dz \\ e_{td} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [(D^2 - k_c^2) \theta_n \times \theta_n^*]_r dz \end{aligned}$$

Les différentes énergies s'interprètent de la manière suivante :

- $e_{th}$  correspond à la partie de la contribution aux forces de flottabilité due au gradient de température imposé
- $e_{vd}^{th}$  correspond à la partie de la contribution aux forces de flottabilité induite par la dissipation visqueuse
- $e_{vd}^{hyd}$  représente une production d'énergie hydrodynamique générée par l'interaction de l'écoulement cisailé de base avec la composante  $u$  de la vitesse
- $e_{td}$  est l'énergie de dissipation thermique.

En prenant en compte les conditions aux limites pour  $\theta_n$ , on montre facilement que

$$e_{td} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (|D\theta_n(z)|^2 + k_c^2 |\theta_n(z)|^2) dz$$

$e_{td}$  est négatif ce qui indique que la contribution de la dissipation thermique produit un effet stabilisant.

En vue de l'interprétation physique des résultats, il est utile d'introduire la production totale d'énergie thermique fluctuante par la dissipation visqueuse  $e_{vd}$  comme somme de  $e_{vd}^{th}$  et  $e_{vd}^{hyd}$ ,

$$e_{vd} = e_{vd}^{th} + e_{vd}^{hyd}$$

En normalisant ces contributions par la valeur absolue de l'énergie de dissipation thermique  $|e_{td}|$ , le bilan énergétique devient donc au point neutre de stabilité  $\sigma = 0$  :

$$E_{th} + E_{vd} = 1$$

avec  $E_{th} = \frac{e_{th}}{|e_{td}|}$  et  $E_{vd} = \frac{e_{vd}}{|e_{td}|}$

$Re$	$Ra_c$	$E_{th}$	$E_{vd}$	$E_{th} + E_{vd}$
0	1707.76	1	0	1
10	1699.52	0.969373	0.0305835	0.999957
15	1665.84	0.859424	0.140368	0.999792
20	1573.55	0.645143	0.354326	0.999469
25	1371.81	0.392686	0.606416	0.999102
30	983.836	0.184319	0.814502	0.998821
36.64	0	0	1	1
40	-779.414	-0.0673803	1.06593	-0.998551

TABLEAU 2.6 – Tableau des résultats de l’analyse énergétique basée sur l’équation de la chaleur, pour une configuration de RBP avec  $Pr = 450$  et  $Ge = 10^{-4}$ .

$Re$	$Ra_c$	$E_{th}$	$E_{vd}$	$E_{th} + E_{vd}$
0	1707.76	1	0	1
5	1703.02	0.983688	0.0162263	0.999914
10	1634.02	0.78474	0.215429	1.00017
15	1322.42	0.374255	0.626198	1.00045
18	884.75	0.170436	0.830104	1.00054
21.48	0	0	1	1
25	-1431.1	-0.143109	1.14367	1.00056

TABLEAU 2.7 – Tableau des résultats de l’analyse énergétique basée sur l’équation de la chaleur, pour une configuration de RBC avec  $Pr = 450$  et  $Ge = 10^{-4}$ .

Le tracé de ces énergies est visible sur les figures 2.14 pour le cas de RBP et 2.15 pour RBC. On peut voir que lorsque  $\Lambda$  augmente, la contribution des forces de flottabilité due au gradient de température imposé décroît régulièrement. Cela s’accompagne d’une augmentation régulière de la contribution de la dissipation visqueuse aux forces de flottabilité. La transition d’une instabilité d’origine majoritairement thermique (due au gradient de température imposé) vers une instabilité majoritairement hydrodynamique (due à la dissipation visqueuse qui produit une énergie interne déstabilisante) se fait lorsque les courbes de  $E_{th}$  et  $E_{vd}$  se croisent. On notera  $\Lambda^T$  la valeur du paramètre  $\Lambda$  pour laquelle cette transition a lieu. Nous voyons que cette transition a lieu en  $\Lambda^T = 10425.30$  pour RBP et  $\Lambda^T = 3682.15$  pour RBC. Les tableaux 2.6 et 2.7 présentent les valeurs numériques des énergies normalisées pour les configurations de RBP et RBC respectivement, ce qui permet de constater que la somme de  $E_{th}$  et  $E_{vd}$  est pratiquement égale à 1 comme le prévoit la théorie.

Cette analyse du bilan énergétique nous permet de conclure que la transition progressive entre les deux régimes instables observée dans l’analyse de stabilité linéaire est le fait de la compétition entre deux mécanismes d’instabilité. Les effets des forces de flottabilité dues au gradient de température extérieur sont dominants pour  $\Lambda < \Lambda^T$ , sinon l’énergie transmise à l’écoulement perturbé par la dissipation visqueuse interne au fluide prévaut.

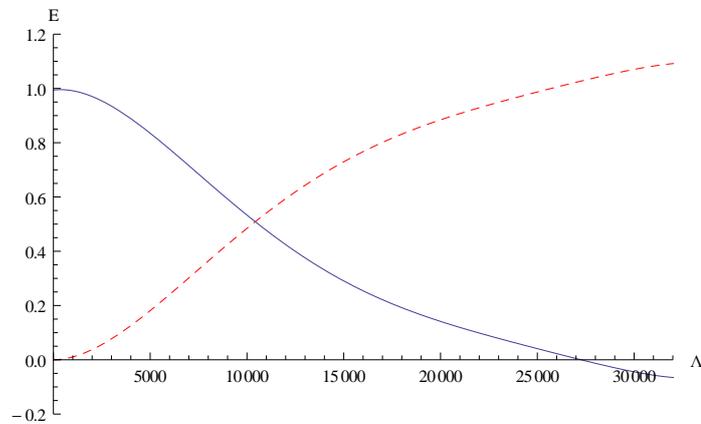


FIGURE 2.14 – Énergies d'origine thermique  $E_{th}$  (ligne bleu continue) et due à la dissipation visqueuse  $E_{vd}$  (ligne rouge pointillée) en fonction du paramètre  $\Lambda$  pour une configuration de RBP avec  $Pr = 450$ .

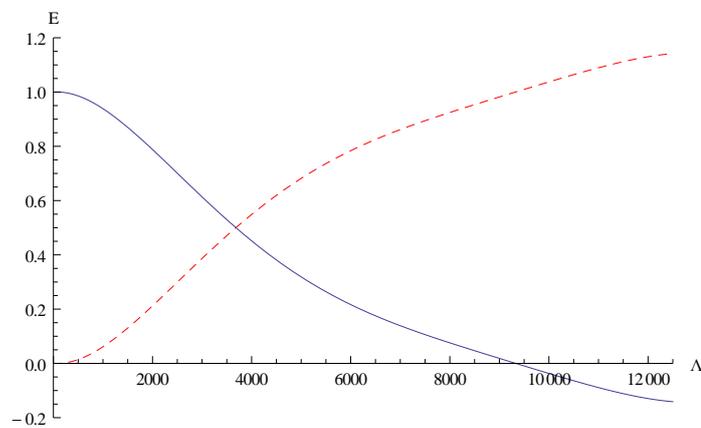


FIGURE 2.15 – Énergies d'origine thermique  $E_{th}$  (ligne bleu continue) et due à la dissipation visqueuse  $E_{vd}$  (ligne rouge pointillée) en fonction du paramètre  $\Lambda$  pour une configuration de RBC avec  $Pr = 450$ .

### 2.3.5 Instabilités d'origine thermique et hydrodynamique : Comparaison

On a mis en évidence le rôle déstabilisant de la dissipation visqueuse sur la configuration de Rayleigh-Bénard avec écoulement parallèle, cette déstabilisation pouvant même se produire en l'absence de gradient déstabilisant de température imposé aux parois : la déstabilisation est alors entièrement du fait de la dissipation visqueuse induite par la présence de l'écoulement. L'instabilité peut alors être qualifiée d'hydrodynamique (elle apparaît par la seule présence de l'écoulement) d'origine thermique (le mécanisme physique de déstabilisation est la présence d'une source de chaleur interne due à la dissipation visqueuse). Les seuls paramètres déstabilisants sont alors  $\Lambda = Pe^2 Ge = Pr^2 Re^2 Ge$  et le nombre de Prandtl  $Pr$ .  $\Lambda$  et  $Pr$  étant fixés il suffit de fixer  $Ge$  afin d'en déduire la valeur de  $Re$  correspondant au seuil de l'instabilité, que l'on notera  $Re_c$ . On remarquera qu'il n'est possible de donner une valeur à  $Re$  que si  $Pr$  a une valeur finie.

On se placera donc dans une configuration d'écoulement de Poiseuille ou de Couette sans gradient de température imposé entre les parois qui sont maintenues à la même température : la seule source potentielle de déstabilisation est l'écoulement parallèle.

L'écoulement de Poiseuille admet une transition vers une instabilité purement hydrodynamique, étudiée notamment par Orszag [57] qui a résolu numériquement le problème aux valeurs propres d'Orr-Sommerfeld pour un écoulement de Poiseuille isotherme. Dans ce cas le théorème de Squire nous assure que le mode le plus instable est bidimensionnel, c'est-à-dire sous forme d'ondes transversales. Avec l'adimensionnement utilisé ici le nombre de Reynolds critique et le nombre d'onde critique associé sont donnés par :

$$Re_c^{TS} = 11544.44 \quad \text{et} \quad k_c^{TS} = 2.04112$$

De plus, l'effet d'un gradient de température vertical imposé sur l'instabilité de Tollmien-Schlichting est négligeable pour tout  $Ra < Ra_c$  [19],[64].

On étudie donc l'influence du nombre de Prandtl  $Pr$  sur l'apparition de l'instabilité, le nombre de Gebhart  $Ge$  étant ici fixé à une valeur  $Ge = 10^{-6}$  raisonnable pour des conditions expérimentales de laboratoire. Pour chaque nombre de Prandtl choisit, on augmente l'intensité de l'écoulement à travers le nombre de Reynolds  $Re$  jusqu'à ce que l'instabilité convective survienne. Pour le cas de l'écoulement de Poiseuille on compare ensuite le nombre de Reynolds critique  $Re_c$  avec le nombre de Reynolds  $Re_c^{TS}$  correspondant à l'instabilité hydrodynamique classique de Tollmien-Schlichting. Cette instabilité étant spécifique à l'écoulement de Poiseuille on ne la comparera qu'au cas de Poiseuille. L'écoulement de Couette isotherme est quand à lui linéairement stable [67].

La figure 2.16 montre le nombre de Reynolds critique  $Re_c$  à partir duquel se développe l'instabilité convective en l'absence de gradient imposé de température, pour différents nombre de Prandtl et un nombre de Gebhart  $Ge = 10^{-6}$  qui correspond à une valeur typique de celles susceptibles de se présenter en conditions expérimentales. On constate d'après la figure 2.16 que  $Re_c$  est toujours largement inférieur à la valeur  $Re_c^{TS}$  pourvu que le nombre de Prandtl soit au moins de l'ordre de  $10^2$ . En d'autres termes, cette instabilité convective d'origine purement hydrodynamique se développera bien avant l'instabilité hydrodynamique sous formes d'ondes de Tollmien-Schlichting pourvu que le nombre de Prandtl soit assez grand (de l'ordre de  $10^2$ ).

Il est à noter que dans les cas pratiques l'instabilité hydrodynamique se manifeste le plus souvent pour des nombres de Reynolds inférieurs au seuil théorique de Tollmien-Schlichting, par exemple Nishioka et al. [52] ont confirmé expérimentalement le nombre de Reynolds critique de  $Re_c = 5772$  (le nombre de Reynolds étant calculé en prenant pour référence la distance de la paroi au milieu de la conduite) pour de faibles perturbations. En revanche dans le cas de

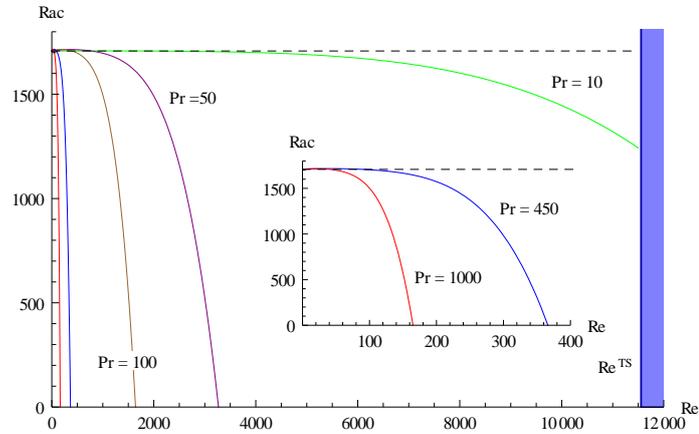


FIGURE 2.16 – Comparaison des seuils de l’instabilité hydrodynamique due à la dissipation visqueuse avec l’instabilité hydrodynamique classique de Tollmien-Schlichting, pour  $Ge = 10^{-6}$  et  $Pr = 10, 100, 450, 1000$  (écoulement de Poiseuille).

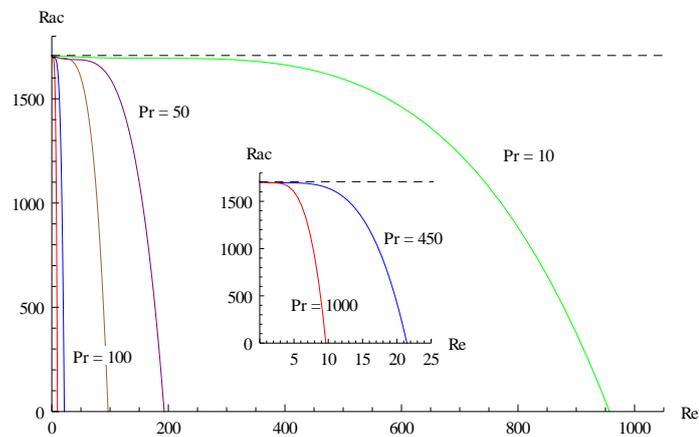


FIGURE 2.17 – Seuils de l’instabilité hydrodynamique due à la dissipation visqueuse, pour  $Ge = 10^{-6}$  et  $Pr = 10, 100, 450, 1000$  (écoulement de Couette).

grandes perturbations Nishioka et Asai [51] on déterminé expérimentalement un nombre de Reynolds critique de l'ordre de 1000. Ces observations confirment les travaux de Orszag et Patera [56] qui ont déterminé par la simulation numérique l'existence d'une instabilité sous-critique pour  $Re > 1000$  dans le cas de l'écoulement de Poiseuille plan. Quand à l'écoulement de Couette plan, Romanov a déterminé qu'il est linéairement stable pour tout nombre de Reynolds [67], néanmoins les simulations numériques (Dauchot et Daviaud [15]) et l'expérience (Tillmark et Alfredsson [78]) montrent que la turbulence peut s'établir pour un nombre de Reynolds entre 300 et 400.

D'un point de vue expérimental, de nombreux types de structures ont été observés dans la littérature pour l'écoulement de RBP, tels que des rouleaux longitudinaux stationnaires, des rouleaux transversaux se déplaçant vers l'amont, des combinaisons de rouleaux longitudinaux et transversaux et des cellules irrégulières. A notre connaissance toutes ces structures ont été observées en régime supercritique, i.e. pour  $Ra > Ra_c$ . Cela signifie que l'effet déstabilisant de la dissipation visqueuse prédit par l'analyse de stabilité linéaire en régime sous-critique, ne peut se manifester dans les expériences de laboratoires décrites jusqu'à présent dans la littérature. Afin de comprendre la raison derrière l'absence d'effet de la dissipation visqueuse dans les expériences de laboratoire existantes, il est important d'avoir une estimation des paramètres  $Ge$  et  $\Lambda$ . Pour un panel d'expériences représentatives ([44], [38], [18], [59], [24] et [42]) effectuées avec différents fluides, différentes hauteurs de conduite  $h$  et différentes valeurs maximum  $Re^{Max}$  du nombre de Reynolds, les valeurs trouvées pour  $Ge$  et  $\Lambda$  sont montrées dans le tableau 2.8. Pour estimer les valeurs de  $Ge$  et  $\Lambda$ , on a utilisé comme valeurs du coefficient d'expansion thermique du fluide  $\beta$  ( $^{\circ}K^{-1}$ ) et de la chaleur spécifique du fluide  $C_v$  ( $^{\circ}K^{-1} J kg^{-1}$ ), respectivement ( $\beta = 1.8 \cdot 10^{-4}$ ,  $C_v = 4181.8$ ) pour l'eau, ( $\beta = 7 \cdot 10^{-4}$ ,  $C_v = 1880$ ) pour l'huile et ( $\beta = 1/300$ ,  $C_v = 1005.7$ ) pour l'air. Le tableau 2.8 montre que les valeurs évaluées pour  $\Lambda$  sont telles que  $\Lambda \ll \Lambda^T$ , de sorte que les effets de la dissipation visqueuse sont tout à fait négligeables pour ces expériences où le système se comporte comme dans le cas de la convection de Rayleigh-Bénard. En outre on peut constater que les expériences ([38], [24]) effectuées avec de l'huile ( $Pr = 450$ ) ont été menées avec de très faibles valeurs du nombre de Reynolds. Ce choix a été motivé par le désir d'étudier expérimentalement les rouleaux transversaux susceptibles de se développer pour de faibles valeurs de  $Re$  dans la configuration de RBP. Il est en effet notoire que le confinement latéral de la conduite stabilise les rouleaux longitudinaux qui apparaissent alors pour des valeurs modérées à grandes de  $Re$ , tandis que les rouleaux transversaux sont le mode préférentiel de convection pour les faibles  $Re$ . Dans ces deux expériences, il faut des plus grands  $Re$  pour obtenir des rouleaux longitudinaux. De plus et comme déjà mentionné, pour détecter des effets significatifs de la dissipation visqueuse les expériences doivent se dérouler pour un ensemble de paramètres tels que la dissipation visqueuse soit dominante, c'est-à-dire quand  $\Lambda$  est plus grand que  $\Lambda^T$ . Si les conditions expérimentales avec une même température imposée aux deux parois horizontales permettent d'obtenir  $\Lambda = \Lambda^0$ , alors l'instabilité convective induite par la dissipation visqueuse précédera l'instabilité hydrodynamique classique dans le cas spécifique  $Ra_c = 0$ . Les nombres de Reynolds  $Re^T$  et  $Re^0$  associés à  $\Lambda^T$  et  $\Lambda^0$  respectivement peuvent être déterminés à partir des expressions  $\Lambda = Pe^2 Ge$  et  $Pe = Pr Re$  :

$$Re^T = \frac{1}{Pr} \sqrt{\frac{\Lambda^T}{Ge}} \quad \text{et} \quad Re^0 = \frac{1}{Pr} \sqrt{\frac{\Lambda^0}{Ge}} \quad (2.28)$$

Plus spécifiquement, pour  $Pr = 450$  et  $Ge = 10^{-6}$  on trouve ( $Re^T = 227$ ,  $Re^0 = 366.8$ ) dans les écoulements de RBP et ( $Re^T = 134.8$ ,  $Re^0 = 214.7$ ) dans les écoulements de RBC. On notera que la valeur  $Re^0 = 366.8$  pour les écoulements de RBP est largement inférieure au nombre de Reynolds critique  $Re_c^{TS} = 11544.44$  au seuil de l'instabilité hydrodynamique de Tollmien-Schlichting.

Puisque  $Re^T$  et  $Re^0$  sont inversement proportionnels à  $Pr$ , des valeurs encore plus faibles de ces nombres de Reynolds particuliers peuvent être obtenues pour des  $Pr$  plus grand que 450.

Références	$Pr$	$h(mm)$	$Re^{Max}$	$Ge(10^{-6})$	$\Lambda$
[44]	0.71 (air)	10 - 60	860	0.33 - 1.98	0.123-0.73
[38]	450 (huile)	10	0.01	0.037	$0.75 \times 10^{-6}$
[18]	0.71 (air)	11	80	0.363	$0.12 \times 10^{-2}$
[59]	0.71 (air)	20	14	0.66	$0.65 \times 10^{-4}$
[24]	6.5 (eau) - 450 (huile)	4	1.8 - 0.03	0.0017 - 0.015	$0.23 \times 10^{-6} - 2.7 \times 10^{-6}$
[42]	0.71 (air)	20	300	0.66	0.03

TABLEAU 2.8 – Estimation des paramètres  $Ge$  et  $\Lambda$  associés aux expériences [44], [38], [18], [59], [24] et [42].

Ces résultats expérimentaux nous amènent à considérer une configuration expérimentale qui permettrait d'observer la déstabilisation induite par la dissipation visqueuse.

On se place dans le cas d'un écoulement de Poiseuille sans gradient de température imposé, de sorte à ce que la dissipation visqueuse soit la seule source de déstabilisation thermique.

Dans ce cas l'instabilité convective est susceptible de se développer à partir du nombre de Reynolds  $Re^0$  donné par l'expression 2.28. L'instabilité hydrodynamique d'origine thermique due à la présence de dissipation visqueuse se produisant à des nombres de Reynolds d'autant plus faible que de le nombre de Prandtl est grand, on choisira un fluide avec un grand nombre de Prandtl tel que de l'huile minérale avec  $Pr = 450$  (utilisée dans les expériences [38], [24]). La valeur associée de  $\lambda^0$  est  $\lambda^0 = 27242$  et les caractéristiques du fluides sont :

$$\beta = 7 \times 10^{-4} (K^{-1}) \quad C_v = 1880 (K^{-1} J kg^{-1}) \quad \kappa = 8.89 \times 10^{-8} (m^2 s^{-1})$$

En remontant au grandeurs dimensionnées on en déduit la vitesse moyenne  $U_m$  nécessaire pour que l'instabilité se manifeste en fonction de la hauteur  $h$  entre les parois du système :

$$U_m = \left( \frac{2}{3} \kappa \sqrt{\frac{\Lambda^0 C_v}{\beta g}} \right) \frac{1}{h^{3/2}} = 5.12 \times 10^{-3} \frac{1}{h^{3/2}} (m.s^{-1})$$

Le facteur  $2/3$  correspond au rapport entre la vitesse moyenne  $U_m$  et la vitesse maximale  $U_0$ . En considérant une conduite de hauteur  $h$ , de largeur  $10h$  et de longueur suffisante pour que l'écoulement de Poiseuille soit pleinement établi, on trouve le débit volumique correspondant :

$$Q_v = 10h^2 U_m = 5.12 \times 10^{-2} h (m^3.s^{-1})$$

En considérant des pompes à huiles existantes d'un débit  $Q_v^{max} = 30 m^3.h^{-1} = 8.3.10^{-3} m^3.s^{-1}$ , on obtient une hauteur maximale  $h^{max} = 26.3 mm$  ce qui nous donne une vitesse moyenne minimale  $U_m^{min} = 1.2 m.s^{-1}$  nécessaire pour observer l'instabilité.

En considérant une hauteur  $h = 15 mm$  on obtient  $U_m = 2.79 m.s^{-1}$  qui est une valeur tout à fait raisonnable expérimentalement. On en conclue qu'il est possible d'observer expérimentalement l'instabilité due à la dissipation visqueuse.

## 2.4 Conclusion

- Pour les rouleaux transversaux et les rouleaux obliques l'effet stabilisant de l'écoulement parallèle prédomine, la dissipation visqueuse n'a alors pas d'effet appréciable. Le mode le plus instable sélectionné est alors celui des rouleaux longitudinaux stationnaires.
- L'étude des valeurs des paramètres adimensionnés a permis de formuler l'hypothèse simplificatrice d'un nombre de Prandtl infini, qui permet de simplifier le problème de trois à deux variables comme dans le problème classique de Rayleigh-Bénard. Dans ce cas l'intensité de la dissipation visqueuse est pilotée à travers le seul paramètre déstabilisant  $\Lambda = Pe^2 Ge$ . Cette approximation a été validée numériquement par la comparaison avec le cas sans approximation.
- Pour de faibles valeurs de la dissipation visqueuse le comportement instable est comparable à celui du problème de Rayleigh-Bénard. Au delà d'une certaine valeur la dissipation visqueuse a un effet fortement déstabilisant sur les rouleaux longitudinaux, associé à une augmentation du nombre d'onde critique. L'instabilité peut alors se produire même en l'absence de gradient de température imposé, voire en présence d'un gradient de température stabilisant.
- En l'absence de gradient de température imposé l'écoulement est la seule source de déstabilisation, qui peut alors se produire soit par l'instabilité hydrodynamique classique de Tollmien-Schlichting soit par déstabilisation thermique due à la production de chaleur interne induite par la dissipation visqueuse. Dans ce cas là et tant que le nombre de Prandtl est au moins de l'ordre de  $10^2$  l'instabilité due à la dissipation visqueuse se produit pour des nombres de Reynolds bien plus faibles que pour l'instabilité de Tollmien-Schlichting.
- L'étude des lignes de courant, isothermes et l'analyse énergétique nous renseignent sur les mécanismes physiques mis en œuvre lors de la déstabilisation. Une stratification du champ de température apparaît pour des valeurs assez grandes de la dissipation visqueuse. L'analyse énergétique met en évidence la transition d'une instabilité dominée par le gradient de température imposé à une instabilité dominée par la dissipation visqueuse.



## Stabilité faiblement non linéaire des écoulements de RBP et RBC d'un fluide Newtonien

Dans le chapitre précédent nous avons étudié la stabilité linéaire d'un fluide Newtonien en configuration de RBP ou RBC face à des perturbations d'ordre  $\epsilon$ . Cette analyse de stabilité linéaire nous a permis de déterminer le seuil de la stabilité marginale face à une perturbation infinitésimale. En revanche lorsque l'on s'éloigne du seuil l'amplification des perturbations rend nécessaire la prise en compte des non linéarités. Ces effets non linéaires peuvent avoir une influence non négligeable sur la stabilité du problème, et produire des comportements particuliers lors du développement des instabilités.

Afin de déterminer la nature et l'évolution de l'instabilité nous avons recours à une analyse de stabilité faiblement non linéaire au voisinage du seuil de l'instabilité. Le formalisme utilisé pour décrire la dynamique non linéaire au voisinage du seuil est celle des équations d'amplitude. La méthodologie de l'analyse faiblement non linéaire a été développée en premier lieu par Landau [35]. L'équation générale d'amplitude dite de Ginzburg-Landau a été développée en premier lieu dans le cadre de la supraconductivité [81]. Elle a été développée par analogie purement formelle en mécanique des fluides par Stuart [72],[73] et Watson [83] pour les écoulements parallèles de fluides cisailés (équation de Stuart-Landau). Dans le cas du problème de Rayleigh-Bénard l'équation de Ginzburg-Landau a été établie par Newell, Whitehead [47], et Segel [71].

Dans ce chapitre on reprend la configuration du second chapitre, on s'intéresse maintenant à l'influence des effets faiblement non linéaires (d'ordre  $\epsilon^2$ ) sur la stabilité de l'écoulement, plus particulièrement sur l'évolution des flux conductifs et convectifs ainsi que sur le nombre de Nusselt  $Nu$  qui évalue le taux de transfert de chaleur du système. L'analyse linéaire menée au chapitre 2 pour la même configuration ayant montré que les effets de la dissipation visqueuse sont d'autant plus importants que le nombre de Prandtl est grand, on se placera dans ce chapitre dans l'approximation d'un nombre de Prandtl infini.

### 3.1 Formulation mathématique du problème non linéaire

Les équations gouvernant le problème sont adimensionnées à l'aide des grandeurs sans dimension suivantes :

$$(x, y, z) = \frac{(x^*, y^*, z^*)}{h}, \quad t = \frac{\kappa}{h^2} t^*, \quad \mathbf{u} = \frac{h}{\kappa} \mathbf{u}^*, \quad P = \frac{h^2}{\mu \kappa} P^*, \quad T = \frac{(T^* - T_1) \beta g h^3}{\nu \kappa}$$

dans lesquelles  $\mathbf{u}^* = (u^*, v^*, w^*)$ ,  $T^*$  et  $P^*$  sont respectivement le vecteur vitesse, la température et la pression sans dimension.  $\kappa$  est la diffusivité thermique,  $\rho_0$  est la masse volumique de référence,  $\nu$  est la viscosité cinématique,  $\mu$  est la viscosité dynamique,  $\beta$  est le coefficient de dilatation thermique du fluide et  $g$  est le module de l'accélération de la gravitation. Les équations adimensionnées pour la conservation de la masse, de la quantité de mouvement, et de l'énergie peuvent s'écrire [3] :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = Pr \left( -\nabla P + T \mathbf{e}_z + \nabla^2 \mathbf{u} \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T + 2Ge D_{ij} D_{ij} \quad (3.3)$$

avec  $D_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$  le tenseur des contraintes.

Les conditions aux limites pour la température peuvent s'écrire :

$$T = Ra \text{ en } z = 0 \quad \text{et} \quad T = 0 \text{ en } z = 1 \quad (3.4)$$

Les conditions aux limites pour le champ de vitesse pour l'écoulement de Poiseuille sont :

$$\mathbf{u} = 0 \text{ en } z = 0; 1 \quad (3.5)$$

et pour l'écoulement de Couette :

$$\mathbf{u} = -Pe \mathbf{e}_x \text{ en } z = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = Pe \mathbf{e}_x \text{ en } z = 1 \quad (3.6)$$

Les trois paramètres sans dimension qui apparaissent dans les équations 3.1)-(3.3 sont le nombre de Prandtl, le nombre de Péclet, et le nombre de Gebhart définis respectivement par :

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad Pe = \frac{U_0 h}{\kappa}, \quad Ge = \frac{\beta g h}{C}$$

où  $U_0$  est la vitesse maximale adimensionnée du profil de l'écoulement dans la conduite pour l'écoulement de Poiseuille, et le module de la vitesse dimensionnée des parois mobiles supérieures et inférieures pour l'écoulement de couette et  $C$  est la chaleur spécifique du fluide.

Une solution de base stationnaire du système d'équations 3.1-3.3 pour les champs de vitesse et de température est donnée par :

$$\mathbf{u}_b(z) = Pe f(z) \mathbf{e}_x \quad (3.7)$$

$$T_b(z) = Ra(1 - z) + Pe^2 Ge g(z) \quad (3.8)$$

avec les fonctions  $f(z)$  et  $g(z)$  définies par :

$$f(z) = 4z(1-z) \quad g(z) = \frac{8}{3}(-z + 3z^2 - 4z^3 + 2z^4)$$

pour l'écoulement de Poiseuille, et

$$f(z) = 2z - 1 \quad g(z) = 2z(1-z)$$

pour l'écoulement de Couette. On notera que d'après l'expression (3.8) la température de base est la résultante de deux contributions : celle due au gradient de température extérieur imposé et celle due à la dissipation visqueuse. Cette dernière disparaît en l'absence d'écoulement ( $Pe = 0$ ). Afin de mener à bien l'étude de stabilité de cet écoulement de base, on lui superpose une perturbation infinitésimale :

$$\begin{cases} T = T_b(z) + \theta(x, y, z, t) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_b(z) + \mathbf{U}(x, y, z, t) \\ P = P_b(x, z) + p(x, y, z, t) \end{cases} \quad (3.9)$$

La perturbation du champ de vitesse  $\mathbf{U}$  a pour composantes cartésiennes  $(u, v, w)$ . Les perturbations sont développées sous forme de modes normaux :

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \mathbf{U}_n(z) e^{ik_x x + ik_y y} e^{(\sigma - i\omega)t} \\ \theta = \theta_n(z) e^{ik_x x + ik_y y} e^{(\sigma - i\omega)t} \\ p = p_n(z) e^{ik_x x + ik_y y} e^{(\sigma - i\omega)t} \end{cases} \quad (3.10)$$

où  $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y$  est le vecteur d'onde,  $\sigma$  est le taux de croissance temporel de la perturbation et  $\omega$  est la fréquence d'oscillation.

Les équations générales linéarisées qui régissent le problème s'écrivent donc développées en modes normaux :

$$ik_x u_n + ik_y v_n + Dw_n = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{Pr} \{-i\omega u_n + w_n Pe f'(z) + ik_x Pe f(z) u_n\} - (D^2 - k^2) u_n + ik_x p_n = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{Pr} \{-i\omega v_n + ik_x Pe f(z) v_n\} - (D^2 - k^2) v_n + ik_y p_n = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{Pr} \{-i\omega w_n + ik_x Pe f(z) w_n\} - (D^2 - k^2) w_n + Dp_n - \theta_n = 0 \quad (3.14)$$

$$-i\omega \theta_n + ik_x Pe f(z) \theta_n - Ra w_n + Ge Pe^2 g'(z) w_n - 2Ge Pe f'(z) (Du_n + ik_x w_n) - (D^2 - k^2) \theta_n = 0 \quad (3.15)$$

Ces équations forment un problème aux valeurs propres généralisé dont la résolution a été traitée au chapitre 2. Il a été déterminé que les rouleaux longitudinaux sont le mode sélectionné pour la convection. Dans ce cas les paramètres  $\Lambda = Pe^2 Ge$  et  $Pr$  sont les seuls paramètres influant sur la stabilité du problème. Le but de ce travail est d'étudier la dynamique faiblement non

linéaire au voisinage du seuil critique.

## 3.2 Méthodologie du problème non linéaire

### 3.2.1 Équations pour les rouleaux longitudinaux d'amplitude finie

Les équations pour les rouleaux longitudinaux (i.e.  $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ ) en écoulement de Poiseuille/Couette s'écrivent en introduisant la vitesse  $u = Re \tilde{u}$  :

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + f'(z)w - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tilde{u} = -\frac{1}{Pr} \left( v \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial v}{\partial t} - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v + \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{Pr} \left( v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial w}{\partial t} - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w - \theta + \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{1}{Pr} \left( v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta}{\partial t} - Ra w + \Lambda g'(z)w - 2 \frac{\Lambda}{Pr} f'(z) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \theta = \\ & - \left( v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + Ge \left( \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{\Lambda}{Pr^2} \left( \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

On notera que les équations 3.17-3.20 se simplifient grandement dans le cas spécifique des fluides où  $Pr \gg 1$ , i.e. la diffusion thermique est prépondérante devant la diffusion visqueuse. En particulier, les termes mettant en jeu les dérivées de  $\tilde{u}$  disparaissent de l'équation 3.20. Par conséquent les analyses de stabilité linéaire et non linéaire peuvent être menées sans prendre en compte l'équation 3.17.

Les résultats de l'analyse linéaire menée chapitre 2 indiquent que lorsqu'il prend des valeurs assez grandes, le nombre de Prandtl n'a que très peu d'influence sur la stabilité linéaire du problème. De plus les termes en  $Pr$  dans les termes non linéaires (second membre) sont en  $\frac{\Lambda}{Pr}$  et  $\frac{\Lambda}{Pr^2}$ , avec  $\Lambda$  au moins de l'ordre de 1. Si l'on considère  $Pr \rightarrow \infty$  ces termes deviennent très petits et peuvent donc être négligés. **On se placera donc dans le cas de l'approximation d'un nombre de Prandtl qui tend vers l'infini.**

Le champ de pression est éliminé en dérivant les équations 3.18 et 3.19 par rapport à  $z$  et  $y$  respectivement et en soustrayant les équations obtenues. Les équations peuvent alors s'écrire en termes de variables réduites, en l'occurrence la fonction de courant  $\psi$  définie par  $-\frac{\partial \psi}{\partial y} = w$  et  $\frac{\partial \psi}{\partial z} = v$  et la température  $\theta$ .

Les équations s'écrivent alors :

$$-\nabla^4 \psi + \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (3.21)$$

$$-\frac{dT_b}{dz} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial t} - \vec{\nabla}^2 \theta = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial y} + Ge \left[ \left( D^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \right)^2 \right] \quad (3.22)$$

Les équations pour les rouleaux longitudinaux peuvent alors s'écrire suivant la notation

$$(\mathcal{L}' \partial_t + \mathcal{L}) \tilde{V} = N, \quad (3.23)$$

où le vecteur  $\tilde{V} = (\psi, \theta)^T$  et  $N = (0, N_{Adv} + N_{Diss}^{Ge})^T$ .

Les expressions des opérateurs linéaires  $\mathcal{L}'$  et  $\mathcal{L}$  et des contributions non linéaires sont les suivantes :

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 & \frac{\partial}{\partial y} \\ (Ra - \Lambda g'(z)) \frac{\partial}{\partial y} & -\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

$$\begin{cases} N_{Adv} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ N_{Diss}^{Ge} = Ge \left[ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \right)^2 \right] \end{cases} \quad (3.26)$$

Les conditions aux limites pour les perturbations s'écrivent :

$$\begin{cases} \theta = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } z = 1 \\ \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } z = 1 \end{cases} \quad (3.27)$$

On notera qu'en plus des paramètres  $Ra$  et  $\Lambda$  qui apparaissent dans l'opérateur linéaire  $\mathcal{L}$ , la contribution non linéaire  $N_{Diss}^{Ge}$  introduit le nombre de Gebhart  $Ge$  comme autre paramètre sans dimension.

### 3.2.2 Équation d'amplitude

Au dessus du seuil linéaire, nous introduisons un paramètre  $\varepsilon \ll 1$  qui mesure la distance au seuil critique en posant  $Ra = Ra_c + \varepsilon^2 R_2$  où  $R_2$  est de l'ordre de 1. Cela nous donne pour l'échelle temporelle :

$$t_2 = \varepsilon^2 t \quad (3.28)$$

Les dérivées temporelles sont alors remplacées par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} \quad (3.29)$$

Les équations d'évolution des variables sont obtenues en développant le vecteur  $\tilde{V}$ , l'opérateur linéaire  $\mathcal{L}$  et le vecteur des contributions non linéaires  $N$  en série de puissances en  $\varepsilon$  :

$$\begin{cases} \tilde{V} = \varepsilon \tilde{V}_1 + \varepsilon^2 \tilde{V}_2 + \dots \\ \mathcal{L} = \mathcal{L}_c + \varepsilon^2 R_2 \mathcal{L}_2 + \dots \\ N = \varepsilon^2 N_2 + \varepsilon^3 N_3 + \dots \end{cases} \quad (3.30)$$

avec l'opérateur  $\mathcal{L}_2$ ,

$$\mathcal{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Les vecteurs  $\tilde{V}_i$  dépendent aussi de la variable temporelle lente  $t_2$ . En remplaçant l'expression 3.30 dans le système 3.23, et en prenant les coefficients en  $O(\varepsilon)$ , on obtient un système d'équations.

### Valeurs propres et fonctions propres pour le problème au premier ordre

Au premier ordre, le système d'équations linéaires homogènes pour  $\tilde{V}_1 = (\psi_1, \theta_1)^T$  au seuil critique est donné par :

$$\mathcal{L}_c \tilde{V}_1 = 0. \quad (3.32)$$

avec  $\mathcal{L}_c$  l'opérateur  $\mathcal{L}$  pour  $Ra = Ra_c$ . Les solutions de l'équation 3.32 sont développées sous la forme de modes normaux,

$$(\psi_1, \theta_1) = A(t_2) (\Psi_1(z), \Theta_1(z)) e^{ik_c y} + CC \quad (3.33)$$

où  $CC$  désigne le complexe conjugué.

Les conditions aux limites pour les fonctions propres  $(\Psi_1(z), \Theta_1(z))$  sont :

$$\begin{cases} \Theta_1 = 0 \text{ en } z = 0; 1 \\ \Psi_1 = D\Psi_1 = 0 \text{ en } z = 0; 1 \end{cases} \quad (3.34)$$

Nous calculons les fonctions propres avec une normalisation définie de la composante verticale de la vitesse, choisie de sorte que  $\int_0^1 |w_1|^2 dz = k_c^2 \int_0^1 |\Psi_1|^2 dz = 1$ . Par concision, Les fonctions propres dans le cas de Couette ne sont pas montrées, vu qu'elles présentent le même comportement qualitatif.

Il apparaît que  $\Psi$  est imaginaire pur tandis que  $\Theta_1$  est réel. La figure 3.1 (b) montre que pour une valeur assez grande de la dissipation visqueuse, le profil de température n'est plus symétrique et présente une partie négative correspondant à la stratification stable, et une partie positive correspondant à la stratification instable. Quand à la figure 3.1 (a) elle rend compte de la brisure de symétrie de l'écoulement sous l'effet de la dissipation visqueuse.

### Solutions pour le problème au second ordre

Pour  $O(\varepsilon^2)$ , le problème non homogène  $\tilde{V}_2$  est donné au seuil critique par :

$$\mathcal{L}_c \tilde{V}_2 = N_2(\tilde{V}_1) \quad (3.35)$$

Le terme  $N_2$  dans le second membre de l'équation 3.35 est le terme non linéaire  $N$  évalué en  $O(\varepsilon^2)$ . Il comprend les modes linéaires fondamentaux déterminé en  $O(\varepsilon)$  soit  $(\psi_1, \theta_1)$  et leurs dérivés. Les interactions non linéaires entre ces modes fondamentaux et leurs complexes conjugués génèrent des harmoniques d'ordre supérieur et une modification de l'état de base. Les solutions de (3.35) sont alors recherchées sous la forme :

$$(\psi_2, \theta_2) = \left[ A(t_2)^2 (\Psi_{22}(z), \Theta_{22}(z),) e^{i2k_c y} + CC \right] + |A(t_2)|^2 (\Psi_{20}(z), \Theta_{20}(z)) \quad (3.36)$$

En remplaçant les expressions 3.36 dans les équations 3.35, et en séparant les composantes harmoniques, on obtient un système d'équations pour  $(\Psi_{22}(z), \Theta_{22}(z))$  et un système d'équations pour  $(\Psi_{20}(z), \Theta_{20}(z))$ . Les conditions aux limites pour  $(\Psi_{22}(z), \Theta_{22}(z))$  et  $(\Psi_{20}(z), \Theta_{20}(z))$  sont les même que pour  $\tilde{V}_1$  3.34.

Les corrections non linéaires sont déterminées par des non linéarités dominantes différentes définies par l'équation 3.26. L'effet non linéaire dominant réside dans l'advection de la température (i.e. le terme non linéaire  $N_{Adv}$ ) et dans une partie de la dissipation visqueuse (i.e. le terme non linéaire  $N_{Diss}^{Ge}$ ).

Les profils de  $\Psi_{22}(z)$ ,  $\Theta_{22}(z)$  et  $\Theta_{20}(z)$  sont montrés sur la figure 3.2 pour  $\Lambda = 0$ ,  $\Lambda = 10000$  et  $\Lambda = 20000$  ( $\Psi_{20}(z)$  est nul pour tout  $z$ ).  $\Theta_{20}(z)$  correspond à la partie sans terme exponentiel et  $\Theta_{22}(z)$  à la partie avec termes exponentiels. Les figures 3.2 (a), (b) et (c) montrent que l'augmentation du paramètre  $\Lambda$  augmente fortement ces effets non linéaires, qui se traduisent notamment par une correction positive  $\Theta_{20}(z)$  de la température de base à la paroi supérieure et dont le gradient augmente avec le paramètre  $\Lambda$ .

### Condition de solvabilité au troisième ordre

En  $O(\varepsilon^3)$ , le problème non homogène suivant est obtenu pour  $\tilde{V}_3$  :

$$\mathcal{L}_c \tilde{V}_3 = -(\mathcal{L}' \partial_{t_2} + R_2 \mathcal{L}_2) \tilde{V}_1 + N_3(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2), \quad (3.37)$$

Le terme non linéaire  $N_3$  est l'expression non linéaire  $N$  évaluée en  $O(\varepsilon^3)$ .

Après avoir remplacé  $\tilde{V}_1$  et  $\tilde{V}_2$  dans l'équation 3.37, il n'y a pas besoin de complètement résoudre cette équation. Au lieu de cela, on projette toute l'équation sur  $\tilde{V}^\dagger$ , dans laquelle  $\tilde{V}^\dagger$  est la solution de l'adjoint du problème linéaire. On obtient alors une condition de solvabilité, connue en tant qu'alternative de Fredholm. Nous appliquons la condition de solvabilité en  $O(\varepsilon^3)$  :

$$\langle -(\mathcal{L}' \partial_{t_2} + R_2 \mathcal{L}_2) \tilde{V}_1 + N_3, \tilde{V}^\dagger \rangle = 0 \quad (3.38)$$

avec le produit scalaire associé,

$$\langle \tilde{V}_i, \tilde{V}_j \rangle = \frac{1}{2\pi/k_c} \int_0^{2\pi/k_c} \int_0^1 \tilde{V}_i \cdot \tilde{V}_j^* dz dy, \quad (3.39)$$

où  $\tilde{V}_j^*$  est le complexe conjugué de  $\tilde{V}_j$ .

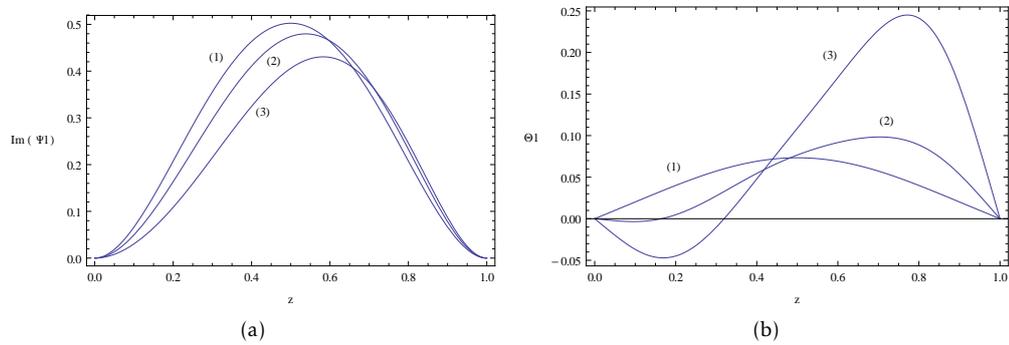


FIGURE 3.1 – Fonction de courant  $\psi_1$  et température  $\Theta_1$  en fonction de  $z$  pour  $\Lambda = 0$  (1),  $\Lambda = 10000$  (2),  $\Lambda = 20000$  (3).

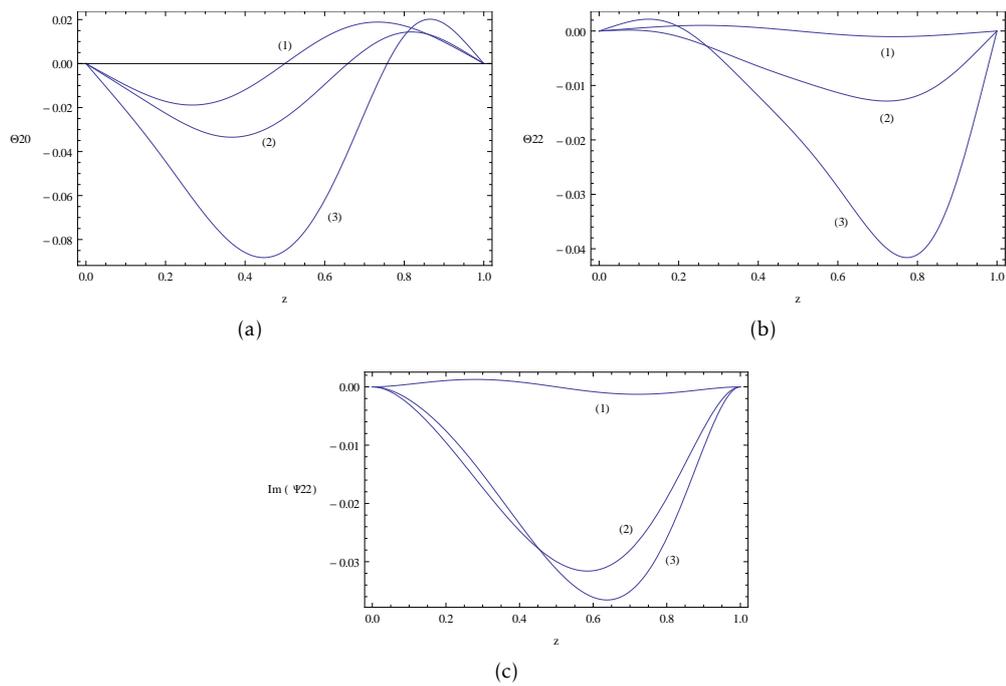


FIGURE 3.2 – Variations verticales de la première correction non linéaire sur le mode linéaire au seuil critique pour un écoulement de Poiseuille avec  $\Lambda = 0$  (1),  $\Lambda = 10000$  (2),  $\Lambda = 20000$  (3).

En réintroduisant les variables originelles  $t = t_2/\varepsilon^2$ ,  $R_2 = (Ra - Ra_c)/\varepsilon^2$  et  $A = \varepsilon A$ , on obtient l'équation de Landau cubique pour la perturbation de l'amplitude  $A(t)$  :

$$\tau \frac{\partial A}{\partial t} = \mu(Ra - Ra_c)A - \lambda A|A|^2. \quad (3.40)$$

dans laquelle

$$\tau = \langle \mathcal{L}' \partial_t \tilde{V}_1, \tilde{V}^\dagger \rangle \quad \lambda = -\langle N_3, \tilde{V}^\dagger \rangle \quad \mu = \langle \mathcal{L}_2 \tilde{V}_1, \tilde{V}^\dagger \rangle \quad (3.41)$$

L'équation d'amplitude 3.40 prédit une instabilité supercritique si le rapport du paramètre de bifurcation  $\mu$  et du coefficient de Landau  $\lambda$  est positif, avec une solution d'équilibre non linéaire stationnaire :

$$|A_s|^2 = \frac{\mu}{\lambda}(Ra - Ra_c) \quad (3.42)$$

### 3.3 Résultats de l'analyse de stabilité faiblement non linéaire

#### 3.3.1 Influence des termes non linéaires en $Ge$

Dans un premier temps on ne se place pas dans l'hypothèse d'un petit nombre de Gebhart : il faut donc prendre en compte les termes non linéaires en  $Ge$ . Ces termes non linéaires apparaissent dans la partie  $N_{Diss}^{Ge}$  du vecteur des termes non linéaires  $N$  (3.26).

Dans ce cas  $Ge$  influe sur la valeur du coefficient non linéaire  $\lambda$  tandis que les coefficients  $\mu$  et  $\tau$  sont indépendants de  $Ge$ . L'analyse des termes de l'équation d'amplitude 3.40 permet d'écrire  $\lambda$  sous la forme d'une équation du second degré en  $Ge$  :

$$\lambda(Ge) = \lambda_0 + \lambda_1 Ge + \lambda_2 Ge^2 \quad (3.43)$$

En résolvant l'équation  $\lambda(Ge) = 0$  on trouve la valeur de  $Ge$  à partir de laquelle le coefficient  $\lambda$  change de signe c'est à dire le point où l'on passe d'une bifurcation supercritique à une bifurcation sous-critique.

#### Cas de la convection naturelle

On considère ici le cas de la convection naturelle : il n'y a pas d'écoulement parallèle imposé. On cherche ainsi à déterminer les effets non linéaires du nombre de Gebhart sur la stabilité du problème, le nombre de Gebhart n'apparaissant pas dans le cadre de l'analyse linéaire. Le seuil linéaire de l'instabilité ne dépend donc pas de  $Ge$  mais les non linéarités peuvent induire une bifurcation sous-critique qui abaisse le seuil effectif de la convection. Dans ce cas le seul paramètre influent du problème est le nombre de Gebhart  $Ge$ , qui n'a d'effet que sur les non linéarités.

Il apparaît que seul le coefficient  $\lambda$  de l'équation d'amplitude 3.40 dépend de  $Ge$ , les autres paramètres  $\tau$  et  $\mu$  sont constants. Comme expliqué précédemment,  $\lambda$  peut alors s'écrire sous la forme d'une fonction du second degré en  $Ge$ . En posant cette fonction égale à 0 et en résolvant l'équation en  $Ge$  on peut trouver le nombre de Gebhart critique  $Ge_c$  qui correspond au changement de signe de  $\lambda$ . Les résultats numériques donnent une valeur  $Ge_c = 10.7083$  et donc bien au delà des valeurs expérimentalement raisonnables. La bifurcation est donc supercritique dans le cas de la convection naturelle.

### Cas de la convection mixte

On se place maintenant dans le cas du problème de RBP/RBC. Ici les paramètres influents sont  $Ra$ ,  $\Lambda = Pe^2 Ge$  et  $Ge$ , ce dernier n'influant que sur les termes non linéaires. Il est important de noter que  $Ge$  n'intervenant explicitement que dans les termes non linéaires, on pourra être amené à considérer le cas  $Ge = 0$  sans pour autant que le paramètre  $\Lambda = Pe^2 Ge$  soit nul.

On étudie l'influence de  $Ge$  sur le coefficient  $\lambda$  et plus particulièrement sur le rapport  $\frac{\mu}{\lambda}$  dont le signe indique la nature de l'instabilité (supercritique si positif, sous-critique si négatif). En outre ce rapport influe directement sur l'amplitude stationnaire 3.42. La figure 3.3 montre que  $Ge$  a très peu d'influence sur la valeur du rapport  $\frac{\mu}{\lambda}$  qui est toujours positif pour des valeurs réalistes de  $Ge$ , qui est dans des conditions expérimentales de laboratoire au plus de l'ordre de  $10^{-4}$  [21] et peut être de l'ordre de 1 dans des problèmes de géophysique. Étant donné que l'on considère des  $Ge$  petits on peut donc considérer que les termes non linéaires en  $Ge$  ont une influence négligeable sur le problème faiblement non linéaire. Par la suite on prendra donc  $Ge = 0$ .

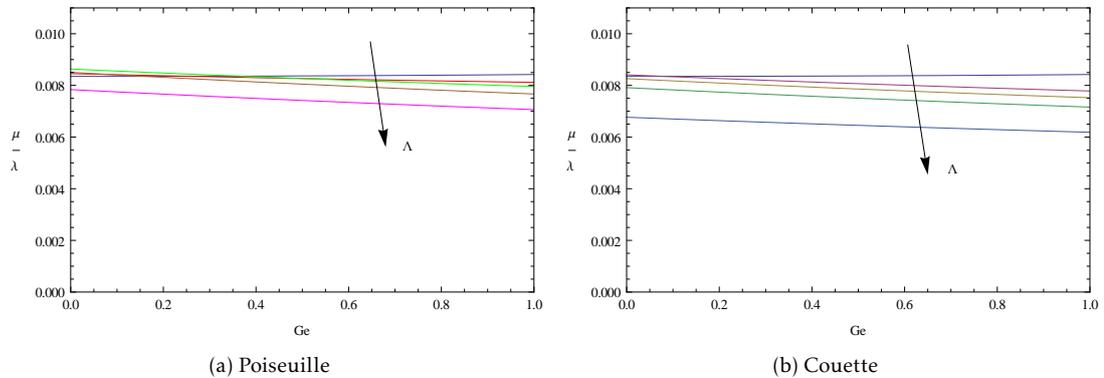


FIGURE 3.3 –  $\frac{\mu}{\lambda}$  en fonction de  $Ge$  pour  $\Lambda = 0, 5000, 10000, 15000, 20000$  pour des écoulements de RBP et RBC avec  $Pr \rightarrow \infty$ .

### 3.3.2 Coefficients non linéaires et amplitude pour $Ge = 0$ dans les termes non linéaires

On étudie l'influence de la dissipation visqueuse sur les coefficients de l'équation de Landau, notamment le signe du rapport  $\frac{\mu}{\lambda}$  qui détermine la nature de l'instabilité : si le rapport est positif l'instabilité est supercritique et les non linéarités satureront l'instabilité, sinon l'instabilité est sous-critique et dans ce cas les non linéarités ont pour effet de faire diminuer le seuil critique. La figure 3.4 montre que ce rapport est positif pour toutes les valeurs de  $\Lambda$  (la bifurcation est donc de nature surcritique) et ne présente pas de variations importantes en fonction de  $\Lambda$ . On notera que nous n'avons pas calculé de valeurs à proximité de la valeur de  $\Lambda$  correspondant à l'instabilité hydrodynamique (soit  $Ra_c = 0$ ), en effet nous avons mené l'analyse non linéaire en prenant  $Ra = Ra_c + \epsilon^2 R_2$  ce qui n'est pertinent que pour  $Ra_c$  suffisamment grand. Pour une étude du comportement non linéaire au voisinage de l'instabilité hydrodynamique il faudrait choisir  $\Lambda$  comme paramètre critique. Les tableaux 3.1 et 3.2 montrent l'influence du paramètre  $\Lambda$  sur les coefficients  $\tau$ ,  $\mu$  et  $\lambda$  : on constate une décroissance générale de ces coefficients quand  $\Lambda$  augmente.

$\Lambda$	$Ra_c$	$\mu$	$\lambda$	$\tau$	$\mu/\lambda$
0	1707.76	22.5678	2703.12	1963.66	0.00834881
5000	1657.50	22.1416	2618.39	1925.06	0.00845618
7000	1608.58	21.7390	2546.55	1879.54	0.00855520
10000	1502.47	20.9127	2422.04	1822.10	0.00863434
15000	1231.13	19.0739	2242.50	1690.65	0.00850563
20000	829.50	17.0099	2170.09	1573.39	0.00783831
24000	407.97	15.4400	2189.65	1505.43	0.00783832

TABLEAU 3.1 – Tableau des coefficients  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\tau$ ,  $\frac{\mu}{\lambda}$  en fonction du paramètre  $\Lambda$  pour un écoulement de RBP avec  $Pr \rightarrow \infty$ .

$\Lambda$	$Ra_c$	$\mu$	$\lambda$	$\tau$	$\mu/\lambda$
0	1707.76	5015.07	600701	435875	0.00834869
1000	1689.91	4981.34	595023	432708	0.00837167
3000	1544.36	4721.4	561411	409745	0.00840987
4000	1413.37	4511.5	546107	393050	0.0082612
5000	1240.84	4269.19	539477	375709	0.00791356
7000	766.11	3768.51	556875	346432	0.00676724
9000	121.945	3340.77	599043	328370	0.00557685

TABLEAU 3.2 – Tableau des coefficients  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\tau$ ,  $\frac{\mu}{\lambda}$  en fonction du paramètre  $\Lambda$  pour un écoulement de RBC avec  $Pr \rightarrow \infty$ .

On trace l'évolution de l'amplitude stationnaire  $|A_s|$  en fonction de  $\frac{Ra-Ra_c}{Ra_c}$  pour différentes valeurs de  $\Lambda$ . Cela permet d'évaluer l'influence de la dissipation visqueuse sur l'amplitude de la convection en fonction de la distance relative au seuil de la convection. Les résultats montrés figure 3.5 indiquent que la dissipation visqueuse n'a une influence appréciable sur le module de l'amplitude stationnaire que pour des valeurs relativement élevées du paramètre  $\Lambda$ ; influence qui se traduit par une baisse de l'amplitude pour des valeurs de  $\Lambda$  élevées.

### 3.3.3 Transfert de chaleur

Dans cette partie on étudie le taux de transfert de chaleur au niveau de la paroi supérieure. Ici la chaleur peut se transmettre de deux manières : par conduction dans tous les cas et par convection lorsque  $Ra > Ra_c$ . L'état de conduction est associé à un flux de chaleur non uniforme  $J_{cond} = -\frac{dT_b}{dz}$  traversant verticalement la couche fluide. En présence d'un champ de vitesse convectif, le flux vertical total est  $J = J_{cond}(z) + J_{conv}(y, z)$  dans lequel  $J_{conv}$  est le flux convectif qui est indépendant de  $x$  pour les rouleaux longitudinaux dont l'axe est suivant la direction  $x$ . Le flux convectif s'écrit :

$$J_{conv}(y, z) = -\frac{\partial \psi}{\partial y}(T_b + \theta) - \frac{d\theta}{dz}. \quad (3.44)$$

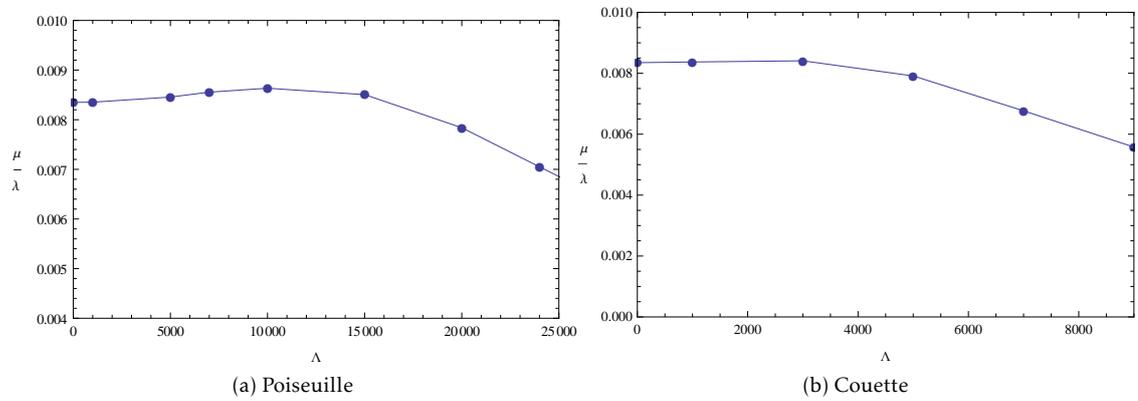


FIGURE 3.4 – Rapport  $\frac{\mu}{\lambda}$  en fonction de  $\Lambda$  pour des écoulements de RBP et RBC avec  $Pr \rightarrow \infty$ .

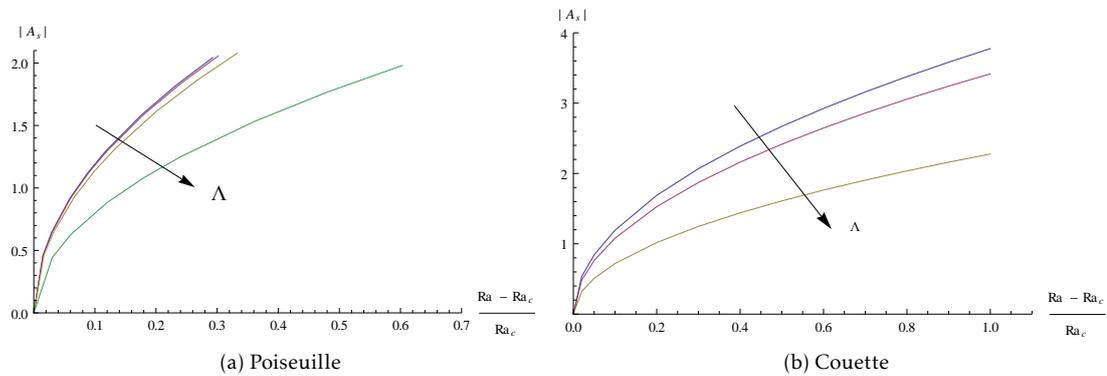


FIGURE 3.5 – Amplitude stationnaire  $|A_s|$  en fonction de  $\frac{Ra - Ra_c}{Ra_c}$  pour  $\Lambda = 0, 5000, 10000, 20000$  avec  $Pr \rightarrow \infty$ .

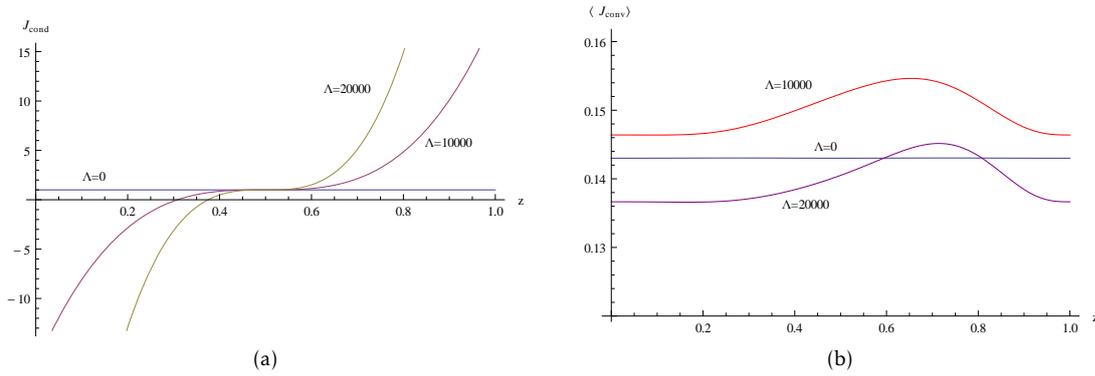


FIGURE 3.6 – Flux conductif  $J_{cond}$  pour  $z$  entre 0 et 1 en  $Ra = Ra_c$  pour  $\Lambda = 0, 10000, 20000$  (a); Flux convectif moyen  $\langle J_{conv} \rangle$  pour  $z$  entre 0 et 1,  $Ra = 1.1Ra_c$  pour  $\Lambda = 0, 10000, 20000$  (b) et pour un écoulement de Poiseuille.

La contribution  $-\frac{\partial \psi}{\partial y}(T_b + \theta)$  au flux convectif  $J_{conv}$  décrit le transport convectif de la chaleur par le champ de vitesse. Le terme  $-\frac{d\theta}{dz}$  est le flux diffusif de la chaleur, généré par le gradient des déviations convectives du champ de température conductif. Nous définissons le flux convectif latéral moyen par :

$$\langle J_{conv} \rangle(z) = \frac{1}{2\pi/k_c} \int_0^{2\pi/k_c} J_{conv}(y, z) dy \quad (3.45)$$

### Flux en fonction de $z$

En l'absence de dissipation visqueuse le flux convectif est constant suivant  $z$  de même que le flux conductif (le profil de température de l'état de base conductif étant alors linéaire). On s'intéresse à l'effet de la dissipation visqueuse sur les flux conductifs et convectifs entre les parois pour différentes valeurs de  $\Lambda$ . Le flux conductif est par définition donné par  $J_{cond} = -\frac{dT_b}{dz} = Ra - \frac{64\Lambda}{3}(z - 1/2)^3$  pour l'écoulement de Poiseuille et par  $J_{cond} = Ra - 2\Lambda(1 - 2z)$  pour l'écoulement de Couette.

La figure 3.6(a) présente la variation du flux conductif au seuil de la convection pour  $\Lambda = 0, 10000, 20000$  dans la configuration de RBP. La présence de dissipation visqueuse provoque une forte augmentation du flux conductif à proximité des parois où il prend sa valeur maximum. La figure 3.6(b) montre que pour un nombre de Rayleigh assez proche du seuil, la variation du flux convectif en fonction de  $\Lambda$  est peu importante, et présente un maximum dans la partie supérieure de la conduite. Notamment à la paroi supérieure soit en  $z = 1$ ,  $\Lambda$  a une influence négligeable sur la valeur du flux convectif. On peut remarquer que si pour  $\Lambda = 10000$  la valeur du flux convectif est supérieur à celle pour  $\Lambda = 0$  en revanche pour  $\Lambda = 20000$  elle est inférieure. Cette évolution du flux convectif en fonction de  $\Lambda$  peut s'expliquer grâce à l'évolution de l'amplitude stationnaire : en effet pour une valeur fixée de la distance au seuil  $Ra - Ra_c$  l'évolution de l'amplitude stationnaire en fonction de  $\Lambda$  dépend uniquement de celle du rapport  $\frac{\mu}{\lambda}$ . La figure 3.4 montre que ce rapport varie très peu jusqu'à  $\Lambda = 15000$  puis décroît. La baisse de l'amplitude qui en résulte se répercute sur la valeur du flux convectif.

**Flux en  $z = 1$** 

Sauf mention contraire on calculera les flux à la paroi supérieure c'est-à-dire en  $z = 1$ .

Les figures 3.7 et 3.8 montrent respectivement le flux conductif en fonction de  $Ra$  et le flux convectif en fonction de la distance relative au seuil de la convection  $\frac{Ra-Ra_c}{Ra_c}$  pour différentes valeurs du paramètre  $\Lambda$ . On observe que le flux conductif  $J_{cond}$  augmente fortement sous l'effet de la dissipation visqueuse à travers la paramètre  $\Lambda$ , tandis que le flux convectif  $J_{conv}$  dépend très faiblement de  $\Lambda$ . De plus ces figures mettent en évidence l'influence du nombre de Rayleigh  $Ra$  qui occasionne une baisse progressive de  $J_{cond}$  tandis qu'il provoque une augmentation linéaire de  $J_{conv}$ .

La vitesse  $w$  étant nulle en  $z = 1$  d'après les conditions aux limites imposées 3.34, le flux convectif s'écrit à la paroi supérieure :

$$\langle J_{conv} \rangle(z) = -\frac{2\pi}{k_c} \int_0^{\frac{2\pi}{k_c}} \frac{\partial \theta_2}{\partial z} dy \quad (3.46)$$

De plus en introduisant l'expression de l'amplitude 3.42 dans celle de la correction non linéaire de la température  $\theta_2$  3.36 on obtient pour le flux convectif :

$$\langle J_{conv} \rangle = -\frac{d\tilde{\Theta}_{20}}{dz} \Big|_{z=1} \frac{\mu}{\lambda} (Ra - Ra_c) \quad (3.47)$$

En définissant la pente  $S$  :

$$S = -\frac{d\tilde{\Theta}_{20}}{dz} \Big|_{z=1} \frac{\mu}{\lambda} Ra_c \quad (3.48)$$

on a finalement l'expression du flux convectif moyen en fonction de la distance relative au seuil de la convection :

$$\langle J_{conv} \rangle = S \left( \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c} \right) \quad (3.49)$$

L'expression 3.49 indique que le flux convectif  $\langle J_{conv} \rangle$  en  $z = 1$  est une fonction linéaire de la distance relative au seuil, ce qui avait déjà été constaté figure 3.8.

La figure 3.9 montre que la pente  $S$  ne dépend que très peu du paramètre  $\Lambda$ . On peut donc en déduire d'après l'expression du flux convectif 3.49 que celui-ci dépend principalement de la distance relative au seuil de la convection, en fonction duquel on peut donc tracer l'évolution du flux convectif.

**3.3.4 Flux total et nombre de Nusselt**

Le flux total de chaleur transmis à travers la paroi supérieure s'écrit comme la somme du flux conductif et du flux convectif. Nous avons vu que le flux conductif dépend fortement de  $\Lambda$  tandis que le flux convectif a une faible dépendance en  $\Lambda$ . La dépendance du flux total en  $\Lambda$  est donc majoritairement due au flux conductif.

Afin de déterminer l'influence de la dissipation visqueuse sur le transfert de chaleur à la paroi supérieure, on introduit le nombre de Nusselt qui quantifie les contributions relatives de transfert de chaleur par conduction et par convection du système. Il peut être calculé en tout  $z$  entre 0 et 1, le taux de transfert qui nous intéresse étant celui à la paroi supérieure c'est en  $z = 1$  que l'on calculera le nombre de Nusselt.

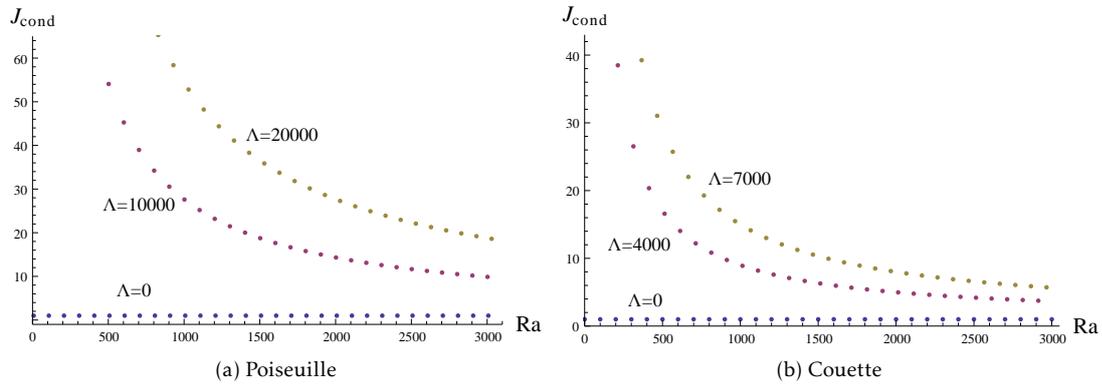


FIGURE 3.7 – Flux conductif  $J_{cond}$  en fonction de  $Ra$  pour  $\Lambda = 0, 5000, 10000, 15000, 20000$  (Poiseuille) et  $\Lambda = 0, 4000, 7000$  (Couette).

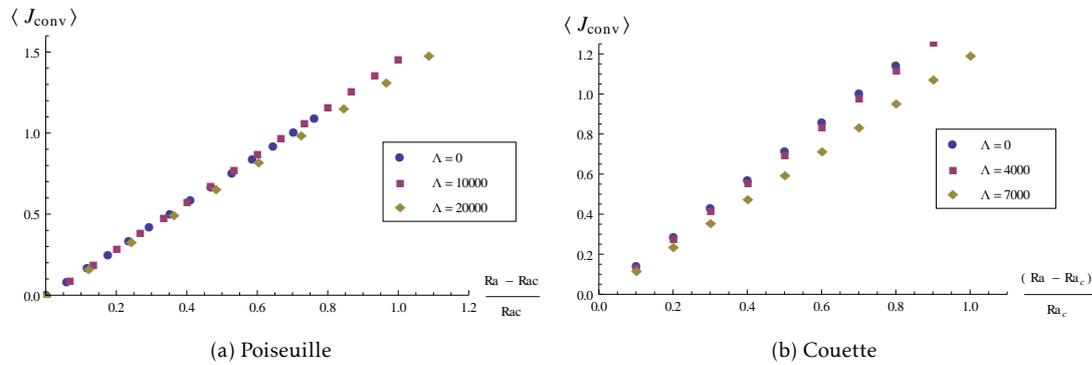


FIGURE 3.8 – Flux convectif  $J_{conv}$  en fonction de  $(Ra - Ra_c)/Ra_c$  pour  $\Lambda = 0, 5000, 10000, 15000, 20000$  (Poiseuille) et  $\Lambda = 0, 4000, 7000$  (Couette), calculé à partir de l'expression 3.47. La pente des courbes est ici  $S$ .

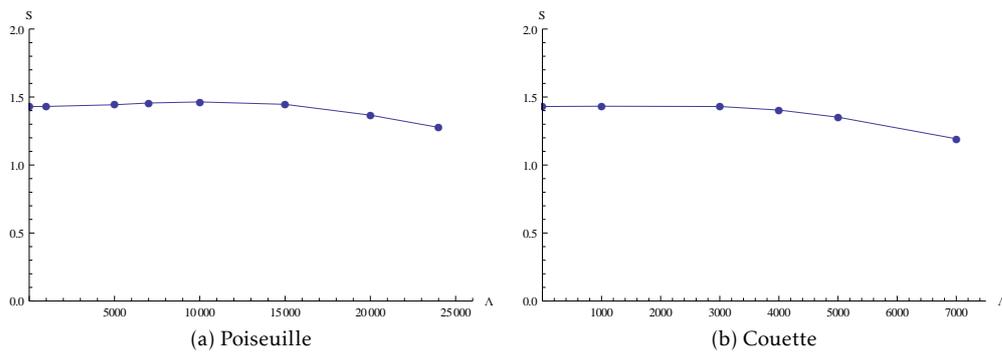


FIGURE 3.9 – Pente  $S$  du flux convectif moyen  $\langle J_{conv} \rangle$  en fonction de  $\Lambda$  pour des écoulements de RBP et RBC.

Le nombre de Nusselt peut se définir de plusieurs manières suivant le problème et le phénomène physique que l'on veut mettre en évidence. Dans notre cas c'est l'effet de la dissipation visqueuse et du paramètre  $\Lambda$  à proximité du seuil de la convection que l'on veut étudier. On choisit donc de normaliser le flux total par le flux conductif, le nombre de Nusselt  $Nu$  est alors défini comme suis :

$$Nu = \frac{J_{cond} + \langle J_{conv} \rangle(z)}{J_{cond}} \quad (3.50)$$

Cette formulation permet en normalisant par le flux conductif de mettre en évidence la contribution du flux convectif sur le flux de chaleur total. On remarquera que tant que  $\langle J_{conv} \rangle > 0$ , c'est-à-dire tant qu'il y a de la convection le nombre de Nusselt est supérieur à 1. En l'absence de convection  $Nu = 1$ .

Le nombre de Nusselt s'écrit en  $z = 1$  :

$$Nu(z = 1) = 1 + \frac{\langle J_{conv} \rangle(z = 1)}{J_{cond}(z = 1)} \quad (3.51)$$

Qui peut s'écrire de la manière suivante en remplaçant  $J_{cond}$  et  $\langle J_{conv} \rangle$  par leur expressions :

$$Nu = 1 - \frac{1}{1 + \frac{8\Lambda}{3Ra}} |A_s|^2 \frac{d\Theta_{20}}{dz} \Big|_{z=1} \quad \text{pour Poiseuille} \quad (3.52)$$

$$Nu = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2\Lambda}{Ra}} |A_s|^2 \frac{d\Theta_{20}}{dz} \Big|_{z=1} \quad \text{pour Couette} \quad (3.53)$$

En introduisant la pente  $S$  3.48 du flux convectif moyen  $\langle J_{conv} \rangle$ , le nombre de Nusselt peut donc s'écrire en fonction de la distance relative au seuil critique  $Ra_c$  de la convection :

$$Nu = 1 + \frac{1}{1 + \frac{8\Lambda}{3Ra}} S \left( \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c} \right) \quad \text{pour Poiseuille} \quad (3.54)$$

$$Nu = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2\Lambda}{Ra}} S \left( \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c} \right) \quad \text{pour Couette} \quad (3.55)$$

Comme on l'a constaté sur la figure 3.9, la pente  $S$  ne dépend pratiquement pas du paramètre  $\Lambda$ . La dépendance du nombre de Nusselt en  $\Lambda$  s'exprime donc uniquement à travers la contribution du flux conductif qui comprend explicitement  $\Lambda$  et aussi la valeur du seuil critique  $Ra_c$  qui dépend implicitement de  $\Lambda$ . Le nombre de Nusselt  $Nu$  est donc fonction de  $\Lambda$  et de la distance relative au seuil  $\frac{Ra - Ra_c}{Ra_c}$ .

La figure 3.10 montre l'augmentation du nombre de Nusselt  $Nu$  lorsque la distance relative au seuil  $\frac{Ra - Ra_c}{Ra_c}$  et donc le flux convectif augmente. Le nombre de Nusselt présente pour une même valeur de  $\frac{Ra - Ra_c}{Ra_c}$  une baisse importante lorsque le paramètre  $\Lambda$  augmente : la dissipation visqueuse diminue fortement le taux de transfert de chaleur par convection.

On fixe maintenant la valeur de  $\frac{Ra - Ra_c}{Ra_c}$  à 1 de sorte que  $Ra = 2Ra_c$ . En effet le nombre de Rayleigh auquel on calcule le nombre de Nusselt doit au plus être égal à 3 fois la valeur critique  $Ra_c$  du nombre de Rayleigh pour que l'on reste dans le cadre de l'analyse de stabilité faiblement non linéaire, qui n'est valable qu'à proximité du seuil  $Ra_c$  de la convection. De plus afin que  $Ra - Ra_c$  soit toujours positive de sorte que  $Ra > Ra_c$  (on augmente le paramètre déstabilisant  $Ra_c$  au delà

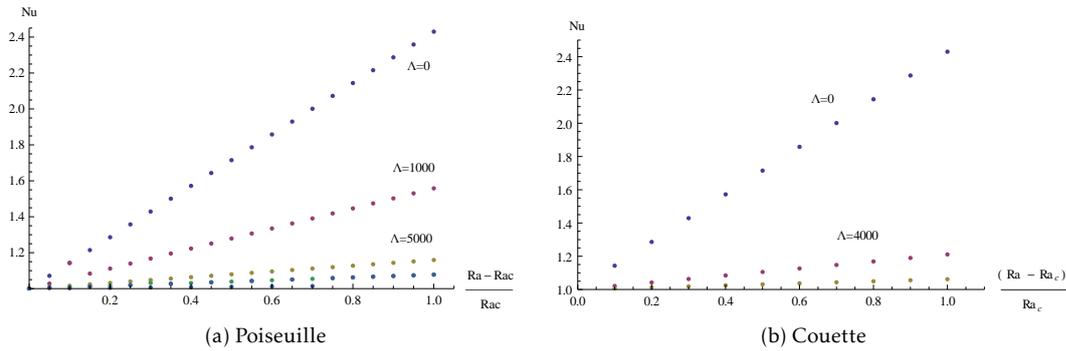


FIGURE 3.10 – Nombre de Nusselt  $Nu$  en  $z = 1$  en fonction de  $\frac{Ra-Ra_c}{Ra}$  pour  $\Lambda = 0, 1000, 5000, 10000, 20000$  (Poiseuille) et  $\Lambda = 0, 4000, 7000$  (Couette)

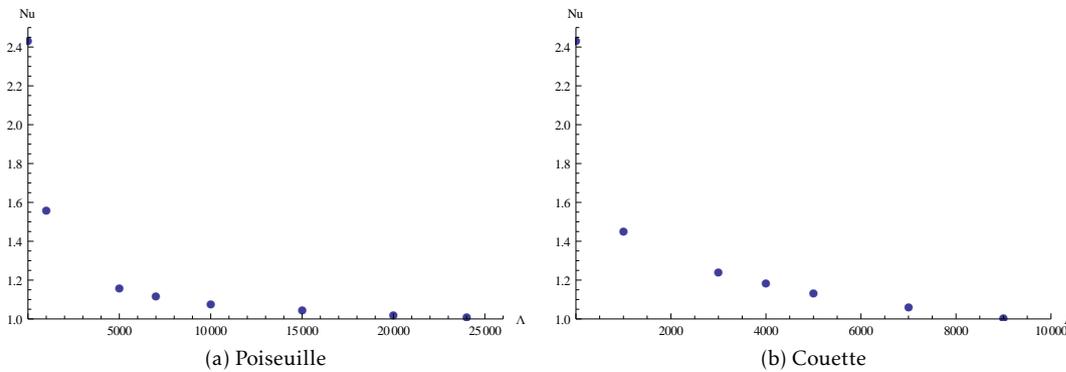


FIGURE 3.11 – Nombre de Nusselt  $Nu$  en  $z = 1$  en fonction de  $\Lambda$  pour  $\frac{Ra-Ra_c}{Ra} = 1$ .

de la valeur critique), on se limitera aux valeurs de  $\Lambda$  où  $Rac > 0$ . La figure 3.11 met à nouveau en évidence la forte baisse du nombre de Nusselt lorsque l'on augmente la dissipation visqueuse : pour des valeurs assez grandes de  $\Lambda$  le nombre de Nusselt n'augmente presque pas par rapport à sa valeur au seuil.

### 3.3.5 Lignes de courant et isothermes

Afin de représenter concrètement l'effet de la dissipation visqueuse sur l'écoulement, on trace les lignes de courant et les isothermes. Ceux-ci se décomposent en partie linéaire plus partie non linéaire, c'est cette dernière qui va particulièrement nous intéresser. Par concision on présente les isolignes pour l'écoulement de Poiseuille seulement, le cas de Couette étant qualitativement semblable. Les isolignes sont présentées pour deux cas représentatifs : absence de dissipation visqueuse ( $\Lambda = 0$ ) et forte dissipation visqueuse ( $\Lambda = 20000$ ). Les isolignes sont calculées en  $Ra = 1.1Ra_c$ .

La contribution linéaire montrée sur les figures 3.12, 3.15 est comme attendu la même que celle obtenue à partir de l'analyse linéaire (chapitre 2). Les isolignes sont symétriques en l'absence de dissipation visqueuse tandis qu'en présence de dissipation une stratification verticale des

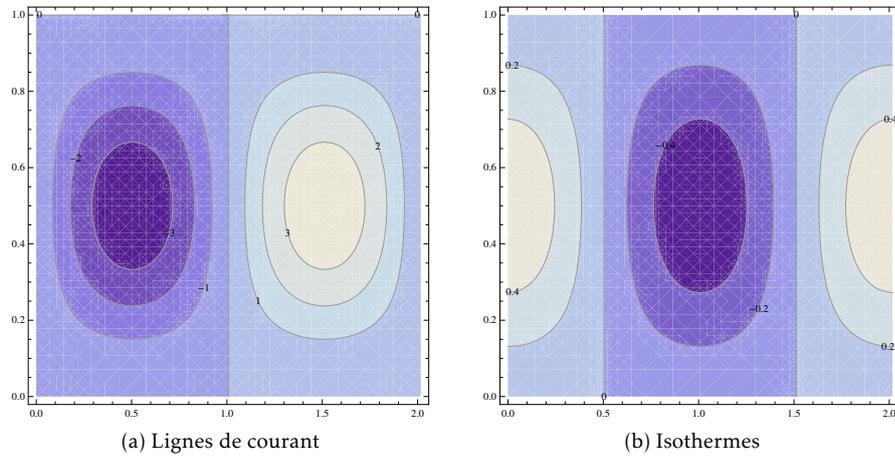


FIGURE 3.12 – Partie linéaire des lignes de courant et isothermes pour  $\Lambda = 0$

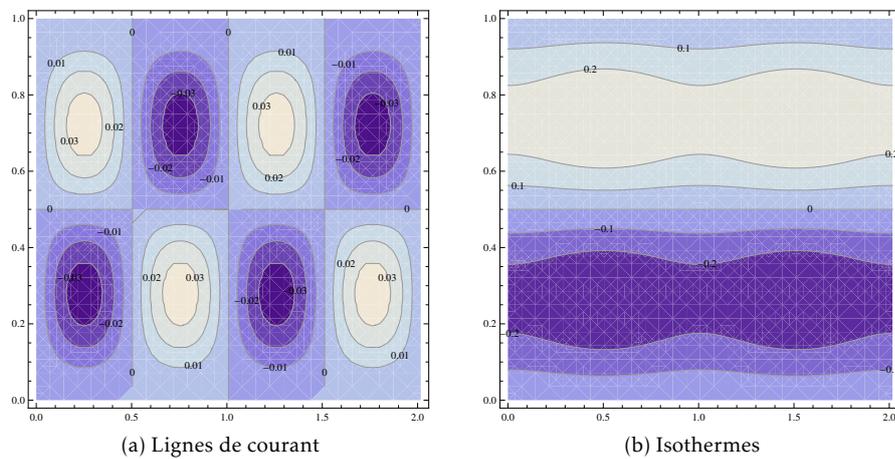


FIGURE 3.13 – Partie non linéaire des lignes de courant et isothermes pour  $\Lambda = 0$

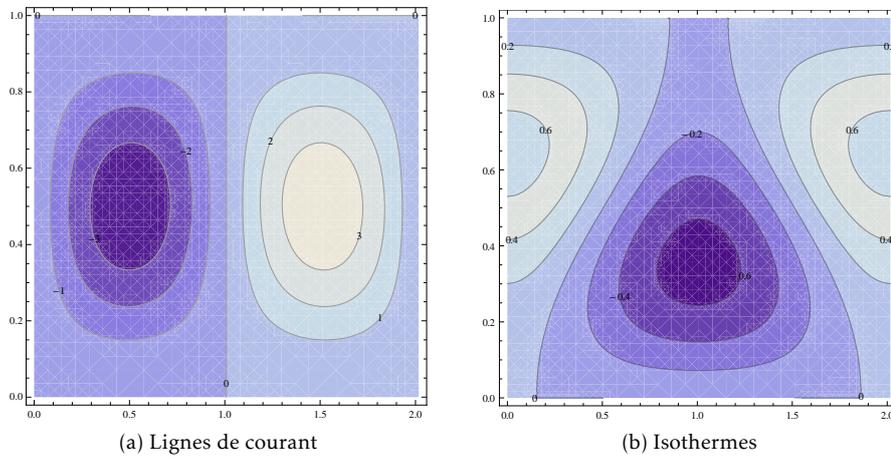


FIGURE 3.14 – Total des parties linéaire et non linéaire des lignes de courant et isothermes pour  $\Lambda = 0$

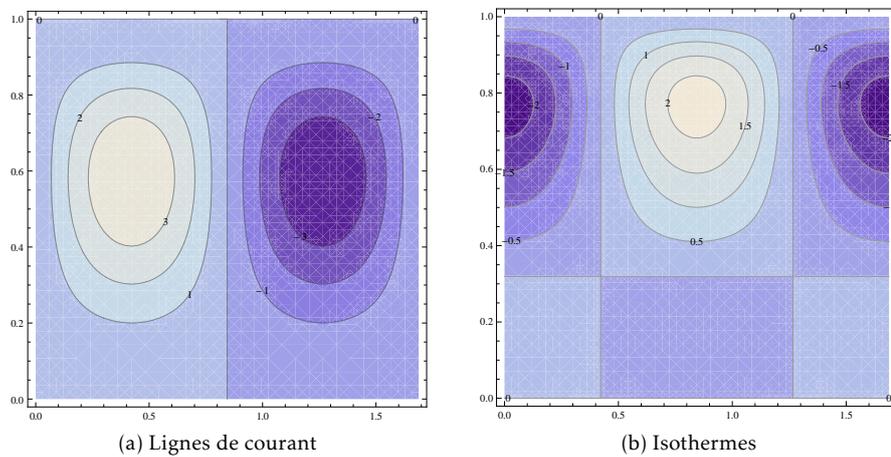


FIGURE 3.15 – Partie linéaire des lignes de courant et isothermes pour  $\Lambda = 20000$

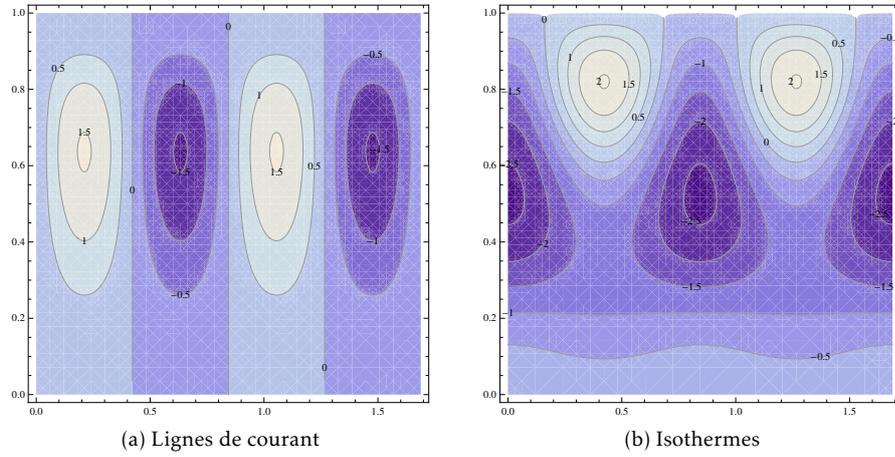


FIGURE 3.16 – Partie non linéaire des lignes de courant et isothermes pour  $\Lambda = 20000$

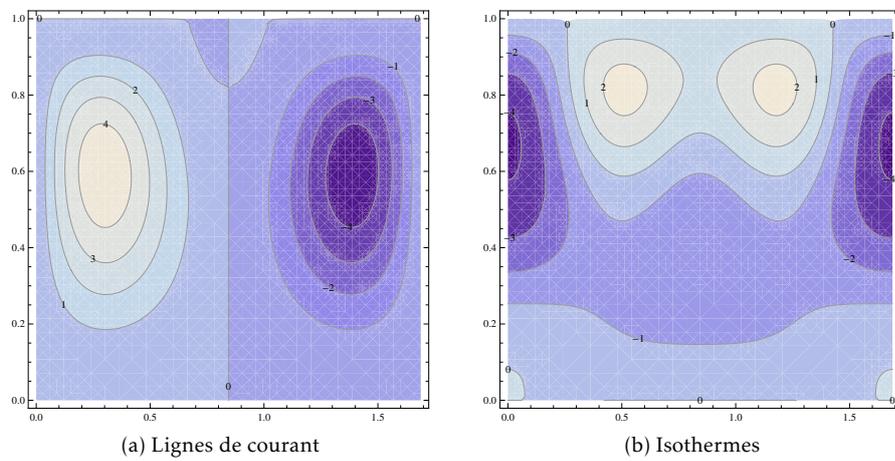


FIGURE 3.17 – Total des parties linéaire et non linéaire des lignes de courant et isothermes pour  $\Lambda = 20000$

isothermes apparaît en raison du profil de la température de base qui présente un extremum entre  $z = 0$  et  $z = 1$ . La figure 3.13 montre qu'en l'absence de dissipation visqueuse les non linéarités n'ont pas d'influence notable, la somme des contributions linéaires et non linéaires figure 3.14 étant sensiblement identique à la partie linéaire. Les non linéarités se présentent alors sous forme de structures symétriques par rapport au milieu de la conduite. On remarque que la contribution non linéaire aux isothermes est positive dans la partie supérieure ce qui est cohérent avec les profils de  $\Theta_{20}$  et  $\Theta_{22}$  montrés sur la figure 3.2. Cela se traduit sur le total par un léger décalage des isothermes vers le haut. Une correction positive du gradient de température de base signifie que les premières non linéarités induisent un effet stabilisant favorisant une bifurcation supercritique, ce qui est cohérent avec les résultats obtenus.

Pour  $\Lambda = 200000$  les lignes de courant non linéaires se présentent cette fois sous la forme de rouleaux simples suivant la direction verticale et décalés vers le haut. On note que les isothermes non linéaires présentent de même une stratification stable dans la partie inférieure. Dans ce cas la contribution non linéaire a un rôle important notamment sur les isothermes 3.16 : la contribution non linéaire provoque une déformation des isothermes dans la partie supérieure, notamment au voisinage de la paroi supérieure. Enfin on observe que les non linéarités présentent quelle que soit la valeur de la dissipation visqueuse deux rouleaux pour un rouleau linéaire.

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre l'analyse faiblement non linéaire a été mise en œuvre dans différentes configurations. Les configurations étudiées sont les mêmes que celles de l'analyse linéaire du chapitre 2 soit des parois isothermes avec un gradient de température déstabilisant et un écoulement de Poiseuille ou de Couette, le nombre de Rayleigh  $Ra$  étant le paramètre de contrôle. L'analyse linéaire précédemment effectuée ayant montré que le terme en  $\Lambda = Pe^2 Ge$  est largement prédominant dans l'effet déstabilisant de la dissipation visqueuse alors que les termes en  $Ge$  n'ont qu'un effet négligeable, on étudie donc l'effet du paramètre  $\Lambda$  sur la stabilité des rouleaux longitudinaux. L'analyse est menée dans le cadre de l'approximation d'un nombre de Prandtl qui tend vers l'infini.

- Que ce soit dans le cas de la convection naturelle ou de la convection mixte, le paramètre  $Ge$  n'a pratiquement pas d'influence sur le rapport  $\frac{\mu}{\lambda}$  dont le signe détermine la nature de la bifurcation. On peut donc étudier l'effet de la dissipation visqueuse à travers l'unique paramètre  $\Lambda$  en prenant  $Ge = 0$  dans les termes non linéaires.
- La bifurcation est alors de nature supercritique quelle que soit la valeur de  $\Lambda$ . L'amplitude stationnaire dépend faiblement du paramètre  $\Lambda$  quand celui-ci prend des valeurs faibles à modérées et diminue pour les grandes valeurs de  $\Lambda$ .
- Le flux conductif présente une forte dépendance en  $z$  pour des valeurs élevées de  $\Lambda$ , une dépendance moindre en  $z$  est aussi observée pour le flux convectif. En  $z = 1$  (paroi supérieure) l'effet de  $\Lambda$  est très faible pour le flux convectif mais maximale pour le flux conductif. Il apparaît donc que c'est le flux conductif qui est prédominant dans le flux total à la paroi supérieure.
- Lorsque l'on s'éloigne du seuil de la convection ( $Ra > Ra_c$ ) le flux conductif décroît fortement tandis que  $\Lambda$  a pour effet d'augmenter le flux conductif. Quant au flux convectif il augmente en fonction de la distance au seuil avec un faible effet décroissant de  $\Lambda$ .

- Le nombre de Nusselt augmente donc avec une intensité moindre lorsque  $\Lambda$  augmente : la présence de dissipation visqueuse a pour effet de faire fortement baisser le taux de transfert de chaleur à la paroi supérieure du système.
- L'étude des solutions au second ordre et des isolignes montre que les effets non linéaires se traduisent par une correction positive du gradient de température de base. Cela signifie que les premières non linéarités induisent un effet stabilisant favorisant une bifurcation supercritique, ce qui est cohérent avec les résultats obtenus.

# Chapitre 4

## Stabilité faiblement non linéaire des écoulements parallèles d'un fluide Newtonien avec paroi inférieure adiabatique

Dans ce chapitre on considère un écoulement de Poiseuille ou de Couette entre deux parois. La paroi supérieure est isotherme maintenue à une température  $T_1$  et la paroi inférieure est adiabatique. Le but est d'étendre les résultats de Barletta et Nield [49], Barletta, Celli et Nield [3] par l'analyse faiblement non linéaire. Cette configuration est montrée ci-dessous :

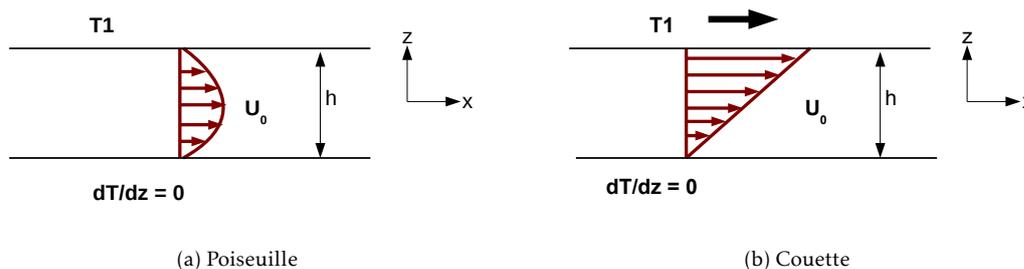


FIGURE 4.1 – Configuration d'écoulement parallèle (Poiseuille et Couette) avec paroi isotherme en haut et paroi adiabatique en bas.

## 4.1 Formulation mathématique du problème non linéaire

Les équations gouvernant le problème sont adimensionnées à l'aide d'échelles de référence permettant d'obtenir les grandeurs adimensionnées suivantes :

$$(x, y, z) = \frac{(x^*, y^*, z^*)}{h}, \quad t = \frac{\kappa}{h^2} t^*, \quad \mathbf{u} = \frac{h}{\kappa} \mathbf{u}^*, \quad P = \frac{h^2}{\mu \kappa} P^*, \quad T = \frac{(T^* - T_1) \beta g h}{\nu \kappa}$$

dans lesquelles  $\mathbf{u}^* = (u^*, v^*, w^*)$ ,  $T^*$  et  $P^*$  sont respectivement le vecteur vitesse, la température et la pression dimensionnés.  $\kappa$  est la diffusivité thermique,  $\rho_0$  est la masse volumique de référence,  $\nu$  est la viscosité cinématique,  $\mu$  est la viscosité dynamique,  $\beta$  est le coefficient de dilatation thermique du fluide et  $g$  est le module de l'accélération de la gravitation. Les équations adimensionnées pour la conservation de la masse, de la quantité de mouvement, et de l'énergie peuvent s'écrire [3] :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = Pr (-\nabla P + T \mathbf{e}_z + \nabla^2 \mathbf{u}) \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T + 2Ge D_{ij} D_{ij} \quad (4.3)$$

avec  $D_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$  le tenseur des contraintes.

Les conditions aux limites pour la température s'écrivent :

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ en } z = 0 \quad \text{et} \quad T = 0 \text{ en } z = 1 \quad (4.4)$$

Les conditions aux limites pour le champ de vitesse pour l'écoulement de Poiseuille plan (EPP) sont :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ en } z = 0; 1 \quad (4.5)$$

et pour l'écoulement de Couette plan (ECP) :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ en } z = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = Pe \mathbf{e}_x \text{ en } z = 1 \quad (4.6)$$

Les trois paramètres sans dimension qui apparaissent dans les équations 4.1-4.3 sont le nombre de Prandtl, le nombre de Péclet, et le nombre de Gebhart définis respectivement par :

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad Pe = \frac{U_0 h}{\kappa}, \quad Ge = \frac{\beta g h}{C}$$

où  $U_0$  est la vitesse moyenne adimensionnée du profil de l'écoulement dans la conduite pour l'écoulement de Poiseuille, et le module de la vitesse dimensionnée de la paroi mobile supérieure pour l'écoulement de Couette et  $C$  est la chaleur spécifique du fluide.

Une solution de base stationnaire du système d'équations 4.1-4.3 pour les champs de vitesse et de température est donnée par :

$$\mathbf{u}_b(z) = Pe f(z) \mathbf{e}_x \quad (4.7)$$

$$T_b(z) = Pe^2 Ge g(z) \quad (4.8)$$

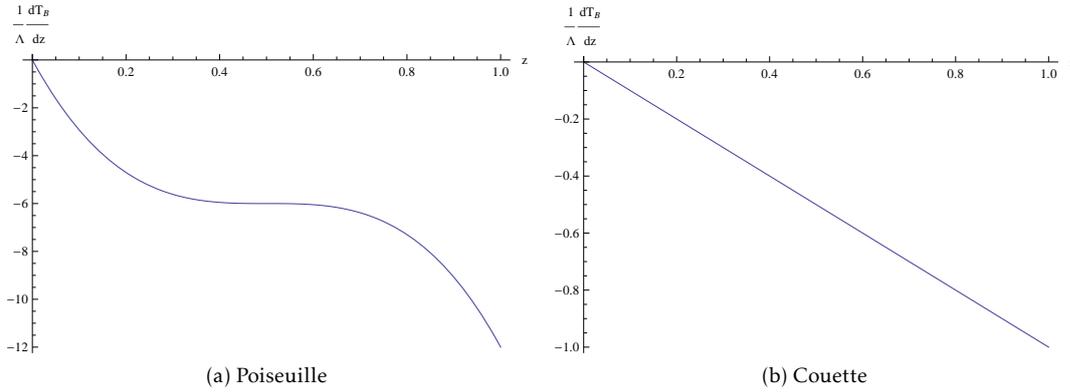


FIGURE 4.2 – Dérivée de la température de base en fonction de  $z$  pour l'écoulement de Poiseuille plan et l'écoulement de Couette plan.

avec les fonctions  $f(z)$  et  $g(z)$  définies par :

$$f(z) = 6z(1 - z) \quad g(z) = 6(1 - 3z^2 + 4z^3 - 2z^4)$$

pour l'écoulement de Poiseuille, et

$$f(z) = z \quad g(z) = \frac{1}{2}(1 - z^2)$$

pour l'écoulement de Couette.

On notera que d'après l'expression 4.8 la température de base est la résultante de la dissipation visqueuse, et disparaît en l'absence d'écoulement ( $Pe = 0$ ). Le gradient de ce profil de température de base est montré sur la figure 4.2; on remarque qu'il est négatif pour tout  $z$  entre 0 et 1 : le gradient de température induit par la présence de dissipation visqueuse a un effet déstabilisant dans tout l'espace entre les parois.

Afin de mener à bien l'étude de stabilité de cet écoulement de base, on lui superpose une perturbation infinitésimale :

$$\begin{cases} T = T_b(z) + \theta(x, y, z, t) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_b(z) + \mathbf{U}(x, y, z, t) \\ P = P_b(x, z) + p(x, y, z, t) \end{cases} \quad (4.9)$$

La perturbation du champ de vitesse  $\mathbf{U}$  a pour composantes cartésiennes  $(u, v, w)$ . Les perturbations sont développées sous forme de modes normaux :

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \mathbf{U}_n(z) e^{ik_x x + ik_y y} e^{(\sigma + i\omega)t} \\ \theta = \theta_n(z) e^{ik_x x + ik_y y} e^{(\sigma + i\omega)t} \\ p = p_n(z) e^{ik_x x + ik_y y} e^{(\sigma + i\omega)t} \end{cases} \quad (4.10)$$

où  $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y$  est le vecteur d'onde,  $\sigma$  est le taux de croissance temporel de la perturbation et  $\omega$  est la fréquence. Les équations linéarisées s'écrivent alors en modes normaux :

$$i k_x u_n + i k_y v_n + D w_n = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{Pr} \{i\omega u_n + w_n P e f'(z) + i k_x P e f(z) u_n\} - (D^2 - k^2) u_n + i k_x p_n = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{Pr} \{i\omega v_n + i k_x P e f(z) v_n\} - (D^2 - k^2) v_n + i k_y p_n = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{Pr} \{i\omega w_n + i k_x P e f(z) w_n\} - (D^2 - k^2) w_n + D p_n - \theta_n = 0 \quad (4.14)$$

$$i\omega \theta_n + i k_x P e f(z) \theta_n + G e P e^2 g'(z) w_n - 2 G e P e f'(z) (D u_n + i k_x w_n) - (D^2 - k^2) \theta_n = 0 \quad (4.15)$$

On remarque qu'il s'agit des mêmes équations que celles pour une configuration de Rayleigh-Bénard-poiseuille/Couette avec parois isothermes 3.11-3.15, à l'exception du terme en  $Ra$  qui n'apparaît pas ici (on n'impose pas de gradient de température externe).

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} D\theta_n = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } \theta_n = 0 \text{ en } z = 1 \\ u_n = w_n = D w_n = 0 \text{ en } z = 0; 1 \end{cases} \quad (4.16)$$

Ces équations forment un problème aux valeurs propres généralisé qui a été récemment résolu par Barletta et Nield [49] pour l'écoulement de Couette et par Barletta, Celli et Nield [3] pour l'écoulement de Poiseuille. Ils ont déterminé les propriétés linéaires des rouleaux longitudinaux, transversaux et obliques. Il en ressort que les rouleaux longitudinaux sont le mode sélectionné pour la convection. Dans ce cas les paramètres  $\Lambda = P e^2 G e$  et  $Pr$  sont les seuls paramètres influents sur la stabilité du problème. Le but de ce travail est d'étudier la dynamique faiblement non linéaire au voisinage du seuil critique.

## 4.2 Méthodologie du problème non linéaire

### 4.2.1 Équations pour les rouleaux longitudinaux d'amplitude finie

Les équations pour les rouleaux longitudinaux (i.e.  $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ ) en écoulement de Poiseuille/Couette sont :

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + f'(z) w - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tilde{u} = -\frac{1}{Pr} \left( v \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right) \quad (4.18)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial v}{\partial t} - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v + \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{Pr} \left( v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (4.19)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial w}{\partial t} - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w - \theta + \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{1}{Pr} \left( v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta}{\partial t} + \Lambda g'(z)w - 2 \frac{\Lambda}{Pr} f'(z) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \theta = \\ & - \left( v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + Ge \left( \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{\Lambda}{Pr^2} \left( \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

On notera que les équations 4.18-4.21 se simplifient grandement dans le cas spécifique des fluides où  $Pr \gg 1$ , i.e. la diffusion thermique est prépondérante devant la diffusion visqueuse. En particulier, les termes mettant en jeu les dérivées de  $\tilde{u}$  disparaissent de l'équation 4.21. Par conséquent les analyses de stabilité linéaire et non linéaire peuvent être menées sans prendre en compte l'équation 4.18.

Le champ de pression est éliminé en dérivant les équations 4.19 et 4.20 par rapport à  $z$  et  $y$  respectivement et en soustrayant les équations obtenues. Les équations peuvent alors s'écrire en termes de variables réduites, en l'occurrence la fonction de courant  $\psi$  définie ci-après, la température  $\theta$  et la composante  $\tilde{u}$  de la température.

En introduisant la fonction de courant  $\psi$  définie par :

$$- \frac{\partial \psi}{\partial y} = w \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = v \quad (4.22)$$

le paramètre  $\Lambda = Pe^2 Ge$  et  $u = Re \tilde{u}$ , les équations pour les rouleaux longitudinaux peuvent s'écrire suivant la notation

$$(\mathcal{L}' \partial_t + \mathcal{L}) \tilde{V} = N, \quad (4.23)$$

où le vecteur  $\tilde{V} = (\psi, \theta, \tilde{u})^T$  et  $N = \left( N_I^\psi, N_{Adv} + N_{Diss}^{Ge} + N_{Diss}^{Pr}, N_I^{\tilde{u}} \right)^T$ .

Les expressions des opérateurs linéaires  $\mathcal{L}'$  et  $\mathcal{L}$  et des contributions non linéaires sont les suivantes :

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Pr} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ - \Lambda g'(z) \frac{\partial}{\partial y} & - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) & - 2 \frac{\Lambda}{Pr} f'(z) \frac{\partial}{\partial z} \\ - f'(z) \frac{\partial}{\partial y} & 0 & - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$\begin{cases} N_I^\psi = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi \\ N_{Adv} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ N_{Diss}^{Ge} = Ge \left[ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \right)^2 \right] \\ N_{Diss}^{Pr} = \frac{\Lambda}{Pr^2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \right] \\ N_I^{\bar{u}} = \frac{1}{Pr} \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \end{cases} \quad (4.26)$$

Les conditions aux limites pour les perturbations dans les écoulements de Poiseuille et Couette plans sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \text{ at } z = 0 \text{ and } \theta = 0 \text{ at } z = 1 \\ \bar{u} = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \text{ at } z = 0; 1 \end{cases} \quad (4.27)$$

On notera qu'en plus des paramètres  $\Lambda$  et  $Pr$  qui apparaissent dans les opérateurs linéaires  $\mathcal{L}'$  et  $\mathcal{L}$ , la contribution non linéaire  $N_{Diss}^{Ge}$  introduit le nombre de Gebhart  $Ge$  comme troisième paramètre influant sur la stabilité du problème.

#### 4.2.2 Équation d'amplitude

Au dessus du seuil linéaire, nous introduisons un paramètre  $\varepsilon \ll 1$  qui mesure la distance au seuil critique en posant  $\Lambda = \Lambda_c + \varepsilon^2 \Lambda_2$  où  $\Lambda_2$  est de l'ordre de 1. Cela nous donne pour l'échelle temporelle :

$$t_2 = \varepsilon^2 t \quad (4.28)$$

Les dérivées temporelles sont alors remplacées par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} \quad (4.29)$$

Les équations d'évolution des variables sont obtenues en développant le vecteur  $\tilde{V}$ , l'opérateur linéaire  $\mathcal{L}$  et le vecteur des contributions non linéaires  $N$  en série de puissances en  $\varepsilon$  :

$$\begin{cases} \tilde{V} = \varepsilon \tilde{V}_1 + \varepsilon^2 \tilde{V}_2 + \dots \\ \mathcal{L} = \mathcal{L}_c + \varepsilon^2 \Lambda_2 \mathcal{L}_2 + \dots \\ N = \varepsilon^2 N_2 + \varepsilon^3 N_3 + \dots \end{cases} \quad (4.30)$$

avec l'opérateur  $\mathcal{L}_2$ ,

$$\mathcal{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g'(z) \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -\frac{2}{Pr} f'(z) \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Les vecteurs  $\tilde{V}_i$  dépendent aussi de la variable temporelle lente  $t_2$ . En remplaçant l'expressions 4.30 dans le système 4.23, et en prenant les coefficients en  $O(\varepsilon)$ , on obtient un système d'équations.

### Valeurs propres et fonctions propres pour le problème au premier ordre

Au premier ordre, le système d'équations linéaires homogènes pour  $\tilde{V}_1 = (\psi_1, \theta_1, \tilde{u}_1)^T$  au seuil critique est donné par :

$$\mathcal{L}_c \tilde{V}_1 = 0. \quad (4.32)$$

avec  $\mathcal{L}_c$  l'opérateur  $\mathcal{L}$  pour  $\Lambda = \Lambda_c$ . Les solutions de l'équation 4.32 sont développées sous la forme de modes normaux,

$$(\psi_1, \theta_1, \tilde{u}_1) = A(t_2) \left( \Psi_1(z), \Theta_1(z), \tilde{U}_1(z) \right) e^{ik_c y} + CC \quad (4.33)$$

où CC désigne le complexe conjugué.

Les conditions aux limites pour les fonctions propres  $(\Psi_1(z), \Theta_1(z), \tilde{U}_1(z))$  sont :

$$\begin{cases} D\Theta_1 = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } \Theta_1 = 0 \text{ en } z = 1 \\ \tilde{U}_1 = \Psi_1 = D\Psi_1 = 0 \text{ en } z = 0; 1 \end{cases} \quad (4.34)$$

Le problème aux valeurs propres (4.32, 4.33) avec les conditions aux limites 4.34 est résolu numériquement par la méthode de tir. La précision et la validité de ce schéma numérique sont vérifiées en comparant nos résultats avec les résultats publiés de stabilité linéaire pour l'écoulement de Poiseuille plan (EPP) [3] pour différents nombre de  $Pr$  et l'écoulement de Couette plan (ECP) dans le cas limite de  $Pr$  infini considéré dans [49]. Le tableau 4.2.2 présente les valeurs critiques de  $\Lambda_c$  et le nombre d'onde critique associé  $k_c$  pour un large éventail de valeurs de  $Pr$ . Comme le montre le tableau 4.2.2, nos résultats sont en très bon accord avec les calculs numériques donnés dans [3] et [49]. La valeur critique  $\Lambda_c$  au seuil de l'instabilité convective décroît lorsque  $Pr$  augmente à la fois pour l'EPP et l'ECP. Par conséquent le nombre de Prandtl a un effet déstabilisant. On notera aussi que la valeur critique  $\Lambda_c$  pour une valeur fixée de  $Pr$  est plus de dix fois plus grande dans l'ECP que dans l'EPP.

Nous calculons les fonctions propres avec une normalisation définie de la composante verticale de la vitesse. La normalisation est choisie de sorte que  $\int_0^1 |w_1|^2 dz = k_c^2 \int_0^1 |\Psi_1|^2 dz = 1$ .

La dépendance des fonctions propres par rapport à la coordonnée verticale  $z$  dans le cas de l'écoulement de Poiseuille est montré sur les figures 4.3 pour différents  $Pr$ . Les calculs indiquent que les fonctions propres  $\Theta_1$  et  $\tilde{U}_1$  sont à valeurs réelles tandis que  $\Psi_1$  est à valeurs purement imaginaires. Comme montré sur la figure 4.3,  $Im(\Psi_1)$  et  $\tilde{U}_1$  sont respectivement presque paire et impaire par rapport à la symétrie relativement au plan médian, tandis que la fonction propre  $\Theta_1$  présente un profil asymétrique en conséquence des conditions aux limites imposées asymétriques pour la température. On notera qu'au contraire de  $\Psi_1$  et  $\tilde{U}_1$ , l'influence de  $Pr$  sur la distribution verticale de  $\Theta_1$  est significative. Par exemple, on observe que la valeur de  $\Theta_1$  à la paroi inférieure décroît quand  $Pr$  diminue, et finit par changer de signe pour un petit nombre de Prandtl. On observe aussi un changement significatif dans le gradient de température vertical dans la partie inférieure de la conduite quand le nombre de Prandtl varie, en contraste avec le gradient de température presque constant dans la partie supérieure. On notera que l'influence de  $Pr$  est due à la présence du terme de forçage  $-2 \frac{\Lambda}{Pr} f'(z) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial z}$  dans l'équation de l'énergie linéarisée. La figure 4.4 montre que dans le cas de l'écoulement de Couette les fonctions propres présentent le même comportement qualitatif.

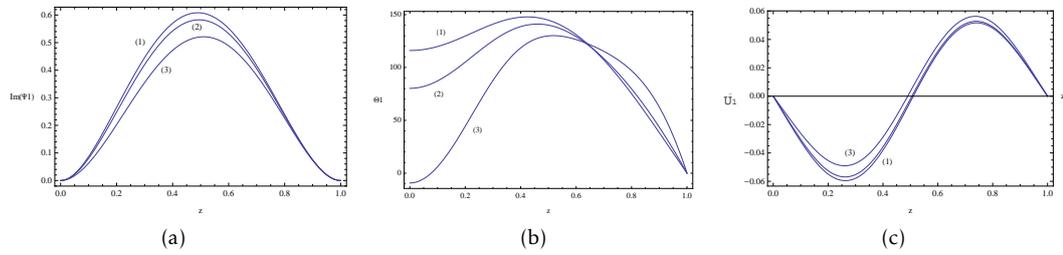


FIGURE 4.3 – Fonctions propres au seuil critique dans l'écoulement de Poiseuille pour différentes valeurs du nombre de Prandtl  $Pr$  : (1)  $Pr = 10^5$ , (2)  $Pr = 1$  et (3)  $Pr = 0.27$ .

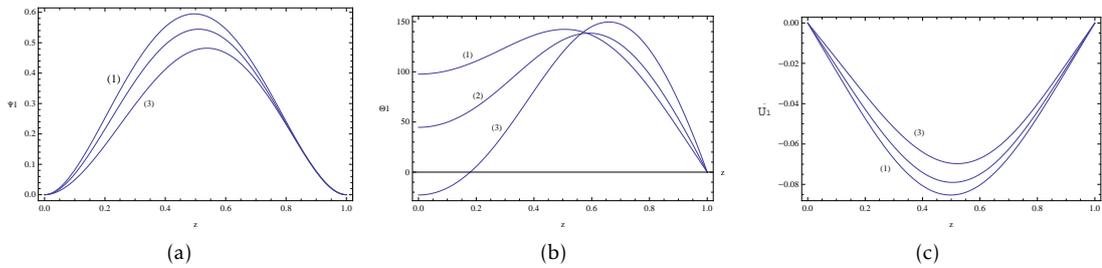


FIGURE 4.4 – Fonctions propres  $\Psi_1$  (a),  $\Theta_1$  (b),  $\tilde{U}_1$  (c) au seuil critique dans l'écoulement de Couette pour différentes valeurs du nombre de Prandtl  $Pr$  : (1)  $Pr = 10^5$ , (2)  $Pr = 2$  et (3)  $Pr = 0.77$ .

$Pr$	Présent travail (EPP)		Résultats de [3] (EPP)		Présent travail (ECP)		Résultats de [49] (ECP)	
	$\Lambda_c$	$k_c$	$\Lambda_c$	$k_c$	$\Lambda_c$	$k_c$	$\Lambda_c$	$k_c$
$\infty$	221.2619	2.572052	221.2619	2.572049	2772.27	2.62928	2772.27	2.62929
$10^5$	221.2621	2.572053	221.2621	2.572050	2772.28	2.62929	-	-
$10^4$	221.2638	2.572062	221.2638	2.572059	2772.33	2.62933	-	-
$10^3$	221.2807	2.572157	221.2807	2.572154	2772.85	2.62975	-	-
500	221.2994	2.572263	221.2994	2.572260	2773.43	2.63022	-	-
100	221.4493	2.573108	221.4493	2.573107	2778.06	2.63398	-	-
10	223.1388	2.582704	223.1388	2.582712	2830.54	2.67681	-	-
7	223.9452	2.587328	223.9452	2.587340	2855.78	2.69751	-	-
5	225.0221	2.593544	225.0221	2.593562	2889.65	2.72541	-	-
2	230.7001	2.62716	-	-	3071.61	2.87523	-	-
1	240.1912	2.686176	240.1912	2.686186	-	-	-	-
0.7	248.2572	2.738899	248.2572	2.738910	3680.61	3.33486	-	-
0.6	-	-	-	-	3851.73	3.44717	-	-
0.5	258.7369	2.810402	258.7369	2.810392	4106.72	3.60155	-	-
0.3	280.8701	2.968876	280.8701	2.968871	5455.16	4.24132	-	-
0.2	301.8653	3.123134	301.8653	3.123132	-	-	-	-
0.1	321.2322	3.292120	321.2323	3.292129	-	-	-	-

TABLEAU 4.1 – Paramètres critiques  $\Lambda_c$  et  $k_c$  au seuil d'apparition des rouleaux longitudinaux pour différents  $Pr$  pour l'écoulement de Poiseuille plan (EPP) et l'écoulement de Couette plan (ECP), comparaison avec les résultats de Barletta, Celli et Nield [3] et Barletta, Nield [49].

### Solutions pour le problème au second ordre

Pour  $O(\varepsilon^2)$ , le problème non homogène  $\tilde{V}_2$  est donné au seuil critique par :

$$\mathcal{L}_c \tilde{V}_2 = N_2(\tilde{V}_1) \quad (4.35)$$

Le terme  $N_2$  dans le second membre de l'équation 4.35 est le terme non linéaire  $N$  évalué en  $O(\varepsilon^2)$ . Il comprend les modes linéaires fondamentaux déterminé en  $O(\varepsilon)$  soit  $(\psi_1, \theta_1, \tilde{u}_1)$  et leurs dérivées. Les interactions non linéaires entre ces modes fondamentaux et leurs complexes conjugués génèrent des harmoniques d'ordre supérieur et une modification de l'état de base. Les solutions de (4.35) sont alors recherchées sous la forme :

$$(\psi_2, \theta_2, \tilde{u}_2) = \left[ A(t_2)^2 (\Psi_{22}(z), \Theta_{22}(z), \tilde{U}_2(z)) e^{i2k_c y} + CC \right] + |A(t_2)|^2 (\Psi_{20}(z), \Theta_{20}(z), \tilde{U}_{20}(z)) \quad (4.36)$$

En remplaçant les expressions 4.36 dans les équations 4.35, et en séparant les composantes harmoniques, on obtient un système d'équations  $(\Psi_{22}(z), \Theta_{22}(z), \tilde{U}_2(z))$  et un système d'équations pour  $(\Psi_{20}(z), \Theta_{20}(z), \tilde{U}_{20}(z))$ . Les conditions aux limites pour  $(\Psi_{22}(z), \Theta_{22}(z), \tilde{U}_2(z))$  et

$(\Psi_{20}(z), \Theta_{20}(z), \tilde{U}_{20}(z))$  sont les même que pour  $\tilde{V}_1$  4.34.

Comme pour les fonctions propres linéaires, les corrections non linéaires sont déterminées numériquement. Les propriétés des corrections non linéaires pour des nombres de Prandtl faibles et grands présentent un intérêt. Elles sont déterminées par des non linéarités dominantes différentes définies par l'équation 4.26. Pour  $Pr \gg 1$ , l'effet non linéaire dominant réside dans l'advection de la température (i.e. le terme non linéaire  $N_{Adv}$ ) et dans une partie de la dissipation visqueuse (i.e. le terme non linéaire  $N_{Diss}^{Ge}$ ). Tandis que dans le cas  $Pr \ll 1$ , l'advection de la vitesse prévaut (i.e. le terme non linéaire  $N_I^\psi$  et  $N_I^\mu$ ) conjointement avec une partie du terme de dissipation visqueuse (i.e. le terme non linéaire  $N_{Diss}^{Pr}$ ).

Les résultats numériques indiquent que quel que soit le nombre de Prandtl :

$$\Psi_{20}(z) = \tilde{U}_{20}(z) = 0 \quad (4.37)$$

Les profils de  $Im(\Psi_{22}(z))$ ,  $\tilde{U}_{22}(z)$ ,  $\Theta_{22}(z)$  et  $\Theta_{20}(z)$  sont montrés sur la figure 4.5 pour  $Pr = 10^5$  (courbe (1)),  $Pr = 1$  (courbe (2)) et  $Pr = 0.27$  (courbe (3)). Pour  $Pr = 10^5$   $Im(\Psi_{22}(z))$  et  $\Theta_{22}(z)$  sont positives pour tout  $z$ . En considérant les expressions de  $\psi_2$  et  $\theta_2$  4.36, on peut facilement montrer que l'effet des premières harmoniques près des bords verticaux d'un rouleau convectif est de réchauffer et accélérer l'écoulement vers le haut et de refroidir et décélérer l'écoulement vers le bas. En revanche pour  $Pr = 0.27$ ,  $Im(\Psi_{22}(z))$  et  $\Theta_{22}(z)$  sont négatifs pour tout  $z$  et l'effet des premières harmoniques est de refroidir et décélérer l'écoulement vers le haut et de réchauffer et accélérer l'écoulement vers le bas.

De plus, l'effet le plus important des non linéarités du problème est d'agir de sorte à produire une correction  $\Theta_{20}(z)$  de la distribution de température de base qui dépend fortement du nombre de Prandtl. Pour  $Pr = O(1)$  ou  $Pr \gg 1$ , nous voyons figure sur la 4.5(d) que cette correction est négative avec un faible gradient de température à la paroi supérieure, tandis que la correction devient positive avec un gradient de température non négligeable du milieu de la cellule à la paroi supérieure. Cela signifie que le nombre de Prandtl a une forte influence sur la chaleur transférée à la paroi supérieure pour de petites valeurs de  $Pr$ .

Une correction positive du gradient de température de base signifie que les premières non linéarités induisent un effet stabilisant et on peut alors s'attendre à une bifurcation supercritique. Inversement, une correction négative du gradient de température de base induit un effet déstabilisant des non-linéarités et peuvent donc être considérées comme un précurseur à l'émergence d'une bifurcation sous-critique. C'est pourquoi on trace sur la figure 4.6 la correction non linéaire au gradient de température de base  $\frac{d\Theta_{20}}{dz}$  pour l'EPP et l'ECP. Cette figure montre clairement la diminution de la région où le gradient de température est positif lorsque  $Pr$  diminue, et sa disparition pour de petites valeurs de  $Pr$ . Comme on le verra, le changement de signe de  $\frac{d\Theta_{20}}{dz}$  pour de petits  $Pr$  est annonciateur de la transition d'une bifurcation supercritique vers une bifurcation sous-critique.

### Condition de solvabilité au troisième ordre

En  $O(\varepsilon^3)$ , le problème non homogène suivant pour  $\tilde{V}_3$  est obtenu :

$$\mathcal{L}_c \tilde{V}_3 = -(\mathcal{L}' \partial_{t_2} + \Lambda_2 \mathcal{L}_2) \tilde{V}_1 + N_3(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2), \quad (4.38)$$

Le terme non linéaire  $N_3$  est l'expression non linéaire  $N$  évaluée en  $O(\varepsilon^3)$ .

Après avoir remplacé  $\tilde{V}_1$  et  $\tilde{V}_2$  dans l'équation 4.38, il n'y a pas besoin de complètement résoudre cette équation. En projetant toute l'équation sur  $\tilde{V}^\dagger$ , dans laquelle  $\tilde{V}^\dagger$  est la solution de l'adjoint

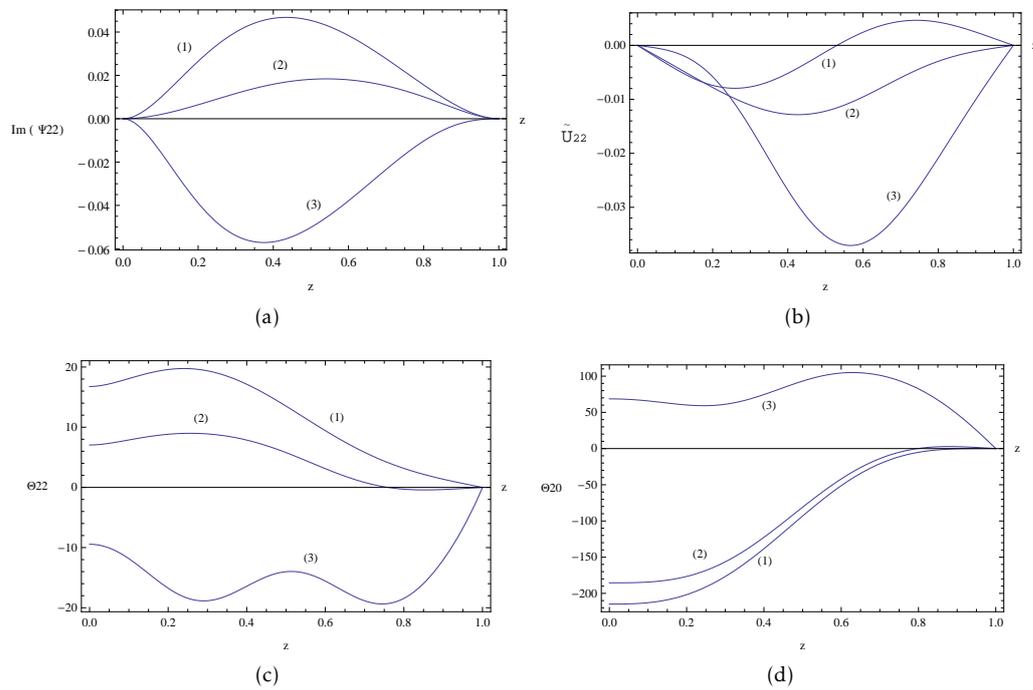


FIGURE 4.5 – Variations verticales de la première correction non linéaire sur le mode linéaire au seuil critique pour un écoulement de Poiseuille plan avec différentes valeurs du nombre de Prandtl : (1)  $Pr = 10^5$ ; (2)  $Pr = 1$  et (3)  $Pr = 0.27$ .

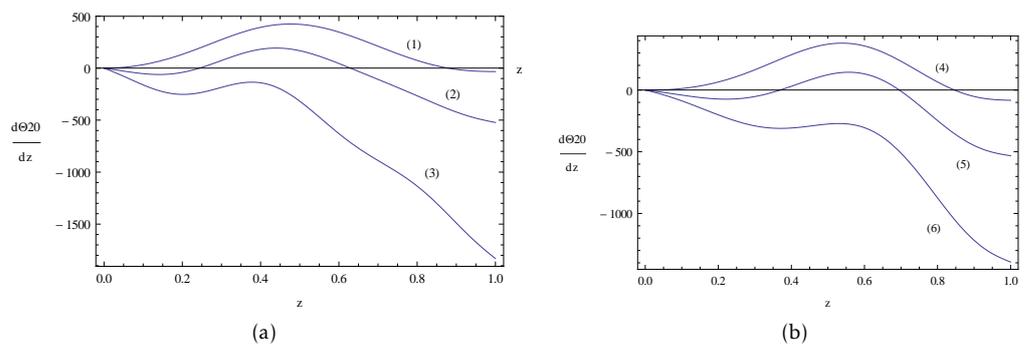


FIGURE 4.6 – Variations verticales de la correction non linéaire au gradient de température de base, au seuil critique pour un écoulement de Poiseuille (a) et une écoulement de Couette (b) avec  $Ge = 10^{-4}$  et différentes valeurs du nombre de Prandtl : (1)  $Pr = 10^5$ ; (2)  $Pr = 1$  et (3)  $Pr = 0.27$ , et (4)  $Pr = 2$ , (5)  $Pr = 0.8$  et (6)  $Pr = 0.5$ .

du problème linéaire, on obtient une condition de solvabilité, connue en tant qu'alternative de Fredholm. Nous appliquons la condition de solvabilité en  $O(\varepsilon^3)$  :

$$\langle -(\mathcal{L}' \partial_{t_2} + \Lambda_2 \mathcal{L}_2) \tilde{V}_1 + N_3, \tilde{V}^+ \rangle = 0 \quad (4.39)$$

avec le produit scalaire associé,

$$\langle \tilde{V}_i, \tilde{V}_j \rangle = \frac{1}{2\pi/k_c} \int_0^{2\pi/k_c} \int_0^1 \tilde{V}_i \cdot \tilde{V}_j^* dz dy, \quad (4.40)$$

où  $\tilde{V}_j^*$  est le complexe conjugué de  $\tilde{V}_j$ .

En réintroduisant les variables originelles  $t = t_2/\varepsilon^2$ ,  $\Lambda_2 = (\Lambda - \Lambda_c)/\varepsilon^2$  et  $A = \varepsilon A$ , on obtient l'équation de Landau cubique pour la perturbation de l'amplitude  $A(t)$  :

$$\tau \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\Lambda - \Lambda_c}{\Lambda_c} A - \lambda A |A|^2. \quad (4.41)$$

dans laquelle apparaît le temps caractéristique d'instabilité :

$$\tau = \frac{1}{\Lambda_c} \frac{\langle \mathcal{L}' \partial_t \tilde{V}_1, \tilde{V}^+ \rangle}{\langle \mathcal{L}_2 \tilde{V}_1, \tilde{V}^+ \rangle} \quad (4.42)$$

et le coefficient de Landau :

$$\lambda = -\frac{1}{\Lambda_c} \frac{\langle N_3, \tilde{V}^+ \rangle}{\langle \mathcal{L}_2 \tilde{V}_1, \tilde{V}^+ \rangle} \quad (4.43)$$

## 4.3 Résultats de l'analyse de stabilité faiblement non linéaire

### 4.3.1 Bifurcation supercritique/sous-critique

Le calcul du temps caractéristique d'instabilité  $\tau$  et du premier coefficient de Landau  $\lambda$  indique qu'ils sont à valeurs réelles. Il est notable que le coefficient  $\tau$  dépend seulement de  $Pr$  tandis que  $\lambda$  dépend de  $Pr$  et  $Ge$ . Dans le tableau 4.3.1 on donne, à la fois pour les configurations de Poiseuille et de Couette, les valeurs du temps caractéristique de l'instabilité  $\tau$  comme fonction de  $Pr$  et le coefficient non linéaire  $\lambda$  comme fonction du nombre de Gebhart pour une large gamme de valeurs de  $Pr$ . Le coefficient  $\tau$  est toujours positif indépendamment de  $Pr$  tandis que le coefficient non linéaire  $\lambda$  est positif ou négatif suivant les valeurs de  $Ge$  et  $Pr$ . Le signe de  $\lambda$  détermine si l'on a affaire à une bifurcation sous-critique. Les valeurs de  $\lambda$  présentées dans le tableau 4.3.1 indiquent qu'indépendamment du nombre de Gebhart la bifurcation est sous-critique (i.e.  $\lambda < 0$ ) si  $Pr < 0.25$  pour l'EPP et si  $Pr < 0.77$  pour l'ECP. Par ailleurs, pour de plus grand nombre de Prandtl il existe une valeur particulière du nombre de Gebhart,  $Ge^*$  telle que la bifurcation est : supercritique si  $Ge < Ge^*$  ou sous-critique si  $Ge > Ge^*$ .

La figure 4.7 montre la variation de  $Ge^*$  en fonction de  $Pr$  pour l'EPP (courbe 1) et pour l'ECP (courbe 2). Les variations de  $Ge^*$  deviennent importantes seulement à partir de  $Pr < 1$ , tandis que pour les fluides usuels avec  $Pr > 1$ ,  $Ge^*$  peut être approximée par sa valeur asymptotique obtenue dans le cas limite d'un nombre de Prandtl infini, soit  $Ge^* = 3.072$  pour l'EPP et  $Ge^* = 3.167$  pour l'ECP. Comme le nombre de Gebhart joue un rôle clé pour déterminer le nature supercritique ou sous-critique de la bifurcation, il est nécessaire de considérer sa valeur numérique réaliste. D'un

point de vue physique, de grandes valeurs de  $Ge$  ne peuvent se trouver qu'en géophysique ou pour les écoulements atmosphériques, on peut donc s'attendre à l'apparition d'une bifurcation sous-critique pour de tels écoulements à des nombres de Prandtl tant faibles que forts. À l'inverse de ces écoulements, et comme remarqué dans [3], si l'écoulement est réalisé pour une échelle typique de laboratoire, alors  $Ge$  est au plus de l'ordre de  $10^{-5}$ . Dans ce cas une bifurcation sous-critique ne peut se manifester que dans les fluides présentant un petit nombre de Prandtl.

$Pr$	$\lambda$ (EPP)	$Ge^*$ (EPP)	$\lambda$ (ECP)	$Ge^*$ (ECP)
$\infty$	0.262305 - 0.0853848 Ge	3.07203	0.251521 - 0.0794074 Ge	3.16748
$10^5$	0.2623046 - 0.085384681 Ge	3.072034	0.251521 - 0.0794071 Ge	3.16749
100	0.262156 - 0.08531354 Ge	3.079119	0.25058 - 0.0790809 Ge	3.16865
10	0.260701 - 0.08466750 Ge	3.072859	0.24392 - 0.0761753 Ge	3.20209
7	0.2599332 - 0.08435667 Ge	3.081342	0.240015 - 0.074817 Ge	3.20803
5	0.258828 - 0.08393909 Ge	3.0835262	0.234207 - 0.0730325 Ge	3.20689
2	0.251571 - 0.0816911 Ge	3.07953	0.19294 - 0.0643027 Ge	3.07953
1	0.23991 - 0.07778343 Ge	3.008243	-	-
0.77	-	-	0.004958 - 0.0473238 Ge	0.104756
0.76	-	-	-0.000174 - 0.0470589 Ge	-
0.7	0.213541 - 0.06972831 Ge	2.69497	-0.03512 - 0.0454038 Ge	-
0.6	-	-	-0.114965 - 0.0424162 Ge	-
0.5	0.178989 - 0.06972831 Ge	2.566955	-0.240277 - 0.0392811 Ge	-
0.4	0.142607 - 0.06579806 Ge	2.167355	-0.457787 - 0.0365766 Ge	-
0.35	0.113554 - 0.0630992 Ge	1.799605	-	-
0.28	0.0491696 - 0.0581146 Ge	0.846079	-	-
0.27	0.036404 - 0.0572161 Ge	0.636258	-	-
0.25	0.0071595 - 0.0553392 Ge	0.129375	-	-
0.24	-0.00970435 - 0.0543286 Ge	-	-	-
0.2	-0.097648 - 0.04975590 Ge	-	-	-
0.15	-0.285401 - 0.0427067 Ge	-	-	-
0.1	-0.681131 - 0.03422484 Ge	-	-	-

TABLEAU 4.2 – Coefficient  $\lambda$  de l'équation de Landau cubique pour différents  $Pr$  dans les écoulements de Poiseuille plan (EPP) et les écoulements de Couette plan (ECP).

Afin de mieux mettre en lumière le mécanisme de transition de l'instabilité supercritique/sous-critique, on étudie l'effet de chacune des trois contributions non linéaires du problème sur le premier coefficient de Landau. Les termes non linéaires définis par les équations 4.26 sont  $N_I = (N_I^\psi, 0, N_I^{\tilde{u}})^T$ ,  $N_A = (0, N_{Adv}, 0)^T$  et  $N_D = (0, N_{Diss}^{Ge} + N_{Diss}^{Pr}, 0)^T$ . Ils représentent respectivement, les termes non linéaire d'inertie, les termes non linéaires d'advection et les termes modélisant la contribution non linéaire de la dissipation visqueuse.

Le coefficient de Landau peut ainsi s'écrire comme somme de trois coefficients,

$$\lambda = \lambda_I + \lambda_A + \lambda_D \quad (4.44)$$

où

$$(\lambda_I, \lambda_A, \lambda_D) = -\frac{1}{\Lambda_c \langle \mathcal{L}_2 \tilde{V}_1, \tilde{V}^+ \rangle} \left( \langle N_I, \tilde{V}^+ \rangle, \langle N_A, \tilde{V}^+ \rangle, \langle N_D, \tilde{V}^+ \rangle \right) \quad (4.45)$$

les différentes contributions  $\lambda_I$ ,  $\lambda_A$ , et  $\lambda_D$  du coefficient de Landau  $\lambda$  sont déterminées par le calcul des intégrales 4.45 prises aux conditions critiques ( $\Lambda_c$ ,  $k_c$ ) pour différentes valeurs de  $Ge$  et  $Pr$ .

Il apparaît que  $\lambda_I$  est nul indépendamment de  $Ge$  et  $Pr$ , ce qui signifie que les termes d'inertie n'ont aucune influence sur l'évolution non linéaire de la perturbation de l'amplitude  $A(t)$ . De plus, on trouve que  $\lambda_A$  est la somme de deux coefficients,

$$\lambda_A = \lambda_{Adv} + \lambda_A^D \quad (4.46)$$

Le coefficient  $\lambda_{Adv}$  provient du terme d'advection thermique si le terme non linéaire de dissipation visqueuse est ignoré (i.e.  $\lambda_{Adv} = \lambda_A(N_D = 0)$ ), tandis que le coefficient d'advection thermique  $\lambda_A^D$  est exclusivement dû à la présence du terme non linéaire de dissipation visqueuse  $N_D$ . Par conséquent, il est naturel de définir un nouveau paramètre  $\lambda_{vd}$  qui mesure la contribution totale des termes non linéaires de dissipation visqueuse :

$$\lambda_{vd} = \lambda_A^D + \lambda_D \quad (4.47)$$

L'équation (4.44) s'écrit alors :

$$\lambda = \lambda_{Adv} + \lambda_{vd} \quad (4.48)$$

Sur la figure 4.8,  $\lambda_{Adv}$  est représenté comme fonction de  $Pr$  pour l'EPP (courbe (1)) et pour l'ECF (courbe (2)). Pour les deux configurations,  $\lambda_{Adv}$  est positif ce qui signifie que l'effet des termes non linéaires d'advection thermique est de favoriser une bifurcation supercritique.

Sur la figure 4.9 la dépendance de  $\lambda_{vd}$  par rapport à  $Pr$  pour  $Ge = 10^{-4}$  est montrée pour l'EPP (courbe (1)) et l'ECF (courbe (2)). On observe que  $\lambda_{vd}$  est négatif pour les deux configurations quel que soit le nombre de Prandtl. On en conclut donc que les termes non linéaires  $N_D$  associés à la dissipation visqueuse favorisent une bifurcation sous-critique. Le calcul de  $\lambda_{vd}$  pour différentes valeurs du nombre de Gebhart mène à des résultats qualitativement semblables.

### 4.3.2 Amplitudes stationnaires dans le cadre de validité de l'analyse faiblement non linéaire

Le cadre de validité de l'analyse faiblement non linéaire basée sur l'équation d'amplitude cubique 4.41 doit être discuté. La dérivation rigoureuse d'une telle équation requiert l'hypothèse théorique que le paramètre de bifurcation  $\Lambda$  est proche de sa valeur critique  $\Lambda_c$  au seuil de la convection (i.e.  $\epsilon \ll 1$ ). Pour les applications pratiques de l'analyse faiblement non linéaire, le cadre de validité de l'équation d'amplitude dépend du système physique considéré. Dans un article récent traitant de la convection d'amplitude finie et du transfert de chaleur dans une couche poreuse inclinée, Ouarzazi et al [39] ont dérivé une équation de Landau par une analyse faiblement non linéaire. En comparant les prédictions théoriques du nombre de Nusselt avec des données expérimentales, ils ont trouvé une gamme plus large qu'attendue de validité de l'équation d'amplitude, i.e.  $\epsilon^2 = 2$  où  $\epsilon$  mesure la distance au nombre de Darcy-Rayleigh critique.

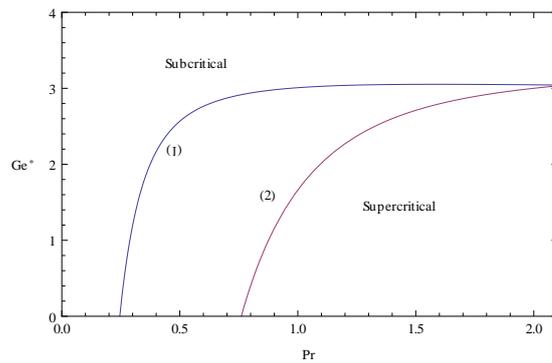


FIGURE 4.7 – Valeur critique  $Ge^*$  du nombre de Gebhart au dessus duquel la bifurcation devient sous-critique en fonction du nombre de Prandtl pour l'écoulement de Poiseuille plan (1) et l'écoulement de Couette plan (2).

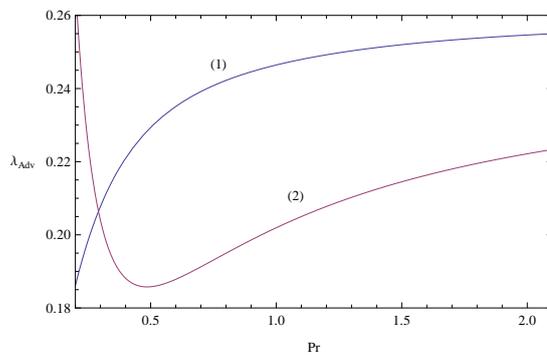


FIGURE 4.8 – Dépendance du coefficient  $\lambda_{Adv}$  en fonction du nombre Prandtl, pour l'écoulement de Poiseuille plan (1) et l'écoulement de Couette plan (2).

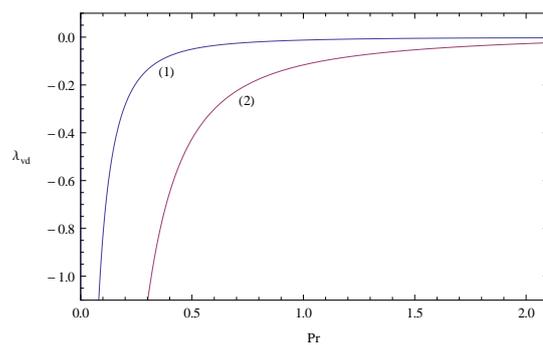


FIGURE 4.9 – Dépendance du coefficient  $\lambda_{vd}$  en fonction du nombre Prandtl avec  $Ge = 10^{-4}$ , pour l'écoulement de Poiseuille plan (1) et l'écoulement de Couette plan (2).

D'autre part, Generalis et Fujimura [22] ont examiné le domaine de validité des équations d'amplitude dans le cadre du problème de Rayleigh-Bénard. Ils ont mis en œuvre une analyse numérique sur les bifurcations de solutions stationnaires pour plusieurs nombres de Prandtl. Ils ont montré que l'équation d'amplitude a un large domaine de validité pour des nombres de Prandtl plus grands que  $O(1)$ . Pour des fluides avec un faible nombre de Prandtl, ils ont trouvé un très petit domaine de validité.

Afin d'évaluer la validité de la présente analyse de stabilité non linéaire, nous utilisons l'argument de Métivier et al. [43] dans leur étude de l'instabilité thermoconvective mettant en œuvre des fluides visco-plastiques. Cet argument stipule que la condition nécessaire de validité de l'expansion asymptotique de l'équation 4.30 peut s'écrire avec nos notations :

$$|A| \ll |A_{Max}| = \frac{Max(|\tilde{V}_1|)}{Max(|\tilde{V}_2|)} \quad (4.49)$$

On observe à partir des résultats numériques montrés sur les figures 4.3 et 4.5 pour l'EPP que  $Max(|\tilde{V}_1|) = Max(|\Theta_1(z)|)$  et  $Max(|\tilde{V}_2|) = Max(|\Theta_{20}(z)|)$  pour les trois valeurs fixées du nombre de Prandtl. La condition 4.49 implique ainsi  $|A_{Max}| = 0.69; 0.76; 1.86$  respectivement pour  $Pr = 10^5; Pr = 1; Pr = 0.27$ . De la même manière, pour l'ECP on trouve que  $|A_{Max}| = 0.68; 0.95; 1.74$  respectivement pour  $Pr = 10^5; Pr = 2; Pr = 0.77$ ,  $Ge$  étant fixé à  $10^{-4}$ .

L'équation d'amplitude 4.41 prédit une instabilité supercritique si le coefficient de Landau  $\lambda$  est positif, avec une solution d'équilibre non linéaire stationnaire :

$$|A_s| = \left| \frac{\Lambda - \Lambda_c}{\lambda \Lambda_c} \right|^{1/2} \quad (4.50)$$

Si  $\lambda$  est négatif, une instabilité sous-critique est prévue à partir de l'amplitude seuil  $|A_s|$ , ce qui limite le bassin d'attraction des écoulements de Poiseuille et Couette plans linéairement stables pour  $\Lambda < \Lambda_c$ . Dans ce cas, l'équation d'amplitude cubique (4.41) ne fournit pas d'équilibre stable d'amplitude finie. Par conséquent il est nécessaire de mener l'analyse à des ordres supérieurs en amplitude. Cette tâche est hors du cadre de cette thèse.

La figure 4.10 présente le diagramme de bifurcation pour différents nombres de Prandtl, montrant les amplitudes à l'équilibre quand la bifurcation est supercritique (lignes continues) et les amplitudes seuils (lignes discontinues) quand la bifurcation est sous-critique. Pour des valeurs fixées de  $\frac{\Lambda - \Lambda_c}{\Lambda_c}$ ,  $|A_s|$  décroît quand  $Pr$  augmente dans le cas de bifurcations supercritiques. Pour les bifurcations sous-critiques, le diagramme de bifurcation indique que l'amplitude seuil diminue avec l'augmentation de  $Pr$ , ce qui signifie que les écoulements de Poiseuille et Couette deviennent fortement sensibles aux perturbations d'amplitude finie quand  $Pr$  diminue.

### 4.3.3 Transfert de chaleur

L'état de conduction est associé à un flux de chaleur non uniforme  $J_{cond}(z) = -\frac{dT_b}{dz}$  traversant verticalement la couche fluide. L'expression de la température de base  $T_b(z)$  est donnée par 1.62. En présence d'un champ de vitesse convectif, le flux vertical total est  $J = J_{cond}(z) + J_{conv}(y, z)$ , où  $J_{conv}$  est indépendant de  $x$  pour les rouleaux longitudinaux dont l'axe est suivant la direction  $x$  et s'écrit :

$$J_{conv}(y, z) = -\frac{\partial \psi}{\partial y}(T_b + \theta) - \frac{d\theta}{dz}. \quad (4.51)$$

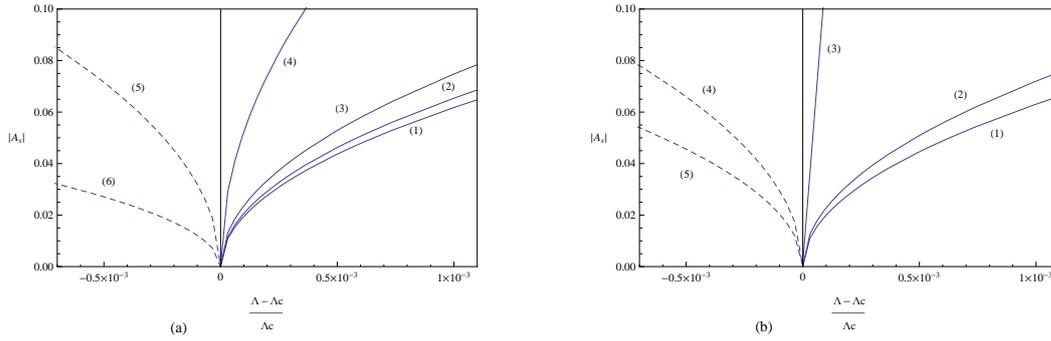


FIGURE 4.10 – Amplitude stationnaire comme fonction de la distance au seuil critique : (a) configuration de Poiseuille (1)  $Pr = 10^5$ ; (2)  $Pr = 1$ ; (3)  $Pr = 0.5$ ; (4)  $Pr = 0.27$ ; (5)  $Pr = 0.2$ ; (6)  $Pr = 0.1$  et (b) configuration de Couette (1)  $Pr = 10^5$ , (2)  $Pr = 2$ , (3)  $Pr = 0.77$ ; (4)  $Pr = 0.6$ ; (5)  $Pr = 0.5$ .  $Ge$  est fixé à  $10^{-4}$ .

La contribution  $-\frac{\partial\psi}{\partial y}(T_b + \theta)$  au flux convectif  $J_{conv}$  décrit le transport convectif de la chaleur par le champ de vitesse. Le terme  $-\frac{d\theta}{dz}$  est le flux diffusif de la chaleur, généré par le gradient de température induit par la dissipation visqueuse due à l'écoulement de base.

Nous définissons le flux convectif latéral moyen par :

$$\langle J_{conv} \rangle(z) = \frac{1}{2\pi/k_c} \int_0^{2\pi/k_c} J_{conv}(y, z) dy \quad (4.52)$$

On remarque qu'en raison des conditions aux limites 4.27 imposées en  $z = 0$  et  $z = 1$ ,  $J_{conv}(z = 0) = 0$  et  $J_{conv}(z = 1) = -\frac{d\theta}{dz}(z = 1)$ . Cela veut dire que le flux de chaleur moyen  $\langle J_{conv} \rangle(z)$  est dépendant de  $z$  et il est par conséquent instructif d'étudier sa distribution verticale dans le fluide.

Les figures 4.11 et 4.12 montrent des courbes représentatives des variations verticales du flux de chaleur moyen  $\langle J_{conv} \rangle(z)$  pour (a) Poiseuille et (b) Couette. Ces courbes sont calculées pour  $\Lambda = 1.1\Lambda_c$ ,  $Ge = 10^{-4}$  et différents nombres de Prandtl correspondant à des bifurcations supercritiques. La figure 4.11 présente les résultats pour des nombres de Prandtl fort ou modérés tandis que la figure 4.12 se focalise sur le régime des petits nombre de Prandtl. Il apparaît que le flux de chaleur moyen est plus petit de plusieurs ordres de grandeur pour de grands nombres de Prandtl par rapport à de faibles nombres de Prandtl. D'autre part, le flux de chaleur moyen présente un maximum situé près du milieu de la couche fluide pour de grands nombre de Prandtl. Lorsque le nombre de Prandtl diminue, ce maximum se déplace vers le haut et fini par atteindre la paroi supérieure.

Notre but est maintenant de déterminer la relation entre le flux de chaleur total et le flux de chaleur dans le régime conductif, les flux étant déterminés à la paroi supérieure. Les contributions relatives de la conduction et de la convection sur la chaleur transférée à la paroi supérieure est exprimée en utilisant le nombre de Nusselt sans dimension  $Nu$  défini par :

$$Nu(z = 1) = 1 + \frac{\langle J_{conv}(z = 1) \rangle}{J_{cond}(z = 1)} \quad (4.53)$$

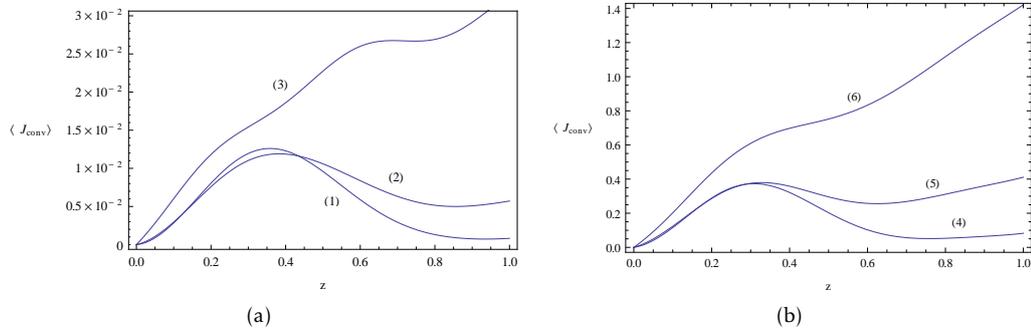


FIGURE 4.11 – Distribution verticale du flux convectif moyen en  $\Lambda = 1.1\Lambda_c$  pour des nombres de Prandtl moyens et grands : (a) écoulement de Poiseuille plan (1)  $Pr = 10^5$ ; (2)  $Pr = 5$ , (3)  $Pr = 2$  et (b) écoulement de Couette plan (4)  $Pr = 10^5$ , (5)  $Pr = 20$ , (6)  $Pr = 10$ , avec  $Ge = 10^{-4}$ .

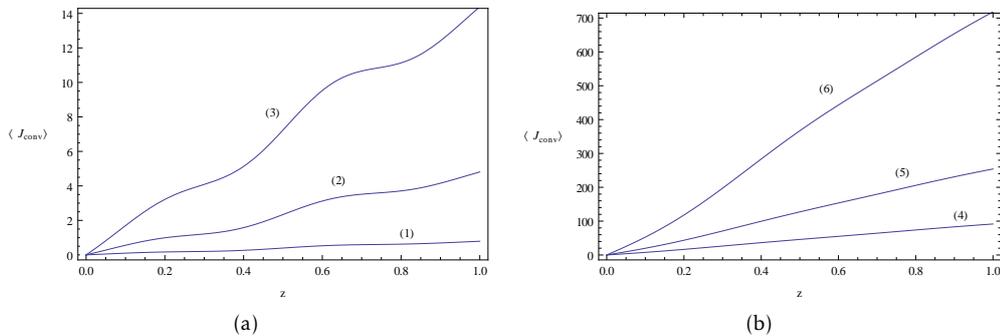


FIGURE 4.12 – Distribution verticale du flux convectif moyen en  $\Lambda = 1.1\Lambda_c$  pour de petits nombres de Prandtl : (a) écoulement de Poiseuille plan (1)  $Pr = 0.5$ , (2)  $Pr = 0.31$ , (3)  $Pr = 0.27$  et (b) écoulement de Couette plan (4)  $Pr = 1.5$ , (5)  $Pr = 1.1$ , (6)  $Pr = 0.9$ , avec  $Ge = 10^{-4}$ .

Qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$Nu = 1 - \frac{1}{12\Lambda} |A_s|^2 \frac{d\Theta_{20}}{dz} \Big|_{z=1} \quad \text{pour l'EPP} \quad (4.54)$$

$$Nu = 1 - \frac{1}{\Lambda} |A_s|^2 \frac{d\Theta_{20}}{dz} \Big|_{z=1} \quad \text{pour l'ECP} \quad (4.55)$$

D'après la figure 4.5(d), on remarque que  $\frac{d\Theta_{20}}{dz} \Big|_{z=1}$  est négatif et que sa valeur absolue décroît quand le nombre de Prandtl augmente. La même tendance est observée dans les tracés de  $|A_s|$  montrés sur la figure 4.10. Par conséquent, le nombre de Nusselt évalué à la paroi supérieure diminue quand le nombre de Prandtl augmente. En remplaçant la solution de  $|A_s|$  donnée par 4.50 dans 4.54 et 4.55, on obtient les relations suivantes :

$$Nu = 1 - \frac{1}{12\lambda\Lambda_c} \frac{d\Theta_{20}}{dz} \Big|_{z=1} \left( \frac{\Lambda - \Lambda_c}{\Lambda} \right) \quad \text{pour l'EPP} \quad (4.56)$$

$$Nu = 1 - \frac{1}{\lambda\Lambda_c} \frac{d\Theta_{20}}{dz} \Big|_{z=1} \left( \frac{\Lambda - \Lambda_c}{\Lambda} \right) \quad \text{pour l'ECP} \quad (4.57)$$

La variation du nombre de Nusselt à la paroi supérieure pour l'EPP et l'ECP comme fonction de  $\frac{\Lambda - \Lambda_c}{\Lambda}$  est montré figure 4.13 pour des petits nombres de Prandtl et figure 4.14 pour des valeurs de Prandtl modérées à fortes. En comparant les deux figures, on remarque comme attendu que les pentes du nombre de Nusselt  $S = -\frac{1}{12\lambda\Lambda_c} \frac{d\Theta_{20}}{dz} \Big|_{z=1}$  pour l'EPP et  $S = -\frac{1}{\lambda\Lambda_c} \frac{d\Theta_{20}}{dz} \Big|_{z=1}$  pour l'ECP diminue drastiquement avec l'augmentation du nombre de Prandtl.

#### 4.3.4 Lignes de courant et isothermes

On trace les isolignes de courant 4.15 et les isothermes 4.16 pour l'écoulement de Poiseuille plan. La partie linéaire correspond à  $\psi_1, \theta_1$  4.33 et la partie non linéaire correspond à  $\psi_2, \theta_2$  4.36. Enfin on trace le total soit la somme des parties linéaires et non linéaires. Les figures sont tracées pour un grand nombre de Prandtl  $Pr = 10^5$  et pour  $Pr = 0.27$  soit proche du seuil de l'instabilité sous-critique. Le paramètre  $\Lambda$  est pris égal à  $\Lambda = 1.001 \Lambda_c$  de sorte à rester dans le cadre de validité de l'équation d'amplitude.

Les résultats présentent des différences marquées selon que  $Pr$  est grand ou petit. Pour  $Pr = 10^5$  les lignes de courant tant linéaires que non linéaires présentent un profil quasi symétrique verticalement. On observe que les non linéarités présentent deux rouleaux pour un rouleau linéaire. L'amplitude des non linéarités est bien plus faible que celle des structures linéaires. Ce résultat est cohérent avec la valeur de  $\Lambda$ , choisie très proche du seuil de la convection. Pour les isothermes la contribution non linéaire est positive dans la partie supérieure et négative dans la partie inférieure, ce qui se traduit physiquement par un gradient de température positif à la paroi supérieure. Les non linéarités ont donc un rôle stabilisant ce qui favorise une bifurcation supercritique confirmant ainsi les résultats obtenus dans la section 4.3.1.

Pour  $Pr = 0.27$  soit proche de la transition vers une bifurcation sous-critique, la figure 4.15 montre que les lignes de courant ne sont que faiblement affectées par le nombre de Prandtl. On remarque que la partie non linéaire présente un signe inversé par rapport à  $Pr = 10^5$  et un léger décalage des structures convectives vers le bas ; ces deux phénomènes traduisent le profil de  $Im(\Psi_{22})$  montré figure 4.5(a) qui présente un signe négatif et un maximum dans la moitié inférieure de la conduite.

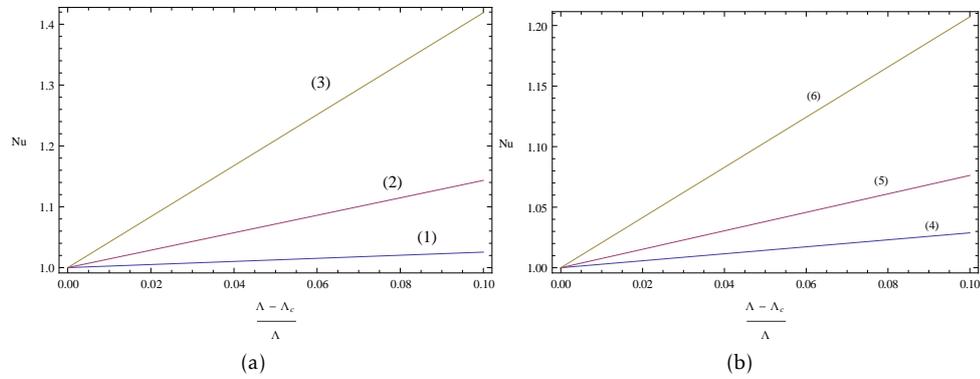


FIGURE 4.13 – Nombre de Nusselt dans le régime de petits nombres de Prandtl : (a) configuration de Poiseuille (1)  $Pr = 0.5$ , (2)  $Pr = 0.31$ , (3)  $Pr = 0.27$  et (b) configuration de Couette (4)  $Pr = 1.5$ , (5)  $Pr = 1.1$ , (6)  $Pr = 0.9$

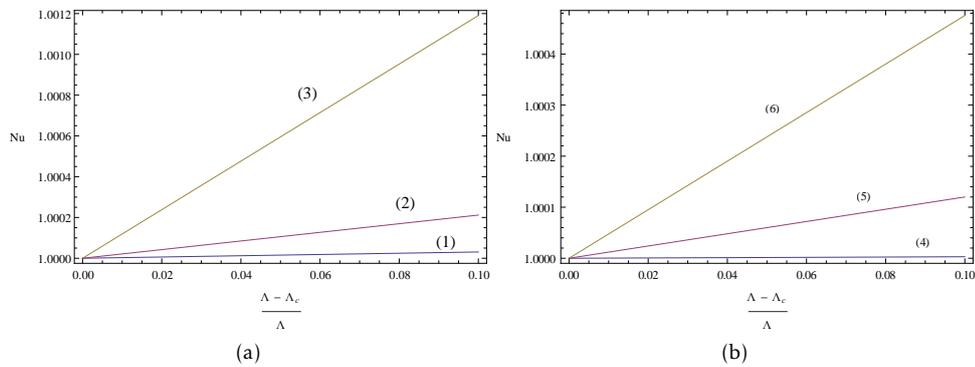


FIGURE 4.14 – Nombre de Nusselt dans le régime de nombres de Prandtl modérés et grands : (a) configuration de Poiseuille (1)  $Pr = 10^5$ ; (2)  $Pr = 5$  et (3)  $Pr = 2$  et (b) configuration de Couette (4)  $Pr = 10^5$ , (5)  $Pr = 20$ , (6)  $Pr = 10$ .

En revanche les isothermes pour  $Pr = 0.27$  montrés figure 4.16 présentent des différences marquées par rapport au régime d'un grand nombre de Prandtl. Tout d'abord la contribution linéaire présente maintenant une stratification dans la partie inférieure de la conduite, ce qui induit une inversion du signe dans la direction verticale et la présence d'isothermes fermés alors que pour  $Pr = 10^5$  les isothermes sont perpendiculaires à la paroi inférieure en raison de la condition à la limite adiabatique à la paroi inférieure. Ce phénomène avait déjà été constaté pour les fonctions propres sur les figures 4.3(b) (EPP) et 4.4(b) (ECP), ce qui indique pour cette dernière que l'on devrait observer le même phénomène pour les isothermes de l'écoulement de Couette plan.

Le signe de  $\Theta_{20}$  comme de  $\Theta_{22}$  change et devient respectivement négatif/positif pour un petit nombre de Prandtl, comme montré sur la figure 4.5(c),(d). Cela confirme les observations qualitatives faites à partir des solutions à l'ordre 2, notamment sur la correction  $\frac{d\Theta_{20}}{dz}$  du gradient de la température de base. Pour  $Pr = 0.27$ , nous voyons figure sur la 4.16 que cette correction est négative avec un faible gradient de température à la paroi supérieure, tandis que la correction devient positive avec un gradient de température non négligeable du milieu de la cellule à la paroi inférieure. Une correction positive du gradient de température de base signifie que les premières non linéarités induisent un effet stabilisant ce qui se traduit par une bifurcation supercritique comme vue partie 4.3.1. Inversement, une correction négative du gradient de température de base induit un effet déstabilisant des non-linéarités et peuvent donc être considérées comme un précurseur à l'émergence de la bifurcation sous-critique constatée pour les très petits nombres de Prandtl. Enfin, le total des parties linéaires et non linéaires tant pour les lignes de courant que pour les isothermes, est dominé par l'influence du mode linéaire. Ce résultat était attendu étant donné que les solutions sont calculées très proche du seuil, pour une amplitude  $|A_s| = 10^{-3}$ .

## 4.4 Conclusion

- Dans ce chapitre la stabilité faiblement non linéaire des écoulements de Poiseuille et Couette plans avec une paroi supérieure isotherme et une paroi inférieure adiabatique a été étudiée. Cette chapitre étend donc les travaux de Barletta et Nield [49] pour l'écoulement de Poiseuille plan, et de Barletta, Celli et Nield [3] pour l'écoulement de Couette plan.
- L'étude des solutions au second ordre met en évidence de fortes différences de l'effet du nombre de Prandtl suivant qu'il soit grand ou petit. Pour un grand nombre de Prandtl les premières non linéarités se traduisent par une correction positive du gradient de température de base ce qui a pour effet physique de favoriser une bifurcation supercritique. En revanche dans le régime d'un faible nombre de Prandtl, les premières non linéarités se traduisent par une correction négative du gradient de température de base ce qui peut s'interpréter physiquement comme le précurseur d'une bifurcation sous-critique.
- L'étude de l'équation d'amplitude au troisième ordre montre que pour des valeurs particulières des paramètres  $Pr$  et  $Ge$  une bifurcation sous-critique est susceptible de se présenter. Lorsque le nombre de Gebhart dépasse une valeur critique  $Ge_c = 3.072$  pour l'écoulement de Poiseuille et  $Ge_c = 3.167$  pour l'écoulement de Couette, la bifurcation est sous-critique quelle que soit la valeur du nombre de Prandtl, sinon l'instabilité sous-critique se manifeste quel que soit  $Ge$  en dessous d'un certain nombre de Prandtl :  $Pr = 0.25$  pour l'écoulement de Poiseuille et  $Pr = 0.77$  pour l'écoulement de Couette.

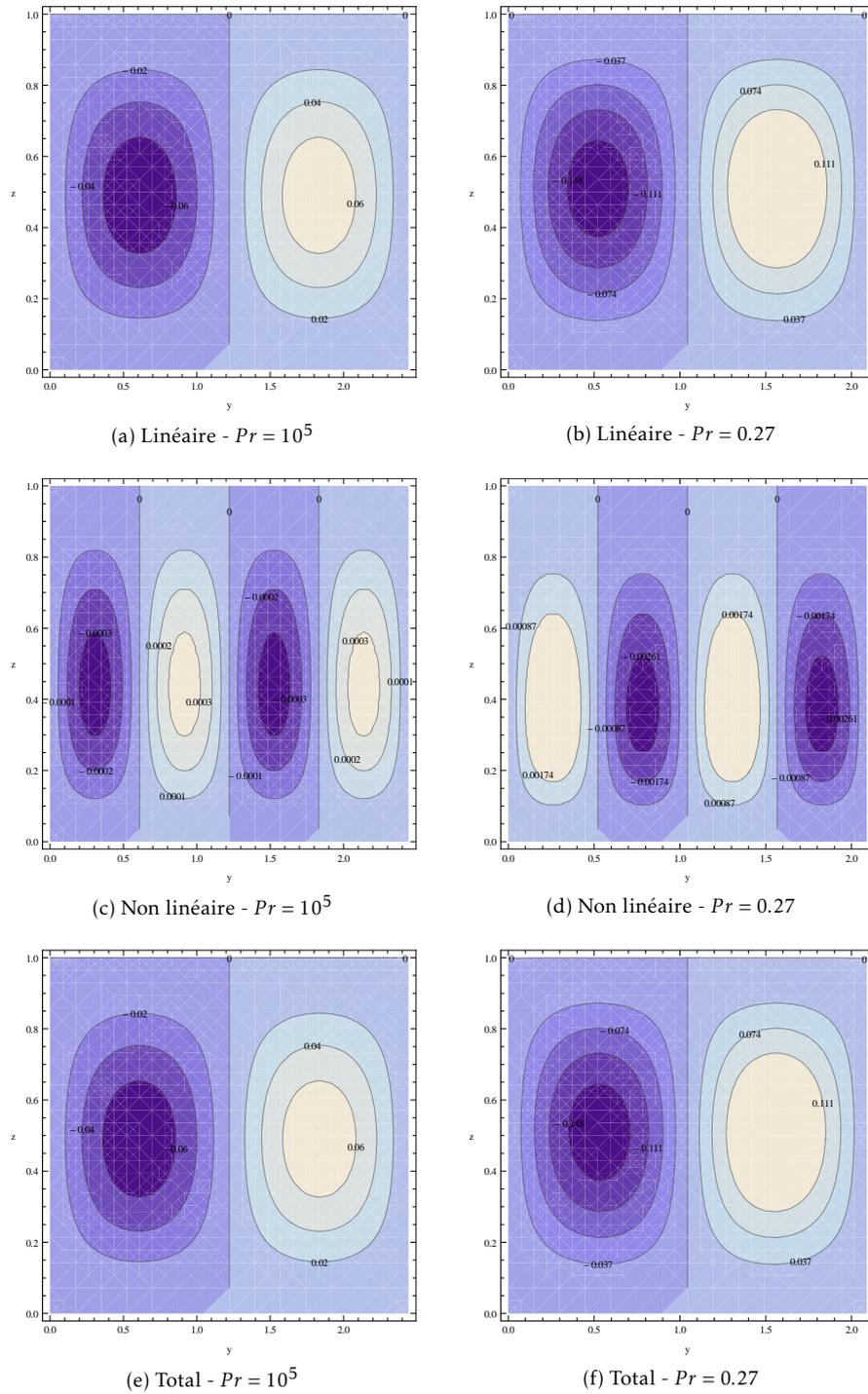


FIGURE 4.15 – Partie linéaire, non linéaire et total des lignes de courant pour  $Pr = 10^5$  et  $Pr = 0.27$ , avec  $\Lambda = 0.001 \Lambda_c$  et  $Ge = 10^{-4}$ .

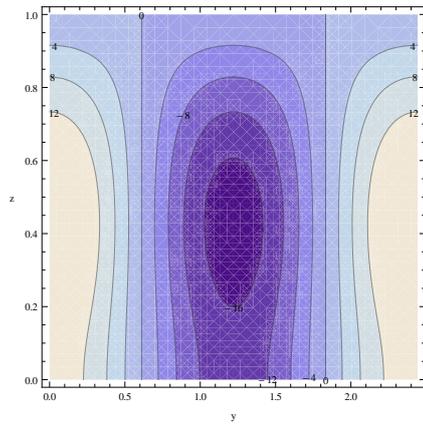
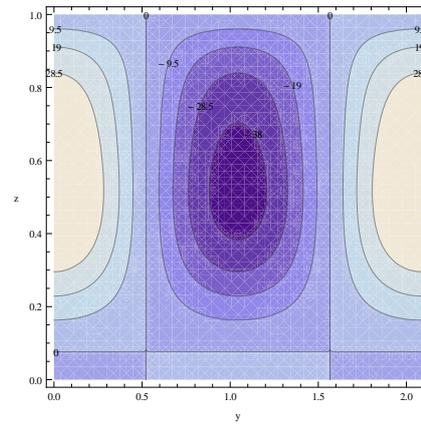
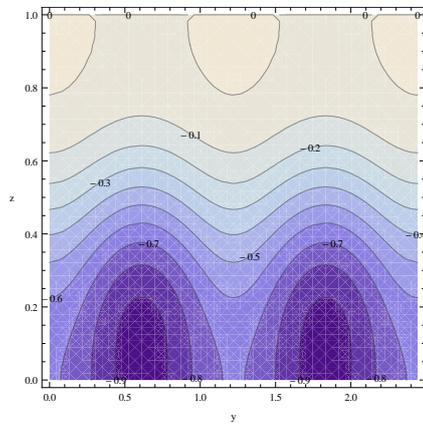
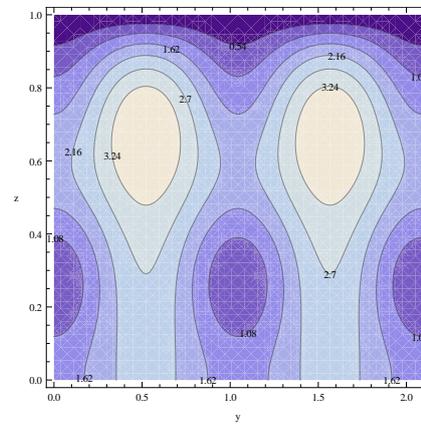
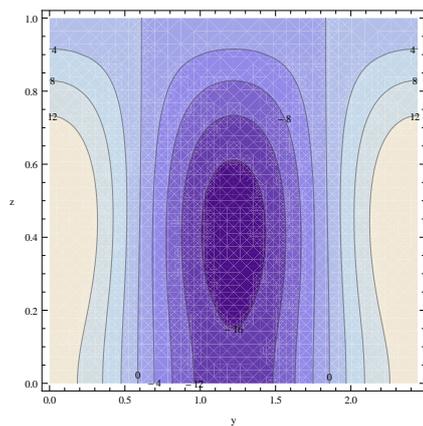
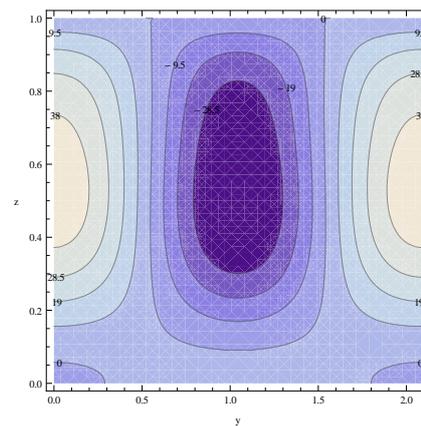
(a) Linéaire -  $Pr = 10^5$ (b) Linéaire -  $Pr = 0.27$ (c) Non linéaire -  $Pr = 10^5$ (d) Non linéaire -  $Pr = 0.27$ (e) Total -  $Pr = 10^5$ (f) Total -  $Pr = 0.27$ 

FIGURE 4.16 – Partie linéaire, non linéaire et total des isothermes pour  $Pr = 10^5$  et  $Pr = 0.27$ , avec  $\Lambda = 0.001 \Lambda_c$  et  $Ge = 10^{-4}$ .

- Le calcul du flux de chaleur transmis par convection  $J_{conv}$  montre de même une forte dépendance en fonction du nombre de Prandtl. Pour un nombre de Prandtl fort à modéré le flux convectif moyen présente un maximum situé près du milieu de la conduite. Pour de faibles nombre de Prandtl ce maximum s'est déplacé à la paroi supérieure et son ordre de grandeur augmente drastiquement. Le nombre de Nusselt  $Nu$  qui évalue la contribution relative de la conduction et de la convection est calculé à la paroi supérieure.  $Nu$  augmente linéairement en fonction de la distance relative au seuil de l'instabilité, avec une pente qui augmente fortement lorsque le nombre de Prandtl diminue.

# Stabilité linéaire des écoulements de Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette de fluides viscoélastiques

Dans ce chapitre on considère la même configuration que dans le chapitre 2 mais cette fois ci avec un fluide viscoélastique de modèle constitutif Oldroyd-B présenté dans la partie 1.2.1. L'effet de la dissipation visqueuse est d'autant plus important que la viscosité du fluide est grande, il est donc particulièrement pertinent d'étudier son effet sur les fluides viscoélastiques qui ont de nombreuses applications industrielles.

## 5.1 Équations aux perturbations linéarisées et développement en modes normaux

Les équations 1.47, 1.48, 1.49 et 1.50 sont linéarisées de la même manière que dans le chapitre 2. Dans le cas d'un fluide viscoélastique il faut de plus linéariser les coefficients de contrainte viscoélastique  $\tau^{ij}$  donnés par la loi de comportement 1.50. Les variables du problème sont décomposées sous la forme d'une solution de base à laquelle on superpose une perturbation infinitésimale :

$$\begin{cases} T = T_b + \epsilon \theta(x, y, z, t) \\ \mathbf{u} = u_b(z)\mathbf{e}_x + \epsilon \mathbf{v}(x, y, z, t) \\ P = P_b(x, z) + \epsilon p(x, y, z, t) \\ \tau^{ij} = \tau_b^{ij} + \epsilon \tau_p^{ij} \end{cases} \quad (5.1)$$

Les équations linéarisées s'écrivent pour un fluide viscoélastique :

**L'équation du mouvement projetée sur x :**

$$\frac{1}{Pr} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + Pe f(z) \frac{\partial u}{\partial x} + w Pe f'(z) \right\} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau^{13}}{\partial z} \quad (5.2)$$

L'équation du mouvement projetée sur  $y$  :

$$\frac{1}{Pr} \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + Pe f(z) \frac{\partial v}{\partial x} \right\} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau^{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau^{23}}{\partial z} \quad (5.3)$$

L'équation du mouvement projetée sur  $z$  :

$$\frac{1}{Pr} \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + Pe f(z) \frac{\partial w}{\partial x} \right\} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \theta + \frac{\partial \tau^{31}}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{32}}{\partial y} + \frac{\partial \tau^{33}}{\partial z} \quad (5.4)$$

L'équation de l'énergie :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + Pe f(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{dT_b}{dz} = \nabla^2 \theta + Ge \left[ Pe f'(z) \tau^{13} + \tau_b^{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_b^{13} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \quad (5.5)$$

Par la suite, et dans certains cas, on aura besoin de réduire le nombre de variables de notre système en éliminant la pression. Par application du double rotationnel à l'équation du mouvement et par projection du résultat sur l'axe vertical  $Oz$ , on obtient l'équation :

Le double rotationnel de l'équation du mouvement projetée sur  $z$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w + Re \left( f(z) \nabla^2 - f''(z) \right) \frac{\partial w}{\partial x} - \nabla_H^2 \theta + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \tau^{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau^{22}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau^{12}}{\partial x \partial y} \right) \\ + \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial \tau^{13}}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{23}}{\partial y} \right) - \nabla_H^2 \frac{\partial \tau^{33}}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

On se reportera à l'annexe A pour le détail du calcul des coefficients du tenseur des contraintes viscoélastiques  $\tau$ . On ne retient ici que les coefficients qui interviennent dans les équations 5.2, 5.3, 5.4 et 5.5.

Les conditions aux limites sont les mêmes que pour le cas Newtonien :

$$\begin{cases} \theta = 0 \text{ en } z = -\frac{1}{2} \text{ et } \theta = 0 \text{ en } z = \frac{1}{2} \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } z = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \quad (5.7)$$

### 5.1.1 Développement en modes normaux

Le système étant d'extension infinie suivant les directions horizontales  $x$  et  $y$  avec des conditions aux limites qui ne dépendent que de  $z$ , on peut donc chercher une solution en modes de Fourier suivant ces directions. On développe les variables  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\theta$ ,  $p$  et  $\tau^{ij}$  comme suit :

$$\begin{cases} u = u_n(z) e^{ik_x x + ik_y y} e^{(\sigma - i\omega)t} \\ v = v_n(z) e^{ik_x x + ik_y y} e^{(\sigma - i\omega)t} \\ w = w_n(z) e^{ik_x x + ik_y y} e^{(\sigma - i\omega)t} \\ \theta = \theta_n(z) e^{ik_x x + ik_y y} e^{(\sigma - i\omega)t} \\ p = p_n(z) e^{ik_x x + ik_y y} e^{(\sigma - i\omega)t} \\ \tau^{ij} = \tau_n^{ij}(z) e^{ik_x x + ik_y y} e^{(\sigma - i\omega)t} \end{cases} \quad (5.8)$$

où  $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y$  est le vecteur d'onde,  $\sigma$  le taux de croissance temporel de la perturbation,  $\omega$  la fréquence d'oscillation,  $k_x$  et  $k_y$  sont les composantes du vecteur d'onde suivant les axes  $Ox$  et  $Oy$  respectivement. Le signe du taux de croissance temporel  $\sigma$  détermine le comportement temporel des perturbations :

- Si  $\sigma < 0$  alors  $e^{\sigma t}$  est une fonction décroissante. Les perturbations s'atténuent dans le temps et l'état de base est retrouvé à des temps asymptotiquement grands : l'état de base est stable dans cas.
- Si  $\sigma = 0$  alors les perturbations ne sont ni amplifiées ni atténuées : le système est en état de stabilité marginale.
- Si  $\sigma > 0$  alors  $e^{\sigma t}$  est une fonction croissante, les perturbations sont amplifiées et l'état de base du système est dit instable.

Si la fréquence  $\omega$  est nulle l'instabilité est alors stationnaire, autrement elle traduit un caractère oscillatoire de l'instabilité. Par la suite, on cherchera à déterminer les conditions de la naissance de l'instabilité en focalisant l'étude au cas de la stabilité marginale soit  $\sigma = 0$ .

Les équations s'écrivent alors en modes normaux :

**L'équation de continuité :**

$$i k_x u_n + i k_y v_n + D w_n = 0 \quad (5.9)$$

**L'équation du mouvement projeté sur x :**

$$\frac{1}{\rho r} (-i\omega u_n + i k_x P e f(z) u_n + w_n P e f'(z)) = -i k_x p_n + i k_x \tau_n^{11} + i k_y \tau_n^{12} + D \tau_n^{13} \quad (5.10)$$

**L'équation du mouvement projeté sur y :**

$$\frac{1}{\rho r} (-i\omega v_n + i k_x P e f(z) v_n) = -i k_y p_n + i k_x \tau_n^{21} + i k_y \tau_n^{22} + D \tau_n^{23} \quad (5.11)$$

**L'équation du mouvement projeté sur z :**

$$\frac{1}{\rho r} (-i\omega w_n + i k_x P e f(z) w_n) = -D p_n + \theta_n + i k_x \tau_n^{31} + i k_y \tau_n^{32} + D \tau_n^{33} \quad (5.12)$$

**L'équation de conservation de l'énergie :**

$$\begin{aligned} -i\omega \theta_n + i k_x P e f(z) \theta_n - R a w_n + P e^2 G e g'(z) w_n - (D^2 - k^2) \theta_n \\ - G e \left[ P e f'(z) \tau_n^{13} + i k_x \tau_b^{11} u_n + \tau_b^{13} (i k_x w_n + D u_n) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

où  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ ,  $D = \frac{\partial}{\partial z}$  et  $D^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

Les conditions aux limites s'écrivent en modes normaux :

$$\begin{cases} \theta_n = 0 \text{ en } z = -\frac{1}{2} \text{ et } \theta_n = 0 \text{ en } z = \frac{1}{2} \\ w_n = Dw_n = 0 \text{ en } z = \pm\frac{1}{2} \end{cases} \quad (5.14)$$

### Rouleaux transversaux

Les rouleaux transversaux sont définis par  $k_y = 0$  et  $k_x = k$ . Dans ce cas, en utilisant l'équation de continuité 5.9 afin de remplacer  $u_n$  par  $-\frac{1}{ik_x}Dw_n$  et en introduisant les opérateurs linéaires J et L, le problème se réduit à deux équations :

**Le double rotationnel de l'équation du mouvement, projeté sur z :**

$$\begin{aligned} \frac{i}{Pr} \left( (k_x Re Pr f(z) - i\omega)(D^2 - k^2) - k_x Re Pr f''(z) \right) w_n + k^2 D \tau_n^{33} \\ + DL(w_n) + (D^2 + k^2) J(w_n) + k^2 \theta_n = 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

**L'équation de l'énergie :**

$$\begin{aligned} i\omega \theta_n + ik_x Pe f(z) \theta_n - Ra w_n + \Lambda g'(z) w_n - (D^2 - k^2) \theta_n \\ - Ge Pe \left[ f'(z) \tau_n^{13} - \lambda_1 (1 - \Gamma) Pe (f'(z))^2 Dw_n + f'(z) \left( ik_x w_n - \frac{1}{ik_x} D^2 w_n \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Dans ce cas les seules variables du problème sont la température  $\theta$  et la composante verticale de la vitesse  $w$  : le problème est bidimensionnel.

Les opérateurs linéaires permettant de réduire J et L s'écrivent pour les rouleaux transversaux :

$$\begin{aligned} L(w_n(z)) &= -k^2 \tau_n^{11}(z) \\ &= \left[ 2ik Pe \lambda_1 f'(z) J(w_n(z)) + \left( 2ik Pe \lambda_1 (2\Gamma - 1) f'(z) D^2 \right. \right. \\ &+ 4k^2 Pe^2 \lambda_1^2 (1 - \Gamma) (f'(z))^2 + 2k^2 + 2ik^2 k Pe \lambda_1 \Gamma f(z) \\ &- 2ik^2 \omega \lambda_1 \Gamma D + 4k^2 Pe^2 \lambda_1^2 (1 - \Gamma) f'(z) f''(z) \\ &\left. \left. + 2ik^3 Pe \lambda_1 \Gamma f'(z) \right) w_n \right] / \left[ 1 + ik Pe \lambda_1 f(z) - i\omega \lambda_1 \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned}
J(w_n(z)) &= ik\tau_n^{13}(z) \\
&= \left[ ikPe\lambda_1 f'(z)\tau_n^{(3,3)}(z) - \left( 2ikPe\lambda_1\Gamma f'(z)D - i\omega\lambda_1\Gamma D^2 \right. \right. \\
&\quad + (1+k^2)(1+ikPe\lambda_1\Gamma f(z)) + ikPe\lambda_1(1-\Gamma)f''(z) - i\omega k^2\lambda_1\Gamma \\
&\quad \left. \left. + 2k^2Pe^2\lambda_1^2(1-\Gamma)(f'(z))^2 \right) w_n \right] / [1+ikPe\lambda_1 f(z) - i\omega\lambda_1]
\end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}
\tau_n^{33}(z) &= \left[ \left( (2+2ikPe\lambda_1\Gamma f(z) - 2i\omega\lambda_1\Gamma)D \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2ikPe\lambda_1(1-\Gamma)f'(z) \right) / (1+ikPe\lambda_1 f(z) - i\omega\lambda_1) \right] w_n(z)
\end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}
\tau_n^{13}(z) &= \frac{\lambda_1}{1+ik\lambda_1Pe f(z) - i\omega\lambda_1} \left( Du_b\tau_n^{33} - w_n D^2 u_b + Du_b D w_n \right. \\
&\quad \left. + \Gamma [w_n D^2 u_b - 3Du_b D w_n] + (1-i\omega\lambda_1\Gamma)Du_n + ik\Gamma(1-i\omega\lambda_1 + ik\lambda_1 u_b)w_n \right)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

### 5.1.2 Rouleaux longitudinaux

Les rouleaux longitudinaux sont définis par  $k_y = k$  et  $k_x = 0$ . Dans ce cas, les équations du problème peuvent s'écrire d'une façon générale :

$$\begin{aligned}
&\frac{L_1}{Pr} (-i\omega u_n + w_n Pe f'(z)) - L_2 (D^2 - k^2) u_n \\
&- \lambda_1 Pe \left( \frac{L_2}{L_1} - \Gamma \right) (f'(z)(D^2 - k^2) w_n + 2f''(z)D w_n) = 0
\end{aligned} \tag{5.21}$$

$$L_1 \left( \frac{-i\omega}{Pr} (D^2 - k^2) w_n + k^2 \theta_n \right) - L_2 (D^2 - k^2)^2 w_n = 0 \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
&L_1 (-i\omega \theta_n - Ra w_n + \Lambda g'(z)w_n - (D^2 - k^2)\theta_n) = \\
&\Lambda f'(z) \left[ \lambda_1 f'(z) \left( 1 + 2\frac{L_2}{L_1} - 3\Gamma \right) D w_n - \lambda_1 (1-\Gamma) f''(z) w_n + \frac{(1+L_2)}{Pe} D u_n \right]
\end{aligned} \tag{5.23}$$

avec :

$$L_1 = 1 - i\omega\lambda_1 \quad L_2 = 1 - i\omega\lambda_1\Gamma \tag{5.24}$$

On note qu'en l'absence de la dissipation visqueuse ( $\Lambda = 0$ ), le problème de stabilité est réduit aux deux équations 5.22 et 5.23 vérifiées par  $w_n$  et  $\theta_n$ . La composante  $u_n$ , bien qu'elle ne soit pas nulle, n'intervient pas dans la détermination du seuil critique du nombre de Rayleigh. La présence de la dissipation visqueuse change complètement le problème aux valeurs propres à résoudre, où la dissipation visqueuse introduit un couplage entre  $u_n$ ,  $w_n$  et  $\theta_n$ . Dans ce cas,

le problème de stabilité consiste à résoudre le système aux valeurs propres défini par les trois équations 5.22, 5.22 et 5.23. Contrairement aux fluides Newtoniens, on distingue deux sortes d'instabilités à la naissance de la convection sous forme de rouleaux longitudinaux : stationnaires ou oscillatoires suivant le degré d'élasticité du fluide.

### Rouleaux longitudinaux oscillatoires

Au regard de l'équation 5.22, il est judicieux de poser  $u_n = Pe \tilde{u}_n$ . Les équations qui régissent la naissance de la convection sous forme de rouleaux longitudinaux oscillatoires s'écrivent :

$$\frac{L_1}{Pr} (-i\omega \tilde{u}_n + w_n f'(z)) = \lambda_1 \left( \frac{L_2}{L_1} - \Gamma \right) (f'(z) (D^2 - k^2) w_n + 2f''(z) D w_n) + L_2 (D^2 - k^2) \tilde{u}_n \quad (5.25)$$

$$L_1 \left( \frac{-i\omega}{Pr} (D^2 - k^2) w_n + k^2 \theta_n \right) - L_2 (D^2 - k^2)^2 w_n = 0 \quad (5.26)$$

$$L_1 (-i\omega \theta_n - Ra w_n + \Lambda g'(z) w_n - (D^2 - k^2) \theta_n) = \Lambda f'(z) \left[ \lambda_1 f'(z) (1 + 2 \frac{L_2}{L_1} - 3\Gamma) D w_n - \lambda_1 (1 - \Gamma) f''(z) w_n + (1 + L_2) D \tilde{u}_n \right] \quad (5.27)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} \theta_n = 0 \text{ en } z = \pm \frac{1}{2} \\ \tilde{u}_n = D w_n = w_n = 0 \text{ en } z = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \quad (5.28)$$

Les paramètres adimensionnés qui pilotent la naissance de la convection sous forme de rouleaux longitudinaux oscillatoires pour les fluides viscoélastiques se réduisent à : le nombre de Rayleigh ( $Ra$ ), le nombre de Prandtl ( $Pr$ ), le nombre mesurant l'effet de la dissipation visqueuse ( $\Lambda$ ), le temps de relaxation ( $\lambda_1$ ) et le rapport des viscosités ( $\Gamma$ ).

### Rouleaux longitudinaux stationnaires

Dans le cas des rouleaux longitudinaux stationnaires ( $\omega = 0$ ), les équations du problème peuvent s'écrire d'une façon simplifiée :

$$\frac{1}{Pr} w_n f'(z) = \lambda_1 (1 - \Gamma) (f'(z) (D^2 - k^2) w_n + 2f''(z) D w_n) + (D^2 - k^2) \tilde{u}_n \quad (5.29)$$

$$k^2 \theta_n - (D^2 - k^2)^2 w_n = 0 \quad (5.30)$$

$$-Ra w_n + \Lambda g'(z) w_n - (D^2 - k^2) \theta_n = \Lambda f'(z) [\lambda_1 (1 - \Gamma) (3f'(z) D w_n - f''(z) w_n) + 2D \tilde{u}_n] \quad (5.31)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} \theta_n = 0 \text{ en } z = \pm \frac{1}{2} \\ \tilde{u}_n = Dw_n = w_n = 0 \text{ en } z = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \quad (5.32)$$

## 5.2 Résultats de l'analyse de stabilité linéaire

### 5.2.1 Résultats en l'absence de dissipation visqueuse

Un fluide Newtonien en configuration de convection naturelle ou mixte présente un unique régime instable caractérisé par un nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  et un nombre d'onde critique  $k_c$ . En revanche les fluides viscoélastiques en configuration de convection (naturelle ou mixte) présentent un comportement qui varie suivant les valeurs prises par les paramètres viscoélastiques  $\lambda_1$  et  $\Gamma$ . On commencera donc par rappeler ces effets de la viscoélasticité dans une configuration de convection en l'absence de dissipation visqueuse; ces résultats serviront de base à la suite de notre étude.

Un mode d'instabilité est caractérisé par : un nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$ , un nombre d'onde  $k_c$  et une pulsation  $\omega_c$ . Le nombre de Rayleigh  $Ra_c$  pilote l'instabilité, de sorte que l'on soit au seuil de l'instabilité. En d'autres termes le taux de croissance temporel  $\sigma$  doit être nul. Le mode instable est caractérisé par une valeur propre  $\sigma + i\omega_c$  avec  $\sigma = 0$ . La pulsation  $\omega_c$  est la pulsation critique du mode instable, si  $\omega_c = 0$  le mode est dit stationnaire sinon le mode est dit instationnaire ou encore oscillatoire : les structures convectives vont osciller à la pulsation  $\omega_c$ .

Dans le cas de la convection naturelle d'un fluide Newtonien on n'observe qu'un unique mode instable quelle que soit la valeur des paramètres du problème. Ce mode est stationnaire :  $\omega_c = 0$ . En présence d'écoulement (convection mixte)  $\omega_c = 0$  pour les rouleaux longitudinaux tandis que pour les rouleaux transversaux on observe l'apparition d'une pulsation non nulle qui croît avec le nombre de Péclet.

#### Cas de la convection naturelle

L'étude théorique de Li et Khayat [37] a mis en évidence l'existence de deux régimes distincts d'instabilité pour un fluide viscoélastique en configuration de convection naturelle, suivant les valeurs prises par les paramètres viscoélastiques. Cette étude confirme les résultats expérimentaux de Kolodner [34] sur une suspension d'ADN. Le régime stationnaire est qualifié de faiblement visco-élastique (le comportement est qualitativement comparable au cas Newtonien, la viscoélasticité a un rôle mineur) et le régime oscillatoire de fortement visco-élastique (la visco-élasticité a un rôle prédominant). L'instabilité stationnaire présente une courbe de stabilité marginale qui est indépendante des paramètres visco-élastiques. Il s'agit donc de la même courbe que l'on trouve dans le cas des fluides Newtoniens (voir la figure 5.1), et qui est donnée par la relation obtenue en utilisant une troncature de Galerkin d'ordre 1 :

$$Ra^s = \frac{28 f_1 f_3}{27 k^2} \quad (5.33)$$

Dans laquelle les coefficients du nombre d'onde s'écrivent :

$$f_1 = k^2 + 10, \quad f_2 = k^2 + 12, \quad f_3 = (f_2)^2 + 360$$

Maintenant et pour ce qui concerne l'émergence de la convection oscillatoire, le même constat n'est pas vrai depuis que Kolkka et Ierley [33] ont montré que :

$$Ra^o = Ra^s - \frac{28\omega^2}{27k^2} \left[ \frac{f_2}{Pr} - \frac{\lambda_1 f_3 (1-\Gamma)(1-\lambda_1 f_1)}{1 + \lambda_1^2 \omega^2} \right], \quad (5.34)$$

où la fréquence  $\omega$  du mode oscillatoire est obtenue à partir de cette relation :

$$\omega^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} \left( (\lambda_1 f_1 (1-\Gamma) - 1) f_3 - \frac{f_1 f_2}{Pr} \right) / \left( \Gamma f_3 + \frac{f_1 f_2}{Pr} \right), \quad (5.35)$$

ainsi, les valeurs critiques du nombre de Rayleigh  $Ra_c^o$ , du nombre d'onde  $k_c^o$  et de la fréquence  $\omega_c^o$  pour l'apparition de la convection oscillatoire dépendent des paramètres visco-élastiques  $\lambda_1$  et  $\Gamma$ , mais aussi du nombre de Prandtl  $Pr$ .

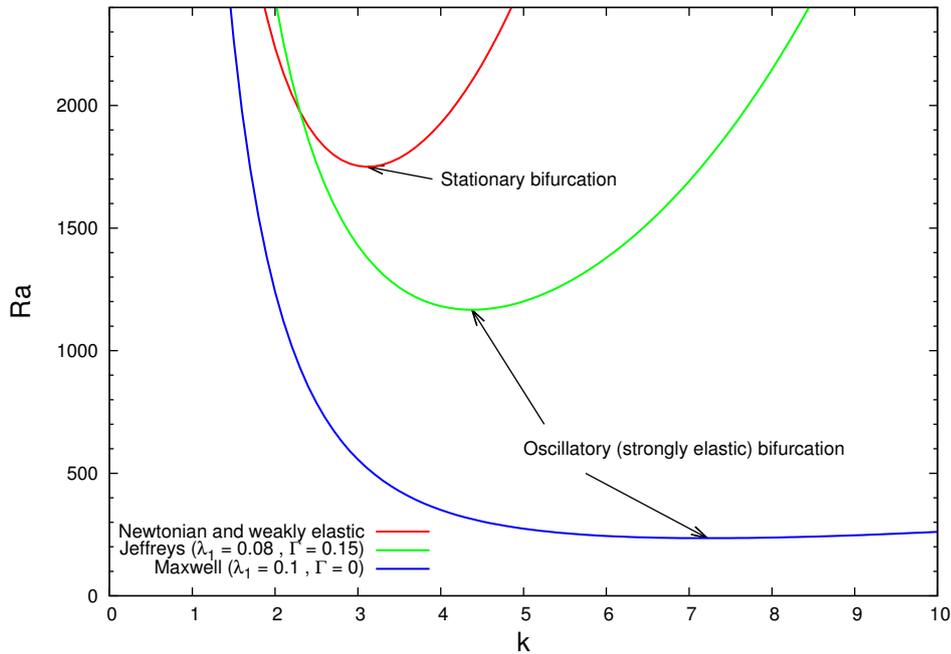


FIGURE 5.1 – Courbes neutres de stabilité marginale dans la configuration classique de Rayleigh-Bénard ( $Re = 0$ ) et pour  $Pr = 10$ , montrant le seuil critique d'instabilité stationnaire ainsi que deux exemples de seuils critiques d'instabilités oscillatoires. Les résultats ont été obtenus avec la méthode de Galerkin basée sur le premier terme. Figure tirée de la thèse de N.Delenda [16].

Il est donc possible de déterminer les valeurs du couple de paramètres  $\lambda_1, \Gamma$  à partir duquel se fait la transition d'une instabilité stationnaire vers une instabilité oscillatoire. La valeurs de  $\lambda_1$  correspondant à cette transition est usuellement notées  $\lambda_1^f$ . Ces points correspondant à une coïncidence des régimes d'instabilité faiblement viscoélastiques et fortement viscoélastique, il s'agit d'une bifurcation de co-dimension 2. Un graphique représentant l'ensemble de ces valeurs pour plusieurs nombres de Prandtl est visible figure 5.2.

En outre, comme le montrent Martinez-Mardones et Perez-Garcia (1990) [40] ainsi que Li et

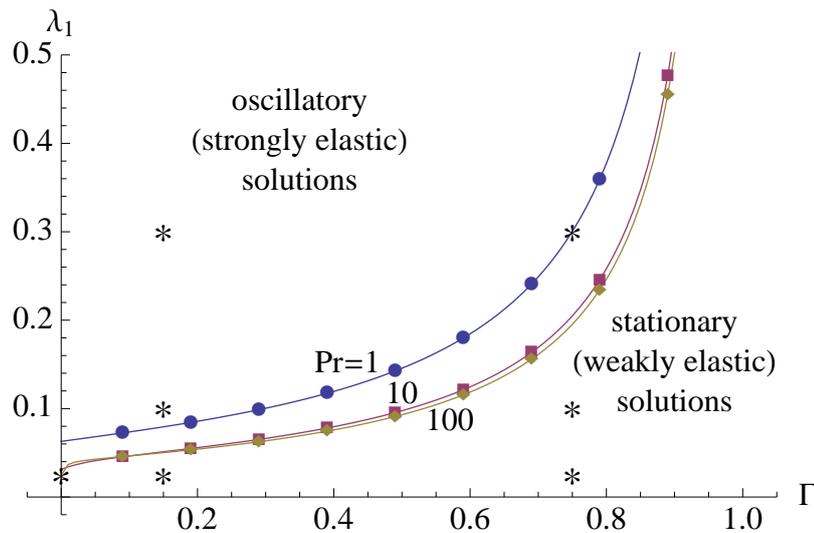


FIGURE 5.2 – L'étude de Hirata et al (2015) [26] a mis en évidence deux régimes d'instabilité pour le problème de RBP d'un fluide de modèle rhéologique Oldroyd-B. On voit ici les domaines faiblement viscoélastique (stationnaire) et fortement viscoélastique (instationnaire) en fonction des paramètres viscoélastiques  $\Lambda_1$  et  $\Gamma$ .

Khayat (2005) [37],  $\lambda_1^f$  diminue avec l'augmentation de  $Pr$ , pour un  $\Gamma$  fixe. Dans le cas limite où  $\Gamma \rightarrow 0$  (fluide de Maxwell) et  $Pr \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_1^f$  atteint la valeur minimum de 0.039.

Il convient de souligner que l'influence de l'élasticité du fluide (c'est à dire son temps de relaxation)  $\lambda_1$  sur la sélection de la structure thermoconvective dans cette configuration de Rayleigh-Bénard, a été également étudiée en s'appuyant sur une analyse non linéaire. Li et Khayat (2005) [37] ont étudié l'apparition des instabilités stationnaires du régime faiblement viscoélastique, en mettant l'accent sur les deux types de réseaux stables et réguliers en forme de cellules hexagonales et cellulées carrées. D'autre part, Martinez-Mardones et al. (1996) [41] ont examiné les bifurcations de Hopf dans la région fortement viscoélastique, démontrant ainsi que les structures périodiques dans le temps, sélectionnées par des effets non linéaires, correspondent à des ondes stationnaires.

### Cas de la configuration de RBP

En présence d'écoulement parallèle, les travaux réalisés par Hirata et al [26] dans le cas d'un fluide viscoélastique en configuration de RBP constitue une excellente référence. Ces travaux prolonges ceux de Li et Khayat [37] en y ajoutant un écoulement de Poiseuille, et en analysant la stabilité tant selon le critère temporel (stabilité convective) que spatial (stabilité absolue). Une relation de dispersion analytique est d'abord obtenue par une troncature de Galerkin à l'ordre 1, qui étend celle trouvée par Kolkka et Ierley [33] dans le cas de Rayleigh-Bénard. Le problème a ensuite été résolu numériquement par la méthode de tir à partir d'estimations initiales obtenues à l'aide de cette relation de dispersion. Il apparaît que le seuil d'apparition des rouleaux longitudinaux n'est pas affecté par l'écoulement parallèle, leurs caractéristiques d'instabilité sont donc les mêmes que celles obtenues sans cet écoulement. Par conséquent, ils apparaissent comme des rouleaux stationnaires dans le régime faiblement élastique et comme

des rouleaux oscillatoires dans le régime fortement élastique.

En revanche le seuil des rouleaux transversaux est croissant en fonction du nombre de Reynolds, les autres paramètres étant fixés. De plus les paramètres viscoélastiques influent également sur la stabilité. À une valeur fixée du paramètre  $\Gamma$ , le nombre d'élasticité  $\lambda_1^f$  délimitant les régimes faiblement et fortement viscoélastiques diminue lorsque le nombre de Prandtl augmente, à  $Pr$  fixé il diminue quand  $\Gamma$  diminue. Pour le cas limite du fluide de Maxwell, on a une valeur minimale de  $\lambda_1^f = 0.039$ .

En présence d'un écoulement de Poiseuille et dans le cas faiblement viscoélastique, l'élasticité  $\lambda_1$  a un effet fortement stabilisant sur les rouleaux transversaux. Quant au rapport des viscosités  $\Gamma$  il a une influence stabilisante : plus le rapport des viscosités  $\Gamma$  est petit (et donc la concentration en polymère importante) plus le nombre de Rayleigh critique est important (cas d'un fluide Newtonien :  $\Gamma = 1$ ) jusqu'à atteindre une valeur maximale dans le cas limite d'un fluide de Maxwell ( $\Gamma = 0$ ). Dans ce cas le nombre d'onde critique  $k_c$  et la pulsation critique  $\omega_c$  diminuent quand  $Re$  augmente.

On notera l'existence d'un second mode d'instabilité convective pour des valeurs assez grandes de  $\lambda_1$  (à partir de  $\lambda_1 = 0.1$ ) qui se traduit par une discontinuité des courbes des paramètres critiques. Il existe ainsi une bifurcation de co-dimension 2. En d'autres termes, deux modes deviennent simultanément convectivement instables à une valeur particulière de  $Re$ , conduisant ainsi à un saut dans les valeurs critiques de la fréquence d'oscillation, du nombre d'onde lorsque l'on passe au-delà de cette valeur particulière de Reynolds. Deux modes instables sont alors en compétition : alors que le premier est un mode visqueux d'instabilité avec les mêmes caractéristiques que pour un fluide Newtonien, le second apparaît plutôt dans un régime dominé par les effets de l'élasticité du fluide.

Pour le régime fortement élastique la présence d'écoulement modifie le rôle stabilisant-déstabilisant des paramètres rhéologiques. Lorsque  $Re = 0$ , l'élasticité  $\lambda_1$  a un effet déstabilisant alors que le rapport des viscosités  $\Gamma$  rend le système plus stable. Avec l'écoulement imposé de Poiseuille, c'est exactement le contraire qui est observé sur les rôles de l'élasticité et du rapport des viscosités. Le paramètre  $\lambda_1$  a une influence stabilisante jusqu'à un certain nombre de Reynolds, ensuite son influence est déstabilisante.

La visco-élasticité provoque une déformation des isothermes dans le sens de l'écoulement (dans le cas Newtonien l'aspect des structures convectives ne varie pas notablement avec le nombre de Reynolds) qui se traduit par une perte de symétrie des structures convectives. L'analyse énergétique (à partir de l'équation du mouvement) montre que l'élasticité n'a comme dans le cas Newtonien pas d'effet dans le cas faiblement visco-élastique. L'instabilité est alors due au caractère visqueux du fluide. En revanche pour le cas fortement visco-élastique la contribution de la contrainte normale est plus prononcée à cause de l'élasticité tandis que la contrainte de cisaillement est moins prononcée. Le mode d'instabilité est alors de nature élastique.

### 5.2.2 Sélection du mode le plus instable en présence de dissipation visqueuse

Dans cette partie on s'intéresse maintenant à l'influence de la dissipation visqueuse sur le seuil d'apparition de l'instabilité convective pour une configuration de RBP. Dans un premier temps on cherche à déterminer quelle structure convective est la plus déstabilisante entre les rouleaux longitudinaux et les rouleaux transversaux. En l'absence de dissipation visqueuse, on sait que le seuil d'apparition des rouleaux longitudinaux n'est pas affecté par la présence de l'écoulement

de Poiseuille, tandis que pour les rouleaux transversaux l'écoulement de Poiseuille a un effet stabilisant. On considère maintenant ce problème en introduisant la dissipation visqueuse ; le problème de stabilité est alors régi par les équations 5.22, 5.22 et 5.23 pour les rouleaux longitudinaux, 5.15 et 5.16 pour les rouleaux transversaux.

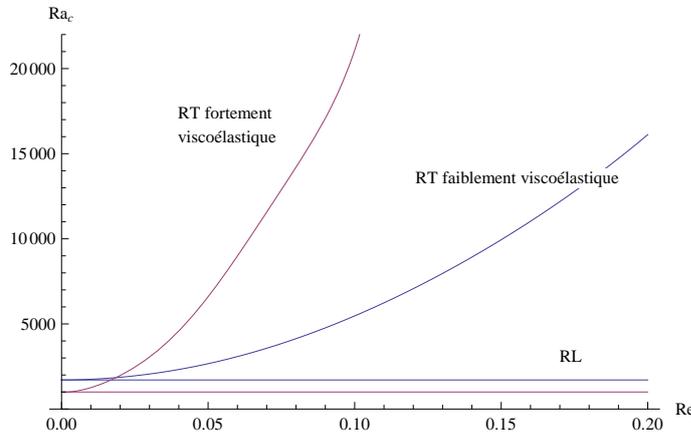


FIGURE 5.3 – Influence du nombre de Reynolds  $Re$  sur le nombre de Rayleigh critique pour des rouleaux longitudinaux et des rouleaux transversaux pour un cas faiblement viscoélastique ( $\lambda_1 = 0.025$ ) et un cas fortement viscoélastiques ( $\lambda_1 = 0.1$ ), avec  $\Gamma = 0.15$ ,  $Pr = 450$  et  $Ge = 10^{-4}$  dans une configuration de RBP.

La figure 5.3 montre l'influence du nombre de Reynolds sur un fluide en régime faiblement viscoélastique ( $\lambda_1 = 0.025$  et  $\Gamma = 0.15$ ) et un fluide en régime fortement viscoélastique ( $\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.15$ ). Le nombre de Prandtl est fixé à  $Pr = 450$  et le nombre de Gebhart à  $Ge = 10^{-4}$ . En  $Re = 0$  le seuil critique des rouleaux transversaux est égal à celui des rouleaux longitudinaux. Comme attendu dans le cas fortement élastique, le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  est inférieur à celui du cas faiblement viscoélastique, qui est le même que pour un fluide Newtonien soit  $Ra_c = 1707.76$ . Ensuite Le seuil critique des rouleaux transversaux est croissant lorsque le nombre de Reynolds augmente dans le cas faiblement viscoélastique comme dans le cas fortement viscoélastique. Comme pour un fluide Newtonien la dissipation visqueuse n'a pas d'influence appréciable sur le seuil d'apparition des rouleaux transversaux : l'effet stabilisant de l'écoulement de Poiseuille est prépondérant. Quant aux rouleaux longitudinaux, leur seuil d'apparition n'est pratiquement pas affecté par la présence de l'écoulement pour ces faibles valeurs de  $Re$ . Le seuil d'apparition des rouleaux transversaux est donc toujours supérieur à celui des rouleaux longitudinaux pour les paramètres choisis. Par la suite on s'intéressera donc exclusivement aux rouleaux longitudinaux qui sont le mode le plus déstabilisant.

### 5.2.3 Effets combinés de la dissipation visqueuse et des paramètres visco-élastiques pour le mode le plus instable

Les cas faiblement et fortement viscoélastiques présentant des différences marquées, on traitera ces cas séparément avant de confronter les résultats.

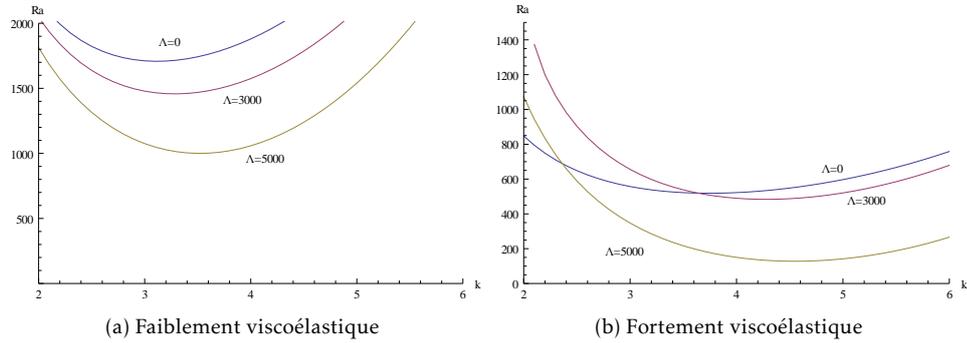


FIGURE 5.4 – Influence du paramètre  $\Lambda$  sur la courbe neutre de stabilité des rouleaux longitudinaux pour un cas faiblement viscoélastique avec  $\Gamma = 0.15$  et  $\lambda_1 = 0.025$  (a) et pour un cas fortement viscoélastique avec  $\Gamma = 0.15$  et  $\lambda_1 = 0.3$  (b) dans une configuration de RBP.

### Cas du régime faiblement viscoélastique

Dans cette partie les valeurs choisies pour les paramètres sont telles qu'en l'absence d'écoulement le régime d'instabilité soit de nature faiblement viscoélastique. Le nombre de Prandtl est fixé à  $Pr = 450$  et  $Ge = 10^{-4}$ . La figure 5.4(a) présente les courbes neutres de stabilité pour  $\Lambda = 0, 3000, 5000$ , les paramètres viscoélastiques étant fixés à  $\lambda_1 = 0.025$  et  $\Gamma = 0.15$ . Ces courbes ont comme attendu une forme comparable à celles du cas Newtonien. Le minimum des courbes neutres de stabilité décroît quand  $\Lambda$  augmente : le rôle déstabilisant de la dissipation est ainsi bien mis en évidence pour un fluide en régime faiblement viscoélastique.

Pour les rouleaux longitudinaux en régime faiblement viscoélastique la pulsation critique  $\omega_c$  est trouvée nulle pour toutes les valeurs de  $\Lambda$ . Dans ce cas il est possible de séparer en deux parties la contribution de la dissipation visqueuse dans l'équation de l'énergie 5.31. La première correspond à la contribution de la température de base, la seconde à celle de la viscoélasticité dont la contribution à la dissipation visqueuse s'exprime alors à travers un unique paramètre  $\gamma = \lambda_1(1 - \Gamma)$ . Cela nous donne pour l'équation de l'énergie :

$$\sigma \theta_n - Ra w_n + \Lambda g'(z) w_n - (D^2 - k^2) \theta_n - \Lambda \gamma f'(z) [3f'(z) D w_n - w_n f''(z)] = 0 \quad (5.36)$$

On trace ensuite le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  en fonction de  $\Lambda$  pour différentes valeurs du paramètre  $\gamma = \lambda_1(1 - \Gamma)$  afin de déterminer son influence. Les paramètres  $\lambda_1$  et  $\Gamma$  sont pris de sorte que le régime de départ (pas d'écoulement parallèle) soit toujours faiblement viscoélastique. Pour référence les paramètres choisis pour les résultats présentes sur la figure 5.5 sont  $\lambda_1 = 0.025$  et  $\Gamma = 0.15, 0.5, 0.75$ . La figure 5.5 montre que quelle que soit la valeur de  $\gamma$  l'allure des courbes  $Ra_c$  en fonction de  $\Lambda$  est la même, et correspond qualitativement au comportement observé dans le cas Newtonien : le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  diminue de façon régulière lorsque  $\Lambda$  augmente. De plus on notera que le paramètre  $\gamma$  a une influence déstabilisante sur la stabilité de l'écoulement ; néanmoins pour la valeur la plus faible  $\gamma = 0.00625$  on observe un effet stabilisant très fortement marqué, au point d'être plus stable que dans le cas Newtonien. Ce comportement particulier pour les grandes valeurs de  $\gamma$  se trouve confirmé par l'évolution du nombre d'onde critique  $k_c$  en fonction de  $\Lambda$ . Tandis que  $k_c$  est croissant en fonction de  $\Lambda$  pour  $\gamma = 0.02125$  et  $\gamma = 0.0.125$  (comme dans le cas Newtonien), pour  $\gamma = 0.00625$  cette croissance est extrêmement faible. La comparaison avec le cas Newtonien indique que l'élasticité du fluide est déstabilisante

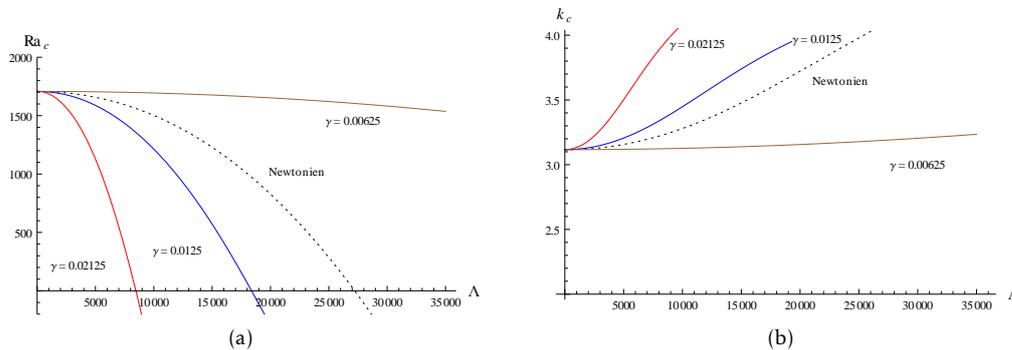


FIGURE 5.5 – Influence du paramètre  $\gamma$  sur le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  et le nombre d'onde critique  $k_c$  dans le cas faiblement viscoélastique avec  $\lambda_1 = 0.025$ . Le cas Newtonien est en pointillés pour comparaison.

pour des valeurs de  $\gamma$  au dessus d'un certain seuil, en revanche pour les petites valeurs de  $\gamma$  comme  $\gamma = 0.00625$  l'effet de l'élasticité est stabilisant.

### Cas fortement viscoélastique

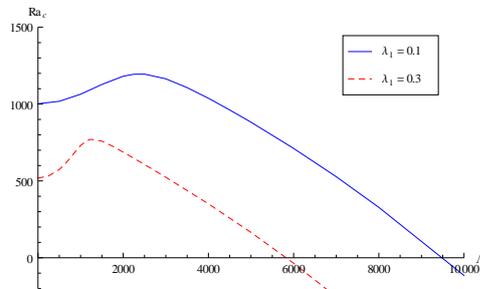
On se place maintenant dans le cas où en l'absence d'écoulement les valeurs des paramètres viscoélastiques  $\lambda_1$  et  $\Gamma$  correspondent au régime instable fortement viscoélastique. Dans ce cas le nombre de Rayleigh critique en l'absence d'écoulement est inférieur à la valeur 1707.76 correspondant au cas Newtonien et faiblement viscoélastique. De plus l'instabilité est oscillatoire : la pulsation critique  $\omega_c$  est non nulle. La viscoélasticité du fluide joue alors un rôle prépondérant sur les caractéristiques de l'instabilité.

La figure 5.4(b) montre les courbes neutres de stabilité pour  $\Gamma = 0.15$  et  $\lambda_1 = 0.3$  pour différentes valeurs de  $\Lambda$ . Elles mettent en évidence l'effet déstabilisant du paramètre  $\Lambda$  pour le régime fortement viscoélastique.

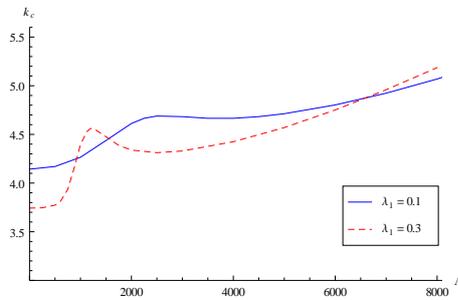
La figure 5.6 montre plus en détail l'effet du paramètre  $\Lambda$ . Lorsque  $\Lambda$  est faible (faible valeur de la dissipation visqueuse) on observe une augmentation de  $Ra_c$ , puis à partir d'une certaine valeur de  $\Lambda$  le nombre de Rayleigh critique décroît, on retrouve l'effet déstabilisant attendu de la dissipation visqueuse. Cette irrégularité se retrouve sur l'évolution de  $k_c$  qui croît rapidement dans un premier temps avant de décroître et enfin de croître progressivement. Quant à la pulsation critique  $\omega_c$  elle augmente régulièrement en fonction de  $\Lambda$ , on observe néanmoins que cette croissance est presque nulle pour les très faibles valeurs de  $\Lambda$  correspondant à l'effet stabilisant.

Ce comportement peut s'interpréter de la manière suivante. Lorsque la dissipation est faible les effets viscoélastiques prédominent et jouent un rôle stabilisant, tandis que pour de plus grandes intensités de la dissipation visqueuse son rôle déstabilisant devient prédominant.

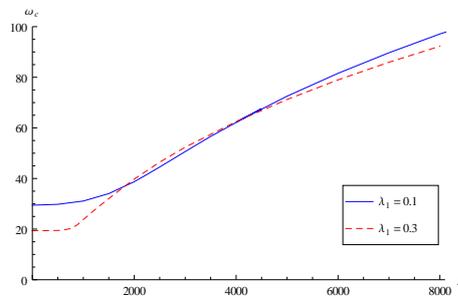
On peut noter d'après les figures 5.5(a) et 5.6(a) que le nombre de Rayleigh critique dans le cas faiblement viscoélastique diminue lorsque  $\gamma = \lambda_1(1 - \Gamma)$  augmente. Cela signifie donc que à  $\Gamma$  fixé, l'augmentation de  $\lambda_1$  induit une diminution de  $Ra_c$ . Dans ce cas l'instabilité est stationnaire ( $\omega_c = 0$ ). Il est donc intéressant de comparer les résultats du régime fortement viscoélastique oscillatoire ( $\omega_c \neq 0$ ), à ceux obtenus en prenant les mêmes valeurs de  $\lambda_1$  et  $\Gamma$  avec  $\omega_c = 0$ . Pour



(a)



(b)



(c)

FIGURE 5.6 – Influence du paramètre  $\Gamma$  sur le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$ , le nombre d'onde critique  $k_c$  et la pulsation critique  $\omega_c$  dans le cas fortement viscoélastique avec  $\Gamma = 0.15$ .

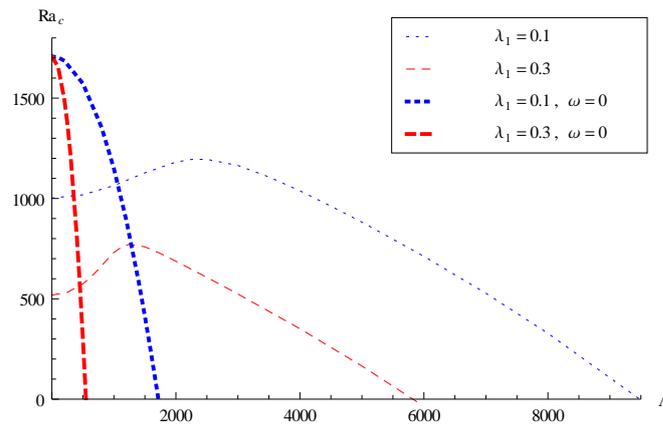


FIGURE 5.7 – Influence du paramètre  $\Lambda$  sur le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  dans le cas fortement viscoélastique oscillatoire et le cas fortement viscoélastique stationnaire, avec  $Pr = 450$ ,  $Ge = 10^{-4}$  et  $\Gamma = 0.15$ .

cela on impose  $\omega = 0$  dans les équations de sorte à sélectionner le mode d'instabilité stationnaire. La figure 5.7 montre que pour les faibles valeurs de  $\Lambda$  c'est le mode oscillatoire associé au régime fortement viscoélastique qui est sélectionné; en revanche pour les valeurs plus élevées de  $\Lambda$  c'est le mode stationnaire qui l'emporte. On en déduit que lorsque qu'elle est assez importante la dissipation visqueuse a pour effet de favoriser la sélection du mode d'instabilité stationnaire.

#### 5.2.4 Instabilités d'origine thermique et hydrodynamique : comparaison

Les résultats précédents ont mis en évidence que quel que soit le régime d'instabilité (fortement viscoélastique ou faiblement viscoélastique) et quels que soient les paramètres viscoélastiques choisis, l'influence déstabilisante de la dissipation visqueuse finit toujours par devenir prédominante. Il existe donc une valeur du paramètre  $\Lambda$  pour laquelle l'instabilité survient pour un gradient de température imposé nul c'est-à-dire  $Ra_c = 0$ . L'instabilité est alors hydrodynamique d'origine thermique, par la seule force de la production de chaleur interne au fluide sous l'effet de la dissipation visqueuse. Ce cas a été étudié dans la partie consacrée aux fluides Newtoniens au chapitre 2, où il a été établi que pour un nombre de Prandtl d'au moins  $10^2$  l'instabilité induite par la dissipation visqueuse se produit bien avant l'instabilité hydrodynamique de Tollmien-Schlichting.

Pour un fluide viscoélastique et en l'absence de dissipation visqueuse les travaux théoriques de Sureshkumar et Beris [76], de Sadanandan et Sureshkumar [69] et de Zhang et al. [84] mettent en évidence un seuil de déstabilisation hydrodynamique au moins de l'ordre de  $Re_c = 10^3$ . Les effets de la viscoélasticité sur le seuil de l'instabilité hydrodynamique sont montrés figure 5.8. Le temps de relaxation  $\lambda_1$  a une influence déstabilisante pour de faibles valeurs, puis stabilisante quand sa valeur augmente. Quant au rapport des viscosités  $\Gamma$  il a un effet déstabilisant, le cas limite Newtonien  $\Gamma = 1$  étant le plus stable. Il est à noter que ces travaux mettaient en jeu de faibles valeurs du paramètre d'élasticité  $\lambda_1$ , au plus  $\lambda_1 = 0.0035$  et ce pour un rapport des viscosités  $\Gamma$  compris entre 0 et 1. Pour ces valeurs de  $\lambda_1$  et  $\Gamma$ , le régime d'instabilité pour la convection est faiblement viscoélastique et se présente sous forme de rouleaux longitudinaux stationnaires. On utilisera donc la formulation avec le paramètre  $\gamma = \lambda_1(1 - \Gamma)$  qui sera notre unique paramètre de contrôle de l'élasticité du fluide.

La figure 5.9 montre que pour  $Pr = 450$  et  $Ge = 10^{-4}$ , le paramètre  $\gamma$  a une influence stabilisante ( $Re_c > Re_c^N$  avec  $Re_c^N = 36.68$ ) pour des valeurs inférieures à 0.01, ensuite son influence est déstabilisante ( $Re_c < Re_c^N$ ). Pour toutes les valeurs du paramètre  $\gamma$  le nombre de Reynolds critique  $Re_c$  n'excède pas 50, ce qui nous place bien en dessous du seuil de l'instabilité purement hydrodynamique pour un fluide viscoélastique. On peut donc s'attendre à ce que l'instabilité due à la dissipation visqueuse précède l'instabilité purement hydrodynamique pour un fluide viscoélastique.

### 5.2.5 Lignes de courant et isothermes

Afin de mieux comprendre les processus physiques mis en œuvre lors de la déstabilisation, on trace les isothermes et les lignes de courant en fonction de  $\Lambda$  pour un cas fortement viscoélastique ( $\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.15$ ). Par concision les structures convectives pour le cas faiblement viscoélastique ne sont pas montrées, le comportement observé étant qualitativement comparable au cas Newtonien. Les isothermes et lignes de courant sont tracées au seuil de l'instabilité ( $\sigma = 0$ ), sur une période correspondant au cas  $\Lambda = 0$  de sorte à mettre en évidence l'influence de ce paramètre (et donc de la dissipation visqueuse) sur la taille des structures convectives.

Les figures 5.10, 5.11 et 5.12 montrent les structures convectives dans le cas fortement viscoélastique. On observe une augmentation de la taille des structures convectives et l'apparition d'une stratification, qui sont respectivement les conséquences de l'augmentation du nombre d'onde critique  $k_c$  et du profil de température de base. On remarque en outre une déformation des lignes de courant et des isothermes : les structures convectives sont inclinées dans la direction orthogonale à l'écoulement. Cette déformation est d'autant plus prononcée que  $\Lambda$  est important.

### 5.2.6 Analyse énergétique

On procède ici à une analyse énergétique à partir de l'équation de conservation de l'énergie pour les rouleaux longitudinaux au seuil de la convection 5.14. La méthodologie est la même que dans le chapitre consacré aux fluides Newtoniens : on multiplie l'équation par le complexe conjugué  $\theta_n^*$  de la température  $\theta_n$ , on prend ensuite la partie réelle de l'équation et on l'intègre par rapport à  $z$  entre  $-\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2}$ .

On obtient alors la relation donnant la variation de l'énergie thermique fluctuante  $e_\theta$  :

$$\sigma e_\theta = e_{th} + e_{vd}^{th} + e_{vd}^{hyd} + e_{td}$$

Dans laquelle, l'indice  $r$  désignant la partie réelle :

$$e_\theta = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (|\theta_n(z)|^2)_r dz \quad e_{th} = Ra_c \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (w_n \theta_n^*)_r dz$$

$$e_{vd}^{th} = -GePe^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ([\lambda_1 f'(z)(1 + 2L_2/L_1 - 3\Gamma)Dw_n - \lambda_1(1 - \Gamma)f''(z)w_n] \theta_n^*)_r dz$$

$$e_{vd}^{hyd} = -2GePe \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f'(z)((1 + L_2)\theta_n^* D\tilde{u}_n)_r dz$$

$$e_{td} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [(D^2 - k_c^2) \theta_n \times \theta_n^*]_r dz$$

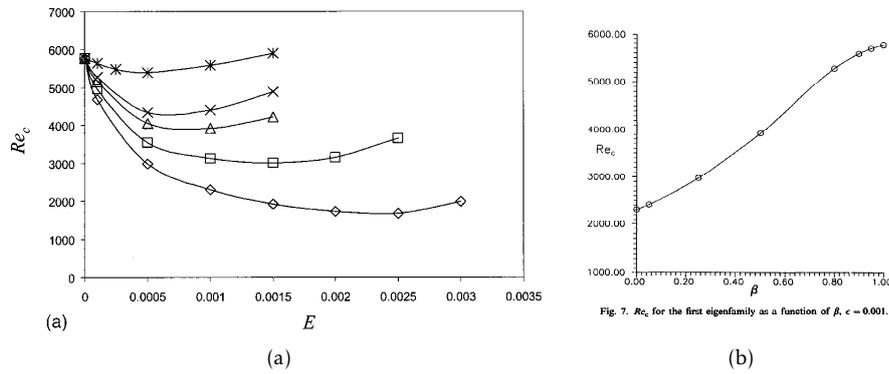


FIGURE 5.8 – Nombre de Reynolds critique pour un fluide viscoélastique modèle Oldroyd-B en écoulement de Poiseuille en conduite d'extension infinie. Ici  $\beta$  correspond à  $\Gamma$  et  $E/\varepsilon$  correspond à  $\lambda_1$ . Figures tirées de Sadanandan et Sureshkumar[69] et Sureshkumar et Beris [76] respectivement.

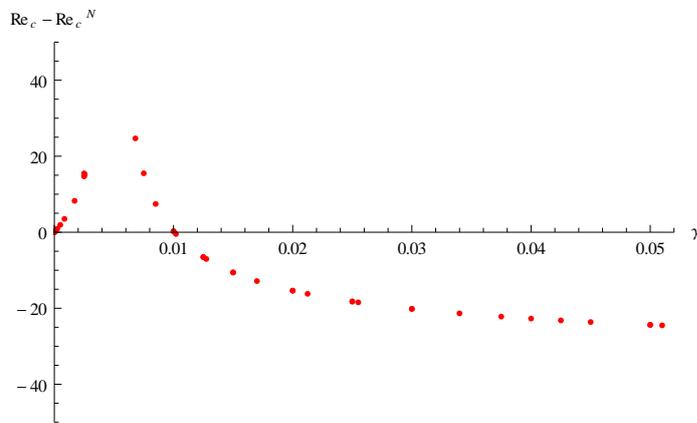


FIGURE 5.9 – Influence du paramètre  $\gamma = \lambda_1(1 - \Gamma)$  sur le nombre de Reynolds critique  $Re_c$  tel que  $Ra_c = 0$  dans le cas faiblement viscoélastique pour  $Pr = 450$  et  $Ge = 10^{-4}$

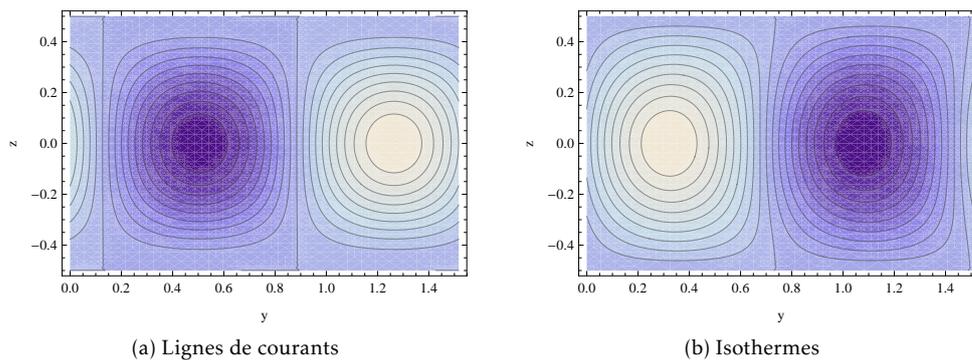


FIGURE 5.10 – Isolignes de courant et isothermes dans un cas fortement viscoélastique ( $\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.15$ ) pour  $\Lambda = 0$

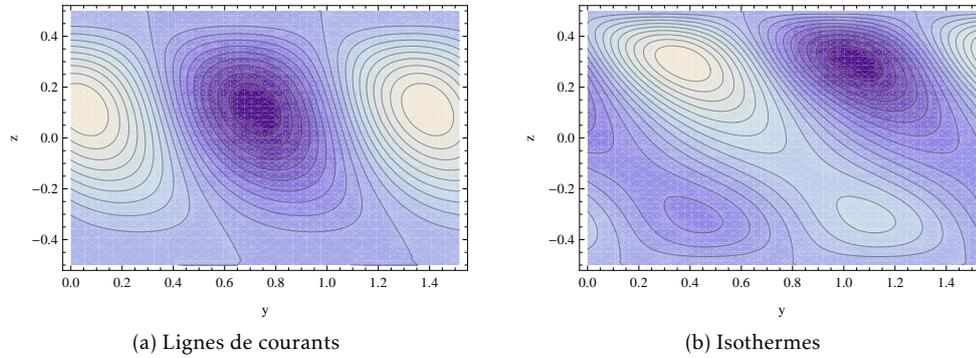


FIGURE 5.11 – Isolignes de courant et isothermes dans un cas fortement viscoélastique ( $\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.15$ ) pour  $\Lambda = 5000$

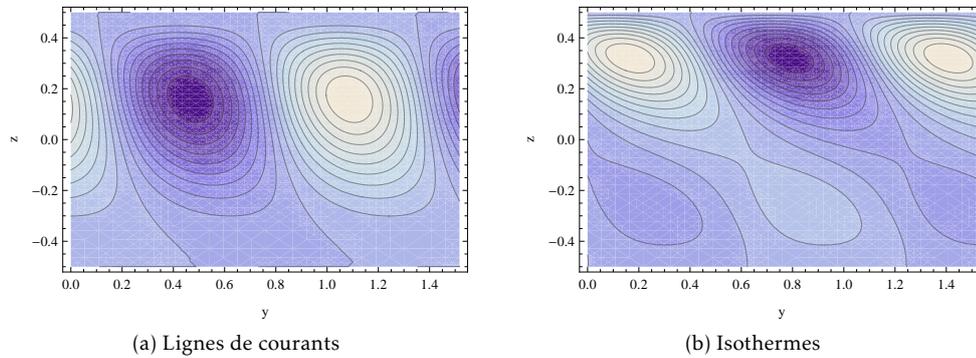


FIGURE 5.12 – Isolignes de courant et isothermes dans un cas fortement viscoélastique ( $\lambda_1 = 0.1$  et  $\Gamma = 0.15$ ) pour  $\Lambda = 8000$

Les différentes énergies s'interprètent de la manière suivante :

- $e_{th}$  correspond à la partie de la contribution aux forces de flottabilité due au gradient de température imposé,
- $e_{vd}^{th}$  correspond à la partie de la contribution aux forces de flottabilité induite par la dissipation visqueuse,
- $e_{vd}^{hyd}$  représente une production d'énergie hydrodynamique générée par l'interaction de l'écoulement cisailé de base avec la composante  $u$  de la vitesse,
- $e_{td}$  est l'énergie de dissipation thermique.

En prenant en compte les conditions aux limites pour  $\theta_n$ , on montre facilement que

$$e_{td} = - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (|D\theta_n(z)|^2 + k_c^2 |\theta_n(z)|^2) dz$$

$e_{td}$  est négatif ce qui indique que la contribution de la dissipation thermique produit un effet stabilisant.

En vue de l'interprétation physique des résultats, il est utile d'introduire la production totale d'énergie thermique fluctuante par la dissipation visqueuse  $e_{vd}$  comme somme de  $e_{vd}^{th}$  et  $e_{vd}^{hyd}$ ,

$$e_{vd} = e_{vd}^{th} + e_{vd}^{hyd}$$

En normalisant ces contributions par la valeur absolue de l'énergie de dissipation thermique  $|e_{td}|$ , le bilan énergétique devient donc au point neutre de stabilité  $\sigma = 0$  :

$$E_{th} + E_{vd} = 1$$

avec  $E_{th} = \frac{e_{th}}{|e_{td}|}$  et  $E_{vd} = \frac{e_{vd}}{|e_{td}|}$

Les tableaux 5.1 et 5.2 regroupent les valeurs de ces énergies en fonction du paramètre  $\Lambda$ , respectivement pour un cas faiblement viscoélastique ( $Pr = 450$ ,  $Ge = 10^{-4}$ ,  $\lambda_1 = 0.025$  et  $\Gamma = 0.15$ ) et un cas fortement viscoélastique ( $Pr = 450$ ,  $Ge = 10^{-4}$ ,  $\lambda_1 = 0.3$  et  $\Gamma = 0.15$ ). La figure 5.13 montre le tracé de l'énergie thermique  $E_{th}$  et de l'énergie de dissipation visqueuse  $E_{vd}$  pour un régime faiblement viscoélastique. La figure 5.13(a) montre un comportement qualitatif des énergies semblable à celui observé pour un fluide Newtonien, ce qui est cohérent avec le comportement en régime faiblement viscoélastique observé jusqu'à présent. La figure 5.13(b) montre le tracé des énergies pour un régime fortement viscoélastique. Le comportement global correspond à celui attendu (l'énergie thermique baisse tandis que l'énergie due à la dissipation visqueuse augmente). De plus, on observe que pour de faibles valeurs de  $\Lambda$  la croissance (respectivement décroissance) de  $E_{vd}$  (respectivement  $E_{th}$ ) est fortement marquée. Ensuite et à partir de la valeur  $\Lambda^T = ?$  à laquelle les courbes se croisent, la croissance (respectivement décroissance) de  $E_{vd}$  (respectivement  $E_{th}$ ) est bien moins prononcée. Ce résultat indique que pour le régime fortement viscoélastique la transition du régime dominé par le gradient de température déstabilisant vers le régime dominé par la dissipation visqueuse, se produit plus rapidement.

$Re$	$Ra_c$	$E_{th}$	$E_{vd}$	$E_{th} + E_{vd}$
0	1707.79	1	0	1
7.03	1685.87	0.907678	0.0923262	1.000004
9.94	1618.42	0.703858	0.296142	1.000006
12.17	1504.79	0.499204	0.500797	1.000001
14.05	1342.35	0.339193	0.660818	1.00001
15.71	1128.61	0.223202	0.776808	1.00001
17.21	863.368	0.138566	0.861443	1.00001
18.59	547.611	0.073879	0.926124	1.000003
19.88	182.622	0.0215057	0.978497	1.000003
21.08	-222.177	-0.0231115	1.02311	1.000002

TABLEAU 5.1 – Tableau des résultats de l’analyse énergétique basée sur l’équation de la chaleur dans le cas faiblement viscoélastique ( $\lambda_1 = 0.025$ ,  $\Gamma = 0.15$ ), pour une configuration de RBP avec  $Pr = 450$  et  $Ge = 10^{-4}$

$Re$	$Ra_c$	$E_{th}$	$E_{vd}$	$E_{th} + E_{vd}$
0	518.548	1	0	1
3.51	532.422	0.874912	0.125021	0.999933
6.09	646.847	0.521794	0.478222	1.00002
7.03	730.802	0.497259	0.502947	1.00021
8.61	759.024	0.465999	0.534651	1.00065
9.94	687.373	0.410714	0.589583	1.0003
12.17	524.028	0.286653	0.713241	0.999894
14.05	351.076	0.169555	0.830243	0.999799
15.71	127.852	0.0694172	0.930486	0.999903
17.21	-35.6558	-0.0131357	1.01308	0.999942

TABLEAU 5.2 – Tableau des résultats de l’analyse énergétique basée sur l’équation de la chaleur dans le cas fortement viscoélastique ( $\lambda_1 = 0.3$ ,  $\Gamma = 0.15$ ), pour une configuration de RBP avec  $Pr = 450$  et  $Ge = 10^{-4}$

### 5.3 Conclusion

- Dans ce chapitre nous avons étudié l’influence de la dissipation sur la stabilité linéaire d’un fluide viscoélastique en configuration de RBP. Dans un premier temps on trouve que les rouleaux longitudinaux sont la structure convective la plus déstabilisante, l’effet déstabilisant de la dissipation visqueuse étant négligeable devant l’effet stabilisant de l’écoulement sur les rouleaux transversaux.

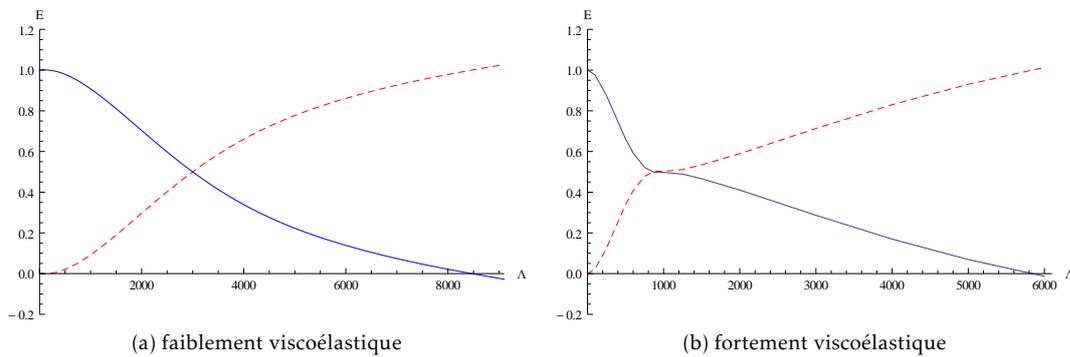


FIGURE 5.13 – Énergie thermique  $E_{th}$  (courbe bleue continue) et énergie de dissipation visqueuse  $E_v d$  (courbe rouge pointillée) pour un fluide en régime faiblement viscoélastique ( $\lambda_1 = 0.025$ ,  $\Gamma = 0.15$ ) et un fluide en régime fortement viscoélastique ( $\lambda_1 = 0.3$ ,  $\Gamma = 0.15$ ).

- Les résultats de l'analyse de stabilité linéaire montrent que différents comportements sont susceptibles de se présenter suivant les valeurs prises par la dissipation visqueuse et les paramètres viscoélastiques. En régime faiblement viscoélastique l'instabilité est stationnaire pour les rouleaux longitudinaux, les effets de la viscoélasticité peuvent alors être modélisés à travers l'unique paramètre  $\gamma = \lambda_1(1 - \Gamma)$ . Le comportement observé est alors qualitativement comparable à celui d'un fluide Newtonien tant pour l'évolution des paramètres critiques  $Ra_c$ ,  $k_c$  que pour l'allure des isothermes, lignes de courant ainsi que les courbes des énergies.
- En régime fortement élastique instationnaire (pulsation critique  $\omega_c$  non nulle), on observe pour les petites valeurs de  $\Lambda$  une augmentation du nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  puis une diminution de  $Ra_c$  lorsque  $\Lambda$  devient suffisamment grand. C'est donc à terme l'effet déstabilisant de la dissipation visqueuse qui prédomine. En outre pour une valeur suffisamment grande de la dissipation visqueuse c'est le mode d'instabilité stationnaire qui l'emporte.
- En l'absence de gradient imposé de température et pour un régime faiblement viscoélastique, le seuil de l'instabilité hydrodynamique d'origine thermique due à la dissipation visqueuse est comparé avec le seuil d'instabilité hydrodynamique en l'absence de dissipation visqueuse. Il apparaît que pour toutes les valeurs des paramètres viscoélastiques étudiées, l'instabilité due à la dissipation visqueuse survient pour des nombres de Reynolds bien inférieurs à ceux de l'instabilité hydrodynamique.



# Conclusion générale et perspectives

Dans la première partie nous avons présenté l'histoire du problème de Rayleigh-Bénard avec et sans écoulement parallèle. Le problème général de Rayleigh-Bénard avec écoulement parallèle a été modélisé et adimensionné en introduisant les paramètres sans dimension pertinents. L'état de base associé a été déterminé.

Dans la seconde partie sont présentés les résultats de l'analyse de stabilité linéaire pour un fluide Newtonien en configuration de RBP et RBC en tenant compte de la dissipation visqueuse. L'étude des équations linéarisées permet dans le cas de l'approximation d'un grand nombre de Prandtl de définir un unique paramètre  $\Lambda = Pe^2 Ge$  pilotant la dissipation visqueuse, et de réduire le problème à deux variables  $w$  et  $\theta$ . Dans ce cas la dissipation visqueuse a une influence déstabilisante : le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  diminue lorsque le paramètre  $\Lambda$  augmente. De plus le nombre d'onde  $k_c$  augmente avec  $\Lambda$ . Un fait remarquable est que pour une valeur assez grande du paramètre  $\Lambda$ , soit  $\Lambda = 13621$  pour RBP et  $\Lambda = 9332$  pour RBC, l'instabilité se produit pour un gradient de température imposé nul. Dans ce cas le gradient de température à l'origine de la déstabilisation est uniquement dû à la présence de dissipation visqueuse qui se comporte comme une source de chaleur interne au fluide. De plus pour des valeurs encore plus élevées de  $\Lambda$  l'instabilité peut survenir même en présence d'un gradient de température imposé stabilisant.

Pour une valeur finie du nombre de Prandtl, celui-ci n'a pratiquement pas d'influence sur le seuil critique pour des valeurs de  $Pr$  de l'ordre de  $10^2$  ou supérieur. En revanche pour des valeurs plus faibles de  $Pr$  le seuil critique  $Ra_c$  diminue et ce d'autant plus que  $Pr$  est petit. Nous sommes alors amenés à nous intéresser à l'évolution de  $Ra_c$  en fonction du nombre de Reynolds pour différentes valeurs de  $Pr$ , et plus particulièrement au nombre de Reynolds critique  $Re_c$  tel que  $Ra_c = 0$ . Dans le cas d'un écoulement de RBP avec  $Ge = 10^{-6}$ , il apparaît que pour des valeurs de  $Pr$  de l'ordre de 50 ou supérieures le nombre de Reynolds critique est inférieur au seuil de l'instabilité hydrodynamique classique de Tollmien-Schlichting. Ces résultats sont confrontés aux expériences existantes, qui ne mettent pas en évidence une possible instabilité hydrodynamique due à la dissipation visqueuse. Cela est dû aux valeurs prises par les paramètres physiques de ces expériences qui favorisent un régime de Rayleigh-Bénard dans lequel la dissipation visqueuse a une faible intensité.

L'analyse énergétique permet de déterminer la transition d'une instabilité d'origine principalement thermique (liée au gradient de température imposé) vers une instabilité hydrodynamique d'origine thermique (due à la dissipation visqueuse). L'étude des lignes de courant et isothermes permet de mettre en évidence deux phénomènes dus à la présence de la dissipation visqueuse : premièrement la taille des structures convectives diminue ce qui est dû à l'augmentation du nombre d'onde critique ; ensuite le résultat le plus remarquable est l'apparition d'une stratification stable près de la paroi inférieure qui peut occuper presque toute la moitié inférieure pour une valeur assez grande de la dissipation visqueuse. Ce phénomène s'explique par le profil non

linéaire du gradient total de température de base ; la présence du terme de dissipation visqueuse induit l'existence d'un maximum de ce gradient entre les parois.

Dans la troisième partie le problème de RBP/C est étudié par l'analyse faiblement non linéaire dans le cas d'un nombre de Prandtl qui tend vers l'infini. Les termes non linéaires d'ordre 2 dépendent a priori du nombre de Gebhart  $Ge$ . Le système d'équations est écrit aux ordres 1, 2 et 3, ce dernier permettant d'obtenir l'équation d'amplitude à l'ordre trois dont les coefficients nous renseignent sur la nature de la bifurcation. Dans un premier temps on étudie l'influence du paramètre  $Ge$  sur le problème de Rayleigh-Bénard puis de RBP et RBC. Il apparaît que la bifurcation est de nature supercritique pour des valeurs physiquement réalistes de ces paramètres. On se placera donc dans le cas de  $Ge = 0$  dans les termes non linéaires.

L'amplitude stationnaire est alors calculée pour plusieurs valeurs représentatives de  $\Lambda$ . Il apparaît que le paramètre  $\Lambda$  n'a que très peu d'effet sur l'amplitude tant qu'il prend des valeurs faibles à modérées. Pour des valeurs de  $\Lambda$  correspondant à un régime où l'instabilité est fortement dominée par la dissipation visqueuse,  $\Lambda$  a alors pour effet de légèrement diminuer l'amplitude.

La chaleur se transmet au sein du fluide par conduction et par convection. Le flux conductif présente une forte dépendance en  $z$  pour des valeurs élevées de  $\Lambda$ , une dépendance moindre en  $z$  est aussi observée pour le flux convectif. En  $z = 1$  (paroi supérieure) l'effet de  $\Lambda$  est très faible pour le flux convectif mais maximale pour le flux conductif. Il apparaît donc que c'est le flux conductif qui est prédominant dans le flux total à la paroi supérieure.

Le nombre de Nusselt est donc défini comme étant la somme des flux conductif et convectif normalisé par la flux conductif, de sorte à rendre compte de la contribution du flux convectif au delà du seuil critique. Le nombre de Nusselt est croissant en fonction de la distance au seuil critique et augmente avec une intensité moindre lorsque  $\Lambda$  augmente : la présence de dissipation visqueuse a pour effet de faire fortement baisser le taux de transfert de chaleur à la paroi supérieure.

Les structures convectives non linéaires se présentent quelle que soit la valeur de la dissipation visqueuse sous la forme de deux rouleaux pour un rouleau linéaire. L'étude des solutions au second ordre et des isolignes montre que les effets non linéaires se traduisent par une correction positive du gradient de température de base. Cela signifie que les premières non linéarités induisent un effet stabilisant favorisant une bifurcation supercritique, ce qui est cohérent avec les résultats obtenus.

La quatrième partie porte sur l'étude de stabilité faiblement non linéaire de l'écoulement de Poiseuille/Couette avec une paroi inférieure adiabatique et une paroi supérieure isotherme. Cette partie est l'extension au domaine non linéaire des travaux de Barletta et Nield [49] et Barletta, Celli et Nield [3] qui ont montré que les conditions aux limites asymétriques et la chaleur interne produite par la présence de dissipation visqueuse provoquent un gradient de température déstabilisant qui induit une instabilité convective.

L'étude des solutions au second ordre met en évidence de fortes différences de l'effet du nombre de Prandtl suivant qu'il soit grand ou petit. Pour un grand nombre de Prandtl les premières non linéarités se traduisent par une correction positive du gradient de température de base, ce qui a pour effet physique de favoriser une bifurcation supercritique. En revanche dans le régime d'un faible nombre de Prandtl, les premières non linéarités induisent une correction négative du gradient de température de base ce qui peut s'interpréter physiquement comme le précurseur d'une bifurcation sous-critique.

Cela est confirmé par l'étude de l'équation d'amplitude au troisième ordre qui montre que pour des valeurs particulières des paramètres  $Pr$  et  $Ge$  une bifurcation sous-critique est susceptible de se présenter. Lorsque le nombre de Gebhart dépasse une valeur critique  $Ge_c = 3.072$  pour

l'écoulement de Poiseuille et  $Ge_c = 3.167$  pour l'écoulement de Couette, la bifurcation est sous-critique quel que soit la valeur du nombre de Prandtl, sinon l'instabilité sous-critique se manifeste quel que soit  $Ge$  en dessous d'un certain nombre de Prandtl :  $Pr = 0.25$  pour l'écoulement de Poiseuille et  $Pr = 0.77$  pour l'écoulement de Couette.

Le calcul du flux de chaleur transmis par convection  $J_{conv}$  montre de même une forte dépendance en fonction du nombre de Prandtl. Pour un nombre de Prandtl fort à modéré le flux convectif moyen présente un maximum situé près du milieu de la conduite. Pour de faibles nombre de Prandtl ce maximum s'est déplacé à la paroi supérieure et son ordre de grandeur augmente drastiquement. Le nombre de Nusselt  $Nu$  qui évalue la contribution relative de la conduction et de la convection est calculé à la paroi supérieure. Le nombre de Nusselt augmente linéairement en fonction de la distance relative au seuil de l'instabilité, avec une pente qui augmente fortement lorsque le nombre de Prandtl diminue.

L'analyse de stabilité est enfin menée sur un fluide viscoélastique de modèle constitutif Oldroyd-B. En l'absence de dissipation visqueuse, l'instabilité peut se manifester selon deux modes différents suivant les valeurs prises par les paramètres viscoélastiques  $\lambda_1$  et  $\Gamma$  : un mode stationnaire dit faiblement viscoélastique et un mode oscillatoire dit fortement viscoélastique. On ajoute ensuite l'effet de la dissipation ; pour ces deux modes d'instabilité ce sont les rouleaux longitudinaux qui sont la structure convective la plus déstabilisante.

Pour le régime faiblement viscoélastique l'effet de la viscoélasticité peut être modélisé à travers l'unique paramètre  $\gamma = \lambda_1(1 - \Gamma)$ . Le comportement observé est sensiblement comparable à celui d'un fluide Newtonien. La dissipation visqueuse a alors un effet déstabilisant qui se traduit par une baisse de  $Ra_c$  lorsque  $\Lambda$  augmente. Le paramètre  $\gamma$  a un effet stabilisant pour de faibles valeurs et un effet déstabilisant lorsqu'il prend des valeurs modérées à fortes. On notera que pour une valeur assez petite de  $\gamma$  l'effet stabilisant est tel que le seuil d'instabilité est supérieur à celui pour un fluide Newtonien. Les structures convectives se présentent alors sous la forme de rouleaux stationnaires dont la taille diminue avec l'augmentation de  $\Lambda$  et qui présentent une stratification due à la non symétrie du profil de température de base.

Dans le cas du régime fortement viscoélastique, les effets combinés de la viscoélasticité et de la dissipation visqueuse produisent un léger effet stabilisant pour de faibles valeurs de  $\Lambda$  tandis que pour de plus grandes valeurs de  $\Lambda$  l'effet déstabilisant de la dissipation visqueuse est prépondérant. Un résultat remarquable est que pour des valeurs assez grandes de  $\Lambda$  c'est le mode d'instabilité stationnaire qui prend le pas sur le mode oscillatoire.

On compare ensuite les seuils de l'instabilité hydrodynamique en l'absence de dissipation visqueuse et ceux de l'instabilité hydrodynamique d'origine thermique due à la dissipation visqueuse. Cette comparaison est effectuée dans le cas d'un régime faiblement viscoélastique en raison des valeurs des paramètres viscoélastiques utilisés dans la littérature pour l'étude de l'instabilité hydrodynamique. Les résultats obtenus montrent que l'instabilité due à la dissipation visqueuse survient pour des nombres de Reynolds bien inférieurs à ceux de l'instabilité purement hydrodynamique.

Les travaux menés au cours de cette thèse ouvrent plusieurs perspectives d'extensions intéressantes.

Nous espérons que les résultats numériques obtenus dans cette thèse stimulent la production d'expériences susceptibles de mettre en évidence le phénomène de dissipation visqueuse, les expériences actuelles mettant en jeu des paramètres dont les valeurs ne permettent pas d'obtenir un effet significatif de la dissipation visqueuse.

L'extension de l'analyse non linéaire dans une configuration isotherme avec écoulement parallèle

au voisinage de l'instabilité hydrodynamique due à la dissipation visqueuse serait parfaitement complémentaire du travail effectué au chapitre 3. Une extension de ce chapitre pour des valeurs finies du nombre de Prandtl serait également d'un grand intérêt, le chapitre 4 ayant mis en évidence l'existence d'une bifurcation sous-critique pour de petits nombres de Prandtl dans le cas d'une paroi inférieure adiabatique.

Des simulations numériques directes seraient d'un grand intérêt afin de valider les résultats obtenus tant pour l'analyse linéaire que faiblement non linéaire, mais surtout pour étudier l'évolution spatio-temporelle du problème, notamment lorsqu'on est loin des conditions critiques.

Il reste enfin de nombreuses zones d'ombre dans le cas d'un fluide viscoélastique. Notamment l'interaction entre les effets viscoélastiques et la dissipation visqueuse est à approfondir.

## Expression des coefficients de contrainte viscoélastique

Les coefficients de contrainte viscoélastique sont déterminés à partir de la loi de comportement pour un fluide viscoélastique, modèle Oldroyd-B :

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \frac{\delta \boldsymbol{\tau}}{\delta t} = \mu \left( \boldsymbol{\gamma} + \lambda_2 \frac{\delta \boldsymbol{\gamma}}{\delta t} \right) \quad (\text{A.1})$$

où  $\frac{\delta}{\delta t}$  est la dérivée d'Oldroyd par rapport au temps :

$$\frac{\delta \boldsymbol{\tau}}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\tau} - (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{u})$$

L'équation s'écrit sous forme indicelle :

$$\tau^{ij} + \lambda_1 \left( \frac{\partial \tau^{ij}}{\partial t} + u^k \tau^{ij,k} - u^{i,k} \tau^{kj} - u^{j,k} \tau^{ki} \right) = \mu \left( \gamma^{ij} + \lambda_2 \left[ \frac{\partial \gamma^{ij}}{\partial t} + u^k \gamma^{ij,m} - u^{i,j} \gamma^{kj} - u^{j,k} \gamma^{ki} \right] \right) \quad (\text{A.2})$$

On linéarise :  $\tau^{ij} = \tau_b^{ij} + \epsilon \tau_p^{ij}$ ,  $\gamma^{ij} = \gamma_b^{ij} + \epsilon \gamma_p^{ij}$  et on ne retient que les termes d'ordre  $\epsilon$ . Afin d'alléger l'écriture  $\tau_p$  sera simplement noté  $\tau$  lorsqu'il n'y a pas de confusion possible. L'équation A.2 linéarisée s'écrit :

$$\begin{aligned} & \tau^{ij} + \lambda_1 \left( \frac{\partial \tau^{ij}}{\partial t} + (u_b^k \tau^{ij,k} + u^k \tau_b^{ij,k}) - (u_b^{i,k} \tau^{kj} + u^{i,k} \tau_b^{kj}) - (u_b^{j,k} \tau^{ki} + u^{j,k} \tau_b^{ki}) \right) \\ & = \gamma^{ij} + \lambda_2 \left( \frac{\partial \gamma^{ij}}{\partial t} + (u_b^k \gamma^{ij,m} + u^k \gamma_b^{ij,m}) - (u_b^{i,j} \gamma^{kj} + u^{i,j} \gamma_b^{kj}) - (u_b^{j,k} \gamma^{ki} + u^{j,k} \gamma_b^{ki}) \right) \end{aligned}$$

L'état de base s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_b &= u_b \mathbf{e}_x = Pe f(z) \mathbf{e}_x \\ \tau_b^{11} &= 128 \lambda_1 Pe^2 (1 - \Gamma) z^2 \\ \tau_b^{13} &= \tau_b^{31} = Pe f'(z) \\ \gamma_b^{13} &= Pe f'(z)\end{aligned}$$

Afin d'alléger l'écriture on définit les opérateurs linéaires  $\mathbb{L}_1$  et  $\mathbb{L}_2$  tel que :

$$\mathbb{L}_1 = 1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1 u_b \frac{\partial}{\partial x} \quad \mathbb{L}_2 = 1 + \lambda_1 \Gamma \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_1 \Gamma u_b \frac{\partial}{\partial x}$$

Sachant que  $\gamma^{ij} = u^{i,j} + u^{j,i}$  on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_1(\tau^{11}) &= 2\lambda_1 \frac{du_b}{dz} \tau^{13} - 2 \left( \frac{du_b}{dz} \right)^2 \lambda_1 (1 - \Gamma) \\ &+ \lambda_1 \left[ -4w \frac{du_b}{dz} \frac{d^2 u_b}{dz^2} \lambda_1 (1 - \Gamma) + 4 \left( \frac{du_b}{dz} \right)^2 \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{du_b}{dz} \frac{\partial u}{\partial z} + 2 \left( \frac{du_b}{dz} \right)^2 \right] \\ &+ \lambda_1 \Gamma \left[ -4 \frac{du_b}{dz} \frac{\partial u}{\partial z} - 2 \frac{du_b}{dz} \frac{\partial w}{\partial x} - 2 \left( \frac{du_b}{dz} \right)^2 \right] + 2\mathbb{L}_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_1(\tau^{12}) &= \lambda_1 \frac{du_b}{dt} \tau^{23} + \lambda_1 \left[ 2 \left( \frac{du_b}{dt} \right)^2 \lambda_1 (1 - \Gamma) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{du_b}{dz} \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \\ &\lambda_1 \Gamma \left[ -2 \frac{du_b}{dz} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{du_b}{dz} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \mathbb{L}_2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mathbb{L}_2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

$$\mathbb{L}_1(\tau^{22}) = 2\mathbb{L}_2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_1(\tau^{13}) &= \lambda_1 \frac{du_b}{dz} \tau^{33} + \lambda_1 \left[ -w \frac{d^2 u_b}{dz^2} + \frac{du_b}{dz} \frac{\partial u}{\partial x} + 2\lambda_1 (1 - \Gamma) \left( \frac{du_b}{dz} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{du_b}{dz} \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \\ &\lambda_1 \Gamma \left[ w \frac{d^2 u_b}{dz^2} - \frac{du_b}{dz} \frac{\partial u}{\partial x} - 3 \frac{du_b}{dz} \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \mathbb{L}_2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \mathbb{L}_2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

$$\tau^{23} = \lambda_1 (1 - \Gamma) \frac{du_b}{dz} \frac{\partial v}{\partial x} + \mathbb{L}_2 \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \mathbb{L}_2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\tau^{33} = 2\lambda_1 (1 - \Gamma) \frac{du_b}{dz} \frac{\partial w}{\partial x} + 2\mathbb{L}_2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (\text{A.4})$$

Les coefficients de contrainte viscoélastique  $\tau^{ij}$  qui nous intéressent s'écrivent pour les rouleaux

longitudinaux :

$$\tau^{12} = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1 \sigma} \left( \frac{du_b}{dz} \tau_{23} + \frac{du_b}{dz} \frac{\partial v}{\partial z} + \Gamma \left[ -2 \frac{du_b}{dz} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{du_b}{dz} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right) + \frac{1 + \lambda_1 \Gamma \sigma}{1 + \lambda_1 \sigma} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{A.5})$$

$$\tau^{22} = \frac{-2(1 + \lambda_1 \Gamma \sigma)}{1 + \lambda_1 \sigma} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A.6})$$

$$\tau^{13} = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1 \sigma} \left( \frac{du_b}{dz} \tau_{33} - w \frac{d^2 u_b}{dz^2} + \frac{du_b}{dz} \frac{\partial w}{\partial z} + \Gamma \left[ w \frac{d^2 u_b}{dz^2} - 3 \frac{du_b}{dz} \frac{\partial w}{\partial z} \right] + (1 + \lambda_1 \Gamma \sigma) \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (\text{A.7})$$

$$\tau^{23} = \frac{1}{1 + \lambda_1 \sigma} \left( (1 + \lambda_1 \Gamma \sigma) \frac{\partial v}{\partial z} + (1 + \lambda_1 \Gamma \sigma) \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (\text{A.8})$$

$$\tau^{33} = \frac{2(1 + \lambda_1 \Gamma \sigma)}{1 + \lambda_1 \sigma} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A.9})$$

Les coefficients de contrainte viscoélastique  $\tau_{ij}$  qui nous intéressent s'écrivent pour les rouleaux transversaux, en remplaçant  $\frac{\partial u}{\partial x}$  par  $-\frac{\partial w}{\partial z}$  grâce à l'équation de continuité :

$$\begin{aligned} \tau^{11} = & \frac{1}{1 + \lambda_1 \sigma + \lambda_1 i k_x u_b} 2 \lambda_1 \frac{du_b}{dz} \tau_{13} - 2 \left( \frac{du_b}{dz} \right)^2 \lambda_1 (1 - \Gamma) \\ & + \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1 \sigma + \lambda_1 i k_x u_b} \left[ -4w \frac{du_b}{dz} \frac{d^2 u_b}{dz^2} \lambda_1 (1 - \Gamma) - 4 \left( \frac{du_b}{dz} \right)^2 \lambda_1 \frac{\partial w}{\partial x} + 2 \frac{du_b}{dz} \frac{\partial u}{\partial z} + 2 \left( \frac{du_b}{dz} \right)^2 \right] \\ & + \frac{\lambda_1 \Gamma}{1 + \lambda_1 \sigma + \lambda_1 i k_x u_b} \left[ -4 \frac{du_b}{dz} \frac{\partial u}{\partial z} - 2 \frac{du_b}{dz} \frac{\partial w}{\partial x} - 2 \left( \frac{du_b}{dz} \right)^2 \right] - \frac{2}{1 + \lambda_1 \sigma + \lambda_1 i k_x u_b} \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \tau^{13} = & \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1 \sigma + i k_x \lambda_1 u_b} \left( \frac{du_b}{dz} \tau_{33} - w \frac{d^2 u_b}{dz^2} - \frac{du_b}{dz} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{du_b}{dz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ & + \Gamma \left[ w \frac{d^2 u_b}{dz^2} + \frac{du_b}{dz} \frac{\partial w}{\partial z} - 3 \frac{du_b}{dz} \frac{\partial w}{\partial z} \right] + (1 + \lambda_1 \Gamma \sigma) \frac{\partial u}{\partial z} + (1 + \lambda_1 \Gamma \sigma + i k_x \lambda_1 \Gamma u_b) \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\tau^{33} = \frac{2(1 + \lambda_1 \Gamma \sigma + \lambda_1 u_b i k_x)}{1 + \lambda_1 \sigma + \lambda_1 u_b i k_x} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{2}{1 + \lambda_1 \sigma + \lambda_1 u_b i k_x} \frac{du_b}{dz} \lambda_1 (1 - \Gamma) \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{A.12})$$



# Bibliographie

- [1] L.S. de B. ALVES et al. « Effects of viscous dissipation on convective instability of viscoelastic mixed convection flows in porous media ». In : *A.A. Mohamad, I. Pop, R. Trimbitas, T. Grosan (Eds.), Proceedings of the 5th International Conference on Application of Porous Media (Cluj-Napoca, Romania, August 25e28, 2013)*. Sous la dir. de Presa Universitara CLUJEANA. 2013, p. 317-325.
- [2] A. BARLETTA. « On the thermal instability induced by viscous dissipation. » In : *International journal of thermal science* 88 (2015), p. 238-247.
- [3] A. BARLETTA, M. CELLI et D.A. NIELD. « On the onset of dissipation thermal instability for the Poiseuille flow of a highly viscous fluid in a horizontal channel. » In : *Journal of Fluid Mechanics* 681 (2011), p. 499-514.
- [4] A. BARLETTA, M. CELLI et D.A.S. REES. « The onset of convection in a porous layer induced by viscous dissipation : a linear stability analysis. » In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52 (2009), p. 337-344.
- [5] A. BARLETTA et D.A. NIELD. « On the Rayleigh-Bénard-Poiseuille problem with internal heat generation. » In : *International journal of thermal science* 57 (2012), p. 1-16.
- [6] H. BÉNARD. « Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent. » In : *Annales de Chimie Physique*. 7<sup>e</sup> sér. 23 (1901), p. 62-144.
- [7] H. BÉNARD et D. AVSEC. « Travaux récents sur les tourbillons en bandes applications à l'astrophysique et à la météorologie. » In : *J. Phys. radium* 9 (1939), p. 468-500.
- [8] R. BIRD, R.C. ARMSTRONG et O. HASSAGER. *Dynamics of Polymeric Liquids*. 1987.
- [9] D.V. BOGER et K. WALTER. *Rheological Phenomena in Focus*. 1993.
- [10] J. BOUSSINESQ. *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie de la lumière, Tome II : Refroidissement et échauffement par rayonnement. Conductibilité des tiges, lames et masses cristallines. Courants de convection. Théorie mécanique de la lumière*. 1903.
- [11] R.J. BRIGGS. « Electron-stream interaction with plasmas. » In : *MIT Press* 7 (1964).
- [12] P. CARRIÈRE et P. A. MONKEWITZ. « Convective versus absolute instability in mixed Rayleigh-Bénard-Poiseuille convection. » In : *Journal of Fluid Mechanics* 384.1 (1999), p. 243-262.
- [13] S. CHANDRASEKHAR. *hydrodynamic and hydromagnetic stability*. 1961.
- [14] P.M. COELHO, F.T. PINHO et P.J. OLIVEIRA. « Fully developed forced convection of the Phan-Thien-Tanner fluid in ducts. » In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 45.7 (2002), p. 1413-1423.

- [15] O. DAUCHOT et F. DAVIAUD. « Finite amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 7 (1995), p. 335.
- [16] Nassim DELEND. « Instabilités de fluides visco-élastiques en convection mixte de Rayleigh-Bénard-Poiseuille et en convection thermodiffusive dans un milieu poreux ». Thèse de doct. UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES - LILLE 1, 2016.
- [17] I.A. ELTAYEB. « Nonlinear thermal convection in an elastiviscous layer heated from below. » In : *Proc. Roy. Soc. London* 356.A (1977), p. 161-176.
- [18] K. FUKUI, M. NAKAJIMA et H. UEDA. « The longitudinal vortex and its effects on the transport processes in combined free and forced laminar convection between horizontal and inclined parallel plates ». In : *Intl J. Heat Mass Transfer* 26 (1983), p. 109-120.
- [19] K.S. GAGE et W.H. REID. « The stability of thermally stratified plane Poiseuille flow. » In : *Journal of Fluid Mechanics* 33 (1968), p. 21-32.
- [20] A.P. GALLAGHER et A.McD. MERCER. « On the behaviour of small disturbance in plane couette flow with a temperature gradient. » In : *Proc. Roy. Soc. London* 286 (1965), p. 117-128.
- [21] B. GEGHART. « Effects of viscous dissipation in natural convection. » In : *Journal of Fluid Mechanics* 14 (1962), p. 225-232.
- [22] S. C. GENERALIS et K. FUJIMURA. « Range of Validity of Weakly Nonlinear Theory in the Rayleigh-Bénard Problem ». In : *J. Phys. Soc. Jpn* 78 (2009), p. 8-084401.
- [23] A. GRAHAM. « Shear patterns in an unstable layer of air. » In : *Philos. Trans. Roy. Soc. A*.232 (1933), p. 231-242x.
- [24] E. GRANDJEAN et P. A. MONKEWITZ. « Experimental investigation into localized instabilities of mixed Rayleigh-Bénard-Poiseuille convection ». In : *J. Fluid Mech.* 640 (2009), p. 401-4191.
- [25] T. GREEN. « Oscillating convection in an elasticoviscous liquid. » In : *Physics of Fluids* 11.7 (1968), p. 1410-1412.
- [26] S.C. HIRATA et al. « Convective and absolute instabilities in Rayleigh-Bénard-Poiseuille mixed convection for viscoelastic fluid. » In : *Journal of fluid mechanics* 765 (2015), p. 167-210.
- [27] J. HU, H. BEN HADID et D. HENRY. « Linear stability analysis of Poiseuille-Rayleigh-Bénard flows in binary fluids with Soret effect. » In : *Physics of fluids* 19 (2007), 034101(1)-034101(17).
- [28] P. HUERRE et P.A. MONKEWITZ. « Absolute and convective instabilities in free shear layers. » In : *Journal of Fluid Mechanics* 159 (1985), p. 151-168.
- [29] P. HUERRE et P.A. MONKEWITZ. « Local and global instabilities in spatially developing flows. » In : *Ann. Rev. Fluid Mech.* 22 (1990), p. 473-537.
- [30] P. IDRAC. « Études expérimentales sur le vol à voile ». Thèse de doctorat. Paris, 1921.
- [31] P. IDRAC. « Sur les courants de convection atmosphériques et leur rapport avec le vol à voile et la formation des bandes nuageuses. » In : *CRAS* 171 (1920), p. 42-44.
- [32] D.D. JOSEPH. « Stability of frictionally-heated flow. » In : *Phys. Fluids* 8 (1965), p. 2195-2200.
- [33] Robert W. KOLKKA et Glenn R. IERLEY. « On the convected linear stability of a viscoelastic Oldroyd-B fluid heated from below ». In : *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 25.2 (1987), p. 209-237.

- [34] P. KOLODNER. « Oscillatory convection in viscoelastic DNA suspensions. » In : *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 75 (1998), p. 167-192.
- [35] L. LANDAU. « On the problem of turbulence. » In : *C. R. Acad. Sci. U.R.S.S.* 44 (1944), p. 311-314.
- [36] R.G. LARSON. « Instabilities in viscoelastic flows. » In : *Rheologica Acta* 31.3 (1992), p. 213-263.
- [37] Z. LI et R. KHAYAT. « Finite-amplitude Rayleigh-Bénard convection and pattern selection for viscoelastic fluids. » In : *Journal of fluid mechanics* 529 (2005), p. 221-255.
- [38] J.M. LUIJKX, J.K. PLATTEN et J.C. LEGROS. « On the existence of thermo-convective rolls, transverse to a superimposed mean Poiseuille flow. » In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 24 (1981), p. 803-817.
- [39] A. Barletta M.N. OUARAZI S.C. Hirata et Michele CELLI. « Finite amplitude convection and heat transfer in inclined porous layer using a thermal non-equilibrium model ». In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 113 (2017), p. 399-410.
- [40] J. MARTINEZ-MARDONES et C. PEREZ-GARCIA. « Linear instability in viscoelastic fluid convection. » In : *Journal of Physics : Condensed Matter* 2.5 (1990), p. 1281-1290.
- [41] J. MARTINEZ-MARDONES et al. « Amplitude equations and pattern selection in viscoelastic convection. » In : *Physical Review E* 54.2 (1996), p. 1478-1488.
- [42] S. MERGUI, X. NICOLAS et S.C. HIRATA. « Sidewall and thermal boundary condition effects on the evolution of longitudinal rolls in Rayleigh-Bénard-Poiseuille convection ». In : *Physics of Fluids* 23.8 (2011), 084101(1)-084101(9).
- [43] C MÉTIVIER, C. NOUAR et J.-P. BRANCHER. « Weakly nonlinear dynamics of thermoconvective instability involving viscoplastic fluids ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 660 (2010), p. 316-353.
- [44] Y MORI et Y. UCHIDA. « Forced convective heat transfer between horizontal flat planes. » In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 9 (1966), p. 803-817.
- [45] H.W. MÜLLER, M. LÜCKE et M. KAMPS. « Convective patterns in horizontal flow. » In : *Europhys. Lett.* 10 (1989), p. 451-456.
- [46] H.W. MÜLLER, M. LÜCKE et M. KAMPS. « Transversal convection patterns in horizontal shear flow. » In : *Phys. Rev.* 45.A (1992), p. 3714-3725.
- [47] A.C. NEWELL et J.A. WHITEHEAD. « Finite bandwidth, finite amplitude convection. » In : *Journal of Fluid Mechanics* 38 (1969), p. 279-304.
- [48] X. NICOLAS. « Revue bibliographique sur les écoulements de Poiseuille-Rayleigh-Bénard : écoulements de convection mixte en conduites rectangulaires horizontales chauffées par le bas. » In : *International Journal of Thermal Science* 41 (2002), p. 961-1016.
- [49] D.A. NIELD et A. BARLETTA. « Convection-dissipation instability in the horizontal plane Couette flow of a highly viscous fluid. » In : *Journal of Fluid Mechanics* 662 (2010), p. 475-492.
- [50] D.A. NIELD, A. BARLETTA et M. CELLI. « The effect of viscous dissipation on the onset of convection in an inclined porous layer. » In : *Journal of Fluid Mechanics* 679 (2011), p. 544-558.
- [51] M. NISHIOKA et M. ASAI. « Some observations of the subcritical transition in plane Poiseuille flow ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 150 (1985), p. 441-450.

- [52] M. NISHIOKA, A. S. IIDA et Y. ICHIKAWA. « An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 72 (1975), p. 731-751.
- [53] C. NOUAR, B. BENADOUDA-ZOUAOUI et C. DESAUBRY. « Laminar mixed convection in a horizontal annular duct. case of thermodependent non-Newtonian fluid. » In : *European Journal of Mechanics. B/fluids* 19.3 (2000), p. 423-452.
- [54] A. OBERBECK. « Ueber die wärmeleitung der flüssigkeiten bei berücksichtigung der strömungen infolge von temperaturdifferenzen. » In : *Annalen für Physik und Chemie* 7 (1879), p. 271-292.
- [55] J.G. OLDROYD. « On the formulation of rheological equations of state. » In : *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 200 (1950), p. 523-5414.
- [56] S. A. ORSZAG et A. T. PATERA. « Subcritical transition to turbulence in plane channel flows ». In : *Phys. Rev. Lett.* 45 (1980), p. 989-993.
- [57] S.A. ORSZAG. « Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. » In : *Journal of Fluid Mechanics* 50 (1971), p. 689-703.
- [58] S. OSTRACH et Y. KAMOTANI. « Heat transfer augmentation in laminar fully developed channel flow by means of heating from below. » In : *Journal of Heat Transfer* 97 (1975), p. 220-225.
- [59] M.T. OUAZZANI et al. « Etude numérique et expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes. » In : 32 (1989), p. 261-269.
- [60] R. G. OWENS et T. N. PHILLIPS. *Computational Rheology*. Imperial College Press, 2002.
- [61] H. M. PARK et H. S. LEE. « Hopf bifurcations of viscoelastic fluids heated from below. » In : *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 66.1 (1996), p. 1-34.
- [62] J. PEIXINHO, C. DESAUBRY et M. LÉBOUCH. « Heat transfer of a non-newtonian fluid (carbopol aqueous solution) in transitional pipe flow. » In : *International Journal of Heat and Mass Transfer* 51.1-2 (2008), p. 198-209.
- [63] A.C. PHILIPS et G.T. WALKER. « The form of stratified clouds. » In : *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* 58 (1932), p. 23-30.
- [64] J.K. PLATTEN. « A variational formulation for the stability of flows with temperature gradients. » In : *International Journal of Engineering Science* 9 (1971), p. 855-869.
- [65] J.K. PLATTEN et J.C. LEGROS. *Convection in liquids*. 1984.
- [66] J.W. RAYLEIGH. « On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. » In : *Edinburgh and Dublin Phil. Mag. and J. of Sci.* 6<sup>e</sup> sér. 32.192 (1916), p. 529-546.
- [67] V.A. ROMANOV. « Stability of plane-parallel Couette flow. » In : *Funct. Anal. Appl.* 7 (1973), p. 137-146.
- [68] S. ROSENBLAT. « Thermal convection in a viscoelastic liquid. » In : *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 21.2 (1986), p. 201-233.
- [69] B. SADANANDAN et R. SURESHKUMAR. « Viscoelastic effects on the stability of wall-bounded shear flows. » In : *Physics of Fluids* 14.1 (2002), p. 41-48.
- [70] A. SCHLÜTER, D. LORTZ et F. BUSSE. « On the stability of steady finite amplitude convection. » In : *Journal of Fluid Mechanics* 23.1 (1965), p. 129-144.

- [71] L.A. SEGEL. « Distant sidewalls cause slow amplitude modulation of cellular convection. » In : *Journal of Fluid Mechanics* 38 (1969), p. 203-224.
- [72] J.T. STUART. « On the nonlinear mechanics of hydrodynamic stability. » In : *Journal of Fluid Mechanics* 4 (1958), p. 1-21.
- [73] J.T. STUART. « On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable partallel flows, Part 1. The basic behavior in plane Poiseuille flow. » In : *Journal of Fluid Mechanics* 9 (1960), p. 353-370.
- [74] N. SUBRAHMANYAM, L.E. JOHNS et R. NARAYANAN. « Stability of frictional heating in plane Couette flow at fixed power input » . In : *roc. R. Soc. Lond. A.458* (2002), p. 2561-2569.
- [75] C.A. SUKANEK P.C.and Goldstein et R.L. LAURENCE. « The stability of plane Couette flow with viscous heating. » In : *Journal of Fluid Mechanics* 57 (1973), p. 651-670.
- [76] R. SURESHKUMAR et A.N. BERIS. « Linear stability analysis of viscoelastic Poiseuille flow using an Arnoldi-based orthogonalization algorithm. » In : *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 56 (1994), p. 151-182.
- [77] S. A. SUSLOV et S. PAOLUCCI. « Stability of mixed-convection flow in a tall vertical channel under non-Boussinesq conditions ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 303 (1995), p. 91-115.
- [78] N. TILLMARKI et P. ALFREDSSON. « Experiments on transition in plane Couette flow ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 235 (1992), p. 89-102.
- [79] M. TVEITERED. « On the stability of thermally stratified Plane Poiseuille flow. » In : *Z. Angew. Math. Mech.* 54 (1974), p. 533-540.
- [80] R.Q. TWISS. « Propagation in electionions streams. » In : *Phys. Rev.* 88 (1952), p. 1392-1407.
- [81] Ginzburg V.L. et Landau L.D. « On the theory of superconductivity. » In : *Collection d'articles de Landau (article No73)*. 1965.
- [82] C. VEST et V. APARCI. « Overstability of a viscoelastic fluid layer heated from below. » In : *Journal of Fluid Mechanics* 36.3 (1968), p. 613-623.
- [83] J. WATSON. « On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable partallel flows, Part 2. The development of a solution for plane Poiseuille and plane Couette flow. » In : *Journal of Fluid Mechanics* 9 (1960), p. 371-389.
- [84] L. ZHANG et al. « Linear stability analysis of channel flow of viscoelastic Oldroyd-B and FENE-P fluids. » In : *Journal of fluid mechanics* 5737 (2013), p. 249-279.



# Table des matières

Résumé	xi
Remerciements	xiii
Nomenclature	xv
Table des matières	xvii
Liste des tableaux	xxi
Table des figures	xxiii
<b>1 Présentation de la convection des écoulements de RBP/C</b>	<b>1</b>
1.1 Convection de Rayleigh-Bénard des fluides Newtoniens . . . . .	1
1.2 Convection de Rayleigh-Bénard de fluides viscoélastiques . . . . .	2
1.2.1 Qu'est ce qu'un fluide viscoélastique . . . . .	2
1.2.2 Convection de fluides viscoélastiques . . . . .	5
1.3 Convection des écoulements de Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette . . . . .	5
1.3.1 Fluides Newtoniens . . . . .	5
1.3.2 Fluides viscoélastiques . . . . .	8
1.3.3 Objectifs de la thèse . . . . .	8
1.4 Formulation mathématique . . . . .	9
1.4.1 Modélisation du problème . . . . .	9
1.4.2 Équation de continuité . . . . .	10
1.4.3 Équation de conservation de la quantité de mouvement . . . . .	10
1.4.4 Équation de conservation l'énergie . . . . .	12
1.4.5 Conditions aux limites . . . . .	14
1.5 Équations de conservation adimensionnées . . . . .	15
1.6 Solution de base de Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette . . . . .	17
Température de base et stratification du champ de température . . . . .	19
<b>2 Stabilité linéaire des écoulements de RBP/C de fluides Newtoniens</b>	<b>23</b>
2.1 Équations aux perturbations linéarisées et développement en modes normaux . . . . .	23
2.1.1 Équations aux perturbations linéarisées . . . . .	23
2.1.2 Développement en modes normaux . . . . .	24
2.1.3 Rouleaux longitudinaux et cas limite d'un nombre de Prandtl infini . . . . .	25
2.2 Méthodes numériques et validation . . . . .	26
2.2.1 Méthode de Galerkin . . . . .	26

2.2.2	Méthode de tir . . . . .	27
2.2.3	Validation des méthodes numériques . . . . .	28
2.3	Présentation des résultats de stabilité linéaire . . . . .	30
2.3.1	Sélection du mode le plus instable en présence de dissipation visqueuse . . . . .	30
2.3.2	Effets de la dissipation visqueuse et du nombre de Prandtl pour le mode le plus instable . . . . .	31
2.3.3	Lignes de courant et isothermes . . . . .	37
2.3.4	Analyse énergétique . . . . .	39
2.3.5	Instabilités d'origine thermique et hydrodynamique : Comparaison . . . . .	43
2.4	Conclusion . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Stabilité faiblement non linéaire des écoulements de RBP/C d'un fluide newtonien</b>	<b>49</b>
3.1	Formulation mathématique du problème non linéaire . . . . .	50
3.2	Méthodologie du problème non linéaire . . . . .	52
3.2.1	Équations pour les rouleaux longitudinaux d'amplitude finie . . . . .	52
3.2.2	Équation d'amplitude . . . . .	53
3.3	Résultats de l'analyse de stabilité faiblement non linéaire . . . . .	57
3.3.1	Influence des termes non linéaires en $Ge$ . . . . .	57
3.3.2	Coefficients non linéaires et amplitude pour $Ge = 0$ dans les termes non linéaires . . . . .	58
3.3.3	Transfert de chaleur . . . . .	59
3.3.4	Flux total et nombre de Nusselt . . . . .	62
3.3.5	Lignes de courant et isothermes . . . . .	65
3.4	Conclusion . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Stabilité faiblement non linéaire des écoulements parallèles d'un fluide newtonien</b>	<b>71</b>
4.1	Formulation mathématique du problème non linéaire . . . . .	72
4.2	Méthodologie du problème non linéaire . . . . .	74
4.2.1	Équations pour les rouleaux longitudinaux d'amplitude finie . . . . .	74
4.2.2	Équation d'amplitude . . . . .	76
4.3	Résultats de l'analyse de stabilité faiblement non linéaire . . . . .	82
4.3.1	Bifurcation supercritique/sous-critique . . . . .	82
4.3.2	Amplitudes stationnaires dans le cadre de validité de l'analyse faiblement non linéaire . . . . .	84
4.3.3	Transfert de chaleur . . . . .	86
4.3.4	Lignes de courant et isothermes . . . . .	89
4.4	Conclusion . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Stabilité linéaire des écoulements de RBP/C de fluides viscoélastiques</b>	<b>95</b>
5.1	Équations aux perturbations linéarisées et développement en modes normaux . . . . .	95
5.1.1	Développement en modes normaux . . . . .	96
5.1.2	Rouleaux longitudinaux . . . . .	99
5.2	Résultats de l'analyse de stabilité linéaire . . . . .	101
5.2.1	Résultats en l'absence de dissipation visqueuse . . . . .	101
5.2.2	Sélection du mode le plus instable en présence de dissipation visqueuse . . . . .	104
5.2.3	Effets combinés de la dissipation visqueuse et des paramètres viscoélastiques pour le mode le plus instable . . . . .	105
5.2.4	Instabilités d'origine thermique et hydrodynamique : comparaison . . . . .	109
5.2.5	Lignes de courant et isothermes . . . . .	110

Table des matières	133
5.2.6 Analyse énergétique . . . . .	110
5.3 Conclusion . . . . .	114
<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>117</b>
<b>A Expression des coefficients de contrainte viscoélastique</b>	<b>121</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>125</b>
<b>Table des matières</b>	<b>131</b>





## EFFETS DE LA DISSIPATION VISQUEUSE SUR LA CONVECTION DES ÉCOULEMENTS DE RAYLEIGH-BÉNARD-POISEUILLE/COUETTE DE FLUIDES NEWTONIENS OU VISCOÉLASTIQUES

### Résumé

L'objet de cette thèse est d'étudier l'effet de la dissipation visqueuse sur les instabilités d'écoulements parallèles pour des fluides Newtoniens ou viscoélastiques. L'intensité de la dissipation visqueuse est mesurée par le nombre de Gebhart  $Ge$ . Dans les configurations de Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette (RBP/C), en plus du gradient de température imposé par les conditions aux bords, un gradient vertical de température est généré par la dissipation visqueuse. Le problème de stabilité linéaire de l'état de base est résolu numériquement par la méthode de Galerkin et la méthode de tir. Parmi toutes les possibles structures convectives, on montre que les rouleaux longitudinaux 3D sont les plus amplifiés. Le nombre de Rayleigh et le nombre d'onde au seuil de l'instabilité ont été déterminés en fonction du paramètre  $\Lambda = Pe^2 Ge$  et du nombre de Prandtl  $Pr$ , où  $Pe$  est le nombre de Péclet. On montre qu'il existe une valeur particulière de  $\Lambda$  au delà de laquelle la déstabilisation induite par la dissipation visqueuse est si forte qu'une instabilité d'origine thermique peut se développer avant l'instabilité hydrodynamique de Tollmien-Schlichting. Ce scénario est d'autant plus plausible que  $Pr$  est très élevé. Une analyse énergétique est proposée afin de mieux discerner les effets de la dissipation visqueuse. L'analyse faiblement non linéaire de stabilité est effectuée pour la configuration de RBP/C dans le cas limite d'un nombre de Prandtl infini. Les effets non linéaires favorisant une bifurcation supercritique, l'influence de la dissipation visqueuse sur l'intensité de la convection et sur le transfert de chaleur a été analysée.

Dans le cas des écoulements plans de Poiseuille/Couette confinés entre une paroi inférieure adiabatique et une paroi supérieure isotherme, la seule source d'instabilité est la dissipation visqueuse. Nous avons étendu le travail existant dans la littérature et qui se limite aux analyses linéaires de stabilité au domaine faiblement non linéaire. Une équation d'amplitude de type équation de Landau a été rigoureusement obtenue. Les résultats montrent que les termes non linéaires associés à la dissipation visqueuse contribuent à l'émergence d'une bifurcation sous-critique et favorisent le transfert de chaleur à la paroi supérieure, et ce d'autant plus que le nombre de Prandtl est faible.

Enfin l'étude de stabilité linéaire des écoulements de convection mixte de RBP a été étendue aux fluides viscoélastiques obéissant aux lois de comportements du modèle d'Oldroyd-B. Les effets combinés de l'élasticité du fluide, du rapport des viscosités du solvant à la viscosité totale et de la dissipation visqueuse ont été analysés. Comparés aux fluides Newtoniens, des résultats nouveaux sont reportés et qui montrent notamment que le caractère viscoélastique du fluide précipite la déstabilisation du système. Les effets coopérants de la dissipation visqueuse et de l'élasticité du fluide peuvent induire une instabilité pour des nombres de Reynolds bien plus bas que ceux qui sont nécessaires au déclenchement de l'instabilité d'origine inertielle.

**Mots clés :** instabilité, convection mixte, fluides viscoélastiques, dissipation visqueuse, stabilité linéaire, stabilité faiblement non linéaire

---

**VISCOUS DISSIPATION EFFECTS ON RAYLEIGH-BÉNARD-POISEUILLE/COUETTE MIXED CONVECTION OF NEWTONIAN OR VISCOELASTIC FLUIDS**

**Abstract**

The purpose of this thesis is to study the effect of viscous dissipation on the stability of parallel flows for Newtonian or viscoelastic fluids. The intensity of the viscous dissipation is measured the Gebhart number  $Ge$ . For Rayleigh-Bénard-Poiseuille/Couette (RBP/C) flows, in addition to the temperature gradient imposed by the boundary conditions, a vertical temperature gradient is generated by the viscous dissipation. The linear stability of the basic state is solved numerically by the Galerkin method and the shooting method. It is shown that the 3D longitudinal rolls are the most amplified mode of convection. The Rayleigh number and the wave number at the threshold of instability were determined as a function of the parameter  $\Lambda = Pe^2 Ge$  and Prandtl number  $Pr$ , where  $Pe$  is the Péclet number. It is shown that there is a particular value of  $\Lambda$  beyond which the destabilization induced by the viscous dissipation is so strong that thermal instability may develop before the hydrodynamics instability of Tollmien-Schlichting. This scenario is more plausible for very high  $Pr$ . An energy analysis is proposed to better discern the viscous dissipation effects. Weakly nonlinear stability analysis is carried out for the configuration of RBP/C flows in the limiting case of an infinite Prandtl number. Nonlinear effects favoring a supercritical bifurcation, the influence of viscous dissipation on the convection intensity and heat transfer has been analyzed.

In the case of plane Poiseuille/Couette flows confined between an adiabatic lower wall and an isothermal upper wall, the only source of instability is viscous dissipation. We have extended the existing work in the literature, which is limited to linear stability analysis, to the weakly nonlinear regime. An amplitude equation of the Landau type has been rigorously obtained. The results show that the nonlinear terms associated to viscous dissipation contribute to the emergence of a subcritical bifurcation and promote heat transfer to the upper wall for low values of Prandtl number.

Finally, the study of linear stability of RBP mixed convection flows has been extended to the Oldroyd-B viscoelastic fluids. The combined effects of the fluid elasticity, the ratio of solvent viscosity to the total viscosity and the viscous dissipation have been analysed. Compared to Newtonian fluids, new reported results indicate in particular that the viscoelasticity of the fluid makes the system more unstable. The cooperative effects of viscous dissipation and fluid elasticity can induce instability for Reynolds numbers much lower than those required for triggering instability of inertial origin.

**Keywords:** instability, mixed convection, viscoelastic fluids, viscous dissipation, linear stability, weakly non linear stability

---